



HAL
open science

L'ion hydrogénéoïde confiné en électrodynamique quantique non relativiste. Effet Lamb-Dicke.

Jérémy Faupin

► **To cite this version:**

Jérémy Faupin. L'ion hydrogénéoïde confiné en électrodynamique quantique non relativiste. Effet Lamb-Dicke.. Mathématiques [math]. Université de Reims - Champagne Ardenne, 2007. Français. NNT: . tel-00189236

HAL Id: tel-00189236

<https://theses.hal.science/tel-00189236>

Submitted on 20 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par **Jérémy FAUPIN**

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne

Spécialité : Mathématiques

**L'ion hydrogénoïde confiné en électrodynamique quantique
non relativiste. Effet Lamb-Dicke.**

soutenue publiquement le 20 Septembre 2007

Composition du Jury :

Président	Jean Nourrigat	Professeur à l'Université de Reims
Rapporteurs	Jean-Marie Barbaroux Stephan de Bièvre	Maître de Conférence à l'Université de Toulon Professeur à l'Université de Lille 1
Examineurs	Pierre Duclos Benoît Grébert Frédéric Hérau	Professeur à l'Université de Toulon Professeur à l'Université de Nantes Maître de Conférence à l'Université de Reims
Directeur	Pierre Lévy-Bruhl Laurent Amour	Professeur à l'Université de Reims Professeur à l'Université de Reims

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier Jean Nourrigat pour sa disponibilité et pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse. Je remercie Jean-Marie Barbaroux et Stephan de Bièvre pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en tant que rapporteurs, ainsi que les autres membres du jury, Pierre Duclos, Benoît Grébert, Frédéric Hérau et Pierre Lévy-Bruhl.

Mes remerciements vont également à Marcel Griesemer, Jacob Schah Møller et Israel Michael Sigal pour leur hospitalité et leurs utiles commentaires. Merci aussi à tous les membres du département de Mathématiques, Mécanique et Informatique de l'Université de Reims, en particulier ceux avec lesquels j'ai eu l'opportunité de travailler. Merci bien sûr à ma famille et à mes amis pour leur soutien.

Enfin, je tiens tout particulièrement à remercier mon directeur de thèse, Laurent Amour, pour sa disponibilité permanente ainsi que pour ses conseils avisés. Travailler avec lui pendant ces trois années aura été à la fois profondément enrichissant et un réel plaisir.

Table des matières

Introduction	1
1 Le modèle de l'ion hydrogénoïde confiné en électrodynamique quantique non relativiste	1
2 L'effet Lamb-Dicke	3
3 Existence d'états fondamentaux	5
4 Résonances et absolue continuité du spectre	8
5 Principaux résultats et organisation de la thèse	11
I Définition du Hamiltonien. Caractère autoadjoint.	15
1 Préliminaires	17
1-1 Formes quadratiques	17
1-1.1 Forme quadratique associée à un opérateur auto-adjoint	17
1-1.2 Forme strictement m-sectorielle et analyticité de type (B)	19
1-2 Espace de Fock	20
1-2.1 Définitions et notations	20
1-2.2 Opérateurs de création et d'annihilation	22
1-2.3 Seconde quantification	25
1-2.4 Produit tensoriel d'espaces de Fock	27
1-3 Dilatations complexes et résonances	28
2 Le Hamiltonien H_U^V	31
2-1 Définition formelle	31
2-2 Hypothèses supplémentaires sur le modèle	33
2-3 Le Hamiltonien associé aux particules non relativistes H_{part}	35
2-3.1 Définition et caractère auto-adjoint de H_{part}	35
2-3.2 Analyticité de type (B) de $H_{part}(\theta)$	36

2-4	Caractère auto-adjoint de H_U^V	41
2-4.1	Domaine de forme	41
2-4.2	Représentation en intégrale fonctionnelle	44
2-5	Analyticité de type (B) de $H_U^V(\theta)$	46
2-6	La transformation de Power-Zienau-Wooley	49
II Existence d'un état fondamental		53
3 Preuve de l'existence d'un état fondamental		55
3-1	Existence d'un état fondamental Φ_m pour le Hamiltonien massif $H_U^V(m)$	56
3-1.1	Convergence de $E(H_U^V(m))$ lorsque $m \rightarrow 0$	56
3-1.2	Une condition suffisante pour l'existence d'un état fondamental	58
3-1.3	Localisation des photons	59
3-1.4	Démonstration de l'existence d'un état fondamental pour $H_U^V(m)$	65
3-2	Décroissance exponentielle de Φ_m	67
3-3	Contrôle du nombre de photons	70
3-4	Convergence forte de Φ_m lorsque $m \rightarrow 0$	74
4 Conditions de liaison		79
4-1	Preuve de $E(H_U^V) < E(H_0^V)$	79
4-2	Preuve de $E(H_U^V) < E(H_U^0)$	82
4-2.1	Preuve de $E(H_U^V) < E(\tilde{H}_U^0)$	84
4-2.1.1	Localisation de l'électron et du noyau	84
4-2.1.2	Localisation des photons	86
4-2.1.3	Construction d'un état de $Q(H_U^V)$ à partir d'un état de $Q(\tilde{H}_U^0)$	91
4-2.2	Preuve de $E(\tilde{H}_U^0) \leq E(H_U^0)$	97
III Instabilité des valeurs propres non perturbées et résonances		101
5 Absolue continuité du spectre essentiel		103
5-1	Un changement de coordonnées	104
5-2	L'application de Feshbach	106
5-3	La condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$	108
5-4	Existence de l'opérateur de Feshbach associé à $H_U^V(\theta)$	109

