HAL open science

Traitement non-linéaire du signal radar par filtrage particulaire

Jean-Charles Noyer

To cite this version:

Jean-Charles Noyer. Traitement non-linéaire du signal radar par filtrage particulaire. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1996. Français. NNT : . tel-00144042

HAL Id: tel-00144042

https://theses.hal.science/tel-00144042

Submitted on 30 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 1996

Thèse

préparée au

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité : Automatique et Traitement du Signal

par

Jean-Charles NOYER

TRAITEMENT NON-LINEAIRE DU SIGNAL RADAR PAR FILTRAGE PARTICULAIRE

Soutenue le 17 Décembre 1996 devant le jury :

A.	APPRIOU	Rapporteur
M.	CARPENTIER	
G.	FAVIER	Rapporteur
J-P.	GUILHOT	Président
J-L.	LAPEYRE	
G.	RUGET	
G.	SALUT	Directeur de thèse
A.	FRAYSSE	invité
G.	MAYNARD DE LAVALETTE	invité

Cette thèse a été préparée au LAAS-CNRS
7 Avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse Cedex 4

Rapport LAAS N° 96473

à Agnès

Avant Propos

En préambule aux travaux présentés, je voudrais remercier tous ceux qui ont une part dans l'élaboration ou l'examen de ce mémoire :

Je tiens tout d'abord à remercier Michel Carpentier, Ingénieur Général de l'Armement, Professeur ENSTA et ancien Directeur Technique de THOMSON, qui, malgré ses sollicitations multiples a trouvé le temps d'examiner mes travaux, et m'a fait l'honneur de participer à cette thèse.

Je remercie J-P. Guilhot, Professeur à l'Université Paul Sabatier et Directeur du LAMI, qui a bien voulu assurer la présidence de ce jury, malgré l'orientation acoustique de ses recherches.

Nous avons trouvé à l'ONERA, en la personne d'Alain Appriou, Chef de Division, un écho positif à ces nouvelles techniques de filtrage non-linéaire, en regrettant de ne pas avoir engagé plus tôt le dialogue avec son équipe, dont la problématique de recherche est très similaire. Je tiens aussi à le remercier pour son travail approfondi de rapporteur, dont les remarques permettront d'orienter les travaux futurs.

J'ai eu beaucoup de satisfaction à discuter avec Gérard Favier, Directeur de Recherche CNRS et Directeur de l'ISSS, qui connait bien, pour les avoir étudiés, ces problèmes de poursuite radar de cibles manœuvrantes et leurs difficultés inhérentes. Il a su de plus trouver le temps, malgré ses prenantes fonctions, d'assurer la charge de rapporteur, ce dont je lui suis reconnaissant.

Jean-Louis Lapeyre, Ingénieur en Chef de l'Armement, ex-Président de DIGILOG, connait depuis longtemps la potentialité de la méthode proposée, et a été un des premiers à croire en ses résultats. Il n'a donc pas été étonné de constater que son application au RADAR, domaine sur lequel il a longtemps travaillé, s'est faite de manière naturelle et a montré des gains significatifs de performance. Je tiens à le remercier de la confiance qu'il m'a accordée en finançant une partie de cette thèse.

Gabriel Ruget, Professeur à Orsay et détaché à THOMSON CSF a pu, malgré les faibles délais accordés, dégager des remarques très intéressantes sur l'application de cette méthode au traitement du signal RADAR, et je le remercie de la collaboration active qu'il a d'ores et déjà suscité avec sa société.

La soutenance de cette thèse ne pouvait se faire sans la participation de deux invités qui ont pris une part active dans la réussite du particulaire depuis son origine :

Guy Maynard de Lavalette, ICT au CTSN/LSA (Toulon), qui a assisté à la naissance de la méthode particulaire imaginée par Gérard Salut, a toujours témoigné de son

enthousiasme envers cette technique, ce qui a été pour moi un encouragement constant.

Alain Fraysse, Ingénieur en Chef de l'Armement et PDG de DIGISTAR, connait lui aussi depuis longtemps le filtrage particulaire, et j'ai grandement apprécié ses remarques lors de l'évolution de cette thèse, qui ne sont pas étrangères à la manière dont est construit ce manuscrit.

Gérard Salut, Directeur de Recherche au LAAS-CNRS, tient une place particulière, tout d'abord parce qu'il a assuré la difficile tache de directeur de thèse. J'ai pu profiter à son contact de ses grandes connaissance et maîtrise scientifiques (qui s'étendent d'ailleurs au delà de l'automatique). J'ai par ailleurs apprécié, durant cette thèse, son enthousiasme constant et communicatif, ainsi que ses remarquables qualités humaines.

Je n'aurais jamais effectué cette thèse sans l'entremise de Lucien Touzillier, Maître de Conférences à l'Université Paul Sabatier, qui m'a conseillé dans le choix de mon D.E.A. J'ai ensuite beaucoup apprécié d'enseigner à son contact, en tant que moniteur à l'Université. J'espère toutefois qu'il nous pardonnera de n'avoir pu, pour des raisons administratives, le faire figurer en juste place au sein de ce jury.

A ce stade de mon énumération, je tiens à ne pas oublier :

André Monin, Chargé de Recherche au LAAS et collègue de Gérard Salut, souvent à l'origine de discussions scientifiques (ou non) toujours enrichissantes et dont les conseils avisés m'ont été profitables.

Gilles Rigal, ancien étudiant de G. Salut, aujourd'hui Ingénieur chez DIGINEXT, que j'ai connu lors de sa présence au LAAS, qui a été l'explorateur initial de la méthode particulaire, et au contact duquel j'ai fait mes premières armes.

Les "brésiliens" : Marco Chamon, mon collègue de travail depuis le début, jamais avare de suggestions ni à cours de ressources, et Himilcon Carvalho en souvenir des bons moments.

Les jeunes : Vincent Teulière et Frédéric Lamole, mes remplaçants auprès de G. Salut.

Les moins jeunes : Philippe Benchimol et Laurent Plantié.

Le Chef : Jean-Marie Garcia, Chargé de Recherche au LAAS, et responsable du groupe OFP.

Je me dois d'associer ceux qui ont pris une part financière à cette entreprise :

L'Etat en me finançant pendant trois ans comme boursier MESR et moniteur de l'Enseignement Supérieur.

La société DIGILOG, en assurant la continuité de mon financement, lorsqu'il fut nécessaire.

La Direction des Constructions Navales de la Marine Nationale (Toulon), en la personne de Guy Maynard de Lavalette, dont les contrats d'étude notifiées à DIGILOG ont permis mon financement.

Je terminerai en remerciant le LAAS, en la personne de son directeur Alain Costes, pour m'avoir hébergé pendant ces années. J'ai pu apprécier la qualité et la diversité des moyens mis à disposition, exceptionnels dans un laboratoire de recherche universitaire.

Introduction

Il s'agit dans ce mémoire de montrer l'avancée techniquement possible en traitement des signaux RADAR, par une approche globale des problèmes non-linéaires que pose l'extraction optimale de l'information en présence de :

- cibles non-coopératives fortement manœuvrantes.
- faibles rapports signal/bruit.

On observe, dans tous les cas, que l'antenne proprement dite se réduit à une collection d'éléments récepteurs. C'est au calcul qu'il incombe d'optimiser le traitement des signaux reçus. La partie analogique de ce traitement, qualifié ici d'acquisition des mesures radar, est un prétraitement qui se limite à optimiser le rapport signal/bruit sur une récurrence radar élémentaire T. Durant ce bref intervalle de temps, toute cible est assimilable au paramètre position-vitesse-angle sans manifester le caractère de processus aléatoire qu'elle possède à plus long terme. C'est précisément ce long terme qui nous intéresse ici :

On sait que la prise en compte de plusieurs récurrences radar fournit par simple sommation une élévation du rapport signal/bruit proportionnelle au nombre de récurrences si la cible est stationnaire. Malheureusement, toute cible non-coopérative est aléatoire pour l'observateur et se présente a priori comme un processus stochastique. Le bruit source réside dans les aléas imprévisibles de pilotage de la cible; l'évolution résultante se manifeste à travers la dynamique du vol. L'estimation optimale dynamique requiert l'application d'un filtrage global non-linéaire, en raison du caractère fortement non-linéaire de l'équation de mesure radar I.5, d'une part, du caractère non-gaussien (aléas poissoniens) d'un pilotage de cible réaliste d'autre part.

On résout habituellement ce problème en procédant au découpage arbitraire des parties détection et estimation. En effet, l'intégration d'un certain nombre de récurrences permet de relever le rapport signal sur bruit, afin de détecter une cible lorsque le signal dépasse un certain seuil (ce qui donne lieu au calcul des probabilités de détection et de fausse alarme essentielles en détection).

Un fois la cible détectée, un extracteur (travaillant sur plusieurs récurrences) délivre des informations de position qui servent à initialiser, en bout de chaîne, un filtre linéarisé construit sur des hypothèses de modèles dynamiques.

Il est clair qu'un tel procédé est loin d'être optimal, et qu'une modélisation complète du problème de détection/estimation doit être développée. On se propose de montrer

dans ce mémoire que la prise en compte amont de modèles dynamiques ("track before detect") permet de repousser les limites en détection à des rapports S/B jamais atteints.

L'absence d'outils performants de filtrage non-linéaire a longtemps interdit de poser le problème de la sorte. L'outil de résolution proposé est une représentation particulaire de l'espace de probabilité par mesures ponctuelles aléatoires, dont la masse et le support sont conditionnés par le signal.

Développé originellement par G. Salut, le filtrage particulaire trouve dans le problème de poursuite radar de cibles manœuvrantes, un terrain propice à une comparaison significative avec les techniques classiques.

L'avantage de la méthode proposée réside en outre dans son aspect "massivement parallèle" qui permet d'envisager des applications en temps réel à un horizon proche. L'application présentée au chapitre cinq a d'ailleurs donné lieu à une mise en œuvre temps-réel sur station de travail, pour le CTSN-LSA (DCN, Toulon).

Le présent mémoire s'articule en 5 chapitres :

Le traitement particulaire du signal issu d'un radar (monopulse ou réseau) nécessite une modélisation précise des éléments qui le constituent. On s'attache dans le premier chapitre à en exposer les principaux points, en vérifiant à chaque étape l'optimalité des traitements effectués. On termine par ailleurs ce chapitre par des considérations sur les performances optimales des mesures effectuées : ceci sert de base aux comparaisons entre la méthode particulaire et une idéalisation des méthodes usuelles.

Comme il a été précisé plus haut, le second aspect du problème de poursuite repose sur le mouvement de la cible. L'obtention de bonnes performances en estimation, repose sur une modélisation la plus fidèle possible de la dynamique du mobile, ainsi que de ses aléas. Ceci fait donc l'objet du deuxième chapitre qui passe en revue quelques modèles typiques de poursuite (modèle de Singer, loi de navigation proportionnelle, ...), que l'on utilisera par la suite.

La résolution précise du problème ainsi posé ne peut se faire si l'on ne dispose pas d'un outil non-linéaire de résolution. La méthode particulaire est exposée dans le chapitre trois : on détaille notamment les diverses techniques applicables suivant les cas.

Le chapitre quatre présente les résultats de simulations pour le traitement des données brutes dans les cas 1D et 2D, en comparant la performance des techniques classiques à celle du filtre particulaire.

Le cinquième et dernier chapitre constitue en quelque sorte un cas particulier du précédent, car le capteur est modélisé comme une "boite noire" délivrant des informations de position. Il reste cependant intéressant par le fait que l'on aborde généralement dans la littérature, le problème de poursuite de cible de la manière suivante (pour les raisons évoquées plus haut).

Table des matières

Introduction **5**

I Introduction à la problématique radar **7**
- I.1 Chaîne d'acquisition des mesures (traitement du signal continu) 7
  - I.1.1 Rappel sur le filtre adapté continu 9
  - I.1.2 Remarque sur la période d'échantillonnage 10
- I.2 Modélisation des mesures radiales 11
- I.3 Modélisation des mesures angulaires 13
  - I.3.1 Principe général du monopulse (de phase) 13
  - I.3.2 Extension à l'antenne réseau 16
  - I.3.3 Equation des mesures 18
- I.4 Analyse des erreurs de mesure 19
  - I.4.1 Précision optimale sur la distance radiale 19
  - I.4.2 Précision optimale sur l'estimation Doppler 21
  - I.4.3 Précision optimale sur l'estimation angulaire dans le cas d'antennes monopulse et réseau 21
  - I.4.4 Synthèse 24

II Modélisation de la dynamique des cibles **25**
- II.1 Equations générales à 9 variables d'états de la mécanique du vol 25
- II.2 Modèle aérodynamique de Singer 28
- II.3 Modèle proposé pour la poursuite avion 29
- II.4 Lois de navigation proportionnelle (missile) 31

III Filtrage non-linéaire et solution particulaire **35**
- III.1 Rappels sur la théorie de l'estimation dynamique 36
- III.2 Approche particulaire des équations du filtrage 38
  - III.2.1 Principe 38
  - III.2.2 Conditions de convergence de l'estimateur particulaire 42
  - III.2.3 Solution particulaire a priori du filtrage (processus stables) . . . 44
  - III.2.4 Algorithme n-conditionnel (processus instables) 47
  - III.2.5 Extensions de l'algorithme 51

IV Poursuite de cibles en données brutes **55**
- IV.1 Hypothèses 55
- IV.2 Traitement l'information radiale seule (1D) 56

IV.2.1 Position du problème 56
IV.2.2 Solution "usuelle" 58
IV.2.3 Filtre particulaire (globalement optimal) 60
IV.2.4 Résultats de simulation 63
IV.3 Traitement de l'information radiale avec Doppler (1D) 75
IV.3.1 Position du problème 75
IV.3.2 Solution "usuelle" 75
IV.3.3 Filtre particulaire 76
IV.3.4 Résultats de simulation 83
IV.4 Traitement des informations radiale/angulaire (monopulse,2D) 90
IV.4.1 Position du problème 90
IV.4.2 Solution "usuelle" 93
IV.4.3 Solution particulaire 94
IV.4.4 Résultats de simulation 98
IV.5 Traitements des informations radiale/angulaire (antenne réseau) 115
IV.5.1 Position du problème 115
IV.5.2 Solution "usuelle" 116
IV.5.3 Solution Particulaire 116
IV.5.4 Résultats de simulation 116
IV.6 Extension à un modèle non-linéaire de dynamique 127
IV.6.1 Position du problème 127
IV.6.2 Solution particulaire et solution "usuelle" 128
IV.6.3 Résultats de simulation 129
IV.7 Modélisation de "l'effet miroir" 135
IV.7.1 Position du problème 135
IV.7.2 Solution "usuelle" 136
IV.7.3 Solution particulaire 136
IV.7.4 Résultats de Simulation 136
IV.8 Conclusion 139

V Poursuite de cibles en données prétraitées **141**
V.1 Position du problème 141
V.2 Cas du modèle de poursuite avion 143
V.2.1 Modèle de dynamique et de capteur associé 143
V.2.2 Solution "usuelle" linéarisée 146
V.2.3 Solution particulaire 147
V.2.4 Résultats de simulation 148
V.3 Loi de navigation proportionnelle (missile) 150
V.3.1 Modèle de dynamique et capteur associé 150
V.3.2 Solution "usuelle" 151
V.3.3 Solution particulaire 153
V.3.4 Résultats de simulation 153
V.4 Conclusion 157

Conclusion **155**

Chapitre I

Introduction à la problématique radar

Le traitement optimal visé des mesures radar suppose la prise en compte rigoureuse de tous les éléments constitutifs de ces mesures. A ce titre, les étages d'entrée de la chaîne de réception, depuis l'antenne jusqu'à l'échantillonnage destiné au calculateur, sont un passage obligé qu'il convient de garder en tête. Nous nous proposons dans ce chapitre d'en résumer les aspects fonctionnels nécessaires à la bonne interprétation de l'équation des mesures qui en découle.

Le traitement optimal du problème de poursuite radar nécessite en outre une modélisation de la dynamique des cibles poursuivies qui est étudiée dans le chapitre suivant.

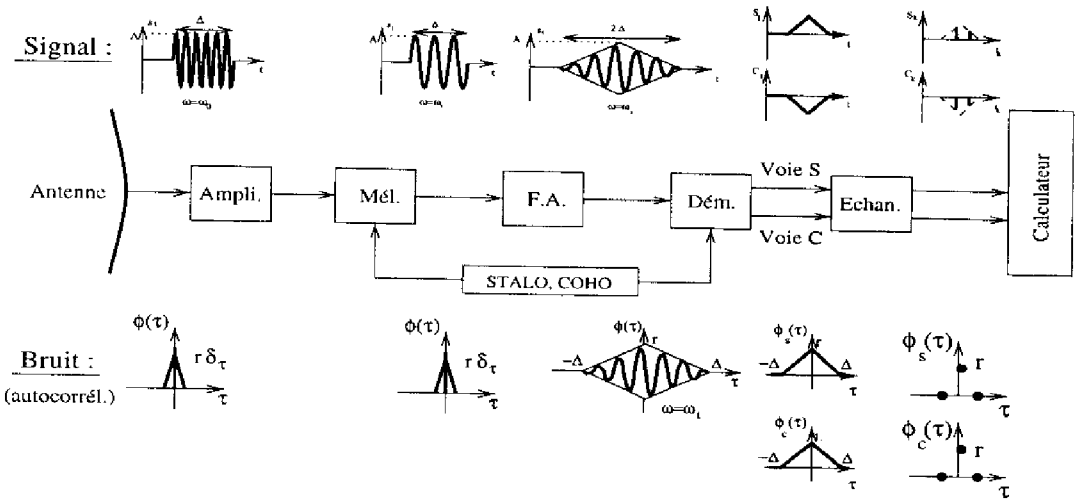
On détaille ici la chaîne d'acquisition, et les principaux traitements appliqués au signal reçu (filtre adapté, échantillonnage, ...), en s'assurant à chaque étape de l'optimalité de ces opérations.

La seconde étape consiste à modéliser l'onde reçue en sortie de filtre adapté, dans le cas radial tout d'abord, puis dans le cas angulaire en précisant au préalable le principe général de fonctionnement des antennes monopulse et réseau.

Le dernier paragraphe présente alors les performances optimales de la détermination de la distance radiale (temps d'aller-retour), de la vitesse radiale (effet Doppler), et de l'azimut (déphasage relatif des récepteurs), afin de comparer ultérieurement les techniques usuelles à la solution particulaire proposée.

I.1 Chaîne d'acquisition des mesures (traitement du signal continu)

On a schématisé ci-après le bloc-diagramme de la chaîne d'acquisition générale d'un radar moderne. Suivant les cas, certains éléments peuvent être absents (ex : radar sans porteuse), ce qui en fait de simples cas particuliers.



On distingue, dans l'ordre:

- **L'amplificateur d'entrée** : C'est un amplificateur hyperfréquence de large bande et de bruit aussi faible que possible. En fait, ce bruit physiquement inévitable est assimilable au bruit blanc thermique et s'ajoute au signal utile d'un bout à l'autre de la chaîne. C'est la raison pour laquelle on a représenté leurs caractéristiques séparément en haut et en bas de la figure, tout au long de la chaîne d'acquisition des mesures.

- **Le mélangeur** : Il effectue un décalage de la fréquence porteuse vers une fréquence intermédiaire, par multiplication avec un oscillateur stable (Cf. abréviations de la figure). Cette fréquence intermédiaire, bien que non strictement nécessaire au plan des principes théoriques, s'avère utile à la réalisation technologique de l'étape suivante. Il peut y avoir plusieurs étages de fréquence intermédiaire.

- **Le filtre adapté** : Il a pour but de laisser entrer le moins de bruit blanc possible, tout en respectant la bande spectrale du signal utile, d'où son nom. Sous forme de corrélateur au signal utile (Cf paragraphe I.1.1), c'est un traitement optimal du signal continu limité au court terme de la récurrence radar. A noter que l'objet du traitement optimal global est précisément de réduire encore le bruit en prenant en compte les nombreuses récurrences radar, conjointement aux non-stationnarités et non-linéarités des mouvements de cible, par voie numérique.

- **Le démodulateur** : Il opère le décalage vers zéro de la fréquence intermédiaire, permettant ainsi l'obtention de l'enveloppe utile du signal émis. Cela s'effectue par multiplication avec un oscillateur stable, cohérent ou non suivant le type envisagé dans la classification radar. La sortie est bi-voie et délivre les deux composantes en quadrature permettant, si c'est le cas, l'exploitation du Doppler.

- **L'échantillonneur numérique** : L'échantillonnage numérique a un double impératif. D'une part, il doit fournir au calculateur des mesures, sous forme numérique, à une période suffisante au respect du signal utile. D'autre part, cette

période d'échantillonnage est telle que le bruit additif reste blanc (Cf paragraphe I.1.2).

I.1.1 Rappel sur le filtre adapté continu

On reçoit durant un temps T, un signal s_t multiplié par un facteur A, et perturbé par un bruit (blanc) additif sous la forme :

$$y_t = A\, s_t + b_t$$

On définit le filtre adapté continu comme étant celui qui délivre une sortie dont le rapport de puissance signal/bruit est maximal. On montre aisément [13, 16, 76], qu'un tel critère a pour solution, au bout du temps T, le corrélateur :

$$C_T(0) = \int_0^T y_t\, s_t\, dt \tag{I.1}$$

S'agissant, dans le problème radar, d'un signal-enveloppe retardé $s_t = h_{t-\tau}$, on obtient pour une récurrence radar de longueur T :

$$C_T(\tau) = \int_0^T y_t\, h_{t-\tau}\, dt \tag{I.2}$$

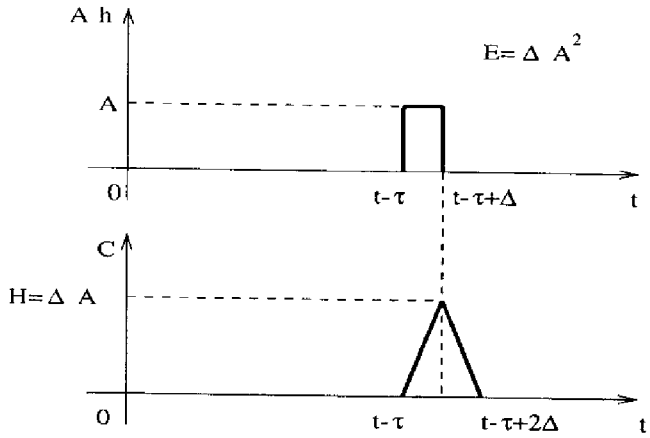
On remarque que $C_T(\tau)$ peut être considéré comme la réponse à l'instant T=τ d'un filtre linéaire continu par rapport au temps τ, et de réponse impulsionnelle $h^*_{\tau-t} = h_{t-\tau}$:

$$C_\tau(\tau) = \int_0^\tau y_t\, h_{t-\tau}\, dt \qquad 0 \leq \tau \leq T \tag{I.3}$$

De tels filtres peuvent être réalisés de façon précise par des dispositifs piézo-électriques à ondes de surface [30], lorsque l'on désire les meilleures performances.

Pour un signal sous forme d'impulsion rectangulaire, ces filtres ont un comportement voisin des simples passe-bandes, qui lui sont souvent substitués en pratique, au prix d'une faible perte d'optimalité du rapport signal/bruit (de l'ordre de 1dB pour un signal rectangulaire).

Impulsion classique : Soit h_t une brève impulsion rectangulaire de récurrence T (h_t=1 pour t $\in]0, \Delta]$ et h_t=0 pour t $\in]\Delta, T]$). Dans ce cas, la réponse du filtre adapté au signal radar retardé A $h_{t-\tau}$ est représentée par :



On note que la fonction de transfert $H^\star(\omega)$ correspondant au filtre adapté de réponse impulsionnelle $h^\star$ rectangulaire est de type sinus cardinal (dont l'approximation la plus simple est un passe-bande autour de zéro).

I.1.2 Remarque sur la période d'échantillonnage

Comme on l'a déjà signalé, le filtre adapté continu colore en conséquence le bruit blanc additif présent à son entrée. Il convient donc d'en tenir compte à sa sortie, en vue de l'échantillonnage numérique.

Si $H^\star(\omega)$ est la fonction de transfert du filtre adapté, le spectre du bruit additif présent à la sortie est $|H^\star(\omega)|^2\sigma^2$. Son autocorrélation est évidemment sa transformée de Fourier qui n'est autre que la réponse impulsionnelle du corrélateur.

Dans l'exemple de réponse impulsionnelle rectangulaire donné ci-dessous, les caractéristiques du bruit résultant, avant échantillonnage sont donc :

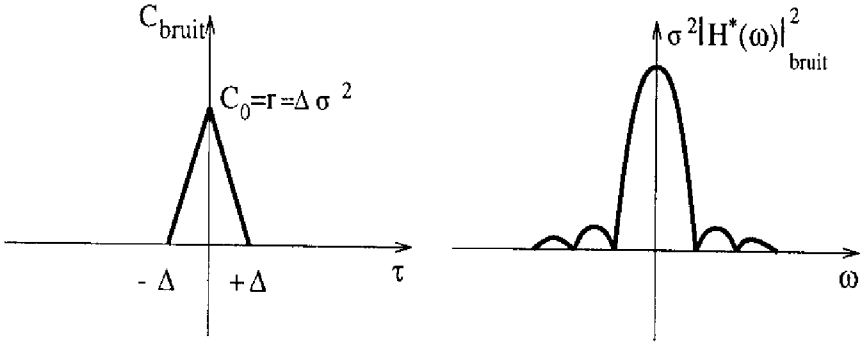


Figure I.1: Caractéristiques du bruit à la sortie du filtre adapté exact

Il est clair, dans ce cas, que l'autocorrélation du bruit résultant est nulle au-delà du temps Δ. Il suffit donc de choisir une période d'échantillonnage supérieure ou égale à cette valeur Δ (largeur d'impulsion émise) pour que le bruit présent dans les mesures échantillonnées soit blanc (et de densité spectrale $\sigma^2\Delta = r$).

Dans le cas où le filtre adapté est approché par un passe-bande autour de zéro idéal, il faut noter que la situation est inversée : le spectre étant rectangulaire, l'autocorrélation résultante est en sinus cardinal. Cela impose que la période d'échantillonnage soit dans ce cas strictement égale à la valeur de Δ (largeur d'impulsion émise).

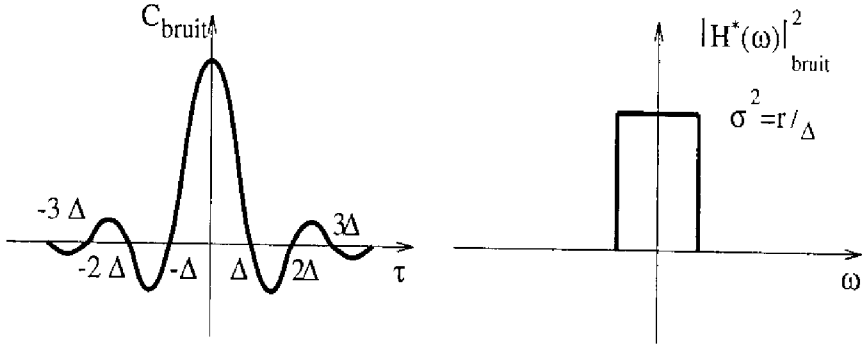


Figure I.2: Caractéristiques du bruit à la sortie du filtre adapté passe-bande

La période d'échantillonnage égale à la largeur d'impulsion émise est donc la règle. Dans le cas du filtre adapté exact, cela fournit deux valeurs de mesure du signal utile à sa sortie puisque celle-ci est la réponse triangulaire du corrélateur dont le support est deux fois celui de l'impulsion rectangulaire originellement émise. D'après ce qui précède, le rapport signal/bruit n'est autre que celui entre l'énergie efficace de cette impulsion et la densité de puissance spectrale (σ^2), soit :

$$S/B = \frac{E}{\sigma^2} = \frac{H^2}{2r} \tag{I.4}$$

Nous ne reviendrons pas sur ce schéma de principe : la chaîne de traitement amont est constituée de la démodulation du signal, du passage par un filtre adapté au signal, et enfin de l'échantillonnage à une cadence telle que le bruit de mesure reste blanc (soit dans le cas d'un signal à enveloppe rectangulaire, de largeur Δ, un échantillonnage de période Δ).

I.2 Modélisation des mesures radiales

En vertu de ce qui précède, tout élément récepteur radar possède une équation de mesure qui s'écrit de façon générale, après démodulation, sous la forme d'une amplitude complexe :

$$Y_t = \underbrace{K(\vec{D}_0, \vec{D}_t)}_{\text{Antenne}} \overbrace{K_0 e^{j\varphi_0}}^{\text{Emission}} \underbrace{\frac{1}{D_t^2}}_{\text{Atténuation}} \overbrace{\rho e^{j\varphi}}^{\text{Réflexion}} \underbrace{e^{-j\omega_0 \frac{2D_t}{c}}}_{\text{Doppler}} \overbrace{h(t - \frac{2D_t}{c})}^{\text{Retard}} + \nu_t \tag{I.5}$$

où
$$\begin{cases} K(\vec{D}_0, \vec{D}_t) \ : \text{ diagramme angulaire de l'élément d'antenne} \\ \vec{D}_t \ : \text{ rayon vecteur radar-cible } \ (D_t = \|\vec{D}_t\|) \\ K_0 e^{j\varphi_0} \ : \text{ coefficient d'émission} \\ \rho e^{j\varphi} \ : \text{ coefficient de réflexion} \\ h(t) \ : \text{ enveloppe après réception adaptée continue} \\ \omega_0 \ : \text{ pulsation du signal émis} \\ \nu_t \ : \text{ bruit additif de réception} \end{cases}$$

L'équation I.5 est établie de manière simple : le signal est émis par l'antenne avec un coefficient $K_0 e^{j\varphi_0}$, se propage ensuite vers la cible avec une atténuation d'amplitude en $1/D_t$, se réfléchit sur la cible de coefficient de réflexion complexe $\rho e^{j\varphi}$. Le signal est ensuite re-rayonné vers le radar avec une atténuation d'amplitude $1/D_t$ et un retard dû au temps d'aller-retour $2D_t/c$.

Sous forme de bilan de puissance et non d'amplitude complexe, on retrouve aisément l'équation familière aux radaristes [2, 16] en élevant au carré la norme de I.5 :

$$\boxed{S/B \ \sim \ \frac{P_e G_e G_r \sigma'}{D_t^4 B}} \tag{I.6}$$

avec

$$\begin{cases} P_e \ : \text{ Puissance émise} \\ G_e \ : \text{ Gain à l'émission} \\ G_r \ : \text{ Gain à la réception} \\ \sigma' \ : \text{ S.E.R.} \\ B \ : \text{ Puissance du bruit} \end{cases}$$

Nous constatons que la S.E.R. apparaît directement dans ce bilan de puissance. Le coefficient de réflexion complexe introduit dans l'équation I.15 est en fait un coefficient d'amplitude de réflexion. La S.E.R. σ' est donc : $\sigma' \ \equiv \rho^2$.

Remarques : On notera que le cas important du radar académique (sans porteuse) correspond à la situation particulière : $\omega_0 = \varphi_0 = \varphi = 0$.
Par ailleurs, les divers types d'antenne ne se distinguent que par la forme de K, et le nombre d'éléments récepteurs (ex : radars monopulse).

Concernant l'exploitation de l'information radiale, une classification très simple suffit à distinguer les cas selon lesquels l'équation de mesure se particularise de façon spécifique.

On peut notamment distinguer :

- **Radar à porteuse non-cohérente :**
  - en phase seulement (φ_0 incohérent entre récurrences).
  - en phase/fréquence (φ_0, ω_0 incohérents).
- **Radar à porteuse cohérente** (φ_0, ω_0 constants) :
  - à impulsions classiques (M.T.I. et Pulse-Doppler).
  - à compression d'impulsions, ou à modulation continue.

Il va de soi que l'on ne s'intéresse pas ici aux radars purement Doppler qui ignorent le paramètre distance.

Une telle classification appelle un commentaire : il n'y apparaît aucun des termes usités généralement à cet endroit (antennes classiques, technique monopulse, balayage électronique,etc ...). En effet, ceux-ci correspondent à des modes d'utilisation concernant l'information angulaire, mais ne changent pas l'équation de mesure I.5 de l'élément récepteur de base :

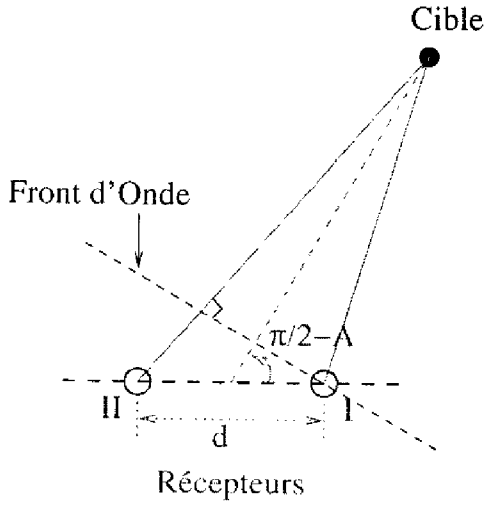
- Dans le cas d'une antenne classique, l'équation I.5 représente à elle seule le signal d'antenne, où $K(\vec{D}_0, \vec{D}_t)$ est son diagramme angulaire.
- S'il s'agit de techniques monopulse, l'équation I.5 est vectorielle et $K(\vec{D}_0, \vec{D}_t)$ est le vecteur des diagrammes K^i de chaque cornet récepteur.
- Dans le cas d'une antenne réseau, le vecteur K est simplement de dimension plus importante : il y a autant de diagrammes élémentaires (ex : cardioïde) que d'éléments récepteurs sur l'antenne.

I.3 Modélisation des mesures angulaires

I.3.1 Principe général du monopulse (de phase)

Nous présentons ici le traitement particulaire de l'information angulaire et radiale pour un radar monopulse de phase élémentaire : la localisation angulaire de la cible est extraite de l'information de phase contenue dans le signal reçu. Il est bien connu que les autres formes d'exploitation angulaire (monopulse d'amplitude, de phase amplitude) se déduisent toutes de ce schéma élémentaire.

Le modèle monopulse choisi est constitué d'un doublet (ou multiplet pour l'antenne-réseau), comme représenté sur le schéma ci-dessous :



Chaque antenne élémentaire, appelée "cornet" dans ce qui suit, est supposée ponctuelle et isotrope, sans perte de généralité puisque tout diagramme de directivité s'introduit explicitement dans l'équation I.5, sans changement.

La position angulaire de la cible est extraite de la différence de phase entre les signaux reçus par les cornets I et II. On peut en effet montrer [2, 16] que ce déphasage s'exprime simplement, la distance de la cible étant grande vis-à-vis de d :

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda}\sin A = \varphi_I - \varphi_{II} \tag{I.7}$$

où d est la distance entre les cornets et λ la longueur d'onde du signal émis.

Remarque : Cette relation est établie sous l'hypothèse de cible suffisamment éloignée du radar, et telle que l'on puisse considérer plane, l'onde reçue par l'antenne (condition de Fraunhofer : $d^2/(\lambda D) \ll 1$).

Ceci est à la base de problèmes bien connus en poursuite radar, comme le phénomène de glint. En effet, dès que l'onde reçue par le radar n'est plus plane, l'orientation de l'antenne suivant le front d'onde peut donner des aberrations dans la localisation angulaire de l'ordre de la largeur du lobe d'antenne. Ce phénomène se produit notamment lorsque la cible observée est multiponctuelle, et la composition des contributions de chaque point donne une onde qui n'est généralement pas plane.

Le phénomène de glint, constitue en fait l'interface entre le traitement ponctuel présenté ici et l'imagerie radar, qui nécessite de tenir compte de l'aspect multiponctuel de la cible.

Résolution angulaire : Un paramètre important pour les radars à formation de voies somme et différence, est la résolution angulaire δA qui constitue la largeur à 3dB du lobe principal du diagramme de la voie somme.

On montre [2, 16, 73] que dans le cas d'une antenne à ouverture angulaire de largeur d :

$$\delta A \simeq 0.88\frac{\lambda}{d}$$

Dans le cas de l'antenne monopulse présentée ici :

$$\boxed{\delta A = \frac{\lambda}{2d}} \tag{I.8}$$

Ce paramètre intervient notamment, comme nous le montrerons plus loin, dans la détermination de l'écart-type d'erreur angulaire.

L'avantage de la technique monopulse réside dans la possibilité de déterminer la position de la cible sur une seule impulsion, ou sur un groupement d'impulsions, et consiste essentiellement à remarquer que la direction recherchée est celle du maximum de puissance reçue, en procédant classiquement comme suit :

On modélise le signal reçu sur chaque récepteur élémentaire (en absence de bruit), en prenant comme origine des phases le centre du doublet :

$$\begin{cases} S_I = he^{j(\omega_0 t + \frac{\Delta\varphi}{2})} \\ S_{II} = he^{j(\omega_0 t - \frac{\Delta\varphi}{2})} \end{cases} \tag{I.9}$$

On appelle "voie somme" $\Sigma(A)$ la somme des signaux captés par les deux récepteurs, et "voie différence" $\Delta(A)$ la différence de ces deux signaux.

Le procédé monopulse consiste à rechercher la direction du maximum de puissance reçue, c'est-à-dire le maximum de $|\Sigma(A)|^2$.

En poursuite, on se trouve déjà au voisinage du maximum. On peut donc effectuer une approximation locale de la dérivée de $|\Sigma|^2$ qui détermine le maximum :

$$\frac{\partial}{\partial A}|\Sigma(A)|^2 = 0$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A}|\Sigma(A)|^2 &= \frac{\partial}{\partial A}\Sigma(A)\Sigma(A)^* = \Sigma(A)^*\frac{\partial\Sigma(A)}{\partial A} + \Sigma(A)\frac{\partial\Sigma(A)^*}{\partial A} \\ &= 2\mathcal{R}e\left[\Sigma(A)\frac{\partial\Sigma(A)^*}{\partial A}\right] \end{aligned}$$

On montre qu'au voisinage de l'axe :

$$\frac{\partial\Sigma(A)}{\partial A} \simeq \frac{\Sigma(A+dA) - \Sigma(A)}{dA} \simeq \Delta(A)$$

En utilisant la relation précédente, on déduit la condition à réaliser pour déterminer la direction de la cible :

$$\mathcal{R}e[\Sigma(A)\Delta(A)^*] = 0 \tag{I.10}$$

où $\mathcal{R}e$ est la partie réelle.

On calcule ensuite l'écartométrie e(A) qui donne la correction angulaire à apporter sur l'angle courant A, par la relation :

$$e(A) \;=\; k\frac{A}{\delta A} \quad \text{quand } A \simeq 0$$

avec k, la pente d'écartométrie angulaire.
On montre [43] :

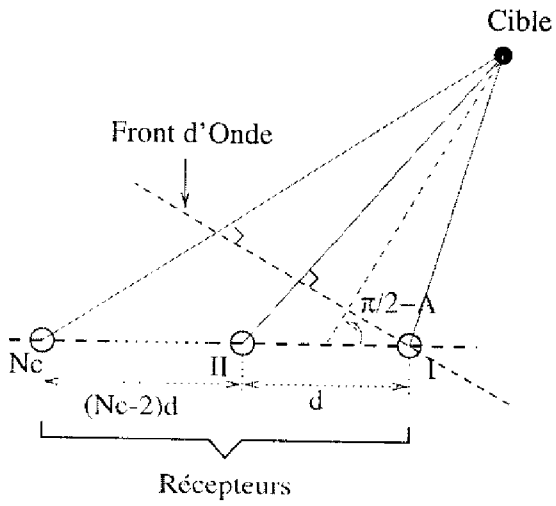
$$\boxed{e(A) \;\cong\; \mathcal{R}e\left[\frac{\Delta(A)}{\Sigma(A)}\right] \;=\; \frac{\mathcal{R}e[\Sigma(A)\Delta(A)^{\star}]}{|\Sigma(A)|^2}} \tag{I.11}$$

Remarque : En fait, le traitement monopulse consistant à rechercher la direction qui maximise la puissance reçue, revient à orienter l'axe d'antenne selon la normale (locale) au front d'onde rayonné par la cible.

I.3.2 Extension à l'antenne réseau

Vu comme précédemment, l'antenne monopulse constitue un cas particulier à deux cornets récepteurs, de l'antenne réseau. En effet, l'antenne réseau fonctionne sur le même principe : l'information angulaire est contenue dans la différence de phase entre deux cornets successifs par la relation I.7.

Le schéma de principe est donc le suivant :



avec

$$\Delta\varphi \;=\; 2\pi\frac{d}{\lambda}\sin A \;=\; \varphi_{(N-1)} - \varphi_N \quad \text{pour } N = II, \ldots, N_c \tag{I.12}$$

On peut se ramener au doublet, en sommant séparément les deux moitiés de l'antenne réseau [43].

Remarque sur les lobes d'ambiguïté et secondaires : Il est important de représenter le diagramme de la voie somme, car il apporte un certain nombre d'informations sur le comportement de l'antenne que composent la somme des N_c récepteurs.

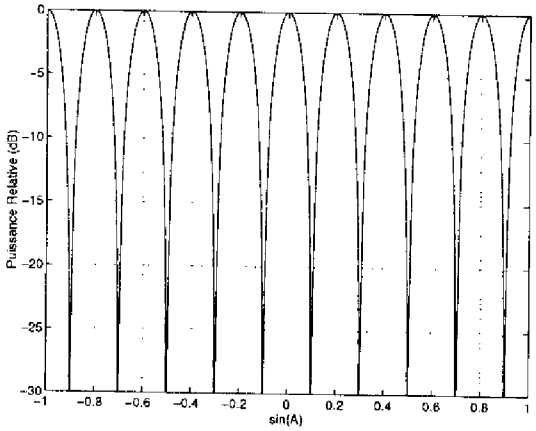
On montre [47, 73] que, pour une antenne réseau à N_c cornets ($N_c \geq 2$), le diagramme de la voie somme est proportionnel à la norme au carré du facteur de réseau R(A) :

$$\boxed{R(A) = \frac{\sin(N_c \Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)}} \tag{I.13}$$

On remarque dans les relations I.7, I.12 qu'une manière d'augmenter la sensibilité aux variations de phase est d'augmenter le rapport d/λ.

Il apparaît alors dans le diagramme d'antenne des lobes d'ambiguïté (périodiques) que l'on peut en partie éliminer grâce à la directivité de l'antenne (supposée ici omnidirectionnelle).

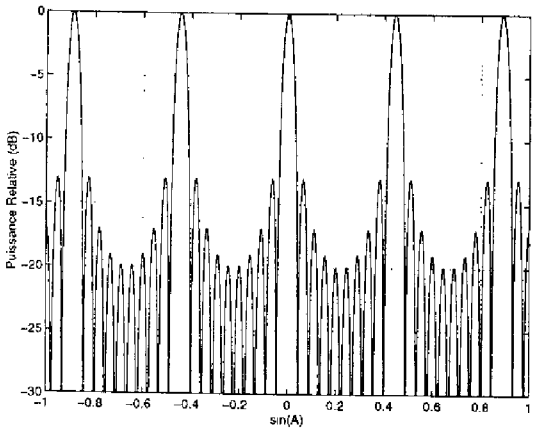
A titre illustratif nous présentons le diagramme de la voie Σ pour une antenne monopulse, avec un écartement égal à $d = \frac{10\lambda}{2}$:



Le lobe centré sur 0 constitue le lobe principal, et les autres lobes de périodicité arcsin(0.2) sont les lobes d'ambiguïté. Leur absence est garantie par la relation $d \leq \lambda$.

Les lobes d'ambiguïté ne doivent cependant pas être confondus avec les lobes dits "secondaires" qui sont induits notamment par la géométrie de l'antenne et sont à un niveau de puissance relative (au lobe principal) plus faible. Les lobes secondaires n'apparaissent qu'à partir de trois éléments et donc n'existent pas dans le cas monopulse idéalisé que nous avons choisi de traiter. Le radar monopulse présente toutefois en pratique des lobes secondaires que l'on cherche à minimiser.

Nous représentons ci-dessous le diagramme angulaire de la voie Σ d'une antenne réseau à 10 éléments, distants de $4.5\lambda/2$ (réseau lacunaire), qui met en évidence les deux phénomènes.



Remarque :

On montre [49] qu'en intervenant sur la loi d'éclairement des éléments de l'antenne (supposée ici uniforme), on intervient sur les lobes secondaires (fenêtres de Hamming, Blackman, ...).

Résolution angulaire : Dans le cas de l'antenne réseau présentée ici, la détermination précise de la résolution angulaire δA est plus délicate. On montre [32, 35] que, pour $N_c > 7$:

$$\boxed{\delta A \simeq \arcsin\left(\frac{0.8858\lambda}{N_c d}\right)} \tag{I.14}$$

Conclusion : En résumé, les caractéristiques des radars de poursuite à voies somme et différence, sont déterminés par quelques paramètres typiques dont notamment la résolution angulaire δA, le rapport signal/bruit (S/B) de la voie somme, ainsi que la pente k d'écartométrie angulaire.

I.3.3 Equation des mesures

On réécrit l'équation cohérente du capteur radar pour les antennes monopulse et réseau :

$$\boxed{Y_t^n = K(\vec{D}_0, \vec{D}_t)\ K_0 e^{j\varphi_0}\ \frac{1}{D_t^2}\ \rho e^{j\varphi} e^{-j\omega_0 \frac{2D_t}{c}}\ h(t - \frac{2D_t}{c})\ e^{-j(n-1)\Delta\varphi} + \ \nu_t} \tag{I.15}$$

où $(Y_t^n)_{n=(I,II,\ldots,N_c)}$ constitue le vecteur de mesure du cornet n.

Rappelons qu'il est ici supposé, sans perte de généralité, que les cornets (monopulse ou réseau) sont omni-directionnels, soit :

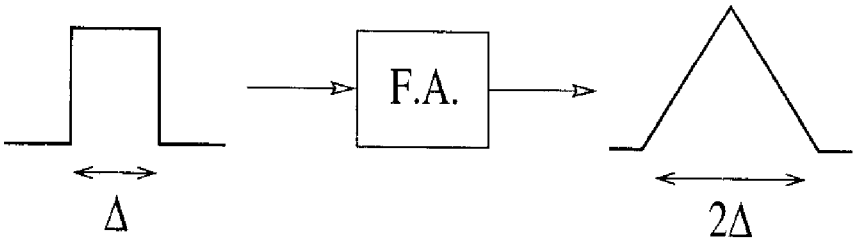
$$K(\vec{D}_0, \vec{D}_t) \ = \ 1$$

I.4 Analyse des erreurs de mesure

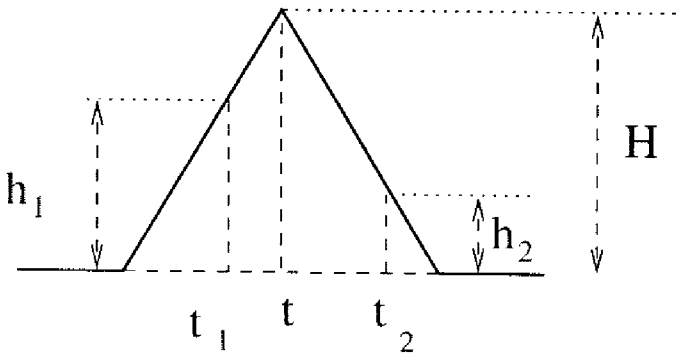
Afin de comparer de la manière la plus objective possible, les techniques particulaire et usuelle de traitement de l'information radar brute (en sortie d'échantillonneur/convertisseur), nous détaillons ci-dessous les écarts-types d'erreur optimaux sur l'évaluation des distance et vitesse radiales, ainsi que l'angle, qui vont servir de base aux algorithmes classiques mis en œuvre.

I.4.1 Précision optimale sur la distance radiale

On suppose ici, que le signal reçu est parfaitement rectangulaire de longueur Δ, et que l'on est en mesure de réaliser le filtre adapté. Le signal en sortie de filtre adapté est donc triangulaire (Cf paragraphe I.1) de largeur 2Δ, comme schématisé ci-dessous :



Pour des raisons de blancheur de bruit (Cf I.1.2), la cadence d'échantillonnage de $1/\Delta$ fournit deux points sur le signal triangulaire :



où t_1 et t_2 sont les deux instants d'échantillonnage, et h_1, h_2 les deux valeurs du signal échantillonné. Le triangle a pour hauteur H.

On cherche à estimer la position $\hat{t}$ du maximum du triangle, à partir des deux hauteurs h_1, et h_2 échantillonnées. Les équations des droites régissant ces hauteurs s'écrivent :

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{H}{\Delta}\,\delta t + H \\ h_2 = -\dfrac{H}{\Delta}\,\delta t \end{cases}$$

avec $\delta t = t_1 - t$, et en remarquant que $t_2 = t_1 + \Delta$.

La mesure de ces hauteurs est dégradée par un bruit gaussien de moyenne nulle, et de variance σ. Les équations de mesure des hauteurs se réécrivent :

$$\begin{cases} y^1 = h_1 + \nu^1 = \dfrac{H}{\Delta}\,\delta t + H + \nu^1 \\ y^2 = h_2 + \nu^2 = -\dfrac{H}{\Delta}\,\delta t + \nu^2 \end{cases}$$

avec $\nu^1, \nu^2 \sim \mathcal{N}_{(0,\sigma)}$.

On peut alors écrire ce système sous forme matricielle :

$$Y^c = \begin{pmatrix} y^1 - H \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H/\Delta \\ -H/\Delta \end{pmatrix} \delta t + \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \nu^2 \end{pmatrix} = \mathcal{H}\delta t + \nu$$

L'estimation optimale locale de δt par la méthode des moindres carrés donne :

$$\widehat{\delta t} = \left(\mathcal{H}^T R^{-1} \mathcal{H}\right)^{-1} \mathcal{H}^T R^{-1} Y^c \tag{I.16}$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

La variance de l'erreur d'estimation par moindres carrés est égale à :

$$\widetilde{P} = \left(\mathcal{H}^T R^{-1} \mathcal{H}\right)^{-1} = \frac{\Delta^2}{2H^2/\sigma^2} \tag{I.17}$$

Donc, l'écart-type d'erreur d'estimation du temps d'aller-retour dans le cas discret est :

$$\boxed{\sigma_\tau = \frac{\Delta}{2\sqrt{S/B}}} \tag{I.18}$$

Remarques :

1. Pour obtenir ce résultat, nous avons supposé que le filtre adapté est idéal, et que l'on a détecté la cible, c'est-à-dire que l'on connaît les instants d'arrivée du signal.

2. Dans le cas des antennes réseau et monopulse, le rapport signal/bruit considéré est celui de la voie somme.

3. On rappelle que dans le cas de mesure continu, Woodward a montré que pour un filtre adapté ayant le même spectre que le signal, sur la bande considérée $(1.2/\Delta)$:

$$\sigma_\tau \simeq \frac{\Delta}{1.8\sqrt{2S/B}} \tag{I.19}$$

Du calcul sur l'écart-type de l'erreur d'estimation du temps d'aller-retour, on déduit immédiatement l'écart-type de l'erreur d'estimation de la distance radiale de la cible :

$$\boxed{\sigma_D = \frac{c\,\Delta}{4\sqrt{S/B}}} \tag{I.20}$$

I.4.2 Précision optimale sur l'estimation Doppler

Comme pour le cas de l'estimation de la distance radiale, on cherche à déterminer, par transformée de Fourier, la fréquence d'un signal sinusoïdal échantillonné à une fréquence $1/\Delta$, à partir de N échantillons de celui-ci.

Dans le cas discret, la durée effective du signal est la durée d'intégration cohérente :

$$\alpha = N\,T_r = T$$

L'écart-type d'erreur d'estimation de la fréquence est [44] :

$$\boxed{\sigma_\nu = \frac{1}{T\sqrt{2S/B}}}$$

Or la fréquence Doppler s'écrit $\nu_D = \frac{2V_D}{c}\nu_0 = \frac{2V_D}{\lambda_0}$, avec ν_0 fréquence d'émission, λ_0 longueur d'onde du signal émis et V_D vitesse radiale.

L'écart-type d'erreur d'estimation de la vitesse radiale s'écrit :

$$\boxed{\sigma_{V_D} = \frac{\lambda_0}{2T\sqrt{2S/B}}} \tag{I.21}$$

où S/B est le rapport signal sur bruit (de la voie Σ dans les cas monopulse et réseau).

I.4.3 Précision optimale sur l'estimation angulaire dans le cas d'antennes monopulse et réseau

I.4.3.1 Antenne à récepteur étendu

Un résultat important donne les précisions optimales (écart-type de l'erreur d'estimation) que l'on doit attendre sur l'estimation de l'azimut dans le cas d'une antenne [73], pour un rapport signal/bruit donné :

$$\sigma_A = \frac{\delta A}{\gamma\sqrt{2S/B}} \tag{I.22}$$

où δA est la résolution angulaire de l'antenne, et γ la largeur effective de l'ouverture, telle que :

$$\gamma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi x)^2 |a(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |a(x)|^2 dx} \tag{I.23}$$

a(x) est la distribution d'amplitude de l'ouverture.

Dans le cas d'une ouverture rectangulaire de largeur d, et d'un éclairement uniforme, on montre :

$$\gamma = \frac{\pi d}{\sqrt{3}}$$

Nous avons vu que largeur du lobe à 3dB d'une telle ouverture est $\delta A = 0.88\lambda/d$, donc la précision sur la détermination angulaire s'écrit :

$$\boxed{\sigma_A \simeq \frac{\delta A}{1.6\sqrt{2S/B}}} \tag{I.24}$$

I.4.3.2 Antenne à récepteurs ponctuels

Le cas de l'antenne à récepteurs ponctuels correspond à une discrétisation spatiale de l'antenne précédente : les récepteurs étudiés sont élémentaires, et sont donc supposés ne pas avoir d'extension spatiale. On ne peut alors pas utiliser la relation I.23 pour estimer l'ouverture effective de l'antenne constituée par la voie somme. Nous présentons tout d'abord le calcul dans le cas de l'antenne monopulse élémentaire étudiée plus haut.

