



**HAL**  
open science

# Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative

Barbara Schapira

► **To cite this version:**

Barbara Schapira. Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2003. Français. NNT : . tel-00163420

**HAL Id: tel-00163420**

**<https://theses.hal.science/tel-00163420>**

Submitted on 17 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à l'Université d'Orléans

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS**

Discipline : MATHÉMATIQUES

par

Barbara SCHAPIRA

## Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative

Thèse effectuée sous la direction de

Martine BABILLOT

Soutenue le 26 novembre 2003

### MEMBRES DU JURY :

François LEDRAPPIER,  
Marc PEIGNÉ,  
Marc BOURDON,  
Vadim KAIMANOVICH,  
Jean RENAULT,  
Henri THUILLIER

Président

Rapporteur  
Rapporteur



Cette thèse doit énormément à la direction de Martine Babillot. Sa plus belle récompense aurait été de voir ce manuscrit enfin fini, d'assister à la soutenance, de voir trois années de maths enfin concrétisées.

De ces trois si belles années de thèse, parmi tant de souvenirs, je retiendrai le temps et l'attention qu'elle m'a consacrés, ses explications simples et lumineuses, ses éternels retards à nos rendez-vous du matin, sa trop grande modestie, son exigence, mais aussi sa rigueur, sa confiance et surtout sa passion et son enthousiasme contagieux pour les mathématiques.

Le plus bel hommage à lui rendre maintenant est sans doute de boire un verre en son souvenir, et de continuer à faire les plus belles mathématiques possibles.

# Remerciements

Marc Peigné m'a apporté un soutien et une aide formidables ces derniers mois, d'abord en lisant très attentivement et en corrigeant ma thèse en un temps record, puis par des discussions mathématiques, par ses remarques, ses conseils, et son exigence sur la rédaction. La version finale de ma thèse lui doit beaucoup, et je le remercie vivement.

Depuis le début de ma thèse, Vadim Kaimanovich s'est intéressé à mes travaux ; par ses questions, ses commentaires et ses conseils judicieux, il m'a aidée à les améliorer. Je le remercie de me faire aujourd'hui l'amitié d'être rapporteur de cette thèse et membre du jury.

J'ai plusieurs fois rencontré Marc Bourdon lors de séminaires ou de conférences. Il s'est toujours intéressé au déroulement de ma thèse avec la plus grande gentillesse, et c'est un plaisir pour moi qu'il soit rapporteur de ma thèse et membre du jury.

Jean Renault m'a aidée avec beaucoup de patience et de gentillesse à découvrir et à comprendre le monde abstrait des groupoïdes. Depuis le début de ma thèse, j'ai souvent croisé François Ledrappier. Il a lu une partie de mon travail, répondu à mes questions avec bienveillance, et suivi régulièrement l'avancement de ma thèse. Je les remercie tous deux très chaleureusement d'être membres de mon jury de thèse aujourd'hui.

Je remercie aussi Henri Thuillier d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je me suis initiée à la géométrie en courbure négative pendant un stage sous la direction de Patrick Foulon, et je n'ai plus changé de domaine de recherche depuis.

Je garde un excellent souvenir de mon année de DEA à Grenoble ; c'est Gérard Besson qui m'a proposé de faire ma thèse sous la direction de Martine Babillot, et c'était vraiment une très bonne idée.

Je remercie Jean-Pierre Otal pour toutes les discussions mathématiques qu'on a eues, grâce auxquelles j'ai appris énormément de mathématiques, en particulier sur les variétés à courbure négative.

Un grand merci à Anne Estrade, Sandrine Grellier, et Claire Anantharaman pour le soutien qu'elles m'ont apporté, chacune à sa façon, pendant toute cette thèse, mais particulièrement ces derniers temps.

J'ai découvert les joies de l'enseignement avec Anne Estrade, ça a été un vrai plaisir et j'ai beaucoup appris.

Anne, Christelle et Virginie contribuent beaucoup à l'ambiance détendue et chaleureuse du MAPMO. Les soirées resto avec Laurent, Gwën et Philippe ont égayé ma thèse, en particulier grâce aux blagues de Gwën. Philippe m'a aussi souvent bien

aidée dans toutes mes luttes contre mon ordinateur. Avec Franck, nous avons commencé le monitorat et fini notre thèse ensemble ; entre temps, nous avons partagé les interrogations d'un enseignant débutant, les joies et catastrophes de la vie d'un thé-sard, et beaucoup de discussions. Nos longs bavardages dans le bureau avec Franck et Hermine, ainsi que la vivacité mathématique de Bruno ont animé le quotidien de ces trois années.

Quand on était petits, à chaque fois que ma mère trouvait un problème rigolo de géométrie, elle appelait : « Venez, j'ai un jeu ! ». Cette vision des maths me restera, et le challenge d'avoir dû rester pendant toutes ces années la grande soeur qui en sait un peu plus que son petit frère a toujours été très stimulant...

Les encouragements de mes parents, et en particulier le calme et la confiance permanente de mon père en ma réussite m'ont aidée et soutenue pendant toutes mes études, jusqu'à la fin de cette thèse.

Remercier Matthieu en quelques lignes est impossible ; il a supporté mes moments de doute et mon stress, m'a apporté son enthousiasme, son dynamisme, ses conseils, sa confiance ...

Je ne peux pas conclure cette page sans remercier une dernière fois Martine, pour tout ce qu'elle m'a appris, les maths qu'elle m'a fait découvrir, son envie communicative de comprendre et de faire des maths.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Premières propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique</b>	<b>15</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>17</b>
1.1 Variétés à courbure négative . . . . .	17
1.1.1 Variétés de Hadamard . . . . .	17
1.1.2 Flot géodésique . . . . .	19
1.1.3 Exposant critique et entropie . . . . .	21
1.2 Feuilletages . . . . .	22
1.2.1 Définitions . . . . .	23
1.2.2 Groupoïde d'holonomie . . . . .	25
1.2.3 Mesures transverses . . . . .	27
1.2.4 Feuilletage horosphérique . . . . .	27
1.3 Formalisme thermodynamique . . . . .	28
<b>2 Construction des mesures d'équilibre</b>	<b>33</b>
2.1 Série de Poincaré . . . . .	34
2.2 Mesure de Patterson sur le bord . . . . .	37
2.3 Construction de $m^f$ , Propriétés . . . . .	39
2.4 Lemme de l'Ombre . . . . .	41
2.5 C'est la mesure d'équilibre . . . . .	44
2.6 Dimension de Hausdorff . . . . .	44
2.7 Exemples . . . . .	48
<b>3 Unique ergodicité du flot horocyclique des surfaces hyperboliques compactes</b>	<b>51</b>
3.1 Le théorème de Furstenberg . . . . .	51
3.2 Démonstrations . . . . .	52
3.3 Remarques . . . . .	54
<b>II Mesures transverses quasi-invariantes pour un feuilletage</b>	<b>57</b>
<b>4 Mesures quasi-invariantes pour un feuilletage et limites de moyennes longitudinales</b>	<b>59</b>
4.1 Cadre . . . . .	59
4.2 Equidistribution de moyennes . . . . .	60



<b>5</b>	<b>On quasi-invariant transverse measures for the horospherical foliation of a negatively curved manifold</b>	<b>65</b>
5.1	Introduction and statement of results . . . . .	65
5.2	Notations, preliminaries . . . . .	69
5.2.1	Geometry . . . . .	69
5.2.2	Cocycles associated with a Hölder map . . . . .	72
5.2.3	Measures associated with a Hölder map . . . . .	74
5.3	Proofs of Theorems 5.2.7 and 5.2.7' . . . . .	77
5.3.1	Averaging on horospherical balls . . . . .	77
5.3.2	An autoadjonction property . . . . .	80
5.3.3	Proof of Theorems 5.2.7 and 5.2.7' . . . . .	81
5.4	Equidistribution properties . . . . .	84
5.4.1	Equidistribution of horospherical means on balls . . . . .	84
5.4.2	Equidistribution of Cesaro averages on balls . . . . .	85
5.4.3	Equidistribution of Følner sequences . . . . .	86
5.5	Application to coverings . . . . .	89
5.5.1	Nonsymmetric potential . . . . .	89
5.5.2	Proof of Theorem 5.5.1 . . . . .	90
 <b>III Propriétés du feuilletage horosphérique des variétés géométriquement finies</b>		<b>92</b>
<b>6</b>	<b>Lemme de l'ombre et non divergence des horosphères d'une variété géométriquement finie</b>	<b>96</b>
6.1	Introduction . . . . .	96
6.2	Variétés géométriquement finies . . . . .	99
6.2.1	Généralités . . . . .	99
6.2.2	Projections . . . . .	101
6.2.3	Espaces hyperboliques au sens de Gromov . . . . .	101
6.2.4	Voisinages d'un point du bord . . . . .	103
6.2.5	Action d'une isométrie parabolique sur le bord . . . . .	105
6.2.6	Géométrie des cusps . . . . .	107
6.3	Mesures conformes et lemme de l'ombre . . . . .	110
6.3.1	Densités conformes . . . . .	110
6.3.2	Lemme de l'ombre . . . . .	111
6.3.3	Preuve du théorème 6.3.2 . . . . .	111
6.4	Moyennes horosphériques . . . . .	119
6.4.1	Définitions . . . . .	119
6.4.2	Non divergence des moyennes horosphériques . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Equidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie</b>	<b>128</b>
7.1	Introduction . . . . .	128
7.2	Préliminaires . . . . .	130
7.2.1	Surfaces géométriquement finies en courbure négative variable . . . . .	130
7.2.2	Feuilletage horocyclique . . . . .	132
7.3	Equidistribution des moyennes vers relativement à la mesure de Patterson . . . . .	135
7.3.1	Preuve dans le cas convexe-cocompact . . . . .	136

7.3.2	Cas général . . . . .	136
7.4	Equidistribution de moyennes quelconques . . . . .	139
7.5	Courbure constante : moyennes sur les orbites du flot horocyclique . . . . .	141
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>144</b>
8.1	Equidistribution des horosphères d'une variété géométriquement finie de dimension quelconque . . . . .	144
8.2	Mesures de Gibbs sur une variété géométriquement finie . . . . .	146
8.2.1	Construction . . . . .	146
8.2.2	Classification des mesures transverses quasi-invariantes pour le feuilletage fortement instable . . . . .	147
8.2.3	Non divergence des moyennes horosphériques . . . . .	152
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>



# Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés ergodiques du *feuilletage horosphérique* d'une variété riemannienne  $M$  à courbure négative, qui est également le *feuilletage fortement instable*  $\mathcal{W}^{su}$  du flot géodésique agissant sur le fibré unitaire tangent  $T^1M$  de  $M$ .

Ces propriétés ont été beaucoup étudiées dans le cas des surfaces. En effet, les feuilles de  $\mathcal{W}^{su}$  sont alors de dimension 1, et l'étude de  $\mathcal{W}^{su}$  se ramène à celle du flot horocyclique  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  agissant sur le fibré unitaire tangent de la surface (voir [Mar]). De nombreux résultats existent alors dans ce cadre.

Par exemple, depuis les travaux de Furstenberg [F], on sait que sur une surface hyperbolique compacte, le flot  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est uniquement ergodique et toutes ses orbites s'équidistribuent suivant la mesure de Liouville.

Le cas des surfaces hyperboliques de volume fini est lui aussi bien compris. Dani [Da1] a montré que la mesure de Liouville est l'unique probabilité invariante et ergodique sur  $T^1S$ , hormis les probabilités invariantes induites par les orbites périodiques du flot horocyclique. De plus, les orbites non périodiques de  $(h^t)$  s'équidistribuent vers la mesure de Liouville (Dani et Smillie [Da-S]).

En volume infini, lorsque la surface est convexe-cocompacte, i.e. quand l'ensemble non-errant du flot géodésique est compact, celui-ci est un flot Axiome A ; l'unique ergodicité du flot horocyclique (en restriction à son ensemble non-errant) est alors un cas particulier du résultat de Bowen et Marcus [Bow-M] pour de tels flots. Signalons que c'est dans le cas très particulier d'une surface hyperbolique convexe-cocompacte d'exposant critique supérieur à  $1/2$  que Burger [Bu] obtint, par des méthodes d'analyse, l'équidistribution « en moyenne de Césaro » des orbites du flot horocyclique. Mais en dehors de ce résultat, la question de l'équidistribution des orbites du flot horocyclique en volume infini n'avait pas été résolue jusqu'ici.

Dans cette thèse, nous travaillons dans le cadre plus général de variétés de dimension quelconque, à courbure négative variable, et géométriquement finies, sur lesquelles nous démontrons des propriétés de type unique ergodicité et équidistribution.

En dimension quelconque, et en courbure variable, du point de vue de la théorie ergodique, la première difficulté vient du fait qu'on ne dispose plus du flot horocyclique. La dynamique du flot est remplacée par celle des applications d'holonomie du feuilletage, homéomorphismes qui « suivent les feuilles » entre deux transversales au feuilletage. La notion de mesure invariante par le flot horocyclique est remplacée par celle de *mesure transverse invariante par holonomie*, c'est-à-dire une collection de mesures  $\nu = \{\nu_T\}$  sur toutes les transversales  $T$  au feuilletage, invariantes par les applications d'holonomie. On parle alors d'unique ergodicité lorsqu'il existe une unique mesure transverse invariante, et

par exemple, une telle propriété fut établie pour tous les feuilletages horosphériques des variétés compactes (ou convexes-cocompactes) par Bowen et Marcus [Bow-M]. L'étude de propriétés d'équidistribution des horosphères nécessite elle la définition de moyennes sur les horosphères ; nous reviendrons sur cette question dans la dernière partie de cette introduction.

Dans notre cadre général, une autre difficulté vient du fait que certaines méthodes, classiques dans l'étude des propriétés ergodiques du flot horocyclique rappelées plus haut, ne s'appliquent plus. En effet, l'ensemble non-errant du flot géodésique n'est plus nécessairement compact, donc le formalisme thermodynamique, utilisé par exemple dans [Bow-M], ne s'applique plus. De plus, les outils de l'analyse et de l'algèbre, très utiles sur les surfaces hyperboliques, ne fonctionnent plus en courbure variable.

Nous privilégions donc ici une approche géométrique de ces problèmes, approche qui présente une plus grande souplesse et permet de s'adapter à diverses situations ; leur utilisation dans l'étude du flot géodésique remonte à Patterson [Pa] et Sullivan [S1] [S2] en courbure constante, puis Kaimanovich [K1] [K2], Ledrappier [L], Yue [Y] en courbure variable. Dans [K3] [K4], Kaimanovich aborde l'étude géométrique du feuilletage horosphérique.

Dans [Ro1], Roblin développe des méthodes valables dans la généralité des espaces  $CAT(-1)$  qui lui permettent d'obtenir un grand nombre de résultats. Parmi eux, citons ici la classification des mesures transverses invariantes par holonomie et ergodiques pour le feuilletage horosphérique d'une variété géométriquement finie dont la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  sur  $T^1M$  est finie. Il aborde également la question de l'équidistribution des horosphères, dans le cas des variétés compactes ou convexes-cocompactes.

Nous généralisons ce type de résultats de deux façons. D'abord, nous nous intéressons aux mesures transverses qui sont seulement quasi-invariantes par holonomie, et nous démontrons en particulier un résultat de classification de telles mesures sur les variétés géométriquement finies.

D'autre part, nous étudions l'équidistribution des horosphères. Cette question a été très peu étudiée en dehors des résultats mentionnés au début de cette introduction. Nous obtenons ici plusieurs résultats d'équidistribution, dont celle des orbites du flot horocyclique d'une surface hyperbolique géométriquement finie. Nos résultats sont obtenus dans le cadre des variétés riemanniennes à courbure négative variable, mais il faut mentionner qu'ils sont nouveaux y compris dans la situation la plus simple des surfaces hyperboliques.

Cette thèse comporte trois parties. La première contient essentiellement des préliminaires, la deuxième traite du cas des variétés compactes ou convexes-cocompactes, et la troisième des variétés géométriquement finies. Ces parties sont précédées d'introductions détaillées auxquelles nous renvoyons le lecteur. Nous présentons ci-dessous un bref panorama des résultats obtenus, dans un ordre un peu différent de celui de la thèse. Chacun de nos résultats est précédé d'un « • ».

## Résultats de type unique ergodicité

Introduisons d'abord la notion de mesure transverse quasi-invariante par holonomie. Un *cocycle* est une application à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et définie sur le groupoïde d'holonomie du feuilletage, qui satisfait une relation de cocycle. Pour simplifier, dans cette introduction, nous nous limiterons au cas particulier suivant : un cocycle sur le feuilletage est une applica-

tion  $\Delta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et définie sur l'ensemble des couples de points d'une même feuille, qui satisfait la relation  $\Delta(x, y)\Delta(y, z) = \Delta(x, z)$ . Une *mesure transverse quasi-invariante* pour le cocycle  $\Delta$  est une mesure transverse  $\nu = \{\nu_T\}$  telle que pour toute application d'holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$  entre deux transversales  $T$  et  $T'$ , on ait

$$\frac{d\nu_{T'}}{d\zeta_*\nu_T}(\zeta(x)) = \Delta(x, \zeta(x)), \quad \nu_T - p.p.$$

(On retrouve la définition d'une mesure transverse invariante lorsque  $\Delta \equiv 1$ .)

Toute fonction höldérienne  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  donne naissance de manière naturelle à un cocycle höldérien  $\Delta^f$ , et une mesure transverse  $\mu^f = \{\mu_T^f\}$  quasi-invariante pour  $\Delta^f$ . Babillot et Ledrappier [Ba-L] ont montré un résultat de type unique ergodicité lorsque la variété est compacte ou convexe-cocompacte : à une constante multiplicative près, la mesure  $\mu^f = \{\mu_T^f\}$  est l'unique mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta^f$ .

- En reprenant l'approche de Roblin, nous proposons ici une démonstration géométrique de ce résultat (théorème 5.2.7). La méthode s'étend aux variétés géométriquement finies, sur lesquelles nous classifions les mesures transverses quasi-invariantes pour le cocycle  $\Delta^f$  (théorème 8.2.2) ; plus précisément, à condition que la mesure de Gibbs  $m^f$  associée à  $f$  soit finie, nous montrons qu'il existe une unique (à une constante multiplicative près) mesure transverse quasi-invariante ergodique pour le cocycle  $\Delta^f$ , en dehors de celles induites par les feuilles fermées du feuilletage.

- Le théorème 5.2.7 nous permet de donner une réponse partielle à la question suivante, posée par Babillot et Ledrappier [Ba-L] : si  $\overline{M}$  est un revêtement régulier de  $M$ , quelles sont les mesures transverses invariantes et ergodiques pour le feuilletage horosphérique de  $T^1\overline{M}$ ? Nous montrons (théorème 5.5.1) que celles qui se projettent sur  $T^1M$  en des mesures transverses quasi-invariantes par holonomie sont nécessairement les relevées de mesures  $\mu^\alpha = \{\mu_T^\alpha\}$  du type ci-dessus, où  $\alpha$  est une 1-forme de  $M$  qui s'annule sur  $\overline{\Gamma} = \pi_1(\overline{M})$ .

## Résultats d'équidistribution

Notre approche géométrique nous permet aussi d'obtenir des résultats d'équidistribution des horosphères dans un cadre général.

Remarquons d'abord que lorsque les feuilles sont de dimension strictement supérieure à 1, l'absence de flot rend la définition de moyennes sur les feuilles plus délicate. Pour cela, on considère sur chacune de ces feuilles  $H^+$  une mesure  $\alpha_{H^+}$  et une famille croissante de boules  $B^+(u, r)$  (pour une distance adaptée sur l'horosphère), et on définit la moyenne d'une fonction  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$M_{r,u}^{\Delta, \alpha}(\psi) := \frac{\int_{B^+(u,r)} \psi(v) \Delta(v, u) d\alpha_{H^+}(v)}{\int_{B^+(u,r)} \Delta(v, u) d\alpha_{H^+}(v)}.$$

Ces moyennes dépendent du cocycle  $\Delta$ , de la suite  $(B^+(u, r))$  de boules sur lesquelles on intègre et de la famille de mesures  $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$ . (On pourra aussi considérer des moyennes plus générales sur une suite croissante d'ensembles  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de l'horosphère  $H^+(u)$ .)

Roblin a étudié de telles moyennes dans le cas particulier où  $\Delta \equiv 1$  et où cette famille de mesures est la famille  $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$  des mesures conditionnelles de la mesure de Patterson-Sullivan. Si la variété  $M$  est compacte ou convexe-cocompacte, il introduit une hypothèse technique que nous noterons (H), portant sur la mesure  $\mu_{H^+}^{ps}$  du bord des boules horosphériques, sous laquelle il montre que ces moyennes  $(M_{r,u}^{\mu^{ps}})_{r>0}$  s'équidistribuent suivant la mesure de Patterson-Sullivan. Cette hypothèse est toujours satisfaite sur

les surfaces et en courbure constante.

Nous généralisons ce résultat d'équidistribution dans deux situations différentes.

- D'abord, lorsque  $M$  est compacte ou convexe-cocompacte, dans le cas où la famille des mesures considérées sur les feuilles est la famille  $\{\mu_{H^+}^f\}$  des mesures conditionnelles de la mesure de Gibbs  $m^f$ , sous une hypothèse technique analogue à (H), nous montrons (théorème 5.4.1) que les mesures  $\left(M_{r,u}^{\Delta^f, \mu_{H^+}^f}\right)_{r>0}$  s'équidistribuent suivant  $m^f$ .

Sans cette hypothèse, nous obtenons quand même une convergence en moyenne de Césaro de ces mesures vers  $m^f$  (proposition 5.4.5).

- Plus généralement, nous introduisons une condition de type Følner portant sur les mesures  $M_{r,u}^{\Delta, \alpha}$  qui nous permet de montrer (dans le cadre d'un feuilletage abstrait sur une variété compacte) que les valeurs d'adhérence des mesures  $M_{r,u}^{\Delta, \alpha}$  sont nécessairement le produit  $\nu \circ \alpha$  d'une mesure transverse  $\nu$  quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta$  par la mesure  $\alpha$  (théorème 4.2.1).

Grâce au théorème 5.2.7, nous en déduisons la convergence de sous-suites  $(M_{r_n, u}^{\Delta^f, \alpha})_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\mu^f \circ \alpha$  lorsque la condition de Følner est vérifiée (théorème 5.4.6) et nous donnons des exemples concrets où c'est le cas.

Le cas des variétés géométriquement finies est plus délicat. Nous nous limitons dans ce cas à l'étude des moyennes  $M_{r,u}^\alpha(\psi) := M_{r,u}^{1, \alpha}(\psi)$  associées au cocycle trivial  $\Delta \equiv 1$ .

- Le problème majeur est celui de la non-divergence des horosphères, ou plus précisément de la *tension* de la famille de mesures  $(M_{r,u}^\alpha)$ . En effet, comme  $T^1M$  n'est pas compact, elles pourraient tendre faiblement vers 0 quand  $r \rightarrow +\infty$ . Lorsque  $\alpha = \mu^{ps}$ , nous faisons une hypothèse notée (\*\*) (satisfaite en particulier quand les cusps de  $M$  sont localement symétriques, mais également dans des exemples non symétriques explicites) qui nous permet de contrôler la géométrie des cusps et de démontrer que la suite  $(M_{r,u}^{\mu^{ps}})_{r>0}$  est tendue : toutes ses valeurs d'adhérence sont des probabilités (théorème 6.4.2).

- Nous déduisons du résultat ci-dessus l'équidistribution de sous-suites  $(M_{r_n, u}^{\mu^{ps}})_{n \in \mathbb{N}}$  vers la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  (théorème 8.1.1), lorsqu'une condition de type Følner est vérifiée. Cette condition contrôle la croissance du bord des boules horosphériques  $B^+(u, r_n)$  ; c'est l'analogue de celle de Roblin sur la mesure du bord des boules horosphériques.

Sur les surfaces, cette condition de Følner est satisfaite, et nous en déduisons la convergence de  $(M_{r,u}^{\mu^{ps}})_{r>0}$  vers  $m^{ps}$  (théorème 7.3.1).

- En corollaire des résultats précédents, dans le cas des surfaces, nous obtenons un théorème d'équidistribution des mesures  $(M_{r,u}^\alpha)_{r>0}$  vers la mesure produit  $\mu \circ \alpha$  (théorème 7.4.1). Comme la mesure  $\mu \circ \alpha$  est en général infinie, nous obtenons un théorème de type quotient (à comparer avec l'énoncé du théorème ergodique quotient de Hopf).

Dans le cas particulier d'une surface hyperbolique  $S$ , lorsque  $\alpha = ds$  est la mesure d'intégration le long des orbites du flot horocyclique, ce résultat prend la forme suivante (théorème 7.5.4). Notons  $m$  la mesure produit  $\mu \circ ds$ . Soient  $u \in T^1S$  un vecteur non périodique et non errant pour le flot horocyclique, et  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions continues à support compact de  $T^1S$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $\int_{T^1S} \varphi dm \neq 0$ . Alors on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-r}^r \psi \circ h^s(u) ds}{\int_{-r}^r \varphi \circ h^s(u) ds} = \frac{\int_{T^1S} \psi dm}{\int_{T^1S} \varphi dm}.$$

# Première Partie

## Premières propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique

Nous rappelons ici des résultats connus pour l'essentiel.

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires utiles à la lecture de la thèse. Nous y précisons un certain nombre de résultats sur les propriétés du flot géodésique et du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative, en incluant des définitions générales sur les feuilletages et la notion de groupoïde d'holonomie. Nous introduisons aussi la notion de pression d'une application, et nous rappelons ses propriétés principales.

Dans le deuxième chapitre, nous détaillons une construction géométrique des mesures d'équilibre pour le flot géodésique sur le fibré tangent d'une variété compacte ou convexe-cocompacte à courbure négative. Cette construction est essentiellement due à Ledrappier, et l'extension faite ici dans le cadre des variétés convexes-cocompactes ne pose pas de problème particulier.

Dans le chapitre 3, nous considérons une surface hyperbolique compacte et, en appliquant un résultat de Babillot [Ba2] sur l'équidistribution des horocycles « poussés » par le flot géodésique, nous proposons une démonstration des résultats de Furstenberg concernant l'unique ergodicité du flot horocyclique et l'équidistribution de ses orbites suivant la mesure de Liouville. Nous soulignons les points difficiles dans les généralisations envisagées dans les parties II et III de ces résultats.





# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Variétés à courbure négative

Dans toute cette thèse,  $M$  désigne une variété riemannienne complète  $C^\infty$  de dimension  $n$  à courbure négative pincée, i.e. dont toutes les courbures sectionnelles sont comprises entre deux constantes  $-b^2$  et  $-a^2$ , avec  $0 < a \leq b < +\infty$ . Nous normaliserons la courbure en supposant que  $a = 1$ .

#### 1.1.1 Variétés de Hadamard

Pour ce paragraphe, nous renvoyons le lecteur à [B-G-S] ou [B].

Le revêtement universel  $\widetilde{M}$  de  $M$  est une *variété de Hadamard*, i.e. une variété riemannienne complète simplement connexe à courbures sectionnelles négatives ou nulles. En particulier, on peut définir son *bord à l'infini*  $\partial\widetilde{M}$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes ; il est homéomorphe à une sphère de dimension  $n - 1$ , et permet de compactifier  $\widetilde{M}$  en  $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$ . Fixons pour toute la suite un point de référence  $o \in \widetilde{M}$ .

La variété  $M$  s'écrit comme le quotient  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  de  $\widetilde{M}$  par son groupe fondamental  $\Gamma = \pi_1(M)$ . Notons  $p_\Gamma : \widetilde{M} \rightarrow M$  la projection associée,  $T^1\widetilde{M}$  et  $T^1M$  les fibrés unitaires tangents respectifs de  $\widetilde{M}$  et  $M$ ,  $\tilde{\pi} : T^1\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  et  $\pi : T^1M \rightarrow M$  les projections canoniques associées. Nous noterons indifféremment  $d$  la distance riemannienne sur  $M$  ou sur  $\widetilde{M}$ .

Si  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $(x, y) \in \widetilde{M}^2$ , on note  $(c(t))_{t \geq 0}$  la paramétrisation à vitesse 1 du rayon  $[x\xi]$ . Le *cocycle de Busemann* est alors défini par

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, c(t)) - d(y, c(t)) = "d(x, \xi) - d(y, \xi)".$$

Remarquons que la limite ci-dessus existe, car  $M$  est à courbure négative. La fonction  $\beta$  vérifie la relation de cocycle  $\beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z) = \beta_\xi(x, z)$ . De plus, elle est invariante sous l'action de toute isométrie  $\gamma$  de  $\widetilde{M}$ , au sens où  $\beta_{\gamma\xi}(\gamma x, \gamma y) = \beta_\xi(x, y)$ . C'est une fonction continue sur  $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$ , et lorsque  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $x \in \widetilde{M}$  sont fixés, la fonction  $y \rightarrow \beta_\xi(x, y)$  est même de classe  $C^2$  [H-I].

Une *horosphère* centrée en  $\xi$  est une ligne de niveau d'une application  $y \rightarrow \beta_\xi(x, y)$ . Une *horoboule* centrée en  $\xi$  est un ensemble de la forme  $\{y \in \widetilde{M}, \beta_\xi(x, y) \geq c\}$ , où  $x \in \widetilde{M}$  et  $c \in \mathbb{R}$  sont fixés.

La fonction de Busemann et le bord à l'infini  $\partial\widetilde{M}$  permettent de paramétrer de façon très naturelle le fibré unitaire tangent  $T^1\widetilde{M}$ . Tout vecteur  $v$  de  $T^1\widetilde{M}$  détermine une unique géodésique orientée, dont les extrémités dans  $\partial\widetilde{M}$  sont notées  $v^-$  et  $v^+$ . Notons

$$\partial^2\widetilde{M} := \partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M} \setminus \text{diagonale}$$

l'ensemble de ces géodésiques orientées. La courbure de  $\widetilde{M}$  étant strictement négative, l'application

$$v \in T^1\widetilde{M} \mapsto (v^-, v^+, \beta_{v^-}(\tilde{\pi}(v), o))$$

est un homéomorphisme de  $T^1\widetilde{M}$  dans  $\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ . Dans ces coordonnées, l'action d'une isométrie  $\gamma$  s'écrit

$$\gamma.(v^-, v^+, s) = (\gamma.v^-, \gamma.v^+, s + \beta_{v^-}(o, \gamma^{-1}o)).$$

Le fibré tangent  $T^1M$  est homéomorphe à  $(\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R})/\Gamma$ .

Une isométrie  $\gamma$  de  $\widetilde{M}$  est dite *hyperbolique* si elle fixe exactement deux points sur le bord  $\partial\widetilde{M}$ ; elle agit alors par translation sur son *axe*, i.e. la géodésique joignant ses deux points fixes. L'isométrie  $\gamma$  est dite *parabolique* si elle fixe exactement un point sur le bord; elle stabilise alors toutes les horoboules centrées en son point fixe. Sinon,  $\gamma$  est dite elliptique (voir [Eb-O] pour plus de détails).

Puisque  $M$  est une variété, le groupe  $\Gamma$  est un sous-groupe discret et sans torsion d'isométries de  $\widetilde{M}$ . En particulier,  $\Gamma$  ne contient que des isométries hyperboliques ou paraboliques, et toute orbite de  $\Gamma$  est discrète dans  $\widetilde{M}$ . L'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  de  $\Gamma$  est défini comme  $\Lambda_\Gamma := \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o$ . On peut montrer que c'est le plus petit fermé  $\Gamma$ -invariant de  $\partial\widetilde{M}$ . Nous noterons

$$\Lambda_\Gamma^2 := \Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma \setminus \text{diagonale}.$$

Le groupe  $\Gamma$  est dit *non-élémentaire* si  $\#\Lambda_\Gamma = +\infty$ .

Un point  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est *radial* s'il existe une suite  $(\gamma_n o)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\Gamma.o$  convergeant vers  $\xi$  et restant à distance bornée du rayon géodésique  $[o\xi]$ . Nous noterons  $\Lambda_{\text{rad}}$  l'ensemble des points radiaux de  $\Lambda_\Gamma$ .

Un point  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est *parabolique* si c'est le point fixe d'une isométrie parabolique  $p$  de  $\Gamma$ . On dit que c'est un point *parabolique borné* si de plus son stabilisateur dans  $\Gamma$  agit de manière cocompacte sur  $\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi\}$ . Notons respectivement  $\Lambda_p$  et  $\Lambda_{pb}$  les ensembles des points paraboliques et paraboliques bornés de  $\Lambda_\Gamma$ .

On a toujours

$$\Lambda_p \cap \Lambda_{\text{rad}} = \emptyset.$$

En effet, soit  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  un point fixé par un élément parabolique  $p$  de  $\Gamma$ , et supposons qu'il existe une suite  $(\gamma_n o)$  de l'orbite de  $o$  formée de points deux à deux distincts et convergeant radialement vers  $\xi$ . Alors la suite  $(\gamma_n^{-1} p \gamma_n o)$  est une suite infinie de  $\Gamma o$  qui reste à distance bornée de  $o$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $\Gamma$  est discret.

Introduisons l'enveloppe convexe  $\widetilde{C}(\Gamma)$  de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  dans  $\widetilde{M}$ . C'est le plus petit fermé convexe de  $\widetilde{M}$  dont l'adhérence dans  $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$  contient  $\Lambda_\Gamma$ . L'ensemble  $\widetilde{C}(\Gamma)$  est  $\Gamma$ -invariant, et le *coeur de Nielsen* de  $M$  est l'ensemble  $N(\Gamma) = \widetilde{C}(\Gamma)/\Gamma$ .

Quand  $M$  est compacte, on a  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} = \partial\widetilde{M}$ , et  $N(\Gamma) = M$ . Lorsque  $N(\Gamma)$  est compact et  $M$  est non compacte, on dit que  $M$  est *convexe-cocompacte*; dans ce cas, on a encore  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}}$ . Enfin,  $M$  est dite *géométriquement finie* si  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \sqcup \Lambda_{pb}$ . Si  $M$  est de volume fini, elle est géométriquement finie, et on a  $N(\Gamma) = M$ , et  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \sqcup \Lambda_{pb} = \partial\widetilde{M}$ .

### 1.1.2 Flot géodésique

Nous renvoyons le lecteur à [Eb1], mais aussi [Eb2], [Eb3], [Ka-H] et [Kl].

Le flot géodésique  $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $M$  agit sur  $T^1M$  de la manière suivante. Si  $v$  est un vecteur, notons  $(c_v(t))_{t \in \mathbb{R}}$  le paramétrage de l'unique géodésique telle que  $\dot{c}_v(0) = v$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on associe alors à  $v$  le vecteur  $g^t(v) = \dot{c}_v(t)$  tangent à l'instant  $t$  à la géodésique  $(c_v(t))$ . C'est un flot différentiable, dont les propriétés de base sont exposées par exemple dans [Kl].

Le flot géodésique  $\tilde{g} = (\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\widetilde{M}$  est défini de la même manière. Dans l'identification  $T^1\widetilde{M} \simeq \partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , ce flot agit par translation sur la troisième coordonnée :

$$\tilde{g}^t(v^-, v^+, s) = (v^-, v^+, s + t).$$

Les actions de  $(\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$  et de  $\Gamma$  commutent ; en particulier, l'action quotient de  $(\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$  par  $\Gamma$  est celle de  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Le résultat fondamental ci-dessous est dû à Anosov [A]. On trouvera une démonstration dans [Kl].

**Théorème 1.1.1** *Soit  $M$  une variété riemannienne à courbure négative pincée. Alors le flot géodésique agissant sur  $T^1M$  est hyperbolique, i.e. il satisfait les propriétés ci-dessous. Le fibré tangent  $TT^1M$  de  $T^1M$  se décompose en la somme de Whitney*

$$TT^1M = E \oplus E^s \oplus E^u,$$

où  $E$ ,  $E^s$  et  $E^u$  sont trois distributions invariantes par la différentielle du flot qui vérifient les propriétés suivantes.

1.  $E$  est la direction tangente au flot.
2. Il existe des constantes  $c > 0$  et  $\lambda > 0$ , telles que
  - $\|D_v g^t(V)\| \leq ce^{-\lambda t} \|V\|$  pour tout  $V \in E_v^s \subset T_v T^1M$  et  $t \geq 0$
  - $\|D_v g^{-t}(U)\| \leq ce^{-\lambda t} \|U\|$  pour tout  $U \in E_v^u \subset T_v T^1M$  et  $t \geq 0$

Un *flot d'Anosov* est un flot différentiable hyperbolique sur une variété compacte. En particulier, si  $M$  est compacte à courbure négative, alors  $T^1M$  est aussi compact et le flot géodésique est un flot d'Anosov.

Lorsque  $M$  n'est pas compacte, la généralisation des flots d'Anosov est la notion de flot Axiome A introduite par Smale [Sm], que nous allons définir ci-dessous. L'*ensemble non errant*  $\Omega$  du flot géodésique est défini par

$$\Omega = \{v \in T^1M \mid \cap_{T \in \mathbb{R}^+} \cup_{|s| \geq T} g^{-s}(U) \cap U \neq \emptyset \text{ pour tout ouvert } U \in T^1M \text{ contenant } v\}.$$

Cet ensemble s'identifie avec  $(\Lambda_1^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$  (Eberlein [Eb1]). On appelle *ensemble hyperbolique* un fermé invariant par le flot sur lequel le flot est hyperbolique. (Notons qu'un tel ensemble n'est pas nécessairement différentiable ; la définition signifie qu'il est inclus dans un ensemble différentiable en chaque point duquel le flot est hyperbolique.) Un flot  $\psi = (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  sur une variété  $N$  est un *flot Axiome A* si son ensemble non-errant est compact et se décompose en une union disjointe  $\Omega = F \sqcup X$ , où  $F$ , l'ensemble des points fixes de  $\psi$ , est fini, et  $X$ , l'adhérence des orbites périodiques de  $\psi$ , est hyperbolique.

Dans le cas du flot géodésique d'une variété convexe-cocompacte, on a  $F = \emptyset$ , et  $\Omega$  est compact et hyperbolique. Enfin, la proposition 1.1.2 ci-dessous assure que  $\Omega$  coïncide avec l'adhérence des orbites périodiques du flot géodésique, et donc que le flot est bien Axiome A.

Rappelons qu'une *géodésique périodique*  $\bar{\gamma}$  de  $T^1M$  est une orbite périodique du flot géodésique. Sa projection sur  $M$  définit une *géodésique fermée*, i.e. l'image d'une courbe lisse géodésique  $c : [0, T] \rightarrow M$  paramétrée par longueur d'arc, avec  $\dot{c}(0) = \dot{c}(T)$ , où  $T = l(\bar{\gamma})$  est la période de  $\bar{\gamma}$ . Chaque géodésique fermée  $\bar{\gamma}$  est la projection sur  $M$  de l'axe d'une isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $\Gamma$ . L'ensemble des géodésiques périodiques est donc en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison des éléments hyperboliques de  $\Gamma$ .

**Proposition 1.1.2 (Eberlein [Eb1])** *Soit  $M$  une variété à courbure négative pincée. Alors l'ensemble des géodésiques périodiques est dense dans  $\Omega$ . De plus, le flot géodésique est topologiquement transitif, i.e. il existe une géodésique dense dans  $\Omega$ .*

Le flot géodésique est dit *topologiquement mélangeant* si pour tous ouverts  $U$  et  $V$  de  $\Omega$ , on a  $g^t(U) \cap V \neq \emptyset$  pour  $t$  assez grand. On a le résultat suivant :

**Théorème 1.1.3 (Dal'bo [D])** *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété à courbure négative pincée. Le flot géodésique de  $M$  est topologiquement mélangeant si et seulement si le spectre des longueurs de  $\Gamma$  est non arithmétique, i.e. si les longueurs des géodésiques périodiques de  $M$  engendrent un sous-groupe dense dans  $\mathbb{R}$ .*

Les deux conditions ci-dessus sont réalisées dans un certain nombre de cas (voir Dal'bo [D] pour des références précises).

**Théorème 1.1.4** *Avec les mêmes notations, si  $\Gamma$  est non-élémentaire, la propriété de non-arithméticité du spectre des longueurs est vérifiée dans les cas suivants :*

- $M$  est compacte.
- $M$  est une surface.
- $M$  est à courbure constante.
- $\Gamma$  contient des éléments paraboliques.

Dans toute cette thèse, le flot géodésique sera supposé topologiquement mélangeant, et il vérifiera donc la propriété dite de *spécification* (Bowen [Bow1]). Nous n'aurons besoin que de la version très affaiblie ci-dessous (voir aussi la figure 1.1).

**Théorème 1.1.5 (Bowen)** *Soit  $M$  une variété à courbure négative pincée dont le flot géodésique est topologiquement mélangeant. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon$ , telle que pour tout vecteur  $v \in \Omega$ , et tout  $T > 0$ , il existe un vecteur  $w \in \Omega$  qui est  $g$ -périodique de période au plus  $T + C_\varepsilon$ , et tel que pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$d(g^t v, g^t w) < \varepsilon.$$

En fait, la propriété de spécification « forte » permet de pister par une géodésique périodique un nombre fini arbitraire de bouts d'orbites.

Le flot géodésique est *expansif*, i.e. il existe  $\delta > 0$ , tel que si  $(v, w) \in T^1M^2$  vérifient  $d(g^t v, g^t w) < \delta$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors il existe  $\tau \in ]-\delta, \delta[$  tel que  $w = g^\tau v$ .

Pour finir ce paragraphe, mentionnons qu'à toute géodésique périodique, on associe de façon naturelle une mesure de probabilité  $(g^t)$ -invariante de la manière suivante. Si  $\bar{\gamma}$  est une géodésique fermée de  $M$  de longueur  $l(\bar{\gamma})$  paramétrée par  $c : [0, l(\bar{\gamma})] \rightarrow M$ , on note  $\mu_{\bar{\gamma}}$  la probabilité sur  $T^1M$  définie pour toute fonction mesurable  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\mu_{\bar{\gamma}}(f) := \frac{1}{l(\bar{\gamma})} \int_{\bar{\gamma}} f = \frac{1}{l(\bar{\gamma})} \int_0^{l(\bar{\gamma})} f(\dot{c}(t)) dt.$$

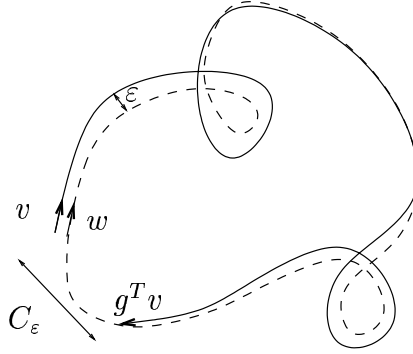


FIG. 1.1 – Pistage

### 1.1.3 Exposant critique et entropie

L'*exposant critique* du groupe  $\Gamma$  est défini comme

$$\delta_\Gamma = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \# \{ \gamma \in \Gamma \mid d(o, \gamma o) \leq T \}.$$

On a  $\delta_\Gamma \geq 0$ , et le fait que la courbure soit minorée implique  $\delta_\Gamma < +\infty$ ; de plus, lorsque  $\Gamma$  est non élémentaire, un résultat de Patterson [Pa] permet de montrer qu'il est strictement positif. Dans ce cas, la limite supérieure ci-dessus est en fait une limite (Roblin [Ro3]).

Rappelons brièvement la définition de l'entropie topologique  $h_{top}(T)$  d'une transformation continue  $T$  sur un espace compact  $X$ .

Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , notons  $N(\mathcal{U})$  le cardinal minimal d'un sous-recouvrement fini de  $X$ . Le *raffinement*  $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$  de deux recouvrements est le recouvrement formé des ouverts  $U \cap V$ , avec  $U \in \mathcal{U}$  et  $V \in \mathcal{V}$ . On pose  $T^{-1}\mathcal{U} = \{T^{-1}U, U \in \mathcal{U}\}$  et pour tout  $n \geq 1$ , on note

$$N_n(T, \mathcal{U}) := N(\mathcal{U} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{U}).$$

L'entropie de  $T$  pour le recouvrement  $\mathcal{U}$  est donnée par

$$h_{top}(T, \mathcal{U}) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_n(T, \mathcal{U}),$$

et l'entropie topologique de  $T$  est définie par

$$h_{top}(T) = \sup \{ h_{top}(f, \mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \text{ recouvrement ouvert de } X \}.$$

Lorsque  $X$  n'est plus compact, mais localement compact à base dénombrable d'ouverts, la définition initiale de l'entropie, due à Bowen [Bow3], utilise la notion d'ensemble  $(\varepsilon, n)$ -séparé et nécessite donc de fixer une distance sur  $X$ . Dans cette définition, l'entropie dépend de la métrique  $d$ , on la note  $h_d$ .

Le principe variationnel obtenu par Handel et Kitchens [H-K] suggère alors de définir l'entropie comme l'infimum des quantités  $h_d$  lorsque  $d$  varie. On peut éviter le détour par  $h_d$  grâce à la définition suivante, proposée par Peigné (communication orale).

Si  $K$  est un compact fixé, considérons uniquement des recouvrements de  $X$  contenant l'ouvert  $K^c$ . Nous pouvons définir comme ci-dessus des quantités  $h_{top}(T, \mathcal{U}, K)$  et

$h_{top}(T, K)$  qui dépendent de  $K$ . L'entropie topologique de  $T$  est alors définie comme le sup sur tous les compacts  $K$  possibles de  $h_{top}(T, K)$ .

L'entropie topologique d'une transformation  $T$  vérifie la propriété d'homogénéité  $h_{top}(T^n) = |n|h_{top}(T)$ . Il est alors naturel de définir l'entropie topologique du flot géodésique par

$$h_{top}(g) := h_{top}(g^1).$$

Le résultat suivant a été prouvé par Sullivan dans le cas des variétés convexes-cocompactes, et par Otal et Peigné dans le cas général.

**Théorème 1.1.6 (Sullivan [S2], Otal-Peigné [O-Pe])** *Soit  $M$  une variété à courbure négative pincée. Alors*

$$\delta_\Gamma = h_{top}(g).$$

Nous donnons une preuve élémentaire de ce résultat lorsque  $M$  est compacte.

**Démonstration :** Introduisons l'entropie volumique de  $\widetilde{M}$  :

$$h_{vol}(\widetilde{M}) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \text{Vol } B(o, R).$$

L'intérêt de l'entropie volumique est qu'elle est plus souvent accessible au calcul ; de plus, la formule de Manning [Ma] assure que  $h_{vol}(\widetilde{M}) = h_{top}(g)$  lorsque  $M$  est une variété compacte à courbure négative, ce qui permet de calculer l'entropie topologique.

Il existe une constante  $\rho = \rho(o) > 0$  telle que  $\inf_{\gamma \in \Gamma} d(o, \gamma o) = 2\rho > 0$ . Pour tout  $R > 0$ , on a donc la minoration

$$\text{Vol } B(o, R + \rho) \geq \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d(o, \gamma o) \leq R}} \text{Vol } B(\gamma o, \rho) = \text{Vol } B(o, \rho) \# \{\gamma \in \Gamma, d(o, \gamma o) \leq R\}.$$

On obtient  $\delta_\Gamma \leq h_{vol}(\widetilde{M})$ .

Réciproquement, par compacité de  $M$ , il existe  $R_0 > 0$  tel que  $p_\Gamma(B(o, R_0)) = M$ . On en déduit pour tout  $R > 0$  la majoration

$$\text{Vol } B(o, R) \leq \text{Vol } B(o, R_0) \# \{\gamma \in \Gamma, d(o, \gamma o) \leq R\}.$$

Ceci donne  $\delta_\Gamma = h_{vol}(\widetilde{M})$ . □

**Remarque 1.1.7** La majoration  $\delta_\Gamma \leq h_{vol}(\widetilde{M})$  prouvée ci-dessus est générale, et permet de voir que  $\delta_\Gamma$  est fini dès que la courbure de  $\widetilde{M}$  est minorée. En effet, dans ce cas, l'entropie volumique de  $\widetilde{M}$  est finie.

## 1.2 Feuilletages

Dans ce paragraphe, nous commençons par des définitions abstraites, et l'exemple du feuilletage horosphérique sera traité au paragraphe 1.2.4.

### 1.2.1 Définitions

Nous renvoyons pour ce paragraphe aux références [C-C], [Co], [R-S], [Go].

Un feuilletage est un « empilement de feuilles », i.e. la donnée sur une variété, au moins localement, d'une direction privilégiée qui est la direction des feuilles. L'exemple le plus simple de feuilletage est  $\mathbb{R}^{q+p}$ , où  $\mathbb{R}^p$  est muni de sa topologie usuelle, et  $\mathbb{R}^q$  de la topologie discrète.

**Définition 1.2.1** Soit  $M$  un espace topologique (connexe). Une variété feuilletée  $(M, \mathcal{F})$  ou feuilletage de classe  $C^{k,0}$ , de dimension  $p \geq 0$  et de codimension  $q \geq 0$  est la donnée d'un atlas sur  $M$  formé de cartes (bijectives)  $\varphi_i : B_i \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$  vérifiant les propriétés suivantes :

- les  $B_i$  sont des ouverts de  $M$ ,
- les changements de cartes  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sont des homéomorphismes pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^{q+p}$ ,
- ces changements de cartes sont des difféomorphismes de classe  $C^k$  dans la direction de  $\mathbb{R}^p$  pour la topologie produit sur  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ , où  $\mathbb{R}^p$  est muni de la topologie usuelle, et  $\mathbb{R}^q$  de la topologie discrète.

En particulier,  $M$  est alors munie d'une structure de variété (connexe) de dimension  $n = p + q$  et d'une structure de variété de dimension  $p$ , dont les composantes connexes sont appelées les feuilles du feuilletage. On réserve la notation  $M$  pour la variété de dimension  $n$ , et  $\mathcal{F}$  pour celle de dimension  $p$ .

Plus généralement, cette définition s'étend à des espaces moins réguliers que des variétés de la manière suivante. Soient  $M$  et  $X$  des espaces topologiques « raisonnables », par exemple des espaces métriques (localement) compacts. Une *lamination*, ou *feuilletage abstrait*  $(M, \mathcal{F})$  de dimension  $p$  est la donnée d'un atlas sur  $M$  formé de cartes  $\varphi : B \rightarrow X \times \mathbb{R}^p$  telles que les changements de cartes sont des homéomorphismes d'une part pour la topologie produit usuelle de  $X \times \mathbb{R}^p$ , et d'autre part la topologie produit de  $X \times \mathbb{R}^p$  où  $X$  est muni de la topologie discrète. La régularité des changements de cartes, et donc du feuilletage, s'étudie en considérant leurs dérivées « dans la direction de  $\mathbb{R}^p$  ». À part dans le chapitre 4, nous ne considérerons désormais que des feuilletages de variétés.

Si  $\varphi : B \subset M \rightarrow \mathbb{R}^{q+p}$  est une carte du feuilletage, l'ouvert  $B$  est appelé une *boîte*, un ensemble  $P$  de la forme  $\varphi^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^p)$  (respectivement  $T = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^q \times \{y\})$ ) est appelé une *plaque* (resp. une *transversale*) de la boîte  $B$ . Par abus de notation, nous écrirons alors  $B = T \times P$ . Notons que les plaques de  $B$  sont exactement les feuilles du feuilletage (trivial) induit par  $\mathcal{F}$  sur  $B$ . Dans la plupart des cas, nous ne considérerons que des boîtes, plaques et transversales relativement compactes.

Si  $B = T \times P$  est une boîte, l'*application distinguée* associée à  $T$  est la submersion canonique de  $B$  dans  $T = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^q \times \{y_0\})$  qui à un élément de la forme  $\varphi^{-1}(x, y)$  associe  $\varphi^{-1}(x, y_0)$ .

Un *ouvert distingué*  $U$  est un ouvert contenu dans une boîte. L'intérêt de cette notion réside dans le fait que dans un ouvert distingué, contrairement à une boîte, il n'y a pas de direction transverse privilégiée. Les plaques et transversales de  $U$  sont les intersections avec  $U$  des plaques et transversales des boîtes contenant  $U$ .

Quitte à rétrécir les boîtes, il est possible de considérer un *atlas régulier* (resp. un *recouvrement régulier*) de  $M$ , i.e. un atlas dont les boîtes  $B_i$  vérifient la propriété suivante : si  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ , alors une plaque de  $B_i$  rencontre au plus une plaque de  $B_j$ , et leur intersection est alors connexe (resp. un recouvrement par des boîtes d'un atlas régulier).



Si  $M$  est compacte, on peut considérer un recouvrement régulier fini  $\mathcal{U}$  de  $M$  par des boîtes relativement compactes  $B_i$ , et choisir dans chaque boîte une transversale  $T_i$ . Le compact  $X = \sqcup_i \overline{B_i}$  est appelé *espace des plaques*, et est considéré indifféremment comme espace abstrait ou comme sous-ensemble de  $M$ . Lorsque  $M$  n'est pas compacte, on peut reprendre la même construction, mais alors le recouvrement  $\mathcal{U}$  n'est plus fini et  $X$  n'est plus compact. Notons alors  $\psi_i : B_i \rightarrow T_i$  les applications distinguées associées à chaque couple  $(B_i, T_i)$ .

Rappelons la définition suivante :

**Définition 1.2.2** *Soient  $X$  un espace topologique et  $G$  une collection d'homéomorphismes entre sous-ensembles de  $X$ . Si  $g \in G$ , notons respectivement  $D(g)$  et  $I(g)$  son domaine de définition et son image dans  $X$ . Alors  $G$  est un pseudogroupe si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'identité de  $X$  appartient à  $G$ .*
2. *Si  $g \in G$ , alors  $g^{-1} : I(g) \rightarrow D(g)$  appartient à  $G$ .*
3. *Si  $(g_1, g_2) \in G^2$  et  $D(g_1) \cap I(g_2) \neq \emptyset$ , alors*

$$g_1 \circ g_2 : g_2^{-1}(D(g_1) \cap I(g_2)) \rightarrow g_1(D(g_1) \cap I(g_2))$$

*appartient à  $G$ .*

4. *Soit  $(g_1, g_2) \in G^2$  tel que  $g_1(x) = g_2(x)$  pour tout  $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$ . Soit*

$$g_1 \cup g_2 : D(g_1) \cup D(g_2) \rightarrow I(g_1) \cup I(g_2)$$

*l'application définie par  $g_1 \cup g_2(x) = g_i(x)$  si  $x \in D(g_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $g_1 \cup g_2$  est un homéomorphisme, alors  $g_1 \cup g_2 \in G$ .*

5. *Si  $g \in G$  et  $S \subset D(g)$ , alors  $g|_S : S \rightarrow g(S)$  appartient à  $G$ .*

Le *pseudogroupe d'holonomie* sur  $X$  associé au recouvrement  $\mathcal{U}$  est le pseudogroupe engendré par les applications  $\zeta_{ij} : \psi_i(B_i \cap B_j) \subset T_i \rightarrow \psi_j(B_i \cap B_j) \subset T_j$  définies comme suit. À un point de la forme  $x = \psi_i(P)$ , où  $\psi_i : B_i \rightarrow T_i$  est l'application distinguée associée à  $(B_i, T_i)$  et  $P$  est une plaque de  $B_i$  qui intersecte  $B_j$  on associe le point  $\zeta_{ij}(x) = \psi_j(Q)$ , où  $Q$  est l'unique plaque de  $B_j$  intersectant  $B_i$ . Ces applications  $\zeta_{ij}$  sont bien définies car le recouvrement est régulier. Le pseudogroupe ainsi défini est parfois appelé « pseudogroupe d'holonomie du feuilletage », bien qu'il dépende du recouvrement  $\mathcal{U}$  qui a permis de le définir.

On peut aussi considérer des applications entre transversales quelconques de la variété. On appelle *application d'holonomie triviale*  $\zeta : T \rightarrow T'$  une application entre deux transversales  $T$  et  $T'$  d'une même boîte  $B$  qui à  $t \in T$  associe le point  $t'$  d'intersection de la plaque de  $t$  dans  $B$  avec  $T'$ . Plus généralement, on appellera aussi application d'holonomie triviale une application entre deux transversales d'un ouvert distingué qui suit les plaques de l'ouvert. La différence essentielle est la suivante : si  $T$  et  $T'$  sont deux transversales d'une même boîte, il existe une et une seule application d'holonomie triviale  $\zeta : T \rightarrow T'$ , alors que si ce sont deux transversales d'un ouvert distingué, il n'existe pas forcément de telle application sur tout  $T$ , et on ne peut en général définir une application d'holonomie que d'un ouvert  $U$  de  $T$  dans un ouvert  $U'$  de  $T'$ .

Dans ce cas, on regarde toutes les applications engendrées (au sens d'un pseudogroupe) par les applications d'holonomie « triviales » entre deux transversales d'un même ouvert

distingué d'un atlas régulier de  $(M, \mathcal{F})$ . De telles applications sont appelées *applications d'holonomie*, notées  $\zeta : T \rightarrow T'$ .

Il n'y a en fait pas de différence fondamentale entre ces deux pseudogroupes ; le premier est néanmoins associé à un recouvrement fini et est donc de type fini, tandis que le second ne l'est pas.

## 1.2.2 Groupoïde d'holonomie

Ce paragraphe a bénéficié de discussions fructueuses avec Jean Renault.

Il existe un objet souvent plus utile que le pseudogroupe d'holonomie défini ci-dessus : le groupoïde d'holonomie du feuilletage.

En langage des catégories, un (petit) *groupoïde* est une (petite) catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Nous utiliserons plutôt la définition ci-dessous.

**Définition 1.2.3** *Un groupoïde est la donnée de trois ensembles  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}^{(0)}$  et  $\mathcal{G}^{(2)} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ , et d'applications source  $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ , but  $b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ , d'une involution de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G}$  notée  $g \mapsto g^{-1}$ , d'une injection  $i : \mathcal{G}^{(0)} \rightarrow \mathcal{G}$  et d'une loi de composition associative  $\mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$  notée  $\circ$  qui satisfont :*

- $(g_1, g_2) \in \mathcal{G}^{(2)}$  ssi  $s(g_1) = b(g_2)$ .
- si  $(g_1, g_2) \in \mathcal{G}^{(2)}$ , alors  $s(g_1 \circ g_2) = s(g_2)$  et  $b(g_1 \circ g_2) = b(g_1)$ .
- $s(g^{-1}) = b(g)$  et  $s(g) = b(g^{-1})$ .
- $g \circ g^{-1} = i \circ b(g)$  et  $g^{-1} \circ g = i \circ s(g)$ .

Les exemples standard de groupoïde sont les suivants.

Une action de groupe  $G \times X \rightarrow X$  fournit un exemple simple de groupoïde, avec  $\mathcal{G} = G \times X$ ,  $\mathcal{G}^{(0)} = X$ , et  $s(g, x) = x$ ,  $b(g, x) = g.x$ , et si  $y = g.x$ , alors  $(h, y) \circ (g, x) = (hg, x)$ .

Une relation d'équivalence  $\mathcal{R} \subset X \times X$  sur un ensemble  $X$  fournit un autre type d'exemple, défini par  $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{G}^{(0)} = X$ ,  $s(x, y) = y$ ,  $b(x, y) = x$ , et  $(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$ .

Par exemple, un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété  $M$  définit une relation d'équivalence naturelle : deux points de  $M$  sont équivalents si et seulement si ils sont sur la même feuille de  $\mathcal{F}$ . On peut donc considérer le groupoïde associé à cette relation d'équivalence. Cependant, dans ce cas, plutôt que ce groupoïde, il sera intéressant de travailler avec le *groupoïde d'holonomie du feuilletage*, que nous définissons maintenant.

Supposons que  $(M, \mathcal{F})$  est une variété feuilletée de dimension  $p$  et de codimension  $q$ , et considérons un atlas régulier  $\mathcal{U}$  de  $M$  formé de boîtes  $(B_i = T_i \times P_i)_{i \in I}$ .

Intuitivement, les éléments du groupoïde d'holonomie correspondent aux germes des applications d'holonomie entre transversales. Quelques précautions sont cependant nécessaires, car on ne veut pas que les éléments du groupoïde d'holonomie dépendent d'un choix de transversales, alors que les applications d'holonomie en dépendent. On va définir un élément du groupoïde d'holonomie  $\mathcal{G}$  en identifiant les germes d'applications d'holonomies qui ne diffèrent entre elles que par des applications d'holonomie triviales. Plus précisément, on procède de la manière suivante.

Les changements de carte donnent des homéomorphismes  $\zeta_{ij} : T_i \rightarrow T_j$  introduits au paragraphe précédent qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_i \cap B_j & \xrightarrow{Id} & B_i \cap B_j \\ \psi_i \downarrow & & \downarrow \psi_j \\ T_i & \xrightarrow{\zeta_{ij}} & T_j \end{array}$$

En toute rigueur, les  $\zeta_{ij}$  ne sont définis que de  $\psi_i(B_i \cap B_j)$  dans  $\psi_j(B_i \cap B_j)$ . Notons  $T = \sqcup_{i \in I} T_i$  la réunion disjointe des transversales et  $G$  le pseudogroupe d'holonomie engendré par les  $\zeta_{ij}$  sur  $T$ . Définissons l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{(y, j, \zeta, x, i) \in M \times I \times G \times M \times I \mid x \in B_i, y \in B_j, \text{ et } \zeta(\psi_i(x)) = \psi_j(y)\}.$$

Introduisons la relation d'équivalence suivante sur  $\tilde{\mathcal{G}}$  :  $(y, j, \zeta, x, i) \sim (y, j', \zeta', x, i')$  si et seulement si  $\zeta'$  et  $\zeta_{jj'} \circ \zeta \circ \zeta_{ii'}$  ont même germe en  $\psi_{i'}(x')$ . Le groupoïde d'holonomie est alors défini par

$$\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}} / \sim .$$

On notera  $[\zeta] : x \rightarrow y$  ou  $[\zeta]_x$  les éléments de  $\mathcal{G}$ . Les applications source et but sont définies par  $s([\zeta] : x \rightarrow y) = x$  et  $b([\zeta] : x \rightarrow y) = y$ .

On peut alors vérifier que  $\mathcal{G}$  ne dépend pas de l'atlas choisi. Pour cela, si  $(B_i)_{i \in I}$  et  $(\hat{B}_j)_{j \in J}$  sont deux recouvrements, on se ramène au cas où  $(B_i)$  est un sous-recouvrement de  $(\hat{B}_j)$ , on note  $\lambda : I \rightarrow J$  l'inclusion, et on définit un isomorphisme entre  $\mathcal{G}$  et  $\hat{\mathcal{G}}$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\rightarrow \hat{\mathcal{G}} \\ [(y, j, \zeta, x, i)] &\mapsto [(y, \lambda(j), \zeta, x, \lambda(i))] \end{aligned}$$

Notons que si  $x$  et  $y$  sont deux points d'une même feuille, il existe toujours un élément du groupoïde d'holonomie de source  $x$  et de but  $y$ , et que si une feuille  $F$  est simplement connexe, cet élément est unique. En effet, on peut associer une application d'holonomie (et son germe) à tout chemin tracé sur une feuille, l'application ne dépendant que de la classe d'homotopie à extrémités fixées de ce chemin. Nous renvoyons à [Co] pour plus de détails sur cette construction.

Le groupoïde d'holonomie est muni d'une structure de variété (non nécessairement séparée) de dimension  $2p + q$ . Nous ne démontrerons pas ce résultat (voir [Co]), mais nous allons tout de même donner la forme des voisinages d'un élément de  $\mathcal{G}$ .

Soit  $\gamma$  un élément de  $\mathcal{G}$ , tel que  $s(\gamma) = x$  et  $b(\gamma) = y$ . Notons  $B = T \times P$  (resp.  $B' = T' \times P'$ ) une boîte contenant  $x$  (resp.  $y$ ) avec  $x \in T$  (resp.  $y \in T'$ ), et  $\zeta_{T, T'}$  une application d'holonomie de  $T$  dans  $T'$  dont l'élément de  $\mathcal{G}$  associé est  $\gamma$ . Considérons  $B$  comme un ouvert distingué, dans lequel les applications d'holonomie sont bien définies, mais dans lequel aucune direction transverse n'est privilégiée.

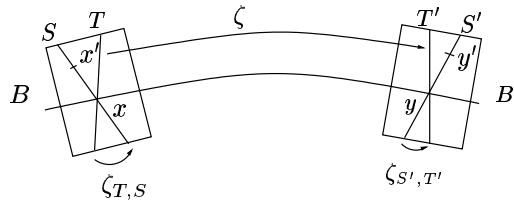


FIG. 1.2 – Holonomie

Soient  $x' \in B$ , et  $S$  une transversale de  $B$  passant par  $x'$ . Quitte à rétrécir  $B$ ,  $T$ ,  $T'$  et  $S$ , nous pouvons supposer que l'application d'holonomie  $\zeta_{T, T'} \circ \zeta_{S, T} : S \rightarrow T'$  est bien définie. De même, quitte à rétrécir  $B'$ , si  $y'$  appartient à la plaque de  $\zeta_{T, T'} \circ \zeta_{S, T}(x')$  dans  $B'$ , et si  $S'$  est une transversale de  $B'$  passant par  $y'$ , l'application d'holonomie  $\zeta_{T', S'} \circ \zeta_{T, T'} \circ \zeta_{S, T} : S \rightarrow S'$  qui envoie  $x'$  sur  $y'$  est bien définie. Le germe de cette application dans  $\mathcal{G}$ , noté  $\gamma' : x' \rightarrow y'$  ne dépend pas du choix des transversales  $S, S'$  ni de

l'application  $\zeta : T \rightarrow T'$ , mais seulement du choix de  $x' \in B$  et de  $y'$  dans la plaque de  $\zeta \circ \zeta_{S,T}(x')$  dans  $B'$ .

Si  $B$  et  $B'$  sont suffisamment petites, nous pouvons donc définir  $V(\gamma, B, B')$  comme l'ensemble des éléments  $\gamma' : x' \rightarrow y'$  associés comme ci-dessus à  $\gamma \in \mathcal{G}$ ,  $x' \in B$  et  $y' \in B'$ . Vue la contrainte sur le choix de  $y'$ , c'est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2p+q}$ . On peut montrer que ces ouverts donnent bien à  $\mathcal{G}$  une structure de variété feuilletée de dimension  $2p + q$ .