5-4.1	Notations et idée de la démonstration	110
5-4.2	Première étape	112
5-4.3	Deuxième étape	116
5-4.4	Conclusion	118
5-5	Absolue continuité du spectre autour des valeurs propres non perturbées	120
6	Application du groupe de renormalisation et existence de résonances	123
6-1	Transformation de Power-Zienau-Wooley	124
6-2	La condition $(\mathcal{H}_{1/2})$	127
6-3	Un espace de Banach de Hamiltoniens $H(\mathcal{W}_{\geq 0})$	129
6-4	L'application de Feshbach lisse	132
6-5	Existence de l'opérateur de Feshbach lisse associé à $\tilde{H}_U^V(\theta)$	134
6-6	Le point de départ du groupe de renormalisation	136
6-6.1	Définition de la famille d'opérateurs $H_{(0)}[z]$	137
6-6.2	Caractéristique de $H_{(0)}[\cdot]$ en tant qu'élément de $H(\mathcal{W}_{\geq 0})$	138
6-7	L'application de renormalisation	144
6-8	Existence de résonances	146
A	Vérification d'une hypothèse liée à la règle d'or de Fermi	149

Introduction

1 Le modèle de l'ion hydrogénoïde confiné en électrodynamique quantique non relativiste

L'objet de notre thèse est l'étude de quelques propriétés spectrales d'un modèle mathématique d'atome d'hydrogène (ou, plus généralement, d'un modèle mathématique d'ion hydrogénoïde) dans le cadre de l'électrodynamique quantique non relativiste : nous considérons un système composé d'un noyau et d'un électron, traités comme des particules quantiques non relativistes, en interaction avec un champ de radiation quantifié. Plutôt que d'assimiler le noyau à un point fixe, obtenant par là un modèle largement étudié dans la littérature, nous supposons seulement ici que *le centre de masse du système noyau-électron est confiné* par un potentiel. Comme nous le verrons dans la section suivante, ce modèle est utilisé en physique théorique pour expliquer *l'effet Lamb-Dicke* (voir [CTDRG01b, CT04]).

Dans le formalisme Hamiltonien de la physique quantique, l'énergie d'un système physique est décrite par un opérateur auto-adjoint agissant dans un espace de Hilbert approprié. Pour expliciter le Hamiltonien associé au système que l'on considère, nous choisissons de travailler dans les unités telles que $\hbar = c = 1$, où $\hbar = h/2\pi$, h est la constante de Planck, et c la vitesse de la lumière. De plus, dans un souci de simplification, nous décidons de négliger les spins de l'électron et du noyau.

Nous notons x_1 et $p_1 = -i\nabla_{x_1}$ respectivement les opérateurs position et impulsion de l'électron, x_2 et $p_2 = -i\nabla_{x_2}$ respectivement les opérateurs position et impulsion du noyau. La charge et la masse de l'électron sont notées respectivement q_1 et m_1 ; de même la charge et la masse du noyau sont notées respectivement q_2 et m_2 . Nous écrirons de plus $q_1 = q$, $q_2 = -Zq$ où Z est un entier naturel correspondant au nombre de protons présents dans le noyau. Ainsi, le cas $Z = 1$ correspond à l'étude de l'atome d'hydrogène, le cas $Z = 2$ correspond à l'étude de l'ion Hélium chargé positivement He^+ . . . On considérera également la *constante de structure fine* $\alpha := q^2/\hbar c$. Physiquement, cette constante est approximativement égale à $1/137$, ce qui, dans une certaine mesure, pourra justifier un traitement perturbatif de quelques-unes des questions que nous aborderons.

Définissons la masse totale associée au système M et la masse réduite μ par :

$$M := m_1 + m_2 \quad , \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (1)$$

Les variables R, P associées respectivement à la position et à l'impulsion du centre de masse

s'écrivent :

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \quad P = p_1 + p_2. \quad (2)$$

Les variables internes r, p sont quant à elles définies par :

$$r = x_1 - x_2, \quad \frac{p}{\mu} = \frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2}. \quad (3)$$

Si on se place dans le cadre de la mécanique quantique, c'est-à-dire si on néglige la présence du champ de photons, l'énergie du système est décrite par un opérateur de Schrödinger H_{part} qui agit dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^6)$ et que l'on peut écrire sous la forme :

$$H_{part} = \sum_{j=1,2} \frac{p_j^2}{2m_j} + V(r) + U(R). \quad (4)$$

Le terme $p_j^2/2m_j$ correspond à l'énergie cinétique de la particule j (l'électron ou le noyau), et l'opérateur de multiplication V correspond à l'interaction électron-noyau ; nous supposons que V est le potentiel attractif de Coulomb, dépendant donc de la variable interne r . Enfin, le potentiel U , qui dépend de la variable R , correspond au *confinement du centre de masse* inhérent à notre modèle. Nous ferons différentes hypothèses sur le choix de U (voir section 2-2), principalement en relation avec le caractère confinant de celui-ci. En séparant les variables internes et les variables associées au centre de masse, on peut réécrire H_{part} sous la forme :

$$H_{part} = \left(\frac{p^2}{2\mu} + V \right) \otimes I + I \otimes \left(\frac{P^2}{2M} + U \right), \quad (5)$$

en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$.