Pour calculer cet écart-type, on utilise l'expression I.11 de l'écartométrie utilisée pour effectuer les corrections angulaires : le traitement se fait à travers le terme $\Delta(A)/\Sigma(A)$.

En l'absence de bruit, le signal complexe reçu sur chacune des voies se met sous la forme :

$$\begin{cases} S_I = \frac{h}{2} e^{j(\omega_0 t + \frac{\Delta\varphi}{2})} \\ S_{II} = \frac{h}{2} e^{j(\omega_0 t - \frac{\Delta\varphi}{2})} \end{cases}$$

Le signal complexe reçu sur la voie somme s'écrit :

$$\Sigma(A) = e^{j\omega_0 t}\ h\ \cos(\frac{\Delta\varphi}{2})$$

Lorsque l'on se trouve au voisinage de la position nominale ($A = 0$), la puissance du signal reçu sur la voie somme est égal à $|\Sigma(A)|^2 = h^2$.

En présence de bruit additif gaussien complexe :

$$N_k(t) = n_k^1(t) + jn_k^2(t) \qquad (\text{k} = \Sigma \text{ ou } \Delta)$$

avec $n_k^1(t)$, $n_k^2(t)$ des bruits gaussiens indépendants $\mathcal{N}_{(0,\sigma)}$.

La puissance du bruit complexe est $2\sigma^2$. Le rapport signal/bruit se calcule alors :

$$S/B = \frac{|\Sigma(A)|^2}{2\sigma^2} = \frac{h^2}{2\sigma^2}$$

Les signaux somme et différence bruités s'écrivent [16] :

$$\begin{cases} \Sigma' = \Sigma + N_\Sigma(t) \\ \Delta' = \Delta + N_\Delta(t) \end{cases}$$

On a vu que la détermination angulaire se faisait par écartométrie (rel. I.11), via le rapport Δ/Σ, ce qui se réécrit, au voisinage de l'axe ($|\Delta| \ll |\Sigma|$), sous l'hypothèse de rapport signal/bruit élevé ($|\Sigma| \gg n_\Sigma^1, n_\Sigma^2$) :

$$\frac{\Delta'(A)}{\Sigma'(A)} = \frac{\Delta'\Sigma'^*}{\Sigma'\Sigma'^*} \simeq \frac{\Delta}{\Sigma} + \frac{n_\Delta^1}{\Sigma}$$

On retrouve donc le rapport de la voie somme et différence (éq. I.11), avec un terme de bruit supplémentaire, dont la variance est égale à celle de n_Δ^1 divisée par $|\Sigma|^2$, soit un écart-type d'écartométrie :

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2S/B}}$$

Le terme utile d'écartométrie se réécrit au voisinage de l'axe :

$$\frac{\Delta}{\Sigma} = \tan(\frac{\Delta\varphi}{2}) \simeq \tan(\frac{\pi\ A}{2\delta A}) \simeq \frac{A\ \pi}{2\delta A}$$

Le bruit de mesure sur l'azimut est donc :

$$\boxed{\sigma_A \simeq \frac{\delta A}{1.6\sqrt{2S/B}}} \qquad \text{(Monopulse)} \qquad \text{(I.25)}$$

Pour une antenne réseau, on peut se ramener au cas du doublet, en regroupant les deux moitiés de l'antenne pour donner deux "signaux équivalents" sur lesquels on effectue le même traitement que précédemment :

$$\boxed{\sigma_A \simeq \frac{\delta A}{1.4\sqrt{2S/B}}} \qquad \text{(Réseau)} \qquad \text{(I.26)}$$

en utilisant l'expression I.14 de δA pour $N_c > 7$ et $\lambda/N_c d \ll 1$.

On remarque sur l'équation précédente, que la précision des mesures dépend non seulement du rapport signal/bruit (de la voie somme), ce qui est naturel, mais aussi de la résolution angulaire δA de l'antenne : plus la fréquence ν_0 du signal est élevée, ou bien plus les cornets récepteurs sont éloignés, meilleure sera la localisation angulaire.

I.4.4 Synthèse

Nous utilisons par la suite les expressions I.20, I.21, I.25, I.26 pour établir une comparaison avec les radars usuels, qui réalisent une intégration cohérente sur plusieurs mesures (environ 10ms). Cela permet d'évaluer, de la manière la plus objective, les gains apportés par la technique particulaire qui intègre implicitement sur une durée beaucoup plus longue : ce qui équivaut à un rapport signal/bruit équivalent plus élevé, donc de meilleures précisions.

Chapitre II

Modélisation de la dynamique des cibles

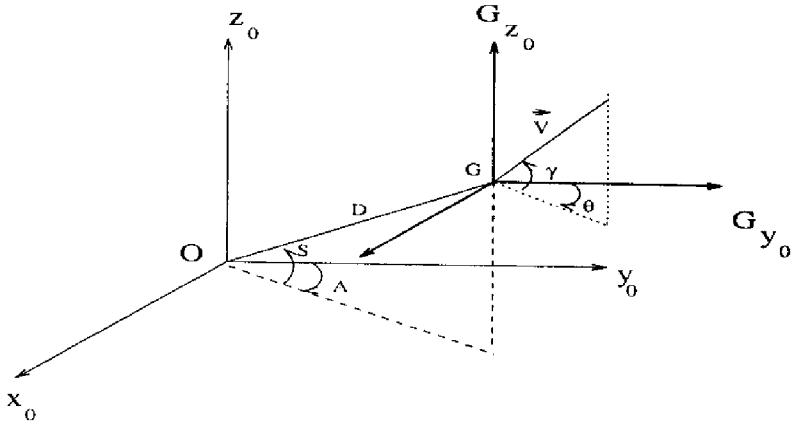
Une résolution performante du problème de poursuite radar repose sur une modélisation fine des différents points fondamentaux qui le composent. Nous avons, dans le chapitre précédent, détaillé la chaîne d'acquisition des mesures, en vérifiant à chaque étape l'optimalité des traitements effectués (filtre adapté, échantillonnage).

Après avoir étudié le capteur dans son principe général, nous présentons ici la modélisation de la dynamique de la cible, dont la finesse descriptive conditionne la qualité de l'estimation. Le premier paragraphe présente les équations de la dynamique issues de considérations aérodynamiques sur le comportement des aéronefs. Ces équations fournissent une description précise du mouvement d'ensemble du mobile, mais des modèles généralement plus simples leur sont souvent préférés. C'est le cas du modèle de Singer, très répandu en radar notamment, et qui repose sur une écriture simple de type cinématique avec toutefois une accélération pilotée par un bruit coloré. Un modèle dérivé "un peu plus physique", basé sur des aléas de pilotage poissoniens bornés, est présenté ensuite. Le dernier modèle constitue l'interface entre les deux modèles précédents (linéaires), et le modèle complet (non-linéaire) dont il constitue un cas particulier : il s'agit de la loi de navigation proportionnelle utilisée notamment pour le guidage des missiles.

II.1 Equations générales à 9 variables d'états de la mécanique du vol

L'étude de la dynamique du vol que nous présentons ici a été volontairement réduite au minimum utile à la compréhension des équations de la cinématique en vue du filtrage optimal. Pour une approche plus détaillée, on pourra se reporter à des ouvrages plus spécialisés [12, 57].

La figure suivante indique la manière dont est repéré le centre de gravité du mobile dans le trièdre de référence :



où θ est le cap, γ l'attitude, A l'azimut et S le site.

On retient comme hypothèse que les variables de commande du mobile sont :

- L'angle φ que fait l'axe y de l'avion avec le plan horizontal (gauchissement).
- L'angle α que fait l'axe x du mobile avec la vitesse (incidence).
- La commande de puissance du moteur qui détermine la force de propulsion $\vec{F_p}$

Il est à noter que nous ne tiendrons pas compte de l'angle de dérapage, ce qui ne grève pas trop la validité des équations de la dynamique.

Le schéma suivant permet de visualiser les angles φ et α par rapport au mobile (avion par exemple).

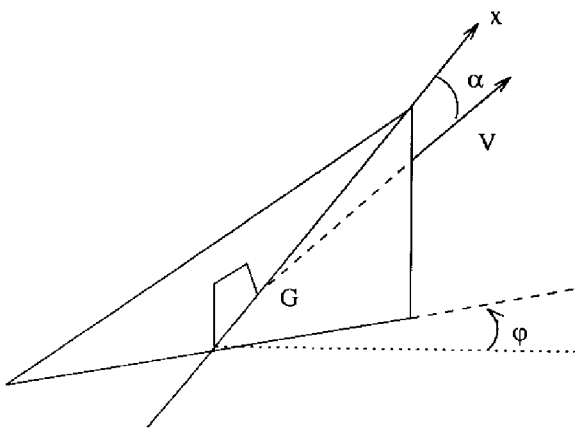


Figure II.1: Variables commandées.

Le modèle à neuf variables d'états s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{A} = \dfrac{V}{D\cos S}\cos\gamma\sin(\theta - A) \\ \dot{S} = -\dfrac{V}{D}\left(\cos\gamma\cos(\theta - A)\sin S - \sin\gamma\cos S\right) \\ \dot{D} = V\left(\cos\gamma\cos(\theta - A)\cos S + \sin\gamma\sin S\right) \\ \dot{V} = -g\sin\gamma + u_1\cos(u_3) - C_x(u_3)\mu'\,V^2 \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{V\cos\gamma}\left[u_1\sin(u_3)\sin(u_2) + C_z(u_3)\mu'\,V^2\sin(u_2)\right] \\ \dot{\gamma} = -\dfrac{1}{V}\left[g\cos\gamma - u_1\sin(u_3)\cos(u_2) - C_z(u_3)\mu'\,V^2\cos(u_2)\right] \end{cases} \tag{II.1}$$

avec

- D,A,S : distance, azimut, site du centre de gravité du mobile dans le repère fixe.
- V,γ,θ : coordonnées polaires, dans le repère fixe, de la vitesse du mobile.
- u_1,u_2,u_3 : commandes du mobile.

et

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{F_p}{m} \quad \text{Commande de propulsion} \\ u_2 = \varphi \quad \text{Commande de gauchissement} \\ u_3 = \alpha \quad \text{Commande d'incidence} \\ \mu' = \dfrac{\mu}{m} \end{cases} \tag{II.2}$$

Equations auxquelles il faut adjoindre 3 équations sur les variables aléatoires que sont les commandes u_1, u_2, u_3. On pourra notamment prendre n'importe quelle statistique rendant au mieux compte d'un mouvement réaliste de cible et de ses aléas (statistiques poissoniennes par exemple, pour modéliser tout changement subit de l'attitude de l'avion, de la poussée des réacteurs, ...).

Remarque :

Il est à noter que dans le cas de l'aérodynamique linéaire (incidence inférieure à 10 – 15 degrés), on peut prendre comme approximation :

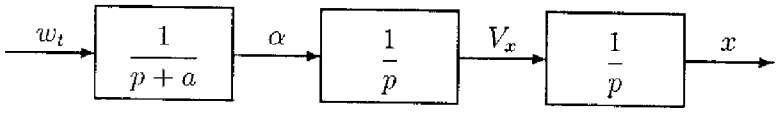
$$\begin{cases} \mu'\,C_x(u_3) = C'_x u_3 \\ \mu'\,C_z(u_3) = C'_z u_3 \end{cases}$$

II.2 Modèle aérodynamique de Singer

Pour les "linéaristes", le principal inconvénient du modèle II.1 vient de la très forte non-linéarité des équations, ce qui pose de sérieux problèmes quant à la construction d'un filtre.

C'est sur cette constatation que Singer a développé un modèle de dynamique basé sur des modèles du type triple intégrateur. L'approche, par Singer, du mouvement, se fait dans un système de coordonnées cartésiennes (et non polaires comme précédemment), et introduit un modèle linéaire d'ordre 3 indépendamment sur chaque coordonnée.

On peut représenter schématiquement ce modèle sous la forme :



L'entrée du système étant représentée par un bruit blanc de loi connue (généralement gaussienne).

Les variables α, V_x, x représentent respectivement l'accélération, la vitesse et la position du mobile, dans le modèle :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -a\alpha + w_t \\ \dot{V}_x = \alpha \\ \dot{x} = V_x \end{cases} \tag{II.3}$$

Remarque : L'intérêt des modèles du type triple intégrateur réside dans le fait que l'on est capable de majorer l'erreur d'estimation [8].

Si l'on s'intéresse à une poursuite $3D$, le modèle de dynamique est décrit par 3 modèles de Singer fonctionnant en parallèle.

On fait en effet l'hypothèse que la dynamique sur une coordonnée est indépendante de celle sur les autres coordonnées. On aura alors un système à 9 équations, correspondant à 3 systèmes du type II.3 écrits pour (α_x, V_x, x), (α_y, V_y, y), (α_z, V_z, z). Il est clair cependant que le couplage de chaque composante se fait lors du changement de coordonnées.

Malgré la simplicité du modèle de Singer, celui-ci laisse subsister la principale difficulté du problème d'estimation :

le modèle de dynamique est nécessairement écrit dans un repère Galiléen indépendant de l'observateur, alors que le capteur RADAR délivre des informations de position de la cible en coordonnées polaires (Distance,Azimut,Site) dépendantes du poste de mesure. Ceci nécessite un changement de repère pour des transformations non-linéaires qui ôtent au problème d'estimation son caractère linéaire.

Pour le filtrage "classique", la seule présence de la non-linéarité du passage polaire/cartésien, nécessite l'emploi de technique de linéarisation du type Kalman-étendu. Cette linéarisation engendre des sources d'instabilité dans le comportement du filtre.

Il faut enfin souligner le fait que la poursuite des sauts de pilotage par le filtre ainsi construit, pose de nombreux problèmes provenant de l'insuffisance descriptive du bruit blanc gaussien, à cet égard.

On ne détaillera pas davantage le modèle de Singer, déjà étudié dans de nombreux ouvrages [8, 71, 72].

Il convient néanmoins de préciser ses inconvénients :

- Malgré la linéarité postulée du modèle en coordonnées cartésiennes, les mesures s'effectuent en polaire, ce qui rejète les non-linéarités dans le changement de coordonnées.

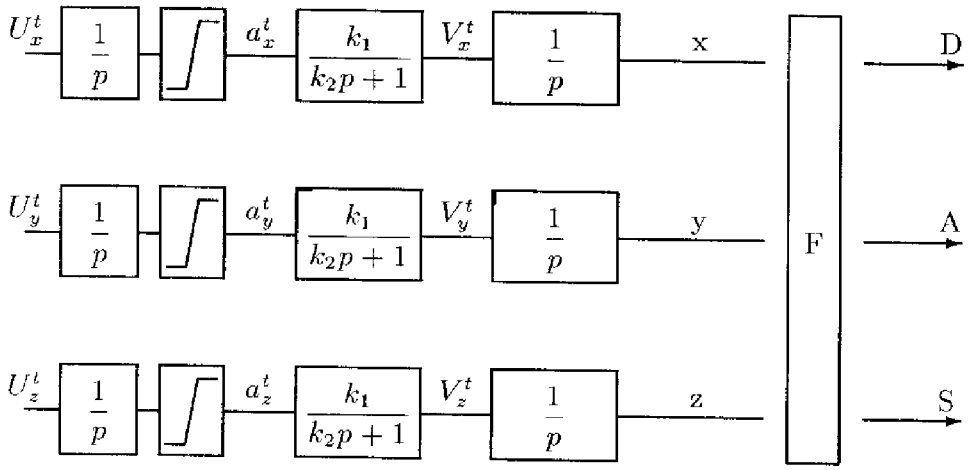
- Dans le cas d'un mobile assaillant, le repère dans lequel s'exprime son modèle statistique ne peut être indépendant du défenseur assailli.

II.3 Modèle proposé pour la poursuite avion

L'expérience acquise sur les modèles de type Singer, incite à se pencher tout d'abord sur des modèles proches associés à des équations de mesure non-linéaires. Ceci permet de calibrer comparativement les techniques particulaires de résolution à utiliser.

Le modèle que nous avons choisi d'étudier, est une version plus réaliste des modèles de Singer-Linard : la commande U est un processus à incréments indépendants, d'amplitude limitée à un intervalle borné.

Nous avons en effet choisi, dans ce modèle, de ne considérer qu'une seule boucle de stabilisation au niveau de la vitesse. On peut représenter ce modèle schématiquement par :



$$avec \quad \begin{cases} F : \text{transformation non-linéaire cartésien/polaire} \\ U_x^t, U_y^t, U_z^t : \text{bruits blancs gaussiens-poissoniens} \\ k_1, k_2 : \text{paramètres caractérisant la dynamique de la cible} \end{cases}$$

Dans ce type de modèle, la commande a_i^t représente un aléa de pilotage permettant de traduire l'état de la commande.

On peut remarquer dans ce modèle la présence d'un seuil permettant de tenir compte de la limitation des commandes de pilotage.

Pour plus de clarté, on peut réécrire le modèle de dynamique pour la composante x par exemple, sous la forme:

$$\begin{cases} da_x^t = w_1^t + \pi_1^t \\ \dot{V}_x^t = \dfrac{k_1 a_x^t - V_x^t}{k_2} \\ \dot{x}_t = V_x^t \end{cases} \tag{II.4}$$

(k_1 et k_2 sont deux paramètres caractéristiques de la cible)

Remarques:

- On peut signaler la présence, dans l'expression de l'aléa de pilotage, de deux termes:

  1. w_1^t : bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart-type σ_1 ($\mathcal{N}_{(0,\sigma_1)}$).
  2. π_1^t : bruit blanc gaussien $\mathcal{N}_{(0,\sigma_1')}$ à occurrence de saut λ_1 poissonienne.

  Ces deux termes ayant été introduits pour tenir compte à la fois de dérives possibles de la consigne de commande, et de changement brutal de celle-ci.

- La vitesse est stabilisée par un terme de viscosité aérodynamique. La vitesse V_x^t atteint un palier, pour a_x^t constant, lorsque l'accélération $\dot{V}_x^t$ est nulle, c'est à dire lorsque le mobile effectue un mouvement de translation uniforme sur une coordonnée. La vitesse limite V_{lim} ainsi atteinte a pour expression $V_{lim} = k_1 a_x^t$, ce qui met en évidence l'importance de donner une interprétation physique au paramètre k_1.

Les coefficients k_1 et k_2 présents dans II.4 se calibrent aisément, en fonction du type de cible attendue au moyen des courbes types II.2.

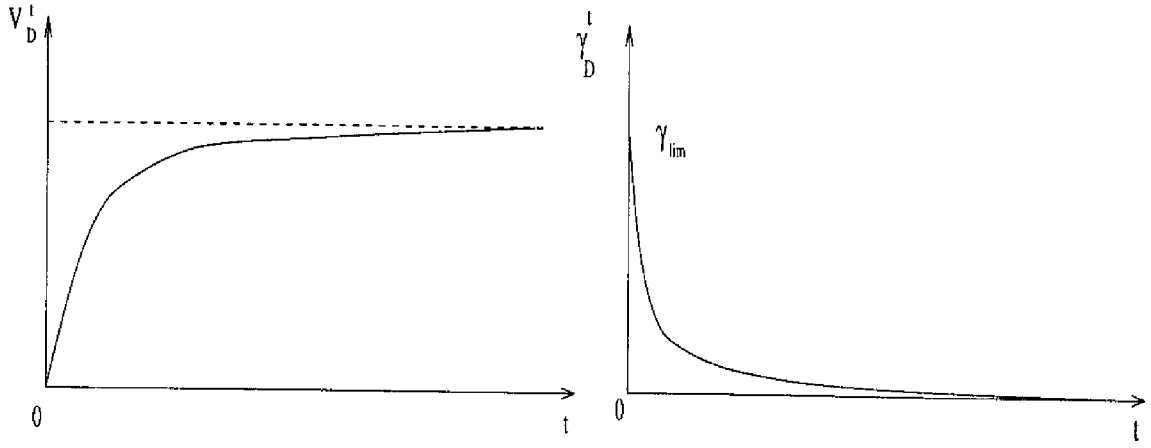


Figure II.2: Evolution temporelle de la vitesse, Variation temporelle de l'accélération

II.4 Lois de navigation proportionnelle (missile)

Les modèles précédents présentent l'avantage d'exhiber des équations linéaires, contrairement au premier modèle général de dynamique du vol.

Nous détaillons maintenant un modèle fortement non-linéaire : il s'agit du modèle de cible à lois de navigation proportionnelle.

Dans le cas de mobiles autoguidés, les équations de dynamique II.1 peuvent se simplifier, si l'on considère une loi de guidage du type navigation proportionnelle.

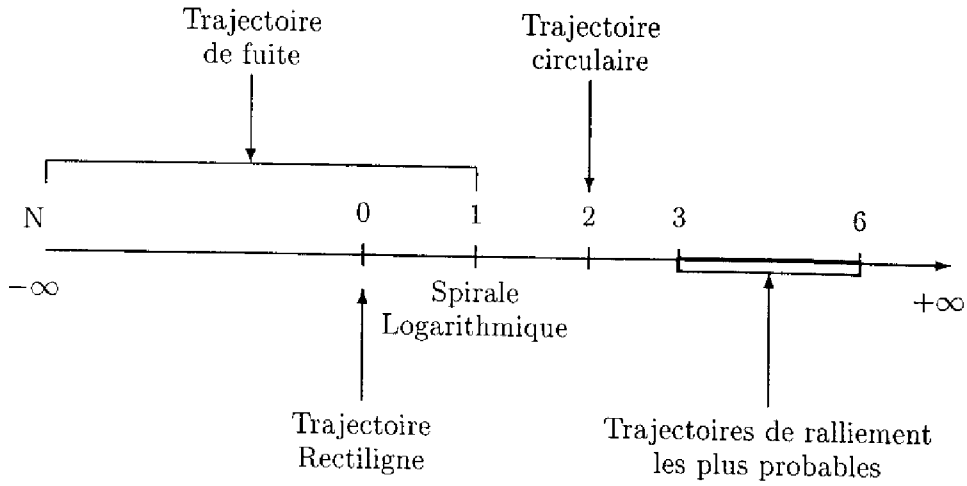
Cette loi, de nombreuses fois étudiée [8, 12, 28, 29], revient à donner au vecteur vitesse du mobile, une variation de direction proportionnelle à celle de la droite mobile/but.

Ceci peut se traduire simplement, après découplage en deux plans perpendiculaires, l'un vertical et l'autre horizontal, sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = N_v \, \dot{S} \\ \dot{\theta} = N_h \, \dot{A} \end{cases} \tag{II.5}$$

où N_h et N_v sont appelées constantes de navigation proportionnelle.

Suivant la valeur de cette constante, on obtiendra différents comportements du mobile :



Les trajectoires (du mobile) ont l'allure suivante :

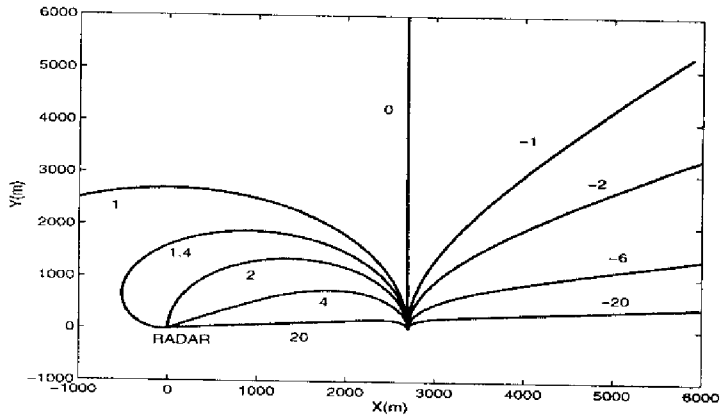


Figure II.3: Trajectoires de navigation proportionnelle pour différentes constantes

Concernant le module (V) de la vitesse, on considère usuellement qu'il varie faiblement pendant la période de navigation (dérive brownienne). Le système d'équations d'évolution II.1 se réécrit donc pour une évolution avec lois de navigation :

$$\begin{cases} \dot{A} = \dfrac{V}{D\cos S}\cos\gamma\sin(\theta - A) \\ \dot{S} = -\dfrac{V}{D}\left(\cos\gamma\cos(\theta - A)\sin S - \sin\gamma\cos S\right) \\ \dot{D} = V\left(\cos\gamma\cos(\theta - A)\cos S + \sin\gamma\sin S\right) \\ dV = d\beta \\ \dot{\gamma} = N_v\,\dot{S} \\ \dot{\theta} = N_h\,\dot{A} \end{cases} \tag{II.6}$$

Equations auxquelles il faut adjoindre les statistiques des lois de navigation :

$$\begin{cases} \dot{N}_h^t = w_h^t + \pi_h^t \\ \dot{N}_v^t = w_v^t + \pi_v^t \end{cases} \tag{II.7}$$

où (w_h^t, w_v^t) sont deux bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et d'écart-types (σ_h, σ_v), et (π_h^t, π_v^t) deux bruits blancs gaussiens-poissoniens, poissoniens (λ_h, λ_v) en saut et gaussiens de moyenne nulle et d'écart-types (σ_h', σ_v') en amplitude.

Remarque : Il convient de remarquer que ces équations décrivent le mouvement du mobile vu du but, ou par rapport au but.

Il est important de noter les deux points suivants :

- Le passage du modèle linéaire avec senseur non-linéaire, au modèle non-linéaire avec senseur linéaire serait une simple transformation (cartésien/polaire) dans l'espace d'état, si l'on avait en outre rajouté : viscosité quadratique et poids de l'avion. Les deux modèles sont donc sensiblement équivalents, pour les commandes additives qui ont été considérées ici (bruits gaussiens-poissoniens).
- Les commandes multiplicatives (II.7) que constituent les coefficients de navigation proportionnelle donnent par contre un comportement dynamique différent. La non-linéarité du filtrage qui en découle est cependant indifférente pour l'algorithmique particulaire (détaillée dans le chapitre suivant).

En résumé, les modèles présentés ici balayent quelques unes des difficultés qui peuvent se poser à la mise en œuvre des filtres linéarisés.

Le but d'un tel chapitre n'est pas d'être exhaustif quant aux modèles étudiés, mais de présenter quelques cas typiques d'équations d'évolution dont les non-linéarités posent problèmes aux techniques usuelles.

Chapitre III

Filtrage non-linéaire et solution particulaire

La modélisation fine de la problématique radar exposée dans les chapitres précédents, révèle l'intérêt de développer un outil performant d'estimation non-linéaire non-gaussienne.

Les bases de l'estimation optimale reposent sur la construction de la probabilité conditionnelle à l'information dont on dispose. Dans le cas des processus gaussiens propres aux modèles linéaires, on peut construire un filtre récursif optimal de l'état à estimer [40, 41], comme il est bien connu. Malheureusement dans le cas général, la théorie non-linéaire ne permet plus une solution récursive du problème en dimension finie.

De nombreuses solutions ont été proposées pour résoudre ce problème. Pour les situations les plus "régulières", une des plus immédiates est de linéariser les modèles autour de l'estimé courant, se ramenant ainsi à un problème localement linéaire (e.g. Kalman étendu [9]). Plus généralement, on peut choisir un développement en moments jusqu'à un certain degré et construire une approximation tronquée sur la base des n premiers (cumulants).

Une autre approche consiste à définir une estimation sous-optimale (mais cependant optimale dans sa classe) par restriction de la classe d'estimateurs considérés (exemple : fonctionnelles polynomiales à degré fixé [51]).

Une approche plus numérique du problème consiste à découper l'espace selon une grille définie au préalable et construire la probabilité conditionnelle aux mesures, associée à chaque portion de l'espace [10, 11].

La première approche évoquée ne permet aucune garantie de stabilité en général, et de fortes non-linéarités jointes à des bruits élevés la met gravement en défaut. En ce qui concerne la deuxième méthode, son champ d'application est assez limité (exemple : modèles bilinéaires), pour une efficacité pratique d'utilité générale.

La méthode de résolution particulaire [25, 24, 26] présentée ici repose sur une exploration de l'espace d'état par particules aléatoires (tirages à la Monte-Carlo). Originellement due à G. Salut, d'abord par processus de naissance et mort, puis à nombre de

particules constant, elle fut une première fois exposée en 1989 [38], puis présentée dans les sessions des Groupes de Recherche Automatique et Traitement du Signal du CNRS [18, 69]. Bien que son principe se rapproche davantage des méthodes dites à "grille", elle a la particularité d'engendrer un maillage évolutif, fonction du flot stochastique du système étudié et de ses observations. Les outils essentiels de cette méthode sont la règle de Bayes et une adaptation dynamique de la loi des grands nombres. Certains auteurs ont utilisé les mêmes idées mais sans les conditions de convergence [33, 75]. Enfin, d'autres auteurs [10, 11] ont utilisé l'approximation-mesure de Dirac, mais sans la mobilité particulaire étudiée ici. Il est important de souligner que la méthode de résolution exposée est la seule dont la convergence ait été prouvée [17, 27] sous les hypothèses générales auxquelles on peut s'attendre, notamment pour les processus instables dont il est ici question en poursuite radar.

Après un bref rappel sur le problème de l'estimation dynamique, nous détaillons dans ce chapitre l'essentiel de la méthode de résolution particulaire évoquée. Seuls les résultats algorithmiques sont présentés ici (on pourra trouver les démonstrations mathématiques de convergence dans [17, 27]) .

Cette approche par la résolution particulaire est particulièrement adaptée aux problèmes où :

i) de fortes non-linéarités sont présentes.

ii) le souci d'optimalité est pertinent.

C'est notamment le cas pour le traitement fin du signal radar, lorsque l'on doit tenir compte simultanément d'un faible rapport signal/bruit et de la dynamique des cibles.

III.1 Rappels sur la théorie de l'estimation dynamique

D'un point de vue général, l'estimation dynamique consiste à évaluer, de manière récursive, un processus $\{X\}_t$ à partir de son observation bruitée $\{Y\}_t$.

Le caractère optimal de l'estimateur de X, noté $\widehat{X}$, dépend évidemment du critère à optimiser (minimum de variance de l'erreur par exemple). On parle de filtrage lorsque l'on s'intéresse à la valeur courante X_t. On sait par ailleurs que les équations de prédiction et de lissage sont fondées sur l'opération fondamentale de filtrage. Enfin, l'estimation paramétrique (filtrage d'une constante inconnue) est un cas trivial de filtrage.

Nous rappelons ici le problème de filtrage à temps discret de processus markoviens. Soit X un processus stochastique markovien à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$) défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par :

$$\begin{cases} X_t = F_t(X_{t-1}, \pi_t) & (t \geq 1) \\ X_0 \quad \text{Condition initiale} \end{cases} \tag{III.1}$$

où F_t désigne une application mesurable (fonction de transition) de $\mathbb{R}^m$ x $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et π_t un bruit (de dynamique) de loi connue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et dont les réalisations temporelles sont indépendantes.

Le processus X est observé à travers un processus Y à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ de la forme :

$$Y_t = H_t(X_t, \nu_t) \qquad (t \geq 0)$$

où H_t est une application mesurable de $\mathbb{R}^m x \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ et ν_t est un bruit (de mesure) de loi connue à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et dont les réalisations temporelles sont indépendantes.

Par souci de simplicité, nous étudierons le cas où le bruit de mesure est additif et gaussien de moyenne nulle et de variance R_t :

$$Y_t = H_t(X_t) + \nu_t \qquad (t \geq 0) \tag{III.2}$$

Notations : Nous noterons par la suite

$$\text{et} \quad \begin{array}{l} \underline{t} \triangleq (0, \ldots, t) \\ Y_{\underline{t}} \triangleq (Y_0, Y_1, \ldots, Y_t). \end{array} \tag{III.3}$$

Le problème d'estimation (au sens du minimum de variance de l'erreur d'estimation) consiste à déterminer la mesure de probabilité conditionnelle aux observations $dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$, ou de manière particulière sa marginale $dP(X_t \mid Y_{\underline{t}})$. L'estimateur optimal de X_t sachant $Y_{\underline{t}}$, noté $\widehat{X}_t$, s'écrit :

$$\widehat{X}_t \triangleq E(X_t \mid Y_{\underline{t}}) = \int_{X_t} X_t \, dP(X_t \mid Y_{\underline{t}}) \; = \; \int_{X_{\underline{t}}} X_t \, dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) \tag{III.4}$$

Le problème de filtrage étant un problème dynamique, il est important de mettre en évidence des relations récursives permettant de calculer à chaque instant cette mesure de probabilité. On peut décomposer cette opération en deux parties :

- Une partie prédictive fondée sur les équations de dynamique (Eq. III.1), afin d'engendrer a priori la mesure de probabilité à l'instant t, connaissant les t-1 dernières observations. La construction de cette mesure se fait grâce à l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$dP(X_t \mid Y_{\underline{t-1}}) = \int_{X_{t-1}} dP(X_t \mid X_{t-1}) dP(X_{t-1} \mid Y_{\underline{t-1}}) \tag{III.5}$$

  où $dP(X_t \mid X_{t-1})$ représente la probabilité de transition de l'état X_{t-1} à X_t.

- Une partie corrective reposant sur la règle de Bayes :

$$dP(X_t \mid Y_{\underline{t}}) = \frac{dP(Y_t \mid X_t)}{dP(Y_t \mid Y_{\underline{t-1}})} dP(X_t \mid Y_{\underline{t-1}}) \tag{III.6}$$

  où $dP(Y_t \mid Y_{\underline{t-1}})$ n'est rien d'autre qu'un terme de normalisation indépendant de X.

  On peut alors réécrire $dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ sous la forme :

$$dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) \; = \frac{\prod_{\tau=0}^{t} dP(Y_\tau \mid X_\tau) \prod_{\tau=1}^{t} dP(X_\tau \mid X_{\tau-1}) dP(X_0)}{\int_{X_{\underline{t}}} \prod_{\tau=0}^{t} dP(Y_\tau \mid X_\tau) \prod_{\tau=1}^{t} dP(X_\tau \mid X_{\tau-1}) dP(X_0)} \tag{III.7}$$

Il est clair au vu de l'équation III.7, que le problème de filtrage de processus markoviens à temps discret repose sur la connaissance de deux mesures :

$$\begin{cases} dP(X_\tau \mid X_{\tau-1}) & \text{loi de transition} \\ dP(Y_\tau \mid X_\tau) & \text{loi d'observation} \end{cases}$$

III.2 Approche particulaire des équations du filtrage

Dans le cas d'une observation additive gaussienne, le problème principal pour la détermination de $dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ réside dans la connaissance de la mesure $dP(X_\tau|X_{\tau-1})$. Dans le cas non-linéaire, on ne sait généralement pas évaluer analytiquement cette mesure, même si $dP(X_0)$ est initialement gaussien.

L'absence d'outils de résolution satisfaisants du filtrage non-linéaire provient de la difficulté mathématique à rendre compte du caractère essentiellement local de tout modèle non-linéaire. Cela conduit à développer une approche générale de ce problème, fondée sur des tirages du type Monte-Carlo : on obtient ainsi une prise en compte globale des modèles non-linéaires dont la convergence n'est limitée que par le nombre de particules utilisées.

L'essentiel de l'approche particulaire réside en fait dans l'adaptation dynamique de la loi des grands nombres.

III.2.1 Principe

Dans un premier temps, nous introduisons les concepts généraux qui sont à la base de la solution particulaire présentée ici.

Rappelons tout d'abord quelques définitions de convergence.

III.2.1.1 Définitions

Soit $(X^N)_{N\geq 1}$ une suite de processus, et X un processus , à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (d $\geq$ 1) sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On dit que X^N converge uniformément dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)^*$ et on note:

$$X^N \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)^*} X$$

lorsque

- $\forall p > 0$

$$\|X^N - X\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)^*} \triangleq \sup_{t\geq 0} \|X_t^N - X_t\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)} \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{} 0$$

avec $\|U\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)} = E(|U|^p)$.

- pour p=0

$$\forall \varepsilon > 0 \ \sup_{t \geq 0} P\left(\|X_t^N - X_t\|_{\mathbb{R}^d} > \varepsilon\right) \triangleq P\left(\|X^N - X\|_{\mathbb{R}^d} > \varepsilon\right)^* \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{} 0$$

III.2.1.2 Loi des grands nombres

Comme nous l'avons déjà précisé, le point majeur de la résolution particulaire repose sur l'adaptation de la loi des grands nombres afin de construire la mesure de probabilité $\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$.

Soit X_t^e une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ distribuée selon la loi $\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ et $(X_t^{e,i})_{1 \leq i \leq N}$ N variables aléatoires indépendantes conditionnellement à $\mathrm{Y}_{\underline{t}}$, de même loi que X_t^e.

On a alors :

$$E(X_t^e \mid Y_{\underline{t}}) = E(X_t \mid Y_{\underline{t}}) \qquad \mathbf{P-ps}$$

et

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_t^{e,i} \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)^*} E(X_t \mid Y_{\underline{t}})} \tag{III.8}$$

Cette expression permet à elle seule de résumer ce que l'on entend par filtrage particulaire : les variables aléatoires $(X_t^{e,i})_{1 \leq i \leq N}$ sont en fait une représentation discrétisée de l'espérance conditionnelle : on approche cette espérance par la réalisation de N échantillons $\mathrm{X}_t^{e,i}$ de loi $\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$.

Remarque : D'une manière plus générale, nous parlerons de filtrage particulaire pour toute approximation de l'espérance conditionnelle par exploration aléatoire de l'espace d'état.

Pour mieux représenter ce en quoi consiste l'approche particulaire, il suffit de réécrire, sous l'hypothèse précédente, l'expression III.8 issue de la loi faible des grands nombres sous la forme de la convergence au sens faible :

$$\int X_t \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_t^{e,i}}(dx_t) \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)^*} \int X_t \mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) \tag{III.9}$$

Cette expression montre que l'on approche ainsi la mesure de probabilité conditionnelle $\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ par un peigne de Dirac équipondéré :

$$\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_t^{e,i}}(dx_t)$$

La mesure de probabilité $\mathrm{dP}(\mathrm{X}_t \mid Y_{\underline{t}})$ rentrant en jeu dans le problème d'estimation n'est rien d'autre que la marginale de $\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$: on peut donc voir la variable aléatoire X_t comme l'extrémité de la trajectoire $\mathrm{X}_{\underline{t}}$, pour laquelle chaque probabilité de transition dépend de $\mathrm{Y}_{\underline{t}}$. En d'autres termes, les "dents" du peigne de Dirac évoluent suivant une loi qui dépend de $\mathrm{Y}_{\underline{t}}$.

III.2.1.3 Dérivée de Radon-Nykodim

En règle générale, le principal problème consiste à calculer cette loi. Plus précisément, il est nécessaire d'expliciter une décomposition de $dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ mettant en évidence une nouvelle distribution notée $dQ(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ et une dérivée de Radon-Nykodim notée $\bar{Z}_t(X_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}})$ récursivement calculables :

$$dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = \bar{Z}_t(X_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}})\, dQ(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) \tag{III.10}$$

Remarque : Les schémas particulaires développés par la suite sont le fruit d'une interprétation exploration/pondération de l'expression III.10 du changement de probabilité de référence. En effet, en accord avec les principes de type Monte-Carlo, la nouvelle distribution $dQ(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ sert de base à l'exploration et les dérivées de Radon viennent pondérer les positions. Cette méthode est à la base du calcul des probabilités puisqu'il s'agit de reconstruire une distribution à partir d'une suite de réalisations indépendantes de variables aléatoires.

On peut montrer (Cf [17]) que :

$$\widehat{X}_t = E(X_t \mid Y_{\underline{t}}) = E_Q\left(X_t \bar{Z}_t(X_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}}) \mid Y_{\underline{t}}\right) \tag{III.11}$$

où E_Q représente l'espérance prise par rapport à la nouvelle probabilité de référence Q.

Remarque : On est ainsi en mesure de calculer l'estimateur à partir de la connaissance d'une nouvelle probabilité de référence $dQ(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$, dont nous donnons par la suite plusieurs expressions possibles.

On peut désormais, tout comme pour le paragraphe III.2.1.2, appliquer la loi des grands nombres non plus sur $dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ mais sur $dQ(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$:

Soit X_t^e une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ distribuée selon la loi $dQ(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ et $(X_t^{e,i})_{1 \leq i \leq N}$ N variables aléatoires indépendantes conditionnellement à $Y_{\underline{t}}$ de même loi que X_t^e. On peut alors montrer [17], sous certaines conditions :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} p_t^i\, X_t^{e,i} \xrightarrow[N \to +\infty]{L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)} E(X_t \mid Y_{\underline{t}})} \tag{III.12}$$

avec

$$p_t^i = \frac{\bar{Z}_t(X_{\underline{t}}^{e,i}, Y_{\underline{t}})}{\sum_{j=1}^{N} \bar{Z}_t(X_{\underline{t}}^{e,j}, Y_{\underline{t}})} \qquad \text{(Pondérations normalisées)} \tag{III.13}$$

L'estimée est donc le barycentre des points distribués selon $dQ(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$, dont les pondérations sont les dérivées $\bar{Z}_t(X_{\underline{t}}^{e,i}, Y_{\underline{t}})$ de Radon-Nykodim du changement de probabilité.

Cela conduit pour la probabilité conditionnelle à un peigne de Dirac, non plus équipondéré (comme dans la relation III.9), mais avec des pondérations p_t^i différentes pour chaque support ponctuel $X_t^{e,i}$:

$$\mathrm{dP}(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = \sum_{i=1}^{N} p_t^i \, \delta_{X_t^{e,i}}(dx_t) \tag{III.14}$$

L'estimateur particulaire d'ordre N s'écrit alors :

$$\boxed{\widehat{X}_t^N = \sum_{i=1}^{N} p_t^i \, X_t^{e,i}} \tag{III.15}$$

$$\text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{N} p_t^i = 1$$

Remarques :

- En résumé, la philosophie de la méthode particulaire consiste à remplacer une mesure de probabilité que l'on ne connaît pas ($\mathrm{dP}(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$), par une autre mesure que l'on est en mesure de calculer ($\mathrm{dQ}(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$). On passe de l'une à l'autre au moyen de la dérivée de Radon.

  Bien sûr, il est intéressant de mettre en évidence des relations de récurrences qui donnent la loi d'évolution de ces particules : nous verrons par la suite, que le terme $\mathrm{dQ}(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ peut être vu comme la loi de transition des particules, et que $\bar{Z}_t(X_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}})$ est alors le poids (non-normalisé) associé à chacune d'elles.

  L'estimateur est alors donné par la relation III.15, chaque particule i (i=1...N) située à la position $X_t^{e,i}$ dans l'espace d'état, évolue selon la loi $\mathrm{dQ}(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ que l'on sait calculer récursivement, et est évaluée par sa pondération p_t^i (issue de la dérivée du changement de mesures). Le point délicat consiste donc à expliciter les termes $\bar{Z}$ et dQ.

- La forme quotient de l'estimateur empêche de conclure à une convergence dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'étude de la convergence dans $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ du filtre $\sum p_t^i X_t^{e,i}$ se décompose en deux parties. Plus précisément, on exprime l'écart $\sum p_t^i X_t^{e,i} - \widehat{X}_t$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sum p_t^i X_t^{e,i} - \widehat{X}_t &= \sum p_t^i (X_t^{e,i} - \widehat{X}_t) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N} \bar{Z}_t(X_{\underline{t}}^{e,j}, Y_{\underline{t}})\right)^{-1}}_{(1)^{-1}} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \bar{Z}_t(X_{\underline{t}}^{e,i}, Y_{\underline{t}}) \, (X_t^{e,i} - \widehat{X}_t)}_{(2)}\end{aligned}$$

  On remarque que E((1)) = 1 et E((2)) = 0. Les majorations obtenues par simple application à (1) et (2) de l'inégalité de Tchebichev, agrémentées de conditions naturelles dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suffisent à confirmer la convergence du filtre vers l'espérance conditionnelle.

III.2.2 Conditions de convergence de l'estimateur particulaire

III.2.2.1 Détectabilité stochastique

Avant d'aller plus loin, il convient de définir les conditions de convergence de cet estimateur approché.

Une des conditions essentielles de convergence réside dans la détectabilité stochastique dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à savoir :

$$\mathcal{H}_1 \qquad \boxed{\|\widetilde{X} - X\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)^*} \ < \ +\infty} \qquad \text{(III.16)}$$

où $\widetilde{X}$ est le processus d'exploration de loi $\mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$.

Nous nous intéresserons plus précisément par la suite à deux lois $\mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ d'exploration : l'une mettant en œuvre une évolution a priori $dP(X_{\underline{t}})$, et l'autre conditionnelle (d'ordre n) $\prod_{\tau=0}^{T-1} \mathrm{dP}(\mathrm{X}_{[(\tau+1)n]} \mid Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})$ (où $[t] \triangleq (t-n+1, \ldots, t)$).

Pour ces deux changements de probabilité, on peut remarquer que la condition de détectabilité se réécrit :

$$\begin{cases} \|X - E(\widetilde{X}|\mathcal{F}^Y)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)^*} \ < \ +\infty \\ \|\widetilde{X} - E(\widetilde{X}|\mathcal{F}^Y)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)^*} \ < \ +\infty \end{cases}$$

En résumé, l'hypothèse de détectabilité stochastique se réduit à la finitude de la variance d'exploration, et à celle de l'écart entre l'espérance conditionnelle d'exploration et le modèle à estimer.

Dans le cas particulier où $\widetilde{X}$ est le processus d'évolution a priori, ces deux conditions se condensent en une seule impliquant la finitude de la variance du processus a priori.

$$\|X - E(X)\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},P)^*} \ < \ +\infty$$

III.2.2.2 Régularité des pondérations

Un autre problème réside dans la dégénérescence évolutive des pondérations p_t^i. En effet, la dérivée de Radon-Nykodim introduite précédemment (III.13) représente les probabilités associées à l'exploration de l'espace d'état par les particules i. Lorsque t tend vers l'infini et que le nombre N de particules reste constant, ces probabilités p_t^i tendent presque toutes vers zéro créant une dégénérescence de la normalisation.

Pour remédier à cela il convient d'introduire un noyau régularisant sur les observations (facteur d'oubli) dépendant du nombre N de particules, ayant les propriétés suivantes :

$$\alpha \ : \ \mathbb{N}^2 \longrightarrow [0,1] \text{ avec } \begin{cases} \alpha_v(0) \ = \ 1 & \text{à l'instant courant} \\ \forall v \in \mathbb{N}, \ u \longrightarrow \alpha_v(u) & \text{décroît} \\ \forall u \in \mathbb{N}, \ v \longrightarrow \alpha_v(u) & \text{croît} \end{cases}$$

Soit (α^r) une suite de noyaux régularisant convergeant simplement vers 1 quand r$\rightarrow \infty$.

On notera par la suite $\bar{Z}_t^\alpha(X_{\underline{t}}\ , Y_{\underline{t}})$ la dérivée de Radon associée au nouveau changement de probabilité (régularisé) déduit du précédent en remplaçant sur [0,t] les perturbations gaussiennes ν_t par des perturbations gaussiennes $\nu(\alpha)_t$ de moyenne nulle et de variance $R(\alpha)_\tau^{-1} = \alpha_\tau^r(t-\tau)R_\tau^{-1}$.

On note l'estimateur régularisé :

$$\widehat{X}_t^\alpha = E_Q(X_t\bar{Z}_t^\alpha(X_t\ , Y_{\underline{t}})\ )$$

On montre que (Cf [17]) sous l'hypothèse de détectabilité stochastique $\mathcal{H}_1$, ainsi que :

$$\mathcal{H}_2 \qquad \boxed{\widehat{X}_t^\alpha \xrightarrow[r\to\infty]{L^0(\Omega,\mathcal{F},P)^*} E(X_t \mid Y_{\underline{t}})} \qquad \text{(Continuité)} \qquad \text{(III.17)}$$

alors il existe une suite r(N) de paramètres telle que :

$$\boxed{\widehat{X}_t^\alpha \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{L^0(\Omega,\mathcal{F},P)^*} E(X_t \mid Y_{\underline{t}})} \qquad \text{(III.18)}$$

Remarque : Sous cette nouvelle probabilité, les processus X et Y sont inchangés.

Exemples : Donnons ici à titre d'exemples, plusieurs valeurs possibles du paramètre α de régularisation :

1. Oubli exponentiel : $\alpha_v^r(u) = \gamma^u$ avec $\gamma = (1-\frac{1}{r}) \in]0,1]$.

2. Fenêtre : $\alpha_v^r(u) = \mathbb{1}_{[0,T_r]}(u)$ (indicatrice), $(T_r)_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si ν_t (bruit additif de mesure) est gaussien de moyenne nulle et de variance R_t, introduire le paramètre α revient à prendre une nouvelle équation de mesure où le bruit reste gaussien de moyenne nulle, mais de variance R_t^α.

L'hypothèse $\mathcal{H}_1$ de détectabilité stochastique permet de mettre en évidence deux types de processus, pour lesquels les outils de résolution sont différents. En effet, la condition de détectabilité pour un processus a priori fait intervenir une condition très contraignante sur la variance d'exploration du modèle. C'est dire que l'on pourra distinguer deux cas, à savoir : modèle à variance bornée (que l'on appellera $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ -stable) et modèle à variance non-bornée ($L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ -instable).

Il convient maintenant, si l'on veut détailler l'algorithme particulaire, d'expliciter les expressions de $\bar{Z}_t(\mathrm{X}_{\underline{t}}\ , Y_{\underline{t}})$ et $\mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ du changement de probabilité (Relation III.10).

III.2.3 Solution particulaire a priori du filtrage (processus stables)

On utilise pour cela la loi de Bayes pour réécrire $\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ (en utilisant les notations (III.3)) :

$$\begin{aligned} \mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) &= \frac{\mathrm{dP}(\mathrm{Y}_{\underline{t}} \mid X_{\underline{t}})}{dP(Y_{\underline{t}})}\, dP(X_{\underline{t}}) \\ &= \bar{Z}_t(\mathrm{X}_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}})\, \mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) \qquad \text{(Cf rel. III.10)} \end{aligned} \tag{III.19}$$

Soit en identifiant :

$$\begin{cases} \mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = dP(X_{\underline{t}}) = dP(X_t \mid X_{t-1})\, dQ(X_{\underline{t-1}} \mid Y_{\underline{t-1}}) \\ \bar{Z}_t(\mathrm{X}_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}}) = \dfrac{\mathrm{dP}(\mathrm{Y}_{\underline{t}} \mid X_{\underline{t}})}{dP(Y_{\underline{t}})} = \dfrac{\mathrm{dP}(\mathrm{Y}_{\underline{t}} \mid X_{\underline{t}})}{\int_{X_{\underline{t}}} \mathrm{dP}(\mathrm{Y}_{\underline{t}} \mid X_{\underline{t}})\; dP(X_{\underline{t}})} \\ \qquad = \dfrac{dP(Y_t \mid X_t)}{dP(Y_t \mid Y_{\underline{t-1}})}\, \bar{Z}_{t-1}(\mathrm{X}_{\underline{t-1}}, Y_{\underline{t-1}}) \end{cases}$$

La récursivité sur $\bar{Z}_t(\mathrm{X}_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}})$ et $\mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ apparaît ici de manière naturelle : le passage de $dQ(X_{\underline{t-1}} \mid Y_{\underline{t-1}})$ à $\mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ se faisant au travers de $dP(X_t \mid X_{t-1})$ (loi de transition), et la construction de la dérivée de Radon du changement de mesure grâce à $dP(Y_t \mid X_t)$ (loi d'observation). Le terme $dP(Y_t \mid Y_{\underline{t-1}})$ est un terme de normalisation.

Il découle alors directement de la loi des grands nombres que, si l'on tire N réalisations $(\pi_t^i)_{1 \leq i \leq N}$ indépendantes selon la loi a priori de π_t, on construit récursivement le peigne de Dirac (Relation III.14) à partir de la dynamique du système (équation III.1). L'évolution des particules est donc donnée par la loi de transition (flot du système), elles sont ensuite pondérées via la loi d'observation (équation du capteur).

A partir du changement de probabilité, on peut donc décomposer l'approche particulaire de la manière suivante :

1. **Initialisation :** Il convient tout d'abord d'initialiser les particules X_0^i selon la loi a priori $\mathrm{dP}(\pi_0)$, et les poids p_0^i à $\frac{1}{N}$.

2. **Exploration :** On fait subir à chaque particule le flot du système en tirant N variables π_t^i de bruit suivant la loi a priori (connue) $dP(\pi_t)$:

$$X_t^i = F_t(X_{t-1}^i, \pi_t^i) \tag{III.20}$$

3. **Pondération :** On construit, de manière itérative, la pondération p_t^i associée à chaque particule à partir de la dérivée de Radon du changement de mesure III.19 :

$$\bar{Z}_t(\mathrm{X}_{\underline{t}}^i, Y_{\underline{t}}) = \frac{dP(Y_t \mid X_t^i)}{dP(Y_t \mid Y_{\underline{t-1}})}\, \bar{Z}_{t-1}(\mathrm{X}_{\underline{t-1}}^i, Y_{\underline{t-1}}) \tag{III.21}$$

Les pondérations p_t^i associées aux particules s'écrivent (Cf rel. III.13) :

$$p_t^i = \frac{P(Y_t \mid X_t^i)}{\sum_{j=1}^{N} P(Y_t \mid X_t^j)} \, p_{t-1}^i \tag{III.22}$$

Dans le cas particulier où le bruit de mesure est gaussien de moyenne nulle et de variance R_t, la relation précédente se récrit :

$$p_t^i = \frac{\exp(-\frac{1}{2R_t}\|Y_t - H(X_t^i)\|^2)}{\sum_{j=1}^{N} \exp(-\frac{1}{2R_t}\|Y_t - H(X_t^j)\|^2)} \, p_{t-1}^i \tag{III.23}$$

Soit, en développant p_{t-1}^i :

$$p_t^i = \frac{\exp\left(\sum_{l=0}^{t} \frac{1}{2R_l}\|Y_l - H_l(X_l^i)\|^2\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(\sum_{l=0}^{t} \frac{1}{2R_l}\|Y_l - H_l(X_l^j)\|^2\right)} \tag{III.24}$$

4. **Estimation :** On en déduit alors immédiatement l'estimateur particulaire (relation III.15) :

$$\widehat{X}_t^N = \sum_{i=1}^{N} p_t^i \, X_t^i$$

Pour un traitement dynamique, on itère à chaque instant les parties 2,3 et 4.