### 1.2.3 Mesures transverses

Nous renvoyons à Connes [Co] pour plus de détails. Une *mesure transverse* est la donnée d'une mesure  $\mu_T$  sur chaque transversale  $T$  au feuilletage. Cette mesure transverse  $\mu = \{\mu_T\}$  est *invariante par holonomie* si pour toute application d'holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$  entre deux transversales, on a

$$\mu_{T'} = \zeta_* \mu_T.$$

On peut affaiblir la condition ci-dessus pour considérer des mesures seulement quasi-invariantes par holonomie. Un *cocycle* mesurable (resp. continu) sur le groupoïde d'holonomie est une application mesurable (resp. continue)  $\Delta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , telle que pour tout couple  $(g, g') \in \mathcal{G}^{(2)}$ ,

$$\Delta(g \circ g') = \Delta(g) \Delta(g').$$

Dans le cas particulier où  $\Delta(g)$  ne dépend que de  $s(g)$  et de  $b(g)$ , on parlera de *cocycle du feuilletage*; un tel cocycle est donc une application de l'ensemble  $\mathcal{R} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$  des couples de points d'une même feuille dans  $\mathbb{R}_+^*$ , telle que

$$\Delta(x, y) \Delta(y, z) = \Delta(x, z).$$

Une *mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle*  $\Delta$  est une mesure transverse  $\mu = \{\mu_T\}$  telle que pour toute application d'holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$  entre deux transversales, et pour tout  $x \in T$ , on ait

$$\frac{d\mu_{T'}}{d\zeta_* \mu_T}(\zeta(x)) = \Delta([\zeta]_x), \quad d\mu_T(x) = p \cdot p.$$

### 1.2.4 Feuilletage horosphérique

Si  $v \in T^1 \widetilde{M}$ , nous noterons  $H(v) \subset \widetilde{M}$  l'horosphère centrée en  $v^-$  et passant par le point base  $\pi(v)$  de  $v$ . Cette horosphère se relève à  $T^1 \widetilde{M}$  en l'ensemble

$$H^+(v) := \{w \in T^1 \widetilde{M}, w^- = v^-, \text{ et } \pi(w) \in H(v)\}.$$

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble des vecteurs dont le point base appartient à  $H(v)$ , qui sont orthogonaux à  $H(v)$  et qui pointent vers l'extérieur. Dans les coordonnées  $T^1 \widetilde{M} \simeq \partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , on a immédiatement

$$H^+(v) = \{v^-\} \times \partial \widetilde{M} \setminus \{v^-\} \times \{\beta_{v^-}(\pi(v), o)\}.$$

Cet ensemble s'identifie à la *variété fortement instable de  $v$*  pour le flot géodésique, i.e. à l'ensemble

$$\widetilde{W}^{su}(v) := \{w \in T^1 \widetilde{M}, d(g^{-t}v, g^{-t}w) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}.$$

On appellera donc *horosphère fortement instable* de  $v$  l'ensemble  $H^+(v) = \widetilde{W}^{su}(v)$ .

Dans les coordonnées de  $\partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , on voit immédiatement que ces horosphères de  $T^1 \widetilde{M}$  forment un feuilletage trivial (i.e. produit) de  $T^1 \widetilde{M}$ , noté  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$ , de dimension  $n - 1$  et de codimension  $n$  si  $M$  est de dimension  $n$ . Les feuilles de ce feuilletage sont de classe  $C^\infty$ .

Une famille naturelle de transversales au feuilletage est la famille des *variétés faiblement stables* du flot géodésique. Si  $v \in T^1 \widetilde{M}$ , sa variété faiblement stable est définie par

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^s(v) &= \{w \in T^1 \widetilde{M}, \exists C > 0, d(g^t v, g^t w) \leq C \text{ quand } t \rightarrow +\infty\} \\ &= \{w \in T^1 \widetilde{M}, w^+ = v^+\} \\ &\simeq \partial \widetilde{M} \setminus \{v^+\} \times \{v^+\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notons que sur cette famille de transversales, les applications d'holonomie peuvent s'écrire globalement, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^s(v) &\xrightarrow{\zeta} \widetilde{W}^s(w) \\ u = (u^-, v^+, s(u)) &\mapsto \zeta(u) = (u^-, w^+, s(u)). \end{aligned}$$

Un feuilletage, par définition, est localement un espace produit. Dans cette écriture produit locale, une transversale joue le rôle de l'espace des feuilles (ou plus rigoureusement, en restriction à une boîte, une transversale s'identifie à l'espace des plaques de la boîte).

Sur  $T^1 \widetilde{M}$ , le feuilletage horosphérique est trivial. Il est alors souvent plus commode de considérer *l'espace des horosphères*  $\mathcal{H}$ , qui joue le rôle d'une transversale globale au feuilletage. En utilisant l'écriture  $T^1 \widetilde{M} \simeq \partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , on voit que cet espace est homéomorphe à  $\partial \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ . L'action de  $\Gamma$  par isométries sur  $\widetilde{M}$  induit une action sur  $\mathcal{H}$  par

$$\gamma \cdot (\xi, s) = (\gamma \xi, s + \beta_\xi(o, \gamma^{-1} o)).$$

Nous étudierons plutôt le feuilletage quotient de  $\widetilde{W}^{su}$  sur  $T^1 M$ , noté  $\mathcal{W}^{su}$ . Ses feuilles sont les variétés fortement instables du flot géodésique de  $T^1 M$ , les variétés faiblement stables sont encore localement des transversales, mais ce n'est plus un feuilletage trivial.

La classification topologique des feuilles de ce feuilletage a été beaucoup étudiée dans notre cadre, d'abord dans [Eb2], puis dans [D]. Notons  $\mathcal{E}$  *l'ensemble non-errant du feuilletage horosphérique*, i.e. l'ensemble des vecteurs  $v \in T^1 M$  tels que  $v^- \in \Lambda_\Gamma$ . On a d'abord :

**Théorème 1.2.4 (Dal'bo [D])** *Soit  $M$  une variété à courbure négative. Le flot géodésique est topologiquement mélangeant si et seulement si le feuilletage horosphérique est topologiquement transitif, i.e. il existe une feuille  $W^{su}(u)$  dense dans  $\mathcal{E}$ .*

Lorsque les conditions ci-dessus sont vérifiées, et dans le cadre de cette thèse où on suppose que l'ensemble limite est composé uniquement de points limites radiaux et de points paraboliques bornés, on a une caractérisation complète des feuilles du feuilletage :

- Si  $u^- \notin \Lambda_\Gamma$ , la feuille  $W^{su}(u)$  est fermée non compacte
- Si  $u^-$  est un point parabolique borné,  $W^{su}(u)$  est compacte.
- Si  $u^-$  est un point limite radial, alors  $W^{su}(u)$  est dense dans  $\mathcal{E}$ .

Dans un cadre plus général, la feuille  $W^{su}(u)$  est dense lorsque  $u^-$  est un point limite horosphérique, notion que nous ne développons pas ici.

### 1.3 Formalisme thermodynamique

Les références standard pour ce paragraphe sont d'une part l'article de Bowen-Ruelle [Bow-R] dans le cas des flots, et les livres de Bowen [Bow2], Keller [Ke], Parry-Pollicott [P-P], Walters [W] ou Zinsmeister [Z] dans le cas des difféomorphismes.

Soit  $\psi = (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un flot différentiable sur une variété  $N$  et  $X \subset N$  un ensemble compact invariant par  $\psi$ . Soit  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue.

Un ensemble  $E \subset X$  est dit  $(\varepsilon, T)$ -séparé si pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ , tels que  $x \neq y$ , il existe  $t \in [0, T]$  tel que  $d(\psi_t(x), \psi_t(y)) > \varepsilon$ . On définit les quantités

$$Z_T(\psi, f, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} \exp \int_0^T f(\psi_t(x)) dt, \text{ où } E \subset X \text{ est un ensemble } (\varepsilon, T) \text{ - séparé} \right\},$$

$$\text{et } P(\psi, f, \varepsilon) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log Z_T(\psi, f, \varepsilon).$$

La *pression*  $P(\psi, f)$  est alors définie par

$$P(\psi, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\psi, f, \varepsilon).$$

Dans la suite de la thèse, le flot considéré sera toujours le flot géodésique  $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  d'une variété compacte ou convexe-cocompacte à courbure négative, et  $X$  l'ensemble non-errant  $\Omega$  de  $g$ . Nous allégerons donc l'écriture en notant simplement  $P(f)$  ou même  $\delta^f$  au chapitre 5.

Deux applications  $f$  et  $h$  sont dites *cohomologues (au sens de Livschitz)* s'il existe une application  $G$  différentiable dans la direction du flot telle que  $f - h = Z.G$ , où  $Z$  désigne le champ de vecteurs tangent au flot. Le théorème de Livschitz (voir [Ka-H] théorème 19.2.4) assure que deux fonctions sont cohomologues si et seulement si pour toute orbite périodique  $c$ , les intégrales de  $f$  et  $h$  le long de  $c$  sont égales. Les applications  $f$  et  $h$  sont dites *équivalentes* si  $f - h$  est cohomologue à une constante.

La proposition suivante rassemble un certain nombre de propriétés élémentaires satisfaites par la pression :

**Proposition 1.3.1** *Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ . La fonction pression vérifie les propriétés suivantes :*

- $P(\psi, 0) = h_{top}(\psi)$ .
- $|P(\psi, f) - P(\psi, g)| \leq \|f - g\|_\infty$ .
- L'application  $f \rightarrow P(\psi, f)$  est soit toujours finie soit toujours infinie.
- Si  $P(\psi, \cdot)$  est finie, alors elle est convexe.
- $P(\psi, f + c) = P(\psi, f) + c$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont cohomologues, alors  $P(\psi, f) = P(\psi, g)$ .

En particulier, cette proposition implique que dans le cas du flot géodésique sur une variété compacte ou convexe-cocompacte, la pression est finie car l'entropie l'est.

La pression vérifie un principe variationnel. Pour l'énoncer, nous aurons besoin de la notion d'*entropie métrique*  $h_\mu(\psi)$  d'une mesure de probabilité invariante par  $\psi$  (voir [W] par exemple). En fait, de même que pour l'entropie topologique, on définit l'entropie  $h_\mu(T)$  d'une probabilité  $\mu$  invariante par une transformation continue  $T$ , et la propriété d'homogénéité  $h_\mu(T^n) = |n| h_\mu(T)$  autorise la définition

$$h_\mu(\psi) := h_\mu(\psi_1).$$

pour l'entropie d'un flot  $\psi = (\psi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Soit donc  $T : X \rightarrow X$  une transformation continue, et  $\xi$  une partition borélienne finie de  $X$ . Notons  $A_1, \dots, A_k$  les éléments de  $\xi$ , et  $\mathcal{A}(\xi)$  la tribu engendrée par  $\xi$ .

Introduisons la quantité

$$H(\mathcal{A}, \mu) = - \sum_{i=1}^k \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

Le raffinement  $\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$  de deux tribus est la tribu engendrée par les éléments  $A \cap C$ , où  $A \in \mathcal{A}$  et  $C \in \mathcal{C}$ . Comme  $T : X \rightarrow X$  est continue, la tribu  $T^{-1}\mathcal{A}$  engendrée par  $\{T^{-1}A, A \in \mathcal{A}\}$  est encore une sous-tribu de  $\mathcal{B}$ .

On définit alors l'entropie de  $\mu$  pour la tribu  $\mathcal{A}$  par

$$h(\mathcal{A}, \mu, T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{A}, \mu),$$

et l'entropie de  $\mu$  par

$$h(\mu, T) = h_\mu(T) := \sup_{\mathcal{A}} h(\mathcal{A}, \mu, T),$$

où  $\mathcal{A}$  décrit l'ensemble des sous-tribus finies de  $\mathcal{B}$ .

Notons  $\mathcal{M}(X, \psi)$  l'ensemble des probabilités invariantes par  $\psi$  sur  $X$ . Nous pouvons alors énoncer le théorème :

**Théorème 1.3.2 (Walters)** *Avec les notations et hypothèses de ce paragraphe, la pression vérifie*

$$P(\psi, f) = \sup_{m \in \mathcal{M}(X, \psi)} h_m(\psi) + \int_X f dm.$$

On appelle alors mesure ou *état d'équilibre* pour  $f$  une probabilité  $m \in \mathcal{M}(X, \psi)$  telle que

$$P(\psi, f) = h_m(\psi) + \int_X f dm.$$

Un compact invariant par  $(\psi^t)$ , noté encore  $X$ , est un *ensemble basique hyperbolique* si :

- il est hyperbolique et ne contient pas de points fixes de  $\psi$ ,
- les orbites périodiques de  $\psi|_X$  sont denses dans  $X$ ,
- le flot  $\psi|_X$  est topologiquement transitif sur  $X$ ,
- il existe un ouvert  $U$  contenant  $X$  tel que  $X = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \psi^t(U)$ .

Par exemple, l'ensemble non-errant du flot géodésique d'une variété compacte ou convexe-cocompacte est un ensemble basique hyperbolique.

**Théorème 1.3.3 (Bowen-Ruelle [Bow-R])** *Si  $\psi$  est un flot Axiome A agissant sur un ensemble basique hyperbolique  $X$ , alors pour toute fonction höldérienne  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe sur  $X$  une unique mesure d'équilibre pour  $f$ , notée  $m^f$ .*

Les théorèmes 1.3.2 et 1.3.3 serviront au chapitre 2 à montrer qu'une certaine mesure est l'état d'équilibre de  $f$ , simplement en calculant son entropie.

Le lemme élémentaire suivant nous sera très utile :

**Lemme 1.3.4** *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, deux fonctions höldériennes équivalentes ont le même état d'équilibre.*

**Démonstration :** Si  $f$  et  $h$  diffèrent d'une constante, le résultat est immédiat d'après le théorème 1.3.2. Si  $f$  et  $h$  sont cohomologues, leurs intégrales sur toutes les géodésiques périodiques sont égales. On en déduit que les intégrales de  $f$  et  $h$  pour toute mesure

invariante par le flot géodésique sont égales, puisque toute mesure de probabilité invariante par le flot géodésique peut être approchée par une combinaison convexe de mesures de probabilité portées par les orbites périodiques [Si]. Le résultat découle encore une fois du principe variationnel ci-dessus.  $\square$

Rappelons pour conclure la proposition suivante. On trouvera dans [Bow1] (Theorem 4.11) une démonstration détaillée de ce résultat lorsque  $f \equiv 0$ , qui s'étend sans difficulté au cas général.

**Proposition 1.3.5 (Bowen)** *Si  $M$  est une variété compacte ou convexe-cocompacte dont le flot géodésique est topologiquement mélangeant, la pression d'une application continue  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  pour le flot géodésique sur  $\Omega$  vérifie*

$$\delta^f = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{\substack{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_T, \\ l(\bar{\gamma}) \in [T, T+1[}} e^{\int_{\bar{\gamma}} f},$$

où  $\mathcal{C}_T$  désigne l'ensemble des géodésiques périodiques de  $T^1M$ , et où  $l(\bar{\gamma})$  est la période de  $\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_T$ .





## Chapitre 2

# Construction des mesures d'équilibre

Dans tout ce chapitre,  $M$  désignera une variété compacte ou convexe-cocompacte à courbure négative pincée, et dans le cas convexe-cocompact, on supposera de plus que le flot géodésique est topologiquement mélangeant.

Soit  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une application höldérienne, que nous supposerons de plus bornée lorsque  $M$  est convexe-cocompacte. Nous noterons  $\check{f}$  l'application définie par  $\check{f}(v) = f(-v)$ . Le but de ce chapitre est de donner une construction géométrique de l'état d'équilibre  $m^f$  du « potentiel »  $f$ . Les seules nouveautés de ce chapitre sont d'une part la preuve que par la construction proposée, on obtient bien la mesure d'équilibre de  $f$  (ce résultat devait certainement être connu des spécialistes, mais à notre connaissance n'était pas écrit), et d'autre part le paragraphe 2.6 dont le résultat, connu dans le cas des potentiels symétriques, est étendu ici à une fonction  $f$  quelconque.

Le fibré tangent  $T^1M$  est homéomorphe à  $(\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R})/\Gamma$ . Il est donc équivalent de construire une mesure  $m^f$  invariante par le flot géodésique sur  $T^1M$  ou une mesure invariante par le flot et par  $\Gamma$  sur  $T^1\widetilde{M}$ , ou encore une mesure  $\Gamma$ -invariante sur  $\partial^2\widetilde{M}$ , encore appelée un *courant géodésique*. Nous allons construire une mesure  $\nu^f$  sur  $\partial^2\widetilde{M}$ , quasi-invariante par  $\Gamma$ , et nous définirons un courant géodésique  $c^f$  sur  $\partial^2\widetilde{M}$  sous la forme

$$dc^f(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) d\nu^{\check{f}}(\xi) d\nu^f(\eta),$$

où  $\psi$  est une application appropriée sur  $\partial^2\widetilde{M}$ .

Le paragraphe 2.1 est consacré à l'étude de la série de Poincaré de  $\Gamma$  associée au potentiel  $f$ . La construction de  $\nu^f$  est détaillée au paragraphe 2.2. Au paragraphe 2.3, nous explicitons la construction de la mesure  $m^f$ , et donnons quelques unes de ses propriétés importantes (ergodicité, mélange). Le Lemme de l'Ombre (section 2.4) permet d'une part de prouver que la mesure  $m^f$  est bien la mesure d'équilibre de  $f$  (paragraphe 2.5), et d'autre part (paragraphe 2.6) de réinterpréter la mesure  $\nu^f$  comme la mesure de Hausdorff d'une certaine distance  $d^f$  sur le bord. Pour finir, au paragraphe 2.7, nous détaillons quelques exemples où la forme particulière de  $f$  permet d'obtenir une construction simplifiée de  $m^f$ .

Mentionnons que toute cette construction remonte originellement aux travaux de Patterson [Pa] et Sullivan [S1] [S2] en courbure constante, dans lesquels tous les arguments du cas  $f \equiv 0$  étaient présents. Kaimanovich [K1] a donné une construction générale de mesures invariantes par le flot géodésique. Dans le cas des mesures d'équilibre  $m^f$ , cette construction est due à Ledrappier [L] sur les variétés compactes, et a été généralisée ensuite par Coudène [Cou1] au cas des variétés géométriquement finies (voir le paragraphe 8.2.1 pour un aperçu de sa construction).

## 2.1 Série de Poincaré

Si  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  est une application, nous noterons encore  $f$  son relevé  $\Gamma$ -invariant à  $T^1\widetilde{M}$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $M$  (resp.  $\widetilde{M}$ ), la notation  $\int_x^y f$  désigne l'intégrale de  $f$  sur l'unique segment géodésique (vu dans  $T^1M$  ou  $T^1\widetilde{M}$  selon le cas) orienté et paramétré à vitesse 1 joignant  $x$  à  $y$ . De même, si  $\bar{\gamma}$  est une géodésique périodique orientée (de  $T^1M$ ), on désigne par  $\int_{\bar{\gamma}} f$  l'intégrale de  $f$  le long de cette géodésique (vue dans  $T^1M$ ).

Rappelons que la pression topologique  $\delta^f$  de  $f$  est caractérisée par

$$\delta^f = \sup_{m \text{ inv}} h_m(g) + \int_{T^1M} f \, dm.$$

Introduisons la *série de Poincaré* de  $\Gamma$  associée à  $f$ . Si  $o$  est un point fixé de  $\widetilde{M}$ , elle est définie pour tout  $s \geq 0$  par

$$P_\Gamma(s, o, f) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s\delta^f d(o, \gamma o) + s \int_o^{\gamma o} f} = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s \int_o^{\gamma o} F},$$

où  $F$  désigne le potentiel normalisé  $F = \delta^f - f$ . Remarquons que  $\delta^{-F} = 0$ . Notons que si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux potentiels équivalents (i.e. dont la différence est cohomologue à une constante), ils ont la même mesure d'équilibre, et les potentiels normalisés associés sont cohomologues. En particulier, la normalisation ci-dessus est naturelle, et la construction qui suit de la mesure d'équilibre  $m^f$  ne dépend en fait que du potentiel normalisé  $F$ .

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

**Lemme 2.1.1 (Ledrappier [L])** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte. Soit  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue qui n'est pas cohomologue à une constante, et  $F = \delta^f - f$ . Alors :*

**a-** *Il existe une constante  $0 < k < +\infty$ , telle que pour toute géodésique périodique  $\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma$ , on ait*

$$0 < k \leq \frac{1}{l(\bar{\gamma})} \int_{\bar{\gamma}} F$$

**b-** *Il existe deux constantes  $a > 0$  et  $b \geq 0$  telles que pour tout segment géodésique  $[xy]$  inclus dans  $\widetilde{C}(\Gamma)$ , on ait*

$$a d(x, y) - b \leq \int_x^y F$$

**Démonstration :** **a-** Supposons que

$$\inf_{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma} \frac{1}{l(\bar{\gamma})} \int_{\bar{\gamma}} F \leq 0.$$

Chaque géodésique périodique  $\bar{\gamma}$  définissant une probabilité invariante par le flot géodésique sur  $T^1M$ , on en déduit

$$\inf_{m \text{ inv}} \int_{T^1M} F \, dm \leq 0,$$

où  $m$  décrit l'ensemble des probabilités invariantes par le flot géodésique sur  $\Omega \subset T^1M$ . On en déduit pour tout  $t \geq 0$  :

$$\delta^{-tF} = \sup_{m \text{ inv}} \left( h_m(g) - t \int_{T^1M} F \, dm \right) \geq \sup_{m \text{ inv}} \left( -t \int_{T^1M} F \, dm \right) = -t \inf_{m \text{ inv}} \int_{T^1M} F \, dm \geq 0.$$

Or  $f$  n'est pas cohomologue à une constante, si bien que l'application  $t \rightarrow \delta^{-tF}$  est strictement décroissante, et s'annule en  $t = 1$ . Elle est donc strictement négative quand  $t > 1$ . Ceci est en contradiction avec la minoration ci-dessus, d'où le résultat.

**b-** Montrons maintenant la deuxième minoration. Supposons d'abord que le relevé à  $T^1\widetilde{M}$  du segment  $[xy]$  est inclus dans  $\Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. D'après le théorème 1.1.5, il existe  $C_\varepsilon > 0$  et une géodésique périodique  $\bar{\gamma}$  de longueur au plus  $d(x, y) + C_\varepsilon$ , qui contient le segment  $p_\Gamma[xy]$  dans son  $\varepsilon$ -voisinage. On déduit alors le résultat voulu de la partie **a-** du lemme et du fait que  $f$  est höldérienne.

Le cas d'un segment quelconque découle du cas précédent et du fait que l'ensemble  $\widetilde{C}(\Gamma)$  est à distance bornée de la projection  $\pi(\Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R})$  sur  $\widetilde{M}$ .  $\square$

À toute application höldérienne  $G : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on ait  $\int_{\bar{\gamma}} G \geq 0$ , on associe deux taux de croissance exponentielle. Le premier est défini par

$$s_1(G) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \# \{ \gamma \in \Gamma, n \leq \int_o^{\gamma o} G < n + 1 \}.$$

Lorsque  $F$  est de la forme  $F = \delta^f - f$ , l'intégrale de  $F$  sur toute géodésique périodique est positive d'après le lemme 2.1.1, et dans ce cas  $s_1(F)$  est l'*exposant critique* de la série  $P_\Gamma(s, o, f)$  : la série est convergente pour  $s > s_1(F)$ , et divergente pour  $s < s_1(F)$ . A priori, le comportement de cette série en  $s_1(F)$  est inconnu, mais on peut montrer [Cou1] que lorsque  $M$  est compacte ou convexe-cocompacte (et plus généralement dès que la mesure  $m^f$  est ergodique et conservative), la série est divergente en  $s = s_1(F)$ .

Le deuxième taux de croissance dont nous nous servirons est défini par

$$s_2(G) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \# \{ \bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma, n \leq \int_{\bar{\gamma}} G < n + 1 \}.$$

Remarquons que ces deux exposants valent encore respectivement

$$s_1(G) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \# \{ \gamma \in \Gamma, 0 \leq \int_o^{\gamma o} G \leq T \} \quad \text{et}$$

$$s_2(G) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \# \{ \bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma, 0 \leq \int_{\bar{\gamma}} G \leq T \}.$$

En fait, dans le cas qui nous intéresse, ces deux taux de croissance exponentielle coïncident :

**Lemme 2.1.2 (Ledrappier [L])** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte. Soit  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une application höldérienne, et  $F = \delta^f - f$ . Alors  $s_1(F) = s_2(F) = 1$ .*

**Démonstration :** Commençons par montrer que  $s_1(F) = s_2(F)$ . Si  $\theta \in \Gamma$  et  $\bar{\gamma}$  désigne la géodésique périodique associée à la classe de conjugaison de  $\theta$  dans  $\Gamma$ , le segment géodésique  $[o \theta o]$  de  $\widetilde{M}$  se projette sur  $M$  en un lacet  $p_\Gamma([o \theta o])$  basé en  $o$  et homotope à la géodésique périodique  $\bar{\gamma}$ . Si  $\Delta$  désigne le diamètre du coeur de Nielsen  $N(\Gamma)$ , auquel appartiennent les lacets  $\bar{\gamma}$  et  $p_\Gamma([o \theta o])$ , ces deux lacets sont chacun dans le  $\Delta$ -voisinage de l'autre. Puisque  $F$  est höldérienne, on en déduit

$$\left| \int_o^{\theta o} F - \int_{\bar{\gamma}} F \right| \leq C(F) \Delta^{\alpha(F)}, \quad (2.1)$$

d'où, en posant  $A = C(F) \Delta^{\alpha(F)}$ ,

$$\#\{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma, n \leq \int_{\bar{\gamma}} F < n+1\} \leq \#\{\theta \in \Gamma, n-A \leq \int_o^{\theta o} F < n+A+1\}.$$

L'inégalité  $s_1(F) \geq s_2(F)$  en découle.

Montrons maintenant l'inégalité inverse. D'abord, remarquons que pour tout  $\theta \in \Gamma$ , le segment géodésique  $p_\Gamma[o \theta o]$  est inclus dans le  $\Delta$ -voisinage de la projection  $\pi(\Omega)$  de l'ensemble non-errant. La propriété de spécification (théorème 1.1.5) permet alors de trouver une géodésique périodique  $\bar{\gamma}$  telle que le segment  $p_\Gamma[o \theta o]$  soit inclus dans le  $\Delta+1$ -voisinage de  $\bar{\gamma}$ . On en déduit l'existence d'une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $\Delta$  et de  $F$ , telle que  $\int_o^{\theta o} F \leq \int_{\bar{\gamma}} F + C$ .

D'autre part, comme  $\Gamma$  est discret, il existe une constante  $C' > 0$  telle que pour toute géodésique périodique fixée  $\bar{\gamma}$ , le nombre de  $\theta \in \Gamma$  tels que le segment  $p_\Gamma[o \theta o]$  est inclus dans le  $\Delta+1$ -voisinage de  $\bar{\gamma}$  est majoré par  $C' l(\bar{\gamma})$  et donc par  $\frac{C' C}{k} \int_{\bar{\gamma}} F$ . Finalement, on obtient

$$\#\{\theta \in \Gamma, \int_o^{\theta o} F \leq N + C\} \leq \frac{C'}{k} N \#\{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma, \int_{\bar{\gamma}} F \leq N\}.$$

L'inégalité  $s_1(F) \leq s_2(F)$ , et donc l'égalité  $s_1(F) = s_2(F)$  en découlent.

Montrons pour finir que  $s_2(F) = 1$ . Pour cela, nous allons démontrer que  $s_2(F)$  est l'unique réel en lequel l'application  $t \rightarrow \delta^{-tF}$  s'annule, ce qui démontre le résultat puisque  $\delta^{-F} = 0$ .

Si  $f$  est cohomologue à une constante  $c$ , alors  $\delta^f = c + \delta^0$  et  $F$  est cohomologue à  $\delta^0 > 0$ . Dans ce cas, l'application  $t \rightarrow \delta^{-tF}$  est affine strictement décroissante, et s'annule donc en un unique point (en  $t = 1$ ).

Si  $f$  n'est pas cohomologue à une constante, il en est de même pour  $F$ , et l'application  $t \rightarrow \delta^{-tF}$  est convexe strictement décroissante, et s'annule donc uniquement en  $t = 1$ .

Pour montrer que cette application ne peut s'annuler qu'en  $s_2(F)$ , on utilise la définition de la pression donnée par la proposition 1.3.5. Si  $\delta^{-sF} < 0$ , et  $\varepsilon = -\delta^{-sF}/2$ , il existe  $T_0 \geq 0$ , tel que pour tout  $T \geq T_0$ , on ait

$$0 < \sum_{\substack{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma \\ l(\bar{\gamma}) \in [T, T+1[}} e^{-s \int_{\bar{\gamma}} F} \leq e^{-\varepsilon T}.$$

On en déduit immédiatement

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma \\ l(\bar{\gamma}) \in [N, N+1[}} e^{-s \int_{\bar{\gamma}} F} < +\infty \quad \text{d'où} \quad \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma} e^{-s \int_{\bar{\gamma}} F} < +\infty.$$

Cette dernière série a le même comportement que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \#\{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma, n \leq \int_{\bar{\gamma}} F < n+1\} e^{-sn}, \quad (2.2)$$

qui est donc finie, si bien que  $s \geq s_2(F)$ .

Réciproquement, si  $\delta^{-sF} > 0$ , en posant  $\varepsilon = \delta^{-sF}/2$ , on voit qu'il existe  $T_0 \geq 0$ , tel que pour tout  $T \geq T_0$ ,

$$\sum_{\substack{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma \\ l(\bar{\gamma}) \in [T, T+1[}} e^{-s \int_{\bar{\gamma}} F} \geq e^{\varepsilon T}.$$

On obtient immédiatement

$$\sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma} e^{-s \int_{\bar{\gamma}} F} = +\infty,$$

et l'argument développé ci-dessus donne  $s \leq s_2(G)$ , ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

## 2.2 Mesure de Patterson sur le bord

Dans ce paragraphe, nous détaillons la construction d'une famille de mesures  $(\nu_x^f)_{x \in \widetilde{M}}$  sur le bord, construction originellement due à Patterson [Pa] dans le cas où  $f \equiv 0$ , et étendue par Ledrappier [L] dans notre cadre.

Nous avons vu ci-dessus que si  $F = \delta^f - f$ , alors  $s_1(F) = s_2(F) = 1$ . Pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et  $s > 1$ , définissons la mesure

$$\nu_x^{s,f} := \frac{1}{P(s, o, f)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s\delta^f d(x, \gamma o) + s \int_x^{\gamma o} f} \delta_{\gamma o},$$

où  $\delta_{\gamma o}$  désigne la masse de Dirac au point  $\gamma o$ .

La famille de mesures  $(\nu_o^{s,f})_{s > 1}$  est une famille de probabilités sur  $\widetilde{M}$ , que l'on considérera plutôt comme des probabilités sur  $\widetilde{M} \cup \partial \widetilde{M}$ . Comme  $\widetilde{M} \cup \partial \widetilde{M}$  est compact, l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\widetilde{M} \cup \partial \widetilde{M}$  est compact pour la topologie faible, et on peut donc extraire une sous-suite  $(\nu_o^{s_k, f})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers une probabilité  $\nu_o^f$  lorsque  $s_k \rightarrow 1$ . Par construction, cette mesure est à support dans l'adhérence  $\overline{\Gamma o}$  dans  $\widetilde{M} \cup \partial \widetilde{M}$  de l'orbite de  $o$ .

Si la série  $P(s, o, f)$  diverge lorsque  $s = 1$ , on montre aisément que  $\nu_o^f(\Gamma o) = 0$ , de sorte que  $\nu_o^f$  est à support dans  $\Lambda_\Gamma \subset \partial \widetilde{M}$ .

Lorsque  $P(s, o, f)$  converge en  $s = 1$ , on utilise le lemme technique suivant :

**Lemme 2.2.1 (Patterson [Pa])** *Il existe une fonction continue croissante  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telle que*

– *L'exposant critique de la série*

$$\tilde{P}(s, o, f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h \left( \int_o^{\gamma o} F \right) e^{-s \int_o^{\gamma o} F}$$

*est égal à 1.*

– *Cette série diverge en  $s = 1$ .*

– *Pour tout  $d > 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h(t+d)}{h(t)} = 1.$$

La fonction  $h$  est construite de sorte que  $\log h$  soit continue et affine par morceaux, de pentes successives  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  sur des intervalles  $I_k$  choisis par récurrence pour obtenir le résultat voulu.

On utilise alors la série de Poincaré modifiée  $\tilde{P}(s, o, f)$  et on pose

$$\nu_x^{s,f} := \frac{1}{\tilde{P}(s, o, f)} \sum_{\gamma \in \Gamma} h \left( \int_x^{\gamma o} F \right) e^{-s \int_x^{\gamma o} F} \delta_{\gamma o}.$$

De même que précédemment, il existe une suite  $s_k \rightarrow 1$ , telle que  $\nu_o^{s_k, f}$  converge faiblement vers une probabilité  $\nu_o^f$  à support dans  $\Lambda_\Gamma \subset \partial \widetilde{M}$ .

Remarquons maintenant que si  $x \in \widetilde{M}$  est fixé, pour tout  $s \geq 1$ , les mesures  $\nu_x^{s,f}$  et  $\nu_o^{s,f}$  sont équivalentes. Introduisons deux notations. Si  $(x, y, z) \in \widetilde{M}^3$ , posons

$$\rho_z^f(x, y) := \int_x^z f - \int_y^z f, \quad \text{et} \quad \beta_z^f(x, y) := \delta^f \beta_z(x, y) - \rho_z^f(x, y) = \rho_z^F(x, y).$$

Fixons  $x$  et  $y$ . Comme  $f$  est höldérienne, la différence  $\int_x^z f - \int_y^z f$  admet une limite quand  $z \rightarrow \xi \in \Lambda_\Gamma$ , et on pose

$$\rho_\xi^f(x, y) = \lim_{z \rightarrow \xi} \int_x^z f - \int_y^z f.$$

On sait que le cocycle de Busemann  $\beta$  est continu sur  $\widetilde{M}^2 \times \overline{M}$ . De la même façon, puisque  $f$  est höldérienne, on peut montrer le

**Lemme 2.2.2** *Si  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  est une application höldérienne, alors les applications  $\rho^f$  et  $\beta^f$  définies ci-dessus sont continues sur  $\widetilde{M}^2 \times \overline{M}$ .*

Nous n'écrivons pas la preuve, l'argument est écrit dans le chapitre 5 (lemme 5.3.4).

On peut alors écrire plus précisément la dérivée de Radon-Nikodym de  $\nu_x^{s,f}$  par rapport à  $\nu_o^{s,f}$ . Pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $s > 1$ , on a

$$\frac{d\nu_x^{s,f}}{d\nu_o^{s,f}}(\gamma o) = e^{-s\beta_{\gamma o}^f(x, o)}.$$

Par continuité de cette densité, pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , on peut extraire de  $s_k$  une sous-suite (encore notée  $s_k$ ), telle que  $\nu_x^{s_k, f}$  converge faiblement vers une mesure finie  $\nu_x^f$  équivalente à  $\nu_o^f$ .

Pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on note  $\gamma_* \nu_x^f$  la mesure définie par  $\gamma_* \nu_x^f(A) = \nu_x^f(\gamma^{-1}A)$ . On a :

**Lemme 2.2.3** *Pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $(x, y) \in \widetilde{M}^2$ , la famille de mesures  $(\nu_x^f)_{x \in \widetilde{M}}$  ainsi construite vérifie  $\gamma_* \nu_x^f = \nu_{\gamma x}^f$  et*

$$\frac{d\nu_x^f}{d\nu_y^f}(\xi) = e^{-\beta_\xi^f(x, y)} \quad \nu_x^f - p.s.$$

On a alors le :

**Corollaire 2.2.4** *Le support des mesures  $\nu_x^f$  est égal à  $\Lambda_\Gamma$ .*

Ceci découle immédiatement de la quasi-invariance de  $\nu_x^f$  par  $\Gamma$ , du fait que le support de  $\nu_x^f$  est inclus dans  $\Lambda_\Gamma$ , et que l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma$  est minimale.

Remarquons qu'a priori, la famille de mesures  $(\nu_x^f)_{x \in \widetilde{M}}$  dépend de la sous-suite  $(s_k)$  qui a permis de la construire. Au cours du paragraphe suivant, nous verrons en fait que pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , la famille  $(\nu_x^{s,f})_{s > 1}$  converge vers  $\nu_x^f$  quand  $s \rightarrow 1$ .

## 2.3 Construction de $m^f$ , Propriétés

Commençons par une remarque utile pour la suite. Si  $(a, b) \in \widetilde{M}^2$ , et  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  est höldérienne, une vérification élémentaire donne

$$\int_a^b f = \int_b^a \check{f}.$$

Si  $x \in \widetilde{M}$  et  $(\xi, \eta) \in \partial^2 \widetilde{M}$ , choisissons un point quelconque  $y$  sur la géodésique  $(\xi\eta)$ . On déduit de l'égalité ci-dessus que la quantité  $\rho_\eta^f(x, y) + \rho_\xi^{\check{f}}(x, y)$  ne dépend pas de  $y \in (\xi\eta)$ . Nous la noterons encore  $\int_x^\eta f + \int_x^\xi \check{f} - \int_x^\eta f$ .

Rappelons qu'un *courant géodésique* est une mesure de Radon sur  $\partial^2 \widetilde{M}$  invariante sous l'action diagonale de  $\Gamma$ . Fixons  $x \in \widetilde{M}$ , et pour tout  $(\xi, \eta) \in \partial^2 \widetilde{M}$ , posons

$$dc^f(\xi, \eta) = \exp \left( \int_x^\eta F + \int_x^\xi \check{F} - \int_\eta^\xi F \right) d\nu_x^f(\xi) d\nu_x^f(\eta),$$

avec toujours  $F = \delta^f - f$ . Le lemme 2.2.3 assure d'une part que l'expression ci-dessus ne dépend pas de  $x \in \widetilde{M}$ , et d'autre part que  $c^f$  est  $\Gamma$ -invariant. C'est donc un courant géodésique sur  $\partial^2 \widetilde{M}$ , de support  $\Lambda_{\Gamma}^2$ .

On définit alors sur  $T^1 \widetilde{M} \simeq \partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R}$  une mesure de Radon  $\tilde{m}^f$  en posant

$$d\tilde{m}^f(v) = dc^f(v^-, v^+) dt.$$

Cette mesure est invariante sous l'action du flot géodésique  $(\tilde{g}^t)$  et sous celle de  $\gamma$ . On peut aussi écrire

$$d\tilde{m}^f(v) = \exp \left( \beta_{v^+}^f(x, \pi(v)) + \beta_{v^-}^{\check{f}}(x, \pi(v)) \right) d\nu_x^{\check{f}}(v^-) d\nu_x^f(v^+) dt.$$

Par passage au quotient,  $\tilde{m}^f$  induit une mesure  $m^f$  sur  $T^1M$ , invariante sous l'action du flot géodésique et de support  $\Omega \subset T^1M$ . Comme  $\Omega$  est compact, la mesure  $m^f$  est finie; nous la supposons donc normalisée en une probabilité.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte. La mesure  $m^f$  construite ci-dessus est ergodique pour l'action du flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $T^1M$ .*

**Démonstration :** La mesure  $m^f$  est ergodique si et seulement si toute application  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable et invariante par le flot géodésique est constante  $m^f$ -p.p. Comme l'application  $\psi \mapsto E_{m^f}(\psi|\mathcal{I})$  qui à  $\psi$  associe l'espérance de  $\psi$  sachant la tribu  $\mathcal{I}$  des invariants du flot géodésique est continue sur  $L^1(m^f)$ , et que les fonctions continues sur  $\Omega$  sont denses dans  $L^1(m^f)$ , il suffit en fait de montrer que pour toute application continue  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$E_{m^f}(\psi|\mathcal{I}) = \int_{T^1M} \psi dm^f, \quad m^f - \text{ p.s.}$$

Pour  $m^f$ -presque tout  $v \in \Omega$ , on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(g^s(v)) ds = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(g^{-s}(v)) ds = E_{m^f}(\psi|\mathcal{I})(v). \quad (2.3)$$

Notons  $\tilde{\psi}$  le relevé  $\Gamma$ -invariant de  $\psi$  à  $T^1 \widetilde{M}$ . L'égalité ci-dessus reste alors vraie pour  $\tilde{m}^f$ -presque tout  $v \in \Lambda_{\Gamma}^2 \times \mathbb{R}$ , en remplaçant  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  par le flot géodésique  $(\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $T^1 \widetilde{M}$ ,



et  $\psi$  par  $\tilde{\psi}$ . Remarquons encore que les limites ci-dessus ne dépendent pas de la position du vecteur  $v$  sur la géodésique  $(v^-v^+)$ , de sorte que les égalités ci-dessus sont vraies pour  $\nu_o^{\tilde{f}} \times \nu_o^f$  presque tout  $(v^-, v^+) \in \Lambda_\Gamma^2$ , et tout vecteur  $v$  sur la géodésique  $(v^-v^+)$ . On notera alors  $\tilde{\Psi}(v^-, v^+)$  la fonction mesurable ainsi définie sur  $\Lambda_\Gamma^2$ .

Considérons maintenant pour tout  $v \in \Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R}$  la quantité  $\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\psi}(\tilde{g}^s(v)) ds$ .

Comme  $\psi$  est continue sur  $T^1M$ , elle est uniformément continue sur  $\Omega$ , ainsi que son relevé sur  $\Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R}$ . La quantité ci-dessus dépend donc seulement de  $v^+$ , et pas de  $v^-$  ni de la position de  $v$  sur la géodésique  $(v^-v^+)$ . Notons alors  $\psi^+$  l'application mesurable définie sur  $\Lambda_\Gamma$  par

$$\psi^+(v^+) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\tilde{g}^s(v)) ds.$$

De même, on définit la fonction  $\psi^-$  en posant

$$\psi^-(v^-) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\psi}(\tilde{g}^{-s}(v)) ds.$$

On déduit de l'égalité  $\nu_o^{\tilde{f}} \times \nu_o^f$ - presque sûre (2.3) que  $\psi^+(v^+) = \tilde{\Psi}(v^-, v^+) = \psi^-(v^-)$ ,  $\nu_o^{\tilde{f}} \times \nu_o^f$ - presque sûrement.

Un argument classique dû initialement à Hopf et reposant sur le théorème de Fubini permet de conclure que  $\Psi$  est constante  $\nu_o^{\tilde{f}} \times \nu_o^f$ - presque sûrement. Nous proposons ici une mise en forme originale de cet argument due à Babillot (communication orale).

En utilisant l'égalité ci-dessus et le fait que les mesures  $\nu_o^{\tilde{f}}$  et  $\nu_o^f$  sont des probabilités sur  $\partial\tilde{M}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial^2\tilde{M}} \psi^+(v^+) \psi^-(v^-) d\nu_o^{\tilde{f}}(v^-) d\nu_o^f(v^+) &= \int_{\partial^2\tilde{M}} (\psi^+(v^+))^2 d\nu_o^{\tilde{f}}(v^-) d\nu_o^f(v^+) \\ &= \int_{\partial\tilde{M}} (\psi^+(v^+))^2 d\nu_o^f(v^+). \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_{\partial^2\tilde{M}} \psi^+(v^+) \psi^-(v^-) d\nu_o^f(v^+) d\nu_o^{\tilde{f}}(v^-) &= \int_{\partial\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^f(v^+) \int_{\partial\tilde{M}} \psi^-(v^-) d\nu_o^{\tilde{f}}(v^-) \\ &= \int_{\partial\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^f(v^+) \int_{\partial^2\tilde{M}} \psi^-(v^-) d\nu_o^{\tilde{f}}(v^-) d\nu_o^f(v^+) \\ &= \int_{\partial\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^f(v^+) \int_{\partial^2\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^{\tilde{f}}(v^-) d\nu_o^f(v^+) \\ &= \int_{\partial\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^f(v^+) \int_{\partial\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^f(v^+) \\ &= \left( \int_{\partial\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^f(v^+) \right)^2. \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, l'égalité

$$\int_{\partial\tilde{M}} (\psi^+(v^+))^2 d\nu_o^f(v^+) = \left( \int_{\partial\tilde{M}} \psi^+(v^+) d\nu_o^f(v^+) \right)^2$$

entraîne que  $\psi^+$  est constante  $\nu_o^f$ -presque sûrement. De même, on montre que  $\psi^-$  est constante  $\nu_o^{\tilde{f}}$ -presque sûrement. La fonction  $\Psi$  est donc constante  $\nu_o^{\tilde{f}} \times \nu_o^f$ -presque sûrement, donc aussi  $\tilde{m}^f$ -presque sûrement. Et on a alors

$$\Psi = \int_{T^1M} \Psi dm^f = \int \psi dm^f,$$

puisque l'invariance par le flot de la mesure  $m^f$  entraîne

$$\int_{T^1M} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(g^s(v)) ds dm^f(v) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{T^1M} \psi(g^s(v)) dm^f(v) ds = \int_{T^1M} \psi dm^f.$$

Ceci prouve que la mesure  $m^f$  est ergodique.  $\square$

**Corollaire 2.3.2 (Ledrappier [L])** *Pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , la mesure  $\nu_x^{s,f}$  converge vers  $\nu_x^f$  pour la topologie faible de  $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$ .*

**Démonstration :** La démonstration repose sur l'argument de Hopf. Soit  $\nu_o^{\tilde{f}}$  la valeur d'adhérence arbitraire choisie précédemment de la suite  $(\nu_o^{s,\tilde{f}})_{s>1}$ , et  $\nu_1$  et  $\nu_2$  deux valeurs d'adhérence a priori distinctes de la suite  $(\nu_o^{s,f})_{s>1}$ . En reprenant les arguments précédents, on peut construire deux probabilités ergodiques  $m_1^f$  et  $m_2^f$  sur  $\Omega$ , associées respectivement aux produits  $\nu_o^{\tilde{f}} \times \nu_1$  et  $\nu_o^{\tilde{f}} \times \nu_2$ . Pour tout  $v \in \Omega$  et toute application continue  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , la quantité

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\tilde{g}^{-s}(v)) ds$$

définit une fonction mesurable invariante par le flot géodésique et constante sur les variétés faiblement instables du flot géodésique. Notons alors  $\bar{\psi}(v)$  la fonction mesurable définie par

$$\bar{\psi}(v) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\tilde{g}^{-s}(v)) ds.$$

L'ergodicité de  $m_1^f$  (resp.  $m_2^f$ ) donne l'égalité  $\bar{\psi}(v) = \int_{T^1M} \psi dm_1^f$  pour  $m_1^f$ -presque tout  $v$  (resp.  $\bar{\psi}(v) = \int_{T^1M} \psi dm_2^f$  pour  $m_2^f$ -presque tout  $v$ ). D'après ce qui précède,  $\bar{\psi}$  ne dépend que de  $v^-$ , et ces égalités sont donc des égalités  $\nu_o^{\tilde{f}}$ -presque sûres. On en déduit que  $\int_{T^1M} \psi dm_1^f = \int_{T^1M} \psi dm_2^f$  pour toute application continue  $\psi$ , soit encore  $m_1^f = m_2^f$ , d'où le résultat voulu :  $\nu_1 = \nu_2$ .  $\square$

Notons que cette structure produit local de  $m^f$  permet également d'obtenir le mélange de la mesure  $m^f$ . C'est un résultat général de Babillot qui s'applique dans notre cadre pour donner le :

**Théorème 2.3.3 (Babillot [Ba2])** *Supposons  $M$  compacte ou convexe-cocompacte, et dans ce cas supposons que  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est topologiquement mélangeant. Alors la mesure  $m^f$  est fortement mélangeante.*

## 2.4 Lemme de l'Ombre

Le Lemme de l'Ombre est un outil fondamental pour l'étude des mesures  $\Gamma$ -quasi-invariantes sur  $\partial\widetilde{M}$  et par conséquent aussi pour celle des mesures invariantes par le flot

géodésique sur  $T^1M$ . Il est dû initialement à Sullivan [S1], et ce sont ses arguments qui sont repris ici dans notre cadre. L'énoncé de Sullivan donne, lorsque  $f \equiv 0$ , une estimée précise de la mesure  $\nu_o$  de l'« ombre » sur le bord  $\partial\widetilde{M}$  des boules de rayon  $r > 0$  fixé centrées en des points de l'orbite de  $o$ . Notons que ce lemme a été étendu par Coudène [Cou1] au cadre général qui nous intéresse.

Si  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $t \geq 0$ , notons  $V(x, \xi, t)$  l'ensemble des points  $\eta \in \partial\widetilde{M}$  dont le projeté sur le rayon géodésique  $[x\xi]$  est à distance supérieure à  $t$  de  $x$ . Notons aussi  $(\xi_x(t))_{t \geq 0}$  une paramétrisation à vitesse 1 du rayon géodésique  $[x\xi]$ .

Remarquons que les ensembles  $V(x, \xi, t)$  ne sont pas exactement des ombres de boules ; ils en sont néanmoins très proches, comme nous le verrons au paragraphe 6.2.4.

**Proposition 2.4.1 (« Lemme de l'Ombre », Coudène [Cou1])** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte, et  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une application höldérienne. Alors il existe des constantes  $C > 0$  et  $T_0 > 0$ , telles que pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  et  $t \geq T_0$ , on ait*

$$\frac{1}{C} e^{-\int_o^{\xi_o(t)} F} \leq \nu_o^f(V(o, \xi, t)) \leq C e^{-\int_o^{\xi_o(t)} F}$$

Remarquons que ce résultat reste vrai en remplaçant  $o$  par un point  $x \in \widetilde{M}$  quelconque ; la constante  $C$  dépend alors du point  $x$  choisi.

La proposition résulte immédiatement des deux lemmes suivants.

**Lemme 2.4.2** *Il existe une constante  $C_1 > 0$ , telle que pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  et  $t \geq 0$ , on ait*

$$\frac{1}{C_1} e^{-\int_o^{\xi_o(t)} F} \nu_{\xi_o(t)}^f(V(o, \xi, t)) \leq \nu_o^f(V(o, \xi, t)) \leq C_1 e^{-\int_o^{\xi_o(t)} F} \nu_{\xi_o(t)}^f(V(o, \xi, t)).$$

**Lemme 2.4.3** *Il existe des constantes  $C_2 > 0$  et  $T_0 > 0$ , telles que pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  et  $t \geq T_0$ , on ait*

$$\frac{1}{C_2} \leq \nu_{\xi_o(t)}^f(V(o, \xi, t)) \leq C_2.$$

**Démonstration du lemme 2.4.2:** Le lemme 2.2.3 donne

$$\nu_o^f(V(o, \xi, t)) = \int_{V(o, \xi, t)} e^{-\beta_\eta^f(o, \xi_o(t))} d\nu_{\xi_o(t)}^f(\eta).$$

Il reste à estimer l'exponentielle ci-dessous pour  $\eta \in V(o, \xi, t)$ . Par définition de  $V(o, \xi, t)$ , l'angle au sommet  $\xi_o(t)$  du triangle  $(o, \xi_o(t), \eta)$  est supérieur à  $\pi/2$ . Le résultat voulu découle alors du lemme ci-dessous appliqué au triangle  $(o, \xi_o(t), \eta)$ .  $\square$

**Lemme 2.4.4** *Soit  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une application höldérienne bornée. Il existe une constante  $C(f) > 0$ , telle que pour tout triangle  $(a, b, c)$  de  $\widetilde{M} \times \widetilde{M}^2$  dont l'angle au sommet  $a$  est supérieur ou égal à  $\frac{\pi}{2}$ , on a*

$$\left| \int_b^c f - \int_b^a f - \int_a^c f \right| \leq C(f).$$

**Démonstration :** Le triangle intérieur  $(p, q, r)$  à  $(a, b, c)$  est défini par  $p \in [bc]$ ,  $q \in [ac]$ ,  $r \in [ab]$  et  $\beta_a(q, r) = \beta_b(p, r) = \beta_c(p, q) = 0$ , si on note  $\beta_a(q, r) = d(a, q) - d(a, r)$ . Nous verrons au chapitre 6 (Proposition 6.2.1) qu'il existe une constante  $\alpha \geq 0$ , telle que la distance entre deux quelconques des trois sommets  $p, q, r$  est inférieure à  $\alpha$ . De plus, les projetés respectifs de  $a, b$  et  $c$  sur le côté opposé sont à distance au plus  $\alpha$  du sommet

correspondant du triangle intérieur. Si le triangle  $(a, b, c)$  est rectangle en  $a$ , le projeté de  $b$  sur  $[ac]$  (resp. de  $c$  sur  $[ab]$ ) est le point  $a$ . On en déduit que les distances  $d(a, q)$  et  $d(a, r)$  sont inférieures à  $\alpha$ . Décomposons  $\left| \int_b^c f - \int_b^a f - \int_a^c f \right|$  en

$$\left| \left( \int_b^p f - \int_b^r f \right) + \left( \int_p^c f - \int_q^c f \right) - \int_r^a f - \int_a^q f \right|.$$

D'après ce qui précède, les deux dernières intégrales sont majorées par  $\alpha \|f\|_\infty$ . Comme  $f$  est höldérienne, les deux différences d'intégrales sont majorées par une constante dépendant seulement de  $\alpha$  et de  $f$ . Le résultat en découle.  $\square$

**Démonstration du lemme 2.4.3:** Soient  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  et  $t \geq 0$  fixés. Comme  $M$  est compacte ou convexe-cocompacte, tous les points de  $\Lambda_\Gamma$  sont des points limites radiaux. En particulier, si  $\Delta$  désigne le diamètre de la projection sur  $M$  de l'ensemble non errant  $\Omega$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$ , tel que la distance de  $\gamma o$  à  $\xi_o(t)$  soit inférieure à  $\Delta$ . D'après le lemme 2.2.3, on a

$$\frac{d\nu_{\gamma o}^f}{d\nu_{\xi_o(t)}^f}(\eta) = e^{-\beta_\eta^f(\gamma o, \xi_o(t))}.$$

Comme  $F$  est höldérienne et  $d(\gamma o, \xi_o(t)) \leq \Delta$ , la dérivée de Radon-Nikodym ci-dessus est bornée par une constante  $c_2 > 0$  ne dépendant que de  $f$  et  $\Delta$ .

Notons que  $V(o, \xi, t) = V(\xi_o(t), \xi, 0)$ . D'après le lemme 6.2.7 du chapitre 6, il existe une constante  $K_2 > 0$ , telle que pour tout  $t \geq 0$

$$V(\gamma o, \xi, 2K_2) \subset V(o, \xi, t + K_2) = V(\xi_o(t), \xi, K_2) \subset V(\gamma o, \xi, 0).$$

Avec le fait que  $\nu_{\gamma o}^f = \gamma_* \nu_o^f$ , on déduit de ce qui précède que pour tout  $t \geq K_2$ , on a

$$\frac{1}{c_2} \nu_o^f(V(o, \gamma^{-1}\xi, 2K_2)) \leq \nu_{\xi_o(t)}^f(V(o, \xi, t)) \leq c_2 \nu_o^f(V(o, \gamma^{-1}\xi, 0)).$$

Le terme de droite est majoré par  $c_2$  car  $\nu_o^f$  est une probabilité. Le terme de gauche, lui, est minoré par une constante strictement positive car le support de  $\nu_o^f$  est égal à  $\Lambda_\Gamma$ . Ceci conclut la preuve du lemme.  $\square$

**Corollaire 2.4.5** *Pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , la mesure  $\nu_x^f$  est sans atome.*

**Démonstration :** Il suffit de le montrer pour  $x = o$ . D'après le lemme 2.1.1, il existe des constantes  $a > 0$  et  $b \geq 0$  telles que  $\int_o^{\xi_o(t)} F \geq at - b$ . En particulier,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_o^{\xi_o(t)} F} = 0$ . Or pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ , on a  $\{\xi\} = \bigcap_{t > 0} V(o, \xi, t)$ , d'où

$$\nu_o^f(\{\xi\}) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_o^{\xi_o(t)} F} = 0.$$

$\square$

## 2.5 C'est la mesure d'équilibre

Le fait que la mesure  $m^f$  est bien la mesure d'équilibre de  $f$  découle d'une part du Lemme de l'Ombre, et d'autre part du théorème suivant qui permet de calculer l'entropie de  $m^f$ .

**Théorème 2.5.1 (Kaimanovich [K1])** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte. Soit  $c$  un courant géodésique sur  $\Lambda_T^2$ , et  $m$  la mesure invariante associée sur  $T^1M$ . Alors pour  $c$ -presque tout  $(\xi, \eta) \in \Lambda_T^2$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2t} \log c(V(o, \xi, t) \times V(o, \eta, t)) = h_m(g).$$

**Corollaire 2.5.2** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte. La mesure  $m^f$  est l'unique mesure d'équilibre de  $f$ .*

**Démonstration :** Rappelons que  $dc^f(\xi, \eta) = e^{\int_o^\eta F + \int_o^\xi \tilde{F} - \int_\xi^\eta F} d\nu_o^f(\xi) d\nu_o^f(\eta)$ . Soient  $\xi$  et  $\eta$  deux points distincts du bord, et  $t \geq 0$  suffisamment grand pour que  $V(o, \xi, t)$  et  $V(o, \eta, t)$  soient disjoints. Soit  $(\xi', \eta') \in V(o, \xi, t) \times V(o, \eta, t)$ . La quantité  $|\int_o^{\eta'} F + \int_o^{\xi'} \tilde{F} - \int_{\eta'}^{\xi'} F|$  étant continue, elle est donc bornée sur  $V(o, \xi, t) \times V(o, \eta, t)$ . On peut donc remplacer  $c^f$  par  $\nu_o^{\tilde{f}} \otimes \nu_o^f$  dans le théorème 2.5.1. Le Lemme de l'Ombre donne alors l'encadrement

$$\frac{1}{C^2} e^{-\int_o^{\xi_o(t)} \tilde{F} - \int_o^{\eta_o(t)} F} \leq \nu_o^{\tilde{f}} \otimes \nu_o^f(V(o, \xi, t) \times V(o, \eta, t)) \leq C^2 e^{-\int_o^{\xi_o(t)} \tilde{F} - \int_o^{\eta_o(t)} F}.$$

On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2t} \log c^f(V(o, \xi, t) \times V(o, \eta, t)) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} \int_o^{\xi_o(t)} \tilde{F} + \frac{1}{t} \int_o^{\eta_o(t)} F \right).$$

En posant  $v = -\dot{\xi}_o(0)$  et  $w = \dot{\eta}_o(0)$ , on peut écrire

$$\frac{1}{t} \int_o^{\xi_o(t)} \tilde{F} = \frac{1}{t} \int_0^t F(g^{-s}v) ds, \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} \int_o^{\eta_o(t)} F = \frac{1}{t} \int_0^t F(g^s w) ds.$$

Comme  $m^f$  est ergodique, ces deux termes tendent  $m^f$ -presque sûrement vers  $\int_{T^1M} F dm^f$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . On en déduit

$$h_{m^f}(g) = \int_{T^1M} F dm^f = \delta^f - \int_{T^1M} f dm^f.$$

La mesure  $m^f$  est donc bien une mesure d'équilibre associée à  $f$ , et donc l'unique d'après le théorème 1.3.3.  $\square$

## 2.6 Dimension de Hausdorff

Dans ce paragraphe, pour tout point  $x \in \widetilde{M}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , nous introduisons une distance  $d_x^{f, \varepsilon}$  sur  $\partial \widetilde{M}$ , pour laquelle la mesure  $\nu_x^f$  est la mesure de Hausdorff associée, de dimension  $1/\varepsilon$ . C'est un résultat dû à Ledrappier [L] dans le cas d'un potentiel symétrique. Ici une définition légèrement différente des distances  $d_x^f$  nous permet d'étendre ce résultat

au cas des potentiels non symétriques. Notons que ce résultat est encore une conséquence du Lemme de l'Ombre prouvé plus haut.

Soit donc  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction höldérienne, et  $F = \delta^f - f$ . Introduisons pour tout  $x \in \bar{M}$  la fonction définie sur  $\partial^2\bar{M}$  par

$$\theta_x^f(\xi, \eta) = \exp\left(-\int_o^{[\xi\eta]} F\right),$$

où  $\int_x^{[\xi\eta]} F$  désigne l'intégrale de  $F$  le long du segment géodésique joignant  $x$  à son projeté sur la géodésique  $(\xi\eta)$ . Le lemme 2.1.1b permet de montrer que  $\theta_x^f(\xi, \eta) \rightarrow 0$  quand  $\eta \rightarrow \xi$ . On prolonge donc  $\theta_x^f$  par continuité sur la diagonale en posant  $\theta_x^f(\xi, \xi) = 0$ .

Cette fonction n'est pas une distance, car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Toutefois, elle vérifie l'inégalité ultramétrique suivante :

**Lemme 2.6.1 (Inégalité ultramétrique)** *Il existe une constante  $c > 0$ , telle que pour tout triplet  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  de  $\Lambda_\Gamma$ , on ait*

$$\theta_x^f(\xi_1, \xi_2) \leq e^c \max\{\theta_x^f(\xi_1, \xi_3), \theta_x^f(\xi_2, \xi_3)\}.$$

**Démonstration :** Notons  $q_1 \in [\xi_2\xi_3]$ ,  $q_2 \in [\xi_1\xi_3]$  et  $q_3 \in [\xi_1\xi_2]$  les sommets du triangle intérieur à  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , i.e. les points satisfaisant  $\beta_{\xi_1}(q_2, q_3) = \beta_{\xi_2}(q_1, q_3) = \beta_{\xi_3}(q_1, q_2) = 0$ . Les triangles de  $\bar{M}$  sont  $\alpha$ -fins, ce qui signifie que les trois points  $q_1, q_2, q_3$  sont à distance au plus  $\alpha$  les uns des autres (voir proposition 6.2.1 chapitre 6).

Notons  $p_1, p_2$  et  $p_3$  les projetés respectifs de  $o$  sur  $(\xi_2\xi_3)$ ,  $(\xi_1\xi_3)$  et  $(\xi_1\xi_2)$ . Plusieurs cas sont à considérer.

**Premier cas :** Pour  $1 \leq i \leq 3$ , on a  $d(p_i, q_i) \leq 2\alpha + C$ , où  $C$  est la constante donnée par le lemme 2.4.4 dans le cas où  $f \equiv 1$ .

Les trois points  $p_1, p_2, p_3$  sont alors à distance au plus  $5\alpha + 2C$  les uns des autres. En particulier, comme  $F$  est höldérienne, les trois intégrales  $\int_o^{p_1} F$ ,  $\int_o^{p_2} F$  et  $\int_o^{p_3} F$  sont à distance bornée les unes des autres, ce qui donne clairement l'inégalité souhaitée.

**Deuxième cas :** L'un des trois points  $p_i$  est à distance supérieure à  $2\alpha + C$  de  $q_i$ . Pour fixer les idées, supposons que  $p_1 \in [q_1\xi_3]$  et  $d(p_1, q_1) > 2\alpha + C$ . Montrons alors que  $d(p_1, p_2) \leq 3\alpha + C$ . Rappelons que  $p_2$  est le projeté de  $o$  sur  $(\xi_1\xi_3)$ . Notons  $(c(t))_{t \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(c'(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ) une paramétrisation de  $(\xi_1\xi_3)$  (resp.  $(\xi_2\xi_3)$ ) à vitesse 1 telle que  $c(0) = q_2$  (resp.  $c(0) = q_1$ ) et  $c(+\infty) = \xi_3$  (resp.  $c'(+\infty) = \xi_3$ ).

Soient  $t_1 = d(q_1, p_1)$  et  $t_2$  tel que  $c(t_2) = p_2$ . Par définition,  $t_2$  réalise le minimum de la fonction strictement convexe  $u \rightarrow d(o, c(u))$ . Remarquons que

$$d(o, c(t_1)) \leq d(o, p_1) + d(p_1, c(t_1)) \leq d(o, p_1) + \alpha. \quad (2.4)$$

Pour tout  $u \geq 0$ , on a

$$d(o, c(u)) \geq d(o, c'(u)) - d(c(u), c'(u)) \geq d(o, c'(u)) - \alpha.$$

Le triangle  $(o, p_1, c'(u))$  est rectangle en  $p_1$ , le lemme 2.4.4 donne alors  $d(o, c'(u)) \geq d(o, p_1) + d(p_1, c'(u)) - C$ . De plus,  $d(p_1, c'(u)) = |t_1 - u|$ . On en déduit que pour tout  $u \geq 0$ ,

$$d(o, c(u)) \geq d(o, p_1) + |t_1 - u| - C - \alpha. \quad (2.5)$$

Les inégalités (2.4) et (2.5) impliquent que si  $|u - t_1| > 2\alpha + C$ , alors  $d(o, c(u)) > d(o, c(t_1))$ , et donc que l'unique minimum  $t_2$  de la fonction  $u \rightarrow d(o, c(u))$  vérifie  $|t_2 - t_1| \leq 2\alpha + C$ . Or

par hypothèse, on a  $t_1 \geq 2\alpha + C$ ; on en déduit que  $t_2 \geq 0$ , c'est-à-dire que  $p_2$  appartient au rayon géodésique  $[q_2\xi_3]$ . L'inégalité triangulaire donne alors

$$d(p_1, p_2) = d(c'(t_1), c(t_2)) \leq d(c'(t_1), c(t_1)) + d(c(t_1), c(t_2)) \leq \alpha + |t_2 - t_1| \leq 3\alpha + C.$$

Comme  $f$  est höldérienne, on en déduit que les intégrales  $\int_o^{p_1} f$  et  $\int_o^{p_2} f$  sont à distance bornée l'une de l'autre.