Nous plaçant maintenant dans le cadre de l'électrodynamique quantique non relativiste, l'espace des états que nous considérons est :

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^6) \otimes \mathcal{F}_s. \quad (6)$$

La première composante du produit tensoriel, $L^2(\mathbb{R}^6)$, correspond toujours à l'espace des états décrivant l'électron et le noyau. Quant à l'*espace de Fock* symétrique \mathcal{F}_s , il correspond à l'espace des états du champ de photons polarisés ; nous décrirons précisément \mathcal{F}_s dans la section 1-2. Le Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans \mathcal{H} et associé au modèle de l'ion hydrogénoïde confiné s'écrit alors formellement :

$$H_U^V := \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j \otimes I - q_j A_j)^2 + I \otimes H_f + U(R) \otimes I + V(r) \otimes I. \quad (7)$$

L'opérateur H_f correspond à l'énergie cinétique du champ de photons libre ("libre" signifie ici libre de toute interaction avec l'électron ou avec le noyau) ; l'énergie cinétique de la particule j est dorénavant représentée par $(p_j \otimes I - q_j A_j)^2/2m_j$. Le potentiel vecteur du champ électromagnétique, A_j , correspond au couplage entre les particules non relativistes et le champ de photons ; nous nous placerons en *jauge de Coulomb* pour le définir. D'autre part, une *troncature ultraviolette* sera imposée sur A_j , c'est-à-dire que nous supposerons que les photons de très haute énergie n'interagissent pas avec le noyau ou avec l'électron. Cette hypothèse est requise

ne serait-ce que pour définir convenablement l'opérateur A_j . Toute notre étude, en revanche, sera valable sans avoir recours à une régularisation infrarouge.

Notre objectif est d'étudier quelques propriétés spectrales de l'opérateur H_U^V , en particulier l'existence d'un état fondamental et l'existence de résonances. Insistons sur le fait que la situation envisagée dans cette thèse est sensiblement différente par rapport à la situation représentée par un modèle avec noyau fixe. En effet, le Hamiltonien H_U^V décrit un atome (ou un ion) pour lequel *seul le centre de masse est confiné*; le noyau et l'électron n'interagissent que par l'intermédiaire du potentiel de Coulomb. Ainsi, par exemple, il nous faudra tenir compte d'états pour lesquels le noyau et l'électron sont situés "loin" l'un de l'autre, tandis que leur centre de masse reste localisé autour de l'origine. Le fait que l'opérateur H_U^0 (obtenu en faisant $V = 0$ dans H_U^V) ne soit pas invariant par translation (contrairement au cas d'un modèle avec noyau fixe) nous obligera à mettre en place un nouveau traitement lors de la preuve de l'existence d'un état fondamental. Au cours de notre étude des résonances, nous utiliserons le caractère confinant de U pour contrôler l'interaction champ-particules (plutôt que d'insérer une troncature spatiale en la variable R), ce qui, une nouvelle fois, nécessitera la mise en place d'un nouveau traitement. Mais voyons tout d'abord en quoi ce modèle d'ion d'hydrogénoïde confiné permet de comprendre certains aspects de l'effet Lamb-Dicke.

2 L'effet Lamb-Dicke

Une image bien établie, dans le cadre de la mécanique quantique, est celle de systèmes atomiques émettant ou absorbant de la lumière en passant d'un état d'énergie à un autre. Pour souligner l'intérêt du modèle de l'ion hydrogénoïde confiné par son centre de masse dans la compréhension de l'effet Lamb-Dicke, observons tout d'abord ce que l'on obtiendrait pour un autre modèle d'ion hydrogénoïde, celui pour lequel le noyau est traité comme un point fixe. L'opérateur de Schrödinger associé agirait alors dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et se réduirait à :

$$H_{el} := \frac{p_1^2}{2m_1} + V(x_1). \quad (8)$$

Le spectre de H_{el} est bien connu : il se compose d'une suite de valeurs propres strictement négatives $(E_l)_{l \geq 0}$ s'accumulant en 0, et de la demi-droite $[0, \infty[$ de spectre absolument continu (cf. figure 1).



FIG. 1 – Spectre du Hamiltonien associé à un électron et un noyau fixe

Si l'électron se trouve dans un état initial d'énergie E_{l_1} , il pourra ainsi "tomber" dans un état d'énergie inférieure E_{l_2} par émission spontanée d'un photon d'énergie $E_{l_1} - E_{l_2}$. Le spectre de diffusion du système physique sera donc constitué de raies de différentes largeurs et de différentes intensités, centrées en les énergies $E_{l_1} - E_{l_2}$.