Remarques :

- L'algorithme particulaire a priori se décompose donc essentiellement en deux parties : une partie évolution a priori de chaque particule (partie 2, rel. III.20) reposant sur la connaissance de la loi $dP(X_t|X_{t-1})$, c'est-à-dire de $dP(\pi_t)$, et une autre (partie 3) qui associe, au vu de l'observation, une pondération bayesienne à chaque particule (rel. III.22). Une forte pondération associée correspond à une particule très vraisemblable. Ces deux points constituent en fait l'essentiel de la méthode de résolution particulaire du problème de filtrage de processus stables.

- Nous n'avons pas dans ce qui précède introduit le paramètre α nécessaire à une régularisation des pondérations p_t^i, lorsque t croît indéfiniment. Dans ce cas, avec des notations abusives mais néanmoins triviales, les nouvelles pondérations $p_t^{\alpha,i}$ associées aux particules i se déduisent directement de la relation III.13 où l'on remplace $Z_t(X_{\underline{t}}^i, Y_{\underline{t}})$ par $Z_t^\alpha(X_{\underline{t}}^i, Y_{\underline{t}})$.

Dans le cas où le bruit de mesure est gaussien de moyenne nulle et de variance R_t, les pondérations $p_t^{\alpha,i}$ se réécrivent très simplement (en utilisant l'expression générale III.13) :

- Pour un facteur d'oubli exponentiel ($\gamma \in]0,1]$) :

$$p_t^{\gamma,i} = \frac{\exp\left(\sum_{l=0}^{t} \gamma^{t-l} \frac{1}{2R_l} \|Y_l - H_l(X_l^i)\|^2\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(\sum_{l=0}^{t} \gamma^{t-l} \frac{1}{2R_l} \|Y_l - H_l(X_l^j)\|^2\right)} \tag{III.25}$$

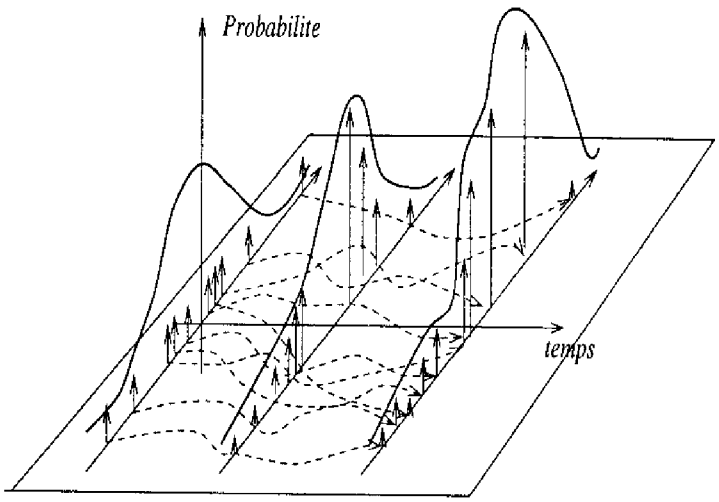
- Pour un facteur d'oubli de type fenêtre glissante (de longueur T) :

$$p_t^{T,i} = \frac{\exp\left(\sum_{l=t-T+1}^{t} \frac{1}{2R_l} \|Y_l - H_l(X_l^i)\|^2\right)}{\sum_{j=1}^{N} \exp\left(\sum_{l=t-T+1}^{t} \frac{1}{2R_l} \|Y_l - H_l(X_l^j)\|^2\right)} \tag{III.26}$$

Nous avons mis en évidence ici deux politiques possibles, parmi d'autres, de régularisation des observations. La première repose sur une atténuation progressive (exponentielle) des observations où l'on affecte un poids moindre aux observations passées. La seconde se propose de travailler avec une fenêtre glissante, qui ne prend en compte (avec le même poids) que les T dernières observations. Bien entendu, ces deux régularisations disparaissent asymptotiquement avec le nombre de particules, dans les démonstrations de convergence [17, 27].

L'algorithme particulaire reste donc identique quant à sa construction. Il convient seulement de remplacer la procédure de pondération (III.23) par l'une ou l'autre des expressions (III.25, III.26).

On peut représenter schématiquement l'évolution du réseau particulaire de la manière suivante :



III.2.4 Algorithme n-conditionnel (processus instables)

L'algorithme particulaire a priori avec oubli donne de bons résultats avec des processus stables. Lorsque l'on a affaire à des processus instables, les particules ont tendance à s'éloigner les unes des autres, et acquérir ainsi un poids négligeable : elles sont à nouveau mal utilisées, et toute démonstration de convergence nécessite un ingrédient supplémentaire.

L'algorithme n-conditionnel présenté ci-après, constitue une solution à ce problème. Il consiste à conditionner le tirage aléatoire des particules aux n dernières mesures : on est ainsi assuré que les particules restent dans un voisinage du processus à estimer, en raison des propriétés d'observabilité/détectabilité [27].

Pour introduire l'algorithme n-conditionnel, on met en évidence une autre décomposition de $dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$ ($[t] \triangleq \{ t-n+1, \ldots, t \}$), à partir de la règle de Bayes :

$$\begin{aligned} dP(X_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) &= \frac{dP(Y_{[t]}|X_{\underline{t}}, Y_{\underline{t-n}})dP(X_{\underline{t}}|Y_{\underline{t-n}})}{dP(Y_{[t]}|Y_{\underline{t-n}})} \\ &= \frac{dP(Y_{[t]}|X_{\underline{t}}, Y_{\underline{t-n}})dP(X_{[t]}|Y_{\underline{t-n}}, X_{\underline{t-n}})}{dP(Y_{[t]}|Y_{\underline{t-n}})}\, dP(X_{\underline{t-n}}|Y_{\underline{t-n}}) \end{aligned} \tag{III.27}$$

En appliquant à nouveau la règle de Bayes sur le premier terme du numérateur de l'équation III.27, et en utilisant les propriétés des processus de Markov :

$$\begin{aligned} dP(Y_{[t]}|X_{\underline{t}}, Y_{\underline{t-n}}) &= dP(Y_{[t]}|X_{[t]}, X_{\underline{t-n}}, Y_{\underline{t-n}}) \\ &= \frac{dP(X_{[t]}|X_{\underline{t-n}}, Y_{[t]}, Y_{\underline{t-n}})dP(Y_{[t]}|X_{\underline{t-n}}, Y_{\underline{t-n}})}{dP(X_{[t]}|X_{\underline{t-n}}, Y_{\underline{t-n}})} \\ &= \frac{dP(X_{[t]}|Y_{[t]}, X_{t-n})dP(Y_{[t]}|X_{t-n})}{dP(X_{[t]}|X_{\underline{t-n}}, Y_{\underline{t-n}})} \end{aligned}$$

On injecte ensuite cette expression dans l'équation III.27 :

$$\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = \frac{dP(X_{[t]}|Y_{[t]}, X_{t-n})dP(Y_{[t]}|X_{t-n})}{dP(Y_{[t]}|Y_{\underline{t-n}})}\, dP(X_{\underline{t-n}}|Y_{\underline{t-n}}) \qquad \text{(III.28)}$$

On itère cette décomposition (en posant t=nT) :

$$\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = \frac{\prod_{\tau=0}^{T-1} dP(Y_{[(\tau+1)n]}|X_{\tau n}) \prod_{\tau=0}^{T} dP(X_{[(\tau+1)n]}|Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})}{\int_{X_{\underline{t}}} \prod_{\tau=0}^{T-1} dP(Y_{[(\tau+1)n]}|X_{\tau n}) \prod_{\tau=0}^{T} dP(X_{[(\tau+1)n]}|Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})\, dX_{\underline{t}}} \qquad \text{(III.29)}$$

En se souvenant que :

$$\mathrm{dP}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = \bar{Z}_t(\mathrm{X}_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}})\ \mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}})$$

On obtient :

$$\begin{cases} \bar{Z}_t(\mathrm{X}_{\underline{t}}, Y_{\underline{t}}) = \dfrac{\prod_{\tau=0}^{T-1} dP\left(Y_{[(\tau+1)n]} \mid X_{\tau n}\right)}{\eta} = \dfrac{dP\left(Y_{[t]} \mid X_{t-n}\right)}{dP\left(Y_{[t]} \mid Y_{t-n}\right)} \bar{Z}_{t-n}(\mathrm{X}_{\underline{t-n}}, Y_{\underline{t-n}}) \\ \mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t}} \mid Y_{\underline{t}}) = \prod_{\tau=0}^{T-1} dP\left(X_{[(\tau+1)n]} \mid Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}\right) = dP(X_{[t]}|Y_{[t]}, X_{t-n})\mathrm{dQ}(\mathrm{X}_{\underline{t-n}} \mid Y_{\underline{t-n}}) \\ \eta : \quad \text{Constante de normalisation} \end{cases} \qquad \text{(III.30)}$$

Dans ce cas, pour construire la mesure de probabilité conditionnelle cherchée, on est ramené à la mesure de probabilité de transition $dP\left(X_{[(\tau+1)n]} \mid Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}\right)$ conditionnelle aux n dernières mesures.

Il s'agit donc, pour mettre en œuvre le filtre particulaire, de faire évoluer les particules i ($1 \leq i \leq N$) non plus suivant la loi a priori $\mathrm{dP}(\pi_t)$, mais selon $dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]} \mid Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}\right)$. Le principal problème réside dans le calcul ou la construction de cette nouvelle loi.

Remarque : Il est à noter que, dans le cas particulier où le modèle est linéaire non-gaussien, on sait facilement calculer cette loi de transition de façon explicite. Dans le cas contraire, nous sommes ramenés à l'approximation particulaire de cette loi conditionnelle, dont on montre qu'elle converge [17] pour n fini (n $\leq$ ordre du modèle).

Approximation convergente de la loi n-conditionnelle de transition : On peut réécrire cette loi à partir de la règle de Bayes :

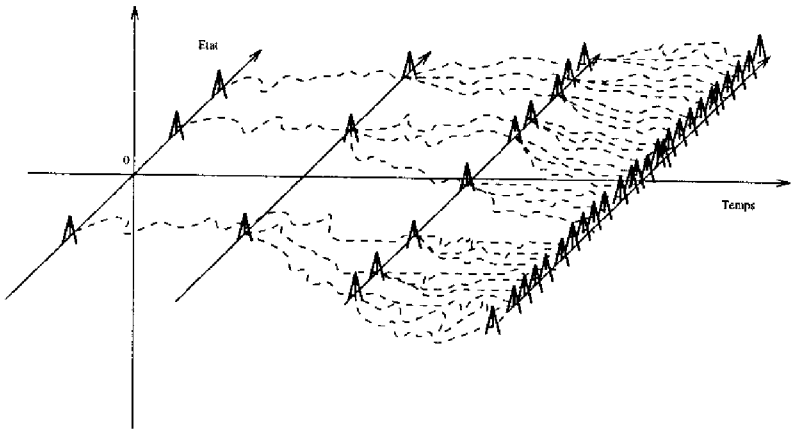
$$\begin{aligned} dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]} \mid Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}\right) &= \frac{dP\left(Y_{[(\tau+1)n]} \mid \pi_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}\right) dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]}\right)}{\int dP\left(Y_{[(\tau+1)n]} \mid \pi_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}\right) dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]}\right)} \\ &= \frac{z\left(X_{\tau n}, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi_{[(\tau+1)n]}\right) dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]}\right)}{\int z\left(X_{\tau n}, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi_{[(\tau+1)n]}\right) dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]}\right)} \\ &= \bar{z}\left(X_{\tau n}, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi_{[(\tau+1)n]}\right) dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]}\right) \end{aligned}$$

Cette décomposition met en évidence les deux lois de probabilités nécessaires pour construire l'exploration conditionnelle de l'espace d'état.

On peut donc, au vu de la relation précédente, décomposer la construction de la loi conditionnelle en deux parties :

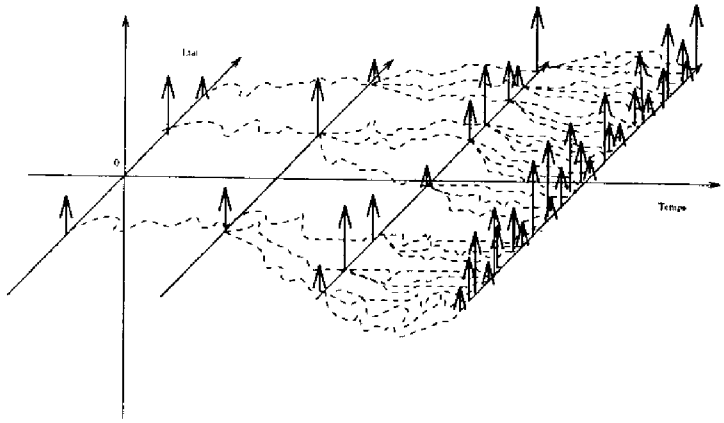
- Exploration a priori :

  Dans un premier temps, on tire, pour chaque particule $X^i_{\tau n}$, N' trajectoires de bruit $\pi^{i,j}_{[(\tau+1)n]}$ (j=1, ..., N') suivant la loi a priori $dP\left(\pi_{[(\tau+1)n]}\right)$. La capacité d'exploration de cette procédure s'illustre par l'arbre stochastique ci-dessous :



- Pondération et Choix de la trajectoire conditionnelle :

  Pour chaque particule i, la pondération $\bar{z}\left(X^i_{\tau n}, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi^{i,j}_{[(\tau+1)n]}\right)$, non-normalisée, de chaque trajectoire j (j = 1, ..., N') issue de $X^i_{\tau n}$, fournit la loi de transition n-conditionnelle du peigne de Dirac. On tire ensuite suivant cette loi l'état final d'une trajectoire, parmi les N' trajectoires précédemment obtenues. La capacité d'exploration conditionnelle s'illustre par l'arbre stochastique (pondéré) :



En résumé, on construit le filtre particulaire de la manière suivante :

1. **Initialisation :** Identique au cas a priori.
2. **Evolution/Sélection :**
   (a) Chaque particule $(X^i_{t-n})_{i=1,\dots,N}$ donne naissance à M pseudo-particules $X^{i,j}_{t-n}$ (j=1,...,M) qui ont initialement la même position dans l'espace d'état que X^i_{t-n} et dont les poids $p^{i,j}_{t-n}$ sont égaux à $\frac{1}{M}$.
   (b) Ces M pseudo-particules avancent de n pas selon la dynamique du système, en tirant M bruits de dynamique $\pi^{i,j}_{[t]}$.
   (c) Les poids normalisés $p^{i,j}_t$ associés à ces M particules, qui utilisent les mesures des instants t-n+1 à t, s'écrivent grâce à la loi de Bayes :

$$p^{i,j}_t = \frac{P(Y_{[t]}|\pi^{i,j}_{[t]}, X^i_{t-n})}{\sum_{j=1}^{M} P(Y_{[t]}|\pi^{i,j}_{[t]}, X^i_{t-n})} \tag{III.31}$$

   (d) On tire aléatoirement une de ces M particules, selon les poids normalisés $p^{i,j}_t$ (et en supprimant les M-1 particules restantes). On affecte alors la particule sélectionnée $X^{i,j}_t$ à la particule i :

$$X^i_t = X^{i,j}_t$$

3. **Pondération :** On calcule de manière récursive et pour chaque particule le poids normalisé :

$$p^i_t = p^i_{t-n} \frac{\sum_{j=1}^{M} P(Y_{[t]}|\pi^{i,j}_{[t]}, X^i_{t-n})}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} P(Y_{[t]}|\pi^{i,j}_{[t]}, X^i_{t-n})} \tag{III.32}$$

4. **Estimation :** Identique au cas a priori.

Remarque : Comme dans le cas précédent, afin de prévenir un comportement dégénérescent dans le temps des pondérations des particules, on doit adjoindre aux pondérations l'oubli du passé lointain (fenêtre, exponentiel, ...), qui ne disparaît que pour $N \to +\infty$.

III.2.5 Extensions de l'algorithme

III.2.5.1 Redistribution sur les pondérations

Indépendamment de la stabilité des trajectoires, on remarque aisément que les pondérations p_t^i des particules sont d'autant plus petites que celles-ci s'éloignent du processus à estimer et sont peu vraisemblables. Si le poids relatif de ces particules est très faible, elles n'ont qu'une contribution minime dans la construction de l'estimateur : elles sont donc sous-utilisées dans la loi des grands nombres qui gouverne l'algorithme. Même si la convergence est assurée pour N grand, il est utile d'accélérer la convergence en les redistribuant, en même nombre, mais de façon plus conforme aux pondérations probabilistes obtenues.

Pour cela, on redistribue périodiquement les particules i suivant les pondérations conditionnelles obtenues ; leurs poids sont alors ré-initialisés à $\frac{1}{N}$. Les supports les plus "vraisemblables" ayant plus de chances d'attirer les particules, ils en reçoivent généralement plusieurs. Dans les régions les moins vraisemblables, les particules ne sont pas redistribuées et meurent.

La méthode de redistribution présentée constitue l'alternative la plus "brute" à la dispersion des particules. On peut améliorer sensiblement cette politique, en choisissant par exemple :

- d'utiliser une période de redistribution adaptative, en fonction de la dispersion relative des particules.
- de redistribuer, non plus de manière autoritaire sur la particule désignée, mais de façon diffuse dans un voisinage de celle-ci (assurant de la sorte, une capacité d'exploration supplémentaire). La variance de cette "tache" peut d'ailleurs être calculée de manière adaptative.
- d'opter pour une redistribution selon les vraisemblances, qui semble plus notamment plus adaptée à un environnement multi-hypothèses, par exemple.

III.2.5.2 Redistribution autour du capteur

Cette méthode peut être mise en œuvre lorsque l'instabilité du vecteur d'état se manifeste sur les composantes additivement observées dans la mesure au moyen de l'équation III.2. C'est par exemple le cas dans le problème de poursuite RADAR, où la position de la cible est a priori instable.

Dans ce cas, une redistribution simple suffit à stabiliser les supports X_t^i de la manière suivante : on tire N échantillons de bruit ν_t de mesure d'où l'on déduit, sachant Y_t, les composantes additivement observées dans Y_t, ainsi stabilisées.

En pratique, on fait porter ce tirage sur une portion N_2 <N des particules. Il est aussi à noter que l'on peut combiner les deux algorithmes de redistributions précédents. Ceci permet notamment d'obtenir des vitesses de convergence du filtre particulaire significativement plus importantes.

Cette opération est alors itérée de manière périodique, selon les mêmes critères que précédemment.

III.2.5.3 Filtre de Kalman-conditionnel

On cherche désormais à étudier le système, utile par la suite :

$$\begin{cases} \text{Dynamique} & \begin{cases} X_t = F_t(X_{t-1}, \pi_t) \\ \sigma_t = \Phi\sigma_{t-1} + W_t \end{cases} \\ \\ \text{Mesure} & Y_t = H(X_t)\sigma_t + \nu_t \end{cases} \tag{III.33}$$

où F_t et H sont des fonctions non-linéaires, Φ une fonction linéaire, π_t un bruit indépendant, ν_t et W_t deux bruits gaussiens indépendants de moyenne nulle et de variances respectives R_t et Q_t.

La dynamique de X est ici non-linéaire, alors que celle de σ est linéaire. De plus, conditionnellement à l'état X, l'observation est linéaire en σ.

Il existe donc deux manières de résoudre ce problème, par la méthode particulaire :

1. Soit on considère le vecteur d'état complet $X_t' = (X_t, \sigma_t)$, et l'on se ramène ainsi au système (III.1, III.2) déjà présenté, sur lequel on applique directement la méthode particulaire.

2. Soit on remarque que, conditionnellement à X, la partie dynamique/observation de σ est linéaire gaussienne : il est alors inutile d'utiliser la méthode particulaire pour estimer σ, puisque le filtre de Kalman est optimal dans ce cas.

Le filtre de Kalman-conditionnel s'écrit alors :

1. **Initialisation :** Les particules (X_0^i, σ_0^i) sont initialisées en fonction de l'information dont on dispose a priori sur le vecteur d'état, c'est-à-dire qu'elles sont tirées selon les lois a priori $p(\pi_0)$ et $p(W_0)$, et leurs poids p_0^i sont égaux à $\frac{1}{N}$ (où N est le nombre de particules).

2. **Evolution :** Les particules $(X_{t-1}^i)_{i=1...N}$ de l'espace d'état évoluent selon le flot du système, au moyen de N tirages aléatoires π_t^i selon la loi $p(\pi_t)$:

$$X_t^i = F_t(X_{t-1}^i, \pi_t^i) \qquad \text{pour i=\{1,...,N\}} \tag{III.34}$$

3. **Kalman-conditionnel :** On calcule pour chaque particule, le filtre de Kalman associé :

$$\begin{cases} \widehat{\sigma}^i_{t|t-1} = \Phi\widehat{\sigma}^i_{t-1|t-1} \\ \widetilde{P}^i_{t|t-1} = \Phi\widetilde{P}^i_{t-1|t-1}\Phi^T + Q_t \\ K^i_t = \widetilde{P}^i_{t|t-1}H(X^i_t)^T\left(H(X^i_t)\widetilde{P}^i_{t|t-1}H(X^i_t)^T + R_t\right)^{-1} \\ \widehat{\sigma}^i_{t|t} = \widehat{\sigma}^i_{t|t-1} + K^i_t\left(Y_t - H(X^i_t)\widehat{\sigma}^i_{t|t-1}\right) \\ \widetilde{P}^i_{t|t} = \widetilde{P}^i_{t|t-1} - K^i_t\left(H(X^i_t)\widetilde{P}^i_{t|t-1}H(X^i_t) + R_t\right)K^{i\,T}_t \end{cases} \tag{III.35}$$

4. **Pondération :** On note $\widetilde{Y}^i_t$ la nouvelle observation associée à la particule i :

$$\widetilde{Y}^i_t = Y_t - H(X^i_t)\widehat{\sigma}^i_{t|t-1} = H(X^i_t)(\sigma_t - \widehat{\sigma}^i_{t|t-1}) + \nu_t = H(X^i_t)\tilde{\sigma}_{t|t-1} + \nu_t$$

On remarque que l'innovation $\widetilde{Y}^i_t$ est une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance $H(X^i_t)\widetilde{P}^i_{t|t-1}H(X^i_t)^T + R_t$.

La pondération p^i_t de chaque particule s'écrit :

$$p^i_t = \frac{P(\widetilde{Y}^i_t|X^i_t)}{\sum_{j=1}^{N} P(\widetilde{Y}^j_t|X^j_t)} =$$

$$\frac{\exp\left[-0.5\left(Y_t - H(X^i_t)\widehat{\sigma}^i_{t|t-1}\right)^T\left(H(X^i_t)\widetilde{P}^i_{t|t-1}H(X^i_t)^T + R_t\right)^{-1}\left(Y_t - H(X^i_t)\widehat{\sigma}^i_{t|t-1}\right)\right]}{\sum_{j=1}^{N}\exp\left[-0.5\left(Y_t - H(X^j_t)\widehat{\sigma}^j_{t|t-1}\right)^T\left(H(X^j_t)\widetilde{P}^j_{t|t-1}H(X^j_t)^T + R_t\right)^{-1}\left(Y_t - H(X^j_t)\widehat{\sigma}^j_{t|t-1}\right)\right]} \tag{III.36}$$

5. **Estimation :** L'estimateur particulaire s'écrit :

$$\begin{cases} \widehat{X}_t = \sum_{i=1}^{N} p^i_t X^i_t \\ \widehat{\sigma}_t = \sum_{i=1}^{N} p^i_t \widehat{\sigma}^i_{t|t} \end{cases} \tag{III.37}$$

Remarque : Cette méthode, outre le fait qu'elle exploite de manière optimale la partie linéaire du modèle, permet d'économiser un nombre significatif de particules, donc du temps de calcul.

Chapitre IV

Poursuite de cibles en données brutes

Nous montrons maintenant le gain que peut apporter un traitement direct de l'information radar en sortie d'échantillonneur, par la technique particulaire présentée au chapitre précédent. Nous comparons ces résultats aux pré-traitements habituels d'une chaîne radar, essentiellement basés sur des hypothèses locales de stationnarité.

Nous verrons que cette étape met en évidence de fortes non-linéarités dans la nature du capteur, qui peuvent néanmoins être abordées de façon optimale par la technique proposée.

IV.1 Hypothèses

Le résultats présentés dans ce chapitre supposent un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sur le modèle de cible, à savoir :

- la cible est ponctuelle : c'est dire qu'elle n'a pas d'étendue spatiale vis-à-vis du signal reçu.
- il n'y a qu'une cible dans la cellule de résolution (distance, azimut, site, Doppler) du radar.
- le mouvement de la cible est localement stationnaire sur la durée d'une impulsion radar, c'est-à-dire que les caractéristiques de la cible restent constantes lors de son illumination.

On fait ensuite l'hypothèse que l'onde radar est sphérique, et qu'elle se propage en espace libre (milieu uniforme, isotrope, sans trajets multiples, fouillis, effets de polarisation, brouillage, ...), et que le processus de réflexion est linéaire [76] et ne dépend pas de la fréquence : l'enveloppe du signal n'est donc pas (ou peu) déformée.

Pour respecter l'impartialité des comparaisons, la chaîne de prétraitement est la même quel que soit le dispositif qui suit (filtre "classique" ou particulaire). Toutes les caractéristiques du radar sont supposées connues, certaines pouvant présenter un caractère aléatoire mais de statistique connue (ex. bruit thermique, supposé blanc, gaussien et stationnaire).

IV.2 Traitement l'information radiale seule (1D)

Afin de comparer efficacement la solution proposée aux traitements habituels, on commence par présenter les performances obtenues dans le cas monodimensionnel, où seule importe l'information radiale.

IV.2.1 Position du problème

En l'absence de décalage Doppler, l'équation I.5 se réécrit, après démodulation :

$$Y_t = \frac{1}{D_t^2} K_0 e^{j\varphi_0} \rho e^{j\varphi} h(t-\tau) + \nu_t$$

où ν_t est un bruit gaussien indépendant de moyenne nulle et de variance r.

Suivant les cas, on pourra aborder plusieurs types de radar, plus ou moins académiques selon que l'on considère la réception cohérente ou incohérente.

On peut mettre en évidence plusieurs modèles correspondant à des modèles plus ou moins physiques, qui sont en fait des cas particuliers de l'équation précédente :

IV.2.1.1 Traitement du retard seul (atténuation constante)

A des fins comparatives, on peut encore simplifier le modèle précédent, en ne tenant compte que du temps d'aller-retour du signal, ce qui revient à supposer constante l'atténuation. Le capteur s'écrit alors de manière très simplifiée :

$$\boxed{Y_t = K_0\ h(t - 2\,\frac{D_t}{c}) \ +\ \nu_t} \qquad \text{(IV.1)}$$

Ceci n'est qu'un cas académique, mais permet d'étudier le comportement du filtre particulaire par rapport au cas où le filtre classique se comporte bien, à rapport signal/bruit constant.

IV.2.1.2 Traitement des retard et atténuation (cohérence d'amplitude)

Dans le cadre classique avec porteuse, le radar sans Doppler est nécessairement non-cohérent, ce qui impose un bruit multiplicatif en guise de coefficient d'émission/réflexion. La cohérence de phase entraîne obligatoirement la présence d'effet Doppler, dû à la démodulation de porteuse.

Il existe un cas de radar sans Doppler et néanmoins cohérent : il s'agit du radar sans porteuse. C'est un cas essentiellement académique, en raison de ses limitations, mais qui peut se justifier sous certaines conditions d'emploi.

Il est surtout très instructif ici à des fins de comparaison, si l'on veut connaître les performances intrinsèques du traitement radial seul. En effet, la phase porteuse étant absente, seule importe la cohérence d'amplitude, c'est à dire l'invariance de l'impulsion émise entre chaque récurrence radar.

Dans ce cas le modèle se résume à :

$$\boxed{Y_t = \frac{K_0}{D_t^2}\, h(t - 2\,\frac{D_t}{c}) \;+\; \nu_t} \tag{IV.2}$$

Remarque : Ici l'information se trouve dans l'amplitude du signal, ce que l'on peut voir en réécrivant le modèle de capteur sous la forme suivante :

$$P(Y_t|D_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, r}}\, e^{-\frac{1}{2r}\,\|\, Y_t - \frac{K_0}{D_t^2}\, h(t - 2\,\frac{D_t}{c})\,\|^2} \tag{IV.3}$$

IV.2.1.3 Traitement des retard, atténuation et bruit de phase (radar non-cohérent en phase)

Nous présentons ici le cas intermédiaire mais néanmoins classique d'un radar non-cohérent en phase, mais cohérent en amplitude.

Le modèle de capteur s'écrit dans ce cas :

$$\boxed{Y_t = \frac{K_0}{D_t^2}\, \rho\, e^{j\varphi}\, h(t - 2\,\frac{D_t}{c}) \;+\; \nu_t} \tag{IV.4}$$

avec φ bruit blanc uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Alors :

$$P(Y_t|D_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{1}{2r}\left(\|Y_t\|^2 + (\frac{h}{D_t^2}\rho)^2\right)}\, I_0\left(\frac{h\rho\|Y_t\|^2}{rD_t^2}\right) \tag{IV.5}$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Les propriétés, dans ce cas là, sont théoriquement intermédiaires entre le radar incohérent en phase/amplitude (cas suivant) et le radar cohérent de phase précédent.

IV.2.1.4 Traitement des retard, atténuation et bruit de phase (radar non-cohérent en phase et amplitude)

Nous étudierons ici le cas extrême d'un radar non-cohérent en phase/amplitude. On fait alors l'hypothèse d'un bruit de phase uniforme et d'un bruit d'amplitude de type Rayleigh [16, 76]. Dans ce cas, le terme de réflexion global est un bruit multiplicatif w de type gaussien complexe.

Le capteur ainsi défini se met sous la forme :

$$\boxed{Y_t = \frac{K_0}{D_t^2}\, w_t\, h(t - 2\,\frac{D_t}{c}) \;+\; \nu_t} \tag{IV.6}$$

où w_t et ν_t sont deux bruits blancs gaussiens complexes :

$$\begin{cases} w_t = w_t^1 + i\, w_t^2 \text{ avec } E[(w_t^1)^2] = E[(w_t^2)^2] = \frac{q}{2} \\ \nu_t = \nu_t^1 + i\, \nu_t^2 \text{ avec} E[(\nu_t^1)^2] = E[(\nu_t^2)^2] = \frac{r}{2} \end{cases}$$

Ce modèle de fluctuation de cible, très utilisé en théorie du radar, est appelé modèle de Swerling I quand on considère une fluctuation lente à l'échelle de la récurrence, et modèle de Swerling II lorsque celle-ci agit d'impulsion à impulsion. C'est d'ailleurs ce dernier cas que nous étudions par la suite.

Le calcul de la probabilité du signal [46] met en évidence la puissance reçue, contrairement aux deux premiers cas :

$$P(Y_t|D_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, q(h^2 + \frac{r}{q})}}\, e^{-\frac{1}{2q} \| Y_t \|^2 (\frac{K_0^2}{D_t^4} h^2 + \frac{r}{q})^{-1}} \tag{IV.7}$$

où

$$h = h\left(t - 2\,\frac{D_t}{c}\right)$$

IV.2.2 Solution "usuelle"

Grossièrement le problème "classique" en radar, dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'au retard, se pose de la manière suivante : la mesure y_t contient-elle le signal retardé (problème de la détection), et quelle est la valeur de ce retard τ_t (problème d'estimation)?

Ces deux problèmes en forment évidemment un seul puisque la détection s'effectue par détermination de la vraisemblance maximale du retard τ_t, elle-même fournie par l'estimation optimale de τ_t. Tout repose donc sur l'estimation optimale de τ_t.

Les techniques usuelles sont inaptes à estimer τ_t globalement, c'est à dire en tant que processus stochastique lié à la cible. Elles réduisent donc le problème à une analyse à très court terme, durant laquelle les éléments cinématiques de cible sont localement constants dans le temps. S'agissant du radar sans Doppler, cela revient à estimer τ_t comme un paramètre fixe pendant un intervalle de temps $]t - T, t]$ nécessairement limité par les déplacements de la cible, ce qui ampute considérablement l'information totale sur τ_t contenue dans les mesures. C'est à cette technique usuelle (extracteur classique) que nous comparons la solution particulaire du filtrage non-linéaire qui permet d'intégrer de manière optimale l'ensemble des mesures, pour toute dynamique de cible.

Nous abordons ici le traitement numérique usuel des mesures radar, pour un radar de poursuite. Nous ne détaillerons que très brièvement les algorithmes pratiques, car nous ne les mettrons pas en œuvre tels quels, mais nous utiliserons plutôt pour la comparaison avec les techniques non-linéaires, un algorithme localement optimal qui

est en fait l'extracteur classique pour ce problème.

Extracteur "classique" localement optimal

L'extracteur classique que l'on construit repose sur une discrétisation de l'espace d'état selon une grille glissante en position. La finesse de la grille conditionnant bien sûr directement la qualité de l'estimation de position.

Rappelons que, dans le cas de la poursuite, on a des informations initiales de position de la cible qui permettent de restreindre l'espace à discrétiser.

Pour chaque point D^g de la grille, on reconstruit le signal échantillonné que l'on attend en réception (connaissant la forme de l'impulsion émise, la loi d'atténuation en amplitude du signal,...), et on calcule à chaque instant, la probabilité $p(Y_t|D^g)$ du signal reçu Y_t, conditionnelle à cette position.

Par exemple, dans le cas où l'on ne traite que le retard seul (voir paragraphe IV.2.1.1) :

$$P(Y_t|D^g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ r}}\ e^{-\frac{1}{2r}\ \|\ Y_t - h(t - 2\ \frac{D^g}{c})\ \|^2}$$

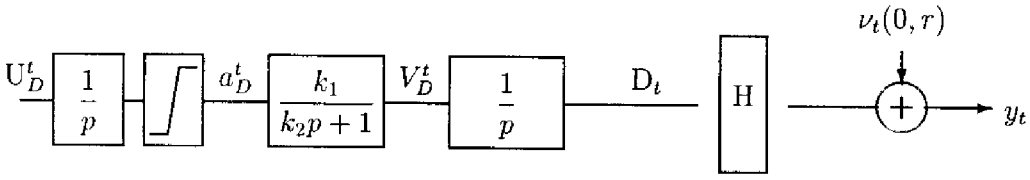
Pour le problème du traitement du retard/atténuation et retard/atténuation/bruit de phase, on pourra se reporter aux expression IV.3 et IV.7.

Remarque : La qualité d'un tel extracteur est évidemment améliorée en intégrant un certain nombre n de récurrences radar, soit :

$$P(Y_t^{t+n-1}|(D^g)_t^{t+n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} P(Y_{t+i}|D^g)$$

On extrait alors l'estimé local $\widehat{D}_t^l$ soit en calculant la somme de chaque position D^g pondérée par la probabilité conditionnelle associée (représentant l'espérance conditionnelle à n récurrences), soit en extrayant le maximum de cette probabilité conditionnelle discrétisée (équivalent à celui du corrélateur sur n récurrences).

Filtre de Kalman associé : L'avantage d'un tel extracteur est qu'il délivre une position estimée localement $\widehat{D}^l$. Le modèle du capteur qui en découle est alors $Y = \widehat{D}^l + v$, et on peut donc mettre en œuvre aisément un filtre de Kalman à plus long terme prenant en compte la dynamique de cible. Dans les résultats présentés, nous avons utilisé le modèle de Singer modifié décrit précédemment :



La matrice de dynamique associée s'écrit simplement (où T est le pas de discrétisation) :

$$\Phi = e^{\mathbf{F}T} = \begin{pmatrix} 1 & k_2(1-e^{-T/k_2}) & k_1k_2(e^{-T/k_2}-1+T/k_2) \\ 0 & e^{-T/k_2} & k_1(1-e^{-T/k_2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{IV.8}$$

Aux échelles de temps de la récurrence radar, on peut faire une approximation au premier ordre de l'exponentielle en négligeant les termes d'ordre supérieur. La matrice se réécrit :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{T}{k_2} & \dfrac{k_1}{k_2}T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{IV.9}$$

On retrouve ici la matrice de dynamique obtenue en discrétisant les équations de dynamique II.4 par le schéma d'Euler.

La construction du filtre de Kalman associé à la dynamique de type Singer modifié, pour un radar de poursuite, ne pose désormais plus de problème et conduit à l'estimé de l'état $\widehat{X}$ par filtrage de Kalman [39] :

- **Prédiction :**

$$\begin{cases} \widehat{X}_{t|t-1} = \Phi\widehat{X}_{t-1|t-1} \\ \widetilde{P}_{t|t-1} = \Phi\widetilde{P}_{t-1|t-1}\Phi^T + Q_t \end{cases}$$

- **Calcul du gain :**

$$K_t = \widetilde{P}_{t|t-1}H^T\left[H\widetilde{P}_{t|t-1}H^T + R\right]$$

- **Correction :**

$$\begin{cases} \widehat{X}_{t|t} = \widehat{X}_{t|t-1} + K_t\left(y_t - H\widehat{X}_{t|t-1}\right) \\ \widetilde{P}_{t|t} = \widetilde{P}_{t|t-1} - K_t\left(H\widetilde{P}_{t|t-1}H^T + R_t\right)K_t^T \end{cases}$$

C'est à cette approche classique mettant en jeu deux opérations localement optimales, que nous comparons la solution particulaire globalement optimale.

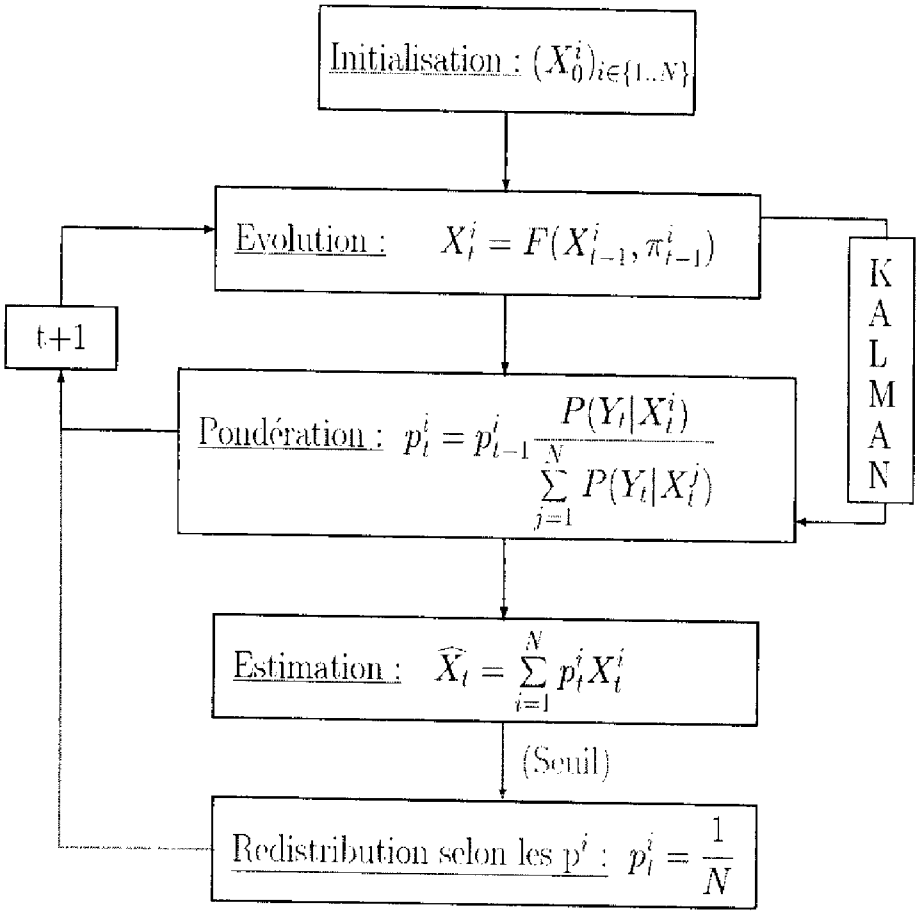
IV.2.3 Filtre particulaire (globalement optimal)

Pour résumer, les équations générales régissant le problème monodimensionnel s'écrivent :

$$\begin{cases} \begin{cases} da_D^t = w_D^t + \pi_D^t \\ \dot{V}_D^t = \dfrac{k_1 a_D^t - V_D^t}{k_2} \\ \dot{D}_t = V_D^t \end{cases} & \text{Dynamique} \\ Y_t = H(t - 2\,\frac{D_t}{c}) + \nu_t & \text{Mesure} \end{cases} \tag{IV.10}$$

H est une fonction non-linéaire de la distance radiale, dont l'expression est dictée par le cas étudié (retard seul, retard/atténuation, ...), ν_t est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance r, w_D^t un bruit blanc gaussien $\mathcal{N}_{(0,\sigma)}$, et π_D^t un bruit blanc gaussien $\mathcal{N}_{(0,\sigma')}$ à occurrence de saut λ poissonienne.

Nous rappelons que la méthode proposée repose sur une exploration/pondération de l'espace d'état par particules aléatoires dont nous schématisons, ci-dessous, le fonctionnement général.



La solution particulaire s'articule de la manière suivante :

1. **Initialisation :** Les N particules $X_t^i = ((a_D^t)^i, (V_D^t)^i, D_t^i)$ sont initialisées selon l'information dont on dispose a priori.

2. **Evolution :** Elles évoluent ensuite selon le modèle de dynamique, discrétisé par le schéma d'Euler :

$$\begin{cases} (a_D^{t+1})^i = (a_D^t)^i + (w_D^t)^i + (\pi_D^t)^i \\ (V_D^{t+1})^i = \dfrac{k_1(a_D^t)^i - (V_D^t)^i}{k_2} T + (V_D^t)^i \\ D_{t+1}^i = D_t^i + (V_D^t)^i T \end{cases} \tag{IV.11}$$

   Où T est la période de répétition des impulsions.

3. **Pondération :** Chaque particule est caractérisée par son poids p_t^i :

$$p_t^i = \frac{P(Y_t|D_t^i)}{\sum_{j=1}^{N} P(Y_t|D_t^i)}$$

   où $P(Y_t|D_t^i)$ est le modèle du capteur, c'est-à-dire qu'il dépend du type de radar envisagé, soit :

   - **Pour le retard seul** :

$$P(Y_t|D_t^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ r}}\ e^{-\frac{1}{2r}\ \|\ Y_t -\ h(t - 2\ \frac{D_t^i}{c})\ \|^2}$$

   - **Pour les retard et atténuation** :

$$P(Y_t|D_t^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ r}}\ e^{-\frac{1}{2r}\ \|\ Y_t - \frac{K_0}{(D_t^i)^2}\ h(t - 2\ \frac{D_t^i}{c})\ \|^2}$$

   - **Pour les retard, atténuation et bruit de phase** (radar non-cohérent phase) :

$$P(Y_t|D_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{1}{2r}\left(\|Y_t\|^2 + (\frac{h}{(D_t^i)^2}\rho)^2\right)}\ I_0\left(\frac{h\rho\|Y_t\|^2}{r(D_t^i)^2}\right)$$

- **Pour les retard, atténuation et bruit de phase** (radar non-cohérent phase/amplitude) :

$$P(Y_t|D_t^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ q(h^2+\frac{r}{q})}}\ e^{-\frac{1}{2q}\ \|\ Y_t\ \|^2\ (\frac{K_0^2}{(D_t^i)^4}h^2+\ \frac{r}{q})^{-1}}$$

avec $h\ =\ h\left(t-2\ \frac{D_t^i}{c}\right)$.

4. **Estimation** : L'estimateur particulaire s'écrit alors :

$$\widehat{X}\ =\ \sum_{i=1}^{N} p_t^i X_t^i$$

On itère ainsi au cours du temps, les parties évolution, pondération et estimation.

IV.2.4 Résultats de simulation

Nous présentons ici les résultats numériques obtenus en poursuite dans le cas mono-dimensionnel sans Doppler, pour le filtre particulaire d'une part, et pour l'extracteur classique à sommation suivi d'un filtre de Kalman, d'autre part.

Seuls le traitement du retard seul (paragraphe IV.2.1.1) et le modèle de Swerling II (paragraphe IV.2.1.4) sont présentés. On pourra trouver les autres cas, dont le traitement est en tout point identique, dans [59].

D'un point de vue pratique, nous avons pris les caractéristiques suivantes pour le radar de poursuite :

$$\begin{cases} \textbf{Forme de l'impulsion :}\ \text{Rectangulaire} \\ \textbf{Largeur d'impulsion :}\ 0.125\ \mu s \\ \textbf{Période de répétition des impulsions :}\ 200\ \mu s \\ \textbf{Fréquence d'échantillonnage :}\ 8\ MHz \end{cases}$$

Nous nous plaçons en sortie de filtre adapté. On récupère donc un signal utile triangulaire de largeur double de la largeur d'impulsion, avec deux mesures du signal utile, conformément à l'échantillonnage optimal (Cf. paragraphe I.1).

IV.2.4.1 Retard seul

Thème :

Le cas du traitement du retard seul est, comme on l'a vu précédemment, un cas académique ne tenant compte ni de l'effet Doppler ni de l'atténuation du signal en $\frac{1}{D^2}$: nous travaillerons donc ici à rapport signal/bruit constant et connu (6.8dB).

Nous présentons ici les résultats obtenus pour un mobile s'éloignant du radar, avec les caractéristiques dynamiques initiales suivantes :

$$\text{Initialisation} \quad \begin{cases} \textbf{Commande de pilotage : } 30 \\ \textbf{Vitesse : } 450\ m/s \\ \textbf{Position : } 20\ km \\ \textbf{Rapport signal/bruit (constant) : } 6.8\ dB \end{cases}$$

Afin de s'assurer de la robustesse de l'algorithme, on fait subir au mobile des changements de commande de pilotage à différents instants :

$$\begin{cases} \textbf{à t=1.5s : } 50 \\ \textbf{à t=3s : } 40 \\ \textbf{à t=4.5s : } 10 \\ \textbf{à t=6s : } -10 \end{cases}$$

A titre de comparaison, nous produisons les résultats obtenus par l'extracteur localement optimal explicité plus haut, qui qui est construit sur la base de l'intégration de 10ms de signal, soit un gain de 17dB. Rappelons que cet extracteur est construit sous l'hypothèse de stationnarité de la cible, pendant la durée d'intégration. Dans la simulation étudiée, la cible atteint une vitesse crête de 800m/s, c'est-à-dire qu'elle parcourt 8 mètres pendant la durée d'intégration. La largeur de la case distance est ici d'environ 19m.

Estimation :

La sortie de l'extracteur "classique" intégrant 10ms est présentée en IV.1. La reconstitution de la commande de pilotage pour le filtre particulaire et le filtre linéaire apparaît sur les courbes IV.2, et celle de la vitesse sur IV.3. L'erreur sur la vitesse et l'erreur sur la position sont présentés en IV.4.

On remarque la qualité de l'estimation particulaire vis-à-vis du filtre linéaire, tant au niveau du suivi des créneaux de commande, que du comportement en régime permanent. On peut d'ailleurs justifier ce fait de manière plus objective, en calculant pour chaque filtre l'écart-type de l'erreur d'estimation sur la vitesse σ_{V_D} et la position σ_D (dans la partie stationnaire) :

$$\begin{cases} \text{Particulaire} \begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 0.4m/s \\ \sigma_D \simeq 0.3m \end{cases} \\ \text{Kalman} \begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 6.9m/s \\ \sigma_D \simeq 1.2m \end{cases} \end{cases}$$

Prédiction :

De telles disparités sur la précision de l'estimée ont engendré des comportements en prédiction très différents, que nous avons résumé ci-dessous, en présentant les performances des prédicteurs à 2 et 5 secondes pour différents détecteurs de proximité.

	Linéaire			Particulaire		
	p(.< 20m)	p(.< 10m)	p(.< 5m)	p(.< 20m)	p(.< 10m)	p(.< 5m)
Préd. à 2s	0.33	0.17	0.07	0.99	0.98	0.94
Préd. à 5s	0.10	0.04	0.02	0.9	0.88	0.72

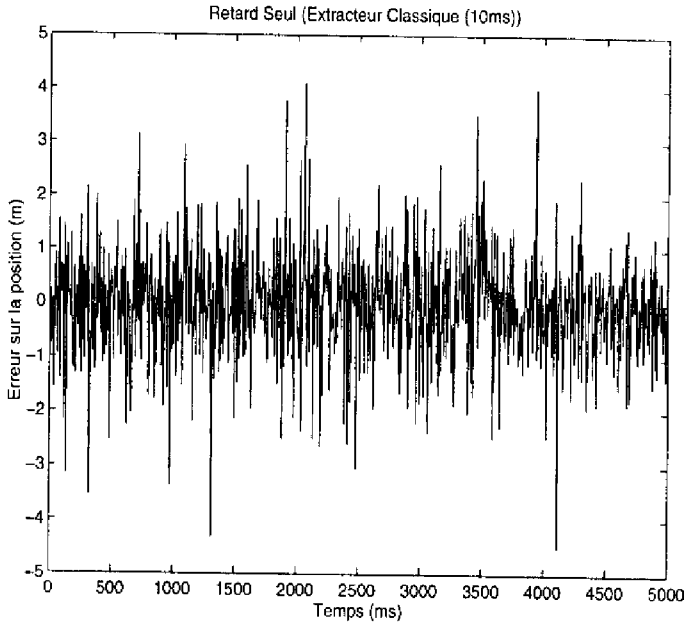


Figure IV.1: Extracteur "classique" (10ms)

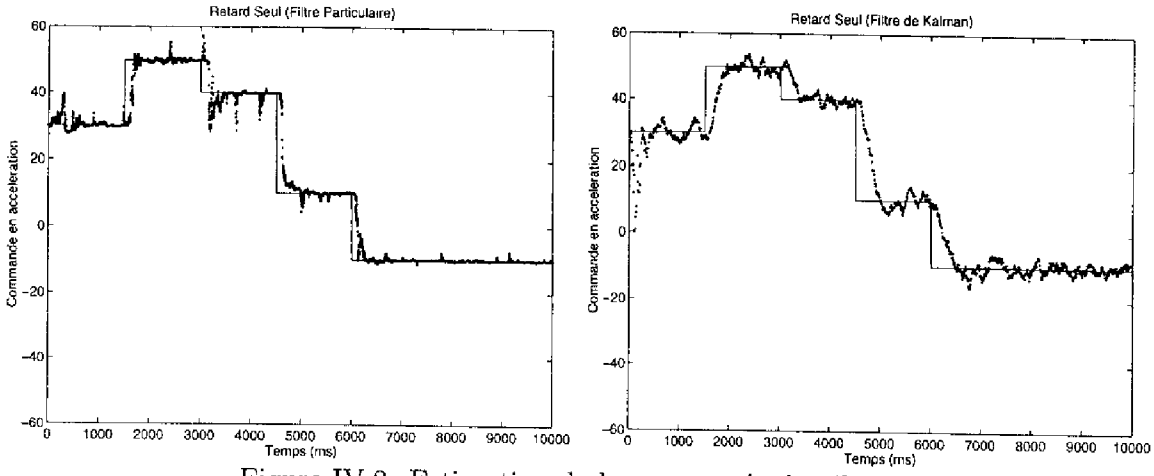


Figure IV.2: Estimation de la commande de pilotage

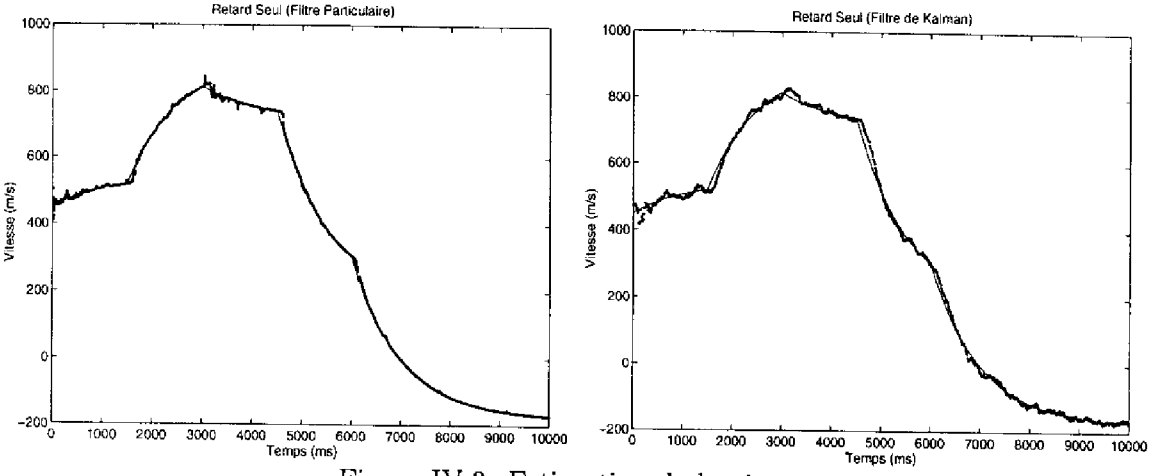


Figure IV.3: Estimation de la vitesse

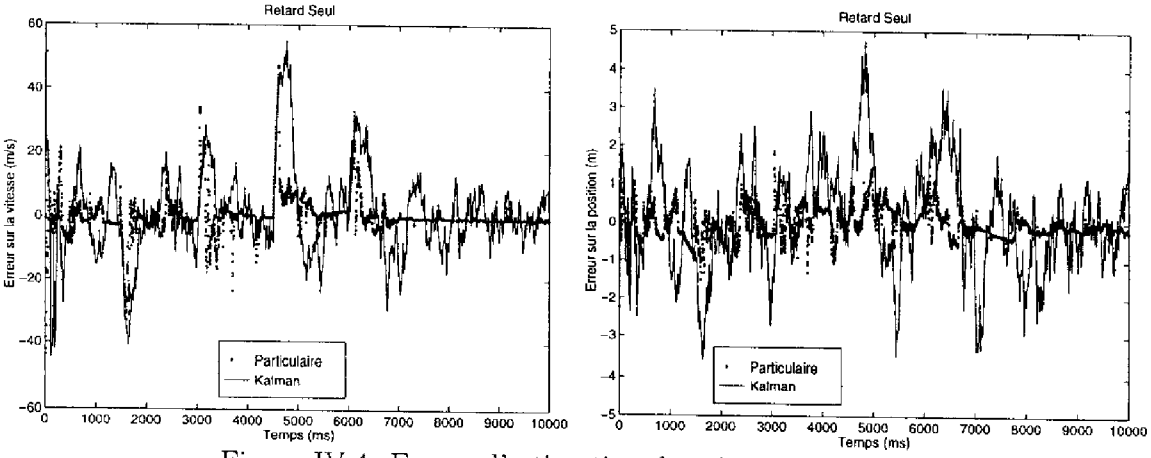


Figure IV.4: Erreur d'estimation des vitesse et position

IV.2.4.2 Radar incohérent (phase/amplitude)

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus dans le cas du traitement du retard, de l'atténuation et du bruit de phase. On se trouve donc ici dans le cadre d'un radar non-cohérent, pour lesquels on ne peut que traiter la puissance reçue et non plus l'amplitude comme nous le faisions pour le cas précédent. Par la suite, on se place d'emblée dans le cas le plus défavorable : porteuse à bruit de phase uniforme et amplitude Rayleigh agissant d'une récurrence à l'autre (modèle de Swerling II).

