



**HAL**  
open science

# Vers la modélisation et le recalage des liaisons sur les structures en vibrations moyennes fréquences.

Olivier Dorival

► **To cite this version:**

Olivier Dorival. Vers la modélisation et le recalage des liaisons sur les structures en vibrations moyennes fréquences.. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2006. Français. NNT: . tel-00160581

**HAL Id: tel-00160581**

**<https://theses.hal.science/tel-00160581>**

Submitted on 6 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° ENSC-2006/25

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Monsieur Olivier DORIVAL**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

**Sujet de la thèse :**

**Vers la modélisation et le recalage des liaisons  
sur les structures en vibrations moyennes fréquences**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 6 décembre 2006 devant le jury composé de :

Olivier ALLIX	Examineur
Marc BONNET	Président
Antoine CHAIGNE	Rapporteur
Jean-Paul GRELLIER	Examineur
Mohamed ICHCHOU	Rapporteur
Philippe ROUCH	Examineur
Bing TIE	Examinatrice

LMT Cachan  
(ENS CACHAN/CNRS/Université Paris 6)  
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)



Je tiens ici à remercier les personnes qui ont participé, de près ou de loin, à l'accomplissement de cette étape, en espérant n'en oublier aucune.

Mes premiers remerciements s'adressent aux membres du jury, qui ont montré un intérêt pour ce travail, et dont les remarques et questions m'ont été et me seront d'un grand secours. Je suis tout particulièrement reconnaissant à Mr Chaigne et à Mr Ichhou d'avoir accepté le rôle de rapporteur de cette thèse.

Ma reconnaissance va tout autant à mes encadrants, qui m'ont laissé travailler avec grande liberté, sans jamais exprimer le moindre doute. À Olivier, à qui j'ai dû faire passer plusieurs nuits blanches ; à Philippe, dont la bonne humeur et les encouragements ont été inépuisables. Je pense également à Arnaud, qui a participé aux débuts de ce travail, et dont j'ai enfin compris la leçon sur « la manière de grandir ».

J'adresse également mes remerciements à l'équipe enseignante de Versailles : Annette, Éveline, Paolo, Stéphanie, et bien sûr Sylvain, qui ont accepté de porter le poids de mes derniers mois de rédaction.

Je ne voudrais pas oublier toutes les personnes - elles sont nombreuses - qui m'ont soutenu au quotidien. Ceux qui ont relu soigneusement, Mathilde et Philippe, ceux qui ont assisté aux présoutenances, Benjamin, David, Philippe, Pierre-Alain, Marc. Ceux qui errent le soir ou le week end dans les sombres couloirs du laboratoire, Gilles, Hugo, Karine, Minh, Sébastien. L'équipe des moyennes fréquences, Benjamin, Claude, Hervé, Laurent, Mathilde. Guillaume et Minh, joyeux lurons qui ont travaillé, et avec quel acharnement ! dans le même bureau que moi. Ceux qui ont été capables de passer de longs moments devant un café sans parler de mécanique, Cendrine, Didou, Éric, Françoise, François, Frisou, Jayant, Sylvain, qui ont fait du laboratoire un véritable lieu de vie, tout comme les UTR « Dynamique de l'effort » et « Interactions fluide-structure en B-milieu ». Ceux qui vous accueillent le soir ou le week end avec un pensée réconfortante, y compris pour votre estomac, Frédérique, Loriane, Mélissa, Philippe. Mais aussi les amis qui ont gentiment accepté mon manque de disponibilité : Bénédicte, Bly, Damien, Leslie, Pat, Pierre et Pierre, Thomas, Vince ... Quelques personnes plus particulièrement : David pour sa disponibilité sans réserve, Django pour sa compagnie sans faille, Grégory, pour n'avoir jamais publié les compte-rendus de nos « verdoyants séminaires », Guillaume pour m'avoir fait découvrir le roulement sans glissement, et aussi l'inverse.

Pour terminer j'adresse mes pensées à ma famille, en particulier à mes parents et à mes frères David et Nicolas, qui m'ont beaucoup manqué. Enfin, à celle qui malgré les difficultés diverses, la proximité trop proche ou l'éloignement trop lointain, m'a donné la force de surmonter la fatigue et le stress, j'adresse mes plus tendres sentiments.



---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Notations</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I État de l'Art</b>	<b>7</b>
<b>1 Méthodes numériques dédiées au traitement des vibrations en moyennes fréquences</b>	<b>9</b>
1 Les méthodes issues des basses fréquences . . . . .	10
1.1 La méthode des éléments finis standard et les améliorations possibles . . . . .	10
1.2 Les méthodes de réduction . . . . .	11
1.3 Les méthodes de décomposition de domaine . . . . .	12
1.4 Les éléments finis de frontière . . . . .	13
1.5 Les méthodes de stabilisation . . . . .	14
1.6 Les méthodes de Trefftz . . . . .	14
1.7 La méthode des éléments finis généralisés . . . . .	15
1.8 La méthode d'enrichissement discontinu . . . . .	16
2 Les méthodes issues des hautes fréquences . . . . .	16
2.1 La <i>Statistical Energy Analysis (SEA)</i> . . . . .	16
2.2 La <i>Wave Intensity Analysis (WIA)</i> . . . . .	18
2.3 Les approches basées sur la diffusion de l'énergie . . . . .	18
2.4 La <i>Ray Tracing Method (RTM)</i> . . . . .	19
2.5 Bilan sur les approches hautes fréquences . . . . .	19
3 Présentation de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes . . . . .	20
3.1 Introduction . . . . .	20
3.2 Problème continu de référence . . . . .	21
3.3 Reformulation du problème . . . . .	22
3.4 Cas des plaques de Kirchhoff-Love . . . . .	23
3.5 Fonctions de base . . . . .	25
3.6 Problème discrétisé . . . . .	27
3.7 Vérification <i>a posteriori</i> des conditions limites . . . . .	29
3.8 Exemple d'application . . . . .	30

<b>2</b>	<b>Identification et recalage de modèles</b>	<b>33</b>
1	Méthodes d'identification et de recalage . . . . .	34
1.1	Les méthodes directes . . . . .	34
1.2	Les méthodes paramétriques . . . . .	34
2	Recalage des modèles de liaisons . . . . .	36
2.1	Différences avec l'identification de modèles globaux . . . . .	36
2.2	Méthodes directes . . . . .	37
2.3	Méthodes indirectes . . . . .	38
2.4	Identification de modèles non linéaires . . . . .	38
3	La méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement . .	39
3.1	L'erreur en relation de comportement . . . . .	39
3.2	Application au recalage de modèles . . . . .	40
4	Approche proposée pour le recalage des liaisons en moyennes fréquences	42
 <b>II Mise en œuvre d'une approche de recalage des liaisons adaptée aux moyennes fréquences</b>		<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Une version sous-structurée de la TVRC adaptée au problème inverse</b>	<b>47</b>
1	Une version « sous-structurée » de la théorie variationnelle des rayons complexes : cas des liaisons parfaitement rigides . . . . .	48
1.1	Compatibilité sous-structures/interface . . . . .	49
1.2	Problème d'interface : cas des liaisons parfaitement rigides . . . .	49
1.3	Problème final . . . . .	50
1.4	Écriture discrétisée du problème . . . . .	50
1.5	Structures comprenant plusieurs interfaces . . . . .	51
2	Validation de la nouvelle approche . . . . .	53
2.1	Quantités d'intérêt . . . . .	53
2.2	Application au problème des plaques en « L » . . . . .	53
3	Modélisation de liaisons complexes . . . . .	56
3.1	État de l'art . . . . .	56
3.2	Modèle continu des liaisons complexes . . . . .	57
3.3	Implémentation des modèles de liaisons complexes dans la TVRC	58
3.4	Application : influence des paramètres du modèle . . . . .	59
3.5	Exemple de liaison hétérogène . . . . .	69
4	Conclusion . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre d'une méthode de recalage des modèles de liaisons basée sur la TVRC</b>	<b>73</b>
1	Écriture du problème inverse . . . . .	74
1.1	Informations fiables et non fiables . . . . .	74
1.2	Erreur de modèle . . . . .	74
1.3	Erreur par rapport aux mesures . . . . .	75

1.4	Problème final . . . . .	76
1.5	Problème inverse . . . . .	77
1.6	Écriture discrétisée . . . . .	77
2	Identification de la liaison entre deux plaques sur des essais simulés numériquement . . . . .	79
2.1	Présentation du problème . . . . .	79
2.2	Identification de la raideur de liaison . . . . .	82
2.3	Identification de l'amortissement de liaison . . . . .	89
2.4	Bilan . . . . .	95
3	Identification des liaisons d'un longeron à partir d'essais simulés numériquement . . . . .	96
3.1	Présentation du problème . . . . .	96
3.2	Identification des raideurs . . . . .	97
3.3	Identification de l'amortissement . . . . .	99
4	Conclusion . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Extension de la méthode au recalage sur une bande de fréquence</b>	<b>105</b>
1	Introduction . . . . .	106
2	Développement d'une approche par bande de fréquence pour la <i>TVRC</i> sous-structurée . . . . .	106
2.1	Principe de la méthode . . . . .	106
2.2	Admissibilité sous-structures/interface sur une bande de fréquence	107
2.3	Problème d'interface sur une fenêtre fréquentielle . . . . .	108
2.4	Problème sous-structuré sur une bande de fréquence . . . . .	110
2.5	Exemple d'application . . . . .	111
3	Application au recalage des liaisons sur une fenêtre fréquentielle à partir de résultats d'essais simulés numériquement . . . . .	115
3.1	Erreur par rapport aux mesures sur la fenêtre fréquentielle . . . . .	115
3.2	Problème de recalage sur une bande de fréquence . . . . .	116
3.3	Exemple d'application : recalage de la raideur . . . . .	117
4	Conclusion . . . . .	119
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Annexe A : Convergence de la <i>TVRC</i></b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Annexe B : Énergie dissipée dans la liaison entre les plaques en L</b>	<b>125</b>
<b>C</b>	<b>Annexe C : Résultats complémentaires de l'identification de la liaison peu amortissante</b>	<b>129</b>
<b>D</b>	<b>Annexe D : Résultats complémentaires de l'identification de la liaison très amortissante</b>	<b>133</b>



<b>E Annexe E : Influence du coefficient d'amortissement dans un système masse-ressort-amortisseur</b>	<b>137</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>

---

# Table des figures

1	<i>Domaine des moyennes fréquences (dans [OS98]). . . . .</i>	3
1.1	<i>Problème de référence. . . . .</i>	20
1.2	<i>Formulation du problème pour deux plaques de Kirchhoff-Love. . . . .</i>	24
1.3	<i>Description d'un rayon intérieur. . . . .</i>	26
1.4	<i>Description d'un rayon de bord. . . . .</i>	27
1.5	<i>Description d'un rayon de coin. . . . .</i>	27
1.6	<i>Discrétisation de <math>C_{int}</math> en secteurs angulaires. . . . .</i>	28
1.7	<i>Plaque simple en vibrations forcées. . . . .</i>	30
1.8	<i>Déformée (en m.) calculée par la TVRC (à gauche) et SDT (à droite) d'une plaque en vibrations forcées à 150 Hz. La discrétisation TVRC utilisée comprend 48 rayons intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin. . . . .</i>	31
1.9	<i>Vérification des différentes conditions aux limites sur les bords de la plaque à 150 Hz : déplacement (en haut à gauche), rotation (en haut à droite), moment fléchissant (en bas à gauche), effort tranchant (en bas à droite). La discrétisation TVRC utilisée comprend 48 rayons intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin. . . . .</i>	32
3.1	<i>Nouvelle formulation « sous-structurée » du problème. . . . .</i>	48
3.2	<i>Formulation sous-structurée pour une structure comprenant plusieurs interfaces. . . . .</i>	52
3.3	<i>Problème des deux plaques en « L ». . . . .</i>	53
3.4	<i>FRF pour les plaques en L avec liaison rigide. Déplacement effectif de la plaque 1 (à gauche) et 2 (à droite). Les inconnues des sous-structures sont représentées par 48 modes intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin. Les quantités d'interface sont représentées par : DD TOT, 48 modes intérieurs, 4 x 13 rayons de bord, 0 rayons de coin ; DD INT, 48 modes intérieurs, 0 rayons de bord, 0 rayons de coin ; DD BORD, 0 modes intérieurs, 4 x 13 rayons de bord, 0 rayons de coin. Le calcul SDT comprend 15453 d.d.l. avec une réduction sur les 200 premiers modes propres. . . . .</i>	54
3.5	<i>Déformée à 117 Hz calculée avec SDT (à gauche) et la TVRC (à droite). Le calcul TVRC est effectué avec la discrétisation suivante : pour les inconnues des sous-structures, 48 modes intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin ; pour les inconnues d'interfaces, 48 modes intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin. . . . .</i>	55

3.6	<i>Influence de la raideur de liaison <math>k_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{r}_{1T}</math> à gauche) et la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{r}_{2T}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison peu amortissante (<math>\eta_r = 0.1</math>).</i>	61
3.7	<i>Influence de la raideur de liaison <math>k_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison (<math>\mathbf{r}_{LT}</math> à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{t}_{21}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison peu amortissante (<math>\eta_r = 0.1</math>).</i>	61
3.8	<i>Influence de la raideur de liaison <math>k_r</math> sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{d}_{1T}</math> à gauche), par la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{d}_{2T}</math> à droite) et par la liaison (<math>\mathbf{d}_{LT}</math> en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison peu amortissante (<math>\eta_r = 0.1</math>).</i>	62
3.9	<i>Influence de la raideur de liaison <math>k_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{r}_{1T}</math> à gauche) et la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{r}_{2T}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très amortissante (<math>\eta_r = 10</math>).</i>	63
3.10	<i>Influence de la raideur de liaison <math>k_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison (<math>\mathbf{r}_{LT}</math> à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{t}_{21}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très amortissante (<math>\eta_r = 10</math>).</i>	63
3.11	<i>Influence de la raideur de liaison <math>k_r</math> sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{d}_{1T}</math> à gauche), par la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{d}_{2T}</math> à droite) et par la liaison (<math>\mathbf{d}_{LT}</math> en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très amortissante (<math>\eta_r = 10</math>).</i>	64
3.12	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{r}_{1T}</math> à gauche) et la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{r}_{2T}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très raide (<math>k_r = 10^{3.5} \text{ N.m}</math>).</i>	65
3.13	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison (<math>\mathbf{r}_{LT}</math> à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{t}_{21}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très raide (<math>k_r = 10^{3.5} \text{ N.m}</math>).</i>	65
3.14	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{d}_{1T}</math> à gauche), par la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{d}_{2T}</math> à droite) et par la liaison (<math>\mathbf{d}_{LT}</math> en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très raide (<math>k_r = 10^{3.5} \text{ N.m}</math>).</i>	67
3.15	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{r}_{1T}</math> à gauche) et dans la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{r}_{2T}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison souple (<math>k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}</math>).</i>	68

3.16	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison (<math>\mathbf{r}_{LT}</math> à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{t}_{21}</math> à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison souple (<math>k_r = 10^{1.5} N.m</math>).</i>	68
3.17	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastrée (<math>\mathbf{d}_{1T}</math> à gauche), par la plaque 2 excitée (<math>\mathbf{d}_{2T}</math> à droite) et par la liaison (<math>\mathbf{d}_{LT}</math> en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison souple (<math>k_r = 10^{1.5} N.m</math>).</i>	69
3.18	<i>Modélisation d'une liaison hétérogène avec le bâti, la raideur évolue le long de la liaison.</i>	70
3.19	<i>Calcul de la liaison hétérogène à la fréquence 245 Hz avec la TVRC (à gauche) et NASTRAN (à droite). La discrétisation TVRC utilise, pour les inconnues des sous-structures, 128 modes intérieurs, 4 x 33 rayons de bord et 0 rayons de coin ; pour les inconnues d'interfaces, 128 modes intérieurs, 4 x 33 rayons de bord et 0 rayons de coin. Le calcul NASTRAN nécessite environ 80000 d.d.l.</i>	72
4.1	<i>Position des mesures de champ pour les données expérimentales simulées numériquement.</i>	79
4.2	<i>Déplacement effectif de la plaque 2 pour la liaison peu amortissante (<math>\eta_r = 0.1</math>) et très amortissante (<math>\eta_r = 10</math>), en fonction de la fréquence.</i>	80
4.3	<i>Robustesse de la fonctionnelle coût <math>E_{Mod}^2</math> au bruit de mesure (BM= 20 %) et à une erreur sur l'amortissement lors du recalage de la raideur de liaison <math>k_r</math> de la liaison peu amortissante, pour une confiance partagée (<math>p=0.8</math>) entre modèle et mesures.</i>	81
4.4	<i>Robustesse de la fonctionnelle coût <math>E_{Mod}^2</math> au bruit de mesure (BM= 20 %) et à une erreur sur la raideur lors du recalage de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> de la liaison très amortissante, pour une confiance partagée (<math>p=0.8</math>) entre modèle et mesures.</i>	81
4.5	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas), en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> lors du recalage de la liaison très amortissante - bruit de mesure 0 %, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>).</i>	83
4.6	<i>Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> en présence de différents niveaux de bruit pour <math>p = 0.01</math> (en haut), <math>p = 0.8</math> (au milieu), <math>p = 0.99</math> (en bas) lors du recalage de la liaison très amortissante.</i>	85
4.7	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> lors du recalage de la liaison très amortissante - bruit de mesure <math>\pm 20</math> %, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>).</i>	86

4.8	<i>Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> pour plusieurs niveaux d'erreur sur <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison peu amortissante - cas non bruité et confiance partagée entre modèle et mesures (<math>p = 0.8</math>).</i>	87
4.9	<i>Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> pour plusieurs niveaux d'erreur sur <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison très amortissante - cas non bruité et confiance partagée entre modèle et mesures (<math>p = 0.8</math>).</i>	87
4.10	<i>Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> pour plusieurs niveaux d'erreur sur <math>\eta_r</math> lors du recalage de la raideur de la liaison peu amortissante - bruit de mesure <math>\pm 20\%</math> et confiance partagée entre modèle et mesures <math>p = 0.8</math>.</i>	88
4.11	<i>Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> pour plusieurs niveaux d'erreur sur <math>\eta_r</math> lors du recalage de la raideur de la liaison très amortissante - bruit de mesure <math>\pm 20\%</math> et confiance partagée entre modèle et mesures <math>p = 0.8</math>.</i>	88
4.12	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison peu amortissante - bruit de mesure <math>0\%</math>, <math>k_r</math> exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>).</i>	90
4.13	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison peu amortissante - bruit de mesure <math>\pm 10\%</math>, <math>k_r</math> exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>).</i>	92
4.14	<i>Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison peu amortissante - bruit de mesure <math>\pm 20\%</math>, <math>k_r</math> exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>).</i>	93
4.15	<i>Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison très amortissante - bruit de mesure <math>\pm 20\%</math>, <math>k_r</math> exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>).</i>	93
4.16	<i>Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> pour différents niveaux d'erreur sur la raideur lors du recalage de la liaison très amortissante pour un bruit nul et une confiance partagée entre mesures et modèle (<math>p = 0.8</math>).</i>	94
4.17	<i>Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> pour différents niveaux d'erreur sur la raideur lors du recalage de la liaison peu amortissante pour un bruit nul et une confiance partagée entre mesures et modèle (<math>p = 0.8</math>).</i>	94
4.18	<i>Longeron constitué de quatre plaques, avec deux interfaces à identifier, étudié sur un pic de résonance à <math>61.5</math> Hz.</i>	96

4.19	<i>Fonctionnelle coût (en haut), erreur de modèle (en bas à gauche) et erreur de mesure (en bas à droite) en fonction des raideurs de liaison lors du recalage des interfaces du longeron, pour <math>p = 0.8</math> et sans bruit de mesure.</i>	98
4.20	<i>Fonctionnelle coût (en haut), erreur de modèle (en bas à gauche) et erreur de mesure (en bas à droite) en fonction des raideurs de liaison, lors du recalage des interfaces du longeron, pour <math>p = 0.8</math> et bruit de mesure de <math>\pm 10\%</math>.</i>	100
4.21	<i>Résidu sur la relation de comportement de l'interface 1 (en haut) et de l'interface 2 (en bas) en fonction des raideurs de liaison, pour <math>p = 0.8</math> et bruit de mesure de <math>10\%</math>.</i>	101
4.22	<i>Fonctionnelle coût (en haut), erreur de modèle (en bas à gauche) et erreur de mesure (en bas à droite) en fonction des amortissements de liaison, lors du recalage des interfaces du longeron - <math>p = 0.8</math>, mesures non bruitées, et raideurs exactes.</i>	102
5.1	<i>Bande de fréquence étudiée autour de 117 Hz sur la FRF du déplacement effectif de la plaque 1.</i>	111
5.2	<i>Influence de l'ordre du développement de Taylor : FRF obtenue autour de 117 Hz pour la plaque 1 (en haut) et la plaque 2 (en bas) pour plusieurs ordres du développement de Taylor, pour la liaison peu amortissante (<math>k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}</math> et <math>\eta_r = 0.1</math>). La largeur de bande utilisée pour définir l'erreur est <math>\pm 0.5 \text{ Hz}</math>.</i>	113
5.3	<i>Influence de la largeur de bande utilisée : FRF obtenue autour de 117 Hz pour la plaque 1 (en haut) et la plaque 2 (en bas) pour plusieurs largeurs de bande (LB) utilisées pour définir l'erreur, pour la liaison peu amortissante (<math>k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}</math> et <math>\eta_r = 0.1</math>). Le développement de Taylor est utilisé à l'ordre 4.</i>	114
5.4	<i>Erreur modifiée (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur de mesure (en bas), en fonction de la raideur de liaison, sans bruit de mesure (<math>BM = 0\%</math>) avec amortissement de liaison supposé exact (+, <math>\eta_r</math> exact) ou négligé (<math>\cdot</math>, <math>\eta_r = 0</math>), pour plusieurs largeurs de bande, et un développement de Taylor à l'ordre 4.</i>	118
5.5	<i>Erreur modifiée (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur de mesure (en bas), en fonction de la raideur de liaison, avec bruit de mesure (<math>BM = \pm 20\%</math>) et amortissement de liaison supposé exact (+, <math>\eta_r</math> exact) ou négligé (<math>\cdot</math>, <math>\eta_r = 0</math>), pour plusieurs largeurs de bande, et un développement de Taylor à l'ordre 4.</i>	120
A.1	<i>Conditionnement en fonction du nombre de rayons intérieurs (en abscisse) et du nombre de rayons de bord (en ordonnée) pour une plaque simple, pour 0 rayons de coin.</i>	123

A.2	<i>Erreurs sur les différentes conditions limites d'une plaque simple, en fonction du nombre de rayons intérieurs (abscisse) et de rayons de bord (ordonnées), pour 0 rayons de coin.</i> . . . . .	124
B.1	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur l'énergie dissipée par la liaison entre les plaques en L, pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR), en proportion de l'énergie dissipée totale, pour une liaison moyennement rigide (<math>k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}</math>).</i> . . . . .	125
B.2	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur les énergies dissipées par les sous-structures des plaques en L, pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR), en proportion de l'énergie dissipée totale, pour une liaison moyennement rigide (<math>k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}</math>) : plaque 1 encastrée (en haut) et plaque 2 excitée (en bas).</i> . . . . .	126
B.3	<i>Influence de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> sur les énergies dissipées par les sous-structures des plaques en L, pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR), en proportion de l'énergie dissipée totale, pour une liaison très rigide (<math>k_r = 10^{3.5} \text{ N.m}</math>) : plaque 1 encastrée (en haut) et plaque 2 excitée (en bas).</i> . . . . .	127
C.1	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas), en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> lors du recalage de la liaison peu amortissante (<math>\eta_r = 0.1</math>), pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>) - bruit de mesure 0 %.</i> . . . . .	130
C.2	<i>Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> en présence de bruit pour <math>p = 0.01</math> (en haut), <math>p = 0.8</math> (au milieu), <math>p = 0.99</math> (en bas) lors du recalage de la liaison peu amortissante (<math>\eta_r = 0.1</math>).</i> . . . . .	131
C.3	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de la raideur de liaison <math>k_r</math> lors du recalage de la liaison peu amortissante (<math>\eta_r = 0.1</math>), pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>) - bruit de mesure <math>\pm 20</math> %.</i> . . . . .	132
D.1	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison très amortissante, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>) - bruit de mesure 0%, <math>k_r</math> exact.</i> . . . . .	134
D.2	<i>Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison <math>\eta_r</math> lors du recalage de la liaison très amortissante, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de <math>p = 0.01</math> à <math>p = 0.99</math>) - bruit de mesure <math>\pm 20</math>%, <math>k_r</math> exact.</i> . . . . .	135
E.1	<i>Étude d'un système masse-ressort simple.</i> . . . . .	138
E.2	<i>Étude d'un système de deux masses-ressorts couplés.</i> . . . . .	139

- E.3 *Grandeurs  $B_1$  et  $B_2$  en fonction de la fréquence adimensionnée  $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$  : on constate que pour plusieurs fréquences, les grandeurs sont au-dessus de  $10^0$ , ce qui signifie que l'amplitude du déplacement avec amortissement infini est plus grande que l'amplitude avec amortissement nul. Les traits pointillés verticaux indiquent les fréquences pour lesquelles les courbes ci-après sont tracées. . . . 140*
- E.4 *Amplitude des déplacements en fonction de l'amortissement  $\eta$ , pour (a)  $\alpha = 0.3$ , (b)  $\alpha = 0.8$ , (c)  $\alpha = 1.2$ , (d)  $\alpha = 3$  : seul le cas (a) voit la diminution des deux amplitudes. Les cas (c) et (d) montrent un "transfert" d'énergie entre les deux masses. Dans le cas (b), les deux déplacements augmentent avec l'amortissement. 141*





---

# Liste des tableaux

1.1	<i>Principe de la TVRC.</i>	22
1.2	<i>Erreurs relatives sur les conditions aux limites pour la plaque en vibrations forcées. La discrétisation TVRC utilisée comprend 48 rayons intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin.</i>	31
2.1	<i>Principe de l'erreur en relation de comportement.</i>	40
2.2	<i>Principe de la méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement.</i>	41
2.3	<i>Démarche proposée pour le recalage des liaisons.</i>	43
4.1	<i>Confiance accordée aux données des modèles mathématique et expérimental pour le recalage des modèles de liaison.</i>	75
4.2	<i>Caractéristiques des deux liaisons étudiées à 155 Hz.</i>	80
4.3	<i>Caractéristiques du modèle expérimental qui sera simulé numériquement.</i>	97



---

# Notations

## *Notations utilisées dans le document*

$w_i$	déplacement hors plan de la sous-structure $\Omega_i$
$\hat{w}_i$	quantité cinématique d'interface associée à la sous-structure $\Omega_i$
$M_i$	moment fléchissant de la sous-structure $\Omega_i$
$\hat{M}_i$	quantité statique d'interface associée à la sous-structure $\Omega_i$
$\zeta_i$	amortissement intérieur de la sous-structure $\Omega_i$
$k_r$	raideur de la liaison (comportement en rotation)
$\eta_r$	amortissement en raideur de la liaison (comportement en rotation)
$E_{int}^2$	résidu des équations d'interface dans la version sous-structurée de la TVRC
$E_{mdl}^2$	résidu des équations d'interface dans le problème de recalage
$E_{mes}^2$	distance entre la solution numérique et les données expérimentales
$E_{mod}^2$	résidu modifié servant de fonctionnelle coût dans le problème de recalage
$\alpha$	confiance accordée à l'équation d'équilibre de la liaison par rapport à la relation de comportement dans le résidu d'interface
$p$	confiance accordée à l'erreur de mesure par rapport à l'erreur de modèle dans le résidu modifié
$\beta_p$	dans le cas de plusieurs interfaces, pondération du résidu de l'interface $p$
$k_t$	raideur de la liaison (comportement en translation)
$\eta_t$	amortissement en raideur de la liaison (comportement en translation)
$J$	inertie de la liaison (comportement en rotation)
$\eta_j$	amortissement en inertie de la liaison (comportement en rotation)
$m$	masse de la liaison (comportement en translation)
$\eta_m$	amortissement en masse de la liaison (comportement en translation)
BF	désignation des quantités dans le cadre de l'approche sur une Bande de Fréquence

## *Notations utilisées sur les figures*

AR	antirésonance
BM	bruit de mesure
$k_r$	raideur en rotation de la liaison
$\eta_r$	amortissement en rotation de la liaison
$p$	confiance accordée au terme de mesure dans l'erreur modifiée, (1 - $p$ ) est la confiance accordée au modèle
LB	largeur de bande
DL	développement limité



---

# Introduction

L'essor fulgurant des moyens informatiques a ouvert un nouveau terrain de jeu pour les scientifiques : celui de la simulation numérique. Ce domaine est d'autant plus porteur d'espoir que les industries, entraînées par un besoin de compétitivité toujours plus aigu, sont amenées à employer des moyens alternatifs aux campagnes d'essais longues et coûteuses. Ceci est de plus en plus présent à toutes les étapes du processus de conception. Il ne faut donc pas oublier l'objectif premier de la simulation numérique : fournir de manière **prédictive** des résultats fiables, c'est à dire **fidèles au comportement de la structure réelle**. L'évaluation de la qualité de la simulation, ainsi que l'amélioration des modèles mathématiques employés, sont donc une phase essentielle dans la démarche de conception.

Dans ce contexte, la question des vibrations des structures dans le domaine des « moyennes fréquences » offre un défi ambitieux à plusieurs titres. Cet aspect du dimensionnement concerne plusieurs secteurs industriels. Citons par exemple les problèmes de vibro-acoustique dans le domaine automobile, le contrôle des vibrations dans les structures aéronautiques et spatiales, la question de la « discrétion » des sous-marins dans le domaine naval. Situées entre les « basses fréquences » et les « hautes fréquences », les moyennes fréquences restent un domaine du spectre mal maîtrisé, tant sur le plan expérimental que sur celui de la simulation numérique. En basses fréquences, le comportement très modal de la structure est bien caractérisé par une mesure ponctuelle - on utilise classiquement des accéléromètres - tandis que sur le plan numérique, la méthode des éléments finis [ZT00], la plupart du temps couplée à une approche par synthèse modale, est une technique bien maîtrisée. En hautes fréquences, le comportement lissé de la structure suggère l'utilisation de quantités moyennées en espace et en fréquence. Les méthodes reposant sur l'énergie vibratoire, à l'image de la *Statistical Energy Analysis* [LD95], apportent une réponse satisfaisante après identification des coefficients de couplage ; parallèlement sur le plan expérimental, les méthodes telles que la *Power Injection Method* utilisent également des quantités d'intérêt statistiques. Entre ces deux domaines, la fenêtre des moyennes fréquences présente des caractéristiques qui ne sont adaptées

ni aux premières approches, fondées sur des quantités trop locales, ni aux dernières, qui au contraire adoptent une vision trop globale pour pouvoir représenter la physique des phénomènes mis en jeu. Plusieurs difficultés se posent dans ce domaine des moyennes fréquences.

La première de ces difficultés concerne la *modélisation de la structure réelle*, qui sous-entend des hypothèses simplificatrices parfois discutables. Dans tout problème de vibration, la question de la **modélisation de l'amortissement est centrale** puisque de ce phénomène dépend directement le niveau vibratoire de la structure, et ceci quel que soit le spectre de fréquence considéré. La complexité des phénomènes physiques impliqués tant au niveau matériau qu'au niveau structure, nous dissuade d'adopter un modèle d'amortissement fin. La plupart du temps, le calcul numérique simplifie à l'extrême cette question en faisant l'hypothèse d'un amortissement proportionnel. Le même constat peut être fait en ce qui concerne la **modélisation des liaisons**, au niveau desquelles des phénomènes physiques mal cernés interviennent. Les modèles pris en compte dans les calculs restent simples et les paramètres aussi variés que la fréquence des vibrations, le niveau de sollicitation, le nombre de cycles effectués ne sont en général pas pris en compte dans le calcul de structure alors que leur rôle est particulièrement important [LL04]. Les deux questions sont d'ailleurs étroitement liées : la dissipation à l'intérieur des sous-structures est souvent très faible ( $< 1\%$ ) et les liaisons sont le principal lieu de perte d'énergie, notamment dans les structures « élancées ». Une meilleure modélisation des liaisons devrait dans ce cas permettre d'affiner la manière dont la structure dissipe l'énergie.

Il s'agit donc de pouvoir **quantifier et améliorer la qualité du modèle mathématique**, c'est à dire de pouvoir mesurer si le modèle utilisé est suffisamment fidèle à la réalité, et éventuellement d'en modifier les paramètres, ou même d'en changer pour un modèle plus complexe et plus général. Cette problématique est celle de l'*identification* et du *recalage* de modèles à partir de résultats d'essais en vue de proposer une description adaptée au comportement de la structure réelle. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'amélioration des modèles de liaisons, dont l'importance en moyennes fréquences a été soulignée plus haut.

Ceci nous amène vers une deuxième difficulté qui est celle des *données expérimentales*. En effet, la réalité n'est pas directement accessible, elle est « estimée » par des mesures qui sont forcément imparfaites : limitées par une incertitude, entachées de bruit, le plus souvent incomplètes. Pour être utiles, les données expérimentales doivent fournir une image représentative de la structure réelle. Or ce n'est pas chose aisée dans la fenêtre des moyennes fréquences dans laquelle la représentation de la structure pose plusieurs difficultés. Ce domaine moyennes fréquences se caractérise par une forte densité modale (cf. Figure 1), avec une dynamique bien marquée, et des modes très couplés. L'utilisation de moyens intrusifs tels que des accéléromètres est susceptible de modifier localement la raideur ou la masse, et de remplacer un pic de résonance par un autre ou par une antirésonance. Il faut également noter une **hypersensibilité** de la réponse aux paramètres du modèle, particulièrement aux conditions aux limites. La modification même faible d'une longueur ou d'une condition limite peut induire un changement important du niveau vibratoire de la structure, voir par exemple [RG97, Hop03a]. Enfin, le domaine des

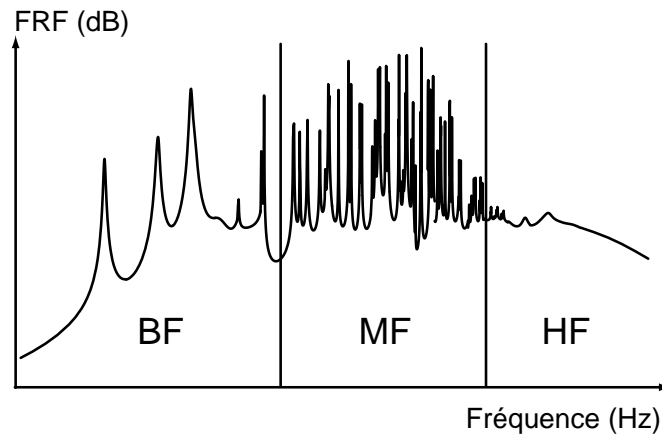


FIG. 1: *Domaine des moyennes fréquences (dans [OS98]).*

moyennes fréquences se caractérise par un grand nombre de longueurs d'onde sur chaque sous-structure. Les phénomènes à courtes longueurs d'onde posent le problème de la mesure d'une grandeur locale : en effet, la modification d'une dimension de la structure fait passer d'un ventre de vibration à un nœud de vibration ou inversement, si bien que **c'est le principe même d'une donnée expérimentale locale en espace mais également en fréquence qui est remis en question.**

Ainsi une des difficultés est de disposer d'un « *modèle expérimental moyennes fréquences* », qui se caractériserait par des mesures non intrusives et non locales, afin de donner une image la plus robuste possible de la réalité. Dans ce contexte, une idée intéressante est l'utilisation de mesures de champ, qui permet de fournir des données expérimentales de grande taille en autorisant la représentation de modes très locaux qui apparaissent en moyennes fréquences.

Pour finir, une question essentielle du contexte moyennes fréquences demeure *la méthode de résolution numérique*. Les approches classiques reposent sur la méthode des éléments finis, dont le succès réside dans le fait de pouvoir discrétiser finement la structure pour prendre en compte de manière systématique les détails géométriques et matériels. Or pour garder une précision acceptable, il faut raffiner le maillage quand la fréquence augmente. On adopte généralement la règle « ingénieur » de dix éléments par longueur d'onde ce qui conduit rapidement à des problèmes de taille déraisonnable. En moyennes fréquences, c'est même le facteur «  $k^3 h^2$  » [IB95a, DBB99],  $h$  désignant la taille de maille et  $k$  le nombre d'onde, qui doit rester constant si l'on veut éviter les erreurs de déphasage sur les grandeurs locales. Pour réduire la taille du problème, une méthode répandue est l'utilisation d'une base réduite, mais en moyennes fréquences, il faut pouvoir calculer plusieurs centaines de modes pour un problème de taille industrielle, ce qui rend l'approche modale aussi coûteuse que la méthode directe. Il faut ajouter à cela le même problème d'**hypersensibilité** aux paramètres que sur la structure réelle, ce qui pose à nou-



veau la question des **grandeurs locales** utilisées par la méthode des éléments finis. Les approches privilégiées en hautes fréquences adoptent une vision statistique du problème, en moyennant en espace et en fréquence des grandeurs énergétiques, ce qui évince le coté modal du comportement de la structure. Ce domaine de la simulation des vibrations en moyennes fréquences est aujourd'hui l'objet d'un large champ d'investigation dans la communauté scientifique. Les méthodes inspirées de l'approche éléments finis tentent de s'affranchir des difficultés posées par la nécessité de discrétiser spatialement la structure [FWGT04, SBH06], tandis que plusieurs approches issues de la *SEA* proposent de relâcher une partie des hypothèses valables uniquement en hautes fréquences [Nef87, Lan92, PT95, IJ96, LB98b]. L'enjeu est de proposer un « *modèle numérique moyennes fréquences* » de taille raisonnable, et utilisant des grandeurs peu sensibles aux variations des paramètres.

Comme on le voit, les défis en vibrations moyennes fréquences sont nombreux, et ce travail ne s'intéresse qu'à une des facettes du problème : proposer une démarche pour **améliorer la modélisation des liaisons dans les simulations de structures vibrant en moyennes fréquences**. Cette contribution se concentre autour de deux aspects : mettre en place des modèles de liaisons incluant un comportement dissipatif notamment, et élaborer une approche pour identifier les paramètres de ces modèles de liaisons à partir de résultats d'essais. Dans cette perspective, la faisabilité de l'approche est étudiée sur quelques exemples simples.

Cette étude s'appuie sur des outils déjà développés au laboratoire, qui ont été revus pour pouvoir être appliqués au problème posé. Sur le plan de la méthode de calcul numérique, nous utilisons sur la *Théorie Variationnelle des Rayons Complexes*, présentée pour la première fois dans [Lad96]. Cette approche alternative aux méthodes éléments finis est basée sur une décomposition de la structure en sous-domaines. Sur chaque sous-structure, la solution est recherchée dans une base de fonctions, les *rayons complexes*, dont le sens physique est adapté à un problème de vibration. Adoptant une vision multi-échelle, les grandeurs sont décomposées en une partie rapide, qui est connue explicitement, et une partie lente qui devient l'inconnue ; on aboutit ainsi à un problème de taille raisonnable et indépendante de la fréquence. Afin de résoudre le problème inverse, nous couplons cette approche avec la méthode d'identification initialement basée sur l'*Erreur en Relation de Comportement*, présentée dans [Lad83b]. Notons que cette dénomination ne convient pas exactement à la démarche qui sera présentée dans ce travail, dans laquelle il n'y a pas de véritable erreur en relation de comportement. Toutefois, c'est l'esprit de la méthode appliquée au recalage qui est utilisé : dans cette approche, l'ensemble des données du modèle numérique et du modèle expérimental est classé en deux catégories. Les informations fiables telles que la fréquence excitée, la position des capteurs, les équations des sous-structures et certaines conditions aux limites bien modélisées sont vérifiées de façon exacte. Les informations moins fiables permettent de construire une fonctionnelle coût comportant deux termes : les équations des liaisons mal modélisées sont regroupées dans l'erreur de modèle, tandis que l'erreur de mesure quantifie la distance calcul-essai.

La fonctionnelle coût ainsi obtenue prend le nom de *résidu [des équations de liaison] modifié*. Le problème revient à trouver une solution admissible - vérifiant les informations fiables - qui minimise la fonctionnelle coût. Une approche itérative permet ensuite de trouver les paramètres optimaux du modèle, c'est-à-dire rendant la fonctionnelle coût minimale. Les paramètres trouvés sont alors les meilleurs paramètres existants pour ce modèle numérique et pour ces données expérimentales.

Afin de pouvoir utiliser conjointement la théorie variationnelle des rayons complexes et la méthode de recalage, il s'est avéré nécessaire de modifier la formulation de chacune de ces approches. Ce travail introduit une **version « sous-structurée » de la TVRC**, dont l'objectif premier est de permettre l'utilisation de cette approche dans le problème inverse. L'idée est de considérer l'interface comme une sous-structure à part entière, possédant ses propres inconnues et ses propres équations, qui sont vérifiées au travers de la minimisation d'une « erreur d'interface ». Contrairement à la méthode basée sur l'erreur en relation de comportement, cette erreur de modèle est un résidu au sens des moindres carrés des équations de liaison. La minimisation de cette erreur de modèle se prête bien à la résolution du problème inverse : en proposant d'isoler l'interface en tant que sous-structure, elle permet d'une part d'écrire le problème de référence sous forme de minimisation d'une erreur - à laquelle sera ensuite ajoutée le terme de mesure - et d'autre part de construire une fois pour toutes un espace d'admissibilité qui servira tel quel tout au long du processus de correction, procurant un gain de temps intéressant.

Un grande partie de ce travail a consisté à vérifier que l'approche proposée est valide et qu'elle offre les mêmes avantages que les méthodes initiales sur lesquelles elle s'appuie. Ainsi une partie de ce mémoire sera consacrée à présenter les approches qui ont initié ce travail (cf. Première Partie). Nous présentons ensuite la démarche mise en place, et nous validons leurs résultats sur des structures élémentaires (cf. Deuxième Partie).

L'ensemble des développements a été réalisé sous *MATLAB* [Mat99], dans le logiciel *CORAY-MF*, développé au LMT Cachan. Les possibilités offertes par la Toolbox *Optimization* de *MATLAB* ont été choisies pour résoudre les problèmes d'optimisation associés au problème inverse. Enfin, le code éléments finis *MSC NASTRAN* ainsi que la toolbox *SDT (Structural Dynamic Toolbox)* de *MATLAB* développée par Balmès [Bal01] ont servi de solution de référence numérique pour valider les calculs effectués avec *CORAY-MF*.

Ce document est organisé comme suit :

- La première partie rassemble un état de l'art sur les méthodes numériques moyennes fréquences et les méthodes de recalage de modèle. On y précise également les idées de la démarche qui sera proposée dans ce travail :
  - Dans le premier chapitre sont rappelées les approches numériques dédiées au traitement des vibrations moyennes fréquences ; la théorie variationnelle des rayons complexes est ensuite détaillée dans sa version originelle.

- Le second chapitre passe en revue les méthodes existantes pour l'identification et le recalage des structures et des liaisons. La méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement pour le recalage de modèles éléments finis est rappelée. Ensuite est présentée la démarche développée dans ce travail.
- La seconde partie est consacrée à la mise en œuvre de la méthode proposée dans cette étude :
  - Le troisième chapitre introduit une version « sous-structurée » de la théorie variationnelle des rayons complexes qui, écrite sous forme de la minimisation d'une erreur de modèle, permet de s'adapter au problème inverse : en proposant d'isoler l'interface en tant que sous-structure, elle permet d'une part d'écrire le problème de référence sous forme de minimisation, et d'autre part de construire une fois pour toutes un espace d'admissibilité qui servira tel quel tout au long du processus de correction. Cette approche est validée à la fois par rapport à la version traditionnelle de la *TVRC* et par rapport à un calcul éléments finis. Afin de permettre une modélisation réaliste des structures réelles, des modèles de liaisons complexes sont ensuite introduits dans la méthode, précédés par un rapide état de l'art sur la modélisation des jonctions.
  - Le problème de recalage des modèles de liaison est mis en place dans le quatrième chapitre. Le problème inverse est résolu par la minimisation d'une fonctionnelle coût résultant de la somme de l'erreur de modèle construite précédemment et d'une erreur par rapport aux mesures. Des essais simulés numériquement permettent d'étudier l'influence des paramètres et la robustesse de l'approche présentée. Les données expérimentales envisagées sont de type mesures de champ.
  - La méthode mise en œuvre permet d'identifier des modèles de liaison en utilisant des données expérimentales à une seule fréquence, ce qui peut poser des difficultés de sensibilité ou d'observabilité par rapport aux paramètres recherchés. Il est possible d'envisager une extension de la méthode proposée pour procéder au recalage de modèles de liaison sur une fenêtre de fréquence donnée. L'idée est d'utiliser l'approche introduite dans la *TVRC* classique dans [LR05], qui s'appuie sur un développement asymptotique par rapport à la fréquence. L'extension de cette démarche au recalage grâce à la version « sous-structurée » de la *TVRC* propose de construire, à faible coût, une fonctionnelle objectif prenant en compte les données expérimentales sur une fenêtre de fréquence donnée. Le cinquième chapitre étudie la faisabilité de cette méthode.

**Première partie**

**État de l'Art**



---

# Méthodes numériques dédiées au traitement des vibrations en moyennes fréquences

Ce premier chapitre dresse un état de l'art des approches proposées pour traiter les problèmes de vibrations en moyennes fréquences. On peut schématiquement différencier ces méthodes selon qu'elles s'appuient sur des quantités d'intérêt propres aux éléments finis, ou sur des grandeurs propres aux méthodes hautes fréquences. Pour terminer, nous présentons la théorie variationnelle des rayons complexes qui sera l'approche numérique adoptée dans la suite de ce travail.

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Les méthodes issues des basses fréquences . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1	La méthode des éléments finis standard et les améliorations possibles	10
1.2	Les méthodes de réduction . . . . .	11
1.3	Les méthodes de décomposition de domaine . . . . .	12
1.4	Les éléments finis de frontière . . . . .	13
1.5	Les méthodes de stabilisation . . . . .	14
1.6	Les méthodes de Trefftz . . . . .	14
1.7	La méthode des éléments finis généralisés . . . . .	15
1.8	La méthode d'enrichissement discontinu . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Les méthodes issues des hautes fréquences . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	La <i>Statistical Energy Analysis (SEA)</i> . . . . .	16
2.2	La <i>Wave Intensity Analysis (WIA)</i> . . . . .	18
2.3	Les approches basées sur la diffusion de l'énergie . . . . .	18
2.4	La <i>Ray Tracing Method (RTM)</i> . . . . .	19
2.5	Bilan sur les approches hautes fréquences . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Présentation de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes . . . . .</b>	<b>20</b>
3.1	Introduction . . . . .	20
3.2	Problème continu de référence . . . . .	21
3.3	Reformulation du problème . . . . .	22
3.4	Cas des plaques de Kirchhoff-Love . . . . .	23
3.5	Fonctions de base . . . . .	25
3.6	Problème discrétisé . . . . .	27
3.7	Vérification <i>a posteriori</i> des conditions limites . . . . .	29
3.8	Exemple d'application . . . . .	30

---

# 1 Les méthodes issues des basses fréquences

## 1.1 La méthode des éléments finis standard et les améliorations possibles

La méthode des éléments finis est l'approche numérique la plus répandue pour la résolution de problèmes aux dérivées partielles. Elle s'appuie tout d'abord sur l'écriture sous forme faible des équations intérieures - l'équilibre dynamique local pour un problème de mécanique. Le domaine est ensuite discrétisé en plusieurs éléments dont les sommets sont les nœuds  $\underline{X}_i$ . À chacun de ces nœuds sont associées une ou plusieurs fonctions de forme  $N_i(\underline{x})$ . Classiquement, la fonction  $N_i(\underline{x})$  est supposée polynomiale par morceaux, continue, égale à 1 sur le nœud  $\underline{X}_i$  et à 0 sur les autres nœuds  $\underline{X}_j, j \neq i$ . En projetant la formulation variationnelle sur cet espace de fonctions, on aboutit à un problème de la forme :

$$\mathbb{M}\ddot{\underline{u}}(t) + \mathbb{C}\dot{\underline{u}}(t) + \mathbb{K}\underline{u}(t) = \underline{F}(t) \quad (1.1)$$

dans lequel les matrices de masse  $\mathbb{M}$  et de raideur  $\mathbb{K}$  sont symétriques et creuses à faible largeur de bande. La matrice d'amortissement  $\mathbb{C}$  résulte de la modélisation des forces d'amortissement qui repose la plupart du temps sur des hypothèses simples ; citons par exemple l'hypothèse d'amortissement proportionnel de Rayleigh :

$$\mathbb{C} = \alpha\mathbb{K} + \beta\mathbb{M} \quad (1.2)$$

qui confère à  $\mathbb{C}$  les mêmes propriétés intéressantes qu'à  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$ . Des conditions plus générales pour obtenir un amortissement proportionnel sont données dans [Adh06].

En notant  $h$  la taille caractéristique des éléments et  $p$  le degré du polynôme des fonctions de forme, il est possible d'évaluer l'erreur commise par l'approximation éléments finis. Les études montrent que pour un problème de vibrations forcées régi par l'équation de Helmholtz, l'erreur commise en norme  $\mathcal{H}_1$  pour un problème 2D avec  $p = 1$  peut être majorée par [IB95b] :

$$\varepsilon \leq C_1(kh) + C_2k(kh)^2 \quad (1.3)$$

où  $k$  est le nombre d'onde qui dépend directement de la fréquence de la sollicitation. Les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont indépendants de  $k$  et  $h$ .

Le premier terme relate l'erreur due à la représentation de la grandeur recherchée par une approximation polynomiale, tandis que le second terme traduit l'effet de *pollution* : la discrétisation génère une erreur dans l'estimation du nombre d'onde  $k$ , d'où un déphasage entre la solution approchée  $\underline{u}^h$  et la solution exacte  $\underline{u}$ . La relation entre l'erreur sur  $\underline{u}$  et l'erreur d'estimation de  $k$  est établie dans [BIPS95].

La majoration ci-dessus met en lumière la nécessité bien connue d'adapter l'approximation suivant la fréquence, c'est-à-dire selon  $k$ . Deux choix sont alors possibles :

- **raffiner le maillage en diminuant  $h$** , ce qui est le fondement des  $h$ -méthodes, et donne lieu à la règle « ingénieur » préconisant d'adopter 6 à 10 éléments par longueur d'onde pour conserver une erreur égale. Pour  $k^2h$  petit, c'est-à-dire en basses

fréquences, une discrétisation où le facteur  $kh$  est constant est suffisante [BGT85, AKS88, DJSS93] : la taille du problème augmente ainsi avec la fréquence selon la tendance  $k^n$ , où  $n$  est la dimension de l'espace. En moyennes fréquences, c'est le deuxième terme de l'erreur qui devient prépondérant, exigeant une discrétisation encore plus fine du maillage afin de conserver le même niveau d'erreur :  $k^3 h^2$  doit rester constant pour contrôler le terme de pollution [IB95b]. La taille du problème devient rapidement un problème difficile, même avec les moyens informatiques actuels.

- **augmenter le degré  $p$  des polynômes** est l'idée des  $p$ -méthodes. Le coût du problème augmente également avec la fréquence, de plus, la largeur de bande des matrices augmente aussi. En pratique, la méthode est confrontée à des difficultés numériques.

Un compromis entre ces deux idées est également possible, donnant naissance aux  $hp$ -méthodes. L'erreur commise en semi-norme  $\mathcal{H}_1$  pour un problème 2D s'écrit alors [IB97] :

$$\varepsilon \leq C_1 \left( \frac{h k}{2p} \right)^{2p} + C_2 k \left( \frac{h k}{2p} \right)^{2p} \quad (1.4)$$

Ce résultat montre la nécessité, quel que soit le choix de  $p$ , d'augmenter la discrétisation avec la fréquence. Ceci tient au choix des fonctions  $N_i$  : les fonctions polynomiales, bien qu'optimales pour représenter des déformées « lentes » en statique, **ne sont pas adaptées pour représenter des fonctions oscillantes**.

Notons que le résultat ci-dessus a été étendu au cas 3D dans [GI99]. Dans [BI99], deux estimateurs *a posteriori* sont développés en 3D pour permettre de quantifier l'erreur commise. Dans [DBB99], un estimateur *a priori* basé sur l'erreur de l'estimation de  $k$  est utilisé.

## 1.2 Les méthodes de réduction

Pour réduire le coût du calcul, une approche efficace en basses fréquences repose sur l'utilisation des modes propres de la structure globale. Malheureusement, l'augmentation du nombre de degrés de liberté et le grand nombre de modes propres nécessaires en moyennes fréquences - quelques centaines ou milliers - rendent cette approche trop coûteuse : le temps de calcul des modes ainsi que leur stockage constituent un obstacle sérieux. Dans [Mor92] et [Mer93], il est proposé de ne conserver que les modes qui maximisent un opérateur d'excitabilité, ce qui réduit la taille du calcul. Toutefois la méthode n'évite pas le calcul et le stockage des modes avant l'évaluation de leur excitabilité. Dans [PS05], les équations modales sont réécrites dans un contexte statistique à l'aide de moyennes en fréquences afin de tenir compte du contexte hautes fréquences.

L'utilisation d'une meilleure base de réduction est réalisée dans [Soi98]. La base de réduction est constituée des premiers modes propres d'un opérateur d'énergie ; la conver-



gence s'avère bien meilleure. La méthode a été couplée à la théorie des structures floues dans [OS98].

### 1.3 Les méthodes de décomposition de domaine

Une approche très répandue consiste à découper le problème en plusieurs sous-problèmes de taille raisonnable. De cette manière, les *Component Modal Synthesis* entendent utiliser les modes propres de chaque sous-structure calculés séparément comme base de fonctions pour représenter la déformée de la structure globale avec un faible nombre d'inconnues. On profite alors de l'avantageuse réduction du coût de calcul de la synthèse modale, en contournant l'obstacle du calcul des modes propres de la structure globale, qui possède un trop grand nombre de degrés de liberté. Cette méthode peut de plus être facilement parallélisée. Plusieurs variantes ont été développées [Hin75, Cra85, CMP89], elles utilisent :

- les modes des sous-structures calculés avec des interfaces fixes [Hur65, CJB68, CJH88],
- les modes des sous-structures calculés avec des interfaces libres [McN71, Rub75]. Dans [SK97] ces modes servent à évaluer les transferts énergétiques dans le contexte hautes fréquences.
- une approche mélangeant les deux précédentes [CJC77].

D'autres approches n'utilisent pas la décomposition de domaine à des fins de synthèse modale, mais en vue de résoudre des problèmes locaux sur chaque sous-structure, en faisant dialoguer entre elles les différentes entités. On peut choisir de différencier ces méthodes en fonction des inconnues utilisées pour raccorder les sous-structures entre elles : les approches primales vérifient la continuité exacte des grandeurs cinématiques à la frontière entre les sous-domaines tandis que les approches duales accordent leur confiance à l'équilibre des efforts d'interface. Enfin, les approches mixtes ne privilégient ni les déplacements, ni les efforts en réalisant un compromis entre les deux méthodes précédentes.

Parmi les approches duales, citons la méthode *Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI)* présentée dans [FR91, Far91a, Far91b, FR92]. Le principe repose sur la minimisation de l'énergie de chaque sous-structure sous la contrainte d'assurer la continuité des déplacements entre chaque sous-structure, qui est imposée *via* l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange représentant les inter-efforts entre les différents sous-domaines. L'équilibre des efforts entre les sous-structures est assuré automatiquement puisque l'on emploie le même multiplicateur de Lagrange (avec un signe contraire) pour deux sous-structures connectées entre elles. Les degrés de liberté intérieurs sont alors condensés sur les multiplicateurs de Lagrange pour aboutir à un problème de petite taille, qui est résolu de manière itérative par un gradient conjugué préconditionné. Le choix du préconditionneur optimal est étudié dans [RF99] notamment. L'application aux plaques et aux coques est étudiée dans [FM98, FCMR98] : l'opérateur différentiel d'ordre 4 fait apparaître des pics sur les multiplicateurs situés aux coins de chaque plaque [FMR94].

En conséquence, le problème est mal conditionné, contrairement à celui résultant de l'opérateur du second ordre de l'équation de Helmholtz. Le problème est résolu en forçant la vérification exacte de la continuité des déplacements entre les coins des sous-structures. L'application de la méthode *FETI* à l'acoustique pourra être trouvée dans [MMC00, FML<sup>+</sup>00, TMF01].

Parmi les approches primales, la *Balancing Domain Decomposition (BDD)* présentée dans [Rou90, Man93], qui est l'approche primale analogue à *FETI*.

Concernant les méthodes mixtes, citons la méthode *LATIN* (pour *L*Arge *T*ime *I*Ncrement) présentée dans [Lad98b], dans laquelle les équations d'interface sont réalisées par une relation de comportement reliant le saut d'effort et le saut de déplacement.