Revenons maintenant à un modèle naturellement plus conforme avec la réalité, dans lequel le noyau est, comme l'électron, traité comme une particule mobile. Imaginons toutefois un

instant que le mouvement du centre de masse est libre (autrement dit, on retire le potentiel confinant U dans la définition de H_{part} donnée en (4), si bien que le modèle est invariant par translation). Alors, pour obtenir l'énergie d'un photon produit par émission spontanée, il faut retrancher à l'énergie de transition électronique $E_{l_1} - E_{l_2}$ une énergie "de recul" subi par le centre de masse, et ajouter un terme correspondant à l'effet Doppler. Plus précisément, en notant k l'impulsion du photon émis, on a (puisque l'énergie et l'impulsion totales sont conservées) :

$$|k| = E_{l_1} - E_{l_2} - \frac{k^2}{2M} + \frac{k \cdot P}{M}, \quad (9)$$

où P désigne l'impulsion du centre de masse avant l'émission du photon. Le terme $k^2/2M$ est l'énergie de recul et le terme $k \cdot P/M$ correspond à l'effet Doppler. Rappelons que nous avons posé pour simplifier $\hbar = c = 1$.

Finalement dans le cas qui nous intéresse, où le centre de masse du système atomique est confiné, la situation est encore différente. Si par exemple $U(R) \rightarrow \infty$ lorsque $|R| \rightarrow \infty$, l'énergie associée au mouvement du centre de masse ne peut prendre que des valeurs discrètes ; le spectre de l'opérateur $P^2/2M + U$ agissant dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ est en effet, dans ce cas, purement discret. Nous notons $(e_n)_{n \geq 0}$ la suite de ses valeurs propres, si bien que, d'après l'égalité (5), le spectre du Hamiltonien H_{part} prend la forme décrite à la figure 2.

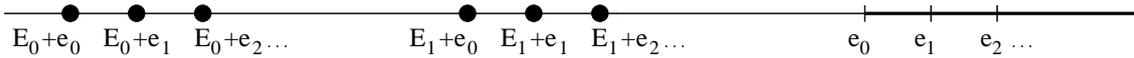


FIG. 2 – Spectre du Hamiltonien associé à un électron et un noyau mobiles dont le centre de masse est confiné

Considérons par exemple le système dans un état initial excité associé à l'énergie $E_1 + e_0$; autrement dit, l'électron se trouve sur la "couche" d'énergie E_1 , et l'énergie associée au mouvement du centre de masse prend sa plus petite valeur e_0 . Supposons de plus que $e_1 - e_0 < E_1 - E_0$. On peut alors envisager que l'ion tombe dans un état d'énergie $E_0 + e_1$, en émettant un photon d'énergie $E_1 - E_0 + e_0 - e_1$. Ce processus d'émission se généralise d'ailleurs aisément aux autres énergies possibles $E_{l_1} - E_{l_2} + e_{n_1} - e_{n_2}$. Ainsi, dans le spectre de diffusion du système physique n'apparaissent plus seulement les raies d'énergie $E_{l_1} - E_{l_2}$ correspondant aux transitions électroniques ; de nouvelles raies d'énergie $E_{l_1} - E_{l_2} + e_{n_1} - e_{n_2}$ sont présentes. Ceci constitue une base pour justifier l'effet Lamb-Dicke.

Sous certaines hypothèses physiquement cohérentes (approximation des grandes longueurs d'onde, confinement suffisamment "fort"), on peut constater (voir [CTDRG01b] ou [CT04]) que les transitions les plus probables sont celles pour lesquelles l'énergie associée au mouvement du centre ne change pas, c'est-à-dire que pour $l_1 \neq l_2$, la probabilité de transition d'un état d'énergie $E_{l_1} + e_{n_1}$ vers un état d'énergie $E_{l_2} + e_{n_2}$ est petite dès que $n_1 \neq n_2$. En d'autres termes encore, les raies correspondant exactement aux transitions électroniques sont nettement plus intenses que les autres ; elles ne sont de plus ni élargies par effet Doppler, ni déplacées par effet de recul. La suppression de l'effet Doppler et de l'énergie de recul est appelée dans ce cas effet Lamb-Dicke.

Historiquement, ce modèle de système atomique confiné par son centre de masse semble avoir été considéré pour la première fois par R. H. Dicke (voir [Dic53]). Dans cet article, le

phénomène étudié est la réduction de la largeur Doppler des raies émises par un gaz dense ; l'auteur suppose que le grand nombre de collisions entre les molécules du gaz dense a pour effet de confiner les centres de masse des molécules émettrices dans des puits de potentiel. Plus récemment, l'hypothèse d'un confinement par le centre de masse et l'effet Lamb-Dicke ont été utilisés pour étudier le refroidissement d'atomes ou d'ions par des lasers, par exemple pour ce qui est appelé *refroidissement sideband* en physique théorique. Citons à ce sujet [WI79], [DBIW89] pour les atomes ou [WD75] pour les ions. Décrit en quelques mots, le principe du refroidissement sideband est le suivant : un système atomique est préparé de telle façon que son centre de masse est confiné par un potentiel, comme dans la situation envisagée plus haut. On suppose que l'atome ou l'ion est au départ dans un état d'énergie interne minimale E_0 et d'énergie externe égale à e_i . Le but est de "refroidir" le système atomique en diminuant l'énergie associée au mouvement du centre de masse. Pour ce faire, on commence par "éclairer" l'atome ou l'ion à l'aide d'un laser produisant des photons d'énergie $E_1 - E_0 + e_{i-1} - e_i$; le système est alors excité jusqu'à un état d'énergie $E_1 + e_{i-1}$. Ensuite, si les conditions du régime Lamb-Dicke sont satisfaites, le système "retombe" dans un état d'énergie $E_0 + e_{i-1}$ par émission spontanée d'un photon d'énergie $E_1 - E_0$, comme le prévoit l'effet Lamb-Dicke. Le processus se répète, en principe, jusqu'à ce que l'atome ou l'ion atteigne un état fondamental d'énergie $E_0 + e_0$.