Il reste à montrer qu'il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\int_o^{p_3} f \geq \min \left\{ \int_o^{p_1} f, \int_o^{p_2} f \right\} - c.$$

Pour cela, remarquons d'abord que

$$d(p_3, q_3) \leq 4\alpha + C.$$

En effet, dans le cas contraire, le raisonnement ci-dessus appliqué à  $p_3$  au lieu de  $p_1$  donnerait

$$d(p_3, p_2) \leq 3\alpha + C \quad \text{ou} \quad d(p_3, p_1) \leq 3\alpha + C. \quad (2.6)$$

Mais on montre sans difficulté (par définition du triangle intérieur, voir la proposition 6.2.1) que

$$d(p_3, p_2) \geq d(p_3, q_3) - \alpha \quad \text{et} \quad d(p_3, p_1) \geq d(p_3, q_3) + d(p_1, q_1) - \alpha \geq d(p_3, q_3) + \alpha + C.$$

Sous l'hypothèse  $d(p_3, q_3) > 4\alpha + C$ , les minoration ci-dessus sont en contradiction avec (2.6), d'où la majoration souhaitée.

On déduit de ce qui précède que  $d(p_3, q_1) \leq d(p_3, q_3) + \alpha \leq 5\alpha + C$ , et donc que la différence entre les intégrales  $\int_o^{p_3} f$  et  $\int_o^{q_1} f$  est bornée. Pour finir, remarquons que le triangle  $(o, p_1, q_1)$  est rectangle en  $p_1$ , ce qui implique par le lemme 2.4.4 que

$$\int_o^{q_1} F \geq \int_o^{p_1} F + \int_{p_1}^{q_1} F - C(F).$$

Mais  $(\xi_2, \xi_3) \in \Lambda_\Gamma^2$ , donc le segment  $(p_1 q_1)$  est dans  $\tilde{C}(\Gamma)$ , et le lemme 2.1.1 implique que  $\int_{p_1}^{q_1} F \geq a d(p_1, q_1) - b \geq -b$ . D'où  $\int_o^{p_3} F \geq \int_o^{p_1} F - C_{\text{ste}}(\alpha, F, b)$ .

On vérifie alors qu'on a bien obtenu l'inégalité ultramétrique souhaitée.  $\square$

Suivant Ghys et de la Harpe [G-H], à l'aide de cette inégalité ultramétrique, on peut modifier  $\theta_x^f$  pour en faire une distance. Pour cela, si  $(\xi, \eta) \in \partial^2 \tilde{M}$ , notons  $C(\xi, \eta)$  l'ensemble des chaînes finies ordonnées  $(a_i)_{0 \leq i \leq k}$  de points du bord, avec  $a_0 = \xi$  et  $a_k = \eta$ . Définissons alors

$$d_x^{f, \varepsilon}(\xi, \eta) = \inf_{(a_i) \in C(\xi, \eta)} \sum_{i=1}^k \left( \theta_x^f(a_{i-1}, a_i) \right)^\varepsilon.$$

**Proposition 2.6.2 (Ghys-de la Harpe [G-H])** *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , la fonction  $d_x^{f, \varepsilon}$  soit une distance sur  $\Lambda_\Gamma$ . De plus, pour tous points distincts  $\xi$  et  $\eta$  de  $\Lambda_\Gamma$ , on a*

$$(1 - 2\varepsilon') \left( \theta_x^f(\xi, \eta) \right)^\varepsilon \leq d_x^{f, \varepsilon}(\xi, \eta) \leq \left( \theta_x^f(\xi, \eta) \right)^\varepsilon,$$

avec  $\varepsilon' = \exp(\varepsilon c) - 1$ , où  $c$  est la constante du lemme 2.6.1.

Nous noterons  $B_x^{f,\varepsilon}(\xi, r)$  une boule pour cette distance. Le lemme suivant montre que ces boules sont comparables aux voisinages  $V(x, \xi, t)$ .

**Lemme 2.6.3** *Il existe des constantes  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 > 0$ , telles que pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  et  $t > 0$ , on ait*

$$B_x^{f,\varepsilon}(\xi, \alpha_1 e^{-\int_x^{\xi_x(t)} F}) \subset V(x, \xi, t) \cap \Lambda_\Gamma \subset B_x^{f,\varepsilon}(\xi, \alpha_2 e^{-\int_x^{\xi_x(t)} F}).$$

**Démonstration :** Notons  $(\xi_x(t))_{t \geq 0}$  la paramétrisation à vitesse 1 du rayon  $[x\xi]$ . Soit  $\eta \in \Lambda_\Gamma$ ,  $p$  le projeté de  $x$  sur  $(\xi\eta)$ , et  $\xi_x(t_0)$  le projeté de  $\eta$  sur  $[x\xi]$ . Alors, d'après la proposition 6.2.1 appliquée dans le triangle  $(x, \xi, \eta)$ , la distance  $d(p, \xi_x(t_0))$  est inférieure ou égale à  $3\alpha$ . On en déduit que la quantité  $\left| \int_x^p F - \int_x^{\xi_x(t_0)} F \right|$  est bornée par une constante dépendant de  $f$  et de  $\alpha$ .

Si  $\eta \in V(x, \xi, t)$ , alors  $t \leq t_0$ , d'où  $\int_x^{\xi_x(t_0)} F = \int_x^{\xi_x(t)} F + \int_{\xi_x(t)}^{\xi_x(t_0)} F$ . Le segment  $[\xi_x(t)\xi_x(t_0)]$  est inclus dans  $\tilde{C}(\Gamma)$ , le lemme 2.1.1 donne donc  $\int_{\xi_x(t)}^{\xi_x(t_0)} F \geq a(t_0 - t) - b \geq -b$ . On en déduit qu'il existe une constante  $c_2$  dépendant de  $\alpha$ , de  $F$  et de  $b$ , telle que

$$\int_x^p F = -\log \theta_x^f(\xi, \eta) \geq \int_x^{\xi_x(t)} F - c_2.$$

L'inclusion  $V(x, \xi, t) \cap \Lambda_\Gamma \subset B_x^{f,\varepsilon}(\xi, e^{c_2} e^{-\int_x^{\xi_x(t)} F})$  s'en déduit immédiatement.

Si  $\eta \notin V(x, \xi, t)$ , alors  $t \geq t_0$  et  $\int_x^{\xi_x(t)} F = \int_x^{\xi_x(t_0)} F + \int_{\xi_x(t_0)}^{\xi_x(t)} F$ . Le même raisonnement que ci-dessus conduit alors à l'autre inclusion du lemme.  $\square$

**Remarque 2.6.4** Dans le cas d'un potentiel  $f$  symétrique, on peut préférer la définition suivante de  $\theta_x^f$  :

$$\tilde{\theta}_x^f(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2} \left( \int_x^\xi F + \int_x^\eta F - \int_\xi^\eta F \right)}.$$

Le lemme 2.4.4 assure que dans ce cas  $\tilde{\theta}_x^f$  est uniformément proche de  $\theta_x^f$ , de sorte que  $\tilde{\theta}_x^f$  vérifie également l'inégalité ultramétrique et la conclusion du lemme ci-dessus. Un cas particulier important est celui des *distances visuelles*  $(d_x)_{x \in \tilde{M}}$ , ou *distances de Gromov* sur le bord, définies pour tout  $x \in \tilde{M}$  et  $(\xi, \eta) \in \partial^2 \tilde{M}$  par

$$d_x(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}(d(x, \xi) + d(x, \eta) - d(\xi, \eta))}.$$

Soulignons le fait que  $d_x$  ne satisfait en général pas l'inégalité triangulaire, sauf lorsque la courbure de  $\tilde{M}$  est majorée par  $-1$  (Bourdon [Bou]). On notera parfois  $|\xi - \eta|_x$  pour  $d_x(\xi, \eta)$ . Remarquons que le lemme 2.6.3 ci-dessus permet en particulier de comparer les distances  $(d_x^{f,\varepsilon})_{x \in \tilde{M}}$  aux distances visuelles.

**Proposition 2.6.5** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte,  $f : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel höldérien et  $x \in \tilde{M}$  fixé. La mesure  $\nu_x^f$  est la mesure de Hausdorff de dimension  $1/\varepsilon$  sur  $\Lambda_\Gamma$  muni de la distance  $d_x^{f,\varepsilon}$ .*



**Démonstration :** Soient  $x \in \widetilde{M}$  et  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ . L'application  $t \mapsto \int_x^{\xi_x(t)} F$  est continue et tend vers  $+\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (voir le lemme 2.1.1). En particulier, pour tout  $0 < r < 1$ , on peut trouver  $t_1 > 0$  et  $t_2 > 0$  tels que  $r = \alpha_1 e^{-\varepsilon \int_x^{\xi_x(t_1)} F}$  et  $r = \alpha_2 e^{-\varepsilon \int_x^{\xi_x(t_2)} F}$ . Le Lemme de l'Ombre combiné au lemme 2.6.3 donne alors

$$\frac{1}{C \alpha_2^{1/\varepsilon}} \leq \frac{\nu_x^f(B_x^{f,\varepsilon}(\xi, r))}{r^{1/\varepsilon}} \leq \frac{C}{\alpha_1^{1/\varepsilon}},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 2.7 Exemples

Dans ce paragraphe, nous donnons dans deux cas particuliers une formule plus simple ou mieux connue pour le courant géodésique  $c^f$  construit plus haut.

Le cas le plus simple est celui de la mesure d'entropie maximale  $m^0$  associée au potentiel  $f \equiv 0$ . Dans ce cas, si  $|\xi - \eta|_x$  désigne la distance visuelle vue de  $x$  entre  $\xi$  et  $\eta$ , on a

$$dc^0(\xi, \eta) = \frac{d\nu_x^0(\xi) d\nu_x^0(\eta)}{|\xi - \eta|_x^{2\delta^0}}. \quad (2.7)$$

Il existe une formule analogue (voir Babillot [Ba1]) lorsque  $f = \alpha$  est une 1-forme fermée sur  $M$  (donc antisymétrique) :

$$dc^\alpha(\xi, \eta) = \frac{d\nu_x^\alpha(\xi) d\nu_x^\alpha(\eta)}{|\xi - \eta|_x^{2\delta^\alpha}}. \quad (2.8)$$

Cette formule simplifiée vient du fait que  $\alpha$  est fermée et antisymétrique, ce qui implique que pour tout  $(\xi, \eta) \in \partial^2 \widetilde{M}$ , on a

$$\int_x^\eta \alpha + \int_x^\xi \alpha - \int_\xi^\eta \alpha = \int_x^\eta \alpha + \int_\eta^\xi \alpha + \int_\xi^x \alpha = 0.$$

On en déduit alors la formule simplifiée pour  $c^\alpha$ .

Malheureusement, il n'existe pas d'expression simple du courant  $c^f$  dans le cas d'un potentiel höldérien  $f : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$  quelconque. Toutefois, pour  $x \in \widetilde{M}$  fixé, on peut définir une nouvelle mesure sur  $\partial^2 \widetilde{M}$  en posant

$$d\tilde{c}_x^f(\xi, \eta) = \frac{d\nu_x^f(\xi) d\nu_x^f(\eta)}{\theta_x^f(\xi, \eta) \theta_x^f(\eta, \xi)}.$$

Cette nouvelle mesure n'est pas  $\Gamma$ -invariante, et dépend du point  $x$  choisi pour la définir, mais son expression est similaire aux expressions (2.7) et (2.8) ci-dessus ; elle permet donc d'obtenir un « analogue » de ces formules, au sens du lemme suivant :

**Lemme 2.7.1** *Il existe une constante  $D > 0$ , telle que pour tout  $(\xi, \eta) \in \partial^2 \widetilde{M}$ , on ait*

$$\frac{1}{D} \leq \frac{d\tilde{c}_x^f}{dc^f}(\xi, \eta) \leq D.$$

**Démonstration :** Il suffit de montrer que les densités respectives de  $c^f$  et  $\tilde{c}_x^f$  par rapport au produit  $\nu_x^{\tilde{f}} \times \nu_x^f$  sont à distance bornée l'une de l'autre. Plus précisément, en notant  $p$  le projeté de  $x$  sur  $(\xi\eta)$ , il suffit de contrôler, uniformément en  $(\xi, \eta)$ , la quantité

$$\int_x^p F + \int_x^p \tilde{F} - \int_x^\eta F - \int_x^\xi \tilde{F} + \int_\xi^\eta F = \left( \int_x^p F - \rho_\eta^F(x, p) \right) + \left( \int_x^p \tilde{F} - \rho_\xi^{\tilde{F}}(x, p) \right) .$$

Le triangle  $(x, p, \eta)$  est rectangle en  $p$ , d'où  $\left| \int_x^p F - \rho_\eta^F(x, p) \right| \leq C(F)$  d'après le lemme 2.4.4. De même, le triangle  $(x, p, \xi)$  étant rectangle en  $p$ , on a  $\left| \int_x^p \tilde{F} - \rho_\xi^{\tilde{F}}(x, p) \right| \leq C(F)$ . Le lemme est donc démontré.  $\square$



## Chapitre 3

# Unique ergodicité du flot horocyclique des surfaces hyperboliques compactes

Dans ce chapitre, nous donnons un schéma de preuve de l'unique ergodicité du flot horocyclique et de l'équidistribution des moyennes de Birkhoff sur une surface hyperbolique compacte. Ceci nous permettra de mettre en lumière les difficultés rencontrées dans les chapitres suivants de cette thèse, lorsqu'on cherche à étendre ces résultats.

### 3.1 Le théorème de Furstenberg

Nous considérons une surface hyperbolique compacte  $S$ , qui s'obtient donc comme le quotient de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}$  par son groupe fondamental  $\Gamma = \pi_1(S)$ , sous-groupe discret et sans torsion de  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Dans le modèle du demi-espace supérieur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  pour  $\mathbb{H}$ , les géodésiques sont les demi-droites verticales et les demi-cercles euclidiens orthogonaux au bord, et les *horocycles* sont les droites horizontales et les cercles euclidiens tangents au bord de  $\mathbb{H}$ .

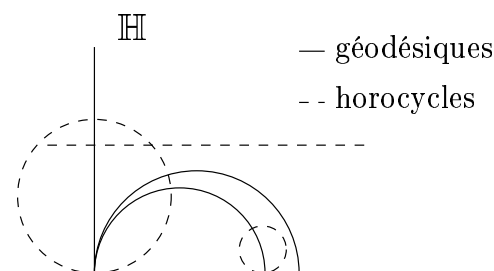


FIG. 3.1 – Géodésiques et horocycles

Le groupe  $PSL(2, \mathbb{R})$  des isométries directes de  $\mathbb{H}$  agit simplement transitivement sur le fibré unitaire tangent  $T^1\mathbb{H}$ , de sorte que l'on identifiera ces deux espaces. L'identification usuelle associe l'identité de  $PSL(2, \mathbb{R})$  au vecteur de coordonnées  $(0, 1)$  basé au point de coordonnées  $(0, 1)$ . L'action du flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  correspond alors à la multiplication

à droite par  $\{a^t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$ .

Un vecteur  $u$  de  $T^1\mathbb{H}$  est orthogonal à exactement deux horocycles contenant son point base, l'un tel que  $u$  pointe vers l'intérieur, et l'autre tel que  $u$  pointe vers l'extérieur ; on appellera *horocycle fortement instable de  $u$* , et on notera  $H^+(u)$ , l'ensemble des vecteurs orthogonaux à cet horocycle et pointant vers l'extérieur. Le flot horocyclique  $(h^s)_{s \in \mathbb{R}}$  agit sur  $T^1\mathbb{H}$  en décalant un vecteur  $u$  d'une distance  $|s|$  le long de son horocycle fortement instable. Cette action correspond à la multiplication à droite par  $\{n^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\}$  dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Un calcul simple donne la relation fondamentale suivante :

$$g^t \circ h^s = h^{se^t} \circ g^t. \quad (3.1)$$

Dans la suite de la thèse, nous noterons  $m^{ps}$  la mesure  $m^0$  associée par la construction du paragraphe précédent au potentiel  $f \equiv 0$ . Cette mesure est appelée *mesure de Patterson-Sullivan* car cette construction leur est originellement due. C'est également la *mesure d'entropie maximale* du flot géodésique (corollaire 2.5.2), encore appelée *mesure de Bowen-Margulis*.

Sur  $T^1S$ , et plus généralement sur le fibré unitaire tangent d'une variété localement symétrique de rang 1, cette mesure coïncide avec la *mesure de Liouville*, i.e. la mesure de Lebesgue sur le fibré unitaire tangent, qui est invariante par le flot géodésique.

Sur le fibré tangent  $T^1S$  d'une surface hyperbolique, cette mesure de Liouville est de plus invariante par le flot horocyclique. Lorsque  $S$  est compacte, c'est en fait l'unique mesure  $(h^s)$ -invariante :

**Théorème 3.1.1 (Furstenberg, [F])** *Soit  $S$  une surface hyperbolique compacte. Le flot horocyclique de  $T^1S$  est uniquement ergodique, i.e. il existe une unique mesure invariante par  $(h^s)_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $T^1S$ , la mesure de Liouville  $m^{ps}$ .*

Ce résultat est équivalent au résultat suivant sur le comportement des moyennes de Birkhoff du flot horocyclique. Pour toute fonction continue  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ , posons

$$M_{r,u}(\psi) := \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \psi \circ h^s(u) ds.$$

**Théorème 3.1.2** *Soit  $S$  une surface hyperbolique compacte. Pour tout  $u \in T^1S$ , la suite des mesures de probabilité  $(M_{r,u})_{r>0}$  converge faiblement vers la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . De plus, si  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue fixée, les moyennes  $M_{r,u}(\psi)$  convergent uniformément en  $u \in T^1S$ .*

## 3.2 Démonstrations

Nous commencerons par la preuve du théorème 3.1.2, et nous montrerons ensuite que les deux théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 sont équivalents. (Cette équivalence est un résultat classique et élémentaire de théorie ergodique, mais nous la détaillerons par souci de clarté.)

**Démonstration du théorème 3.1.2:** L'idée de la preuve est d'utiliser une propriété d'« équicontinuité poussée par le flot » (théorème 3.2.1) des moyennes horosphériques. Par un argument d'équicontinuité, on se ramène à la propriété d'équidistribution qui nous intéresse.

Pour toute fonction  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $u \in T^1S$ ,  $r > 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ , posons

$$M_{r,u}^t(\psi) := M_{r,u}(\psi \circ g^t) = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r (\psi \circ g^t) \circ h^s(u) ds,$$

et remarquons immédiatement que

$$M_{r,u}^t(\psi) = M_{re^t, g^t u}(\psi). \quad (3.2)$$

Le fait que la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  soit de type produit a permis à Babillot de montrer, sous une hypothèse assez générale de non-arithméticité du spectre des longueurs, que cette mesure est mélangeante, et d'en déduire (dans un cadre très général, englobant celui de ce chapitre) le théorème d'« équidistribution poussée par le flot » suivant :

**Théorème 3.2.1 (Babillot, [Ba2])** *Pour tout  $u \in T^1S$  et  $r > 0$  fixés, les probabilités  $(M_{r,u}^t)_{t \geq 0}$  convergent faiblement vers la mesure  $m^{ps}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

Le lemme ci-dessous est fondamental :

**Lemme 3.2.2** *Pour toute fonction  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  continue, et  $r > 0$ , les applications  $u \rightarrow M_{r,u}^t(\psi)$  sont équicontinues en  $t \geq 0$ .*

**Démonstration :** La preuve est reprise de Babillot [Ba3] et repose de manière cruciale sur la relation (3.1). Nous aurons besoin du flot horocyclique stable, noté  $(\bar{h}^s)_{s \in \mathbb{R}}$ , qui déplace les vecteurs le long de leur horosphère fortement stable. Il correspond dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  à une action à droite du sous-groupe à un paramètre  $\{\bar{n}^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\}$ . L'analogie de la relation (3.1) est alors  $g^t \circ \bar{h}^s = \bar{h}^{se^{-t}} \circ g^t$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $\psi$  étant uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $w \in T^1S$ , tout  $|t| < \delta$  et  $|s| < \delta$ , on ait  $|\psi(\bar{h}^s \circ g^t(w)) - \psi(w)| < \varepsilon$ .

Fixons  $v \in T^1S$ . Considérons des voisinages  $V_v$  de  $v$  de la forme  $V_v = v.V$ , où  $V$  désigne un voisinage de l'identité dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Tout élément  $g \in G$  s'écrit de manière unique sous la forme  $g = n^s a^t \bar{n}^{s'}$ , et les paramètres varient continûment en fonction de  $g$ . En particulier, pour tout  $w \in V_v$  et tout  $s \in [-r, r]$ , on peut écrire  $h^s(w) = \bar{h}^{\bar{\sigma}(w,s)} \circ g^{\tau(w,s)} \circ h^{\sigma(w,s)}(v)$ . Si le voisinage  $V_v$  est choisi assez petit, on peut assurer que  $|\bar{\sigma}(w,s)| < \delta$ ,  $|\tau(w,s)| < \delta$  et  $|\sigma(w,s) - s| < \delta$ . On a alors pour tout  $t \geq 0$  et  $w \in V_v$

$$\begin{aligned} M_{r,w}^t(\psi) &= \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \psi \circ g^t \circ \bar{h}^{\bar{\sigma}(w,s)} \circ g^{\tau(w,s)} \circ h^{\sigma(w,s)}(v) ds \\ &= \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \psi \circ \bar{h}^{\bar{\sigma}(w,s)e^{-t}} \circ g^{\tau(w,s)} \circ g^t \circ h^{\sigma(w,s)}(v) ds. \end{aligned}$$

Vu le choix de  $w$ , le terme de droite est  $\varepsilon$ -proche de  $\frac{1}{2r} \int_{-r}^r \psi \circ g^t \circ h^{\sigma(w,s)}(v) ds$ , et ceci uniformément en  $t \geq 0$ . Il reste alors à rétrécir  $V_v$  suffisamment pour que le paramètre  $\sigma(w,s)$  soit très proche de  $s$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 3.1.2. La propriété d'équicontinuité ci-dessus permet immédiatement de déduire que pour toute fonction continue  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ , les moyennes  $M_{r,u}^t(\psi)$  convergent uniformément en  $u \in T^1S$  vers  $\int_{T^1S} \psi dm^{ps}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , puisque  $T^1S$  est compact.

La relation (3.2) donne  $M_{r,u}(\psi) = M_{1,v}^t(\psi)$  pour  $t = \log r$  et  $v = g^{-t}u$ . De cette relation et de la convergence uniforme de  $M_{1,v}^t(\psi)$  vers  $\int_{T^1S} \psi dm^{ps}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , on déduit la

convergence uniforme de  $M_{r,u}(\psi)$  vers  $\int_{T^1S} \psi dm^{ps}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . Ceci conclut la preuve du théorème 3.1.2.  $\square$

Remarquons que dans le cas non compact, l'équicontinuité permet seulement d'obtenir une convergence uniforme sur les compacts du fibré unitaire tangent des moyennes  $M_{r,u}^t(\psi)$ .

**Démonstration de l'équivalence entre les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2:** Supposons le flot horocyclique uniquement ergodique. Pour tout  $u \in T^1S$ , toute valeur d'adhérence de la famille  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  est nécessairement une probabilité invariante par le flot. Donc toutes les suites  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  tendent vers  $m^{ps}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .

La convergence est nécessairement uniforme en  $u \in T^1S$  à  $\psi$  fixée; en effet, sinon on pourrait trouver  $\varepsilon > 0$ , une suite croissante  $(r_n)$  tendant vers  $+\infty$ , une suite  $(u_n)$  de  $T^1S$  et une fonction continue  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour tout  $n \geq 0$ , on ait

$$\left| M_{r_n, u_n}(\psi) - \int_{T^1S} \psi dm^{ps} \right| \geq \varepsilon.$$

Quitte à extraire, on peut supposer que  $(u_n)$  converge vers  $u$ ; d'autre part, l'équicontinuité assure que pour  $n$  assez grand, les quantités  $M_{r_n, u_n}(\psi)$  et  $M_{r_n, u}(\psi)$  sont  $\varepsilon/2$ -proches. À la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , tout ceci donne une contradiction avec la convergence de  $(M_{r_n, u}(\psi))_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $m^{ps}(\psi)$ .

La réciproque repose sur la formule suivante, qui découle du théorème de Fubini. Si  $M$  est une mesure de probabilité invariante par  $(h^s)_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $T^1S$ , on a

$$\int_{T^1S} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r \psi \circ h^s(u) ds dM(u) = \int_{T^1S} \psi(u) dM(u). \quad (3.3)$$

Le théorème 3.1.2 donne la convergence du terme de gauche vers  $\int_{T^1S} \psi dm^{ps}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $M = m^{ps}$ ; ceci étant vrai pour toute mesure  $M$  invariante, on a bien prouvé que  $m^{ps}$  est l'unique probabilité invariante par  $(h^s)_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $T^1S$ .  $\square$

### 3.3 Remarques

**Remarque 3.3.1** En dimension supérieure ou égale à 3, il n'y a plus de flot horocyclique, et son rôle est joué par l'holonomie du feuilletage. La notion de mesure invariante par le flot horocyclique est remplacée par celle de mesure transverse invariante pour un feuilletage, et à l'aide de la famille des mesures conditionnelles de la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  sur les horosphères, on peut définir des moyennes sur de grandes boules horosphériques, analogues aux moyennes de Birkhoff du flot horocyclique. Les énoncés du paragraphe précédent gardent donc encore un sens en dimension plus grande.

En revanche, la stratégie des preuves change. Au paragraphe précédent, on a montré l'équidistribution des moyennes grâce au théorème d'équidistribution poussée par le flot de Babillot, et on en a déduit l'unique ergodicité du flot. Or l'unique ergodicité du flot horocyclique se généralise à de nombreuses situations, alors que des résultats d'équidistribution des moyennes horosphériques sont plus difficiles à obtenir en dimension quelconque.

Nous démontrerons donc d'abord des résultats de type unique ergodicité (théorèmes 5.2.7 et 8.2.2) en utilisant l'équidistribution poussée par le flot et la relation (3.2), qui restent vrais dans les généralisations que nous envisagerons; nous essaierons ensuite de

démontrer des propriétés d'équidistribution. L'étude d'une telle propriété sur les variétés géométriquement finies est l'objet de la troisième partie de cette thèse (chapitres 6 et 7 principalement).

**Remarque 3.3.2** La démonstration de la propriété d'équicontinuité, cruciale pour obtenir une propriété d'équidistribution uniforme, peut se démontrer dans le cadre des variétés non compactes à courbure négative variable (voir le lemme 5.4.3) ; elle requiert plusieurs lemmes techniques dus à Roblin, détaillés au paragraphe 5.3.1), mais elle nécessite surtout certaines hypothèses supplémentaires.

En effet, la démonstration du lemme 3.2.2 fait appel (de manière implicite) au fait que le bord de la boule horosphérique  $\{h^s(u), |s| \leq r\}$  est de mesure de Lebesgue nulle. Cette propriété restera toujours vraie sur les horocycles de surfaces (car le bord d'une boule a deux points, et que les mesures considérées seront toujours supposées sans atome), et sur les variétés localement symétriques de rang 1 (propriété due à Flaminio [Fl]), et redémontrée par Roblin [Ro2] dans le cas des variétés hyperboliques).

Toutefois, dans le cas général, nous serons obligés de faire l'hypothèse que la mesure du bord des boules est nulle, ou du moins une hypothèse analogue sur la croissance de couronnes (voir l'hypothèse (8.1)).

**Remarque 3.3.3** Formellement, le raisonnement qui permet de déduire l'unique ergodicité de l'équidistribution pourra s'appliquer dans des situations plus complexes grâce à une formule dite d'autoadjonction (lemme 5.3.6), qui jouera le rôle de la formule (3.3). Ainsi, une propriété d'équidistribution uniforme implique toujours l'unique ergodicité. Cependant, le résultat d'équidistribution recherché est plus difficile à obtenir que l'unique ergodicité, si bien que cette implication est sans intérêt en pratique.

**Remarque 3.3.4** Dans les raisonnements du paragraphe ci-dessus, la compacité de  $T^1S$  intervient de façon cruciale. Dans le cas de variétés géométriquement finies avec cusps, cette compacité fait défaut, et il nous faut adapter notre stratégie. Sous une hypothèse notée (\*\*) sur la croissance des cusps de  $M$ , on montrera d'abord que la famille de probabilités  $(M_{r,u})_{r>0}$  est « tendue », c'est-à-dire que ses valeurs d'adhérence pour la topologie faible sont des probabilités. Ce résultat de non divergence des moyennes fera l'objet du chapitre 6 dans le cas des moyennes associées à la mesure de Patterson-Sullivan. On utilise alors un énoncé de Roblin de type unique ergodicité analogue au théorème 3.1.1 pour montrer l'équidistribution, sous réserve du contrôle de la croissance du bord des boules horosphériques de rayon  $r$  quand  $r \rightarrow \infty$ . Ceci est fait au chapitre 7 dans le cas des surfaces, et au paragraphe 8.1 en dimension quelconque, mais sous certaines conditions.





## Deuxième Partie

# Mesures transverses quasi-invariantes pour un feuilletage

Cette partie est consacrée à l'étude de la notion de mesure transverse quasi-invariante.

Dans le cas du feuilletage  $\mathcal{W}^{su}$  d'une variété compacte (ou convexe-cocompacte), toute fonction höldérienne induit de manière naturelle un cocycle  $\Delta^f$  sur  $\mathcal{W}^{su}$ , une mesure  $m^f$  invariante par le flot géodésique (la *mesure d'équilibre* de  $f$ , dont la construction est rappelée au chapitre 2), et une mesure transverse  $\mu^f = \{\mu_T^f\}$  quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta^f$ .

Le coeur de cette partie est la preuve géométrique du résultat suivant :

**Théorème 5.2.7 (Babillot-Ledrappier [Ba-L])** *Soit  $M$  une variété compacte ou convexe-cocompacte, et dans ce dernier cas, supposons que le flot géodésique agissant sur  $T^1M$  est topologiquement mélangeant. Soit  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction höldérienne. Alors la mesure  $\mu^f = \{\mu_T^f\}$  est (à une constante multiplicative près) l'unique mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta^f$ .*

Nous appliquons ce théorème dans l'étude des mesures transverses invariantes pour le feuilletage horosphérique d'un revêtement de  $M$ . Plus précisément, si  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  est une variété compacte ou convexe-cocompacte, et si  $\bar{\Gamma} \triangleleft \Gamma$  est un sous-groupe distingué de  $\Gamma$ , la question est de caractériser les mesures transverses invariantes pour le feuilletage horosphérique de la variété  $\overline{M} = \widetilde{M}/\bar{\Gamma}$ .

Cette question a été posée et étudiée par Babillot et Ledrappier dans [Ba-L] lorsque le groupe de revêtement  $\Gamma/\bar{\Gamma}$  est abélien, et résolue très récemment dans [Sa] dans ce cas.

Si  $\alpha$  est une 1-forme de  $M$  qui s'annule sur les lacets de  $\bar{\Gamma}$ , la mesure transverse  $\mu^\alpha = \{\mu_T^\alpha\}$  se relève à  $T^1\overline{M}$  en une mesure transverse invariante par holonomie. Le théorème 5.2.7 ci-dessus nous permet de montrer (voir le théorème 5.5.1) que toute mesure transverse invariante et ergodique pour le feuilletage horosphérique de  $\overline{M}$  qui se projette sur  $T^1M$  en une mesure transverse quasi-invariante par holonomie est nécessairement du type ci-dessus.

La seconde application du théorème 5.2.7 est l'étude de propriétés d'équidistribution de moyennes horosphériques vers la mesure  $m^f$ .

Soient  $\Delta$  un cocycle fixé du feuilletage,  $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$  une famille de mesures sur les feuilles,  $u \in T^1M$  un vecteur et  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante d'ensembles de la feuille

$H^+(u)$ . Nous étudions les moyennes suivantes :

$$M_n^{\Delta, \alpha}(\psi) = \frac{1}{D_n} \int_{E_n} \psi(v) \Delta(v, u) d\alpha_{H^+(u)}(v), \quad \text{où} \quad D_n = \int_{E_n} \Delta(v, u) d\alpha_{H^+(u)}(v).$$

Dans le cadre d'un feuilletage abstrait, le chapitre 4 est consacré à la démonstration du résultat suivant (théorème 4.2.1). Sous certaines conditions techniques sur  $\alpha$ ,  $\Delta$  et  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , vérifiées dans les cas qui nous intéressent, toutes les valeurs d'adhérence de la suite  $(M_n^{\Delta, \alpha})$  sont de la forme  $\nu \circ \alpha$ , où  $\nu = \{\nu_T\}$  est une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta$ , et la mesure  $\nu \circ \alpha$  est définie par

$$\nu \circ \alpha(B) = \int_T d\nu_T(t) \int_{P_t} \Delta(x, t) d\alpha(x)$$

sur toute boîte  $B$  qui s'écrit comme le produit  $T \times P$  d'une transversale par une plaque.

Notons que ce résultat donne un critère abstrait d'existence d'une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta$ .

Au paragraphe 5.4, nous appliquons ce résultat dans le cas du feuilletage horosphérique d'une variété compacte ou convexe-cocompacte : lorsque la famille de mesures sur les feuilles est la famille  $\{\mu_{H^+}^f\}$  des mesures conditionnelles de la mesure d'équilibre  $m^f$  de  $f$ , en utilisant le résultat 5.2.7 d'unicité d'une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta^f$ , nous obtenons, pour des suites  $(E_n)$  bien choisies, l'équidistribution des mesures  $(M_n^{\Delta^f, \mu^f})$  vers la mesure  $m^f$ .

## Chapitre 4

# Mesures quasi-invariantes pour un feuilletage et limites de moyennes longitudinales

Ce chapitre est une note parue aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [Sc2].

### Résumé :

Dans cette note, nous généralisons un résultat de Goodman-Plante qui caractérise les valeurs d'adhérence de certaines suites de moyennes transverses à un feuilletage : ce sont toutes des mesures transverses invariantes par holonomie. Nous montrons un résultat analogue pour des moyennes longitudinales pondérées par un cocycle  $\Delta$  : leurs valeurs d'adhérence sont le produit d'une mesure transverse quasi-invariante pour  $\Delta$  et de la mesure longitudinale de départ.

### 4.1 Cadre

Soit  $(M, \mathcal{F})$  un feuilletage abstrait (au sens de [C-C]) de dimension  $p$  d'un espace métrisable compact  $M$ , dont les transversales sont modélées sur un espace topologique  $X$  localement compact métrisable à base dénombrable d'ouverts. Si  $\varphi : B \rightarrow U \times \mathbb{R}^p$  est une carte du feuilletage, avec  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $B$  est appelée une *boîte* ; une *plaque* de  $B$  est un ensemble  $P = \varphi^{-1}(\{u\} \times \mathbb{R}^p)$ , et une *transversale*  $T$  de  $B$  est de la forme  $T = \varphi^{-1}(U \times \{x\})$ . Si  $P$  est une plaque et  $T$  une transversale de  $B$ , nous noterons  $B = T \times P$ . Si  $x \in B$ ,  $P_x$  désigne sa plaque dans  $B$  et  $F(x)$  sa feuille. Nous ne considérons que les boîtes relativement compactes d'un *recouvrement régulier*  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{F}$ , i.e. un recouvrement par des boîtes  $B_i$  formant une base de la topologie de  $\mathcal{F}$ , telles que si  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ , toute plaque de  $B_i$  intersecte au plus une plaque de  $B_j$ . Comme  $M$  est compact, on peut recouvrir  $\mathcal{F}$  par un nombre fini de telles boîtes. Pour un tel recouvrement, si  $T_i$  est une transversale de  $B_i$ , considérons *l'espace des plaques* (compact) associé  $X = \sqcup_i \overline{T_i}$ .

Une *application d'holonomie*  $\zeta : T \rightarrow T'$  entre deux transversales est un homéomorphisme engendré (au sens d'un pseudogroupe) par les homéomorphismes entre deux transversales d'une même boîte  $B$  de  $\mathcal{U}$  qui préservent les plaques de  $B$ . Un élément  $\gamma : x \rightarrow y$  du *groupoïde d'holonomie*  $\mathcal{G}$  (voir [Co]) est le germe d'une holonomie  $\zeta$  telle que  $\zeta(x) = y$ .

Une feuille  $F$  sera dite sans holonomie si pour tous  $(x, y) \in F^2$ , il existe un unique  $\gamma \in \mathcal{G}$  tel que  $\gamma : x \rightarrow y$ . Un *système de Haar* (resp. une *mesure longitudinale*)  $\lambda$  est la donnée d'une famille de mesures de Radon  $\lambda_F$  sur chaque feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$ , telle que pour toute application continue  $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $B = T \times P$  une boîte relativement compacte, l'application

$$t \in T \rightarrow \int_{P_t} \psi(x) d\lambda_{F(t)}(x)$$

est continue (resp. mesurable). Le *support* de  $\lambda$  est l'ensemble des feuilles  $F$  telles que  $\lambda_F(F) > 0$ . Un système de Haar  $\lambda$  de support plein satisfait la condition de régularité suivante : il existe un recouvrement  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{F}$  par des boîtes  $B = T \times P$  relativement compactes telles que

$$0 < \inf_{t \in T} \lambda(P_t) \leq \sup_{t \in T} \lambda(P_t) < +\infty \quad (4.1)$$

Si  $X$  est l'espace des plaques, la mesure longitudinale  $\lambda^X$  définie sur chaque feuille  $F$  par

$$\lambda_F^X = \sum_{x \in F \cap X} \delta_x \quad (4.2)$$

est une mesure de support plein par définition de  $X$ , qui vérifie aussi clairement la condition (4.1).

Une *mesure transverse*  $\mu$  est la donnée d'une famille de mesures  $\mu_T$  sur chaque transversale  $T$  au feuilletage. Elle est *invariante par holonomie* si pour toute holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$ ,  $\zeta_* \mu_T = \mu_{T'}$ .

Rappelons le résultat de Goodman-Plante [G-Pl] que nous généralisons ici. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ensembles finis de l'espace des plaques  $X$ , et  $\lim A_n$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $x_n \in A_n$ . Notons  $\nu_X^n$  la mesure

$$\nu_X^n = \frac{1}{\#A_n} \sum_{x \in A_n} \delta_x.$$

**Théorème 4.1.1** (Goodman- Plante, [G-Pl]) *Si pour toute holonomie  $\zeta : T' \rightarrow T$ , avec  $T \subset X$  et  $T' \subset X$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_X^n((A_n \cap T) \Delta \zeta(A_n \cap T')) = 0$ , alors toutes les valeurs d'adhérence de la suite  $\nu_X^n$  sont des probabilités à support dans  $\lim A_n$  qui sont invariantes par holonomie.*

Notons que sur un feuilletage à croissance polynomiale, il existe des suites  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant l'hypothèse ci-dessus [G-Pl],[Pl].

## 4.2 Equidistribution de moyennes

Nous généralisons le théorème 4.1.1 dans deux directions : au lieu de moyennes sur des ensembles finis  $A_n$  de  $X$ , nous considérons des moyennes sur des suites d'ensembles  $E_n$  d'une feuille de  $\mathcal{F}$ , pour une mesure longitudinale  $\lambda$ , pondérées par un cocycle  $\Delta$ . (Les  $A_n$  ci-dessus correspondent à  $X \cap E_n$ .) Leurs valeurs d'adhérence sont des mesures sur  $M$ , que nous cherchons à désintégrer en un produit d'une mesure transverse quasi-invariante par holonomie (pour le cocycle  $\Delta$ ) par la mesure longitudinale  $\lambda$ .

Un *cocycle continu* sur  $\mathcal{G}$  est une application  $\Delta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  continue (pour la topologie de  $\mathcal{G}$ , voir [Co]), qui vérifie  $\Delta(\gamma)\Delta(\gamma') = \Delta(\gamma\gamma')$ . Si  $\gamma : x \rightarrow y$  est un élément de  $\mathcal{G}$ , et si

$\Delta(\gamma)$  ne dépend que de  $(x, y)$  (par exemple si la feuille de  $x$  et  $y$  est sans holonomie), nous noterons  $\Delta(x, y)$  au lieu de  $\Delta(\gamma)$ .

Une mesure transverse est dite *quasi-invariante pour le cocycle*  $\Delta$  si pour toute holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$ , de germe en  $x$  noté  $[\zeta]_x : x \rightarrow \zeta x$ , on a  $\frac{d\mu_{T'}}{d\zeta_*\mu_T}(\zeta x) = \Delta([\zeta]_x)$ ,  $\mu_{T'}$  p.p.

La donnée d'une mesure transverse quasi-invariante  $\mu$  pour le cocycle  $\Delta$  et d'une mesure longitudinale  $\lambda$  permet de définir une mesure, notée  $\mu \circ \lambda$ , sur  $M$ . Elle est définie sur toute boîte  $B = T \times P$  par

$$\mu \circ \lambda(B) = \int_T d\mu_T(t) \int_{P_t} \Delta(x, t) d\lambda_{F(t)}(x). \quad (4.3)$$

Par abus de notation,  $\Delta(x, t)$  signifie ici  $\Delta(\gamma)$ , avec  $\gamma : x \rightarrow t$  le germe de l'application d'holonomie de  $x$  à  $t$  qui suit les plaques de  $B$ . Par quasi-invariance de  $\mu$ , cette quantité ne dépend pas du choix de  $T$  dans  $B$ , donc  $\mu \circ \lambda$  est bien définie.

Introduisons les objets qui vont intervenir dans l'énoncé 4.2.1. Soit  $\lambda$  une mesure longitudinale,  $\Delta$  un cocycle continu sur  $\mathcal{G}$ ,  $F$  une feuille sans holonomie (ou telle que pour tous  $(x, y) \in F^2$  et  $\gamma : x \rightarrow y$ ,  $\Delta(\gamma)$  ne dépend que de  $x$  et  $y$ ), et  $x_0 \in F$ . Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts connexes relativement compacts de  $F$  tels que  $0 < \lambda_F(E_n) < \infty$ . Pour toute application continue  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , définissons

$$M_n^{\Delta, \lambda}(\psi) = \frac{1}{D_n} \int_{E_n} \psi(x) \Delta(x, x_0) d\lambda_F(x), \quad \text{où } D_n = \int_{E_n} \Delta(x, x_0) d\lambda_F(x).$$

Nous dirons que la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *régulière relativement à*  $\lambda$  si pour toute boîte  $B = T \times P$  du recouvrement  $\mathcal{B}$  de (4.1), il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N$ , et  $t \in T \cap E_n$ , on a

$$\text{si } 0 < \lambda_F(P_t \cap E_n) < \lambda_F(P_t), \quad \text{alors } E_n^c \cap \partial B \neq \emptyset \quad (4.4)$$

Cette condition est vérifiée si le feuilletage est de dimension 1, ou si  $\lambda = \lambda^X$ , ou si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n^c$  est connexe. Elle permet d'éviter que quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $E_n^c$  ait un nombre grandissant de composantes connexes de plus en plus petites dont la  $\lambda_F$ -mesure totale ne tend pas vers 0, situation dans laquelle nous ne pouvons pas contrôler les moyennes  $M_n^{\Delta, \lambda}$ .

Si  $T$  est une transversale au feuilletage, notons  $\nu_T^n$  la mesure

$$\nu_T^n = \frac{1}{D_n} \sum_{t \in T \cap E_n} \Delta(t, x_0) \delta_t.$$

Ceci définit donc une mesure  $\nu^n$  transverse au feuilletage. Notre résultat est le suivant :

**Théorème 4.2.1** *Soit  $(M, \mathcal{F})$  une lamination d'un espace compact  $M$ ,  $\lambda$  un système de Haar de support plein,  $\Delta$  un cocycle continu pour le feuilletage et  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant (4.4). Supposons que pour toute holonomie  $\zeta : T' \rightarrow T$ , on ait*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_T^n((T \cap E_n) \Delta \zeta(T' \cap E_n)) = 0. \quad (4.5)$$

Alors les valeurs d'adhérence de  $M_n^{\Delta, \lambda}$  sont des probabilités de la forme  $m = \nu \circ \lambda$ , avec  $\nu$  une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta$ .

**Remarque 4.2.2** *Lorsque  $\lambda = \lambda^X$ , les moyennes  $M_n^{\Delta, \lambda^X} = \nu_X^n$  sont à support dans  $X$ , et la même preuve montre que leurs valeurs d'adhérence sont des probabilités sur  $X$  quasi-invariantes pour le cocycle  $\Delta$ . En particulier, si  $\Delta$  est le cocycle trivial égal à 1, on retrouve le théorème 4.1.1.*

**Corollaire 4.2.3** *Sous les mêmes hypothèses, si de plus il existe une unique (à une constante multiplicative près) mesure transverse  $\nu$  quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta$ , alors les moyennes  $M_n^{\Delta, \lambda}$  convergent vers  $m = \frac{1}{\nu \circ \lambda(M)} \nu \circ \lambda$ .*

**Démonstration :** Quitte à extraire une sous-suite, nous supposons que les moyennes  $M_n^{\Delta, \lambda}$  convergent vers une probabilité  $m$  sur  $M$ . Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que sur toute boîte  $B$  fixée du recouvrement  $\mathcal{B}$  de (4.1),  $m$  est de la forme  $\nu \circ \lambda$ , avec  $\nu$  une mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta$ . Si une telle boîte  $B = T \times P$  vérifie  $m(B) = 0$ , on pose  $\nu_T = 0$ . Supposons donc  $m(B) > 0$ . Pour tout choix de transversale  $T$  telle que  $B = T \times P$ , on peut réécrire

$$M_n^{\Delta, \lambda}(B) = \int_T d\nu_T^n(t) \int_{P_t} \Delta(x, t) d\lambda_F(x) + R_1(n, T, B) + R_2(n, T, B). \quad (4.6)$$

Le reste  $R_1(n, T, B)$  correspond à des termes de bord oubliés dans la somme : les  $t \in T \cap F$  tels que  $\lambda_F(P_t \cap E_n) > 0$ , mais  $E_n$  ne contient pas  $t$ . Plus précisément,

$$R_1(n, T, B) = \frac{1}{D_n} \sum_{t \in T \cap F \setminus E_n} \Delta(t, x_0) \int_{P_t \cap E_n} \Delta(x, t) d\lambda_F(x).$$

Le reste  $R_2(n, T, B)$  correspond lui aux  $t \in T \cap E_n$  tels que  $0 < \lambda_F(P_t \cap E_n) < \lambda_F(P_t)$  :

$$R_2(n, T, B) = \frac{1}{D_n} \sum_{t \in T \cap E_n} \Delta(t, x_0) \int_{P_t} (\mathbf{1}_{E_n} - 1) \Delta(x, t) d\lambda_F(x).$$

Commençons par montrer que ces deux restes tendent vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . La continuité de  $\Delta$  implique que  $\sup_{t \in T} \sup_{x \in P_t} \Delta(x, t)$  est fini. De plus,  $\lambda$  vérifie (4.1). On a donc

$$|R_1(n, T, B)| \leq \text{cte}(B) \frac{1}{D_n} \sum_{\substack{t \in T \cap F \setminus E_n, \\ P_t \cap E_n \neq \emptyset}} \Delta(t, x_0), \quad \text{et} \quad |R_2(n, T, B)| \leq \text{cte}(B) \frac{1}{D_n} \sum_{\substack{t \in T \cap E_n, \\ P_t \cap E_n \neq P_t}} \Delta(t, x_0).$$

Notons d'abord que si  $t \in T$  apparaît dans l'une des deux sommes ci-dessus, il n'apparaît pas dans l'autre. Le bord de  $B$  s'écrit  $\partial B = \partial T \times P \cup \bar{T} \times \partial P$ . Recouvrons  $\bar{T} \times \partial P$  par un nombre fini de boîtes  $B_i$ . Pour chacune d'elle, notons  $S_i$  une transversale contenant  $(\bar{T} \times \partial P) \cap B_i$ . Ainsi, il existe une holonomie  $\zeta_i : T_i \subset S_i \rightarrow T'_i \subset T$ , avec  $T_i \subset \bar{T} \times \partial P$ . Comme les  $B_i$  recouvrent  $\bar{T} \times \partial P$ , les  $T'_i$  recouvrent  $T$ . Si  $t \in T$  apparaît dans  $R_1(n, T, B)$ , alors  $E_n$  intersecte la plaque  $P_t$  sans contenir  $t$ . Par connexité de  $E_n$ ,  $E_n$  intersecte donc le bord de  $P_t$ . Il existe donc un indice  $i$  tel que  $t \in \zeta_i(T_i \cap E_n) \setminus (T'_i \cap E_n)$ . Inversement, si  $t \in T \cap E_n$  apparaît dans  $R_2(n, T, B)$ , alors  $E_n^c$  intersecte  $P_t$ . Vue la condition de régularité (4.4) satisfaite par  $E_n$ , il existe  $i$  tel que  $t \in T'_i \cap E_n \setminus \zeta_i(T_i \cap E_n)$ . Finalement, par définition des  $\nu_{T'_i}^n$ , on obtient

$$|R_1(n, T, B) + R_2(n, T, B)| \leq \text{cte}(B) \sum_i \nu_{T'_i}^n(T'_i \cap E_n \Delta \zeta_i(T_i \cap E_n))$$

L'hypothèse (4.5) assure donc que ces restes tendent vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , d'où d'après (4.6),  $\nu_T^n \circ \lambda|_B$  converge faiblement vers  $m|_B$ . On en déduit, en utilisant (4.1), la continuité de  $\Delta$  et le fait que  $m(B) > 0$ , que  $\nu_T^n$  converge faiblement sur  $T$  vers une mesure finie non nulle  $\nu_T$ . Comme  $\lambda$  est un système de Haar, et  $\Delta$  est continu, cette convergence implique que  $\nu_T^n \circ \lambda$  converge vers  $\nu_T \circ \lambda|_B$ .

Finalement, pour toute boîte  $B$  de (4.1), et toute transversale  $T \subset B$ , on a défini une mesure finie  $\nu_T$  telle que  $m|_B = \nu_T \circ \lambda|_B$ . L'hypothèse (4.5) assure que le support de  $\nu$  est invariant par holonomie. Et par construction des  $\nu_T^n$ ,  $\nu$  est alors nécessairement quasi-invariante pour le cocycle  $\Delta$ , d'où le résultat.  $\square$





## Chapitre 5

# On quasi-invariant transverse measures for the horospherical foliation of a negatively curved manifold

Ce chapitre constitue un article accepté pour publication dans *Ergodic Theory and Dynamical Systems*.

### Résumé :

Si  $M$  est une variété compacte ou convexe-cocompacte à courbure négative, nous associons à chaque mesure de Gibbs sur le fibré unitaire tangent  $T^1M$  une mesure transverse quasi-invariante pour le feuilletage horosphérique. Nous prouvons géométriquement que cette mesure est uniquement déterminée par son cocycle de Radon-Nikodym. (Ceci étend le résultat d'unique ergodicité de Bowen-Marcus pour ce feuilletage.) Nous déduisons de ce résultat des propriétés d'équidistribution des feuilles de ce feuilletage vers ces mesures de Gibbs. Nous utilisons également ce résultat dans l'étude des mesures transverses invariantes pour le feuilletage horosphérique de revêtements réguliers de  $M$ .

## 5.1 Introduction and statement of results

Let  $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$  be a complete riemannian manifold with pinched negative curvature, with universal cover  $\widetilde{M}$  and fundamental group  $\Gamma$ . Then the unit tangent bundle  $T^1\widetilde{M}$  of  $\widetilde{M}$  carries the *horospherical foliation*  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$ , whose leaves are the unit vectors normal to horospheres and pointing outward. Passing to the quotient leads to a foliation  $\mathcal{W}^{su}$  of  $T^1M$  which is the strong unstable foliation of the geodesic flow of  $M$ . In this paper, we shall construct quasi-invariant measures for this foliation, and study their ergodic properties. Recall that for a compact manifold  $M$ , it was proved by Bowen and Marcus that the foliation  $\mathcal{W}^{su}$  is uniquely ergodic : there exists, up to a multiplicative constant, a unique transverse measure for the foliation which is invariant under holonomy. Their proof used symbolic dynamics and showed that the transverse measure is induced by the Bowen-Margulis measure  $m^0$  of  $T^1M$ , which is also the measure of maximal entropy of the geodesic flow [Bow-M].

In the last decade, it was realized that the measure  $m^0$  could be constructed in a more geometrical way using the Patterson measure on the boundary at infinity of  $\widetilde{M}$  [K1] [K2]. This construction allows to go beyond compact manifolds, and, for instance, Roblin was able to give a purely geometrical proof of the unique ergodicity of  $\mathcal{W}^{su}$  for a convex-cocompact manifold, under the assumption that the geodesic flow is topologically mixing [Ro1].

In a similar way, one can associate to a Hölder function  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  a measure  $m^f$  on  $T^1M$ , which is the *equilibrium state* of  $f$  when  $M$  is compact or convex-cocompact, the Bowen-Margulis measure  $m^0$  corresponding to  $f \equiv 0$  see e.g. [Ha2][L][Cou1]. We shall first see that this measure  $m^f$  induces a *quasi-invariant transverse measure* for the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ . We use here the definition of a quasi-invariant measure of a foliation as introduced by Connes in [Co] in relation with the theory of  $C^*$ -algebras associated to a foliation. First, we recall that a *cocycle* for a foliation is a map  $\rho$  defined on the set of pairs of points in the same leaf such that  $\rho(u, v) + \rho(v, w) = \rho(u, w)$ , and that a *transverse measure*  $\mu = \{\mu_T\}$  associates to any transversal  $T$  to the foliation a Borel Radon measure  $\mu_T$  supported on  $T$ . Then  $\mu$  is said to be quasi-invariant if there exists a cocycle  $\rho$  such that for each holonomy map  $\zeta$  between two transversals  $T$  and  $T'$ ,  $\zeta_*\mu_T$  is absolutely continuous with respect to  $\mu_{T'}$  with Radon-Nikodym derivative given by

$$\frac{d\zeta_*\mu_T}{d\mu_{T'}}(\zeta x) = \exp(\rho(x, \zeta x)).$$

The cocycle  $\rho$  is called the *Radon-Nikodym cocycle* of the transverse measure  $\{\mu_T\}$ . Note that if  $\mu' = \{\mu'_T\}$  is *equivalent* to  $\{\mu_T\}$  (i.e. there exists a Borel map  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  such that, for all transversal  $T$ ,  $d\mu_T(v) = \exp \psi(v) d\mu'_T(v)$ ), then the Radon-Nikodym cocycle  $\rho'$  of  $\mu'$  is *cohomologous* to  $\rho$  (there exists a Borel map  $R : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , such that  $\rho(v, w) = \rho'(v, w) + R(v) - R(w)$ ).

Let us call two Hölder functions  $f$  and  $f'$  *equivalent* if there exists a Hölder map  $\phi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , differentiable in the direction of the geodesic flow, and  $c \in \mathbb{R}$  such that  $f = f' + c + X.\phi$ , with  $X : TM \rightarrow TTM$  the geodesic spray.

Our starting point is the following Proposition : it provides a large family of cocycles which are Radon-Nikodym cocycles of quasi-invariant measures.

**Proposition 5.2.5** *To each Hölder map  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  is associated an explicit Hölder cocycle  $\rho^f$  for the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ , and a transverse measure  $\mu^f = \{\mu_T^f\}$ , which is quasi-invariant with cocycle  $\rho^f$ . Moreover, the cohomology class of  $\rho^f$  and the equivalence class of  $\mu^f$  depend only on the equivalence class  $[f]$  of  $f$ .*

For  $f \equiv 0$ , the cocycle  $\rho^0$  is trivial, and one recovers a transverse invariant measure  $\mu^0$ . For compact or convex-cocompact manifolds, one knows that this measure is the unique invariant measure of the foliation. Thus we are led to the following question : is the transverse measure  $\mu^f$  the unique quasi-invariant measure with the given cocycle  $\rho^f$ ? Note that this problem of determining all quasi-invariant measures with a given cocycle was already considered by Kaimanovich and Lyubich in [K5].

In the sequel of this work, we will always make the following assumptions :

**Assumptions 5.1.1** : *The fundamental group  $\Gamma = \pi_1(M)$  is cocompact or convex-cocompact, and in the second case, the geodesic flow is topologically mixing on its nonwandering set.*

Under these assumptions, our first result is :

**Theorem 5.2.7** *Let  $[\rho^f]$  be a cohomology class of cocycles associated to a class  $[f]$  of Hölder maps. Then for all  $\rho \in [\rho^f]$ , there exists, up to a multiplicative constant, a unique transverse measure  $\mu$  for the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ , which is quasi-invariant with Radon-Nikodym cocycle  $\rho$ , and it is equivalent to  $\mu^f$ .*

When  $f \equiv 0$ , as the cocycle  $\rho^0$  is trivial, we recover the unique ergodicity of the foliation :  $\mu^0$  is the unique transverse measure which is invariant under holonomy.

Theorem 5.2.7 was already proved by Babillot-Ledrappier [Ba-L] for a compact manifold using symbolic dynamics. We give here a purely geometrical proof, which allows to prove further results as equidistribution properties of leaves of the foliation.

Before going further, we remark that Theorem 5.2.7 can be reinterpreted in terms of the action of the fundamental group  $\Gamma$  of  $M$  on the boundary at infinity  $\partial\widetilde{M}$  of  $\widetilde{M}$ . Indeed the lifted foliation  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  of  $T^1\widetilde{M}$  admits a nice set of leaves : the space  $\mathcal{H}$  of horospheres, which can be parametrized as  $\partial\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ . An invariant transverse measure for  $\mathcal{W}^{su}$  lifts to an invariant transverse measure for  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  which is  $\Gamma$ -invariant, and thus induces in a canonical way a  $\Gamma$ -invariant measure on  $\mathcal{H}$ . A correspondence between quasi-invariant measures for  $\mathcal{W}^{su}$  and measures on  $\mathcal{H}$  which are quasi-invariant under the action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}$  can be made by choosing a global transversal of  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$ , and thus depends on this choice. We shall provide a slightly different construction : we associate to each quasi-invariant transverse measure  $\{\mu_T^f\}$  for  $\mathcal{W}^{su}$  a  $\Gamma$ -quasi-invariant measure  $\widehat{\mu}^f$  on  $\mathcal{H}$  with the additional property that its Radon-Nikodym cocycle

$$c^f : \Gamma \times \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$$

is in fact a cocycle for the action of  $\Gamma$  on  $\partial\widetilde{M}$  : for all  $(\xi, s) \in \mathcal{H}$ , and all  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$c^f(\gamma, (\xi, s)) = c^f(\gamma, \xi).$$

To avoid confusions, we will denote by  $[c^f]_{\mathcal{H}}$  and  $[c^f]_{\partial\widetilde{M}}$  the respective cohomology classes of  $c^f$  as a cocycle for the action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}$  and on  $\partial\widetilde{M}$ .

A result of Ledrappier, [L], shows that any Hölder cocycle  $c$  on  $\partial\widetilde{M}$  can be written as  $c = c^f$ , for a convenient Hölder map  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ . Thus we can reformulate Theorem 5.2.7 in the following way :

**Theorem 5.2.7'** *Let  $[c]_{\mathcal{H}}$  be the cohomology class on  $\mathcal{H}$  of a Hölder cocycle  $c$  on  $\partial\widetilde{M}$ . There exists, up to a multiplicative constant, a unique class  $[\widehat{\mu}]$  of  $\Gamma$ -quasi-invariant measures on  $\mathcal{H}$  with respect to this class  $[c]_{\mathcal{H}}$ , and they are ergodic.*

This result leads to the question whether there exist cohomology classes of cocycles on  $\mathcal{H}$  which do not contain cocycles arising from cocycles on  $\partial\widetilde{M}$ , and if the  $\Gamma$ -quasi-invariant measures on  $\mathcal{H}$  with such a cocycle can be characterized.

We shall now adress the problem of equidistribution properties for the leaves of the foliation. It is well known that in the case of a flow, the property of unique ergodicity implies (and is even equivalent to) the equidistribution of all orbits to the unique invariant

measure. In our set-up, we have no flow, so we shall consider more general means on leaves of the foliation. Let  $\lambda = \{\lambda_{H^+}\}$  be a *Haar system*, that is a family of measures on leaves of  $\mathcal{W}^{su}$ , satisfying some regularity property. We can define the “product” of  $\lambda$  with the quasi-invariant transverse measure  $\mu^f$ , that is a (finite) measure, denoted by  $\mu^f \circ \lambda$ , on the whole space  $T^1M$ . Let  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of sets of a given leaf  $W = W^{su}(u_0)$  of  $\mathcal{W}^{su}$  satisfying a regularity condition (see (5.9)), and for all continuous  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , define :

$$M_n^{f,\lambda}(\psi) = \oint_{E_n} \psi(v) \exp \rho^f(v, u_0) d\lambda_W(v),$$

where the notation  $\oint$  means that the above averages are normalized so that  $M_n^{f,\lambda}(1) = 1$ . Under an assumption of Følner type, that we shall introduce later (see (5.10)), on sequences  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of sets of a leaf, an equidistribution result for general foliations proved in [Sc2] gives here :

**Theorem 5.4.6** *Let  $M$  be a compact negatively curved manifold. Let  $\lambda$  be a Haar system of full support on  $\mathcal{W}^{su}$ , which satisfies (5.8), and  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a regular sequence of sets of a leaf  $W^{su}(u_0)$ . If (5.10) is satisfied, then the sequence  $M_n^{f,\lambda}$  converges weakly to  $\frac{1}{\mu^f \circ \lambda(T^1M)} \mu^f \circ \lambda$ , where  $\mu^f$  is the unique quasi-invariant transverse measure with respect to the cocycle  $\rho^f$ .*

We shall also investigate other equidistribution properties, see for example Theorem 5.4.1.

Finally, we shall apply the preceding results on the problem of classifying the  $\bar{\Gamma}$ -invariant measures on  $\mathcal{H}$ , with  $\bar{\Gamma} \triangleleft \Gamma$  a normal subgroup of  $\Gamma$ . Babillot and Ledrappier proved in [Ba-L] that when  $\Gamma$  is cocompact, and  $\Gamma/\bar{\Gamma}$  is isomorphic to  $\mathbb{Z}^d$ , each de Rahm cohomology class  $[\alpha]_{dR}$  of 1-forms on  $M$ , which vanishes on loops of  $\bar{\Gamma}$ , induces a  $\bar{\Gamma}$ -invariant measure on  $\mathcal{H}$ , and that these measures are  $\bar{\Gamma}$ -conservative and ergodic. (One says that the 1-form  $\alpha$  vanishes on  $\bar{\Gamma}$  if for any loop  $\bar{\gamma}$  which represents an element of  $\bar{\Gamma}$ , one has  $\int_{\bar{\gamma}} \alpha = 0$ .) However, it is still an open question to see whether the measures they constructed are the only  $\bar{\Gamma}$ -invariant and ergodic measures on  $\mathcal{H}$ . We shall provide a partial answer to this question : we characterize the  $\bar{\Gamma}$ -invariant and ergodic measures on  $\mathcal{H}$  which are in addition  $\Gamma$ -quasi-invariant.

We consider here the general situation of a normal subgroup  $\bar{\Gamma} \triangleleft \Gamma$ , without assumptions on the covering group  $\Gamma/\bar{\Gamma}$ . The construction of Babillot-Ledrappier of  $\bar{\Gamma}$ -invariant measures still applies. Indeed, a 1-form  $\alpha$  on  $M$  can be considered as a Hölder map on  $T^1M$ , whence (Proposition 5.2.5) we can associate to it a  $\Gamma$ -quasi-invariant measure  $\hat{\mu}^\alpha$  on  $\mathcal{H}$ . And if  $\alpha$  vanishes on  $\bar{\Gamma}$ , this measure is also  $\bar{\Gamma}$ -invariant. Our result is the following :

**Theorem 5.5.1** *Let  $\bar{\Gamma} \triangleleft \Gamma$  be a normal subgroup, with  $\Gamma$  satisfying the assumptions 5.1.1. Any  $\bar{\Gamma}$ -invariant and  $\bar{\Gamma}$ -ergodic measure  $\hat{\nu}$  on  $\mathcal{H}$ , which is in addition  $\Gamma$ -quasi-invariant, is a measure of the form  $\hat{\nu} = \hat{\mu}^\alpha$ , for a closed 1-form  $\alpha$  vanishing on  $\bar{\Gamma}$ .*

Note that in our general situation :  $\bar{\Gamma} \triangleleft \Gamma$ , without more assumptions on  $\bar{\Gamma}$ , it is not clear whether the measures  $\hat{\mu}^\alpha$  are  $\bar{\Gamma}$ -ergodic; see [K3], [K4] for cases where it is known and other references.

The organization of the text is the following : in part 5.2, we introduce some notations and all the measures that we will study. In part 5.3, we prove Theorems 5.2.7 and 5.2.7'. In section 5.4, we deduce of these results some equidistribution properties (Theorems 5.4.1 and 5.4.6). Finally, Theorem 5.5.1 is proved in part 5.5.

## 5.2 Notations, preliminaries

### 5.2.1 Geometry

Let  $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$  be a complete riemannian manifold with pinched negative sectional curvature,  $\widetilde{M}$  its universal cover, and  $\Gamma$  its fundamental group. Then  $\widetilde{M}$  can be compactified into  $\overline{M} = \widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$ , where  $\partial\widetilde{M}$  is the *boundary at infinity* of  $\widetilde{M}$ , i.e the set of equivalence classes of geodesic rays which stay at bounded distance one another. The group  $\Gamma$  acts on  $\widetilde{M}$  by isometries, and on  $\partial\widetilde{M}$  by homeomorphisms. The *limit set*  $\Lambda$  of  $\Gamma$  is defined by :  $\Lambda = \overline{\Gamma x} \setminus \Gamma x$ , for any  $x \in \widetilde{M}$ . We denote by  $T^1M$  (resp.  $T^1\widetilde{M}$ ) the unit tangent bundle of  $M$  (resp.  $\widetilde{M}$ ), and by  $\pi : T^1M \rightarrow M$  (resp.  $T^1\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ ) the canonical projection. We shall use the distance  $d$  on  $M$  (and  $\widetilde{M}$ ) induced by the riemannian structure.