La méthode « duale » appelée *Statistical modal Energy distribution Analysis (SmEdA)* utilisée dans [MG01a, MG01b, MG03] pour calculer les facteurs de perte par couplage de la *Statistical Energy Analysis*, peut en fait être vue comme mixte. L'idée est de calculer les modes propres de deux structures couplées, l'une avec interface fixe et inconnues statiques, l'autre avec interface libre et inconnues cinématiques.

Mentionnons également la méthode de Desprès proposée dans [Des91]. Elle est appliquée aux équations de Maxwell dans [CDJP97]. Le cadre général est détaillé dans [CGJ00]. L'idée est de reformuler les équations de continuité entre sous-domaines par une condition de transmission mixte liant les quantités cinématiques et statiques ; ces quantités ne sont donc continues qu'à convergence. Une méthode itérative est ensuite utilisée : à l'étape  $n$ , chaque sous-structure vérifie ses équations intérieures avec comme condition de frontière les quantités des sous-structures voisines de l'étape précédente.

Citons enfin la *Cell Discretization* [Gre82] dans laquelle la continuité entre les sous-domaines est réalisée par collocation, et qui est étendue au cadre des vibrations dans [Gre99]. Mentionnons pour finir la méthode *Arlequin* [BDR05], qui se base sur une décomposition avec recouvrement entre les sous-domaines.

## 1.4 Les éléments fins de frontière

Les *Boundary Element Methods* [BB81, DL91, Bon99] reposent sur une formulation intégrale qui ne nécessite de discrétiser que la frontière du domaine, d'où une réduction importante de la taille du système. Ce gain a toutefois un prix : la formulation est non symétrique et aboutit à une matrice pleine. Parmi les nombreuses variantes, mentionnons l'application aux problèmes de plaques, pour lesquels une bibliographie est proposée dans [Pai96, NP04].

Pour répondre à un problème de vibration moyennes fréquences, l'utilisation de polynômes est une nouvelle fois une limitation puisque la discrétisation augmente avec la fréquence. Dans [PDTB03], les performances des méthodes de frontières sont améliorées par l'emploi d'ondes propagatives, mais ce gain est accompagné d'une forte dégradation du conditionnement. Dans [Nis02, Nem06], la *Fast Multipole Method* est employée pour

accélérer la résolution numérique, de façon à pouvoir monter en fréquence.

## 1.5 Les méthodes de stabilisation

Remarquant que sur le plan algébrique, la formulation variationnelle peut perdre sa positivité quand la fréquence augmente, certains auteurs ont cherché à retrouver la régularité de la forme bilinéaire en y ajoutant différents termes.

Citons les méthodes *GLS* (*Galerkin Least Squares* [HH92]) et *GGLS* (*Galerkin Gradient Least Squares* [HH98]) qui proposent d'ajouter à la forme bilinéaire traditionnelle un terme correspondant à un résidu de l'équation d'équilibre ou à son gradient.

Pour les problèmes de convection-diffusion, citons en plus des deux précédentes la méthode *SUPG* (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) et la *USFEM* (*Unusual Stabilized Finite Element Method*) qui sont présentées de manière synthétique dans [BBF<sup>+</sup>92, FHM06].

### *Les Residual-Free Bubbles*

La méthode *RFB* est initialement une méthode d'enrichissement : la solution est recherchée sous la forme de la somme d'une contribution des fonctions éléments finis classiques  $u_{EF}$  et de fonctions *bubbles*  $u_B$  :

$$u = u_{EF} + u_B \quad (1.5)$$

Les *bubbles* sont prises nulles à la frontière de chaque élément, et sont cherchées de manière à ce que le champ total vérifie les équations intérieures sur chaque élément. L'idée est d'inclure ainsi une connaissance *a priori* du problème physique à traiter par l'intermédiaire des fonctions d'enrichissement. Les degrés de liberté relatifs aux fonctions *bubbles* sont ensuite éliminés par condensation. La méthode est présentée sur des poutres de Timoshenko dans [FR97b] et pour les équations de Navier-Stokes incompressible dans [Rus96]. Dans [FO03], des fonctions *bubbles* relatives aux quantités statiques sont insérées sans être nulles à la frontière entre les éléments, ce qui supprime la continuité des grandeurs statiques.

Un intérêt des méthodes d'enrichissement *RFB* est de pouvoir réinterpréter les méthodes de stabilisation pré-citées comme des méthodes d'enrichissement. L'équivalence avec *SUPG* est montrée dans [Rus96, FHM06], dans laquelle l'ajout d'un terme dans la formulation variationnelle apparaît comme directement induit par les fonctions d'enrichissement.

## 1.6 Les méthodes de Trefftz

Le point fort des méthodes de Trefftz [Tre26, KK95] est l'utilisation de fonctions définies sur l'ensemble de la structure et vérifiant exactement les équations locales d'équilibre et de comportement. Les conditions aux limites sont vérifiées « au mieux » par l'utilisation d'une formulation variationnelle, des moindres carrés, ou d'une méthode de collo-

cation. Les inconnues sont les amplitudes des fonctions de base exhibées. Contrairement aux *BEM*, la frontière n'est pas discrétisée. La taille du problème est ici liée au nombre de fonctions contenues dans la base. En pratique, celles-ci possèdent un contenu physique très fort : par exemple, ce sont des ondes pour les problèmes de vibration. Un très petit nombre de d.d.l. suffit donc à représenter précisément une solution. De plus la taille du problème est indépendante de la fréquence. La complétude théorique de l'espace est étudiée dans [Her84], mais en pratique, les problèmes liés au conditionnement du système peuvent limiter ou empêcher la convergence. De nombreux développements ont été entrepris, parmi lesquels les *T-Element Methods*.

### *Les Trefftz-Element Methods*

Pour surmonter le problème de conditionnement, mais aussi pour traiter les géométries complexes, les *T-Element Methods* consistent à utiliser une méthode de Trefftz à l'intérieur de chaque élément d'un maillage éléments finis classique. Le fort contenu physique des fonctions de forme définies sur chaque élément permet de conserver un maillage très grossier par rapport à celui qui serait utilisé avec les fonctions polynomiales classiques.

Pour assurer la compatibilité entre les éléments, diverses variantes existent. Les méthodes de Trefftz hybrides utilisent un champ auxiliaire défini sur les frontières des éléments dans une formulation variationnelle [JQ95, Qin95, TdF98]. Le champ peut être un déplacement (méthodes de type *Hybrid Trefftz Displacement* ou *HT-D*) ou une force (méthodes de type *Hybrid Trefftz Traction* ou *HT-T*). L'utilisation d'un champ auxiliaire n'est pas nécessaire dans les *Collocation (Weighted) Trefftz Methods* où la continuité est assurée par collocation. Une autre variante utilise les moindres carrés, donnant les *Least Square T-Element Methods* ou *LST* [JS95]. Plus d'éléments bibliographiques pourront être trouvés dans [JW95, JZ97].

Mentionnons également la *Wave Based Technique* [Des98, DVHSV02, PDVS04], qui utilise les fonctions de Trefftz sur des éléments plus grand que la taille réelle de la structure, sans utiliser de maillage éléments finis. La méthode a surtout été utilisée pour les problèmes d'acoustique et de vibroacoustique.

## 1.7 La méthode des éléments finis généralisés

La *Generalized Finite Element Method (GFEM)* développée dans [BIPS95, SCB01] est une méthode d'enrichissement de la méthode éléments finis standard. Elle s'appuie sur la *Partition of Unity Method (PUM)* [MB97]. L'idée est de multiplier les fonctions de forme éléments finis classiques par des fonctions d'enrichissement cataloguées dans un « handbook ». Ce moyen permet d'inclure une connaissance *a priori* de la solution locale du problème. Dans [SBH06], la méthode est confrontée à l'équation de Helmholtz, l'enrichissement est alors composé d'ondes planes propagatives.

## 1.8 La méthode d'enrichissement discontinu

La *Discontinuous Enrichment Method (DEM)* développée dans [FHF01] est une méthode de Galerkin discontinue similaire à la méthode *FETI*. Le champ de déplacement est enrichi d'ondes planes propagatives qui seront ensuite éliminées au niveau de chaque élément par condensation statique, pour gagner en efficacité. Des multiplicateurs de Lagrange assurent la continuité faible à la frontière entre chaque élément. Dans la première version, ils sont pris constants sur les frontières des éléments. Pour augmenter la convergence, ils sont ensuite supposés oscillants dans [FHH03b, FHH03a], de manière à enrichir la représentation des inter-efforts. Dans [FWGT04], la méthode permet de prendre en compte des éléments non carrés, et de traiter des problèmes en milieu infini.

La *théorie variationnelle des rayons complexes* utilisée dans ce travail peut être vue comme une méthode de Trefftz. La différence par rapport aux méthodes précitées réside dans le fait que la discrétisation des fonctions de la base conserve l'ensemble des directions de propagation des ondes, et que le traitement numérique prend en compte le caractère multiéchelle des ondes afin de gagner en efficacité.

## 2 Les méthodes issues des hautes fréquences

Les approches hautes fréquences s'appuient généralement sur une vision statistique des grandeurs, à l'image de la méthode qui fait référence dans ce domaine, la *Statistical Energy Analysis* [LM62, Lyo75]. La motivation pour le côté statistique se justifie par la très forte sensibilité des structures quand on monte en fréquence. Une approche déterministe n'a alors que peu d'intérêt [Hop02]. Dans [RG97], l'hypersensibilité par rapport à l'angle de couplage entre des plaques est étudiée. Elle apparaît surtout pour des angles de couplage proches de zéro. Il est noté que cette hypersensibilité est inhérente à la structure, et non pas aux défauts que celle-ci peut contenir. Dans [Hop03a, Hop03b], l'influence des incertitudes est évaluée par des simulations de Monte-Carlo. Il est montré que lorsque la densité modale ou le recouvrement modal ne sont pas aussi importants qu'en hautes fréquences, les phénomènes d'hypersensibilité apparaissent. Dans [OG03] est proposée une méthode pour identifier, à faible coût, la sensibilité de la structure par rapport à certains paramètres. Au lieu d'utiliser des simulations de Monte-Carlo, l'idée est d'évaluer la valeur d'un résidu énergétique perturbé par les défauts, avec la solution nominale - dont les paramètres sont exacts.

### 2.1 La *Statistical Energy Analysis (SEA)*

La *Statistical Energy Analysis (SEA)* est la méthode la plus connue pour le calcul des vibrations en hautes fréquences. Les grandeurs physiques d'intérêt sont les niveaux énergétiques moyennés par sous-structure et sur une bande de fréquence. Un bilan énergétique appliqué à chaque sous-structure  $i$  permet de relier l'énergie  $P_{inj}^i$  injectée, l'énergie

$P_{diss}^i$  dissipée par la sous-structure, et l'énergie  $P_{ech}^{i \rightarrow j}$  échangée avec les sous-structures voisines  $j$  :

$$P_{inj}^i = P_{diss}^i + \sum_j P_{ech}^{i \rightarrow j} \quad (1.6)$$

L'énergie dissipée est calculée à partir de l'énergie totale  $E_i$  - supposée être également répartie entre énergie de déformation et énergie cinétique - de la sous-structure  $i$  sous l'hypothèse d'amortissement hystérétique :

$$P_{diss}^i = \omega \eta_i E_i \quad (1.7)$$

L'hypothèse forte de la *SEA* est de supposer que l'énergie se transmet de la sous-structure la plus énergétique vers la moins énergétique, de manière proportionnelle à la différence d'énergie via un « coefficient de perte par couplage »  $\eta_{ij}$  :

$$P_{ech}^{i \rightarrow j} = \omega \eta_{ij} n_i \left( \frac{E_i}{n_i} - \frac{E_j}{n_j} \right) \quad (1.8)$$

où  $n_i$  et  $n_j$  sont les densités modales des sous-structures couplées.

La *SEA* permet d'obtenir un problème linéaire de faible dimension (une inconnue, l'énergie, pour chaque sous-structure), qui est peu sensible aux modifications des données du problème, grâce aux moyennes spatiales et fréquentielles de la méthode. Dans [TG06] est proposée une méthode pour aider à choisir le nombre et la localisation des sous-systèmes de manière à être sûr que chacun d'eux vérifie les hypothèses de la *SEA*.

Le domaine de validité de la méthode, notamment pour ce qui concerne l'application aux moyennes fréquences, fait encore débat. Deux difficultés majeures sont les hypothèses de forte densité modale et de couplage faible, qui ne sont valables qu'en hautes fréquences. L'hypothèse d'équipartition de l'énergie entre énergie cinétique et énergie de déformation est erronée en moyennes fréquences [TG06]. Des inconvénients viennent s'ajouter à cela : la méthode ne donne pas une représentation spatiale de l'ambiance vibratoire à l'intérieur de chaque sous-système et la méthode est non-prédictive, puisque les facteurs de perte par couplage sont inconnus. Plusieurs méthodes permettent de les obtenir. Le calcul analytique n'est réservé qu'à quelques cas de géométries particulièrement simples, il utilise soit des méthodes modales soit le calcul des indices de transmission et de réflexion d'onde en milieu semi-infini. La méthode expérimentale la plus répandue est la *Power Injection Method*, qui s'appuie sur l'inversion du système linéaire de la *SEA* et le calcul de la puissance injectée dans la structure par l'excitation. Pour éviter les problèmes liés à l'estimation de la puissance injectée, une variante propose de moduler la puissance injectée à une fréquence faible devant celle du signal [FR97a]. Enfin, les approches numériques basées sur les éléments finis sont de plus en plus utilisées : dans [MG01a, MG01b] les facteurs de perte par couplage sont calculés pour chaque couple de mode des sous-systèmes. Une méthode couplant l'approche numérique et expérimentale est étudiée dans [Hop02], elle montre que l'étude déterministe est sans intérêt lorsque la densité modale et le recouvrement modal sont faibles, car la structure est alors hypersensible par rapport aux propriétés de la structure.

Dans le cadre de la modélisation des liaisons, notons que la *SEA* ne permet pas d'attribuer un modèle à une liaison. En effet les facteurs de perte par couplage sont des quantités qui ne sont pas intrinsèques à la liaison, ils représentent également les sous-structures et l'excitation choisies. Dans [PTF05], il est montré l'influence importante de la densité modale et du recouvrement modal sur les facteurs de perte par couplage. Du fait de sa petite dimension géométrique, la densité modale de la liaison seule reste faible, ce qui empêche la représentation d'une liaison comme une sous-structure *SEA*, et rend impossible la prise en compte d'une dissipation localisée au niveau d'une jonction. Dans [Ren04], il est pourtant précisé que la *SEA* repose sur l'hypothèse d'un fort nombre de modes couplés entre sous-systèmes, mais pas forcément sur forte densité modale de chaque sous-système. Quoi qu'il en soit, la liaison, ses caractéristiques sont généralement noyées avec celle des sous-structures dans les coefficients de dissipation  $\eta_i$ .

## 2.2 La *Wave Intensity Analysis* (WIA)

Pour s'affranchir de l'hypothèse de champ diffus de la *SEA*, cette approche donne une importance à la direction du champ [Lan92], en supposant une superposition d'ondes planes développée en série de Fourier. L'hypothèse de non corrélation entre deux ondes de directions différentes revient à négliger l'énergie de couplage entre ces deux ondes. L'énergie totale correspond alors à la somme de l'énergie de chaque onde prise séparément. Cette approche ne donne toutefois pas une vision locale des phénomènes vibratoires. D'autres hypothèses restent restrictives en vue de l'application aux moyennes fréquences, comme celle de forte densité modale, ou la négligence des ondes évanescentes et des effets de phase. Dans [LS97], elle est utilisée pour prendre en compte un couplage par un panneau dissipatif périodique.

## 2.3 Les approches basées sur la diffusion de l'énergie

Pour obtenir une vision plus locale, des approches basées sur une analogie avec la loi de Fourier en thermique ont été développées [Nef87]. La *Power Flow Analysis*, l'*Energy Flow Finite Element Analysis* ou la *Vibration Conduction Analysis* font l'hypothèse que les flux d'énergie sont similaires aux flux de chaleur. La validité de cette analogie est le sujet de beaucoup de débats. Cette hypothèse est en effet vraie pour les structures 1D [Nef87, WB92, ILBJ97], et dans le cas particulier des ondes planes pour les structures 2D [BB95]. Mais elle est fautive dans le cas général 2D, notamment dans le cas de structures infinies, d'excitation ponctuelle ou si l'amortissement n'est pas faible [Lan95]. D'autres modèles énergétiques ont été proposés dans le cas des structures 2D dans [IJ96]. Dans [BWH99], la méthode prend en compte le couplage fluide/structure, mais les ondes évanescentes et la phase sont négligées, et l'hypothèse de non corrélation entre les ondes est utilisée. Dans [LB98a], la validité de la *Vibrational Conductivity Approach* est étendue en étudiant certaines « lignes de courant » suivies par l'énergie, mais l'approche n'est pas valable pour une géométrie quelconque. Enfin, certaines études cherchent à étendre cette vision énergétique locale à la dynamique transitoire [IJ01, SIJ02].

### *Les méthodes « hybrides »*

Une alternative consiste à séparer le champ en deux parties : un champ direct, calculé à partir de l'excitation en champ infini, et un champ réfléchi, qui vérifie l'équation de la chaleur. Une telle approche dite « hybride » a été utilisée dans [Smi97, LB98b], associée à une écriture intégrale des équations. Généralement les ondes évanescentes sont négligées, les ondes sont non corrélées entre elles, et les coefficients de couplages sont inconnus *a priori*. Dans [LB98b], on a de plus l'hypothèse que les diagrammes de directivité de chaque source secondaire située sur le bord du sous-système sont les mêmes, ce qui peut être réducteur en moyennes fréquences, où certaines directions de propagations peuvent être privilégiées.

## **2.4 La Ray Tracing Method (RTM)**

Cette technique est issue du domaine de l'acoustique dans lequel elle a donné de bons résultats. À partir de l'excitation, des rayons sont propagés dans toutes les directions, et sont réfléchis et transmis sur les frontières du domaine, en suivant les lois de Snell-Descartes. On a ainsi à la fois la partie directe et la partie réverbérante du champ. En général, les ondes de bord sont négligées et les ondes sont décorrélatées entre elles, ce qui réduit la validité de l'approche aux cas des champs diffus. L'application aux plaques est faite dans [PT95, CH01], où les seules les ondes planes sont considérées. Les coefficients de transmission/réflexion restent des paramètres mal maîtrisés, ce qui fait de cette technique une méthode non prédictive. La taille du problème peut s'avérer grande du fait de la discrétisation selon toutes les directions, et des multiples réflexions des rayons, en particulier lorsque l'amortissement des rayons est faible et lorsque la fréquence est basse [CH01].

## **2.5 Bilan sur les approches hautes fréquences**

La SEA, ainsi que les méthodes qui s'en rapprochent s'appuient sur des hypothèses trop restrictives pour pouvoir être étendues au domaine des moyennes fréquences. Les quantités sont moyennées en fréquence, ce qui écarte tout comportement modal. Dans les méthodes qui cherchent à représenter le côté spatial, la non-corrélation entre les rayons de directions différentes, et la non prise en compte de la partie locale des solutions - les ondes évanescentes - lissent le comportement spatial, mais rendent également impossible le caractère prédictif de ces méthodes, en introduisant un côté non-intrinsèque dans les coefficients de perte par couplage ou de transmission/réflexion. Des variantes de ces méthodes sont aujourd'hui à l'étude pour tenter d'élargir leur domaine de validité.



### 3 Présentation de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes

#### 3.1 Introduction

La théorie variationnelle des rayons complexes est une méthode prédictive qui permet le calcul des structures en vibration dans le domaine des moyennes fréquences. Elle a été introduite dans [Lad96] et s'appuie sur les idées suivantes :

- la structure est décomposée en sous-structures homogènes,
- sur chaque sous-structure, la confiance est accordée à la relation de comportement et à l'équation d'équilibre intérieur, ce qui permet de construire un espace de fonctions appelées les « rayons complexes » ; ces fonctions de forme sont particulièrement adaptées au traitement d'un problème de vibrations puisqu'elles constituent elles-même les solutions d'un problème de vibration en milieu infini, ou semi-infini, ...
- les conditions aux limites de chaque sous-structure sont traitées de manière faible par une seule et même formulation variationnelle, que doivent vérifier les fonctions de forme ; de cette manière, toutes les conditions de frontière se trouvent couplées,
- une vision multi-échelle des rayons complexes est adoptée : la séparation entre « partie rapide » et « partie lente » opérée au niveau de chaque fonction de base confère à la méthode la propriété d'être formulée avec peu d'inconnues pour chaque sous-structure. La partie rapidement oscillante, connue explicitement, permet d'être intégrée analytiquement, tandis que la partie lente est traitée par la voie numérique,
- la discrétisation est faite en réduisant l'espace des fonctions de forme. Toutefois la précaution est prise de conserver toutes les directions de propagations des rayons complexes en adoptant une description intégrale des rayons.

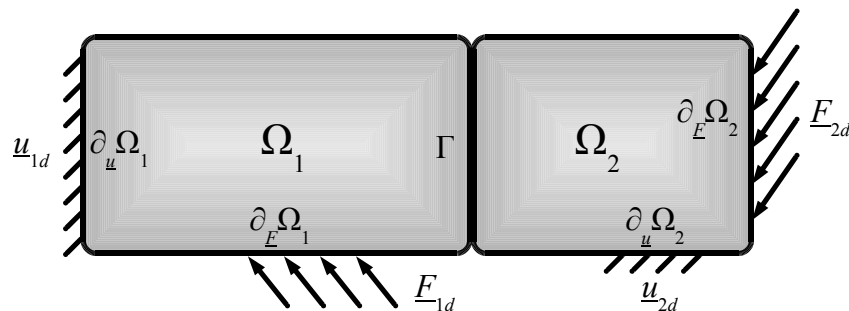


FIG. 1.1: Problème de référence.

### 3.2 Problème continu de référence

Par souci de simplicité, l'approche est présentée sur un problème contenant deux sous-structures homogènes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (Figure 1.1). L'extension à plusieurs sous-structures ne pose pas de difficultés. Conformément à un problème de vibrations forcées à la fréquence  $\omega$ , on se place autour d'une position d'équilibre, si bien que seules les sollicitations de forme harmonique sont considérées. La structure est donc soumise à des efforts  $\underline{F}_d$  imposés sur sa frontière  $\partial_F \Omega = \partial_F \Omega_1 \cup \partial_F \Omega_2$  et à des déplacements  $\underline{u}_d$  imposés sur la partie complémentaire  $\partial_u \Omega = \partial_u \Omega_1 \cup \partial_u \Omega_2$ . Dans cette partie, l'interface  $\Gamma$  est supposée parfaitement rigide. La dépendance en temps est contenue dans le terme exponentiel  $e^{i\omega t}$  qui disparaît du fait de la linéarité des équations. Dans l'hypothèse de petites perturbations, on recherche donc les solutions déplacement/contrainte  $(\underline{u}_1, \sigma_1) \times (\underline{u}_2, \sigma_2)$  telles que :

- $(\underline{u}_1, \sigma_1)$  et  $(\underline{u}_2, \sigma_2)$  appartiennent respectivement aux espaces  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{S}_2$ , avec :

$$\mathcal{U}_i = \left\{ \underline{u} \in [\mathcal{H}_1(\Omega_i)]^3 \right\} \quad (\text{champs des déplacements à énergie finie})$$

$$\mathcal{S}_i = \left\{ \sigma \in [\mathcal{L}_2(\Omega_i)]^6 \right\} \quad (\text{champs des contraintes à énergie finie})$$

- $\underline{u}_1$  et  $\underline{u}_2$  sont cinématiquement admissibles :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_{1d} \quad \text{sur } \partial_u \Omega_1 \quad (1.9a)$$

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_{2d} \quad \text{sur } \partial_u \Omega_2 \quad (1.9b)$$

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_2 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.9c)$$

- $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont dynamiquement admissibles :

$$\underline{\text{div}} \sigma_1 = -\rho_1 \omega^2 \underline{u}_1 \quad \text{sur } \Omega_1 \quad (1.10a)$$

$$\underline{\text{div}} \sigma_2 = -\rho_2 \omega^2 \underline{u}_2 \quad \text{sur } \Omega_2 \quad (1.10b)$$

$$\sigma_1 \underline{n}_1 = \underline{F}_{1d} \quad \text{sur } \partial_F \Omega_1 \quad (1.10c)$$

$$\sigma_2 \underline{n}_2 = \underline{F}_{2d} \quad \text{sur } \partial_F \Omega_2 \quad (1.10d)$$

$$\sigma_1 \underline{n}_1 + \sigma_2 \underline{n}_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.10e)$$

–  $(\underline{u}_1, \sigma_1)$  et  $(\underline{u}_2, \sigma_2)$  vérifient les relations de comportement des sous-structures :

$$\sigma_1 = \mathbf{K}_1 \varepsilon(\underline{u}_1) \quad \text{sur } \Omega_1 \quad (1.11a)$$

$$\sigma_2 = \mathbf{K}_2 \varepsilon(\underline{u}_2) \quad \text{sur } \Omega_2 \quad (1.11b)$$

$\varepsilon(\underline{u})$  est l'opérateur de déformation défini comme la partie symétrique du gradient de déplacement  $\underline{u}$ . Les opérateurs  $\mathbf{K}_1 = (1 + i\zeta_1)\mathbf{K}_{01}$  et  $\mathbf{K}_2 = (1 + i\zeta_2)\mathbf{K}_{02}$  sont les opérateurs de Hooke relatifs à chaque domaine,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les masses volumiques. Les scalaires  $\zeta_1, \zeta_2$  sont les coefficients d'amortissement structuraux de chaque sous-domaine.

### 3.3 Reformulation du problème

Le principe de la méthode est synthétisé dans le Tableau 1.1.

	Équations du modèle
Équations fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Géométrie</li> <li>• Équilibre local</li> <li>• Relations de comportement</li> </ul>
Équations non fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conditions aux limites en efforts</li> <li>• Conditions aux limites en déplacement</li> <li>• Équations de liaisons entre sous-structures</li> </ul>

**TAB. 1.1:** Principe de la TVRC.

Sur chaque sous-structure  $\Omega_i$ , la relation de comportement et l'équation d'équilibre intérieur sont vérifiées exactement, formant ainsi un espace d'admissibilité  $S_{ad,i}$  :

$$S_{ad,i} = \left\{ (\underline{u}_i, \sigma_i) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{S}_i \quad \left| \quad \begin{array}{l} \underline{\text{div}} \sigma_i = -\rho_i \omega^2 \underline{u}_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ \sigma_i = \mathbf{K}_i \varepsilon(\underline{u}_i) \quad \text{dans } \Omega_i \end{array} \right. \right\} \quad (1.12)$$

Les équations non encore résolues du modèle sont les conditions aux limites de chaque sous-structure. Elles sont vérifiées de manière faible par une formulation variationnelle présentée dans [HLP93], qui est une extension à la dynamique de la formulation proposée

en statique dans [Lad83a]. Cette écriture peut être vue comme une formulation de Trefftz des conditions de frontière, qui traduit l'équilibre des puissances virtuelles à travers les frontières de chaque sous-domaine. Les couples déplacement/contraainte  $s_i = (\underline{u}_i, \sigma_i)$  sont recherchés dans l'espace d'admissibilité  $\mathcal{S}_{ad,i}$  de telle sorte que :

$$\mathcal{A} \left( \left| \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array} \right. \right) = \mathcal{L} \left( \left| \begin{array}{l} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array} \right. \right), \quad \forall (\delta s_1, \delta s_2) \in \mathcal{S}_{ad,01} \times \mathcal{S}_{ad,02} \quad (1.13)$$

avec :

$$\mathcal{A} \left( \left| \begin{array}{l} s_1 \\ s_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array} \right. \right) = \mathcal{R}e \left\{ -i\omega \left[ \begin{array}{l} \int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_1} \delta\sigma_1 \underline{n}_1 \cdot \underline{u}_1^* dl + \int_{\partial_F\Omega_1} \sigma_1 \underline{n}_1 \cdot \delta\underline{u}_1^* dl \\ + \int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_2} \delta\sigma_2 \underline{n}_2 \cdot \underline{u}_2^* dl + \int_{\partial_F\Omega_2} \sigma_2 \underline{n}_2 \cdot \delta\underline{u}_2^* dl \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{ (\delta\sigma_1 \underline{n}_1 - \delta\sigma_2 \underline{n}_2) \cdot (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)^* \\ + (\sigma_1 \underline{n}_1 + \sigma_2 \underline{n}_2) \cdot (\delta\underline{u}_1 + \delta\underline{u}_2)^* \} dl \end{array} \right] \right\} \quad (1.14)$$

$$\mathcal{L} \left( \left| \begin{array}{l} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array} \right. \right) = \mathcal{R}e \left\{ -i\omega \left[ \begin{array}{l} \int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_1} \delta\sigma_1 \underline{n}_1 \cdot \underline{u}_{1,d}^* dl + \int_{\partial_F\Omega_1} \underline{F}_{1,d} \cdot \delta\underline{u}_1^* dl \\ + \int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_2} \delta\sigma_2 \underline{n}_2 \cdot \underline{u}_{2,d}^* dl + \int_{\partial_F\Omega_2} \underline{F}_{2,d} \cdot \delta\underline{u}_2^* dl \end{array} \right] \right\} \quad (1.15)$$

$\mathcal{R}e$  désigne l'opérateur partie réelle et  $*$  désigne l'opérateur conjugué. Les espaces  $\mathcal{S}_{ad,0i}$  sont les espaces d'admissibilité associés aux conditions homogènes sur la structure  $i$ .

Cette formulation variationnelle est équivalente au problème de référence si et seulement si [LAR01] :

- les opérateurs de Hooke  $\mathbf{K}_i$  sont définis positifs,
- l'un au moins des coefficients d'amortissement  $\zeta_i$  est strictement positif,
- le problème de référence possède une solution.

La formulation précédente a été développée dans le cas des poutres [Arn00], des plaques [LAR01], des coques [RLR04]. Nous la présentons brièvement sur le cas de plaques homogènes, isotropes, de faible épaisseur, dans le cadre du modèle de Kirchhoff-Love [TWK59], qui fait l'objet des exemples de ce mémoire.

### 3.4 Cas des plaques de Kirchhoff-Love

Pour un problème bien posé, la frontière de chaque sous-domaine peut être divisée comme suit (cf. Figure 1.2) :

$$\partial\Omega_i = \partial_w\Omega_i \cup \partial_K\Omega_i \cup \Gamma \quad \text{et} \quad \partial\Omega_i = \partial_{w,n}\Omega_i \cup \partial_M\Omega_i \cup \Gamma \quad (1.16)$$

La frontière d'une sous-structure  $\Omega_i$  est soumise à :

- un déplacement normal  $w_{i,d}$  imposé sur la frontière  $\partial_w \Omega_i$ ,
- une rotation normale  $w_{i,nd}$  imposée sur la frontière  $\partial_{w,n} \Omega_i$ ,
- un moment fléchissant  $M_{i,d}$  sur la frontière  $\partial_M \Omega_i$ ,
- un effort tranchant  $K_{i,d}$  sur la frontière  $\partial_K \Omega_i$ .

Les inconnues sont les déplacements normaux  $w_i$  et les moments fléchissants  $\underline{\underline{M}}_i$  sur chaque sous-structure  $\Omega_i$ . L'appartenance à l'espace d'admissibilité s'écrit :

$$s_i = (w_i, \underline{\underline{M}}_i) \in \mathcal{S}_{ad,i} \Leftrightarrow \begin{cases} (w_i, \underline{\underline{M}}_i) \in \mathcal{H}_2(\Omega_i) \times [\mathcal{L}_2(\Omega_i)]^3 \\ \operatorname{div}(\operatorname{div} \underline{\underline{M}}_i) = -\rho_i h_i \omega^2 w_i & \text{dans } \Omega_i \\ \underline{\underline{M}}_i = \frac{h_i^3}{12} \mathbf{K}_{\text{CP}i} \underline{\underline{\chi}}(w_i) & \text{dans } \Omega_i \end{cases} \quad (1.17)$$

où  $\underline{\underline{\chi}} = -\underline{\underline{\operatorname{grad}}}(\underline{\underline{\operatorname{grad}}})$  est l'opérateur de courbure et  $\mathbf{K}_{\text{CP}i}$  désigne le tenseur de Hooke en contraintes planes.

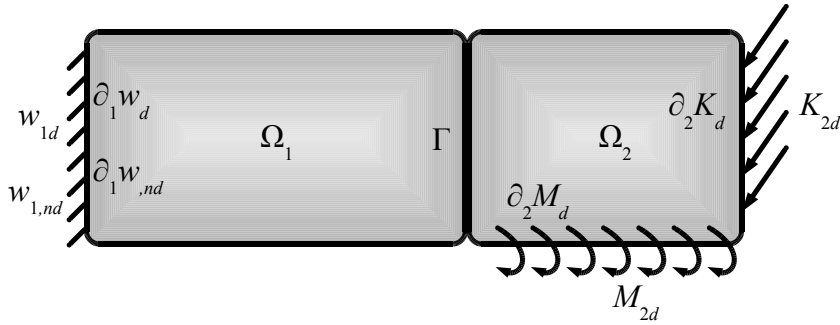


FIG. 1.2: Formulation du problème pour deux plaques de Kirchhoff-Love.

Les conditions aux limites sont vérifiées par la formulation variationnelle (1.13) composée des termes suivants :

$$\mathcal{A} \left( \left| \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array} \right. \right) = \mathcal{R}e \left\{ -i\omega \left[ \begin{array}{l} \int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_1} (\underline{\delta n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1) \cdot w_{,\underline{n}1}^* dl - \int_{\partial_w\Omega_1} \delta K_1 \cdot w_1^* dl \\ + \int_{\partial_M\Omega_1} (\underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1) \cdot \delta w_{,\underline{n}1}^* dl - \int_{\partial_K\Omega_1} K_1 \cdot \delta w_1^* dl \\ + \int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_2} (\underline{\delta n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) \cdot w_{,\underline{n}2}^* dl - \int_{\partial_w\Omega_2} \delta K_2 \cdot w_2^* dl \\ + \int_{\partial_M\Omega_2} (\underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) \cdot \delta w_{,\underline{n}2}^* dl - \int_{\partial_K\Omega_2} K_2 \cdot \delta w_2^* dl \\ - \sum_{\text{coins de } \partial\Omega_1} \left[ \left[ (\underline{t}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1) \cdot \delta w_1^* \right] \right] - \sum_{\text{coins de } \partial\Omega_2} \left[ \left[ (\underline{t}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) \cdot \delta w_2^* \right] \right] \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{\delta n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 - \underline{\delta n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) \cdot (w_{,\underline{n}1} - w_{,\underline{n}2})^* dl - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\delta K_1 - \delta K_2) \cdot (w_1 - w_2)^* dl \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) \cdot (\delta w_{,\underline{n}1} + \delta w_{,\underline{n}2})^* dl - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (K_1 + K_2) \cdot (\delta w_1 + \delta w_2)^* dl \end{array} \right] \right\} \quad (1.18)$$

$$\mathcal{L} \left( \left| \begin{array}{c} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{array} \right. \right) = \mathcal{R}e \left\{ -i\omega \left[ \begin{array}{l} \int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_1} (\underline{\delta n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1) \cdot w_{,\underline{n}1d}^* dl - \int_{\partial_w\Omega_1} \delta K_1 \cdot w_{1d}^* dl \\ + \int_{\partial_M\Omega_1} M_{1d} \cdot \delta w_{,\underline{n}1}^* dl - \int_{\partial_K\Omega_1} K_{1d} \cdot \delta w_1^* dl \\ + \int_{\partial_{w,\underline{n}}\Omega_2} (\underline{\delta n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) \cdot w_{,\underline{n}2d}^* dl - \int_{\partial_w\Omega_2} \delta K_2 \cdot w_{2d}^* dl \\ + \int_{\partial_M\Omega_2} M_{2d} \cdot \delta w_{,\underline{n}2}^* dl - \int_{\partial_K\Omega_2} K_{2d} \cdot \delta w_2^* dl \end{array} \right] \right\} \quad (1.19)$$

### 3.5 Fonctions de base

Ce paragraphe détaille comment sont construites les fonctions de forme pour chaque sous-structure dans le cas des plaques de Kirchhoff-Love. L'élaboration des rayons complexes dans le cas général est défini dans [LARB01].

En couplant la relation de comportement et l'équation d'équilibre d'une plaque  $\Omega$  qui définissent l'espace d'admissibilité, nous obtenons l'équation des ondes suivante :

$$\frac{(1+i\zeta)Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta \Delta w = \rho h \omega^2 w \quad \text{sur } \Omega \quad (1.20)$$

où l'opérateur  $\Delta$  désigne le Laplacien.

Les solutions de cette équation sont recherchées sous la forme :

$$w_{(x,k)} = W_{(x,k)} e^{k \cdot x} \quad (1.21)$$

dans laquelle  $W_{(k,x)}$  désigne l'amplitude qui est une fonction lentement variable par rapport à l'espace, tandis que l'exponentielle contient la partie rapidement oscillante.  $x$  est la variable d'espace et  $k$  est le vecteur d'onde complexe de la vibration. Dans la pratique, la dépendance par rapport à  $x$  de  $W$  peut être approchée par une fonction polynomiale. Dans la suite, nous nous placerons dans le cadre des rayons d'ordre 0 pour lesquels  $W$  est supposé indépendant de l'espace.

La relation de dispersion est trouvée en injectant la forme des rayons dans l'équation (1.20) :

$$(\underline{k} \cdot \underline{k})^2 = \frac{12\rho(1-\nu^2)\omega^2}{(1+i\zeta)h^2E} = k_0^4 \quad (1.22)$$

On distingue alors plusieurs familles de champs. La première contient les ondes planes propagatives harmoniques dans la direction  $p$ , pour lesquelles on a :

$$\underline{k} = k_0 \underline{p} \quad (1.23)$$

où  $\underline{p}$  appartient à un cercle  $C_{int}$  de rayon unitaire :  $\|\underline{p}\| = 1$  (cf. Figure 1.3).

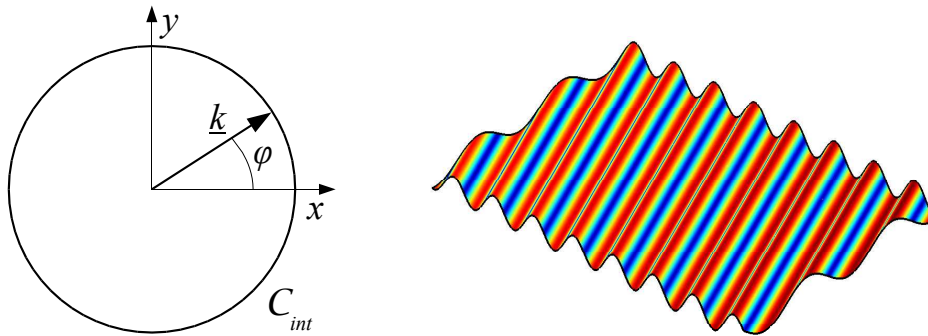


FIG. 1.3: Description d'un rayon intérieur.

On distingue également des rayons localisés au niveau d'un bord de normale  $\underline{n}_x$  de la sous-structure. Ils correspondent à des ondes évanescentes dans la direction  $x$  :  $k_{rx} < 0$ . Le domaine  $C_{bord}$  d'existence de  $\underline{k}$  est décrit sur la Figure 1.4. Enfin, certains rayons sont localisés au niveau d'un coin de la plaque ; ils correspondent à des ondes évanescentes dans les deux directions  $x$  et  $y$  :  $k_{rx} < 0$  et  $k_{ry} < 0$ . Un exemple d'un tel rayon est présenté sur la Figure 1.5.

Pour terminer, notons que d'autres rayons admissibles peuvent être introduits dans des cas bien particuliers. Par exemple, des rayons cylindriques sont introduits dans [LBRB03] afin de prendre en compte la présence d'hétérogénéités dans une sous-structure. Dans le cas d'une plaque homogène et isotrope, de tels rayons ne sont pas nécessaires en l'absence d'effort ponctuel sur la plaque.

### 3.6 Problème discrétisé

Le déplacement s'écrit :

$$w(\underline{x}) = \int_{\varphi \in C_{int}} W_{(\varphi, \underline{x})} e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl + \int_{\varphi \in C_{bord}} W_{(\varphi, \underline{x})} e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl + \int_{\varphi \in C_{coin}} W_{(\varphi, \underline{x})} e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl \quad (1.24)$$

Pour obtenir un problème de dimension finie, on fait l'hypothèse que la fonction inconnue  $W_{(\varphi, \underline{x})}$  est constante par morceaux suivant  $\varphi$ . Par exemple, pour la première intégrale concernant les rayons intérieurs, le cercle  $C_{int}$  est scindé en plusieurs secteurs angulaires  $C_{int}^m$  ; sur chacun de ces secteurs angulaires, la fonction  $W_{(\varphi, \underline{x})}$  est constante par rapport à  $\varphi$ , comme indiqué sur la Figure 1.6, où  $C_{int}$  est discrétisé en huit secteurs angulaires égaux. On opère de même pour les intégrales sur  $C_{bord}$  et  $C_{coin}$ . On obtient

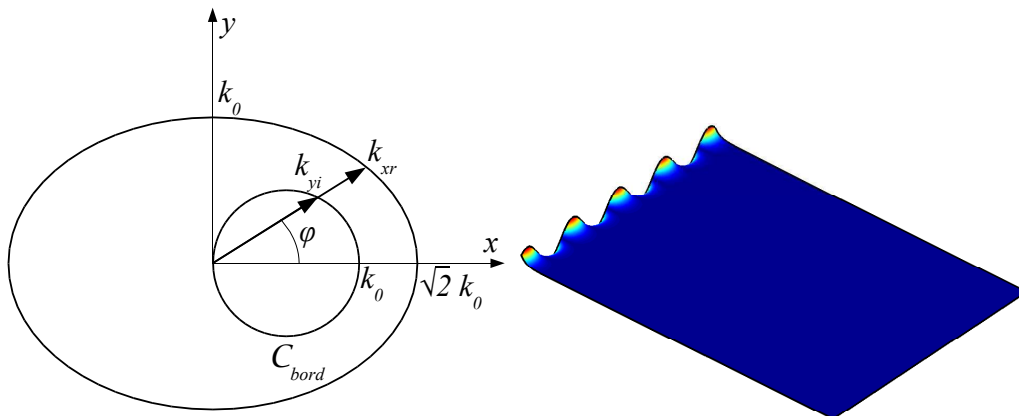


FIG. 1.4: Description d'un rayon de bord.

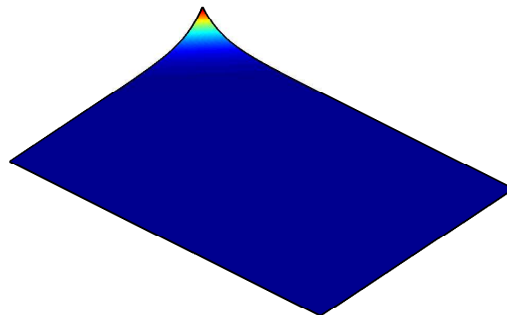


FIG. 1.5: Description d'un rayon de coin.



finalement le déplacement approché sous la forme :

$$w_{(\underline{x})}^h = \sum_m \int_{\varphi \in C_{int}^m} W_m(\underline{x}) e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl + \sum_n \int_{\varphi \in C_{bord}^n} W_n(\underline{x}) e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl + \sum_q \int_{\varphi \in C_{coin}^q} W_q(\underline{x}) e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl \quad (1.25)$$

où les inconnues sont  $W_m(\underline{x})$ ,  $W_n(\underline{x})$  et  $W_q(\underline{x})$ .

La vision intégrale de la discrétisation adoptée permet de n'oublier aucune direction de propagation des rayons. Le déplacement s'écrit donc :

$$w_{(\underline{x})}^h = \left\{ \begin{array}{l} \sum_m W_m \int_{\varphi \in C_{int}^m} e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl \\ + \sum_n W_n \int_{\varphi \in C_{bord}^n} e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl \\ + \sum_q W_q \int_{\varphi \in C_{coin}^q} e^{k(\varphi) \cdot \underline{x}} dl \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_m W_m \Phi_m(\underline{x}) \\ + \sum_n W_n \Phi_n(\underline{x}) \\ + \sum_q W_q \Phi_q(\underline{x}) \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

Par linéarité, les fonctions de forme  $\Phi$  ainsi construites continuent de vérifier l'équilibre intérieur et la relation de comportement de la sous-structure correspondante.

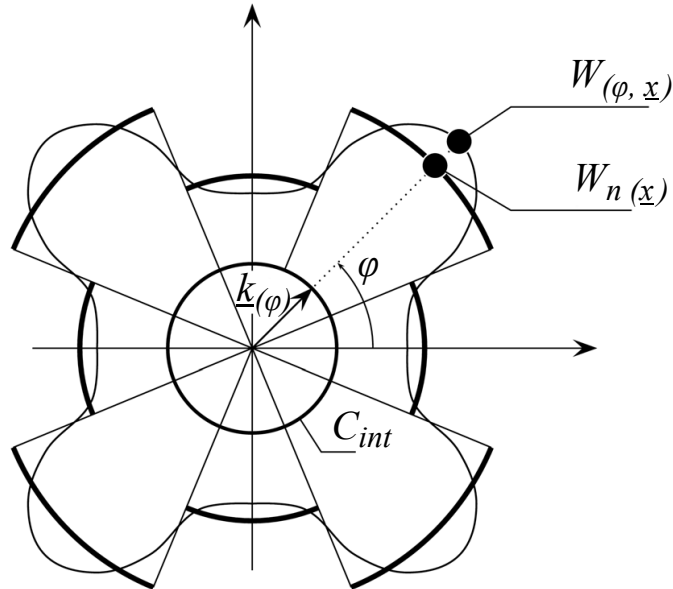


FIG. 1.6: Discrétisation de  $C_{int}$  en secteurs angulaires.

*Problème linéaire final*

Une fois la discrétisation effectuée, les quantités discrètes sont introduites dans le problème linéaire (1.13). On aboutit alors au système linéaire suivant :

$$\mathbb{K} \cdot \underline{W} = \underline{F} \quad (1.27)$$

Le vecteur  $\underline{W}$  contient les quantités lentes  $W_m, W_n, W_q$  qui sont les amplitudes de chaque rayon. La matrice  $\mathbb{K}$  est l'analogie discret de la forme bilinéaire  $\mathcal{A}$ , et le vecteur  $\underline{F}$  celui de la forme linéaire  $\mathcal{L}$ . Conformément à la formulation variationnelle employée, la matrice de raideur est pleine par bloc, à coefficients complexes, non-symétrique. Les termes de la matrice  $\mathbb{K}$  et du vecteur  $\underline{F}$  du système ci-dessus contiennent des exponentielles complexes multipliées par des polynômes  $P$  en  $k$ , qui viennent des opérateurs de dérivation, et de la dépendance des  $W_m$  par rapport à  $\underline{x}$  :

$$\mathbb{K}^{ij} = \sum_{\text{bord } B} \int_B P^{ij} e^{(k_i + k_j^*) \cdot \underline{x}} dl$$

$$\underline{F}^i = \sum_{\text{bord } B} \int_B P^i e^{k_i \cdot \underline{x}} dl$$

L'intégration est ensuite semi-analytique : la partie rapidement oscillante de la fonction, l'exponentielle, est traitée analytiquement, tandis que la partie lente, polynômiale, est traitée numériquement.

Le traitement à deux échelles permet au système de conserver une petite taille : en pratique, l'ordre de grandeur est de 100 d.d.l. par sous-structure, indépendamment de la fréquence considérée. Les inconnues  $\underline{W}$  une fois déterminées permettent de reconstruire la solution locale en post-traitement.

**3.7 Vérification *a posteriori* des conditions limites**

Les fonctions de forme vérifiant exactement les équations intérieures - relation de comportement et équilibre local - les seules erreurs pouvant survenir du fait de la réduction de l'espace d'admissibilité se situent au niveau des conditions limites. Afin de s'assurer que la discrétisation laisse un espace de fonctions de forme suffisamment complet, un effort particulier a été entrepris afin d'estimer les erreurs commises sur les équations de frontière.

L'estimateur d'erreur utilisé pour quantifier la vérification des conditions limites est un résidu en norme  $\mathcal{L}_2$  sur l'équation concernée, renormé par le maximum de la quantité d'intérêt correspondante. Par exemple, une condition limite du type « déplacement imposé » donne lieu à l'estimation suivante :

$$w = w_d \quad \text{sur } \partial_w \Omega \quad \Rightarrow \quad e_{\partial_w \Omega}^2 = \frac{1}{\text{mes}(\partial_w \Omega)} \frac{\int_{\partial_w \Omega} (w - w_d) \cdot (w - w_d)^* dl}{\max_{\Omega} (w \cdot w^*)} \quad (1.28)$$

Pour une condition de couplage entre deux sous-structures, on utilise la quantité analogue ; par exemple pour l'équation d'équilibre entre les moments de deux sous-structures :

$$M_1 + M_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \Rightarrow \quad e_{\Gamma, M}^2 = \frac{1}{\text{mes}(\Gamma)} \frac{\int_{\Gamma} (M_1 + M_2) \cdot (M_1 + M_2)^* dl}{\max(\max_{\Omega_1}(M_1 \cdot M_1^*), \max_{\Omega_2}(M_2 \cdot M_2^*))} \quad (1.29)$$

Deux versions de ces estimateurs ont été mises en œuvre pour éviter toute erreur. L'une calcule les intégrales de manière entièrement numérique, l'autre de manière semi-analytique - de manière similaire au calcul des termes de la formulation variationnelle de la *TVRC*. Dans la suite, nous vérifierons que les deux versions fournissent toujours des résultats quasi-identiques. La convergence de l'erreur sur les conditions limites en fonction de la discrétisation adoptée est étudiée de manière numérique dans l'annexe A.

### 3.8 Exemple d'application

Ce paragraphe permet d'illustrer le calcul par la *TVRC* ainsi que l'évaluation des erreurs sur les équations de frontière en traitant le cas d'une plaque encastree libre présentée sur la Figure 1.7. Les caractéristiques du problème y sont également indiquées.

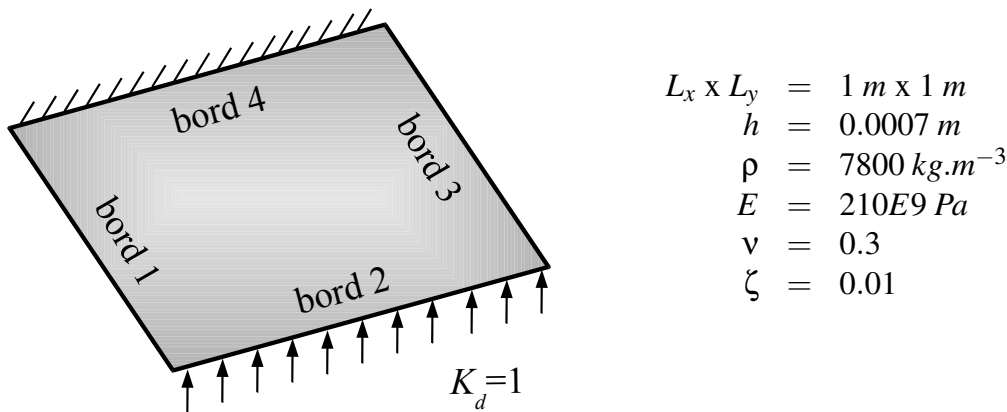


FIG. 1.7: Plaque simple en vibrations forcées.

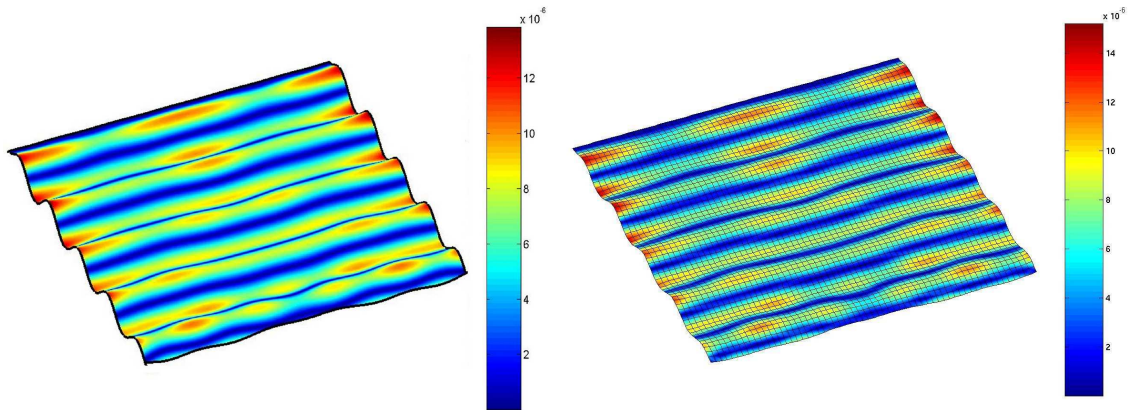
L'excitation est un effort tranchant unitaire à plusieurs fréquences (50 Hz, 150 Hz et 450 Hz). La discrétisation utilisée ici consiste en 48 rayons intérieurs et 4 x 13 rayons de bord.

La déformée du calcul éléments finis réalisé avec la toolbox *SDT* de *MATLAB* et celle du calcul *TVRC* sont représentées sur la Figure 1.8 pour la fréquence 150 Hz.

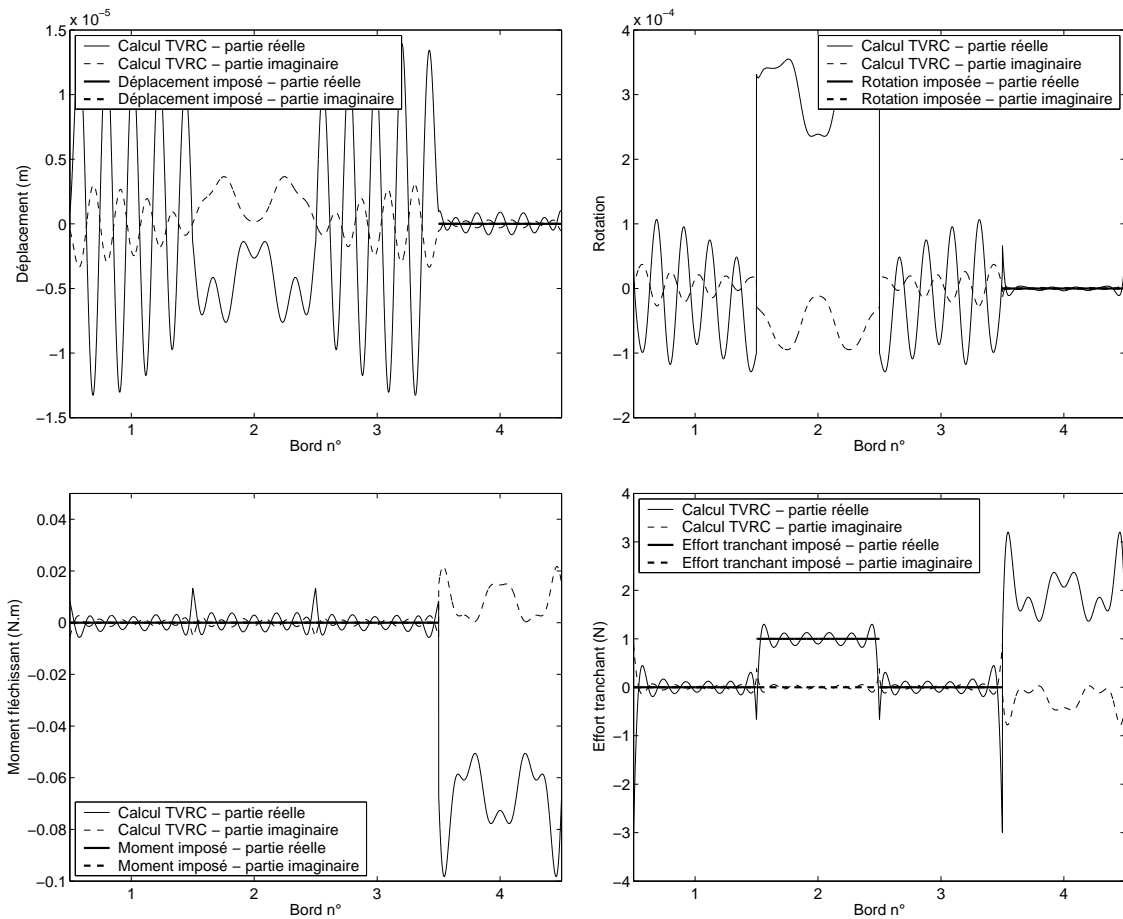
Sur la Figure 1.9 sont tracés les déplacements, rotations, moments et efforts tranchants sur la frontière de la plaque pour la fréquence 150 Hz. Le Tableau 1.2 résume les valeurs des erreurs évaluées par les estimateurs précédemment définis pour chacune des trois fréquences calculées.