Pour conclure cette section, signalons que la discussion qui précède est mieux adaptée au formalisme de l'électrodynamique quantique. En effet, dans le cadre de la mécanique quantique que nous venons d'envisager, les énergies $E_l + e_n$ sont des valeurs propres ; elles sont donc associées à des vecteurs propres, eux-mêmes assimilés à des états physiques stables, qui ne sont en toute rigueur pas susceptibles de tomber dans des états d'énergies inférieures. Le couplage avec les photons introduit par l'électrodynamique quantique permet de lever cette difficulté puisque, comme nous le verrons, les valeurs propres $E_l + e_n$ "disparaissent" pour devenir des *résonances*. Les états d'énergie voisine de $E_l + e_n$ deviennent en particulier effectivement instables lorsque le couplage avec les photons est ajouté ; une estimation de leur *temps de vie* est fournie par la localisation des résonances. Les raies sont également légèrement déplacées en raison de l'interaction entre les particules non relativistes et les photons. On parle parfois de *déplacement de Lamb*. Celui-ci peut d'ailleurs être calculé, encore une fois, en localisant les résonances. Nous reviendrons plus précisément sur ces points liés à l'étude des résonances dans la section 4 de notre introduction.

3 Existence d'états fondamentaux

En physique quantique, le problème de l'existence de systèmes stables est lié, mathématiquement, à l'*existence d'états fondamentaux* pour les Hamiltoniens associés aux systèmes que l'on considère : si un certain système physique est stable dans son état d'énergie minimale, on s'attend à ce que l'infimum du spectre du Hamiltonien associé soit une valeur propre.

Considérons tout d'abord l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique non relativiste : l'énergie d'un atome, d'un ion ou d'une molécule est représentée dans ce cas par un opérateur de Schrödinger agissant dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_{part} . Ainsi comme nous l'avons vu, pour le modèle de l'ion hydrogénoïde confiné, $\mathcal{H}_{part} = L^2(\mathbb{R}^6)$. D'une manière générale, \mathcal{H}_{part} représente les états d'un nombre fini N d'électrons, de charge négative $-e$, interagissant avec un nombre fini M de noyaux, de charge positive $Z_i e$ (où pour $1 \leq i \leq M$, Z_i représente le

nombre de protons dans le i ème noyau). Chaque noyau est considéré comme une particule, et l'interaction, attractive ou répulsive selon le cas, entre deux particules (un électron ou un noyau) est décrite par le potentiel de Coulomb (si l'on se place en jauge de Coulomb). En supposant par exemple que les noyaux sont fixes, et que $N \leq \sum_{i=1}^M Z_i$, l'existence d'un état fondamental pour l'opérateur de Schrödinger associé est bien connue. La condition $N \leq \sum_{i=1}^M Z_i$ signifie que l'on s'intéresse à des atomes, des molécules ou des ions chargés positivement. D'ailleurs, sous cette même condition (et si encore une fois les noyaux sont assimilés à des points fixes), il est en fait prouvé que le spectre du Hamiltonien de Schrödinger est composé d'une suite infinie de valeurs propres isolées strictement négatives, puis de la demi-droite de spectre essentiel $[0, \infty[$ (cf. [Zhi60]). Signalons pour conclure ce paragraphe que la question de la *stabilité de la matière* en mécanique quantique est étudiée notamment dans [Lie91]; en ce qui concerne l'étude des opérateurs de Schrödinger et de leurs propriétés, renvoyons par exemple à [Kat66], [RS80], [RS75], [RS78], [CFKS87], [HS96] et aux références données dans ces livres.

Dans le cadre de l'électrodynamique quantique non relativiste, l'atome, l'ion ou la molécule que l'on considère interagit également avec un champ de radiation quantifié. Le Hamiltonien associé agit alors dans un espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{part} \otimes \mathcal{H}_b$, où \mathcal{H}_b correspond aux états du champ de radiation. Celui-ci est d'ailleurs généralement traité comme étant un champ de *bosons*, c'est-à-dire qu'un état décrivant n particules du champ de radiation est supposé être symétrique sous l'échange de deux quelconques de ces particules (on parle parfois de *statistique de Bose-Einstein*). En ce qui concerne par exemple le modèle de l'ion hydrogénoïde confiné, nous avons vu que $\mathcal{H}_b = \mathcal{F}_s$, où \mathcal{F}_s est l'espace de Fock symétrique du champ de photons polarisés. Ecrivons, d'une manière générale, le Hamiltonien associé à un système atomique couplé avec un champ de radiation sous la forme :

$$H = H_{part} \otimes I + I \otimes H_f + H_I(\alpha) = H_0 + H_I(\alpha). \quad (10)$$

Comme précédemment, H_{part} correspond à l'énergie du système atomique et agit dans \mathcal{H}_{part} ; de même, H_f correspond à l'énergie du champ de radiation et agit dans \mathcal{H}_b ; enfin $H_I(\alpha)$, qui agit dans \mathcal{H} , correspond à l'interaction entre le système atomique et le champ de radiation. L'opérateur $H_I(\alpha)$ dépend d'ailleurs d'une *constante de couplage* α .