The *geodesic flow*  $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  (resp.  $(\tilde{g}^t)$ ) associates to a pair  $(t, v) \in \mathbb{R} \times T^1M$  (resp.  $\mathbb{R} \times T^1\widetilde{M}$ ) the tangent vector  $g^t v = \dot{c}_v(t)$  at time  $t$  to the unique geodesic  $c_v$  of  $M$  such that  $\dot{c}_v(0) = v$ .

By a theorem of Eberlein [Eb1], the *nonwandering set*  $\Omega \subset T^1M$  of the geodesic flow  $(g^t)$  is the set of vectors  $v$  such that any lift  $\tilde{v}$  to  $T^1\widetilde{M}$  has both endpoints  $c_v(\pm\infty)$  in the limit set  $\Lambda$ .

The group  $\Gamma$  is *cocompact* if  $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$  is compact, and then  $\Lambda = \partial\widetilde{M}$ , and  $\Omega = T^1M$ . It is *convex-cocompact* when  $\Omega$  is compact. In this work, we assume that  $\Gamma$  is cocompact or convex-cocompact, so  $\Omega$  will always be a compact set. We assume also that the geodesic flow is *topologically mixing* on its non-wandering set  $\Omega$ , which is equivalent to the non-arithmeticity of the length spectrum of  $M$  (see Dal'bo, [D]). Both properties hold in the case of a surface, in the constant curvature case, and in some other cases, see [D].

The *Busemann cocycle* is defined on  $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$  by

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z) = "d(x, \xi) - d(y, \xi)".$$

It is a continuous and  $\Gamma$ -invariant cocycle on  $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$  (see section 5.2.2). By abuse of notation, if  $v, w$  are vectors on  $T^1\widetilde{M}$  with base points  $x$  and  $y$  on  $\widetilde{M}$ , we will often note  $\beta_\xi(v, w)$  in place of  $\beta_\xi(x, y)$ .

The space of oriented geodesics can be identified to the *double boundary*, i.e. the set of pairs of distinct points  $(\eta_1, \eta_2) \in \partial^2\widetilde{M} := \partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M} \setminus \{(\xi, \xi), \xi \in \partial\widetilde{M}\}$ . The Busemann cocycle allows to give coordinates on  $T^1\widetilde{M}$  in terms of this double boundary. More precisely, if a point  $o \in \widetilde{M}$  is fixed, the map defined by

$$v \in T^1\widetilde{M} \rightarrow (v^-, v^+, \beta_{v^-}(v, o)) \in \partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$$

is an homeomorphism.

On  $\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , the actions of the geodesic flow and the group  $\Gamma$  commute and can be written in the following way. For any  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\gamma(v^-, v^+, s) = (\gamma v^-, \gamma v^+, s + \beta_{v^-}(o, \gamma^{-1}o)) \quad \text{and} \quad \tilde{g}^t(v^-, v^+, s) = (v^-, v^+, s + t).$$

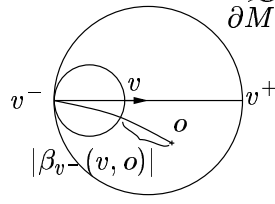


FIG. 5.1 – Coordinates on  $T^1 \widetilde{M}$

Thus, the unit tangent bundle  $T^1 M$  identifies to the quotient  $\Gamma \backslash (\partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R})$ , and the non-wandering set  $\Omega$  to  $\Gamma \backslash (\Lambda^2 \times \mathbb{R})$ .

A *horosphere*  $H \subset \widetilde{M}$  centered at  $\xi$  is a level set of a function  $x \rightarrow \beta_\xi(x, y)$ . These horospheres lift to  $T^1 \widetilde{M}$ : if  $u \in T^1 \widetilde{M}$ , and  $H$  is the horosphere centered at  $u^-$  and containing the base point  $\pi(u) \in \widetilde{M}$  of  $u$ , the *strong unstable horosphere of  $u$* , denoted by  $H^+(u)$  is the set of vectors  $v \in T^1 \widetilde{M}$  such that  $v^- = u^-$  and  $\pi(v) \in H$ . It is also the set of vectors of  $T^1 \widetilde{M}$  with base points in  $H$ , orthogonal to  $H$  and pointing outwards. Similarly, we denote by  $H^-(u)$  the strong stable horosphere of  $u$ . We denote by  $\mathcal{H}$  the *space of horospheres*.

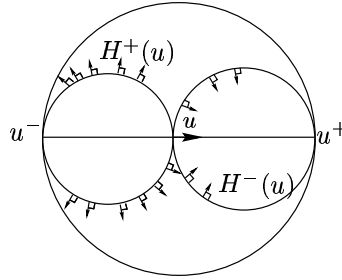


FIG. 5.2 – Horospheres

The homeomorphism  $T^1 \widetilde{M} \simeq \partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R}$  allows to identify a horosphere  $H^+(u)$  with  $\{u^-\} \times \partial \widetilde{M} \setminus \{u^-\} \times \{s(u)\}$ , and the space  $\mathcal{H}$  of horospheres with  $\partial \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ . The group  $\Gamma$  acts on  $\mathcal{H}$  by  $\gamma(\xi, s) = (\gamma\xi, s + \beta_\xi(o, \gamma^{-1}o))$ . Besides, the horospheres  $H^+(u)$  are exactly the strong unstable manifolds of the geodesic flow  $(\tilde{g}^t)$ :

$$H^+(u) = \widetilde{W}^{su}(u) := \{w \in T^1 \widetilde{M}, \lim_{t \rightarrow -\infty} D(\tilde{g}^t u, \tilde{g}^t w) = 0\}.$$

Here,  $D$  is the distance on  $T^1 \widetilde{M}$  induced by the Sasaki metric on  $T \widetilde{M}$ . Similarly, the strong stable horospheres  $H^-(u)$  equal the strong stable manifolds  $\widetilde{W}^{ss}(u)$ . These strong unstable horospheres form a foliation  $\widetilde{W}^{su}$  of  $T^1 \widetilde{M}$ , called the *horospherical foliation*, or strong unstable foliation. A natural family of transversals to  $\widetilde{W}^{su}$  is the family of weak stable manifolds

$$\widetilde{W}^s(v) = \{w \in T^1 M, \exists C = C_w > 0, \forall t \geq 0, D(g^t v, g^t w) \leq C\}.$$

Viewed on  $\partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , a transversal  $\widetilde{W}^s(v)$  equals  $\partial \widetilde{M} \setminus \{v^+\} \times \{v^+\} \times \mathbb{R}$ . Recall that, given two (small) transversals  $T, T'$  to the foliation included in the same chart  $B$  of the foliation, a *holonomy map* is a homeomorphism from an open subset of  $T$  to  $T'$ , which preserves the

leaves of the restricted foliation on  $B$ . Note that there are natural (global) holonomy maps between two such transversals, given by

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^s(v) &\xrightarrow{\zeta} \widetilde{W}^s(w) \\ u = (u^-, v^+, s(u)) &\mapsto \zeta(u) = (u^-, w^+, s(u)). \end{aligned}$$

The foliation  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  induces on the quotient  $\widetilde{M}/\Gamma$  the foliation  $\mathcal{W}^{su}$  whose leaves are the strong unstable manifolds  $W^{su}$  for  $(g^t)$ . For the latter foliation, the holonomy maps are not defined globally.

Finally, let us introduce useful families of distances. First, the family  $(d_x)_{x \in \widetilde{M}}$  of Gromov distances on the boundary is defined for all  $(\xi, \eta \in \partial^2 \widetilde{M})$  by

$$d_x(\xi, \eta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta_\xi(x, y) - \frac{1}{2}\beta_\eta(x, y)\right),$$

with  $y$  any point on the geodesic  $(\xi, \eta)$ . (Rigorously, they are known to be true distances if the curvature of  $M$  is less than or equal to  $-1$  [Bou]; otherwise, one has to take convenient powers of the above quantities to obtain distances.) Using these distances, one can define [He-P] on each horosphere  $H^+$  the so-called Hamenstaedt distance  $d_{H^+}$  by the formula : for all  $(u, v) \in (H^+)^2$ ,

$$d_{H^+}(u, v) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta_{u^+}(x, u) + \frac{1}{2}\beta_{v^+}(x, v)\right) d_x(u^+, v^+),$$

where  $x \in \widetilde{M}$  is any point (one easily checks that the above formula does not depend on  $x$ ). Remark that these distances can also be defined on the strong stable horospheres  $H^-(v)$ . The following picture shows what they represent geometrically : if  $u, v \in H^+$ ,  $d_{H^+}(u, v) = \exp(\pm d(a_u, a_v)/2)$  where  $a_u$  and  $a_v$  are the respective intersection points of  $H^-(u)$  and  $H^-(v)$  with the geodesic  $(u^+v^+)$  (the sign depends on the order of  $a_u$  and  $a_v$  on  $(u^+, v^+)$ ).

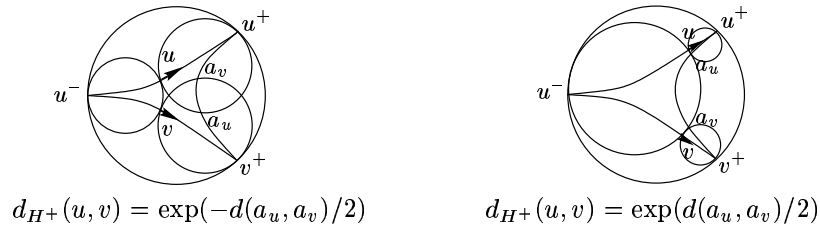


FIG. 5.3 – Horospherical distance

Two important properties of this family are that they are invariant by all isometries  $\gamma \in \Gamma$  :

$$d_{\gamma H^+}(\gamma u, \gamma v) = d_{H^+}(u, v),$$

and that they “explode” when pushed by the flow : for all  $t \in \mathbb{R}$ , and  $u \in T^1 \widetilde{M}$ ,

$$g^t B^+(u, r) = B^+(g^t u, r e^t)$$



### 5.2.2 Cocycles associated with a Hölder map

A *Hölder potential* is a map  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  which is Hölder w.r.t. the Sasaki metric  $D$  on  $T^1M$ . For simplicity, we shall consider for the moment only symmetric potentials :  $f(v) = f(-v)$  (see section 5.5.1 for the general case), and we denote also by  $f$  its  $\Gamma$ -invariant lift on  $T^1\widetilde{M}$ . If  $x$  and  $y$  are points in  $\widetilde{M}$ , we denote by  $\int_x^y f$  the integral of  $f$  on the unique (oriented) geodesic segment from  $x$  to  $y$ , viewed on  $T^1\widetilde{M}$ .

#### Geometric cocycles

We say that a map  $\rho : \partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  is a *geometric cocycle* if for all  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  and  $(x, y, z) \in \widetilde{M}^3$ , it satisfies

$$\rho_\xi(x, y) + \rho_\xi(y, z) = \rho_\xi(x, z).$$

It is  $\Gamma$ -invariant if it is invariant under the diagonal action of  $\Gamma$  on  $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$ . If  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  is a Hölder potential, we define the following geometric cocycle :

$$\rho_\xi^f(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_x^{c(t)} f - \int_y^{c(t)} f = \int_x^\xi f - \int_y^\xi f,$$

where  $(c(t))_{t \geq 0}$  is the geodesic ray  $[x\xi)$ . This function is well-defined, since when  $f$  is Hölder, the difference between the two integrals converges. Moreover, it is  $\Gamma$ -invariant. When  $f \equiv 1$ , we recover the *Busemann cocycle* :  $\rho^1 \equiv \beta$ .

It will be useful to normalize this cocycle in the following way. Recall that, the non wandering set of the geodesic flow being compact, by the thermodynamical formalism [Wa], one may associate to  $f$  its *topological pressure*  $\delta^f$  :

$$\delta^f = \sup_m \left\{ h_m(g) + \int_{T^1M} f dm \right\}, \quad (5.1)$$

where the supremum is taken over all  $(g^t)$ -invariant probability measures on  $T^1M$ , and  $h_m(g)$  is the measure theoretical entropy of the measure  $m$ . When  $f \equiv 0$ ,  $\delta^0$  is also the *topological entropy*  $h_{\text{top}}(g)$  of the geodesic flow. If  $f$  and  $f'$  are equivalent, i.e.  $f = f' + c + X.\phi$ , their pressures satisfy :  $\delta^f = \delta^{f'} + c$ .

We denote by  $\beta^f$  the following normalized and  $\Gamma$ -invariant cocycle associated with  $f$  : for all  $\xi \in \partial\widetilde{M}$ , and  $(x, y) \in \widetilde{M}^2$ ,

$$\beta_\xi^f(x, y) = \delta^f \beta_\xi(x, y) - \rho_\xi^f(x, y) = \rho_\xi^{\delta^f - f}(x, y).$$

When  $f \equiv 0$ , we obtain a multiple of the Busemann cocycle :  $\beta^0 = \delta^0 \beta$ . Note also that if  $c$  is a constant,  $\beta^{f+c} = \beta^f$ .

A *cocycle for a foliation*  $\mathcal{F}$  is a map  $\rho$  defined on the set of pairs of points of a same leaf, such that for all  $(x, y, z)$  in a same leaf,

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z).$$

A geometric cocycle  $\rho$  induces in a natural way a cocycle, still denoted by  $\rho$ , for the foliation  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  of  $T^1\widetilde{M}$ , defined for all  $(u, v)$  in a same leaf  $\widetilde{W}^{su}$  by

$$\rho(u, v) = \rho_{v-}(\pi(v), \pi(w)).$$

A  $\Gamma$ -invariant geometric cocycle induces also a cocycle for the foliation  $\mathcal{W}^{su}$  of  $T^1M$ . Thus, the above cocycles  $\rho^f$  and  $\beta^f$  induce cocycles for  $\mathcal{W}^{su}$ . Note that the Busemann cocycle  $\beta$  induces the trivial cocycle for  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  and  $\mathcal{W}^{su}$ . Thus, the cocycles  $\rho^f$  and  $\beta^f$  for  $\mathcal{W}^{su}$  satisfy  $\rho^f(v, w) = -\beta^f(v, w)$ , so that we shall use only  $\rho^f$ . Remark that we can also define it directly on  $T^1M$  by

$$\rho^f(v, w) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_v^{g_t v} f - \int_w^{g_t w} f.$$

### Cocycles for the action of $\Gamma$ on $\partial\widetilde{M}$ and $\mathcal{H}$

Recall that if  $\Gamma$  acts on  $X$ , a *cocycle for this action* is a map  $c : \Gamma \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , such that for all  $x \in X$ , and for all  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^2$

$$c(\gamma_1 \gamma_2, x) = c(\gamma_1, \gamma_2.x) + c(\gamma_2, x).$$

Two cocycles  $c$  and  $c'$  are said to be *cohomologous* if there exists a map  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , such that for all  $(\gamma, x) \in \Gamma \times X$ ,  $c(\gamma, x) = c'(\gamma, x) + \phi(\gamma x) - \phi(x)$ . If  $X$  is a metric space, a cocycle  $c$  is a *Hölder cocycle* if for all  $\gamma \in \Gamma$ , the map  $c(\gamma, \cdot)$  is Hölder with respect to the metric of  $X$ .

To any  $\Gamma$ -invariant geometric cocycle  $\rho$  on  $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$ , we associate a cocycle  $c_o$  for the action of  $\Gamma$  on  $\partial\widetilde{M}$  by choosing a point  $o \in \widetilde{M}$ , and setting

$$c_o(\gamma, \xi) = \rho_\xi(o, \gamma^{-1}o).$$

If  $o \neq o'$ , the associated cocycles  $c_o$  and  $c_{o'}$  are cohomologous. We shall denote by  $c_o^f$  (resp.  $b_o^f$ ) the cocycle on  $\partial\widetilde{M}$  associated with  $-\rho^f$  (resp.  $\beta^f$ ) :

$$c_o^f(\gamma, \xi) = -\rho_\xi^f(o, \gamma^{-1}o), \quad \text{and} \quad b_o^f(\gamma, \xi) = \beta_\xi^f(o, \gamma^{-1}o).$$

Since  $f$  is Hölder, they are Hölder cocycles on  $\partial\widetilde{M}$ , see Ledrappier [L].

The action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H} \simeq \partial\widetilde{M} \times \mathbb{R}$  is an extension of the action of  $\Gamma$  on  $\partial\widetilde{M}$  by the Busemann cocycle : for all  $\gamma \in \Gamma$  and all  $H = (\xi, s) \in \mathcal{H}$ , one has

$$\gamma.(\xi, s) = (\gamma.\xi, s + \beta_\xi(o, \gamma^{-1}o)).$$

In particular, any cocycle  $c$  on  $\Gamma \times \partial\widetilde{M}$  induces canonically a cocycle, still denoted by  $c$ , on  $\Gamma \times \mathcal{H}$  by

$$c(\gamma, (\xi, s)) := c(\gamma, \xi).$$

The cocycles on  $\Gamma \times \mathcal{H}$  associated with  $c_o^f$  and  $b_o^f$  are cohomologous :  $[c_o^f]_{\mathcal{H}} = [b_o^f]_{\mathcal{H}}$ , since  $b_o^f(\gamma, \xi) = \delta^f \beta_\xi(o, \gamma^{-1}o) + c_o^f(\gamma, \xi)$ . Therefore, we shall use only  $c_o^f$  on  $\Gamma \times \mathcal{H}$ . Moreover, an easy computation gives :

**Lemma 5.2.1** *The cohomology class  $[c_o^f]_{\partial\widetilde{M}}$  depends on  $f \in [f]$ , whereas the class  $[c_o^f]_{\mathcal{H}}$  depends only on  $[f]$ . Moreover, these classes do not depend on  $o$ .*

Summarizing, the interesting cocycles that we associated with a given Hölder potential  $f$  are two geometric cocycles  $\rho^f$  and  $\beta^f$ , one cocycle  $\rho^f$  for the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ , two cocycles  $c_o^f$  and  $b_o^f$  on  $\Gamma \times \partial\widetilde{M}$ , and one cocycle  $c_o^f$  on  $\Gamma \times \mathcal{H}$ .

### 5.2.3 Measures associated with a Hölder map

We shall associate several families of measures with a Hölder potential  $f$ .

Let us begin with a classical object of the thermodynamical formalism : the equilibrium state of  $f$ . The non wandering set  $\Omega$  of the geodesic flow being compact, we know [Bow2] that there exists a unique probability measure  $m^f$  supported in  $\Omega$ , which is invariant under the geodesic flow, and satisfies the variational principle : that is, it reaches the supremum in the definition (5.1) of  $\delta^f$ . This measure is called the *equilibrium state* of  $f$ . Moreover, it is ergodic, and our assumption of topological mixing of the geodesic flow implies here that this measure is mixing.

There exists a geometrical construction of this measure, see Ledrappier [L] and Coudène [Cou1], inspired by the work of Patterson and Sullivan. We will recall below the main steps of this construction. The first step is :

**Proposition 5.2.2 (Ledrappier, [L])** *There exists a (unique) probability measure  $\nu_o^f$  with support  $\Lambda \subset \partial\widetilde{M}$ , which has no atoms, and is ergodic and  $\Gamma$ -quasi-invariant with Radon-Nikodym cocycle given by  $b_o^f$ .*

We may remark that the equivalence class  $[\nu_o^f]$  of  $\nu_o^f$  and the cohomology class  $[b_o^f]_{\partial\widetilde{M}}$  of its cocycle depend only on the equivalence class  $[f]$ , but neither on  $o$  nor on  $f$ . This follows from the following formulas. If  $(o, o') \in \widetilde{M}^2$ , one has

$$\frac{d\nu_o^f}{d\nu_{o'}^f}(\xi) = \exp \beta_\xi^f(o', o), \quad \nu_{o'}^f - \text{ a.s.}$$

And if  $f = f' + c + X.\phi$ , up to a multiplicative constant, one has

$$\frac{d\nu_o^f}{d\nu_o^{f'}}(\xi) = \exp(\phi(v_{o,\xi})), \quad \nu_o^{f'} - \text{ a.s.}$$

where  $v_{o,\xi}$  is the vector based at  $o$  pointing to  $\xi$ .

Recall that we assume for the moment that  $f$  is symmetric. The second step in the construction of the measure  $m^f$  is :

**Proposition 5.2.3 (Ledrappier, [L])** *The Radon measure  $\widetilde{m}^f$  on  $\Lambda^2 \times \mathbb{R}$  defined by*

$$d\widetilde{m}^f(v) = \exp \left( \beta_{v^+}^f(o, v) + \beta_{v^-}^f(o, v) \right) d\nu_o^f(v^-) d\nu_o^f(v^+) ds$$

*is invariant by  $\Gamma$  and by the geodesic flow. So it induces on the quotient a finite measure  $m^f$  on  $T^1M$  (normalized to be a probability) with support in the non-wandering set  $\Omega$ , which depends only on the equivalence class  $[f]$  of  $f$ . Moreover, this measure is ergodic.*

Finally, the last step in the construction is the following :

**Proposition 5.2.4** *The measure  $m^f$  defined above is the equilibrium state of  $f$ .*

This can be seen using a result of Kaimanovich, [K1], Theorem 2.3, and the so-called ‘‘Shadow Lemma’’ for  $\nu_o^f$ , [Cou1], which allow to compute the entropy of the above measure  $m^f$ .

Using this equilibrium state  $m^f$ , we shall now define families of measures on leaves and transversals to the strong unstable foliation. The quasi-product structure of  $\widetilde{m}^f$  suggests

to decompose it into two families of measures. First, the family  $\{\mu_{H^+}^f, H^+ \in \mathcal{H}\}$  defined by

$$d\mu_{H^+}^f(v) = \exp(\beta_{v^+}^f(o, v)) d\nu_o^f(v^+),$$

is a  $\Gamma$ -invariant family of measures on the leaves of the foliation, in the sense that  $\gamma_*\mu_{H^+}^f = \mu_{\gamma H^+}^f$ . Therefore it induces on the quotient by  $\Gamma$  a family of measures on each leaf of the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ , still denoted by  $\mu_{H^+}^f$ . Each measure  $\mu_{H^+}^f$  is a Borel Radon measure without atoms on  $H^+$ , with support  $\{w \in H^+, w^+ \in \Lambda\}$ .

Similarly, we define a family of measures  $\{\mu_T^f\}$  on each transversal to  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  of the type  $T = \widetilde{W}^s(w)$  by

$$d\mu_T^f(v) = \exp(\beta_{v^-}^f(o, v)) d\nu_o^f(v^-) ds$$

It is  $\Gamma$ -invariant in the sense that  $\gamma_*\mu_T^f = \mu_{\gamma T}^f$ , so it induces a family of measures, denoted by  $\mu^f = \{\mu_T^f\}$  on weak stable manifolds  $W^s(w)$  of  $T^1M$ .

The starting point of our work is the following proposition :

**Proposition 5.2.5** *The above family of measures  $\mu^f = \{\mu_T^f\}$  is quasi-invariant under holonomy, with Radon-Nikodym cocycle given by  $\rho^f$ .*

The proof of Proposition 5.2.5 is straightforward.

Note that a quasi-invariant transverse measure is determined by its restriction to a family of transversals passing at all points. Therefore,  $\mu^f$  induces a quasi-invariant transverse measure with Radon-Nikodym cocycle given by  $\rho^f$ , that is a family of measures on each transversal to the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ .

**Remark 5.2.6** The two above families of measures  $\{\mu_{H^+}^f\}$  and  $\{\mu_T^f\}$  depend on the map  $f$  in the equivalence class  $[f]$ , but they do not depend on the point  $o$ .

We can now state our main result :

**Theorem 5.2.7** *Let  $[\rho^f]$  be a cohomology class of cocycles associated to a class  $[f]$  of Hölder maps. Then for all  $\rho \in [\rho^f]$ , there exists, up to a multiplicative constant, a unique transverse measure  $\mu$  for the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ , which is quasi-invariant with Radon-Nikodym cocycle  $\rho$ , and it is equivalent to  $\mu^f$ .*

**Remark 5.2.8** The above transverse measure  $\{\mu_T^f\}$  is constructed using the equilibrium state  $m^f$  of  $f$ . Thus we can make the analogy between our geometric situation and the symbolic one. In the case of the full shift  $\Sigma = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$  endowed with the shift  $\sigma$ , the unique equilibrium state  $m^f$  coincides with the unique *Gibbs measure* associated to  $f$ , that is the measure satisfying  $\zeta_* m^f = \exp(\rho^f) m^f$  (see [Bow2], [Ke]), with  $\zeta$  a map from a cylinder to another. Since a cylinder can be considered as a transversal to the strong stable manifolds of  $\sigma$ , the map  $\zeta$  can be viewed as a holonomy map. Thus Theorem 5.2.7 gives a similar result in the case of a manifold : the unique quasi-invariant transverse measure with respect to  $\rho^f$  is induced by the unique equilibrium state  $m^f$ , which can therefore be called a Gibbs measure.

In our geometrical framework, recall that there exists a nice set of leaves of the foliation : the set  $\mathcal{H} \simeq \partial \widetilde{M} \times \mathbb{R}$  of horospheres. Better than working with the family of measures  $\{\mu_T\}$  defined above, we would like to obtain a unique measure on  $\mathcal{H}$ . To do this, we need a holonomy invariant family of measures, or equivalently measures  $\mu_T$  on transversals  $T = \widetilde{W}^s(w)$  which do not depend on  $T$ , i.e. on  $w^+$ . The only term in the expression of

$\mu_T$  which is not invariant by holonomy is  $\exp(-\rho_{v^-}^f(o, v))$  (when  $f$  is not a constant). So we divide the measures  $\mu_T^f$  by the density  $\exp(-\rho_{v^-}^f(o, v))$ , and we multiply the measures  $\mu_{H^+}^f$  by the same density. Then we obtain new families of measures :

$$\begin{aligned} d\bar{\mu}_T^f(v) &= ds d\nu_o^f(v^-) \exp\left(\delta^f \beta_{v^-}(o, v)\right) \quad \text{and} \\ d\bar{\mu}_{H^+}^f(v) &= d\nu_o^f(v^+) \exp\left(\beta_{v^+}^f(o, v) - \rho_{v^-}^f(o, v)\right). \end{aligned}$$

**Remark 5.2.9** This construction is not canonical since it depends on the choice of the point  $o$ . But we omit the subscript  $o$  to simplify the notations.

These families are now quasi-invariant by  $\Gamma$ . More precisely, for all  $\gamma \in \Gamma$ , the measures on leaves satisfy

$$\frac{d\gamma_*^{-1} \bar{\mu}_{H^+}^f(\gamma v)}{d\bar{\mu}_{H^+}^f}(v) = \exp(-c_o^f(\gamma, v^-)), \quad \bar{\mu}_{H^+}^f - \text{a.e.} \quad (5.2)$$

Pushing by the flow  $(g^t)$  leads for all  $t \in \mathbb{R}$  to the property :

$$\frac{dg_*^{-t} \bar{\mu}_{H^+}^f(g^t v)}{d\bar{\mu}_{H^+}^f}(v) = \exp(t\delta^f), \quad \bar{\mu}_{H^+}^f - \text{a.e.} \quad (5.3)$$

The family  $\bar{\mu}_T^f$  is also quasi-invariant by  $\Gamma$ , with the opposite cocycle :  $c_o^f(\gamma, v^-) = \rho_{v^-}^f(\gamma^{-1}o, o)$ . But it is now invariant by holonomy, so it induces a measure  $\hat{\mu}_o^f$  on the quotient on the space  $\mathcal{H}$  of leaves. More precisely, we have :

**Lemma 5.2.10** *The measure  $d\hat{\mu}_o^f(\xi, s) = \exp(-\delta^f s) ds d\nu_o^f(\xi)$  on  $\mathcal{H}$  is supported on  $\Lambda \times \mathbb{R}$ , and  $\Gamma$ -quasi-invariant with Radon-Nikodym cocycle given by  $c_o^f$ .*

Remark that in the case of a constant potential, we did not change anything, these two families of measures are the same as at the beginning, and in particular, the family  $\{\mu_T^f\}$  is at the same time  $\Gamma$ -invariant and invariant under holonomy.

Let us now state the other version of Theorem 5.2.7 :

**Theorem 5.2.7'** *Let  $[c]_{\mathcal{H}}$  be the cohomology class on  $\mathcal{H}$  of a Hölder cocycle  $c$  on  $\partial\widetilde{M}$ . There exists, up to a multiplicative constant, a unique class  $[\hat{\mu}]$  of  $\Gamma$ -quasi-invariant measures on  $\mathcal{H}$  with respect to this class  $[c]_{\mathcal{H}}$ , and they are ergodic.*

**Remark 5.2.11** This result is analogous to a result of Ledrappier (see above Proposition 5.2.2) : for all cohomology classes of normalized Hölder cocycles on  $\partial\widetilde{M}$  (that is cocycles of the form  $b_o^f$ ), there exists a unique measure on  $\partial\widetilde{M}$  which is quasi-invariant with this cocycle.

Let us now summarize the main properties of the above measures in a table.

Measures and their support	$\Gamma$ -Quasi-Invariance	Q-I by holonomy
$\nu_o^f$ on $\Lambda \subset \partial\widetilde{M}$	$\exp(b_o^f)$	—
$\mu_{H^+}^f$ on leaves $H^+$ of $\mathcal{W}^{su}$	Invariant	—
$\bar{\mu}_{H^+}^f$ on leaves $H^+$ of $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$	$\exp(-c_o^f)$	—
$\mu_T^f$ on transversals to $\mathcal{W}^{su}$	Invariant	$\exp(\rho^f)$
$\bar{\mu}_T^f$ on transversals to $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$	$\exp(c_o^f)$	Invariant
$\hat{\mu}_o^f$ on $\Lambda \times \mathbb{R} \subset \mathcal{H}$	$\exp(c_o^f)$	—

### 5.3 Proofs of Theorems 5.2.7 and 5.2.7'

The aim of this section is the proof of the unicity results of a quasi-invariant measure (Theorems 5.2.7 and 5.2.7'). We use an intermediate result of equidistribution of horospherical means pushed by the flow  $g^t$  when  $t \rightarrow \infty$  [Ba2, thm 4], that we recall below, and some regularity properties of the measure of balls, proved in section 5.3.1. A formula (section 5.3.2) allows in section 5.3.3 to prove Theorem 5.2.7'. Theorem 5.2.7 is obtained as a corollary of the preceding.

Given a potential  $f$ , the horospherical mean  $M_{r,u}(\psi)$  of a map  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  on a ball  $B^+(u, r) \subset T^1\widetilde{M}$  is defined by :

$$M_{r,u}(\psi) = \frac{1}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \tilde{\psi} d\bar{\mu}_{H^+}^f,$$

with  $\tilde{\psi}$  the  $\Gamma$ -invariant lift of  $\psi$  on  $T^1\widetilde{M}$ . It is important to remark that although the family of measures  $\bar{\mu}_{H^+}^f$  is not  $\Gamma$ -invariant, the map  $u \rightarrow M_{r,u}(\psi)$  is  $\Gamma$ -invariant, since one has the important formula :

$$M_{r,u}(\psi) = \frac{\int_{B^+(u, r)} \psi(v) \exp(\rho^f(v, u)) d\mu_{H^+}^f(v)}{\int_{B^+(u, r)} \exp(\rho^f(v, u)) d\mu_{H^+}^f(v)}.$$

In other words, we may consider these means as means on leaves of the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ , by averaging  $\psi$  on balls with respect to the  $\Gamma$ -invariant measure  $\mu_{H^+}^f$  times the cocycle  $\exp \rho^f$ . It shows also that these means do not depend on  $o$ .

We shall also study these means pushed by the flow. For simplicity, we write

$$M_{r,u}^t(\psi) := g_*^t M_{r,u}(\psi).$$

The geometrical property of the horospherical distances then implies the simple, but fundamental property that for all  $t \in \mathbb{R}$  and  $u \in T^1\widetilde{M}$ , the mean of  $\psi \circ g^t$  on a ball  $B^+(u, r)$  equals the mean of  $\psi$  on the bigger ball  $B^+(g^t u, r e^t)$  : for all  $u \in T^1\widetilde{M}$ ,  $r > 0$  and  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$M_{r,u}^t(\psi) = M_{r e^t, g^t u}(\psi). \quad (5.4)$$

Recall also that, from a general result in [Ba2], we have :

**Theorem 5.3.1 (Babillot, [Ba2])** *Assume that  $\Gamma$  is cocompact or convex-cocompact, and that the geodesic flow is topologically mixing on its nonwandering set  $\Omega$ . For all  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ , for all  $r > 0$ ,  $M_{r,u}^t$  converges weakly to  $m^f$  when  $t \rightarrow +\infty$ .*

This result is a consequence of the mixing of the measure  $m^f$ , which is established when the geodesic flow is topologically mixing.

Notice that, after fixing a positive and continuous map  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , we will often consider these means  $M_{r,u}^t(\psi)$  as *functions of the variable  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$* . By  $\Gamma$ -invariance, we consider them either as functions on  $\Omega$  or  $\Lambda^2 \times \mathbb{R}$ .

#### 5.3.1 Averaging on horospherical balls

In this first section, we shall study the map

$$(u, r) \mapsto \int_{B^+(u, r)} \psi d\bar{\mu}_{H^+}^f.$$

In general, it is not known if the boundaries of balls have zero  $\bar{\mu}_{H^+}^f$ -measure. Therefore, the above map is not continuous, but we shall prove (Lemma 5.3.5) that it still has a regularity property. This is the main result of this section.

**Remark 5.3.2** The property that for all  $u \in T^1\widetilde{M}$  and  $r > 0$ ,  $\bar{\mu}_{H^+}^f(\partial B^+(u, r)) = 0$  is satisfied on surfaces, since  $\bar{\mu}_{H^+}^f$  has no atoms, and in the constant curvature case, see Roblin, [Ro2].

This paragraph is inspired from the sequence of technical lemmas due to Roblin, [Ro1], paragraph 1H.

If  $u \in T^1\widetilde{M}$  and  $v \in H^-(u)$ , let us introduce the map  $P_{u,v} : H^+(u) \rightarrow H^+(v)$  (see Figure 4), which sends  $w = (u^-, w^+, s(u)) \in H^+(u)$  to the intersection  $w'$  of the geodesic  $(v^-, w^+)$  with  $H^+(v)$ . In other words,  $w' = (v^-, w^+, s(v)) \in H^+(v)$  (when it makes sense, i.e. when  $w^+ \neq u^-, v^-$ ).

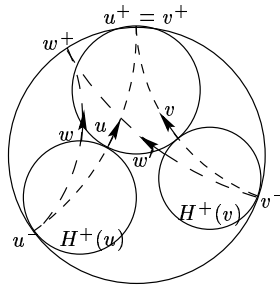


FIG. 5.4 – The map  $P_{u,v} : w \rightarrow w'$

In the following, we prove some lemmas which express mainly three important properties ; first, these maps  $P_{u,v}$  are uniformly close to the identity when  $v$  is close to  $u$  (Lemma 5.3.3). Second, all these measures  $\bar{\mu}_{H^+}^f$  have a continuous (and positive) Radon-Nikodym derivative with respect to the measure  $\nu_0^f$  on  $\partial\widetilde{M}$ , which allows to compare the measures  $\bar{\mu}_{H^+(v)}^f$  and  $P_{u,v} \bar{\mu}_{H^+(u)}^f$  : they are equivalent with continuous Radon-Nikodym derivative (Lemma 5.3.4). Third, the flow contracts the stable manifolds. All these properties are collected in Lemma 5.3.5, which will allow to prove Theorem 5.2.7'.

To make the discussion more precise, we have to introduce neighborhoods, or *cells*, in which we will let  $v$  vary : if  $u \in T^1\widetilde{M}$ , and  $r_1, r_2, r_3$  are three positive numbers, we note  $C(u, r_1, r_2, r_3) = \cup_{|s| < r_3} g^s \cup_{v_1 \in B^-(u, r_1)} P_{u, v_1}(B^+(u, r_2))$ .

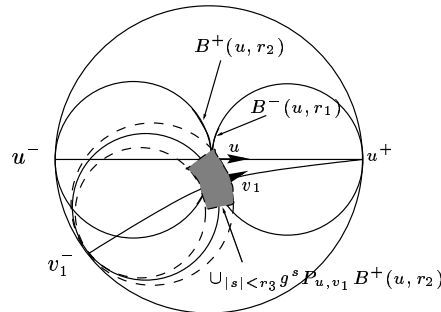


FIG. 5.5 – Cells

If  $A \subset T^1\widetilde{M}$  is a Borel set, we note  $A_\varepsilon = \cup_{w \in A} \cup_{|s| < \varepsilon} g^s B^-(w, \varepsilon)$ , and  $A_{-\varepsilon} = \{w \in A, \cup_{|s| < \varepsilon} g^s B^-(w, \varepsilon) \subset A\}$ . If  $\psi$  is a positive Borel function on  $T^1\widetilde{M}$ , we set  $\psi_\varepsilon(w) = \sup\{\psi(v), v \in \{w\}_\varepsilon\}$ , and  $\psi_{-\varepsilon}(w) = \inf\{\psi(v), v \in \{w\}_\varepsilon\}$ . One has clearly  $[\mathbf{1}_A]_{\pm\varepsilon} = \mathbf{1}_{A_{\pm\varepsilon}}$ . Moreover, for all  $\varepsilon > 0$ , and  $t \geq 0$ ,  $[g^{-t}A]_\varepsilon \subset g^{-t}(A_\varepsilon)$ , and  $[g^{-t}A]_{-\varepsilon} \supset g^{-t}(A_{-\varepsilon})$ . This means simply that if  $t \geq 0$ , the map  $g^t$  contracts the stable manifolds, and expands the unstable manifolds.

In the first lemma, we compare balls  $B^+(u, r)$  and  $B^+(v, r)$  when  $v \in H^-(u)$ .

**Lemma 5.3.3 (Roblin, [Ro1])** *Let  $K \subset T^1\widetilde{M}$  be a compact, and  $\varepsilon > 0$ . There exists  $\delta > 0$  such that for all  $u \in K$ , if  $v \in B^-(u, \delta)$  and  $w \in B^+(u, 3)$ , then  $P_{u,v}w \in g^s B^-(w, \varepsilon)$ , with  $|s| < \varepsilon$ , and if  $r \in [1, 2]$ ,  $B^+(v, re^{-\varepsilon}) \subset P_{u,v}(B^+(u, r)) \subset B^+(v, re^\varepsilon)$ .*

In other words, the map  $P_{u,v} : B^+(u, 3) \rightarrow H^+(v)$  restricted to the ball  $B^+(u, 3)$  in  $H^+(u)$ , is uniformly closed to the identity of  $B^+(u, 3)$  (up to  $\exp(\pm\varepsilon)$ ) for the topology of uniform convergence on compact sets.

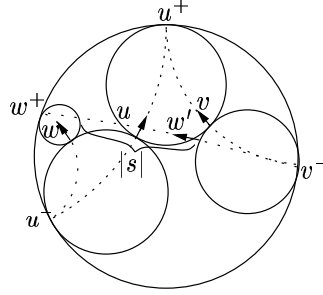


FIG. 5.6 – Cross ratio of  $(u^-, v^-, u^+, w^+)$

**Proof:** The assumptions of the Lemma mean that if  $\delta$  is small enough, the 4-uple  $(u^-, u^+, v^-, w^+)$  varies in a compact set of  $\partial^2\widetilde{M} \times \partial^2\widetilde{M}$ . One easily checks that the quantity  $s$  such that  $P_{u,v}w \in g^s H^-(w)$  is the cross ratio

$$B(v^-, u^-, u^+, w^+) = "d(v^-, u^+) + d(u^-, w^+) - d(v^-, w^+) - d(u^-, u^+)"$$

of the four points. Moreover, the cross ratio is a continuous map,  $[O]$ , which vanishes if  $u^- = v^-$  (or  $u^+ = w^+$ ). Thus if  $\delta$  is small enough,  $v^-$  is uniformly closed to  $u^-$ , which gives  $P_{u,v}w \in g^s H^-(w)$ . Moreover, an easy computation shows that

$$\frac{d_{H^+}(P_{u,v}w, v)}{d_{H^+}(u, v)} = e^{s/2}, \text{ which concludes the proof.} \quad \square$$

The following lemma is a corollary of the above and of continuity of densities of measures  $\bar{\mu}_{H^+u}^f$  on horospheres with respect to the measure  $\nu_o^f$  on the boundary.

**Lemma 5.3.4** *Let  $K \subset T^1M$  be a compact, and  $\varepsilon > 0$ . There exists  $\delta > 0$ , such that for all  $u \in K$ , and  $v \in B^-(u, \delta)$ , for all  $w \in B^+(u, 3)$  and  $w' = P_{u,v}w$ , the following quantity is uniformly close to 1 (up to  $\exp(\pm\varepsilon)$ ) :*

$$\frac{d_{\bar{\mu}_{H^+v}^f}}{d(P_{u,v} * \bar{\mu}_{H^+u}^f)}(w') = \exp\left(\beta_{w^+}^f(w, w') - \rho_{v^-}^f(o, w') + \rho_{u^-}^f(o, w)\right).$$



**Proof:** Recall first that  $\beta_{w^+}^f(w, w') = \delta^f \beta_{w^+}(w, w') - \rho_{w^+}^f(w, w')$ . We have  $|\beta_{w^+}(w, w')| \leq \varepsilon$ , after 5.3.3. We have also  $|\rho_{w^+}^f(w, w')| \leq C(f) D(w, w')^{\alpha(f)}$ , because  $f$  is Hölder, which gives the desired upper bound by 5.3.3. Finally, the last term in the above Radon-Nikodym derivative can be written as  $\exp(A(P_{u,v}w) - A(w))$ , with  $A(w) = \rho_{w^-}^f(o, w)$ , and the result follows from the continuity of  $A$  on  $T^1\widetilde{M}$ . Indeed, set  $w^t = g^{-t}w$ ,  $y \in W^{su}(u)$  the vector of  $W^{su}(u)$  tangent to the geodesic  $(u^-, o]$ , and  $y^t = g^{-t}y$ . As  $f$  is Hölder, and the curvature is bounded above by a negative constant, there exists a  $T > 0$ , uniform on  $K$ , such that if  $t \geq T$ ,  $A(w)$  is  $\varepsilon$ -closed to  $\int_o^{y^t} f - \int_w^{w^t} f$ . But for all fixed  $t > 0$ , this quantity is continuous, hence uniformly continuous in  $w \in K$ . So  $A$  is continuous, and the result follows.  $\square$

We eventually arrive at the last lemma, which summarizes the main properties of the measure  $\overline{\mu}_{H^+(u)}^f$  on balls.

**Lemma 5.3.5** *Let  $\psi$  be a positive Borel function on  $T^1\widetilde{M}$ ,  $\varepsilon > 0$  (small), and  $K \subset T^1M$  a compact set. There exists  $r_1, r_2, r_3 > 0$  small enough, so that for all  $u \in K$ , for all  $v \in C(u, r_1, r_2, r_3)$ ,  $r \in [1, 2]$ , we have :*

$$e^{-\varepsilon} \int_{B^+(u, re^{-\varepsilon})} \psi_{-\varepsilon} d\overline{\mu}_{H^+(u)}^f \leq \int_{B^+(v, r)} \psi d\overline{\mu}_{H^+(v)}^f \leq e^{\varepsilon} \int_{B^+(u, re^{\varepsilon})} \psi_{\varepsilon} d\overline{\mu}_{H^+(u)}^f.$$

**Sketch of the proof:** The proof follows closely that of Roblin, [Ro1], and goes as follows. Let  $\varepsilon > 0$ , small enough so that  $re^{3\varepsilon} \leq 2e^{3\varepsilon} \leq 3$ . Fix  $u \in K$ , and  $v \in C(u, r_1, r_2, r_3)$ . By definition of cells, we can write  $v = g^s v_2$ , with  $|s| < r_3$ ,  $v_2 \in P_{u, v_1} B^+(u, r_2) \subset H^+(v_1)$  and  $v_1 \in B^-(u, r_1)$ . First, we push the ball  $B^+(v, r)$  by  $g^{-s}$  to the ball  $B^+(v_2, re^{-s})$ , with  $s$  very small. By relations (5.3) and (5.4), the integrals of  $\psi$  on these balls are almost the same. Second, we move the ball  $B^+(v_2, re^{-s})$  by the map  $P_{u, v_1}^{-1}$ . Lemma 5.3.3 says that the image is uniformly close to the ball  $B^+(u, re^{-\varepsilon})$  and Lemma 5.3.4 says that the derivative of the measure  $\mu_{H^+}^f$  is uniformly close to 1. Third, the image of  $\psi$  by these operations is close to  $\psi_{-\varepsilon}$ . The right inequality is proved in the same way.  $\square$

### 5.3.2 An autoadjonction property

It is obvious that for a flow  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  on a compact space  $X$ , the equality

$$\int_X \frac{1}{T} \int_0^T \psi \circ g^t dt d\nu = \int_X \psi d\nu$$

for all  $T > 0$  and any  $g$ -invariant measure  $\nu$  allows to prove unique ergodicity if we know that for all  $\psi$ , all Birkhoff averages converge uniformly to a constant.

In our situation, the following equality allows to do the same trick, replacing Birkhoff averages by horospherical means : we will use it to prove unique ergodicity, using a weaker property than equidistribution of horospherical means.

**Lemma 5.3.6** *Let  $\widehat{\nu}$  be any fixed  $\Gamma$ -quasi-invariant measure on  $\mathcal{H}$  with the cocycle  $c_o^f$ , and  $M$  the measure on  $\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$  defined by  $dM(v) = d\widehat{\nu}(H^+) d\overline{\mu}_{H^+}^f(v)$ . If  $\psi$  is a  $\Gamma$ -invariant positive measurable map on  $T^1\widetilde{M}$ , and  $D$  a measurable fundamental domain for the action of  $\Gamma$  on  $T^1\widetilde{M}$ , then*

$$\int_D dM(u) M_{r,u}(\psi) = \int_D dM(v) \psi(v) \int_{B^+(v, r)} \frac{d\overline{\mu}_{H^+(v)}^f(u)}{\overline{\mu}_{H^+(v)}^f(B^+(u, r))}.$$

**Proof:** By definition,  $dM = d\widehat{\nu} d\bar{\mu}_{H^+}^f$ , and the left term can be rewritten

$$\int_{\mathcal{H}} d\widehat{\nu}(H^+(u)) \int_{H^+(u) \times H^+(u)} d\bar{\mu}_{H^+}^f(u) d\bar{\mu}_{H^+}^f(v) \frac{\mathbf{1}_D(u) \mathbf{1}_{B^+(u,r)}(v) \psi(v)}{\bar{\mu}_{H^+(u)}^f(B^+(u,r))}.$$

The proof is then based on the fact that  $\psi$  is  $\Gamma$ -invariant,  $\bar{\mu}_{H^+}^f$  and  $\widehat{\nu}$  are  $\Gamma$ -quasi-invariant (resp. with cocycles  $-c_o^f$  and  $+c_o^f$ ) and on two observations : first  $\mathbf{1}_{B^+(u,r)}(v)$  is symmetric in  $u$  and  $v$ ; second,  $B^+(u,r) = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} B^+(u,r) \cap \gamma D$ .

If we set  $v = \gamma v'$  and  $u = \gamma u'$ , we have :  $\mathbf{1}_{B^+(u,r)}(v) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{1}_{B^+(u',r)}(v') \mathbf{1}_D(v')$ . If we decompose the above integral into a sum over  $\gamma \in \Gamma$ , we find that it equals

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathcal{H}} d\widehat{\nu}(\gamma H^+(u')) \int_{\gamma H^+(u') \times \gamma H^+(u')} d\bar{\mu}_{\gamma H^+(u')}^f(\gamma u') d\bar{\mu}_{\gamma H^+(u')}^f(\gamma v') \times \\ \times \frac{\mathbf{1}_{\gamma^{-1}D}(u') \mathbf{1}_{B^+(u',r)}(v') \mathbf{1}_D(v') \psi((\gamma v'))}{\bar{\mu}_{\gamma H^+(u')}^f(\gamma B^+(u',r))} \end{aligned}$$

We then use the various (quasi-)invariance relations by  $\Gamma$ ; we remark also that  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{1}_{\gamma^{-1}D}(u') = 1$  and  $H^+(u) = H^+(v)$ , and we get

$$\int_{\mathcal{H}} d\widehat{\nu}(H^+(v)) \int_{H^+(v) \times H^+(v)} d\bar{\mu}_{H^+}^f(v) d\bar{\mu}_{H^+}^f(u) \frac{\mathbf{1}_D(v) \mathbf{1}_{B^+(v,r)}(u) \psi(v)}{\bar{\mu}_{H^+(v)}^f(B^+(u,r))}.$$

This expression is the same than the first one, with the roles of  $u$  and  $v$  exchanged.  $\square$

### 5.3.3 Proof of Theorems 5.2.7 and 5.2.7'

**Proof of Theorem 5.2.7':** Let  $[c]_{\mathcal{H}}$  be a cohomology class of Hölder cocycles for the action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}$ . By assumption, this class contains a cocycle on  $\partial \widetilde{M}$ , so we can assume that  $c$  is this cocycle. In [L], Ledrappier showed that every Hölder cocycle on  $\partial \widetilde{M}$  is of the form  $c = \lambda \beta^F$ , with  $F$  a Hölder potential and  $\lambda \in \mathbb{R}$ , whence  $c = \lambda \rho^{\delta^F - F} = \rho^{\lambda \delta^F - \lambda F}$ . Finally,  $c$  can be written  $c = c_o^f$ , with  $f$  a Hölder potential.

Let  $\widehat{\nu}$  be a nonzero  $\Gamma$ -quasi-invariant measure with the cocycle  $c_o^f$ , and  $M$  the measure on  $\partial^2 \widetilde{M} \times \mathbb{R}$  defined by  $dM(v) = d\widehat{\nu}(H^+(v)) d\bar{\mu}_{H^+}^f(v)$ . Let  $\psi$  be a positive continuous map on  $T^1 M$ , and  $\widetilde{\psi}$  its lift on  $T^1 \widetilde{M}$ . Lemma 5.3.6 gives

$$\int_D dM(u) M_{r,u}^0(\psi) = \int_D dM(v) \widetilde{\psi}(v) \int_{B^+(v,r)} \frac{d\bar{\mu}_{H^+(v)}^f(u)}{\bar{\mu}_{H^+(v)}^f(B^+(u,r))}.$$

Since  $\Omega$  is a compact set, we can choose a relatively compact fundamental domain  $D$  for the action of  $\Gamma$  on  $\Lambda^2 \times \mathbb{R}$ , with  $M(\partial D) = \widetilde{m}^f(\partial D) = 0$ .

We will prove that for all  $r > 0$ , the right term is smaller than  $\text{cst.} \int \psi dM$  (inequality (5.5)), and that there exists  $r > 0$ , such that the left term is greater than  $\text{cst}' \int \psi dm^f$  (inequality (5.6)). The constants do not depend on  $\psi$ , so that these two inequalities imply  $m^f \ll M$ .

First, there exists a constant  $N > 1$  such that for all  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$  and  $r > 0$ ,  $q(u,r) := \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u,2r))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u,r))} \leq N$ . Indeed, this quantity satisfies for all  $r > 0$  :  $q(g^{-\log r} u, 1) = q(u,r)$ ,

and for all  $\gamma \in \Gamma : q(\gamma u, r) = q(u, r)$ . As  $\Gamma$  is cocompact or convex-cocompact, we can cover the nonwandering set  $\Omega$  by a finite number of cells  $C(u_i)$ , with  $u_i \in \Omega$ , given by Lemma 5.3.5 for  $\varepsilon = 1$ . This lemma shows that for all  $v \in \Omega$ ,  $\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, 2)) \leq e^\varepsilon \sup_i \bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u_i, 2e^\varepsilon))$ .

On the same way, we obtain  $\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, 1)) \geq e^{-\varepsilon} \inf_i \bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u_i, e^{-\varepsilon}))$ . Using the fact that the measures  $\bar{\mu}_{H^+}^f$  are Radon measures, and have support  $\{w \in H^+, w^+ \in \Lambda\}$ , we obtain for all  $v \in \Omega$  :

$$q(v, 1) = \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, 2))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, 1))} \leq e^{2\varepsilon} \frac{\sup_i \bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u_i, 2e^\varepsilon))}{\inf_i \bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u_i, e^{-\varepsilon}))} = N.$$

Thus, one see that the map  $u \rightarrow q(u, 1)$  is bounded on  $\Omega$ , whence the map  $(u, r) \rightarrow q(u, r)$  is bounded on  $\Omega \times \mathbb{R}_+^*$ .

Moreover, triangular inequality gives  $B^+(u, 2r) \supset B^+(v, r)$  for all  $u \in B^+(v, r)$ , whence we have for all  $r > 0$  and  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ ,

$$\bar{\mu}_{H^+(v)}^f(B^+(u, r)) \geq \frac{1}{N} \bar{\mu}_{H^+(v)}^f(B^+(u, 2r)) \geq \frac{1}{N} \bar{\mu}_{H^+(v)}^f(B^+(v, r)).$$

It follows immediately that

$$\int_{B^+(u, r)} \frac{d\bar{\mu}_{H^+(u)}^f(v)}{\bar{\mu}_{H^+(u)}^f(B^+(v, r))} \leq N.$$

We deduce that for all  $r > 0$

$$\int_D dM(v) \tilde{\psi}(v) \int_{B^+(v, r)} \frac{d\bar{\mu}_{H^+(v)}^f(u)}{\bar{\mu}_{H^+(v)}^f(B^+(u, r))} \leq N \int_{T^1 M} \psi dM. \quad (5.5)$$

We shall now prove that there exists  $C > 0$ , such that for all  $\psi : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$ , there exists  $r > 0$ , such that

$$\int_D dM(u) M_{r, u}^0(\psi) \geq C \int_{T^1 M} \psi dm^f. \quad (5.6)$$

Let  $0 < \varepsilon < \log 2$  be small enough so that  $\int_{T^1 M} \psi_{-\varepsilon} dm^f \geq \frac{1}{2} \int_{T^1 M} \psi dm^f$ . We can cover  $D$  by a finite number of cells  $C(u_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , given by Lemma 5.3.5 for the above  $\varepsilon$ . If  $v \in C(u_i)$ , this Lemma and the fact that for all  $t \geq 0$ ,  $(\psi \circ g^t)_{-\varepsilon} \geq \psi_{-\varepsilon} \circ g^t$  give :

$$M_{1, v}^t(\psi) \geq e^{-2\varepsilon} M_{e^{-\varepsilon}, u_i}^t(\psi_{-\varepsilon}) \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u_i, e^{-\varepsilon}))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u_i, e^\varepsilon))}$$

Moreover, by Theorem 5.3.1 of Babillot,  $M_{e^{-\varepsilon}, u_i}^t(\psi_{-\varepsilon}) \rightarrow \int_{T^1 M} \psi_{-\varepsilon} dm^f$  when  $t \rightarrow +\infty$ , whence there exists  $T > 0$ , such that for all  $u_i$

$$M_{e^{-\varepsilon}, u_i}^T(\psi_{-\varepsilon}) \geq \frac{1}{2} \int_{T^1 M} \psi_{-\varepsilon} dm^f.$$

We deduce that for all  $v \in D$  (with  $\varepsilon < \log 2$ )

$$M_{1, v}^T(\psi) \geq \left( \frac{1}{16} \int_{T^1 M} \psi dm^f \right) \inf_{w \in D} \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(w, \frac{1}{2}))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(w, 2))}$$

By  $\Gamma$ -invariance of the means, the above inequality is true for all  $v \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ . Now, if  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ , we know that  $M_{e^T, u}(\psi) = M_{1, g^T u}^T(\psi)$  and above inequality applies with  $v = g^T u$ . At last, we get

$$M_{e^T, u}^0(\psi) \geq c \int_{T^1 M} \psi dm^f, \quad \text{with} \quad c = \frac{1}{16} \inf_{w \in D} \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(w, \frac{1}{2}))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(w, 2))} > 0.$$

Finally, integrating with respect to  $M$  on  $D$  leads to (5.6) with  $C = M(D)c$ . This constant  $C$  does not depend on  $\psi$ , whence  $m^f \ll M$ .

We deduce from the above that  $\hat{\mu}_o^f \ll \hat{\nu}$ . Indeed let  $A \subset \mathcal{H}$  be a Borel relatively compact set, and assume that  $\hat{\nu}(A) = 0$ . Up to considering a smaller set  $A' \subset A$ , we can assume that there exists an open set  $B \subset \Lambda \subset \partial \widetilde{M}$ , such that the set of base points in  $\partial \widetilde{M}$  of horospheres  $H \in \bar{A}$  is disjoint of  $\bar{B}$ . Since, for any  $H$ , the support of the Radon measure  $\bar{\mu}_H^f$  is  $\{w \in H, w^+ \in \Lambda\}$ , we can find two constants  $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ , such that for all  $H \in A$ ,  $c_1 \leq \bar{\mu}_H^f(B_H) \leq c_2$ , where  $B_H = \{w \in H, w^+ \in B\}$ . Then we obtain

$$\begin{aligned} M(A \times B) &= \int_A d\hat{\nu}(H) \int_H \mathbf{1}_{B_H} d\bar{\mu}_{H^+}^f \leq c_2 \hat{\nu}(A) = 0, \quad \text{whence} \\ 0 &\leq c_1 \hat{\mu}_o^f(A) \leq \int_A d\hat{\mu}_o^f(H) \int_H \mathbf{1}_{B_H} d\bar{\mu}_{H^+}^f = \tilde{m}^f(A \times B) = 0. \end{aligned}$$

So we proved  $\hat{\mu}_o^f \ll \hat{\nu}$ .

Let us now prove that  $\hat{\mu}_o^f$  is ergodic. Let  $A \subset \mathcal{H}$  be a Borel set such that for all  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\hat{\mu}_o^f(\gamma A \Delta A) = 0$ , and  $\hat{\mu}_o^f(A) > 0$ . Then the measure  $\hat{\mu}_{o|A}^f$  is nonzero and quasi-invariant with cocycle  $c_o^f$ . By what precedes, it satisfies  $\hat{\mu}_o^f \ll \hat{\mu}_{o|A}^f$ , and this implies  $\hat{\mu}_o^f(A^c) = 0$ . So we have ergodicity.

Now let  $\hat{\nu}$  be a nonzero and quasi-invariant measure with cocycle  $c_o^f$  and let us show that it is also ergodic : if  $A$  is a Borel set in  $\mathcal{H}$ ,  $\Gamma$ -invariant  $\hat{\nu}$ -a.e, and if  $\hat{\nu}(A) > 0$ , we can decompose the measure  $\hat{\nu}$  into  $\hat{\nu} = \hat{\nu}|_A + \hat{\nu}|_{A^c}$ . By the above, there exist measurable maps  $\phi$  and  $\phi'$  such that  $\hat{\mu}_o^f = \phi \hat{\nu} = \phi \hat{\nu}|_A + \phi \hat{\nu}|_{A^c}$  and  $\hat{\mu}_o^f = \phi' \hat{\nu}|_A$ . We deduce that  $\hat{\mu}_o^f(A^c) = 0$ , and then necessarily that  $\hat{\nu}|_{A^c} = 0$ , which means that  $\hat{\nu}$  is ergodic.

Moreover, the Radon-Nikodym derivative  $\frac{d\hat{\mu}_o^f}{d\hat{\nu}}$  is  $\Gamma$ -invariant  $\hat{\nu}$ -a.e, hence constant by ergodicity of  $\hat{\nu}$ . So there exists a unique (up to a multiplicative constant) measure which is  $\Gamma$ -quasi-invariant with cocycle  $c_o^f$ .

Recall now that we consider the cohomology class on  $\mathcal{H}$  of the Hölder cocycle  $c$  on  $\partial \widetilde{M}$ . Let  $c' \in [c]_{\mathcal{H}} = [c_o^f]_{\mathcal{H}}$ . There exists a Borel map  $\varphi$  on  $\mathcal{H}$ , such that for all  $\gamma \in \Gamma$  and  $(\xi, s) \in \mathcal{H}$ ,  $c'(\gamma, (\xi, s)) = c_o^f(\gamma, \xi) + \varphi(\gamma(\xi, s)) - \varphi(\xi, s)$ . If  $\hat{\nu}'$  is a Borel Radon measure on  $\mathcal{H}$ , which is  $\Gamma$ -quasi-invariant with the cocycle  $c'$  then an easy calculation shows that  $\exp(-\varphi)\hat{\nu}'$  is quasi-invariant with the cocycle  $c_o^f$ , it is then unique (up to a constant), and equals  $\hat{\mu}_o^f$ , so  $\hat{\nu}'$  is also unique, and equals  $\exp(\varphi)\hat{\mu}_o^f$ .  $\square$

**Proof of Theorem 5.2.7:** It is clear that there exists a bijection between measures transverse to the strong unstable foliation  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  of  $T^1 M$ , which are quasi-invariant with the cocycle  $\rho^f$ , and measures transverse to  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$ , which are  $\Gamma$ -invariant and quasi-invariant under holonomy with cocycle  $\rho^f$ .

Let us consider the map :  $\{M_T\} \rightarrow \{N_T\}$ , which sends a  $\Gamma$ -invariant transverse measure, quasi-invariant under holonomy with cocycle  $\rho^f$ , to the measure  $dN_T(v) = \exp(\rho_v^f(o, v)) dM_T(v)$ .

It is clearly a bijection. An easy computation shows that  $N_T$  is a measure transverse to  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$  which is holonomy invariant and  $\Gamma$ -quasi-invariant with cocycle  $c_o^f$ . We can associate to  $N_T$  a  $\Gamma$ -quasi invariant measure on  $\mathcal{H}$  (with cocycle  $c_o^f$ ), and this correspondance is 1-1. The existence of a unique quasi-invariant measure on  $\mathcal{H}$  with cocycle  $c_o^f$  is then equivalent to this of a unique measure transverse to  $\mathcal{F}$  quasi-invariant with cocycle  $\rho^f$ . Theorem 5.2.7 then follows from Theorem 5.2.7 bis.  $\square$

## 5.4 Equidistribution properties

We will now investigate equidistribution properties of the leaves of the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ . Since (unlike the case of flows) there is no natural parametrization of the leaves, we shall look for the convergence of averages of a function  $\psi$  on particular sequences of subsets of a leaf.

First, we shall study the means  $M_{r,u}(\psi)$  that we have introduced, where the averaging procedure is along big horospherical balls, and the integrating measure is the horospherical measure  $\bar{\mu}_{H^+}^f$ . In the case of compact hyperbolic surfaces, they coincide with the means on orbits of the horocycle flow, so that we recover a classical equidistribution result. It is the aim of section 5.4.1, where we prove uniform equidistribution of these means to the measure  $m^f$  under the assumption that the boundaries of horospherical balls have zero  $\bar{\mu}_{H^+}^f$ -measure. Without this assumption, we still have a result, proved in section 5.4.2. In section 5.4.3, we consider means on more general sequences of sets, and under an assumption of Følner type, we prove a similar equidistribution result.

### 5.4.1 Equidistribution of horospherical means on balls

We consider here the means  $M_{r,u}(\psi)$  on balls. In this section, we shall work under the following assumption. For all  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ ,

$$\bar{\mu}_{H^+}^f(\partial B^+(u, 1)) = 0 \quad (A)$$

**Theorem 5.4.1** *If (A) is satisfied, then for all continuous maps  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , the means  $M_{r,u}(\psi)$  converge uniformly in  $u \in \Omega$  to  $\int_{T^1M} \psi dm^f$  when  $r \rightarrow +\infty$ .*

To prove Theorem 5.4.1, we shall see, using Lemma 5.3.5, that the map  $(u, r) \rightarrow \int_{B^+(u,r)} \psi d\bar{\mu}_{H^+}^f$  is now continuous, and moreover, that for  $r = 1$  fixed, the family  $(u \rightarrow M_{1,u}^t(\psi))_{t>0}$  is equicontinuous on  $\Lambda^2 \times \mathbb{R}$ .

Note that similar arguments using equicontinuity and mixing were already used in [E-P] in an algebraic framework to prove equidistribution.

**Remark 5.4.2** This assumption is satisfied in the case of surfaces, since the measure  $\nu_o^f$  has no atoms, and in the constant curvature case, see Roblin [Ro2].

Before the proof, we start with the following lemma :

**Lemma 5.4.3** *If for all  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\bar{\mu}_{H^+}^f(\partial B^+(u, 1)) = 0$ , then for all  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ , the family  $(M_{1,u}^t(\psi))_{t \geq 0}$  is equicontinuous in  $t \geq 0$ .*

**Proof:** Let  $\varepsilon_0 > 0$ , we shall find for all  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$  a neighbourhood  $V = V(u, \varepsilon_0)$  of  $u$ , such that for all  $v \in V$ , for all  $t \geq 0$ ,  $|M_{1,v}^t(\psi) - M_{1,u}^t(\psi)| \leq \varepsilon_0$ .

Since  $\bar{\mu}_{H^+}^f(\partial B^+(u, 1)) = 0$ , there exists a  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , such that :

$$\left| \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u, e^\varepsilon))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u, e^{-\varepsilon}))} \right| \leq e^{\varepsilon_0}. \quad (5.7)$$

Since  $\psi$  is continuous on  $\Omega$ , one may choose  $\varepsilon$  small enough so that  $\psi_\varepsilon \leq \psi + \varepsilon_0$ . We put then  $V(u, \varepsilon_0) = C(u, r_1, r_2, r_3)$  : the cell given by Lemma 5.3.5 for  $\varepsilon$ . Now, relation (5.7) and Lemma 5.3.5, together with the fact that  $[\psi \circ g^t]_\varepsilon \leq \psi_\varepsilon \circ g^t$  (since the geodesic flow expands unstable manifolds) allow to prove that for all  $v \in V(u, \varepsilon)$ , and for all  $t > 0$ ,  $|M_{1,v}^t(\psi) - M_{1,u}^t(\psi)| \leq \varepsilon_0$ .  $\square$

**Proof of Theorem 5.4.1:** We consider now the means as functions of  $u \in T^1M$ . By the above Lemma, for all  $u \in \Lambda^2 \times \mathbb{R}$ , the means  $(M_{1,u}^t(\psi))_{t \geq 0}$  are equicontinuous, whence (Theorem 5.3.1) they converge uniformly on  $\Omega$  to  $\int_{T^1M} \psi dm^f$  when  $t \rightarrow +\infty$ . Let  $\varepsilon > 0$ , there exists  $T > 0$ , such that for all  $t \geq T$  and for all  $u \in \Omega$ ,

$$\left| M_{r,u}^t(\psi) - \int_{T^1M} \psi dm^f \right| \leq \varepsilon.$$

Let now  $v \in \Omega$  be a vector, and  $t \geq T$ ; as  $\Omega$  is invariant by the flow, the above inequality applies for  $u = g^{-t}v$  and above relation (5.4) gives the desired result :

$$\left| M_{re^t,v}^0(\psi) - \int_{T^1M} \psi dm^f \right| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Remark 5.4.4** Under this additional assumption (A), one can give a more direct proof of Theorem 5.2.7. Indeed, since we now know that the means get equidistributed uniformly, we can use the equality of Lemma 5.3.6 : the left term converges to  $M(D) \int_{T^1M} \psi dm^f$ , and the right term is smaller than  $N \int_{T^1M} \psi dM$ . Then we have directly  $m^f \ll M$ , and we conclude as in the general case.