Configuration de fuite :

Les conditions initiales sont les mêmes que pour le paragraphe précédent, avec toutefois l'adjonction d'une atténuation du rapport signal/bruit, qui passe de 6.8dB à l'instant initial à 0.8dB à l'instant final (au bout de 10s).

Nous avons représenté l'extracteur classique IV.5, qui intègre 30ms, sur deux échelles en raison de la présence d'un pic dans l'estimation de la position qui donne une erreur d'environ 800m. La présence de ce pic peut être expliquée par un aléa dans le bruit de phase qui fait que l'amplitude du signal reçu est très faible, ou alors qu'un bruit est confondu, en raison de sa puissance importante par rapport au signal, avec le signal lui-même et fait voir la cible là où elle ne se trouve pas.

Cette erreur importante sur la position va engendrer, comme on le verra plus loin, des problèmes pour la stabilité du filtre linéaire. Pour ces raisons, nous allons présenter les résultats obtenus pour le filtre particulaire et deux filtres linéaires : l'un à faible gain (écart-type de bruit de mesure égal à 40m) et l'autre à fort gain (écart-type de bruit de mesure égal à 3m).

Les courbes IV.6, IV.7, IV.8 présentent les résultats obtenus pour un filtre linéaire à fort gain, et IV.9, IV.10, IV.11 pour un filtre à faible gain.

On remarque immédiatement que ce filtre se comporte bien pour le suivi du saut de commande de pilotage, alors que la présence du pic dans l'extracteur, tend à le destabiliser. On peut atténuer cette sensibilité en diminuant le gain du filtre, ce qui a pour effet de le pénaliser dans le suivi d'aléas de consigne (voir [59]).

L'écart-type sur l'erreur d'estimation de la vitesse et de la position est calculé pour le filtre linéarisé (dans la région où il ne décroche pas) :

$$\text{Performances} \quad \begin{cases} \text{Particulaire} \begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 1.2m/s \\ \sigma_D \simeq 0.2m \end{cases} \\ \text{Kalman} \begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 12m/s \\ \sigma_D \simeq 2.4m \end{cases} \end{cases}$$

La qualité de l'estimateur particulaire conditionne directement la qualité du prédicteur, comme on peut s'en rendre compte sur le tableau suivant :

	Linéaire			Particulaire		
	p(.< 20m)	p(.< 10m)	p(.< 5m)	p(.< 20m)	p(.< 10m)	p(.< 5m)
Préd. à 2s	0.31	0.13	0.08	0.99	0.97	0.94
Préd. à 5s	0.08	0.07	0.01	0.96	0.89	0.73

Ces résultats sont obtenus lorsque l'on passe d'un rapport signal/bruit de 5.6dB à 0.8dB. Ils représentent donc une valeur moyenne sur cet intervalle : il est certain que ces chiffres seraient légèrement inférieurs lorsque l'on est proche de 0.8dB et supérieurs lorsque l'on est proche de 5.6dB.

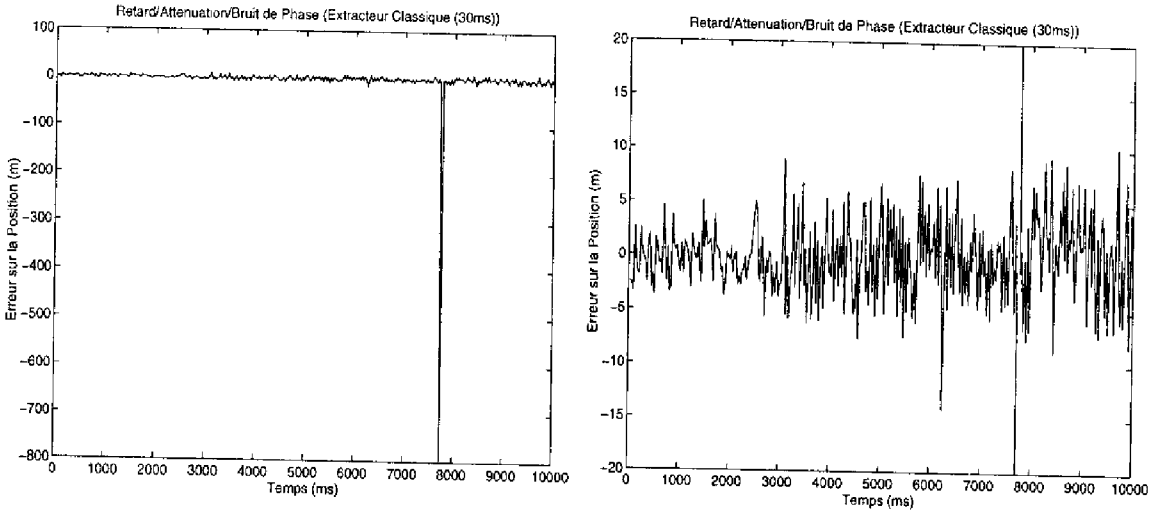


Figure IV.5: Extracteur "classique" (30ms)

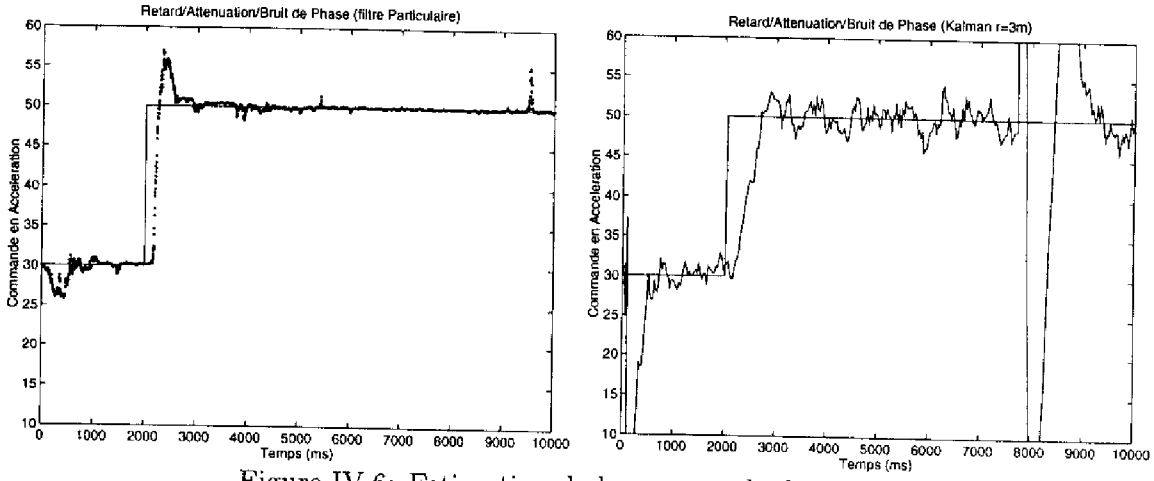


Figure IV.6: Estimation de la commande de pilotage

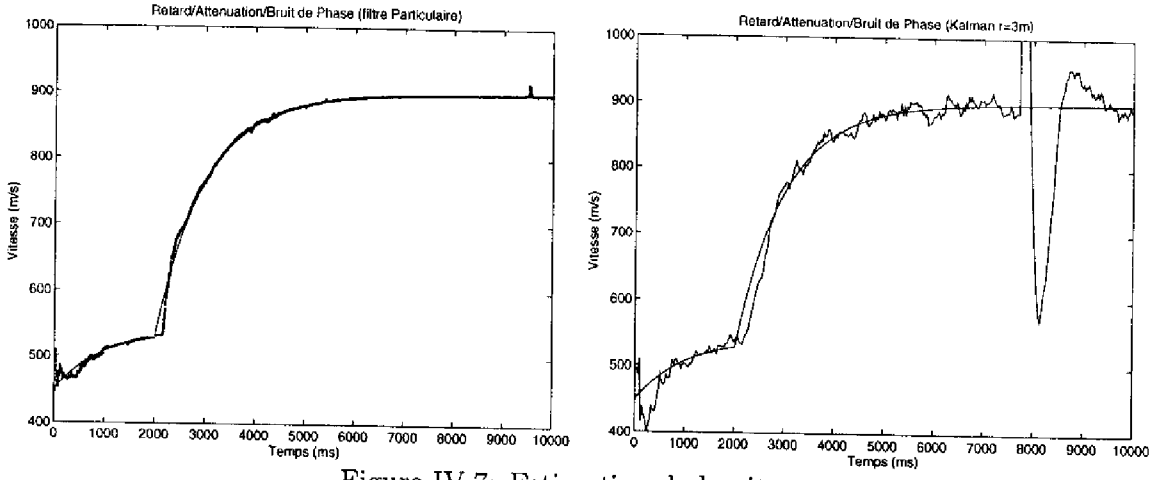


Figure IV.7: Estimation de la vitesse

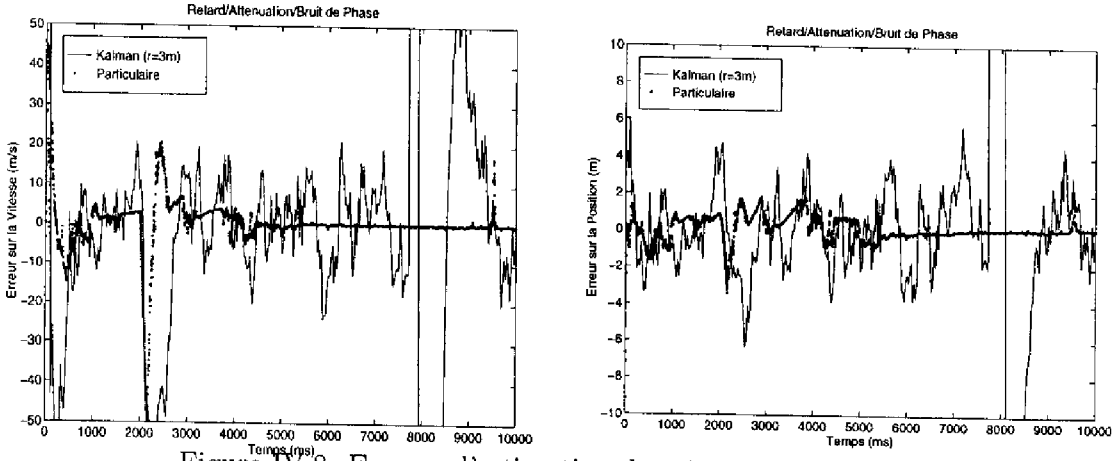


Figure IV.8: Erreurs d'estimation des vitesse et position

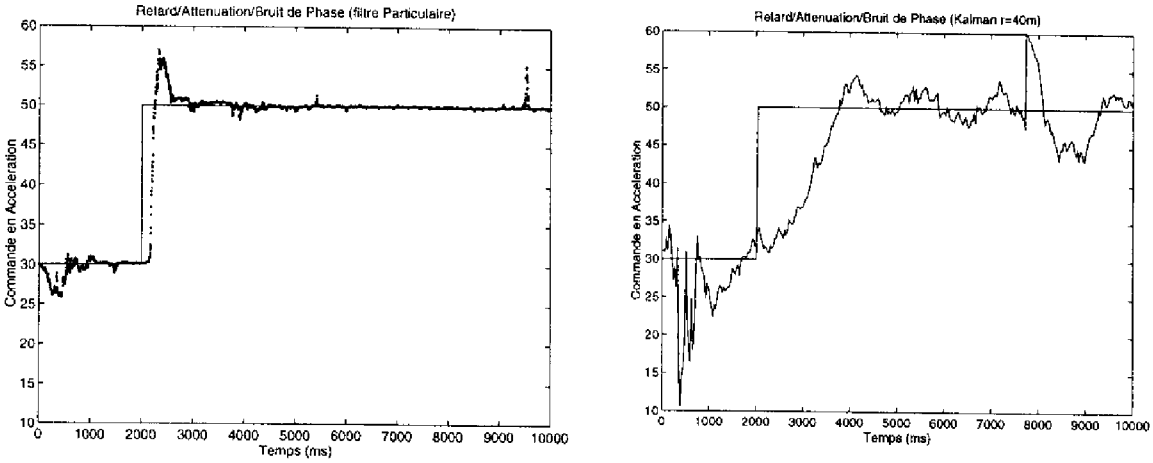


Figure IV.9: Estimation de la commande de pilotage

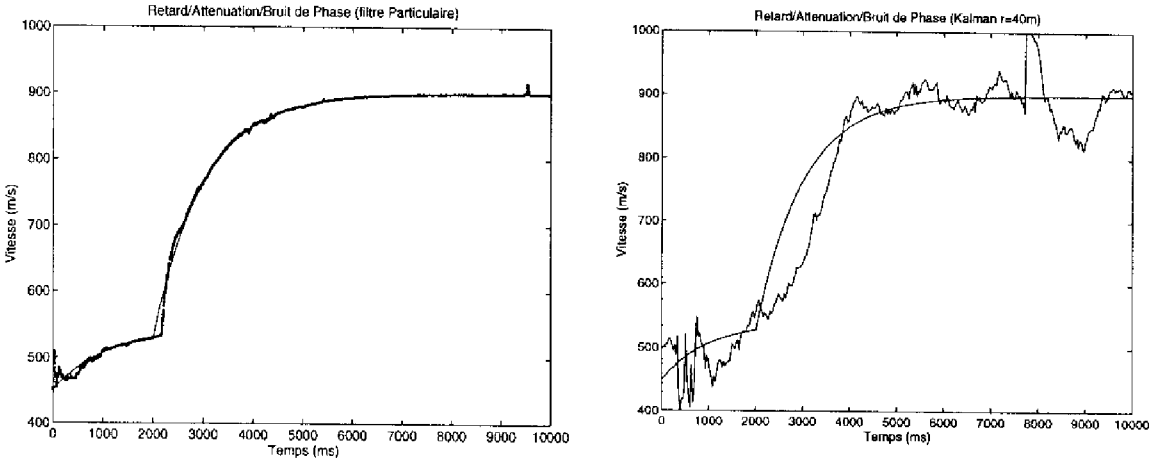


Figure IV.10: Estimation de la vitesse

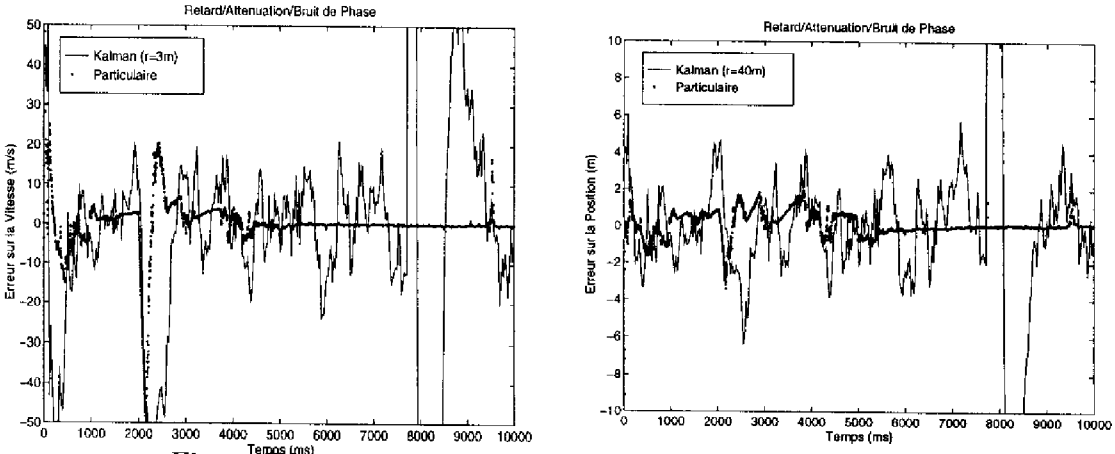


Figure IV.11: Erreurs d'estimation des vitesse et position

Limites de la poursuite en éloignement ($\simeq$ -18dB) :

Pour cette simulation, nous avons laissé évoluer le mobile jusqu'à un rapport signal/bruit de -27dB, afin de tester les performances limites du filtre particulaire. On remarque [59] que pour une trajectoire de fuite, on continue à poursuivre la cible jusqu'à environ -18dB.

Nous avons résumé sous forme de tableau les performances en prédiction de l'estimateur particulaire entre -5.9dB et -17.9dB. On a représenté en premier lieu la valeur moyenne sur cette fenêtre de prédiction dans une boule de rayon D. En dessous figurent les chiffres obtenus en début et fin de fenêtre.

	PARTICULAIRE		
	p(.< 20m)	p(.< 10m)	p(.< 5m)
Préd. à 2s	0.8	0.71	0.52
(-5.9dB / -17.9dB)	0.98/0.85	0.90/0.62	0.77/0.46
Préd. à 5s	0.58	0.40	0.25
(-5.9dB / -17.9dB)	0.80/0.48	0.68/0.29	0.55/0.20

Nous n'avons pas présenté ici les résultats de l'extracteur "classique" intégrant un certain nombre de récurrence, car il présente de mauvais résultats (voir [59]) d'estimation de la position de la cible.

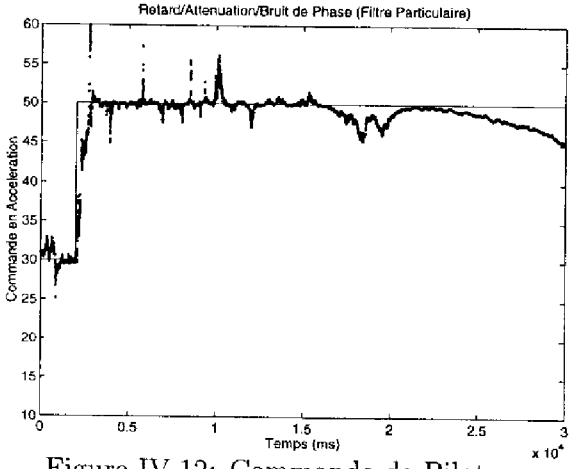


Figure IV.12: Commande de Pilotage

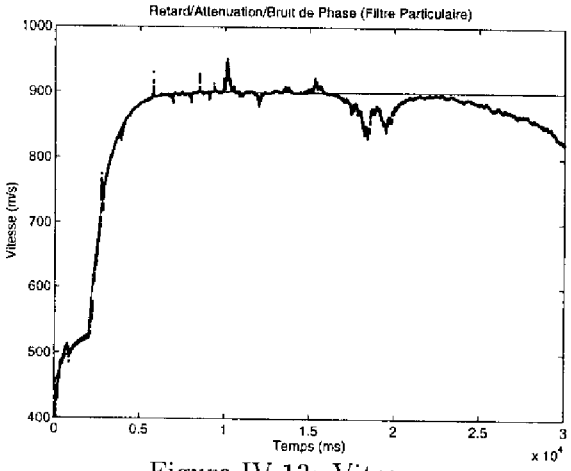


Figure IV.13: Vitesse

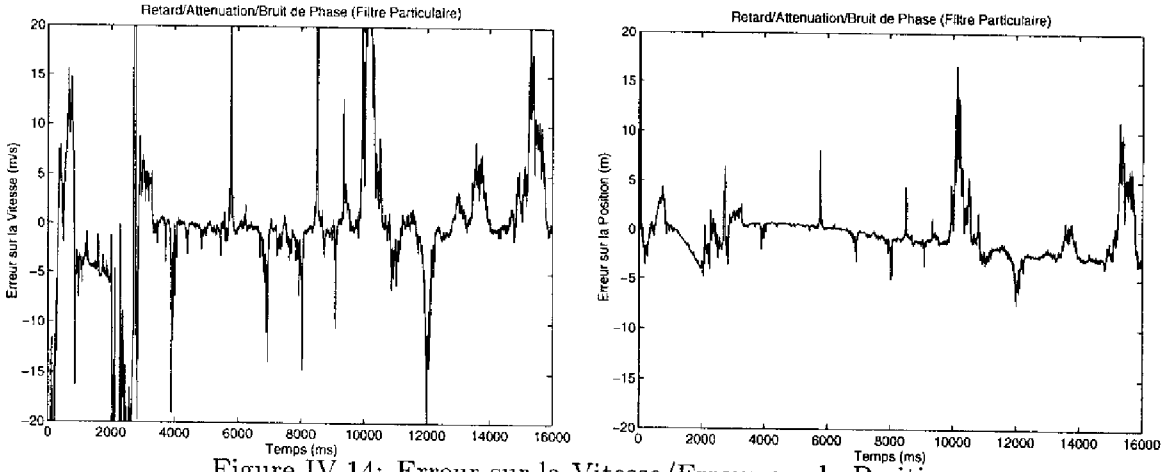


Figure IV.14: Erreur sur la Vitesse/Erreur sur la Position

Limites de la détection en ralliement ($\simeq -16dB$) :

En toute rigueur, pour évaluer les limites en détection de l'algorithme particulaire, on doit étudier un mobile à rapport signal/bruit croissant, et non, comme cela était le cas précédemment un rapport signal/bruit initial fort. Désormais, le filtre ne bénéficie plus de l'apprentissage qu'il a pu faire au cours du temps. Il doit résoudre à la fois deux problèmes : détecter et estimer.

La trajectoire choisie a les caractéristiques initiales suivantes :

$$\text{Initialisation} \quad \begin{cases} \textbf{Commande en accélération initiale :} \text{ -40} \\ \textbf{Vitesse initiale :} \text{ -200 } m/s \\ \textbf{Position initiale :} \text{ 30 } km \\ \textbf{Rapport signal/bruit initial :} \text{ -20.5 } dB \end{cases}$$

La reconstitution de la commande de pilotage et des erreurs sur la vitesse et la position est présentée sur les figures IV.15, IV.16 et IV.17.

L'écart-type d'erreur d'estimation de la position et de la vitesse est égal à :

$$\text{Performances} \quad \begin{cases} \text{Entre 20s et 30s} \begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 1.7m/s \\ \sigma_D \simeq 0.75m \end{cases} \\ \text{Entre 29s et 30s} \begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 0.75m/s \\ \sigma_D \simeq 0.63m \end{cases} \end{cases}$$

Ces courbes permettent de plus de juger aisément la limite de détection du signal dans le bruit, notamment en étudiant la courbe de l'estimée de la commande. En effet, pendant les 7/8 premières secondes l'estimée reste à peu prés constante : l'algorithme n'a pas encore détecté le signal. Puis, au bout d'environ 8 secondes l'estimée évolue : l'algorithme a désormais détecté le signal et se met à l'estimer. Il converge au bout d'environ 10 secondes : le rapport signal/bruit est alors égal à -16dB.

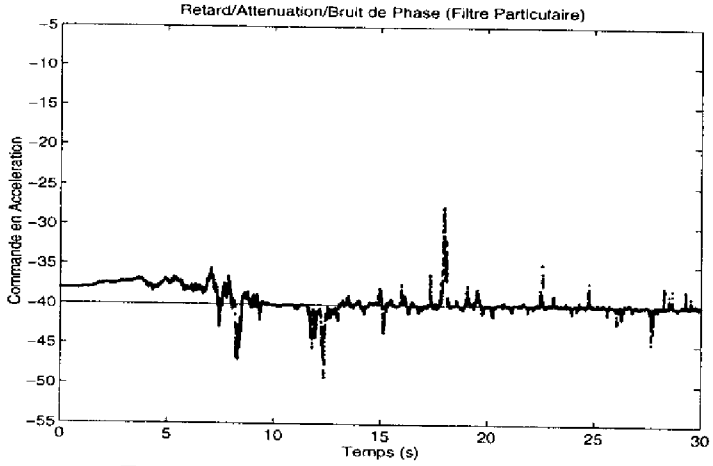


Figure IV.15: Commande de pilotage

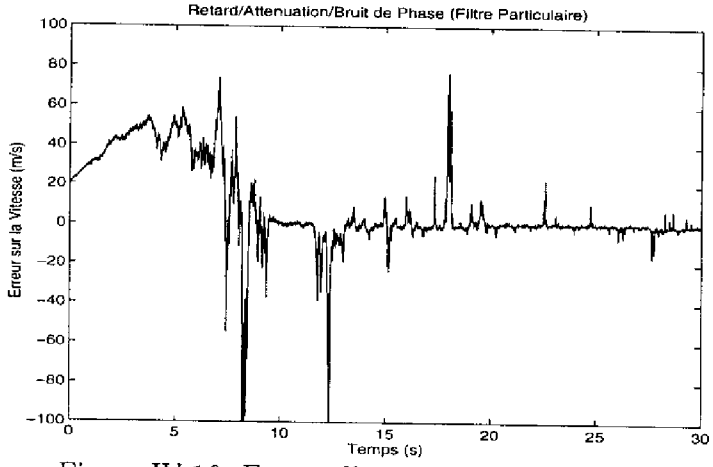


Figure IV.16: Erreur d'estimation de la vitesse

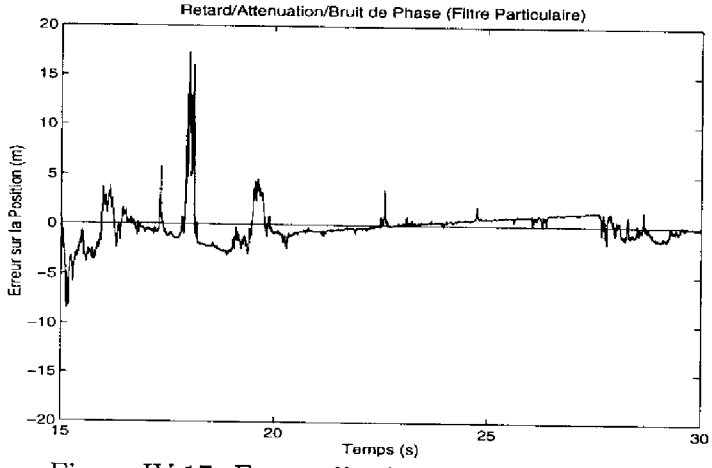


Figure IV.17: Erreur d'estimation de la position

IV.3 Traitement de l'information radiale avec Doppler (1D)

IV.3.1 Position du problème

Nous présentons ici le cas du traitement de l'information Doppler, ainsi que l'estimation de la S.E.R. de la cible, supposée connue et unitaire jusque là.

Dans le cas d'une cible en mouvement, l'équation radar I.5 après démodulation se réécrit :

$$\boxed{Y_t = \frac{1}{D_t^2} K_0 e^{j\varphi_0} \rho e^{j\varphi} e^{-j\omega_0 \frac{2D_t}{c}} h(t - 2\frac{D_t}{c}) + \nu_t} \qquad \text{(IV.12)}$$

Remarques :

1. On note que l'effet Doppler apparaît au travers de la distance radiale de la cible D_t. Cette forme est peut-être moins usuelle que celle que l'on a l'habitude de considérer pour le Doppler. Elle en constitue cependant l'écriture exacte pour un mobile dont la vitesse n'est pas constante.

   Dans l'hypothèse où la vitesse radiale est "localement" uniforme, le Doppler se manifeste sous la forme habituelle :

   $$\frac{2D_t}{c} = \frac{2V}{c}t$$

   La pulsation Doppler s'écrit alors :

   $$\omega_D = \frac{2V}{c}\omega_0$$

2. L'effet Doppler se manifeste dans la phase, d'où la nécessité bien connue d'utiliser un radar cohérent pour le traiter. Nous nous plaçons donc ici dans le cas d'un radar cohérent en phase-amplitude.

Le modèle de dynamique traité est le même que précédemment, à savoir un modèle de Singer monodimensionnel modifié où la non-linéarité est localisée dans le capteur (voir équations IV.10).

IV.3.2 Solution "usuelle"

Précédemment, on a présenté la comparaison (lorsque celle-ci était possible) avec le filtre linéarisé construit sur une idéalisation des méthodes classiques.

Les techniques habituelles d'extraction de distance radiale nécessitent une intégration parfaite de plusieurs récurrences, c'est-à-dire que l'on suppose la stationnarité de la cible pendant l'intégration. Dès que cette hypothèse n'est plus vérifiée, la qualité

de l'estimation se dégrade. Pour éviter ce phénomène, on peut essayer de compenser le mouvement, en tenant compte des éléments dynamiques estimés au coup précédent, cela repousse alors le problème sur la stationnarité de la vitesse, mais nécessite une charge de calcul plus importante.

C'est pourquoi on compare, par la suite, le filtre particulaire au filtre de Kalman étendu sur le modèle de Singer modifié, avec des observations directes en coordonnées polaires (distance pour le traitement du Doppler seul / distance et azimut pour les monopulse et réseau), dont les écarts-types sont calculés à partir des relations obtenues dans le premier chapitre. A noter, que ces relations sont établies en supposant que l'on sait compenser parfaitement le mouvement sur la durée d'intégration choisie (ici 10 récurrences) : elles donnent alors l'écart-type optimal d'estimation, pour un rapport signal/bruit donné, et donc toute technique, y compris le particulaire, est régie par ces relations.

Pour être cohérent avec les traitements habituels, nous ne choisissons d'initialiser le filtre de Kalman sur les données "équivalentes", que si la probabilité de détection est supérieure à 50% (pour 10 récurrences intégrées, avec une probabilité de fausse alarme de 10^{-3}, ce qui donne un rapport signal/bruit (en sortie de voie Σ) élémentaire minimal de 1.1dB.

Cette valeur fixe donc le seuil de détection, pour la probabilité de fausse alarme choisie. Lorsque le rapport S/B est inférieur à ce seuil, cela signifie que les techniques "usuelles" n'ont pas détecté la cible.

IV.3.3 Filtre particulaire

Le point principal de la solution proposée ici, sans augmentation de l'état particulaire, repose sur l'utilisation de simplifications dues à certaines linéarités conditionnelles du problème d'estimation Doppler.

En effet, au vu de l'expression IV.12 on peut remarquer que, conditionnellement à l'état de la particule D_t^i, l'équation de mesure est linéaire en le coefficient de rétrodiffusion. On peut donc mettre en œuvre un filtre de Kalman-conditionnel (à la particule) sur le principe exposé dans le chapitre III.

IV.3.3.1 Estimation du coefficient de rétrodiffusion

On pose

$$\sigma = \rho e^{j\varphi} = \sigma_1 + j\sigma_2$$

Où σ est le coefficient de réflexion complexe de la cible. L'équation de mesure IV.12 s'écrit (après démodulation) :

$$\boxed{Y_t = \frac{1}{D_t^2}\sigma h(t - 2\frac{D_t}{c})e^{-2j\frac{D_t}{c}\omega_0} + \nu_t} \qquad \text{(IV.13)}$$

avec

$$\begin{cases} \nu_t : \text{bruit blanc gaussien complexe} \\ h : \text{enveloppe du signal en sortie de filtre adapté} \end{cases}$$

On remarque donc que, conditionnellement à l'état de la particule, l'équation IV.13 est linéaire en σ :

$$\boxed{Y_t = H_t(D_t)\sigma + \nu_t} \tag{IV.14}$$

On peut réécrire cette expression sous forme matricielle en tenant compte du fait que l'on prend deux points d'échantillonnage sur l'impulsion (pour des raisons de blancheur de bruit, comme il a été précisé dans le paragraphe I.1.2) :

$$Y_t = \begin{pmatrix} Y_t^{1,R} \\ Y_t^{1,I} \\ Y_t^{2,R} \\ Y_t^{2,I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \\ H_{41} & H_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_t^{1,R} \\ \nu_t^{1,I} \\ \nu_t^{2,R} \\ \nu_t^{2,I} \end{pmatrix} \tag{IV.15}$$

où $\begin{cases} \mathrm{Y}^{1,R} \text{ et } \mathrm{Y}^{2,R} \text{ représentent les parties réelles de } \mathrm{Y}^1, \mathrm{Y}^2 \\ \quad \text{et } \mathrm{Y}^{1,I}, \mathrm{Y}^{2,I} \text{ les parties imaginaires.} \\ \nu^{1,R}, \nu^{1,I}, \nu^{2,R}, \nu^{2,I} \text{ quatre bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et de variance } r. \end{cases}$

Au vu des équations IV.13 et IV.14, on a :

$$\begin{cases} H_{11} = H_{22} = \dfrac{h^1}{D_t^2}\cos(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \\ H_{21} = -H_{12} = \dfrac{h^1}{D_t^2}\sin(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \\ H_{31} = H_{42} = \dfrac{h^2}{D_t^2}\cos(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \\ H_{41} = -H_{32} = \dfrac{h^2}{D_t^2}\sin(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \end{cases}$$

Le but est ici d'estimer le coefficient de rétrodiffusion complexe. La solution optimale, conditionnellement à D_t, est un estimateur par moindres carrés (si l'on suppose ce paramètre stationnaire pendant τ itérations).

Calculer cet estimateur revient à minimiser par rapport à σ la vraisemblance :

$$\mathcal{C} = \sum_{l=1}^{\tau} (Y_{t+l} - H_{t+l}\sigma)^T R^{-1} (Y_{t+l} - H_{t+l}\sigma)$$

avec R=rI_4 et I_4 la matrice identité de dimension 4.

En dérivant $\mathcal{C}$ par rapport à σ :

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma \mathcal{C} &= \sum_{l=1}^{\tau} \left[-H_{t+l}^T R^{-1}(Y_{t+l} - H_{t+l}\sigma) - (Y_{t+l} - H_{t+l}\sigma)^T R^{-1} H_{t+l} \right] \\ &= \sum_{l=1}^{\tau} \left[-H_{t+l}^T R^{-1}(Y_{t+l} - H_{t+l}\sigma) - \left(H_{t+l}^T R^{-1}(Y_{t+l} - H_{t+l}\sigma) \right)^T \right] \\ &= -2 \sum_{l=1}^{\tau} H_{t+l}^T R^{-1}(Y_{t+l} - H_{t+l}\sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le coefficient de réflexion complexe estimé s'écrit :

$$\boxed{\widehat{\sigma} = \left(\sum_{l=1}^{\tau} H_{t+l}^T R^{-1} H_{t+l}\right)^{-1} \sum_{l=1}^{\tau} H_{t+l}^T R^{-1} Y_{t+l}} \tag{IV.16}$$

De même, on peut montrer que :

$$\begin{cases} E[\widetilde{\sigma}] = E[\sigma - \widehat{\sigma}] = 0 \\ \widetilde{P} = E[\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^T] = \left(\sum_{l=1}^{\tau} H_{t+l}^T R^{-1} H_{t+l}\right)^{-1} \end{cases} \tag{IV.17}$$

Remarque : L'estimation par moindres carrés présuppose la stationnarité du coefficient que l'on cherche à reconstituer, ce qui n'est bien sûr pas le cas ici. Il convient donc d'utiliser une forme dynamique et récursive de la technique des moindres carrés : le filtre de Kalman.

$$\begin{array}{l} \underline{\text{Prédiction}} \begin{cases} \widehat{\sigma}_{t|t-1} = \widehat{\sigma}_{t-1|t-1} \\ \widetilde{P}_{t|t-1} = \widetilde{P}_{t-1|t-1} + Q \end{cases} \\ \underline{\text{Filtrage}} \begin{cases} \widetilde{P}_{t|t}^{-1} = \widetilde{P}_{t|t-1}^{-1} + H_t^T R^{-1} H_t^T \\ \widehat{\sigma}_{t|t} = \widehat{\sigma}_{t|t-1} + \widetilde{P}_{t|t}\left(H_t^T R^{-1}(Y_t - H_t \widehat{\sigma}_{t|t-1})\right) \end{cases} \end{array} \tag{IV.18}$$

On remarquera ci-dessus la forme un peu inhabituelle du filtre de Kalman. On pourra en retrouver la démonstration dans [39] qui repose uniquement sur des identités matricielles.

Cette forme a pour avantage d'éviter l'inversion de $HPH^T + R$ qui est ici de dimension 4, mais qui peut être de dimension supérieure suivant le nombre de points d'échantillonnage que l'on prend sur l'impulsion ou bien comme nous le verrons plus loin, suivant le nombre de récepteurs. Une telle opération, répétée pour chaque particule est très coûteuse en temps de calcul. Par cette transformation, on se ramène à l'inversion de deux matrices 2x2 qui se calculent de manière immédiate.

On peut encore sérieusement améliorer le temps de calcul en utilisant une solution intermédiaire entre le filtre de Kalman pour lequel on résout l'équation de Riccati à chaque itération et la méthode des moindres carrés.

L'introduction des résultats d'estimation par moindres carrés sert cependant de base à la construction de ce filtre optimal. En effet, le terme en $(\sum H^T R^{-1} H)^{-1}$ apparaîssant dans $\widehat{\sigma}$ exposé précédemment, n'est autre que la matrice de variance/covariance de l'erreur d'estimation lorsque la dynamique est nulle. On résout alors l'équation de

Riccati toutes les τ itérations. Le filtre linéaire ainsi construit s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{Prédiction}} & \begin{cases} \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1} = \widehat{\sigma}_{t-\tau+1|t-\tau+1} \\ \widetilde{P}_{t|t-\tau+1} = \widetilde{P}_{t-\tau+1|t-\tau+1} + Q \end{cases} \\ \underline{\text{Filtrage}} & \begin{cases} \widetilde{P}_{t|t}^{-1} = \widetilde{P}_{t|t-\tau+1}^{-1} + \sum_{l=1}^{\tau} H_{t-\tau+l}^T \, R^{-1} H_{t-\tau+l} \\ \widehat{\sigma}_{t|t} = \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1} + \widetilde{P}_{t|t} \left(\sum_{l=1}^{\tau} H_{t-\tau+l}^T \, R^{-1} (Y_{t-\tau+l} - H_{t-\tau+l} \, \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1}) \right) \end{cases} \end{array}} \tag{IV.19}$$

On remarque qu'apparaît dans la covariance de l'erreur d'estimation, celle des moindres carrés (Cf éq. IV.17). Cette approche combine l'avantage des deux précédentes méthodes :

- On allège notablement les calculs en résolvant l'équation de Riccati toutes les τ itérations, donc en inversant toutes les τ itérations deux matrices 2x2.
- On tient compte de la variation possible de σ au cours du temps (fluctuation de cible), au travers de la covariance Q de dynamique qui n'agit pas à chaque instant, mais toutes les τ itérations. Cette variation permet aussi de prendre en compte d'éventuelles dérives de l'oscillateur.

IV.3.3.2 Modèle du capteur

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le point clé de l'approche particulaire repose sur une interprétation "exploration/pondération" des équations du filtrage.

L'essentiel de la procédure de pondération des particules repose sur la construction de la densité de probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(Y_t|X_t^i)$ où X_t^i est l'état de la particule :

$$X_t^i = \left((a_t^D)^i, (V_t^D)^i, D_t^i, \sigma_t^i, \widetilde{P}_{t|t}^i \right)$$

Le problème essentiel vient ici du fait que l'on estime σ par un filtre linéaire conditionnel à la particule, et qu'il faut donc faire le lien avec le filtre particulaire qui lui est associé.

On a vu que le modèle de capteur s'écrit :

$$Y_t = H_t(D_t)\sigma_t + \nu_t$$

Si l'on considère le filtre IV.18 qui estime σ à chaque itération, on doit désormais estimer les autres paramètres de X_t à partir du modèle de capteur modifié (voir chapitre III) :

$$\widetilde{Y}_t = Y_t - H_t(D_t)\widehat{\sigma}_{t|t-1} = H_t(D_t)\widetilde{\sigma}_{t|t-1} + \nu_t \tag{IV.20}$$

avec $\widetilde{\sigma}_{t|t-1} = \sigma - \widehat{\sigma}_{t|t-1}$

On reconnaît dans cette expression l'innovation du processus à estimer.

On peut donc réécrire le modèle de capteur à partir de la nouvelle mesure $\widetilde{Y}_t$:

$$P(\widetilde{Y}_t|X_t) = p(Y_t - H_t(D_t)\widehat{\sigma}_{t|t-1}|X_t)$$

Cette densité de probabilité est conditionnellement gaussienne, car ν_t l'est aussi (moyenne nulle et matrice de covariance R). Il faut donc en calculer ses caractéristiques :

- Moyenne :

$$E[Y_t - H_t(D_t)\widehat{\sigma}_{t|t-1}] = E[H_t(D_t)\widetilde{\sigma}_{t|t-1} + \nu_t] = H_t(D_t)E[\widetilde{\sigma}_{t|t-1}] + E[\nu_t] = 0$$

car l'estimation de σ n'est pas biaisée.

- Matrice de Covariance :

$$\begin{aligned}
&E\left[(Y_t - H_t(D_t)\widehat{\sigma}_{t|t-1})(Y_t - H_t(D_t)\widehat{\sigma}_{t|t-1})^T\right] \\
&\qquad = E\left[(H_t(D_t)\widetilde{\sigma}_{t|t-1} + \nu_t)(H_t(D_t)\widetilde{\sigma}_{t|t-1} + \nu_t)^T\right] \\
&\qquad = E\left[H_t(D_t)\widetilde{\sigma}_{t|t-1}\widetilde{\sigma}^T_{t|t-1}H_t(D_t)^T + H_t(D_t)\widetilde{\sigma}_{t|t-1}\nu_t + \widetilde{\sigma}^T_{t|t-1}\right] \\
&\qquad = H_t(D_t)E[\widetilde{\sigma}_{t|t-1}\widetilde{\sigma}^T_{t|t-1}]H_t(D_t)^T + E[\nu_t\nu_t^T] \\
&\qquad = H_t(D_t)\widetilde{P}_{t|t-1}H_t(D_t)^T + R
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations on pose $H_t = H_t(D_t)$.

La densité de probabilité conditionnelle définit donc une gaussienne de moyenne nulle et de variance $HPH^T + R$:

$$P(\widetilde{Y}_t|X_t^i) = p(Y_t - H_t\widehat{\sigma}^i_{t|t-1}|X_t^i) = p^\nu(Y_t - H_t^i\widehat{\sigma}^i_{t|t-1})$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{det(H_t^i\widetilde{P}^i_{t|t-1}H_t^{i\,T} + R)}}\exp -\frac{1}{2}\left((Y_t - H_t^i\widehat{\sigma}^i_{t|t-1})^T(H_t^i\widetilde{P}^i_{t|t-1}H_t^{i\,T} + R)^{-1}(Y_t - H_t^i\widehat{\sigma}^i_{t|t-1})\right) \tag{IV.21}$$

où $H_t^i = H_t(D_t^i)$.

Nous avons ici écrit le modèle de capteur associé au filtre linéaire IV.18 qui résout l'équation de Riccati. Par contre si l'on utilise le filtre IV.19 construit sur la base d'une pseudo-inversion, l'expression IV.21 se complique légèrement.

Nous posons par la suite :

$$M_t^i = M_t(D_t^i) = \begin{pmatrix} H_{t-\tau+1}(D^i) \\ H_{t-\tau+2}(D^i) \\ \vdots \\ H_t(D^i) \end{pmatrix} \qquad Y_t^m = \begin{pmatrix} Y_{t-\tau+1} \\ Y_{t-\tau+2} \\ \vdots \\ Y_t \end{pmatrix} \qquad R^m = r\ .\ I_{4\tau}$$

où $I_{4\tau}$ est la matrice identité de dimension 4τ.

Le principal problème vient ici du fait que pour le filtre IV.19 on ne délivre l'estimée de σ que toutes les τ itérations. La densité de probabilité conditionnelle IV.21 se réécrit donc :

$$\boxed{\begin{aligned} P(\widetilde{Y}_t^m|X_t) = & \frac{1}{(2\pi)^{2\tau}\sqrt{det(M_t^i \widetilde{P}_{t|t-\tau+1}^i M_t^{i\,T} + R^m)}} \\ & \exp\left(-\tfrac{1}{2}(Y_t^m - M_t^i \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1}^i)^T (M_t^i \widetilde{P}_{t|t-\tau+1}^i M_t^{i\,T} + R^m)^{-1} (Y_t^m - M_t^i \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1}^i)\right) \end{aligned}} \tag{IV.22}$$

Remarque : L'inconvénient majeur d'une telle expression réside dans le calcul de l'inversion et du déterminant de la matrice $MPM^T + R^m$ de dimension 4τ.

Dans les résultats de simulation que nous présentons plus loin, nous avons choisi de prendre $\tau = 10$. Bien entendu, il n'est pas question d'inverser, pour chaque particule, une matrice 40x40. On allège nettement les calculs en profitant des symétries des matrices que l'on traite [39] de la manière suivante :

- $$\begin{aligned} & (Y_t^m - M_t \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1})^T (M_t \widetilde{P}_{t|t-\tau+1} M_t^T + R^m)^{-1} (Y_t^m - M_t \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1}) = \\ & \qquad (Y_t^m)^T R^{-1} Y_t^m + \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1}^T \widetilde{P}_{t|t-\tau+1} \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1} \\ & -(M_t^T R^{-1} Y_t^m + \widetilde{P}_{t|t-\tau+1}^{-1} \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1})^T \widetilde{P}_{t|t} (M_t^T R^{-1} Y_t^m + \widetilde{P}_{t|t-\tau+1}^{-1} \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1}) \end{aligned} \tag{IV.23}$$

- $$det(M_t \widetilde{P}_{t|t-\tau+1} M_t^T + R^m) = det(\widetilde{P}_{t|t}^{-1}) det(\widetilde{P}_{t|t-\tau+1}) det(R^m) \tag{IV.24}$$

L'avantage de ces deux expressions est que l'on est ramené à ne traiter que des matrices de dimension 2, quelle que soit la valeur de τ.

IV.3.3.3 Construction de la solution particulaire

La construction du filtre particulaire pour le problème monodimensionnel du radar cohérent en phase/amplitude se pose de la manière suivante, lorsque l'on adopte une modélisation poissonnienne de pilotage de cible :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Dynamique} & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_t = \sigma_{t-\tau+1} + w_2^t \\ a_D^t = a_D^{t-\tau+1} + w_1^t + \pi_1^t \\ \dot{V}_D^t = \dfrac{k_1 a_D^t - V_D^t}{k_2} \\ \dot{D}_t = V_D^t \end{array} \right. \\ \\ \text{Mesure} & Y_t = \dfrac{1}{D_t^2}\, \sigma_t\, e^{j\omega_0 \frac{2D_t}{c}}\, h(t - 2\,\dfrac{D_t}{c}) \;+\; \nu_t \end{array} \right. \tag{IV.25}$$

La structure de l'algorithme particulaire pour le problème monodimensionnel du traitement de l'information radiale en présence d'effet Doppler, est la suivante :

1. **Initialisation :** Les N particules X_0^i sont initialisées selon l'information dont on dispose a priori sur le vecteur d'état, et les poids p_0^i sont égaux à $\frac{1}{N}$.

2. **Evolution :** Chaque particule $X_t^i = (\sigma_t^i, (a_D^t)^i, (V_D^t)^i, D_t^i)$, évolue selon le modèle de dynamique discrétisé (par le schéma d'Euler) :

$$\begin{cases} (a_D^t)^i = (a_D^{t-\tau+1})^i + (w_1^t)^i + (\pi_1^t)^i \\ (V_D^t)^i = \dfrac{k_1(a_D^{t-\tau+1})^i - (V_D^{t-\tau+1})^i}{k_2} T + (V_D^{t-\tau+1})^i \\ D_t^i = D_{t-\tau+1}^i + (V_D^{t-\tau+1})^i T \end{cases} \tag{IV.26}$$

où $T = \tau T_r$, avec T_r la période de répétition des impulsions.

Conditionnellement à l'état X_t^i de chacune des N particules, on construit un filtre linéaire optimal sur σ suivant les équations IV.19 pour lesquelles on remplace :

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_t^m \\ M_t \\ H_t \\ \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1} \\ \widehat{\sigma}_{t|t} \\ \widetilde{P}_{t|t-\tau+1} \\ \widetilde{P}_{t|t} \end{array} \right\} \text{par} \left\{ \begin{array}{c} Y_t^{m,i} \\ M_t^i \\ H_t^i \\ \widehat{\sigma}_{t|t-\tau+1}^i \\ \widehat{\sigma}_{t|t}^i \\ \widetilde{P}_{t|t-\tau+1}^i \\ \widetilde{P}_{t|t}^i \end{array} \right\} \qquad \text{pour i = 1,...,N} \tag{IV.27}$$

3. **Pondération :** On construit ensuite pour chaque particule i la pondération associée p_t^i au moyen des expressions IV.22, IV.23, IV.24 pour lesquelles on utilise les règles de remplacement IV.27. On a alors :

$$p_t^i = \frac{P(\widetilde{Y}_t^{m,i}|X_t^i)}{\sum_{j=1}^{N} P(\widetilde{Y}^{m,j}{}_{,t}|X_t^j)} \qquad \text{pour i = 1,...,N} \tag{IV.28}$$

4. **Estimation :** L'estimation du processus X se déduit directement des étapes précédentes :

$$\widehat{X}_t = \sum_{i=1}^{N} p_t^i X_t^i \tag{IV.29}$$

Pour un traitement dynamique, on itère les parties 2,3 et 4.

IV.3.4 Résultats de simulation

Les caractéristiques du radar de poursuite étudié sont les mêmes que précédemment, avec une précision supplémentaire concernant la porteuse qui conditionne directement l'effet Doppler :

$$\begin{cases} \textbf{Fréquence du signal porteur : } 500\ MHz \\ \textbf{Forme de l'impulsion : } \text{Rectangulaire} \\ \textbf{Largeur d'impulsion : } 0.125\ \mu s \\ \textbf{Période de répétition des impulsions : } 200\ \mu s \\ \textbf{Fréquence d'échantillonnage : } 8\ MHz \end{cases}$$

Nous nous plaçons de même en sortie de filtre adapté. On récupère alors un signal triangulaire de largeur double de la largeur d'impulsion, avec deux mesures du signal utile, conformément à l'échantillonnage optimal décrit dans un paragraphe précédent.

Limites de la poursuite en éloignement ($\simeq$ -24.5dB) :

Afin d'étudier les limites de suivi de l'algorithme, on présente ici les résultats obtenus pour l'estimation cinématique d'une cible en éloignement, donc avec un rapport signal/bruit qui se dégrade.

Les caractéristiques initiales de la dynamique du mobile sont les suivantes :

$$\text{Initialisation} \quad \begin{cases} \textbf{Commande de pilotage : } 30 \text{ (sans dimension)} \\ \textbf{Vitesse : } 450\ m/s \\ \textbf{Position : } 8\ km \\ \textbf{Norme du coefficient de rétrodiffusion : } 1 \\ \textbf{Rapport signal/bruit : } -2\ dB \end{cases}$$

Thème :

De plus, à l'instant t=2s le mobile effectue un changement de consigne de pilotage pour passer de 30 à 50, soit une vitesse limite de 900 m/s.

On passe donc ici d'un rapport signal/bruit de -2dB à 8km à environ -24.5 dB en fin de simulation.

Estimation :

Nous avons représenté sur les figures IV.18,IV.19,IV.20, l'estimation des commande de pilotage, vitesse, position et norme du coefficient de rétrodiffusion ρ.

On remarque le bon comportement du filtre particulaire, qui permet de détecter avec un temps de montée très court, le changement de commande de pilotage qui se produit à un rapport signal/bruit d'environ -4dB. De plus, on remarque la qualité de l'estimation obtenue que l'on peut juger en calculant l'écart-type de l'erreur :

$$\begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 0.12 m/s \\ \sigma_D \simeq 0.4 m \end{cases}$$

Il convient de noter qu'à ces rapports signaux/bruits (voir paragraphe IV.3.2), la cible n'a pas été détectée par les méthodes usuelles.

Prédiction :

La manière la plus objective de juger la qualité de l'estimateur est d'étudier les performances en prédiction, car elles dépendent directement de ces estimées.

Nous avons donc représenté sur le tableau ci-dessous, les performances du prédicteur particulaire pour différents détecteurs de proximité, c'est-à-dire que l'on étudie les probabilités de se trouver dans un rayon de x mètres autour de la vraie position. Ce calcul est fait entre l'instant t=4s (-6.6dB) et t=10s (-13.8dB).