Pour un tel modèle, si la masse des bosons est supposée nulle, l'infimum du spectre du Hamiltonien se révèle le plus souvent être également l'infimum de son spectre essentiel. Pour le modèle de l'ion hydrogénoïde confiné associé à H_U^V , le spectre est ainsi de la forme suivante (voir figure 3) :

$$\sigma(H_U^V) = [\inf \sigma(H_U^V), \infty[. \quad (11)$$

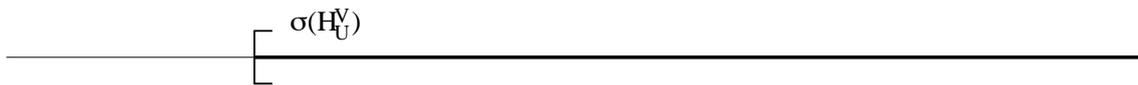


FIG. 3 – Spectre de H_U^V

Ceci est dû au fait que l'on peut toujours imaginer des bosons d'énergie arbitrairement petite venant "s'ajouter" à un état donné. C'est cette caractéristique qui rend le problème de l'existence d'un état fondamental difficile : l'infimum n'est pas isolé du reste du spectre (contrairement à la situation mentionnée plus haut pour les opérateurs de Schrödinger).

Si, en revanche, on est en présence d'un champ de bosons *massifs*, et si on traite le problème de façon *perturbative*, la question de l'existence d'un état fondamental devient alors assez facile à résoudre. En effet, dans le cas de bosons massifs (on remplace H_f par $H_f(m)$ avec $m > 0$), un "gap" apparaît entre l'énergie fondamentale et l'infimum du spectre essentiel du Hamiltonien *non perturbé* H_0 . Pour des valeurs suffisamment petite de la constante de couplage α , l'existence d'un état fondamental s'obtient alors par des arguments habituels utilisés dans les théories perturbatives. Toutefois, pour des valeurs quelconques de α , les théories perturbatives ne sont plus valables et l'existence d'un état fondamental demeure un problème difficile à résoudre, même dans le cas de bosons massifs.

Récemment, de nombreux auteurs se sont intéressés à de telles questions. Dans [HS95], M. Hübner et H. Spohn prouvent l'existence d'un état fondamental pour un *modèle spin-boson* ("spin-boson model"), c'est-à-dire un système atomique à 2 niveaux (H_{part} se réduit alors à une matrice 2-2) *linéairement couplé* à un champ de bosons *scalaires*. Dans [AH97], A. Arai et M. Hirokawa obtiennent le résultat pour un modèle qu'ils appellent *modèle spin-boson généralisé* ("generalized spin-boson model"). Ces deux résultats sont démontrés pour des valeurs suffisamment petites de la constante de couplage. Dans [DG99], J. Dereziński et C. Gérard prouvent l'existence d'un état fondamental pour un modèle de système atomique *confiné*, linéairement couplé à un champ de bosons scalaires et massifs ; aucune restriction sur la constante de couplage n'est imposée. D'ailleurs nous serons amenés à utiliser dans notre thèse plusieurs outils développés dans [DG99]. Dans [Gér00], pour toutes valeurs de la constante de couplage, C. Gérard prouve l'existence d'un état fondamental pour un système d'une particule quantique confinée, linéairement couplée à un champ de bosons scalaires et, cette fois-ci, *sans masse* ; on parle parfois, pour nommer ce modèle, de *modèle de Nelson*. Jusqu'à présent, dans tous les modèles que nous venons de citer, le couplage entre le système atomique et le champ de bosons est linéaire. Dans ce cas, une *régularisation infrarouge* doit être imposée à l'opérateur décrivant l'interaction afin d'obtenir l'existence d'un état fondamental (en plus d'une troncature ultraviolette). En effet, il est prouvé qu'il n'existe pas d'état fondamental appartenant à \mathcal{H} , si l'on considère un couplage linéaire sans régularisation infrarouge (cf.[AHH99], [LMS02], [Hir06]).

En ce qui concerne maintenant le *modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste*, parfois appelé *modèle de Pauli-Fierz*, l'existence d'états fondamentaux est établie même sans régularisation infrarouge. Le modèle de Pauli-Fierz décrit un système atomique couplé de façon dite *minimale* à un champ de bosons quantifié. Il provient de la quantification des équations de Maxwell-Lorentz, pour lesquelles une régularisation est imposée à la densité de charge des électrons et des noyaux (voir par exemple [CTDRG01a], [Hir04], [Spo04]). Cette régularisation se retrouve d'ailleurs dans le Hamiltonien de Pauli-Fierz au travers de la troncature ultraviolette qui apparaît dans l'opérateur associé à l'interaction entre le système atomique et le champ de bosons. L'opérateur H_U^V défini formellement en (7) est un exemple de Hamiltonien de Pauli-Fierz.