Fréquence		50 Hz		150 Hz		450 Hz	
CL	$\partial\Omega$	$e_{num.}^2$	$e_{s.-anal.}^2$	$e_{num.}^2$	$e_{s.-anal.}^2$	$e_{num.}^2$	$e_{s.-anal.}^2$
$M_d = 0$	$(\Gamma_1)$	6.470E-5	6.480E-5	2.020E-4	2.061E-4	3.217E-3	3.221E-3
$K_d = 0$	$(\Gamma_1)$	2.245E-3	2.348E-3	1.309E-3	1.360E-3	4.357E-3	4.370E-3
$M_d = 0$	$(\Gamma_2)$	6.145E-5	6.251E-5	5.178E-5	5.268E-5	6.591E-3	6.592E-3
$K_d = 1$	$(\Gamma_2)$	7.868E-4	8.101E-4	2.892E-3	3.042E-3	2.179E-2	2.192E-2
$M_d = 0$	$(\Gamma_3)$	6.469E-5	6.479E-5	2.020E-4	2.061E-4	3.217E-3	3.221E-3
$K_d = 0$	$(\Gamma_3)$	2.234E-3	2.346E-3	1.309E-3	1.360E-3	4.357E-3	4.370E-3
$w_d = 0$	$(\Gamma_4)$	4.053E-6	4.168E-6	1.669E-4	1.670E-4	9.442E-3	9.501E-3
$w_{,nd} = 0$	$(\Gamma_4)$	6.116E-5	6.249E-5	1.611E-5	1.698E-5	1.853E-2	1.855E-2

**TAB. 1.2:** Erreurs relatives sur les conditions aux limites pour la plaque en vibrations forcées. La discrétisation TVRC utilisée comprend 48 rayons intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin.



**FIG. 1.8:** Déformée (en m.) calculée par la TVRC (à gauche) et SDT (à droite) d'une plaque en vibrations forcées à 150Hz. La discrétisation TVRC utilisée comprend 48 rayons intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin.



**FIG. 1.9:** Vérification des différentes conditions aux limites sur les bords de la plaque à 150 Hz : déplacement (en haut à gauche), rotation (en haut à droite), moment fléchissant (en bas à gauche), effort tranchant (en bas à droite). La discrétisation TVRC utilisée comprend 48 rayons intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin.

---

## Identification et recalage de modèles

La simulation numérique de la réponse d'un système s'appuie sur une représentation mathématique du comportement de la structure. Dans de nombreux cas, la qualité du modèle doit être améliorée grâce à des comparaisons avec un modèle expérimental, afin d'obtenir les paramètres optimaux aux vues des situations testées. Dans ce chapitre, nous revenons rapidement sur les méthodes d'identification et de recalage existantes. Ensuite notre intérêt se porte sur le recalage des liaisons, qui, bien que basé sur le même socle mathématique, semble présenter quelques différences par rapport au recalage des modèles classiques. Enfin, nous rappelons les fondements de la méthode basée sur l'erreur en relation de comportement telle qu'elle a été mise en œuvre dans des travaux antérieurs pour le recalage de modèles éléments finis, et explicitons la démarche proposée dans ce travail.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Méthodes d'identification et de recalage</b> . . . . .	<b>34</b>
1.1	Les méthodes directes . . . . .	34
1.2	Les méthodes paramétriques . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Recalage des modèles de liaisons</b> . . . . .	<b>36</b>
2.1	Différences avec l'identification de modèles globaux . . . . .	36
2.2	Méthodes directes . . . . .	37
2.3	Méthodes indirectes . . . . .	38
2.4	Identification de modèles non linéaires . . . . .	38
<b>3</b>	<b>La méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement</b>	<b>39</b>
3.1	L'erreur en relation de comportement . . . . .	39
3.2	Application au recalage de modèles . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Approche proposée pour le recalage des liaisons en moyennes fréquences</b>	<b>42</b>

---

# 1 Méthodes d'identification et de recalage

## 1.1 Les méthodes directes

Parmi les méthodes pour améliorer un modèle mathématique à partir de résultats d'essais, une première famille est constituée des méthodes directes (ou méthodes d'identification, méthodes globales). Elles tirent leur nom du fait que la correction est obtenue en une seule étape, sans processus itératif.

Parmi ces approches, les méthodes « de norme minimale » [Bar82, BN83] recherchent des matrices de correction de raideur et de masse  $\Delta\mathbb{K}$  et  $\Delta\mathbb{M}$  minimisant un écart par rapport aux mesures traduit par une norme matricielle.

On peut également placer dans cette famille les méthodes issues de la théorie du contrôle désignée par les termes *Eigenstructure Assignment Methods* [ZK92, LK94, SPA96].

De manière générale, les corrections apportées ont peu de sens physique, ce qui restreint le domaine de validité de ces approches aux situations expérimentales qui ont servi à l'identification. Par exemple, la forme des matrices éléments finis n'est pas respectée. Pour palier à cette difficulté, des travaux proposent de respecter la structure initiales des matrices [Kab85, CG88, SB91]. Les méthodes de correction de rang minimum [ZK94, KZ94, ZS95, ZSKB96, Doe96] proposent d'opter pour des corrections plus locales.

Enfin ajoutons à ces méthodes directes les *Matrix Mixing Methods* [Ros72, Tho72], dans lesquelles les matrices de masse et de raideur sont construites directement sous forme diagonalisée à partir des modes propres et fréquences propres mesurés, ce qui nécessite des mesures très précises et très étendues spatialement.

Dans [AW01a, AW01b] est développée une méthode directe pour identifier l'amortissement non proportionnel et non visqueux de la structure. L'approche est complétée par [AW02a] afin de conserver le caractère symétrique de la matrice d'amortissement. Dans cette approche, l'amortissement est supposé faible et les données expérimentales utilisées sont les modes et fréquences propres complexes. Un problème est celui de l'unicité du modèle identifié, et l'influence de bruit de mesure [AW02b], qui fausse l'identification lorsque le modèle supposé est trop loin de la réalité. Pour les structures élancées, la relation de dispersion complexe peut être déterminée par la résolution d'un problème aux valeurs propres [HIJ05]. Dans [BIJ03], la *Wave Inhomogeneous Conductivity Approach* permet de déterminer la distribution directionnelle des nombres d'onde complexes, à partir de mesures de champ. La méthode utilise un indice de corrélation entre le champ mesuré et la forme théorique d'ondes planes propagatives harmoniques amorties pour déterminer la contribution énergétique de ces ondes planes au champ total.

## 1.2 Les méthodes paramétriques

Les méthodes paramétriques (ou méthodes de recalage) s'appuient sur un modèle dépendant de paramètres  $\underline{q}$  le plus souvent matériaux, quelquefois géométriques, de la

structure étudiée. À partir de la déformée du modèle numérique  $\underline{U}_{(q)}$  et du modèle expérimental  $\underline{\tilde{U}}$  est construite une fonctionnelle coût  $J_{(q)}$  qui mesure la distance entre les deux modèles [Tar87, Nat88] :

$$J_{(q)} = \|\underline{U}_{(q)} - \underline{\tilde{U}}\|_U^2 + \lambda \|\underline{q} - \underline{q}_0\|_q^2 \quad (2.1)$$

Une distance nulle correspond évidemment à une corrélation parfaite entre le modèle mathématique supposé et les mesures effectuées. Le premier terme de la fonctionnelle, appelé *terme de pénalisation*, traduit une distance entre le modèle numérique et les mesures. Le second terme constitue le *terme de régularisation (de Tikhonov)*, pondéré par un coefficient  $\lambda$  ; il permet au processus de recalage de ne pas diverger en restant proche du modèle initial  $\underline{q}_0$ . C'est surtout le type de données expérimentales utilisées dans le terme de pénalisation, plus que les normes  $\|\cdot\|_U$  et  $\|\cdot\|_q$ , qui distingue les différentes approches :

- les approches basées sur les **caractéristiques modales**, modes propres et fréquences propres, utilisent des résidus tels que la déviation en fréquence  $\Delta f$  ou le critère de MAC. Elles sont principalement destinées à des structures qui ont un comportement modal et faiblement amorti.
- les approches utilisant les **fonctions de réponse en fréquence (FRF)**. Supposons le problème éléments finis écrit dans le domaine fréquentiel :

$$[\mathbb{K} + i\omega\mathbb{B} - \omega^2\mathbb{M}] \underline{U} = \underline{F} \quad (2.2)$$

Plusieurs types de résidus peuvent être employés pour construire le terme de pénalisation :

- **les résidus en entrée** [BOQ<sup>+</sup>91, FH93] :

$$R_{(q)} = [\mathbb{K} + i\omega\mathbb{B} - \omega^2\mathbb{M}] \underline{\tilde{U}} - \underline{\tilde{F}} \quad (2.3)$$

Si toutes les mesures sont complètes, l'hypothèse d'une dépendance linéaire de l'opérateur par rapport aux paramètres mène à un problème d'optimisation linéaire, donc non itératif. Il devient itératif lorsque les mesures sont incomplètes et doivent être prolongées par une méthode d'expansion. Toutefois ce procédé est très peu robuste par rapport au bruit de mesure [Fri86, Mot88].

- **les résidus en sortie** [PLC91, LBL<sup>+</sup>95] :

$$R_{(q)} = [\mathbb{K} + i\omega\mathbb{B} - \omega^2\mathbb{M}]^{-1} \underline{\tilde{F}} - \underline{\tilde{U}} \quad (2.4)$$

La méthode est robuste vis à vis du bruit de mesure mais le problème de minimisation qui en découle est fortement non-linéaire. Elle a été utilisée notamment dans [CFN84, CN86, CPN92, Nat88].



- **les résidus énergétiques**, parmi lesquels la méthode de l'erreur en relation de comportement introduite dans [Lad83b] qui sera détaillée plus loin. Citons également des méthodes très proches telles que la *Minimum Dynamic Residual Expansion* [Bal00] et la *Modeling Error in the Constitutive Equations* [PGR97].
- quelques approches utilisent des **données temporelles**. Elles sont surtout utilisées pour l'identification de modèles non linéaires, pour lesquels les méthodes précédentes ne sont plus valables.

Mentionnons le fait que les méthodes paramétriques impliquent le plus souvent un très grand nombre de paramètres à recaler, ce qui mènerait à un coût de calcul énorme si le processus de recalage était lancé en intégrant l'ensemble de ces paramètres. Une **sélection des paramètres à recaler** est presque toujours opérée, de manière à choisir quels sont ceux entrant en jeu dans la minimisation. Certaines approches mènent cette sélection en calculant les termes de sensibilité des matrices [ZLFP87, MMFJ00], en utilisant la méthode du meilleur sous-espace [ZLFP87], en localisant les zones contribuant le plus à la valeur d'un résidu [OBC84, LP90, FH93] ou encore les zones montrant un indicateur d'erreur en énergie élevé [MGS95, BA95, BR98, Pas99, BB01]. C'est dans cette dernière catégorie que se place la méthode basée sur l'erreur en relation de comportement.

Plus de détail concernant les méthodes d'identification et de recalage pourront être trouvées dans [MF93, Cho97, Der01, BC05].

## 2 Recalage des modèles de liaisons

### 2.1 Différences avec l'identification de modèles globaux

Dans [NRE93] il est discuté des différences entre l'identification des paramètres de liaisons et l'identification des modèles complets. Si les méthodes mathématiques pour résoudre les deux types de problèmes sont identiques, le recalage des modèles de jonction se différencie tout de même par un certain nombre de points, que l'on peut résumer ainsi :

- Les liaisons réelles sont difficilement modélisables. La géométrie est souvent de taille très réduite mais extrêmement compliquée à décrire, impliquant parfois des éléments additionnels (boulons, rivets, ...). Elles sont le lieu de phénomènes complexes qui, quand ils ne sont pas inconnus, sont fortement non linéaires et difficilement modélisables : contact, frottement, ... [ELRC96, NB99]. Aussi les modèles de liaisons utilisés en pratique sont très simplificateurs (cf. Section 3.3), et les coefficients des modèles sont soumis à une forte méconnaissance. C'est pourquoi la valeur des paramètres ne relève pas simplement de la géométrie et des matériaux [WS90] et nécessite un procédé d'identification.

- L'identification des modèles de liaisons est souvent bien plus mal conditionnée que celle d'une structure, et l'inversion du système (pour les méthodes directes) est alors très sensible au bruit de mesure [RB95], ou bien le processus itératif bien plus long à converger [NRE93].
- Les paramètres géométriques, quand il y en a, ont une influence bien plus importante que la raideur ou l'amortissement, comme reporté dans [MFNB96].
- Certains paramètres sont difficilement identifiables : les raideurs trop importantes posent beaucoup de difficultés [NRE93, GNH91] si bien qu'il est conseillé de les considérer comme infiniment rigides ; l'influence de l'amortissement est également très peu visible par rapport à celle de la raideur [WL91], aussi son identification doit être menée à part et requiert une connaissance précise de la raideur.
- Les erreurs de discrétisation qui interviennent en moyennes et hautes fréquences polluent l'erreur de modélisation des jonctions [MS93].
- Les études faites jusqu'ici se contentant d'étudier une seule liaison, il n'est pas utile d'opérer une sélection des paramètres, à part pour les raisons d'identifiabilité citées plus haut ; toutefois sur une structure de taille industrielle pouvant comporter plusieurs dizaines de liaisons, il peut sembler intéressant de réduire le nombre de paramètres à l'aide de méthodes semblables à celles utilisées dans le recalage de modèles.

Notons de plus qu'une partie importante des méthodes citées nécessitent de pouvoir mesurer les quantités très proches des jonctions [WL91, GNH91, KP94, RB95], ce qui peut s'avérer très délicat, voire irréalisable. Une approche évitant cet écueil est proposée dans [AMF01] pour le recalage de la matrice de raideur d'une jonction. Elle nécessite de mesurer autant de fréquences propres que de degrés de libertés de la jonction.

## 2.2 Méthodes directes

La plupart des méthodes directes utilisent comme données expérimentales les caractéristiques modales. Dans [WS90] est utilisée la méthode *Rayleigh Quotient Iteration*, dans laquelle les coefficients sont issus de la comparaison directe entre les données modales mesurées et les équations diagonalisées du modèle. La procédure itérative n'est nécessaire que si les vecteurs propres ne sont pas exacts. Dans [BB93] la dépendance des matrices de masse et de raideur est écrite explicitement, les paramètres sont identifiés en utilisant le pseudo-inverse. La *Modal Based Direct Updating Method* [NRE95] utilise également les modes propres et fréquences propres ; le processus devient itératif en raison de données expérimentales incomplètes, et montre une certaine robustesse par rapport au bruit de mesure, à la fois pour la localisation et la correction. Ces méthodes ne sont toutefois appliquées qu'à des cas pas ou peu amortis - sinon les modes deviennent complexes

et couplés - et en basses fréquences.

Très peu de méthodes directes utilisent les FRF comme données expérimentales. Citons [RB95] qui repose sur une méthode de moindres carrés. La robustesse par rapport au bruit de mesure vient de ce que l'information utilisée est de taille importante (avantage des FRF) et d'une élimination *a priori* des termes susceptibles d'être grandement affectés par le bruit de mesure. Dans [Hwa98] la robustesse provient de l'élimination des fréquences pour lesquelles la réponse est trop faible, et d'une moyenne statistique des valeurs identifiées à chaque fréquence. Pour se libérer de la sensibilité au bruit de mesure, dans [WL91] il est décidé d'opter pour une stratégie itérative.

### 2.3 Méthodes indirectes

Là aussi les données peuvent être de type modales ou fréquentielles, ou encore temporelles.

Une bibliographie des méthodes de perturbation et de sensibilité est proposée dans [NRE93]. Parmi les méthodes de sensibilité, les auteurs utilisent l'*Inverse Eigensensitivity Analysis Method*. On trouve également l'*Eigenvalue Sensitivity Method* [MFNB96], qui minimise un résidu sur la sensibilité des valeurs propres par rapport aux paramètres, régularisé par un terme de confiance au modèle initial. Par rapport à la méthode précédente, seules les fréquences propres sont nécessaires. Citons également [MJP99] qui se limite à des essais statiques et les travaux [ER00] et [ELRC96] qui tentent de se placer en hautes fréquences en adoptant un modèle de Timoshenko et des liaisons non linéaires. Dans [MS93] est étudiée l'effet de la pollution due aux erreurs de discrétisation quand on monte en fréquence.

Parmi les méthodes utilisant les FRF, on trouve l'utilisation de résidus en entrée : [WL91] déjà citée plus haut, [KP94] qui utilisent le pseudo-inverse de la matrice des FRF avec des jonctions non-linéaires, [KP97] où les FRF expérimentales sont reconstruites à partir des caractéristiques modales de la structure. Les résidus en sortie sont utilisés dans [GNH91] en statique, [AS93] et [YP93].

Enfin, citons [HC98] qui utilisent des données temporelles.

### 2.4 Identification de modèles non linéaires

La plupart des investigations sur l'identification des modèles non-linéaires utilisent des données temporelles, comme dans [MMSC87]. Dans [IZP99] une force de friction stochastique est identifiée à partir des mesures temporelles.

Dans [KP94], ce sont les FRF qui sont utilisées ; pour tenir compte des non-linéarités il est proposé soit de faire varier l'amplitude de l'excitation à une fréquence donnée, soit de faire varier la fréquence en gardant l'amplitude de l'excitation constante.

### 3 La méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement

Les premiers travaux sur l'erreur en relation de comportement étaient destinés au contrôle de la qualité d'un modèle éléments finis. On trouve dans ce domaine trois écoles : une approche basée sur le lissage des contraintes [KGZB83], une seconde approche repose sur les résidus des équations d'équilibre [BR79], et enfin l'approche basée sur l'erreur en relation de comportement [LL83].

L'application aux problèmes de recalage a été initiée dans [Lad83b] pour les problèmes de vibrations libres utilisant les modes et fréquences propres [LR89]. L'application aux problèmes de vibrations forcées est faite dans [Lad93] et [LRM94] pour le recalage de masse, raideur et amortissement en utilisant l'erreur de Drucker [LC98, CLP98, Lad98a, LC99]. Une autre variante, reposant sur l'erreur en dissipation [LM97, Lad98b, CDLLL00] est mise en place pour le recalage des modèles d'amortissement. La méthode a été utilisée pour le redressement des données expérimentales et le recalage de l'amortissement sur des structures élancées dans [LL04]. Une application de la méthode à l'utilisation de mesures fortement corrompues en dynamique transitoire a été étudiée dans [AFT03]. Son extension vise le recalage du comportement viscoplastique et à la rupture à partir d'essais dynamiques [NAF06]. Enfin l'extension à l'identification de modèles stochastiques par la méthode de l'erreur en relation de comportement est envisagée dans [LPDR06].

Bien que l'approche que nous utilisons ne mette en doute que les équations de liaison, nous commençons par présenter l'erreur en relation de comportement telle qu'elle a été utilisée dans les travaux précédents pour la vérification des calculs éléments finis et le recalage de modèles éléments finis, et dans laquelle la relation de comportement de l'ensemble de la structure est supposée non fiable.

#### 3.1 L'erreur en relation de comportement

Reprenons le problème de référence de la Section 1.3.2. Contrairement au principe de la TVRC, l'idée de la méthode est de mettre en doute la relation de comportement de la structure, et de faire confiance aux conditions aux limites et à l'équilibre intérieur (cf. Tableau 2.1).

Un couple de champ  $(\underline{U}, \sigma)$  est dit *admissible* s'il vérifie les équations fiables :

$$(\underline{U}, \sigma) \in \mathcal{S}_{ad} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{U} \text{ est cinématiquement admissible} \\ \sigma \text{ est statiquement admissible} \end{cases}$$

La vérification des relations de comportement se fait par la construction de l'erreur en

	Équations du modèle
Équations fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Géométrie</li> <li>• Équations cinématiquement admissibles</li> <li>• Équations statiquement admissibles</li> </ul>
Équations non fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relations de comportement</li> </ul>

**TAB. 2.1:** Principe de l'erreur en relation de comportement.

relation de comportement  $E_{RdC}^2$ , telle que :

$$E_{RdC}^2(\underline{U}, \sigma) \geq 0 \tag{2.5}$$

$$E_{RdC}^2(\underline{U}, \sigma) = 0 \Leftrightarrow (\underline{U}, \sigma) \text{ vérifient les relations de comportement}$$

Le problème de référence est alors réécrit sous la forme :

$$\text{Trouver}(\underline{U}, \sigma) \in S_{ad} \text{ et minimisant } E_{RdC}^2$$

La valeur de l'erreur en relation de comportement n'est nulle que lorsque les relations de comportement sont exactement vérifiées. Toutes les équations du modèle sont alors satisfaites. Autrement, l'erreur en relation de comportement permet de quantifier la vérification des équations non fiables. Dans le cas de problèmes bien posés, il est démontré dans [Lad93] que la solution obtenue est la solution exacte du problème de référence.

### 3.2 Application au recalage de modèles

Dans le cadre du recalage, le modèle comprend non seulement les équations mathématiques, mais également les informations expérimentales. Parmi ces dernières, le procédé expérimental permet de distinguer certaines quantités relativement fiables - classiquement la position des capteurs, la fréquence d'excitation, ... - et d'autres quantités moins sûres - les amplitudes mesurées, bruitées, éventuellement l'orientation des capteurs, ... La démarche est synthétisée dans le Tableau 2.2.

L'admissibilité est alors constituée de toutes les informations fiables, qu'elles proviennent du modèle mathématique ou du modèle expérimental. La fonctionnelle à minimiser se compose alors d'une *erreur de modèle* - l'erreur en relation de comportement

	Équations du modèle	Données expérimentales
Équations fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Géométrie</li> <li>• Équations cinématiquement admissibles</li> <li>• Équations statiquement admissibles</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fréquences mesurées</li> <li>• Position des capteurs</li> <li>• Orientation des capteurs</li> </ul>
Équations non fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relations de comportement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Amplitudes mesurées <math>\underline{\tilde{U}}</math></li> <li>• Force d'excitation <math>\underline{\tilde{F}}</math></li> </ul>

**TAB. 2.2:** Principe de la méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement.

$E_{RdC}^2$  - et d'une *erreur par rapport aux mesures*  $E_{Mes}^2$ . La première quantifie la vérification des équations non fiables du modèle mathématique, tandis que la seconde mesure la vérification des informations expérimentales non fiables. La fonctionnelle prend le nom d'*erreur en relation de comportement modifiée* et est notée  $E_{Mod}^2$  :

$$\begin{aligned}
 E_{Mod}^2 &= E_{RdC}^2 + \frac{P}{1-p} E_{Mes}^2 \\
 &= E_{RdC}^2 + \frac{P}{1-p} \{ \|\Pi \underline{U} - \underline{\tilde{U}}\|^2 + \|\Pi \underline{F} - \underline{\tilde{F}}\|^2 \}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

L'opérateur  $\Pi$  permet de projeter la solution sur les points mesurés. Le facteur  $p$  est compris entre 0 et 1 ; il permet d'accorder plus ou moins de confiance au modèle ou aux mesures. La méthode des éléments finis est ensuite utilisée pour résoudre le problème de manière numérique.

Plusieurs variantes de l'erreur en relation de comportement ont été utilisées. Dans [Cho97], l'erreur en relation de comportement est construite à partir des conditions de stabilité de Drucker que vérifient une large gamme de matériaux. Dans [Der01], on utilise l'erreur en dissipation pour mettre en avant les phénomènes dissipatifs afin de mieux identifier l'amortissement. Grâce à l'utilisation des variables internes, seule la partie dissipative de la relation de comportement - les lois d'évolution - est mise en doute, le reste de la relation de comportement - les lois d'état - étant supposé fiable.

La stratégie adoptée pour le recalage de modèles éléments finis distingue ensuite deux étapes :

- **L'étape de localisation** : elle permet d'évaluer l'erreur sur chaque élément de la

structure. Les zones les plus mal modélisées sont les zones sur lesquelles l'erreur de modèle est la plus élevée. Cette étape est linéaire.

- **L'étape de correction** : une fois les relations de comportement erronées sélectionnées, on cherche les paramètres optimaux du modèle en minimisant la fonctionnelle coût par rapport aux paramètres sélectionnés. Ce processus d'optimisation est non linéaire et résolu de manière itérative. Au terme de cette étape, le procédé de recalage est arrêté si l'erreur est suffisamment faible ; dans le cas contraire, on procède à une nouvelle étape de localisation puis de correction, et ainsi de suite.

## 4 Approche proposée pour le recalage des liaisons en moyennes fréquences

Le contexte dans lequel se place ce travail est celui du recalage de modèle en vibrations moyennes fréquences. L'hypothèse est que les erreurs les plus importantes sont commises sur la modélisation des jonctions entre sous-structures, qui sont le lieu de phénomènes complexes et mal connus. L'amortissement, en particulier est un point essentiel dans ce domaine de fréquences. Pour beaucoup de structures industrielles, la plupart de l'énergie est en effet dissipée dans les jonctions.

Outre la stratégie de résolution numérique, ce travail se distingue des études précédentes par un choix différent des équations non fiables : **ce sont les équations de liaison qui constituent les équations non fiables du modèle**. Les autres équations, celles des sous-structures (équilibre dynamique local et relations de comportement intérieures), seront supposées fiables et vérifiées de façon exacte. S'il est besoin, des approches particulières peuvent permettre d'identifier les caractéristiques vibratoires de la structure tels le nombre d'onde ou l'amortissement spatial [BIJ05]. Le Tableau 2.3 montre la partition des informations qui est proposée dans ce travail. Notons que certaines conditions aux limites et certaines jonctions peuvent éventuellement être considérées comme fiables. Ce peut être le cas par exemple des bords libres, des encastremets (même s'ils ne sont qu'un modèle imparfait), ou de liaisons bien connues, par exemple les liaisons très rigides. Leurs équations entrent alors dans l'admissibilité et sont vérifiées de manière exacte.

Sur le plan numérique, la stratégie choisie pour les moyennes fréquences est la théorie variationnelle des rayons complexes qui a été présentée dans le chapitre précédent. La principale difficulté est que cette méthode traite l'ensemble des conditions aux limites et des équations d'interface dans une seule et même formulation variationnelle. **Sous sa forme traditionnelle, la formulation TVRC ne permet pas de séparer les équations de liaisons non fiables d'autres conditions aux limites considérées comme fiables**. De plus, la formulation variationnelle ne repose pas sur l'écriture d'un minimum - l'opérateur n'est pas symétrique - ce qui ne permet pas de construire une erreur de modèle comme dans le cadre éléments finis.

Pour cette raison, nous allons maintenant introduire une version « sous-structurée » de la TVRC. Cette variante consiste à isoler les interfaces mal modélisées du reste de la

structure. **Sous cette forme, il est alors possible de construire une erreur de modèle portant sur les jonctions à recalier, tandis que la TVRC permet de traiter les équations fiables du modèle.** Notons que le terme de modèle introduit ne sera pas une véritable erreur en relation de comportement, mais consistera en un simple résidu en norme  $\mathcal{L}_2$  des équations de liaisons non fiables (cf. Chapitre 3). De ce point de vue, il est plus convenable de proposer l'appellation de « résidu modifié [des équations de liaisons] ». Cependant l'esprit de la méthode de recalage est conservé à l'identique pour séparer les informations en données fiables et non fiables. Ce résidu sera ensuite complété par une distance aux données expérimentales dans le Chapitre 4, afin de construire un problème inverse.

	Modèle mathématique	Modèle expérimental
Informations fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Géométrie</li> <li>• Équations des sous-structures</li> <li>• Conditions aux limites fiables (autres que la liaison)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fréquences mesurées</li> <li>• Position des points de mesure</li> <li>• Orientation des mesures</li> <li>• Force d'excitation imposée</li> </ul>
Informations non fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Équations de liaison :                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- loi de comportement de liaison</li> <li>- équilibre dynamique de liaison</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Amplitudes mesurées (bruitées)</li> </ul>

**TAB. 2.3:** Démarche proposée pour le recalage des liaisons.





## **Deuxième partie**

### **Mise en œuvre d'une approche de recalage des liaisons adaptée aux moyennes fréquences**



---

## Une version « sous-structurée » de la théorie variationnelle des rayons complexes adaptée au problème inverse

Dans sa version traditionnelle, la théorie variationnelle des rayons complexes utilise un couplage de toutes les conditions de frontière au travers de la formulation variationnelle employée, ce qui n'est pas adapté à l'approche proposée pour résoudre le problème inverse. Pour contourner la difficulté, une nouvelle formulation de la *TVRC* est introduite : l'idée est de considérer l'interface comme une sous-structure à part entière possédant ses propres inconnues, ce qui permet de séparer les équations des sous-structures - qui seront vérifiées de manière « exacte »- des équations de l'interface - qui sont résolues par la minimisation d'un résidu. Par souci de clarté, la présentation de cette approche est d'abord faite avec des liaisons parfaitement rigides. Des modèles de liaisons souples, dissipatifs, et hétérogènes sont ensuite intégrés à la *TVRC* dans ses versions classique et sous-structurée pour permettre de modéliser plus finement les jonctions d'une structure réelle.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Une version « sous-structurée » de la théorie variationnelle des rayons complexes : cas des liaisons parfaitement rigides . . . . .</b>	<b>48</b>
1.1	Compatibilité sous-structures/interface . . . . .	49
1.2	Problème d'interface : cas des liaisons parfaitement rigides . . . . .	49
1.3	Problème final . . . . .	50
1.4	Écriture discrétisée du problème . . . . .	50
1.5	Structures comprenant plusieurs interfaces . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Validation de la nouvelle approche . . . . .</b>	<b>53</b>
2.1	Quantités d'intérêt . . . . .	53
2.2	Application au problème des plaques en « L » . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Modélisation de liaisons complexes . . . . .</b>	<b>56</b>
3.1	État de l'art . . . . .	56
3.2	Modèle continu des liaisons complexes . . . . .	57
3.3	Implémentation des modèles de liaisons complexes dans la <i>TVRC</i> . . . . .	58
3.4	Application : influence des paramètres du modèle . . . . .	59
3.5	Exemple de liaison hétérogène . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>70</b>

---

# 1 Une version « sous-structurée » de la théorie variationnelle des rayons complexes : cas des liaisons parfaitement rigides

La méthode est tout d'abord présentée sur le problème de référence de la Figure 1.1. Dans le but de valider cette approche par rapport à la version classique de la TVRC de la Section 1.3, l'approche est développée dans le cas d'une liaison parfaitement rigide. Le point central consiste à considérer l'interface  $\Gamma$  comme **une sous-structure à part entière**, possédant ses propres équations - les équations (1.9c) et (1.10e) - et ses propres inconnues appelées *quantités d'interface* et indiquées par  $\hat{\cdot}$  (cf. Figure 3.1). Le problème comprend alors deux parties :

- le **problème de compatibilité entre sous-structures  $\Omega_i$  et interface  $\Gamma$** , qui sera écrit sous la forme d'un problème TVRC traditionnel. On aboutit ainsi à un espace d'admissibilité  $S_{ad}^{\Gamma, \Omega}$ ,
- le **problème d'interface**, qui donne lieu à la construction d'un résidu sur les équations d'interface, appelé *erreur d'interface*, dont on cherchera un minimum. Ce résidu est écrit entre les quantités d'interface  $(\hat{u}_1, \hat{\sigma}_1)$  relatives à la sous-structure  $\Omega_1$  et les quantités  $(\hat{u}_2, \hat{\sigma}_2)$  relatives à la sous-structure  $\Omega_2$ .

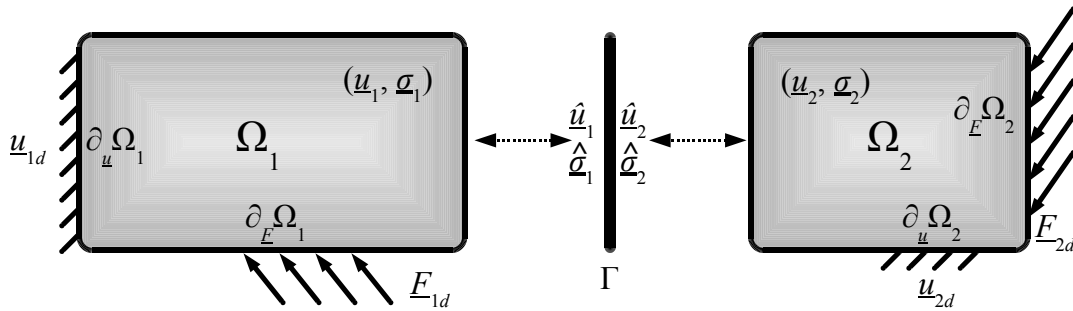


FIG. 3.1: Nouvelle formulation « sous-structurée » du problème.

Le problème final consiste à trouver la solution minimisant l'erreur d'interface à l'intérieur de l'espace d'admissibilité  $S_{ad}^{\Gamma, \Omega}$ .

L'admissibilité ainsi construite permet de vérifier de façon quasi-exacte les équations des sous-structures et les conditions limites estimées « fiables ». La seule erreur commise apparaît lorsque la compatibilité sous-structures/interface est discrétisée par la TVRC, erreur qui reste tout à fait acceptable. Un contrôle des erreurs *a posteriori* sera effectué comme à la Section 1.3.7.

Quant aux équations d'interface, elles sont assurées par la minimisation d'un résidu, donc de manière plus faible que celles des sous-structures de façon à laisser la priorité aux équations fiables de la structure. Dans l'écriture du problème inverse, ce résidu deviendra l'*erreur de modèle*, à laquelle il sera ajouté une *erreur par rapport aux mesures*, l'ensemble formant la fonctionnelle coût que l'on cherchera à minimiser pour obtenir les paramètres optimaux du modèle de liaison.

## 1.1 Compatibilité sous-structures/interface

Sur chaque sous-structure  $\Omega_i$ , nous avons fait le choix d'une approche par condensation dans laquelle les efforts d'interface  $\hat{\sigma}_i \mathbf{n}_i$  sont imposés. On recherche donc le couple  $s_i = (\underline{u}_i, \sigma_i)$  tel que :

–  $s_i = (\underline{u}_i, \sigma_i)$  appartient à l'espace des champs à énergie finie  $\mathcal{U}_i \times \mathcal{S}_i$

–  $\underline{u}_i$  est cinématiquement admissible :

$$\underline{u}_i = \underline{u}_{id} \quad \text{sur } \partial_{\underline{u}} \Omega_i \quad (3.1)$$

$$\underline{u}_i = \hat{\underline{u}}_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.2)$$

–  $\sigma_i$  est dynamiquement admissible :

$$\underline{\text{div}} \sigma_i = -\rho_i \omega^2 \underline{u}_i \quad \text{sur } \Omega_i \quad (3.3)$$

$$\sigma_i \mathbf{n}_i = \underline{F}_{id} \quad \text{sur } \partial_F \Omega_i \quad (3.4)$$

$$\sigma_i \mathbf{n}_i + \hat{\sigma}_i \mathbf{n}_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.5)$$

–  $(\underline{u}_i, \sigma_i)$  vérifient la relation de comportement de la sous-structure  $\Omega_i$  :

$$\sigma_i = \mathbf{K}_i \varepsilon(\underline{u}_i) \quad \text{sur } \Omega_i \quad (3.6)$$

Ces équations sont traitées sur chaque sous-structure grâce à la *TVRC* par l'équation (1.27). Le système linéaire obtenu forme un espace d'admissibilité  $\mathcal{S}_{ad}^{\Gamma, \Omega_i}$  auquel doit appartenir le couple  $\hat{s}_i = (\hat{\underline{u}}_i, \hat{\sigma}_i)$ .

## 1.2 Problème d'interface : cas des liaisons parfaitement rigides

Nous construisons ensuite l'*erreur d'interface*  $E_{int}^2$  qui est un résidu en norme  $\mathcal{L}^2$  sur les équations d'interface, ici une liaison parfaitement rigide :

$$\hat{\underline{u}}_1 = \hat{\underline{u}}_2 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.7)$$

$$\hat{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 + \hat{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.8)$$

L'erreur d'interface s'écrit de la manière suivante :

$$E_{int}^2 = \frac{1}{N_u} \int_{\Gamma} \|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\|^2 dl + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{N_{\sigma}} \int_{\Gamma} \|\hat{\sigma}_1 \underline{n}_1 + \hat{\sigma}_2 \underline{n}_2\|^2 dl \quad (3.9)$$

avec :

$$N_u = \text{mes}(\Gamma) \cdot \max(\max_{\Omega_1} u_1, \max_{\Omega_2} u_2) \quad (3.10)$$

$$N_{\sigma} = \text{mes}(\Gamma) \cdot \max(\max_{\Omega_1} \sigma_1, \max_{\Omega_2} \sigma_2) \quad (3.11)$$

Le rôle des coefficients  $N_u$  et  $N_{\sigma}$  est d'adimensionner chacun des termes de l'erreur, de manière à ne pas privilégier une équation d'interface par rapport à l'autre. Toutefois si l'une des équations est plus sûre que l'autre, il est possible de lui accorder plus de confiance par l'intermédiaire du paramètre  $\alpha$ . Dans ce travail,  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$  sera toujours pris égal à 1, ne privilégiant aucune des deux équations. Dans la pratique,  $N_u$  et  $N_{\sigma}$  seront estimés à partir des sollicitations imposées sur la structure, afin de les rendre indépendants des inconnues du problème. Ceci permettra d'avoir l'erreur d'interface ci-dessus quadratique par rapport aux inconnues, sa minimisation se ramènera à l'inversion d'un système linéaire.

### 1.3 Problème final

Le problème s'écrit finalement :

**Problème sous-structuré** : Trouver  $\hat{s}_i = (\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i)_{i=1,2}$  tels que :

- $\hat{s}_i = (\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i)$  appartient à l'espace d'admissibilité  $S_{ad}^{\Gamma, \Omega_i}$  pour  $i = 1, 2$ ,
- $\hat{s}_i = (\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i)_{i=1,2}$  minimisent  $E_{int}^2$ .

Ainsi, la solution exacte sera obtenue lorsque l'erreur d'interface  $E_{int}^2$  est nulle.

### 1.4 Écriture discrétisée du problème

Afin de résoudre le problème de manière numérique, les grandeurs des sous-structures  $(\underline{u}_i, \sigma_i)$  sont toujours discrétisées selon l'approche proposée par la TVRC, en séparant la partie rapidement oscillante et connue de la partie lente qui est à déterminer (cf. Section 1.3.6). Les quantités  $(\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i)$  relatives à l'interface  $\Gamma$  sont également discrétisées. Parmi plusieurs choix possibles, le plus intuitif semble être celui d'une discrétisation « compatible » (au sens d'un maillage éléments finis) : pour que les quantités des sous-structures et des interfaces puissent coïncider, ces dernières sont recherchées dans un espace identique à celui des sous-structures. Il sera toutefois possible de réduire cet espace, mais sur

le plan théorique, il est nécessaire que l'espace des quantités d'interface soit de dimension inférieure ou égale à la dimension de l'espace auquel appartiennent les quantités  $(\underline{u}_i, \sigma_i)$ .

La compatibilité sous-structures/interface s'écrit sur le plan discret sous la forme d'un système linéaire :

$$\mathbb{K}_{adm} \left| \begin{array}{l} \underline{W} \\ \underline{\hat{W}} \end{array} \right. = \underline{F}_{adm} \quad (3.12)$$

dans lequel  $\underline{W}$  représente les quantités des sous-structures et  $\underline{\hat{W}}$  celles des interfaces. La matrice d'admissibilité  $\mathbb{K}_{adm}$  provient de l'assemblage des matrices des systèmes TVRC utilisés pour assurer la compatibilité entre chaque sous-structure et l'interface (cf. équation (1.27)), le vecteur  $\underline{F}_{adm}$  contient les termes d'efforts et de déplacements extérieurs imposés sur la structure.

L'erreur d'interface prend la forme quadratique suivante :

$$E_{int}^2 = \frac{1}{2} \underline{\hat{W}}^T \cdot \mathbb{K}_{int} \cdot \underline{\hat{W}} \quad (3.13)$$

dans lequel  $\mathbb{K}_{int}$  est hermitienne.

Le problème final est la minimisation de l'erreur d'interface sous les contraintes du système d'admissibilité. Il est résolu par la minimisation du Lagrangien associé, ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbb{K}_{int}^{sym} & \mathbb{K}_{adm}^T \\ \mathbb{K}_{adm} & \mathbb{O} \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} \underline{W} \\ \underline{\hat{W}} \\ \underline{\lambda} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \underline{0} \\ \underline{F}_{adm} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

## 1.5 Structures comprenant plusieurs interfaces

Dans le cadre de la modélisation d'une structure réelle, plusieurs interfaces entre sous-structures peuvent apparaître. Il pourra être souhaitable de chercher à n'en identifier qu'une partie, auquel cas l'erreur construite doit intégrer les erreurs de modèle de chaque interface que l'on cherche à identifier. La méthode proposée est d'étendre la formulation précédente de manière naturelle à une structure de  $N_s$  sous-structures  $\Omega_i, i=1,2,\dots,N_s$  reliées par  $N_I$  interfaces  $\Gamma_I, I=A,B,\dots,N_I$  (cf. Figure 3.2).

La compatibilité entre les sous-structures et les interfaces est alors écrite pour chaque sous-structure :

$$\hat{s}_i = (\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i) \in \prod_{I=A,B,\dots,N_I} S_{ad}^{\Gamma_I, \Omega_i} \quad i = 1, 2, \dots, N_s \quad (3.15)$$

L'erreur d'interface  $E_{int}^2$  est construite comme la somme des résidus  $E_{interfaceR}^2$  des équations de chaque interface  $\Gamma_R$  isolé :

$$E_{int}^2 = \sum_{R=1}^{R=N_I} \beta_R E_{interfaceR}^2 \quad (3.16)$$



Les coefficients de pondération  $\beta_R$  permettront, lors du processus d'identification, d'accorder plus ou moins de confiance à chaque interface. Si aucune des interfaces n'est privilégiée, on prendra la même valeur  $\beta_R = \frac{1}{N_I}$  pour tous les termes.

Le problème final de la TVRC sous-structurée avec plusieurs interfaces s'écrit alors :

**Problème sous-structuré** : Trouver  $\hat{s}_i = (\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i)_{i=1,2}$  tels que :

–  $\hat{s}_i = (\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i)_{i=1,2,\dots,N_s}$  appartiennent à l'espace d'admissibilité :

$$\prod_{I=A,B,\dots,N_I} \mathcal{S}_{ad}^{\Gamma_I, \Omega_i}$$

–  $\hat{s}_i = (\hat{u}_i, \hat{\sigma}_i)_{i=1,2,\dots,N_s}$  minimisent l'erreur d'interface  $E_{int}^2$ .

Notons que l'isolement de toutes les interfaces n'est pas obligatoire : en effet dans un processus d'identification, le comportement de certaines liaisons, rigides par exemple, peut être connu. Ces liaisons sont alors traitées par la formulation variationnelle de la TVRC classique, et les interfaces considérées font partie d'une super-sous-structure. Dans ce cas, elles n'entrent pas dans l'erreur de modèle puisque celle-ci ne comprend que les termes non fiables.

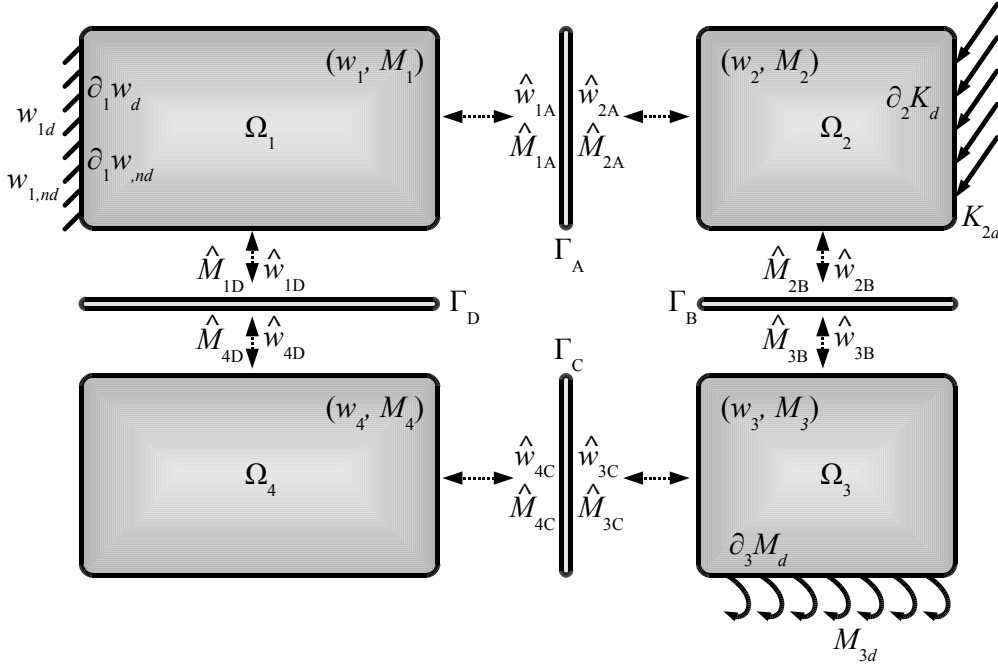


FIG. 3.2: Formulation sous-structurée pour une structure comprenant plusieurs interfaces.

## 2 Validation de la nouvelle approche

Afin de valider l'approche proposée, nous traitons l'exemple de deux plaques en « L » présenté sur la Figure 3.3, par le code éléments finis *SDT*, par la version classique de la *TVRC* ainsi que par la formulation « sous-structurée ».

### 2.1 Quantités d'intérêt

Pour comparer ces trois approches, il est nécessaire de s'intéresser à une quantité qui ait un sens dans la fenêtre moyennes fréquences. Pour surmonter le problème de l'hypermensibilité dans ce domaine de fréquence, nous utilisons ici le *déplacement effectif*, qui est une grandeur non locale, définie sur le sous-domaine  $D$  d'une structure par :

$$w_{eff}^D = \frac{1}{mes(D)} \int_{\underline{x} \in D} |w(\underline{x})| dS \quad (3.17)$$

### 2.2 Application au problème des plaques en « L »

Nous utilisons la discrétisation suivante pour le calcul éléments finis : 10 nœuds par longueur d'onde, avec 3 degrés de liberté (d.d.l.) par nœud, soit au total 15453 d.d.l. Une réduction sur une base modale de presque 200 modes propres a été utilisée pour tracer la fonction de réponse en fréquence (FRF). Pour le calcul avec la *TVRC* classique, la discrétisation choisie comprend 48 modes intérieurs et  $4 \times 13$  rayons de bord. Pour la version « sous-structurée » de la *TVRC*, les sous-structures sont discrétisées de manière identique au calcul traditionnel ( $48/13 \times 4$ ), mais plusieurs choix sont possibles pour discrétiser les quantités d'interface :

- le choix le plus simple consiste à prendre comme modes de l'interface exactement les mêmes fonctions que pour la sous-structure à laquelle il est rattaché : c'est le

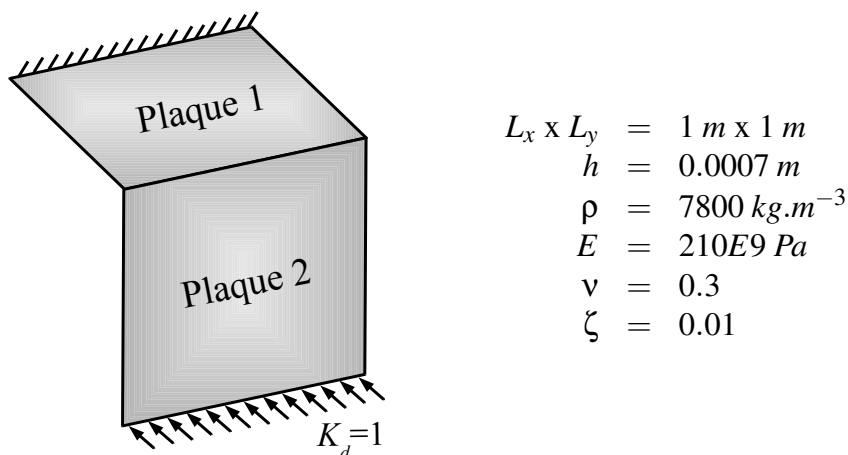
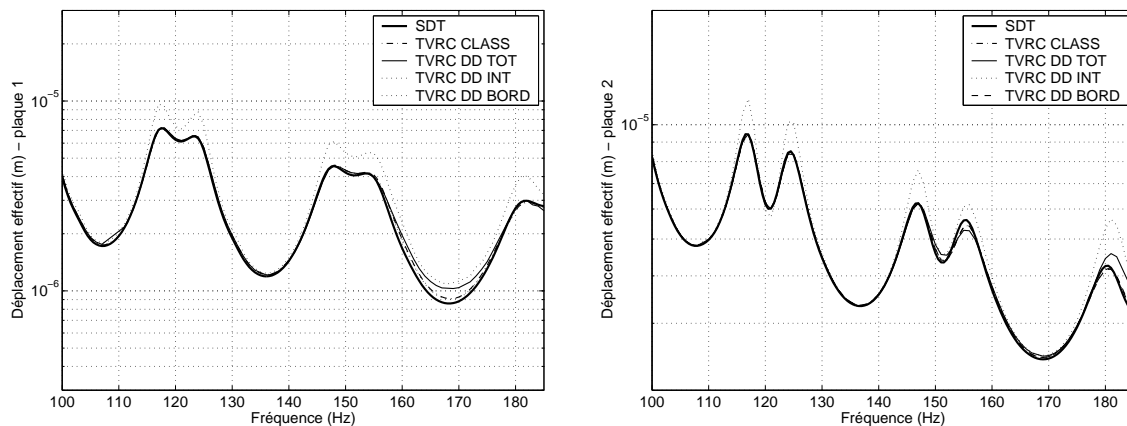


FIG. 3.3: Problème des deux plaques en « L ».

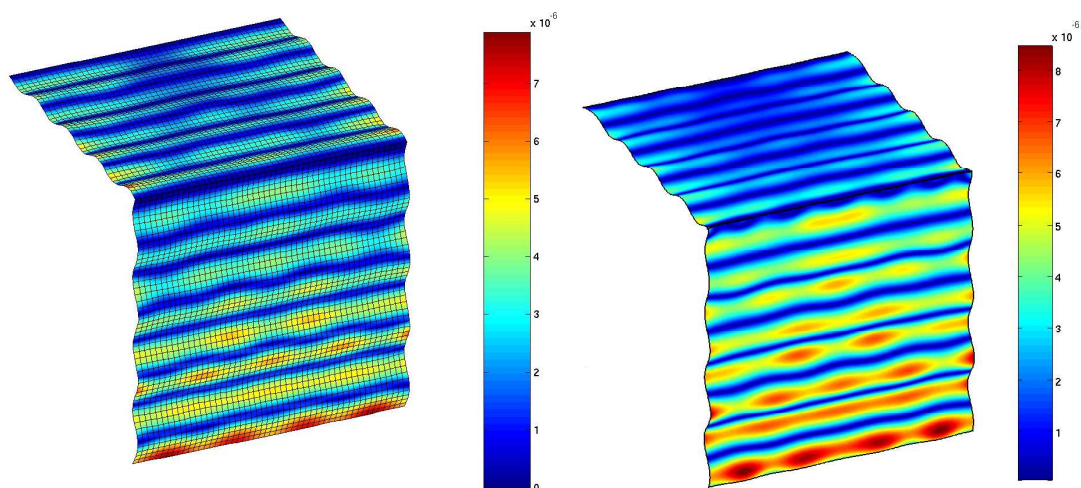
cas du calcul nommé « DD TOT » dont la discrétisation est également  $48/13 \times 4$ . Mais on peut aussi étudier les cas suivants :

- il est possible réduire les fonctions d’interface uniquement aux rayons de bord localisés contre l’interface, qui est noté « DD BORD » sur les courbes présentées, dans lequel la discrétisation comprend  $4 \times 13$  rayons de bord,
- les fonctions d’interface peuvent être uniquement composées des rayons intérieurs de la sous-structure correspondante, indiqués « DD INT », dans lequel la discrétisation comprend 48 rayons intérieurs et zéro rayons de bord,
- d’autres choix sont possibles, à condition de prendre pour les fonctions d’interface un espace moins grand que l’espace des rayons de la sous-structure associée . . .

Les FRF des déplacements effectifs sont tracées sur la Figure 3.4. Les déformées pour le mode à  $117 \text{ Hz}$  calculées avec SDT et la version sous-structurée de la TVRC sont représentées sur la Figure 3.5. Comme pour le problème d’une seule plaque, les erreurs sur les conditions aux limites n’excèdent pas quelques pourcents. Nous constatons sur les FRF que la version sous-structurée de la TVRC avec la discrétisation « DD INT » est imprécise aux sommets des pics de résonance. Ceci peut s’expliquer par le rôle essentiel joué par les rayons de bord [Rou01]. Les rayons intérieurs ne sont d’ailleurs pas essentiels à cette fréquence : on constate que la discrétisation de l’interface utilisant uniquement les rayons de bord donne d’aussi bons résultats que celle prenant en compte tous les rayons.



**FIG. 3.4:** FRF pour les plaques en L avec liaison rigide. Déplacement effectif de la plaque 1 (à gauche) et 2 (à droite). Les inconnues des sous-structures sont représentées par 48 modes intérieurs,  $4 \times 13$  rayons de bord et 0 rayons de coin. Les quantités d’interface sont représentées par : DD TOT, 48 modes intérieurs,  $4 \times 13$  rayons de bord, 0 rayons de coin ; DD INT, 48 modes intérieurs, 0 rayons de bord, 0 rayons de coin ; DD BORD, 0 modes intérieurs,  $4 \times 13$  rayons de bord, 0 rayons de coin. Le calcul SDT comprend 15453 d.d.l. avec une réduction sur les 200 premiers modes propres.



**FIG. 3.5:** Déformée à 117 Hz calculée avec SDT (à gauche) et la TVRC (à droite). Le calcul TVRC est effectué avec la discrétisation suivante : pour les inconnues des sous-structures, 48 modes intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin ; pour les inconnues d'interfaces, 48 modes intérieurs, 4 x 13 rayons de bord et 0 rayons de coin.

## 3 Modélisation de liaisons complexes

### 3.1 État de l'art

La question du modèle de liaison est un point essentiel pour parvenir à simuler fidèlement le comportement de la structure réelle. En effet, la compréhension et la modélisation des phénomènes à prendre en compte sont très difficiles : géométrie locale très complexe, non-linéarité de contact, frottement, influence de nombreux paramètres comme l'intensité de la pression de serrage, la distribution de cette pression [NB99], la fréquence et l'amplitude des vibrations, ... Les phénomènes dissipatifs sont également très complexes, et très importants : l'énergie dissipée dans les liaisons est souvent bien plus grande que celle dissipée par l'amortissement du matériau à l'intérieur des sous-structures [ELRC96]. Selon la pression de serrage différents phénomènes apparaissent : micro- ou macro-glissement, usure ou plastification des aspérités [ER00], ... Pour tenir compte des variations induites par ces paramètres, y compris sur le plan expérimental, une représentation stochastique des grandeurs physiques est adoptée dans [IZP99]. Plus de précision sur les phénomènes à l'origine de la dissipation pourra être trouvée dans [Ren92, LL04].

La prise en compte de tous les phénomènes n'est guère envisageable dans un calcul de structure de taille raisonnable. Aussi l'on se contente la plupart du temps d'un modèle synthétisant les phénomènes les plus importants à l'échelle macroscopique. Le nombre de d.d.l. et le nombre de paramètres intervenant sont ainsi en quantité diminuée.

#### 3.1.1 Modèles linéaires

##### *Modèles élémentaires*

Un certain nombre d'étude modélisent une liaison par la connection entre deux nœuds *via* un élément de type « bar » ou « poutre » [NRE95]. Les paramètres principaux sont alors le module d'Young, la masse volumique (parfois négligée comme dans [NRE93]), mais aussi la longueur de l'élément, ou même un « offset » [MFNB96]. L'amortissement est le plus souvent négligé comme dans [BB93] ou bien introduit sous forme proportionnelle, hystérétique [RB95], ou par le modèle de Maxwell [HC98] qui permet de monter plus haut en fréquence.

##### *Modèles ressorts-amortisseurs*

La géométrie de la liaison est la plupart du temps négligeable par rapport à la taille des sous-structures. Beaucoup d'études la remplacent par des éléments *0D* de type *ressorts* + *amortisseurs*, négligeant généralement la masse de la liaison et fournissant un amortissement proportionnel [WS90, WL91]. Entre deux nœuds, il est alors possible d'introduire des ressorts et des amortisseurs entre les trois directions possibles, en rotation et/ou en translation, et de coupler les mouvements dans chaque direction [GNH91]. On obtient alors une matrice de raideur où 21 coefficients sont à déterminer. La plupart du

temps le couplage est négligé, ce qui ramène les paramètres au nombre de 6, et la transmission de certains mouvements peut être supposée parfaite grâce à une rigidité infinie [MS93, BK97, KP97, MJP99].

Un inconvénient de ce groupe de modèle est qu'il ne permet qu'un assouplissement de la structure. Un certain nombre de travaux relatent également la très faible sensibilité de la structure lorsque la raideur de la liaison est très importante [NRE93]. L'identification de la raideur de la liaison est alors difficile, et il est conseillé de la considérer comme rigide [GNH91]. Il est également conseillé d'avoir identifié précisément la raideur avant de tenter d'obtenir l'amortissement [WL91].