	PARTICULAIRE		
	p(.< 20m)	p(.< 10m)	p(.< 5m)
Prédiction à 2s	1	0.99	0.98
(4s → 5s / 9s → 10s)	1/1	1/0.97	0.99/0.95
Prédiction à 5s	1	0.97	0.93
(4s → 5s / 9s → 10s)	1/1	0.99/0.93	0.96/0.86

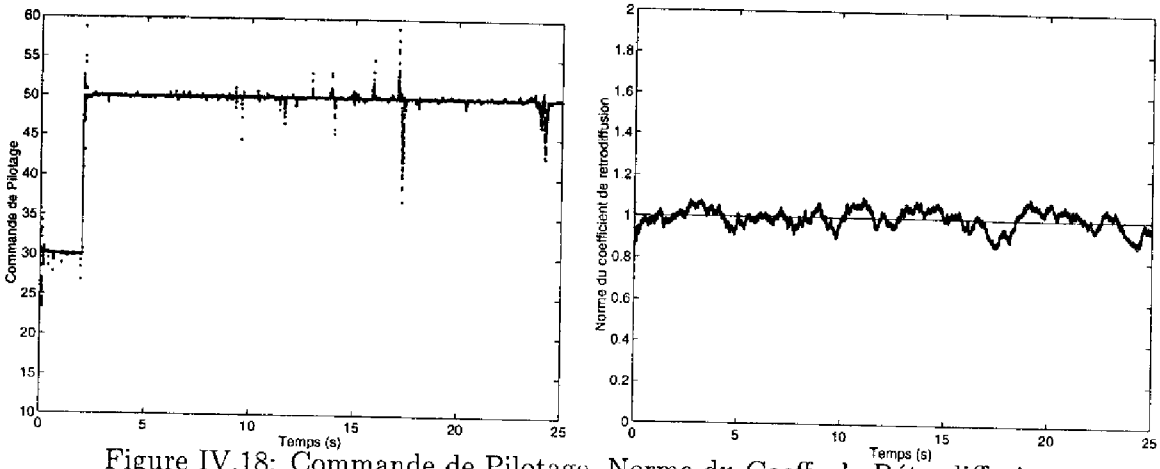


Figure IV.18: Commande de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

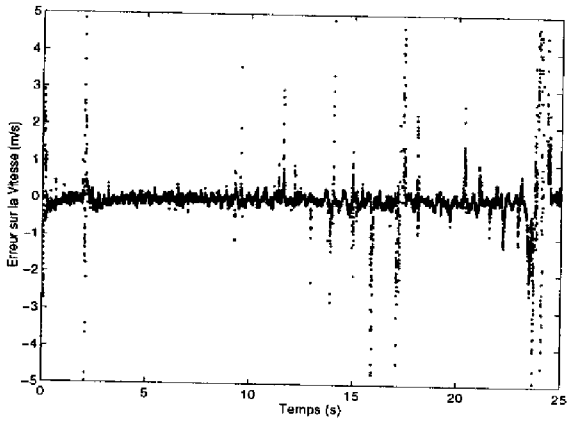


Figure IV.19: Erreur de Vitesse

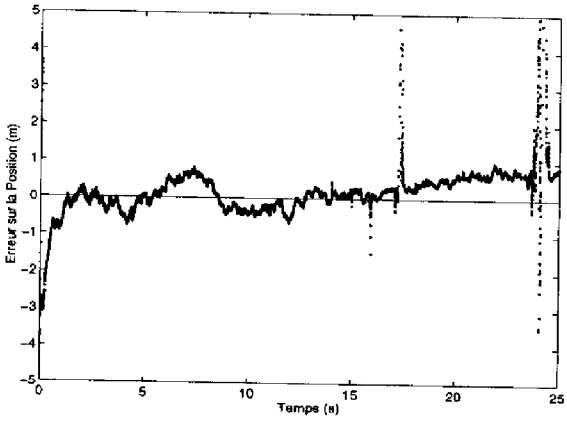


Figure IV.20: Erreur de Distance Radiale

Limites de la détection en ralliement (≃-20dB) :

Il est intéressant de regarder le problème inverse du précédent, où la cible se rapproche du radar, et de voir quel est le seuil de détection pour le filtre particulaire, nécessairement différent en raison de la dissymétrie entre les deux situations.

Nous prenons les caractéristiques initiales de cible suivantes :

Initialisation
- **Commande de pilotage** : -30
- **Vitesse** : -450 m/s
- **Position** : 24 km
- **Norme du coefficient de rétrodiffusion** : 1
- **Rapport signal/bruit** : -21 dB

Thème :

On effectue à l'instant t=10s (-16.7dB) un changement de consigne de pilotage pour passer de -30 à -50. C'est dire que le mobile va augmenter sa vitesse de ralliement jusqu'à une vitesse limite de 900 m/s.
La durée de la simulation est de 20 secondes, et le rapport signal/bruit passe de -21dB à -5.9dB.

Estimation :

Les courbes IV.21,IV.22,IV.23 représentent l'estimation des commande de pilotage, vitesse, position et norme du coefficient de rétrodiffusion.

On remarque qu'après une certaine période d'acquisition/détection, le filtre particulaire "accroche" au bout de 3 secondes, soit à un rapport signal/bruit d'environ -20dB. De plus, le filtre particulaire exhibe un bon suivi du créneau de commande de pilotage, malgré une faible observabilité (-16.7dB). Le traînage que l'on observe après le saut est dû au faible rapport signal/bruit.

La qualité de l'estimation, entre 14s (-13.3dB) et 20s (-5.9dB), est :

$$\begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 0.55 m/s \\ \sigma_D \simeq 1.3 m \end{cases}$$

Prédiction :

On peut aussi calculer les performances en prédiction à 2 et 5 secondes, entre les instants t=4s (-19.4dB) et t=10s (-16.7dB), soit à très faible rapport signal/bruit.

La qualité du prédicteur particulaire est résumée sous forme d'un tableau des probabilités de se trouver dans un certain rayon autour de la position de la cible :

	PARTICULAIRE		
	p(.< 20m)	p(.< 10m)	p(.< 5m)
Prédiction à 2s	1	0.99	0.97
Prédiction à 5s	1	0.93	0.78

On remarque ici la bonne tenue du prédicteur particulaire, même à de très faibles rapport signal/bruit.

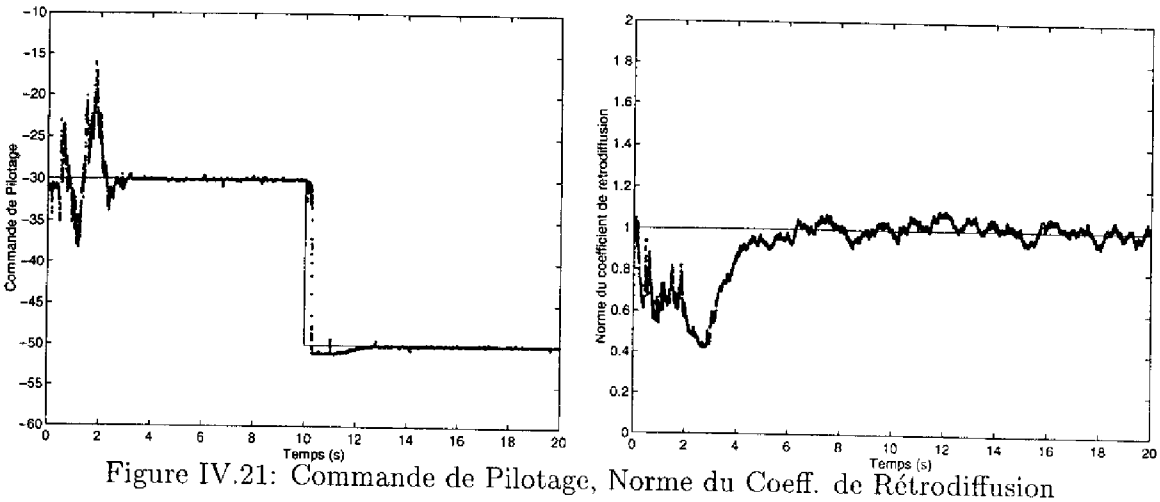


Figure IV.21: Commande de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

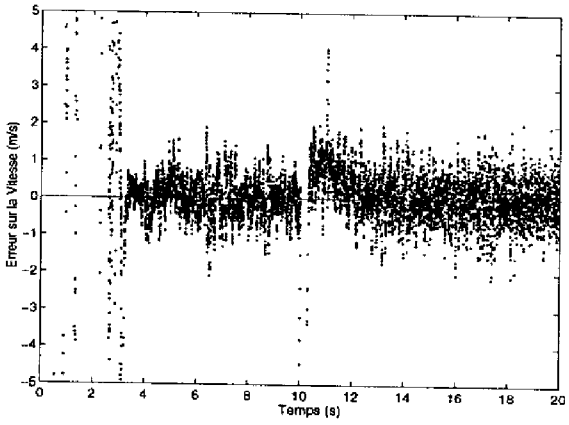


Figure IV.22: Erreur de Vitesse

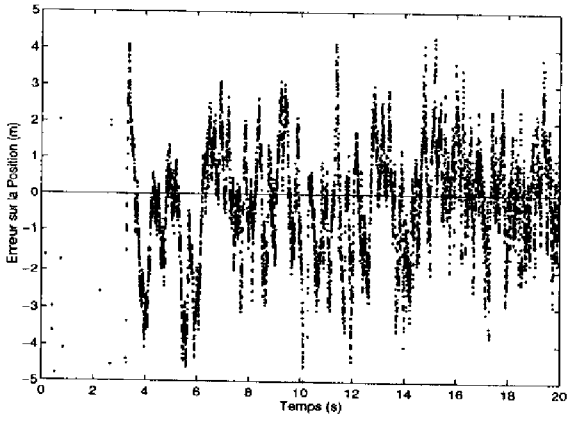


Figure IV.23: Erreur de Distance Radiale

Robustesse de l'algorithme particulaire :

La dernière étape de validation de l'algorithme particulaire, consiste à étudier la façon dont il réagit à plusieurs changements de consigne de pilotage, comme nous l'avions fait dans le premier rapport de cette étude. On pourra comparer les différences de performances obtenues dans le cas de l'intégration du Doppler.

Les initialisations de trajectoire de cible sont les suivantes :

$$\text{Initialisation} \quad \begin{cases} \textbf{Commande de pilotage : } 30 \\ \textbf{Vitesse : } 450\ m/s \\ \textbf{Position : } 20\ km \\ \textbf{Norme du coefficient de rétrodiffusion : } 1 \\ \textbf{Rapport signal/bruit : } -9.9\ dB \end{cases}$$

Thème :
De plus, on effectue des changements de commande de pilotage à différents instants :

$$\begin{cases} \textbf{à t=1.5s (20.7km/-10.5dB) : } 50 \\ \textbf{à t=3s (21.8km/-11.4dB) : } 40 \\ \textbf{à t=4.5s (23km/-12.3dB) : } 10 \\ \textbf{à t=6s (23.7km/-12.8dB) : } -10 \end{cases}$$

Estimation :
On remarque ici que, contrairement au cas sans Doppler présenté précédemment, la thématique de poursuite de plusieurs créneaux se fait à rapport signal/bruit beaucoup plus faible (de l'ordre de 15dB de moins). Il en résulte une difficulté accrue pour la détection et le suivi de tels changements.

Nous avons représenté sur les courbes IV.24,IV.25,IV.26 les estimées de la commande de pilotage, la vitesse, la position et la norme du coefficient de rétrodiffusion.

On note l'excellent suivi par le filtre particulaire des différents changements de consigne, ainsi que la précision de l'estimation qui en résulte, et que l'on peut juger à travers le calcul de l'écart-type moyen d'estimation de la position et la vitesse :

$$\begin{cases} \sigma_{V_D} \simeq 0.9 m/s \\ \sigma_D \simeq 0.8 m \end{cases}$$

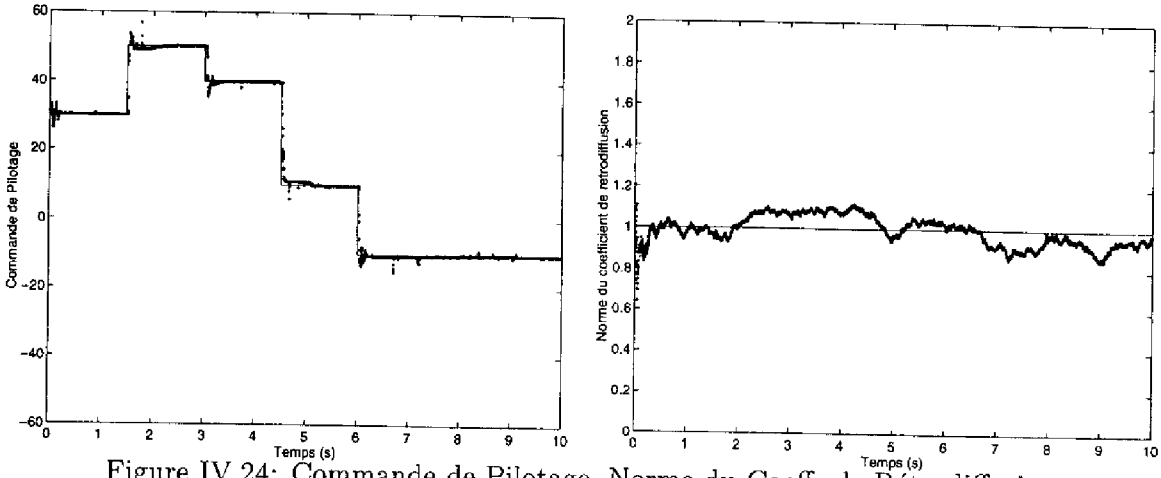


Figure IV.24: Commande de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

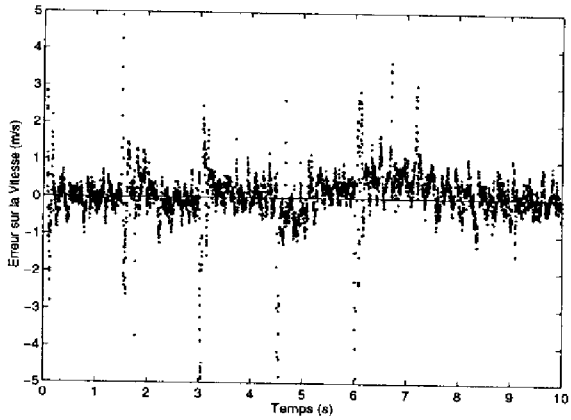


Figure IV.25: Erreur de Vitesse

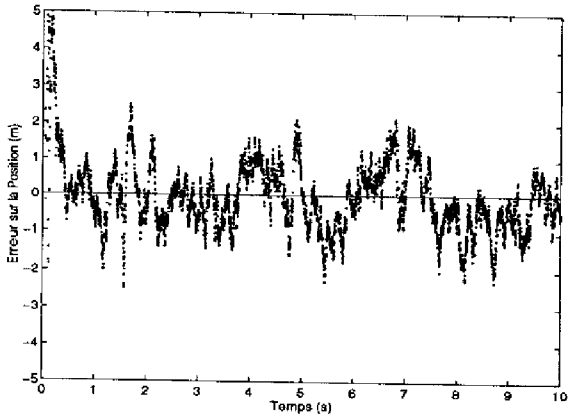


Figure IV.26: Erreur de Distance Radiale

IV.4 Traitement des informations radiale/angulaire (monopulse,2D)

Les résultats précédemment exposés, permettent d'évaluer les performances radiales du filtre particulaire, comparativement aux méthodes classiques.

Ce paragraphe présente la modélisation 2D complète d'un radar de poursuite monopulse (de phase), dont on a introduit dans le premier chapitre, le principe général idéalisé au cas de cornets récepteurs supposés ponctuels et isotropes. Nous présentons maintenant dans ce cas, les résultats d'estimation des éléments cinématiques de cibles.

IV.4.1 Position du problème

IV.4.1.1 Equation de mesure radar

L'expression I.15 régit la forme de l'onde reçue par le radar. Dans le cas d'une antenne monopulse, il y a deux cornets récepteurs et la relation I.7 donne le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux récepteurs lorsque la cible est suffisamment éloignée du radar.

Cela revient donc à écrire une équation de mesure pour les récepteurs I et II :

$$\boxed{\begin{cases} Y_t^I = H_t(D_t^I)\sigma + \nu_t^I \\ Y_t^{II} = H_t(D_t^{II})e^{-j\Delta\varphi}\ \sigma + \nu_t^{II} \end{cases}} \tag{IV.30}$$

avec
$$\left\|\begin{array}{l} \sigma = \rho e^{j\varphi} = \sigma_1 + j\sigma_2 \quad : \text{coefficient de réflexion complexe de cible} \\ H_t(D_t^n)_{n=I,II} = \dfrac{1}{(D_t^n)^2}\ h(t - 2\dfrac{D_t^n}{c})\ e^{-2j\frac{D_t^n}{c}\omega_0} \\ \nu_t^I, \nu_t^{II} \ : \text{bruits blancs gaussiens centrés complexes} \\ E[\mathcal{R}e(\nu_t^I)^2] = E[\mathcal{I}m(\nu_t^I)^2] = E[\mathcal{R}e(\nu_t^{II})^2] = E[\mathcal{I}m(\nu_t^{II})^2] = \dfrac{r}{2} \end{array}\right.$$

L'expression IV.30 donne l'équation de mesure complète dans le cas monopulse, en sortie de filtre adapté. On montre que, pour des raisons de blancheur du bruit de mesure, il convient d'échantillonner à une cadence deux fois plus élevées que le signal émis : nous obtenons alors deux points sur le signal complexe en sortie de filtre adapté.

Ces équations se réécrivent donc sous forme matricielle, et en utilisant abusivement la même notation que IV.30 :

$$\begin{cases} Y_t^I = \begin{pmatrix} (Y_t^{1,Re})^I \\ (Y_t^{1,Im})^I \\ (Y_t^{2,Re})^I \\ (Y_t^{2,Im})^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \\ H_{41} & H_{42} \end{pmatrix}_{(D_t=D_t^I)} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\nu_t^{1,Re})^I \\ (\nu_t^{1,Im})^I \\ (\nu_t^{2,Re})^I \\ (\nu_t^{2,Im})^I \end{pmatrix} & \textbf{(Récept. I)} \\ Y_t^{II} = \begin{pmatrix} (Y_t^{1,Re})^{II} \\ (Y_t^{1,Im})^{II} \\ (Y_t^{2,Re})^{II} \\ (Y_t^{2,Im})^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \\ H_{41} & H_{42} \end{pmatrix}_{(D_t=D_t^{II})} e^{-j\Delta\varphi} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\nu_t^{1,Re})^{II} \\ (\nu_t^{1,Im})^{II} \\ (\nu_t^{2,Re})^{II} \\ (\nu_t^{2,Im})^{II} \end{pmatrix} & \textbf{(Récept. II)} \end{cases} \tag{IV.31}$$

où

$$e^{-j\Delta\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\varphi) & \sin(\Delta\varphi) \\ -\sin(\Delta\varphi) & \cos(\Delta\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{est une matrice de rotation}$$

et

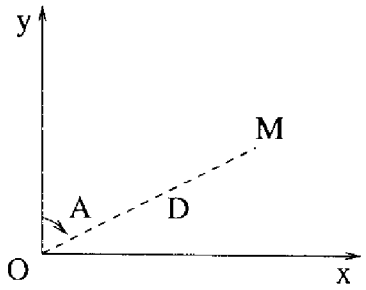
$$\begin{cases} H_{11} = H_{22} = \dfrac{h^1}{D_t^2}\cos(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \\ H_{21} = -H_{12} = \dfrac{h^1}{D_t^2}\sin(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \\ H_{31} = H_{42} = \dfrac{h^2}{D_t^2}\cos(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \\ H_{41} = -H_{32} = \dfrac{h^2}{D_t^2}\sin(\dfrac{2D_t}{c}\omega_0) \end{cases}$$

avec h^1 et h^2, deux échantillons de l'enveloppe du signal en sortie de filtre adapté : ce qui explique que le vecteur de mesure pour chaque cornet récepteur est de dimension 4.

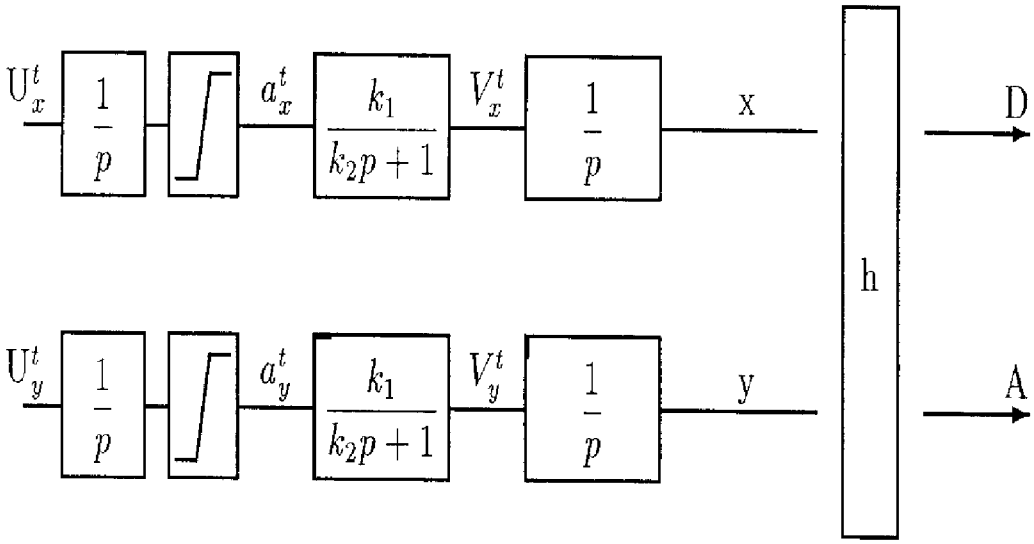
IV.4.1.2 Modèle de dynamique associé

Comme dans le cas monodimensionnel, nous utilisons un modèle de Singer, modifié pour tenir compte des frottements aérodynamiques. Il se rajoute cependant ici une non-linéarité supplémentaire puisque les mesures font intervenir les coordonnées polaires, alors que ce modèle de dynamique s'écrit en cartésien.

La cible est repérée de la manière suivante :



Ce modèle peut se mettre sous la forme :



où

$$\begin{cases} U_x^t, U_y^t : \text{bruits blancs gaussiens-poissoniens} \\ k_1, k_2 : \text{paramètres caractéristiques de la cible} \end{cases}$$

et

(k_1 : gain statique, k_2 : constante de temps)

Nous avons choisi k_1 de sorte que le domaine de vitesses accessibles sur chaque coordonnée est $3.3 Mach$.

On remarque que ce modèle de dynamique consiste en deux modèles de Singer mono-dimensionnel en parallèle : le couplage entre les deux composantes se faisant au travers du changement de coordonnées cartésien/polaire.

IV.4.1.3 Résumé

On peut résumer le problème de poursuite de cibles manœuvrantes par un radar monopulse, sous la forme usuelle suivante (dynamique/observation) :

$$\begin{cases} \text{Dynamique} & \begin{cases} \dot{a}_x^t = w_1^t + \pi_1^t \\ \dot{V}_x^t = \dfrac{k_1 a_x^t - V_x^t}{k_2} \\ \dot{x}_t = V_x^t \\ \dot{a}_y^t = w_2^t + \pi_2^t \\ \dot{V}_y^t = \dfrac{k_1 a_y^t - V_y^t}{k_2} \\ \dot{y}_t = V_y^t \\ \dot{\sigma} = w_3^t \end{cases} \\ \text{Mesure} & \begin{cases} Y_t^I = H_t(D_t^I)\sigma + \nu_t^I \\ Y_t^{II} = H_t(D_t^{II})e^{-j\Delta\varphi}\sigma + \nu_t^{II} \end{cases} \end{cases} \tag{IV.32}$$

avec

$$\begin{cases} D_t^n = \sqrt{(x_t^n)^2 + (y_t^n)^2} \quad n = I, II \\ \tan(A_t) = \dfrac{x_t}{y_t} \\ H_t(D_t) = \dfrac{1}{D_t^2}\, e^{-j\omega_0 \frac{2D_t}{c}}\, h(t - 2\,\dfrac{D_t}{c}) \end{cases}$$

et :

- (w_1^t,w_2^t) deux bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et de même variance.
- (π_1^t, π_2^t) deux bruits blancs gaussiens-poissoniens.
- w_3^t : bruit blanc gaussien $\mathcal{N}_{(0,s)}$.

IV.4.2 Solution "usuelle"

On utilise ici la même méthode de comparaison que celle exposée dans le paragraphe IV.3.2, à savoir que l'on initialise le filtre linéarisé lorsque le rapport S/B (en sortie de voie Σ) est supérieur à 1.1dB, soit -1.9dB sur chaque cornet.

IV.4.3 Solution particulaire

IV.4.3.1 Estimation du coefficient de réflexion complexe

Comme dans le cas monodimensionnel, on constate (éq. IV.30) que, conditionnellement à D_t et A_t (position de la particule), la mesure est linéaire en le coefficient de rétrodiffusion complexe σ. On peut donc économiser des particules en utilisant le fait que les équations de mesure et dynamique de σ sont linéaires : le filtre de Kalman est donc optimal pour estimer σ.

De plus, du fait de la faible variation des éléments dynamiques à l'échelle de la récurrence radar, on peut se contenter de ne résoudre l'équation de Riccati que toutes les τ itérations.

Comme précédemment, la technique la plus simple pour estimer ce coefficient est d'utiliser la méthode des moindres carrés :

$$\widehat{\sigma} = \left(\sum_{l=1}^{\tau} H_{t+l}^T R^{-1} H_{t+l}\right)^{-1} \sum_{l=1}^{\tau} H_{t+l}^T R^{-1} Y_{t+l} \tag{IV.33}$$

avec

$$\begin{cases} E[\widetilde{\sigma}] = E[\sigma - \widehat{\sigma}] = 0 \\ \widetilde{P} = E[\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^T] = \left(\sum_{l=1}^{\tau} H_{t+l}^T R^{-1} H_{t+l}\right)^{-1} \end{cases}$$

Cette relation est obtenue dans le cas où il n'y a qu'un seul récepteur. Dans le cas monopulse (deux cornets) cette expression se réécrit donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma} = & \left(\sum_{l=1}^{\tau} (H_{t+l}^I)^T R^{-1} H_{t+l}^I + (e^{-j\Delta\varphi})^T (H_{t+l}^{II})^T R^{-1} H_{t+l}^{II} e^{-j\Delta\varphi}\right)^{-1} \\ & \times \sum_{l=1}^{\tau} \left((H_{t+l}^I)^T R^{-1} Y_{t+l}^I + (e^{-j\Delta\varphi})^T (H_{t+l}^{II})^T R^{-1} Y_{t+l}^{II}\right) \end{aligned}$$

où $\Delta\varphi$ est la différence de phase entre les deux cornets de l'antenne monopulse, Y^I, Y^{II}, les signaux reçus par les cornets I et II, $H_t^I = H(D_t^I)$ et $H_t^{II} = H(D_t^{II})$.

Le filtre de Kalman conditionnel s'écrit donc (comme dans le cas 1D) :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\underline{\text{Prédiction}} & \left\{\begin{array}{l}
\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1} = \widehat{\sigma}^i_{t-\tau+1|t-\tau+1} \\
\widetilde{P}^i_{t|t-\tau+1} = \widetilde{P}^i_{t-\tau+1|t-\tau+1} + Q
\end{array}\right. \\
\underline{\text{Filtrage}} & \left\{\begin{array}{l}
(\widetilde{P}^i_{t|t})^{-1} = (\widetilde{P}^i_{t|t-\tau+1})^{-1} + \sum\limits_{n=I,II}\sum\limits_{l=1}^{\tau}(H^{n,i}_{t-\tau+l})^T\ R^{-1}(H^{n,i}_{t-\tau+l}) \\
\widehat{\sigma}^i_{t|t} = \widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1} + \widetilde{P}^i_{t|t}\ \times \\
\qquad \left(\sum\limits_{n=I,II}\sum\limits_{l=1}^{\tau}(H^{n,i}_{t-\tau+l})^T\ R^{-1}\left(Y^n_{t-\tau+l} - H^{n,i}_{t-\tau+l}e^{-j\Delta\varphi^n}\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1}\right)\right)
\end{array}\right.
\end{array}} \tag{IV.34}$$

$$\text{où } \Delta\varphi^n \ = \ \varphi_I - \varphi_n$$

Remarques :

- La présence dans les équations d'une variance de dynamique Q non-nulle permet de tenir compte de lentes fluctuations du coefficient de réflexion.
- La présence de l'exposant i rappelle qu'il convient de calculer un filtre de Kalman pour chaque particule i, et donc que le vecteur d'état de la particule contient l'état du filtre de Kalman : $\widehat{\sigma}^i_{t|t}$ et $\widetilde{P}^i_{t|t}$.

IV.4.3.2 Modèle du capteur

Une des étapes de construction du filtre particulaire repose sur le calcul de la probabilité du signal conditionnelle à l'état Xi_t de la particule, à l'instant t :

$$X^i_t \ = \ \left(\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1}, \widetilde{P}^i_{t|t}, (a^t_x)^i, (V^t_x)^i, x^i_t, (a^t_y)^i, (V^t_y)^i, y^i_t)\right)^T$$

L'équation de mesure IV.30 peut se réécrire sous la forme matricielle suivante (en regroupant les mesures par τ itérations) :

$$Y_t = M_t(D_t, A_t)\sigma_t + \nu_t \tag{IV.35}$$

avec $Y_t = (Y^I_k, Y^{II}_k)^T_{k=\{t-\tau+1,...,t\}}$ et $M_t(D_t, A_t)$ une matrice diagonale par bloc contenant les matrices $H_k(D_k)$ et $H_k(D_k)\exp(-j\Delta\varphi_k)$ aux instants $k = \{t-\tau+1, ..., t\}$. La matrice $M_t(D_t, A_t)$ est donc une matrice de dimension 8τx2.

Pour le filtre particulaire, l'équation de mesure IV.35 doit être modifiée :

$$\widetilde{Y}_t = Y_t - M_t(D^i_t, A^i_t)(\sigma_t - \widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1}) + \nu_t = M_t(D_t)\widetilde{\sigma}^i_{t|t-\tau+1} + \nu_t \tag{IV.36}$$

On a montré dans le chapitre III, que la pondération d'une particule dépend directement de la densité de probabilité p$(Y_t|X^i_t)$, soit ici :

$$P(\widetilde{Y}_t|X_t^i) \;=\; P(Y_t - M_t(D_t^i, A_t^i)\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1}|X_t^i)$$

Comme dans le cas monodimensionnel avec Doppler, cette distribution est une gaussienne de moyenne nulle (estimateur de σ non-biaisé), et de matrice de covariance :

$$M_t(D_t^i, A_t^i)\widetilde{P}^i_{t|t}M_t(D_t^i, A_t^i)^T + R$$

Pour simplifier les notations, nous posons par la suite :

$$M_t^i \;=\; M_t(D_t^i, A_t^i)$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{aligned} P(\widetilde{Y}_t|X_t^i) \;&=\; P(Y_t - M_t^i\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1}|X_t^i) \;=\; P^\nu(Y_t - M_t^i\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{4\tau}\sqrt{det(M_t^i\widetilde{P}^i_{t|t-\tau+1}(M_t^i)^T + R)}} \\ &\quad \times \exp -\frac{1}{2}\left((Y_t - M_t^i\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1})^T(M_t^i\widetilde{P}^i_{t|t-\tau+1}(M_t^i)^T + R)^{-1}(Y_t - M_t^i\widehat{\sigma}^i_{t|t-\tau+1})\right) \end{aligned}} \tag{IV.37}$$

avec $R = rI_{8\tau}$, où $I_{8\tau}$ est la matrice identité de dimension 8τ.

Remarque : Comme dans le cas Doppler, on peut simplifier l'inversion de la matrice $MPM^T + R$, ici de dimension 80x80, en utilisant les propriétés matricielles IV.23, IV.24.

IV.4.3.3 Construction de la solution particulaire

1. **Initialisation :** Les N particules X_0^i sont initialisées selon l'information dont on dispose a priori sur le vecteur d'état, et les poids p_0^i sont égaux à $\frac{1}{N}$.

   Le vecteur d'état X_t^i associé à la particule i est composé des commandes de pilotage, vitesses et positions selon x et y, ainsi que du coefficient de rétrodiffusion complexe σ :

   $$X_t^i \;=\; \left(\sigma_t^i, (a_x^t)^i, (V_x^t)^i, x_t^i, (a_y^t)^i, (V_y^t)^i, y_t^i\right)^T$$

   On doit toutefois remarquer qu'il convient d'adjoindre à ce vecteur d'état les quatre termes de la matrice de variance/covariance de l'erreur d'estimation $\widetilde{P}^i_{t|t}$ du filtre de Kalman-conditionnel.

2. **Evolution :**

   Chaque particule X_t^i explore l'espace d'état :

$$\boxed{\begin{cases} (a_x^t)^i = (a_x^{t-\tau+1})^i + (w_1^t)^i + (\pi_1^t)^i \\ (V_x^t)^i = \dfrac{k_1(a_x^{t-\tau+1})^i - (V_x^{t-\tau+1})^i}{k_2} T + (V_x^{t-\tau+1})^i \\ x_t^i = x_{t-\tau+1}^i + (V_x^{t-\tau+1})^i T \\ (a_y^t)^i = (a_y^{t-\tau+1})^i + (w_2^t)^i + (\pi_2^t)^i \\ (V_y^t)^i = \dfrac{k_1(a_y^{t-\tau+1})^i - (V_y^{t-\tau+1})^i}{k_2} T + (V_y^{t-\tau+1})^i \\ y_t^i = y_{t-\tau+1}^i + (V_y^{t-\tau+1})^i T \end{cases}} \qquad \text{(IV.38)}$$

   où T = τ T_r, avec T_r la période de récurrence radar.

   Conditionnellement à l'état X_t^i de chaque particule, on construit le filtre de Kalman-conditionnel IV.34.

3. **Pondération :** La pondération normalisée p_t^i associée à la particule i se calcule simplement au moyen de la relation IV.37, et des simplifications matricielles IV.23, IV.24 :

$$\boxed{p_t^i = \frac{P(\tilde{Y}_t^i | X_t^i)}{\sum_{j=1}^{N} P(\tilde{Y}_t^j | X_t^j)}} \qquad \text{pour i = 1,...,N} \qquad \text{(IV.39)}$$

4. **Estimation :** L'estimation du processus X se déduit directement des étapes évolution/pondération par l'expression :

$$\boxed{\widehat{X}_t = \sum_{i=1}^{N} p_t^i X_t^i} \qquad \text{(IV.40)}$$

Pour un traitement dynamique, on itère les étapes Evolution, Estimation du coefficient de réflexion complexe et Pondération.

IV.4.4 Résultats de simulation

Conditions opératoires

Nous présentons ici les résultats numériques obtenus en poursuite bidimensionnelle pour le filtre particulaire.

Nous avons pris comme caractéristiques du radar de poursuite :

$$\begin{cases} \textbf{Fréquence du signal porteur : } 1 \text{ et } 3\ GHz \\ \textbf{Forme de l'impulsion : } \text{Rectangulaire} \\ \textbf{Largeur d'impulsion : } 0.125\ \mu s \\ \textbf{Période de répétition des impulsions : } 200\ \mu s \\ \textbf{Fréquence d'échantillonnage : } 8\ MHz \end{cases}$$

Nous nous plaçons en sortie de filtre adapté. On récupère donc un signal utile triangulaire de largeur double de la largeur d'impulsion, avec deux mesures du signal utile, conformément à l'échantillonnage optimal décrit dans le premier rapport [59].

On s'intéresse à la poursuite d'une cible pouvant effectuer des manœuvres dans les deux directions (radiale et angulaire) pour un radar ayant une porteuse de l'ordre du GHz. Nous avons pris, à titre d'exemple deux valeurs de fréquence porteuse afin d'étudier l'effet sur le comportement du filtre particulaire. De plus, nous avons considéré deux valeurs de l'envergure d du doublet afin de jouer sur la finesse de la détermination angulaire.

Les courbes exposées dans ce paragraphe ne présentent pas de comparaison avec les techniques "usuelles" car, aux rapports S/B étudiés (S/B<0), il ne peut y avoir de détection de cible (Cf par. IV.3.2).

Remarques :

- Les rapports signal/bruit présentés ici, sont ceux que l'on reçoit sur chaque cornet.
- Nous ne traitons que le problème de dynamique bidimensionnelle. Le cas 3D ne posant pas de difficultés conceptuelles nouvelles, mais simplement une charge de calcul supplémentaire.

Trajectoire de fuite (1GHz)

Dans un premier temps, nous traitons ici le cas d'une cible en éloignement par rapport au radar, et nous supposons que l'antenne reste pointée dans une direction fixe.

Les caractéristiques du radar sont les suivantes :

Fréquence du signal porteur : ν = 1GHz
Distance entre les deux cornets récepteurs : d = 40 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : 0dB à $\simeq$ 7km

La cible effective a les caractéristiques cinématiques suivantes :

Commandes de pilotage : $a_x = 0$, a_y=20
Vitesses : V_x=0, V_y=360m/s
Position : x=0, y=7071m

Thème :
La cible s'éloigne donc le long de l'axe de l'antenne (axe y), avec une vitesse radiale de 360m/s. La durée de la simulation est de 25 secondes, et en fin de simulation la cible se trouve à environ 16100m : le rapport signal/bruit est alors égal à -14.3dB. Elle est d'autre part supposée pouvoir subir des sauts poissoniens de pilotage toutes les 10 secondes, en moyenne.

Nous avons pris dans ce cas un radar dont la porteuse est égale au gigahertz, c'est-à-dire que la fréquence Doppler est de 2.4kHz alors que la fréquence de répétition des impulsions est égale à 5kHz. On se situe donc dans un rapport 2.1, ce qui signifie que l'on a environ deux points sur une oscillation Doppler. On peut donc reconstituer cette oscillation sans ambiguïté (théorème de Nyquist).

De plus, les récepteurs sont écartés de vingt fois la longueur d'onde, c'est-à-dire de 6 mètres, ce qui permet d'obtenir une bonne sensibilité aux variations de phase puisque le déphasage entre les deux récepteurs est directement proportionnel à cet écart I.7. On ne peut augmenter indéfiniment, à fréquence d'émission constante, l'écartement des antennes tout d'abord en raison des contraintes d'encombrement, mais aussi d'apparition de lobes d'ambiguïtés de plus en plus nombreux et de plus en plus proches. Ici, on remarque que la largeur du lobe principal du diagramme de rayonnement est d'environ 3° : les lobes d'ambiguïtés sont relativement proches, et donc pratiquement à la limite de ce que l'on peut envisager comme écartement des antennes.

Estimation :
Les figures IV.27,IV.28,IV.29 présentent la reconstitution des éléments de la cible, à savoir commande de pilotage en x et y, vitesse radiale, position en coordonnées polaires, ainsi que la norme du coefficient de rétrodiffusion.

Nous remarquons immédiatement que les composantes radiales sont toujours parfaitement estimées, et présentent au moins les mêmes erreurs d'estimation que dans le cas monodimensionnel avec Doppler du rapport précédent [60].

Loin des antennes, on peut considérer que la composante x donne le comportement angulaire, alors que la composante y donne le comportement radial. On retrouve la même qualité d'estimation de commande de pilotage sur y, c'est-à-dire le radial. Par contre, la reconstitution de la commande angulaire ($\sim a_x$) présente un transitoire plus long. Cela vient du fait qu'il est ici plus difficile d'estimer les variations au travers d'une phase, que d'un retard : c'est ce qui explique les différences de vitesse de convergence entre les deux commandes de pilotage.

L'estimation de la distance présente un léger biais aléatoire, environ 1 mètre, qui provient du nombre limité de particules face à la sensibilité induite par la phase absolue : une fois que les particules se sont regroupées autour d'une erreur de position de 1 mètre, les faire changer de position pour les ramener autour de 0 mètre d'erreur devient difficile car cela équivaut à faire tourner la phase de 6π (en fait de 3 longueurs d'onde), et à perturber en conséquence l'estimation angulaire. D'où le compromis optimal atteint.

On présente sous forme de tableau l'écart-type moyen de l'erreur d'estimation angulaire du filtre particulaire, pour deux plages de temps différentes où le rapport signal/bruit varie.

	Entre 5s et 15s (-4/-10dB)	Entre 15s et 25s (-10/-14.3dB)
Particulaire (σ_A)	0.5 mrad	0.5 mrad
Techniques "usuelles" (σ_A)	- - -	- - -

Par ailleurs, les écarts-types d'erreurs d'estimation de la vitesse radiale sont les suivants :

	Entre 5s et 15s (-4/-10dB)	Entre 15s et 25s (-10/-14.3dB)
Particulaire (σ_{V_D})	0.1 m/s	0.13 m/s
Techniques "usuelles" (σ_{V_D})	- - -	- - -

On remarque la précision de la détermination radiale qui, rappelons-le, est au moins aussi bonne que dans le cas précédent unidimensionnel pour lequel il n'y avait pas de phase à estimer. Cependant, l'apparition d'un autre élément à estimer est compensée par le doublement du nombre de mesures, ce qui augmente le rapport signal/bruit équivalent.

A ces rapports S/B (< 0), les techniques classiques construites sur l'intégration de 10 récurrences, ne permettent pas la détection de la cible et le mouvement de la cible interdit un temps d'intégration important.

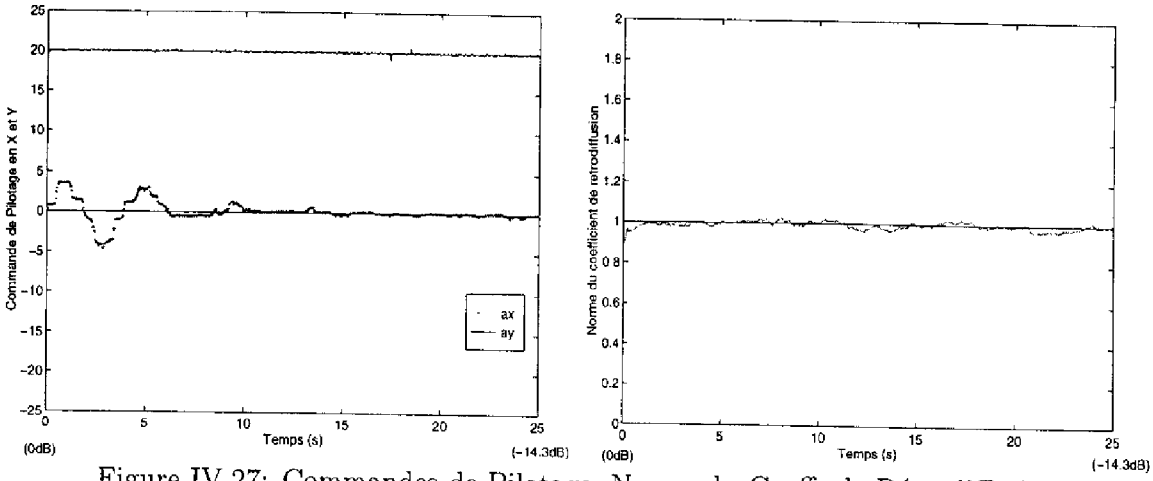


Figure IV.27: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

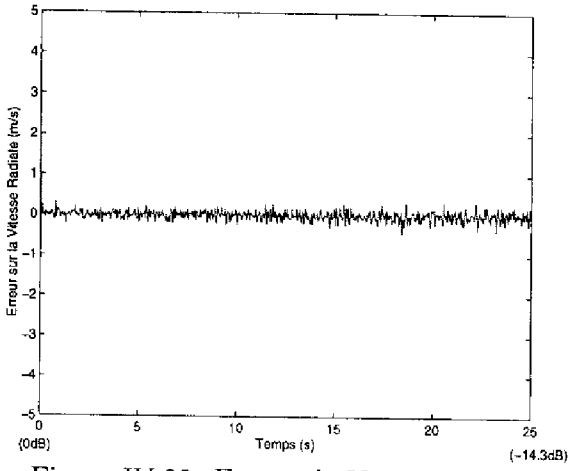


Figure IV.28: Erreur de Vitesse Radiale

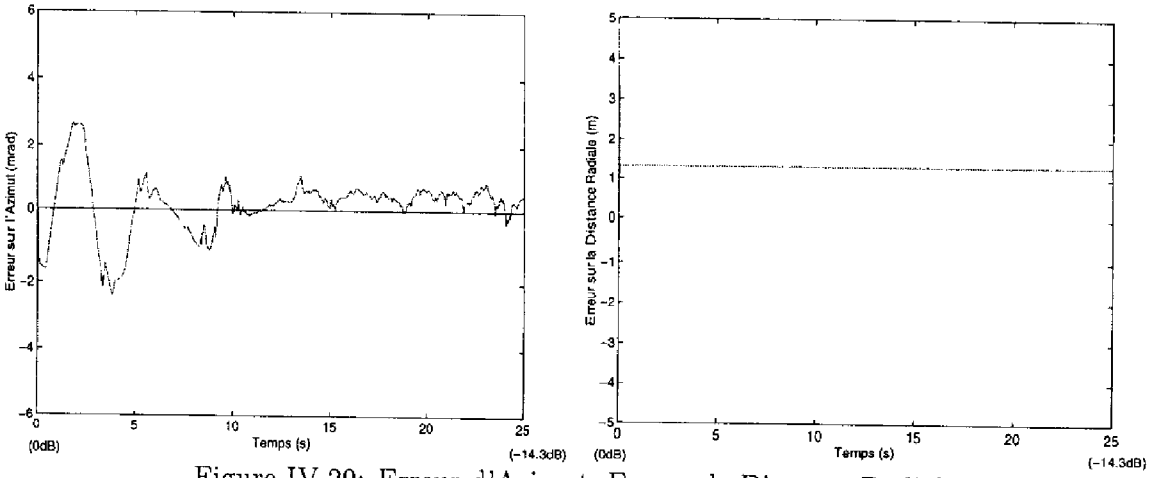


Figure IV.29: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

Visualisation de la densité de probabilité conditionnelle aux mesures :

Les deux figures IV.30, IV.31 représentent la densité de probabilité conditionnelle reconstituée par le filtre particulaire, en fonction des erreurs sur l'estimation des coordonnées cartésiennes x,y (les axes sont gradués en mètre).

Ces courbes sont issues de la même simulation que IV.27, IV.28,IV.29, et sont obtenues en fin de simulation lorsque la cible se situe à une distance radiale d'environ 16km, avec un rapport signal/bruit d'environ -14dB. La courbe IV.30 représente la distribution des particules 2ms après redistribution, et la courbe IV.31, 36ms après redistribution.

Comme la cible se situe loin de l'antenne monopulse, on peut considérer que la composante "Erreur sur y" donne directement l'erreur sur la distance radiale. On retrouve d'ailleurs sur y, le léger biais en distance radiale (courbe IV.29b), c'est-à-dire 1.32m.

De l'erreur sur x, on déduit immédiatement l'erreur sur l'angle en divisant par la distance radiale de la cible (16km) : on remarque un étalement sur x de la densité de probabilité d'environ ± 10m, soit une erreur angulaire inférieure à ± 0.6mrad. Ce qui est bien cohérent avec l'écart-type de l'erreur d'estimation angulaire.

Cette représentation sous forme de densité de probabilité a l'avantage de permettre de visualiser la dispersion relative des particules. De plus, cette approche est beaucoup plus riche que la simple moyenne pondérée qu'est l'estimée, car elle permet de traiter l'aspect multimodal qui peut apparaître dans certaines situations (environnement multicible, présence d'ambiguïtés diverses, ...).

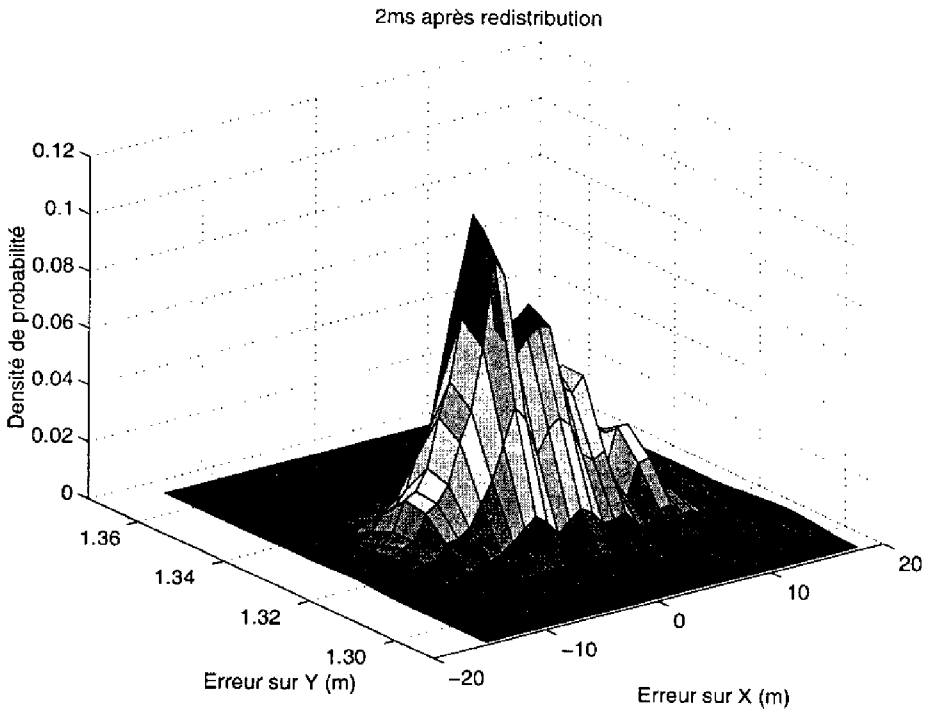


Figure IV.30:

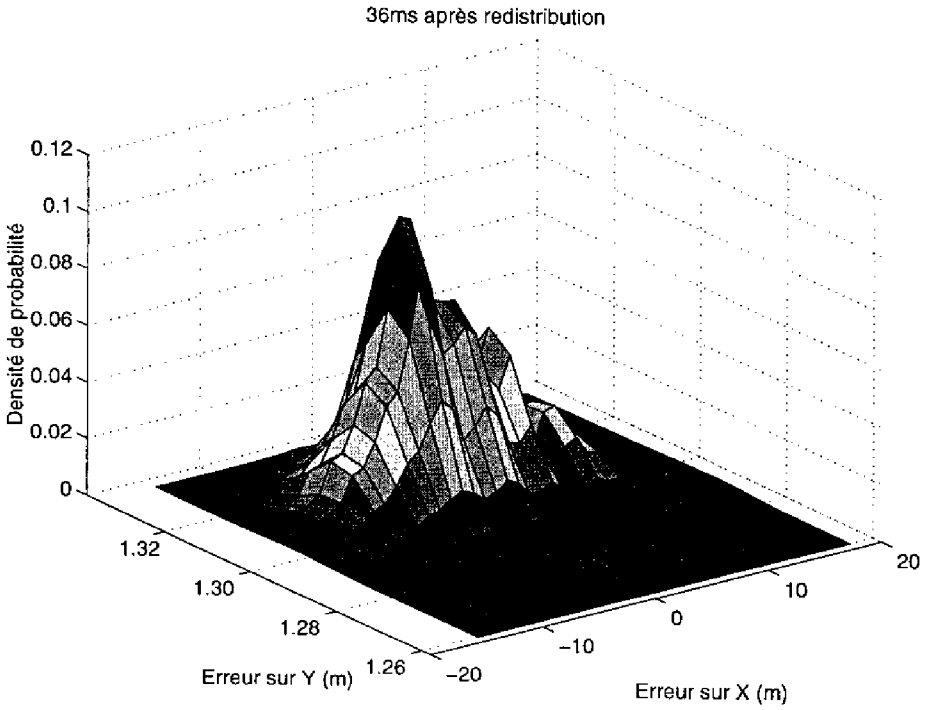


Figure IV.31:

Trajectoire de fuite (3GHz)

Comme la thématique précédente, nous traitons le cas d'une cible en éloignement (rapport signal/bruit diminue), mais avec une fréquence porteuse 3 fois plus élevée.

Les caractéristiques du radar sont les suivantes :

Fréquence du signal porteur : ν = 3GHz
Distance entre les deux cornets récepteurs : d = 10 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : 0dB à $\simeq$ 7km

La cible a les caractéristiques cinématiques suivantes :

Commandes de pilotage : $a_x = 0$, a_y=20
Vitesses : V_x=0, V_y=360m/s
Position : x=0, y=7071m

Par ailleurs, la cible est toujours supposée pouvoir subir des sauts poissoniens de pilotage toutes les 10 secondes en moyenne.

Nous avons dans ce cas rapproché les cornets récepteurs qui sont désormais distants de 5 fois la longueur d'onde, c'est-à-dire de 50cm. Cette opération a pour conséquence (eq. I.25) de diminuer par 4 la sensibilité angulaire : la largeur du lobe principal est maintenant d'environ 11.5°.

Par contre, l'augmentation de la fréquence du signal porteur a pour conséquence d'engendrer une oscillation Doppler, avec le déplacement de la cible, de 7.2kHz. Il y a donc un rapport 0.7 entre la fréquence de récurrence radar et l'oscillation Doppler, ce qui fait apparaître des ambiguïtés vitesses dès que ce rapport est inférieur à 2 (théorème de Nyquist). En clair, cela signifie que la phase tourne de plus de 2π d'une récurrence à l'autre, entraînant une indétermination qui explique le phénomène d'ambiguïté vitesse.

L'estimation des commande de pilotage en x,y, de la norme du coefficient de rétrodiffusion, ainsi que les erreurs d'estimation des vitesse et distance radiales et de l'azimut sont présentés sur les courbes IV.32,IV.33,IV.34.

On remarque tout d'abord que la présence d'ambiguïtés Doppler dégrade peu l'estimation des différents paramètres de cible, et que l'augmentation de la fréquence semble même améliorer l'estimation des commandes de pilotage par rapport au cas précédent.

On peut présenter les écarts-types d'erreurs d'estimation de l'angle sous forme de tableau :

	Entre 5s et 15s (-4/-10dB)	Entre 15s et 25s (-10/-14.3dB)
Particulaire (σ_A)	0.5 mrad	0.8 mrad
Techniques "usuelles" (σ_A)	- - -	- - -

La légère dégradation des performances du filtre particulaire par rapport au cas 1GHz, provient de la résolution angulaire plus étendue de l'antenne, et donc d'une sensibilité moins grande à une variation de phase. En effet, la sensibilité aux variations de phase est théoriquement 4 fois plus faible que dans la première thématique.

Par contre, comme on peut le remarquer sur le tableau ci-dessous, il semble que l'augmentation de la fréquence porteuse induit une très légère amélioration sur l'estimation de la vitesse radiale. Ce phénomène apparaît dans l'expression de la formule de Manasse, où l'on remarque une précision en vitesse radiale qui croît avec la fréquence.