Dans [BFS98a, BFS99], en supposant seulement que l'infimum du spectre de H_{part} est une valeur propre discrète, V. Bach, J. Fröhlich et I. M. Sigal montrent l'existence d'un état fondamental pour le modèle de Pauli-Fierz sans régularisation infrarouge et pour un champ de photons de masse nulle. Le résultat est obtenu pour des valeurs suffisamment petites de la constante de couplage, en considérant un nombre fini de noyaux *fixes*. Par ailleurs, dans [Hir99], en utilisant des méthodes différentes, F. Hiroshima obtient également l'existence d'un

état fondamental pour le modèle de Pauli-Fierz, mais avec une régularisation infrarouge ; dans [Hir00], il étudie la multiplicité des états fondamentaux (en supposant qu'il en existe), par des méthodes d'intégrales fonctionnelles. Ceci est fait en négligeant les spins des électrons et des noyaux. Dans [GLL01] (voir aussi [Gri02] pour la preuve de l'un des résultats), M. Griesemer, E. H. Lieb et M. Loss prouvent l'existence d'un état fondamental pour le modèle de Pauli-Fierz (avec noyaux fixes) *pour toutes valeurs* de la constante de couplage. Pour ce faire, ils ont recours aux *conditions de liaison* suivantes :

$$\forall N' \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq N' \leq N - 1, \quad E_N < E_{N'} + E_{N-N'}^0. \quad (*)$$

Dans l'équation précédente, E_N désigne l'infimum du spectre du Hamiltonien de Pauli-Fierz pour N électrons (et un certain nombre M de noyaux fixes) ; E_N^0 désigne l'infimum du spectre du même Hamiltonien, si l'interaction entre les électrons et les noyaux est retirée. Achevant la preuve de l'existence d'un état fondamental, E. H. Lieb et M. Loss prouvent dans [LL03] que les conditions de liaison (*) sont effectivement satisfaites pour toutes valeurs de la constante de couplage, pourvu que $N \leq \sum_{i=1}^M Z_i$ (ici encore, $\sum_{i=1}^M Z_i$ désigne le nombre total de protons dans le système atomique considéré).

Terminons cette section en disant quelques mots de modèles pour lesquels les noyaux sont considérés comme *mobiles*. Si aucune restriction n'est imposée (comme par exemple le confinement par le centre de masse dans le cas du modèle de l'ion hydrogénoïde confiné), le système est alors *invariant par translation*. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que le Hamiltonien associé au système commute avec l'opérateur d'impulsion totale. Du fait de l'invariance par translation, il ne peut exister d'état fondamental. Cependant, le Hamiltonien admet une décomposition en intégrale directe $H = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H(P) dP$, et on peut se demander si le Hamiltonien $H(P)$, pour une impulsion totale constante égale à P , admet ou non un état fondamental. On pourra trouver des réponses à cette question, pour les modèles de Pauli-Fierz et de Nelson, dans, entre autres, [Frö73], [Frö74], [Che02], [Mø105], [AGG06], [LMS06], [HH06].

4 Résonances et absolue continuité du spectre

Dans le cadre de la mécanique quantique, pour des opérateurs de Schrödinger (toujours notés H_{part}), de nombreuses études sur les *résonances* ont été menées. Citons par exemple [AC71], [BC71], [Sim73], [Sim78], [RS78], [Sig84], [Hun90], [HS96]. Sous certaines conditions, on peut montrer que la résolvante d'un opérateur de Schrödinger admet un prolongement méromorphe, depuis le demi-plan supérieur \mathbb{C}^+ dans une partie du demi-plan inférieur \mathbb{C}^- ; une résonance peut alors être définie comme étant un pôle complexe de ce prolongement.

En ce qui concerne la présente étude, nous nous bornerons à définir une résonance à partir de la méthode des *dilatations complexes* (voir [AC71, BC71]). Dans ce cas, toujours en ce qui concerne les opérateurs de Schrödinger pour l'instant, on considère une famille d'opérateurs "dilatés" $H_{part}(\theta)$, le paramètre θ appartenant à un voisinage complexe de 0. Les dilatations que nous utiliserons ici pour définir les opérateurs fermés $H_{part}(\theta)$ sont celles qui transforment les variables de position x_j , associées aux particules, en $e^\theta x_j$. Il existe cependant d'autres familles de transformation mieux adaptées à certains potentiels pouvant intervenir dans H_{part} (voir par exemple [Sig84], [Hun86], [HS96]). Les dilatations complexes permettent de définir

une résonance de la façon suivante : on appelle résonance toute valeur propre complexe de $H_{part}(\theta)$ située strictement dans le demi-plan inférieur, et ne dépendant pas de θ ; on renvoie aux références citées plus haut pour une définition plus précise.