### *Modèles plus complexes*

Enfin, il est possible de supposer des modèles plus complets. Une méthode est de considérer que les matrices de raideur et de masse couplant deux éléments de jonction sont pleines et à coefficients complexes [TC88]. Cette représentation est bien adaptée aux méthodes d'identification de type perturbation, où l'on calcule des matrices de correction  $\Delta\mathbb{M}$  et  $\Delta\mathbb{K}$  des matrices de masse et de raideur pour coller au mieux aux mesures expérimentales. Toutefois le contenu physique devient difficilement interprétable, et l'identification précise de tous les coefficients pose des difficultés lorsqu'ils ont des ordres de grandeurs très différents [RB95].

### **3.1.2 Prise en compte des non-linéarités**

Pour aller plus loin dans la représentation du comportement réel des liaisons il s'agit de modéliser les non-linéarités, ce qui implique des algorithmes itératifs. Une façon simple de modéliser l'influence de l'amplitude des déformations sur le comportement est d'adopter des coefficients de raideur et d'amortissement non-linéaires : la force à la jonction peut être supposée cubique par rapport aux déplacements tandis que l'amortissement peut être linéaire [MMSC87], quadratique [KP94] ou s'appuyer sur le modèle de Coulomb [ELRC96, ER00].

Des modèles plus fins peuvent être mis en œuvre. Dans [XB99], des éléments de type « gap/spring » sont utilisés pour simuler le contact sur chaque point de la zone d'interaction entre deux sous-structures : entre 40 et 100 éléments sont nécessaires pour modéliser la zone de contact à l'emplacement d'un seul boulon. Dans [CGD91], une adaptation de la méthode élément finis est présentée pour traiter le cas des liaisons non holonomes.

Dans [HOG02], les dispersions dues au procédé de fabrication l'emportent sur les effets non-linéaires. On choisit alors d'adopter un modèle simple (Kelvin-Voigt), mais dans lequel les paramètres sont représentés par des « nombres flous ».

## **3.2 Modèle continu des liaisons complexes**

L'approche proposée pour prendre en compte l'élasticité et la dissipation au niveau d'une liaison reprend l'idée d'un macro-modèle utilisant des systèmes masse-ressort-

amortisseur. Ces paramètres sont introduits **de manière distribuée** sur toute la longueur de la liaison. Dans le cas de la formulation plaque d'Euler-Bernoulli, ces éléments concernent le comportement en moments fléchissants et en efforts tranchants. Il est ensuite possible de complexifier le comportement en supposant que les paramètres de masse, de raideur, et d'amortissement ne sont pas constants, mais varient en fonction de leur position spatiale, par exemple pour modéliser une liaison soudée par point.

Pour plus de clarté, on se contente de présenter le comportement en moments fléchissants, mais le même travail a été réalisé pour le comportement en efforts tranchants, qui est traité de manière similaire. Les équations d'une interface parfaitement rigide comprennent l'équilibre statique des efforts et la continuité des déplacements :

$$\underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2 = 0 \quad (3.18a)$$

$$w_{,\underline{n}_1} - w_{,\underline{n}_2} = 0 \quad (3.18b)$$

Elles sont alors remplacées par l'équilibre dynamique des efforts d'interface et une relation de comportement :

$$\underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2 = -\frac{(1-i\eta_j)J\omega^2}{2}(w_{,\underline{n}_1} + w_{,\underline{n}_2}) \quad (3.19a)$$

$$\frac{1}{2}(-\underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) = -k_r(1+i\eta_r)(w_{,\underline{n}_1} - w_{,\underline{n}_2}) \quad (3.19b)$$

Les paramètres  $J$ ,  $k_r$ ,  $\eta_j$  et  $\eta_r$  sont réels et représentent respectivement le terme inertiel, la raideur, et les coefficients d'amortissement en masse et en raideur propres à l'interface.

### 3.3 Implémentation des modèles de liaisons complexes dans la TVRC

Une fois le modèle choisi sur le plan continu, il s'agit de l'implémenter dans la théorie variationnelle des rayons complexes.

#### *Implémentation dans la version classique de la TVRC*

Dans la version classique de la TVRC, la prise en compte de ces équations de couplage est faite dans la formulation variationnelle, grâce aux termes suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \left\{ -i\omega \left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( \underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2 + \frac{(1-i\eta_j)J\omega^2}{2}(w_{,\underline{n}_1} + w_{,\underline{n}_2}) \right) \cdot (\delta w_{,\underline{n}_1} + \delta w_{,\underline{n}_2})^* dl \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2k_r} \int_{\Gamma} \left( \delta \underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 - \delta \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2 \right) \cdot \left( -\underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2 + k_r(1+i\eta_r)(w_{,\underline{n}_1} - w_{,\underline{n}_2}) \right)^* dl \right] \right\} \quad (3.20) \end{aligned}$$

*Implémentation dans la version sous-structurée de la TVRC*

Dans la version sous-structurée proposée en vue de l'écriture du problème d'identification, il s'agit d'écrire l'erreur d'interface relative aux équations (3.19) :

$$E_{int}^2 = \frac{1}{N_1} \int_{\Gamma} \left\| \frac{1}{2} (-\underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2) + k_r (1 + i \eta_r) (w_{,n_1} - w_{,n_2}) \right\|^2 dl$$

$$+ \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{1}{N_2} \int_{\Gamma} \left\| \underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2 + \frac{(1 - i \eta_j) J \omega^2}{2} (w_{,n_1} + w_{,n_2}) \right\|^2 dl \quad (3.21)$$

avec ici :

$$N_1 = N_2 = \text{mes}(\Gamma) \cdot \max(\max_{\Omega_1} \underline{n}_1 \underline{M}_1 \underline{n}_1, \max_{\Omega_2} \underline{n}_2 \underline{M}_2 \underline{n}_2)$$

Les coefficients  $N_1$  et  $N_2$  ont pour fonction d'adimensionner et d'équilibrer les deux termes de l'erreur d'interface. Ils sont estimés à partir des sollicitations imposées sur la structure. La solution est ensuite calculée en résolvant le problème total, comme au Paragraphe 3.1.3.

*Remarque* : à chaque changement de la valeur des paramètres de liaison seules les matrices de l'erreur ci-dessus doivent être réassemblées, l'espace d'admissibilité concernant les sous-structures étant construit une fois pour toutes auparavant. Ce gain de temps est d'autant plus utile que dans la perspective d'améliorer les liaisons, les paramètres sont corrigés à chaque étape du processus.

### 3.4 Application : influence des paramètres du modèle

Pour illustrer la mise en œuvre des équations précédentes, nous étudions ici l'influence des paramètres d'une liaison complexe. L'exemple traité est celui des deux plaques en L de la Figure 3.3, dans lequel une raideur  $k_r$  et un amortissement de liaison en raideur  $\eta_r$  sont introduits. Par souci de concision, l'inertie est supposée nulle. Cette étude permet également de déterminer la zone dans laquelle ces paramètres ont une influence, préliminaire à l'étude de la méthode de recalage. L'étude de l'influence de la raideur  $k_r$  est menée sur deux types de liaison, l'une peu amortissante -  $\eta_r = 0.1$  - et l'autre très amortissante -  $\eta_r = 10$ . L'influence de l'amortissement est étudiée sur une liaison très raide -  $k_r = 10^{3.5} N.m$  - et une liaison souple -  $k_r = 10^{1.5} N.m$ . Pour chaque étude, les courbes sont tracées à plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance.

Les quantités représentées dans la suite du paragraphe sont définies comme suit :



$$\mathbf{r}_{1T} = \frac{E_{plaque\ 1}^{def}}{E_{totale}^{def}} \quad \text{proportion d'énergie de déformation localisée dans la plaque 1,} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{r}_{2T} = \frac{E_{plaque\ 2}^{def}}{E_{totale}^{def}} \quad \text{proportion d'énergie de déformation localisée dans la plaque 2,} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{r}_{LT} = \frac{E_{liaison}^{def}}{E_{totale}^{def}} \quad \text{proportion d'énergie de déformation localisée dans la liaison,} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{t}_{21} = \frac{E_{plaque\ 1}^{def}}{E_{plaque\ 2}^{def}} \quad \text{coefficient de transmission en énergie de déformation entre les plaques 2 et 1,} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{d}_{1T} = \frac{E_{plaque\ 1}^{diss}}{E_{totale}^{diss}} \quad \text{proportion d'énergie dissipée par la plaque 1,} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{d}_{2T} = \frac{E_{plaque\ 2}^{diss}}{E_{totale}^{diss}} \quad \text{proportion d'énergie dissipée par la plaque 2,} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{d}_{LT} = \frac{E_{liaison}^{diss}}{E_{totale}^{diss}} \quad \text{proportion d'énergie dissipée par la liaison.} \quad (3.28)$$

L'étude qui suit montre que la raideur, mais également l'amortissement, jouent un rôle important sur la répartition de l'énergie entre chaque sous-structure et la liaison. En particulier, le coefficient d'amortissement ne représente pas seulement l'énergie dissipée - en proportion de l'énergie de dissipation - mais a une influence sur le transfert d'énergie entre les deux sous-structures. Cette étude est complétée par celle de système masses-ressorts-amortisseur en Annexe E, afin d'illustrer l'affirmation précédente de manière théorique sur un exemple simple.

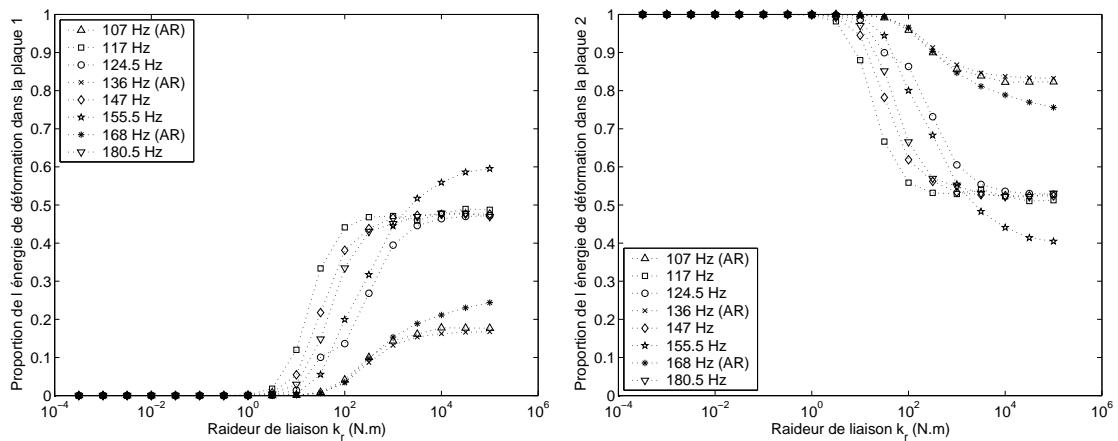
### 3.4.1 Influence de la raideur de la liaison

*Cas d'une liaison peu amortissante -  $\eta_r = 0.1$*

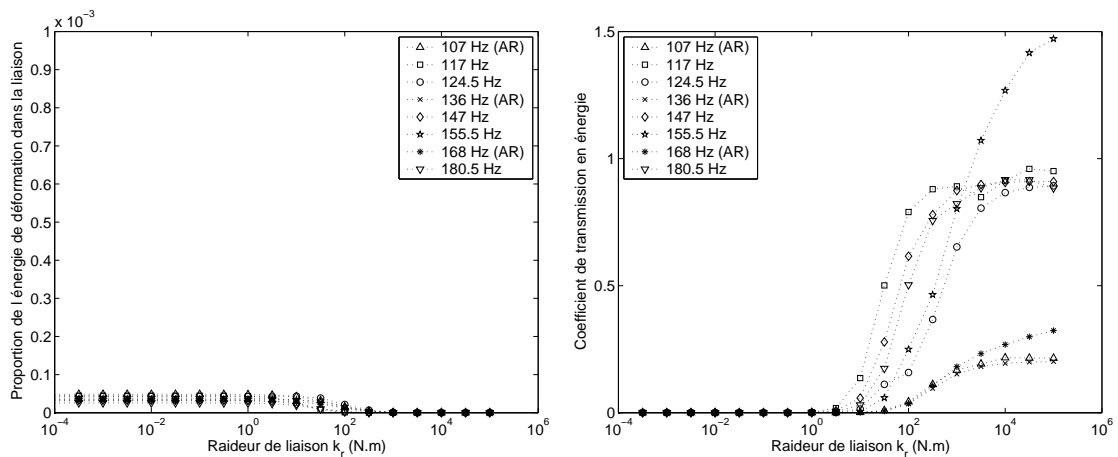
Les Figures 3.6 et 3.7 représentent l'évolution, en fonction de la raideur de liaison  $k_r$ , de la répartition de l'énergies de déformation sur chaque plaque, et sur la liaison, ainsi que le coefficient de transmission entre la plaque excitée et la plaque encastree, pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance. Lorsque la liaison est trop souple -  $k_r$  faible - toute l'énergie de déformation est contenue dans la plaque 2 qui excitée. Lorsque la liaison se rigidifie, la répartition entre les deux plaques s'équilibre dans des proportions comparables - de l'ordre de 50 % chacune - exceptées pour les trois fréquences d'antirésonance - 107 Hz, 136 Hz et 168 Hz - pour lesquelles la plaque excitée conserve une énergie de déformation plus importante. Le coefficient de transmission entre la plaque 2

excitée et la plaque 1 encadrée illustre précisément le constat précédent : il est nul pour des raideurs très faibles, et augmente à partir de  $k_r = 10^0 N.m$ . Notons que la fréquence 155.5 Hz montre un coefficient de transmission supérieur à 1, ce qui signifie que la plaque excitée est moins énergétique que la plaque encadrée. Ce comportement qui peut sembler paradoxal illustre les conséquences d'un couplage fort entre les sous-structures. L'énergie de déformation de la liaison reste négligeable en proportion.

La Figure 3.8 représente la part que prennent respectivement les plaques et la liai-



**FIG. 3.6:** Influence de la raideur de liaison  $k_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encadrée ( $r_{1T}$  à gauche) et la plaque 2 excitée ( $r_{2T}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison peu amortissante ( $\eta_r = 0.1$ ).



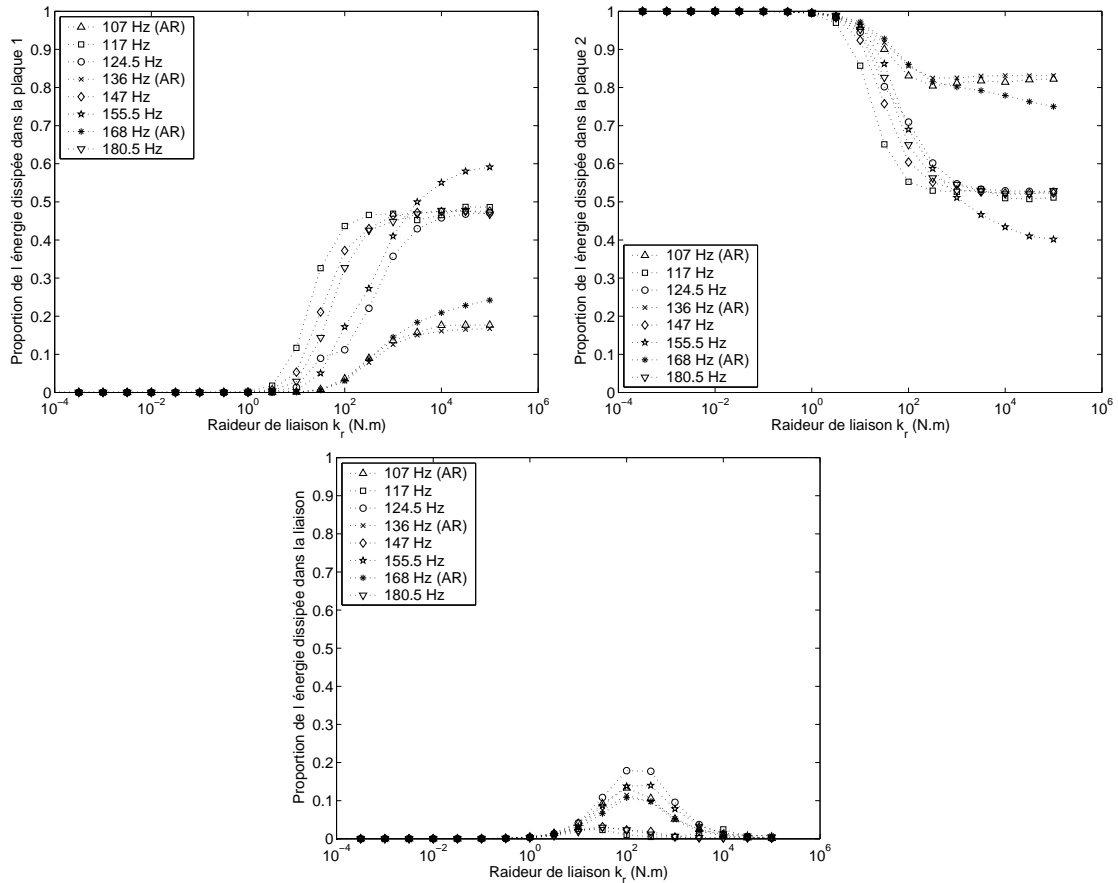
**FIG. 3.7:** Influence de la raideur de liaison  $k_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison ( $r_{LT}$  à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encadrée ( $t_{21}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison peu amortissante ( $\eta_r = 0.1$ ).

son dans la dissipation totale. La proportion d'énergie dissipée par les plaques est analogue aux courbes de l'énergie de déformation. Comme on pouvait s'y attendre, la liaison dissipe faiblement lorsque  $k_r \in [10^0, 10^4] \text{ N.m}$ , avec un maximum inférieur à 20 % de l'énergie totale dissipée. En dehors de cette plage, la dissipation de la liaison est nulle.

**La raideur joue donc un rôle prépondérant dans la répartition de l'énergie, et dans la répartition de la dissipation entre les plaques. Une raideur très faible concentre l'ensemble des phénomènes dans la plaque excitée, tandis que les choses s'équilibrent lorsque la liaison se raidit.**

*Cas d'une liaison très amortissante -  $\eta_r = 10$*

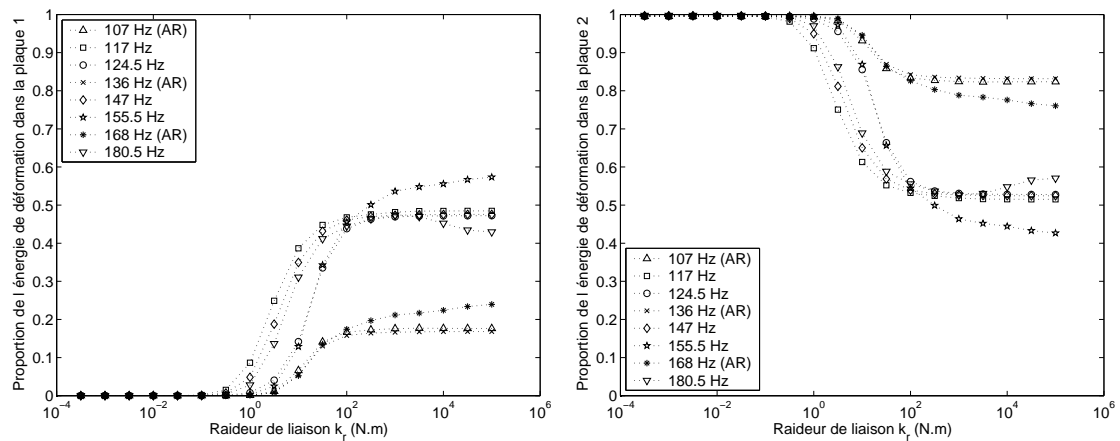
L'étude précédente est maintenant effectuée avec une liaison très amortissante -  $\eta = 10$ . La répartition de l'énergie de déformation est les plaques et la liaison, ainsi que le



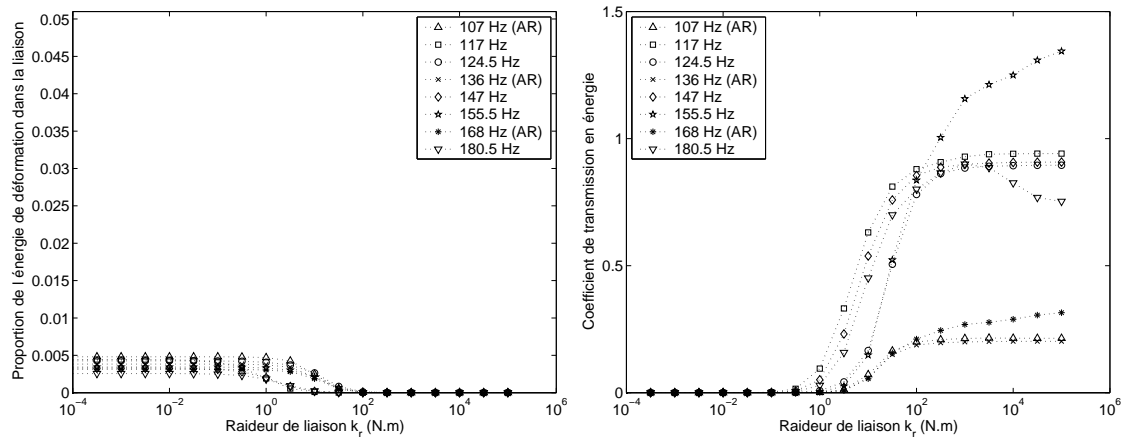
**FIG. 3.8:** Influence de la raideur de liaison  $k_r$  sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastree ( $d_{1T}$  à gauche), par la plaque 2 excitée ( $d_{2T}$  à droite) et par la liaison ( $d_{LT}$  en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison peu amortissante ( $\eta_r = 0.1$ ).

coefficient de transmission sont représentés sur les Figures 3.9 et 3.10. Les résultats sont très similaires à ceux de la liaison peu amortissante : une liaison très souple place l'énergie dans la sous-structure excitée, et les choses s'équilibrent lorsque la raideur du couplage augmente. L'énergie de déformation de la liaison, très faible, diminue lorsque la raideur de la liaison augmente.

La répartition de la dissipation, cf. Figure 3.11, montre un comportement un peu différent de celui noté pour la liaison peu amortissante. Lorsque la raideur est faible, la plaque 2, la seule possédant de l'énergie, regroupe toute la dissipation. Lorsque la raideur



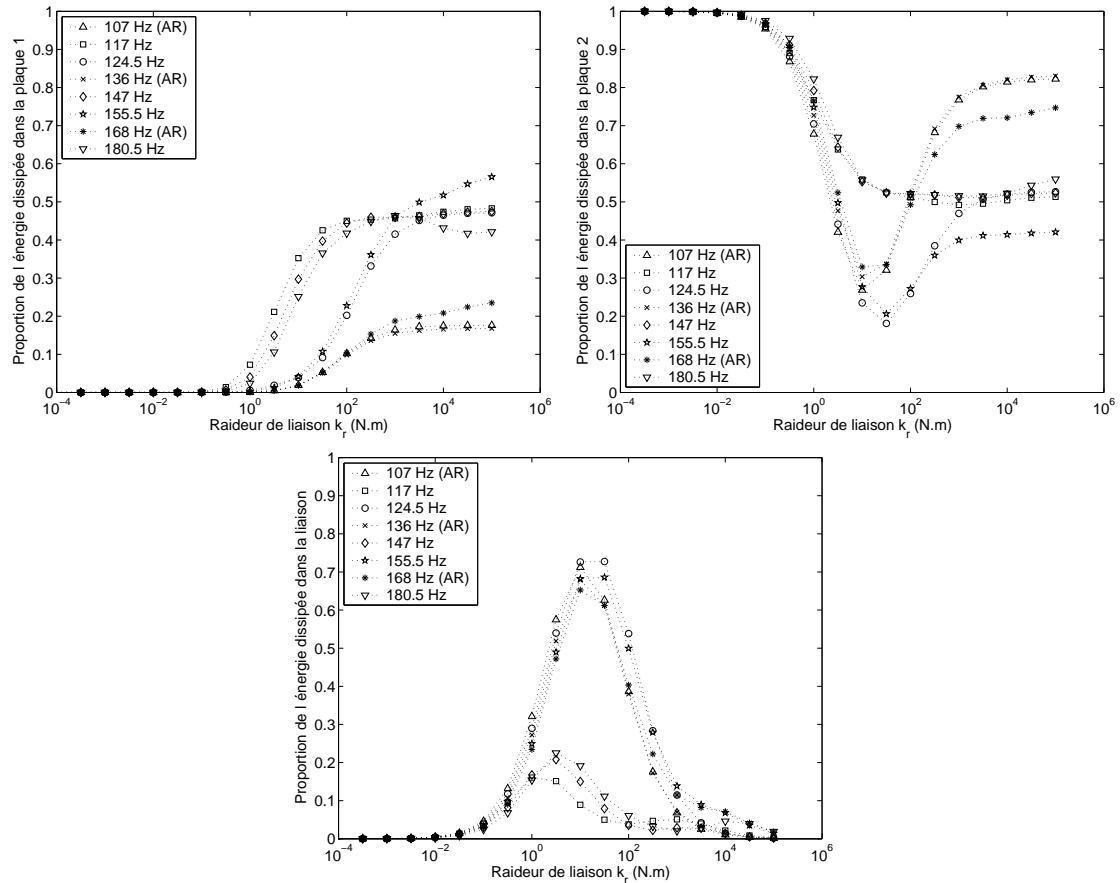
**FIG. 3.9:** Influence de la raideur de liaison  $k_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encastree ( $r_{1T}$  à gauche) et la plaque 2 excitée ( $r_{2T}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très amortissante ( $\eta_r = 10$ ).



**FIG. 3.10:** Influence de la raideur de liaison  $k_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison ( $r_{LT}$  à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encastree ( $t_{21}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très amortissante ( $\eta_r = 10$ ).

est très grande, la perte d'énergie est partagée entre les deux plaques de manière similaire à celle de la liaison peu amortissante. Toutefois, dans la zone  $k_r \in [10^{-1}, 10^4] \text{ N.m}$ , la liaison participe fortement aux phénomènes dissipatifs, jusqu'à hauteur de 75 % pour certaines fréquences.

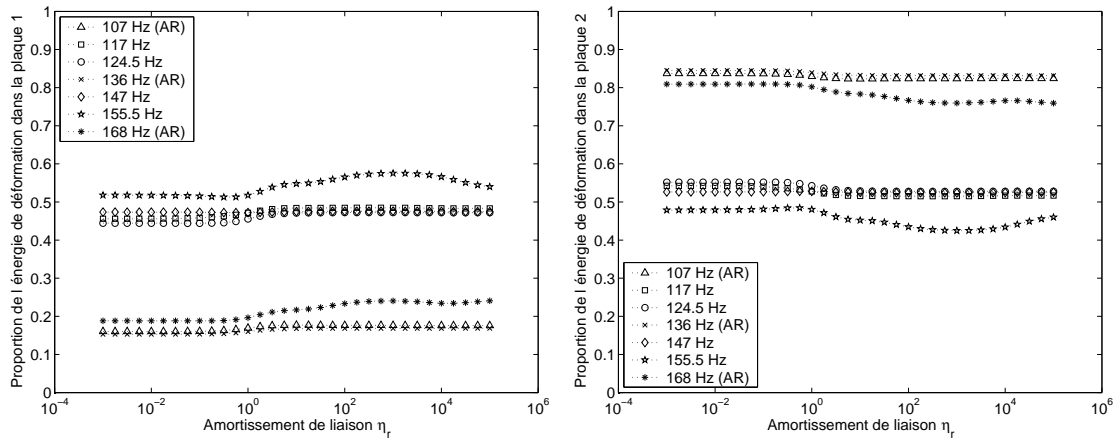
Dans le cas d'un coefficient d'amortissement  $\eta_r$  très élevé, la raideur  $k_r$  gouverne toujours de manière importante la répartition de l'énergie et donc de la dissipation. **La seule différence par rapport à la liaison peu amortissante réside dans la proportion qu'occupe la liaison dans les phénomènes dissipatifs, comme on pouvait s'y attendre. Le modèle de liaison adopté est capable de dissiper une grande partie de l'énergie de la structure, comme c'est le cas sur certaines structures réelles.**



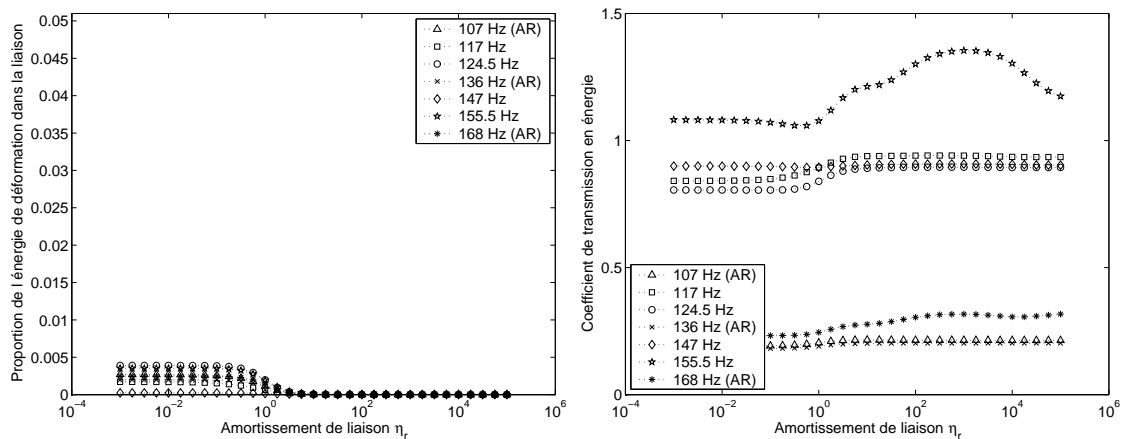
**FIG. 3.11:** Influence de la raideur de liaison  $k_r$  sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastrée ( $\mathbf{d}_{1T}$  à gauche), par la plaque 2 excitée ( $\mathbf{d}_{2T}$  à droite) et par la liaison ( $\mathbf{d}_{LT}$  en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très amortissante ( $\eta_r = 10$ ).

### 3.4.2 Influence de l'amortissement de la liaison

Cas d'une liaison très raide -  $k_r = 10^{3.5} N.m$



**FIG. 3.12:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encastrée ( $\mathbf{r}_{1T}$  à gauche) et la plaque 2 excitée ( $\mathbf{r}_{2T}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très raide ( $k_r = 10^{3.5} N.m$ ).



**FIG. 3.13:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison ( $\mathbf{r}_{LT}$  à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encastrée ( $\mathbf{t}_{21}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très raide ( $k_r = 10^{3.5} N.m$ ).

Les Figures 3.12 et 3.13 montrent quelle est l'influence de l'amortissement sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans chaque plaque et dans la liaison, ainsi

que le coefficient de transmission en énergie, dans le cas de la liaison très raide. On constate que la répartition de l'énergie de déformation entre les deux plaques varie peu en fonction de  $\eta_r$ . L'énergie est répartie entre les deux plaques dans des proportions à peu près égales, excepté pour les trois antirésonances - 107 Hz, 136 Hz et 168 Hz - où l'énergie est concentrée pour plus de 80 % sur la plaque 2, qui est excitée. L'énergie de déformation de la liaison reste très faible en comparaison de celle des plaques. Elle tend vers 0 lorsque le coefficient  $\eta_r$  augmente fortement : ceci traduit une « rigidification » de la liaison, mais avec un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  entre contrainte et déformation - l'impédance devient quasiment imaginaire pure. Le coefficient de transmission en énergie entre les deux plaques qui en résulte est relativement stable, proche de 1, sauf pour les antirésonances où, comme constaté ci-dessus, c'est la plaque excitée qui conserve la plus grande énergie. Remarquons que pour l'une des fréquences, 155.5 Hz, le coefficient de transmission est supérieur à 1 ; l'énergie dans ce cas ne diminue pas au fur et à mesure que la sous-structure considérée est loin de l'excitation, comme supposé dans les hypothèses de la SEA.

La Figure 3.14 montre l'évolution de la proportion d'énergie dissipée par chaque plaque et par la liaison. La liaison dissipe très peu - moins de 20 % de l'énergie totale dissipée. Lorsque le paramètre  $\eta_r$  est très important, la dissipation de la liaison diminue, ce qui vient de la « rigidification » de la liaison notée ci-dessus : l'énergie de déformation devenant très faible, l'énergie dissipée l'est aussi. La répartition entre chaque plaque reste quasiment constante, conformément aux énergies de déformation des plaques.

**Pour une liaison très rigide, on peut conclure que l'amortissement joue un rôle très faible, et ne modifie pas la répartition des énergies entre les sous-structures. La liaison travaillant peu du fait de sa raideur, le modèle d'amortissement visqueux utilisé dissipe très peu.** Ceci peut expliquer les constatations de la littérature sur la difficulté d'identifier l'amortissement de liaison pour les liaisons très rigides. La plage de variation observée est située pour les valeurs  $\eta_r \in [10^{-1}, 10^2]$ . De plus, **un coefficient d'amortissement très élevé amène une « rigidification » de la liaison, les énergies de déformation et dissipée de la liaison devenant alors infimes.**

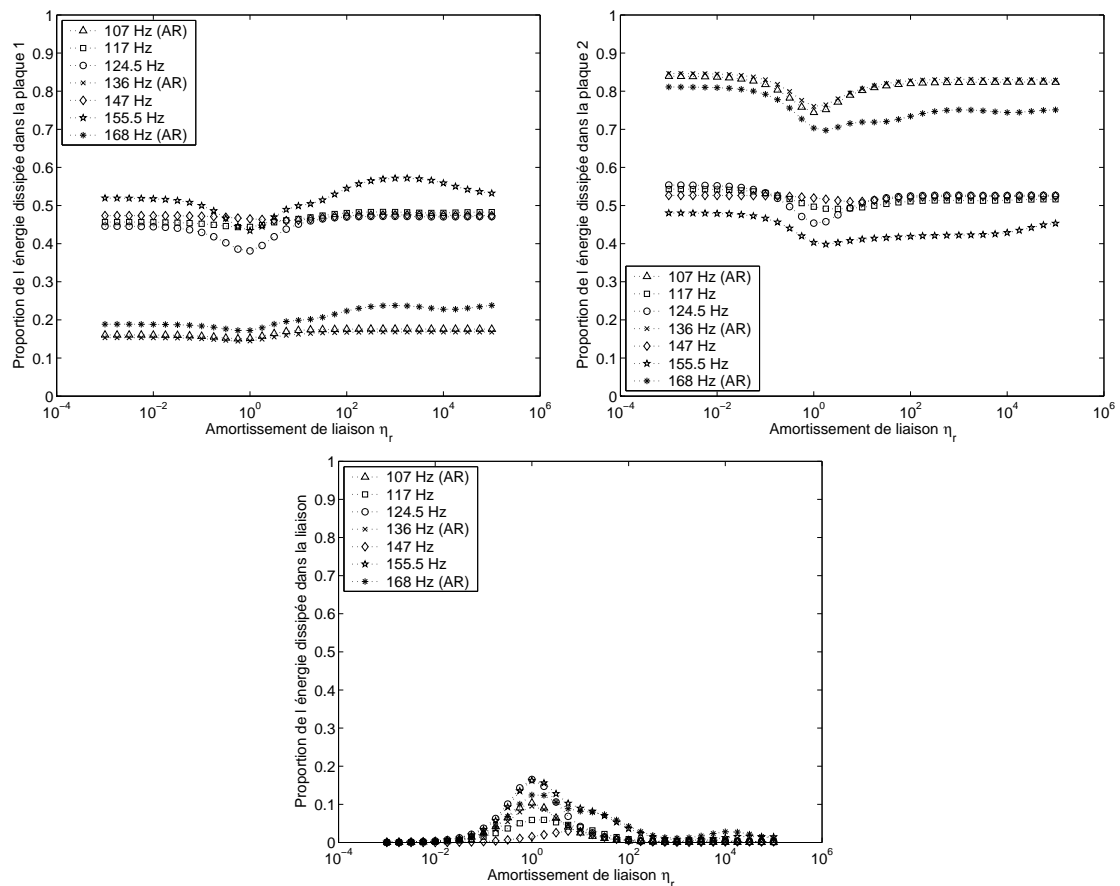
*Cas d'une liaison souple -  $k_r = 10^{1.5} N.m$*

La même étude que ci-dessus est maintenant présentée pour le cas d'une liaison souple. Les Figures 3.15 et 3.16 montrent quelle est l'influence de l'amortissement sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans chaque plaque et dans la liaison, ainsi que le coefficient de transmission en énergie. Pour un amortissement très faible, l'énergie de déformation est majoritairement contenue dans la plaque 2 excitée. Lorsque l'amortissement augmente, de plus en plus d'énergie est transmise à la plaque 1, menant à une répartition comparable sur les deux plaques pour des valeurs de  $\eta_r$  très fortes - excepté pour les antirésonances déjà observées précédemment. L'énergie de déformation de la liaison reste très faible par rapport à celle des plaques, et s'annule lorsque l'amortissement augmente, traduisant la même « rigidification » que dans le cas de la liaison très raide. La courbe du coefficient de transmission entre les plaques 1 et 2 montre que pour cette liaison souple, le coefficient d'amortissement a une grande influence sur la répartition de

l'énergie entre les sous-structures. Il résume les constatations faites ci-dessus selon lesquelles plus l'amortissement augmente, plus l'énergie est transmise de la plaque excitée vers la plaque encastrée.

La Figure 3.17 montre l'évolution de la proportion d'énergie dissipée par chacune des plaques et par la liaison. L'amortissement possède une influence forte sur la dissipation de la structure. De même que pour l'énergie de déformation, l'énergie dissipée est principalement localisée sur la plaque 2 pour  $\eta_r$  faible, répartition qui s'équilibre pour des valeurs de  $\eta_r$  élevées. Pour  $\eta_r \in [10^{-1}, 10^2]$ , les plaques observent une baisse de leur dissipation relative, au profit de la liaison, qui peut alors dissiper une proportion importante de l'énergie totale, jusqu'à 75 % pour certaines fréquences étudiées. Au delà, la liaison devient très « rigide », et dissipe de moins en moins d'énergie.

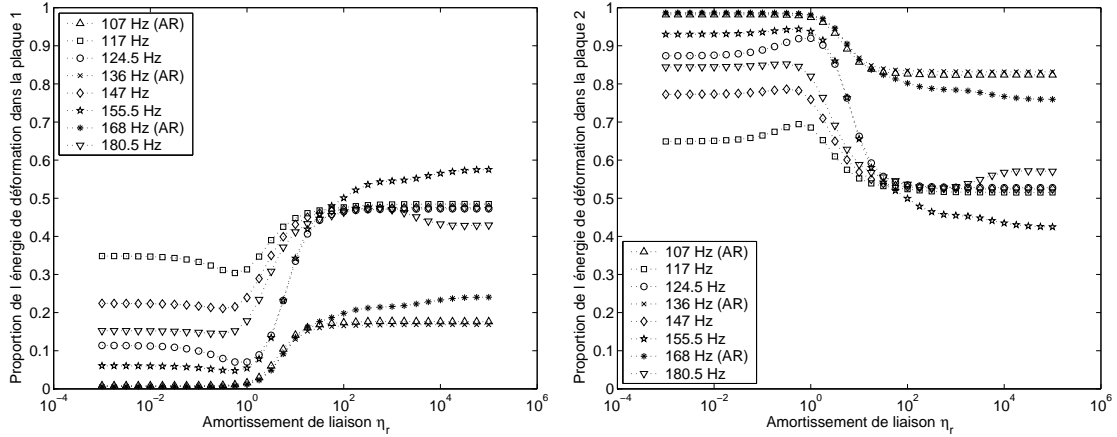
**Dans le cas d'une liaison souple, l'amortissement joue un rôle prépondérant, non seulement au niveau de la dissipation propre à la liaison, mais aussi sur la répartition**



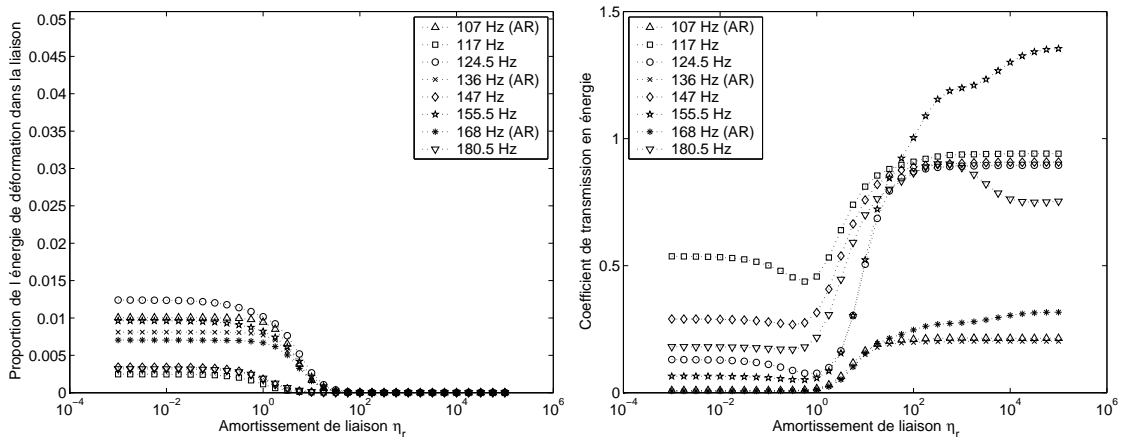
**FIG. 3.14:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastrée ( $d_{1T}$  à gauche), par la plaque 2 excitée ( $d_{2T}$  à droite) et par la liaison ( $d_{LT}$  en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison très raide ( $k_r = 10^{3.5} N.m$ ).



des énergies, et donc dans la structure. Une mauvaise prise en compte de l'amortissement pourra donc être responsable d'une prédiction très fautive de l'ambiance vibratoire de la structure, non seulement en terme d'intensité, mais également en terme de distribution.



**FIG. 3.15:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la plaque 1 encastrée ( $\mathbf{r}_{1T}$  à gauche) et dans la plaque 2 excitée ( $\mathbf{r}_{2T}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison souple ( $k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}$ ).

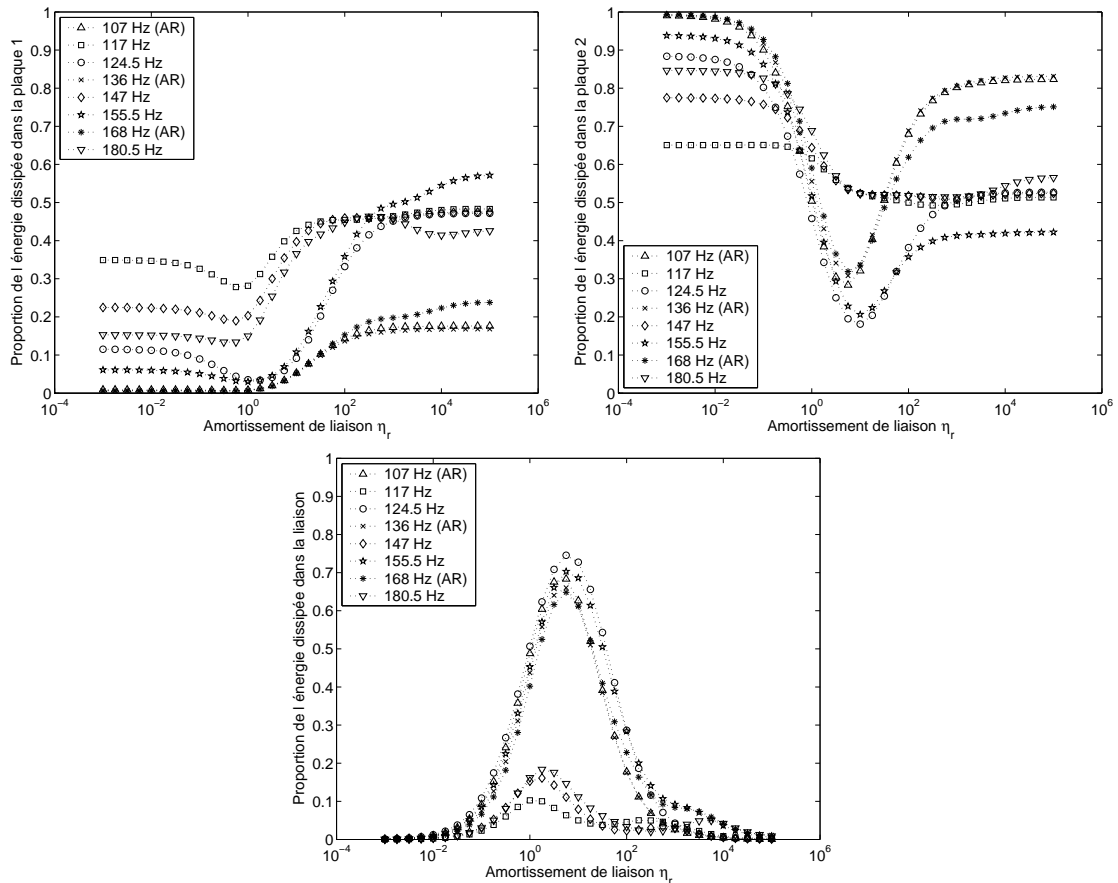


**FIG. 3.16:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur la proportion d'énergie de déformation contenue dans la liaison ( $\mathbf{r}_{LT}$  à gauche) et coefficient de transmission en énergie entre la plaque 2 excitée et la plaque 1 encastrée ( $\mathbf{t}_{21}$  à droite) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison souple ( $k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}$ ).

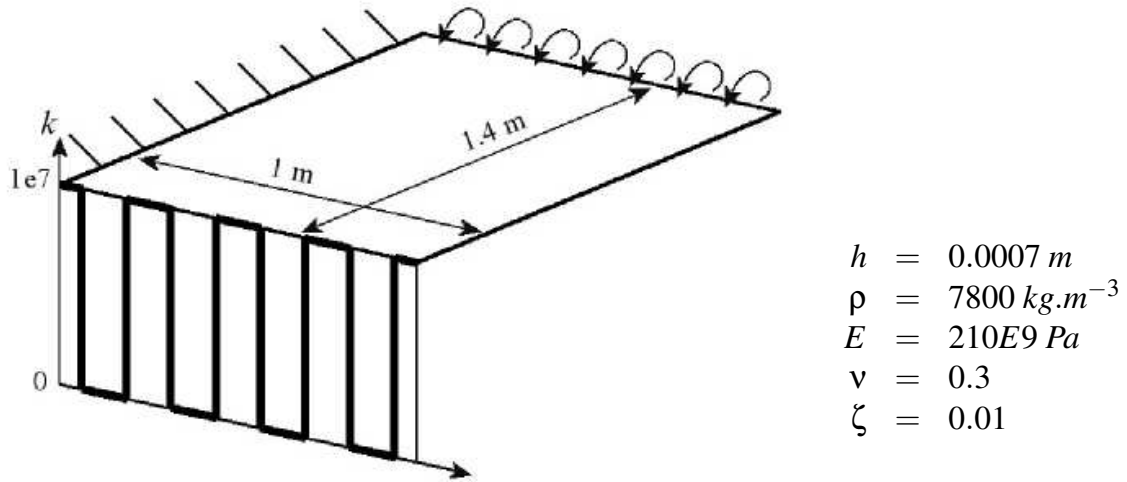
### 3.5 Exemple de liaison hétérogène

Afin de modéliser une structure dans son comportement réel, la prise en compte de liaisons « hétérogènes » est essentielle. Sur une liaison rivetée ou boulonnée par exemple, la pression entre les surfaces de contact n'est pas la même partout à cause d'une distribution de raideur variant dans l'espace. Il en est de même des phénomènes dissipatifs. On tente ici de modéliser une telle liaison par la distribution de raideur de la Figure 3.18.

Les raideurs, que ce soit en rotation  $k_r$  ou en translation  $k_t$ , sont supposées alternativement nulles ou infinies ( $10^7$ ), simulant l'attache ou l'absence d'attache par rapport au bâti. L'amortissement de la liaison est négligé pour cet exemple. Les paramètres sont décomposés en série de Fourier par rapport à la position  $x$  le long de l'interface, série



**FIG. 3.17:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur la proportion d'énergie dissipée par la plaque 1 encastrée ( $d_{1T}$  à gauche), par la plaque 2 excitée ( $d_{2T}$  à droite) et par la liaison ( $d_{LT}$  en bas) pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR) pour une liaison souple ( $k_r = 10^{1.5} N.m$ ).



**FIG. 3.18:** Modélisation d'une liaison hétérogène avec le bâti, la raideur évolue le long de la liaison.

tronquée à l'ordre  $N$ .

$$k_{(x)} = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} k_q \cdot e^{iq\lambda x} \simeq \sum_{q=-N}^{q=+N} k_q \cdot e^{iq\lambda x} \quad , \quad x \in \Gamma \quad (3.29)$$

où  $\lambda$  est la période spatiale décrivant la distribution le long de la liaison.

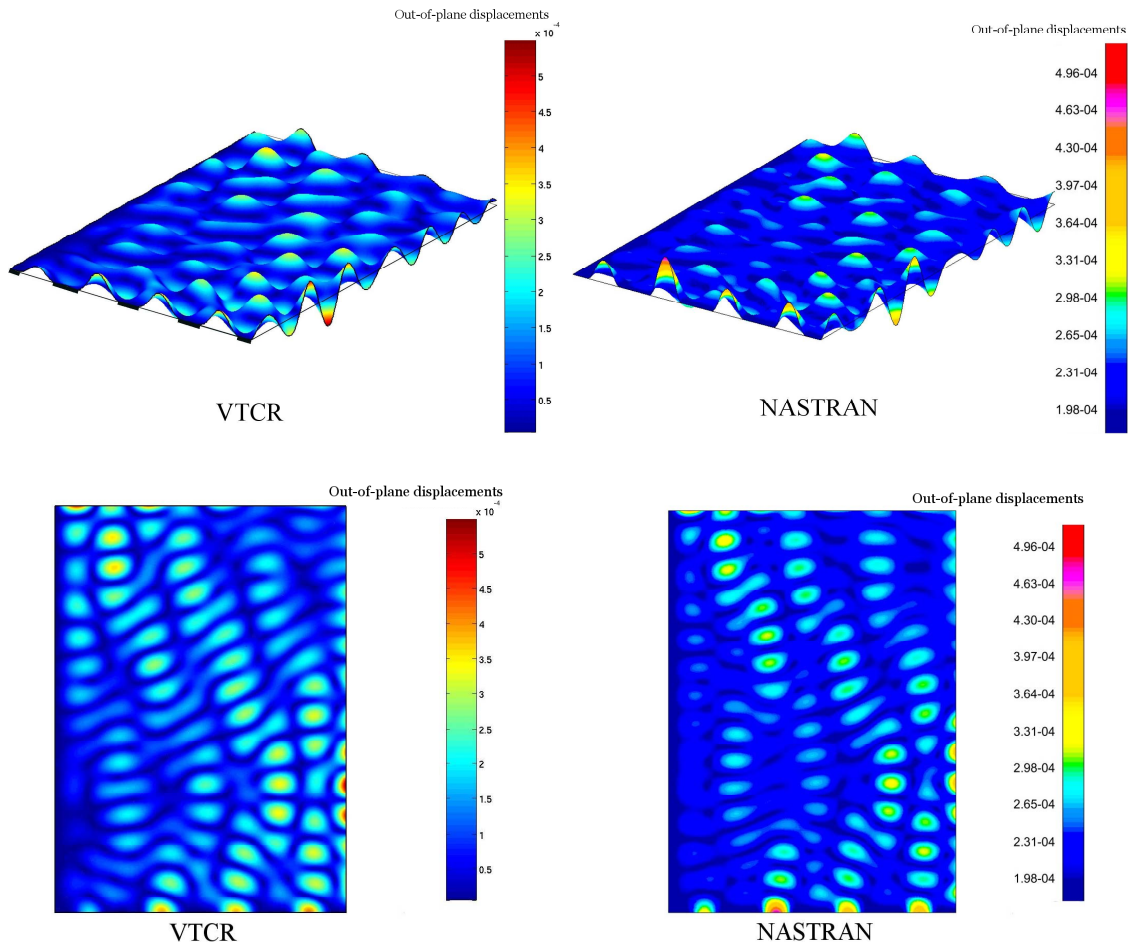
Le calcul TVRC est effectué avec 128 modes intérieurs et 4 x 33 modes de bord, soit 260 d.d.l. Le nombre de modes nécessaire est plus élevé que pour une liaison aux caractéristiques constantes, car pour représenter fidèlement les déplacements près de la liaison, les modes de bord possèdent une importance primordiale. Il paraît naturel de devoir les représenter plus précisément. Les raideurs  $k_r$  et  $k_t$  ont été exprimées avec 12 composantes dans la série de Fourier. Pour comparaison, un calcul de référence a été effectué avec le code de calcul éléments finis NASTRAN, en utilisant la règle de 10 éléments par longueur d'onde, nécessitant environ 80000 d.d.l. Les déformées à la fréquence 245 Hz sont tracées sur la Figure 3.19. On y voit une bonne vérification des conditions aux limites, y compris le long de la liaison hétérogène. Les déplacements maximaux sont très proches :  $5.26 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  avec la TVRC et  $4.96 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  avec NASTRAN.

## 4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une variante de la théorie variationnelle des rayons complexes, dite « sous-structurée », qui permet d'écrire le problème sous la forme d'une minimisation sous contraintes. Dans cette approche, les sous-structures sont supposées bien modélisées, et leurs équations sont vérifiées de manière exacte, tandis que les interfaces sont soumises à caution, et leurs équations sont vérifiées de manière plus faible

par la minimisation. Des modèles de liaisons non-rigides, dissipatifs, hétérogènes ont également été implémentés pour permettre de simuler le comportement d'une structure réelle. Si ces modèles restent linéaires dans le cadre de ce mémoire, leur complexification est envisageable. Une première idée est d'imaginer que les paramètres du modèle varient avec la sollicitation, la fréquence, . . . ce qui rendrait la résolution non-linéaire. Une autre piste consiste à considérer que les liaisons resteront toujours mal modélisées, les processus de réalisation introduisant un facteur aléatoire inévitable. Ce travail a été entrepris dans [RB04, BR05] : l'approche consiste à considérer que les sous-structures sont déterministes alors que les liaisons sont des éléments stochastiques. La décomposition du système linéaire sur les polynômes du chaos permet alors un calcul efficace de la réponse de la structure.

Quel que soit le modèle de liaison, ses coefficients n'ont en général que peu de rapport avec les paramètres matériaux ou géométriques accessibles. L'objectif est donc de pouvoir identifier ces coefficients à partir de résultats d'essais dans un problème inverse. Dans cette perspective, l'écriture d'un problème sous forme de minimum est une étape primordiale puisqu'elle est la base de la construction de la fonctionnelle coût utilisée dans le problème intégrant les mesures. Comme il en a déjà été fait la remarque, le processus de correction peut tirer un bénéfice intéressant de la version sous-structurée introduite : en effet, lors de la correction d'un modèle d'interface, le système d'admissibilité n'est pas modifié car il ne fait référence qu'aux parties de la structure qui sont bien modélisées (sous-structures et interfaces fiables). Le seul terme à réassembler est l'erreur d'interface, ce qui permettra un gain de temps d'autant plus appréciable que les paramètres de liaisons sont corrigés à chaque itération lors du procédé d'optimisation.



**FIG. 3.19:** Calcul de la liaison hétérogène à la fréquence 245 Hz avec la TVRC (à gauche) et NASTRAN (à droite). La discrétisation TVRC utilise, pour les inconnues des sous-structures, 128 modes intérieurs, 4 x 33 rayons de bord et 0 rayons de coin ; pour les inconnues d'interfaces, 128 modes intérieurs, 4 x 33 rayons de bord et 0 rayons de coin. Le calcul NASTRAN nécessite environ 80000 d.d.l.

---

## Mise en œuvre d'une méthode de recalage des modèles de liaisons basée sur la *TVRC*

En ajoutant à l'*erreur de modèle* déjà définie une *erreur par rapport aux mesures*, la solution obtenue réalise un compromis entre le modèle mathématique supposé et le modèle expérimental mesuré. Ainsi enrichie des informations expérimentales, la fonctionnelle coût permet d'identifier les paramètres du modèle de liaison à partir de données expérimentales, qui sont ici simulées par la voie numérique. Dans ce chapitre, l'influence de la confiance accordée aux mesures et au modèle et la robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et au bruit de mesure sont étudiées sur deux structures, l'une composée des deux plaques en L et l'autre constituée d'un longeron de quatre sous-structures.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Écriture du problème inverse . . . . .</b>	<b>74</b>
1.1	Informations fiables et non fiables . . . . .	74
1.2	Erreur de modèle . . . . .	74
1.3	Erreur par rapport aux mesures . . . . .	75
1.4	Problème final . . . . .	76
1.5	Problème inverse . . . . .	77
1.6	Écriture discrétisée . . . . .	77
<b>2</b>	<b>Identification de la liaison entre deux plaques sur des essais simulés numériquement . . . . .</b>	<b>79</b>
2.1	Présentation du problème . . . . .	79
2.2	Identification de la raideur de liaison . . . . .	82
2.3	Identification de l'amortissement de liaison . . . . .	89
2.4	Bilan . . . . .	95
<b>3</b>	<b>Identification des liaisons d'un longeron à partir d'essais simulés numériquement . . . . .</b>	<b>96</b>
3.1	Présentation du problème . . . . .	96
3.2	Identification des raideurs . . . . .	97
3.3	Identification de l'amortissement . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>103</b>

---

## 1 Écriture du problème inverse

Par souci de clarté, la mise en œuvre du problème inverse est réalisée essentiellement sur le comportement en rotation de la liaison. Ainsi, les paramètres du modèle sont la raideur  $k_r$ , l'inertie  $J_r$  et les amortissements de liaison associés  $\eta_r$  et  $\eta_j$ . Le problème est écrit à une fréquence unique conformément à l'approche TVRC. Les données expérimentales sont supposées locales mais de taille importante : on fait l'hypothèse de mesures de champ, qui nous paraissent être une piste intéressante en moyennes fréquences.