	Entre 5s et 15s (-4/-10dB)	Entre 15s et 25s (-10/-14.3dB)
Particulaire (σ_{V_D})	0.08 m/s	0.1 m/s
Techniques "usuelles" (σ_{V_D})	- - -	- - -

Il apparaît que la technique particulaire permet de lever l'ambiguïté Doppler, car ici la vitesse ambiguë est égale à 250m/s, ce qui se situe dans le domaine accessible de vitesse.

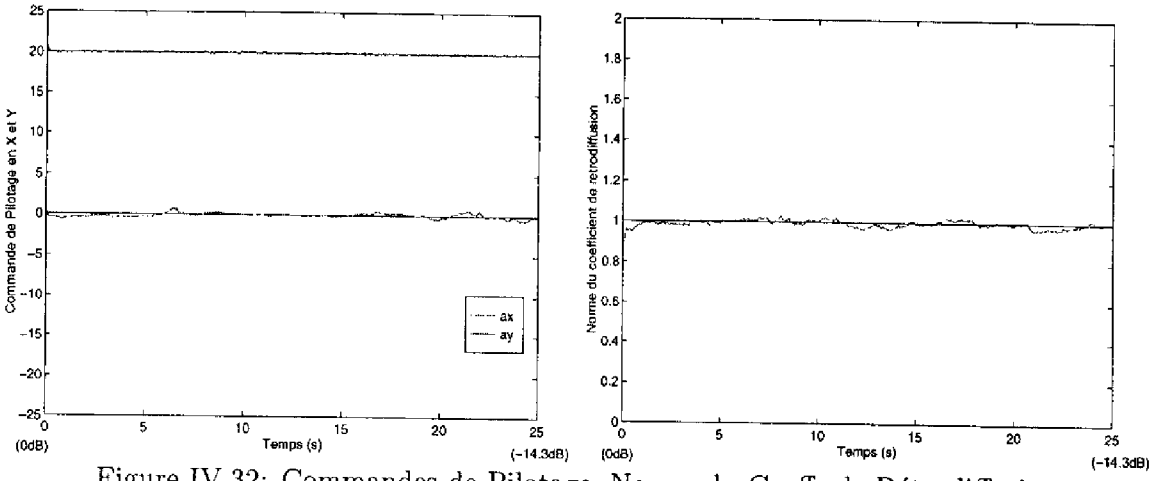


Figure IV.32: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

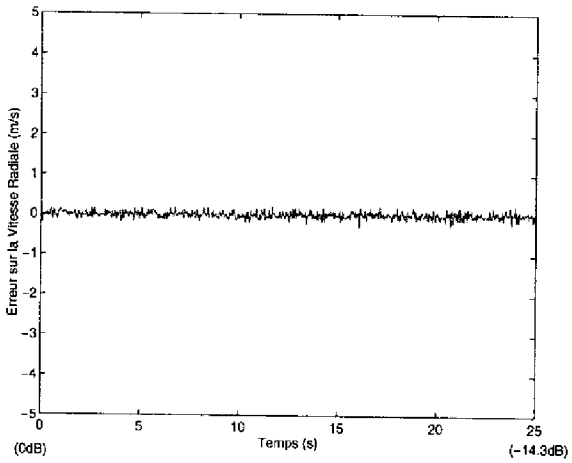


Figure IV.33: Erreur de Vitesse Radiale

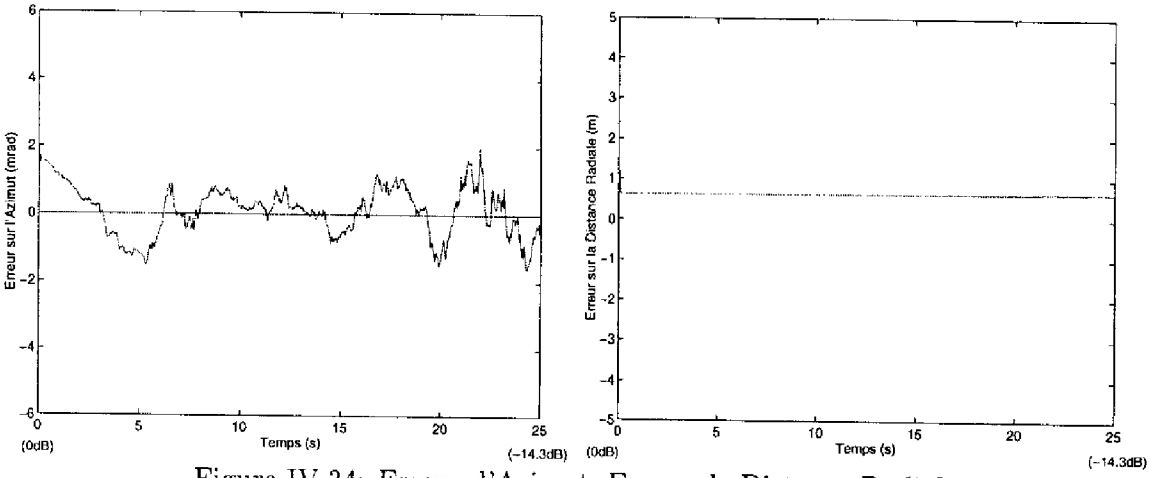


Figure IV.34: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

Trajectoire de ralliement (1GHz) :

Les deux simulations précédentes ont permis d'étudier le comportement limite du filtre particulaire à faible rapport signal/bruit. Une telle politique d'éloignement de la cible peut paraître curieuse, toutefois dans un contexte opérationnel, il n'est pas aberrant de considérer que la cible que l'on mesure s'éloigne du radar à un instant donné.

Par contre, nous avons choisi de traiter dans ce paragraphe, le cas d'un mobile assaillant. La thématique abordée est donc un peu plus délicate à traiter, car le filtre doit acquérir la cible durant une période de rapport signal/bruit significativement plus faible.

Les caractéristiques du radar sont identiques à celles du premier paragraphe :

Fréquence du signal porteur : $\nu = 1$GHz
Distance entre les deux cornets récepteurs : d = 40 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -14dB à 15km

La cible se rapproche du radar avec les caractéristiques cinématiques suivantes :

Commandes de pilotage : $a_x = 0$, a_y=-20
Vitesses : V_x=0, V_y=-360m/s
Position : x=0, y=15000m

Les aléas de pilotage supposés sont toujours à la période moyenne de 10 secondes.

Le mobile se rapproche donc avec une vitesse légèrement supersonique, et le rapport signal/bruit augmente au cours du temps, pour atteindre -2.6dB en fin de simulation (au bout de 20 secondes).

La largeur du lobe principal du diagramme de rayonnement est d'environ 3°.

Les figures IV.35,IV.36,IV.37 représentent l'estimation des paramètres dynamiques de la cible, à savoir la commande de pilotage en x et y (IV.35a), la norme du coefficient de rétrodiffusion (IV.35b), l'erreur sur la vitesse radiale (IV.36), l'erreur sur l'azimut (IV.37a) et l'erreur sur la distance radiale (IV.37b).

On peut chiffrer l'écart-type de l'erreur d'estimation angulaire et l'écart-type de l'erreur d'estimation de la vitesse, dans la région où le filtre a convergé :

	Azimut Entre 10s et 20s (-9.2/-2.6dB)	Vitesse radiale Entre 10s et 20s (-9.2/-2.6dB)
Particulaire	0.3 mrad	0.1 m/s
Techniques "usuelles"	- - -	- - -

On remarque sur la courbe IV.36 le bon comportement du filtre particulaire, qui permet d'estimer précisément, en quelques récurrences, la composante radiale de la vitesse et en général l'ensemble des composantes radiales.

On retrouve par contre, un temps plus long de convergence de l'algorithme pour déterminer les composantes angulaires ce qui semble, comme nous l'avons déjà précisé, assez naturel en raison de la difficulté supplémentaire que pose la reconstitution d'une différence de phase dans un bruit important.

Les performances en prédiction en fin de simulation sont détaillées ci-dessous :

	Filtre Particulaire		Kalman Etendu	
	P(.<10m)	P(.<20m)	P(.<10m)	P(.<20m)
Préd. à 2s	1	1	- - -	- - -
Préd. à 5s	0.87	1	- - -	- - -
Préd. à 8s	0.59	0.93	- - -	- - -

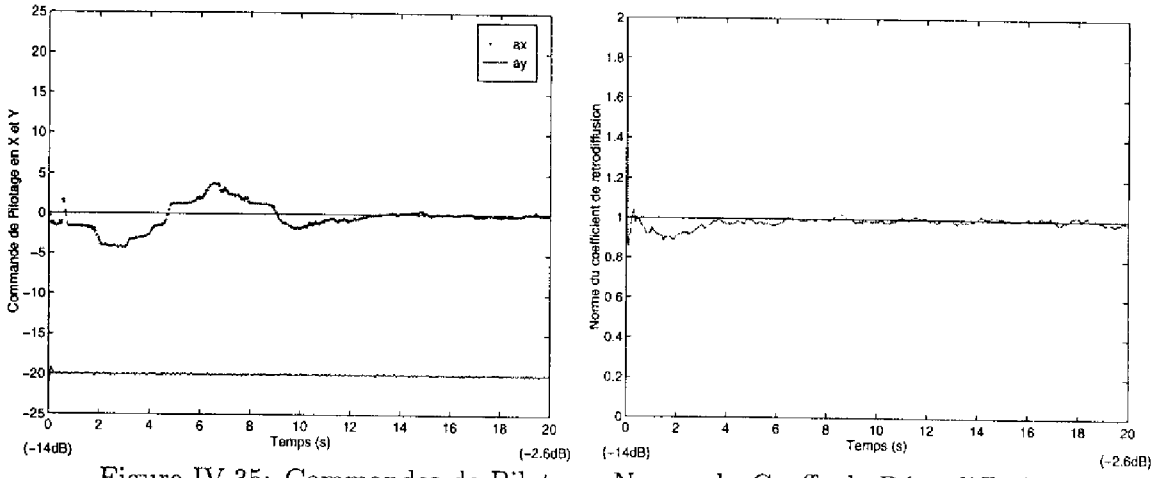


Figure IV.35: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

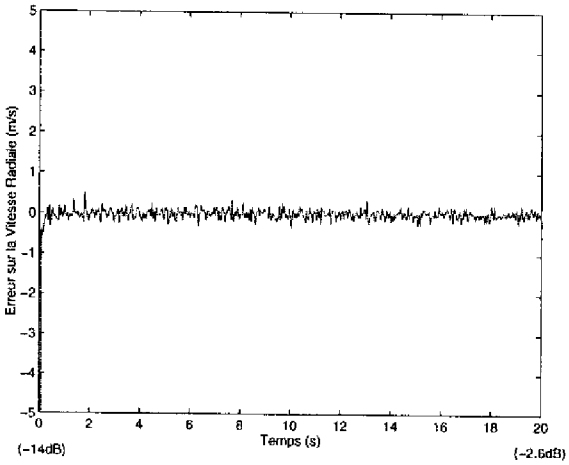


Figure IV.36: Erreur de Vitesse Radiale

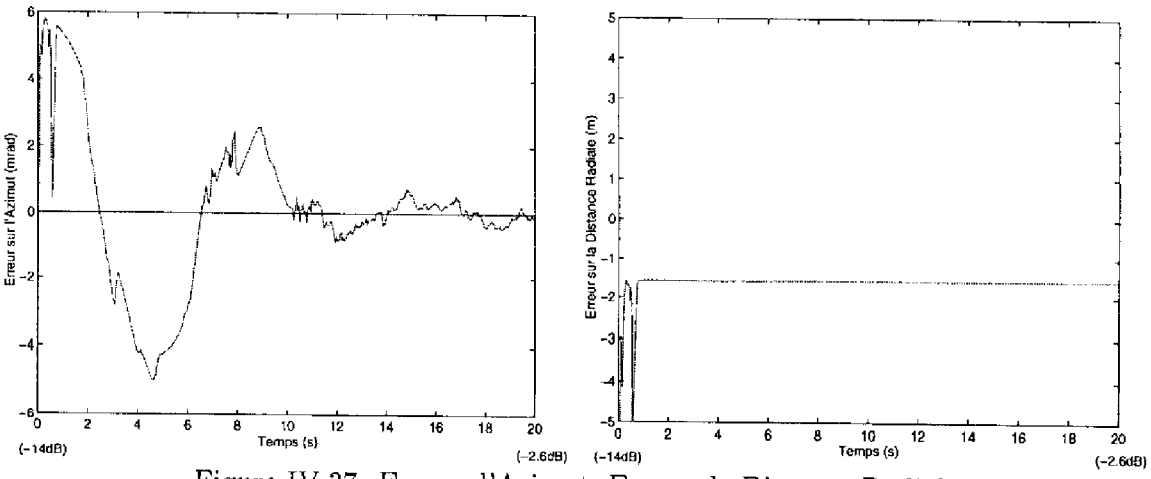


Figure IV.37: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

Visualisation des densités de probabilité en position (X,Y) :

Les courbes IV.38,IV.39,IV.40,IV.41 suivantes présentent la densité de probabilité du filtrage en fonction des erreurs sur l'estimation des coordonnées cartésiennes x et y. Nous rappelons que, comme précédemment, la composante y correspond à peu près à la distance radiale, et la composante x à l'azimut lorsque la cible est suffisamment éloignée de l'antenne.

Les deux premières sont obtenues dans la partie transitoire du filtre (environ 7 secondes de signal avec un rapport signal/bruit égal à -10.8dB à 12480km),l'une à l'instant suivant une redistribution et l'autre à l'instant précédant la redistribution suivante.

Les deux dernières correspondent à un instant où le filtre a convergé, et donc où l'estimation angulaire est meilleure (environ 14 secondes de signal avec un rapport signal/bruit de -6.9dB à 9960m).

On remarque immédiatement dans les deux premières courbes (IV.38,IV.39) la présence de 3 modes dans la distribution de probabilité des particules : deux modes sensiblement équiprobables et un mode beaucoup plus faible. En fait, la présence de ces deux pics s'explique par l'existence d'une certaine "ambiguïté" entre plusieurs régions de l'espace : le filtre ne sait pas attribuer la position de la cible à l'un de ces deux modes (c'est ce que l'on remarque sur la figure IV.38, où les deux modes sont quasiment équiprobables).

Sur la courbe IV.39, les particules ont évolué, ce qui permet de lever progressivement l'ambiguïté puisque l'on remarque que l'un des deux modes a tendance à s'atténuer au profit de l'autre.

Ce comportement multimodal n'a en fait rien à voir avec les propriétés physiques du radar (la véritable ambiguïté sur les lobes d'antenne est plus éloignée), mais est lié au comportement du filtre en régime transitoire, c'est-à-dire que l'on ne dispose pas encore d'assez de signal pour déterminer précisément la position angulaire de la cible.

Ce phénomène transitoire disparaît progressivement au fil des redistributions des particules.

C'est ce que l'on observe sur les courbes IV.40,IV.41, où l'on est revenu à un comportement unimodal de la densité de probabilité, et l'intégration sur x et y de cette courbe donne l'erreur d'estimation de la distance radiale et de l'azimut.

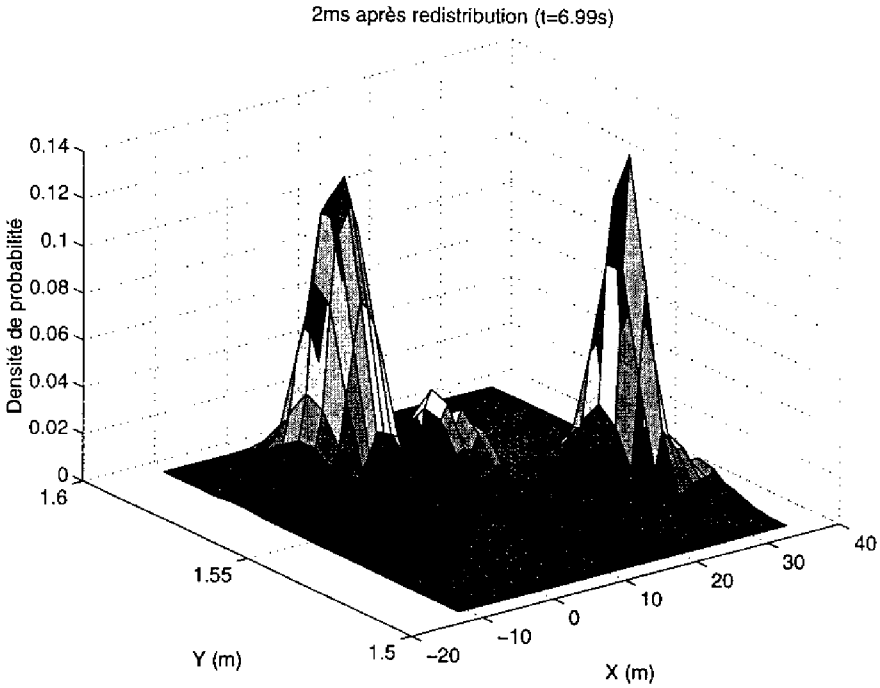


Figure IV.38:

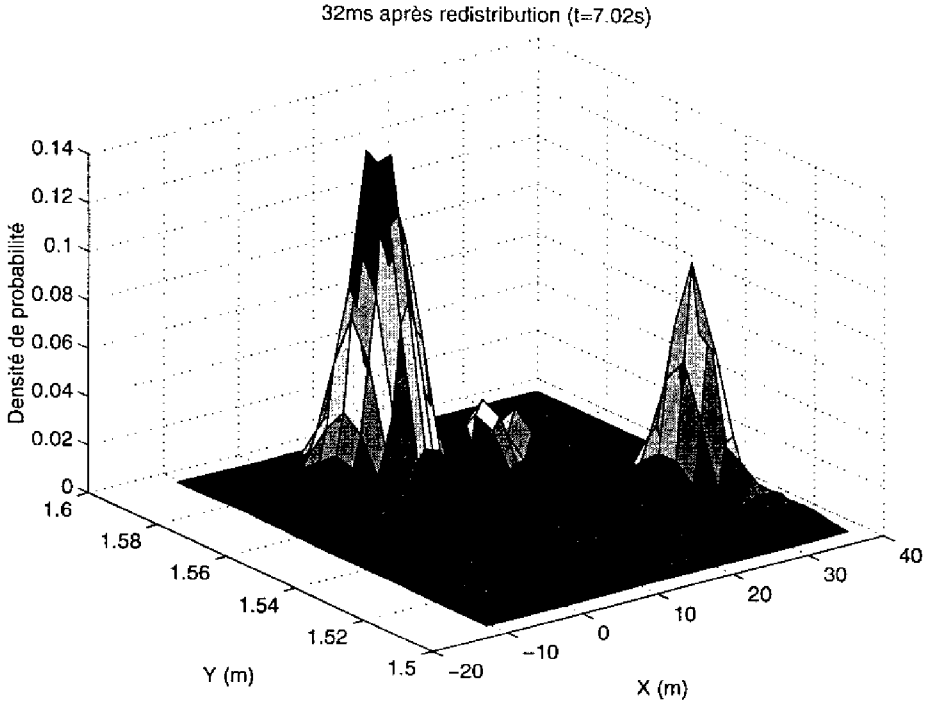


Figure IV.39:

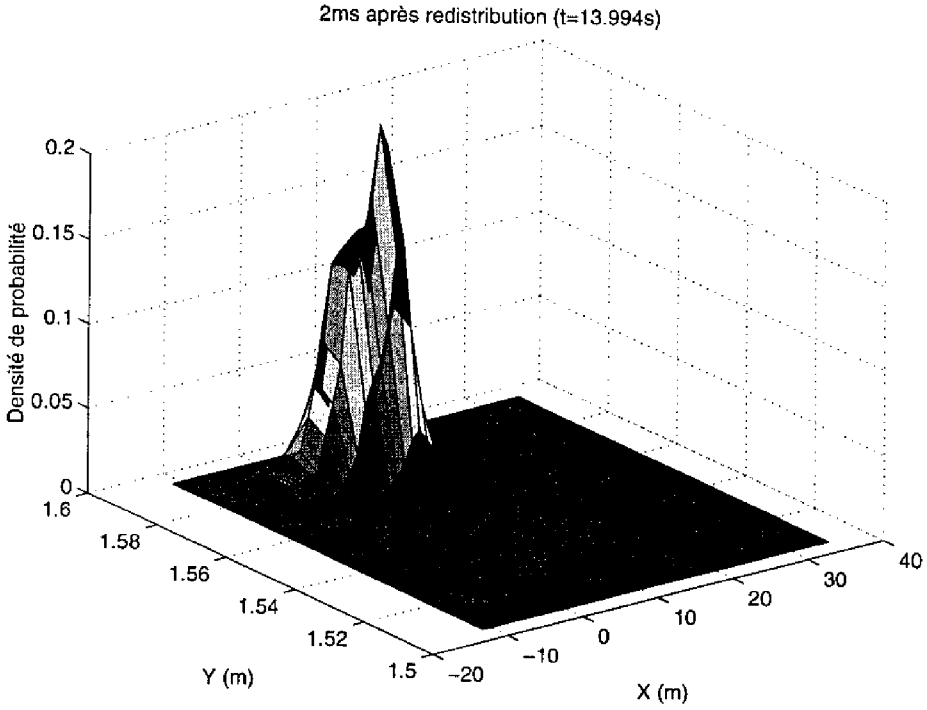


Figure IV.40:

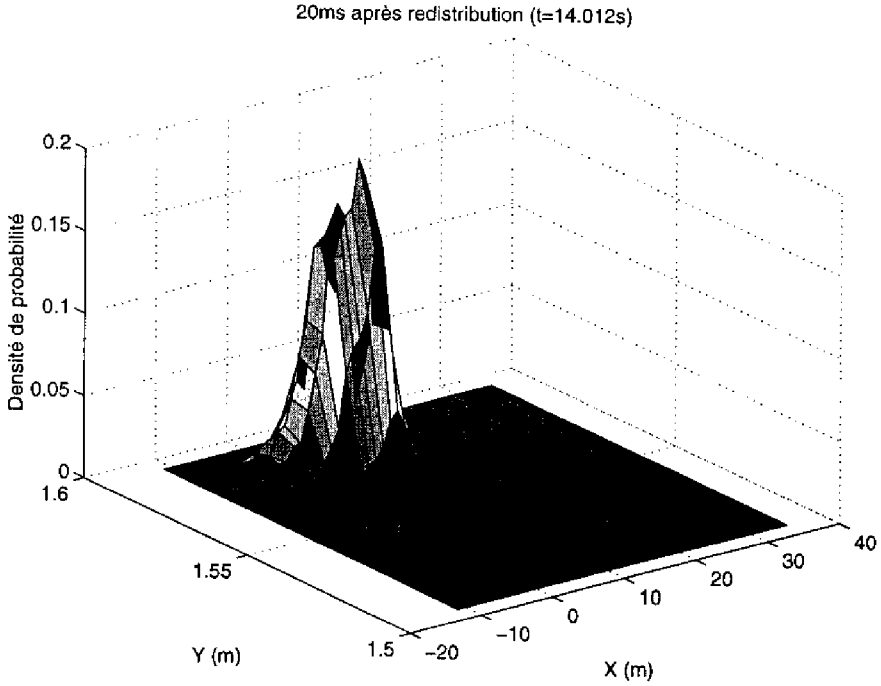


Figure IV.41:

Trajectoire de ralliement et quantification du signal reçu (1GHz) :

On présente ici les résultats obtenus pour un signal de mesure volontairement quantifié et non plus à haute définition comme cela était le cas dans la simulation précédente.

On choisit en effet de coder les mesures sur 12 bits, en supposant que le signal est contenu dans une plage de -20dB à 0dB.

Les caractéristiques du radar sont les mêmes que dans la simulation précédente.

La thématique choisie est celle précédemment étudiée, la cible effectuant un changement de commande de pilotage de manière simultanée sur les deux composantes.

Les courbes IV.42, IV.43, IV.44 représentent l'estimation des commandes de pilotage en X,Y, de la norme du coefficient de rétrodiffusion, ainsi que l'erreur d'estimation de la vitesse radiale, de l'azimut et de la distance radiale, pour le filtre particulaire. Comme précédemment, il n'apparait aucune comparaison avec les techniques usuelles, car à ces rapports S/B la cible n'a pas été détectée.

A titre de comparaison, nous présentons les erreurs d'estimation sur l'azimut, avec et sans quantification :

	Entre 10s et 20s (-10/-7.2dB)	Entre 18s et 20s (-7.8/-7.2dB)
Particulaire sans quantification	0.7 mrad	0.4 mrad
Particulaire avec quantification	0.9 mrad	0.6 mrad

De même, les écarts-types d'erreur d'estimation sur la vitesse radiale sont :

	Entre 10s et 20s (-10/-7.2dB)	Entre 18s et 20s (-7.8/-7.2dB)
Particulaire sans quantification	0.11 m/s	0.11 m/s
Particulaire avec quantification	0.11 m/s	0.11 m/s

On remarque sur les deux tableaux précédents que la perte de précision est faible, pour la quantification choisie de 12 bits. Par contre, on perturbe légèrement les régimes transitoires : le filtre particulaire traîne un peu plus pour estimer la nouvelle commande de pilotage (fig. IV.42).

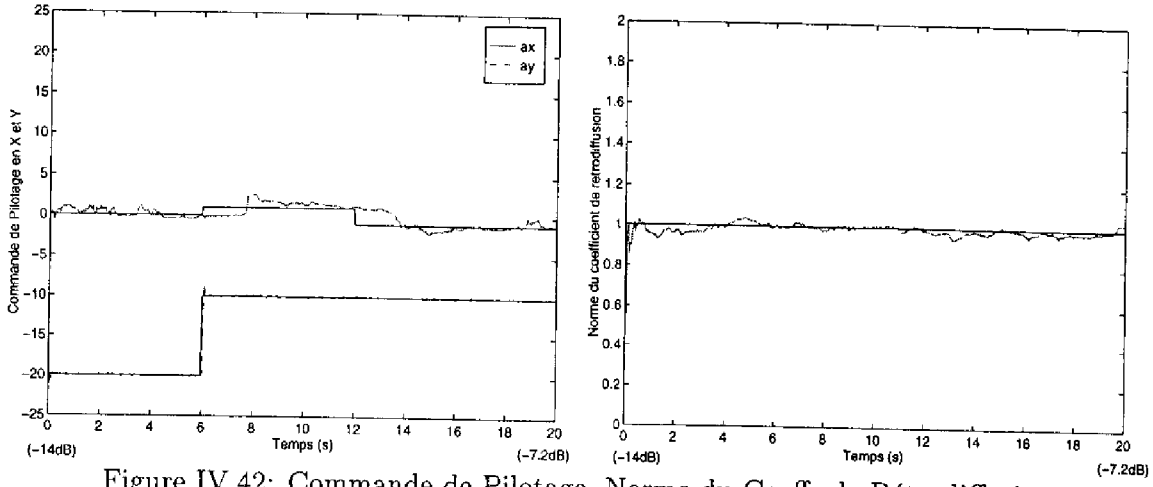


Figure IV.42: Commande de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

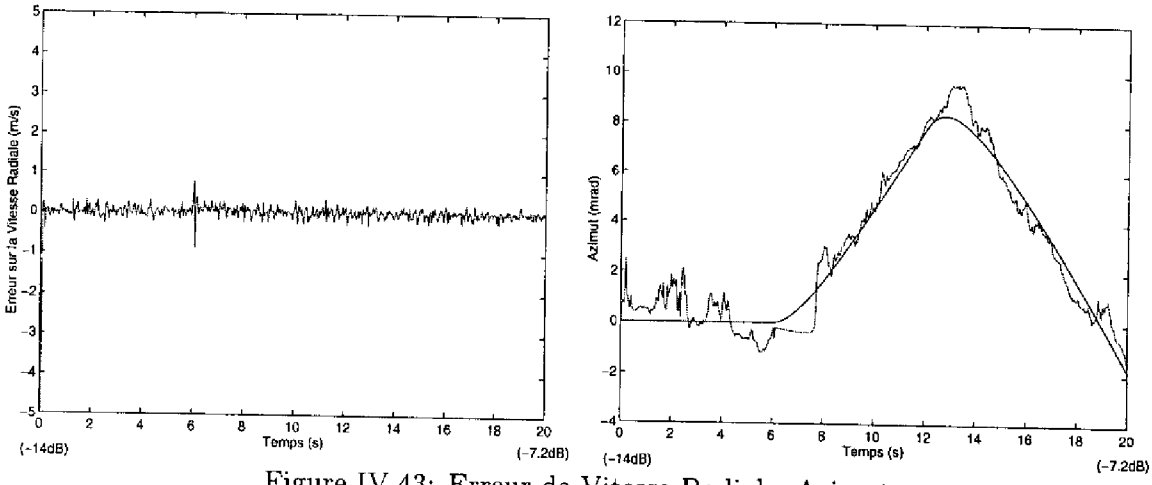


Figure IV.43: Erreur de Vitesse Radiale, Azimut

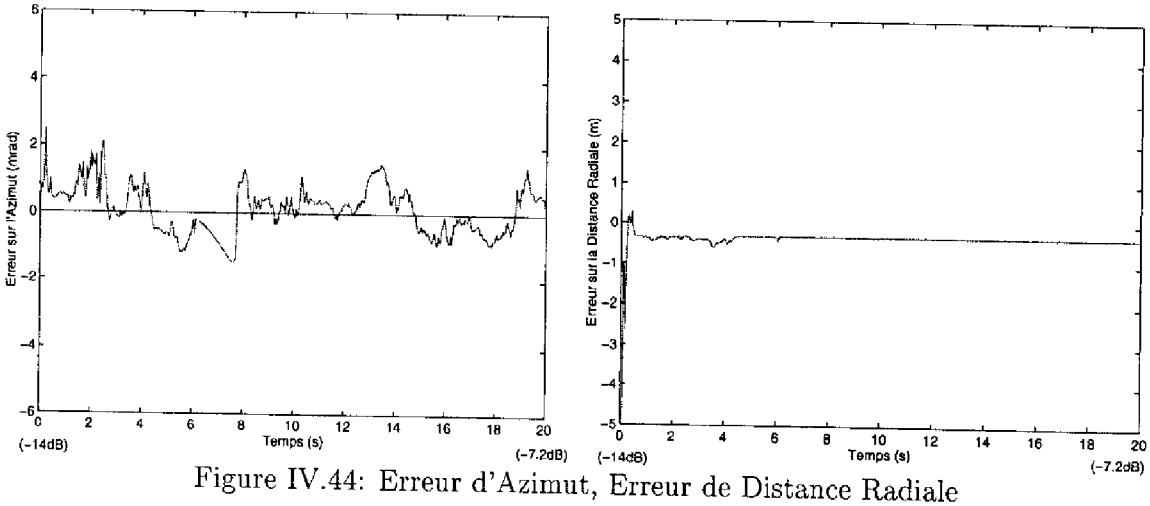


Figure IV.44: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

IV.5 Traitements des informations radiale/angulaire (antenne réseau)

Le traitement de l'antenne réseau n'apporte pas de difficultés supplémentaires par rapport au cas monopulse, et augmente simplement le nombre d'éléments à prendre en compte. On se propose de traiter individuellement chaque élément de l'antenne.

IV.5.1 Position du problème

Le problème de poursuite de cibles manœuvrantes avec une antenne réseau composée de N_c cornets, s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Dynamique} & \left\{\begin{array}{l} \dot{a}_x^t = w_1^t + \pi_1^t \\ \dot{V}_x^t = \dfrac{k_1 a_x^t - V_x^t}{k_2} \\ \dot{x}_t = V_x^t \\ \dot{a}_y^t = w_2^t + \pi_2^t \\ \dot{V}_y^t = \dfrac{k_1 a_y^t - V_y^t}{k_2} \\ \dot{y}_t = V_y^t \\ \dot{\sigma} = w_3^t \end{array}\right. \\ \text{Mesure} & \left\{\begin{array}{l} Y_t^I = H_t(D_t^I)\sigma \ + \ \nu_t^I \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ Y_t^{N_c} = H_t(D_t^{N_c})e^{-j\Delta\varphi(N_c-1)}\sigma \ + \ \nu_t^{N_c} \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{IV.41}$$

avec

$$\left(\begin{array}{l} D_t^n \ = \ \sqrt{(x_t^n)^2 + (y_t^n)^2} \qquad \text{n=I,II,...,N}_c \\ tan(A_t) \ = \ \dfrac{x_t}{y_t} \\ H_t(D_t) \ = \ \dfrac{1}{D_t^2}\, e^{-j\omega_0 \frac{2D_t}{c}}\, h(t - 2\,\dfrac{D_t}{c}) \end{array}\right.$$

et :

- (w_1^t, w_2^t) deux bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et de même variance.

- (π_1^t, π_2^t) deux bruits blancs gaussiens-poissoniens.
- w_3^t : bruit blanc gaussien $\mathcal{N}_{(0,s)}$.

IV.5.2 Solution "usuelle"

Comme dans le paragraphe précédent, nous comparons les résultats obtenus par filtrage particulaire, à une idéalisation des méthodes usuelles de traitement des composantes dynamiques de la cible.

Dans le cas précédent (monopulse), les rapports S/B choisis ne permettaient pas d'initialiser les techniques usuelles (absence de détection). Dans le cas de l'antenne réseau à 10 éléments présenté ici, le rapport S/B élémentaire (avant tout traitement) doit être égal à $\simeq$-8.9dB pour que la cible soit détectée.

IV.5.3 Solution Particulaire

Nous ne revenons pas sur la construction de la solution particulaire déjà détaillée dans le paragraphe précédent. Le seul changement est qu'il convient d'intégrer dans le filtre de Kalman conditionnel, l'ensemble des mesures reçues par les N_c cornets, comme cela a d'ailleurs été précisé dans le cas monopulse. L'adjonction d'un nombre plus important de cornets, ne conduit pas, comme nous l'avons déjà remarqué, à une augmentation d'état et ne nécessite donc pas d'utiliser un nombre plus important de particules.

IV.5.4 Résultats de simulation

Conditions opératoires

Elles sont identiques au cas monopulse.

Trajectoire de ralliement (1GHz, 10 éléments)

Nous traitons ici le cas d'une cible en éloignement par rapport au radar, et nous supposons que l'antenne reste pointée dans une direction fixe.

Les caractéristiques du radar sont les suivantes :

Fréquence du signal porteur : $\nu = 1$GHz
Nombre de cornets : 10
Distance entre deux cornets successifs : d = 4.5 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -14dB à $\simeq$ 15km

La cible effective a les caractéristiques cinématiques suivantes :

Commandes nominales de pilotage : $a_x = 0$, a_y=-20
Vitesses : V_x=0, V_y=-360m/s
Position : x=0, y=15000m
Les aléas de pilotage supposés sont à une période moyenne de 10 secondes.

A l'instant t=6 secondes la cible effectue un changement de commande de pilotage sur les deux composantes, pour passer de (a_x=0,a_y=-20) à (a_x=1,a_y=-10).

A l'instant t=12 secondes, la cible réalise un nouveau changement de consigne sur a_x pour passer de 1 à -1 : c'est-à-dire qu'elle va se rapprocher de l'axe de l'antenne pour le croiser à nouveau jusqu'à -2mrad en fin de simulation (au bout de 20 secondes).

Dans cette simulation, le rapport signal/bruit varie de -14dB (à 15km) à -7.2dB en fin de simulation (10.1km).
La fréquence Doppler est au maximum de 2.4kHz, alors que la fréquence de répétition des impulsions est égale à 5kHz. On se situe dans un rapport 2.1, le théorème de Nyquist est bien vérifié : on peut reconstituer cette oscillation sans ambiguïté.

Analyse des résultats :

Il convient à nouveau de préciser le cadre dans lequel cette comparaison est établie, concernant les techniques classiques :

Dans un premier temps, nous considérons l'intégration d'une rafale de 10 récurrences après détection quadratique, pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-3}. Nous décidons qu'il y a détection lorsque la probabilité de détection est égale à 50%. Le calcul montre [16] qu'il n'y a alors pas détection, en deçà de -8.9dB (rapport signal/bruit élémentaire), pour une antenne réseau à 10 cornets. Rappelons que les rapports S/B présentés sont relatifs à un seul cornet (l'antenne réseau à 10 éléments procure une intégration de 10dB), et qu'ils sont habituellement calculés en fréquence intermédiaire [16].

Lorsque la détection a eu lieu, on réalise le filtre de Kalman Etendu avec des mesures directes de position, dont les écart-types sont calculés à partir des valeurs optimales présentées dans le chapitre I. Cela a pour avantage de permettre une comparaison fiable (mais très optimiste pour les techniques usuelles) avec le filtre particulaire. En effet, pour calculer ces écart-types, on suppose que la cible est immobile pendant les 10 récurrences, donc que l'intégration des 10 récurrences procure un gain (maximal) de 10dB. Finalement, l'utilisation des formules I.25, I.20 suppose que les méthodes de prétraitement dont on dispose, sont en mesure de produire une telle précision sur la mesure.

Ces trois hypothèses ne sont jamais vérifiées en pratique, et constituent donc un cadre très favorable de comparaison pour le filtre de Kalman étendu. Cependant, elles permettent de réfuter tout autre traitement linéarisant, car le filtre ainsi construit en constitue une limite absolue (pour le nombre choisi de récurrences sommées).

Les figures suivantes présentent donc la reconstitution des éléments de cible, à savoir commande de pilotage, vitesse radiale et position en coordonnées polaires.

Nous avons superposé sur les estimées délivrées par le particulaire (en trait plein), les estimées délivrées par le filtre de Kalman étendu (en pointillé) lorsque la cible a été détectée (après seuillage pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-3}).

On constate sur les résultats obtenus que le lissage inhérent à l'estimation trajectorielle qu'opère le filtrage particulaire permet de visualiser la cible très tôt, sans risque de points aberrants par suite de la prise en compte d'une dynamique inertielle.

Ceci est à comparer aux traitements classiques où l'on doit s'assurer d'obtenir au préalable des "plots" suffisamment fiables pour que leur lissage ait un sens.

Erreurs d'estimation :

Les écarts-types d'erreur d'estimation angulaire particulaire/techniques usuelles sont synthétisées ci-dessous :

	Entre 4s et 10s (-12.2/-10dB)	Entre 18s et 20s (-7.8/-7.2dB)
Particulaire (σ_A)	0.6 mrad	0.1 mrad
Kalman Etendu (σ_A)	- - -	0.3 mrad

De même, les écarts-types d'erreur d'estimation sur la vitesse radiale sont :

	Entre 4s et 10s (-12.2/-10dB)	Entre 18s et 20s (-7.8/-7.2dB)
Particulaire (σ_{V_D})	0.1 m/s	0.08 m/s
Kalman Etendu (σ_{V_D})	- - -	2.1 m/s

Performances en prédiction :

Le tableau ci-dessous présente la comparaison des performances du prédicteur particulaire et du filtre de Kalman étendu :

	Filtre Particulaire		Kalman Etendu	
	P(.<10m)	P(.<20m)	P(.<10m)	P(.<20m)
Préd. à 2s	1	1	0.15	0.4
Préd. à 5s	0.67	1	0	0.1
Préd. à 8s	0.38	0.82	0	0

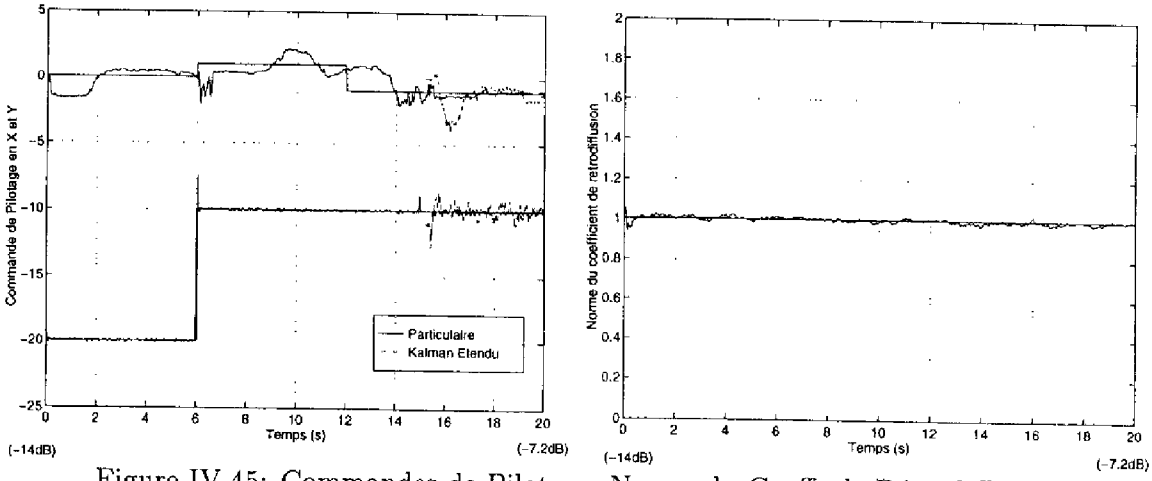


Figure IV.45: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

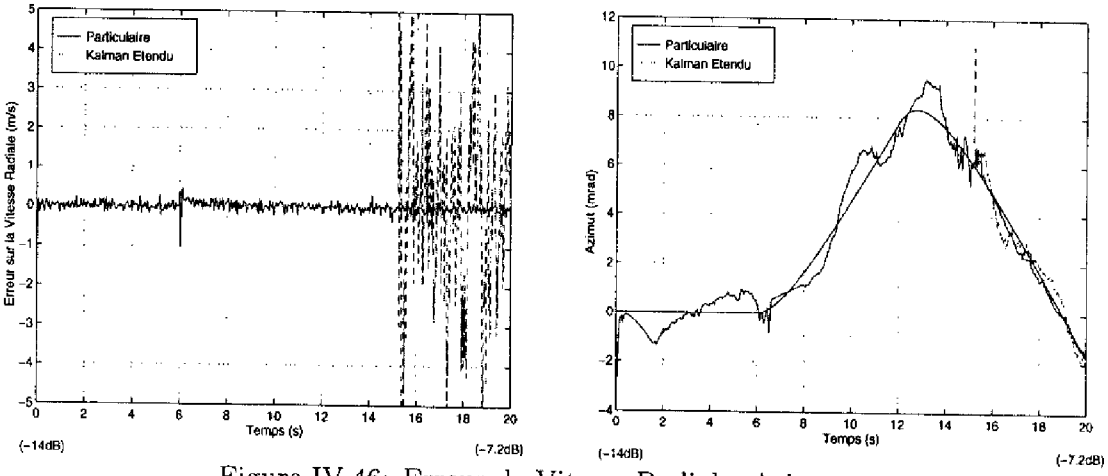


Figure IV.46: Erreur de Vitesse Radiale, Azimut

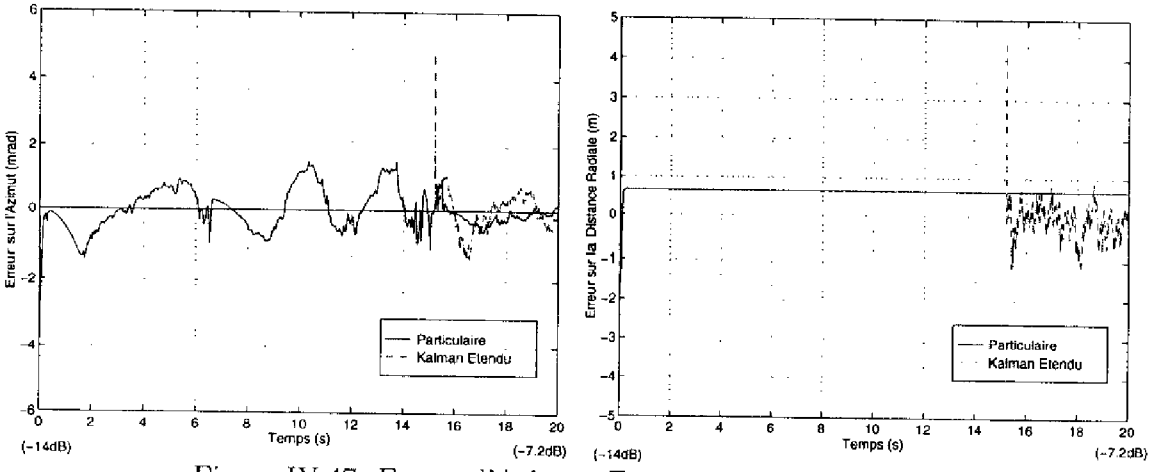


Figure IV.47: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

Trajectoire de ralliement (3GHz, 10 éléments) en situation d'ambiguïté Doppler

Nous nous plaçons dans le même cas que précédemment, avec cependant des caractéristiques du radar différentes :

Fréquence du signal porteur : ν = 3GHz
Nombre de cornets : 10
Distance entre deux cornets successifs : d = 8 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -14dB à $\simeq$ 15km

La cible décrit la même trajectoire que précédemment, et le rapport signal/bruit demeure identique.

Les aléas de pilotage supposés sont à une période moyenne de 10 secondes.

L'augmentation de la fréquence du signal porteur a pour conséquence d'engendrer une oscillation Doppler, avec le déplacement de la cible, de 7.2kHz. Il y a donc un rapport 0.7 entre la fréquence de récurrence radar et l'oscillation Doppler, ce qui fait usuellement apparaître des ambiguïtés vitesses dès que ce rapport est inférieur à 2 (théorème de Nyquist). En clair, cela signifie que la phase tourne de plus de 2π d'une récurrence à l'autre, entraînant une indétermination qui explique le phénomène d'ambiguïté vitesse.

Le traitement dynamique global que réalise le filtrage particulaire lève automatiquement l'ambiguïté Doppler, car le couplage entre effet Doppler et défilement de position sont pris en compte dans la formulation du problème. Ceci est à comparer aux techniques usuelles où le Doppler est mesuré indépendamment par analyse de Fourier, ce qui nécessite de lever l'ambiguïté par un traitement additionnel sous-optimal.

Les figures IV.48,IV.49,IV.50 représentent l'estimation par le filtre particulaire et le filtre de Kalman Etendu des commandes de pilotage, coefficient de rétrodiffusion, azimut et des erreurs de vitesse radiale, distance radiale et azimut.

Les écarts-types d'erreur d'estimation angulaire particulaire/techniques usuelles sont :

	Entre 4s et 10s (-12.2/-10dB)	Entre 18s et 20s (-7.8/-7.2dB)
Particulaire (σ_A)	0.2 mrad	0.1 mrad
Kalman Etendu (σ_A)	- - -	0.2 mrad

De même, les écarts-types d'erreur d'estimation sur la vitesse radiale sont :

	Entre 4s et 10s (-12.2/-10dB)	Entre 18s et 20s (-7.8/-7.2dB)
Particulaire (σ_{V_D})	0.09 m/s	0.07 m/s
Kalman Etendu (σ_{V_D})	- - -	2 m/s

Les performances des prédicteurs particulaire et linéarisé sont :

	Filtre Particulaire		Kalman Etendu	
	P(.<10m)	P(.<20m)	P(.<10m)	P(.<20m)
Préd. à 2s	1	1	0.32	0.75
Préd. à 5s	0.96	1	0.11	0.25
Préd. à 8s	0.61	1	0.04	0.13

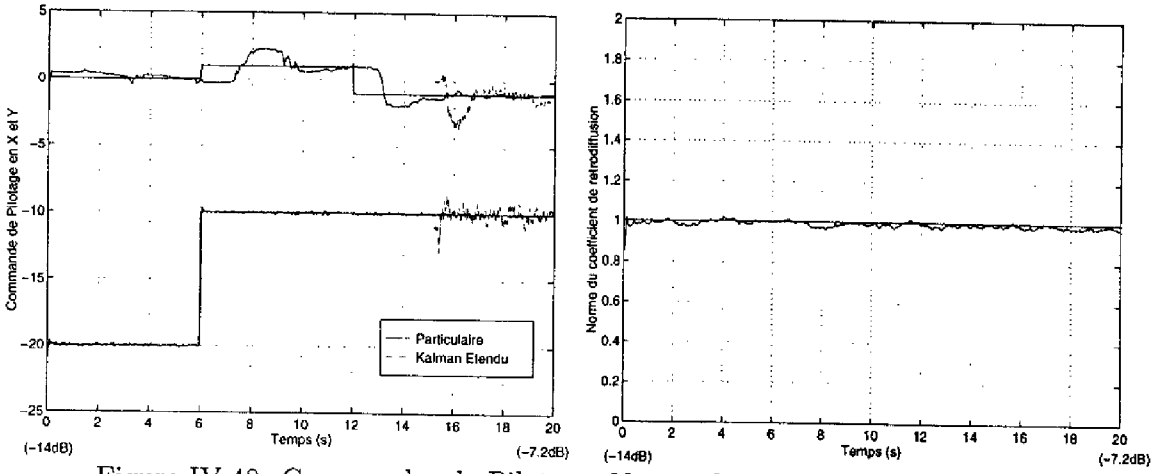


Figure IV.48: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

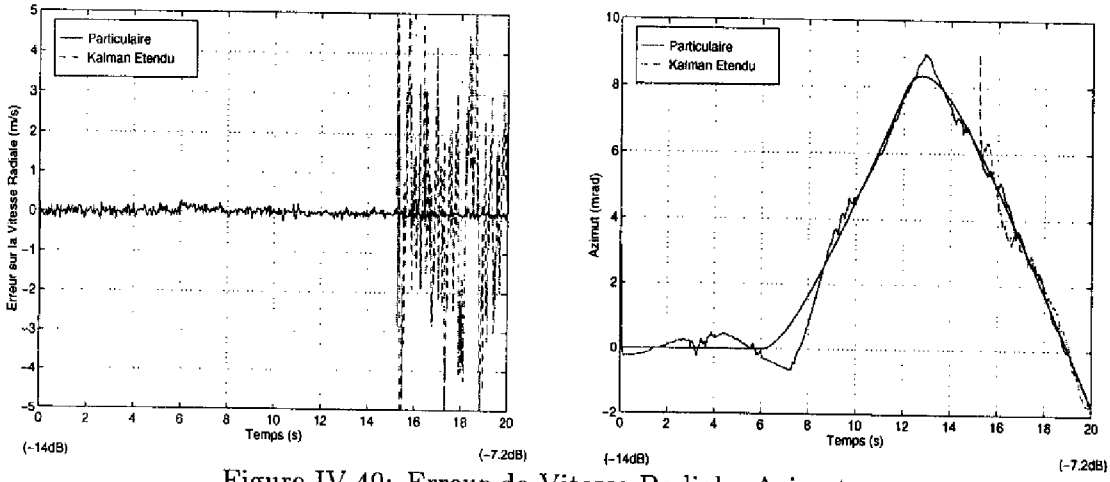


Figure IV.49: Erreur de Vitesse Radiale, Azimut

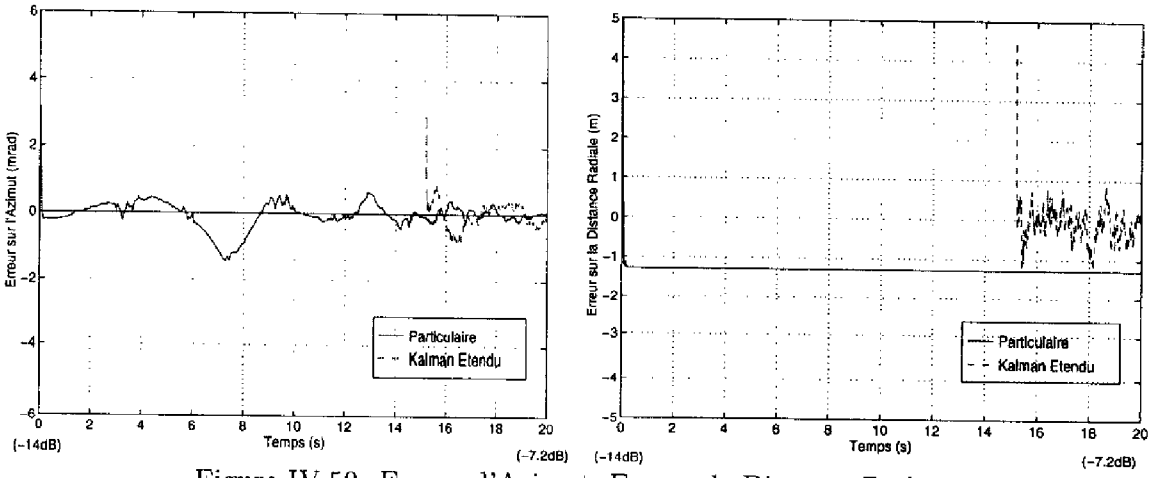


Figure IV.50: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

Limite de poursuite en éloignement (1GHz, 10 éléments)

Nous étudions dans ce paragraphe les performances limites en poursuite de l'algorithme particulaire, afin d'estimer les limites de décrochage de l'algorithme.

Les caractéristiques du radar sont :
Fréquence du signal porteur : $\nu = 1$GHz
Nombre de cornets : 10
Distance entre deux cornets successifs : d = 4.5 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -8dB à $\simeq$ 5km

La cible effective a comme éléments cinématiques initiaux :

Commandes de pilotage : $a_x = 1$, a_y=30
Vitesses : V_x=18m/s, V_y=540m/s
Position : x=0, y=5000m

Rappelons que les résultats présentés pour le filtre de Kalman étendu sont établis avec une limite de détection de -8.9dB. Nous n'avons donc pas représenté sur les figures IV.51, IV.52, IV.53 suivantes les résultats du filtre de Kalman etendu, car on dépasse cette valeur limite au bout de 0.2 secondes dans ce cas. Seul le filtre particulaire permet de descendre à ces rapports signal/bruit extrêmes.

Les écarts-types d'erreur d'estimation angulaire particulaire/techniques usuelles sont :

	Entre 5s et 12s (-15.4/-22.4dB)	Entre 20s et 22s (-27.9/-29.1dB)
Particulaire (σ_A)	0.5 mrad	1.5 mrad
Kalman Etendu (σ_A)	- - -	- - -

De même, les écarts-types d'erreur d'estimation sur la vitesse radiale sont :

	Entre 5s et 12s (-15.4/-22.4dB)	Entre 20s et 22s (-27.9/-29.1dB)
Particulaire (σ_{V_D})	0.2 m/s	0.23 m/s
Kalman Etendu (σ_{V_D})	- - -	- - -

On remarque clairement que, malgré les faibles rapports S/B traités, le filtre particulaire continue à bien se comporter, et permet de poursuivre un créneau de commande de pilotage alors que l'on se situe à -22.4dB.