## 5.4.2 Equidistribution of Cesaro averages on balls

Without the additional assumption of Theorem 5.4.1, with the same notations, it is possible to prove the convergence of Cesaro averages along balls :

**Proposition 5.4.5** *For all continuous  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , and all  $u \in \Omega$ , we have*

$$\frac{1}{T} \int_0^T M_{e^t,u}(\psi) dt \rightarrow \int \psi dm^f \quad \text{when } T \rightarrow +\infty.$$

**Proof:** Let  $\varepsilon > 0$ . Let  $D$  be a relatively compact fundamental domain for the action of  $\Gamma$  on  $\Lambda^2 \times \mathbb{R}$ . As the measures  $\bar{\mu}_{H^+}^f$  are Radon measures, there exists a finite number  $N_\varepsilon$  of  $u_i = u_i(\varepsilon)$ , such that for all  $v \neq u_i$ ,  $\bar{\mu}_{H^+}^f(\partial B^+(v, 1)) < \varepsilon$ .

Let  $V_\varepsilon \subset D$  be an open neighbourhood of the  $\{u_i\}$ , of the form  $V_\varepsilon = \sqcup V_\varepsilon^i$ , with  $u_i \in V_\varepsilon^i$ , and such that for all  $1 \leq i \leq N_\varepsilon$ ,  $\text{diam}(V_\varepsilon^i) \leq \varepsilon \inf_{j \neq k} d(u_j, u_k)$ , and for all  $v \notin V_\varepsilon$ ,  $\bar{\mu}_{H^+}^f(\partial B^+(v, 1)) < \varepsilon$ . Moreover, one can assume that any geodesic segment passing through  $V_\varepsilon^i$  stays at most a time  $\text{diam}(V_\varepsilon^i)$  in  $V_\varepsilon^i$ .

Consider now the set  $K_\varepsilon = D \setminus V_\varepsilon$ . Using Lemma 5.3.5, we can prove that  $\inf_{v \in D} \bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, 1)) = \delta_0 > 0$  (see for example the proof of Theorem 5.2.7). Using one more time Lemma 5.3.5, by compactity of  $K_\varepsilon$ , one can find  $0 < \alpha < \varepsilon$ , such that for all  $v \in K_\varepsilon$

$$1 \leq \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, e^\alpha))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, e^{-\alpha}))} \leq 1 + \frac{2\varepsilon}{\delta_0}.$$

As  $\psi$  is continuous, one may also assume that  $\alpha$  is small enough that  $\psi_\alpha \leq \psi + \varepsilon$  and  $\psi_{-\alpha} \geq \psi - \varepsilon$  on  $K_\varepsilon$ .

We can find a finite number of cells  $C(w_j)$ , with  $w_j \in K_\varepsilon$ , given by Lemma 5.3.5 for  $\alpha$ , which cover  $K_\varepsilon$ . If  $v \in C(w_j) \cap K_\varepsilon$ , this lemma gives for all  $t \geq 0$

$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{1 + 2\varepsilon/\delta_0} \left( M_{e^{-\alpha}, w_j}^t(\psi) - \varepsilon \right) \leq M_{1, v}^t(\psi) \leq e^{2\varepsilon} \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\delta_0} \right) \left( M_{e^\alpha, w_j}^t(\psi) + \varepsilon \right).$$

Since for all  $j$ , the means  $M_{e^{-\alpha}, w_j}^t(\psi)$  and  $M_{e^\alpha, w_j}^t(\psi)$  converge to  $\int_{T^1 M} \psi dm^f$  when  $t \rightarrow +\infty$ , there exists  $c(\delta_0) > 0$  and  $T_0 > 0$ , such that for all  $v \in K_\varepsilon$  and  $t \geq T_0$ ,

$$\left| M_{1, v}^t(\psi) - \int_{T^1 M} \psi dm^f \right| \leq c(\delta_0)\varepsilon(\|\psi\|_\infty + 1)$$

Now, let us return to the means  $M_{e^t, u}(\psi)$ , with  $u \in \Omega$ . By definition of  $V_\varepsilon$ , one has  $\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_{g^{-t}u \in V_\varepsilon} dt \leq \varepsilon$ . Thus, we deduce that

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T M_{e^t, u}(\psi) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_{g^{-t}u \in K_\varepsilon} M_{e^t, u}(\psi) dt \right| \leq \varepsilon \|\psi\|_\infty.$$

Moreover,  $\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_{g^{-t}u \in K_\varepsilon} M_{e^t, u}(\psi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_{g^{-t}u \in K_\varepsilon} M_{1, g^{-t}u}^t(\psi) dt$ . By the above, one has :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_{g^{-t}u \in K_\varepsilon} M_{1, g^{-t}u}^t(\psi) dt \leq \frac{T_0}{T} \|\psi\| + \frac{T - T_0}{T} \left( \int_{T^1 M} \psi dm^f + c(\delta_0)\varepsilon(\|\psi\| + 1) \right)$$

A minoration is obtained in the same way. At last, there exists a constant  $c'(\delta_0) > 0$  and  $T_1 \geq T_0$ , such that for all  $t \geq T_1$  and  $u \in \Omega$ ,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T M_{e^t, u}(\psi) dt - \int_{T^1 M} \psi dm^f \right| \leq c'(\delta_0)\varepsilon(\|\psi\| + 1).$$

This gives the desired result.  $\square$

### 5.4.3 Equidistribution of Følner sequences

In this section, we assume that  $M$  is compact, we consider more general means on leaves of  $\mathcal{W}^{su}$ , and we apply a result of [Sc2] for general foliations to deduce an equidistribution property (Theorem 5.4.6).

Let us begin with some definitions. If  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1}$  is a chart of the foliation  $\mathcal{W}^{su}$ , we say that  $B$  is a *box* for the foliation, a set  $P = \varphi^{-1}(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$  is called a *plaque*, and

a set  $T = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{p\})$  is a *transversal* of  $B$ . We denote then  $B$  by  $B = T \times P$ . If  $v \in B$ , we denote by  $P_v$  its plaque in  $B$ . We shall consider only boxes of a *regular covering* of  $\mathcal{W}^{su}$ , that is a covering by boxes which form a basis of the topology of  $\mathcal{W}^{su}$ , and such that if  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ , then any plaque of  $B_i$  intersects at most a plaque of  $B_j$ . As  $M$  is compact, we can cover  $\mathcal{W}^{su}$  by a finite number of relatively compact boxes. Choosing a transversal  $T_i$  in each box  $B_i$ , we define the *set of plaques*  $X = \sqcup_i \bar{T}_i$ ; it is then a compact set. A *leafwise measure* (resp. a *Haar system*)  $\lambda$  is a family of measures on each leaf of  $\mathcal{W}^{su}$ , such that for any map  $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ , which is continuous with support in a box  $B = T \times P$ , the following map is measurable (resp. continuous)

$$v \in T \rightarrow \int_{P_v} \psi(w) d\lambda_{W^{su}(v)}(w).$$

It is said of *full support* if all leaves have positive  $\lambda$ -measure. The main examples that we have in mind are the following : first, the Haar system  $\{\mu_{H^+}^g\}$  associated with a Hölder map  $g : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  (the continuity property follows from Lemma 5.3.5), and in particular the riemannian measure on leaves of the foliation (which corresponds to the Hölder map  $g$  such that  $\int_x^y g = \log \det d \exp_x(\exp_x^{-1}(y))$ , see [K1]), and second the leafwise measure  $\lambda^X$  defined on each leaf  $W^{su}(v)$  by

$$\lambda_{W^{su}(v)}^X = \sum_{w \in X \cap W^{su}(v)} \delta_w.$$

A Haar system  $\lambda$  of full support satisfies the following regularity condition : there exists a covering  $\mathcal{B}$  of  $\mathcal{W}^{su}$  by boxes  $B = T \times P$ , such that

$$0 < \inf_{t \in T} \lambda_{W^{su}(t)}(P_t) \leq \sup_{t \in T} \lambda_{W^{su}(t)}(P_t) < \infty. \quad (5.8)$$

Note that the leafwise measure  $\lambda^X$  also satisfies this condition.

If  $\lambda$  is a leafwise measure, and  $\nu$  is a quasi-invariant transverse measure with respect to a cocycle  $\rho$ , we recover a measure  $\nu \circ \lambda$  on the full space, defined on each box  $B = T \times P$  by

$$\nu \circ \lambda(B) = \int_T d\nu_T(v) \int_{P_v} \exp \rho(w, v) d\lambda_{P_t}(w).$$

The quasi-invariance of  $\nu$  ensures that the above quantity does not depend on  $T$ , so that the measure  $\nu \circ \lambda$  is well defined. Note that in the case where  $\nu = \mu^f$ ,  $\rho = \rho^f$  and  $\lambda$  is the Haar system  $\{\mu_{H^+}^f\}$ , with  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  a Hölder map, we recover the equilibrium state  $m^f$ .

Let us now introduce the objects needed in the following Theorem 5.4.6. Fix a leaf  $W^{su}(u_0)$ , and consider a sequence  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of relatively compact connected open sets of  $W^{su}(u_0)$ . We say that  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is *regular* with respect to  $\lambda$  if for all boxes  $B = T \times P$  of the covering  $\mathcal{B}$  of (5.8), there exists  $N \in \mathbb{N}$ , such that for all  $n \geq N$  and  $t \in T \cap E_n$ , one has

$$\text{if } 0 < \lambda_W(P_t \cap E_n) < \lambda_W(P_t), \quad \text{then } E_n^c \cap \partial B \neq \emptyset \quad (5.9)$$

This condition is satisfied for example if the foliation  $\mathcal{W}^{su}$  has dimension one, or if for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n^c$  is a connected set.

We can now define the horospherical means that we shall study. If  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  is measurable, let

$$M_n^{f, \lambda}(\psi) = \oint_{E_n} \psi(v) \exp \rho^f(v, u_0) d\lambda_{W^{su}(u_0)}(v)$$



We consider also the transverse measure  $\nu^n$  defined on all transversals  $T$  by

$$\nu_T^n = \frac{1}{\int_{E_n} \exp \rho^f(v, u_0) d\lambda_{W^{su}(u_0)}(v)} \sum_{t \in T \cap E_n} \exp \rho^f(t, u_0) \delta_t.$$

Note that if  $\lambda = \lambda^X$ , one has  $M_n^{f, \lambda^X} = \nu_X^n$ .

The uniqueness of a quasi-invariant measure with cocycle  $\rho^f$  allows us to use a general result from [Sc2] for general foliations, and to get here :

**Theorem 5.4.6** *Let  $M$  be a compact negatively curved manifold. Let  $\lambda$  be a Haar system of full support on  $\mathcal{W}^{su}$ , and  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a regular sequence of sets as in (5.9). If for all holonomy maps  $\zeta : T \rightarrow T'$ , we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_T^n((T \cap E_n) \Delta \zeta^{-1}(T' \cap E_n)) = 0, \quad (5.10)$$

then the sequence  $M_n^{f, \lambda}$  converges weakly to  $\frac{1}{\mu^f \circ \lambda(T^1 M)} \mu^f \circ \lambda$ , where  $\mu^f$  is the unique quasi-invariant transverse measure with respect to the cocycle  $\rho^f$ .

Moreover, if  $\lambda$  is the leafwise measure  $\lambda^X$ , the sequence  $M_n^{f, \lambda^X} = \nu_X^n$  of probability measures on  $X$  converges weakly to  $\frac{1}{\mu_X^f(X)} \mu_X^f$ .

To illustrate Theorem 5.4.6, we shall give examples where condition (5.10) can be checked. First, we shall prove in Lemma 5.4.7 that for any leafwise measure  $\lambda$  satisfying (5.8), there exists such sequences  $(E_n)$ . Second, we shall prove (Lemma 5.4.8) that under assumption (A) of section (5.4.1), the full sequence of balls  $(B^+(u, r))_{r > 0}$  satisfies (5.10), so that we recover the result of Theorem 5.4.1. At last, we will study the convex-cocompact case, where it is still possible to get a result like Theorem 5.4.6 for some particular leafwise measures  $\lambda$ .

**Lemma 5.4.7** *For all leafwise measures  $\lambda$  satisfying (5.8), there exists a sequence  $(E_n)$  such that  $M_n^{f, \lambda}$  satisfies the assumptions of Theorem 5.4.6.*

**Proof:** Consider a connected relatively compact fundamental domain  $D$  for the action of  $\Gamma$  on  $T^1 \widetilde{M}$  such that  $T^1 \widetilde{M} \setminus D$  is connected, and  $\mu^f \circ \lambda(\partial D) = 0$ . Let  $S$  be a symmetric set of generators of  $\Gamma$  such that  $\cup_{\gamma \in S} \gamma \bar{D}$  is connected and  $T^1 \widetilde{M} \setminus \cup_{\gamma \in S} \gamma \bar{D}$  is also connected. Denote by  $\Gamma^n$  the set of words of length at most  $n$  in  $\Gamma$ , let  $H^+(u)$  be a leaf of  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$ , and set  $\tilde{E}_n = \Gamma^n \bar{D}$ . On  $T^1 M$ , we define  $E_n$  as the quotient of  $\tilde{E}_n$  by  $\Gamma$ .

By the choice of  $D$ , we can consider only small holonomy maps  $\zeta : T \rightarrow T'$ , with  $T, T'$  two transversals of a box  $B$  which does not intersect the projection of  $\partial D$  on  $T^1 M$ . Thus, by definition of  $E_n$ , we have  $\zeta(T \cap E_n) = T' \cap E_n$ , so that the condition (5.10) is clearly satisfied. This implies the desired result.  $\square$

**Lemma 5.4.8** *Let  $\lambda$  be the leafwise measure  $\{\mu_{H^+}^f\}$  associated with  $f$ , and consider the means  $M_{r, u}$  (already defined in section 5.3), where the integrating sets are balls  $B^+(u, r)$ .*

**a-** *Under assumption (A) of section 5.4.1, for all  $u \in T^1 M$ , the full sequence of balls  $(B^+(u, r))_{r > 0}$  satisfies (5.10).*

**b-** *In general, there exists  $u \in T^1 M$  and  $r_n \rightarrow +\infty$ , such that the sequence  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} = (B^+(u, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  satisfies (5.10).*

**Proof: a-** We have to prove that for all holonomy maps  $\zeta : T \rightarrow T'$ ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu_T^r((T \cap B^+(u, r)) \Delta \zeta^{-1}(T' \cap B^+(u, r))) = 0,$$

It is enough to prove it for “small holonomy maps”, that is holonomy maps  $\zeta : T \rightarrow T'$  with  $T, T'$  two transversals of the same relatively compact box  $B$ . As  $B$  is relatively compact, there exists  $r_0 > 0$ , such that for all  $v \in B$ ,  $B^+(v, r_0) \cap B$  contains the plaque  $P_v$  of  $v$ . We shall choose later boxes  $B$ , so that  $r_0$  is small enough.

If  $v \in T \cap B^+(u, r)$  and  $\zeta v \notin T' \cap B^+(u, r)$ , by the triangular inequality, one gets  $v \notin B^+(u, r - r_0)$ . Conversely, if  $v \notin T \cap B^+(u, r)$  but  $\zeta v \in T' \cap B^+(u, r)$ , the same argument gives  $v \in B^+(u, r + r_0)$ . Thus, it is enough to prove that  $\lim_{r \rightarrow \infty} \nu_T^r(B^+(u, r + r_0) \setminus B^+(u, r - r_0)) = 0$ . Using the fact that  $\mu_{H^+}^f$  satisfies (5.8), it is easy to see that this quantity is less than

$$\begin{aligned} & \text{Cst}(B, \rho^f, \mu_{H^+}^f) \frac{\int_{B^+(u, r+r_0) \setminus B^+(u, r-r_0)} \exp \rho^f(v, u) d\mu_{H^+}^f(v)}{\int_{B^+(u, r)} \exp \rho^f(v, u) d\mu_{H^+}^f(v)} \\ &= \text{C}(B, \rho^f, \mu_{H^+}^f) \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u, r+r_0) \setminus B^+(u, r-r_0))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(u, r))} \\ &= \text{C}(B, \rho^f, \mu_{H^+}^f) \frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(g^{-\log r} u, 1 + \frac{r_0}{r}) \setminus B^+(g^{-\log r} u, 1 - \frac{r_0}{r}))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(g^{-\log r} u, 1))}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Under assumption (A), we already saw in the proof of Lemma 5.4.3 that for all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\alpha > 0$ , such that for all  $v \in T^1 M$ ,  $\frac{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, e^\alpha))}{\bar{\mu}_{H^+}^f(B^+(v, e^{-\alpha}))} \in [1, 1 + \varepsilon[$ . We deduce that (5.11) goes to 0 when  $r \rightarrow \infty$ , which is the desired result.

**b-** In the general case, we do the same reasoning : we want that quantity (5.11) goes to 0 when  $r_n \rightarrow \infty$ . It is enough to find  $u \in T^1 M$  and  $r_n \rightarrow \infty$ , such that  $g^{-\log r_n} u$  converges to  $v \in T^1 M$  with  $\bar{\mu}_{H^+}^f(\partial B^+(v, 1)) = 0$ .  $\square$

**Remark 5.4.9** In the convex-cocompact case, the only problem is that the means  $M_n^{f, \lambda}$  do not necessarily have a compact support, so that we do not know if they have accumulation points which are probability measures. But if the sets  $E_n$  are included in a leaf  $W^{su}(u_0)$ , with  $u_0^- \in \Lambda$ , and if each  $\lambda_W$  is supported in  $W \cap \Omega$ , the means  $M_n^{f, \lambda}$  have their support in  $\Omega$  which is compact, so that Theorem 5.4.6 still applies. It is the case for example if  $\lambda$  is the leafwise measure  $\{\mu_{H^+}^h\}$  associated with any Hölder map  $h : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 5.5 Application to coverings

### 5.5.1 Nonsymmetric potential

If  $f$  is not symmetric, we set  $\check{f}(v) = f(-v)$ , and we look again at the product measure  $\nu_o^f \times \nu_o^{\check{f}}$  on  $\partial^2 \widetilde{M}$ . We are still in the case when  $\delta^f < +\infty$ , and we have  $\delta^f = \delta^{\check{f}}$  (see Coudène, [Cou1]). The equilibrium state  $m^f$  is still constructed by means of this product, but the density is slightly different [Cou1] :

$$d\tilde{m}^f(v^-, v^+, s) = ds d\nu_o^f(v^+) d\nu_o^{\check{f}}(v^-) \exp\left(\beta_{v^+}^f(o, v) + \beta_{v^-}^{\check{f}}(o, v)\right).$$

The measures of paragraph 5.2.2 can then be written

$$\begin{aligned} d\widehat{\mu}_o^f(\xi, s) &= ds d\nu_o^f(v^-) \exp(-\delta^f s), \quad \text{and} \\ d\overline{\mu}_{H^+u}^f(v) &= d\nu_o^f(v^+) \exp(\beta_{v^+}^f(o, v) - \rho_{v^-}^f(o, v)). \end{aligned}$$

And the relations of  $\Gamma$ -quasi-invariance become

$$\frac{d(\gamma_*^{-1}\widehat{\mu}_o^f)}{d\widehat{\mu}_o^f}(\xi, s) = \exp(c_o^f(\gamma, \xi)), \quad \text{and} \quad \frac{d(\gamma_*^{-1}\overline{\mu}_{H^+(\gamma v)}^f)}{d\overline{\mu}_{H^+v}^f}(v) = \exp(-\rho_{v^-}^f(\gamma^{-1}o, o)).$$

All proofs apply in the same way, since they are based on the Hölder continuity of  $f$  and the geometry of  $M$ , whence Theorems 5.2.7 and 5.2.7' are still true.

### 5.5.2 Proof of Theorem 5.5.1

The above paragraph applies in particular to the case of a closed 1-form  $\alpha$  on  $M$ . Indeed, a 1-form on  $M$  is a smooth map from  $M$  into  $T^*M$  which to each  $x \in M$  associates a linear form  $\alpha_x$  on  $T_xM$ . In particular, it is a map from  $TM$  into  $\mathbb{R}$ , that we can restrict to  $T^1M$ . For all  $x \in M$ , the linearity of  $\alpha_x$  gives antisymmetry of  $\alpha$  :  $\alpha(-v) = -\alpha(v)$ . Moreover, as  $\alpha$  is closed, we have  $\rho_\xi^\alpha(x, y) = \int_x^y \check{\alpha} = -\rho_\xi^\alpha(x, y)$ , whence (cf [Ba1]) :

$$d\widetilde{m}^\alpha(v^-, v^+, s) = ds d\nu_o^\alpha(v^+) d\nu_o^\alpha(v^-) \exp(\delta^\alpha \beta_{v^-}(o, v) + \delta^\alpha \beta_{v^+}(o, v)).$$

The measure  $\widehat{\mu}_o^\alpha$  can be written :  $d\widehat{\mu}_o^\alpha(u^-, s) = ds d\nu_o^\alpha(v^-) \exp(-\delta^\alpha s)$ . Moreover, since  $\alpha$  is closed, we have  $c_o^\alpha(\gamma, \xi) = \rho_\xi^\alpha(\gamma^{-1}o, o) = -\int_o^{\gamma o} \alpha$ , whence :

$$\frac{d(\gamma_*^{-1}\widehat{\mu}_o^\alpha)}{d\widehat{\mu}_o^\alpha}(\xi, s) = \exp(-\int_o^{\gamma o} \alpha). \quad (5.12)$$

Remark that  $\gamma_*^{-1}\widehat{\mu}_o^\alpha$  is a multiple of  $\widehat{\mu}_o^\alpha$  and does not depend on  $o$  : the cocycle does not depend on  $\xi$  and  $o$ , but only on  $\gamma$ , and the measure  $\nu_o^\alpha$  on  $\partial\widetilde{M}$  is independent on  $o$  too. So we will omit the subscript  $o$  for these measures  $\widehat{\mu}^\alpha$  et  $\nu^\alpha$ .

Let us recall some notions : the first singular homology group  $H_1(M, \mathbb{Z})$  over  $\mathbb{Z}$  can be identified to the abelianization  $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$  of the fundamental group. The first real homology group  $H_1(M, \mathbb{R})$  is the  $\mathbb{R}$ -vector space generated by  $H_1(M, \mathbb{Z})$  except the torsion elements :  $H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . The first de Rham cohomology group  $H_{dR}^1(M)$  is the set of closed 1-forms modulo exact forms. Moreover, the de Rham isomorphism (see [Wa]) allows to identify the dual of  $H_1(M, \mathbb{R})$  with  $H_{dR}^1(M)$ . This identification is induced by the map

$$\begin{aligned} H_1(M, \mathbb{R}) \times H_{dR}^1(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\gamma, \alpha) &\mapsto \int_\gamma \alpha. \end{aligned}$$

We denote by  $\int_\gamma \alpha$  the integral of any representant of  $\alpha$  on any loop of  $M$  belonging to the homology class of  $\gamma$ . In particular, it is the integral of  $\alpha$  on the unique closed geodesic in the homotopy class of  $\gamma$ , and it is also the integral  $\int_o^{\gamma o} \alpha$ , since by definition of the action of  $\Gamma$  on  $\widetilde{M}$ , the curve  $[o, \gamma o]$  projects on a loop in the class  $\gamma$ . If  $\bar{\Gamma}$  is a subgroup of  $\Gamma$ , we say that  $\alpha$  vanishes on  $\bar{\Gamma}$  if it vanishes on the image of  $\bar{\Gamma}$  in  $H_1(M, \mathbb{R})$ .

Theorem 5.2.7' will allow us to determine the measures on  $\mathcal{H}$ , which are invariant by a normal subgroup  $\bar{\Gamma}$  of  $\Gamma$ , and quasi-invariant by  $\Gamma$ . In other words, if  $\bar{M}$  is a regular cover of  $M$ , with fundamental group  $\bar{\Gamma}$ , we look for the invariant measures on the space of horospheres of  $\bar{M}$ , which are quasi-invariant by the group  $\Gamma/\bar{\Gamma}$  of the cover. If  $\alpha$  is a closed 1-form which vanishes on  $\bar{\Gamma}$ , formula (5.12) above shows that the  $\Gamma$ -quasi-invariant measure  $\hat{\mu}^\alpha$  induced by the Gibbs measure  $m^\alpha$  is in particular invariant by  $\bar{\Gamma}$ . Theorem 5.5.1 establishes that these measures are the only possible  $\bar{\Gamma}$ -invariant,  $\bar{\Gamma}$ -ergodic and  $\Gamma$ -quasi-invariant measures on  $\mathcal{H}$ .

**Theorem 5.5.1** *Let  $\bar{\Gamma} \triangleleft \Gamma$  be a normal subgroup, with  $\Gamma$  satisfying the assumptions 5.1.1. Any  $\bar{\Gamma}$ -invariant and  $\bar{\Gamma}$ -ergodic measure  $\hat{\nu}$  on  $\mathcal{H}$ , which is in addition  $\Gamma$ -quasi-invariant, is a measure of the form  $\hat{\nu} = \hat{\mu}^\alpha$ , with  $\alpha$  a closed 1-form vanishing on  $\bar{\Gamma}$ .*

**Proof:** The first part of the Proposition was proved above. The group  $\bar{\Gamma}$  is normal in  $\Gamma$ , so the action of an element  $a \in A = \Gamma/\bar{\Gamma}$  on  $\hat{\nu}$  makes sense : indeed, we can write  $a = \gamma_a \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma} \gamma_a$ , and  $\bar{\Gamma}$ -invariance of  $\hat{\nu}$  shows that if  $\gamma_a \in \Gamma$ , the measure  $\gamma_a^{-1} \hat{\nu}$  only depends on  $a \in A$ . It shows also that for all  $a \in A$ , the measure  $a_*^{-1} \hat{\nu}$  is also  $\bar{\Gamma}$ -invariant. The derivative  $\frac{da_*^{-1} \hat{\nu}}{d\hat{\nu}}$  is then a  $\bar{\Gamma}$ -invariant map  $\hat{\nu}$ -a.e, and by ergodicity of  $\hat{\nu}$ , it is constant. So for all  $a \in A$ , there exists a constant  $\lambda(a) > 0$ , such that  $a_*^{-1} \hat{\nu} = \lambda(a) \hat{\nu}$ . The map  $\lambda$  is clearly a morphism of groups from  $A$  into  $\mathbb{R}_+^*$ , and when composed with the quotient morphism  $\Gamma \rightarrow A$ , it defines a homomorphism, still denoted by  $\lambda$ , from  $\Gamma$  to  $\mathbb{R}_+^*$ . Moreover, as  $\mathbb{R}_+^*$  is abelian,  $\lambda$  induces a morphism defined on the abelianization  $\Gamma/[\Gamma, \Gamma] = H_1(M, \mathbb{Z})$ . We can then extend it by  $\mathbb{R}$ -linearity into the exponential of a linear form on  $H_1(M, \mathbb{R})$ . The de Rham isomorphism between  $H_1(M, \mathbb{R})$  and  $H_{dR}^1(M)$  allows to see  $\log \lambda$  as an element of  $H_{dR}^1(M)$ ; so let  $-\alpha$  be a closed 1-form in its class; for all loop  $c(\gamma)$  in the homology class of  $\gamma$ ,  $\lambda(\gamma) = \exp(-\int_{c(\gamma)} \alpha)$ . In particular,  $\lambda(\gamma) = \exp(-\int_{\pi[o, \gamma o]} \alpha) = \exp(-\int_o^{\gamma o} \alpha)$ . Moreover, a closed 1-form  $\alpha$  is in particular a Hölder map on the unit tangent bundle  $T^1 M$ , hence we have : for all  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma_*^{-1} \hat{\nu} = \exp(-\int_o^{\gamma o} \alpha) \hat{\nu}$ . Then Theorem 5.2.7' applies, and  $\hat{\nu}$  is necessarily equal to  $\hat{\mu}^\alpha$ .  $\square$

# Troisième Partie

## Propriétés du feuilletage horosphérique des variétés géométriquement finies

Cette troisième partie est consacrée à l'étude du feuilletage horosphérique des variétés géométriquement finies, et principalement aux propriétés d'équidistribution de ce feuilletage.

Dans ce cadre général, rappelons que nous étudions les moyennes

$$M_{r,u}^\alpha(\psi) := \frac{1}{\alpha_{H^+}(B^+(u,r))} \int_{B^+(u,r)} \psi(v) d\alpha_{H^+}(v),$$

où  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue à support compact,  $u \in T^1M$  est un vecteur non errant du flot géodésique,  $B^+(u,r)$  une boule horosphérique sur  $H^+(u)$ , et  $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$  une famille de mesures sur les feuilles.

Le cas le plus simple est celui où cette famille de mesures est la famille  $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$  des mesures conditionnelles de la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  sur  $T^1M$ . Pour simplifier, nous noterons  $(M_{r,u}(\psi))_{r>0}$  ces moyennes.

Le support des mesures  $(M_{r,u})_{r>0}$  est égal à l'ensemble non-errant du flot géodésique, qui est non-compact. Ces mesures pourraient donc a priori tendre faiblement vers 0 quand  $r \rightarrow +\infty$ .

Au chapitre 6, nous introduisons deux familles d'hypothèses, notées (\*) et (\*\*), sur la géométrie des cusps de  $M$ , qui vont nous permettre de montrer que cette dégénérescence n'a pas lieu. Ces deux conditions portent plus précisément sur la croissance des sous-groupes paraboliques de  $\Gamma$ , et (\*) implique (\*\*). Nous renvoyons au paragraphe 6.2.6 pour une discussion de ces hypothèses, mais notons tout de suite qu'elles sont toutes deux satisfaites en courbure constante.

Nous démontrons le résultat de non divergence suivant :

**Théorème 6.4.2** *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les bouts cuspidaux satisfont (\*\*), avec  $\Gamma$  un groupe divergent. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $C \subset T^1M$  un compact inclus dans l'ensemble non errant du feuilletage horosphérique.*

Alors il existe un compact  $K_{\varepsilon, C} \subset \Omega$  et un réel  $r_0(C) > 0$  tels que pour tout  $r \geq r_0(C)$  et tout  $u \in C$ , on ait

$$M_{r,u}(K_{\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ce théorème assure que toutes les valeurs d'adhérence de la suite  $(M_{r,u})_{r>0}$  sont des probabilités, c'est-à-dire que la suite de probabilités  $(M_{r,u})_{r>0}$  est *tendue*.

Sa démonstration utilise les mêmes idées que celle du « Lemme de l'Ombre », théorème technique qui donne des estimées de la mesure de Patterson de l'ombre faite sur le bord à l'infini de  $\widetilde{M}$  par des boules de  $\widetilde{M}$  de rayon fixé en fonction de la distance du centre de la boule à un point de référence fixé. Ce résultat est originellement dû à Sullivan, et a été démontré par Stratmann et Velani [St-V] sur les variétés hyperboliques géométriquement finies. L'adaptation d'une preuve due à Peigné [Pe1] nous permet de l'étendre en courbure variable (théorème 6.3.2) sous l'hypothèse plus restrictive (\*).

Le théorème 6.4.2 nous permet d'aborder la question de l'équidistribution des mesures  $(M_{r,u})_{r>0}$  vers la mesure de Patterson-Sullivan. Au chapitre 7, dans le cas particulier des surfaces, nous montrons le

**Théorème 7.3.1** *Soit  $S$  une surface géométriquement finie à courbure négative pincée dont les bouts cuspidaux satisfont (\*\*) et dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie, et  $u$  un vecteur non errant et non périodique pour le feuilletage horosphérique. Alors les mesures  $(M_{r,u})_{r>0}$  convergent vaguement vers la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .*

Grâce à ce premier résultat d'équidistribution, sous les mêmes hypothèses, pour une large classe de familles de mesures  $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$  sur les horosphères, nous obtenons le résultat suivant (théorème 7.4.1). Pour toutes fonctions continues à support compact  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $T^1S$ , on a

$$\frac{\int_{B^+(u,r)} \psi d\alpha}{\int_{B^+(u,r)} \varphi d\alpha} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \alpha)}{\int_{T^1S} \varphi d(\mu \circ \alpha)} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty,$$

où  $\mu \circ \alpha$  est la mesure « produit » de la mesure  $\alpha$  sur les feuilles par la mesure  $\mu$  sur les transversales.

On obtient en particulier le :

**Théorème 7.5.4** *Soit  $S$  une surface hyperbolique géométriquement finie, et  $u$  un vecteur non errant et non périodique pour le flot horocyclique  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Alors pour toutes fonctions continues à support compact  $\varphi$  et  $\psi$  de  $T^1S$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $\int_{T^1S} \varphi dm > 0$ , on a*

$$\frac{\int_{-t}^t \psi \circ h^s(u) ds}{\int_{-t}^t \varphi \circ h^s(u) ds} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi dm}{\int_{T^1S} \varphi dm} \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty,$$

où  $m$  est une mesure invariante ergodique par le flot horocyclique qui s'écrit comme le produit  $m = \mu \circ ds$  de l'unique mesure transverse invariante  $\mu$  par la mesure de Lebesgue notée  $ds$  le long des horocycles.

Dans le chapitre 8, nous énonçons plusieurs résultats partiels et précisons certaines questions en dimension quelconque.

Dans le paragraphe 8.1, sous une condition de croissance du bord des boules horosphériques, nous prouvons une propriété d'équidistribution (théorème 8.1.1) de certaines suites  $(M_{r_n, u})_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant une condition de type Følner vers la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$ , et nous discutons le cas un peu plus simple des variétés hyperboliques.

Ces résultats d'équidistribution reposent sur la classification des mesures transverses au feuilletage horosphérique qui sont invariantes par holonomie et ergodiques. Nous donnons un énoncé analogue de classification des mesures transverses quasi-invariantes pour un cocycle donné. Plus précisément, si  $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction höldérienne, elle induit de manière naturelle un cocycle  $\Delta^f$  sur le feuilletage et une mesure transverse  $\mu^f$  quasi-invariante pour ce cocycle  $\Delta^f$ . Nous montrons (théorème 8.2.2) que cette mesure transverse est l'unique mesure transverse quasi-invariante pour  $\Delta^f$  en dehors des mesures transverses induites naturellement par les feuilles fermées du feuilletage. Pour finir, nous revenons au paragraphe 8.2.3 sur la propriété de non divergence des horosphères, qui ne semble pas a priori pouvoir être démontrée par les méthodes de cette thèse dans le cas des moyennes associées à une fonction höldérienne.





## Chapitre 6

# Lemme de l'ombre et non divergence des horosphères d'une variété géométriquement finie

Ce chapitre reprend pour l'essentiel l'article [Sc3] soumis pour publication.

### Résumé :

Dans ce chapitre, nous démontrons le Lemme de l'Ombre sur des variétés géométriquement finies à courbure négative variable. Nous en déduisons un résultat de non divergence des horosphères de telles variétés.

## 6.1 Introduction

Soit  $M$  une variété riemannienne à courbure négative pincée. Le flot géodésique agissant sur son fibré unitaire tangent  $T^1M$  est un flot hyperbolique; en particulier,  $T^1M$  est feuilleté par les variétés fortement instables de ce flot, encore appelées *horosphères fortement instables*.

Si  $M$  est une surface hyperbolique, les feuilles de ce feuilletage sont les orbites du flot horocyclique  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  agissant sur  $T^1M$ . On sait que lorsque  $M$  est compacte, ce flot est minimal : les orbites sont toutes denses dans  $T^1M$ . Quand  $M$  est seulement de volume fini, certaines orbites sont périodiques, les autres sont denses dans  $T^1M$  (Hedlund [H]). En particulier, leur projection sur  $M$  revient infiniment souvent dans la partie compacte de la variété. Ce résultat qualitatif de retour dans un compact a été étendu par Margulis [M] à l'action de flots unipotents sur l'espace des réseaux  $\Lambda_n = SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z})$ .

Ce fut Dani qui, le premier, précisa ce comportement en une estimée quantitative : dans le cas du flot horocyclique de  $SL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{Z})$  dans [Da3], puis dans le cas d'un flot unipotent sur un espace homogène  $G/\Gamma$  de rang 1 et de volume fini dans [Da4] et sur  $\Lambda_n$  dans [Da5], il montre que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\epsilon$  de  $T^1M$  tel qu'une orbite non périodique de  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de longueur  $T$  suffisamment grande passe un temps supérieur à  $(1 - \epsilon)T$  dans  $K_\epsilon$ . Rappelons que ce résultat, dit de non divergence, est un outil essentiel dans le théorème d'équidistribution des flots unipotents de Ratner.

Dans un cadre différent, mentionnons encore le résultat de Minsky et Weiss [Mi-W] de non divergence des orbites du flot horocyclique de Teichmüller.

Le but du présent travail est d'établir l'analogie de ce phénomène de non divergence en l'étendant dans plusieurs directions : nous considérons des variétés qui sont d'une part

de dimension quelconque, d'autre part de courbure négative variable, et enfin qui sont géométriquement finies de volume infini.

Dans ce cadre plus général, nous restreignons notre étude à l'ensemble non errant  $\mathcal{E}$  du feuilletage horosphérique de  $T^1M$ . On sait alors (Dal'bo [D]) que certaines feuilles de  $\mathcal{E}$  sont compactes, et les autres sont denses dans  $\mathcal{E}$ . En particulier, leur projection sur  $M$  revient infiniment souvent dans la partie compacte de la variété. Notons  $\mathcal{E}_{\text{rad}} \subset \mathcal{E}$  l'union de ces feuilles denses dans  $\mathcal{E}$ .

En l'absence de paramétrage naturel de ces feuilles par un flot, nous utilisons une distance naturelle sur ces feuilles et nous considérons sur chaque feuille de grandes boules notées  $B^+(u, r)$ , avec  $r > 0$ .

Pour donner un sens au « temps passé » par une feuille dans un compact, nous étudions le comportement de moyennes sur ces boules relativement à une mesure, notée  $\mu_{H^+}$  sur chaque feuille  $H^+$ , construite à partir d'une mesure naturelle sur le bord  $\partial\widetilde{M}$  du revêtement universel  $\widetilde{M}$  de  $M$ , la *mesure de Patterson*.

Plus précisément, si  $u \in T^1M$  et  $r > 0$ , nous définissons la moyenne d'une fonction  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  continue par

$$M_{r,u}(\psi) := \oint_{B^+(u,r)} \psi(v) d\mu_{H^+}(v).$$

Si  $\Gamma$  est un groupe géométriquement fini, la variété  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  ne possède qu'un nombre fini de pointes, les *cusps*. À chaque cusp est associée une classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux de  $\Gamma$ , i.e. des sous-groupes de  $\Gamma$  fixant exactement un point de  $\Lambda_\Gamma$ , et maximaux pour cette propriété.

Nous aurons besoin de faire des hypothèses, notées (\*) et (\*\*), portant sur la croissance des sous-groupes paraboliques maximaux de  $\Gamma$ . Soit  $o \in \widetilde{M}$  un point fixé.

L'hypothèse (\*) est la suivante.

Pour tout sous-groupe parabolique  $\Pi$  de  $\Gamma$ , il existe une constante  $D \geq 1$  telle que

$$\frac{1}{D} \exp(\delta_\Pi T) \leq \#\{p \in \Pi, d(o, po) \in [T, T+1[ \} \leq D \exp(\delta_\Pi T), \quad (*)$$

où  $\delta_\Pi$  est l'exposant critique de  $\Pi$ , défini par

$$\delta_\Pi = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq T\}.$$

Nous verrons plus loin (proposition 6.2.10) que cette hypothèse (\*) est toujours satisfaite si  $M$  est une variété localement symétrique de rang 1.

Cette hypothèse sert à démontrer le théorème 6.3.2 ci-dessous, mais on peut l'affaiblir en l'hypothèse (\*\*) suivante, qui nous suffira à obtenir le théorème 6.4.2 de non divergence souhaité.

Pour tout sous-groupe parabolique  $\Pi$  de  $\Gamma$  :

1. La quantité

$$\frac{\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t+N}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}}{\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}} \quad (**)_1$$

converge vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ , uniformément en  $t \geq 0$ .

2. Il existe une constante  $C > 0$ , telle que

$$\sup_{t>0} \frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t + C\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}} < +\infty. \quad (**)_2$$

Sous (\*\*), notre résultat principal est le suivant.

**Théorème 6.4.2 :** *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps vérifient la condition (\*\*), avec  $\Gamma$  un groupe divergent. Soit  $\varepsilon > 0$  fixé et  $C$  un compact de  $T^1M$ . Alors il existe un compact  $K_{\varepsilon, C} \subset \Omega$  et un réel  $r_0(C) > 0$  tels que pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C$  et pour tout  $r \geq r_0(C)$ , on ait*

$$M_{r,u}(K_{\varepsilon, C}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ce résultat assure en particulier que les valeurs d'adhérence de la suite de mesures de probabilité  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  sont toutes des mesures de probabilité. Autrement dit, la suite  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  est « tendue » : il n'y a aucune perte de masse dans les cusps.

Notons qu'un résultat analogue de non divergence a été démontré par Rudolph [Ru] en courbure constante, mais seulement pour presque tout  $u \in \mathcal{E}_r$  (au sens de la mesure de Patterson-Sullivan), ce qui lui suffisait pour en déduire l'ergodicité du feuilletage.

Pour établir le théorème 6.4.2, il nous faudra donner une estimée de la mesure de Patterson de petits ouverts du bord, les *ombres*. Plus précisément, nous aurons à contrôler des quotients de mesures d'ombres. Le *Lemme de l'Ombre* (théorème 6.3.2) est un énoncé qui donne un équivalent précis de la mesure d'une ombre. Il est originellement dû à Sullivan sur les variétés hyperboliques compactes, et a été étendu à toutes les variétés compactes ou convexes-cocompactes à courbure négative variable, permettant alors de réinterpréter la mesure de Patterson comme la mesure de Hausdorff de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  de  $\Gamma$  dans  $\partial\widetilde{M}$ . Stratmann et Velani [St-V] l'ont généralisé sur les variétés hyperboliques géométriquement finies, et nous adaptons une preuve de leur résultat due à Peigné [Pe1] pour l'établir sur les variétés géométriquement finies de courbure variable négative pincée qui satisfont la condition (\*).

En fait, une étude plus fine de la mesure de ces ombres nous permettra, en suivant la preuve du théorème 6.3.2, de démontrer directement le théorème 6.4.2 sous l'hypothèse plus faible (\*\*).

Précisons quelques notations. Plutôt que les ombres considérées par Sullivan, nous considérerons des ensembles comparables : si  $o$  est un point de  $\widetilde{M}$ ,  $\xi$  un point du bord  $\partial\widetilde{M}$ , et  $t \geq 0$ , nous noterons  $V(o, \xi, t)$  l'ensemble des points du bord dont le projeté sur le rayon  $[o\xi)$  est à distance au moins  $t$  de  $o$ , et  $\xi(t)$  le point à distance  $t$  de  $o$  sur  $[o\xi)$ .

Une *densité conforme invariante* par  $\Gamma$  de dimension  $\delta > 0$  est une famille  $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$  de mesures équivalentes sur le bord  $\partial\widetilde{M}$ , telles que pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $(x, y) \in \widetilde{M}^2$ , on a

$$\nu_{\gamma x} = \gamma_* \nu_x \quad \text{et} \quad \frac{d\nu_x}{d\nu_y}(\xi) = \exp(-\delta \beta_\xi(x, y)) \quad \nu_x - p.s.,$$

où  $\beta_\xi(x, y)$  désigne le cocycle de Busemann (voir paragraphe 6.2.1).

Le Lemme de l'Ombre s'énonce alors :

**Théorème 6.3.2 :** Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps satisfont (\*). Alors pour toute densité conforme  $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$   $\Gamma$ -invariante sans atomes de dimension  $\delta$  et de support  $\Lambda_\Gamma$ , il existe des constantes  $A_0 > 0$  et  $A_1 > 0$  telles que pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  et  $t \geq 0$ , on ait

a- si  $\xi(t)$  appartient à un relevé de la partie compacte sur  $\widetilde{M}$ , alors

$$\frac{1}{A_0} e^{-\delta t} \leq \nu_o(V(o, \xi, t)) \leq A_0 e^{-\delta t},$$

b- si  $\xi(t)$  est dans un relevé du cusp, alors

$$\frac{1}{A_1} e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta) d(\xi(t), \Gamma o)} \leq \nu_o(V(o, \xi, t)) \leq A_1 e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta) d(\xi(t), \Gamma o)}.$$

L'organisation du chapitre est la suivante : nous commençons (paragraphe 6.2) par une introduction aux variétés géométriquement finies, et nous prouvons une série de lemmes géométriques élémentaires utiles par la suite. Au paragraphe 6.3, nous énonçons et démontrons le Lemme de l'Ombre (théorème 6.3.2). Dans la dernière partie (paragraphe 6.4), nous prouvons le théorème 6.4.2.

## 6.2 Variétés géométriquement finies

### 6.2.1 Généralités

Nous renvoyons à Bowditch [Bo] pour plus de détails. Soit  $M$  une variété riemannienne à courbure négative pincée, i.e. dont toutes les courbures sectionnelles sont comprises entre deux constantes négatives  $-b^2$  et  $-a^2$ , avec  $0 < a \leq b < +\infty$ . On normalise la courbure en supposant que  $a = 1$ . Notons  $\widetilde{M}$  son revêtement universel,  $\Gamma = \pi_1(M)$  son groupe fondamental,  $T^1M$  son fibré unitaire tangent de  $M$ , et  $\pi : T^1M \rightarrow M$  la projection canonique. Nous noterons  $d$  la distance riemannienne sur  $M$  et  $\widetilde{M}$ . Soit  $o \in \widetilde{M}$  un point fixé une fois pour toutes.

Le bord à l'infini  $\partial\widetilde{M}$  de  $\widetilde{M}$  permet de compactifier  $\widetilde{M}$  en  $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$ . Le groupe  $\Gamma$  agit sur  $\widetilde{M}$  par isométries, et sur  $\partial\widetilde{M}$  par homéomorphismes. L'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma \subset \partial\widetilde{M}$  de  $\Gamma$  est le plus petit fermé  $\Gamma$ -invariant de  $\partial\widetilde{M}$ . C'est aussi l'ensemble des points d'accumulation dans  $\partial\widetilde{M}$  de l'orbite d'un point quelconque  $o \in \widetilde{M}$  par  $\Gamma$ ; en d'autres termes, on a  $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o$ .

Le flot géodésique  $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $M$  agit sur  $T^1M$  en associant à un vecteur  $v$  le vecteur  $\dot{c}_v(t)$  tangent à l'unique géodésique  $(c_v(t))_{t \in \mathbb{R}}$  telle que  $\dot{c}_v(0) = v$ . Il se relève sur  $T^1\widetilde{M}$  en le flot géodésique de  $\widetilde{M}$ , noté  $\tilde{g} = (\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . L'ensemble non errant  $\Omega \subset T^1M$  du flot géodésique s'identifie (Eberlein, [Eb1]) à l'ensemble des vecteurs  $v \in T^1M$  dont un relevé  $\tilde{v} \in T^1\widetilde{M}$  définit une géodésique dont les deux extrémités sont dans  $\Lambda_\Gamma$ .

Un point  $\xi$  de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  est dit *radial* s'il existe un point  $o \in \widetilde{M}$  et une infinité de points de l'orbite  $\Gamma o$  à distance bornée du rayon  $[o\xi]$ . L'ensemble des points limite radiaux sera noté  $\Lambda_{\text{rad}} \subset \Lambda_\Gamma$ .

Si  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est l'unique point fixe d'une isométrie parabolique de  $\Gamma$ , il est dit *parabolique*. Le stabilisateur dans  $\Gamma$  d'un tel point sera appelé un *sous-groupe parabolique maximal*. Le point  $\xi$  est *parabolique borné* si son stabilisateur  $\Pi \subset \Gamma$  agit de manière cocompacte sur  $\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi\}$ . Nous noterons  $\Lambda_{pb}$  l'ensemble des points paraboliques bornés de  $\Lambda_\Gamma$ .

Le groupe  $\Gamma$  est dit *cocompact* si  $M$  est compacte, ce qui implique que  $\Omega = T^1M$  est compact, et  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} = \partial\widetilde{M}$ . Il est dit *convexe-cocompact* si  $\Omega$  est compact, et dans ce cas  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}}$ . Enfin, il est *géométriquement fini* si  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \cup \Lambda_{\text{pb}}$ .

Le *cocycle de Busemann* est défini sur  $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$  par

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z) = "d(x, \xi) - d(y, \xi)".$$

C'est une fonction continue qui vérifie la relation de cocycle :  $\beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z) = \beta_\xi(x, z)$ . Ce cocycle permet de paramétrer  $T^1\widetilde{M}$  de façon simple. Si  $u \in T^1\widetilde{M}$ , on notera  $u^+ \in \partial\widetilde{M}$  (resp.  $u^-$ ) l'extrémité  $c_u(+\infty)$  (resp.  $c_u(-\infty)$ ) de l'unique géodésique  $c_u$  telle que  $\dot{c}_u(0) = u$ . L'ensemble des géodésiques orientées de  $T^1\widetilde{M}$  est en bijection avec le « double bord »  $\partial^2\widetilde{M} := \partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M} \setminus \{(\xi, \xi), \xi \in \partial\widetilde{M}\}$ . Alors l'application

$$v \mapsto (v^-, v^+, \beta_{v^-}(v, o))$$

est un homéomorphisme de  $T^1\widetilde{M}$  sur  $\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ .

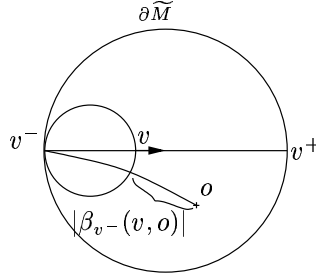


FIG. 6.1 – Coordonnées sur  $T^1\widetilde{M}$

Sur  $\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ , les actions de  $\Gamma$  et de  $\tilde{g}$  s'écrivent

$$\gamma(u^-, u^+, s) = (\gamma u^-, \gamma u^+, s + \beta_{u^-}(o, \gamma^{-1}o)) \quad \text{et} \quad \tilde{g}^t(u^-, u^+, s) = (u^-, u^+, s + t).$$

L'action de  $(\tilde{g}^t)$  commute avec celle de  $\Gamma$  et définit par passage au quotient l'action du flot géodésique sur  $T^1M$ . Ainsi on a aussi des homéomorphismes  $T^1M \simeq (\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R})/\Gamma$  et  $\Omega \simeq (\Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$ .

Une *horosphère*  $H \subset \widetilde{M}$  centrée en  $\xi$  est une ligne de niveau de l'application  $y \mapsto \beta_\xi(y, o)$ . Une *horoboule*  $\mathcal{H} \subset \widetilde{M}$  centrée en  $\xi$  est un sous-ensemble  $\mathcal{H} = \{y \in \widetilde{M}, \beta_\xi(y, o) \leq k\}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ . C'est un ensemble géodésiquement convexe de  $\widetilde{M}$ .

Notons  $\tilde{C}(\Gamma)$  l'enveloppe convexe dans  $\widetilde{M}$  de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$ . Le *coeur de Nielsen*  $N_\Gamma$  de  $M$  (ou de  $\Gamma$ ) est le quotient  $N_\Gamma = \tilde{C}(\Gamma)/\Gamma$ . La variété  $M$  est géométriquement finie si et seulement si son coeur de Nielsen se décompose en une union finie (Bowditch [Bo])

$$N_\Gamma = C_0 \sqcup C_1 \dots \sqcup C_k,$$

où  $C_0$  est un ensemble relativement compact, de diamètre noté  $\Delta$ , et les  $C_l$ ,  $1 \leq l \leq k$  (en nombre fini) sont les *cusps* : pour chaque  $l$ , l'ensemble  $C_l$  est isométrique au quotient de  $\mathcal{H}^l \cap \tilde{C}(\Gamma)$  par un sous-groupe parabolique maximal  $\Pi_l$ , où  $\mathcal{H}^l$  est une horoboule centrée en un point parabolique  $\xi^l$ , et  $\Pi_l$  est le stabilisateur de  $\xi^l$ . Nous noterons  $\tilde{C}_l = \mathcal{H}^l \cap \tilde{C}(\Gamma)$  le relevé de  $C_l$  à  $\widetilde{M}$ . On peut le choisir de telle sorte que les images de  $\mathcal{H}^l$  par  $\Gamma$  soient disjointes ou confondues. De plus, si  $l \neq l'$ , les orbites  $\Gamma\mathcal{H}^l$  et  $\Gamma\mathcal{H}^{l'}$  sont disjointes.

En pratique, nous considérerons plutôt la décomposition ci-dessus sur  $\widetilde{M}$ , notée de la manière suivante :

$$\widetilde{C}(\Gamma) = \Gamma \widetilde{C}_0 \sqcup \Gamma \widetilde{C}_1 \dots \sqcup \Gamma \widetilde{C}_k.$$

Notons en particulier que si  $o$  est un point fixé de  $\widetilde{C}_0$ , son orbite  $\Gamma o$  reste dans  $\Gamma \widetilde{C}_0$ , et n'intersecte donc pas les orbites  $\Gamma \mathcal{H}^l$  des horoboules  $\mathcal{H}^l$ .

## 6.2.2 Projections

Dans toute la suite, les géodésiques seront paramétrées à vitesse 1, et le paramétrage d'un rayon  $[x\xi]$ , avec  $x \in \widetilde{M}$  et  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  sera noté  $(\xi_x(t))_{t \geq 0}$ . Nous renvoyons à Bowditch [Bo] pour un exposé complet sur la notion de projection.

Rappelons que sur une variété d'Hadamard  $\widetilde{M}$ , pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et toute géodésique  $(c(t))_{t \in \mathbb{R}}$ , la fonction  $t \mapsto d(x, c(t))$  est une fonction propre et strictement convexe. Ceci permet de définir sans ambiguïté le *projeté* de  $x$  sur la géodésique  $c$  comme l'unique point  $c(t_0)$  qui réalise le minimum de  $c(t)$ .

Si de plus  $\widetilde{M}$  est une variété à courbure majorée par  $-1$  (ou plus généralement un espace  $CAT(-1)$ ), alors ceci s'étend aux points  $\xi$  du bord  $\partial\widetilde{M}$  de  $\widetilde{M}$ . Plus précisément, si  $\xi \in \partial\widetilde{M}$ , alors pour tout  $y \in \widetilde{M}$  fixé, la fonction  $t \rightarrow \beta_\xi(c(t), y)$  est strictement convexe, et l'instant  $t_0$  où elle atteint son minimum ne dépend pas de  $y$ . Le projeté  $c(t_0)$  de  $\xi$  sur  $(c(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est donc encore bien défini.

Pour les mêmes raisons de convexité, on peut également définir la notion de projection d'un point  $x \in \widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$  sur un segment géodésique  $[yz]$ , ou un rayon géodésique  $[y\xi]$ .

Remarquons enfin que si  $[x\xi]$  et  $[x\eta]$  sont deux rayons géodésiques, alors les fonctions  $t \mapsto d(\xi_x(t), \eta_x(t))$  et  $t \mapsto d(\xi_x(t), [x\eta])$  sont également strictement convexes sur  $\mathbb{R}_+$ .

## 6.2.3 Espaces hyperboliques au sens de Gromov

La structure de variété riemannienne de  $M$  n'est pas essentielle dans tout ce travail. En revanche, nous utiliserons de manière cruciale le fait que  $\widetilde{M}$  est un espace hyperbolique au sens de Gromov.

Rappelons d'abord que si  $(a, b, c)$  est un triangle géodésique de  $\widetilde{M}$ , le *triangle intérieur*  $(p, q, r)$  à  $(a, b, c)$  est défini comme l'unique triangle vérifiant  $p \in [bc]$ ,  $q \in [ac]$ ,  $r \in [ab]$ , et  $d(a, r) = d(a, q)$ ,  $d(b, p) = d(b, r)$  et  $d(c, p) = d(c, q)$ . Si un (ou plusieurs) des sommets, par exemple  $a$  est sur le bord  $\partial\widetilde{M}$ , le triangle intérieur reste bien défini, à condition de remplacer la condition  $d(a, q) = d(a, r)$  par  $\beta_a(q, r) = 0$ ; autrement dit, en supposant que les points  $q$  et  $r$  sont sur la même horosphère centrée en  $a$ . Nous noterons aussi  $p', q', r'$  les projetés respectifs des sommets  $a, b$  et  $c$  sur le côté opposé.

Le fait que la courbure de  $\widetilde{M}$  soit majorée par  $-1$  s'exprime dans la proposition suivante (voir aussi la figure 6.2).

**Proposition 6.2.1 ([G-H], [C-D-P])** *Il existe une constante  $\alpha \geq 0$ , telle que  $\widetilde{M}$  est un espace  $\alpha$ -hyperbolique au sens de Gromov : tout triangle géodésique  $(a, b, c)$  de  $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$  a un triangle intérieur  $(p, q, r)$  de diamètre inférieur à  $\alpha$ .*

*De plus, on peut choisir  $\alpha$  de sorte que les distances  $d(p, p')$ ,  $d(q, q')$  et  $d(r, r')$  entre les projetés des sommets et les sommets du triangle intérieur soient toutes inférieures à  $\alpha$ .*

L'hyperbolicité permet de bien contrôler le défaut d'égalité dans l'inégalité triangulaire  $d(b, c) \leq d(a, b) + d(a, c)$ . D'un point de vue riemannien, si l'angle au sommet  $a$  est minoré

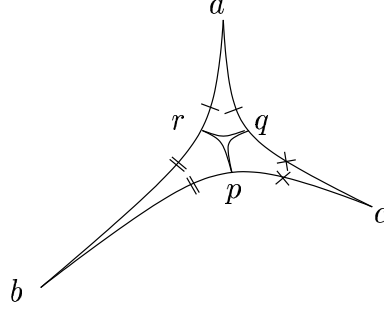


FIG. 6.2 – Les triangles de  $\widetilde{M}$  sont fins

par  $\theta > 0$ , il existe une constante  $C(\theta)$ , telle que  $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq C(\theta)$ . Réciproquement, si  $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq c$ , et si les côtés du triangle ne sont pas trop petits, alors l'angle au sommet  $a$  est minoré par une constante  $\theta(c)$ . Bien que plus visuels, les angles riemanniens sont en fait plus difficiles à manipuler que des distances, et nous préférons donc l'énoncé ci-dessous :

**Lemme 6.2.2** *Soit  $(a, b, c)$  un triangle géodésique de  $\widetilde{M}$ , et  $C > 0$ . Si  $d(a, [bc]) \leq C$ , alors  $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq 2C$ . Réciproquement, si  $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq C$ , alors  $d(a, [bc]) \leq \frac{C}{2} + \alpha$ .*

*Ceci reste vrai si  $b$  ou  $c$  est un point du bord, en remplaçant  $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c)$  par  $\beta_b(a, x) + \beta_c(a, x)$ , pour tout  $x \in (b, c)$ .*

**Démonstration :** Par définition du triangle intérieur, on a  $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) = 2d(a, r)$ . Puisque  $d(a, [bc]) \leq d(a, r) + \alpha$ , on en déduit la deuxième partie du lemme.

Notons maintenant  $p'$  le projeté de  $a$  sur  $[bc]$ , et supposons que  $d(a, p') = d(a, [bc]) \leq C$ . Alors on a

$$0 \leq d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) = d(a, b) - d(p', b) + d(a, c) - d(p', c) \leq 2d(a, p') \leq 2C.$$

□

Si le projeté de  $a$  sur  $[bc]$  est  $b$ , alors il est clair que l'angle au sommet  $b$  est supérieur ou égal à  $\pi/2$ . En termes de distances, ceci se réécrit :

**Lemme 6.2.3** *Soit  $(a, b, c)$  un triangle géodésique de  $\widetilde{M}$ , et  $p'$  le projeté de  $a$  sur le côté  $[bc]$ . Si  $p' = b$ , alors la distance de  $b$  à  $[ac]$  est inférieure à  $2\alpha$ . Réciproquement, si cette distance est inférieure à  $2\alpha$ , alors la distance de  $p'$  à  $b$  est au plus  $3\alpha$ .*

Ce lemme se généralise immédiatement au cas où  $a$  est un point du bord, à condition d'utiliser les fonctions de Busemann au lieu de la distance.

**Démonstration :** D'après la proposition 6.2.1, on a d'une part  $d(b, [ac]) \leq d(b, p) + \alpha$ , et d'autre part  $d(p, p') \leq \alpha$ . Si  $b = p'$ , on trouve immédiatement  $d(b, [ac]) \leq 2\alpha$ .

Réciproquement, si  $d(b, [ac]) \leq 2\alpha$ , le lemme 6.2.2 donne  $2d(b, p) = d(b, a) + d(b, c) - d(a, c) \leq 4\alpha$ , et d'après la proposition 6.2.1,  $d(p, p') \leq \alpha$ , ce qui montre bien que la distance de  $b$  à  $p'$  est au plus  $3\alpha$ . □

## 6.2.4 Voisinsages d'un point du bord

Il existe plusieurs familles équivalentes de voisinages d'un point  $\xi$  du bord. Nous n'en utiliserons qu'une, mais nous les définissons toutes, de manière à donner une bonne image de ce que signifie « être proche » pour deux points du bord. Dans ce qui suit, on considère un point  $x$  de  $\widetilde{M}$ , un point  $\xi$  du bord  $\partial\widetilde{M}$ , et on note toujours  $(\xi_x(t))_{t \geq 0}$  la paramétrisation à vitesse 1 du rayon  $[x\xi]$ .

Les voisinages les plus célèbres de  $\xi$  sont sans doute les *ombres* de Sullivan. On fixe un réel  $r > 0$ , et pour  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $t > 0$ , on définit  $\mathcal{O}(x, \xi, t)$  comme l'ombre faite sur le bord par la boule de centre  $\xi_x(t)$  et de rayon  $r$  vue du point  $x$ , soit encore l'ensemble des  $\eta \in \partial\widetilde{M}$  tels que le rayon  $[x\eta]$  intersecte la boule  $B(\xi_x(t), r)$ .

On peut également considérer les boules de la famille  $(d_x)_{x \in \widetilde{M}}$  des *distances de Gromov*, ou distances visuelles sur le bord, étudiées en détail par Bourdon [Bou]. Elles sont définies pour tout  $x \in \widetilde{M}$  et tous  $(\xi, \eta) \in \partial^2\widetilde{M}$  par

$$d_x(\xi, \eta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta_\xi(x, y) - \frac{1}{2}\beta_\eta(x, y)\right), \quad \text{avec } y \in (\xi\eta).$$

C'est ici que nous nous servons du fait que la courbure de  $\widetilde{M}$  est majorée par  $-1$ ; en effet, si elle est inférieure à  $-a^2$  avec  $a < 1$ , les quantités ci-dessus sont toujours définies mais ne satisfont plus l'inégalité triangulaire, voir [Bou]. Nous noterons  $B_x(\xi, r)$  la boule de centre  $\xi$  et de rayon  $r$  pour la distance  $d_x$ .

Les voisinages de Kaimanovich [K1] sont définis comme suit :  $\mathcal{D}(x, \xi, t)$  est l'ensemble des points  $\eta \in \partial\widetilde{M}$  tels que la distance de  $\xi_x(t)$  à  $\eta_x(t)$  est inférieure à  $\alpha$ . La proposition suivante montre que ces trois familles de voisinages sont pratiquement les mêmes.

**Proposition 6.2.4 (Kaimanovich, [K1])** *Soit  $\widetilde{M}$  une variété de Hadamard à courbure négative pincée. Il existe des constantes  $c_1 \geq 1$  et  $c_2 \geq 1$  telles que pour tous  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $t \geq 0$ , on ait*

$$B_x(\xi, \frac{1}{c_1}e^{-t}) \subset \mathcal{O}(x, \xi, t) \subset B_x(\xi, c_1 e^{-t}), \quad \text{et}$$

$$B_x(\xi, \frac{1}{c_2}e^{-t}) \subset \mathcal{D}(x, \xi, t) \subset B_x(\xi, c_2 e^{-t}).$$

Pour les besoins de la preuve du théorème 6.3.2, il sera utile de travailler avec un dernier type de voisinages. Définissons  $V(x, \xi, 0)$  comme l'ensemble des points  $\eta \in \partial\widetilde{M}$  dont le projeté sur la géodésique  $(x\xi)$  appartient en fait au rayon  $[x\xi]$ , et si  $t \geq 0$ ,  $V(x, \xi, t) \subset V(x, \xi, 0)$  comme l'ensemble de ceux qui se projettent sur  $] \xi_x(t) \xi$ , i.e. à distance strictement supérieure à  $t$  de  $x$ . Le lemme suivant montre qu'ils sont encore comparables aux voisinages définis ci-dessus.