### 1.1 Informations fiables et non fiables

Le fondement de la méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement modifiée est la séparation de toutes les informations, qu'elles proviennent du modèle mathématique ou du modèle expérimental, en deux catégories :

- les données relativement fiables sont vérifiées de manière exacte,
- les données non fiables permettent de construire une fonctionnelle coût et sont vérifiées au mieux.

Le Tableau 4.1 rappelle la confiance accordée à chaque information disponible. Du côté du modèle, ce sont les équations de liaison qui sont soumises au doute. Sur le plan expérimental, la plus grosse source d'erreur est supposée être l'imprécision des amplitudes mesurées, qui sont inévitablement biaisées par le bruit.

### 1.2 Erreur de modèle

Dans le précédent chapitre, les équations de liaison mises en doute ont permis de construire l'erreur d'interface qui devient l'erreur de modèle du problème de recalage. Son expression est rappelée dans l'équation (4.1).

$$E_{mdl}^2(w) = \frac{1}{N_{RdC}} \int_{\Gamma} \left\| \frac{1}{2} (-n_1 \underline{M}_1 n_1 + n_2 \underline{M}_2 n_2) + k_r (1 + i \eta_r) (w_{,n_1} - w_{,n_2}) \right\|^2 dl$$

$$+ \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{1}{N_{Eq}} \int_{\Gamma} \left\| n_1 \underline{M}_1 n_1 + n_2 \underline{M}_2 n_2 + \frac{(1 - i \eta_j) J \omega^2}{2} (w_{,n_1} + w_{,n_2}) \right\|^2 dl \quad (4.1)$$

avec ici :

$$N_{RdC} = N_{Eq} = \text{mes}(\Gamma) \cdot \max(\max_{\Omega_1} n_1 \underline{M}_1 n_1, \max_{\Omega_2} n_2 \underline{M}_2 n_2)$$

Les coefficients  $N_{RdC}$  et  $N_{Eq}$  sont adimensionnants et approchés à partir des sollicitations extérieures, pour permettre d'obtenir un terme de normalisation indépendant des inconnues.  $\alpha$  est choisi pour pouvoir accorder plus ou moins de confiance à l'équation d'équilibre ou à la relation de comportement.

Les autres équations du modèle mathématique étant vérifiées de façon exacte, l'erreur de modèle sera nulle si et seulement si toutes les équations du modèle sont vérifiées,

	Modèle mathématique	Modèle expérimental
Informations fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Géométrie</li> <li>• Équations des sous-structures</li> <li>• Conditions aux limites fiables (autres que la liaison)</li> <li>• Comportement en effort tranchant de la liaison</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fréquences mesurées</li> <li>• Position des points de mesure</li> <li>• Orientation des mesures</li> <li>• Force d'excitation imposée</li> </ul>
Informations non fiables	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Équations de liaison (rotation) : <ul style="list-style-type: none"> <li>- relation de comportement</li> <li>- équilibre dynamique</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Amplitudes mesurées (bruitées)</li> </ul>

**TAB. 4.1:** *Confiance accordée aux données des modèles mathématique et expérimental pour le recalage des modèles de liaison.*

attestant que **l'ensemble du modèle est exact**. Autrement, l'erreur de modèle est positive, et quantifie la vérification des équations non fiables : les équations de la jonction.

### 1.3 Erreur par rapport aux mesures

Les moyens de mesure utilisés pour les expériences de vibration sont généralement des accéléromètres positionnés en certains points de la structure. Le contexte des vibrations moyennes fréquences remet en question ce choix, pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, l'utilisation d'accéléromètres est un moyen intrusif, qui modifie localement les caractéristiques de la structure (masse, raideur). La très forte sensibilité à toute perturbation dans cette fenêtre de fréquence suggère d'éviter une telle modification, même locale, des caractéristiques de la structure.

Par ailleurs, l'information donnée par des accéléromètres reste très limitée spatialement : seuls quelques points sont mesurés, ce qui pose le problème de la représentativité de la structure globale. En effet, en moyennes fréquences commencent à apparaître des modes très localisés qui nécessitent une représentation spatiale plus riche.

Pour surmonter les difficultés précédentes, une idée intéressante est l'utilisation de *mesures de champ* qui sont pour la plupart non intrusives. Le nombre de points mesurés est quasiment infini, donnant une représentation très complète de la structure. Les quantités mesurées peuvent être les déplacements, les vitesses ou les accélérations.



La distance entre les données expérimentales et la solution numérique est classiquement choisie comme la norme entre les quantités locales simulées  $w_i = w(\underline{X}_i)$  et celles mesurées, notées  $\tilde{w}_i = \tilde{w}(\underline{X}_i)$ , où  $\underline{X}_i$  désigne un point de mesure :

$$E_{mes}^2(w, \tilde{w}) = \frac{1}{N_{mes}} \sum_i \|w_i - \tilde{w}_i\|^2 \quad (4.2)$$

avec, par exemple, le choix de normalisation suivant :

$$N_{mes} = \sum_i \|\tilde{w}_i\|^2 \quad (4.3)$$

Le coefficient  $N_{mes}$  permet d'adimensionner l'erreur considérée.

Dans le cas de mesures de champ le nombre  $N_i$  de points mesurés devient très important, et cette distance est l'équivalent discret de l'intégrale sur toute la structure de la distance aux quantités mesurées :

$$E_{mes}^2(w, \tilde{w}) \simeq \frac{\int_{\underline{X} \in \Omega} \|w(\underline{X}) - \tilde{w}(\underline{X})\|^2 d\Omega}{\int_{\underline{X} \in \Omega} \|\tilde{w}(\underline{X})\|^2 d\Omega} \quad (4.4)$$

L'erreur de mesure sera nulle si et seulement si **l'ensemble des données expérimentales est exactement vérifié**. Dans ce cas, la solution numérique ( $w$ ) colle exactement aux mesures ( $\tilde{w}$ ) effectuées.

## 1.4 Problème final

La fonction coût finale prend le nom de *résidu d'interface modifié*. Elle s'écrit :

$$E_{mod}^2(w, \tilde{w}) = E_{mdl}^2(w) + \frac{p}{1-p} E_{mes}^2(w, \tilde{w}) \quad (4.5)$$

avec  $p \in [0, 1]$ . Le nouveau problème, dit problème modifié, s'écrit alors :

**Problème sous-structuré modifié** : Trouver la solution ( $w$ ) telle que :

- ( $w$ ) vérifie exactement les équations fiables,
- ( $w$ ) minimise  $E_{mod}^2(w, \tilde{w}) = E_{mdl}^2(w) + \frac{p}{1-p} E_{mes}^2(w, \tilde{w})$ .

Le coefficient  $\frac{p}{1-p}$  permet de faire pencher la confiance du côté du modèle mathématique ou du côté de la solution expérimentale. En faisant tendre  $p$  vers 0, on retrouve le problème modèle de la Section 3.1.3. Dans ce cas, il n'est pas tenu compte de la solution expérimentale. Au contraire, si l'on fait tendre  $p$  vers 1, les équations de liaison sont ignorées et seules les mesures sont prises en compte, d'où le risque d'une solution faussée en présence de bruit de mesure. Le choix d'une valeur intermédiaire de  $p$  donne naissance à un problème surcontraint dont la solution est un compromis entre modèle de liaison et informations expérimentales. En pratique, on utilise couramment la valeur  $p = 0.8$ .

## 1.5 Problème inverse

L'erreur modifiée utilisée ci-dessus pour trouver une solution compromis entre modèle et mesure dépend des paramètres du modèle qui sont notés  $\underline{q}$ , et qui représentent les raideur, masse et amortissements de la jonction. En vue d'identifier les paramètres optimaux, elle sert de fonction objectif dans un processus d'optimisation. Le problème de recalage des paramètres s'écrit ainsi :

$$\textbf{Problème inverse} : \textit{Trouver les paramètres } \underline{q} \textit{ minimisant } E_{mod}^2(\underline{q}) \quad (4.6)$$

Dans le cas idéal, les paramètres optimaux obtenus permettraient d'avoir une erreur nulle, c'est à dire à la fois une erreur de modèle et une erreur de mesure nulle : toutes les équations des modèles sont alors vérifiées. Dans la réalité, les erreurs de modélisation, de discrétisation, de résolution et l'imprécision due au bruit de mesure introduisent des erreurs supplémentaires qui se retrouvent dans chaque terme de la fonctionnelle objectif ci-dessus. La robustesse de la méthode face à ces différents obstacles devra être étudiée pour garantir la bonne marche du processus de recalage.

## 1.6 Écriture discrétisée

En reprenant les notations du Paragraphe 1.3.6, l'erreur de mesure s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{mes}^2 &= \frac{1}{N_{mes}} \sum_i \|w_{(\underline{x}_i)} - \tilde{w}_{(\underline{x}_i)}\|^2 = \frac{1}{N_{mes}} \sum_i \left\| \sum_{l=m,n,q} W_l \Phi_l(\underline{x}_i) - \tilde{w}_{(\underline{x}_i)} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{N_{mes}} \sum_i \left\| \underline{W}^T \cdot \underline{\Phi}_{(\underline{x}_i)} - \tilde{w}_{(\underline{x}_i)} \right\|^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

soit :

$$E_{mes}^2 = \frac{1}{N_{mes}} \left[ \frac{1}{2} \underline{W}^T \cdot \mathbb{K}_{mes} \cdot \underline{W} - \underline{W}^T \cdot \underline{F}_{mes} + C_{mes} \right] \quad (4.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{mes} &= 2 \sum_i \underline{\Phi}_{(\underline{x}_i)} \cdot \underline{\Phi}_{(\underline{x}_i)}^T \\ \underline{F}_{mes} &= \sum_i \underline{\Phi}_{(\underline{x}_i)} \tilde{w}_{(\underline{x}_i)} \\ C_{mes} &= \sum_i \tilde{w}_{(\underline{x}_i)}^2 \\ N_{mes} &= \sum_i \|\tilde{w}_{(\underline{x}_i)}\|^2 = C_{mes} \end{aligned}$$

L'erreur de modèle prend la forme quadratique suivante, dans laquelle la matrice dépend des paramètres  $\underline{q}$  du modèle de liaison :

$$E_{mdl}^2 = \frac{1}{2} \hat{\underline{W}}^T \cdot \mathbb{K}_{mdl}^{(q)} \cdot \hat{\underline{W}} \quad (4.10)$$

L'admissibilité des sous-structures garde la forme suivante :

$$\mathbb{K}_{adm} \left| \begin{array}{c} \underline{W} \\ \underline{\hat{W}} \end{array} \right. = \underline{F}_{adm} \quad (4.11)$$

Le problème discrétisé s'écrit donc :

**Problème modifié discrétisé** : Trouver les inconnues  $(\underline{W}, \underline{\hat{W}})$  telles que :

- $\mathbb{K}_{adm} \left| \begin{array}{c} \underline{W} \\ \underline{\hat{W}} \end{array} \right. = \underline{F}_{adm}$
- $(\underline{W}, \underline{\hat{W}})$  minimise  $E_{mod}^2 = E_{mdl}^2 + \frac{p}{1-p} E_{mes}^2$ 

$$= \frac{1}{2} \underline{\hat{W}}^T \cdot \mathbb{K}_{mdl}^{(q)} \cdot \underline{\hat{W}} + \frac{p}{1-p} \left( \frac{1}{2} \underline{W}^T \cdot \mathbb{K}_{mes} \cdot \underline{W} - \underline{W}^T \cdot \underline{F}_{mes} + C_{mes} \right)$$

La normalisation du terme de mesure a été intégrée directement aux matrices dans la formule ci-dessus.

Le problème est résolu par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\lambda}$  :

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbb{K}_{mdl}^{sym} + \frac{p}{1-p} \mathbb{K}_{mes}^{sym} & \mathbb{K}_{adm}^T \\ \mathbb{K}_{adm} & \mathbb{O} \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} \underline{W} \\ \underline{\hat{W}} \\ \underline{\lambda} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \frac{p}{1-p} \underline{F}_{mes} \\ \underline{F}_{adm} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

En pratique, la taille du système linéaire est relativement faible : si l'on compte  $n_s$  d.d.l. par sous-structure et  $n_i$  d.d.l. par interface isolée, la taille globale du système (4.13) est  $n_s \cdot N_s + (n_i + 2 \cdot n_s) \cdot N_i$  avec  $N_s$  et  $N_i$  le nombre de sous-structures et d'interfaces isolées.  $n_s$  et  $n_i$  restent dans la pratique de l'ordre de quelques dizaines, soit un coût très raisonnable.

### ***Problème inverse***

Une fois le système résolu, le calcul de la valeur de l'erreur et de chacun de ses termes est aisé. Le processus d'identification (4.6) consiste à minimiser l'erreur modifiée par rapport aux paramètres du modèle. Ce processus est non-linéaire et fait appel à une méthode itérative de type *descente*. Notons que **les matrices du système d'admissibilité et de l'erreur de mesure ne dépendent pas des paramètres du modèle de liaison**. Ce point est primordial sur le plan de temps de calcul. Comme il a déjà été souligné, il signifie que lors de la correction du modèle, ces matrices ne sont pas réassemblées ce qui permet un **gain de temps important**. Dans l'exemple du problème des deux plaques qui suit, le gain de temps permet de ne recalculer que 20 % des termes.

## 2 Identification de la liaison entre deux plaques sur des essais simulés numériquement

### 2.1 Présentation du problème

La première étude concerne la structure composée de deux plaques en L déjà étudiée. La fréquence utilisée pour l'étude est le pic de résonance à 155 Hz. Les données expérimentales sont simulées numériquement en utilisant le code TVRC. La discrétisation utilisée comprend 48 rayons intérieurs et 4 x 13 rayons de bord de manière à garder une erreur de discrétisation inférieure à  $10^{-2}$ . Le modèle expérimental testé ainsi que ses matériaux sont précisés sur la Figure 4.1. Les mesures de champ utilisent un maillage de 10 cm, ce qui est relativement grossier pour ce type de moyen expérimental.

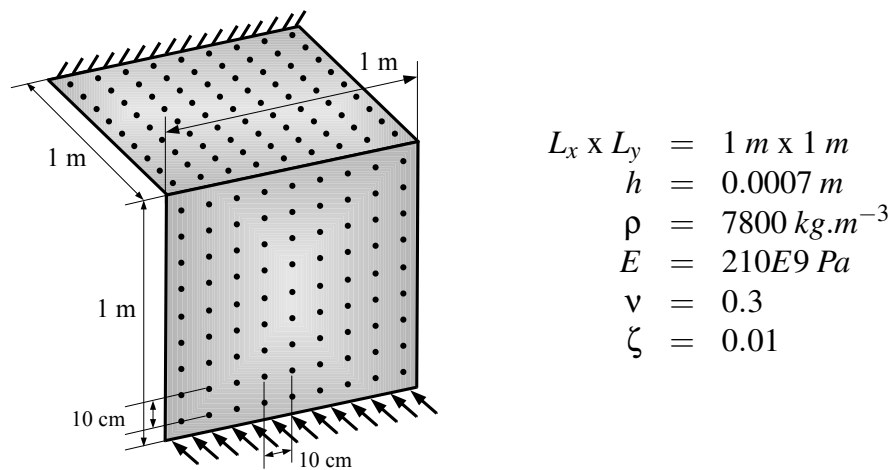


FIG. 4.1: Position des mesures de champ pour les données expérimentales simulées numériquement.

Pour clarifier la présentation, les termes inertiels de la liaison sont négligés. La structure réelle est simulée pour deux types de liaison : une liaison très amortissante, et une autre peu amortissante, dont les caractéristiques sont précisées dans le Tableau 4.2. La Figure 4.2 montre les FRF obtenues pour chacune de ces liaisons.

Dans la démarche suggérée dans [WL91], les deux paramètres de la liaison sont recherchés indépendamment. En effet, dans les cas où l'amortissement est très faible, la structure est beaucoup plus sensible à une erreur sur la raideur qu'à une erreur sur l'amortissement de liaison. L'idée est donc de commencer par identifier la raideur, et ensuite l'amortissement. Toutefois, cette démarche sera remise en question dans le cas d'une liaison très dissipante, pour laquelle l'influence du coefficient d'amortissement de liaison est importante.

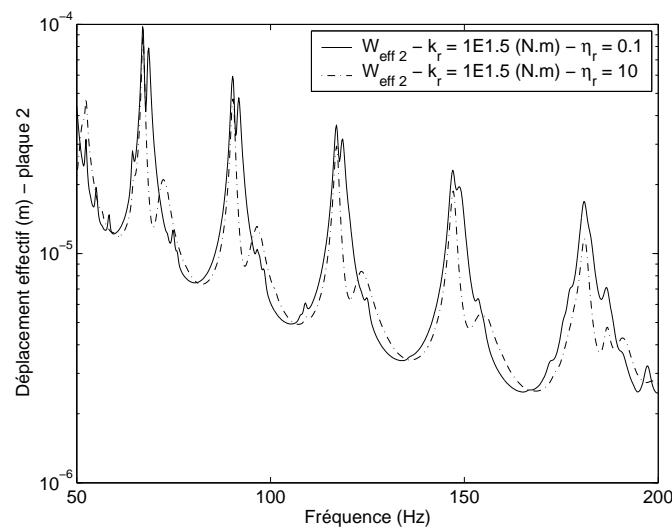
Pour illustrer le potentiel de la méthode, les Figures 4.3 et 4.4 montrent l'allure de la

	Liaison très amortissante	Liaison peu amortissante
Raideur de liaison $k_r$	$10^{1.5}$	$10^{1.5}$
Amortissement en raideur $\eta_r$	$10^1$	$10^{-1}$
Inertie de liaison $J$	0	0
Amortissement inertiel $\eta_j$	0	0
Énergie dissipée par la liaison	68.60 %	8.70 %

**TAB. 4.2:** Caractéristiques des deux liaisons étudiées à 155 Hz.

fonctionnelle coût en fonction de la raideur et de l'amortissement supposés du modèle. Les données expérimentales sont des mesures de champ bruitées. La forme de l'erreur modifiée illustre la capacité de la méthode à identifier de manière précise chaque paramètre  $k_r$  et  $\eta_r$ , y compris en présence d'une imprécision sur l'autre paramètre.

Afin de mieux comprendre le comportement de la fonctionnelle coût, et le choix des paramètres à faire pour obtenir un processus robuste, une étude des termes de la fonctionnelle en fonction des perturbations et des sources d'imprécision va maintenant être présentée. L'objectif est de vérifier que la méthode mise en œuvre conserve la même robustesse que la méthode basée sur l'erreur en relation de comportement utilisée pour le recalage de modèles éléments finis en basses fréquences, et d'étudier la faisabilité du recalage des paramètres de jonction à partir d'essais simulés numériquement. Les deux types de liaison, peu et très amortissante, sont étudiées.



**FIG. 4.2:** Déplacement effectif de la plaque 2 pour la liaison peu amortissante ( $\eta_r = 0.1$ ) et très amortissante ( $\eta_r = 10$ ), en fonction de la fréquence.

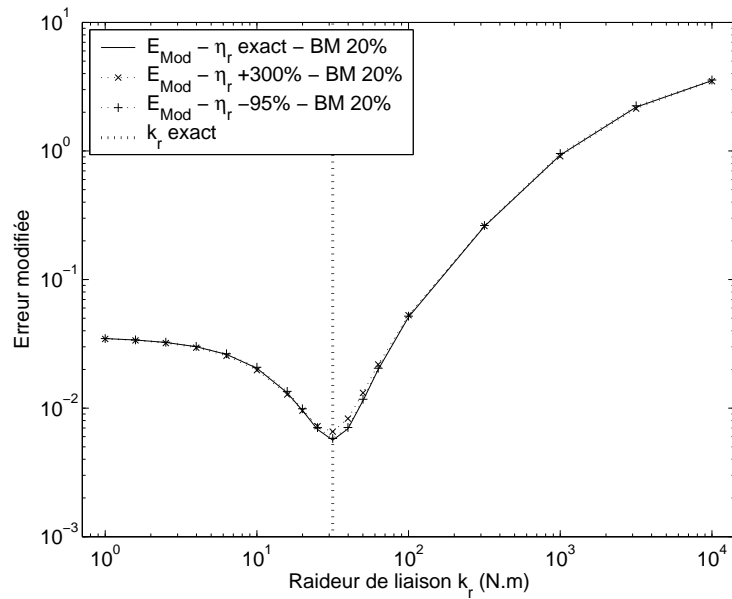


FIG. 4.3: Robustesse de la fonctionnelle coût  $E_{Mod}^2$  au bruit de mesure ( $BM=20\%$ ) et à une erreur sur l'amortissement lors du recalage de la raideur de liaison  $k_r$  de la liaison peu amortissante, pour une confiance partagée ( $p=0.8$ ) entre modèle et mesures.

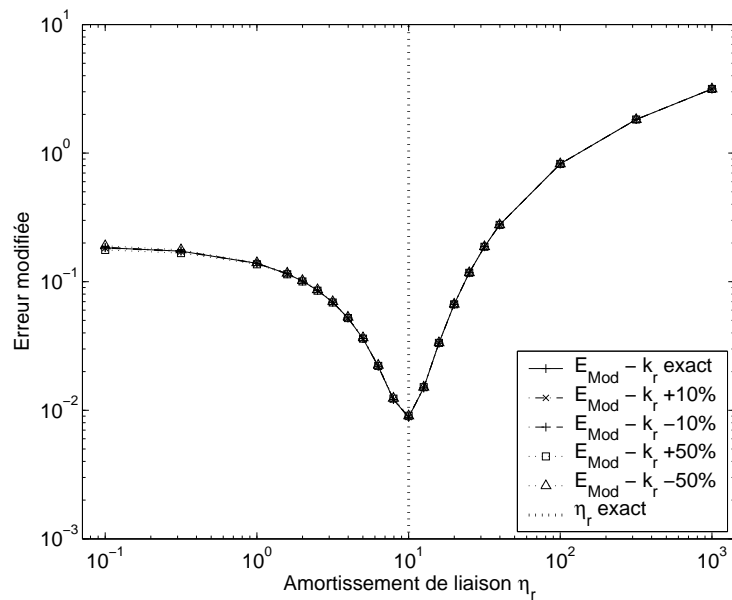


FIG. 4.4: Robustesse de la fonctionnelle coût  $E_{Mod}^2$  au bruit de mesure ( $BM=20\%$ ) et à une erreur sur la raideur lors du recalage de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  de la liaison très amortissante, pour une confiance partagée ( $p=0.8$ ) entre modèle et mesures.

## 2.2 Identification de la raideur de liaison

### 2.2.1 Influence du paramètre $p$

Dans un premier temps, les mesures ne sont pas bruitées, et aucune erreur de modélisation autre que la raideur de la liaison n'est incluse : les amortissements structural et de liaison sont rigoureusement identiques à ceux de la structure réelle.

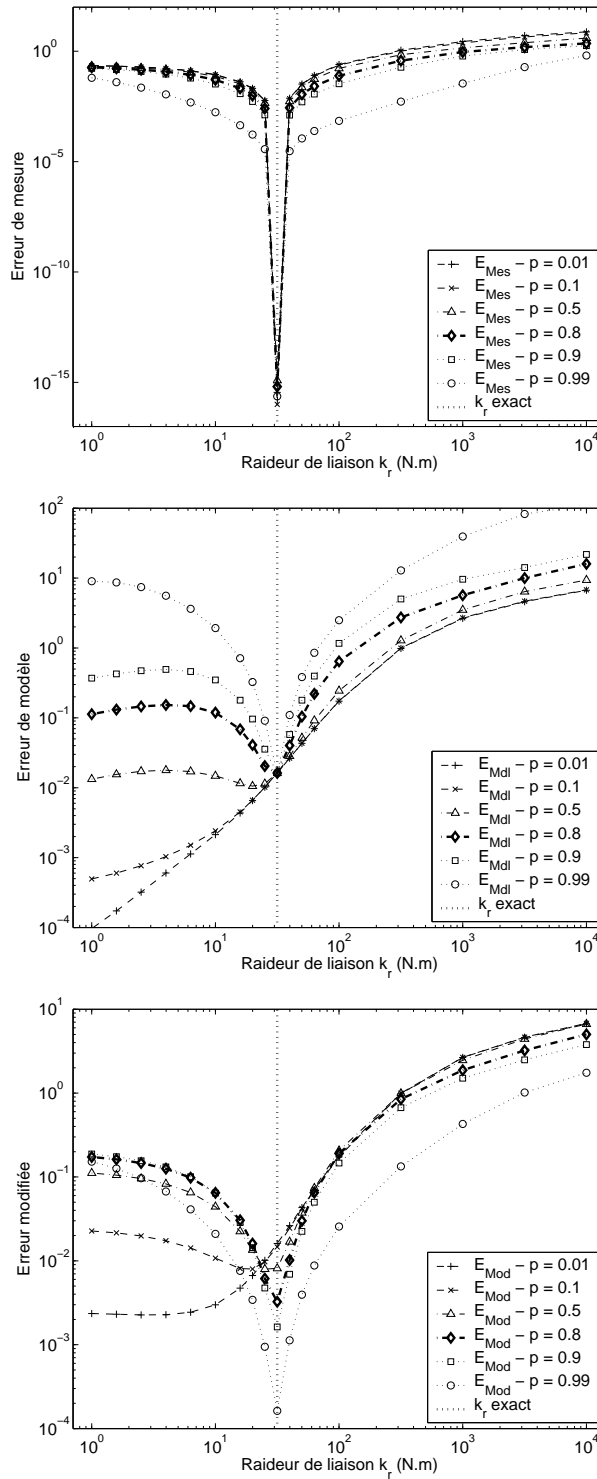
La Figure 4.5 représente la valeur de l'erreur de mesure (notée  $E_{Mes}$ ), de l'erreur de modèle ( $E_{Mdl}$ ) et l'erreur modifiée ( $E_{Mod}$ ) en fonction de la raideur supposée du modèle numérique, pour plusieurs valeurs du paramètre  $p$ . Les résultats sont ceux de la liaison très amortissante. Ceux de la seconde liaison, présentés en Annexe C (cf. Figure C.1), montrent un comportement similaire.

L'erreur de mesure montre un minimum bien marqué pour la valeur exacte de  $k_r$ . Quand la confiance aux mesures augmente ( $p \rightarrow 1$ ), l'erreur diminue significativement. Pour une assez grande valeur de  $p$ , elle reste peu sensible à  $p$ . Inversement, l'erreur de modèle diminue quand  $p$  tend vers 0. Pour une confiance suffisante dans les mesures, l'erreur de modèle présente un minimum pour la valeur exacte de  $k_r$ . Ce minimum est de l'ordre de  $10^{-2}$ , ce qui représente l'erreur de discrétisation due à la méthode numérique. En conséquence, l'erreur due à la discrétisation ne devrait pas polluer le processus d'identification de la raideur. Enfin, l'erreur modifiée possède la même allure que chacun de ses termes. Dans le cas présent de l'absence de bruit, c'est évidemment une grande confiance aux mesures ( $p = 0.99$ ) qui donne l'erreur modifiée la plus faible. Notons que pour une confiance trop grande dans le modèle ( $p = 0.01$ ), les mesures ne pèsent pas assez dans l'erreur modifiée et la raideur n'est pas correctement identifiée. Autrement, le profil convexe de l'erreur modifiée permet l'identification sans difficulté du bon paramètre.

### 2.2.2 Influence du bruit de mesure

Les mesures réelles sont inévitablement entachées d'un bruit qui est modélisé ici par une perturbation aléatoire centrée suivant une loi uniforme. Trois niveaux de bruit sont pris en compte :  $\pm 5\%$ ,  $\pm 10\%$  et  $\pm 20\%$ .

La Figure 4.6 représente l'allure de l'erreur modifiée en fonction de la raideur en présence de bruit de mesure pour trois valeurs de  $p$ , pour la liaison très amortissante (cf. Figure C.2 pour la liaison peu amortie). Pour chaque cas, l'erreur modifiée augmente naturellement avec le niveau de bruit. Comme précédemment, une confiance trop forte dans le modèle ( $p = 0.01$ ) ne tient pas assez compte des mesures et le paramètre identifié n'est pas le bon - il est situé autour de  $10^{0.5}$ . Toutefois les deux valeurs  $p = 0.8$  et  $p = 0.99$  montrent une bonne robustesse par rapport au bruit : le profil reste convexe et permet de trouver la bonne valeur de  $k_r$ . La robustesse obtenue pour  $p = 0.99$  s'explique par l'utilisation des mesures de champ : dans le cas où le nombre de points de mesure est très élevé, l'erreur commise sur les données expérimentales est moyennée sur un grand nombre de points, ce qui régularise le terme de mesure. Ce n'est pas le cas avec un très faible nombre de capteurs, une confiance exagérée dans les mesures affecte alors la robustesse par rapport au bruit.



**FIG. 4.5:** Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas), en fonction de la raideur de liaison  $k_r$ , lors du recalage de la liaison très amortissante - bruit de mesure 0 %, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ).



La tendance précédente s'explique par le comportement de l'erreur de mesure en présence de bruit. Pour  $\pm 20\%$  de perturbation par exemple (cf. Figure 4.7 et C.3 en Annexe C) l'erreur de mesure s'aplatit quand  $p$  augmente trop. On notera que lorsque  $k_r$  est à la valeur exacte, le niveau de l'erreur de mesure est de l'ordre de grandeur de l'écart-type du bruit de mesure. Ceci est rendu possible par une normalisation adéquate des termes de la fonctionnelle coût. L'erreur de modèle reste relativement stable par rapport au bruit de mesure (très similaire à l'erreur de modèle sans bruit de mesure, cf. Figure 4.5) ce qui est satisfaisant. L'erreur modifiée montre un minimum bien marqué pour la bonne valeur de  $k_r$ , s'aplatit si l'on fait trop confiance aux mesures ( $p = 0.99$ ), et donne un résultat faux si l'on donne une confiance excessive au modèle ( $p = 0.01$ ).

### 2.2.3 Influence d'une erreur sur l'amortissement

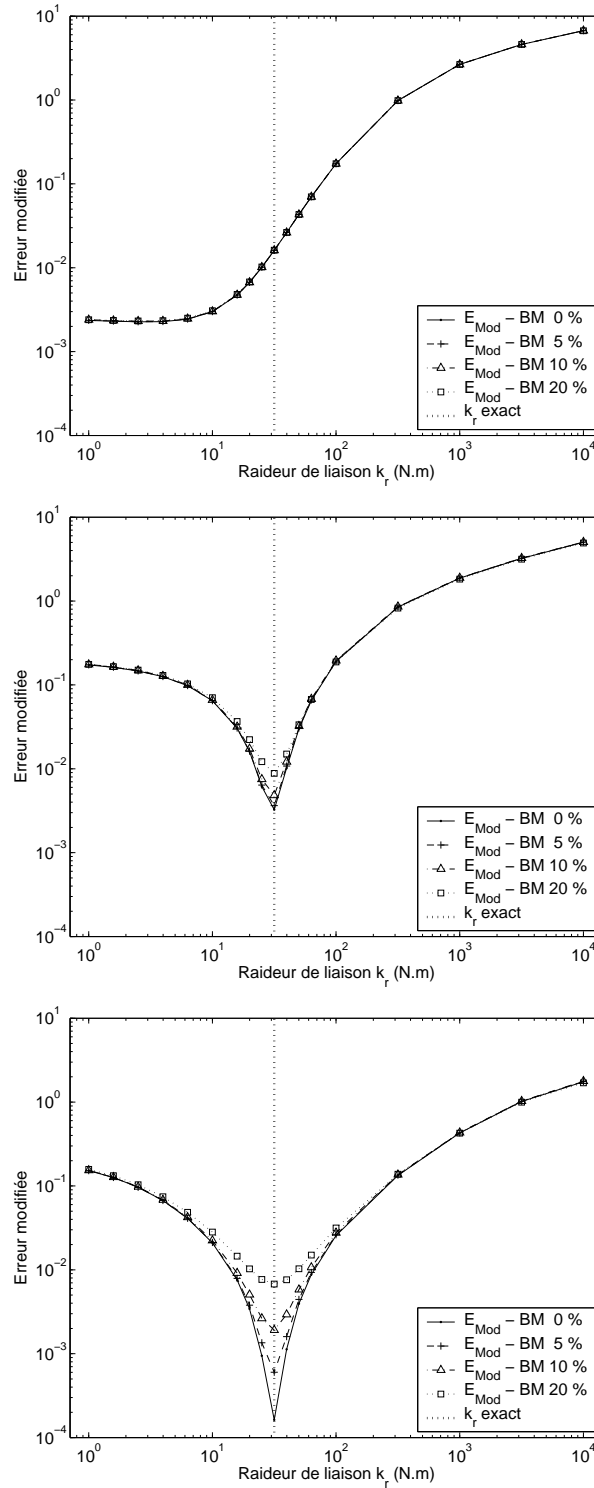
Compte tenu de la méthode proposée dans [WL91] - qui consiste à d'abord identifier la raideur puis l'amortissement lui-même - la question de l'influence d'une erreur sur l'amortissement de la liaison est primordiale : il faut que la raideur  $k_r$  reste identifiable même en présence d'une erreur sur  $\eta_r$ .

Les Figures 4.8 et 4.9 montrent la variation des erreurs en présence d'une erreur de modélisation de l'amortissement des deux liaisons, peu et très amortissantes, lorsque le bruit est nul et pour une confiance moyenne ( $p = 0.8$ ).

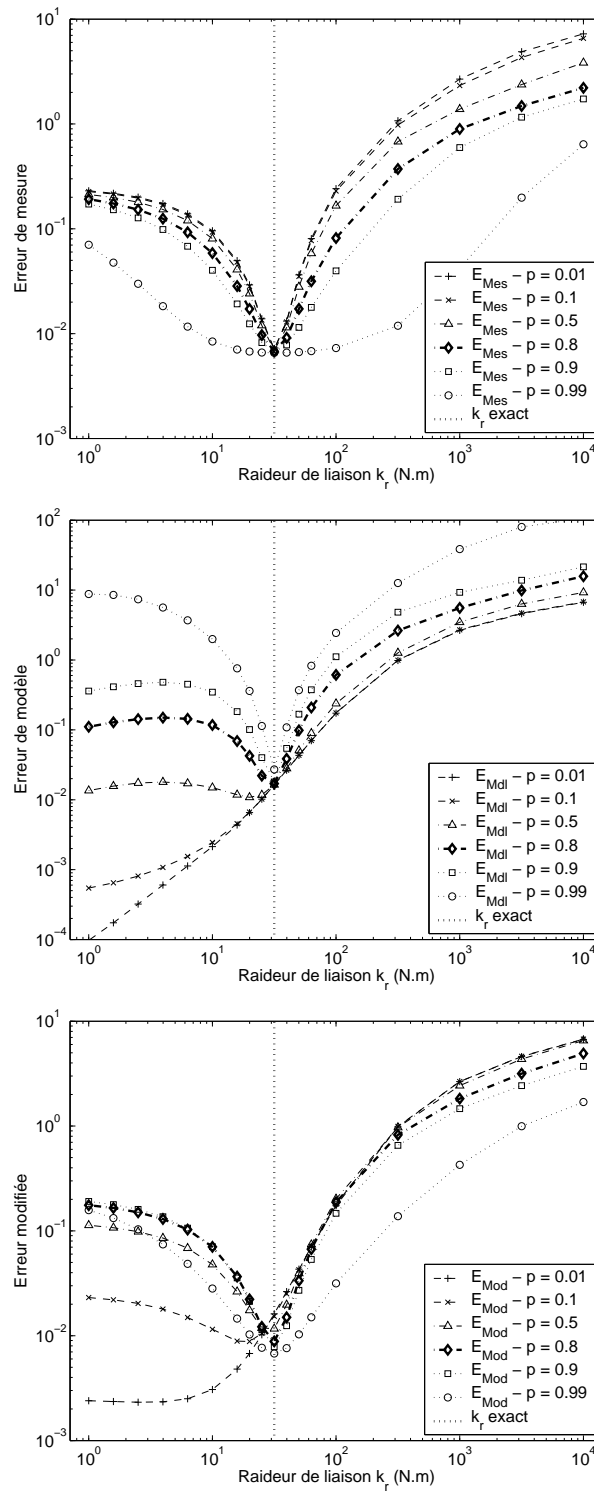
Dans le cas de la liaison peu amortissante, la fonctionnelle coût est insensible à l'erreur sur l'amortissement. Le paramètre  $k_r$  est alors identifié correctement et sans difficulté.

Le cas d'une liaison très dissipative pose plus de difficultés. Une erreur sur le coefficient d'amortissement  $\eta_r$  décale la position du minimum de la fonctionnelle coût. Lorsque l'amortissement est surestimé, le coefficient de raideur identifié est sous-estimé, et inversement.

Les mêmes courbes tracées en présence de bruit de mesure sur les Figures 4.10 et 4.11 montrent le même comportement de la fonctionnelle coût, mais avec un minimum légèrement plus élevé à cause de contribution du terme de mesure, montrant que le bruit ne pose pas de difficulté supplémentaire.



**FIG. 4.6:** Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  en présence de différents niveaux de bruit pour  $p = 0.01$  (en haut),  $p = 0.8$  (au milieu),  $p = 0.99$  (en bas) lors du recalage de la liaison très amortissante.



**FIG. 4.7:** Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  lors du recalage de la liaison très amortissante - bruit de mesure  $\pm 20\%$ , pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ).

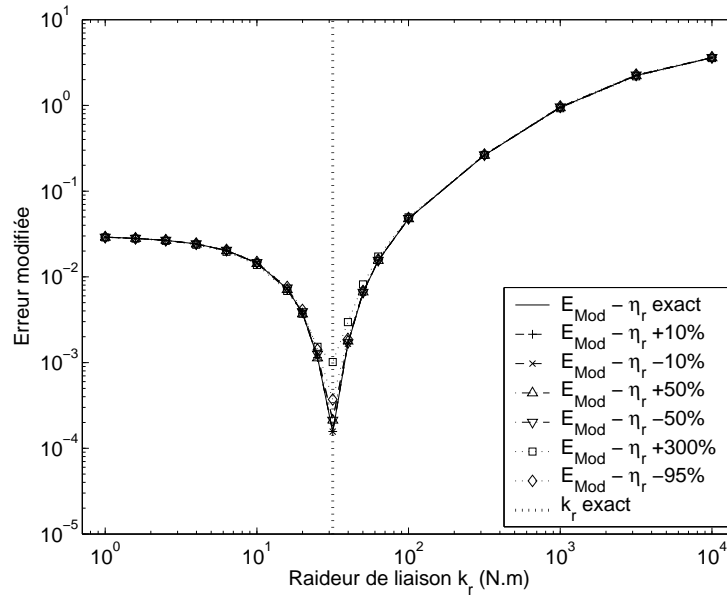


FIG. 4.8: Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  pour plusieurs niveaux d'erreur sur  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison peu amortissante - cas non bruité et confiance partagée entre modèle et mesures ( $p = 0.8$ ).

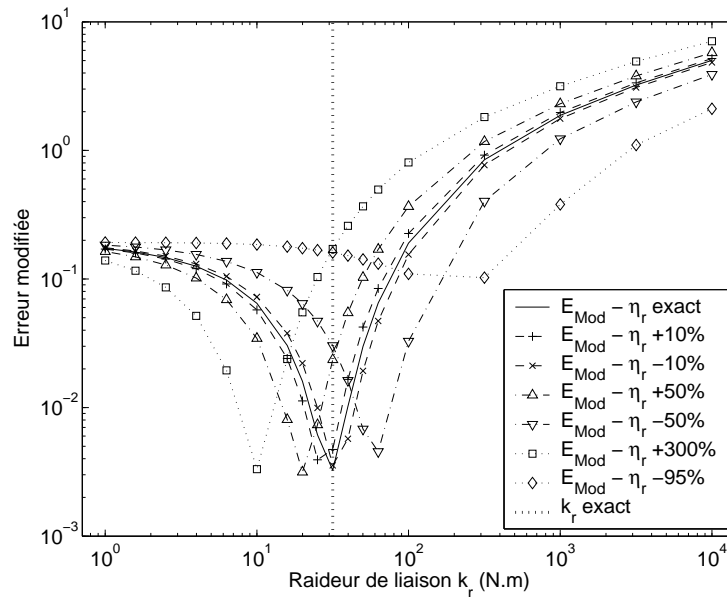
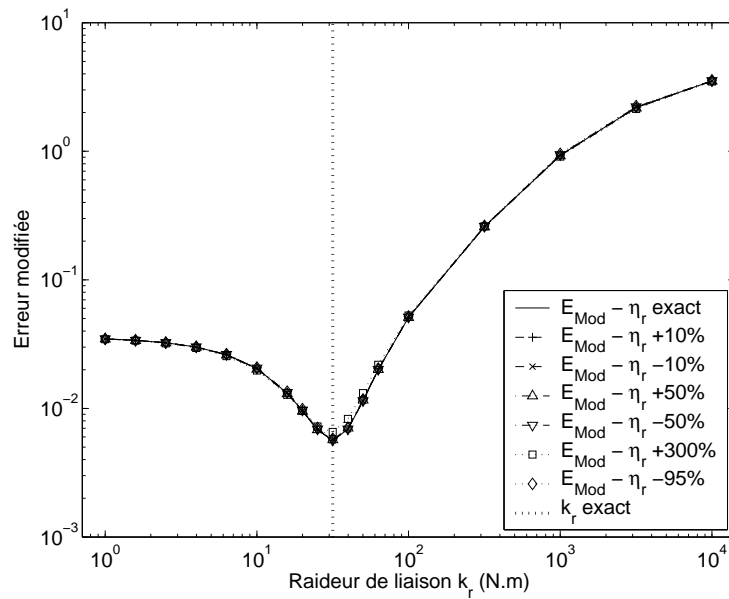
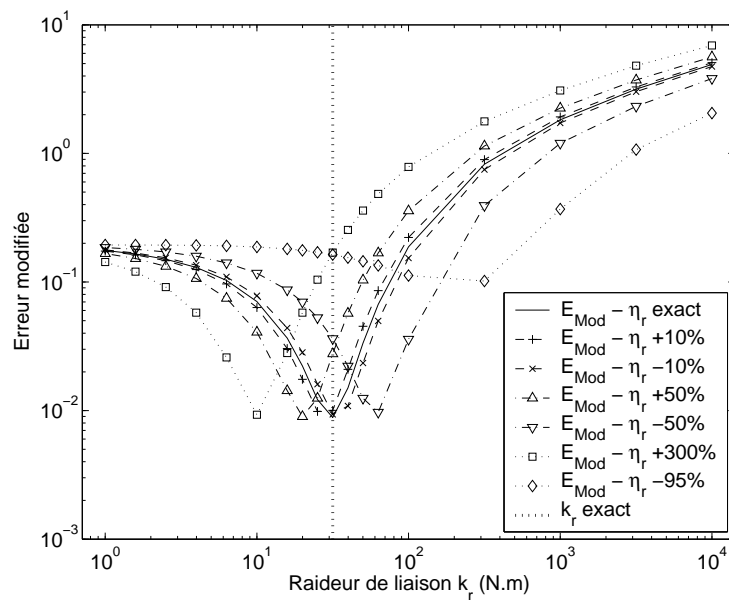


FIG. 4.9: Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  pour plusieurs niveaux d'erreur sur  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison très amortissante - cas non bruité et confiance partagée entre modèle et mesures ( $p = 0.8$ ).



**FIG. 4.10:** Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  pour plusieurs niveaux d'erreur sur  $\eta_r$  lors du recalage de la raideur de la liaison peu amortissante - bruit de mesure  $\pm 20\%$  et confiance partagée entre modèle et mesures  $p = 0.8$ .



**FIG. 4.11:** Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  pour plusieurs niveaux d'erreur sur  $\eta_r$  lors du recalage de la raideur de la liaison très amortissante - bruit de mesure  $\pm 20\%$  et confiance partagée entre modèle et mesures  $p = 0.8$ .

## 2.3 Identification de l'amortissement de liaison

### 2.3.1 Cas idéal

Supposant la raideur identifiée, on s'intéresse au recalage du coefficient d'amortissement de liaison. Dans un premier temps, on fait l'hypothèse que la raideur est parfaitement connue, et que les mesures ne sont pas bruitées.

#### *Liaison peu amortissante*

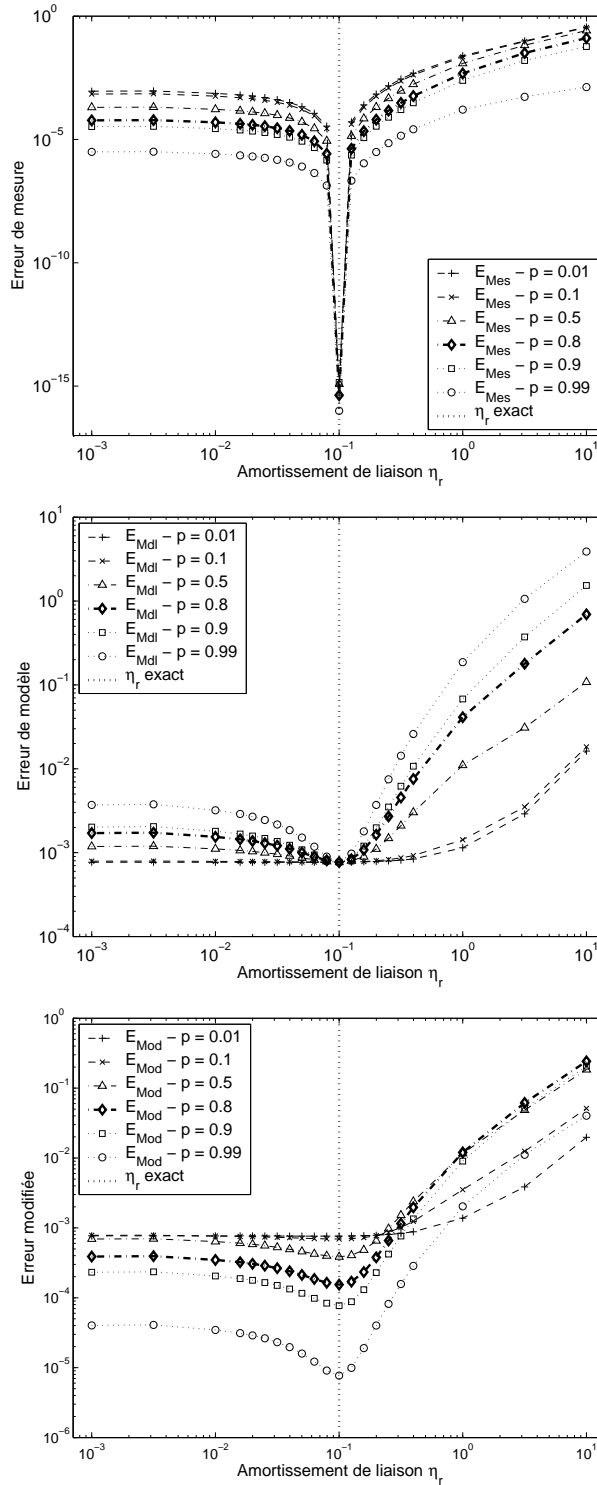
La Figure 4.12 montre l'allure de la fonctionnelle coût et de chacune de ses composantes en fonction de l'amortissement de liaison, pour la liaison peu amortissante. Chaque quantité montre un minimum bien reconnaissable pour la valeur exacte du coefficient d'amortissement ( $\eta_r = 0.1$ ) lorsque la confiance au modèle n'est pas trop exagérée. L'erreur de mesure diminue fortement quand on accorde une confiance suffisante au terme d'erreur de mesure ( $p \rightarrow 1$ ). Inversement, l'erreur de modèle est la plus faible pour une confiance placée dans le modèle. Le minimum représente alors l'erreur résiduelle due à la discrétisation. Pour les fortes valeurs de  $p$ , l'erreur de modèle est relativement insensible à  $k_r$ . L'erreur modifiée montre une allure relativement convexe avec un minimum bien précis, qui permet de recalibrer l'amortissement sans difficulté si  $p$  n'est pas trop faible.

Notons toutefois que la dynamique de la fonctionnelle coût est bien plus faible que pour une erreur sur la raideur : entre la valeur exacte de l'amortissement et un amortissement nul, l'erreur modifiée varie d'un facteur inférieur à 10, alors que dans le cas de la raideur l'erreur pouvait varier d'un facteur 1000 ou plus. Il faut donc s'attendre à ce que des mesures bruitées polluent de façon importante le recalage du coefficient  $\eta_r$  de la liaison peu amortissante.

Remarquons pour finir que la fonctionnelle coût est assez plate pour des valeurs faibles de  $\eta_r$ . Il semble donc conseillé de démarrer le processus de recalage avec une valeur élevée du paramètre  $\eta_r$ , par exemple  $\eta_r = 0.5$ , pour éviter de diverger.

#### *Liaison très amortissante*

Le cas d'un coefficient d'amortissement important pose moins de difficulté. L'allure des courbes présentées en Annexe D (cf. Figure D.1) ressemble fortement à celui obtenu lors de l'identification de la raideur. Le minimum est obtenu pour la bonne valeur de  $\eta_r$ , et la dynamique des fonctionnelles est comparable. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans le cas d'une jonction très dissipative, l'influence de l'amortissement est aussi importante que la raideur.



**FIG. 4.12:** Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison peu amortissante - bruit de mesure 0%,  $k_r$  exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ).

### 2.3.2 Influence du bruit de mesure

#### *Liaison peu amortissante*

La Figure 4.13 montre l'allure de chaque erreur en présence d'un bruit de  $\pm 10\%$ . Pour une confiance assez forte dans les mesures, l'erreur de mesure est très plate, proche d'une valeur liée à l'écart-type du bruitage inséré (lorsque  $k_r$  est exact). L'erreur de modèle montre toujours un minimum, excepté pour des valeurs faibles de  $p$ . L'erreur modifiée est le résultat de ces constatations : si l'on veut obtenir un minimum suffisant, il faut une confiance moyenne ( $p = 0.8$ ). Toutefois, la robustesse par rapport au bruit est plus faible que pour le recalage de la raideur. Pour un bruit de mesure plus important de  $\pm 20\%$  (cf. Figure 4.14), la fonctionnelle coût est trop polluée pour espérer identifier le bon paramètre, la dissipation étant trop peu influente par rapport au bruit.

#### *Liaison très amortissante*

Lorsque la liaison est très dissipative, l'influence de  $\eta_r$  est très importante, ce qui évite que la fonctionnelle coût soit polluée par le bruit. La Figure 4.15 montre que l'allure de l'erreur modifiée permet d'obtenir le bon coefficient sans difficulté en présence d'un bruit de  $\pm 20\%$  pour une valeur moyenne de la confiance entre les mesures et le modèle ( $p = 0.8$ ). La robustesse est comparable à celle manifestée lors du recalage de la raideur de liaison peu amortissante. L'allure des autres termes de la fonctionnelle est reportée en Annexe D (cf. Figure D.2).

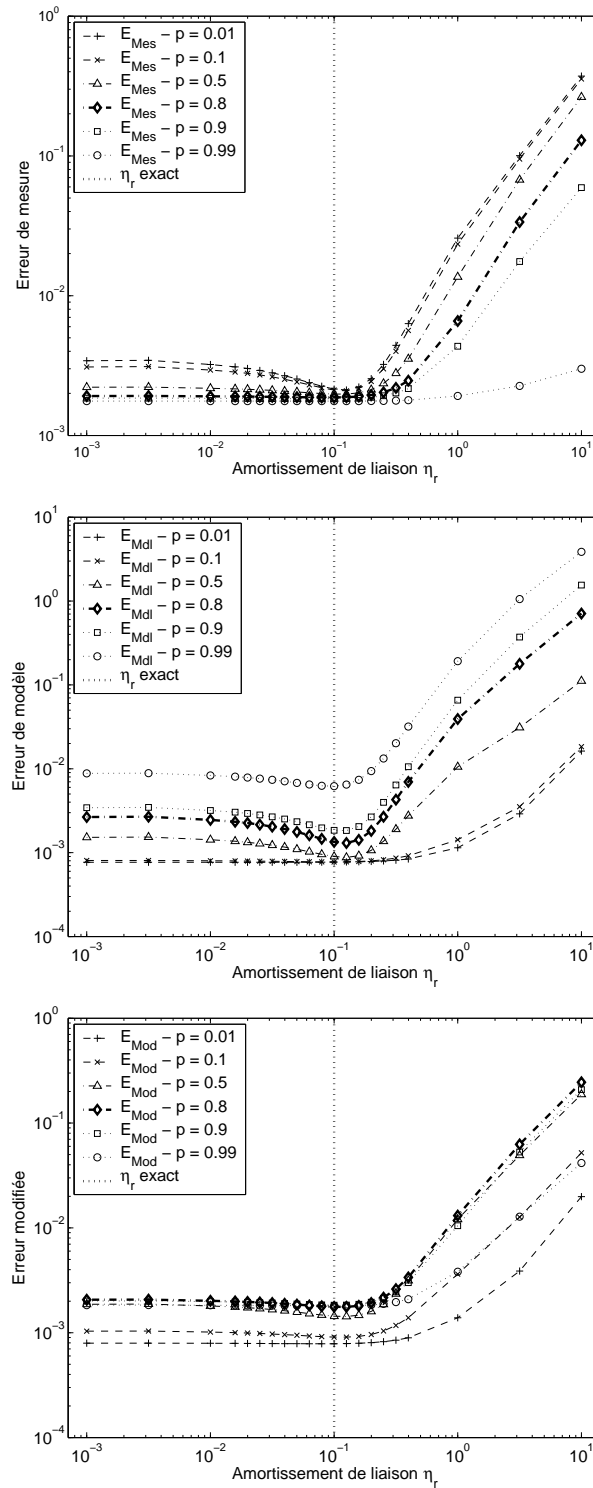
### 2.3.3 Influence d'une erreur sur la raideur

Le cas où la raideur est connue exactement ne saurait être réaliste. Pour la liaison très amortissante, le recalage de la raideur est pollué fortement par une erreur sur l'amortissement. Pour la liaison peu amortissante, même si l'algorithme permet de trouver dans la première phase un paramètre  $k_r$  optimal sans être affecté par le bruit ou par une erreur sur  $\eta_r$ , la valeur trouvée n'est la meilleure que par rapport au modèle supposé, qui est très réducteur. La réalité garde toute sa complexité - non-linéarités, erreurs de modélisation des sous-structures, ... - qui n'est pas prise en compte par le modèle. Le paramètre identifié sera le paramètre optimal en présence de ces erreurs de modélisation.

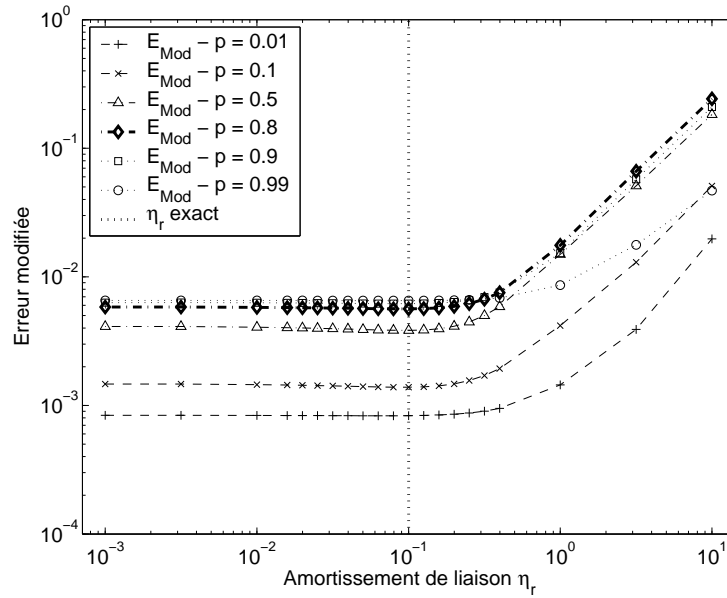
On étudie dans cette partie l'influence d'une erreur sur la connaissance de la raideur  $k_r$  dans le processus de recalage de l'amortissement. Les Figures 4.16 et 4.17 montrent la fonctionnelle coût pour plusieurs niveaux d'erreur sur  $k_r$  :  $+10\%$ ,  $-10\%$ ,  $+50\%$  et  $-50\%$ , pour un bruit de mesure nul chacune des deux liaisons étudiées.