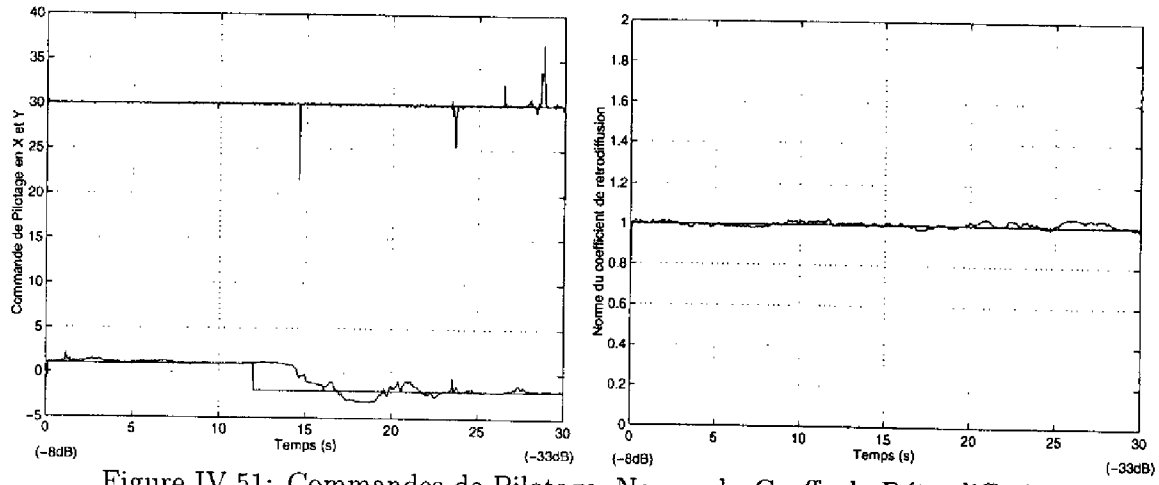


Figure IV.51: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

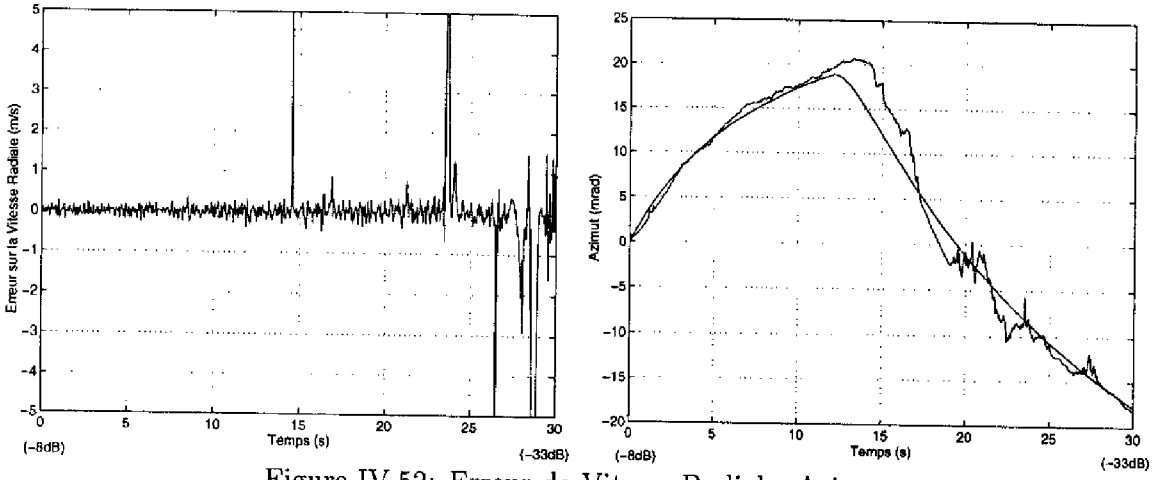


Figure IV.52: Erreur de Vitesse Radiale, Azimut

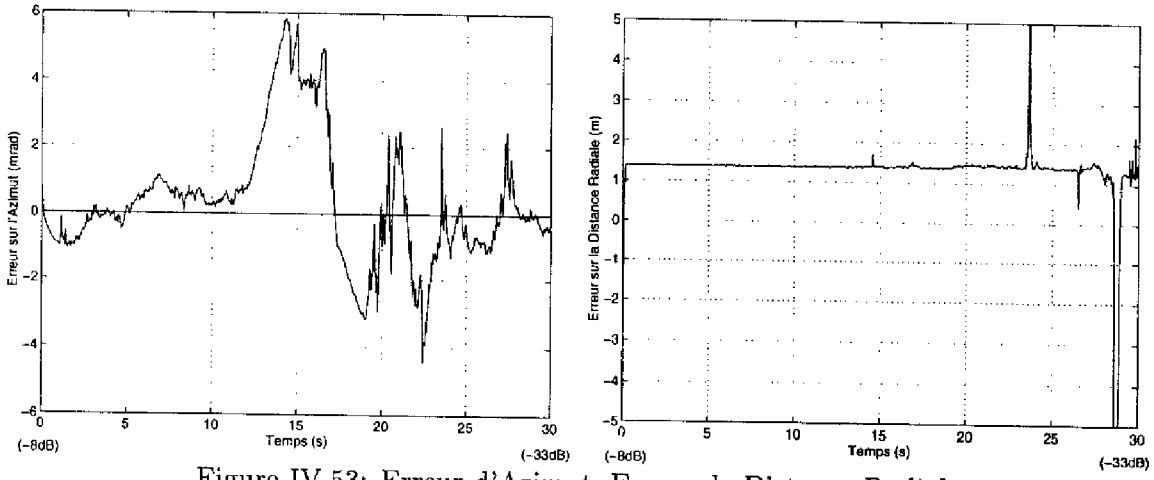


Figure IV.53: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

Limite de détection en acquisition (1GHz, 10 éléments)

La dernière étape de validation de l'algorithme consiste à tester les limites de détection en terme de rapport signal/bruit.

Les caractéristiques du radar sont :

Fréquence du signal porteur : ν = 1GHz
Nombre de cornets : 10
Distance entre deux cornets successifs : d = 4.5 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -30.5dB à $\simeq$ 15km

La cible effective a les caractéristiques cinématiques suivantes :

Commandes de pilotage : $a_x = 0$, a_y=-20
Vitesses : V_x=0, V_y=-360m/s
Position : x=0, y=15000m

Au bout de 26 secondes, la cible effectue un changement de commande de pilotage pour passer de a_x=0 à a_x=1, puis à t=32s pour prendre la valeur a_x=-1.

Les écarts-types d'erreur d'estimation angulaire particulaire/techniques usuelles sont :

	Entre 20s et 25s (-19/-14.5dB)	Entre 38s et 40s (-4.2/-2dB)
Particulaire (σ_A)	1 mrad	0.5 mrad
Kalman Etendu (σ_A)	- - -	0.6 mrad

De même, les écarts-types d'erreur d'estimation sur la vitesse radiale sont :

	Entre 20s et 25s (-19/-14.5dB)	Entre 38s et 40s (-4.2/-2dB)
Particulaire (σ_{V_D})	0.1 m/s	0.08 m/s
Kalman Etendu (σ_{V_D})	- - -	2 m/s

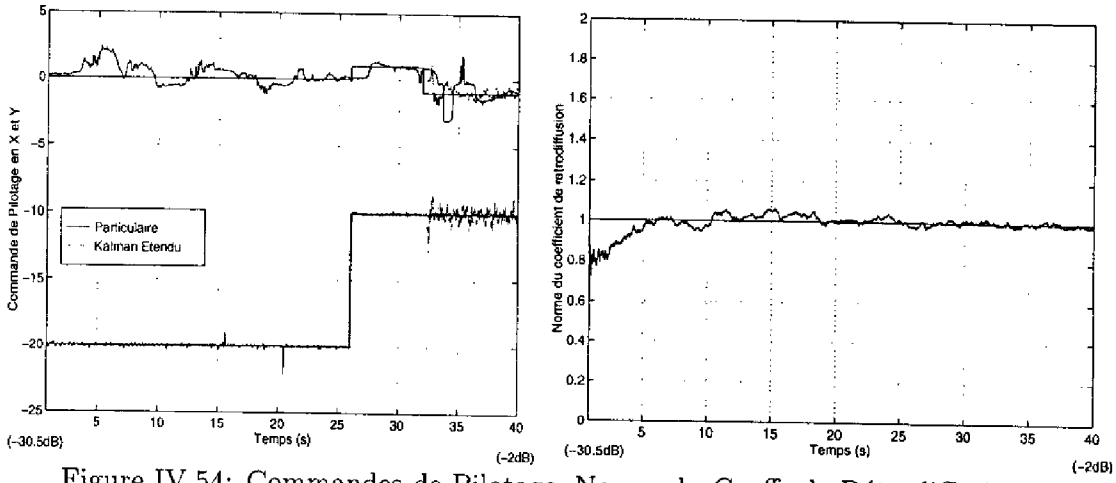


Figure IV.54: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

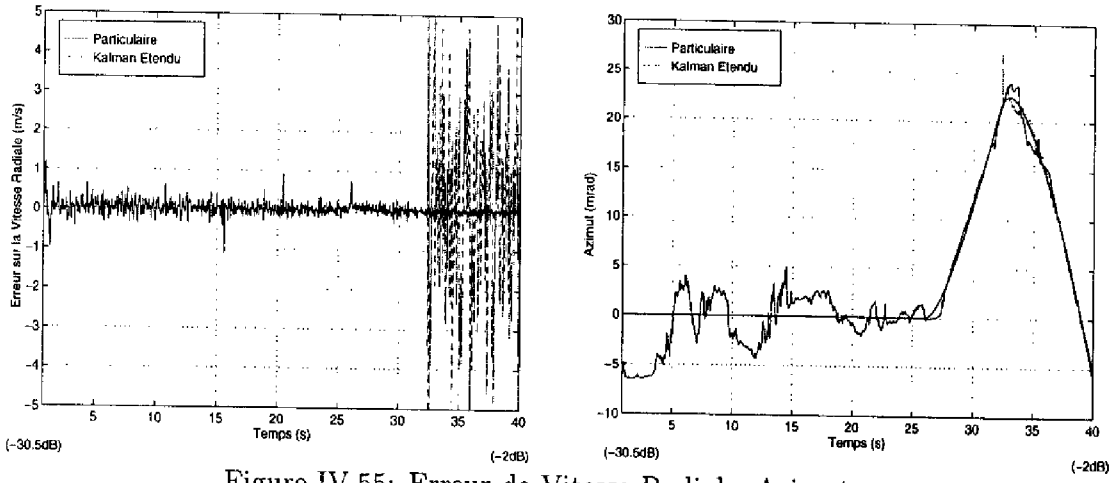


Figure IV.55: Erreur de Vitesse Radiale, Azimut

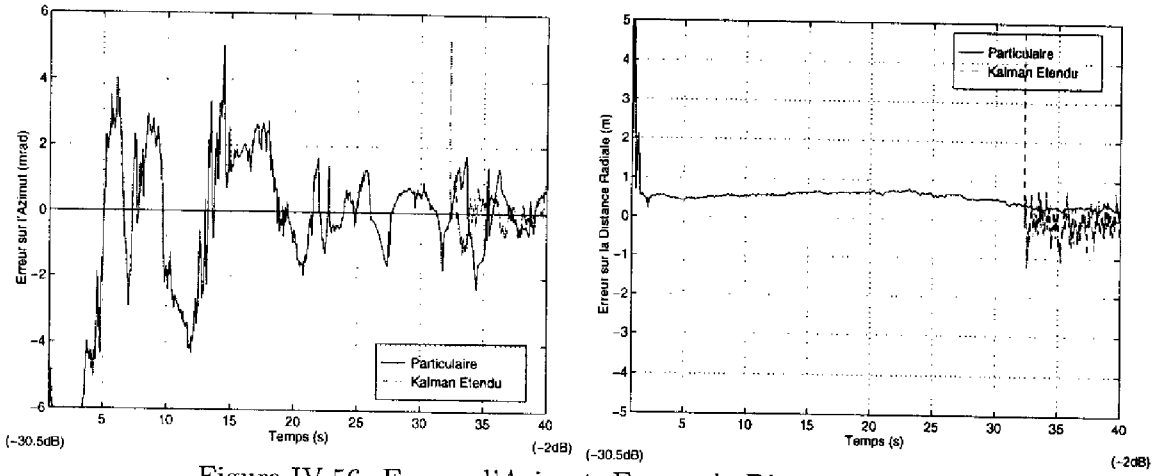


Figure IV.56: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

IV.6 Extension à un modèle non-linéaire de dynamique

Dans l'ensemble de cette étude, nous avons choisi, par souci de clarté, d'utiliser un modèle de dynamique linéaire d'usage courant en trajectographie radar (modèle de Singer). Une telle politique ne grève cependant en rien la validité de la solution particulaire proposée, qui s'accommode de tout autre modèle plus général, ce qui ne peut que creuser l'écart entre les techniques "usuelles" de traitement et le filtre particulaire.

Afin d'illustrer cette assertion, nous nous proposons ici de donner quelques résultats obtenus dans le cadre d'un modèle de dynamique non-linéaire : l'ensemble du modèle (dynamique/mesure) devient donc non-linéaire sous les deux aspects.

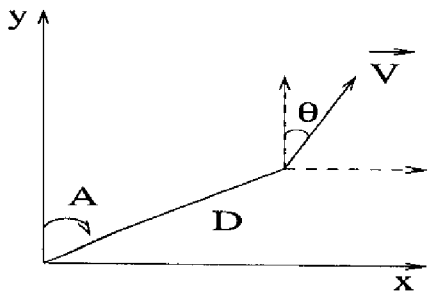
Nous avons choisi d'étudier le modèle de navigation proportionnelle sur lequel la méthode particulaire a déjà fait ses preuves [57], et pour lequel on connaît les difficultés de linéarisation [29].

IV.6.1 Position du problème

Nous ne revenons pas ici sur le modèle de navigation proportionnelle explicité dans un précédent chapitre.

Comme précédemment, nous ne présentons ici que le cas bidimensionnel : l'extension au cas 3D ne présentant aucun intérêt conceptuel supplémentaire.

La position de l'assaillant est repérée en coordonnées polaires, et le radar est situé à l'origine :



Dans la figure ci-dessus, (V,θ) sont les coordonnées polaires de la vitesse du missile, et (D,A) celles de la position.

Les équations du missile sont celles d'une navigation proportionnelle (voir chapitre II), soit :

$$\text{Dynamique} \quad \begin{cases} \dot{A} = \dfrac{V}{D}\sin(\theta - A) \\ \dot{D} = V\cos(\theta - A) \\ \dot{V} = w_2^t + \pi_2^t \\ \dot{\theta} = N_h\,\dot{A} \\ \dot{N}_h = w_1^t + \pi_1^t \end{cases} \qquad \text{(IV.42)}$$

$$\text{Observation} \quad \begin{cases} Y_t^I = H_t(D_t^I)\sigma \;+\; \nu_t^I \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Y_t^{N_c} = H_t(D_t^{N_c})e^{-j\Delta\varphi(N_c-1)}\sigma \;+\; \nu_t^{N_c} \end{cases}$$

où
(V,θ) : Norme de la vitesse et cap
(D,A) : Distance radiale et azimut
N_c : Nombre de cornets
N_h : Constante de navigation proportionnelle
ν_t^A, ν_t^D : bruits gaussiens indépendants
(w_1^t,w_2^t) : bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et de même variance
(π_1^t, π_2^t) : bruits blancs gaussiens-poissoniens

Remarque : Il convient de se souvenir que ces équations décrivent le mouvement du mobile vu du but, et par rapport au but. C'est dire qu'une trajectoire de ralliement (N>1) tend à faire passer le mobile dans un très proche voisinage du but fixé.

IV.6.2 Solution particulaire et solution "usuelle"

Comme précédemment, nous utilisons les relations établissant les écarts-types optimaux d'estimation, comme base de comparaison pour les méthodes classiques.

Ici, la forte non-linéarité des équations mises en jeu peut poser des problèmes à une linéarisation directe de type Kalman étendu. Les solutions habituellement adoptées (voir chapitre V) découplent artificiellement l'estimation de la variable d'état, de celle de la constante de navigation, en optant pour un modèle de dynamique différent (ex. modèle de Singer).

Cette solution est évidemment moins efficace que le filtre de Kalman étendu sur le modèle non-linéaire, lorsque la matrice de dynamique est bien conditionnée. Nous avons donc choisi de nous placer dans des cas où le filtre de Kalman étendu se comporte bien, afin d'évaluer au mieux les performances des méthodes usuelles. Nous avons opté pour la même politique de détection que précédemment, en ne présentant les résultats que si la probabilité de détection est supérieure à 50%, pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-3}.

La solution particulaire est quant à elle construite de manière analogue au cas précédent, à ceci près que l'évolution des particules ne se fait plus selon le modèle de Singer modifié, mais selon le nouveau modèle IV.42 discrétisé par le schéma d'Euler.

IV.6.3 Résultats de simulation

Nous ne présentons ici que deux thèmes impliquant le modèle de navigation proportionnelle, car il n'est pas dans notre intention d'étudier à nouveau l'ensemble des thématiques développées dans les paragraphes précédents, mais plutôt de montrer la facilité avec laquelle la méthode particulaire s'affranchit des non-linéarités de modèle.

Il est à noter que les résultats présentés ci-dessous, ont été établis sans avoir à retoucher l'algorithme particulaire précédemment développé, ni à augmenter le nombre de particules, ce qui est très rassurant.

En ce qui concerne les caractéristiques de l'onde, elles restent identiques à celles du chapitre précédent. De même, on se situe toujours en sortie de filtre adapté, i.e. le signal est triangulaire et échantillonné de manière à préserver la blancheur du bruit.

Trajectoire de ralliement simple (1GHz, monopulse)

Les caractéristiques du radar sont les suivantes :

Fréquence du signal porteur : $\nu = 1\text{GHz}$
Nombre de cornets : 2
Distance entre les deux cornets récepteurs : d = 40 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -14dB à $\simeq$ 15km

La cible effective a les caractéristiques cinématiques suivantes :

Constante de navigation : $N_h = 3$
Vitesse : V = 360m/s, $\theta = \pi$
Position : D = 15000m, A = 0

Rappelons que les aléas poissoniens de pilotage (constante de navigation, norme de la vitesse) sont supposés de période moyenne 10 secondes, dans la construction du filtre particulaire.

Nous avons représenté sur les figures IV.57, IV.58, IV.59 l'estimation particulaire de la constante de navigation, de la norme du coefficient de rétrodiffusion, ainsi que les erreurs sur l'estimation des norme de vitesse, azimut et distance radiale.

On remarque par contre l'absence d'estimation par filtrage de Kalman étendu, car le faible rapport signal/bruit ne suffit pas à dépasser, même en fin de simulation, le seuil de détection qui dans le cas monopulse (gain de 3dB) est égal à -1.9dB.

Nous présentons donc ci-dessous les écarts-types d'erreur d'estimation :

- de distance radiale :

	Entre 4s et 10s (-12.2/-9.2dB)	Entre 18s et 20s (-4.2/-2.6dB)
Particulaire (σ_D)	0.2 m	0.07 m
Kalman Etendu (σ_D)	- - -	- - -

- d'azimut :

	Entre 4s et 10s (-12.2/-9.2dB)	Entre 18s et 20s (-4.2/-2.6dB)
Particulaire (σ_A)	0.6 mrad	0.1 mrad
Kalman Etendu (σ_A)	- - -	- - -

- de norme de vitesse :

	Entre 4s et 10s (-12.2/-9.2dB)	Entre 18s et 20s (-4.2/-2.6dB)
Particulaire (σ_V)	0.23 m/s	0.2 m/s
Kalman Etendu (σ_V)	- - -	- - -

On remarque donc que le filtre particulaire permet de détecter aisément des cibles de rapport S/B égal -14dB, dans le cas monopulse, alors que les techniques usuelles idéalisées ne permettent pas de descendre en dessous de -1.9dB, soit un gain d'au moins 12dB, qui se traduit par une amélioration de portée d'un facteur 2, ou bien une possibilité de détecter des cibles de SER 4 fois plus faible.

De plus, on conserve à ces rapports S/B (entre 4 et 6 secondes, soit entre -12.2dB et -11.3dB) de bonnes performances en probabilité de coup au but à 2, 5 et 8 secondes :

	Filtre Particulaire		Kalman Etendu	
	P(.<10m)	P(.<20m)	P(.<10m)	P(.<20m)
Préd. à 2s	0.75	1	- - -	- - -
Préd. à 5s	0.69	0.99	- - -	- - -
Préd. à 8s	0.68	0.99	- - -	- - -

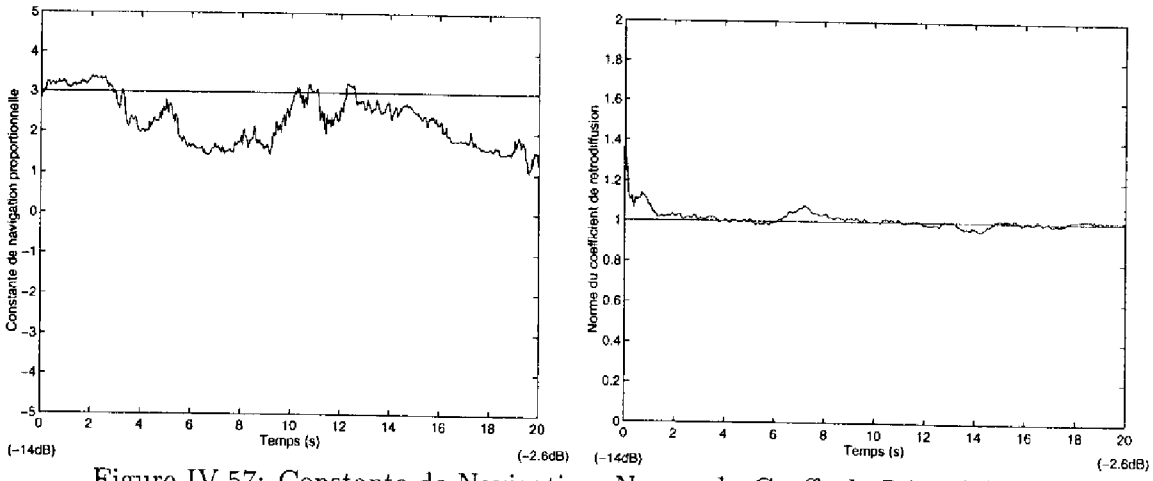


Figure IV.57: Constante de Navigation, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

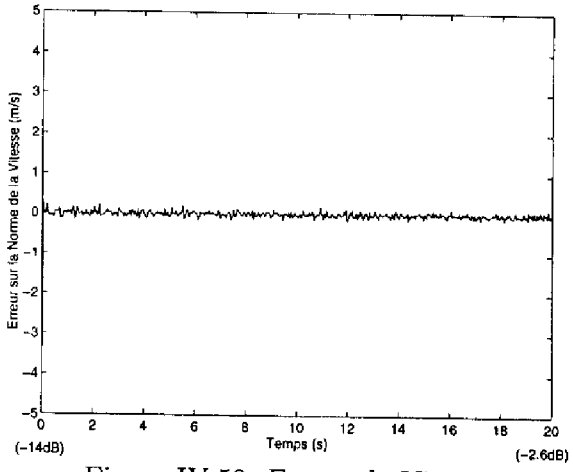


Figure IV.58: Erreur de Vitesse

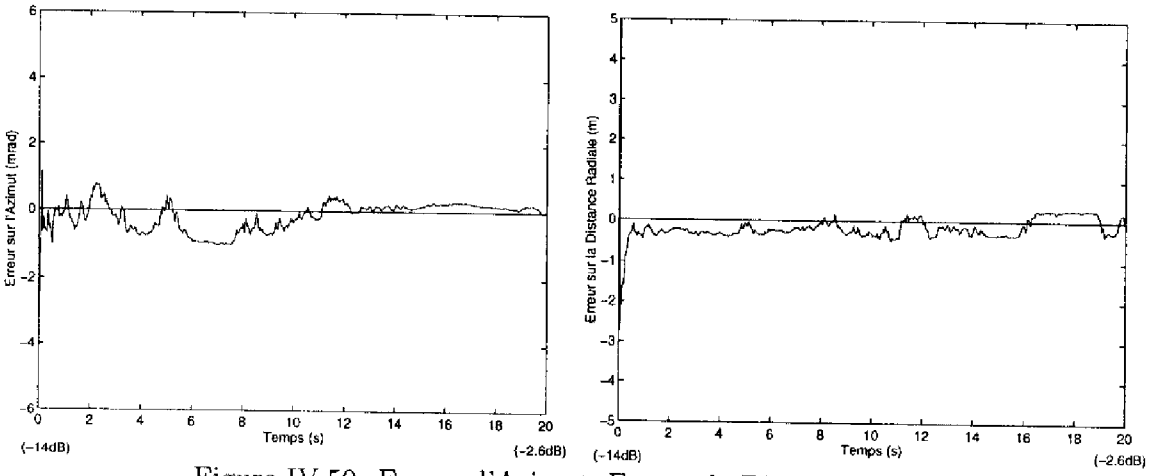


Figure IV.59: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

Trajectoire de ralliement (1GHz, 10 éléments)

Nous étudions maintenant le cas d'un missile à navigation proportionnelle effectuant un changement de constante de navigation, à faible rapport signal/bruit. Ces changements sont imprévisibles et doivent faire l'objet d'une poursuite.

Les caractéristiques de l'antenne réseau sont les suivantes :
Fréquence du signal porteur : $\nu = 1$GHz
Nombre de cornets : 10
Distance entre deux récepteurs successifs : d = 4.5 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -20dB à $\simeq$ 15km

La cible a comme caractéristiques initiales :
Constante de navigation : $N_h = 3$
Vitesse : V = 360m/s, $\theta = \pi$ rad
Position : D = 15000m, A = 0.1 rad

A l'instant t=20s, la cible effectue un changement de constante de navigation : le rapport S/B est alors égal à -8.7dB, pour tendre vers 2dB en fin de simulation.

Comme précédemment, les aléas de pilotage (constante de navigation, norme de la vitesse) sont supposés poissoniens de période moyenne 10 secondes, pour le filtre particulaire.

Les figures IV.60, IV.61, IV.62 présentent les estimations par filtrage particulaire et de Kalman étendu, des constante de navigation, norme de la vitesse, et les erreurs d'estimation de distance radiale et d'azimut. Dans ce cas, la cible est détectée à partir de -8.9dB (en raison du gain d'intégration de 10dB de l'antenne réseau choisie).

Nous présentons donc ci-dessous les écarts-types d'erreur d'estimation :

- de distance radiale :

	Entre 4s et 10s (-18.3/-15.3dB)	Entre 28s et 30s (-0.7/2dB)
Particulaire (σ_D)	0.2 m	0.2 m
Kalman Etendu (σ_D)	- - -	0.3 m

- d'azimut :

	Entre 4s et 10s (-18.3/-15.3dB)	Entre 28s et 30s (-0.7/2dB)
Particulaire (σ_A)	0.3 mrad	0.2 mrad
Kalman Etendu (σ_A)	- - -	0.3 mrad

- de norme de vitesse :

	Entre 4s et 10s (-18.3/-15.3dB)	Entre 28s et 30s (-4.2/-2.6dB)
Particulaire (σ_V)	0.1 m/s	0.3 m/s
Kalman Etendu (σ_V)	- - -	2 m/s

On remarque que malgré les faibles rapports S/B ($\simeq$-18dB), le filtre particulaire permet d'estimer avec précision les éléments caractéristiques de cible : on peut donc prédire efficacement la position du missile, bien avant que les techniques usuelles l'aient détecté.

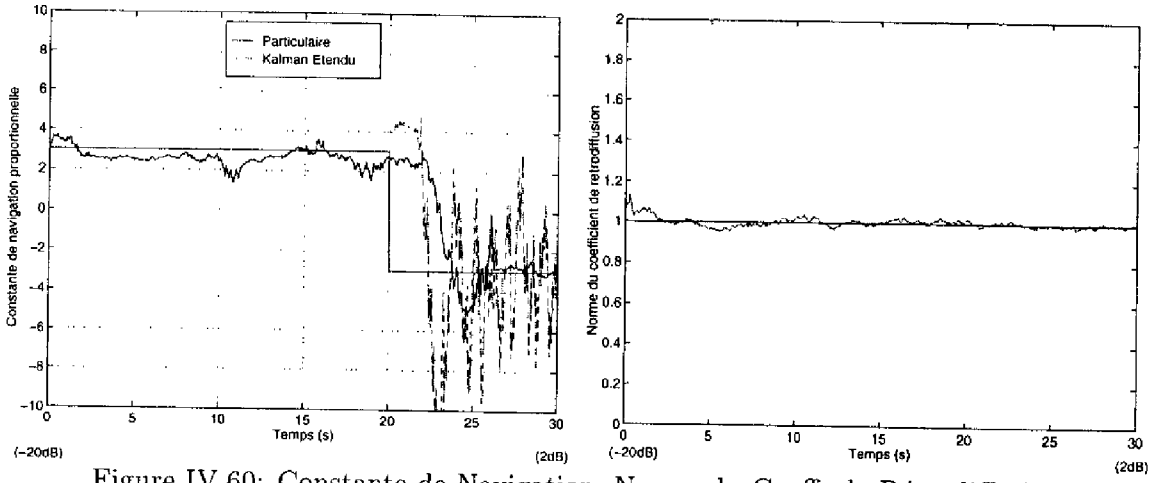


Figure IV.60: Constante de Navigation, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

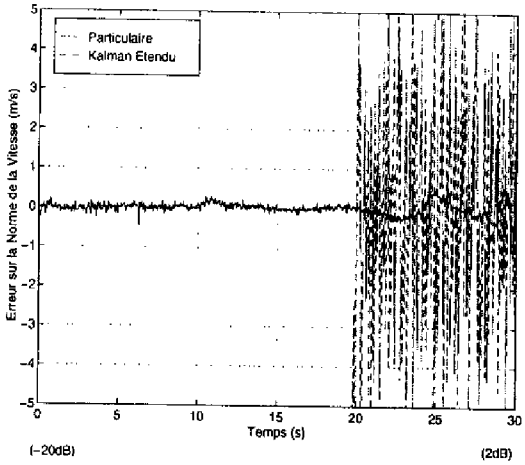


Figure IV.61: Erreur de Vitesse

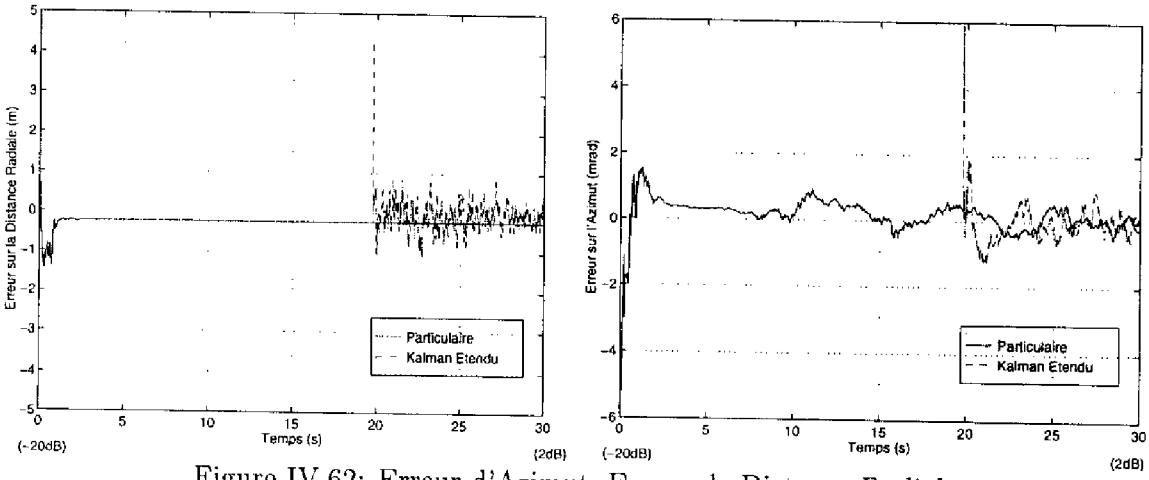


Figure IV.62: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

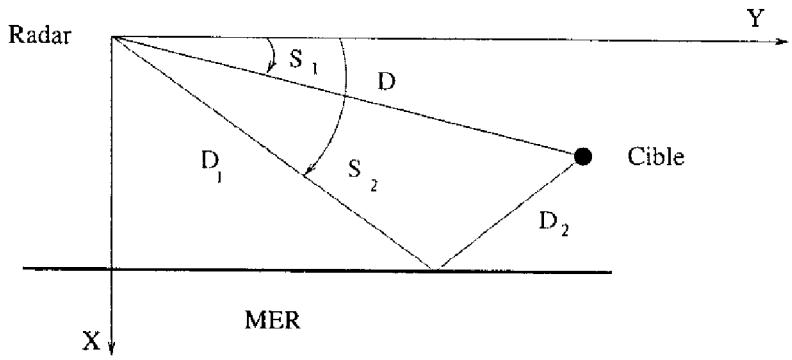
IV.7 Modélisation de "l'effet miroir"

IV.7.1 Position du problème

Ce paragraphe présente les premiers résultats concernant la prise en compte de l'effet site bas. Les résultats numériques sont obtenus dans le cadre d'un radar monopulse ayant les mêmes caractéristiques que dans le paragraphe IV.4 (1GHz, $d = 40\lambda/2$).

Grossièrement, l'effet "site bas" se manifeste en environnement marin lorsque la cible évolue en incidence rasante. Le lobe d'émission/réception du radar rentre alors en contact avec la surface de la mer. On récupère alors l'onde émise sous deux incidences : l'une directement issue de la cible (angle S_1), et l'autre d'une réflexion sur la mer (angle S_2).

On peut représenter ce phénomène de la façon suivante :



Le modèle du capteur doit être modifié pour tenir compte des signaux réfléchis reçus par chaque élément (au total, 4 chemins possibles) :

$$\begin{cases} Y_t^I = H^I(D_t, V_t)\ (1 - 2e^{-j\varphi} + e^{-2j\varphi})\,\sigma + \nu_t^I \\ Y_t^{II} = H^{II}(D_t, V_t)\ \left(e^{-jdS_1} - e^{-j(\varphi+dS_1)} - e^{-j(\varphi+dS_2)} + e^{-j(2\varphi+dS_2)}\right)\sigma + \nu_t^{II} \end{cases} \tag{IV.43}$$

avec

$$\left\| \begin{array}{l} \varphi = \dfrac{\omega_0}{c}(D_1 + D_2 - D) \\ dS_i = 2\pi \dfrac{d}{\lambda}\sin(S_i) \qquad (i = 1, 2) \\ \sin S_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2/(2h_R - x)^2}} \end{array} \right.$$

h_R est la hauteur du radar par rapport au niveau de la mer, et (x,y) les coordonnées cartésiennes du mobile.

Remarques :

1. Nous supposons dans ce modèle que la mer se comporte, à la fréquence considérée, comme un miroir parfait (hypothèse de mer calme, déphasage de π à la réflexion).

   Pour plus de réalisme, on peut introduire un coefficient de réflexion de la mer, afin de tenir compte du clutter de mer par exemple.

2. On remarque toutefois que dans le modèle considéré apparaissent les points difficiles liés au site bas.

   On remarque tout d'abord la présence de deux sites S_1 et S_2 qui peuvent faire croire, sans une modélisation adéquate, à la présence de deux cibles.

   Le second phénomène est interférentiel et constitue une difficulté intrinsèque au traitement de l'effet site bas : sous certaines conditions de distance, le signal résultant reçu peut être très faible, posant par la même des difficultés aux détecteurs classiques. Le filtre particulaire permet de traiter de très faibles rapports S/B, et autorise ainsi une prise en compte de l'effet site bas plus performante que par les méthodes habituelles.

IV.7.2 Solution "usuelle"

On ne présente pas ici de comparaison avec le filtre linéarisé, car les deux points exposés précédemment (détection de deux cibles, forte dégradation du rapport S/B) mettent en défaut les techniques classiques.

IV.7.3 Solution particulaire

La mise en œuvre du filtre particulaire n'est pas détaillée ici, car elle est en tout point identique à celle utilisée pour le monopulse (par. IV.4). On doit simplement recalculer la matrice H de mesure utilisée dans les équations IV.34, en y incluant les termes $(1 - 2e^{-j\varphi} + e^{-2j\varphi})$ et $\left(e^{-jdS_1} - e^{-j(\varphi+dS_1)} - e^{-j(\varphi+dS_2)} + e^{-j(2\varphi+dS_2)}\right)$.

IV.7.4 Résultats de Simulation

Les caractéristiques du radar sont les suivantes :

Fréquence du signal porteur : $\nu = 1$GHz
Nombre de cornets : 2
Distance entre les deux cornets récepteurs : d = 40 $\lambda/2$
($\lambda = c/\nu$, longueur d'onde du signal émis)
Rapport signal/bruit initial : -14dB à $\simeq$ 10km

La cible effective a les caractéristiques cinématiques suivantes :

Commandes nominales de pilotage : $a_x = 0$, a_y=-10
Vitesses : V_x=0, V_y=-180m/s
Position : x=-10m, y=10000m

Les aléas de pilotage supposés sont à une période moyenne de 10 secondes.

Les figures suivantes présentent donc les résultats obtenus pour une cible en rapprochement à une altitude de 10 mètres au dessus des flots, acquise par un radar monopulse situé à une altitude de 20 mètres.

La figure IV.64b présente la trajectoire reconstituée du mobile : l'abscisse constitue la distance radiale de la cible, et l'ordonnée l'altitude. Rappelons que le radar est situé à l'origine, la cible à une altitude -10m et la mer -20m.

On remarque que, malgré le faible rapport S/B et la présence de trajets multiples dus à "l'effet miroir", le filtre particulaire estime les paramètres de cible avec une précision équivalente au cas monopulse monoponctuel.

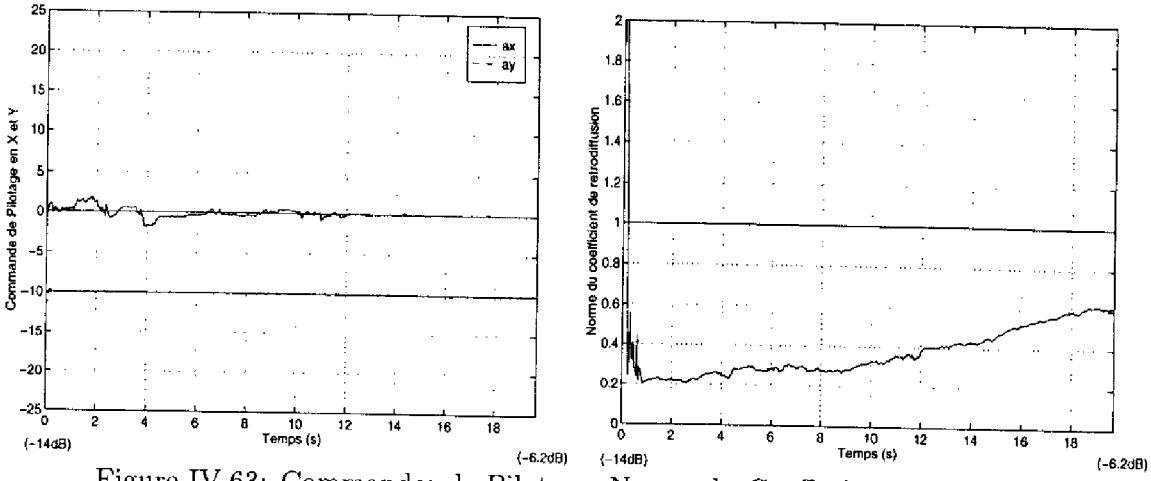


Figure IV.63: Commandes de Pilotage, Norme du Coeff. de Rétrodiffusion

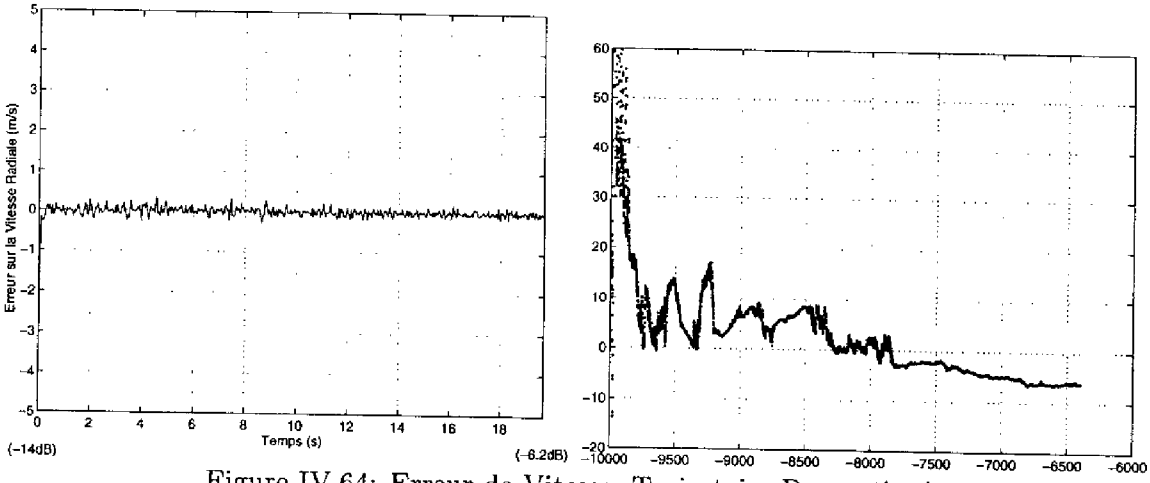


Figure IV.64: Erreur de Vitesse, Trajectoire Reconstituée

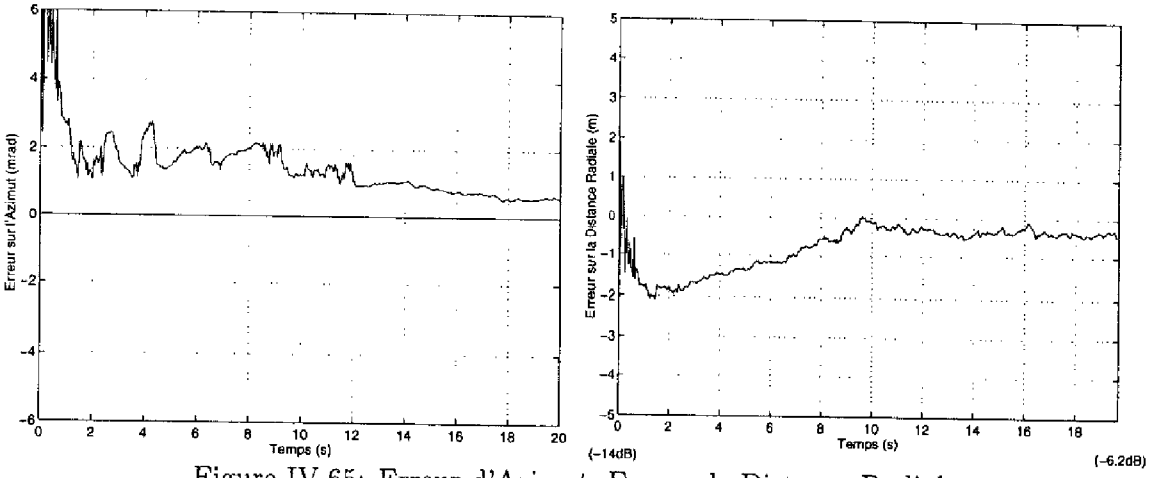


Figure IV.65: Erreur d'Azimut, Erreur de Distance Radiale

IV.8 Conclusion

En règle générale, dans l'amélioration de la poursuite ou du pistage, on considère le capteur comme une "boite noire" qui délivre une information de position sur une cible, qui a été détectée par ailleurs, et ce sont ces informations que l'on filtre.

Peu de méthodes se proposent d'aborder le problème de pistage de cibles manœuvrantes dans son ensemble. Pourtant, l'optimalité conduit à ne pas arbitrairement découpler le problème de détection de celui d'estimation, car ils sont liés : la prise en compte des éléments dynamiques avant détection ("track before detect") permet de repousser les seuils de détection à des valeurs jusqu'alors inaccessibles.

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent les gains obtenus par la méthode particulaire par rapport à une idéalisation des techniques classiques. On a montré notamment qu'une telle approche permet des seuils de détection $\simeq -20$dB, alors qu'usuellement on commence à détecter en décibels positifs. Les simulations témoignent de gains entre 12 et 20dB en moyenne, ce qui se traduit par une amélioration de portée d'un facteur 2 à 3, ou bien une possibilité de suivre des cibles de SER 4 à 10 fois plus faibles.

L'aptitude de la méthode particulaire à traiter des problèmes non-linéaires difficiles, conduit à repenser le problème de détection/estimation radar. En effet, les techniques classiques procèdent par sommation ergodique des échantillons reçus, et décident ensuite de la présence d'une cible lorsque ce signal dépasse un seuil préétabli. Ce procédé donne naissance aux problèmes de fausse alarme qui fait interpréter du bruit comme une cible éventuelle. La méthode particulaire tient compte de l'ensemble des mesures reçues, et contraint à considérer le problème de détection d'une manière différente : l'intégration de la dynamique avant même de détecter permet d'amoindrir considérablement les fausses alarmes éventuelles.

Les simulations de données brutes ont été établies sans perte de généralité pour une impulsion rectangulaire modulée à fréquence fixe, et un diagramme de rayonnement des éléments d'antenne unitaire. On peut intégrer aisément la prise en compte d'un type d'impulsion différente (par exemple compression d'impulsion par un chirp), ou bien un diagramme de rayonnement différent pouvant lui-même présenter des non-linéarités importantes. On modifiera pour cela, dans l'expression I.5, les termes $K(\vec{D}_0, \vec{D}_t)$, $h(t - \frac{2D_t}{c})$, ... en conséquence.

Chapitre V

Poursuite de cibles en données prétraitées

Le chapitre précédent présente des résultats de simulation pour la poursuite radar dans le cas de données brutes. On s'est attaché à reconstituer, le plus fidèlement possible, chaque étage de la chaîne de réception.

Dans le présent chapitre, les simulations font abstraction de la partie récepteur radar : on ne traite que l'information en sortie d'extracteur. Ces résultats constituent donc une version "aval" du chapitre IV (données avant extracteur), pour lesquels on suppose effectué le prétraitement radar : on traite directement les informations de distance et azimut délivrées. On oublie ici tout problème de détection de cible, puisque l'on suppose que celle-ci a été détectée.

On montre ici notamment, l'apport de la technique particulaire sur des problèmes qui présentent des difficultés que les méthodes classiques ont quelquefois du mal à résoudre.

Le premier modèle étudié est un modèle linéaire de dynamique (type Singer) où les non-linéarités sont présentes dans les bruits d'entrée de dynamique, ainsi que dans l'équation du capteur. Nous verrons que, pour ce problème assez bien résolu par les méthodes habituelles, la technique proposée permet d'obtenir des gains significatifs dans la détection de changement de consigne.

Le second modèle présente une difficulté supplémentaire, puisque les non-linéarités ne sont plus présentes dans l'équation du capteur, mais dans le modèle de dynamique, ce qui met en difficulté les méthodes habituelles de résolution de type Kalman étendu, car les fortes non-linéarités du modèle de dynamique rendent mal-aisée toute linéarisation directe du modèle.

V.1 Position du problème

On s'attache ici au problème de poursuite RADAR tel qu'il est usuellement considéré : un prétraitement de signal reçu, à très court terme, permet l'extraction de paramètres cinématiques tels la distance et la position angulaire. Il reste d'assez fortes imprécisions rémanentes, qui tiennent à la faible intégration temporelle des estimations paramétriques quasi-stationnaires que permet le très court terme. La poursuite RADAR

s'attache à restituer l'état réel de la cible avec plus de précision (à des fins notamment de prédiction) en retraitant ces résultats bruités, au moyen d'un modèle de la cible et de ses aléas ainsi que des transformations polaires inhérentes aux résultats mesurés.

A cet égard, le problème de poursuite RADAR de cibles manœuvrantes reste un problème difficile par le fait que :

i) les équations mises en jeu (mesure, dynamique) sont fortement non-linéaires.

ii) les aléas de pilotage de la cible sont fortement non-gaussiens.

La principale difficulté est de prendre en compte un modèle de dynamique pertinent dicté par la physique et des aléas de comportement du mobile qui soient réalistes.

Les outils habituels de filtrage non-linéaire tels que le filtre de Kalman étendu, ont montré leurs limites à traiter des modèles fortement non-linéaires, et à statistiques de bruit non-gaussiennes.

Pour contourner ce problème, on se donne généralement des équations du mouvement très simples en repère cartésien. C'est notamment le cas du modèle (triple intégrateur) de Singer [71, 72] introduit au chapitre II.

Il apparaît clairement que l'avantage de ces modèles réside dans leur caractère linéaire auquel on adjoint le plus souvent des statistiques gaussiennes.

Toutefois une non-linéarité inévitable s'introduit dans le problème de trajectographie par le fait que les mesures du capteur sont effectuées en coordonnées polaires, attachées à l'observateur, alors que le modèle est généralement en coordonnées galiléennes. Cela conduit souvent à linéariser la transformation polaire/cartésien ce qui engendre des problèmes d'inobservabilités locales, et d'instabilités du filtre résultant [50].

Le dernier point généralement passé sous silence, est la prise en compte réaliste des aléas de manœuvre de la cible. Cet aspect est le problème principal de la poursuite. On cherche à la fois à répondre à deux questions : y a t-il eu manœuvre de la cible, et si oui dans quelle proportion?

Un tel problème est une des principales pierres d'achoppement du filtre de Kalman. En effet, ce filtre est construit sur la base de modèles linéaires et gaussiens. Dans le cas où il y a manœuvre possible de la cible, la statistique de la commande du mobile doit comporter un aléa poissonien. Par nature, le filtre de Kalman ne peut réagir qu'avec beaucoup de traînage à un aléa poissonien. On pourrait bien évidemment y remédier en augmentant la variance du bruit de dynamique, mais cela aurait pour effet immédiat de dégrader l'estimation dans les portions stationnaires utiles à la prédiction.

On a généralement recours à deux types de solutions :

- l'approche adaptative [74, 77].
- l'approche multi-modèles [1, 7, 31].

Comme nous le verrons, l'algorithme particulaire précédemment exposé, résout ce compromis en permettant des non-linéarités et des bruits de dynamique ayant des

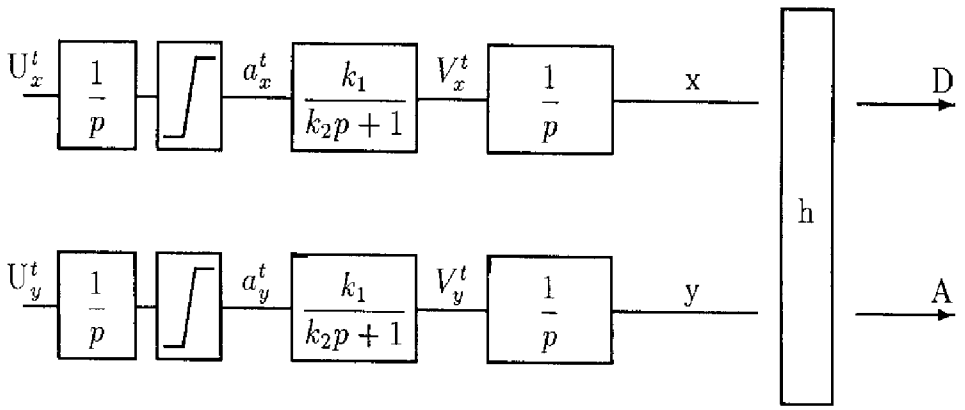
statistiques très diverses, notamment des ruptures poissoniennes à valeurs dans un continuum.

V.2 Cas du modèle de poursuite avion

Nous présentons ici uniquement, par souci de clarté, le traitement du modèle bidimensionnel : le passage au 3D ne pose cependant aucune difficulté de principe (Cf [57]). La seule différence dans la mise en œuvre du filtre réside dans un nombre de particules plus élevé, car il dépend de la dimension de l'espace d'état ou plus précisément du nombre de bruits d'entrée dans le modèle dynamique.

V.2.1 Modèle de dynamique et de capteur associé

Les équations de dynamiques sont celles présentées au chapitre II (rel. II.4), écrites pour chaque composante, ce qui donne le modèle dynamique 2D suivant :



où	h	:	Transformation non-linéaire au passage cartésien/polaire
	a_x^t,a_y^t	:	Commandes de pilotage
	V_x^t,V_y^t	:	Vitesses selon (x,y)

Ce qui peut s'écrire sous forme d'état :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{a}_x^t = w_x^t + \pi_x^t \\ \dot{V}_x^t = \dfrac{k_1 a_x^t - V_x^t}{k_2} \\ \dot{x}_t = V_x^t \\ \dot{a}_y^t = w_y^t + \pi_y^t \\ \dot{V}_y^t = \dfrac{k_1 a_y^t - V_y^t}{k_2} \\ \dot{y}_t = V_y^t \end{cases}} \tag{V.1}$$

Ce modèle peut se réécrire sous forme matricielle, en discrétisant par la méthode d'Euler [15] :

$$\begin{aligned} X_t &= \begin{pmatrix} x_t \\ V_x^t \\ a_x^t \\ y_t \\ V_y^t \\ a_y^t \end{pmatrix} = \mathbf{F} X_{t-1} + \Pi_t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\Delta t}{k_2} & \frac{k_1}{k_2}\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{\Delta t}{k_2} & \frac{k_1}{k_2}\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ V_x^t \\ a_x^t \\ y_t \\ V_y^t \\ a_y^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_x^t + \pi_x^t \\ 0 \\ 0 \\ w_y^t + \pi_y^t \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{V.2}$$

où Δt représente le temps (bref) entre deux instants de mesure (ici Δt=50ms), (k_1, k_2) deux paramètres agissant sur la dynamique du mobile (voir paragraphe II.3), (w_x^t, w_y^t) deux bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et d'écart-type (σ_x, σ_y), et X_t le vecteur d'état à l'instant t en coordonnées cartésiennes (position, vitesse, accélération suivant x et y).