**Lemme 6.2.5** *Pour tout  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$ , et  $t \geq 2\alpha$ , on a*

$$V(x, \xi, t + \alpha) \subset \mathcal{D}(x, \xi, t) \subset V(x, \xi, t - 2\alpha).$$

Notons que même en courbure constante égale à  $-1$ , ces voisinages ne coïncident pas exactement les uns avec les autres. Par exemple, on peut montrer que si  $t \geq 0$ , on a

$$V(x, \xi, t) = B_x(\xi, \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 + e^{-2t}}}).$$



**Démonstration du lemme 6.2.5:** Soit tout d'abord  $\eta$  un point de  $\mathcal{D}(x, \xi, t)$ , qui vérifie donc  $d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq \alpha$ . Notons  $u_0$  le minimum de la fonction  $\varphi(u) = \beta_\eta(\xi_x(u), \eta_x(t))$ . Le point  $\xi_x(u_0)$  est donc le projeté de  $\eta$  sur le rayon  $[x\xi]$ . L'inégalité triangulaire donne  $\varphi(t) = \beta_\eta(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq \alpha$ . D'autre part, si  $u \leq t$ , on a

$$\varphi(u) = \beta_\eta(\xi_x(u), \eta_x(t)) = \beta_\eta(\xi_x(u), \eta_x(u)) + \beta_\eta(\eta_x(u), \eta_x(t)) \geq -\alpha + t - u.$$

Si  $u < t - 2\alpha$ , on en déduit que  $\varphi(u) > \varphi(t)$ . Par stricte convexité de  $\varphi$ , le minimum de  $\varphi$  est nécessairement atteint en  $u_0 \geq t - 2\alpha$ , ce qui signifie exactement que  $\eta$  appartient à  $V(x, \xi, t - 2\alpha)$ .

Réciproquement, si  $\eta \in V(x, \xi, t + \alpha)$ , d'après la proposition 6.2.1, le sommet  $\xi_x(s_0)$  du triangle intérieur à  $(x, \xi, \eta)$  vérifie  $s_0 \geq t$ , d'où on déduit  $d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq d(\xi_x(s_0), \eta_x(s_0)) \leq \alpha$ .  $\square$

Nous détaillons maintenant certaines propriétés de ces ensembles  $V(x, \xi, t)$  qui nous serviront au cours de la preuve du théorème 6.3.2. La première est élémentaire :

**Lemme 6.2.6** *Pour tout  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $t \geq 0$ , si  $\eta \in V(x, \xi, t)$ , alors la distance de  $\xi_x(t)$  à  $(x\eta)$  est inférieure à  $2\alpha$ . En particulier,  $t - 4\alpha \leq \beta_\eta(x, \xi_x(t)) \leq t$ .*

**Démonstration :** L'inégalité triangulaire donne  $\beta_\eta(x, \xi_x(t)) \leq t$ . Le lemme 6.2.3 implique  $d(\xi_x(t), [x\eta]) \leq 2\alpha$ . Par le lemme 6.2.2, nous en déduisons  $\beta_\eta(x, \xi_x(t)) \geq t - 4\alpha$ .  $\square$

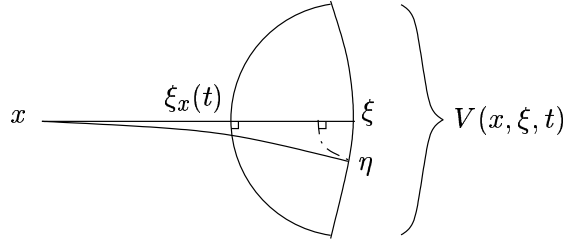


FIG. 6.3 –  $V(x, \xi, t)$

Dans le lemme suivant, nous montrons comment varient ces ensembles  $V(x, \xi, t)$  quand on fait varier légèrement  $\xi$  ou  $x$ .

**Lemme 6.2.7 a-** *Soient  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$ , et  $t \geq 6\alpha$ . Pour tout  $\eta \in \mathcal{D}(x, \xi, t)$ , on a*

$$V(x, \eta, t) \subset V(x, \xi, t - 6\alpha).$$

**b-** *Posons  $K_1 = 6\alpha > 0$ . Soient  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $t \geq K_1$ . Pour tout  $\eta \in V(x, \xi, t + K_1 + \alpha)$ , on a*

$$V(x, \eta, t + K_1) \subset V(x, \xi, t) \subset V(x, \eta, t - K_1)$$

**c-** *Pour tout  $D > 0$ , notons  $K_2 = K_2(D) = 2D + 4\alpha > 0$ . Soient  $x$  et  $y$  des points de  $\widetilde{M}$  tels que  $d(x, y) \leq D$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$ , et  $t \geq K_2$ . Alors*

$$V(x, \xi, t + K_2) \subset V(y, \xi, t) \subset V(x, \xi, t - K_2).$$

**Démonstration : a-** Soient  $\eta \in \mathcal{D}(x, \xi, t)$  et  $\zeta \in V(x, \eta, t)$ . Notons  $\xi_x(u_0)$  le projeté de  $\zeta$  sur le rayon  $[x\xi]$ . Par définition,  $u_0$  minimise la fonction  $u \mapsto \varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \eta_x(t))$ . Par hypothèse, on a

$$\varphi(t) = \beta_\zeta(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq \alpha.$$

Par ailleurs, si  $u \leq t$ , l'inégalité triangulaire et le lemme 6.2.6 donnent

$$\varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \eta_x(u)) + \beta_\zeta(\eta_x(u), \eta_x(t)) \geq -\alpha + t - u - 4\alpha.$$

Autrement dit, si  $0 \leq u < t - 6\alpha$ , alors  $\varphi(u) > \varphi(t)$ . La stricte convexité de  $\varphi$  implique qu'elle atteint son minimum en  $u_0 \geq t - 6\alpha$ . Ceci signifie exactement que  $\zeta \in V(x, \xi, t - 6\alpha)$ .

**b-** Le lemme 6.2.5 donne  $V(x, \xi, t + K_1 + \alpha) \subset \mathcal{D}(x, \xi, t + K_1)$ . Si  $\eta \in V(x, \xi, t + K_1 + \alpha)$ , le a- ci-dessus donne

$$V(x, \eta, t + 6\alpha) \subset V(x, \xi, t).$$

De plus, on voit aisément que  $\xi \in \mathcal{D}(x, \eta, t)$ , et le a- donne alors

$$V(x, \xi, t) \subset V(x, \eta, t - K_1).$$

**c-** Soit  $\zeta \in V(y, \xi, t)$ , avec  $t \geq K_2$ . Posons  $\varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \xi_y(t))$ . Puisque  $d(x, y) \leq D$  et que les rayons  $[x\xi]$  et  $[y\xi]$  sont asymptotes, on a  $d(\xi_x(u), \xi_y(u)) \leq d(x, y) \leq D$  pour tout  $u \geq 0$ . On en déduit  $|\beta_\zeta(\xi_x(t), \xi_y(t))| \leq D$ , et en particulier  $\varphi(t) \leq D$ . D'autre part, pour tout  $0 \leq u \leq t$ , d'après le lemme 6.2.6, on a

$$\varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \xi_y(u)) + \beta_\zeta(\xi_y(u), \xi_y(t)) \geq -D + t - u - 4\alpha.$$

Comme  $\varphi$  est strictement convexe, le projeté  $\xi_x(u_0)$  de  $\zeta$  sur  $(x\xi)$  vérifie  $u_0 \geq t - 2D - 4\alpha = t - K_2$ , ce qui montre que  $V(y, \xi, t) \subset V(x, \xi, t - K_2)$ . L'autre inclusion se prouve en inversant les rôles de  $x$  et  $y$ .  $\square$

Pour finir ce paragraphe, énonçons un dernier lemme qui nous servira par la suite, et qui découle immédiatement des lemmes 6.2.7 c, 6.2.5 et de la proposition 6.2.4 :

**Lemme 6.2.8** *Soit  $D > 0$  fixé. Il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tous  $(o, x) \in \widetilde{M}^2$  avec  $d(o, x) \leq D$ , et tout  $\xi \in \partial\widetilde{M}$*

$$V(x, \xi, 0) \supset B_o(\xi, \varepsilon).$$

### 6.2.5 Action d'une isométrie parabolique sur le bord

Nous allons maintenant nous servir de ces ensembles  $V(x, \xi, t)$  pour comprendre l'action d'une isométrie parabolique de  $\widetilde{M}$  sur le bord privé de son point fixe, ainsi que sur les horosphères qu'elle stabilise (i.e. celles qui sont centrées en son point fixe). Une isométrie parabolique, quand elle est itérée, attire tous les points du bord d'une part, et de  $\widetilde{M}$  d'autre part vers son point fixe. Ce que dit le lemme ci-dessous, c'est qu'on peut quantifier et relier entre eux ces déplacements.

**Lemme 6.2.9** *Soient  $o \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$ , et  $K$  un compact de  $\partial\widetilde{M} \setminus \{\xi\}$ . Il existe une constante  $K_3 > 0$ , telle que pour toute isométrie parabolique  $p$  fixant  $\xi$ , et tout  $t \geq K_3$ , on ait*

**a-** *Si  $d(o, po) \geq 2t$ , alors  $pK \subset V(o, \xi, t - K_3)$  et pour tout  $\eta \in K$ ,*

$$|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t)) - d(o, po) + 2t| \leq 2K_3.$$

**b-** *Si  $d(o, po) \leq 2t$ , alors  $pK \cap V(o, \xi, t + K_3) = \emptyset$  et  $|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t))| \leq 2K_3$  pour tout  $\eta \in K$ .*

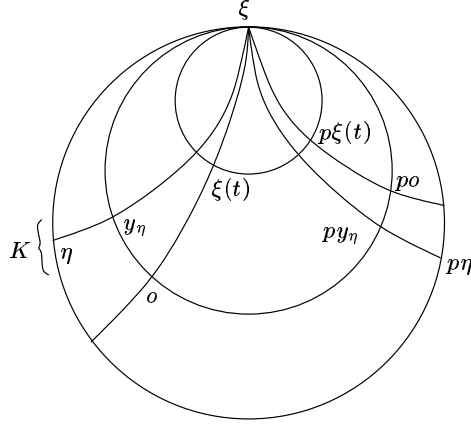


FIG. 6.4 – Lemme 6.2.9

**Démonstration :** Si  $\eta \in K$ , notons  $y_\eta$  l'intersection de la géodésique  $(\xi\eta)$  et de l'horosphère centrée en  $\xi$  et passant par  $o$ . Par compacité de  $K$ , on a

$$C(K, o, \xi) := \sup_{\eta \in K} d(o, y_\eta) < +\infty.$$

Notons  $(\xi(s))_{s \geq 0}$  le rayon  $[o\xi)$  et  $(\xi_\eta(s))_{s \geq 0 \in \mathbb{R}}$  la paramétrisation de la géodésique  $(\eta\xi)$  positive sur le rayon  $[y_\eta\xi)$ . On a donc  $y_\eta = \xi_\eta(0)$  et  $o = \xi(0)$ .

Considérons le triangle  $(o, \xi, p\eta)$ . Comme  $\beta_\xi(o, py_\eta) = 0$ , les sommets des côtés  $[o\xi)$  et  $[p\eta\xi)$  de son triangle intérieur s'écrivent  $\xi(s_0)$  et  $\xi_{p\eta}(s_0) = p\xi_\eta(s_0)$ , avec  $s_0 \geq 0$ . L'inégalité triangulaire et la définition du triangle intérieur donnent facilement  $2s_0 - \alpha \leq d(o, py_\eta) \leq 2s_0 + \alpha$ . D'où on déduit, puisque  $d(po, py_\eta) = d(o, y_\eta) \leq C(K, o, \xi)$ ,

$$2s_0 - C(K, o, \xi) - \alpha \leq d(o, po) \leq 2s_0 + C(K, o, \xi) + \alpha \quad (6.1)$$

D'après la proposition 6.2.1, le projeté de  $p\eta$  sur  $[o\xi)$  est à distance au plus  $\alpha$  de  $\xi(s_0)$ . Posons  $K_3 = C(K, o, \xi)/2 + 3\alpha/2$ . Avec l'encadrement (6.1), l'inégalité  $d(o, po) \geq 2t$  implique  $p\eta \in V(o, \xi, t - K_3)$ . Ceci étant vrai pour tout  $\eta \in K$ , on a bien  $pK \subset V(o, \xi, t - K_3)$ .

Si  $d(o, po) \leq 2t$ , on montre de même que  $pK \cap V(o, \xi, t + K_3) = \emptyset$ .

Il nous reste maintenant à estimer la quantité  $\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t))$  pour  $\eta \in \partial\tilde{M}$ . On a  $\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t)) = \beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t)) + \beta_{p\eta}(p\xi_\eta(t), p\xi(t))$ . Remarquons que

$$|\beta_{p\eta}(p\xi_\eta(t), p\xi(t))| \leq d(\xi_\eta(t), \xi(t)) \leq d(y_\eta, o) \leq C(K, o, \xi).$$

Il nous suffit donc d'estimer  $\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t))$ . Si  $s_0 \leq t$ , alors

$$|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t))| \leq d(\xi(t), p\xi_\eta(t)) \leq d(\xi(s_0), p\xi_\eta(s_0)) \leq \alpha.$$

Supposons maintenant  $s_0 \geq t$ , et notons  $(c(t))_{t \geq 0}$  la paramétrisation du rayon géodésique  $[op\eta)$ . Le troisième sommet du triangle intérieur à  $(o, \xi, p\eta)$  est alors  $c(s_0)$ . Par définition de ce triangle intérieur, on a alors  $\beta_{p\eta}(c(s_0), p\xi_\eta(s_0)) = 0$ , d'où on déduit que  $\beta_{p\eta}(c(2s_0 - t), p\xi_\eta(t)) = 0$ . D'autre part, on a aussi  $|\beta_{p\eta}(\xi(t), c(t))| \leq d(\xi(t), c(t)) \leq \alpha$ . À l'aide de toutes ces inégalités, on obtient

$$\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t)) = \beta_{p\eta}(\xi(t), c(t)) + \beta_{p\eta}(c(t), c(2s_0 - t)) = \beta_{p\eta}(\xi(t), c(t)) + 2(s_0 - t),$$

puis  $|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t)) - (2s_0 - 2t)| \leq \alpha + C(K, o, \xi)$ . Finalement, en utilisant la notation  $u^+ = \max(u, 0)$  pour  $u \in \mathbb{R}$ , on peut rassembler les deux cas  $s_0 \leq t$  et  $s_0 \geq t$  ci-dessus pour obtenir pour tout  $t \geq 0$

$$(2s_0 - 2t)^+ - \alpha - C(K, o, \xi) \leq \beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t)) \leq (2s_0 - 2t)^+ + \alpha + C(K, o, \xi). \quad (6.2)$$

Une manipulation élémentaire des encadrements (6.1) et (6.2) permet de conclure la preuve du lemme.  $\square$

### 6.2.6 Géométrie des cusps

Dans ce paragraphe, nous revenons sur les hypothèses (\*) et (\*\*) introduites plus haut sur la croissance des sous-groupes paraboliques maximaux de  $\Gamma$ . Nous montrons que (\*) est satisfaite lorsque les cusps de  $M$  sont localement symétriques (proposition 6.2.10), nous détaillons certaines conséquences de ces hypothèses, et nous donnons un exemple explicite où (\*\*) est satisfaite mais pas (\*).

L'*exposant critique* d'un groupe discret d'isométries  $\Gamma$  de  $\widetilde{M}$  est défini par

$$\delta_\Gamma = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \#\{\gamma \in \Gamma, d(o, \gamma o) \leq T\}.$$

C'est encore l'exposant critique de la série de Poincaré de  $\Gamma$  :

$$P(\Gamma, o, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)}.$$

Le groupe  $\Gamma$  est dit *de type divergent* si la série ci-dessus diverge en  $s = \delta_\Gamma$ . Si  $\Gamma$  est *non élémentaire*, c'est-à-dire si  $\#\Lambda_\Gamma = +\infty$ , alors  $\delta_\Gamma$  est strictement positif, et Roblin [Ro3] a démontré que la limite supérieure ci-dessus est en fait une limite. Mais un tel résultat est inconnu pour les groupes élémentaires, par exemple les sous-groupes paraboliques de  $\Gamma$ . Pour démontrer le théorème 6.3.2, nous aurons besoin justement de supposer que c'est bien une limite, et plus encore : nous supposerons que pour tout sous-groupe parabolique  $\Pi$  de  $\Gamma$ , il existe une constante  $D \geq 1$ , telle que

$$\frac{1}{D} \exp(\delta_\Pi T) \leq \#\{p \in \Pi, d(o, po) \in [T, T + 1[ \} \leq D \exp(\delta_\Pi T) \quad (*)$$

Cette hypothèse est apparue à plusieurs reprises dans la littérature, d'abord dans [He-P2], mais aussi [En-F] par exemple, et semble nécessaire à chaque fois qu'on souhaite obtenir des estimées précises à l'intérieur des cusps. La proposition ci-dessous montre qu'elle est vérifiée dès que les cusps sont « raisonnables ».

**Proposition 6.2.10** *L'hypothèse (\*) est vérifiée dès que les cusps de  $M$  sont isométriques aux cusps d'une variété localement symétrique de rang un.*

**Démonstration :** Pour chaque sous-groupe parabolique  $\Pi$ , on peut vérifier cette hypothèse en supposant que  $o$  est dans le cusp considéré. Or le sous-groupe parabolique  $\Pi$  stabilise le cusp, donc  $\Pi o$  reste dans les relevés du cusp. La preuve consiste alors simplement à vérifier que dans les espaces localement symétriques, cette condition de croissance est vérifiée. Dans l'espace hyperbolique réel, c'est un simple calcul utilisant d'une part le fait qu'une isométrie parabolique  $p$  fixant le point  $\infty$  (dans le modèle du demi-espace

supérieur) agit par translation euclidienne sur les horosphères horizontales, et d'autre part l'équivalent  $d(o, po) \simeq 2 \log d_{\text{eucl}}(o, po)$ , où  $o$  est le point à hauteur (euclidienne) 1 sur l'axe vertical. Dans les espaces hyperboliques exotiques, il est encore possible d'obtenir un équivalent exact de cette distance  $d(o, po)$  (voir Corlette-Iozzi [C-I, Formule 3.5]), ce qui permet de conclure (voir aussi une preuve complète dans [N, Lemma 3.5]).  $\square$

Cette hypothèse (\*) implique de manière immédiate que tout sous-groupe parabolique  $\Pi$  de  $\Gamma$  est divergent. Des travaux de Dal'bo, Otal et Peigné [D-O-P], on déduit le résultat suivant :

**Théorème 6.2.11 (Dal'bo-Otal-Peigné [D-O-P])** *Si  $\Gamma$  est un groupe géométriquement fini dont tout sous-groupe parabolique  $\Pi$  est divergent, alors  $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$  et en particulier, le groupe  $\Gamma$  est lui-même divergent.*

En résumé, sous (\*), on a le *trou critique*  $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$ , et le groupe  $\Gamma$  est divergent. En fait, on peut affaiblir l'hypothèse (\*) pour prouver le théorème 6.4.2 sous l'hypothèse moins restrictive (\*\*) rappelée ci-dessous, à condition de supposer également que  $\Gamma$  est divergent.

Pour tout sous-groupe parabolique  $\Pi$  de  $\Gamma$  :

1. *La quantité*

$$\frac{\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t + N}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}}{\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}} \quad (**)_1$$

converge vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ , uniformément en  $t \geq 0$ .

2. *Il existe une constante  $C > 0$ , telle que*

$$\sup_{t > 0} \frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t + C\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}} < +\infty. \quad (**)_2$$

Ces conditions (\*\*) découlent aisément de la condition (\*) de croissance des cusps. L'intérêt de (\*\*) est qu'il existe des exemples de surfaces qui satisfont (\*\*) et pas (\*), et dont le groupe fondamental  $\Gamma$  est divergent.

L'exemple suivant a été obtenu grâce à Marc Peigné (communication orale). Nous renvoyons à [D-O-P] pour plus de détails.

L'idée est de partir d'une surface hyperbolique  $\mathbb{H}/\Gamma$ , et de perturber la métrique dans un cusp de  $\mathcal{S}$ . Soit donc  $\Pi$  un sous-groupe parabolique maximal de  $\Gamma$ , et notons  $p \in \Pi$  un générateur de  $\Pi$ . En courbure constante, on a  $d(o, p^n o) \sim 2 \log |n|$  quand  $|n| \rightarrow +\infty$ . En modifiant légèrement la courbure dans le cusp, on peut s'arranger pour avoir

$$d(o, p^n o) \sim 2 \log |n| + 4 \log \log |n|,$$

de sorte que le groupe  $\Pi$  soit convergent. De plus, il est possible d'effectuer cette modification tout en conservant la propriété de trou critique  $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$ . En effet (voir par exemple [Pe2]), on peut pour cela considérer un groupe discret  $\Gamma_0$  constitué d'isométries hyperboliques et tel que  $\delta_{\Gamma_0} > 1/2$ . On se donne d'autre part une isométrie parabolique  $p$  et une

isométrie hyperbolique  $\gamma$  de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}$  dont les points fixes dans  $\partial\mathbb{H}$  sont distincts et qui engendrent un groupe libre. Notons  $\Pi_0$  le groupe parabolique engendré par  $p$ , d'exposant critique  $\delta_{\Pi_0} = 1/2$ . Soit  $\Gamma'_0$  le groupe  $\gamma\Gamma_0\gamma^{-1}$ , et  $\Gamma'$  le groupe engendré par  $\Gamma'_0$  et  $\Pi_0$ . Il n'est pas difficile de voir que d'une part  $\delta_{\Gamma'} \geq \max\{\delta_{\Gamma'_0}, \delta_{\Pi_0}\}$ , et d'autre part  $\delta_{\Gamma'_0} = \delta_{\Gamma_0} > 1/2$ . Autrement dit, le groupe  $\Gamma'$  vérifie la propriété de trou critique.

Maintenant, la modification de la courbure dans le cusp associé à  $\Pi_0$  ne change ni l'exposant critique du groupe  $\Pi$  ainsi obtenu, ni celui du groupe  $\Gamma$  engendré par  $\Pi$  et  $\Gamma'_0$ . Le groupe  $\Gamma$  satisfait donc la propriété de trou critique avec la croissance de  $\Pi$  annoncée ci-dessus.

Rappelons que cette propriété de trou critique implique (théorème 6.2.11) que le groupe  $\Gamma$  est divergent, ce qui nous permet d'obtenir le théorème 6.4.2.

Notons alors  $u(t) = 2 \log t + 4 \log \log t$ . Par définition, on a

$$\begin{aligned} \delta_{\Pi} &= \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \# \{n \in \mathbb{N}, 2 \log n + 4 \log \log n \leq T\} \\ &= \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log u^{-1}(T) \end{aligned}$$

On montre de façon élémentaire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\frac{1}{c} \frac{e^{t/2}}{t^2} \leq u^{-1}(t) \leq c \frac{e^{t/2}}{t^2}, \quad (6.3)$$

d'où on déduit d'une part que  $\delta_{\Pi} = 1/2$  et d'autre part que la condition (\*) n'est pas vérifiée. De plus, la propriété de trou critique implique  $\delta_{\Gamma} > 1/2$ .

La condition (\*\*)<sub>2</sub> est immédiate, car le quotient  $\frac{u^{-1}(t+c)}{u^{-1}(t)}$  est borné par  $c^2 e^{c/2} \frac{t^2}{(t+c)^2}$ , et donc par  $c^2 e^{c/2}$  uniformément en  $t \geq 0$ .

La condition (\*\*)<sub>1</sub> nécessite l'estimée de

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ d(o, p^n o) \geq t}} e^{-\delta_{\Gamma} d(o, p^n o)} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ n \geq u^{-1}(t)}} \frac{1}{n^{2\delta_{\Gamma}} (\log n)^{4\delta_{\Gamma}}}.$$

Cette série est comparable à l'intégrale  $\int_{u^{-1}(t)}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}}}$ . Une intégration par parties donne

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}}} = \frac{1}{2\delta_{\Gamma} - 1} \frac{1}{a^{2\delta_{\Gamma}-1} (\log a)^{4\delta_{\Gamma}}} - \frac{4\delta_{\Gamma}}{2\delta_{\Gamma} - 1} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}+1}}.$$

On en déduit l'équivalent

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}}} \sim \frac{1}{2\delta_{\Gamma} - 1} \frac{1}{a^{2\delta_{\Gamma}-1} (\log a)^{4\delta_{\Gamma}}}$$

quand  $a \rightarrow +\infty$ . Si  $a = u^{-1}(t)$ , on obtient

$$\int_{u^{-1}(t)}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}}} \sim \frac{1}{2\delta_{\Gamma} - 1} \frac{e^{-t(\delta_{\Gamma}-1/2)}}{t^2}.$$

Finalement, la quantité à estimer en (1) est comparable à

$$\frac{e^{-(t+N)(\delta_\Gamma-1/2)}}{e^{-t(\delta_\Gamma-1/2)}} \frac{t^2}{(t+N)^2} \leq e^{-N(\delta_\Gamma-1/2)},$$

pour  $N \geq 1$  et  $t \geq 0$ . On a bien obtenu la convergence uniforme souhaitée vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ .

**Remarque 6.2.12** Dans l'exemple ci-dessus, la propriété de trou critique  $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$  nous a servi d'une part à montrer que  $\Gamma$  est divergent, et d'autre part à vérifier (\*\*). Il est certainement possible de produire beaucoup d'autres exemples avec la propriété de trou critique et vérifiant (\*\*) et pas (\*), en perturbant comme ci-dessus la métrique de sorte que  $u^{-1}(t)$  soit comparable à  $\frac{e^{t/2}}{\varphi(t)}$ , avec  $\varphi$  une fonction sous-exponentielle, polynomiale par exemple.

En supposant qu'il n'y a pas de trou critique ( $\delta_\Pi = \delta_\Gamma$ ), on peut par exemple montrer (\*\*) si  $u^{-1}(t)$  est comparable à  $e^{t/2-\sqrt{t}}$ . Mais on n'a pas de moyen a priori de savoir si  $\Gamma$  est divergent. La question de savoir si on peut construire un groupe fuchsien divergent sans trou critique est un travail en cours de M. Peigné et J-P. Otal. Il serait intéressant que leur construction permette d'obtenir cette croissance de  $u^{-1}(t)$ , et donc la propriété (\*\*). Sur un tel exemple de surface, la divergence de  $\Gamma$  et la forme de  $u^{-1}(t)$  permettraient de démontrer, grâce au critère de [D-O-P], que la mesure de Patterson-Sullivan est finie, hypothèse sous laquelle les résultats du chapitre 7 sont obtenus.

## 6.3 Mesures conformes et lemme de l'ombre

### 6.3.1 Densités conformes

Une *densité conforme*  $\Gamma$ -invariante de dimension  $\delta > 0$  sur  $\partial\widetilde{M}$  est une famille  $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$  de mesures finies sur  $\partial\widetilde{M}$  qui vérifient la condition d'invariance  $\nu_{\gamma x} = \gamma_* \nu_x$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , et pour tous  $(x, y) \in \widetilde{M}^2$  et  $\xi \in \partial\widetilde{M}$

$$\frac{d\nu_x}{d\nu_y}(\xi) = \exp(-\delta\beta_\xi(x, y)), \quad \nu_y - \text{p.s.}$$

Soit  $o \in \widetilde{M}$  un point fixé dans toute la suite de ce paragraphe. La densité  $\nu$  sera dite *normalisée* si  $\nu_o$  est une probabilité.

Si  $\Gamma$  est un groupe discret non élémentaire, un résultat originellement dû à Patterson [Pa] assure l'existence d'une densité conforme invariante de dimension  $\delta_\Gamma$  à support  $\Lambda_\Gamma$ . L'étude d'abord faite par Sullivan [S1] [S2] en courbure constante, puis généralisée en courbure variable [Y] montre aussi que toute densité  $\delta$ -conforme invariante vérifie  $\delta \geq \delta_\Gamma$ . Lorsque  $\Gamma$  est divergent, on a de plus :

**Proposition 6.3.1** *Si  $\Gamma$  est non élémentaire divergent, il existe une unique densité conforme invariante normalisée  $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$  de dimension  $\delta_\Gamma$  à support  $\Lambda_\Gamma$ , et elle est sans atomes. La mesure  $\nu_o$  est alors appelée mesure de Patterson.*

Dans le paragraphe ci-dessous, nous travaillerons avec une densité conforme invariante de dimension quelconque, mais la densité donnée par la proposition ci-dessus sera privilégiée dans tout le paragraphe 6.4.

### 6.3.2 Lemme de l'ombre

Dans le cas d'une variété compacte à courbure négative, le lemme de l'ombre, originellement dû à Sullivan [S1] en courbure constante, permet de montrer que pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , la mesure de Patterson  $\nu_x$  de  $\Gamma$  est la mesure de Hausdorff (de dimension  $\delta_\Gamma$ ) pour la distance de Gromov  $d_x$  sur  $\partial\widetilde{M}$ . En revanche, dans le cas d'une variété non compacte, la description de  $\nu$  est beaucoup plus délicate. Le cas des variétés géométriquement finies de courbure constante fut décrit par Stratmann et Velani [St-V], et récemment généralisé aux variétés localement symétriques de rang 1 par Newberger dans [N]. Nous montrerons que cette description est encore valide pour les variétés géométriquement finies de courbure variable sous la condition (\*). Pour cela, nous adapterons la preuve de Peigné [Pe1] du résultat de Stratmann et Velani.

Les estimées du théorème ci-dessous se démontrent cusp par cusp, nous supposons donc dans ce paragraphe que  $M$  n'a qu'un seul cusp noté  $C_1$ .

Rappelons les notations du paragraphe 6.2.1. Le coeur de Nielsen  $N_\Gamma$  est un convexe qui se décompose en  $N_\Gamma = C_0 \sqcup C_1$ , où  $C_0$  est la partie compacte de la variété, de diamètre inférieur à  $\Delta$ , et le cusp  $C_1$  est isométrique au quotient de  $\widetilde{C}_1 := \mathcal{H}_1 \cap \widetilde{C}(\Gamma)$  par  $\Pi$ , où  $\mathcal{H}_1$  est une horoboule centrée au point parabolique  $\xi_1 \in \Lambda_\Gamma$ , et  $\Pi$  est le stabilisateur de  $\xi_1$  dans  $\Gamma$ . On peut alors choisir un relevé  $\widetilde{C}_0$  de  $C_0$  à  $\widetilde{M}$ , qui soit connexe et de diamètre inférieur à  $\Delta$ , et tel que les adhérences de  $\widetilde{C}_0$  et  $\widetilde{C}_1$  s'intersectent. On choisira une famille  $\{\gamma_i\}_{i \geq 0}$  de représentants de  $\Gamma/\Pi$ , et on notera  $\xi_i = \gamma_i \xi_1$  et  $\mathcal{H}_i$  l'horoboule  $\gamma_i \mathcal{H}_1$ . On a alors

$$\Gamma \widetilde{C}_1 = \sqcup_{i=1}^{+\infty} \gamma_i \widetilde{C}_1 = \sqcup_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}_i \cap \widetilde{C}(\Gamma).$$

D'autre part, quitte à faire agir le stabilisateur  $\gamma_i \Pi \gamma_i^{-1}$  de  $\mathcal{H}_i$ , nous pouvons supposer que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_i \widetilde{C}_0$  intersecte le rayon  $[\mathfrak{o}, \xi_i]$  (et le bord  $\partial \mathcal{H}_i$  évidemment).

Rappelons pour finir que si  $\xi \in \partial\widetilde{M}$ , on désigne toujours par  $\xi(t)$  le point à distance  $t$  de  $\mathfrak{o}$  sur le rayon géodésique  $[\mathfrak{o}, \xi]$ .

Le théorème ci-dessous étend le Lemme de l'Ombre en courbure variable, permettant ainsi d'obtenir des estimées précises de la mesure des ombres sur le bord.

**Théorème 6.3.2** *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps satisfont l'hypothèse (\*). Alors pour toute densité conforme  $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$   $\Gamma$ -invariante sans atomes de dimension  $\delta \geq \delta_\Gamma$  et de support  $\Lambda_\Gamma$ , il existe des constantes  $A_0 > 0$  et  $A_1 > 0$  telles que pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  et  $t \geq 0$*

**a-** *si  $\xi(t) \in \Gamma \widetilde{C}_0$ , alors* 
$$\frac{1}{A_0} \exp(-\delta t) \leq \nu_{\mathfrak{o}}(V(\mathfrak{o}, \xi, t)) \leq A_0 \exp(-\delta t),$$

**b-** *si  $\xi(t) \in \Gamma \widetilde{C}_1$ , alors*

$$\frac{1}{A_1} e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta) d(\xi(t), \Gamma \mathfrak{o})} \leq \nu_{\mathfrak{o}}(V(\mathfrak{o}, \xi, t)) \leq A_1 e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta) d(\xi(t), \Gamma \mathfrak{o})}.$$

En particulier, le théorème s'applique à l'unique densité  $\delta_\Gamma$ -conforme invariante donnée par la proposition 6.3.1, qui est sans atomes.

### 6.3.3 Preuve du théorème 6.3.2

Le plan de la preuve est celui de Peigné [Pe1]; la différence essentielle réside dans la proposition 6.3.4, où se manifeste la courbure variable, et où l'hypothèse (\*) est utilisée. Nous rappelons toutefois toute la démonstration pour la commodité du lecteur. Elle se fait



en plusieurs étapes. Le lemme 6.3.3 est le lemme de l'ombre classique, il traite le cas où  $\xi(t)$  appartient au relevé  $\Gamma\tilde{C}_0$  de la partie compacte. Le résultat clé est la proposition 6.3.4. De cette proposition découlent le corollaire 6.3.5, qui traite le cas où  $\xi = \xi_i$  est un point parabolique et  $\xi(t)$  appartient à l'horoboule  $\mathcal{H}_i$  centrée en  $\xi_i$ , et le lemme 6.3.6 qui permet de conclure la démonstration du théorème 6.3.2 dans tous les autres cas.

Notons le fait que la condition (\*), bien que cruciale pour obtenir le théorème 6.3.2, ne sert qu'à peu de reprises dans la démonstration. Nous mettrons en valeur un certain nombre d'estimées qui ne font pas appel à (\*), et qui nous serviront à prouver le lemme 6.3.7, dans lequel sont rassemblés des résultats utiles au paragraphe 6.4 sous la condition plus faible (\*\*).

Commençons par une remarque importante : si  $\eta \in V(o, \xi, t)$ , on a  $|\beta_\eta(o, \xi(t)) - t| \leq 4\alpha$  par le lemme 6.2.6. En utilisant la relation de conformité de  $\nu$ , on obtient

$$\exp(-4\delta\alpha + \delta t) \leq \frac{\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))}{\nu_o(V(o, \xi, t))} \leq \exp(4\delta\alpha + \delta t). \quad (6.4)$$

Autrement dit, pour prouver le théorème 6.3.2, il suffit d'estimer  $\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))$ , ce que nous ferons par la suite.

**Lemme 6.3.3** *Il existe une constante  $B_0 > 0$  telle que si  $\xi(t) \in \Gamma\tilde{C}_0$ , alors*

$$\frac{1}{B_0} \leq \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \leq B_0.$$

Vu l'encadrement (6.4), le lemme 6.3.3 démontre la partie **a** du théorème, avec  $A_0 = B_0 \exp(4\delta\alpha)$ .

**Démonstration :** Si  $\xi(t) \in \Gamma\tilde{C}_0$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $d(\xi(t), \gamma o) \leq \Delta$ . Par conformité de  $\nu$ , ceci implique

$$e^{-\delta\Delta} \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \leq \nu_{\gamma o}(V(o, \xi, t)) = \nu_o(V(\gamma^{-1}o, \gamma^{-1}\xi, t)) \leq e^{\delta\Delta} \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)).$$

Comme  $\nu_o$  est une probabilité, la quantité  $\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))$  est majorée par  $\exp(\delta\Delta)$ . D'autre part, comme la distance de  $\gamma^{-1}\xi(t)$  à  $o$  est inférieure à  $\Delta$ , il existe d'après le lemme 6.2.8 un réel  $\varepsilon > 0$  tel que

$$V(\gamma^{-1}o, \gamma^{-1}\xi, t) = V(\gamma^{-1}\xi(t), \gamma^{-1}\xi, 0) \supset B_o(\gamma^{-1}\xi, \varepsilon),$$

et comme  $\nu$  est de support  $\Lambda_\Gamma$ , on en déduit

$$1 \geq \nu_o(V(\gamma^{-1}o, \gamma^{-1}\xi, t)) \geq \inf_{\eta \in \Lambda_\Gamma} \nu_o(B_o(\eta, \varepsilon)) = C_\varepsilon > 0.$$

□

Considérons à présent le cas où  $\xi = \xi_i$  est un point parabolique de  $\Lambda_\Gamma$ . On notera  $(\xi_i(t))_{t \geq 0}$  le rayon  $[o\xi_i)$ , et  $s_i$  l'instant d'entrée du rayon  $[o\xi_i)$  dans l'horoboule  $\mathcal{H}_i$ , soit encore  $\xi_i(s_i) = [o\xi_i) \cap \partial\mathcal{H}_i$ .

**Proposition 6.3.4** *Soit  $M$  une variété géométriquement finie dont les cusps satisfont (\*). Il existe des constantes  $B_1 > 0$  et  $B_2 > 0$ , telles que pour tout point parabolique  $\xi_i$  et tout  $t \geq s_i$ , on ait*

$$\frac{1}{B_1} \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)) \leq \nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t)) \leq B_1 \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)), \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{B_2} \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)) \leq \nu_{\xi_i(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_i, t)) \leq B_2 \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)).$$

**Corollaire 6.3.5** Cette proposition démontre le théorème quand  $\xi = \xi_i \in \Lambda_{pb}$  et  $\xi_i(t) \in \mathcal{H}_i$ .

**Démonstration du corollaire 6.3.5:** En effet, dans ce cas, on a

$$|d(\xi(t), \Gamma o) - (t - s_i)| = |d(\xi(t), \Gamma o) - d(\xi(t), \Gamma\widetilde{C}_0)| \leq \Delta.$$

□

**Démonstration de la proposition 6.3.4:** La première étape est l'estimation des mesures  $\nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t))$  et  $\nu_{\xi_1(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t))$  quand  $\xi_i = \xi_1$  et  $\xi_1(t) \in \widetilde{C}_1$ . À la fin de la preuve, nous expliquerons comment passer de  $\xi_1$  à  $\xi_i = \gamma_i \xi_1$ .

Dans ce premier cas, vus les choix des relevés  $\widetilde{C}_0$  et  $\widetilde{C}_1$  de  $C_0$  et  $C_1$ , le point  $\xi_1(s_1)$  est dans l'adhérence de  $\widetilde{C}_0$ , donc à distance inférieure à  $\Delta$  de  $o$ , de sorte que  $s_1 \leq \Delta$ . On peut donc oublier la contribution de  $s_1$  dans l'estimée ci-dessus, ou plus exactement considérer qu'elle est intégrée dans les constantes  $B_1$  et  $B_2$ .

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental *borélien* pour l'action de  $\Pi$  sur  $\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\}$ , i.e. satisfaisant à  $\nu_x(\cup p\mathcal{D}) = \nu_x(\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\})$  et  $\nu_x(\mathcal{D} \cap p\mathcal{D}) = 0$  pour tout  $p \neq Id$ . On le choisira relativement compact dans  $\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\}$ . Comme  $\nu$  est sans atomes et de support  $\Lambda_\Gamma$ , pour tout  $x$  on a  $\nu_x(\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\}) = \nu_x(\partial\widetilde{M})$ , d'où

$$\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ p\mathcal{D} \subset V(o, \xi_1, t)}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \leq \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ p\mathcal{D} \cap V(o, \xi_1, t) \neq \emptyset}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}).$$

En utilisant le lemme 6.2.9 avec  $K = \mathcal{D}$ , on obtient

$$\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq 2t + 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \leq \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq 2t - 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}). \quad (6.5)$$

De même, on trouve

$$\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) < 2t - 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t)) \leq \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) < 2t + 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}). \quad (6.6)$$

Nous devons donc estimer  $\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})$ . Par conformité et invariance de  $\nu$  sous l'action de  $\Gamma$ , nous avons

$$\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} e^{-\delta\beta_{p\eta}(\xi_1(t), p\xi_1(t))} d\nu_{\xi_1(t)}(\eta).$$

Le lemme 6.2.9 fournit une estimée de  $\beta_{p\eta}(\xi_1(t), p\xi_1(t))$  en fonction de  $d(o, po)$ . Si  $d(o, po) \leq 2t$ , nous en déduisons

$$\exp(-2\delta K_3) \leq \frac{\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})}{\nu_{\xi_1(t)}(\mathcal{D})} \leq \exp(2\delta K_3).$$

Et si  $d(o, po) \geq 2t$ , alors

$$\exp(-2\delta K_3 - \delta d(o, po) + 2\delta t) \leq \frac{\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})}{\nu_{\xi_1(t)}(\mathcal{D})} \leq \exp(2\delta K_3 - \delta d(o, po) + 2\delta t).$$

Remarquons qu'en fait, dans (6.5) et (6.6), on sommat sur  $d(o, po) \geq 2(t \pm K_3)$  et  $d(o, po) \leq 2(t \pm K_3)$ . Il faut alors remplacer  $t$  par  $t \pm K_3$  dans les encadrements ci-dessus, ce qui donne une estimée de  $\nu_{\xi_1(t \pm K_3)}(p\mathcal{D})$  au lieu de  $\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})$ . Mais la conformité de  $\nu$  implique que le quotient de ces deux dernières quantités est au plus  $\exp(\delta K_3)$ . On en déduit alors les encadrements :

$$\begin{aligned} e^{-2\delta K_3} e^{2\delta t} \nu_{\xi_1(t+K_3)}(\mathcal{D}) & \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq 2t + 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)} \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \\ & \leq e^{2\delta K_3} e^{2\delta t} \nu_{\xi_1(t-K_3)}(\mathcal{D}) \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq 2t - 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned} e^{-3\delta K_3} \nu_{\xi_1(t-K_3)}(\mathcal{D}) \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t - K_3)\} & \leq \nu_{\xi_1(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t)) \\ & \leq e^{3\delta K_3} \nu_{\xi_1(t+K_3)}(\mathcal{D}) \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t + K_3)\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dans les deux cas, il reste à estimer  $\nu_{\xi_1(t')}(\mathcal{D})$ , avec  $t' = t \pm K_3$ . Or par conformité de  $\nu$ , on a

$$\nu_{\xi_1(t')}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} e^{-\delta \beta_\eta(\xi_1(t'), o)} d\nu_o(\eta). \quad (6.9)$$

Comme au paragraphe 6.2.5, notons  $y_\eta$  l'intersection de la géodésique  $(\eta\xi_1)$  avec  $\partial\mathcal{H}_1$ . Lorsque  $\eta$  varie dans le compact  $\mathcal{D}$  de  $\partial\widetilde{M} \setminus \{\xi_1\}$ , la distance de  $o$  à la géodésique  $(\eta\xi_1)$  est inférieure à la distance de  $o$  à  $y_\eta$ , elle-même majorée par une constante  $C_{\mathcal{D}} = C(\mathcal{D}, o, \xi_1)$ . En notant  $(\xi_\eta(s))_{s \geq 0}$  le rayon  $[y_\eta \xi_1)$ , par le lemme 6.2.2, nous avons

$$0 \leq \beta_\eta(o, \xi_\eta(t')) + \beta_{\xi_1}(o, \xi_\eta(t')) = \beta_\eta(o, \xi_\eta(t')) + t' \leq 2C_{\mathcal{D}}.$$

D'autre part, on a  $|\beta_\eta(\xi_1(t'), \xi_\eta(t'))| \leq d(\xi_1(t'), \xi_\eta(t')) \leq C_{\mathcal{D}}$ , d'où finalement

$$t' - 3C \leq \beta_\eta(\xi_1(t'), o) \leq t + C_{\mathcal{D}}.$$

Avec (6.9) ci-dessus, on obtient

$$e^{-\delta C_{\mathcal{D}} - \delta t'} \nu_o(\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t')}(\mathcal{D}) \leq e^{3\delta C_{\mathcal{D}} - \delta t'} \nu_o(\mathcal{D}).$$

Reportons cet encadrement dans les inégalités (6.7) et (6.8). Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} e^{-2\delta K_3 - \delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq 2t + 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)} & \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \\ & \leq e^{2\delta K_3 + 3\delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq 2t - 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

De même, on a

$$\begin{aligned} e^{-2\delta K_3 - \delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t - K_3)\} & \leq \nu_{\xi_1(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t)) \\ & \leq e^{2\delta K_3 + 3\delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t + K_3)\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nous devons maintenant considérer le cas où  $\xi_i = \gamma_i \xi_1 \neq \xi_1$ . Rappelons la notation  $\xi_i(s_i) = [\mathcal{O}\xi_i(t)] \cap \partial\mathcal{H}_i$ . Par choix de  $\gamma_i$ , l'ensemble  $\gamma_i \tilde{\mathcal{C}}_0$  intersecte le rayon  $[\mathcal{O}\xi_i]$  et son adhérence intersecte celle de  $\tilde{\mathcal{C}}_i$ . On en déduit que  $\xi_i(s_i)$  est dans le bord de  $\gamma_i \tilde{\mathcal{C}}_0$ , d'où  $d(\xi_i(s_i), \gamma_i \mathcal{O}) \leq \Delta$ . En utilisant le lemme 6.2.7c (avec  $K_2 = K_2(\Delta)$ ), et le fait que  $V(\mathcal{O}, \xi_i, t) = V(\xi_i(s_i), \xi_i, t - s_i)$ , on obtient l'encadrement

$$V(\gamma_i \mathcal{O}, \xi_i, t - s_i + K_2) \subset V(\mathcal{O}, \xi_i, t) \subset V(\gamma_i \mathcal{O}, \xi_i, t - s_i - K_2). \quad (6.12)$$

Notons  $(\xi_1(u))_{u \geq 0}$  le rayon  $[\mathcal{O}\xi_1]$ . Les rayons  $(\xi_i(u + s_i))_{u \geq 0}$  et  $(\gamma_i \xi_1(u))_{u \geq 0}$  sont asymptotiques, d'où pour tout  $t \geq s_i$ ,

$$d(\xi_i(t), \gamma_i \xi_1(t - s_i)) \leq d(\xi_i(s_i), \gamma_i \xi_1(0)) = d(\xi_i(s_i), \gamma_i \mathcal{O}) \leq \Delta.$$

La conformité de  $\nu$  donne pour tout  $\eta \in \partial\tilde{\mathcal{M}}$

$$\exp(-\delta\Delta) \leq \frac{d\nu_{\xi_i(t)}}{d\nu_{\gamma_i \xi_1(t-s_i)}}(\eta) \leq \exp(\delta\Delta). \quad (6.13)$$

En utilisant (6.10), (6.11), (6.12) et (6.13), on obtient

$$\begin{aligned} e^{-\delta\Delta - 2\delta K_3 - \delta C_{\mathcal{D}}} \nu_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}) e^{\delta(t-s_i)} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) \geq 2(t-s_i) + 2K_3}} e^{-\delta d(\mathcal{O}, p\mathcal{O})} &\leq \nu_{\xi_i(t)}(V(\mathcal{O}, \xi_i, t)) \\ &\leq e^{2\delta K_3 + 3\delta C_{\mathcal{D}} + \delta\Delta} \nu_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}) e^{\delta(t-s_i)} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) \geq 2(t-s_i) - 2K_3}} e^{-\delta d(\mathcal{O}, p\mathcal{O})} \end{aligned} \quad (6.14)$$

et

$$\begin{aligned} e^{-\delta\Delta - 2\delta K_3 - \delta C_{\mathcal{D}}} \nu_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}) e^{-\delta(t-s_i)} \#\{p \in \Pi, d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) < 2(t-s_i - K_3)\} &\leq \nu_{\xi_i(t)}(\partial\tilde{\mathcal{M}} \setminus V(\mathcal{O}, \xi_i, t)) \\ &\leq e^{\delta\Delta + 2\delta K_3 + 3\delta C_{\mathcal{D}}} \nu_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}) e^{-\delta(t-s_i)} \#\{p \in \Pi, d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) < 2(t-s_i + K_3)\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Notons que nous n'avons pas utilisé la condition (\*) pour démontrer les encadrements (6.14) et (6.15). Elle va nous servir maintenant pour conclure la démonstration de la proposition 6.3.4, en permettant d'estimer les quantités

$$e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) \geq 2t}} e^{-\delta d(\mathcal{O}, p\mathcal{O})} \quad \text{et} \quad e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) < 2t\}.$$

Notons  $a_T = \#\{p \in \Pi, d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) \in [T, T+1[$ . L'hypothèse (\*) donne  $\frac{1}{D} e^{\delta\pi T} \leq a_T \leq D e^{\delta\pi T}$ . Rappelons que cette hypothèse (\*) implique que  $\delta_{\Pi} < \delta_{\Gamma} \leq \delta$ . En écrivant

$$e^{-\delta} \sum_{n=[2t]+1}^{+\infty} a_n e^{-\delta n} \leq \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) \geq 2t}} e^{-\delta d(\mathcal{O}, p\mathcal{O})} \leq \sum_{n=[2t]}^{+\infty} a_n e^{-\delta n},$$

on obtient

$$\frac{1}{D} \frac{1}{1 - e^{\delta\pi - \delta}} e^{\delta t + 2(\delta_{\Pi} - \delta)t} \leq e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(\mathcal{O}, p\mathcal{O}) \geq 2t}} e^{-\delta d(\mathcal{O}, p\mathcal{O})} \leq \frac{D}{1 - e^{\delta\pi - \delta}} e^{\delta t + 2(\delta_{\Pi} - \delta)t}$$

De même on trouve

$$\frac{1}{2D} \frac{e^{-\delta\Pi}}{e^{\delta\Pi-1}} e^{-\delta t} e^{2\delta\Pi t} \leq e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2t\} \leq D \frac{e^{\delta\Pi}}{e^{\delta\Pi-1}} e^{-\delta t} e^{2\delta\Pi t}$$

Ces deux derniers encadrements combinés avec (6.14) et (6.15) donnent le résultat voulu.  $\square$

Il reste maintenant à traiter le cas général, ce qui est fait dans le lemme ci-dessous et achèvera la démonstration du théorème 6.3.2.

**Lemme 6.3.6** *Il existe une constante  $B_3 > 0$ , telle que si  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ , et  $\xi(t) \in \Gamma\tilde{C}_1$ , alors*

$$\frac{1}{B_3} \exp((2\delta_\Pi - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)) \leq \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \leq B_3 \exp((2\delta_\Pi - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)).$$

**Démonstration :** Soit  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ , et  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $\xi(t) \in \tilde{C}_i$ . Nous distinguerons trois cas selon les positions respectives de  $\xi$  et  $\xi_i$ .

**Premier cas :**  $\xi_i \in V(o, \xi, t + K_1 + \alpha)$  (où  $K_1$  est la constante donnée par le lemme 6.2.7b). Montrons que la mesure  $\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))$  est très proche de  $\nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t)) \asymp e^{(2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)}$  (proposition 6.3.4), et que la distance de  $\xi(t)$  à  $\Gamma o$  est à peu près  $t - s_i$ .

Le lemme 6.2.7 b donne

$$V(o, \xi_i, t + K_1) \subset V(o, \xi, t) \subset V(o, \xi_i, t - K_1).$$

D'autre part, pour tout  $\eta \in \partial\tilde{M}$ , l'inégalité triangulaire entraîne  $|\beta_\eta(\xi(t), \xi_i(t))| \leq d(\xi(t), \xi_i(t))$ , et le lemme 6.2.5 ainsi que le fait que  $\xi_i \in V(o, \xi, t + K_1 + \alpha)$  donnent  $d(\xi(t), \xi_i(t)) \leq \alpha$ . Par conformité de  $\nu$ , on en déduit

$$e^{-\delta\alpha} \nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t + K_1)) \leq \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \leq e^{\delta\alpha} \nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t - K_1)). \quad (6.16)$$

La première estimée de la proposition 6.3.4 donne alors le résultat, puisque

$$|d(\xi(t), \Gamma o) - (t - s_i)| \leq |d(\xi(t), \Gamma o) - d(\xi_i(t), \Gamma o)| + |(t - s_i) - d(\xi_i(t), \Gamma o)| \leq \alpha + \Delta.$$

**Deuxième cas :**  $\xi_i \notin V(o, \xi, t - K_1 - \alpha)$ .

Le point  $\xi_i$  est alors plus proche du point antipodal de  $\xi$  sur  $(o\xi)$ , noté  $\xi'$ . Introduisons alors l'autre intersection  $o'$  de la géodésique  $(o\xi)$  avec  $\partial\mathcal{H}_i : o' = ]\xi(t)\xi) \cap \partial\mathcal{H}_i$ , et la distance  $t' = d(\xi(t), o')$ . On a alors  $V(o, \xi, t) = \partial\tilde{M} \setminus V(o', \xi', t')$ , et  $\xi_i \in V(o', \xi', t' + K_1 + \alpha)$ . Le lemme 6.2.7b donne

$$\partial\tilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t' - K_1) \subset V(o, \xi, t) = \partial\tilde{M} \setminus V(o', \xi', t') \subset \partial\tilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t' + K_1).$$

Aux constantes près, on est donc ramenés à l'estimation de  $\nu_{\xi(t)}(\partial\tilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t'))$ .

Comme  $o \in \tilde{C}(\Gamma)$  et  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ ,  $o'$  est aussi dans  $\tilde{C}(\Gamma)$ . De plus, par définition,  $o'$  appartient au bord de  $\mathcal{H}_i$ , donc au bord de  $\Gamma\tilde{C}_0$ . On peut donc trouver un  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $d(o', \gamma o) = d(o', \Gamma o) \leq \Delta$ . Le lemme 6.2.7c donne alors l'existence d'une constante  $K_2(\Delta)$  telle que

$$\partial\tilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' - K_1 - K_2) \subset V(o, \xi, t) = \partial\tilde{M} \setminus V(o', \xi', t') \subset \partial\tilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t' + K_1 + K_2).$$

Notons  $(c(s))_{s \geq 0}$  le rayon  $[\gamma o \xi_i]$ . En utilisant le fait que  $\xi_i \in V(o', \xi', t' + K_1 + \alpha)$  et que  $d(o', \gamma o) \leq \Delta$ , par les lemmes 6.2.7c et 6.2.5, on obtient  $d(c(t'), \xi(t)) \leq \alpha + \Delta$ . Par conformité de  $\nu$ , on en déduit

$$e^{-\delta(\alpha + \Delta + K_2)} \nu_{c(t' - K_1 - K_2)}(\partial \widetilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' - K_1 - K_2)) \leq \nu_{\xi(t)}(\partial \widetilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t')) \leq e^{\delta(\alpha + \Delta + K_2)} \nu_{c(t' + K_1 + K_2)}(\partial \widetilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' + K_1 + K_2)) \quad (6.17)$$

Maintenant, la proposition 6.3.4 (et donc l'hypothèse  $(*)$ ) dit qu'aux constantes près, la quantité ci-dessus est comparable à

$$e^{(2\delta_{\Pi} - \delta)t'}.$$

Il reste à voir que la distance de  $\xi(t)$  à  $\Gamma o$  est à peu près  $t'$ . Ceci découle du fait (vu ci-dessus) que  $d(\xi(t), c(t')) \leq \alpha + \Delta$ , et de l'égalité  $d(c(t'), \Gamma o) = d(c(t'), \gamma o) = t'$ .

**Dernier cas :**  $\xi_i \in V(o, \xi, t - K_1 - \alpha) \setminus V(o, \xi, t + K_1 + \alpha)$ .

On pose alors  $t_1 = t - 2K_1 - 2\alpha$  et  $t_2 = t + 2K_1 + 2\alpha$ . On a alors  $\xi_i \in V(o, \xi, t_1 + K_1 + \alpha)$  et  $\xi_i \notin V(o, \xi, t_2 - K_1 - \alpha)$ . D'où le résultat voulu, d'après les deux premiers cas ci-dessus appliqués respectivement à  $t_1$  et  $t_2$ .  $\square$

Ceci termine donc la preuve du Lemme de l'Ombre en courbure négative variable.

Pour finir énonçons un lemme qui, sous l'hypothèse plus faible  $(**)$ , nous permet d'obtenir les estimées utiles dans l'étude de la non divergence des horosphères.

**Lemme 6.3.7** *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps satisfont  $(**)$ , avec  $\Gamma$  divergent. Avec les notations de ce paragraphe, on a*

1. Si  $\xi = \xi_i \in \Lambda_{pb}$ , alors la quantité

$$\frac{\nu_o(V(o, \xi, t + N))}{\nu_o(V(o, \xi, t))}$$

converge vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ , uniformément en  $t \geq 0$ .

2. Il existe une constante  $\tau > 0$ , telle que

$$\sup_{\xi \in \Lambda_{\Gamma}} \sup_{t \geq 0} \frac{\nu_o(V(o, \xi, t))}{\nu_o(V(o, \xi, t + \tau))} < +\infty.$$

**Démonstration :** La première partie du lemme découle immédiatement des encadrements (6.4) et (6.14) et de la condition  $(**)_1$ .

Pour démontrer la deuxième partie, il nous faudra distinguer plusieurs cas, comme dans la preuve du lemme 6.3.6 ci-dessus. La valeur de la constante  $\tau$  ne joue pas un grand rôle, nous poserons donc  $\tau = K_1 + \alpha$ . Les deux points  $\xi(t)$  et  $\xi(t + \tau)$  étant à distance  $\tau$  l'un de l'autre, on les supposera simultanément dans  $\Gamma \widetilde{C}_0$  ou dans  $\Gamma \widetilde{C}_1$ .

**Premier cas :** les deux points  $\xi(t)$  et  $\xi(t + \tau)$  sont dans  $\Gamma \widetilde{C}_0$ . Le lemme 6.3.3 et l'encadrement (6.4) donnent le résultat voulu.

**Deuxième cas :** les deux points sont dans  $\widetilde{C}_i$  et  $\xi_i \in V(o, \xi, t + \tau + K_1 + \alpha)$ . Dans ce cas, on estime les deux quantités  $\nu_o(V(o, \xi, t + \tau))$  et  $\nu_o(V(o, \xi, t))$  comme dans le premier cas de la preuve du lemme 6.3.6. En utilisant (6.4), (6.16), et (6.14), et la condition  $(**)_1$ , on

obtient le résultat voulu .

**Troisième cas :** les deux points sont dans  $\tilde{C}_i$  et  $\xi_i \notin V(o, \xi, t - K_1 - \alpha)$ . Dans ce cas, on utilise les encadrements (6.4), (6.17), et (6.15), et la condition  $(**) _2$  permet de conclure.

**Dernier cas :** les deux points sont dans  $\tilde{C}_i$  et  $\xi_i \in V(o, \xi, t - K_1 - \alpha) \setminus V(o, \xi, t + \tau + K_1 + \alpha)$ . On écrit alors

$$\frac{\nu_o(V(o, \xi, t))}{\nu_o(V(o, \xi, t + \tau))} \leq e^{\delta\tau + 8\delta\alpha} \frac{\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))}{\nu_{\xi(t+\tau)}(V(o, \xi, t + \tau))}.$$

Par conformité de  $\nu$ , et puisque  $V(o, \xi, t) \subset V(o, \xi, t - \tau)$  et  $V(o, \xi, t + C) \subset V(o, \xi, t + 2\tau)$ , à une constante multiplicative près, cette quantité est encore majorée par

$$\frac{\nu_{\xi(t-\tau)}(V(o, \xi, t - \tau))}{\nu_{\xi(t+2\tau)}(V(o, \xi, t + 2\tau))}.$$

Comme  $\xi_i \in V(o, \xi, (t - \tau) + K_1 + \alpha) = V(o, \xi, t - K_1 - \alpha)$ , l'encadrement (6.16) permet d'estimer le numérateur ; de même, comme  $\xi_i \notin V(o, \xi, t + 2\tau - K_1 - \alpha)$ , l'encadrement (6.17) permet d'estimer le dénominateur. Aux constantes près, on est ramenés à montrer que la quantité

$$\frac{e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta d(o, po)}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}}$$

est bornée en  $t \geq 0$ .

D'après  $(**) _1$ , il existe un réel  $N_0 > 0$ , tel que

$$\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t + N_0}} e^{-\delta d(o, po)} \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta d(o, po)}.$$

Autrement dit, on a

$$\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta d(o, po)} \leq 2 \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ t \leq d(o, po) < t + N_0}} e^{-\delta d(o, po)}.$$

De plus, cette dernière somme vérifie

$$\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ t \leq d(o, po) < t + N_0}} e^{-\delta d(o, po)} \leq e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, t \leq d(o, po) < t + N_0\},$$

d'où on déduit

$$\frac{e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta d(o, po)}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}} \leq 2 \frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t + N_0\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}}.$$

La condition  $(**) _2$  permet alors de conclure que la quantité ci-dessus est bornée en  $t \geq 0$ .  
□

## 6.4 Moyennes horosphériques

### 6.4.1 Définitions

Rappelons que  $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$  est une variété géométriquement finie à courbure négative pincée. Le flot géodésique  $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  agissant sur  $T^1 M$  est un flot hyperbolique, dont les variétés fortement instables se relèvent sur  $T^1 \widetilde{M}$  en les variétés fortement instables du flot géodésique  $\tilde{g} = (\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $T^1 \widetilde{M}$ , qu'il est simple de décrire géométriquement.

Une horosphère  $H \subset \widetilde{M}$  centrée en  $\xi$  se relève à  $T^1 \widetilde{M}$  en une *horosphère fortement instable*  $H^+ := \{u \in T^1 \widetilde{M}, \pi(u) \in H, \text{ et } u^- = \xi\}$ . C'est encore l'ensemble des vecteurs basés sur  $H$  orthogonaux à  $H$ , et pointant vers l'extérieur. Si  $u \in T^1 \widetilde{M}$ , nous noterons respectivement  $H(u) \subset M$  l'horosphère de  $M$  centrée en  $u^-$  et passant par le point base  $\pi(u)$  de  $u$ , et  $H^+(u) \subset T^1 \widetilde{M}$  l'horosphère fortement instable contenant  $u$ . Les horosphères vues sur  $T^1 \widetilde{M}$  sont les variétés fortement instables du flot géodésique  $\tilde{g}$  sur  $T^1 \widetilde{M}$  :

$$H^+(u) = \widetilde{W}^{su}(u) := \{w \in T^1 \widetilde{M}, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{g}^{-t}u, \tilde{g}^{-t}w) = 0\}.$$

De la même manière, on définit l'*horosphère fortement stable*  $H^-(u)$  de  $u$  par

$$H^-(u) = \widetilde{W}^{ss}(u) := \{w \in T^1 \widetilde{M}, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{g}^t u, \tilde{g}^t w) = 0\}.$$

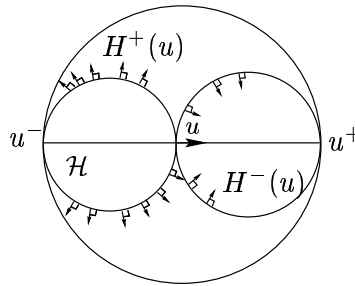


FIG. 6.5 – Horosphères et horoboules

Nous nous servirons de la famille  $(d_{H^+})_{H^+ \in \mathcal{H}}$  des distances dites *de Hamenstädt* sur les horosphères de  $T^1 \widetilde{M}$  (voir [He-P]). Si  $x \in \widetilde{M}$  est un point quelconque, elles sont définies pour tous  $(u, v) \in (H^+)^2$  par

$$d_{H^+}(u, v) = \exp \left( \frac{1}{2} \beta_{u^+}(x, u) + \frac{1}{2} \beta_{v^+}(x, v) \right) d_x(u^+, v^+).$$

En fait, nous les considérerons indifféremment comme des distances sur les horosphères de  $\widetilde{M}$  et de  $T^1 \widetilde{M}$ . Elles sont bien définies car l'expression ci-dessus ne dépend pas de  $x$ . Elles sont invariantes par isométries au sens où pour toute isométrie  $\gamma$  de  $T^1 \widetilde{M}$ , on a  $d_{\gamma H^+}(\gamma u, \gamma v) = d_{H^+}(u, v)$ . De plus, poussées par le flot, elles vérifient pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$d_{g^t H^+}(g^t u, g^t v) = e^t d_{H^+}(u, v).$$

Géométriquement (figure 6.6),  $2 \log d_{H^+}(u, v)$  représente la distance « algébrique » entre les deux horosphères  $H^-(u)$  et  $H^-(v)$ .



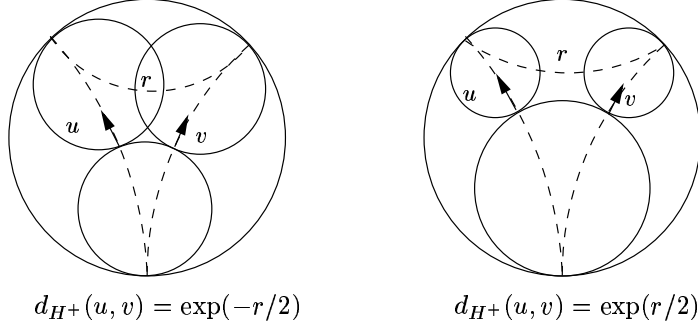


FIG. 6.6 – Distance horosphérique

Dans le modèle du demi-plan supérieur de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}$ , cette distance s'exprime très simplement. Si  $H^+(u)$  est une horosphère horizontale, i.e. si  $u^- = +\infty$ , et  $v$  est un vecteur de  $H^+(u)$ , alors on a  $d_{H^+}(u, v) = \frac{d}{h}$ , où  $d$  est la distance euclidienne entre les points base de  $u$  et  $v$ , et  $h$  la hauteur euclidienne de l'horosphère  $H^+(u)$ .

Rappelons que si  $\Gamma$  est un groupe divergent, il existe une unique densité conforme invariante normalisée  $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$  de dimension  $\delta_\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma$  (proposition 6.3.1).

Pour pouvoir définir des moyennes horosphériques au paragraphe suivant, nous aurons besoin d'une famille de mesures sur les horosphères fortement instables, définies à partir de la mesure de Patterson  $\nu_o$ .