L'identification de  $k_r$  sur la liaison très amortissante (cf. Figure 4.16) se montre très robuste par rapport à une erreur sur la raideur. Ce constat s'explique à nouveau par l'importance de l'amortissement sur cette liaison. L'influence de la raideur s'en trouve par conséquent diminuée, ce qui montre l'importance de connaître précisément l'amortissement lors de l'identification de la raideur, comme nous l'avons noté au Paragraphe 2.2.3.

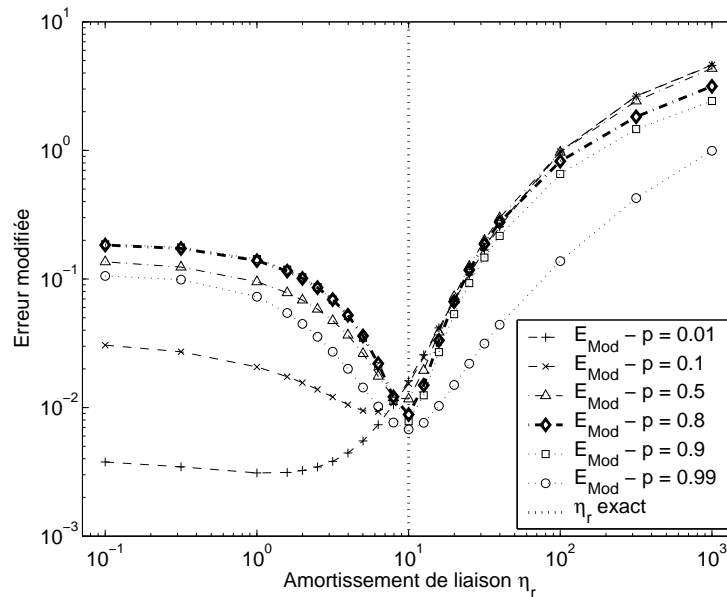




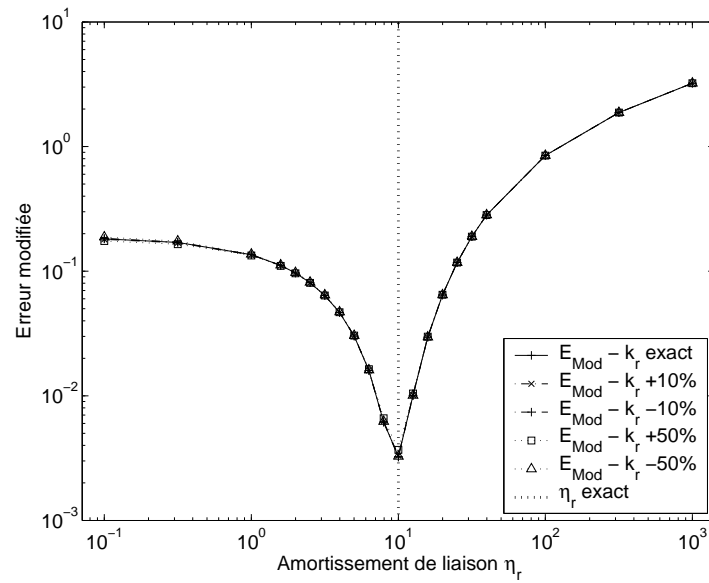
**FIG. 4.13:** Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison peu amortissante - bruit de mesure  $\pm 10\%$ ,  $k_r$  exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ).



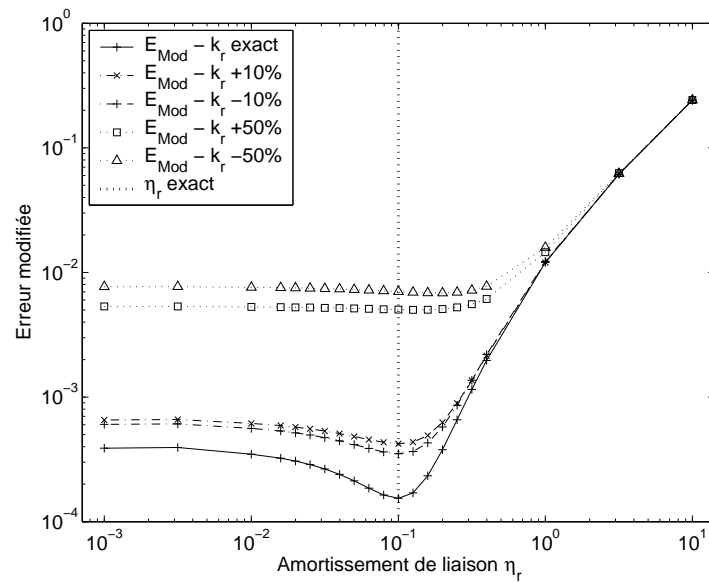
**FIG. 4.14:** Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison peu amortissante - bruit de mesure  $\pm 20\%$ ,  $k_r$  exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ).



**FIG. 4.15:** Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison très amortissante - bruit de mesure  $\pm 20\%$ ,  $k_r$  exact, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ).



**FIG. 4.16:** Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  pour différents niveaux d'erreur sur la raideur lors du recalage de la liaison très amortissante pour un bruit nul et une confiance partagée entre mesures et modèle ( $p = 0.8$ ).



**FIG. 4.17:** Erreur modifiée en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  pour différents niveaux d'erreur sur la raideur lors du recalage de la liaison peu amortissante pour un bruit nul et une confiance partagée entre mesures et modèle ( $p = 0.8$ ).

Pour la liaison peu dissipative (cf. Figure 4.17), la connaissance assez précise de la raideur est nécessaire afin de recalibrer le bon paramètre  $\eta_r$ . On constate qu'une erreur faible sur la raideur ( $k_r = \pm 10\%$ ) ne perturbe pas le minimum de l'erreur modifiée. Dans ce cas le coefficient d'amortissement est identifié sans difficulté. Par contre pour des erreurs très fortes sur la raideur ( $k_r \pm 50\%$ ), l'imprécision sur  $k_r$  affecte grandement la fonctionnelle coût : elle devient très plate et le minimum est décalé par rapport au coefficient exact. Toutefois le coefficient d'amortissement identifié, même s'il est erroné, fournit un bon ordre de grandeur (quelques % au lieu de 10%). Rappelons que dans la littérature, nombre de références signalent la difficulté d'identifier très précisément ce paramètre dans cette situation. Le comportement en présence de bruit de mesure donne des résultats très similaires à ceux du cas non bruité.

## 2.4 Bilan

L'étude présentée permet de tirer quelques conclusions sur le potentiel de la méthode mise en œuvre pour identifier les paramètres d'une liaison, que l'on peut résumer ainsi :

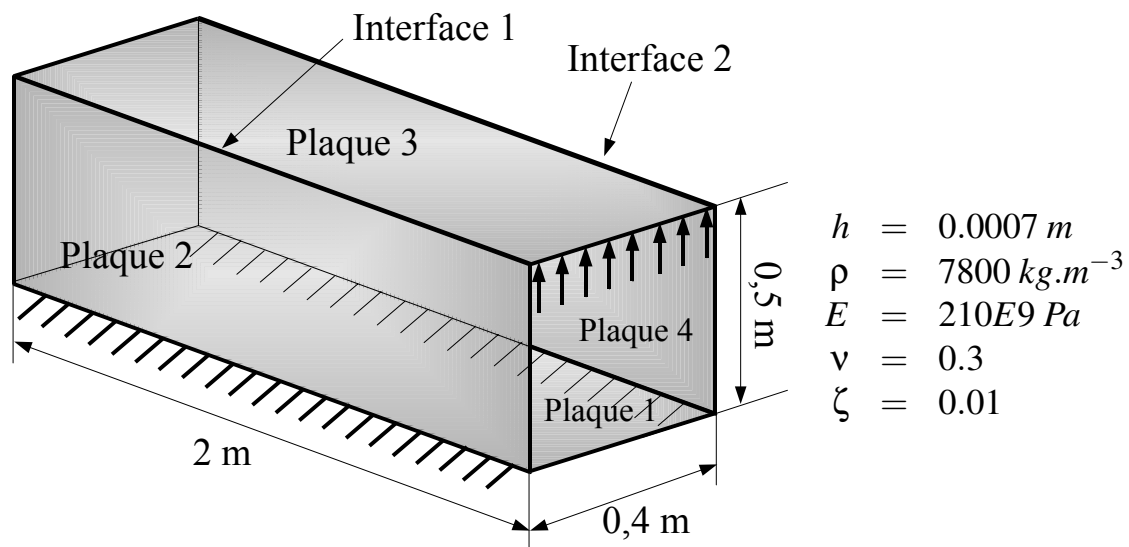
- La méthode présente une bonne robustesse par rapport au bruit de mesure, à condition de conserver une confiance partagée entre modèle mathématique et modèle expérimental. Ce comportement s'explique par deux facteurs : d'une part l'utilisation de mesures de champ « moyenne » les erreurs de mesure, et d'autre part la présence du terme de modèle dans la fonctionnelle objectif permet de régulariser sa dépendance par rapport au bruit, en n'accordant pas toute la confiance aux mesures.
- Pour une liaison peu amortissante, la raideur joue le rôle le plus important. En conséquence sa détermination ne pose pas de difficultés, même si l'amortissement est faux, voire nul. La détermination du coefficient d'amortissement est confrontée à des difficultés en présence de bruit ou d'une imprécision sur  $k_r$ . Cette constatation rejoint certaines conclusions classiques de la littérature, dans lesquelles il est conseillé d'identifier successivement la raideur puis l'amortissement de la liaison.
- Inversement, dans la liaison très dissipative, le coefficient d'amortissement joue un rôle important. Cela permet de l'identifier même en présence d'une erreur sur la raideur. En revanche le recalage de cette dernière dépend fortement de la précision avec laquelle est connu le coefficient d'amortissement. Pour une telle liaison, il serait donc préférable de commencer par identifier le coefficient d'amortissement, et ensuite la raideur de la liaison.

Le choix *a priori* du paramètre de liaison à corriger en priorité, raideur ou coefficient d'amortissement, dépend donc de la proportion qu'occupe les phénomènes dissipatifs dans le comportement de la jonction. Dans cette phase de correction du modèle, l'expérience de l'ingénieur peut s'avérer être une aide précieuse.

### 3 Identification des liaisons d'un longeron à partir d'essais simulés numériquement

#### 3.1 Présentation du problème

Le second exemple concerne le longeron composé de quatre plaques représenté sur la Figure 4.18. Cette structure comprend quatre jonctions, mais deux sont supposées infiniment rigides et connues - celles liant la plaque 1 aux plaques 2 et 4. Ce sont les caractéristiques des deux autres liaisons - liant la plaque 3 aux plaques 2 et 4 - que l'on cherche à identifier. Le Tableau 4.3 résume les caractéristiques du modèle expérimental simulé. Les deux raideurs ont été choisies dans la zone de sensibilité identifiée au Paragraphe 3.3.4, mais la première interface est proche d'une liaison rigide. L'un des amortissements de liaison a été supposé faible mais identifiable, l'autre beaucoup plus faible, et on s'attend à ce que sa détermination pourrait pose de grosses difficultés. Les mesures sont simulées numériquement. Les points de mesure de champ sont disposés tous les 10 cm comme pour le cas des plaques en L. La discrétisation TVRC utilisée est de 48 modes intérieurs et 4 x 13 rayons de bord, les quantités d'interface n'utilisent que les rayons du bord associés à l'interface considérée.



**FIG. 4.18:** Longeron constitué de quatre plaques, avec deux interfaces à identifier, étudié sur un pic de résonance à 61.5 Hz.

L'intérêt de cette structure est de voir s'il est possible d'identifier plusieurs interfaces à la fois. L'enjeu est intéressant : ceci permettrait de procéder au recalage des liaisons sur une structure entière, sans avoir à tester chaque liaison indépendamment dans un essai expérimental particulier, comme c'était le cas dans l'exemple précédent. Dans cette perspective, il s'agit de vérifier qu'une erreur sur la modélisation des interfaces ne pollue pas

Liaison	Raideur	Amortissement	Commentaire
Liaison 1	$k_{r1} = 10^3$	$\eta_{1r} = 0.01$	méconnue et non fiable
Liaison 2	$k_{r2} = 10^2$	$\eta_{2r} = 0.08$	méconnue et non fiable
Liaison 3	$k_{r3} = \infty$	-	connue et supposée fiable
Liaison 4	$k_{r4} = \infty$	-	connue et supposée fiable

**TAB. 4.3:** *Caractéristiques du modèle expérimental qui sera simulé numériquement.*

le processus de recalage, c'est à dire de vérifier si la fonctionnelle coût dont l'on cherche le minimum est globalement convexe.

Un autre objectif, qui rejoint le précédent, est de tenter de « localiser » l'erreur commise, c'est à dire de voir s'il est possible de connaître quelle est l'interface la plus mal modélisée. Si l'on cherche à recalage une structure comprenant de multiples interfaces, le nombre de paramètres à corriger sera inévitablement important. Il peut alors s'avérer utile de sélectionner uniquement l'interface la plus mal modélisée, de la corriger, et de réitérer le processus jusqu'à ce que l'erreur globale commise soit acceptable. Lors du recalage de modèle éléments finis, cette idée est largement utilisée pour ne corriger que les zones les plus erronées. Diverses méthodes ont été utilisées pour procéder à la sélection des paramètres dans le cadre de recalage de modèles éléments finis (cf. Paragraphe 2.1.2). Dans [Cho97, Der01], l'erreur en relation de comportement s'avère être un bon indicateur pour localiser les zones les plus fausses. Nous chercherons à voir si le comportement du résidu modifié qui est utilisé dans ce travail offre les mêmes avantages.

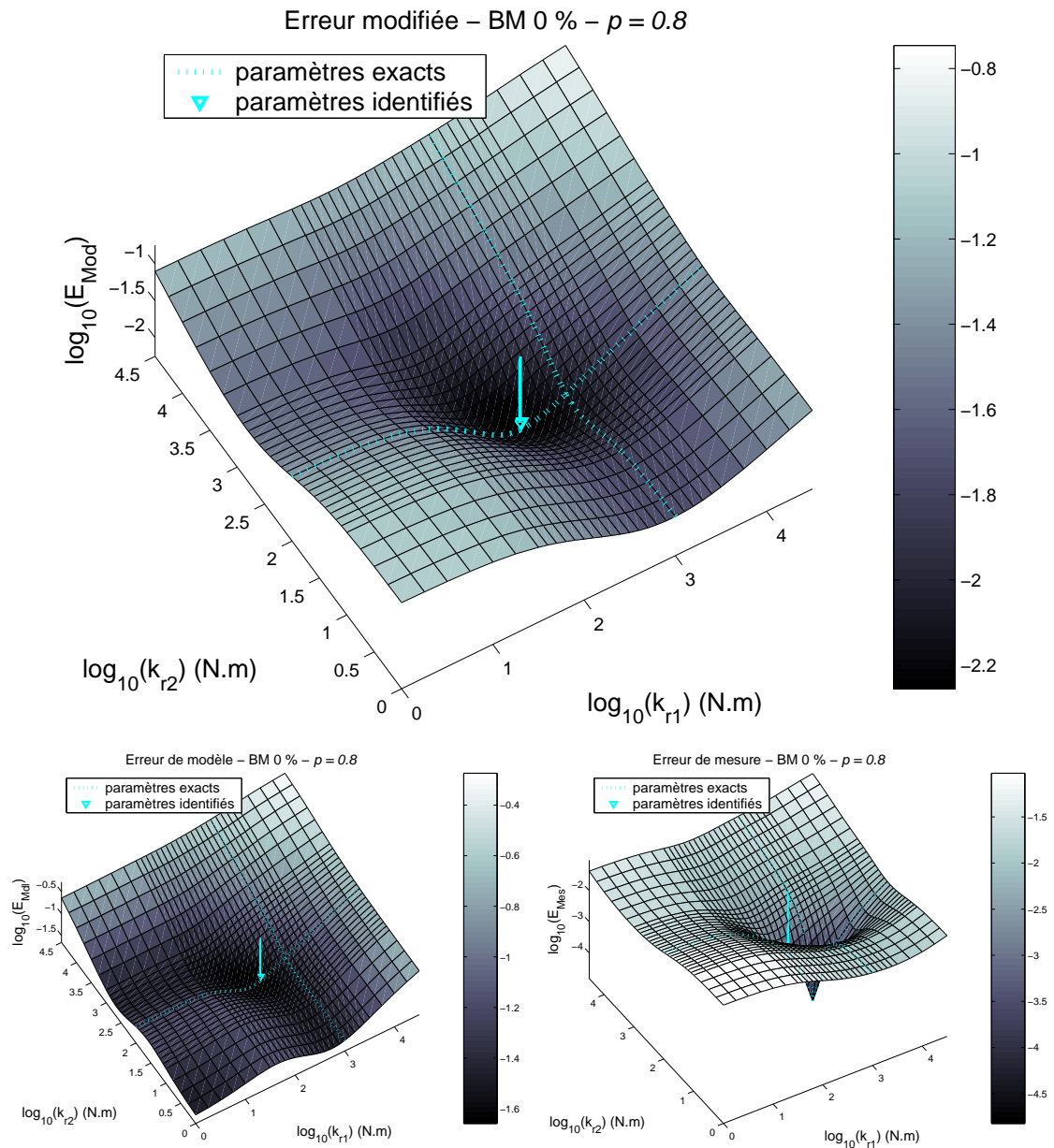
## 3.2 Identification des raideurs

### *Mesures non bruitées*

La Figure 4.19 représente la valeur de la fonctionnelle coût, de l'erreur de modèle, et du terme de mesure en fonction des raideurs de l'interface 1 et de l'interface 2, pour un bruit de mesure nul, et une confiance modérée entre les deux termes ( $p = 0.8$ ). Les amortissements de ces liaisons sont supposés exacts, mais compte tenu des résultats fournis par l'étude précédente, ils pourraient être supposés nul.

L'erreur modifiée montre un profil convexe, de même que chacune de ses composantes. Si l'un au moins des paramètres de raideur est très faux, l'erreur modifiée dépasse l'ordre du pourcent ce qui permet de détecter une erreur de modélisation. Le minimum est obtenu pour une valeur exacte du paramètre  $k_{r2}$ , mais une petite erreur est commise sur l'estimation de  $k_{r1}$ . Ceci s'explique par la présence d'une vallée autour des paramètres exacts où le terme de mesure est extrêmement faible - son minimum se situant à la valeur exacte des paramètres. Dans cette zone, c'est l'erreur de modèle qui l'emporte, polluant

les paramètres obtenus du fait de l'erreur de discrétisation. Dans cette configuration, une confiance plus appuyée dans les mesures procurerait une identification bien meilleure des coefficients. Il est intéressant de noter que l'erreur d'identification est commise sur la liaison 1 qui est proche d'une liaison rigide. La difficulté de déterminer le bon coefficient dans cette situation a été reporté par plusieurs auteurs.



**FIG. 4.19:** Fonctionnelle coût (en haut), erreur de modèle (en bas à gauche) et erreur de mesure (en bas à droite) en fonction des raideurs de liaison lors du recalage des interfaces du longeron, pour  $p = 0.8$  et sans bruit de mesure.

### *Mesures bruitées*

La Figure 4.20 représente les résultats obtenus avec un bruit de mesure de  $\pm 10\%$ . Le terme de mesure est le seul à changer notablement : le minimum de l'erreur de mesure est toujours obtenu pour la bonne valeur des paramètres, mais il représente alors le niveau de bruitage des mesures. Du fait du grand nombre de points de mesure, l'influence du bruit de mesure ne gêne donc pas l'identification. Par contre, le processus d'optimisation aboutit, comme précédemment, à une valeur légèrement faussée de  $k_{r1}$ . L'erreur de discrétisation contenue dans le résidu de modèle pollue l'obtention des bons coefficients. Compte tenu de l'allure du terme de mesure, une plus grande confiance pourrait lui être accordée, même en présence d'un bruit important, et améliorerait la démarche d'identification.

### *Aptitude à la localisation*

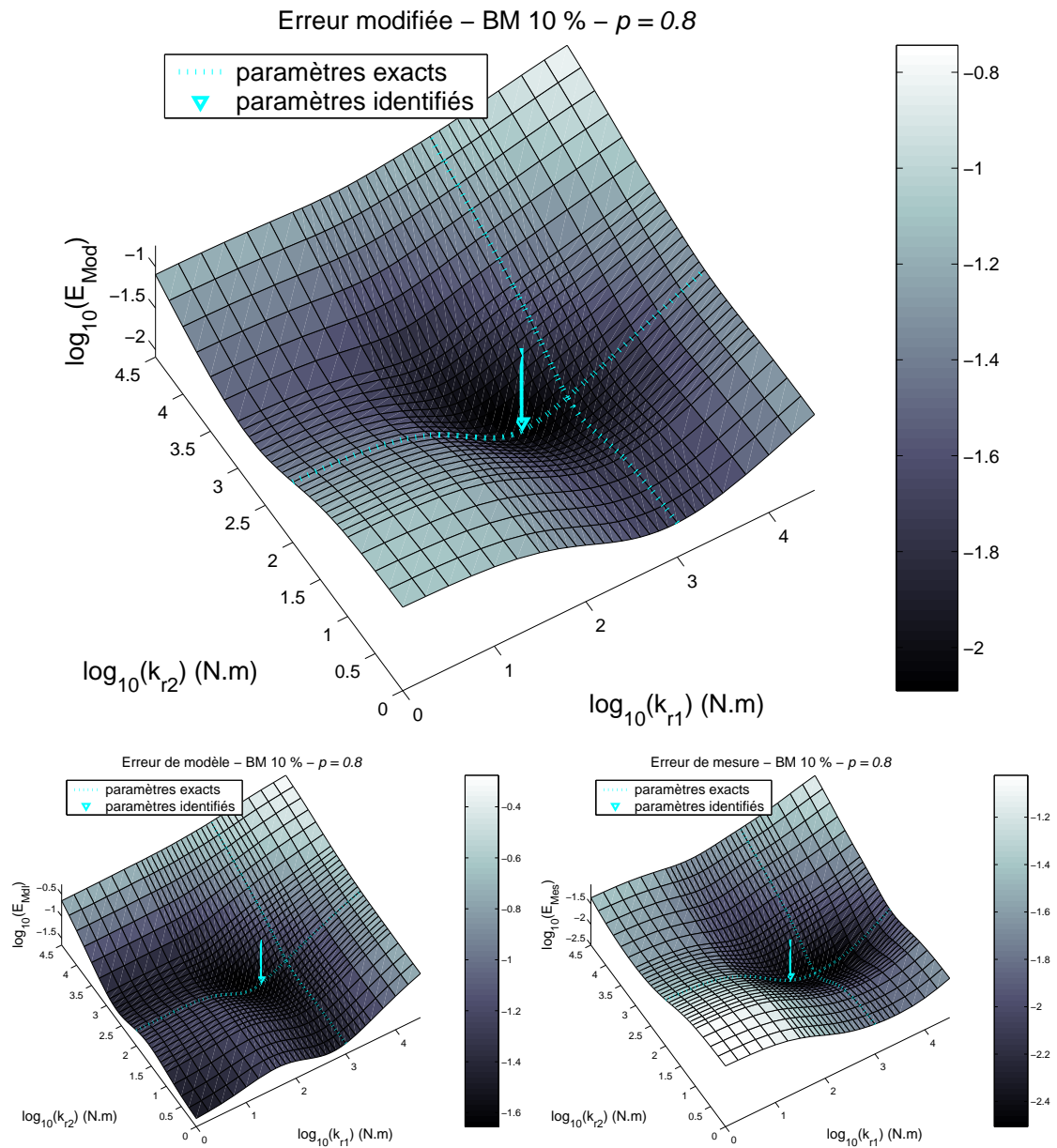
La Figure 4.21 représente uniquement les résidus sur la relation de comportement de chaque interface - qui sont une partie seulement de l'erreur de modèle - pour une confiance partagée ( $p = 0.8$ ) et un bruit de mesure de  $\pm 10\%$ . Les allures des erreurs sont symétriques.

Le résidu de l'interface 1 par exemple, montre une certaine insensibilité par rapport au coefficient de raideur de l'interface 2, et inversement pour le résidu de l'interface 1. Une erreur importante sur  $k_{r1}$  sera détectable en regardant uniquement le résidu 1. Cette qualité s'estompe pour les faibles valeurs de la raideur, pour lesquelles l'influence des deux coefficients est du même ordre de grandeur. On peut en conclure que la localisation donne de bons résultats dans le cas d'une surestimation des coefficients de raideur, autrement elle se dégrade. Lors du processus de recalage, il convient donc de partir d'un modèle mathématique dont les liaisons sont initialement supposées assez rigides, afin de pouvoir localiser les erreurs de modélisation, et des les corriger ensuite.

## **3.3 Identification de l'amortissement**

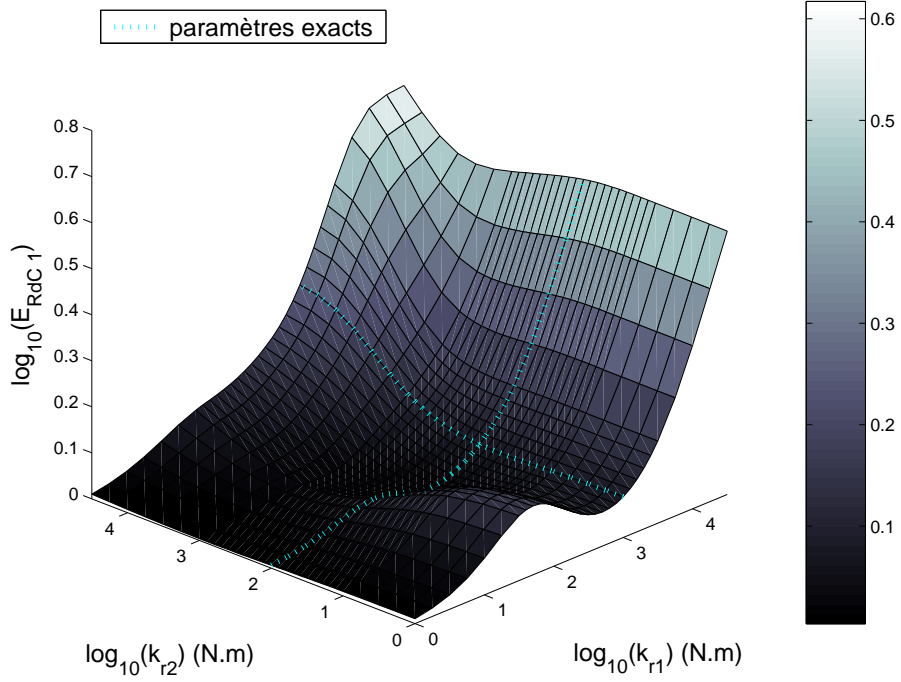
La Figure 4.22 représente l'allure des termes de la fonctionnelle coût en fonction des coefficients d'amortissements  $\eta_{r1}$  et  $\eta_{r2}$ , en l'absence de bruit de mesure, et avec des raideurs supposées exactes et un coefficient de confiance moyen ( $p = 0.8$ ). L'erreur modifiée est convexe, mais le minimum n'est pas atteint pour la valeur exacte des paramètres d'amortissement. Ceci s'explique par la faible influence de ces paramètres sur la réponse de la structure : l'erreur de mesure a un minimum situé pour la valeur exacte des paramètres, mais elle est polluée par l'erreur de modèle : l'imprécision due à la discrétisation est plus importante que l'erreur induite par un défaut de modélisation de l'amortissement des liaisons. Ceci se traduit également sur la faible amplitude avec laquelle varient les niveaux des erreurs modifiées et de modèle. Le processus de recalage obtient tout de même un ordre de grandeur acceptable pour les coefficients d'amortissement, mais dans ce cas une confiance plus importante accordée aux données expérimentales donnerait une nouvelle fois une meilleure identification des paramètres.



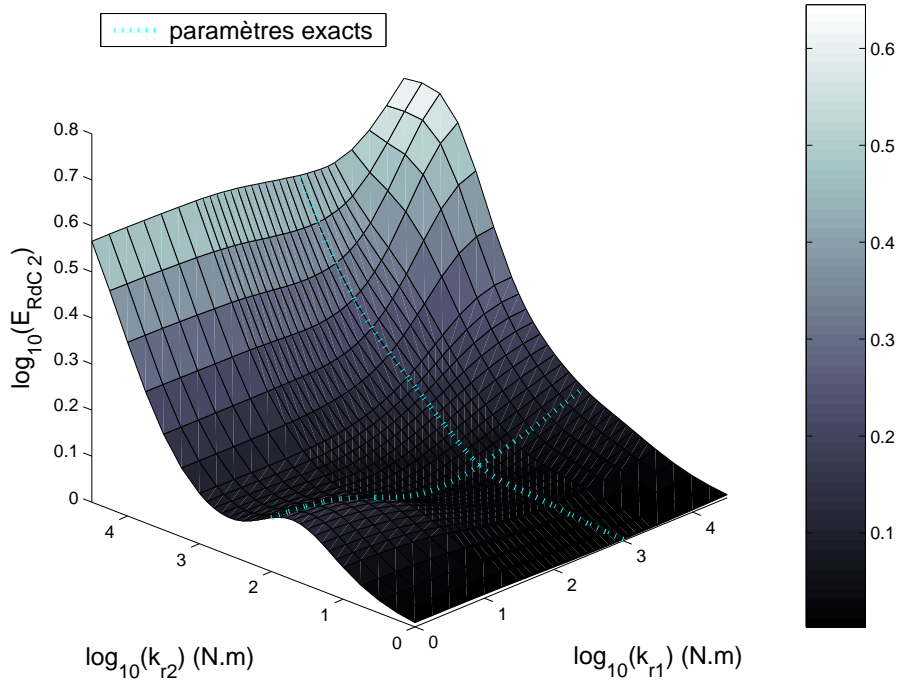


**FIG. 4.20:** Fonctionnelle coût (en haut), erreur de modèle (en bas à gauche) et erreur de mesure (en bas à droite) en fonction des raideurs de liaison, lors du recalage des interfaces du longeron, pour  $p = 0.8$  et bruit de mesure de  $\pm 10\%$ .

Résidu sur la relation de comportement – interface 1 – BM 10 % –  $p = 0.8$



Résidu sur la relation de comportement – interface 2 – BM 10 % –  $p = 0.8$



**FIG. 4.21:** Résidu sur la relation de comportement de l'interface 1 (en haut) et de l'interface 2 (en bas) en fonction des raideurs de liaison, pour  $p = 0.8$  et bruit de mesure de 10 %.

On peut également constater sur l'erreur de mesure que le coefficient  $\eta_{r1}$  est peu influent : d'une part ce coefficient est relativement faible, et d'autre part la raideur de la liaison 1 est très importante, proche d'une liaison rigide. Il sera difficile dans ce cas d'identifier ce coefficient avec précision.

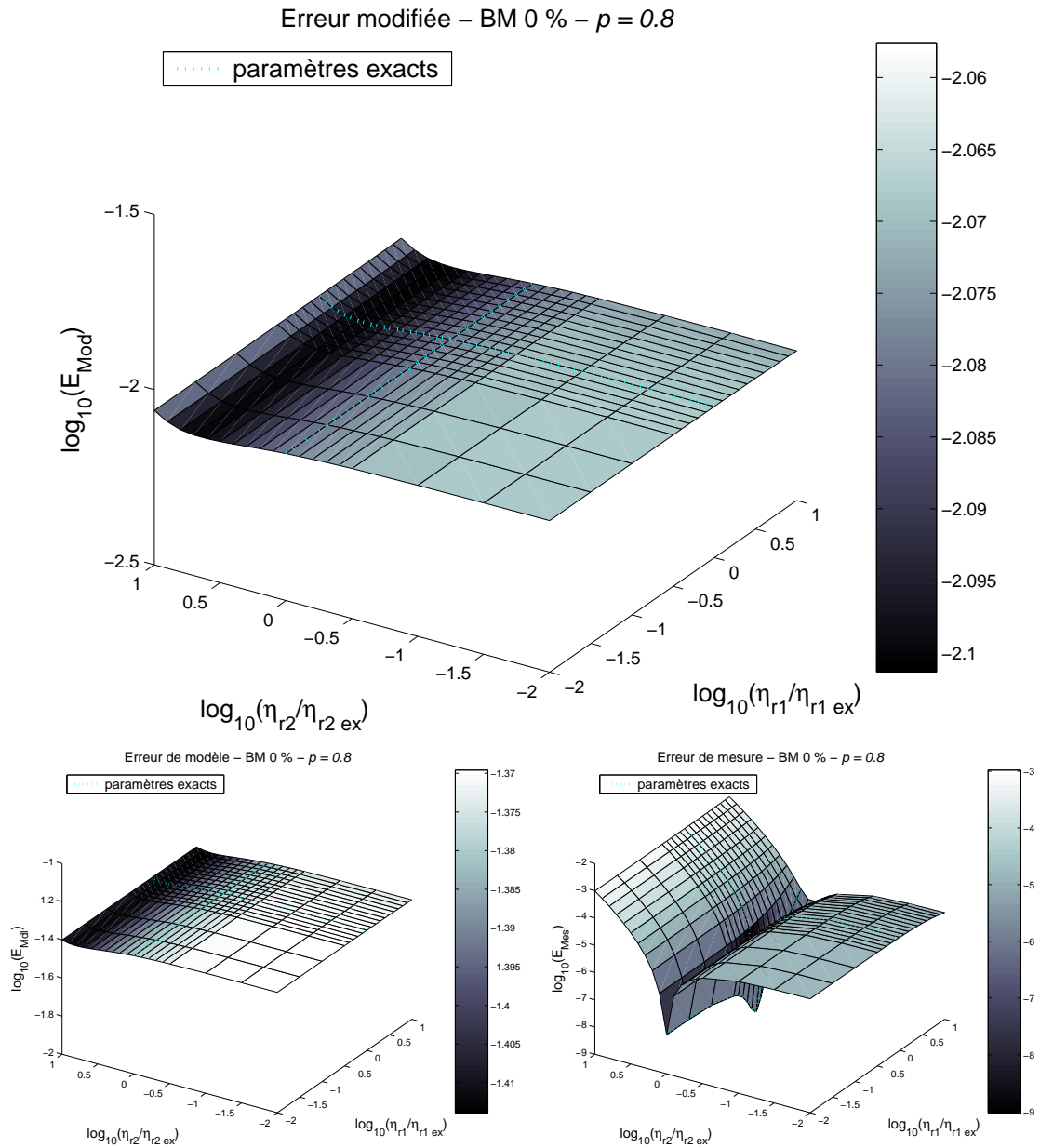


FIG. 4.22: Fonctionnelle coût (en haut), erreur de modèle (en bas à gauche) et erreur de mesure (en bas à droite) en fonction des amortissements de liaison, lors du recalage des interfaces du longeron -  $p = 0.8$ , mesures non bruitées, et raideurs exactes.

## 4 Conclusion

Dans ce chapitre, le résidu des équations de liaison construit pour la version sous-structurée de la *TVRC* est enrichi d'un terme de mesure qui permet d'écrire un problème d'optimisation en vue de recalibrer les paramètres des modèles de liaison utilisés. La faisabilité de la méthode a été illustrée sur deux exemples simples, grâce à des données simulées numériquement. La fonctionnelle coût qui est minimisée montre une robustesse par rapport au bruit de mesure et par rapport aux erreurs de modélisation pour le recalibrage des coefficients fortement influents. Le recalibrage des coefficients moins influents -  $\eta_r$  sur la liaison peu amortissante ou  $k_r$  sur la liaison très amortissante - semble plus délicat. Dans la mesure où son influence est moins visible que celle de la raideur, un bruit de mesure ou une erreur de modélisation importants peuvent polluer le processus de recalibrage.

La robustesse de la méthode par rapport à d'autres facteurs, comme une erreur de modélisation des sous-structures - qui sont jusque là supposées fiables - ou une erreur de discrétisation n'a pas encore été entreprise. En vue de s'assurer complètement du potentiel de la méthode l'étude précédente pourra être complétée par des études ultérieures. Toutefois les plus grandes difficultés pourraient apparaître avec l'utilisation de véritables données expérimentales. Dans cette perspective, il serait dommage de se contenter des données disponibles à une fréquence donnée. L'objet de la prochaine partie est d'étendre la méthode proposée au recalibrage sur une bande de fréquence.



---

## Extension de la méthode au recalage sur une bande de fréquence

L'utilité des fonctions de réponse en fréquence pour le recalage est soulignée par exemple dans [WL91, RB95]. D'où l'idée d'étendre l'approche précédente, qui est écrite à une fréquence donnée, au recalage sur une bande de fréquence. Dans cette perspective, nous commençons par écrire et valider une démarche basée sur le développement asymptotique du problème pour la version sous-structurée de la *TVRC*. L'idée est d'assurer l'admissibilité des équations fiables à chaque fréquence de la fenêtre considérée tandis que les équations d'interface sont vérifiées en moyenne par la minimisation d'un résidu construit sur l'ensemble de la fenêtre fréquentielle. Il est ensuite possible d'écrire le problème de recalage sur l'ensemble de la bande de fréquence utilisée en y ajoutant un terme de mesure. L'exemple des plaques en L montre la faisabilité de la méthode.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>106</b>
<b>2</b>	<b>Développement d'une approche par bande de fréquence pour la <i>TVRC</i> sous-structurée</b> . . . . .	<b>106</b>
2.1	Principe de la méthode . . . . .	106
2.2	Admissibilité sous-structures/interface sur une bande de fréquence .	107
2.3	Problème d'interface sur une fenêtre fréquentielle . . . . .	108
2.4	Problème sous-structuré sur une bande de fréquence . . . . .	110
2.5	Exemple d'application . . . . .	111
<b>3</b>	<b>Application au recalage des liaisons sur une fenêtre fréquentielle à partir de résultats d'essais simulés numériquement</b> . . . . .	<b>115</b>
3.1	Erreur par rapport aux mesures sur la fenêtre fréquentielle . . . . .	115
3.2	Problème de recalage sur une bande de fréquence . . . . .	116
3.3	Exemple d'application : recalage de la raideur . . . . .	117
<b>4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>119</b>

---

## 1 Introduction

L'approche sur une bande de fréquence a été initialement développée pour la version traditionnelle de la *TVRC*. Deux méthodes ont été testées, leur point commun étant d'utiliser l'aspect multiéchelle contenu dans la représentation des fonctions de forme, c'est à dire de séparer une partie rapide d'une partie lente dans chaque terme matriciel. La première méthode [LRRB03] repose sur une discrétisation assez fine de la variable rapide, ce qui réclame un effort numérique important pour obtenir une bonne précision. Dans la seconde méthode [LR05], la partie rapide est développée en série de Taylor autour d'une fréquence  $\omega_0$  centrale. On écrit ainsi le développement asymptotique du système linéaire issu de la *TVRC*, ce qui permet de calculer les termes intervenant dans le développement de la solution de ce système linéaire. Cette seconde approche a donné de bons résultats avec un coût raisonnable. De plus il est possible d'utiliser d'autres types de développement si nécessaire - série de Fourier, série de Padé, ... C'est cette démarche qui est utilisée dans la suite de ce travail. La nouveauté vient de l'utilisation de cette approche pour résoudre le problème associé à la version sous-structurée de la *TVRC*, qui n'est pas un système linéaire mais une minimisation sous contrainte.

## 2 Développement d'une approche par bande de fréquence pour la version sous-structurée de la *TVRC*

### 2.1 Principe de la méthode

Le point de départ de l'approche proposée est le développement en série de Taylor du problème autour d'une fréquence centrale  $\omega_0$ . L'approche sous-structurée présentée dans le Chapitre 3 s'écrit à la fréquence  $\omega_0$  :

Problème sous-structuré à la fréquence  $\omega_0$  :

Trouver  $\underline{W}_{(\omega_0)} = \left[ \underline{W}_{(\omega_0)}, \hat{\underline{W}}_{(\omega_0)} \right]^T$  tels que :

–  $\underline{W}_{(\omega_0)}$  vérifie le problème d'admissibilité associé aux sous-structures :

$$\mathbb{K}_{adm}(\omega_0) \cdot \underline{W}_{(\omega_0)} = \underline{F}_{adm}(\omega_0) \quad (5.1)$$

–  $\underline{W}_{(\omega_0)}$  minimise le résidu des équations d'interface :

$$E_{mdl}^2 = \frac{1}{2} \underline{W}_{(\omega_0)}^T \cdot \mathbb{K}_{mdl}(\omega_0) \cdot \underline{W}_{(\omega_0)} \quad (5.2)$$

Chaque terme matriciel de  $\mathbb{K}_{adm}$ , de  $\underline{F}_{adm}$  et de  $\mathbb{K}_{mdl}$  peut être décomposé sous la forme de l'intégrale d'une exponentielle complexe multipliée par un polynôme  $P$  (cf.

Paragraphe 1.3.6) :

$$\mathbb{K}_{adm}^{ij}(\omega_0) = \sum_{\text{bord } B} \int_B P_{(\omega_0)}^{ij} e^{(k_i(\omega_0) + k_j^*(\omega_0)) \cdot x} dl$$

$$F_{adm}^i(\omega_0) = \sum_{\text{bord } B} \int_B P_{(\omega_0)}^i e^{k_i^*(\omega_0) \cdot x} dl$$

$$\mathbb{K}_{mdl}^{ij}(\omega_0) = \int_{\text{interface } \Gamma} P_{(\omega_0)}^{ij} e^{(k_i(\omega_0) + k_j^*(\omega_0)) \cdot x} d\Gamma$$

Les polynômes  $P$  proviennent principalement des termes de dérivation intervenant dans la formulation. Ce sont des polynômes de faible degré ( $\leq 3$  pour l'admissibilité et  $\leq 6$  pour la matrice du résidu) des vecteurs d'onde  $k$  qui représentent la partie lente de la solution. Leur variation par rapport à la fréquence est donc négligée. La partie rapide est contenue dans l'exponentielle, dont la dépendance par rapport à la pulsation  $\omega_0$  est explicite grâce à la connaissance de  $\underline{k}$  :

$$\underline{k}(\omega) = \left( \frac{12\rho(1-\nu^2)\omega^2}{h^2 E} \right)^{\frac{1}{4}} e_k = \underline{D}\sqrt{\omega} \quad (5.3)$$

Il est donc possible de développer chacun des termes en série de Taylor au voisinage de la fréquence  $\omega_0$  à l'ordre  $Q$  :

$$e^{k(\omega) \cdot x} = e^{D \cdot x \sqrt{\omega}} = \sum_{q=0}^Q \frac{\partial^q (e^{D \cdot x \sqrt{\omega}})}{\partial \varepsilon^q} \Big|_{\omega=\omega_0} \frac{\varepsilon^q}{q!} \quad (5.4)$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

L'approche privilégiée consiste à effectuer ce développement de Taylor à la fois pour les termes du problème d'admissibilité sous-structures/interface (5.1) et pour les termes du résidu d'interface (5.2). Cependant il faut noter une différence importante dans la mise en œuvre : l'admissibilité sera assurée à chaque fréquence de la fenêtre considérée, tandis que les équations d'interface seront assurées en moyenne sur la bande fréquentielle considérée.

## 2.2 Admissibilité sous-structures/interface sur une bande de fréquence

Le système (5.1) est écrit à la fréquence  $\omega$  sous la forme d'un développement asymptotique en utilisant la série de Taylor à l'ordre  $Q$  de chaque terme :

$$\left[ \sum_{q=0}^Q \varepsilon^q \mathbb{K}_{adm\ q} \right] \cdot \left[ \sum_{q=0}^Q \varepsilon^q \underline{W}_q \right] = \sum_{q=0}^Q \varepsilon^q \underline{F}_{adm\ q} \quad (5.5)$$



Les matrices  $\mathbb{K}_{adm\ q}$  et  $\underline{F}_{adm\ q}$  correspondent au développement à l'ordre  $q$  des matrices  $\mathbb{K}_{adm}$  et  $\underline{F}_{adm}$  du système (5.1). Le développement ci-dessus doit être valable **quelle que soit la fréquence  $\omega$  dans la fenêtre considérée**. On identifie alors chaque terme  $\underline{W}_q$  du développement en résolvant successivement le problème linéaire associé à chaque ordre  $q$  en  $\varepsilon$  ci-dessus :

$$\text{ordre 0 : } \mathbb{K}_{adm\ 0} \cdot \underline{W}_0 = \underline{F}_{adm\ 0} \quad (5.6a)$$

$$\text{ordre 1 : } \mathbb{K}_{adm\ 0} \cdot \underline{W}_1 = \underline{F}_{adm\ 1} - \mathbb{K}_{adm\ 1} \cdot \underline{W}_0 \quad (5.6b)$$

$$\text{ordre 2 : } \mathbb{K}_{adm\ 0} \cdot \underline{W}_2 = \underline{F}_{adm\ 2} - \mathbb{K}_{adm\ 2} \cdot \underline{W}_0 - \mathbb{K}_{adm\ 1} \cdot \underline{W}_1 \quad (5.6c)$$

...

$$\text{ordre Q : } \mathbb{K}_{adm\ 0} \cdot \underline{W}_Q = \underline{F}_{adm\ Q} - \sum_{r=0}^{Q-1} \mathbb{K}_{adm\ q-r} \cdot \underline{W}_r \quad (5.6d)$$

On aboutit au système linéaire suivant :

$$\mathbb{K}_{adm}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF} = \underline{F}_{adm}^{BF} \quad (5.7)$$

avec :

$$\mathbb{K}_{adm}^{BF} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{adm\ 0} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbb{K}_{adm\ 0} & \mathbb{K}_{adm\ 1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{K}_{adm\ 0} & \mathbb{K}_{adm\ 1} & \dots & \mathbb{K}_{adm\ Q} \end{bmatrix} \quad \underline{F}_{adm}^{BF} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{adm\ 0} \\ \underline{F}_{adm\ 1} \\ \dots \\ \underline{F}_{adm\ Q} \end{bmatrix} \quad \underline{W}^{BF} = \begin{bmatrix} \underline{W}_0 \\ \underline{W}_1 \\ \dots \\ \underline{W}_Q \end{bmatrix}$$

Il est important de préciser que ce système permet d'assurer la vérification de l'admissibilité quelle que soit la fréquence, **à condition que le développement de Taylor qui est opéré soit exact sur cette bande de fréquence**. Si cette dernière est trop large, le système ci-dessus forcera la solution à vérifier des équations erronées par la troncature de la série. Il faudra donc prendre garde à rester dans un domaine de validité choisi à l'avance en fonction de l'ordre du développement, ou à contrôler la validité de la troncature par un indicateur approprié. Par rapport au calcul à une fréquence donnée, le temps et la taille de l'assemblage sont simplement multipliés par le nombre de termes dans le développement asymptotique effectué.

### 2.3 Problème d'interface sur une fenêtre fréquentielle

Pour un problème à une fréquence donnée, la vérification des équations d'interface passe par la minimisation du résidu (5.2). Pour vérifier ces équations sur toute la bande fréquentielle  $[\omega_1, \omega_2]$ , on construit maintenant un résidu d'interface qui quantifie la vérification de ces équations sur l'ensemble de la bande fréquentielle considérée :

$$E_{mdl}^{BF\ 2} = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} z(\omega) \cdot E_{mdl(\omega)}^2 d\omega \quad (5.8)$$

Le facteur de pondération  $z_{(\omega)}$  permet d'accorder plus ou moins d'importance à certaines fréquences de la fenêtre considérée. Il doit cependant vérifier :

$$z_{(\omega)} \geq 0$$

$$\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} z_{(\omega)} d\omega = 1$$

Dans [Der01], il est conseillé de normaliser l'erreur à chaque fréquence avant de la pondérer par le facteur  $z_{(\omega)}$ . Le but de la normalisation est de ramener chaque fréquence à un même niveau énergétique afin que les ordres de grandeur de chaque fréquence soient comparables. Dans ce travail, la bande de fréquence considérée reste relativement petite, si bien que le choix a été fait de conserver une normalisation et une pondération uniforme sur l'ensemble de la bande de fréquence.

Le résidu ainsi construit est positif et s'annule si et seulement si les équations d'interface sont vérifiées parfaitement en espace (en tout point de l'interface) et à chaque fréquence. Autrement, il permet de quantifier la vérification des conditions d'interface sur l'ensemble des fréquences étudiées. La minimisation de ce résidu permet donc de trouver une solution vérifiant ces équations « au mieux », c'est à dire en moyenne spatiale (comme au Chapitre 3) et en moyenne fréquentielle.

Comme dans le cas de l'admissibilité, remarquons que si la bande fréquentielle considérée est trop grande, le résidu ci-dessus est pollué par une erreur due à la troncature du développement de Taylor. La solution a alors tendance à vouloir vérifier une équation qui est fautive loin de la fréquence centrale  $\omega_0$  considérée.

### *Écriture discrétisée*

L'écriture de l'erreur ci-dessus tire une nouvelle fois bénéfice du développement de Taylor des termes matriciels. Avec les notations précédentes, on peut calculer les termes successifs de la matrice du résidu :

$$\mathbb{K}_{mdl}(\omega) = \sum_{q=0}^Q \mathbb{K}_{mdl\ q} \varepsilon^q$$

L'erreur sur la bande de fréquence étudiée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E_{mdl}^{BF\ 2} &= \frac{1}{2(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} z_{(\omega)} \underline{W}_{(\omega)}^T \cdot \mathbb{K}_{mdl}(\omega) \cdot \underline{W}_{(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} z_{(\omega)} \left[ \sum_{q=0}^Q \underline{W}_q \varepsilon^q \right]^T \cdot \left[ \sum_{q=0}^Q \mathbb{K}_{mdl\ q}^T \varepsilon^q \right] \cdot \left[ \sum_{q=0}^Q \underline{W}_q \varepsilon^q \right] d\omega \quad (5.9) \\ &= \frac{1}{2} \underline{W}^{BF\ T} \cdot \mathbb{K}_{mdl}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF} \end{aligned}$$

La matrice du résidu  $\mathbb{K}_{mdl}^{BF}$  résulte de l'assemblage des matrices de chaque ordre du développement de Taylor, intégrée sur la bande de fréquence :

$$\mathbb{K}_{mdl}^{BF} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{K}}_{0,0} & \bar{\mathbb{K}}_{0,1} & \dots & \bar{\mathbb{K}}_{0,Q} \\ \bar{\mathbb{K}}_{1,0} & \bar{\mathbb{K}}_{1,1} & \dots & \bar{\mathbb{K}}_{1,Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\mathbb{K}}_{Q,0} & \bar{\mathbb{K}}_{Q,1} & \dots & \bar{\mathbb{K}}_{Q,Q} \end{bmatrix}$$

en ayant posé :

$$\bar{\mathbb{K}}_{i,j} = \bar{\mathbb{K}}_{j,i} = \sum_{q=0}^Q \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} z(\omega) \varepsilon^{i+j+q} \mathbb{K}_{mdl,q} d\omega$$

La taille du système d'admissibilité est égal à la taille du système correspondant à l'admissibilité à une fréquence précise, multipliée par le nombre de termes du développement asymptotique.

## 2.4 Problème sous-structuré sur une bande de fréquence

Le problème final relatif à une bande de fréquence consiste à minimiser le résidu sous la contrainte de l'admissibilité associée au problème des sous-structures et à la bande de fréquence concernée.

### Problème sur une bande de fréquence discrétisé :

Trouver les inconnues  $\underline{W}^{BF}$  telles que :

- $\mathbb{K}_{adm}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF} = \underline{F}_{adm}^{BF}$  (5.10)
- $\underline{W}^{BF}$  minimise  $E_{mdl}^{BF 2} = \frac{1}{2} \underline{W}^{BF T} \cdot \mathbb{K}_{mdl}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF}$

L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange assure une nouvelle fois l'admissibilité, ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{mdl}^{BF sym} & \mathbb{K}_{adm}^{BF T} \\ \mathbb{K}_{adm}^{BF} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \underline{W}^{BF} \\ \underline{\lambda}^{BF} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{0} \\ \underline{F}_{adm}^{BF} \end{vmatrix} \quad (5.11)$$

La taille du système à résoudre correspond à la taille du système construit pour une fréquence donnée, multipliée par l'ordre de troncature du développement limité. Le coût de la mise en œuvre de l'approche sur une bande de fréquence reste ainsi facilement abordable.

## 2.5 Exemple d'application

L'exemple traité est celui des plaques en L déjà utilisé, décrit à la Figure 3.3. La fréquence centrale considérée est le pic à 117 Hz. La Figure 5.1 représente le zoom sur la zone de la FRF qui sera représentée sur les courbes de ce chapitre. Les paramètres de la liaison sont ceux de la liaison peu amortissante :  $k_r = 10^{1.5}$  et  $\eta_r = 0.1$ . La discrétisation utilisée est la même : 48 modes intérieurs et 4 x 13 rayons de bord pour les d.d.l. des sous-structures, et uniquement les rayons de bord pour les quantités d'interface. Pour résoudre le problème avec l'approche proposée, deux paramètres entrent en jeu : l'ordre du développement asymptotique, et la largeur de bande sur laquelle est défini le résidu. Les paragraphes qui suivent étudient l'influence de ces paramètres.

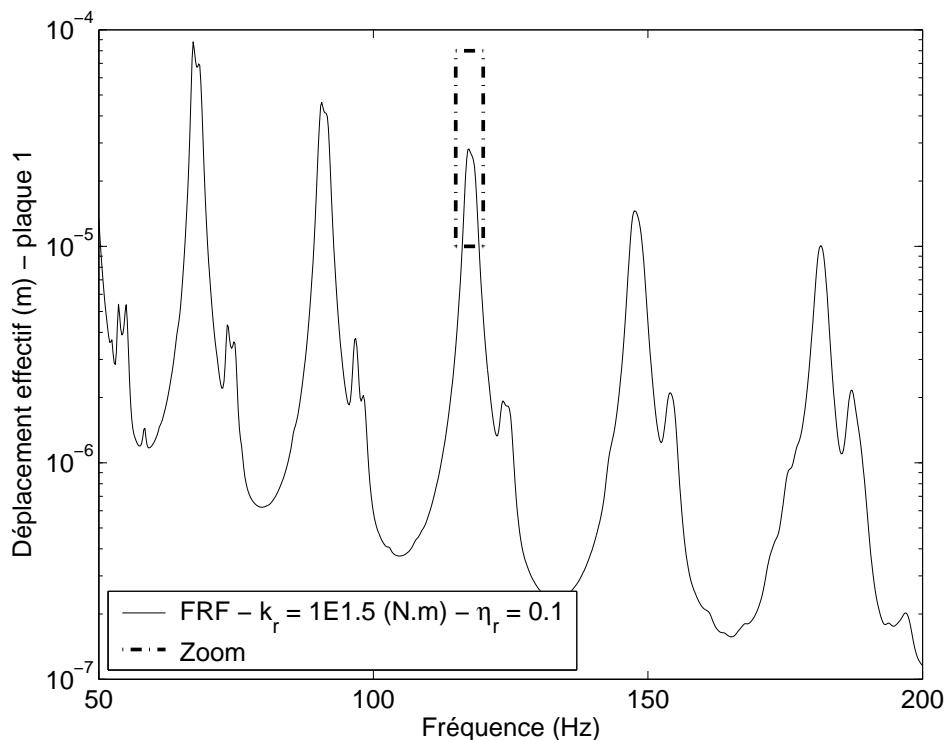


FIG. 5.1: Bande de fréquence étudiée autour de 117 Hz sur la FRF du déplacement effectif de la plaque 1.

### *Influence du nombre de termes dans le développement de Taylor*

La Figure 5.2 présente la solution effective obtenue pour un développement asymptotique allant de l'ordre 0 à l'ordre 5, pour chacune des plaques. La référence en trait continu gras est calculée fréquence par fréquence avec la version classique de la TVRC. La largeur de bande utilisée pour calculer le terme de résidu d'interface est de  $\pm 0.5 \text{ Hz}$ .

On constate que dès l'ordre 2, on obtient une bonne approximation de la solution au voisinage de  $\omega_0$ . À partir de l'ordre 5, la solution est valide sur une fenêtre aussi grande que celle utilisée pour calculer l'erreur de modèle, c'est à dire  $\pm 0.5 \text{ Hz}$ .