Remarque : L'hypothèse de discrétisation d'Euler des équations continues du modèle proposé est parfaitement justifiée, car la cadence d'échantillonnage du capteur est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer que les caractéristiques dynamiques du mobile évoluent peu entre deux itérations.

De plus, le caractère stochastique des équations qui s'interprètent au sens de Itô, justifient l'emploi de la méthode d'Euler. L'adoption d'une approche de type Runge-Kutta ne respecterait pas l'intégration de Itô, et nécessiterait une intégration au sens

de Stratonovitch, ce qui est très délicat dans le cas des sauts [36].

Aléas de pilotage poissoniens :

Il convient désormais d'expliciter plus précisément les lois des variables de bruits de dynamique π_x^t et π_y^t

Comme il est bien connu des praticiens, les manœuvres imprévisibles de pilotage sont convenablement représentées par un bruit poissonien doublement stochastique (b.p.d.s.) : c'est le produit direct d'une mesure aléatoire binaire ε_t d'occurrence poissonienne et d'une amplitude aléatoire indépendante U_t de distribution quelconque, soit :

$$\text{b.p.d.s.} = \varepsilon_t.U_t$$

L'ensemble est entièrement caractérisé par la mesure :

$$E_\varepsilon dP(\varepsilon_t.U_t) = \lambda_t \Delta_t dP_t(U)$$

En l'absence de toute autre information, on peut prendre pour P une distribution d'amplitude gaussienne, ce qui rend toutefois le processus W très différent d'un processus gaussien.

Nous prendrons cependant ici pour les lois π_x^t et π_y^t une distribution d'amplitude uniforme dans un compact [-Umax,Umax], d'occurrence de saut λ, afin de mieux rendre compte de la limitation physique des commandes de gouvernes.

Capteur non-linéaire (polaire) :

Le capteur radar délivre des informations de position polaire bidimensionnelles (distance radiale, azimut). La position est donc repérée de la manière suivante :

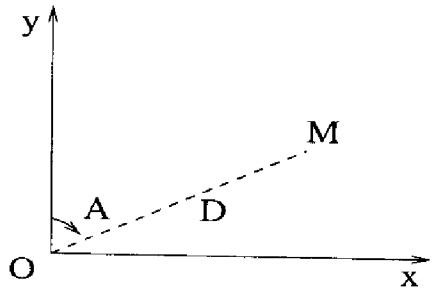


Figure V.1: Référentiel du RADAR

Le modèle (non-linéaire) de capteur s'écrit simplement :

$$\begin{cases} Y_t^D = D_t + \nu_D^t \\ Y_t^A = A_t + \nu_A^t \end{cases} \tag{V.3}$$

avec
- (D_t, A_t) : Coordonnées polaires de la cible
- ν_D^t, ν_A^t : Bruits blancs gaussiens de mesure de moyenne nulle et d'écarts-types respectifs (σ_D, σ_A)

Soit encore sous forme matricielle, en tenant compte du changement de coordonnées (polaire/cartésien) :

$$\boxed{Y_t = \begin{pmatrix} Y_t^D \\ Y_t^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_t^2 + y_t^2} & 0 \\ 0 & Atan(\frac{x_t}{y_t}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_D^t \\ \nu_A^t \end{pmatrix} = h(X_t) + \nu_t} \quad \text{(V.4)}$$

V.2.2 Solution "usuelle" linéarisée

Le système que l'on cherche à résoudre présente deux difficultés, d'abord la non-linéarité au passage cartésien/polaire, puis les aléas de pilotages non-gaussiens. La solution usuelle, consiste à linéariser l'équation de mesure afin de construire le filtre de Kalman étendu.

Il est clair que cette solution n'est pas optimale, et que l'on peut obtenir des résultats légèrement meilleurs avec des techniques adaptatives, ou multi-modèles. Les comparaisons avec la méthode particulaire se font cependant dans les cas les plus favorables, i.e. dans les régions stationnaires (absence de sauts de pilotage).

En résumé, on cherche à résoudre le système d'équations (V.2, V.4) :

$$\begin{cases} X_t = FX_{t-1} + W_t \\ Y_t = h(X_t) + \nu_t \end{cases} \quad \text{(V.5)}$$

Remarque : Le filtre de Kalman ne permet pas une modélisation de bruit autre que gaussienne. Nous avons donc remplacé le bruit de dynamique Π_t de l'équation V.2, par un bruit gaussien W_t de variance σ^2 dans l'équation V.5. Le principe du filtrage adaptatif consiste à calculer la variance σ^2 en fonction du régime dynamique (en présence d'un saut de commande de pilotage sa valeur augmente). Le filtre de Kalman étendu ici mis en œuvre n'est pas adaptatif, mais nous lui comparons le filtre particulaire, pour deux valeurs extrêmes de σ (l'une calculée pour le régime stationnaire, et l'autre pour suivre un saut).

Le filtre de Kalman étendu s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Prédiction :} & \begin{cases} \widehat{X}_{t|t-1} = F\widehat{X}_{t-1|t-1} \\ \widetilde{P}_{t|t-1} = F\widetilde{P}_{t-1|t-1}F^T + Q_t \end{cases} \\ \text{Correction :} & \begin{cases} K_t = \widetilde{P}_{t|t-1}H^T\left[H\widetilde{P}_{t|t-1}H^T + R_t\right]^{-1} \\ \widehat{X}_{t|t} = \widehat{X}_{t|t-1} + K_t\left(Y_t - h(\widehat{X}_{t|t-1})\right) \\ \widetilde{P}_{t|t} = \widetilde{P}_{t|t-1} - K_t\left(H\widetilde{P}_{t|t-1}H^T + R_t\right)K_t^T \end{cases} \end{cases} \quad \text{(V.6)}$$

où

$$Q_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \qquad R_t = \begin{pmatrix} \sigma_D^2 & 0 \\ 0 & \sigma_A^2 \end{pmatrix}$$

H est la jacobienne de la transformation cartésien/polaire :

$$H = H_{(\widehat{x}_{t|t-1}, \widehat{y}_{t|t-1})} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{y}{x^2+y^2} & 0 & 0 & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V.2.3 Solution particulaire

Le filtre particulaire permet, par nature, de tenir compte de modèles non-linéaires, et/ou de lois non-gaussiennes. Le problème du pistage de cibles manœuvrantes tel que décrit par les équations V.2, V.4, présente ces deux aspects.

La solution particulaire de ce problème s'écrit (Cf chapitre III) :

1. **Initialisation :** On initialise les particules $X_0^i = \left(x_0^i, (V_x^0)^i, (a_x^0)^i, y_0^i, (V_y^0)^i, (a_y^0)^i\right)$ selon l'information dont on dispose a priori sur la cible. Les poids sont égaux à $1/N$.

2. **Evolution :** Les N particules évoluent en fonction de la dynamique (éq. V.2), en tirant N bruits Π_t^i suivant la loi $P(\Pi_t)$:

$$X_t^i = F X_{t-1}^i + \Pi_t^i \qquad \text{pour i=1,...,N} \tag{V.7}$$

3. **Pondération :** Les pondérations p_t^i associées aux particules s'écrivent :

$$p_t^i = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\|Y_t - h(X_t^i)\|_{R_t}^2)}{\sum_{j=1}^{N} \exp(-\frac{1}{2}\|Y_t - h(X_t^j)\|_{R_t}^2)} \, p_{t-1}^i \tag{V.8}$$

où $\|(.)\|_{R_t}^2$ constitue le produit matriciel $(.)^T (R_t)^{-1} (.)$.

4. **Estimation :** L'estimateur particulaire s'écrit :

$$\widehat{X}_t^N = \sum_{i=1}^{N} p_t^i \, X_t^i$$

On itère ensuite les étapes 2,3 et 4.

V.2.4 Résultats de simulation

Thème :

On s'intéresse par la suite à un mobile se déplaçant selon une trajectoire ayant les caractéristiques initiales suivantes :

$$\begin{array}{lll} a_0^X = -20 & V_0^X = -200m/s & X_0 = 10km \\ a_0^Y = -10 & V_0^Y = -100m/s & Y_0 = 10km \end{array}$$

Le signe moins sur la commande de pilotage signifie que le mobile décrit une trajectoire de ralliement (ici sur les deux coordonnées).

De plus, ce mobile effectue à l'instant t=350x50ms=17.5s un changement de commande de pilotage, pour passer de a^X=-20 à a^X=5.

D'un point de vue pratique, la statistique du bruit de dynamique Π_t pour le filtre particulaire sera prise comme la somme d'un faible bruit blanc gaussien $\mathcal{N}_{(0,\sigma=0.03)}$, et d'un bruit blanc gaussien-poissonien (Gaussien $\mathcal{N}_{(0,\sigma'=30)}$ en amplitude, $\text{Poisson}_{(\lambda=3/10000)}$ dans le temps).

Dans cette statistique, la partie dérive brownienne permet d'éviter les éventuels biais asymptotiques, et la partie poissonienne rend compte des changements quelconques possibles de consigne.

Par ailleurs, les bruits de mesures sont de 5 mètres en distance radiale, et de 1mrad en azimut.

Estimation des éléments cinématiques :

Nous présentons ci-dessous, pour la méthode particulaire, l'estimation de la commande de pilotage et de la vitesse sur x, en fonction du temps :

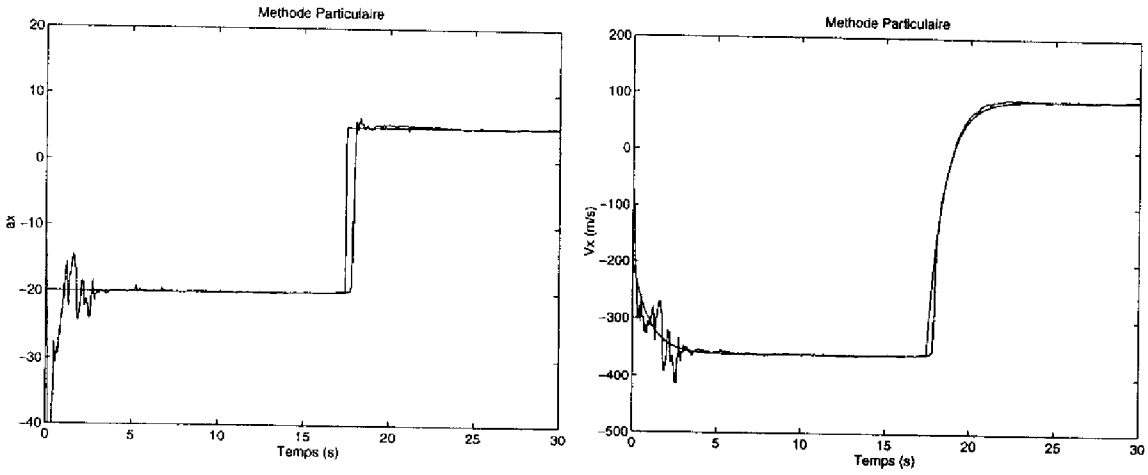


Figure V.2: Commande de pilotage a_x^t/ Vitesse V_x^t

On remarque que la statistique choisie permet au filtre de bien se comporter, à la fois dans les parties stationnaires et dans les parties où il y a changement de commande.

Si l'on construit de même le filtre de Kalman Etendu pour deux écart-types de bruit de dynamique différents (σ_K=0.03 et σ'_K=0.5), c'est à dire l'une égale à l'écart-type de la dérive brownienne du particulaire, et l'autre à l'écart-type équivalent du bruit poissonien, on obtient les résultats suivants :

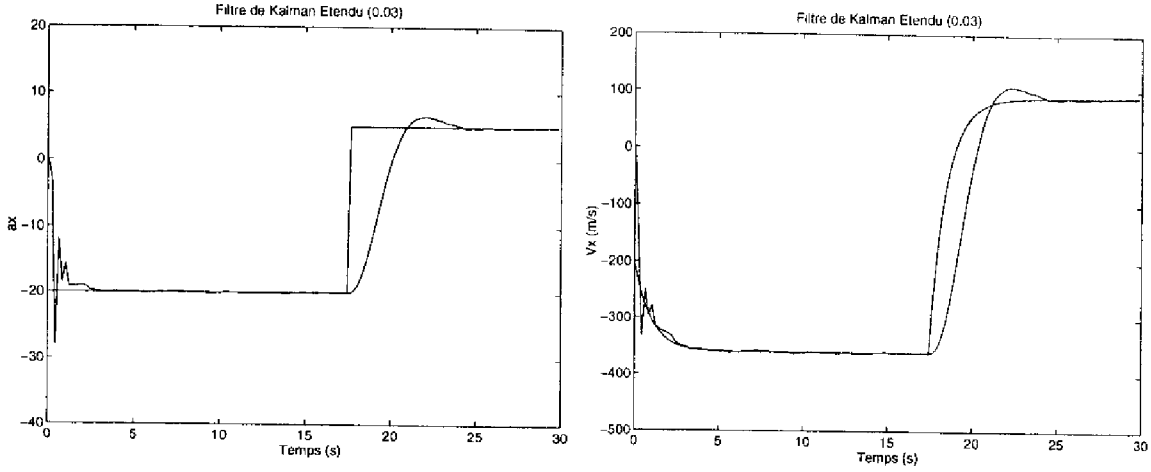


Figure V.3: Commande de pilotage a_x^t/ Vitesse V_x^t

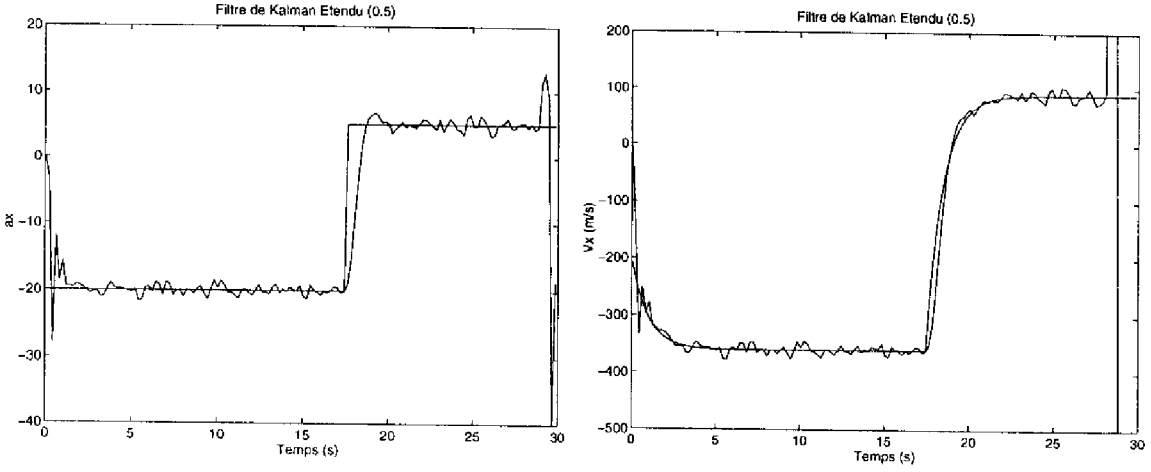


Figure V.4: Commande de pilotage a_x^t/ Vitesse V_x^t

On remarque aisément que pour la figure V.3, le filtre se comporte bien en régime stationnaire, et traîne lors du changement de commande en accélération. Les comportements sont inversés pour les courbes V.4.

En fait, le filtre particulaire réalise l'idéal dans les deux cas, tel que l'impose la théorie du filtrage non-linéaire.

Résultats de prédiction :

Pour mieux se rendre compte de l'efficacité de la méthode particulaire, le tableau ci-dessous présente les résultats comparatifs obtenus en prédiction de tir à 3,5 et 8 secondes, pour deux détecteurs de proximité (10 et 20 mètres). Cela concerne la région stationnaire, pour le filtre de Kalman à faible bruit ($\sigma_K = 0.03$) :

	Particulaire		Kalman Etendu	
	P(.<10m)	P(.<20m)	P(.<10m)	P(.<20m)
Prédiction à 3s	0.95	1	0.14	0.39
Prédiction à 5s	0.75	0.96	0.07	0.28
Prédiction à 8s	0.45	0.90	0.03	0.16

On remarque que la qualité du prédicteur proposé est très supérieure à celle du prédicteur construit sur la base du filtre linéarisé, pour un aléa gaussien-poissonien de même variance dans les deux cas.

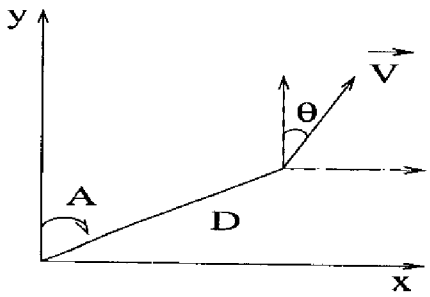
V.3 Loi de navigation proportionnelle (missile)

V.3.1 Modèle de dynamique et capteur associé

On présente maintenant un modèle dont les non-linéarités dynamiques sont fortes :

le principe de la navigation proportionnelle consiste à donner au vecteur vitesse du missile une variation angulaire proportionnelle à celle de la droite missile/but (Cf chapitre II). On doit remarquer que cette loi est définie en terme du couple (destination/missile), i.e. les équations sont écrites dans le référentiel de la destination du missile.

Comme précédemment, nous ne présentons que le cas bi-dimensionnel. On pourra trouver de plus amples résultats en 2D et 3D dans [57]. Le système est écrit en coordonnées polaires, et le radar (destination) est situé à l'origine :



Dans la figure ci-dessus, (V,θ) sont les coordonnées polaires de la vitesse du missile, et (D,A) celles de la position.

Les équations du missile s'écrivent de la manière suivante (Cf rel. II.1) :

$$\text{Dynamique} \quad \begin{cases} \dot{A}_t = \dfrac{V_t}{D_t}\sin(\theta_t - A_t) \\ \dot{D}_t = V_t\cos(\theta_t - A_t) \\ \dot{V}_t = 0 \\ \dot{\theta}_t = N_h^t\,\dot{A}_t \\ \dot{N}_h = \pi_t \end{cases} \tag{V.9}$$

$$\text{Mesures} \quad \begin{cases} Y_t^D = D_t + \nu_D^t \\ Y_t^A = A_t + \nu_A^t \end{cases} \tag{V.10}$$

où N_h^t est la constante de navigation proportionnelle, et ν_A^t, ν_D^t sont des bruits gaussiens indépendants de moyenne nulle, et de variances σ_D^2, σ_A^2. Comme dans le cas précédent, on discrétise par Euler les équations de dynamique.

V.3.2 Solution "usuelle"

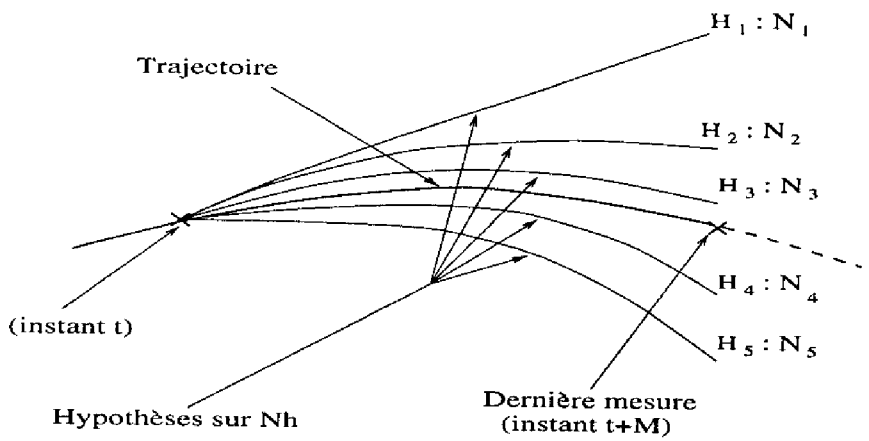
Les fortes non-linéarités du modèle V.9 rendent difficile sa linéarisation. Dans les solutions habituelles, on préfère généralement [29] découpler l'estimation des variables d'état (position, vitesse), de celle de la constante de navigation proportionnelle.

Pour s'affranchir du problème lié à cette non-linéarité, des études ont été faites [8, 29] sur la base d'un filtrage de Kalman-étendu portant sur le modèle de Singer afin d'obtenir des informations sur la dynamique du mobile.

Cette démarche peut se résumer de la manière suivante, il s'agit d'un filtrage de la constante de navigation en deux étapes :

- Tout d'abord on utilise un modèle de dynamique grossier, afin de filtrer les données de dynamique du mobile.
- Ces données filtrées sont utilisées pour générer, avec un autre modèle de dynamique (celui du type loi de navigation), une série de trajectoires différant par la valeur des constantes N_h. Les différentes trajectoires donnent lieu à un test d'hypothèses, pour en extraire "la plus satisfaisante".

On peut schématiser simplement ce processus:



avec $H_1, H_2, \ldots, H_n$ correspondant aux différentes hypothèses de N_h.

Cette opération est répétée avec une certaine fréquence.

Nous ne détaillons cependant pas davantage cette méthode, car elle présente l'inconvénient, comme on peut s'en douter, d'être loin de l'optimalité et nous ne l'utiliserons donc pas pour la comparaison avec le filtre particulaire.

Nous avons donc choisi d'utiliser le filtre de Kalman étendu, directement sur le système V.9, V.10, en linéarisant l'équation de dynamique dans des régions admissibles. Comme il a été précisé, la linéarisation directe du modèle peut poser des problèmes de stabilité : il convient donc d'en maîtriser le comportement, pour comparer la solution particulaire au filtre de Kalman étendu dans les régions admissibles pour celui-ci.

Le filtre de Kalman étendu conserve une structure identique aux équations V.6, avec :

$$X_t = \left(D_t, A_t, V_t, \theta_t, N_h^t\right)^T$$

H est désormais la matrice identité (dimension2), et F est la jacobienne de la fonction de dynamique :

$$F = F_{(\widehat{x}_{t|t-1})} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & V\sin(\theta - A) & \cos(\theta - A) & -V\sin(\theta - A) & 0 \\ -\frac{V}{D^2}\sin(\theta - A) & -\frac{V}{D}\cos(\theta - A) & \frac{1}{D}\sin(\theta - A) & \frac{V}{D}\cos(\theta - A) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{N_h V}{D^2}\sin(\theta - A) & -\frac{N_h V}{D}\cos(\theta - A) & \frac{N_h}{D}\sin(\theta - A) & \frac{N_h V}{D}\cos(\theta - A) & \frac{V}{D}\sin(\theta - A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .\Delta t$$

Δt est le pas de discrétisation (ici 50ms)

V.3.3 Solution particulaire

Nous ne détaillons pas ici la mise en œuvre du filtre particulaire qui est en tout point identique au problème Singer 2D détaillé dans le paragraphe V.2.3, en changeant simplement les équations d'évolution (V.7) et de pondération (V.8).

V.3.4 Résultats de simulation

Thème :

Les résultats présentés ici comparent les performances relatives des deux filtres précédemment exposés. Les conditions initiales sur les vitesse et position sont (en coordonnées polaires) : D=8000m, A=45°, V=250m/s, θ=150°. La constante de navigation effectue un changement de N_h=3 à N_h=-3, à l'instant t=17.5s.

Les écarts-types des bruits de mesure sont : σ_D=5m, σ_A=1mrad.

Estimation des éléments cinématiques :

Les figures ci-dessous représentent l'estimation de la constante de navigation proportionnelle, ainsi que l'erreur sur la vitesse, pour le filtre particulaire.

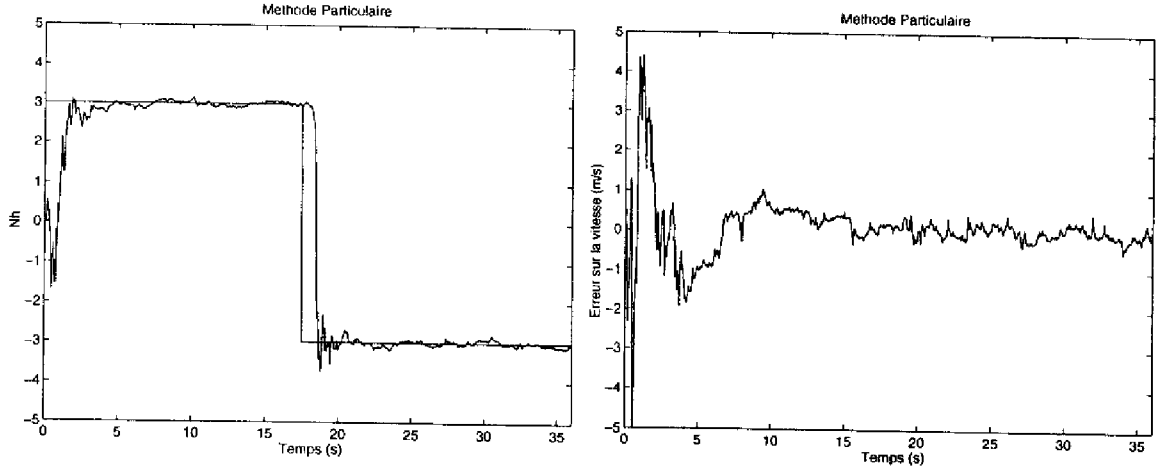


Figure V.5: Commande de navigation N_h/ Erreur sur la Vitesse V

Sont représentés ci-dessous les mêmes paramètres estimés que précédemment, pour le filtre de Kalman étendu, avec la même variance de bruit dynamique que pour le filtre particulaire :

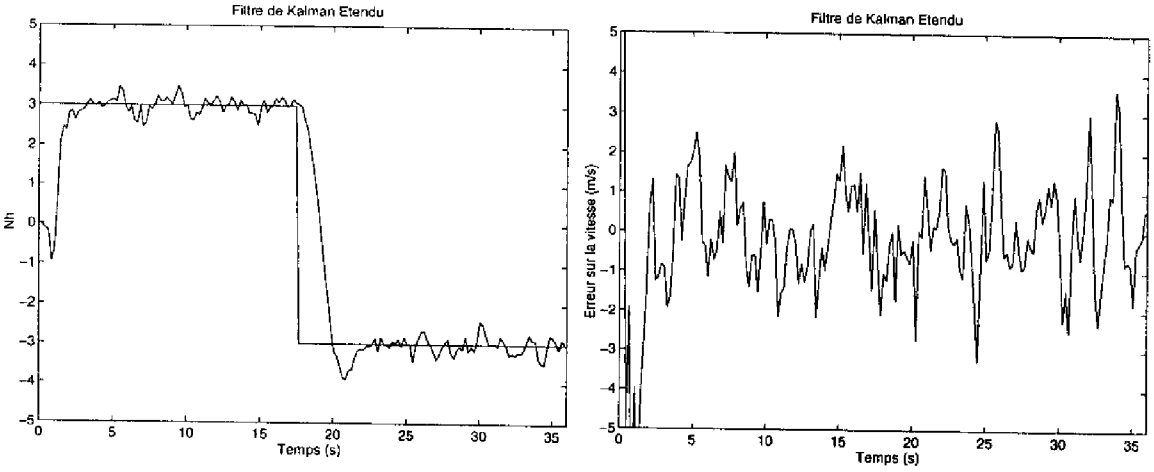


Figure V.6: Commande de navigation N_h/ Erreur sur la Vitesse V

On remarque, comme précédemment pour le modèle de poursuite avion, un bon comportement du filtre proposé tant en régime stationnaire, que pour suivre un changement de constante de navigation.

Résultats de prédiction :

Un moyen efficace d'évaluer des filtres, est de calculer les performances en prédiction. Le tableau suivant donne la probabilité de se trouver dans un rayon de 10m autour de la destination, pour les filtres particulaire et de Kalman étendu :

	Filtre Particulaire	Filtre Linéarisé
Prédiction à 3s	1	0.87
Prédiction à 5s	0.99	0.67
Prédiction à 8s	0.9	0.4

Ces chiffres sont à nouveau très favorables au filtre particulaire, qui permet d'obtenir une probabilité de coup au but de 90%, à 8 secondes.

Test d'hypothèses sur la destination du missile :

On souhaite désormais déterminer le plus rapidement possible la destination d'un missile assaillant. Il est supposé obéir à une loi de navigation proportionnelle inconnue et l'on doit décider entre deux destinations possibles. La solution mathématique est donnée par un test d'hypothèses classique, dont le filtre particulaire contient les éléments.

En effet, la particularité des modèles de navigation proportionnelle est qu'ils sont écrits dans le référentiel de la destination. Le problème de choisir entre deux destinations possibles est de construire le rapport de vraisemblance des deux hypothèses.

Afin de comparer l'hypothèse H_1 à l'hypothèse H_2, on doit étudier la probabilité $P(H_1, X_{\underline{t}}|Y_{\underline{t}})$de H_1 et $P(H_2, X_{\underline{t}}|Y_{\underline{t}})$de H_2, en fonction des mesures jusqu'à l'instant t.

Le test est basé sur le rapport de vraisemblance :

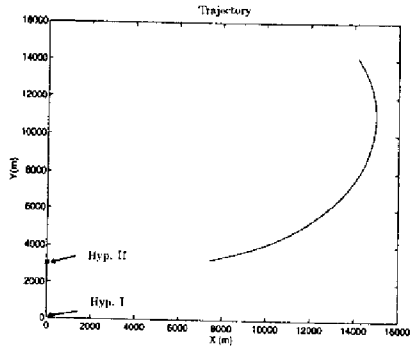
$$r = \frac{P(H_1|Y_{\underline{t}})}{P(H_2|Y_{\underline{t}})} = \frac{P_0(H_1)}{P_0(H_2)} \frac{P(Y_{\underline{t}}|H_1)}{P(Y_{\underline{t}}|H_2)} \tag{V.11}$$

Si l'on considère les deux hypothèses initialement équiprobables ($P_0(H_1) = P_0(H_2) = 1/2$) :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\int P(Y_{\underline{t}}|H_1, X_t)dX_t}{\int P(Y_{\underline{t}}|H_2, X_t)dX_t} \simeq \frac{\sum_{i=1}^{N} P(Y_{\underline{t}}|H_1, X_t^i)}{\sum_{i=1}^{N} P(Y_{\underline{t}}|H_2, X_t^i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_D^2}\sum_{j=1}^{t}(Y_j^D - D_j^{H_1,i})^2 - \frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{j=1}^{t}(Y_j^A - A_j^{H_1,i})^2\right)}{\sum_{i=1}^{N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_D^2}\sum_{j=1}^{t}(Y_j^D - D_j^{H_2,i})^2 - \frac{1}{2\sigma_A^2}\sum_{j=1}^{t}(Y_j^A - A_j^{H_2,i})^2\right)} \end{aligned} \tag{V.12}$$

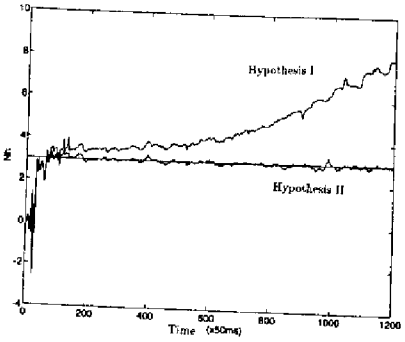
Dans ce cas, on remarque que la solution particulaire consiste à comparer la vraisemblance du filtre pour l'hypothèse H_1, à celle d'un autre filtre construit sur H_2. Ces équations se généralisent aisément au cas de n hypothèses.

La trajectoire réelle du missile est la suivante :

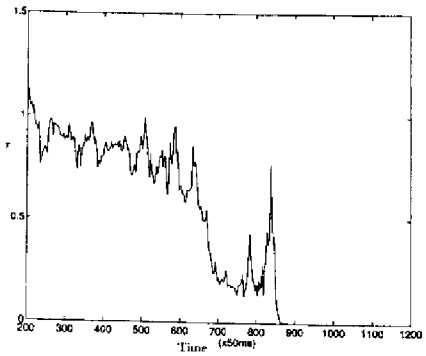


La position du missile est mesurée (éq. V.10) à la position I (hypothèse H_1), et la destination du missile est la position II (hyp. H_2). Les composantes initiales du missile sont : D=20000m, A=45°, V=250m/s, θ=150°, N^h=3.

La figure suivante représente l'estimation de la constante de navigation N_h pour les deux hypothèses :



Dans la courbe suivante, on donne le rapport r (éq. V.12) en fonction du nombre de mesures accumulées. r>1 signifie qu'il est plus probable que la destination du missile soit la position I, et r<1 que ce soit la position II.



On remarque sur cette courbe que la bonne hypothèse est rapidement choisie, malgré la grande distance entre le missile et sa destination. On détermine notamment la

destination effective du missile plus de 45 secondes avant qu'il n'atteigne son but.

Remarque : Nous avons traité ici le cas où l'on connaît a priori les destinations possibles du missile, par exemple le cas où l'on cherche à décider, dans une flotte, si l'un des bâtiments constitue une cible pour ce missile.

Le problème de la détermination de la destination du missile, sans aucune hypothèse a priori, se résout simplement par augmentation du vecteur d'état, en considérant que la position (D_0, A_0) du point visé doit être ajoutée au nouvel état X_t^i de la particule.

V.4 Conclusion

Il convient de remarquer que la technique développée ne se réduit pas à la résolution du problème de poursuite radar de cibles manœuvrantes : la méthode particulaire est en effet très générale et permet de résoudre tout problème d'estimation dynamique, en faisant porter l'essentiel de la difficulté sur une modélisation précise des phénomènes que l'on cherche à traiter, ainsi que l'effort de calcul particulaire.

On a montré dans le chapitre IV, que l'on peut encore améliorer les résultats obtenus en traitant directement les données mesurées avec toutes les non-linéarités amont. Le chapitre présent montre néanmoins des performances significatives, malgré la présence de non-linéarités plus faibles dans ce cas là.

Cela s'avère intéressant lorsque l'on aborde le problème de pistage [1, 7, 8, 28], où l'on modélise généralement le radar comme un capteur qui délivre des informations de position sur une cible détectée par ailleurs.

Il est à noter que les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet, comme dans le cas des données brutes, d'un contrat avec la Direction des Constructions Navales de la Marine Nationale [57], et que des optimisations algorithmiques effectuées par la société DIGILOG ont permis d'atteindre des performances temps-réel sur station de travail.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire l'apport d'une nouvelle technique de filtrage non-linéaire pour la résolution du problème de poursuite radar de cibles manœuvrantes.

L'aptitude de la méthode particulaire à traiter des problèmes fortement non-linéaires qui mettent en défaut les techniques usuelles, nous a conduit à repenser la manière de poser le problème de détection/estimation radar. On a montré en effet dans le chapitre IV, que la prise en compte de la dynamique dans l'intégration des récurrences ("track before detect") permet de repousser les seuils de détection à des valeurs inhabituelles. Cette solution conduit notamment à revoir le problème de détection, car l'intégration d'un modèle de dynamique permet de relever le rapport S/B équivalent, et minimise les problèmes de fausse alarme.

Nous avons montré, en outre, l'apport du filtrage particulaire dans le traitement des données en sortie d'extracteur classique. Cette situation constitue d'ailleurs un cas particulier du précédent pour lequel on occulte l'ensemble de la chaîne de réception : le radar délivre directement des informations de position sur la cible. Ces résultats sont cependant comparativement intéressants, car c'est généralement en ces termes qu'est posé le problème de poursuite de cibles ([1, 7, 8, 28, 29, 31]...).

Malgré des non-linéarités de modèle plus faibles, on montre les gains importants avec les techniques particulaires, qui réalisent le compromis idéal entre un suivi efficace de changement de commande de pilotage et une bonne précision en régime stationnaire.

A la lecture de ce document, le lecteur pourra s'inquiéter sur la charge de calcul liée à la mise en œuvre de l'algorithme particulaire. En fait, la seule optimisation du code de programmation pour les applications présentées au chapitre V, a permis à la société DIGILOG/DIGINEXT d'obtenir des exécutions en temps réel sur station de travail (type HyperSparc). De plus, la nature massivement parallèle de la méthode permet d'envisager une application temps réel pour les données brutes étudiées au chapitre IV.

Ce mémoire constitue en fait une synthèse des travaux effectués pour la Direction des Constructions Navales (CTSN/LSA, Toulon) pendant la période 1992/96, qui se poursuivront par des expérimentations sur données réelles délivrées par un radar de poursuite.

Il convient finalement de remarquer que la généralité de la méthode présentée dans le chapitre III permet d'envisager des applications non-linéaires très diverses, en faisant désormais porter la difficulté sur une modélisation précise des phénomènes.

Bibliographie

[1] Y.BAR-SHALOM
"Tracking and data association"
Mathematics in Science and Engineering
Academic Press (1988)

[2] D.K.BARTON
"Modern radar system analysis"
Artech House (1988)

[3] O.BENNIS, T.HUILLET, A.MONIN, G.SALUT
"Modélisation, estimation et optimisation non-linéaires de chaînes de poursuite RADAR pour mobiles non-coopératifs : modélisation"
Contrat D.C.A.N (C.A.P.C.A) C.84.48.801.303 (Juillet 1986)

[4] K.BERBICHE
"Approche projective du filtrage polynomial pour les systèmes stochastiques bilinéaires"
Thèse, Université Toulouse III (Juillet 1989)

[5] K.BERBICHE, A.MONIN, G.MONTSENY, G.SALUT
"Filtrage non-linéaire de systèmes stochastiques bilinéaires"
Rapport LAAS n° 89233 (Juillet1989)

[6] K.BERBICHE, A.MONIN, G.MONTSENY, G.SALUT
"Filtrage optimal récursif des systèmes bilinéaires par fonctionnelles polynomiales à noyaux séparables"
Rapport LAAS n° 89421 (Décembre 1989)

[7] H.BLOM, Y.BAR-SHALOM
"The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients"
IEEE Trans. Automatic Control
Vol. 33 pp 780-783 (Aout 1988)

[8] C.BOZZO
"Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite"
Librairies LAVOISIER, Tome III (1983)

[9] R.BUCY
"Non linear filtering"
IEEE Trans. Automatic Control Vol.10 (1965)

[10] F.CAMPILLO, F.LEGLAND
" Méthodes de filtrage non-linéaire, exemple : Trajectographie passive"
Séance du GdR Automatique, Paris (16 Mai 1990).

[11] F.CAMPILLO, F.LEGLAND
"Filtrage et Trajectographie"
Séance du GdR Automatique (pôle Systèmes Avancés de Régulation et Techniques Adaptatives) Grenoble (10 décembre 1993).

[12] R.CARPENTIER
"Guidage des avions et missiles aérodynamiques : méthodes de conduite, mécanique du vol et pilotage appliquées aux missiles"
Cours E.N.S.A.E, Tome I (1984)

[13] M.CARPENTIER
"RADARS. Bases Modernes"
Ed. Masson (1981)

[14] M.CHAMON, J-C.NOYER, G.SALUT
"Poursuite de cibles manœuvrantes en présence de glint"
Congrès canadien de génie électrique et informatique, Montréal (Québec), 5-8 Septembre 1995.

[15] M. CROUZEIX, A. MIGNOT
"Analyse numérique des équations différentielles. Cours."
Editions Masson, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise (1983)

[16] J.DARRICAU
"Physique et Théorie du RADAR"
Ed. Sodipe (1994)

[17] P.DEL MORAL
"Résolution particulaire des problèmes d'estimation et d'optimisation non-linéaires"
Thèse de l'Université Paul Sabatier (Juin 1994)

[18] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT
"Particules aléatoires et filtrage non-linéaire"
Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle non-linéaire)
Paris, 8 Février 1991.

[19] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT
"Filtrage non-linéaire non-gaussien appliqué au recalage de plates-formes inertielles : mise en équations spécifique"
Convention S.T.C.A.N, n° A 9177013
Rapport intermédiaire, 94 pages (Septembre 1991)

[20] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT
"Filtrage non-linéaire non-gaussien appliqué au recalage de plates-formes inertielles : mise en œuvre par méthodes particulaires "
Convention S.T.C.A.N, n° A 9177013
Rapport final, 125 pages (Juin 1992)

[21] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT
"Estimation et commande optimale non-linéaire : la résolution particulaire en estimation/filtrage. Résultats expérimentaux"
Convention D.R.E.T, n° 89.34.553.00.470.75.01
Rapport intermédiaire n° 2, 54 pages (Janvier 1992)

[22] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT
"Estimation et commande optimale non-linéaire : Résultats théoriques"
Convention D.R.E.T, n° 89.34.553.00.470.75.01
Rapport intermédiaire n° 3, 123 pages (Octobre 1992)

[23] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT
"Estimation et commande optimale non-linéaire : compléments de filtrage, commande optimale et maximum de vraisemblance"
Convention D.R.E.T, n° 89.34.553.00.470.75.01
Rapport intermédiaire n° 4, 210 pages (Janvier 1993)

[24] P.DEL MORAL, J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT
"Traitement particulaire du signal RADAR : détection, estimation et reconnaissance de cibles aériennes"
Rapport LAAS n° 92495 (Janvier 1993)

[25] P.DEL MORAL, J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT
"Traitement non-linéaire du signal par réseau particulaire : application RADAR"
Quatorzième colloque GRETSI (Juan-Les-Pins)
(13-16 Septembre 1993)

[26] P.DEL MORAL, J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT
"Résolution particulaire et traitement non-linéaire du signal : applications Radar/Sonar"
Traitement du Signal, vol. 12, n° 4, pp 287-301 (1995)

[27] P.DEL MORAL, G.SALUT
"Filtrage non-linéaire : résolution particulaire à la Monte-Carlo"
C.R.A.S. Paris, t. 320, Série I, p. 1147-1152 (1995)

[28] B.DELLERY
"Modélisation et caractérisation de la trajectoire d'un mobile manœuvrant dans le cadre du problème de la poursuite. Application aux problèmes de l'estimation et de l'extrapolation d'état"
Thèse, Université Aix-Marseille II (Octobre 1983)

[29] B.DELLERY, A.LORENZI, C.BOZZO et al.
"Caractérisation de trajectoires
Application à l'estimation et à la prédiction des éléments de cinématique d'un mobile manœuvrant."
Neuvième colloque GRETSI (NICE)
(16 au 20 mai 1983)

[30] E.DIEULESAINT, D. ROYER
"Ondes élastiques dans les solides : application au traitement du signal"
Ed. Masson et Cie (1974)

[31] F.DUFOUR, M.MARITON
"Tracking a 3D maneuvering target with passive sensors"
IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems
Vol. 27, pp 725-738 (Juillet 1991)

[32] G. GALATI (ed.)
"Advanced radar techniques and systems"
IEE Radar, Sonar, Navigation and Navionics Series 4
Peter Peregrinus, Londres (1993)

[33] N.J. GORDON, D.J. SALMOND, A.F.M. SMITH
"Novel approach to nonlinear/non-Gaussian bayesian state estimation"
IEE Proceedings-F, Vol. 140, N° 2 (Avril 1993).

[34] M.GUELMAN
"Proportional navigation with a maneuvring target"
IEEE Transactions on aerospace and electronic systems
Vol. 8, n° 3, pp 364-371 (Mai 1972)

[35] R.C. HANSEN, et al.
"The handbook of antenna design"
Peter Peregrinus, Londres (1986)

[36] T. HUILLET, A. MONIN, G. MONTSENY, G. SALUT
"Réversibilité des systèmes non-linéaires à commande ponctuelle"
RAIRO APII vol. 24, n° 1 (1990)

[37] T.HUILLET, G.RIGAL
"Non-linear filters approximations by cumulant function expansion : the polynomial case"
Applied Mathematical Modelling, Vol.15, pp 58-72 (Février 1991)

[38] T.HUILLET, G.SALUT
"Interprétation des équations du filtrage non-linéaire"
Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle non-linéaire)
Paris, 8 Novembre 1989.

[39] A.H.JAZWINSKY
"Stochastic processes and filtering theory"
Academic Press (1970)

[40] R.KALMAN
"A new approach to linear filtering and prediction problems"
J. Bas. Eng. ASME Vol. 82 pp 33-45 (1960)

[41] R.KALMAN, R.BUCY
"New results in linear filtering and prediction theory"
J. Bas. Eng. ASME Vol. 83 pp 95-108 (1961)

[42] P.L'ECUYER
"Efficient and Portable Combined Random Number Generators"
Communications of the ACM
(Juin 1988) Vol. 31, N° 6, p 742-749

[43] F. LE CHEVALIER
"Principes de traitement des signaux radar et sonar"
Collection technique et scientifique des télécommunications
Ed. Masson (1989)

[44] F. LE CHEVALIER
"Bases physiques du radar"
Revue technique THOMSON-CSF
Vol. 25, n° 24 (Décembre 1993)

[45] J.LEVINE
"Un aperçu élémentaire de la théorie moderne des systèmes non-linéaires"
Rairo 17/4, pp.277-321

[46] LEVINE
"Radiotechnique statistique"
Ed. MIR

[47] R.J.MAILLOUX
"Phased array antenna handbook"
Artech House (1994)

[48] M.MARITON
"Pistage de cibles manœuvrantes : synthèse et apport de l'imagerie"
Traitement du Signal, vol. 10, n° 2 pp 117-138 (1993)

[49] D.L. MENSA
"High resolution radar cross-section imaging"
Artech House (1991)

[50] K.S.MILLER, D.M.LESKIW
"Non linear estimation with Radar observations"
IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems
Vol. 18 pp 192-200 (Mars 1982)

[51] A.MONIN, G.SALUT
"Filtrage optimal de Volterra à horizon infini : application aux systèmes bilinéaires"
Quatorzième colloque GRETSI (Juan-Les-Pins)
(13-16 Septembre 1993)

[52] S.A.MURTAUGH, H.E.CRIEL
"Fundamentals of proportional navigation"
IEEE Spectrum
Vol. 3, n° 12, pp 75-85 (Décembre 1966)

[53] J-C. NOYER
"Résolution particulaire en filtrage non-linéaire"
Rapport DEA de Physique des Particules, Physique Mathématique et Modélisation, Universités Aix-Marseille II, Toulouse III (Juin 1992)

[54] J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT
"Poursuite RADAR de cibles fortement manœuvrantes par filtrage non-linéaire : Méthodologie, modélisation"

Etude D.C.A.N. n° A.92.50.194, Rapport LAAS n° 93232
Rapport n° 1, 53p (Février 1993)

[55] J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT
"Poursuite RADAR de cibles fortement manœuvrantes par filtrage non-linéaire : Premiers développements"
Etude D.C.A.N. n° A.92.50.194, Rapport LAAS n° 93233
Rapport n° 2, 54p (Mai 1993)

[56] J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT
"Poursuite RADAR de cibles fortement manœuvrantes par filtrage non-linéaire : Résultats expérimentaux"
Etude D.C.A.N. n° A.92.50.194, Rapport LAAS n° 93443
Rapport n° 3, 42p (Juillet 1993)

[57] J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT
"Poursuite RADAR de cibles fortement manœuvrantes par filtrage non-linéaire : Rapport final"
Etude D.C.A.N. n° A.92.50.194, Rapport LAAS n° 93444
Rapport n° 4, 150p (Septembre 1993)

[58] J-C. NOYER, G. SALUT
"Filtrage particulaire et trajectographie radar non-linéaire"
Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle Non-Linéaire/SARTA)
Grenoble, 10 Décembre 1993

[59] J-C.NOYER, G.SALUT
"Tenue de situation : exploitation du signal RADAR (traitement de l'information radiale sans Doppler) "
Etude D.C.A.N. n° A.94.77.717, Rapport LAAS n° 94497
Rapport intermédiaire n° 1, 107p (Octobre 1994)

[60] J-C.NOYER, G.SALUT
"Exploitation du signal RADAR II : traitement de l'information radiale avec Doppler"
Etude D.C.A.N. n° A.94.77.717, Rapport LAAS n° 95282
Rapport intermédiaire n° 2, 56p (Juin 1995)

[61] J-C.NOYER, G.SALUT
"Exploitation du signal RADAR III : traitement de l'information angulaire"
Etude D.C.A.N. n° A.94.77.717, Rapport LAAS n° 96114
Rapport intermédiaire n° 3, 46p (Avril 1996)

[62] J-C.NOYER, G.SALUT
"Exploitation du signal RADAR IV : traitement de l'information angulaire (antenne réseau)"
Etude D.C.A.N. n° A.94.77.717, Rapport LAAS n° 96220
Rapport intermédiaire n° 4, 43p (Juin 1996)

[63] J-C.NOYER, G.SALUT
"Poursuite RADAR de cibles à navigation proportionnelle par filtrage non-linéaire particulaire"
15ème colloque GRETSI, Juan-Les-Pins, (18-22 Septembre 1995), pp 1105-1108

[64] J-C.NOYER, G.SALUT
"Filtrage particulaire du signal radar brut sur cible ponctuelle"
Traitement du Signal, à paraître.

[65] J-C.NOYER, G.SALUT
"Optimal non-linear radar tracking of non-Gaussian manoeuvering targets"
Soumis à la revue IEEE Aerospace and Electronic Systems, Rapport LAAS n° 96113

[66] A.PAPOULIS
"Probability, Random Variables, and Stochastic Processes"
Electrical and Electronic Engineering Series
Editions Mac Graw/Hill (1991)

[67] S.PARK, K.MILLER
"Random Number Generators : Good ones are hard to find"
Communications of the ACM
(Octobre 1988) Vol. 31, N° 10, p 1192-1201

[68] J.PICCARD
"Filtrage non-linéaire adaptatif avec petit bruit d'observation"
Scéance du groupe de recherche CNRS en automatique (Pôle Non-Linéaire)
(8 Février 1991)

[69] G.RIGAL
"Filtrage non-linéaire, résolution particulaire et applications au traitement du signal"
Thèse de l'Université Paul Sabatier (Juillet 1993)

[70] G.RIGAL, G.SALUT
"L'estimation particulaire dans les problèmes non-linéaires généraux"
Séance du GdR Traitement du Signal du CNRS (ordres supérieurs)
Paris, 28 Octobre 1992

[71] R.A.SINGER
"Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets"
IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems
Vol. AES-6, n° 4, pp 473-483 (Juillet 1970)

[72] R.A.SINGER, K.W.BEHNKE
"Real-time tracking filter evaluation and selection for tactical applications"
IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems
Vol. AES-7, n° 1, pp 100-110 (Janvier 1971)

[73] M.I.SKOLNIK
"Introduction to radar systems"
McGraw-Hill (1980)

[74] J.S.THORP
"Optimal tracking of maneuvering targets"
IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems
Vol. 9 pp 800-810 (Nov. 1972)

[75] M.VAN DOOTINGH, F. VIEL, D. RAKOTOPARA, J.P. GAUTHIER
"Coupling of non-linear control with a stochastic filter for state estimation : application on a continuous free radical polymerization reactor"
I.F.A.C. International Symposium ADCHEM'91, Toulouse (14-15 Octobre 1991)

[76] H.L. VAN TREES
"Detection, Estimation and Modulation Theory. Part III"
Ed. John Wiley and Sons (1968)

[77] T.C.WANG, P.K.VARSHNEY
"A tracking algorithm for maneuvering targets"
IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems
Vol.29 pp 910-924 (Juillet 1993)

[78] Brevet déposé le 8 juin 1994, sous le n° 94 07274

Traitement Non-Linéaire du Signal Radar par Filtrage Particulaire

On présente dans ce mémoire, une approche globale du problème de poursuite radar de cibles manœuvrantes à faible rapport signal/bruit, par filtrage non-linéaire particulaire.
Le filtrage particulaire, dont les bases ont été jetées dès 1989, permet d'aborder tous les cas où les non-linéarités présentes posent des difficultés de résolution aux techniques de filtrage dynamique. Il consiste à construire une approximation-mesure de la probabilité conditionnelle de la variable d'état à estimer par particules aléatoires, dont la dynamique est régie par le flot stochastique du système, et qui sont pondérées, via la règle de Bayes, par les mesures jusqu'à l'instant courant.
Ce travail présente en premier lieu le traitement direct des mesures radar brutes en sortie d'échantillonneur-convertisseur. On montre notamment que la prise en compte de la dynamique de cible dans l'intégration cohérente des récurrences radar, permet d'atteindre les limites théoriques de détection, jusqu'alors inacessibles. Cela conduit notamment à revoir le problème de détection, car l'intégration d'un modèle de dynamique permet de relever le rapport signal/bruit équivalent, et minimise les problèmes de fausse alarme.
En second lieu, on détaille le post-traitement des données de position délivrées par un radar de poursuite usuel, en particulier pour le modèle générique de missile à loi de navigation proportionnelle. On présente dans ce cas la résolution du problème de détermination de but visé, qui se pose en terme d'un test d'hypothèses sur le modèle de dynamique de l'assaillant.

Mots clefs: Filtrage Non-Linéaire, Résolution Particulaire, Poursuite RADAR, Technique Monopulse, Navigation Proportionnelle, Prédiction Optimale.

Non-Linear Processing of Radar Signal via Particle Filtering

This memoir develops a global approach of the radar tracking problem for manoeuvering targets with low signal/noise ratio, through particle non-linear filtering.
Particle filtering was proposed as soon as 1989 and yields solutions to problems where non-linearities are an obstacle to the application of traditional filtering techniques. It is a measure-theoretic approximation of the conditional probability law of state variables to be estimated, by random particles whose dynamics follows the stochastic flow of the system and are weighted, via Bayes' rule, by measurements up to current time.
This work deals essentially with direct processing of radar data at the output of the digital sampling stage. It is shown in particular that taking into account target's dynamics in coherent integration of radar recurrences allows to approach theoretical limits, which are far beyond classical techniques. This leads to reconsider the detection problem itself, according to the general principle known as "track before detect".
Besides, one deals with post-processing of target's coordinates as delivered by usual tracking radars, in particular for a generic model of missile with proportional navigation law. We solve in that case, the problem of determining its likely destination in terms of likelyhood hypothesis testing on the incoming missile's trajectory.

Key words : Non-Linear Filtering, Particle Solution, RADAR Tracking, Monopulse Technique, Proportional Navigation, Optimal Prediction.