**Proposition 6.4.1** *La famille de mesures définies sur chaque horosphère  $H^+$  par*

$$d\mu_{H^+}(v) = \exp(\delta_\Gamma \beta_{v^+}(o, v)) d\nu_o(v^+)$$

*ne dépend pas de  $o$ , elle est  $\Gamma$ -invariante (au sens où  $\gamma_* \mu_{H^+} = \mu_{\gamma H^+}$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ), et induit donc au quotient par  $\Gamma$  une famille de mesures sur les variétés fortement instables du flot géodésique. De plus, poussée par le flot, elle vérifie pour tout  $t \in \mathbb{R}$*

$$dg_*^{-t} \mu_{g^t H^+}(u) = \exp(\delta_\Gamma t) d\mu_{H^+}(u). \quad (6.18)$$

Remarquons également que, la mesure  $\nu_o$  ayant pour support  $\Lambda_\Gamma$ , chaque mesure  $\mu_{H^+}$  définie ci-dessus a pour support  $\{v \in H^+ \mid v^+ \in \Lambda_\Gamma\}$ . En particulier, si  $H^+$  est centrée dans  $\Lambda_\Gamma$ , la mesure  $\mu_{H^+}$  a pour support  $H^+ \cap \Omega$ .

### 6.4.2 Non divergence des moyennes horosphériques

Quand  $M$  est géométriquement finie, la topologie des horosphères fortement instables est bien connue. Soit  $\mathcal{E} = \{v \in T^1 M, v^- \in \Lambda_\Gamma\}$ . D'après Dal'bo [D], les feuilles centrées en un point parabolique borné sont compactes, celles centrées en un point limite radial sont denses dans  $\mathcal{E}$ , et celles qui sont centrées hors de l'ensemble limite sont fermées et non compactes. Par conséquent, par analogie avec le cas d'un flot, nous appellerons  $\mathcal{E}$  l'*ensemble non errant du feuilletage horosphérique (instable)*. Il se décompose en une union disjointe

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{rad}} \sqcup \mathcal{E}_{\text{pb}},$$

où  $\mathcal{E}_{\text{rad}}$  (resp.  $\mathcal{E}_{\text{pb}}$ ) est l'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{E}$  centrés en un point limite radial (resp. un point parabolique borné).

En l'absence de paramétrisation naturelle des feuilles par un flot, nous nous intéressons ici à des moyennes sur de grandes boules horosphériques pour la mesure  $\mu_{H^+}$  définie au paragraphe précédent : pour toute fonction continue  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , et tout  $r \geq 0$ , nous posons

$$M_{r,u}(\psi) = \frac{1}{\mu_{H^+}(B^+(u,r))} \int_{B^+(u,r)} \psi(v) d\mu_{H^+}(v).$$

Si  $u \in \mathcal{E}_{pb}$ , les probabilités  $(M_{r,u})_{r>0}$  sont à support compact inclus dans  $H^+(u)$ .

Mais si  $u \in \mathcal{E}_{rad}$ , la mesure  $\mu_{H^+}$  ayant pour support  $H^+ \cap \Omega$ , ces mesures  $(M_{r,u})_{r>0}$  sont à support dans l'ensemble non errant  $\Omega$  du flot géodésique, qui est non compact lorsque  $M$  est géométriquement finie avec des cusps. Pour quantifier la non divergence des horosphères, nous allons montrer qu'il n'y a pas de perte de masse des mesures  $(M_{r,u})_{r>0}$  dans les cusps. Plus précisément, notre résultat est le suivant :

**Théorème 6.4.2** *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété géométriquement finie dont les cusps satisfont (\*\*), avec  $\Gamma$  un groupe divergent. Fixons  $\varepsilon > 0$ , et  $C$  un compact de  $T^1M$ . Alors il existe un compact  $K_{\varepsilon,C} \subset \Omega$  et un réel  $r_0(C) > 0$ , tels que pour tout  $u \in C \cap \mathcal{E}_{rad}$  et tout  $r \geq r_0(C)$ ,*

$$M_{r,u}(K_{\varepsilon,C}) \geq 1 - \varepsilon.$$

**Démonstration :** Nous allons étudier les moyennes sur le revêtement  $T^1\widetilde{M}$ , et déterminer pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout compact  $C$  de  $T^1M$  un ensemble  $\widetilde{K}_{\varepsilon,C}$  de  $\Lambda_{\Gamma}^2 \times \mathbb{R}$  compact modulo  $\Gamma$ , qui satisfait l'assertion du théorème ci-dessus.

**Première étape :** Dans le cas où  $C = \pi^{-1}(C_0)$  est l'ensemble des vecteurs basés dans  $C_0$ , nous allons introduire l'ensemble cocompact  $\widetilde{K}_{\varepsilon,C} \subset \Lambda_{\Gamma}^2 \times \mathbb{R}$ , puis ramener l'énoncé ci-dessus à la recherche d'estimées de mesures de boules horosphériques.

Comme  $\Gamma$  est géométriquement fini, il n'a qu'un nombre fini de cusps, on supposera donc comme au paragraphe précédent qu'il n'en a qu'un seul. Rappelons que  $\widetilde{C}(\Gamma)$  se décompose en une union disjointe  $\widetilde{C}(\Gamma) = \Gamma\widetilde{C}_1 \sqcup \Gamma\widetilde{C}_0$ , où  $\widetilde{C}_1$  désigne l'intersection de  $\widetilde{C}(\Gamma)$  avec une horoboule  $\mathcal{H}_1$  centrée au point parabolique borné  $\xi_1$ . Nous renvoyons le lecteur aux notations introduites au paragraphe 6.3.2

Notons maintenant  $\mathcal{H}_1^N \subset \mathcal{H}_1$  l'horoboule « rétrécie de  $N$  », c'est-à-dire l'horoboule dont le bord satisfait  $\beta_{\xi_1}(\partial\mathcal{H}_1, \partial\mathcal{H}_1^N) = N > 0$ . Le candidat à être  $\widetilde{K}_{\varepsilon,C_0}$  est l'ensemble des vecteurs de  $\Lambda_{\Gamma}^2 \times \mathbb{R}$  dont le point base appartient au complémentaire  $\widetilde{C}(\Gamma) \setminus \Gamma\mathcal{H}_1^N$  de ces horoboules rétrécies, pour un  $N = N(\varepsilon)$  suffisamment grand.

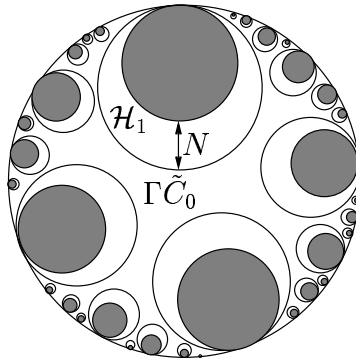


FIG. 6.7 – Horosphères rétrécies

Nous fixons désormais  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ , et nous supposons que  $u$  est basé dans  $\Gamma\tilde{C}_0$ , tout en gardant en mémoire que les raisonnements que nous ferons ne doivent dépendre que de  $C_0$ . Le cas général d'un compact  $C$  quelconque sera traité dans la dernière étape.

Nous aurons besoin d'estimer la mesure  $\mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap \mathcal{H}_i^N)$ , où par abus de notation,  $B^+(u, r) \cap \mathcal{H}_i^N$  désigne l'ensemble des vecteurs de  $B^+(u, r)$  dont le point base appartient à  $\mathcal{H}_i^N$ . Commençons donc par étudier l'intersection géométrique  $H^+(u) \cap \mathcal{H}$ , où  $\mathcal{H}$  est une horoboule quelconque centrée en un point  $\xi \neq u^-$ . Si cette intersection est non vide, considérons le *vecteur le plus haut* de  $H^+(u)$  dans  $\mathcal{H}$ , i.e. le vecteur  $v$  qui réalise le maximum de  $w \mapsto \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(w))$  dans  $H^+(u) \cap \mathcal{H}$ . Par stricte convexité des horosphères, ce vecteur est bien défini et s'écrit  $v = (u^-, \xi, s(u))$  dans les coordonnées  $T^1\tilde{M} \simeq \partial^2\tilde{M} \times \mathbb{R}$ . Nous noterons  $h = \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(v))$  la hauteur à laquelle monte  $H^+(u)$  dans  $\mathcal{H}$ .

**Lemme 6.4.3** *Soit  $\mathcal{H}$  une horoboule centrée en  $\xi \in \partial\tilde{M}$ , et  $H^+(u)$  une horosphère fortement instable qui rencontre  $\mathcal{H}$ . Soit  $v = (u^-, \xi, s(u))$  le vecteur de  $H^+(u)$  qui réalise le maximum  $h = \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(v))$  de  $w \mapsto \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(w))$ , où  $w \in H^+(u) \cap \mathcal{H}$ . Si  $h \geq \alpha$ , on a*

$$B^+(v, e^{\frac{h-\alpha}{2}}) \subset H^+(u) \cap \mathcal{H} \subset B^+(v, e^{\frac{h+\alpha}{2}}),$$

l'inclusion de droite restant vraie quand  $0 \leq h < \alpha$ .

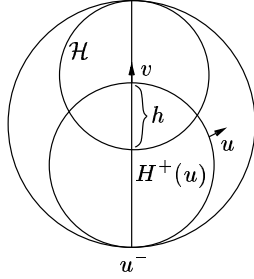


FIG. 6.8 – Intersection horosphère-horoboule

Dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}$ , un calcul donne précisément pour tout  $h \geq 0$

$$H^+(u) \cap \mathcal{H} = B^+(v, \sqrt{e^h - 1}).$$

**Démonstration du lemme 6.4.3:** Soit  $w \in H^+(u) \cap \mathcal{H}$ . On a alors  $0 \leq \beta_\xi(\pi(w), \pi(v)) \leq h$ . Si les horosphères  $\pi(H^-(v))$  et  $\pi(H^-(w))$  s'intersectent (dans  $\tilde{M}$ ), alors

$$d_{H^+}(v, w) \leq 1 \leq e^{\frac{h+\alpha}{2}}.$$

Dans la suite de la démonstration, nous nous intéresserons au cas où ces horosphères sont disjointes. Notons alors  $\mathcal{H}(v)$  (resp.  $\mathcal{H}(w)$ ) l'horoboule dont le bord est  $\pi(H^-(v))$  (resp.  $\pi(H^-(w))$ ). Dans ce cas, le triangle  $(p, q, r)$  intérieur à  $(u^-, \xi, w^+)$  est à l'extérieur des horoboules  $\mathcal{H}(v)$  et  $\mathcal{H}(w)$ . (En effet, si  $r$  appartenait à  $\mathcal{H}(v)$ , par définition du triangle intérieur, ceci impliquerait  $p \in \mathcal{H}(v)$ , puis  $q \in \mathcal{H}(w)$  et enfin  $r \in \mathcal{H}(w)$  d'où une contradiction. Les autres cas se traitent de façon analogue.)

Introduisons  $a_v$  et  $a_w$  les intersections respectives des horosphères  $\pi(H^-(v))$  et  $\pi(H^-(w))$  avec la géodésique  $(\xi w^+) = (v^+ w^+)$ . Par définition de  $d_{H^+}$ , on a  $d_{H^+}(v, w) = \exp \frac{d(a_v, a_w)}{2}$ .

Or

$$\begin{aligned} d(a_v, a_w) = \beta_\xi(a_w, a_v) &= \beta_\xi(a_w, \pi(w)) + \beta_\xi(\pi(w), \pi(v)) \\ &\leq d(a_w, \pi(w)) + \beta_\xi(\pi(w), \pi(v)). \end{aligned}$$

Comme  $q$  et  $r$  n'appartiennent pas à  $\mathcal{H}(w)$ , on a  $d(a_w, \pi(w)) \leq d(r, q) \leq \alpha$ . D'autre part,  $\pi(w) \in \mathcal{H}$ , d'où  $\beta_\xi(\pi(w), \pi(v)) \leq \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(v)) = h$ . Finalement, on en déduit  $d(a_v, a_w) = 2 \log d_{H^+}(v, w) \leq h + \alpha$ , et

$$H^+(u) \cap \mathcal{H} \subset B^+(v, e^{\frac{h+\alpha}{2}}).$$

Supposons maintenant que  $\pi(w) \notin \mathcal{H}$ , i.e.  $\beta_\xi(\pi(w), \pi(v)) > h$ . Alors, en reprenant les calculs ci-dessus, on obtient

$$d(a_v, a_w) = \beta_\xi(a_w, \pi(w)) + \beta_\xi(\pi(w), \pi(v)) > -\alpha + h.$$

Lorsque  $-\alpha + h \geq 0$ , ceci donne l'autre inclusion  $B^+(v, e^{\frac{h-\alpha}{2}}) \subset H^+(u) \cap \mathcal{H}$ .

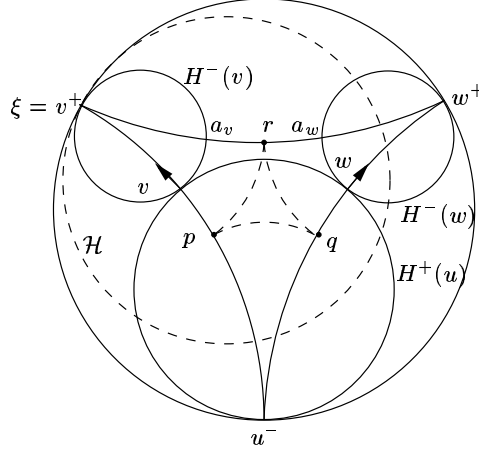


FIG. 6.9 – Lemme 6.4.3

□

Soit maintenant  $\mathcal{H}_i = \gamma_i \mathcal{H}_1$  une horoboule intersectant  $H^+(u)$ ,  $v_i = (u^-, \xi_i, s(u))$  le vecteur le plus haut dans l'horoboule, et  $h_i = \beta_{\xi_i}(\partial\mathcal{H}_i, \pi(v_i))$ . On déduit du lemme 6.4.3 que si  $h_i \geq N + \alpha$ , alors

$$B^+(v_i, e^{\frac{h_i - N - \alpha}{2}}) \subset H^+(u) \cap \mathcal{H}_i^N \subset B^+(v_i, e^{\frac{h_i - N + \alpha}{2}}),$$

l'inclusion de droite restant vraie pour  $N \leq h_i < N + \alpha$ . Si  $h_i \leq N$ , on a facilement  $H^+(u) \cap \mathcal{H}_i^N = \emptyset$ .

On ne regarde donc que les  $h_i \geq N$ . Rappelons que nous cherchons  $N = N(\varepsilon) > 0$  assez grand pour que, pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C_0$ , on ait

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap \Gamma\mathcal{H}_1^N)}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq \varepsilon. \quad (6.19)$$

Introduisons l'ensemble  $I_{u,r,N}$  des  $i \in \mathbb{N}$ , tels que  $B^+(u, r) \cap \mathcal{H}_i^N \neq \emptyset$ . (On a donc  $h_i \geq N$  pour  $i \in I_{u,r,N}$ .) A l'aide du lemme 6.4.3, on peut majorer le numérateur de (6.19) ci-dessus par

$$\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{\frac{h_i - N + \alpha}{2}})).$$

Quitte à remplacer  $N$  par  $N - \alpha$ , nous oublierons désormais la constante  $\alpha$  dans l'expression ci-dessus.

Pour minorer le dénominateur, rappelons que les horoboules  $\mathcal{H}_i$  sont deux à deux disjointes, et donc les boules  $B^+(v_i, e^{h_i/2})$  aussi. Ce dénominateur est donc minoré par

$$\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap B^+(v_i, e^{h_i/2})).$$

Dans la majoration du numérateur, les boules  $B^+(u, r)$  n'interviennent plus que via l'ensemble d'indices  $I_{u,r,N}$ . Pour le dénominateur, le problème est qu'il n'y a aucune raison pour que les boules  $B^+(v_i, e^{h_i/2})$  soient totalement incluses dans  $B^+(u, r)$ . En revanche, comme  $u \in \Gamma\tilde{C}_0$ ,  $u$  n'appartient à aucune horoboule  $\mathcal{H}_i$ , et si  $i \in I_{u,r,N}$ , alors  $B^+(u, r)$  intersecte  $B^+(v_i, e^{\frac{h_i - N}{2}})$ , d'où

$$e^{\frac{h_i}{2}} \leq d_{H^+}(u, v_i) \leq r + e^{\frac{h_i - N}{2}}.$$

Si  $N \geq 2 \log 3$ , on en déduit pour tout  $i \in I_{u,r,N}$

$$B^+(v_i, e^{h_i/2}) \subset B^+(u, 3r).$$

Le dénominateur est donc minoré par

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))} \times \sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{\frac{h_i}{2}})).$$

Pour finir, on obtient la majoration suivante (pour  $N \geq 2 \log 3$ ) :

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap \Gamma\mathcal{H}_1^N)}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq \frac{\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{\frac{h_i - N}{2}}))}{\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{h_i/2}))} \times \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))}.$$

Dans la deuxième étape, nous majorons le premier quotient par  $\varepsilon$  pour  $N$  assez grand. A la troisième étape, nous montrons qu'il existe  $r_0(C_0) > 0$ , tel que le deuxième quotient soit borné uniformément en  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap \Gamma\tilde{C}_0$  et  $r \geq r_0(C_0)$ . Pour finir, la quatrième étape traitera le cas d'un compact  $C$  quelconque différent de  $C_0$ .

**Deuxième étape :** Montrons maintenant que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N = N(\varepsilon) > 0$ , tel que pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap \Gamma\tilde{C}_0$ , tout  $r > 0$  et  $i \in I_{u,r,N}$ , on ait

$$\frac{\mu_{H^+(u)}(B^+(v_i, e^{(h_i - N)/2}))}{\mu_{H^+(u)}(B^+(v_i, e^{h_i/2}))} \leq \varepsilon. \quad (6.20)$$

Notons  $w_i = g^{-h_i}v_i \in \partial\mathcal{H}_i$ . D'après la relation (6.18) du paragraphe 6.4.1, la quantité ci-dessus est encore égale à

$$\frac{\mu_{H^+(w_i)}(B^+(w_i, e^{(-h_i - N)/2}))}{\mu_{H^+(w_i)}(B^+(w_i, e^{-h_i/2}))}.$$

Remarquons qu'à  $i$  fixé, la quantité ci-dessus tend clairement vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ ; mais la difficulté vient du fait qu'on cherche une uniformité en  $i \in I_{u,r,N}$ .

Pour tout  $i$ , notons  $x_i \in \widetilde{M}$  le point base de  $w_i$ , et  $\xi_i = \gamma_i \xi_1 \in \Lambda_{pb}$  le point du bord vers lequel il pointe. Remarquons que  $x_i \in \widetilde{C}(\Gamma)$ , puisque  $w_i \in \Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R}$ . Rappelons que la mesure  $\mu_{H^+}$  est définie pour  $x \in \widetilde{M}$  quelconque par

$$d\mu_{H^+}(v) = \exp(\delta_\Gamma \beta_{v^+}(x, \pi(v))) d\nu_x(v^+),$$

avec  $\nu_x$  la mesure de Patterson sur  $\partial\widetilde{M}$  vue du point  $x$ . En particulier, si  $x = x_i$ , la quantité  $\exp(\delta_\Gamma \beta_{v^+}(x_i, \pi(v)))$  est bornée par  $\exp \delta_\Gamma d(x_i, \pi(v)) \leq e^{\delta_\Gamma \alpha}$  pour tout  $v \in B^+(w_i, e^{-h_i/2}) \subset B^+(w_i, 1)$ .

À un terme multiplicatif compris entre deux constantes strictement positives près, la quantité à estimer est donc

$$\frac{\nu_{x_i}(B^+(w_i, e^{(-h_i-N)/2}))}{\nu_{x_i}(B^+(w_i, e^{-h_i/2}))},$$

où par abus de notation,  $B^+(w_i, e^{(\dots)/2})$  désigne l'image dans  $\partial\widetilde{M}$  de la boule horosphérique par la projection naturelle de  $H^+(w_i)$  dans  $\partial\widetilde{M}$  qui à  $w = (u^-, w^+, s(w_i))$  associe  $w^+$ .

Soient  $x \in \widetilde{M}$ ,  $\xi \in \partial\widetilde{M}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ ; rappelons que  $V(x, \xi, t) \subset \partial\widetilde{M}$  est l'ensemble des points  $\eta \in \partial\widetilde{M}$  dont le projeté sur le rayon géodésique  $[x\xi]$  est à distance supérieure à  $t$  de  $x$ . Nous avons alors le

**Lemme 6.4.4** *Notons  $P_w$  la projection naturelle de  $H^+(w)$  dans  $\partial\widetilde{M} \setminus \{w^-\}$  et  $x = \pi(w)$  le point base de  $w$  dans  $\widetilde{M}$ . Alors pour tout  $s \geq \alpha$ , on a*

$$V(x, w^+, s + \alpha) \subset P_w(B^+(w, e^{-s})) \subset V(x, w^+, s - \alpha).$$

**Démonstration :** Ecrivons  $w = (w^-, w^+, s(w))$ . Soit  $s \geq 0$  et  $z \in B^+(w, e^{-s})$ . Considérons le triangle idéal  $(w^-, w^+, z^+)$ , et son triangle intérieur  $(p, q, r)$ , dont le diamètre est borné par  $\alpha$ .

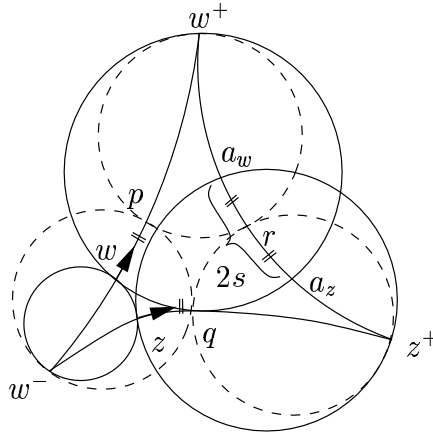


FIG. 6.10 – Lemme 6.4.4

Notons  $a_w = (w^+ z^+) \cap H^-(z)$  et  $a_z = (w^+ z^+) \cap H^-(w)$ . On a  $d_{H^+}(w, z) = e^{-d(a_w, a_z)/2} \leq e^{-s}$ , d'où  $d(a_w, a_z) \geq 2s$ . D'autre part, en observant les appartenances des différents points

aux diverses horosphères, on trouve

$$\begin{aligned} d(a_w, r) &= \beta_{z^+}(a_w, r) = \beta_{z^+}(\pi(z), q) = d(\pi(z), q) \\ &= \beta_{w^-}(q, \pi(z)) = \beta_{w^-}(p, \pi(w)) = d(w, p) \\ &= \beta_{w^+}(\pi(w), p) = \beta_{w^+}(a_z, r) = d(a_z, r), \end{aligned}$$

donc toutes ces distances sont égales à  $d(a_w, a_z)/2 \geq s$ . Le triangle  $(w^-, w^+, z^+)$  étant fin (proposition 6.2.1), le projeté de  $z^+$  sur  $[\pi(w)w^+)$  est à distance inférieure ou égale à  $\alpha$  de  $p$ , et  $d(w, p) \geq s$  d'après ci-dessus. Donc  $z^+ \in V(x, w^+, s - \alpha)$ . Le même type d'arguments montre que si  $z^+ \in V(x, w^+, s + \alpha)$ , alors  $d_{H^+}(w, z) \leq \exp(-s)$ .  $\square$

Nous sommes donc ramenés à estimer la quantité

$$\frac{\nu_{x_i}(V(x_i, \xi_i, \frac{h_i+N}{2}))}{\nu_{x_i}(V(x_i, \xi_i, \frac{h_i}{2}))}.$$

Le point base  $x_i$  de  $w_i$  appartient à  $\partial\mathcal{H}_i \cap \tilde{C}(\Gamma)$ . Il est donc dans le bord de  $\gamma\tilde{C}_0$ , pour un certain  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_i$ , et donc  $\gamma\xi_1 = \xi_i$ . On en déduit  $d(x_i, \gamma o) \leq \text{diam}(\tilde{C}_0) = \Delta$ . En utilisant la  $\Gamma$ -invariance et la conformité de  $\nu = (\nu_x)_{x \in \tilde{M}}$ , ainsi que le lemme 6.2.7c, on trouve que la quantité ci-dessus est proche, à des constantes uniformes près, de

$$\frac{\nu_o(V(o, \xi_1, \frac{h_i+N}{2}))}{\nu_o(V(o, \xi_1, \frac{h_i}{2}))}.$$

Le lemme 6.3.7 montre que sous (\*\*), cette quantité tend vers 0 uniformément en  $i$  quand  $N \rightarrow +\infty$ .

**Troisième étape :**

**Lemme 6.4.5** *Soit  $C$  un compact de  $T^1M$ . Il existe  $r_0(C) > 0$ , tel que pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C$  et tout  $r \geq r_0(C)$ , on a*

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq C.$$

**Démonstration :** Commençons par traiter le cas où  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap \Omega$ , c'est-à-dire où  $u^+ \in \Lambda_\Gamma$ . Comme  $u^- \in \Lambda_{\text{rad}}$ , on peut définir  $s \geq 0$  le plus petit réel supérieur à  $\log 3r$ , tel que  $g^{-s}u \in \Gamma\tilde{C}_0$ . On a alors

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} = \frac{\mu_{H^+}(B^+(g^{-s}u, 3re^{-s}))}{\mu_{H^+}(B^+(g^{-s}u, re^{-s}))}.$$

Or il existe  $\gamma \in \Gamma$ , tel que  $d(\gamma o, g^{-s}u) \leq \Delta$ . Par les lemmes 6.4.4, 6.2.7c, la conformité et l'invariance de  $\nu$  par  $\Gamma$ , la quantité ci-dessus est donc, à des constantes uniformes près, proche de

$$\frac{\nu_o(V(o, \gamma^{-1}u^+, s - \log r - \log 3))}{\nu_o(V(o, \gamma^{-1}u^+, s - \log r))}.$$

Le lemme 6.3.7 assure que cette quantité est bornée uniformément en  $r > 0$  et  $u^+ \in \Lambda_\Gamma$ . On en déduit que

$$\sup_{u \in \Omega} \sup_{r > 0} \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} < +\infty.$$

Traisons maintenant le cas d'un vecteur  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C$  quelconque. Soit  $v \in H^+(u)$  le vecteur de  $\Omega$  le plus proche de  $u$  (pour la distance horosphérique  $d_{H^+}$ ), et notons  $r(u) = d_{H^+}(u, v)$ . Par compacité de  $C$ , la quantité  $r(C) = \sup_{u \in C} r(u)$  est bien définie. Remarquons alors que

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 2r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq \frac{\mu_{H^+}(B^+(v, 2r + r(C)))}{\mu_{H^+}(B^+(v, r - r(C)))}.$$

Pour  $r \geq 4r(C)$ , on a  $2r + r(C) \leq 3(r - r(C))$ , et donc les quotients ci-dessus sont bornés d'après la première partie de la démonstration. Le lemme en découle avec  $r_0(C) = 4r(C)$ .  $\square$

**Quatrième et dernière étape :** Il reste pour démontrer le théorème à traiter le cas d'un compact  $C$  quelconque de  $\Omega$ . Quitte à le décomposer en une union de plus petits compacts, on peut supposer qu'il existe un  $T_0 > 0$ , tel que  $\pi(g^{-T_0}C) \subset \tilde{C}_0$ . Alors, il est facile de voir que le compact  $K_{\varepsilon, C} = g^{T_0}(K_{\varepsilon, C_0})$  et le réel  $r_0(K_{\varepsilon, C}) = r_0(K_{\varepsilon, C_0})e^{T_0}$  conviennent.  $\square$



# Chapitre 7

## Equidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie

Ce chapitre constitue pour l'essentiel un article [Sc4] soumis pour publication.

### Résumé

Dans ce travail, nous montrons des propriétés d'équidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie à courbure négative variable. Si la surface est hyperbolique, nous en déduisons un résultat d'équidistribution des orbites du flot horocyclique en volume infini.

### 7.1 Introduction

Cet article a pour propos essentiel d'étudier l'équidistribution des orbites du flot horocyclique d'une surface hyperbolique, lorsqu'elle est de volume infini.

Rappelons que dans le cas d'une surface compacte  $S$ , le flot horocyclique  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  sur le fibré unitaire tangent  $T^1\tilde{S}$  est uniquement ergodique (Furstenberg [F]) et, en particulier, toutes les orbites du flot horocyclique s'équidistribuent vers l'unique probabilité invariante : la mesure de Liouville. Si  $S$  n'est plus compacte, mais seulement de volume fini, les orbites périodiques donnent lieu à d'autres probabilités invariantes ergodiques [Da1], mais le résultat est essentiellement le même : toute orbite non périodique s'équidistribue vers la mesure de Liouville (Dani-Smillie [Da-S]). Ces résultats d'équidistribution ont été étendus par Ratner à tous les flots unipotents sur les espaces  $G/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie  $G$ , lorsque la mesure invariante limite est finie.

En revanche, l'équidistribution vers une mesure infinie dans le cadre des espaces homogènes  $G/\Gamma$  de volume infini a été peu étudiée; nous nous intéressons ici au cas le plus simple d'une surface hyperbolique  $S$  de volume infini. Si  $S$  est réalisée comme le quotient  $\mathbb{H}/\Gamma$ , où  $\mathbb{H}$  est le demi-plan hyperbolique et  $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$  est un groupe Fuchsien, son fibré unitaire tangent  $T^1S$  s'identifie à  $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ , et la mesure de Haar sur  $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$  coïncide avec la mesure de Liouville sur  $T^1S$ . Celle-ci charge alors des points errants du flot horocyclique, et est en particulier non ergodique. Néanmoins, si  $S$  est supposée géométriquement finie (i.e. si  $\Gamma$  est de type fini), il existe une autre mesure invariante  $m$  à support dans l'ensemble non errant  $\mathcal{E}$  du flot horocyclique. Cette mesure est de masse totale infinie et ergodique pour le flot horocyclique [Bu], [Ro1]. C'est l'unique mesure invariante ergodique distincte des probabilités invariantes induites par les orbites périodiques du flot horocyclique, quand il y en a.

Lorsque la surface est *convexe-cocompacte*, i.e. géométriquement finie sans cusps, une propriété d'équidistribution en moyenne de Césaro des orbites du flot horocyclique a été démontrée par Burger dans [Bu], à l'aide de méthodes analytiques précises, mais valides seulement lorsque l'exposant critique de  $\Gamma$  est strictement supérieur à  $1/2$ . Nous nous intéressons ici au cas général d'une surface avec (ou sans) cusps, sans restriction sur l'exposant critique, dans lequel nous prouvons l'équidistribution par une méthode valide en courbure variable. Comme  $m$  est infinie, on ne peut espérer un résultat classique d'équidistribution des moyennes, et nous allons énoncer un théorème de type quotient. (L'énoncé est à comparer avec le théorème quotient de Hopf [Ho2], analogue en mesure infinie du théorème de Birkhoff.)

**Théorème 7.5.4** *Soit  $S$  une surface hyperbolique géométriquement finie, et  $u \in \mathcal{E} \subset T^1S$  un vecteur non errant et non périodique pour le flot horocyclique  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Alors pour toutes fonctions continues à support compact  $\varphi$  et  $\psi$  de  $T^1S$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $\int_{T^1S} \varphi dm \neq 0$ , on a*

$$\frac{\int_{-t}^t \psi \circ h^s(u) ds}{\int_{-t}^t \varphi \circ h^s(u) ds} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi dm}{\int_{T^1S} \varphi dm} \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

En fait, ce théorème est une reformulation d'un théorème plus général en courbure variable (Théorème 7.4.1), qui lui-même se déduit d'un théorème d'équidistribution d'autres moyennes, que nous allons décrire ci-dessous.

Dans ce qui suit,  $S$  désigne une surface géométriquement finie à courbure négative pincée. Il n'y a plus alors de paramétrisation naturelle du flot horocyclique, mais simplement le feuilletage de  $T^1S$  en horocycles (bien qu'il soit encore possible de définir un flot horocyclique dans ce cadre, [Mar]). Sur chaque feuille notée  $H^+$  de ce feuilletage, on dispose d'une part d'une distance notée  $d_{H^+}$  jouissant de propriétés très proches de celles de la distance riemannienne induite en courbure constante, et d'autre part de la mesure conditionnelle  $\mu_{H^+}^{ps}$  de la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  sur  $T^1S$  (mesure dont les propriétés sont très liées à celles du flot géodésique et du feuilletage horosphérique de  $S$ ). Nous étudions dans ce cadre le comportement des moyennes

$$M_{r,u}(\psi) := \frac{1}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u,r))} \int_{B^+(u,r)} \psi(v) d\mu_{H^+}^{ps}(v),$$

où  $u$  est un vecteur fixé de la feuille  $H^+$  et  $B^+(u,r)$  la boule centrée en  $u$  de rayon  $r$  pour la distance  $d_{H^+}$ .

A priori, elles peuvent sembler sans rapport avec les moyennes sur les orbites du flot horocyclique du théorème 7.5.4 ci-dessus. Mais d'une part en courbure constante, pour tout vecteur  $u$ , la boule  $B^+(u,r)$  coïncide avec l'orbite  $\{h^s(u), |s| < r\}$ . De plus, si la surface est de volume fini, la mesure  $\mu_{H^+}^{ps}$  n'est autre que la mesure de Lebesgue sur la feuille  $H^+$  et  $M_{r,u}(\psi)$  coïncide dans ce cas avec la moyenne  $\frac{1}{2r} \int_{-r}^r \psi \circ h^s(u) ds$  de  $\psi$  sur l'orbite du flot.

D'autre part, la notion clé utilisée ici est non pas celle de mesure invariante par le flot horocyclique, mais plutôt celle de *mesure transverse invariante par holonomie*. La classification des mesures invariantes a son analogue dans ce cadre : en dehors des mesures transverses invariantes induites par les feuilles compactes, il existe une unique mesure transverse invariante, notée  $\mu = \{\mu_T\}$ , à support dans l'ensemble non errant du feuilletage

horocyclique [Ro1]. Ainsi, la mesure  $m$  du théorème 7.5.4 est le « produit » de cette mesure  $\mu$  par la mesure de Lebesgue  $dt$  le long des orbites du flot horocyclique, alors que la mesure de Patterson-Sullivan est le produit de cette même mesure  $\mu$  par la famille de mesures conditionnelles  $\{\mu_{H^+}^{ps}\}$ .

Afin d'étudier les mesures  $M_{r,u}$ , nous aurons besoin de la finitude de la mesure de Patterson-Sullivan (que nous supposons donc normalisée en une probabilité sur  $T^1S$ ), ainsi que d'une hypothèse notée (\*\*) (énoncée au chapitre 6 et rappelée plus loin) de divergence des bouts cuspidaux de  $S$ , qui est vérifiée en courbure constante. Notre résultat est alors :

**Théorème 7.3.1** *Soit  $S$  une surface géométriquement finie à courbure négative pincée dont les bouts cuspidaux vérifient la condition (\*\*) et dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie. Soit  $u$  un vecteur de  $T^1S$  dont la feuille  $H^+(u)$  est non errante et non compacte. Alors pour toute fonction continue à support compact  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ , on a*

$$\frac{1}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \psi(v) d\mu_{H^+}^{ps}(v) \longrightarrow \int_{T^1S} \psi dm^{ps} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$

L'organisation du texte est la suivante : le paragraphe 7.2 est consacré aux préliminaires sur les surfaces géométriquement finies. Le théorème 7.3.1 est prouvé au paragraphe 7.3. Nous en déduisons (section 7.4) un résultat d'équidistribution de moyennes généralisées en courbure variable (théorème 7.4.1), et pour finir nous expliquons au paragraphe 7.5 pourquoi le théorème 7.5.4 en est une simple reformulation en courbure constante.

Je remercie M. Burger pour avoir posé une question motivant les résultats de cet article, et commenté une version préliminaire de ce travail. Il a suggéré l'approche consistant à étudier d'abord l'équidistribution de moyennes pour d'autres mesures que la mesure de Lebesgue, approche qu'il avait déjà considérée avec A. Fisher pour traiter cette question (communication personnelle).

## 7.2 Préliminaires

### 7.2.1 Surfaces géométriquement finies en courbure négative variable

Soit  $S$  une surface riemannienne à courbure négative pincée, i.e. dont la courbure sectionnelle est comprise entre deux constantes  $-b^2$  et  $-a^2$ , avec  $0 < a \leq b < +\infty$ . Nous noterons  $\tilde{S}$  son revêtement universel,  $\Gamma = \pi_1(S)$  son groupe fondamental,  $T^1S$  son fibré unitaire tangent, et  $\pi : T^1S \rightarrow S$  la projection canonique. Nous noterons également  $\pi$  la projection canonique  $T^1\tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ , et  $d$  désignera indifféremment la distance riemannienne sur  $S$  et  $\tilde{S}$ .

Le bord à l'infini  $\partial\tilde{S}$  de  $\tilde{S}$  permet de compactifier  $\tilde{S}$  en  $\tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$ . Le groupe  $\Gamma$  agit sur  $\tilde{S}$  par isométries, et sur  $\partial\tilde{S}$  par homéomorphismes. Si  $o \in \tilde{S}$ , l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma := \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o \subset \partial\tilde{S}$  de  $\Gamma$  est aussi le plus petit fermé  $\Gamma$ -invariant de  $\partial\tilde{S}$ .

Le cocycle de Busemann est la fonction continue définie pour tout  $\xi \in \partial\tilde{S}$  et  $(x, y) \in \tilde{S}^2$  par  $\beta_\xi(x, y) := \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z) = "d(x, \xi) - d(y, \xi)"$ . Un horocycle  $H \subset \tilde{S}$  centré en  $\xi$

est une ligne de niveau de l'application  $y \mapsto \beta_\xi(y, o)$ . Une *horoboule*  $\mathcal{H} \subset \tilde{S}$  centrée en  $\xi$  est un sous-ensemble  $\mathcal{H} = \{y \in \tilde{S}, \beta_\xi(y, o) \leq C\}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ .

Si  $u \in T^1\tilde{S}$ , notons  $u^+$  et  $u^-$  les extrémités dans  $\partial\tilde{S}$  de la géodésique définie par  $u$ , et  $\partial^2\tilde{S} := \partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S} \setminus \{(\xi, \xi), \xi \in \partial\tilde{S}\}$ . Le fibré unitaire tangent  $T^1\tilde{S}$  est homéomorphe à  $\partial^2\tilde{S} \times \mathbb{R}$  via l'application  $u \mapsto (u^-, u^+, \beta_{v^-}(v, o))$ . L'ensemble *non errant*  $\Omega \subset T^1S$  du flot géodésique  $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de  $S$  (agissant sur  $T^1S$ ) s'identifie (Eberlein, [Eb1]) à l'ensemble des vecteurs  $v \in T^1S$  dont un relevé  $\tilde{v} \in T^1\tilde{S}$  définit une géodésique dont les deux extrémités sont dans  $\Lambda_\Gamma$ .

Un point  $\xi$  de l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  est dit *radial* s'il existe un point  $o \in \tilde{S}$  et une infinité de points de l'orbite  $\Gamma o$  à distance bornée du rayon  $[o\xi]$ . Si  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est l'unique point fixe d'une isométrie parabolique de  $\Gamma$ , il est dit *parabolique*. Le stabilisateur dans  $\Gamma$  d'un tel point sera appelé un *sous-groupe parabolique*. Nous noterons  $\Lambda_{\text{rad}}$  (resp.  $\Lambda_P$ ) l'ensemble des points limite radiaux (resp. paraboliques) de  $\Lambda_\Gamma$ .

Le groupe  $\Gamma$  est dit *cocompact* si  $S$  est compacte, *convexe-cocompact* si  $\Omega$  est compact et  $S$  non compacte, et *géométriquement fini* si  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \cup \Lambda_P$ . Si  $\Gamma$  est géométriquement fini, la projection  $\pi(\Omega)$  sur  $S$  de l'ensemble non errant  $\Omega \subset T^1S$  du flot géodésique se décompose en l'union d'une partie compacte  $C_0$ , et d'un nombre fini de *cusps*  $C_i$  (voir Bowditch [Bo]). Si  $S$  est hyperbolique,  $\Gamma$  est géométriquement fini si et seulement s'il est de type fini.

L'*exposant critique* d'un sous-groupe  $G$  de  $\Gamma$  est défini comme

$$\delta_G = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \# \{g \in G, d(o, go) \in [T, T+1]\}.$$

C'est aussi l'exposant critique de la série de Poincaré de  $G$

$$\sum_{g \in G} e^{-sd(o, go)}.$$

En courbure constante, le fait que  $\Gamma$  soit géométriquement fini implique qu'il est *divergent*, i.e. que la série ci-dessus (pour  $G = \Gamma$ ) est divergente en  $s = \delta_\Gamma$  (Sullivan [S2]). De plus, la mesure  $m^{ps}$  est alors finie. Ceci est faux en général en courbure variable, où la finitude de la mesure de Patterson-Sullivan équivaut (voir [D-O-P]) au fait que d'une part  $\Gamma$  soit divergent et d'autre part la série  $\sum_{p \in \Pi} d(o, po) e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}$  converge. Nous imposerons dans

toute la suite que  $m^{ps}$  est finie, ainsi que l'hypothèse suivante, notée (\*\*).

Pour tout sous-groupe parabolique  $\Pi$  de  $\Gamma$ , on a

1. La quantité

$$\frac{\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t+N}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}}{\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}} \tag{**}_1$$

converge vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ , uniformément en  $t \geq 0$ .

2. Il existe une constante  $C > 0$ , telle que

$$\sup_{t > 0} \frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t + C\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}} < +\infty. \tag{**}_2$$

Cette hypothèse est vérifiée lorsque les cusps de  $S$  sont isométriques aux cusps d'une surface localement symétrique à courbure négative (voir proposition 6.2.10), mais également dans d'autres cas (voir l'exemple du paragraphe 6.2.6, pour lequel la propriété de trou critique  $\delta_{\Pi} < \delta_{\Gamma}$  assure que la mesure de Patterson-Sullivan est finie; voir aussi la remarque 6.2.12 pour un exemple sans trou critique).

## 7.2.2 Feuilletage horocyclique

Les horocycles de  $\tilde{S}$  se relèvent à  $T^1\tilde{S}$  de la manière suivante. Si  $H$  est un horocycle centré en  $\xi \in \partial\tilde{S}$ , définissons  $H^+ \subset T^1\tilde{S}$  comme l'ensemble des vecteurs  $v \in T^1\tilde{S}$  dont le point base est sur  $H$  et tels que  $v^- = \xi$ . Si  $u \in T^1\tilde{S}$ , nous noterons  $H(u)$  l'horocycle de  $\tilde{S}$  centré en  $u^-$  et passant par le point base de  $u$ , et  $H^+(u)$  son relevé à  $T^1\tilde{S}$  :

$$H^+(u) = \{v \in T^1\tilde{S}, v^- = u^- \text{ et } \beta_{v^-}(\pi(u), \pi(v)) = 0\}.$$

Les horocycles de  $T^1\tilde{S}$  coïncident avec les variétés fortement instables du flot géodésique, nous les appellerons donc *horocycles fortement instables*. Ils forment un feuilletage (trivial) de  $T^1\tilde{S}$  de dimension 1 et de codimension 2. Ils passent au quotient sur  $T^1S$  en les variétés fortement instables du flot géodésique de  $T^1S$ , toujours notées  $H^+(u)$  pour simplifier. Sur  $T^1S$ , ce feuilletage n'est plus trivial, nous l'appellerons *feuilletage fortement instable*, noté  $\mathcal{W}^{su}$ .

Rappelons quelques notions sur les feuilletages. Si  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  est une carte de ce feuilletage,  $B$  sera appelée une *boîte*. Une *plaque* de  $B$  est un ensemble  $P = \varphi^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R})$ , et une *transversale*  $T$  de  $B$  est un ensemble de la forme  $T = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{t\})$ . Si  $P$  est une plaque et  $T$  une transversale de  $B$ , nous noterons  $B = T \times P$ . Si  $u \in B$ , nous noterons  $P_u \subset H^+(u)$  sa plaque dans  $B$ .

Vue la structure produit de  $T^1\tilde{S} \simeq \partial^2\tilde{S} \times \mathbb{R}$ , une famille naturelle de transversales au feuilletage fortement instable de  $T^1\tilde{S}$  est l'ensemble des variétés faiblement stables  $\tilde{W}^s(u)$  du flot géodésique  $\tilde{g}$ . Elles sont définies par

$$\tilde{W}^s(u) := \{v \in T^1\tilde{S}, v^+ = u^+\}.$$

Elles passent au quotient sur  $T^1S$  en les variétés faiblement stables  $W^s(u)$  du flot géodésique  $g$ , et on pourra prendre pour transversales des petits ouverts de ces variétés stables.

Une *application d'holonomie*  $\zeta : T \rightarrow T'$  entre deux transversales  $T$  et  $T'$  d'une même boîte  $B$  est l'homéomorphisme qui suit les plaques de  $B$  de  $T$  dans  $T'$ . Plus généralement, on appelle application d'holonomie une composée (au sens d'un pseudogroupe, [C-C]) de telles applications.

Une *mesure transverse* au feuilletage  $\mathcal{W}^{su}$  est une collection de mesures de Radon  $\nu = \{\nu_T\}$  sur les transversales  $T$  au feuilletage. Elle est dite *invariante par holonomie* si pour toute application d'holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$ ,

$$\zeta_*\nu_T = \nu_{T'}.$$

Notons que toute feuille fermée  $H^+$  du feuilletage induit une mesure transverse invariante canonique  $\nu^{H^+}$  définie sur toute transversale  $T$  de la manière suivante :

$$\nu_T^{H^+} := \sum_{t \in T \cap H^+} \delta_t.$$

Le *support* d'une mesure transverse  $\nu = \{\nu_T\}$  est l'union des supports des mesures  $\nu_T$ ,  $T$  décrivant toutes les transversales à  $\mathcal{W}^{su}$ . Si  $\nu$  est invariante par holonomie, son support est un ensemble saturé du feuilletage (i.e. une union de feuilles).

On appelle *système de Haar* une collection de mesures  $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$  sur les feuilles  $H^+$  du feuilletage, qui vérifient la condition de continuité suivante. Pour toute boîte  $B = T \times P$  relativement compacte et toute fonction  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  continue à support compact inclus dans  $B$ , l'application ci-dessous est continue :

$$t \in T \mapsto \int_{P_t} \psi d\alpha_{H^+} \quad (7.1)$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la feuille  $H^+$  considérée, nous noterons  $\alpha$  au lieu de  $\alpha_{H^+}$ .

La mesure riemannienne induite sur le feuilletage, notée  $\lambda = \{\lambda_{H^+}\}$ , est un exemple de système de Haar.

La donnée d'une mesure transverse  $\nu$  invariante par holonomie et d'un système de Haar  $\alpha$  permet de définir une mesure sur  $T^1S$ , notée  $\nu \circ \alpha$ , en posant pour toute boîte  $B = T \times P$

$$\nu \circ \alpha(B) := \int_T \alpha(P_t) d\nu_T(t). \quad (7.2)$$

L'invariance par holonomie de  $\nu$  implique que l'expression ci-dessus ne dépend pas du choix de la transversale  $T$ .

La *mesure de Patterson-Sullivan* sur  $T^1S$  est un exemple de tel produit. Rappelons brièvement sa construction. On définit une mesure  $\Gamma$ -invariante  $\tilde{m}^{ps}$  sur  $T^1\tilde{S} = \partial^2\tilde{S} \times \mathbb{R}$  par

$$d\tilde{m}^{ps}(v) = \exp \delta_\Gamma \beta_{v^+}(o, \pi(v)) \exp \delta_\Gamma \beta_{v^-}(o, \pi(v)) d\nu_o(v^+) d\nu_o(v^-) dt,$$

où  $\nu_o$  est une mesure sur  $\partial\tilde{S}$  de support inclus dans l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$ , dite *mesure de Patterson*. Lorsque  $\Gamma$  est divergent, il existe une unique telle mesure sur  $\partial\tilde{S}$ , de sorte que cette construction donne une unique mesure  $m^{ps}$  sur  $T^1S$ , appelée la mesure de Patterson-Sullivan.

La formule ci-dessus généralise l'expression donnée par Sullivan [S1] en courbure constante égale à  $-1$  :

$$d\tilde{m}^{ps}(v) = \frac{d\nu_o(v^+) d\nu_o(v^-) dt}{|v^- - v^+|^{2\delta_\Gamma}}.$$

On définit un système de Haar en considérant les mesures conditionnelles de  $\tilde{m}^{ps}$  sur les horocycles fortement instables :

$$d\tilde{\mu}_{H^+}^{ps}(v) = \exp \delta_\Gamma \beta_{v^+}(o, \pi(v)) d\nu_o(v^+)$$

Cette famille est  $\Gamma$ -invariante au sens où  $\gamma_* \tilde{\mu}_{H^+}^{ps} = \tilde{\mu}_{\gamma H^+}^{ps}$ , et passe donc au quotient en une famille de mesures  $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$  sur les feuilles  $H^+$  de  $\mathcal{W}^{su}$ . La propriété de continuité (7.1) est démontrée dans [Ro1] (Lemme 1.16), ce qui assure que c'est bien un système de Haar. Cette famille de mesures vérifie la propriété immédiate et essentielle d'être dilatée d'un facteur exponentiel constant à  $t$  fixé quand on la pousse par  $g^t$  :

$$\mu_{g^t H^+}^{ps} = e^{\delta_\Gamma t} g^t_* \mu_{H^+}^{ps}. \quad (7.3)$$

D'autre part, le support de  $\nu_o$  étant égal à  $\Lambda_\Gamma$ , chacune des mesures  $\mu_{H^+}^{ps}$  ci-dessus a pour support l'ensemble des vecteurs  $v$  de  $H^+$ , tels que  $v^+ \in \Lambda_\Gamma$ . Si  $H^+$  est centrée dans  $\Lambda_\Gamma$ , ce support n'est autre que  $H^+ \cap \Omega$ .

De la même manière, si  $T = W^s(v)$  est une transversale au feuilletage, la formule

$$d\bar{\mu}_T(w) = \exp(-\delta_\Gamma t) d\nu_o(w^-) dt$$

définit une mesure transverse invariante par holonomie et par  $\Gamma$ , qui passe donc au quotient en une mesure transverse invariante par holonomie pour le feuilletage  $\mathcal{W}^{su}$ , notée  $\mu = \{\mu_T\}$ .

Par construction de toutes ces mesures, il est clair que  $m^{ps}$  est le produit de cette mesure transverse  $\mu$  et du système de Haar  $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$  au sens de (7.2) ci-dessus.

La classification topologique des feuilles de  $\mathcal{W}^{su}$  est bien connue. Pour la décrire, introduisons l'ensemble  $\mathcal{E} \subset T^1S$  des vecteurs  $v \in T^1S$  dont un relevé  $\tilde{v}$  à  $T^1\tilde{S}$  vérifie  $\tilde{v}^- \in \Lambda_\Gamma$ . L'ensemble  $\mathcal{E}$  se décompose en une union disjointe

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{rad}} \sqcup \mathcal{E}_p,$$

où  $\mathcal{E}_{\text{rad}}$  (resp.  $\mathcal{E}_p$ ) est l'ensemble des vecteurs tels que  $\tilde{v}^- \in \Lambda_{\text{rad}}$  (resp.  $\tilde{v}^- \in \Lambda_p$ ). Remarquons que  $\mathcal{E}_p$  est l'ensemble des vecteurs *négalement divergents* par le flot géodésique, i.e. dont l'orbite  $(g^{-t}u)_{t \geq 0}$  diverge dans un cusp de  $S$ , et  $\mathcal{E}_{\text{rad}}$  est l'ensemble *négalement récurrent*, i.e. l'ensemble des vecteurs dont l'orbite  $(g^{-t}u)_{t \geq 0}$  revient infiniment souvent dans un compact de  $S$ .

**Théorème 7.2.1 (Dal'bo [D], Hedlund [H])** *Soit  $S$  une surface géométriquement finie à courbure négative pincée. Alors :*

1. *Les horocycles inclus dans  $\mathcal{E}_{\text{rad}}$  sont denses dans  $\mathcal{E}$ . En particulier, leur projection sur  $S$  revient infiniment souvent dans la partie compacte  $C_0$  de la variété.*
2. *Les horocycles de  $\mathcal{E}_p$  sont compacts.*
3. *Les horocycles de  $T^1S \setminus \mathcal{E}$  sont fermés et plongés dans  $T^1S$ .*

Par analogie avec le cas des flots, l'ensemble  $\mathcal{E}$  sera appelé *ensemble non errant du feuilletage horocyclique*.

Nos résultats reposent de façon cruciale sur le théorème suivant qui classe les mesures transverses invariantes. Ce théorème a été prouvé par Dani [Da1] sur les surfaces hyperboliques de volume fini, par Burger [Bu] sur les surfaces hyperboliques convexes-cocompactes et par Roblin [Ro1] dans le cas général en courbure variable.

**Théorème 7.2.2 (Roblin, [Ro1])** *Si  $S$  est une surface géométriquement finie à courbure négative pincée dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie, alors les mesures transverses invariantes par holonomie et ergodiques sont de l'un des trois types suivants :*

1. *Une unique mesure  $\mu = \{\mu_T\}$  de support  $\mathcal{E}$  telle que  $\mu_T(T \cap \mathcal{E}_p) = 0$  pour toute transversale  $T$ .*
2. *Les mesures induites canoniquement par un horocycle compact de  $\mathcal{E}_p$ .*
3. *Les mesures induites par les horocycles (fermés) inclus dans  $T^1S \setminus \mathcal{E}$ .*

En particulier, on en déduit que sans hypothèse d'ergodicité, il existe une unique mesure transverse invariante  $\mu = \{\mu_T\}$  de support  $\mathcal{E}$  telle que  $\mu_T(T \cap \mathcal{E}_p) = 0$  pour toute transversale  $T$ .

**Remarque 7.2.3** En fait, le théorème 7.2.2 est démontré dans [Ro1] (en toutes dimensions) sous l'hypothèse de non-arithméticité du spectre des longueurs, et c'est Dal'bo [D] qui a montré que cette hypothèse est satisfaite sur les surfaces. La même remarque s'applique au théorème 7.3.2 énoncé plus loin.

Pour finir, rappelons que sur chaque feuille  $H^+$  du feuilletage de  $T^1\tilde{S}$ , on dispose d'une distance  $d_{H^+}$ , distance dite *de Hamenstädt* (voir [He-P]) et définie comme suit. Pour tous  $(u, v) \in (H^+)^2$ , si  $x \in \tilde{S}$  est un point quelconque de la géodésique  $(u^+v^+)$ ,

$$d_{H^+}(u, v) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta_{u^+}(x, u) + \frac{1}{2}\beta_{v^+}(x, v)\right)$$

Elles sont bien définies car l'expression ci-dessus ne dépend pas de  $x \in (u^+v^+)$ . Elles sont invariantes par isométries : pour tout  $\gamma$ , on a  $d_{\gamma H^+}(\gamma u, \gamma v) = d_{H^+}(u, v)$ . Poussées par le flot géodésique, elles vérifient pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$d_{\tilde{g}^t H^+}(\tilde{g}^t u, \tilde{g}^t v) = e^t d_{H^+}(u, v). \quad (7.4)$$

Nous noterons  $B^+(u, r)$  une boule pour la distance  $d_{H^+}$ . La propriété d'invariance par  $\Gamma$  de ces distances fait que les boules passent au quotient en des sous-ensembles des feuilles qui seront encore notés  $B^+(u, r)$ .

### 7.3 Equidistribution des moyennes vers relativement à la mesure de Patterson

Pour tout  $u \in T^1S$  et  $r > 0$ , notons  $M_{r,u}$  la probabilité sur  $H^+(u)$  définie pour toute fonction continue à support compact  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$M_{r,u}(\psi) = \frac{1}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \psi(v) d\mu_{H^+}^{ps}(v).$$

Nous omettrons l'indice  $H^+$  lorsqu'aucune confusion n'est possible. Si la feuille  $H^+(u)$  est incluse dans  $\mathcal{E}$ , rappelons que le support de  $\mu_{H^+}^{ps}$  est égal à  $H^+ \cap \Omega$ . Autrement dit, si  $u$  est un vecteur de l'ensemble non errant  $\mathcal{E}$  du feuilletage horocyclique, alors  $M_{r,u}$  est une probabilité à support dans l'ensemble non errant  $\Omega$  du flot géodésique pour tout  $r > 0$ .

La propriété suivante découle directement des relations (7.3) et (7.4) : pour tout  $u \in T^1S$ , tout  $t \in \mathbb{R}$  et toute fonction  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$M_{r,u}(\psi) = M_{re^{-t}, g^{-t}u}(\psi \circ g^t) \quad (7.5)$$

Nous avons le

**Théorème 7.3.1** *Soit  $S$  une surface géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps vérifient (\*\*) et dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie. Alors pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \subset \mathcal{E}$  et toute fonction continue à support compact  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ , on a*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} M_{r,u}(\psi) = \int_{T^1S} \psi dm^{ps}$$

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous allons présenter deux preuves distinctes de ce résultat, l'une dans le cas d'une variété convexe-cocompacte, i.e. géométriquement finie sans cusps, où on obtiendra même une convergence uniforme en  $u$  à  $\psi$  fixée, et la seconde dans le cas général.



### 7.3.1 Preuve dans le cas convexe-cocompact

Si  $M$  est convexe-cocompacte, l'ensemble  $\Omega$  est compact et les mesures  $(M_{r,u})_{r>0}$  sont à support compact dès que  $u \in \mathcal{E}$ .

La preuve repose sur deux faits indépendants, et reprend certains des arguments utilisés par Ellis et Perrizo dans [E-P]. Le premier fait est l'équidistribution des moyennes poussées par le flot : c'est un résultat général de Babillot (valable en toute dimension), provenant de la propriété de mélange de  $m^{ps}$ .

**Théorème 7.3.2 (Babillot, [Ba2])** *Soit  $S$  une surface géométriquement finie à courbure négative pincée dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie. Pour toute fonction  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  continue à support compact, pour tout  $u \in \Omega$  et  $r > 0$  fixé, la suite de moyennes  $(M_{r,u}(\psi \circ g^t))_{t>0}$  converge vers  $\int_{T^1S} \psi dm^{ps}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

Le deuxième fait concerne l'équicontinuité de la famille de fonctions  $\{u \mapsto M_{r,u}(\psi \circ g^t), t \geq 0\}$ .

**Lemme 7.3.3** *Soit  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue à support compact. La famille de fonctions  $u \mapsto M_{r,u}(\psi \circ g^t)$  est équicontinue en  $t \geq 0$ .*

Ce lemme est démontré dans [Sc], lemme 4.3, en dimension quelconque lorsque pour tout  $u \in \Omega$ , on a

$$\mu_{H^+}^{ps}(\partial B^+(u, 1)) = 0.$$

Cette condition sur le bord des boules horosphériques est satisfaite ici. En effet, elles sont de dimension 1, et donc leur bord comporte deux points. Comme par ailleurs la mesure de Patterson  $\nu_o$  est sans atomes (voir [D-O-P]), la mesure  $\mu_{H^+}^{ps}$  aussi, d'où le résultat.

Comme  $\Omega$  est compact, le lemme ci-dessus implique que la famille d'applications  $\{u \mapsto M_{r,u}(\psi \circ g^t), t \geq 0\}$  est en fait uniformément équicontinue sur  $\Omega$ . On en déduit que les moyennes  $M_{r,u}(\psi \circ g^t)$  convergent uniformément en  $u \in \Omega$  vers  $\int_{T^1S} \psi dm^{ps}$ .

Cette convergence uniforme et la relation fondamentale (7.5) :  $M_{1,u}(\psi \circ g^t) = M_{r,g^t u}(\psi)$  pour  $r = e^t$  donnent la convergence uniforme en  $v \in \Omega$  de  $M_{r,v}(\psi)$  vers  $\int_{T^1S} \psi dm^{ps}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .

Ceci conclut la preuve du théorème 7.3.1.

### 7.3.2 Cas général

Dans ce paragraphe, nous traitons le cas où  $S$  a des cusps. Il n'y a plus alors unicité d'une mesure transverse invariante par holonomie (voir le théorème 7.2.2). Nous donnons donc une preuve différente de la précédente, dont le principe est de montrer que toute valeur d'adhérence des probabilités  $(M_{r,u})_{r>0}$ , pour  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ , est égale à  $m^{ps}$ .

Le problème essentiel qui apparaît est la non-compactité de l'ensemble non-errant  $\Omega$  du flot géodésique. L'étape cruciale de la preuve est alors le théorème ci-dessous (qui nécessite l'hypothèse (\*\*), mais pas la finitude de la mesure de Patterson-Sullivan).

**Théorème 6.4.2 ([Sc3])** *Soit  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  une variété à courbure négative pincée géométriquement finie dont les cusps vérifient (\*\*), avec  $\Gamma$  un groupe divergent. Soit  $\varepsilon > 0$  fixé, et  $C \subset T^1M$  un compact. Il existe un compact  $K_{\varepsilon,C}$  de l'ensemble non errant  $\Omega$  du flot géodésique et un réel  $r_0(C) > 0$ , tels que pour tout vecteur  $u$  de  $C \cap \mathcal{E}_{\text{rad}}$  et tout  $r \geq r_0(C)$ , on a*

$$M_{r,u}(K_{\varepsilon,C}) \geq 1 - \varepsilon$$

Ce résultat assure que pour tout vecteur  $u$  fixé de  $\mathcal{E}_{\text{rad}}$ , les valeurs d'adhérence lorsque  $r \rightarrow +\infty$  de  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  pour la topologie faible sont des probabilités à support dans  $\Omega$ . Autrement dit, il n'y a pas de perte de masse due à la présence de cusps.

Le reste de la preuve réside dans les deux lemmes indépendants ci-dessous.

**Lemme 7.3.4** *Si  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ , toute valeur d'adhérence  $m$  de  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  quand  $r \rightarrow +\infty$  se décompose sous la forme  $m = \nu \circ \mu^{ps}$ , où  $\nu$  est une mesure transverse invariante par holonomie, et  $\mu^{ps}$  est le système de Haar associé à la mesure de Patterson-Sullivan.*

Ce lemme est le seul qui utilise le fait que  $S$  est une surface, et donc que les feuilles du feuilletage horocyclique sont de dimension 1.

**Lemme 7.3.5** *Si  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ , toute valeur d'adhérence  $m$  de  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  quand  $r \rightarrow +\infty$  vérifie  $m(\mathcal{E}_p) = 0$ .*

Des deux lemmes ci-dessus, on déduit que toute valeur d'adhérence des moyennes s'écrit  $\nu \circ \mu^{ps}$ , où  $\nu$  est une mesure transverse invariante à support dans  $\mathcal{E}$  telle que  $\nu_T(\mathcal{E}_p \cap T) = 0$  pour toute transversale  $T$ .

Le théorème 7.2.2 de classification des mesures transverses invariantes par holonomie (qui nécessite la finitude de la mesure de Patterson-Sullivan) et le lemme 7.3.5 impliquent alors  $\nu = \mu$  (à une constante multiplicative près). Toute valeur d'adhérence de  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$  est alors une probabilité de la forme  $\text{cste } \mu \circ \mu^{ps} = \text{cste } m^{ps}$ , et le fait que  $m^{ps}$  soit normalisée donne  $\text{cste} = 1$ . En d'autres termes, la famille  $(M_{r,u})_{r > 0}$  converge étroitement vers la mesure de Patterson-Sullivan. Pour montrer le théorème 7.3.1, il suffit maintenant de démontrer les lemmes 7.3.4 et 7.3.5.

**Démonstration du lemme 7.3.4:** Définissons pour tout  $r > 0$  une mesure transverse  $\nu^r = \{\nu_T^r\}$  par

$$\nu_T^r := \frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} \sum_{t \in T \cap B^+(u, r)} \delta_t.$$

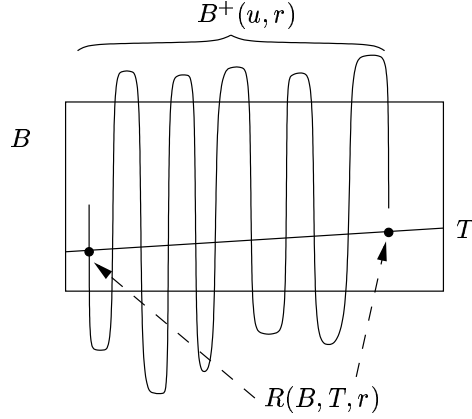
Soit  $m$  une valeur d'adhérence de la suite  $(M_{r,u})_{r \geq 0}$ . Il suffit de montrer qu'en restriction à toute boîte relativement compacte  $B = T \times P$ , la mesure  $m$  est de la forme voulue. Sur une telle boîte, la mesure  $M_{r,u}$  est presque égale à  $\nu_T^r \circ \mu^{ps}$ . Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} M_{r,u}(B) &= \frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} \sum_{t \in T \cap H^+(u)} \int_{P_t} \mathbf{1}_{B^+(u, r)} d\mu^{ps} \\ &= \int_T d\nu_T^r(t) \int_{P_t} \mathbf{1}_B d\mu^{ps} + R(B, T, r). \end{aligned}$$

Comme les feuilles de  $\mathcal{W}^{su}$  sont de dimension 1, l'erreur commise  $R(B, T, r)$  est due d'une part à un terme éventuellement oubliés dans l'intégrale sur  $T$ , correspondant à un  $t \in T \cap H^+(u) \setminus B^+(u, r)$ , tel que  $\mu^{ps}(P_t \cap B^+(u, r)) > 0$ , et d'autre part à un éventuel terme compté en trop dans cette intégrale, correspondant à un  $t \in T \cap B^+(u, r)$  tel que  $\mu^{ps}(P_t \cap B^+(u, r)) < \mu^{ps}(P_t)$ .

Chacun de ces termes est majoré en valeur absolue par  $\frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} \sup_{t \in T} \mu^{ps}(P_t)$ . On a donc :

$$|R(B, T, r)| \leq \frac{1}{\mu^{ps}(B^+(u, r))} 2 \sup_{t \in T} \mu^{ps}(P_t).$$



**Fait 7.3.6** Soit  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ . La quantité  $\mu^{ps}(B^+(u, r))$  tend vers  $+\infty$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .