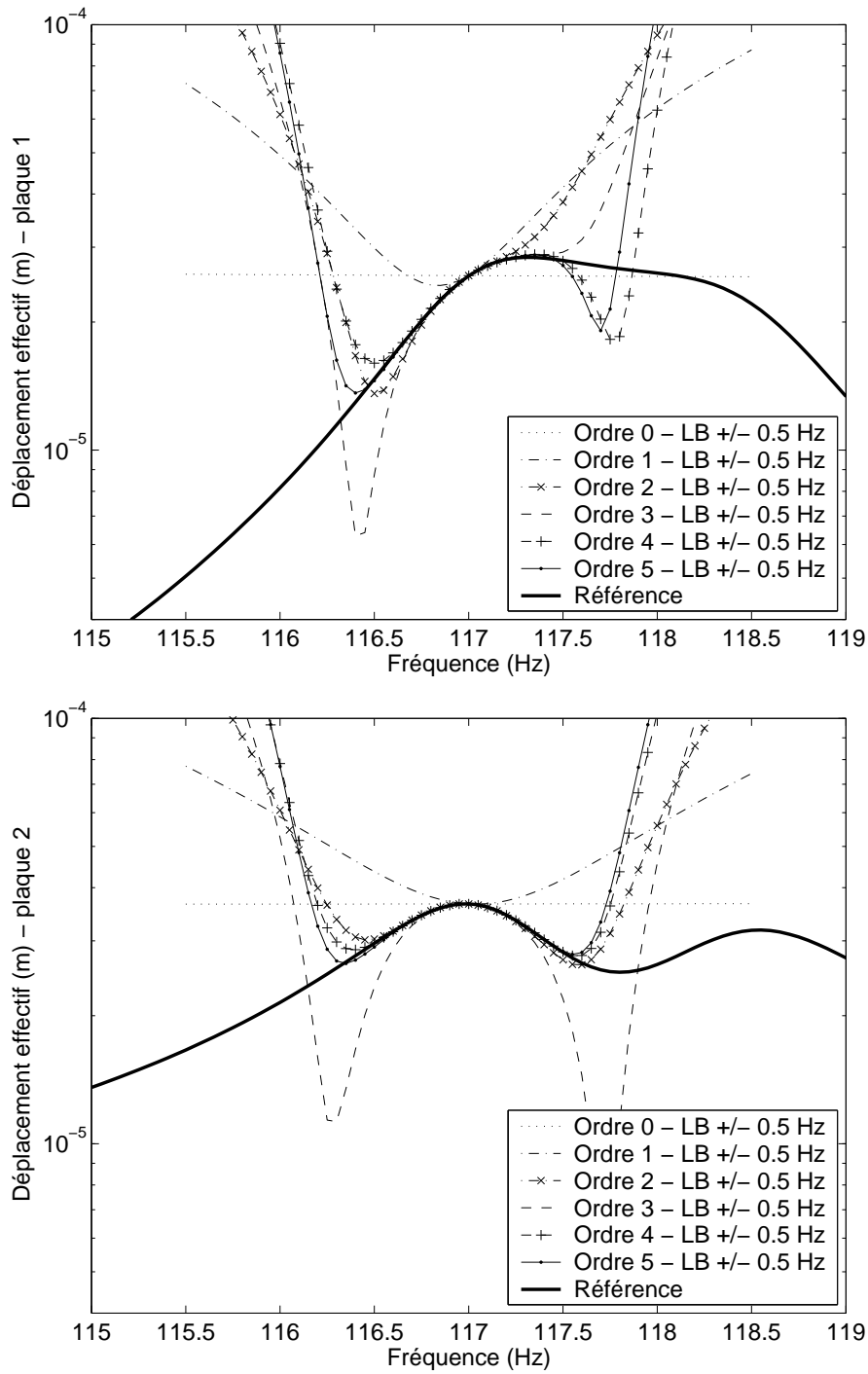
Notons que dans [LR05], une approximation valable sur une plus grande plage de fréquence est utilisée. Elle consiste, une fois les différents  $\underline{W}_q$  trouvés, à recomposer la solution comme la meilleure combinaison linéaire possible au sens d'un indicateur énergétique. Cette méthode n'a pas été utilisée ici, car la solution obtenue dans la version sous-structurée est déjà le minimum du résidu d'interface. Perturber cette solution grâce à un autre problème de minimisation pourrait fausser la validité du résultat trouvé.

### *Influence de la largeur de la bande de fréquence utilisée*

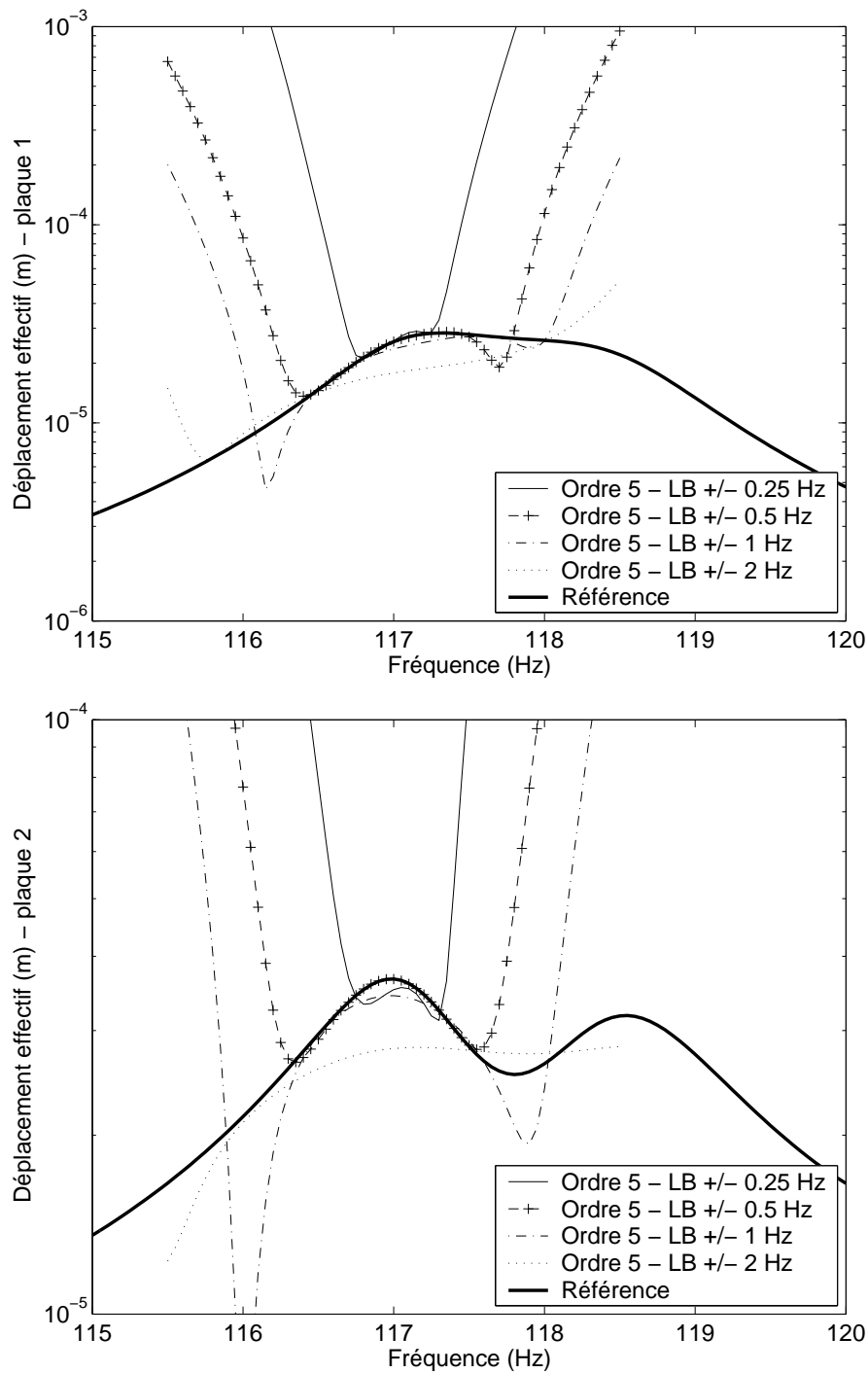
La Figure 5.3 représente la solution sur chaque plaque pour un développement à l'ordre 5 obtenu en définissant l'erreur de modèle pour différentes largeurs de la fenêtre fréquentielle.

On constate que la largeur de la fenêtre utilisée pour calculer l'erreur influence le domaine de validité de la solution : celle-ci est une bonne approximation de la solution « exacte » sur la fenêtre qui est utilisée pour calculer les termes d'erreur. En dehors de cette fenêtre, la solution est très faussée. On peut relier ce résultat à l'importance des liaisons dans la structure : quand la vérification des équations d'interface n'est pas assurée - en dehors de la fenêtre sur laquelle le résidu des équations d'interface est défini - la solution est extrêmement faussée.

Remarquons que les solutions calculées pour une largeur de bande de  $\pm 0.25 \text{ Hz}$  et  $\pm 0.5 \text{ Hz}$  sont extrêmement précises. Les solutions associées à des largeurs de bande plus grandes,  $\pm 1 \text{ Hz}$  et  $\pm 2 \text{ Hz}$  réalisent une bonne approximation mais s'écartent un peu de la solution. Ceci tient au fait que l'ordre de la série de Taylor ne permet pas d'être précis sur l'ensemble de la fenêtre de fréquence utilisée. La solution réalise alors un compromis sur toute la largeur de la bande de fréquence, mais est polluée par l'erreur due à la troncature. Il y a donc un choix à faire entre précision de la réponse calculée et largeur du domaine de validité de cette solution, en fonction de l'ordre du développement asymptotique effectué.



**FIG. 5.2:** Influence de l'ordre du développement de Taylor : FRF obtenue autour de 117 Hz pour la plaque 1 (en haut) et la plaque 2 (en bas) pour plusieurs ordres du développement de Taylor, pour la liaison peu amortissante ( $k_r = 10^{1.5}$  N.m et  $\eta_r = 0.1$ ). La largeur de bande utilisée pour définir l'erreur est  $\pm 0.5$  Hz.



**FIG. 5.3:** Influence de la largeur de bande utilisée : FRF obtenue autour de 117 Hz pour la plaque 1 (en haut) et la plaque 2 (en bas) pour plusieurs largeurs de bande (LB) utilisées pour définir l'erreur, pour la liaison peu amortissante ( $k_r = 10^{1.5}$  N.m et  $\eta_r = 0.1$ ). Le développement de Taylor est utilisé à l'ordre 4.

### 3 Application au recalage des liaisons sur une fenêtre fréquentielle à partir de résultats d'essais simulés numériquement

Afin de pouvoir recalcer les paramètres du modèle de liaison sur une bande de fréquence, il s'agit de redéfinir l'erreur de mesure complétant la fonctionnelle coût pour prendre en compte toutes les fréquences mesurées. Le développement asymptotique reste le point de départ de cette étape.

#### 3.1 Erreur par rapport aux mesures sur la fenêtre fréquentielle

Pour le problème de recalage à une fréquence  $\omega_0$  donnée, la distance entre les données expérimentales et le modèle numérique a été construite au sens des moindres carrés sur les déplacements  $w$  correspondant à l'ordre  $q$  du développement :

$$E_{mes}^2(\omega_0)(w, \tilde{w}) \simeq \frac{\int_{\underline{X} \in \Omega} \|w(\underline{X}, \omega_0) - \tilde{w}(\underline{X}, \omega_0)\|^2 d\Omega}{\int_{\underline{X} \in \Omega} \|\tilde{w}(\underline{X}, \omega_0)\|^2 d\Omega} \quad (5.12)$$

Comme pour le résidu de modèle, l'erreur sur une bande de fréquence donnée s'écrit comme l'intégrale des erreurs sur la bande de fréquence considérée :

$$E_{mes}^{BF\ 2} = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} z(\omega) \int_{\underline{X} \in \Omega} \|w(\underline{X}, \omega) - \tilde{w}(\underline{X}, \omega)\|^2 d\Omega d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} z(\omega) \int_{\underline{X} \in \Omega} \|\tilde{w}(\underline{X}, \omega)\|^2 d\Omega d\omega} \quad (5.13)$$

Les données expérimentales sont des informations discrètes connues en un certain nombre de points de mesure  $\underline{X}_i$  et en un certain nombre de fréquences  $\omega_k$ . Sur le plan discret, le terme de mesure se met donc sous la forme suivante :

$$E_{mes}^{BF\ 2} = \frac{\sum_{\text{fréq. } k} \sum_{\text{points } \underline{X}_i} \|w(\underline{X}_i, \omega_k) - \tilde{w}(\underline{X}_i, \omega_k)\|^2}{\sum_{\text{fréq. } k} \sum_{\text{point } \underline{X}_i} \|\tilde{w}(\underline{X}_i, \omega_k)\|^2} \quad (5.14)$$

La dépendance de la solution numérique par rapport à la fréquence étant connue explicitement, on peut obtenir simplement l'écriture de la solution numérique en fonction des degrés de liberté  $\underline{W}_q$  :

$$w(\underline{X}_i, \omega) = \underline{W}_{(\omega)}^T \cdot \underline{\Phi}(\underline{X}_i, \omega) = \sum_{q=0}^Q \varepsilon^q \underline{W}_q^T \cdot \underline{\Phi}(\underline{X}_i, \omega_k) \quad (5.15)$$



Le terme de mesure prend ainsi la forme quadratique suivante :

$$E_{mes}^{BF\ 2} = \frac{1}{N_{mes}^{BF}} \left[ \frac{1}{2} \underline{W}^{BF\ T} \cdot \mathbb{K}_{mes}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF} - \underline{W}^{BF\ T} \cdot \underline{F}_{mes}^{BF} + C_{mes}^{BF} \right] \quad (5.16)$$

dans laquelle :

$$\mathbb{K}_{mes}^{BF} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{K}}_{0,0} & \tilde{\mathbb{K}}_{0,1} & \dots & \tilde{\mathbb{K}}_{0,Q} \\ \tilde{\mathbb{K}}_{1,0} & \tilde{\mathbb{K}}_{1,1} & \dots & \tilde{\mathbb{K}}_{1,Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbb{K}}_{Q,0} & \tilde{\mathbb{K}}_{Q,1} & \dots & \tilde{\mathbb{K}}_{Q,Q} \end{bmatrix} \quad \underline{F}_{mes}^{BF} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0 \\ \tilde{F}_1 \\ \dots \\ \tilde{F}_Q \end{bmatrix}$$

avec :

$$C_{mes}^{BF} = N_{mes}^{BF} = \sum_{\text{fréq. } k} \sum_{\text{point } \underline{X}_i} \|\tilde{w}_{(\underline{X}_i, \omega_k)}\|^2$$

$$\tilde{\mathbb{K}}_{m,n} = 2 \sum_{\text{fréq. } k} \sum_{\text{points } i} (\omega - \omega_0)^{m+n} \underline{\Phi}_{(\underline{X}_i, \omega_k)} \cdot \underline{\Phi}_{(\underline{X}_i, \omega_k)}^{*T}$$

$$\tilde{F}_m = \sum_{\text{fréq. } k} \sum_{\text{points } i} (\omega - \omega_0)^m \left[ \underline{\Phi}_{(\underline{X}_i, \omega_k)} \tilde{w}_{(\underline{X}_i, \omega_k)}^* + \underline{\Phi}_{(\underline{X}_i, \omega_k)}^* \tilde{w}_{(\underline{X}_i, \omega_k)} \right]$$

### 3.2 Problème de recalage sur une bande de fréquence

Le problème modifié sur une bande de fréquence s'écrit donc :

Problème modifié sur une bande de fréquence discrétisé :

Trouver les inconnues  $\underline{W}^{BF}$  telles que :

- $\mathbb{K}_{adm}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF} = \underline{F}_{adm}^{BF}$
- $\underline{W}^{BF}$  minimise  $E_{mod}^{BF\ 2} = E_{mdl}^{BF\ 2} + \frac{p}{1-p} E_{mes}^{BF\ 2}$   

$$= \frac{1}{2} \underline{W}^{BF\ T} \cdot \mathbb{K}_{mdl}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF} + \frac{p}{1-p} \left( \frac{1}{2} \underline{W}^{BF\ T} \cdot \mathbb{K}_{mes}^{BF} \cdot \underline{W}^{BF} - \underline{W}^{BF\ T} \cdot \underline{F}_{mes}^{BF} + C_{mes}^{BF} \right) \quad (5.17)$$

Ci-dessus, la normalisation du terme de mesure a été intégrée directement aux matrices. La résolution du problème est réalisée par des multiplicateurs de Lagrange.

### *Problème inverse sur une bande de fréquence*

La solution du problème ci-dessus réalise un compromis entre le modèle supposé qui dépend des paramètres à recalibrer, et les mesures. Le problème inverse consiste à trouver les paramètres qui rendent la fonctionnelle coût minimale. Comme pour le recalage à une fréquence donnée, l'admissibilité est construite une fois pour toute sur la bande de fréquence considérée afin de diminuer le coût d'assemblage de système.

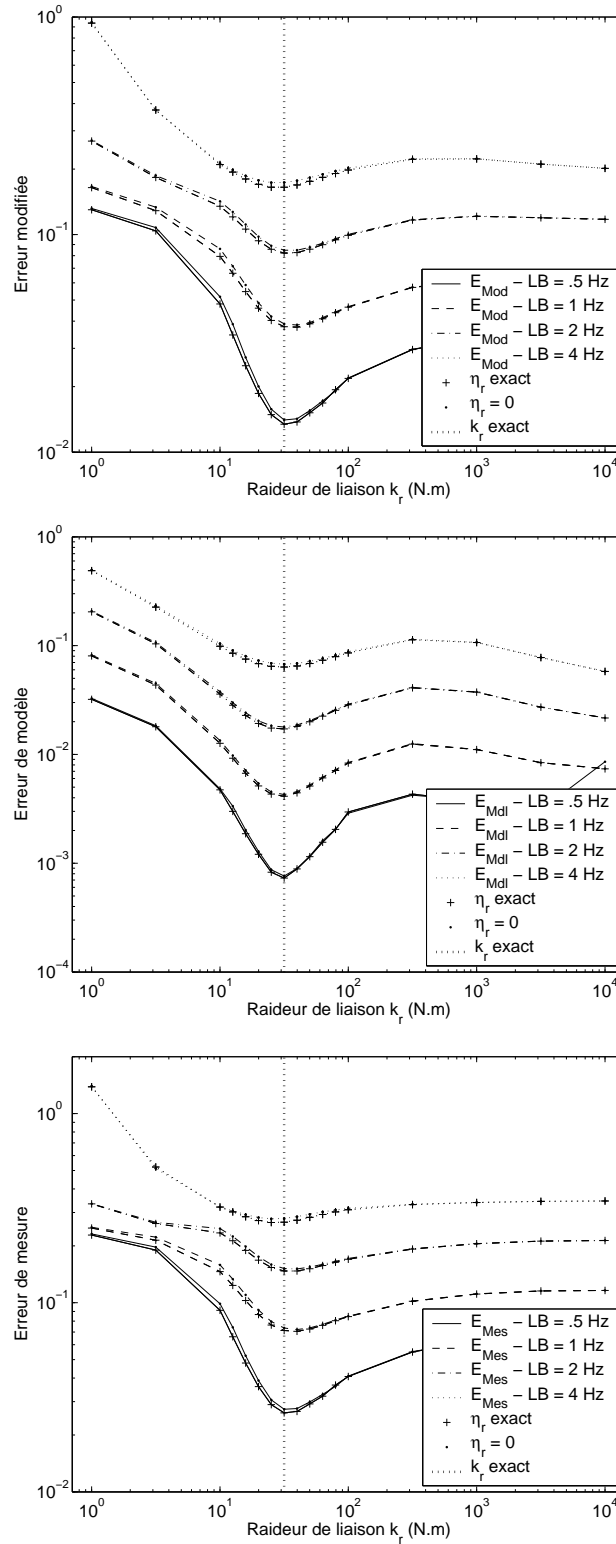
### **3.3 Exemple d'application : recalage de la raideur**

Le recalage sur une bande de fréquence est expérimenté sur l'exemple des plaques en L (cf. Figure 3.3). Les paramètres de la liaison sont ceux de la liaison peu amortissante :  $k_r = 10^{1.5}$  et  $\eta_r = 0.1$ . La fréquence centrale utilisée est le pic à 117 Hz.

La Figure 5.4 montre l'évolution de la fonctionnelle coût et de chacun de ses termes en fonction de la raideur pour un bruit de mesure nul. Le développement de Taylor est utilisé à l'ordre 4 et la confiance entre les termes est égale ( $p = 0.5$ ). Plusieurs largeurs de la bande de fréquence sont testées : 0.5 Hz, 1 Hz, 2 Hz, 4 Hz, en supposant l'amortissement de liaison connu exactement, ou en le négligeant.

Les erreurs montrent un comportement satisfaisant puisque le minimum correspond au paramètre exact. Il est donc possible d'identifier le paramètre  $k_r$ , et ceci quel que soit la largeur de bande considérée pour définir le résidu. L'hypothèse d'amortissement nul ne génère pas de difficultés supplémentaires. Elle ajoute une très légère contribution aux erreurs, mais sans que cela ne pollue le recalage du bon paramètre. Cette constatation montre que l'erreur sur la modélisation de la raideur est bien plus visible qu'une erreur sur l'amortissement, conformément à ce qui avait été constaté pour la liaison peu dissipative à une fréquence donnée.

L'influence de la largeur de bande utilisée pour définir l'erreur est plus importante. Une bande de fréquence trop grande génère une erreur due à la troncature qui se traduit par des niveaux d'erreurs assez différents, y compris lorsque la raideur du modèle est la bonne. Toutefois l'allure des fonctionnelles reste satisfaisante puisque leur minimum reste obtenu pour le paramètre exact. L'erreur de troncature semble donc relativement indépendante de l'erreur de modélisation. Notons cependant que pour une largeur de bande trop grande, la fonctionnelle coût a tendance à s'aplatir, ce qui peut fausser le résultat du processus d'identification. Pour le recalage à une fréquence donnée, le terme de mesure, dans le cas non bruité, montrait un minimum très faible - proche du zéro numérique. Ici ce minimum est moins marqué car il est pollué par l'erreur de troncature du développement de Taylor.



**FIG. 5.4:** Erreur modifiée (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur de mesure (en bas), en fonction de la raideur de liaison, sans bruit de mesure ( $BM = 0\%$ ) avec amortissement de liaison supposé exact (+,  $\eta_r$  exact) ou négligé (·,  $\eta_r = 0$ ), pour plusieurs largeurs de bande, et un développement de Taylor à l'ordre 4.

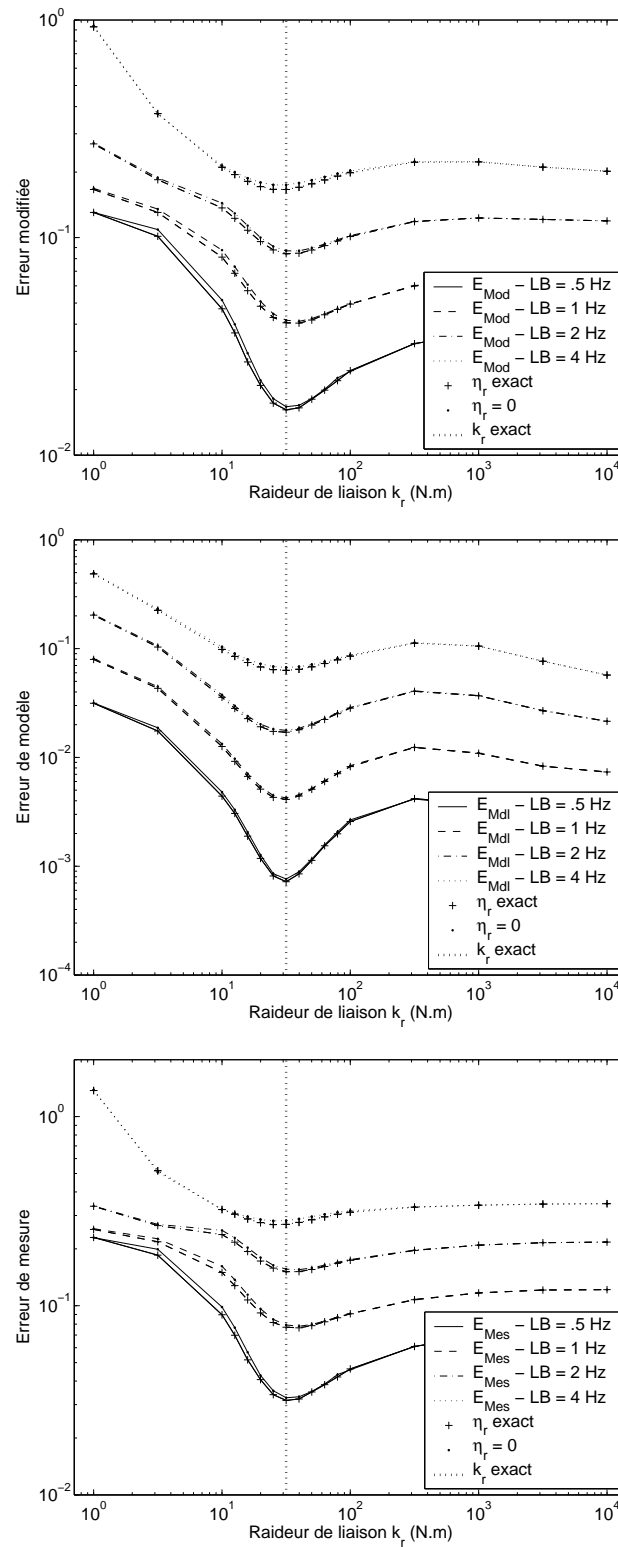
### *Influence du bruit de mesure*

La Figure 5.5 montre les résultats de l'étude précédente, mais avec un bruit de mesure de  $\pm 20\%$ . Le comportement de la fonctionnelle reste correct ; le minimum est toujours identifiable pour la bonne valeur de  $k_r$ , même avec un amortissement nul. L'influence de la largeur de la bande de fréquence utilisée pour définir l'erreur est la même que précédemment : une largeur de bande importante contribue à ajouter une contribution à l'erreur du fait de l'imprécision de troncature mais sans polluer l'identification du bon paramètre. Une seule petite différence, quasiment invisible, par rapport à l'étude non bruitée apparaît dans le terme de mesure, dont le niveau est très légèrement augmenté par rapport au cas précédent. Mais cette différence est faible du fait de la contribution de l'erreur de troncature dans le terme de mesure.

## 4 Conclusion

Ce chapitre présente une approche pour recalibrer les paramètres de liaison à partir de données disponibles sur une plage de fréquence. La démarche s'appuie sur l'analyse par bande de fréquence développée dans la *TVRC*, et revisitée dans le cadre de la version sous-structurée utilisée pour le recalage. Les résultats du recalage à partir de données expérimentales simulées numériquement montrent la faisabilité de la méthode, mais la largeur de la fenêtre fréquentielle valable mériterait d'être agrandie pour pouvoir présenter une véritable utilité pratique.

Dans cette perspective, plusieurs pistes sont envisageables : le développement de Taylor utilisé peut être poussé au-delà de l'ordre 5. L'utilisation de développement de Padé peut s'avérer une direction intéressante. Dans [DFT01], des développements de Padé au-delà de l'ordre 20 montrent une efficacité très satisfaisante. Une autre idée serait le développement des matrices sur une base de fonctions autre que les polynômes ou les fractions polynômiales. Les séries de Fourier pourraient être un bon candidat pour représenter les exponentielles présentes dans les termes des matrices *TVRC*.



**FIG. 5.5:** Erreur modifiée (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur de mesure (en bas), en fonction de la raideur de liaison, avec bruit de mesure ( $BM = \pm 20\%$ ) et amortissement de liaison supposé exact (+,  $\eta_r$  exact) ou négligé (·,  $\eta_r = 0$ ), pour plusieurs largeurs de bande, et un développement de Taylor à l'ordre 4.

---

# Conclusions et Perspectives

Dans cette étude, nous présentons une méthode pour corriger les modèles de liaisons sur les structures vibrant en moyennes fréquences à partir de résultats d'essais. Cette approche mêle conjointement les idées de la méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement modifiée, qui a montré sa robustesse pour la correction de modèles éléments finis en basses fréquences, et la théorie variationnelle des rayons complexes, qui est une approche numérique alternative aux éléments finis permettant le calcul des vibrations en moyennes fréquences avec un coût raisonnable.

La mise en œuvre a nécessité d'adapter chacune des deux approches. Ainsi l'erreur de modèle intervenant dans le processus de recalage n'est pas une véritable erreur en relation de comportement, mais un résidu au sens des moindres carrés. D'autre part, une variante « sous-structurée » de la *TVRC* a été introduite afin de pouvoir construire ce résidu à partir des équations des liaisons mal modélisées. Tout au long du processus, la démarche tire bénéfice de l'espace d'admissibilité constitué par les informations fiables du modèle qui est construit une fois pour toutes, ce qui permet un gain de temps important lors de la correction des paramètres du modèle. La faisabilité de la méthode a été étudiée à partir d'exemples simples simulés numériquement. Conformément au comportement observé pour la correction de modèles éléments finis, l'approche montre une bonne robustesse par rapport au bruit de mesure. Deux types de liaisons, peu ou très dissipative, ont été étudiées, montrant que la précision dans la correction du coefficient d'amortissement dépend de l'importance de la dissipation de la liaison. La méthode a ensuite été étendue au recalage des liaisons sur une bande de fréquence par une approche asymptotique.

Ce travail ouvre la voie à plusieurs interrogations :

- Concernant l'approche numérique, deux pistes n'ont pas été étudiées. La première concerne l'extension du domaine de validité de l'approche sur une bande de fréquence. Un développement asymptotique à un ordre plus poussé, ou sur une base de fonctions plus riches est envisageable. La seconde piste est d'apporter une réflexion sur la méthode sous-structurée elle-même. En effet, la version présentée repose sur des efforts d'interface imposés aux sous-structures, et il serait intéressant de la comparer à une version sous-structurée

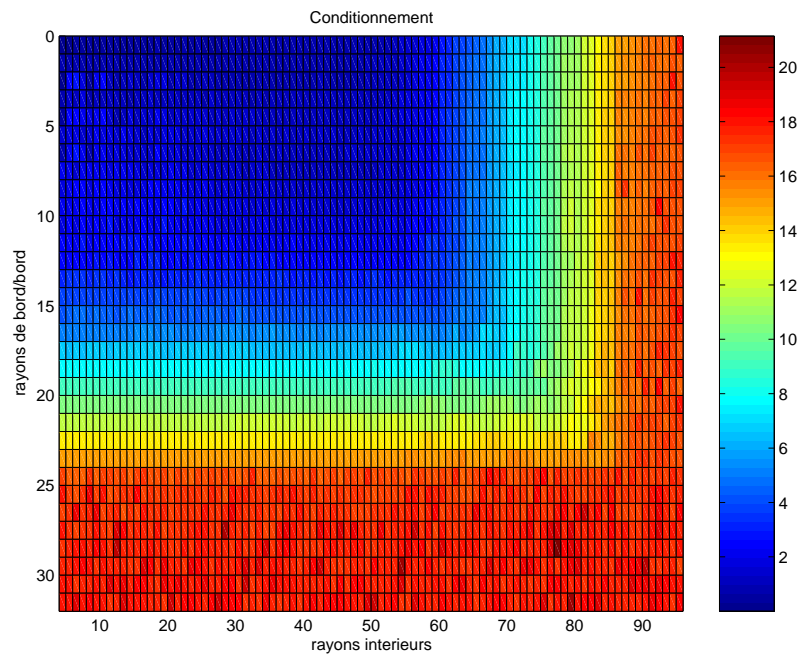
avec déplacements d'interface imposés. Il ne semble pas y avoir de problème conceptuel concernant ces développements.

- Pour améliorer la robustesse lors du recalage de l'amortissement dans le cas des liaisons peu dissipantes, une idée serait de rechercher une approche mettant en avant les phénomènes dissipatifs. Pour la correction de modèles éléments finis, l'utilisation de l'erreur en dissipation [Der01] montre une nette amélioration par rapport à l'erreur de Drucker, en séparant les équations d'état des équations d'évolution. Cette idée peut constituer une direction de recherche intéressante.
- Enfin, la méthode nécessite inévitablement d'être **confrontée à une véritable campagne expérimentale**, afin de faire apparaître les difficultés venant de la réalité.
  - Dans cette perspective, une étape sera de tester la robustesse de l'approche par rapport à des erreurs de modélisation. Un premier aspect concerne des erreurs sur les sous-structures, dont les dimensions et les matériaux sont supposés exacts. Un autre est de vérifier si la méthode permet de détecter lorsque le modèle de liaison supposé est inapproprié, parce que trop simple.
  - Si les modèles de liaison apparaissent trop réducteurs, il faudra faire intervenir des **modèles plus complexes et plus généraux**. Deux idées peuvent être explorées. Tout d'abord la prise en compte des phénomènes non-linéaires, comme le contact et le frottement nécessitera une démarche de résolution efficace. Et d'autre part la modélisation des liaisons par des paramètres stochastiques [RB04, BR05], en vue de tenir compte des dispersions importantes apparaissant dans la conception, nécessite d'étendre la méthode de recalage présentée à l'identification de modèles de liaisons stochastiques.
  - Enfin, la prise en compte d'un véritable contexte moyennes fréquences, incluant des modes très locaux, et une très forte sensibilité de la réponse de la structure, nécessite une réflexion sur le terme de mesure employé. Dans ce travail, la distance entre le modèle numérique et les données expérimentales s'appuie sur une comparaison locale des grandeurs, qui nous paraît inadaptée à la fenêtre des moyennes fréquences. Une piste serait la comparaison de **données expérimentales non-locales**, comme par exemple les grandeurs effectives présentées au Paragraphe 3.2.1. La difficulté réside dans le fait que le terme de mesure en découlant n'est plus quadratique par rapport aux degrés de liberté. Le problème devient non-linéaire et requiert donc une méthode de résolution adaptée.
  - Pour finir, une question qui reste totalement ouverte pour nous, est de savoir si la méthode proposée serait capable d'être adaptée en hautes fréquences, afin de participer à la détermination des facteurs de perte par couplage utilisés par exemple dans la *SEA*.

---

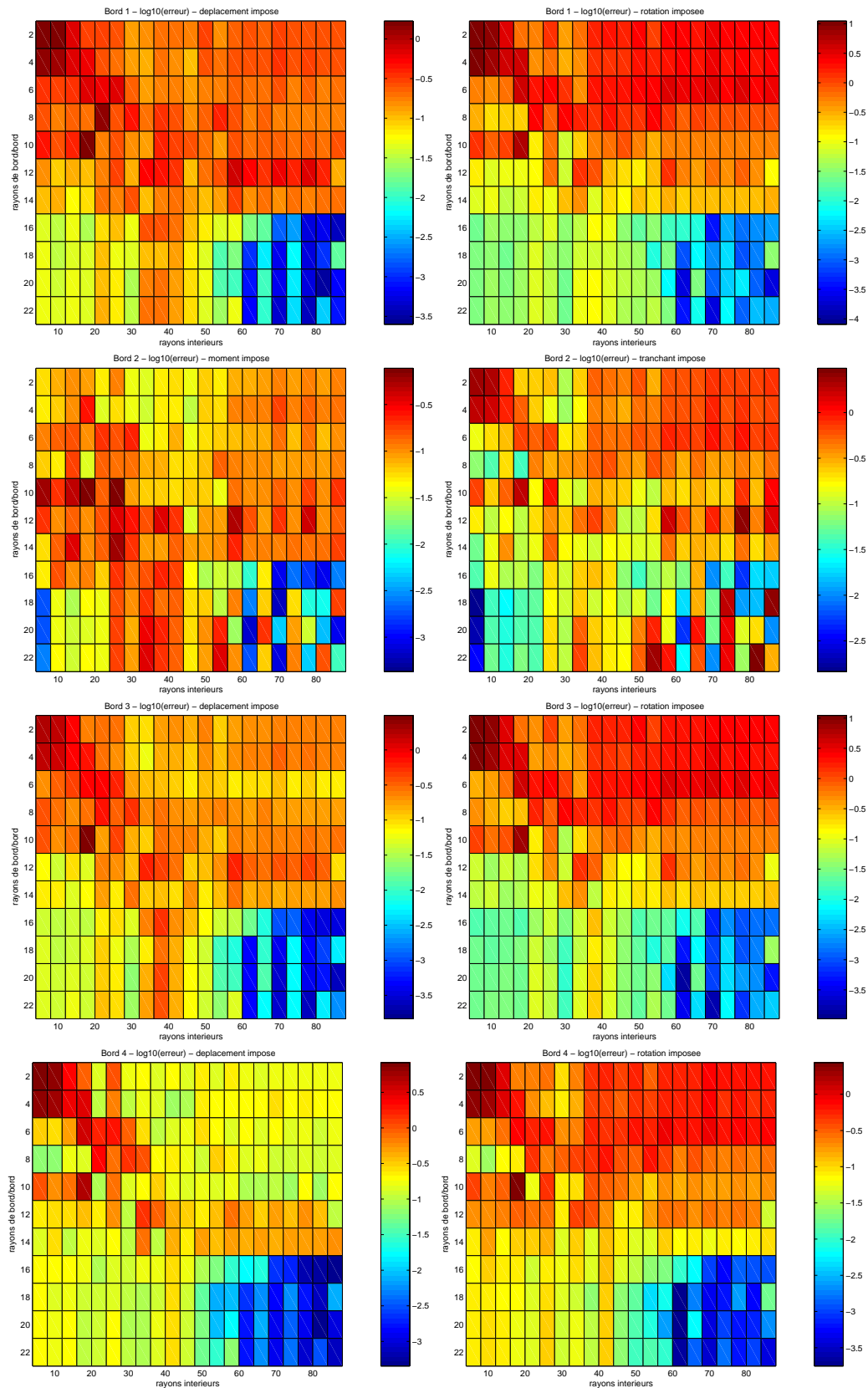
## Convergence de la *TVRC*

La convergence de l'approche numérique en fonction de la discrétisation adoptée est étudiée. L'exemple traité est celui d'une plaque carrée encastrée sur trois cotés et soumise à un effort tranchant sur le dernier coté. On s'intéresse aux erreurs sur les conditions aux limites définies par l'équation (1.28) et ses analogues pour les autres types de conditions limites. On représente aussi le conditionnement du système linéaire à résoudre.



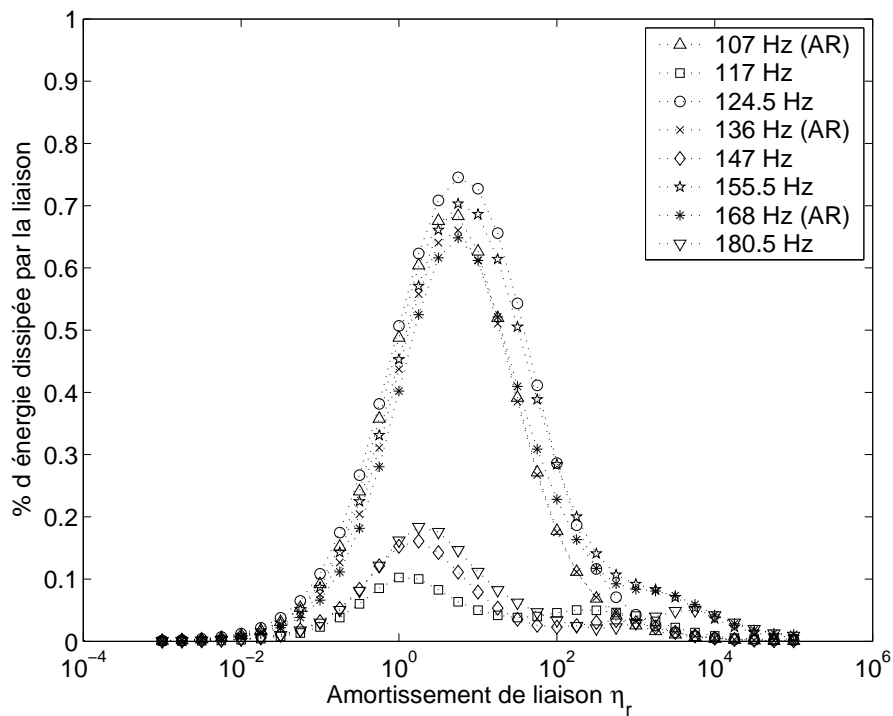
**FIG. A.1:** Conditionnement en fonction du nombre de rayons intérieurs (en abscisse) et du nombre de rayons de bord (en ordonnée) pour une plaque simple, pour 0 rayons de coin.



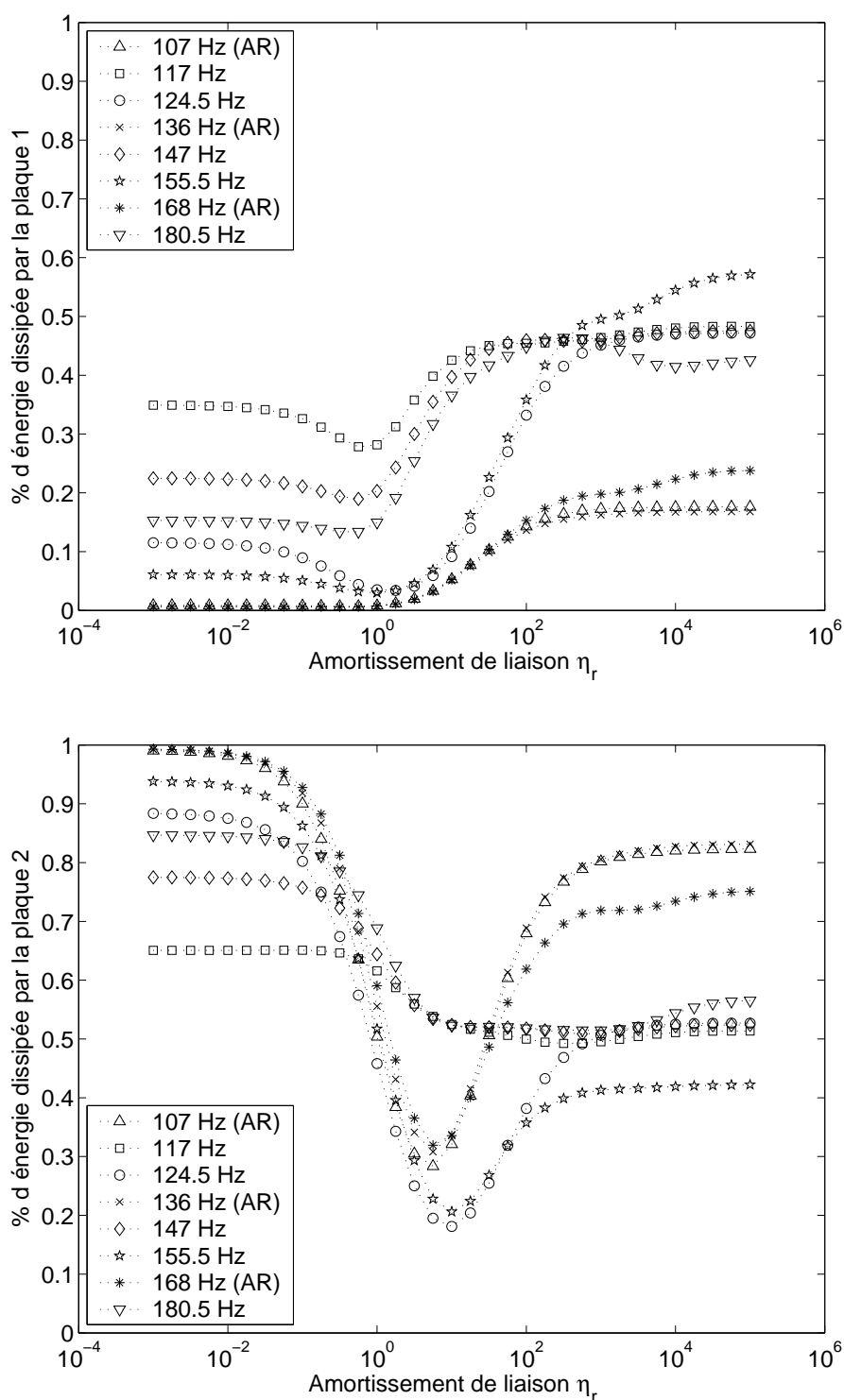


**FIG. A.2:** Erreurs sur les différentes conditions limites d'une plaque simple, en fonction du nombre de rayons intérieurs (abscisse) et de rayons de bordbord (ordonnées), pour 0 rayons de coin.

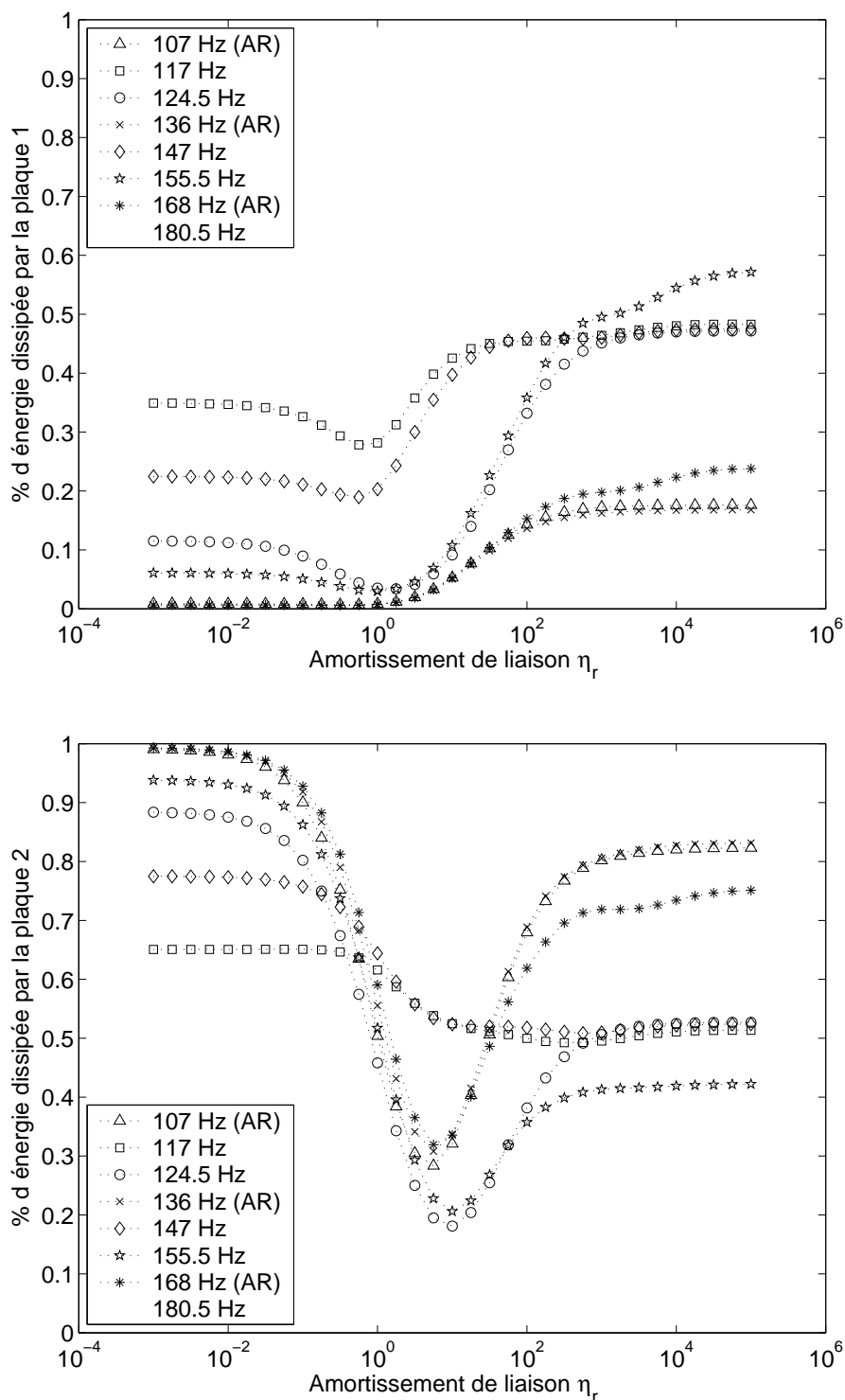
## Énergie dissipée dans la liaison entre les plaques en L



**FIG. B.1:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur l'énergie dissipée par la liaison entre les plaques en L, pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR), en proportion de l'énergie dissipée totale, pour une liaison moyennement rigide ( $k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}$ ).



**FIG. B.2:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur les énergies dissipées par les sous-structures des plaques en L, pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR), en proportion de l'énergie dissipée totale, pour une liaison moyennement rigide ( $k_r = 10^{1.5} \text{ N.m}$ ) : plaque 1 encastree (en haut) et plaque 2 excitée (en bas).



**FIG. B.3:** Influence de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  sur les énergies dissipées par les sous-structures des plaques en L, pour plusieurs fréquences de résonance et d'antirésonance (AR), en proportion de l'énergie dissipée totale, pour une liaison très rigide ( $k_r = 10^{3.5} \text{ N.m}$ ) : plaque 1 encastree (en haut) et plaque 2 excitée (en bas).

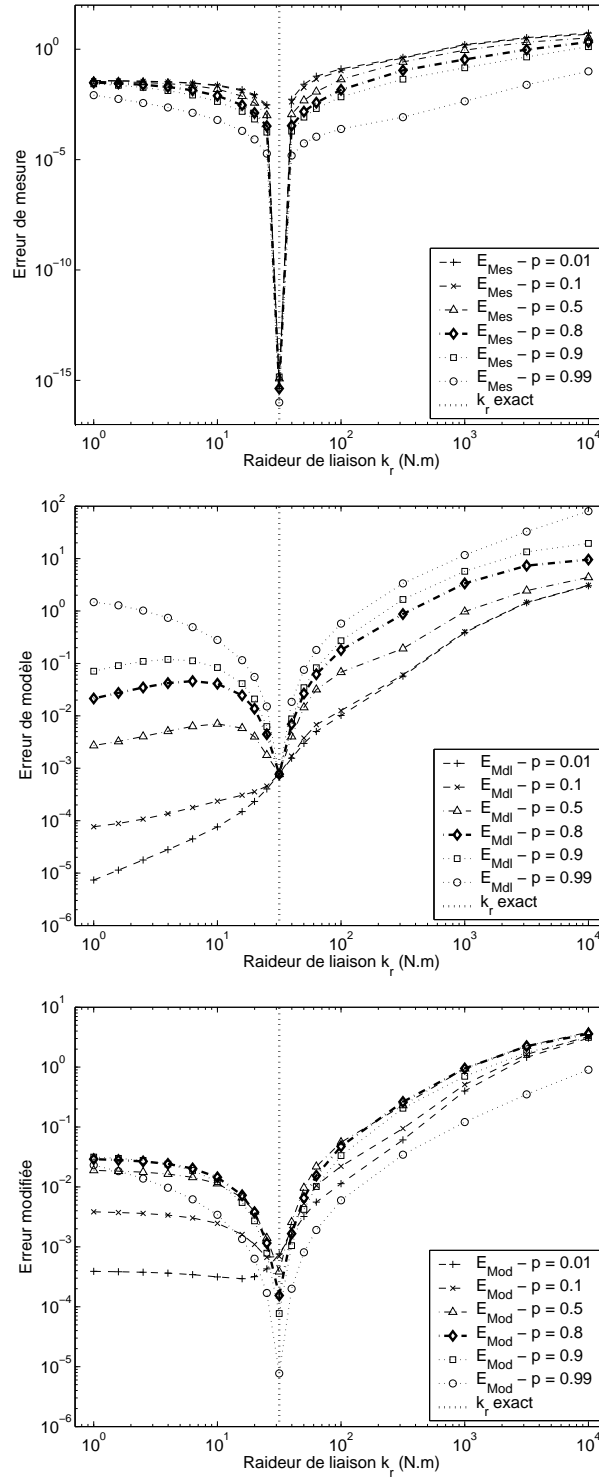


ANNEXE

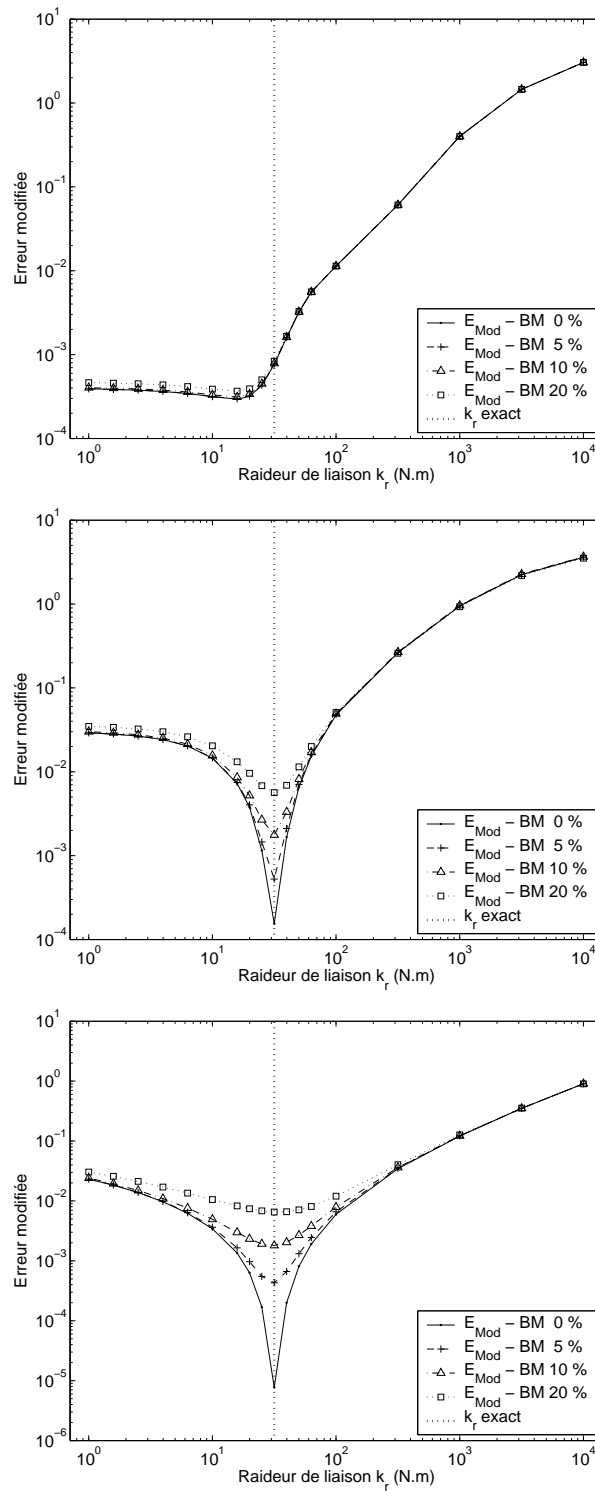
**C**

---

**Résultats complémentaires de  
l'identification de la liaison peu  
amortissante entre les deux  
plaques**

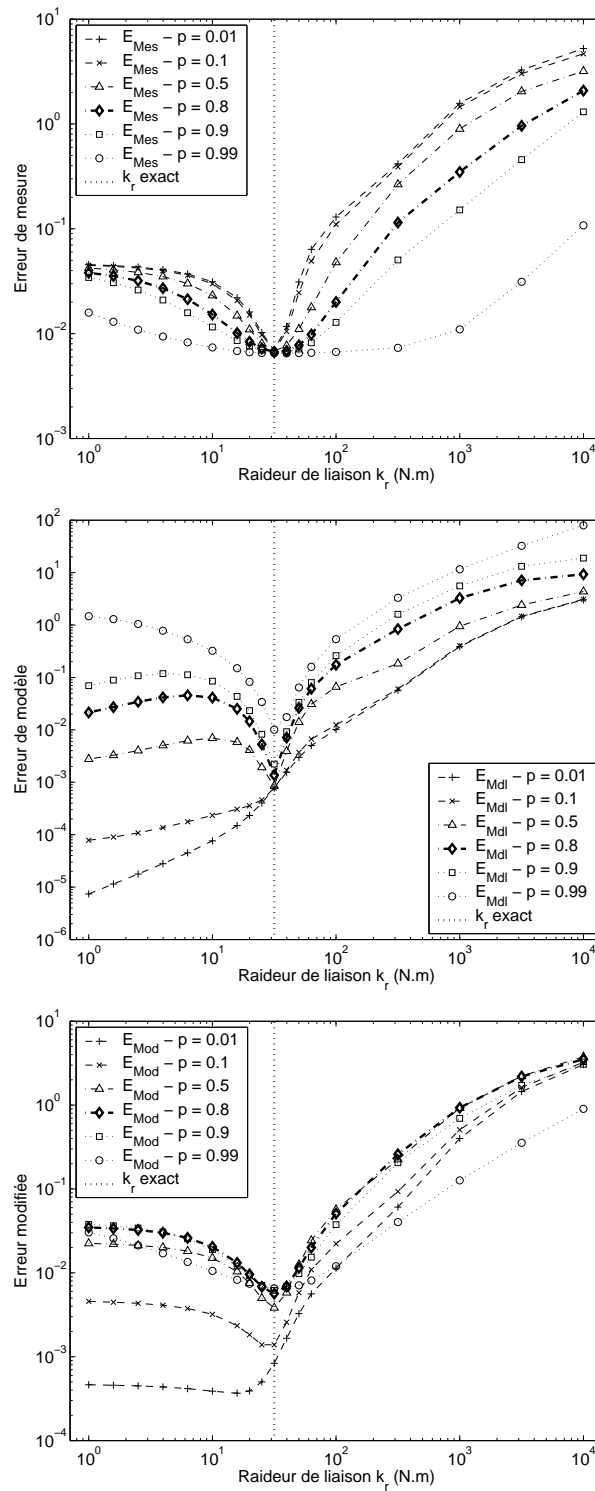


**FIG. C.1:** Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas), en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  lors du recalage de la liaison peu amortissante ( $\eta_r = 0.1$ ), pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ) - bruit de mesure 0 %.



**FIG. C.2:** Erreur modifiée en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  en présence de bruit pour  $p = 0.01$  (en haut),  $p = 0.8$  (au milieu),  $p = 0.99$  (en bas) lors du recalage de la liaison peu amortissante ( $\eta_r = 0.1$ ).





**FIG. C.3:** Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de la raideur de liaison  $k_r$  lors du recalage de la liaison peu amortissante ( $\eta_r = 0.1$ ), pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ) - bruit de mesure  $\pm 20\%$ .

ANNEXE

**D**

---

**Résultats complémentaires de  
l'identification de la liaison très  
amortissante entre les deux  
plaques**

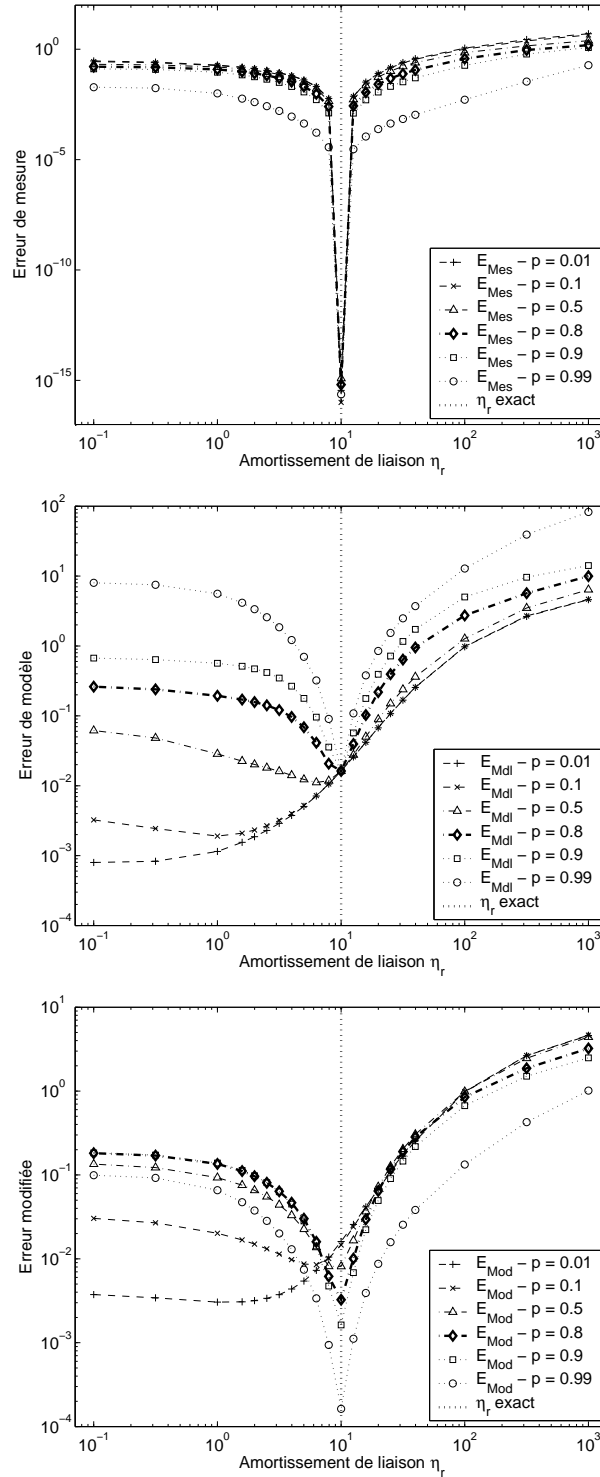
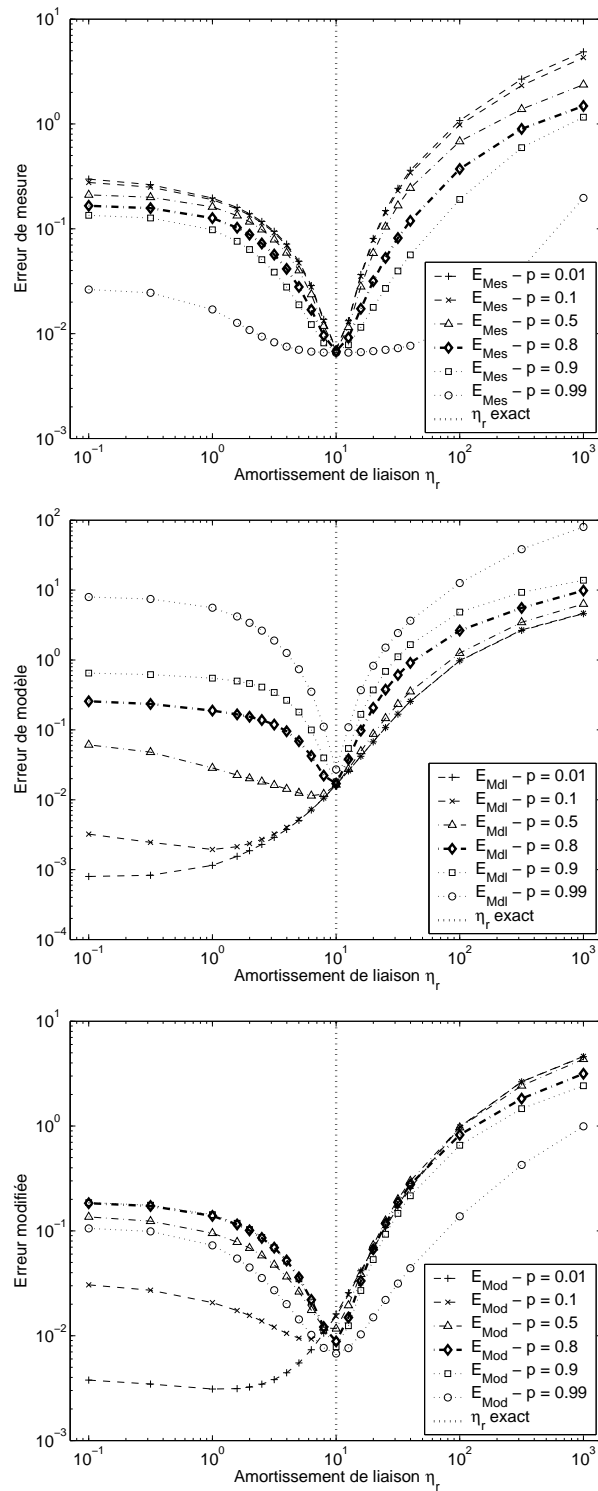


FIG. D.1: Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison très amortissante, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ) - bruit de mesure 0%,  $k_r$  exact.



**FIG. D.2:** Erreur de mesure (en haut), erreur de modèle (au milieu) et erreur modifiée (en bas) en fonction de l'amortissement de liaison  $\eta_r$  lors du recalage de la liaison très amortissante, pour plusieurs niveaux de confiance entre mesures et modèle (de  $p = 0.01$  à  $p = 0.99$ ) - bruit de mesure  $\pm 20\%$ ,  $k_r$  exact.



---

## Annexe E : Influence du coefficient d'amortissement dans un système masse-ressort-amortisseur

### Coefficient d'amortissement sur le plan matériau

Dans le domaine des réels, la dissipation s'exprime par une force visqueuse qui vient s'ajouter à la force élastique habituelle :

$$\sigma = E\varepsilon + B\dot{\varepsilon}$$

$E$  étant la contrainte, et  $\varepsilon$  la déformation. Transposant cette expression dans le domaine complexe, on obtient :

$$\sigma = E\varepsilon + i\omega B\varepsilon$$

L'utilisation d'un amortissement hystérétique via l'emploi d'un module d'Young comprenant une partie imaginaire, donnant l'équation  $\sigma = (1 + i\eta)E\varepsilon$ , revient donc à poser :

$$\eta = \frac{\omega B}{E}$$

La puissance s'écrit :

$$P = \sigma \dot{\varepsilon}^* = E\varepsilon \dot{\varepsilon}^* + B\dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon}^* = P^{elas} + P^{vis}$$

Dans un problème de vibration, où les quantités s'écrivent sous une forme harmonique, le rapport de ces puissance s'écrit :

$$\frac{\|P^{vis}\|}{\|P^{elas}\|} = \frac{\|B\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}^*\|}{\|E\varepsilon\dot{\varepsilon}^*\|} = \frac{\|i\omega B\varepsilon\dot{\varepsilon}^*\|}{\|E\varepsilon\dot{\varepsilon}^*\|} = \frac{\|i\omega \frac{\eta E}{\omega} \varepsilon\dot{\varepsilon}^*\|}{\|E\varepsilon\dot{\varepsilon}^*\|} = \eta$$

**Sur le plan matériau, le coefficient  $\eta$  représente donc bien la proportion d'énergie dissipée, et mérite légitimement l'appellation de coefficient d'amortissement.**

## Étude d'un système masse-ressort seul

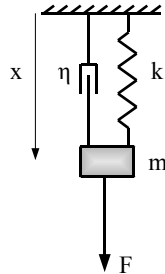


FIG. E.1: Étude d'un système masse-ressort simple.

Le système de la Figure E est régi par l'équation suivante :

$$m\ddot{x} = F - (1 + i\eta)kx$$

Posons  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , la solution s'écrit :

$$x = \frac{1}{(1 + i\eta) - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \frac{F}{k}$$

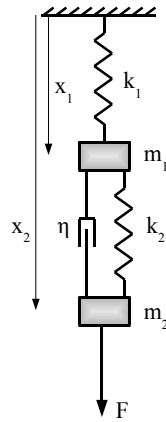
L'amplitude du déplacement, s'écrit donc, avec  $\frac{F}{k} = 1$  pour simplifier les notations :

$$\|x\| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \eta^2}}$$

**Dans ce premier cas où il n'y a qu'un seul degré de liberté, l'amplitude décroît quand le coefficient d'amortissement  $\eta$  augmente, et ce quelle que soit la fréquence. Cette conclusion rejoint le sens intuitif que l'on accorde au coefficient d'amortissement.**

## Étude d'un système de deux masses-ressorts couplés

Nous nous penchons maintenant sur le cas suivant, constitué de deux masses et de deux ressorts couplés, dont l'un contient un coefficient d'amortissement  $\eta$  :



**FIG. E.2:** Étude d'un système de deux masses-ressorts couplés.

Les équations du système sont les suivantes :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + (1 + i\eta)k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F - (1 + i\eta)k_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

On suppose  $k_1 = k_2 = k$ ,  $m_1 = m_2 = m$  (pour simplifier). Pour travailler avec des quantités adimensionnées, notons  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$ , le problème s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 2 + i\eta - \alpha^2 & -(1 + i\eta) \\ -(1 + i\eta) & 1 + i\eta - \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F/k \end{bmatrix}$$

La solution est la suivante :

$$x_1 = \frac{1 + i\eta}{(2 - \alpha^2 + i\eta) \cdot (1 - \alpha^2 + i\eta) - (1 + i\eta)^2} \frac{F}{k}$$

et

$$x_2 = \frac{2 - \alpha^2 + i\eta}{(2 - \alpha^2 + i\eta) \cdot (1 - \alpha^2 + i\eta) - (1 + i\eta)^2} \frac{F}{k}$$

On obtient donc comme amplitudes (au carré et avec  $\frac{F}{k} = 1$  pour alléger) :

$$A_1 = \|x_1\|^2 = \frac{1 + \eta^2}{(1 - 3\alpha^2 + \alpha^4) + \eta^2(1 - 2\alpha^2)^2}$$

et

$$A_2 = \|x_2\|^2 = \frac{(2 - \alpha^2)^2 + \eta^2}{(1 - 3\alpha^2 + \alpha^4) + \eta^2(1 - 2\alpha^2)^2}$$



La dépendance de ces amplitudes par rapport au coefficient d'amortissement  $\eta$  n'est plus aussi évidente. Pour comparer les comportements avec  $\eta$  négligeable et  $\eta$  prépondérant, définissons les quantités suivantes :

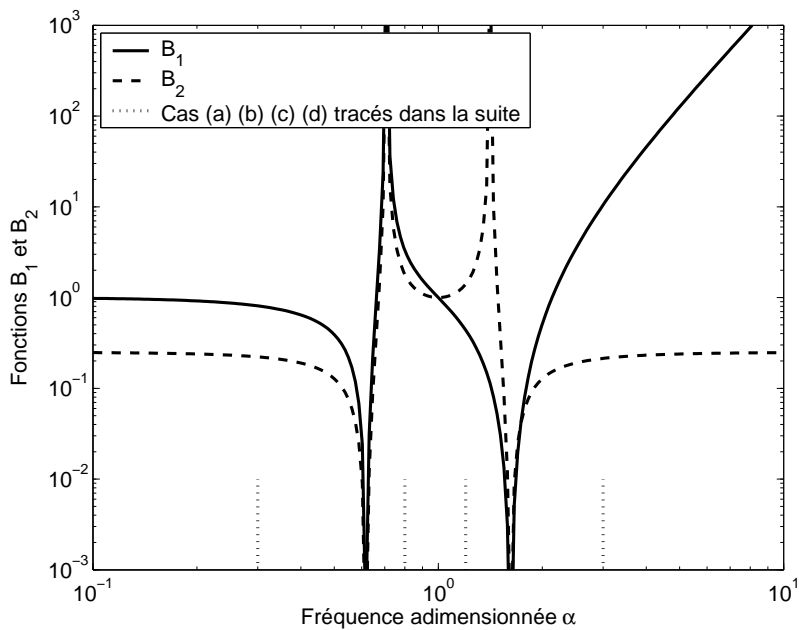
$$B_1 = \frac{\lim_{\eta \rightarrow \infty} A_1}{\lim_{\eta \rightarrow 0} A_1} = \frac{(1 - 3\alpha^2 + \alpha^4)^2}{(1 - 2\alpha^2)^2}$$

et

$$B_2 = \frac{\lim_{\eta \rightarrow \infty} A_2}{\lim_{\eta \rightarrow 0} A_2} = \frac{(1 - 3\alpha^2 + \alpha^4)^2}{(1 - 2\alpha^2)^2 \cdot (2 - \alpha^2)^2}$$

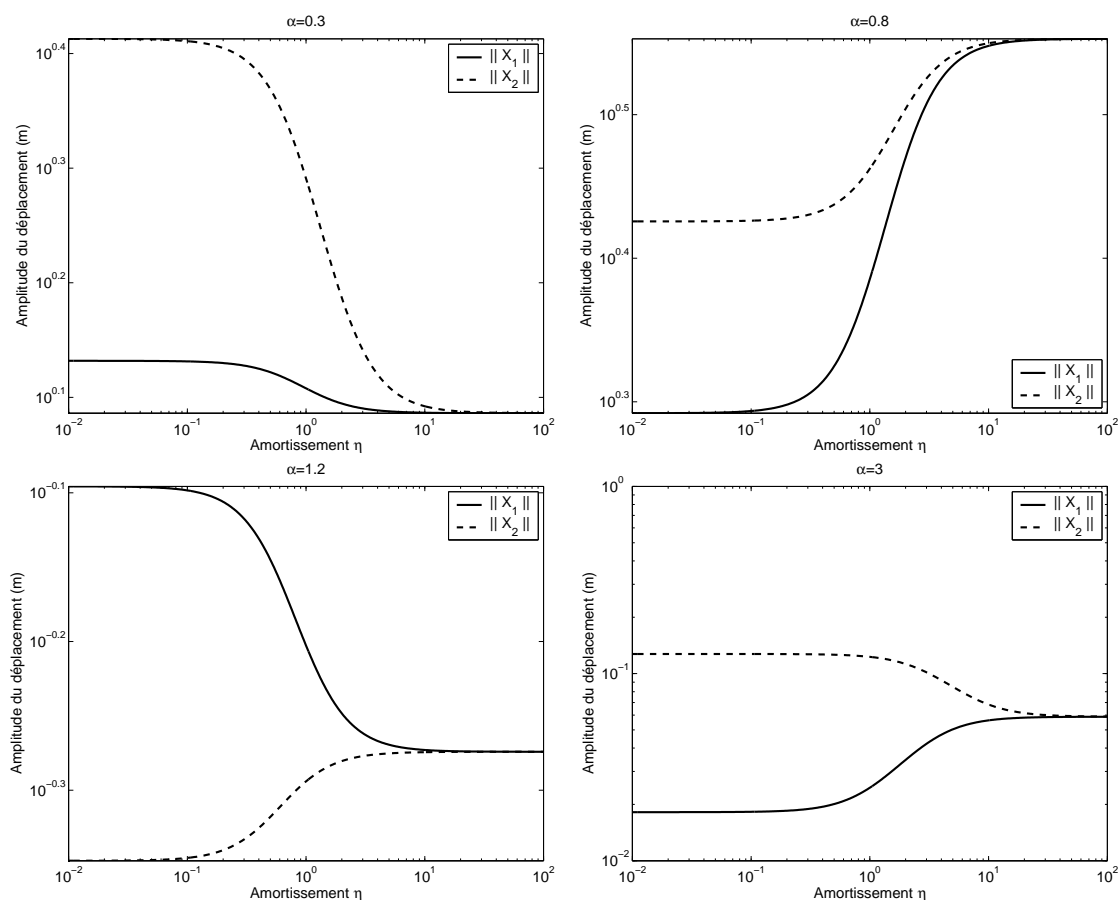
La quantité  $B_1$  permet de mesurer le rapport entre l'amplitude de  $x_1$  à coefficient d'amortissement nul, et la même amplitude à coefficient d'amortissement infini. Si  $B_1 > 1$ , cela signifierait que l'amplitude de  $x_1$  augmente avec le coefficient d'amortissement, ce qui semble contre intuitif. De même avec  $B_2$ .

En traçant les courbes de  $B_1$  et  $B_2$  en fonction de  $\alpha$ , c'est à dire en fonction de la fréquence relative  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , on obtient les graphes de la Fig 3. On y constate que sur certaines plages de fréquences, le déplacement pour un amortissement infini est plus important que le déplacement pour un amortissement nul. Le sens de coefficient d'amortissement perd ici le sens intuitif qu'on lui accorde habituellement.



**FIG. E.3:** *Grandeurs  $B_1$  et  $B_2$  en fonction de la fréquence adimensionnée  $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$  : on constate que pour plusieurs fréquences, les grandeurs sont au-dessus de  $10^0$ , ce qui signifie que l'amplitude du déplacement avec amortissement infini est plus grande que l'amplitude avec amortissement nul. Les traits pointillés verticaux indiquent les fréquences pour lesquelles les courbes ci-après sont tracées.*

Pour confirmer la courbe précédente, la Fig. 4 représente l'évolution des amplitudes  $\|x_1\|^2$  et  $\|x_2\|^2$  en fonction du coefficient  $\eta$ , et ceci pour plusieurs fréquences :  $\alpha = 0.3$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\alpha = 1.2$ , et  $\alpha = 3$ . Sur la première figure (a), le résultat semble intuitif : les déplacements diminuent quand l'amortissement augmente. Par contre ce n'est pas le cas des autres figures : sur la courbe (b), les deux amplitudes diminuent lorsque le coefficient d'amortissement augmente. Sur les graphes (c) et (d), l'une des amplitudes diminue tandis que l'autre augmente. Il semble que la modification de l'amortissement provoque un "transfert" d'énergie d'une sous-structure vers l'autre dans ces deux derniers cas.



**FIG. E.4:** Amplitude des déplacements en fonction de l'amortissement  $\eta$ , pour (a)  $\alpha = 0.3$ , (b)  $\alpha = 0.8$ , (c)  $\alpha = 1.2$ , (d)  $\alpha = 3$  : seul le cas (a) voit la diminution des deux amplitudes. Les cas (c) et (d) montrent un "transfert" d'énergie entre les deux masses. Dans le cas (b), les deux déplacements augmentent avec l'amortissement.

En conclusion de ce deuxième exemple, on peut penser que la modification du coefficient  $\eta$  provoque un phénomène typiquement "structure", en modifiant les conditions de couplage entre  $m_1$  et  $m_2$ . Dans ce cas la dénomination de *coefficient d'amortisse-*

ment pour  $\eta$  perd tout son sens, puisque l'augmentation de l'amortissement peut conduire à l'augmentation de l'amplitude d'une et/ou de l'autre des sous-structures. Sur le plan énergétique, la force d'excitation étant constante, on obtient donc une augmentation de l'énergie injectée dans la structure quand le coefficient d'amortissement augmente.

## Bilan

Si sur le plan "matériau", le coefficient d'amortissement traduit uniquement l'énergie dissipée, il semble que ce ne soit pas le cas sur un exemple typiquement "structure". En effet, lorsque plusieurs sous-structures sont couplées, le coefficient  $\eta$  ne représente pas seulement l'énergie dissipée dans la structure. En fait, le coefficient  $\eta$  intervient dans le niveau de l'énergie injectée dans la structure, et également dans la répartition de cette énergie. Ces constatations peuvent mener à des résultats allant à l'encontre du sens intuitif de l'appellation "coefficient d'amortissement" pour  $\eta$  : lorsque l'amortissement augmente, l'énergie totale de la structure peut également augmenter. Ceci est également constaté sur l'exemple des deux plaques en L dans les résultats du paragraphe 3.?? du mémoire.

---

# Bibliographie

- [Adh06] S. Adhikari. Damping modelling using generalized proportional damping. *Journal of Sound and Vibration*, 293 :156–170, 2006.
- [AFT03] O. Allix, P. Feissel, and P. Thévenet. A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : Basic aspects and identification issues. *Computers & Structures*, 81 :1177–1191, 2003.
- [AKS88] A.K. Aziz, R.B. Kellogg, and A.B. Stephens. A point boundary value problem with a rapidly oscillating solution. *Numerische Mathematik*, 53 :107–121, 1988.
- [AMF01] H. Ahmadian, J.E. Mottershead, and M.I. Friswell. Boundary condition identification by solving characteristic equations. *Journal of Sound and Vibration*, 247(5) :755–763, 2001.
- [Arn00] L. Arnaud. *Modélisation et Simulation Des Vibrations Moyennes Fréquences Par la Théorie Variationnelle Des Rayons Complexes*. PhD thesis, ENS Cachan, Cachan, France, 2000.
- [AS93] J.R.F. Arruda and J.M.C. Santos. Mechanical joint parameter estimation using frequency response functions and component mode synthesis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(6) :493–508, 1993.
- [AW01a] S. Adhikari and J. Woodhouse. Identification of damping : Part 1, viscous damping. *Journal of Sound and Vibration*, 243(1) :43–61, 2001.
- [AW01b] S. Adhikari and J. Woodhouse. Identification of damping : Part 2, non-viscous damping. *Journal of Sound and Vibration*, 243(1) :63–88, 2001.
- [AW02a] S. Adhikari and J. Woodhouse. Identification of damping : Part 3, symmetry-preserving methods. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3) :477–490, 2002.
- [AW02b] S. Adhikari and J. Woodhouse. Identification of damping : Part 4, error analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3) :491–504, 2002.
- [BA95] J. Ben Abdallah. *Inversion Gaussienne Appliquée à la Correction Paramétrique de Modèles Structuraux*. PhD thesis, École Polytechnique, 1995.
- [Bal00] E. Balmès. Review and evaluation of shape expansion methods. In *Proc. IMAC XVIII*, San Antonio, Texas, 2000. S.E.M. Editor.
- [Bal01] E. Balmès. *Structural Dynamics Toolbox 4.1*. SDTOOLS, 2001. <http://www.sdtools.com>.
- [Bar82] M. Baruch. Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes. *AIAA Journal*, 20(11) :1623–1626, 1982.

- [BB81] P.K. Banerjee and R. Butterfield. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, 1981.
- [BB93] H. Baruh and J.B. Boka. Modelling and identification of boundary conditions in flexible structures. *Modal Analysis : the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 8 :107–177, 1993.
- [BB95] O. Bouthier and R. J. Bernhard. Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182 :149–164, 1995.
- [BB01] A. Bobillot and E. Balmès. Solving minimum dynamic residual expansion and using results for error localisation. In *Proc. IMAC XIX*, Kissimmee, Florida, 2001. S.E.M. Editor.
- [BBF<sup>+</sup>92] F. Brezzi, M.O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet, and G. Rogé. A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 96 :117–129, 1992.
- [BC05] M. Bonnet and A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21 :R1–R50, 2005.
- [BDR05] H. Ben Dhia and G. Rateau. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 62(11) :1442–1462, 2005.
- [BGT85] A. Bayliss, C.I. Goldstein, and E. Turkel. On accuracy conditions for the numerical computations of waves. *Journal of Computational Physics*, 59 :369–404, 1985.
- [BI99] P. Bouillard and F. Ihlenburg. Error estimation and adaptivity for the finite element method in acoustics : 2D and 3D applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 176 :147–163, 1999.
- [BIJ03] J. Berthaut, M. N. Ichchou, and L. Jézéquel. Identification large bande des paramètres équivalents des structures 2D anisotropes dans l’espace des nombres d’ondes. *Mécaniques & Industries*, 2003(4) :377–384, 2003.
- [BIJ05] J. Berthaut, M. N. Ichchou, and L. Jézéquel. K-space identification of apparent structural behavior. *Journal of Sound and Vibration*, 280 :1125–1131, 2005.
- [BIPS95] I. Babuška, F. Ihlenburg, E.T. Paik, and A. Sauter. A generalized finite element method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 128 :325–359, 1995.
- [BK97] M. Beshara and A.J. Keane. Variational energy flows in beam networks with compliant and dissipative joints. *Journal of Sound and Vibration*, 203(2) :321–339, 1997.
- [BN83] A. Berman and E.J. Nagy. Improvement of a large analytical model using test data. *AIAA Journal*, 21(8) :1168–1173, 1983.

- [Bon99] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods in Solids and Fluids*. John Wiley and Sons, 1999.
- [BOQ<sup>+</sup>91] H. Berger, R. Ohayon, L. Quetin, L. Barthe, P. Ladevèze, and M. Reynier. Méthodes de recalage de structures en dynamique. *La Recherche Aéronautique*, 5 :9–20, 1991.
- [BR79] I. Babuška and W.C. Rheinboldt. Adaptive approaches and reliability estimators in finite element analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 17/18 :519–540, 1979.
- [BR98] M. Bonnet and M. Reynier. On the estimation of the geometrical support of modeling defects using the distributed error in constitutive equation. In France INRIA, editor, *Conférence Invitée*, pages 65–70, Carthage, Tunisie, 1998.
- [BR05] C. Blanzé and P. Rouch. Analysis of structures with stochastic interfaces in the medium-frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, 13(4) :711–729, 2005.
- [BWH99] M. Blakemore, J. Woodhouse, and D. J. Hardie. Statistical power-flow analysis of an imperfect ribbed cylinder. *Journal of Sound and Vibration*, 222(5) :813–832, 1999.
- [CDJP97] P. Collino, G. Delbue, P. Joly, and A. Piacentini. A new interface in the non-overlapping domain decomposition method for the Maxwell equations. *Comput. Meth. Appl. Meth. Engrg.*, 148 :195–207, 1997.
- [CDLLL00] A. Chouaki, A. Deraemaeker, P. Ladevèze, and S. Le Loch. Model updating using the error in the constitutive relation : Real case study. In *Proc. IMAC XVIII*, pages 140–146, San Antonio, Texas, 2000. S.E.M. Editor.
- [CFN84] N. Cottin, H.P. Felgenhauer, and H.G. Natke. On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals. *Ingenieur Archiv*, 54 :378–387, 1984.
- [CG88] J.C. Chen and J.A. Garba. On orbit damage assessment for large space structures. *AIAA Journal*, 26(9) :1119–1126, 1988.
- [CGD91] A. Cardona, M. Géradin, and D.B. Doan. Rigid and flexible joint modelling in multibody dynamics using finite elements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 89 :395–418, 1991.
- [CGJ00] F. Collino, S. Ghanemi, and P. Joly. Domain decomposition method for harmonic wave propagation : A general presentation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184 :171–211, 2000.
- [CH01] K.-S. Chae and J.-G. Hi. Prediction of vibrational energy distribution in the thin plate at high-frequency bands by using the ray tracing method. *Journal of Sound and Vibration*, 240(2) :263–292, 2001.
- [Cho97] A. Chouaki. *Recalage Des Modèles Dynamiques de Structures Avec Amortissement*. PhD thesis, Université Paris VI - ENS Cachan, 1997.

- [CJB68] R.R. Craig Jr. and M. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [CJC77] R.R. Craig Jr. and C.J. Chang. On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. In *Structural Dynamics and Material Conference*, San Diego, 1977. AIAA/ASME 18th Structures.
- [CJH88] R.R. Craig Jr. and A.L. Hale. Block-Krylov component mode synthesis method for structural model reduction. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 11 :562–570, 1988.
- [CLP98] A. Chouaki, P. Ladevèze, and L. Proslie. Updating structural dynamic models with emphasis on the damping properties. *AIAA Journal*, 36(6) :1094–1099, 1998.
- [CMP89] R. Cook, D. Malkus, and M. Plesha. *Concept And Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley, New York, 1989.
- [CN86] N. Cottin and H.G. Natke. On the parameter identification of elastomechanical systems using weighted input and modal residuals. *Ingenieur Archiv*, 56 :106–113, 1986.
- [CPN92] N. Cottin, U. Prells, and H.G. Natke. A parameter identification technique for elastomechanical systems using modal quantities. *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 7(3) :197–202, 1992.
- [Cra85] R.R. Craig. A review of time-domain and frequency domain component mode synthesis methods. *The American Society of Mechanical Engineering AMD*, 67 :1–30, 1985.
- [DBB99] A. Deraemaeker, I. Babüska, and P. Bouillard. Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46 :471–499, 1999.
- [Der01] A. Deraemaeker. *Sur la Maîtrise Des Modèles En Dynamique Des Structures À Partir de Résultats d’Essais*. PhD thesis, Université Paris VI - ENS Cachan, 2001.
- [Des91] B. Després. *Méthodes de Décomposition de Domaine pour les Problèmes de Propagation d’Ondes en Régime Harmonique*. PhD thesis, Paris IX, 1991.
- [Des98] W. Desmet. *A Wave Based Prediction Technique for Coupled Vibro-Acoustic Analysis*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, Belgique, 1998.
- [DFT01] R. Djellouli, C. Farhat, and R. Tezaur. A fast method for solving acoustic problems in frequency bands. *Journal of Computational Physics*, 168 :412–432, 2001.
- [DJSS93] J.E. Douglas Jr., J. Ans Santos, D. Sheen, and L. Schreiye. Frequency domain treatment of one-dimensional scalar waves. *Mathematical models and methods in applied sciences*, 3(2) :171–184, 1993.

- [DL91] E. De Langre. Formulation de transfert de plaques en flexion par équations intégrales. test de validation et de performance. Technical Report DMT/90/395, CEA, 1991.
- [Doe96] S.W. Doebbling. Minimum-rank optimal update of elemental stiffness parameters for structural damage identification. *AIAA Journal*, 34(12) :2615–2621, 1996.
- [DVHSV02] W. Desmet, B. Van Hal, P. Sas, and D. Vandepitte. A computationally efficient prediction technique for steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software*, 33 :527–540, 2002.
- [ELRC96] J. Esteban, F. Lalande, C.A. Rogers, and Z. Chaudhry. Theoretical modeling of wave propagation and energy dissipation in joints. *AIAA Journal*, 127(8) :131–141, 1996.
- [ER00] J. Esteban and C.A. Rogers. Energy dissipation through joints : Theory and experiments. *Computers & Structures*, 75 :347–359, 2000.
- [Far91a] C. Farhat. A Lagrange multiplier based divide and conquer finite element algorithm. *J. Comput. Syst. Engrg.*, 2 :149–156, 1991.
- [Far91b] C. Farhat. A saddle-point principle domain decomposition method for the solution of  $f$  solid mechanism problems. In SIAM, editor, *Proc. Fifth SIAM Conference on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 271–292. Keyes, D.E. and Chan, T.F. and Meurant, G.A. and Scroggs, J.S. and Voigt, R.G., 1991.
- [FCMR98] C. Farhat, P.-S. Chen, J. Mandel, and F. X. Roux. The two-level FETI method part II : Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155 :153–179, 1998.
- [FH93] C. Farhat and F.M. Hemez. Updating finite element dynamic models using an element-by-element sensitivity methodology. *AIAA Journal*, 31(9) :1702–1711, 1993.
- [FHF01] C. Farhat, I. Harari, and L.P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190(48) :6455–6479, 2001.
- [FHH03a] C. Farhat, I. Harari, and U. Hetmaniuk. The discontinuous enrichment method for multiscale analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :3195–3209, 2003.
- [FHH03b] C. Farhat, I. Harari, and U. Hetmaniuk. A discontinuous galerkin method with Lagrange multipliers for the solution of Helmholtz problems in the mid-frequency regime. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :1389–1419, 2003.
- [FHM06] L.P. Franca, G. Hauke, and A. Masud. Revisiting stabilized finite element methods for the advective-diffusive equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195 :1560–72, 2006.



- [FM98] C. Farhat and J. Mandel. The two-level FETI method for static and dynamic plate problems part I : An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155 :129–151, 1998.
- [FML<sup>+</sup>00] C. Farhat, A.P. Macedo, M. Lesoinne, F.X. Roux, and A. De La Bourdonnaie. Two-level domain decomposition methods with Lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 184(2-4) :213–239, 2000.
- [FMR94] C. Farhat, J. Mandel, and F.X. Roux. Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 115 :367–388, 1994.
- [FO03] L.P. Franca and S.P. Oliveira. Pressure bubbles stabilization features for in the Stokes problem. *Comput Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 192 :1929–1937, 2003.
- [FR91] C. Farhat and F.-X. Roux. A method for finite element tearing and inter-connecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Num. Methods Engrg.*, 32(6) :1205–1227, 1991.
- [FR92] C. Farhat and F.X. Roux. An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13 :379–396, 1992.
- [FR97a] F. J. Fahy and H. M. Ruivo. Determination of statistical energy analysis loss factors by means of an input power modulation technique. *Journal of Sound and Vibration*, 203(5) :763–779, 1997.
- [FR97b] L.P. Franca and A. Russo. Unlocking with residual-free bubbles. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 142 :361–364, 1997.
- [Fri86] C.P. Fritzen. Identification of mass, damping and stiffness matrices of mechanical systems. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 108 :9–16, 1986. Transaction of the ASME.
- [FWGT04] C. Farhat, P. Wiedemann-Goiran, and R. Tezaur. A discontinuous Galerkin method with plane waves and Lagrange multipliers for the solution of short wave exterior Helmholtz problems on unstructured meshes. *Wave Motion*, 39 :307–317, 2004.
- [GI99] K. Gerdes and F. Ihlenburg. On the pollution effect in FE solutions of the 3D-Helmholtz equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 170 :155–172, 1999.
- [GNH91] S.N. Gangadharan, E. Nikolaidis, and R.T. Haftka. Probabilistic system identification of two flexible joint models. *AIAA Journal*, 29(8) :1319–1326, 1991.
- [Gre82] J. Greenstadt. The cell discretization algorithm for elliptic partial differential equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 3 :261–288, 1982.

- [Gre99] J. Greenstadt. Solution of wave propagation problems by the cell discretization method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 174 :1–21, 1999.
- [HC98] T. Herrmann and V. Chaika. Parameter identification of non-classically damped mechanical structures in time domain. *Inverse Problems in Engineering*, 6 :155–175, 1998.
- [Her84] I. Herrera. *Boundary Methods. An Algebraic Theory*. Pitman, Boston, 1984.
- [HH92] I. Harari and T.J.R. Hugues. Galerkin least squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 98(3) :411–454, 1992.
- [HH98] I. Harari and S. Haham. Improved finite element methods for elastic waves. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 166(1-2) :143–164, 1998.
- [HIJ05] L. Houillon, M. N. Ichchou, and L. Jézéquel. Wave motion in thin-walled structures. *Journal of Sound and Vibration*, 281 :483–507, 2005.
- [Hin75] R.M. Hintz. Analytical methods in component modal synthesis. *AIAA Journal*, 13(8) :1007–1016, 1975.
- [HLP93] C. Hochard, P. Ladevèze, and L. Proslie. A simplified analysis of elastic structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 12(4) :509–535, 1993.
- [HOG02] M. Hanss, S. Oexl, and L. Gaul. Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact surface. *Mechanics Research Communications*, 29 :177–187, 2002.
- [Hop02] C. Hopkins. Statistical energy analysis of coupled plate systems with low modal density and low modal overlap. *Journal of Sound and Vibration*, 21(2) :193–214, 2002.
- [Hop03a] C. Hopkins. Vibration transmission between coupled plates using finite element methods and statistical energy analysis. part I : Comparison of measured and predicted data for masonry walls with and without apertures. *Applied Acoustics*, 64 :955–973, 2003.
- [Hop03b] C. Hopkins. Vibration transmission between coupled plates using finite element methods and statistical energy analysis. part II : The effect of window apertures in masonry flanking walls. *Applied Acoustics*, 62 :975–997, 2003.
- [Hur65] W. C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 37(4) :678–685, 1965.
- [Hwa98] H.Y. Hwang. Identification techniques of structures connection parameters using frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 212(3) :469–479, 1998.
- [IB95a] F. Ihlenburg and I. Babůska. Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for Helmholtz equation. *Int. J. Num. Methods Engrg.*, 38(22) :3745–3774, 1995.

- [IB95b] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. part I : The h-version of the FEM. *Computers & Mathematics with Applications*, 30(9) :9–37, 1995.
- [IB97] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. part II : The h-p-version of the FEM. *Siam J. of Numer. Anal.*, 34(1) :315–358, 1997.
- [IJ96] M. N. Ichchou and L. Jézéquel. Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and on simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4) :679–685, 1996.
- [IJ01] M. N. Ichchou and L. Jézéquel. Équation énergétique locale pour la prévision des niveaux vibratoires et acoustiques instationnaires. *C. R. Acad. Sci., Série Iib(t.329)* :663–670, 2001.
- [ILBJ97] M. N. Ichchou, A. Le Bot, and L. Jézéquel. Energy models of one-dimensional, multi-propagative systems. *Journal of Sound and Vibration*, 201(5) :535–554, 1997.
- [IZP99] R.A. Ibrahim, S.A. Zielke, and K. Popp. Characterization of interfacial forces in metal-to-metal contact under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 220(2) :365–377, 1999.
- [JQ95] F. S. Jin and Q. H. Qin. A variational principle and hybrid Trefftz finite element for the analysis of Reissner plates. *Computers & Structures*, 56(4) :697–701, 1995.
- [JS95] J. Jirousek and M. Stojek. Numerical assessment of a new T-element approach. *Computers & Structures*, 57(3) :367–378, 1995.
- [JW95] J. Jirousek and A. Wroblewski. T -elements : A finite element approach with advantages of boundary solution methods. *Advances in Engineering Software*, 24 :71–88, 1995.
- [JZ97] J. Jirousek and A.P. Zielinsky. Survey of Trefftz-type element formulations. *Computers & Structures*, 63(2) :225–242, 1997.
- [Kab85] A.M. Kabe. Stiffness adjustment using mode data. *AIAA Journal*, 23(9) :1431–1436, 1985.
- [KGZB83] D. Kelly, J. Gago, O.C. Zienkiewicz, and I. Babuska. A posteriori error analysis and adaptative processes in finite element method. Part I : Error analysis. *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.*, 19 :1953–1619, 1983.
- [KK95] E. Kita and N. Kamiyar. Trefftz methods : An overview. *Advances in Engineering Software*, 18(89), 1995.
- [KP94] W.J. Kim and Y.S. Park. Non-linear joint parameter identification by applying the force state mapping technique in the frequency domain. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(5) :519–529, 1994.

- [KP97] H.B. Kim and Y.S. Park. Sensor placement guide for structural joint stiffness model improvement. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(5) :651–672, 1997.
- [KZ94] M. Kaouk and D.C. Zimmerman. Structural damage assessment using a generalized minimum rank perturbation. *AIAA Journal*, 32(4) :836–842, 1994.
- [Lad83a] P. Ladevèze. R.D.M. tridimensionnelle. Technical report, LMT Cachan, 1983.
- [Lad83b] P. Ladevèze. Recalage de modélisations des structures complexes. Rapport Technique 33.11.01.4, Aérospatiale, Les Mureaux, 1983.
- [Lad93] P. Ladevèze. Erreur en relation de comportement en dynamique : Théorie et application au recalage de modèles de structures. Technical Report Rapport interne 150, LMT Cachan, 1993.
- [Lad96] P. Ladevèze. A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322(Série Iib (12)) :849–856, 1996.
- [Lad98a] P. Ladevèze. A modeling error estimator for dynamic structural model updating. *New Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, pages 135–151, 1998.
- [Lad98b] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Method : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculations*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Lan92] R. S. Langley. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159 :483–502, 1992.
- [Lan95] R. S. Langley. On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182 :637–657, 1995.
- [LARB01] P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch, and C. Blanzé. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18(1/2) :193–214, 2001.
- [LB98a] A. Le Bot. Geometric diffusion of vibrational energy and comparison with the vibrational conductivity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 212(4) :637–647, 1998.
- [LB98b] A. Le Bot. A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :537–554, 1998.
- [LBL<sup>+</sup>95] S. Lammens, M. Brughmans, J. Leuridan, W. Heylen, and P. Sas. Application of a FRF based model updating technique for the validation of a finite element model of components of the automotive industry. In *Proc. Design Engineering Technical Conferences*, pages 1191–1200, Boston, 1995. ASME Conferences.

- [LBRB03] P. Ladevèze, L. Blanc, P. Rouch, and C. Blanzé. A multiscale computational method for medium-frequency vibrations of assemblies of heterogeneous plates. *Computers & Structures*, 81 :1267–1276, 2003.
- [LC98] P. Ladevèze and A. Chouaki. A modeling error estimator for dynamic model updating of damped structures. In *Proc. of the International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Nagano City, Japan, 1998. Elsevier Science.
- [LC99] P. Ladevèze and A. Chouaki. Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, 15 :49–58, 1999.
- [LD95] R. Lyon and R. Dejong. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*. Butterworth Heinemann, Newton, MA, 2nd edition, 1995.
- [LK94] T.W. Lim and T.A.L. Kashangaki. Structural damage detection of space truss structures using best achievable eigenvectors. *AIAA Journal*, 32(5) :1049–1057, 1994.
- [LL83] P. Ladevèze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and application. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(3) :485–509, 1983.
- [LL04] S. Le Loch. *Modélisation et Identification de l'Amortissement Dans Les Structures Spatiales*. PhD thesis, Paris VI - ENS Cachan, 2004.
- [LM62] R. H. Lyon and G. Maidanik. Power flow between linearly coupled oscillators. *JASA*, 34(5) :623–639, 1962.
- [LM97] P. Ladevèze and N. Moës. A new a posteriori error estimation for non linear time-dependent finite element analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 157 :45–68, 1997.
- [LP90] G. Lallement and J. Piranda. Localization methods for parametric updating of finite element models. In *Proc. IMAC VIII*, pages 579–585, Orlando, Florida, 1990. S.E.M. Editor.
- [LPDR06] P. Ladevèze, G. Puel, A. Deraemaeker, and T. Romeuf. Validation of structural dynamics models containing uncertainties. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195(4-5) :373–393, 2006.
- [LR89] P. Ladevèze and M. Reynier. *A Localization Method of Stiffness Errors for the Adjustment of FE Models*, chapter FE modeling and analysis, pages 355–361. A.S.M.E. publishers, 1989.
- [LR05] P. Ladevèze and H. Riou. Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(27-29) :3167–3191, 2005.
- [LRM94] P. Ladevèze, M. Reynier, and N.M.M. Maia. Error in the constitutive relation in dynamics. *Inverse problems in engineering*, pages 251–256, 1994.
- [LRRB03] P. Ladevèze, P. Rouch, H. Riou, and X. Bohineust. Analysis of medium-frequency vibrations in a frequency range. *Jnl of Comp. Acoustic*, 11(2) :255–283, 2003.

- [LS97] R. S. Langley and J. R. D. Smith. Statistical energy analysis of periodically stiffened damped plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 208(3) :407–426, 1997.
- [Lyo75] R. H. Lyon. *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems : Theory and Applications*. MIT Press, Cambridge, 1975.
- [Man93] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9 :233–241, 1993.
- [Mat99] The Mathworks. *Matlab Version 5.3.1*, 1999.
- [MB97] J. M. Melenk and I. Babuška. Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4 :607–632, 1997.
- [McN71] R. McNeal. A hybrid method for component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4) :581–601, 1971.
- [Mer93] F. Mercier. Prévisions moyennes fréquences à l’aide de modèles éléments finis. Technical Report RA/TE/AE/MTE/SM, CNES, 1993.
- [MF93] J.E. Mottershead and M.I. Friswell. Model updating in structural dynamics : A survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2) :347–375, 1993.
- [MFNB96] J.E. Mottershead, M.I. Friswell, G.H.T. Ng, and J.A. Brandon. Geometric parameters for finite element updating of joints and constraints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(2) :171–182, 1996.
- [MG01a] L. Maxit and J.-L. Guyader. Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5) :907–930, 2001.
- [MG01b] L. Maxit and J.-L. Guyader. Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and FEM modal information, part II : Numerical applications. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5) :907–930, 2001.
- [MG03] L. Maxit and J.-L. Guyader. Extension of SEA model to subsystems with non-uniform modal energy distribution. *Journal of Sound and Vibration*, 265 :337–358, 2003.
- [MGS95] J.E. Mottershead, E.L. Goh, and W. Shao. On the treatment of discretization errors in finite element model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9(1) :101–112, 1995.
- [MJP99] Y.M. Moon, T.H. Jee, and Y.P. Park. Development of an automotive joint model using an analytically based formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 220(4) :625–640, 1999.
- [MMC00] F. Magoules, K. Meerbergen, and J.P. Coyette. Application of a domain decomposition method with Lagrange multipliers to acoustic problems arising from the automotive industry. *Journal of Computational Acoustics*, 8(3) :503–521, 2000.

- [MMFJ00] J.E. Mottershead, C. Mares, M.I. Friswell, and J. James. Selection and updating of parameters for an aluminium space-frame model. *Mechanical and Signal Processing*, 14(6) :923–944, 2000.
- [MMSC87] S.F. Masri, R.K. Miller, A.F. Saud, and T.K. Caughey. Identification of non-linear vibrating structures : Part II - applications. *Journal of Applied Mechanics*, 54 :929–929, 1987. Transaction of the ASME.
- [Mor92] J.P.H. Morand. A new medium frequency model reduction method. In *Proceeding, Colloque National en Calcul de Structure*, Giens, 1992.
- [Mot88] J.E. Mottershead. A unified theory of recursive, frequency domain filters with application to system identification in structural dynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 110 :360–365, 1988. Transaction of the ASME.
- [MS93] J. Mottershead and W. Shao. Correction of joint stiffness and constraints for finite element models in structural dynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 60 :117–122, 1993.
- [NAF06] H.M. Nguyen, O. Allix, and P. Feissel. Application of the CRE for parameter identification in nonlinear dynamics with corrupted measurements. In IACM, editor, *7th World Congress on Computational Mechanics*, California, USA, 2006.
- [Nat88] H.G. Natke. Updating computational models in the frequency domain based on measured data : A survey. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(1) :28–35, 1988.
- [NB99] B.K. Nanda and A.K. Behera. Study of damping in layered and jointed structures with uniform pressure distribution at the interface. *Journal of Sound and Vibration*, 226(4) :607–624, 1999.
- [Nef87] S. H. Nefske, D. J. Ans Sung. Power flow finite element analysis of dynamic systems : Basic theory and application to beams. *ASME Publication NCA*, 3 :47–54, 1987.
- [Nem06] N. Nemitz. *Méthode Multipôle Rapide et Sensibilité Topologique Pour l'Identification Approchée de Défauts à Partir de Données de Type Acoustique*. PhD thesis, École Polytechnique, 2006.
- [Nis02] N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, 55 :299–324, 2002.
- [NP04] L.O. Neto and J.B. Paiva. Cubic approximation for the transverse displacement in BEM for elastic plates analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, pages 869–880, 2004.
- [NRE93] A.S. Nobari, D.A. Robb, and D.J. Ewins. Model updating and joint identification methods : Applications, restrictions and overlap. *Journal of Modal Analysis : the International of Analytical and Experimental Analysis*, 8(2) :93 :105, 1993.

- [NRE95] A.S. Nobari, D.A. Robb, and D.J. Ewins. A new approach to modal-based structural dynamic model updating and joint identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9(1) :85–100, 1995.
- [OBC84] R. Ohayon, H. Berger, and J.P. Chaquin. Finite element model adjustment using experimental vibration data. In *Proc. IMAC II*, pages 638–642, Orlando, Florida, 1984. S.E.M. Editor.
- [OG03] M. Ouisse and J. L. Guyader. An energy residual method for detection of the causes of vibration hypersensitivity. *Journal of Sound and Vibration*, 260 :83–100, 2003.
- [OS98] R. Ohayon and C. Soize. *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, San Diego, London, 1998.
- [Pai96] J.B. Paiva. Boundary element formulation of building slabs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 17 :105–110, 1996.
- [Pas99] R. Pascual. *Model Based Structural Damage Assessment Using Vibration Measurements*. PhD thesis, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, 1999.
- [PDTB03] E. Perrey-Debain, J. Trevelyan, and P. Bettess. Plane wave interpolation in direct collocation boundary element method for radiation and wave scattering : Numerical aspect and applications. *Journal of Sound and Vibration*, 261(5) :839–858, 2003.
- [PDVS04] B. Pluymers, W. Desmet, D. Vandepitte, and P. Sas. Application of an efficient wave-based prediction technique for the analysis of vibro-acoustic radiation problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :353–364, 2004.
- [PGR97] R. Pascual, J.C. Golinval, and M. Razeto. A frequency domain correlation technique for model correlation. In *Proc. IMAC XV*, pages 587–592, Orlando, Florida, 1997. S.E.M. Editor.
- [PLC91] J. Piranda, G. Lallement, and S. Cogan. Parametric correction of finite element models by minimization of an output residual : Improvement of the sensitivity method. In *Proc. IMAC IX*, pages 363–368, Firenze, Italy, 1991. S.E.M. Editor.
- [PS05] H. J. Pradlwarter and G. I. Schuëller. A consistent concept for high- and low-frequency dynamics based on stochastic modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 288 :653–667, 2005.
- [PT95] J.-M. Parot and C. Thirard. Ray techniques for modeling vibratory fields. In *Proceedings of Euro-Noise*, volume 95, pages 453–456, 1995.
- [PTF05] W. S. Park, D. J. Thompson, and N. S. Ferguson. Variability of the coupling loss factor between two coupled plates. *Journal of Sound and Vibration*, 279 :557–579, 2005.



- [Qin95] Q. H. Qin. Hybrid-Trefftz finite element method for Reissner plates on an elastic foundation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 122 :379–392, 1995.
- [RB95] Y. Ren and C.F. Beards. Identification of joint properties of a structure using F.R.F. data. *Journal of Sound and Vibration*, 186(4) :567–587, 1995.
- [RB04] P. Rouch and C. Blanzé. Computations of structures in the medium-frequency range with stochastic interfaces. Jyväskylä, Finland, 24 - 28 July 2004. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.
- [Ren92] Y. Ren. *The Analysis and Identification of Joint Friction Parameters in the Dynamic Response of Structures*. PhD thesis, University of London, Imperial College of Science, 1992.
- [Ren04] K. Renji. On the number of modes required for statistical energy analysis-based calculations. *Journal of Sound and Vibration*, 269 :1128–1132, 2004.
- [RF99] D. Rixen and C. Farhat. A simple and efficient extension of a class of sub-structure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 44 :489–516, 1999.
- [RG97] E. Rébillard and J. L. Guyader. Vibrational behaviour of lattices of plates : Basic behaviour and hypersensitivity phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 205(3) :337–354, 1997.
- [RLR04] H. Riou, P. Ladevèze, and P. Rouch. Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272(1-2) :341–360, 2004.
- [Ros72] R.G. Ross. Synthesis of stiffness and mass matrices. In *SAE Conference Paper*, pages 710–787, 1972.
- [Rou90] F.-X. Roux. Méthodes de résolution par sous-domaines en statique. *La Recherche Aérospatiale*, 1 :37–48, 1990.
- [Rou01] P. Rouch. *Modélisation et Calcul Des Structures Complexes En Moyennes Fréquences Par la Théorie Variationnelle Des Rayons Complexes*. PhD thesis, ENS Cachan, 2001.
- [Rub75] S. Rubin. Improved component mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 13(8) :995–1006, 1975.
- [Rus96] A. Russo. Bubble stabilization of finite element methods for the linearized incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 132 :335–343, 1996.
- [SB91] S.W. Smith and C.A. Beattie. Secant-method adjustment for structural models. *AIAA Journal*, 29(1) :119–126, 1991.
- [SBH06] T. Strouboulis, I. Babuska, and R. Hidajat. The generalized finite element method for Helmholtz equation : Theory, computations and open problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195 :4711–4731, 2006.

- [SCB01] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuška. The Generalized Finite Element Method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190 :4081–4093, 2001.
- [SIJ02] F. S. Sui, M. N. Ichchou, and L. Jézéquel. Prediction of vibroacoustics energy using a discretized transient local energy approach and comparison with TSEA. *Journal of Sound and Vibration*, 251(1) :163–180, 2002.
- [SK97] K. Shankar and A. J. Keane. Vibrational energy flow analysis using a substructure approach : The application of receptance theory to FEA and SEA. *Journal of Sound and Vibration*, 201(4) :491–513, 1997.
- [Smi97] M. J. Smith. A hybrid energy method for predicting high frequency vibrational response of point-loaded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 202(3) :375–394, 1997.
- [Soi98] C. Soize. Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural dynamics systems. *European Journal of Mechanics*, 17(4) :657–685, 1998. A/Solids.
- [SPA96] M.J. Shultz, P.F. Pai, and A.S. Abdelnaser. Frequency response function assignment technique for structural damage identification. In *Proc. IMAC XIV*, pages 105–111, 1996.
- [Tar87] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory, Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*. Elsevier, Netherlands, 1987.
- [TC88] J.-S. Tsai and Y.F. Chou. The identification of dynamic characteristics of a single bolted joint. *Journal of Sound and Vibration*, 125 :487–502, 1988.
- [TdF98] J.A. Teixeira de Freitas. Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 153 :127–151, 1998.
- [TG06] N. Totaro and J. L. Guyader. SEA substructuring using cluster analysis : The MIR index. *Journal of Sound and Vibration*, 290 :264–289, 2006.
- [Tho72] A.R. Thoren. Derivation of mass and stiffness matrices from dynamic test data. In *AIAA Conference Paper*, pages 72–346, 1972.
- [TMF01] R. Tezaur, A. Macedo, and C. Farhat. Iterative solution of large-scale acoustic scattering problems with multiple right hand-sides by a domain decomposition method with Lagrange multipliers. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 51 :1175–1193, 2001.
- [Tre26] E. Trefftz. Ein Gegenstück Zum Ritzschen Verfahren. In *2nd International Congress of Applied Mechanics*, pages 131–137, Zürich, Suisse, 1926.
- [TWK59] S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1959.
- [WB92] J. C. Wohlever and R. J. Bernhard. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153 :1–19, 1992.
- [WL91] J.H. Wang and C.M. Liou. Experimental identification of mechanical joint parameters. *Journal of Vibration and Acoustics*, 113 :28–36, 1991. Transaction of the ASME.

- [WS90] J. Wang and P. Sas. A method for identifying parameters of mechanical joints. *Journal of Applied Mechanics*, 57 :337–342, 1990.
- [XB99] Y. Xiong and O.K. Bedair. Analytical and finite element modeling of riveted lap joint in aircraft structure. *AIAA Journal*, 37 :93–99, 1999.
- [YP93] K.T. Yang and Y.S. Park. Joint structural parameter estimation using a subset of frequency response function measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(6) :509–530, 1993.
- [ZK92] D.C. Zimmerman and M. Kaouk. Eigenstructure assignment approach for structural damage detection. *AIAA Journal*, 30(7) :1848–1855, 1992.
- [ZK94] D.C. Zimmerman and M. Kaouk. Structural damage detection using a minimum rank update theory. *Journal of Vibration and Acoustics*, 16 :222–231, 1994. Transaction of the ASME.
- [ZLFP87] Q. Zhang, G. Lallement, R. Fillod, and J. Piranda. A complete procedure for the adjustment of a mathematical model from the identified complex modes. In *Proc. IMAC V*, pages 113–1190, London, England, 1987. S.E.M. Editor.
- [ZS95] D.C. Zimmerman and T. Simmermacher. Model correlation using multiple static load and vibration tests. *AIAA Journal*, 33(11) :2182–2188, 1995.
- [ZSKB96] T.C. Zimmerman, S.W. Smith, H.M. Kim, and T.J. Bartkowicz. An experimental study of structural health monitoring using incomplete measurements. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118(4) :543–550, 1996. Transaction of the ASME.
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method. Volume I : The Basis*. Butterworth Heinemann, Boston, 2000.