En effet, comme  $u^- \in \Lambda_{\text{rad}}$ , il existe une suite  $t_k \rightarrow +\infty$  telle que  $g^{-t_k}u$  soit basé dans la partie compacte  $C_0$ . Les relations (7.3) et (7.4) donnent

$$\mu^{ps}(B^+(u, e^{t_k})) = e^{\delta_{\Gamma} t_k} \mu^{ps}(B^+(g^{-t_k}u, 1)) \geq e^{\delta_{\Gamma} t_k} \inf_{w \in \Omega \cap C_0} \mu^{ps}(B^+(w, 1)) \rightarrow +\infty.$$

On déduit du fait ci-dessus que le reste  $R(B, T, r)$  tend vers 0 quand  $r \rightarrow \infty$ . Comme les moyennes sont à support dans  $\Omega$ , on peut se restreindre aux boîtes  $B$  telles que  $P_t \cap \Omega$  est non vide pour tout  $t \in T$ . Mais comme la mesure  $\mu_{H^+}^{ps}$  a pour support  $H^+ \cap \Omega$ , ceci implique qu'on peut supposer

$$0 < \inf_{t \in T} \mu^{ps}(P_t) \leq \sup_{t \in T} \mu^{ps}(P_t) < +\infty.$$

Ces inégalités et le fait que  $\mu^{ps}$  soit un système de Haar montrent que si la suite  $(M_{r_n, u})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une mesure  $m$ , alors la suite de mesures  $(\nu_T^{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi faiblement vers une mesure  $\nu_T$ . Ceci définit une mesure transverse  $\nu = \{\nu_T\}$ ; le fait que  $\mu^{ps}$  soit un système de Haar implique alors que  $m$  est de la forme  $\nu \circ \mu^{ps}$ .

Pour démontrer le lemme, il reste à vérifier que la mesure transverse  $\nu = \{\nu_T\}$  ainsi définie est invariante par holonomie. Pour tout  $r > 0$  et toute application d'holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$  entre deux transversales  $T$  et  $T'$  d'une même boîte  $B$ , on a

$$\#(T \cap B^+(u, r)) \Delta \zeta^{-1}(T' \cap B^+(u, r)) \leq 2,$$

car le feuilletage est de dimension 1 et les feuilles sont connexes. On en déduit

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \nu_T^r(T \cap B^+(u, r) \Delta \zeta^{-1}(T' \cap B^+(u, r))) = 0.$$

Ceci prouve que les valeurs d'adhérence de  $\nu^r = \{\nu_T^r\}$  sont invariantes par holonomie.  $\square$

**Démonstration du lemme 7.3.5:** L'argument est repris de [Be-M, p136]. Considérons une limite vague  $m$  de  $(M_{r_n, u})$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et supposons qu'il existe un compact  $Q \subset \mathcal{E}_p$  tel que  $m(Q) = \beta > 0$ . Le théorème 6.4.2 de non divergence fournit un compact  $K = K_{\beta/4, C_0}$  de  $T^1S$  tel que pour tout vecteur  $v \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$  basé dans la partie compacte  $C_0$ , et tout  $r \geq r_0(K)$ , on ait

$$M_{r, v}(K) \geq 1 - \frac{\beta}{4}. \quad (7.6)$$

Les vecteurs de  $\mathcal{E}_p$  sont divergents pour le flot géodésique. Par compacité de  $Q$ , on sait que pour tout  $t \geq 0$  suffisamment grand,  $g^{-t}Q$  ne rencontre pas le compact  $K$ . Or  $(g^{-t}u)_{t \geq 0}$  revient infiniment souvent dans la partie compacte  $C_0$ ; on peut donc trouver  $T > 0$  tel que l'on ait simultanément

$$g^{-T}Q \cap K = \emptyset \quad \text{et} \quad g^{-T}u \in C_0.$$

Comme  $g^{-T}Q$  et  $K$  sont deux compacts disjoints, on peut trouver une fonction  $\psi : T^1S \rightarrow [0, 1]$  continue à support compact valant 1 sur  $g^{-T}Q$  et 0 sur  $K$ . En particulier,  $\psi \geq \mathbf{1}_{g^{-T}Q} = \mathbf{1}_Q \circ g^T$ , et on a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n, u}(\psi \circ g^{-T}) = m(\psi \circ g^{-T}) \geq m(Q) = \beta > 0.$$

Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on ait

$$M_{r_n e^{-T}, g^{-T}u}(\psi) = M_{r_n, u}(\psi \circ g^{-T}) \geq \frac{\beta}{2}. \quad (7.7)$$

Mais  $\psi \leq 1 - \mathbf{1}_K$ , d'où pour tout  $r > 0$ , d'après (7.6) ci-dessus,

$$M_{r, g^{-T}u}(\psi) \leq 1 - M_{r, g^{-T}u}(K) \leq \frac{\beta}{4},$$

ce qui, lorsque  $r = r_n e^{-T}$  avec  $n \geq N$  est en contradiction avec (7.7).  $\square$

## 7.4 Equidistribution de moyennes quelconques

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à des moyennes du même type que précédemment, mais pour n'importe quel système de Haar  $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$  pour le feuilletage horocyclique de  $T^1S$ . Soient  $u \in T^1S$  un vecteur,  $r$  un réel strictement positif et  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue à support compact. On définit alors

$$M_{r, u}^\alpha(\psi) := \frac{1}{\alpha(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \psi(v) d\alpha(v).$$

Le but de ce paragraphe est d'obtenir un théorème d'équirépartition de ces moyennes analogue au théorème 7.3.1, la mesure limite étant cette fois la mesure  $\mu \circ \alpha$  au lieu de la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps} = \mu \circ \mu^{ps}$ . (La mesure  $\mu$  désigne toujours l'unique mesure transverse invariante à support dans  $\mathcal{E}$  telle que  $\mu_T(\mathcal{E}_p \cap T) = 0$  pour toute transversale  $T$ .)

Nous allons déduire du théorème 7.3.1 le résultat suivant :

**Théorème 7.4.1** *Soit  $S$  une surface géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps vérifient (\*\*) et dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie. Soit  $\alpha = \{\alpha_{H^+}\}$  un système de Haar pour le feuilletage  $\mathcal{W}^{su}$ , tel que pour toute feuille  $H^+$ , la mesure  $\alpha_{H^+}$  soit de support  $H^+$ . Pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \subset \mathcal{E}$  et toutes fonctions continues à support compact  $\varphi$  et  $\psi$  de  $T^1S$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $\int_{T^1S} \varphi d(\mu \circ \alpha) > 0$ , on a*

$$\frac{\int_{B^+(u, r)} \psi d\alpha}{\int_{B^+(u, r)} \varphi d\alpha} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \alpha)}{\int_{T^1S} \varphi d(\mu \circ \alpha)} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$

**Démonstration :** Il suffit de montrer que pour tout compact  $K \subset T^1S$  fixé (suffisamment gros pour que  $\mu \circ \alpha(K) \neq 0$ ), il existe une constante  $c(K) > 0$  telle que pour toute fonction  $\psi : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$  continue à support dans  $K$ , on ait

$$M_{r,u}^{\alpha,K}(\psi) := \frac{\int_{B^+(u,r)} \psi d\alpha}{\int_{B^+(u,r)} \mathbf{1}_K d\alpha} \longrightarrow c(K) \int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \alpha), \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty. \quad (7.8)$$

Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant :

**Lemme 7.4.2** *Si  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ , il existe un compact  $K_0$  de  $T^1S$  tel que  $\alpha(B^+(u,r) \cap K_0) \rightarrow +\infty$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .*

**Démonstration :** Comme  $u^- \in \Lambda_{\text{rad}}$ , l'horocycle  $H^+(u)$  revient infiniment souvent dans l'ensemble  $\pi^{-1}C_0$  des vecteurs basés dans la partie compacte  $C_0$  de  $S$  (théorème 7.2.1)). Posons  $K_0 = \{w \in B^+(v,1), \text{ avec } v \in \pi^{-1}C_0\}$ . Comme  $\alpha_{H^+(u)}$  est de support  $H^+(u)$ , on a  $\inf_{\pi(v) \in C_0} \alpha_{H^+(v)}(B^+(v,1)) > 0$ . Par définition de  $K_0$ , on en déduit  $\alpha_{H^+(u)}(K_0) = +\infty$ , ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

**Remarque 7.4.3** La démonstration du lemme ci-dessus est le seul endroit où on utilise le fait que pour toute feuille  $H^+$ ,  $\alpha_{H^+}$  est de support tout  $H^+$ . On peut tout à fait se passer de cette hypothèse dès que la conclusion du lemme ci-dessus est vérifiée, ce qui, comme on l'a vu, est le cas de pour la famille de mesures  $\{\mu_{H^+}^{ps}\}$  (voir le fait 7.3.6).

Il suffit maintenant de montrer (7.8) pour tout compact  $K$  de  $T^1S$  qui contient  $K_0$ . Nous supposons que le compact  $K$  considéré est propre, i.e. égal à l'adhérence de son intérieur. Considérées comme des probabilités sur  $K$ , les moyennes  $M_{r,u}^{\alpha,K}$  ont des valeurs d'adhérence pour la topologie faible sur  $K$  qui sont des probabilités sur  $K$ . Pour toute transversale  $T$  au feuilletage qui est incluse dans  $K$  et tout  $r > 0$ , posons

$$\nu_T^{\alpha,r} := \frac{1}{\alpha(B^+(u,r) \cap K)} \sum_{t \in T \cap B^+(u,r)} \delta_t.$$

Pour toute boîte  $B = T \times P$  incluse dans  $K$  et toute fonction continue  $\psi$  à support dans  $B$ , écrivons

$$M_{r,u}^{\alpha,K}(\psi) = \int_T d\nu_T^{\alpha,r}(t) \int_{P_t} \psi(v) d\alpha(v) + R(\psi, T, r).$$

Le même raisonnement que dans la preuve du lemme 7.3.4 donne la majoration

$$|R(\psi, T, r)| \leq \frac{1}{\alpha(B^+(u,r) \cap K)} 2\|\psi\|_\infty \sup_{t \in T} \alpha(P_t).$$

Le lemme 7.4.2 ci-dessus assure que ce reste tend vers 0 quand  $r \rightarrow +\infty$ .

Ce qui précède montre que toute valeur d'adhérence  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n, u}^{\alpha, K}$  est de la forme  $\nu \circ \alpha$ , avec  $\nu = \{\nu_T\}$  une mesure transverse définie sur toutes les transversales  $T$  au feuilletage incluses dans  $K$  par

$$\nu_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_T^{\alpha, r_n}.$$

Rappelons que dans la preuve du lemme 7.3.4, on avait défini pour tout  $r > 0$  une mesure transverse  $\nu^r$  de façon similaire à  $\nu^{\alpha,r}$ . On a pour tout  $r > 0$  et toute transversale  $T$  incluse dans  $K$

$$\nu_T^{\alpha,r} = \frac{\mu^{ps}(B^+(u,r))}{\alpha(B^+(u,r) \cap K)} \nu_T^r.$$

Le théorème 7.3.1 implique que pour toute transversale  $T$ ,  $\nu_T^r$  converge faiblement vers  $\mu_T$  quand  $r \rightarrow \infty$ . Le fait que la restriction à  $K$  de  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n, u}^{\alpha, K}$  soit une probabilité implique qu'il existe des transversales  $T$  incluses dans  $K$ , pour lesquelles  $\nu_T^{\alpha, r_n}$  converge faiblement vers une mesure finie non nulle  $\nu_T$ . Ces deux faits réunis impliquent la convergence de  $\frac{\mu^{p_s}(B^+(u, r_n))}{\alpha(B^+(u, r_n) \cap K)}$  vers une constante finie non nulle. Donc  $\nu_T$  est proportionnelle à  $\mu_T$ .

Finalement, un argument de normalisation permet d'en déduire que pour toute fonction  $\psi$  continue à support dans  $K$ ,

$$m(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{r_n, u}^{\alpha, K}(\psi) = \frac{\int_{T^1 S} \psi d(\mu \circ \alpha)}{\int_{T^1 S} \mathbf{1}_K d(\mu \circ \alpha)}.$$

Ceci étant vrai pour tout compact  $K$  et toute valeur d'adhérence  $m$  de  $(M_{r, u}^{\alpha, K})_{r > 0}$ , le théorème en découle.  $\square$

## 7.5 Courbure constante : moyennes sur les orbites du flot horocyclique

Soit  $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  une surface hyperbolique géométriquement finie, avec  $\mathbb{H}$  l'espace hyperbolique. Le groupe  $PSL(2, \mathbb{R})$  agit simplement transitivement sur son fibré tangent  $T^1 \mathbb{H}$ , on peut donc identifier  $T^1 \mathbb{H}$  avec  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Dans cette identification, le flot horocyclique  $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$  agit par multiplication à droite par  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ . Ceci revient à déplacer les vecteurs d'une distance  $t$  sur l'horocycle fortement instable qu'ils définissent (pour la métrique induite sur l'horocycle par la métrique hyperbolique). Cette action commute à  $\Gamma$ , et passe donc au quotient en le flot horocyclique de  $T^1 S$ .

La succession d'énoncés ci-dessous permet de voir que le théorème 7.5.4 est un cas particulier du théorème 7.4.1 démontré précédemment.

Un calcul simple mais fastidieux donne

**Lemme 7.5.1** *Si  $u \in T^1 \mathbb{H}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $d_{H^+}(u, h^t(u)) = |t|$ .*

Les boules  $B^+(u, r)$  sont dans ce cas exactement les segments d'orbites  $(h^s(u))_{|s| \leq t}$ . D'autre part, par continuité du flot horocyclique, on a facilement :

**Lemme 7.5.2** *La mesure  $dt$  sur les orbites du flot horocyclique est un système de Haar pour le feuilletage horocyclique, que l'on notera  $\lambda$ .*

Un calcul simple montre que si  $p$  est un élément parabolique, alors  $d(o, p^n o) = 2 \log n(1 + \varepsilon(n))$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et donc tous les sous-groupes paraboliques de  $\Gamma$  ont pour exposant  $1/2$ . En comparant la distance hyperbolique et la distance induite sur un horocycle entre deux points d'un même horocycle, on montre le

**Lemme 7.5.3** *L'hypothèse (\*) de croissance des cusps est vérifiée.*

Rappelons que (\*) implique (\*\*) (voir paragraphe 6.2.6 pour plus de détails), et que la mesure de Patterson-Sullivan est finie sur une surface hyperbolique géométriquement finie. Notre dernier résultat est un résultat d'équidistribution plus fort que celui de [Bu], valable de plus sans restriction sur les cusps de  $S$  ou l'exposant critique de  $\Gamma$ .

**Théorème 7.5.4** *Soit  $S$  une surface hyperbolique géométriquement finie. Alors pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$  et pour toutes fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  continues à support compact sur  $T^1S$ , avec  $\int_{T^1S} \varphi d(\mu \circ \lambda) > 0$ , on a*

$$\frac{\int_{-t}^t \psi \circ h^s(u) ds}{\int_{-t}^t \varphi \circ h^s(u) ds} \longrightarrow \frac{\int_{T^1S} \psi d(\mu \circ \lambda)}{\int_{T^1S} \varphi d(\mu \circ \lambda)} \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Remarquons que la mesure  $\mu \circ \lambda$  du théorème ci-dessus est infinie dès que l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  est strictement inclus dans le bord  $\partial\tilde{S}$  (i.e. dès que  $S$  n'est plus de volume fini).





# Chapitre 8

## Conclusion

Dans ce chapitre, toujours dans le cadre des variétés géométriquement finies, nous complétons les résultats obtenus dans les chapitres précédents, et nous posons quelques questions restées sans réponse pour l'instant.

Le premier paragraphe est consacré à l'étude de résultats d'équidistribution des horosphères en dimension quelconque.

Dans le paragraphe suivant, nous revenons sur l'étude des mesures de Gibbs. Après avoir rappelé brièvement leur construction dans ce cadre, nous montrons (théorème 8.2.2) que la mesure transverse quasi-invariante qu'elles induisent est l'unique mesure transverse quasi-invariante pour un certain cocycle, hormis celles induites par les horosphères compactes.

Le paragraphe 8.2.3 est consacré à une discussion sur la propriété de non divergence des horosphères, dans le cas d'une mesure  $m^F$  quelconque, mais également dans celui plus simple de la mesure  $m^{ps}$ , où nous pouvons affaiblir légèrement les hypothèses du théorème 6.4.2 de non divergence des horosphères.

### 8.1 Equidistribution des horosphères d'une variété géométriquement finie de dimension quelconque

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'équidistribution des horosphères d'une variété  $M$  géométriquement finie de dimension quelconque. Rappelons d'abord quelques notations (voir les chapitres 6 et 7 pour plus de détails). On suppose que la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  est finie, et on note  $\mu^{ps} = \{\mu_{H^+}^{ps}\}$  la famille des mesures conditionnelles sur les horosphères de  $m^{ps}$ . On désigne par  $B^+(u, r)$  la boule horosphérique de centre  $u$  et de rayon  $r$  pour la distance horosphérique  $d_{H^+}$ . Nous considérons alors pour tout  $u \in T^1M$  les probabilités  $(M_{r,u})_{r>0}$  sur  $T^1M$  définies par

$$M_{r,u}(\psi) = \frac{1}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \psi d\mu_{H^+}^{ps},$$

pour toute fonction  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  continue à support compact.

La question est alors de savoir si ces probabilités s'équidistribuent vers la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . Nous avons établi ce résultat au chapitre 7 lorsque  $M$  est une surface (théorème 7.3.1), en utilisant de façon cruciale la classification des mesures transverses invariantes ergodiques, et le théorème de non divergence des moyennes horosphériques.

Nous reprenons ici cette approche en dimension supérieure. La difficulté essentielle qui se présente est due au fait qu'on ne sait pas contrôler la croissance du bord des boules horosphériques. Ceci nous contraint à imposer une hypothèse de type Følner sur la mesure de ces boules. Nous obtenons alors le

**Théorème 8.1.1** *Soit  $M$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps satisfont (\*\*) et dont la mesure de Patterson-Sullivan est finie. Soit  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ ,  $r_0 > 0$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres positifs tendant vers  $+\infty$  telle que*

$$\frac{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r_n + r_0) \setminus B^+(u, r_n - r_0))}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r_n))} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (8.1)$$

Alors la suite de mesures de probabilité  $(M_{r_n, u})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

En particulier, dans le cas où  $M$  est de volume fini, on retrouve ainsi un résultat d'équidistribution connu, conséquence des travaux de Ratner :

**Corollaire 8.1.2 (Shah [Sh])** *Soit  $M$  une variété hyperbolique de volume fini. Alors pour tout  $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$ , les mesures de probabilité  $(M_{r, u})_{r > 0}$  convergent vers la mesure de Liouville sur  $T^1M$ .*

**Démonstration :** Dans ce cas, la mesure de Liouville et la mesure de Patterson-Sullivan sont égales. Notons  $H^+$  l'horosphère fortement instable de  $u$ . La mesure conditionnelle  $\mu_{H^+}^{ps}$  est donc simplement la mesure de Lebesgue sur l'horosphère  $H^+$ .

D'autre part, dans le modèle du demi-espace supérieur, une horosphère peut être vue comme un hyperplan euclidien, et une boule horosphérique est alors une boule euclidienne. À une constante multiplicative près, la mesure de Lebesgue d'une boule euclidienne de rayon  $r$  vaut  $r^{n-1}$ , de sorte que l'hypothèse du théorème 8.1.1 ci-dessus est vérifiée quand  $r \rightarrow +\infty$ . Le corollaire en découle.  $\square$

**Remarque 8.1.3** Il existe toujours des suites  $r_n \rightarrow +\infty$  vérifiant l'hypothèse du théorème ci-dessus. Ceci découle du fait que pour tout  $u \in T^1M$  fixé, la fonction  $r \mapsto \mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r))$  est à croissance polynomiale (d'après le théorème 6.3.2 ou le lemme 8.2.8).

**Remarque 8.1.4** On peut donner des exemples plus « concrets » de suites  $r_n \rightarrow +\infty$  qui satisfont l'hypothèse ci-dessus. Par exemple, une suite  $(r_n)$  telle que  $(g^{-\log r_n} u) \rightarrow v \in T^1M$ , avec  $\mu_{H^+}^{ps}(\partial B^+(v, 1)) = 0$  convient. Pour une telle suite, on peut démontrer l'équidistribution autrement (voir la preuve du lemme 5.4.8). L'idée est d'utiliser le fait que pour toute fonction continue à support compact  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$M_{r_n, u}(\psi) = M_{1, g^{-\log r_n} u}(\psi \circ g^{\log r_n}).$$

Le fait que  $\mu_{H^+}^{ps}(B^+(v, 1)) = 0$  assure que  $M_{1, g^{-\log r_n} u}(\psi \circ g^{\log r_n})$  et  $M_{1, v}(\psi \circ g^{\log r_n})$  vont être de plus en plus proches quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour finir, le théorème 8.2.3 de Babillot assure que  $M_{1, v}(\psi \circ g^{\log r_n})$  tend vers  $m^{ps}(\psi)$  quand  $r_n \rightarrow +\infty$ , ce qui est le résultat voulu.

**Question 8.1.5** Si  $M$  est une variété hyperbolique (ou plus généralement localement symétrique de rang 1), et de volume infini, il est peut-être possible d'utiliser la connaissance précise de la géométrie de  $\widetilde{M}$  et des boules horosphériques pour montrer que

$$\frac{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r + r_0) \setminus B^+(u, r - r_0))}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r))} \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty.$$

Ceci impliquerait immédiatement la propriété souhaitée d'équidistribution des moyennes. Mais cette question est ouverte pour l'instant.

**Démonstration du théorème 8.1.1:** La preuve est la même que celle du théorème 7.3.1, à laquelle nous renvoyons le lecteur. On utilise d'abord le théorème 6.4.2 de non-divergence des moyennes pour dire que les valeurs d'adhérence des mesures  $(M_{r,u})_{r>0}$  quand  $r \rightarrow +\infty$  sont des probabilités. Il faut alors montrer que toute valeur d'adhérence s'écrit comme le produit d'une mesure transverse invariante par holonomie par la mesure  $\mu_{H^+}^{ps}$  le long des feuilles (lemme 7.3.4), puis que cette mesure transverse est la mesure transverse induite par la mesure  $m^{ps}$  (lemme 7.3.5).

La seule différence réside dans la démonstration du lemme 7.3.4. Plus précisément, pour montrer que le reste  $R(B, T, r)$  tend vers 0 quand  $r \rightarrow +\infty$ , on raisonne comme dans la preuve du lemme 5.4.8 (chapitre 5). On montre que ce reste est majoré par une constante fois la quantité

$$\frac{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r + r_0) \setminus B^+(u, r - r_0))}{\mu_{H^+}^{ps}(B^+(u, r))}.$$

L'hypothèse faite sur la croissance des boules donne donc la convergence de  $R(B, T, r_n)$  vers 0. Il en découle immédiatement que toute valeur d'adhérence  $m$  de  $(M_{r_n, u})_{n \in \mathbb{N}}$  s'écrit sous la forme  $m = \nu \circ \mu^{ps}$ , où  $\nu$  est une mesure transverse invariante. La fin de la preuve est inchangée : le lemme 7.3.5 assure que la mesure  $m$  donne une masse nulle à l'ensemble des horosphères centrées en un point parabolique, et le théorème 8.1.1 en découle grâce à la classification des mesures transverses invariantes.  $\square$

## 8.2 Mesures de Gibbs sur une variété géométriquement finie

### 8.2.1 Construction

Dans le cadre des variétés géométriquement finies, l'ensemble non-errant du flot géodésique n'étant pas compact, le formalisme thermodynamique ne s'applique plus. Cependant, Coudène [Cou1] a généralisé la construction donnée au chapitre 2 des mesures d'équilibre. Nous allons résumer brièvement ses résultats.

Dans le cas compact ou convexe-cocompact, on normalise une fonction höldérienne en posant  $F = \delta^f - f$ . Ceci est impossible dans notre cas, puisque la pression de  $f$  n'est pas définie. Nous considérerons donc une application höldérienne *positive*  $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et nous supposons de plus que  $F$  est comprise entre deux constantes  $0 < c \leq C < +\infty$ . On peut encore définir la série de Poincaré de  $F$  :

$$P(o, s, F) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s \int_o^{\gamma o} F}.$$

Notons  $\delta^F$  son exposant critique. Sous nos hypothèses sur  $F$ , cet exposant est strictement positif et fini.

De même qu'au chapitre 2, quitte à utiliser le lemme 2.2.1 de Patterson, on peut supposer que la série de Poincaré est divergente en  $s = \delta^F$ . Pour tout  $s > \delta^F$ , on construit une famille  $(\nu_x^{s, F})_{x \in \widetilde{M}}$  de mesures sur  $\widetilde{M}$ , et on obtient alors une famille de mesures finies  $(\nu_x^F)_{x \in \widetilde{M}}$  sur le bord  $\partial \widetilde{M}$  comme valeurs d'adhérence quand  $s_k \rightarrow \delta^F$  des mesures ci-dessus.

Elles vérifient  $\nu_o^F(\partial\widetilde{M}) = 1$ , et pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $(x, y) \in \widetilde{M}^2$

$$\gamma_*\nu_x^F = \nu_{\gamma x}^F \quad \text{et} \quad \frac{d\nu_x^F}{d\nu_y^F}(\xi) = \exp(-\rho_\xi^F(x, y)).$$

On définit alors une mesure invariante par le flot géodésique sur  $T^1\widetilde{M}$  par la même formule qu'au chapitre 2 :

$$d\tilde{m}^F(v) = e^{\int_x^{v^-} \check{F} + \int_x^{v^+} F - \int_{v^-}^{v^+} F} d\nu_x^{\check{F}}(v^-) d\nu_x^F(v^+) dt.$$

Par passage au quotient,  $\tilde{m}^F$  induit une mesure de Radon  $m^F$  sur  $T^1M$ , dont le support est  $\Omega$ , et qui peut être de masse infinie. Lorsque  $F \equiv \delta_\Gamma$ , on retrouve la construction (vue au paragraphe 7.2.2) de la *mesure de Patterson-Sullivan*  $m^{ps}$ .

Nous supposons au paragraphe suivant que la mesure  $m^F$  est finie, et nous renvoyons le lecteur au critère de finitude donné par Coudène [Cou1], généralisant celui de [D-O-P] dans le cas  $F \equiv 1$ . Dans ce cas, pour tout  $x \in \widetilde{M}$ , la suite de mesures  $(\nu_x^{s, F})_{s > \delta^F}$  converge vers  $\nu_x^F$  quand  $s \rightarrow \delta^F$ , et  $\nu_x^F$  ne charge que  $\Lambda_{\text{rad}}$ . La mesure  $m^F$  associée est alors l'unique mesure donnée par la construction ci-dessus. Nous l'appellerons *mesure de Gibbs* associée au potentiel  $F$ , définition qui sera justifiée au paragraphe 8.2.2 par le fait qu'elle induit une mesure transverse quasi-invariante pour le feuilletage fortement instable.

**Remarque 8.2.1** Dans le cas particulier de la mesure de Patterson-Sullivan  $m^{ps}$ , c'est-à-dire dans le cas où  $F \equiv \delta_\Gamma$ , Otal et Peigné [O-Pe] ont montré que lorsqu'elle est finie, c'est encore l'unique mesure d'entropie maximale du flot géodésique, et que dans le cas contraire, il n'existe pas de mesure finie maximisant l'entropie. Il est vraisemblable qu'on puisse obtenir un résultat analogue pour les mesures  $m^F$ , à condition de parvenir à définir la pression topologique dans un cadre non compact.

## 8.2.2 Classification des mesures transverses quasi-invariantes pour le feuilletage fortement instable

Au chapitre 5, dans le cadre des variétés compactes ou convexes-cocompactes, nous avons montré que la mesure d'équilibre  $m^f$  associée à un potentiel höldérien  $f$  induisait une mesure transverse  $\{\mu_T^f\}$  quasi-invariante pour un cocycle  $\rho^f$ , et que de plus, c'était l'unique mesure quasi-invariante pour ce cocycle. Nous étudions dans ce chapitre le cas des variétés géométriquement finies. Les constructions de mesures du paragraphe 5.2.3 (chapitre 5) s'étendent ici.

Pour toute transversale  $T = \widetilde{W}^s(v)$  au feuilletage  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$ , on pose

$$d\tilde{\mu}_T^F(v) = \exp \rho_{v^-}^{\check{F}}(x, v) d\nu_x^F(v^-) dt.$$

Ceci définit une mesure transverse  $\tilde{\mu}^F = \{\tilde{\mu}_T^F\}$  à  $\widetilde{\mathcal{W}}^{su}$ , qui vérifie  $\gamma_*\tilde{\mu}_T^F = \tilde{\mu}_{\gamma T}^F$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Elle passe donc au quotient en une mesure transverse  $\mu^F = \{\mu_T^F\}$  à  $\mathcal{W}^{su}$ , qui est quasi-invariante par holonomie pour le cocycle  $\rho^{\check{F}}$ . Pour toute holonomie  $\zeta : T \rightarrow T'$ , on a

$$\frac{d\mu_{T'}^F}{d\zeta_*\mu_T^F}(\zeta v) = \exp \rho^{\check{F}}(v, \zeta v).$$

On définit une famille de mesures sur les horosphères fortement instables de  $T^1\widetilde{M}$  par

$$d\tilde{\mu}_{H^+}^F(v) = \exp \rho_{v^+}^F(x, v) d\nu_x^F(v^+).$$

Cette famille passe au quotient en une famille de mesures, notées  $\mu_{H^+}^F$ , sur les variétés fortement instables de  $T^1M$ .

On définit une mesure sur l'espace  $\mathcal{H} = \partial\widetilde{M} \times \mathbb{R}$  des horosphères par

$$d\widehat{\mu}_o^F(\xi, s) = d\nu_o^F(\xi) ds.$$

Elle est à support  $\Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}$ , vérifie  $\widehat{\mu}_o^F((\Lambda_{\text{rad}} \times \mathbb{R})^c) = 0$ , et est  $\Gamma$ -quasi-invariante au sens où

$$\frac{d\widehat{\mu}_o^F}{d\gamma_*\widehat{\mu}_o^F}(\gamma(\xi, s)) = \exp(\rho_\xi^F(o, \gamma^{-1}o)), .$$

On définit encore une famille de mesures sur les horosphères de  $T^1\widetilde{M}$  par

$$d\bar{\mu}_{H^+}^F(v) = e^{\rho_{v^-}^F(o, v) + \rho_{v^+}^F(o, v)} d\nu_o^F(v^+).$$

On a alors

$$d\tilde{\mu}^F(v) = d\widehat{\mu}_o^F(v^-, s) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v).$$

Introduisons encore une définition. Une mesure transverse  $\mu = \{\mu_T\}$  quasi-invariante par holonomie est dite *ergodique* si le fait que pour toute holonomie  $\zeta : T \rightarrow T$ , on ait  $\mu_T(A\Delta\zeta A) = 0$  implique que  $\mu_T(A) = 0$  ou  $\mu_T(A^c) = 0$ .

Une feuille fermée  $W_0$  de  $\mathcal{W}^{su}$  intersecte une transversale relativement compacte en un nombre fini de points. Elle induit donc naturellement une mesure transverse quasi-invariante pour un cocycle  $\rho$  donné sur  $\mathcal{W}^{su}$  par la formule :

$$\mu_T = \sum_{t \in T \cap W_0} \exp \rho(t, w_0) \delta_t, \quad (8.2)$$

où  $w_0$  est un vecteur arbitraire fixé de  $W_0$ .

Rappelons que la classification topologique des feuilles de  $\mathcal{W}^{su}$  est bien connue (Dal'bo [D]). Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble non errant du feuilletage fortement instable, i.e. l'ensemble des vecteurs de  $T^1M$  tels que  $v^- \in \Lambda_\Gamma$ . La variété fortement instable  $W^{su}(v)$  d'un vecteur  $v \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$  (i.e. tel que  $v^- \in \Lambda_{\text{rad}}$ ) est dense dans  $\mathcal{E}$ . Si  $v^-$  est un point parabolique borné,  $W^{su}(v)$  est compacte, et si  $v^- \notin \Lambda_\Gamma$  sa feuille est fermée et plongée dans  $T^1M$ .

Lorsque la mesure de Patterson-Sullivan (i.e. la mesure associée comme ci-dessus au potentiel  $F \equiv 1$ ) est finie, Roblin [Ro1] a classifié l'ensemble des mesures transverses invariantes pour le feuilletage horosphérique. Nous suivons de très près sa preuve pour obtenir l'analogie ci-dessous de son résultat dans le cas des mesures transverses quasi-invariantes.

**Théorème 8.2.2** *Soit  $M$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée. Soit  $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application höldérienne comprise entre deux constantes strictement positives, et telle que la mesure  $m^F$  est finie. Alors les mesures transverses quasi-invariantes pour le cocycle  $\rho^{\tilde{F}}$  et ergodiques sont de l'un des trois types suivants :*

- 1- la mesure  $\{\mu_T^F\}$  induite par la mesure  $m^F$ ,
- 2- les mesures induites par les feuilles compactes de  $\mathcal{W}^{su}$  (au sens de (8.2)),
- 3- les mesures induites par les feuilles fermées non compactes de  $\mathcal{W}^{su}$  (au sens de (8.2)).

Nous aurons besoin pour la preuve du théorème d'équidistribution suivant :

**Théorème 8.2.3 (Babillot, [Ba2])** *Soit  $M$  une variété géométriquement finie avec cusps, et  $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une application höldérienne comprise entre deux constantes strictement positives. Si la mesure  $m^F$  est finie, alors pour toute fonction continue à support compact  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  et tout  $u \in \Omega$ , on a*

$$\frac{1}{\bar{\mu}_{H^+}^F(B^+(u, 1))} \int_{B^+(u, 1)} \psi \circ g^t(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v) \rightarrow \int_{T^1M} \psi dm^F \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

**Remarque 8.2.4** Ce théorème a été démontré par Babillot sous l'hypothèse de mélange topologique du flot géodésique, hypothèse satisfaite en présence de cusps (Dal'bo [D]).

La preuve suit exactement celle de [Ro1], et ressemble à celle du théorème 5.2.7', nous ne ferons donc qu'en donner les grandes lignes.

**Démonstration du théorème 8.2.2:** Les mesures associées aux feuilles fermées sont construites par la formule (8.2). Plutôt que de montrer que  $\mu^F = \{\mu_T^F\}$  est l'unique autre mesure transverse quasi-invariante pour le cocycle  $\rho^{\check{F}}$  et ergodique, nous allons montrer que  $\hat{\mu}_o^F$  est l'unique mesure  $\Gamma$ -quasi-invariante pour le cocycle  $\rho^{\check{F}}(\gamma^{-1}o, o)$  sur  $\mathcal{H}$ , ergodique et vérifiant  $\hat{\mu}_o^F(\Lambda_{\text{rad}} \times \mathbb{R}) > 0$ .

Supposons donc qu'il en existe une autre, notée  $\hat{\nu}$ . On a  $d\tilde{m}^F = d\hat{\mu}_o^F d\bar{\mu}_{H^+}^F$ . On peut donc définir aussi  $d\tilde{M}^F = d\hat{\nu} d\bar{\mu}_{H^+}^F$  qui est une mesure de Radon  $\Gamma$ -invariante sur  $T^1\tilde{M}$ , et passe donc au quotient en une mesure  $M^F$  sur  $T^1M$ . Malheureusement, cette mesure n'a aucune raison d'être finie.

On choisit alors une fonction positive continue à support compact  $\phi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $0 < \int_{T^1M} \phi dM^F < +\infty$  et  $0 < \int_{T^1M} \phi dm^F < +\infty$ , et on note  $\tilde{\phi}$  son relevé à  $T^1\tilde{M}$ . On définit alors une probabilité  $P^F$  sur  $T^1M$  par

$$dP^F(v) = \frac{1}{\int_{T^1M} \phi dM^F} \phi(v) dM^F(v),$$

et on note  $\tilde{P}^F$  la mesure relevée à  $T^1\tilde{M}$ .

En suivant la preuve du lemme 5.3.6 du chapitre 5, on démontre une formule d'autoadjonction :

**Lemme 8.2.5** *Soit  $D$  un domaine fondamental borélien pour l'action de  $\Gamma$  sur  $T^1\tilde{M}$ , et  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive continue à support compact, relevée en  $\tilde{\psi} : T^1\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $r > 0$ , on a*

$$\int_D d\tilde{P}^F(u) \frac{1}{\int_{B^+(u, r)} \tilde{\phi} d\bar{\mu}_{H^+}^F} \int_{B^+(u, r)} \tilde{\psi} d\bar{\mu}_{H^+}^F = \int_D d\tilde{M}^F(u) \tilde{\psi}(u) \int_{B^+(u, r)} \frac{\tilde{\phi}(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v)}{\int_{B^+(v, r)} \tilde{\phi} d\bar{\mu}_{H^+}^F}.$$

L'idée de la preuve est, comme pour le théorème 5.2.7' du chapitre 5, d'utiliser cette formule pour démontrer que  $m^F$  est absolument continue par rapport à  $M^F$ . La fin de la preuve est alors identique à celle du théorème 5.2.7', nous ne la redétaillerons pas.

Commençons par la majoration du terme de droite. Nous aurons besoin de la :

**Proposition 8.2.6 (Roblin [Ro1])** *Soit  $M$  une variété géométriquement finie à courbure négative pincée. Il existe une constante  $N > 0$  telle que pour tout  $u \in T^1M$  et tout  $r > 0$ , la boule horosphérique  $B^+(u, r)$  peut être recouverte par au plus  $N$  boules  $B^+(u_i, \frac{r}{2})$  de rayon moitié.*

Supposons donc que  $B^+(u, r) \subset \sqcup_{i=1}^N B^+(u_i, \frac{r}{2})$ . Pour tout  $v \in B^+(u_i, \frac{r}{2})$ , on a  $B^+(v, r) \supset B^+(u_i, \frac{r}{2})$ , d'où  $\int_{B^+(v, r)} \tilde{\phi} d\bar{\mu}_{H^+}^F \geq \int_{B^+(u_i, \frac{r}{2})} \tilde{\phi} d\bar{\mu}_{H^+}^F$ . Pour tout  $u \in T^1M$  et  $r > 0$ , on en déduit la majoration

$$\int_{B^+(u, r)} \frac{\tilde{\phi}(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v)}{\int_{B^+(v, r)} \tilde{\phi} d\bar{\mu}_{H^+}^F} \leq N. \quad (8.3)$$

Pour toute fonction  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  positive continue à support compact, le terme de droite dans le lemme 8.2.5 est donc majoré par  $N \int_{T^1M} \psi dM^F$ .

Il reste à minorer le terme de gauche. C'est l'étape la plus délicate de la preuve. On montre précisément l'énoncé suivant :

**Lemme 8.2.7** *Il existe une constante  $C > 0$ , telle que pour toute fonction  $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$  positive et continue à support compact, il existe un  $r > 0$  et un ensemble  $\Omega_r \subset T^1M$  de mesure  $P^F(\Omega_r) \geq \frac{1}{2}$  et tel que pour tout  $u \in \Omega_r$*

$$\frac{\int_{B^+(u, r)} \tilde{\psi} d\bar{\mu}_{H^+}^F}{\int_{B^+(u, r)} \tilde{\phi} d\bar{\mu}_{H^+}^F} \geq C \int_{T^1M} \psi dm^F.$$

Grâce à ce lemme et à la majoration (8.3), on montre aisément que  $m^F \ll M^F$ , dont on déduit le théorème, comme dans la fin de la démonstration du théorème 5.2.7'.  $\square$

Il reste donc à démontrer ce lemme. Nous ne donnerons que les principales étapes de la preuve, en renvoyant le lecteur à Roblin [Ro1] pour le détail des preuves.

**Démonstration du lemme 8.2.7:** Fixons d'abord  $\alpha > 0$  très petit, et soit  $K_\alpha \subset \mathcal{E}_r$  un compact tel que  $P^F(K_\alpha) \geq 1 - \alpha$ . La preuve se fait en quatre étapes.

**Première étape :** Il existe des constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  telles que pour tout  $u \in K_\alpha$ , il existe  $r(u) > 0$  pour lequel

$$\int_{B^+(u, r(u))} \psi d\bar{\mu}_{H^+}^F \geq c_1 \int_{T^1M} \psi dm^F \int_{B^+(u, r(u))} \phi d\bar{\mu}_{H^+}^F, \quad \text{et}$$

$$\int_{B^+(u, 3r(u))} \phi d\bar{\mu}_{H^+}^F \leq c_2 \int_{B^+(u, r(u))} \phi d\bar{\mu}_{H^+}^F.$$

La première inégalité découle du théorème 8.2.3 de Babillot, et la deuxième servira à appliquer un lemme de Vitali.

**Deuxième étape :** Notons  $K_{s, \alpha}$  l'ensemble des  $u \in K_\alpha$  tels que  $r(u) \leq s$ , et fixons  $s$  suffisamment grand pour que  $P^F(K_{s, \alpha}) \geq 1 - 2\alpha$ . Pour tout  $r > 0$ , notons  $\Omega_{r, s, \alpha}$  l'ensemble des  $u \in K_{s, \alpha}$  tels que

$$\int_{B^+(u, r+s)} \phi d\bar{\mu}_{H^+}^F \leq 2 \int_{B^+(u, r)} \phi d\bar{\mu}_{H^+}^F, \quad \text{et}$$

$$\int_{B^+(u, r)} \phi d\bar{\mu}_{H^+}^F \leq 2 \int_{B^+(u, r)} \phi(v) \mathbf{1}_{K_{s, \alpha}}(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v).$$

Un argument de recouvrement de Vitali de la boule  $B^+(u, r)$  par des boules  $B^+(v, 3r(v))$  permet de trouver une constante  $C > 0$  indépendante de  $\psi$ ,  $r$  et  $u$  telle que pour tout  $r > 0$  et tout  $u \in \Omega_{r,s,\alpha}$ , on ait

$$\frac{\int_{B^+(u,r)} \psi d\bar{\mu}_{H^+}^F}{\int_{B^+(u,r)} \phi d\bar{\mu}_{H^+}^F} \geq C \int_{T^1 M} \psi dm^F.$$

**Troisième étape :** Pour démontrer le lemme, il reste à trouver  $\alpha$ ,  $s$  et  $r$  pour que  $\Omega_{r,s,\alpha}$  soit assez gros, i.e.  $P^F(\Omega_{r,s,\alpha}) \geq \frac{1}{2}$ . Ecrivons alors le complémentaire de  $\Omega_{r,s,\alpha}$  comme une union  $\Delta_r \cup Z_r$ , avec  $\Delta_r$  l'ensemble des  $u \in K_{s,\alpha}$  tels que

$$\int_{B^+(u,r)} \phi(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v) > 2 \int_{B^+(u,r)} \phi(v) \mathbf{1}_{K_{s,\alpha}}(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v),$$

et  $Z_r$  l'ensemble des  $u \in K_{s,\alpha}$  tels que

$$\int_{B^+(u,r+s)} \phi(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v) > 2 \int_{B^+(u,r)} \phi(v) d\bar{\mu}_{H^+}^F(v).$$

À l'aide d'une formule d'autoadjonction, on montre que si on a bien choisi  $\alpha > 0$ , alors pour tout  $r > 0$ , on a  $P^F(\Delta_r) < 1/4$ . Intuitivement, ceci correspond au fait que  $K_{s,\alpha}$  recouvre presque tout le support de  $P^F$ , donc la proportion de points d'une horosphère qui sont dans  $K_s$  doit être souvent grande.

**Dernière étape :** À condition d'avoir une croissance sous-exponentielle de la mesure des boules horosphériques, on montre qu'il existe  $r > 0$ , pour lequel  $P^F(Z_r) < 1/4$ . Cette croissance sous-exponentielle découle du lemme ci-dessous, dont nous détaillons la preuve, car elle ne se généralise pas immédiatement des travaux de Roblin [R01]. Ceci permet de conclure la démonstration du lemme 8.2.7, puisque pour ce  $r > 0$ ,  $P^F(\Omega_{r,s,\alpha}) > 1/2$ .  $\square$

**Lemme 8.2.8** *Pour tout  $u \in T^1 \widetilde{M}$  fixé, on a  $\bar{\mu}_{H^+}^F(B^+(u, r)) = O(r^{4\|F\|_\infty})$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .*

**Démonstration :** Rappelons que  $d\bar{\mu}_{H^+}^F(v) = e^{\int_o^{v^+} F + \int_o^{v^-} \check{F} - \int_{v^-}^{v^+} F} d\nu_o^F(v^+)$ . Comme  $\nu_o^F$  est une probabilité, on en déduit

$$\bar{\mu}_{H^+}^F(B^+(u, r)) \leq \sup_{v \in B^+(u, r)} e^{\int_o^{v^+} F + \int_o^{v^-} \check{F} - \int_{v^-}^{v^+} F}.$$

Pour tout  $v \in B^+(u, r)$ , notons  $p_v$  le projeté de  $v$  sur la géodésique  $(v^- v^+)$ . Les triangles  $(o, p_v, v^-)$  et  $(o, p_v, v^+)$  sont rectangles en  $p_v$ , le lemme 2.4.4 du chapitre 2 donne donc

$$\left| \int_o^{v^+} F + \int_o^{v^-} \check{F} - \int_{v^-}^{v^+} F - \left( \int_o^{p_v} F + \int_o^{p_v} \check{F} \right) \right| \leq 2C(\pi/2, F).$$

De plus, comme  $F$  est supposée bornée, on a encore  $\int_o^{p_v} F + \int_o^{p_v} \check{F} \leq 2\|F\|_\infty d(o, p_v)$ .

Remarquons maintenant que pour tout  $u \in T^1 \widetilde{M}$ ,  $r > 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\bar{\mu}_{H^+}^F(B^+(u, r)) = \bar{\mu}_{H^+}^F(B^+(g^t u, r e^t)).$$



Autrement dit, quitte à considérer  $g^t u$  au lieu de  $u$ , pour  $t > 0$  fixé assez grand, on peut supposer que  $\beta_{u^-}(o, u) \leq 0$ . Ceci signifie que  $o$  est à l'intérieur de l'horoboule de bord  $H(u)$ . En particulier, pour tout  $v \in B^+(u, r)$ , on a aussi  $\beta_{v^-}(o, v) \leq 0$ . Le triangle  $(o, v, v^+)$  a donc un angle en  $v$  supérieur à  $\pi/2$  d'où  $d(o, p_v) \leq d(o, v) \leq \beta_{v^+}(o, v) + C(\pi/2)$ . On en déduit que

$$\bar{\mu}_{H^+}^F(B^+(u, r)) \leq \text{Cste}(u, \pi/2) \sup_{v \in B^+(u, r)} e^{2\|F\|_\infty \beta_{v^+}(o, v)}.$$

Rappelons maintenant que la distance horosphérique  $d_{H^+}$  vérifie

$$d_{H^+}(u, v) = e^{\frac{1}{2}(\beta_{u^+}(o, u) + \beta_{v^+}(o, v))} d_o(u^+, v^+).$$

Par continuité de la fonction de Busemann, si  $\varepsilon > 0$  est fixé, on peut trouver  $\eta > 0$  tel que  $d_o(u^+, v^+) \leq \eta$  implique  $|\beta_{v^+}(o, v) - \beta_{u^+}(o, u)| \leq \varepsilon$ . Dans ce cas, la quantité  $\exp(2\|F\|_\infty \beta_{v^+}(o, v))$  est majorée par la constante  $\exp(2\|F\|_\infty(\beta_{u^+}(o, u) + \varepsilon))$ .

Si  $d_o(u^+, v^+) \geq \eta$ , on a alors pour tout  $v \in B^+(u, r)$

$$e^{2\|F\|_\infty \beta_{v^+}(o, v)} \leq \left( \frac{1}{\eta} e^{-\beta_{u^+}(o, u)} d_{H^+}(u, v) \right)^{4\|F\|_\infty} \leq \text{cste}(u) r^{4\|F\|_\infty}.$$

Ceci prouve le lemme. □

### 8.2.3 Non divergence des moyennes horosphériques

On vient de voir au paragraphe ci-dessus que la classification des mesures invariantes se généralise ligne à ligne au cas des mesures transverses quasi-invariantes associées aux mesures de Gibbs. La question naturelle est alors celle de l'équidistribution des moyennes horosphériques associées vers la mesure  $m^F$ .

Dans le cas de la mesure de Patterson-Sullivan, le résultat d'équidistribution des moyennes horosphériques d'une surface géométriquement finie obtenu au chapitre 7 repose de façon cruciale sur le théorème 6.4.2 de non divergence des moyennes horosphériques. Les autres arguments utilisés s'étendent sans la moindre difficulté au cas des mesures de Gibbs (lorsqu'on les suppose finies), de sorte qu'un théorème de non divergence pour ces moyennes permettrait d'obtenir, au moins dans le cas des surfaces, leur équidistribution vers la mesure  $m^F$ .

Là encore, on peut suivre un certain nombre des arguments de la preuve du théorème de non divergence et les étendre au cas des mesures de Gibbs. Néanmoins, une difficulté essentielle apparaît puisque pour un potentiel quelconque  $F : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$ , il n'y a pas a priori d'équivalents précis des séries

$$\sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \leq T}} e^{-\int_o^{po} F} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{p \in \Pi, \\ d(o, po) \geq T}} e^{-\int_o^{po} F},$$

ce qui ne permet plus de démontrer le Lemme de l'Ombre et la non divergence des moyennes horosphériques.

**Remarque 8.2.9** Les preuves des théorèmes 5.2.7 et 8.2.2 laissent à croire que tous les énoncés vrais pour la mesure de Patterson-Sullivan s'étendent sans difficulté aux mesures de Gibbs. L'obstruction précédente est le premier écueil sérieux qui peut-être marquer une différence entre ces deux types de mesures.

# Bibliographie

- [A] Anosov, D. V. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*,. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **90** (1967).
- [Ba1] Babillot, Martine *Géodésiques et horocycles sur le revêtement d'homologie d'une surface hyperbolique*, Séminaire théorie spectrale et géométrie, Grenoble (1996), 89-104.
- [Ba2] Babillot, Martine *On the mixing property for hyperbolic systems*, Israel J. Math. **129** (2002), 61-76.
- [Ba3] Babillot, Martine *Points entiers et groupes discrets : de l'analyse aux systèmes dynamiques*, Panoramas et synthèses, **13** Paris, SMF (2002).
- [Ba-L] Babillot, Martine ; Ledrappier, François *Geodesic paths and Horocycle Flow on Abelian Covers*, Proc. International Colloquium on Lie groups and Ergodic theory, Tata Institute of Fundamental Research, Narosa Publishing house, New Delhi (1998), 1-32.
- [B] Ballmann, Werner *Lectures on spaces of nonpositive curvature*. With an appendix by Misha Brin, DMV Seminar **25**, Birkhäuser Verlag, Basel (1995).
- [B-G-S] Ballmann, Werner ; Gromov, Mikhael ; Schroeder, Viktor *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics **61**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (1985).
- [Be-M] Bekka, M. Bachir ; Mayer, Matthias *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **269**. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Bou] Bourdon, Marc *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace*. Enseign. Math. (2) **41** (1995), no. 1-2, 63-102.
- [Bo] Bowditch, Brian H. *Geometrical finiteness with variable negative curvature*, Duke Math. J. **77** no.1 (1995), 229-274.
- [Bow1] Bowen, Rufus *Periodic orbits for hyperbolic flows*, American J. Math. **94** (1972), 1-30.
- [Bow2] Bowen, Rufus *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. **470**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).
- [Bow3] Bowen, Rufus *Topological entropy for noncompact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973), 125-136.
- [Bow-M] Bowen, Rufus ; Marcus, Brian *Unique ergodicity for horocycle foliations*. Israel J. Math. **26** no. 1 (1977), 43-67.
- [Bow-R] Bowen, Rufus ; Ruelle, David *The ergodic theory of Axiom A flows*. Invent. Math. **29** no. 3 (1975), 181-202.
- [Bu] Burger, Marc *Horocycle flow on geometrically finite surfaces*, Duke Math. J. **61** no.3 (1990), 779-803.

- [C-C] Candel, Alberto ; Conlon, Lawrence. *Foliations I*, in Grad.Stud. Math. **23**, American Mathematical Society, Providence, RI (2000).
- [Co] Connes, Alain *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, in Algèbres d'Opérateurs, Séminaire, Les Plans-sur-Bex, Suisse, Lecture Notes in Math. **725**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1978).
- [C-D-P] Coornaert, M.; Delzant, Thomas ; Papadopoulos, A. *Géométrie et théorie des groupes*, Les groupes hyperboliques de Gromov, Lecture Notes in Math. **1441**, Springer-Verlag, Berlin (1990).
- [C-I] Corlette, Kevin ; Iozzi, Alessandra *Limit sets of discrete groups of isometries of exotic hyperbolic spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** no. 4 (1999), 1507-1530.
- [Cou1] Coudène, Yves *Gibbs measures on negatively curved manifolds*. J. Dynam. Control Systems **9** no. 1 (2003), 89-101.
- [D] Dal'bo, Françoise *Topologie du feuilletage fortement stable*. Ann. Inst. Fourier **50** no. 3 (2000), 981-993.
- [D-O-P] Dal'bo, Françoise ; Otal, Jean-Pierre ; Peigné, Marc *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel J. Math. **118** (2000), 109-124.
- [Da1] Dani, S. G. *Invariant measures of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces*, Invent. Math. **47** (1978), no. 2, 101-138.
- [Da2] Dani, S. G. *On Invariant Measures, Minimal Sets and a Lemma of Margulis*, Invent. Math. **51** (1979), 239-260.
- [Da3] Dani, S.G. *On uniformly distributed orbits of certain horocycle flows*, Ergodic Theory Dyn. Systems **2** (1982), 139-158.
- [Da4] Dani, S. G. *On Orbits of unipotent flows on homogeneous spaces*, Ergodic Theory Dyn. Systems **4** (1984), 25-34.
- [Da5] Dani, S. G. *On Orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, II*, Ergodic Theory Dyn. Systems **6** (1986), 167-182.
- [Da-S] Dani, S. G. ; Smillie, John *Uniform distribution of horocycle orbits for Fuchsian groups*, Duke Math. J. **51** no. 1 (1984), 185-194.
- [Eb1] Eberlein, Patrick B. *Geodesic flows on negatively curved manifolds I*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 492-510.
- [Eb2] Eberlein, Patrick B. *Geodesic flows on negatively curved manifolds II*, Transactions of the American Mathematical Society, **178** (1973), 57-82.
- [Eb3] Eberlein, Patrick B. *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL (1996).
- [Eb-O] Eberlein, Patrick B. ; O'Neill, B. *Visibility manifolds*, Pacific J. Math. **46** (1973), 45-109.
- [E-P] Ellis, Robert ; Perrizo, William *Unique ergodicity of flows on homogeneous spaces*, Israel J. Math. **29** no. 2-3 (1978), 276-284.
- [En-F] Enriquez, Nathanaël ; Franchi, Jacques *Masse des pointes, temps de retour et enroulements en courbure négative*, Bull. Soc. Math. France **130** no. 3 (2002), 349-386.
- [Fl] Flaminio, Livio *An extension of Ratner's rigidity theorem to n-dimensional hyperbolic space*. Ergodic Theory Dyn. Systems **7** no. 1 (1987), 73-92.

- [F] Furstenberg, Harry *The unique ergodicity of the horocycle flow*. Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund), Lecture Notes in Math. **318**, Springer, Berlin (1973), 95-115.
- [G-H] Ghys, Étienne; de la Harpe, Pierre *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* (Bern, 1988), Progr. Math. **83**, Birkhäuser Boston, Boston, MA (1990), 1-25.
- [Go] Godbillon, Claude *Feuilletages*, Progr. Math. **98**, Birkhauser Verlag, Basel (1991).
- [G-Pl] Goodman, S.E.; Plante, J.F. *Holonomy and averaging in foliated sets*, J. Differ. Geom. **14** no.3 (1979), 401-407.
- [Ha1] Hamenstädt, Ursula *A new description of the Bowen-Margulis measure*, Ergodic Theory Dyn. Systems **9** (1989), 455-464.
- [Ha2] Hamenstädt, Ursula *Cocycles, Hausdorff measures and cross ratios*, Ergodic Theory Dyn. Systems **17** (1997), 1061-1081.
- [H-K] Handel, Michael; Kitchens, Bruce *Metrics and entropy for non-compact spaces*, Appendix by Daniel J. Rudolph, Israel J. Math. **91**, no 1-3 (1995), 253-271.
- [H] Hedlund, G.A. *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. **2** (1936), 530-542.
- [H-I] Heintze, Ernst; Im Hof, Hans-Christoph *Geometry of Horospheres*. J. Differ. Geom. **12**, (1977) 481-491.
- [He-P] Hersonsky Sa'ar; Paulin, Frédéric *On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), 349-388.
- [He-P2] Hersonsky, Sa'ar; Paulin, Frédéric, *Counting orbit points in coverings of negatively curved manifolds and Hausdorff dimension of cusp excursions*, à paraître dans Ergodic Theory Dyn. Systems.
- [Hi-P] Hirsch, Morris W.; Pugh, Charles C. *Smoothness of the horocycle foliation*, J. Differ. Geom. **10** (1975), 225-238.
- [Ho] Hopf, Eberhard, *Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature*, Bull. Am. Math. Soc. **77** (1971), 863-877.
- [Ho2] Hopf, Eberhard, *Ergodentheorie*, Springer, Berlin (1937).
- [K1] Kaimanovich, Vadim A. *Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds*, Ann. I.H.P., Physique Théorique **53**, no. 4 (1990), 361-393.
- [K2] Kaimanovitch, Vadim A. *Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces*, J. Reine Angew. Math **455** (1994), 57-103.
- [K3] Kaimanovich, Vadim A. *Ergodic properties of the horocycle flow and classification of Fuchsian groups*, J. Dynam. Control Systems **6** (2000), no. 1, 21-56.
- [K4] Kaimanovich, Vadim A. *SAT Actions and Ergodic Properties of the Horosphere Foliation*, Burger, Marc (ed.) et al., Rigidity in dynamics and geometry. Contributions from the programm Ergodic theory, geometric rigidity and number theory, Isaac Newton Institute for the Mathematical Sciences, Cambridge, UK, January 5-July 7, 2000. Berlin : Springer (2002) 261-282.
- [K5] Kaimanovich, Vadim A.; Lyubich, Mikhail *Conformal and harmonic measures on laminations associated with rational maps* (2001), Prépublication de l'IRMAR.

- [Ka-H] Katok, Anatole ; Hasselblatt, Boris *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge Univ. Press. (1995).
- [Ke] Keller, Gerhard *Equilibrium States in Ergodic theory*, London Math. Soc. Student Texts **42**, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [Kl] Klingenberg, Wilhelm *Riemannian Geometry*, De Gruyter Studies in Mathematics **1**, Berlin - New York : Walter de Gruyter (1982).
- [L] Ledrappier, François *Structure au bord des variétés à courbure négative*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble (1994-95), 93-118.
- [Ma] Manning, Anthony *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. of Math. (2) **110** no.3 (1979), 567-573.
- [Mar] Marcus, Brian *Unique ergodicity of the horocycle flow : variable negative curvature case*, Israel J. Math. **21** (1975), 133-144.
- [M] Margulis G.A. *On the action of unipotent groups in the space of lattices*, Proc. of the Summer School on Groups Representations, Budapest, Bolyai Janos Math. Soc. (1971), 365-370.
- [Mi-W] Minsky, Yair ; Weiss, Barak *Nondivergence of horocyclic flows on moduli space*, J. Reine Angew. Math. **552** (2002), 131-177.
- [N] Newberger, Florence *On the Patterson-Sullivan measure for geometrically finite groups acting on complex or quaternionic hyperbolic spaces*, prépublication (2003).
- [O] Otal, Jean-Pierre *Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative*, Rev. Math. Iber. **8** (1992), 441-456.
- [O-Pe] Otal, Jean-Pierre ; Peigné, Marc *Principe variationnel et groupes kleinien*, Prépublication du Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, Université de Tours (2002).
- [Pa] Patterson, S. J. *The limit set of a Fuchsian group*. Acta Math. **136** no. 3-4 (1976), 241-273.
- [P-P] Parry, William ; Pollicott, Mark *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque no. 187-188 (1990).
- [Pe1] Peigné, Marc *Mesures de Hausdorff de l'ensemble limite de groupes kleinien géométriquement finis*, Notes du groupe de travail de systèmes dynamiques, Orléans (1999-2000).
- [Pe2] Peigné, Marc *On the Patterson-Sullivan measure of some discrete groups of isometries*, à paraître dans Israel J. Math. (2003).
- [Pl] Plante, J.F. *Foliations with measure preserving holonomy*, Annals of Maths **102** (1975), 327-361.
- [Ra] Ratner, Marina *Raghunathan's conjectures for  $SL(2, \mathbb{R})$* , Israel J. Math. **80** no. 1-2 (1992), 1-31.
- [Ro1] Roblin, Thomas *Ergodicité et unique ergodicité du feuilletage horosphérique, mélange du flot géodésique et équidistributions diverses dans les groupes discrets en courbure négative*, (2001) Prépublication de l'IRMAR.
- [Ro2] Roblin, Thomas *Sur l'ergodicité rationnelle et les propriétés ergodiques du flot géodésique dans les variétés hyperboliques*, Ergodic Theory Dyn. Systems **20** no. 6 (2000), 1785-1819.

- [Ro3] Roblin, Thomas *Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative.* Ann. Inst. Fourier **52** no. 1 (2002), 145-151.
- [Ru] Rudolph, Daniel J. *Ergodic behaviour of Sullivan's geometric measure on a geometrically finite hyperbolic manifold.* Ergodic Theory Dynam. Systems **2** no. 3-4 (1982), 491-512.
- [R-S] Ruelle, David; Sullivan, Dennis *Currents, flows and diffeomorphisms,* Topology **14** (1975), 319-327.
- [Sa] Sarig, Omri *Invariant Radon measures for horocycle flows on abelian covers,* Prépublication (2003).
- [Sc] Schapira Barbara, *On quasi-invariant transverse measures for the horospherical foliation of a negatively curved manifold* (2002) A paraître dans Ergodic Theory Dyn. Systems.
- [Sc2] Schapira Barbara, *Mesures quasi-invariantes pour un feuilletage et limites de moyennes longitudinales,* C.R. Acad.Sci. Paris, Sér. I **336** (2003), 349-352.
- [Sc3] Schapira Barbara, *Lemme de l'ombre et non divergence des horocycles d'une variété géométriquement finie* (2003), Prépublication du MAPMO .
- [Sc4] Schapira Barbara, *Equidistribution of the horocycles of a geometrically finite surface* (2003), Prépublication du MAPMO .
- [Sh] Shah, Nimish A. *Limit distributions of polynomial trajectories on homogeneous spaces,* Duke Math. J. **75** no. 3 (1994), 711-732.
- [Si] Sigmund, Karl *On the space of invariant measures for hyperbolic flows,* Am. J. Math. **94** (1972), 31-37.
- [Sm] Smale, Stephen *Differentiable dynamical systems,* Bulletin of the American mathematical Society, **73** (1967), 747-817.
- [St-V] Stratmann, B.; Velani, S. L. *The Patterson measure for geometrically finite groups with parabolic elements, new and old.* Proc. London Math. Soc. (3) **71** no. 1 (1995), 197-220.
- [S1] Sullivan, Dennis *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions* Publ. Math. I.H.E.S **50** (1979), 171-202.
- [S2] Sullivan, Dennis *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups.* Acta Math. **153** no. 3-4 (1984), 259-277.
- [W] Walters, Peter *An Introduction to ergodic theory,* G.T.M. 79, Springer Berlin (1982).
- [Wa] Warner, Frank. W. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups,* Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois (1971).
- [Y] Yue, Chengbo *The ergodic Theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature* Trans. Am. Math. Soc. **348**, no.12 (1996), 4965-5005.
- [Z] Zinsmeister, Michel *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes,* Panoramas et synthèses, **4**, Paris, SMF (1996).

---

**TITRE :**

**Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative**

---

**RESUME :**

Cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété géométriquement finie à courbure négative  $M$ .

Un de nos principaux résultats est la classification des mesures transverses quasi-invariantes dont la dérivée de Radon-Nikodym est un cocycle höldérien fixé, associé à une mesure de Gibbs. À un tel cocycle, nous associons certaines moyennes sur les horosphères et montrons qu'elles s'équidistribuent vers la mesure de Gibbs correspondante lorsque  $M$  est compacte ou convexe-cocompacte.

Lorsqu'elle n'est ni compacte ni convexe-cocompacte, nous limitons l'étude aux moyennes associées à la mesure d'entropie maximale. Nous montrons qu'elles forment une suite tendue, ce qui, dans le cas des surfaces, nous permet d'obtenir leur équidistribution vers cette mesure d'entropie maximale. En corollaire, nous obtenons l'équidistribution des orbites du flot horocyclique d'une surface hyperbolique géométriquement finie mais de volume infini.

---

**TITLE :**

**Ergodic properties of the horospherical foliation of a negatively curved manifold**

---

**ABSTRACT :**

In this work, we study the ergodic properties of the horospherical foliation of a geometrically finite negatively curved manifold  $M$ .

One of our main results is the classification of quasi-invariant transverse measures whose Radon-Nikodym derivative is a fixed Hölder cocycle, associated with a Gibbs measure. To such a cocycle we associate certain horospherical means and we prove their equidistribution to the corresponding Gibbs measure when  $M$  is compact or convex-cocompact.

When  $M$  is neither compact nor convex-cocompact, we restrict the study to the means associated with the measure of maximal entropy. We show that they do not diverge; in the case of surfaces, it allows us to prove their equidistribution to the measure of maximal entropy. As a corollary, we get the equidistribution of the orbits of the horocyclic flow of a geometrically finite hyperbolic surface with infinite volume.

---

**DISCIPLINE :** Mathématiques

---

**MOTS-CLES :** Feuilletage horosphérique, flot horocyclique, cocycle höldérien, mesure transverse quasi-invariante, moyennes horosphériques, non divergence, équidistribution.

---

**INTITULÉ ET ADRESSE DU LABORATOIRE :**

MAPMO, BP 6759, Université d'Orléans, 45067 Orléans cedex 2, France