Physiquement, une résonance proche de l'axe réel illustre l'existence d'un état instable dont le *temps de vie* est suffisamment long. La partie imaginaire d'une résonance est donc liée au temps de vie de l'état "associé" ; la partie réelle correspond quant à elle à l'énergie du même état. Des résonances apparaissent ainsi fréquemment comme perturbations de valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints : l'état stable associé à la valeur propre de l'opérateur non perturbé "disparaît" sous l'effet de la perturbation, et donne naissance à un état instable, parfois qualifié de *métastable*. Il est toutefois difficile, en général, de déterminer une approximation fine d'un état métastable associé à une résonance, même par un développement perturbatif (cf.[Hun90]).

La recherche de résonances associées à un opérateur H_{part} implique la localisation du spectre du Hamiltonien dilaté $H_{part}(\theta)$. Or, une propriété bien connue est la suivante : si un intervalle réel I est inclus dans l'ensemble résolvant de $H_{part}(\theta)$, alors le spectre de H_{part} dans l'intervalle I est *absolument continu*. En plus de l'étude des résonances, les dilatations complexes permettent donc d'obtenir des informations sur le spectre d'un opérateur. Il n'est cependant pas nécessaire d'y avoir recours, en général, pour établir l'absolue continuité d'un spectre ; citons notamment la *théorie de Mourre* (cf.[Mou81]), qui est également utilisée fréquemment dans le contexte de l'électrodynamique quantique (cf.par exemple [BFSS99], [BFS98a], [FGS06]).

Reprenons la notation (10) et supposons connaître un ensemble $\{E_n\}$ de valeurs propres de H_0 . En relation avec l'existence d'états physiques instables d'énergie proche de E_n , on s'attend à ce que les valeurs propres non perturbées (excepté l'énergie fondamentale E_0) se changent en résonances lorsque l'interaction $H_I(\alpha)$ est ajoutée. Dans [BFS95, BFS98a, BFS98b, BFS99], V. Bach, J. Fröhlich et I. M. Sigal utilisent une notion de dilatations complexes dans le cadre de l'électrodynamique quantique non relativiste, afin d'étudier les résonances et l'absolue continuité du spectre des Hamiltoniens de Pauli-Fierz. Ainsi, dans [BFS98a, BFS98b], les auteurs obtiennent l'existence de résonances pour un modèle de Pauli-Fierz régularisé avec noyaux fixes et constante de couplage suffisamment petite.

La méthode employée dans [BFS98a, BFS98b] pour obtenir l'existence de résonances est basée sur une application d'un *groupe de renormalisation*. L'idée est semblable à celle du groupe de renormalisation de Wilson développée en physique théorique : on considère un modèle décrit par un certain nombre de paramètres et avec un certain ensemble de degrés de liberté. La première opération du groupe de renormalisation consiste à *décimer l'ensemble des degrés de liberté*, ce qui a pour effet de modifier les paramètres du modèle. En quelque sorte, la perte d'information due à la décimation des degrés de liberté se retrouve dans les nouveaux paramètres décrivant le modèle. La seconde opération du groupe de renormalisation consiste alors en un *changement d'échelle*, afin que les "anciens" et les "nouveaux" paramètres appartiennent à un même ensemble ; ceci permet en effet de comparer le modèle initial et le modèle renormalisé. Les parties du modèle correspondant à des paramètres "de plus en plus petits" sous l'effet de la renormalisation sont qualifiées d'*irrelevantes* ; celles aux contraires qui croissent sous l'effet de la renormalisation sont qualifiées de *relevantes* ; et celles enfin dont l'ordre de grandeur reste le même sont qualifiées de *marginales*.

En physique théorique, le groupe de renormalisation de Wilson agit dans un espace de Lagrangiens ; en revanche, le groupe de renormalisation développé par Bach, Fröhlich et Sigal

agit directement dans un espace de Hamiltoniens. Cet espace est construit de façon à ce qu'il contienne le Hamiltonien décrivant le modèle que l'on considère. La décimation de l'ensemble des degrés de liberté est assurée dans ce cadre par une *application de Feshbach* (cf. [BFS98a, BFS98b, BCFS02, GH07]). De plus, sous certaines restrictions, la partie du Hamiltonien $H_I(\alpha)$ correspondant à l'interaction entre le système atomique et le champ de bosons est irrelevante. Elle disparaît donc petit à petit sous l'effet du groupe de renormalisation ; c'est cette propriété qui permet de localiser les résonances.

Notons plus précisément $H(\theta)$ l'opérateur obtenu par dilatations complexes et issu du Hamiltonien de Pauli-Fierz (avec noyaux fixes) H , écrit sous la forme (10). Considérons une valeur propre discrète E_n de H_{part} de multiplicité m . La difficulté, pour étudier le comportement de E_n sous l'action du couplage entre les particules non relativistes et le champ de photons, vient du fait que, en tant que valeur propre de H_0 , E_n est à l'origine d'une *branche* de spectre essentiel. Malgré cela, par une analyse du groupe de renormalisation, le fait suivant est établi dans [BFS98a, BFS98b] : il existe m valeurs propres $\{E_n^j(\alpha)\}_{j=1}^m$ de $H(\theta)$ distinctes ou non, indépendantes de θ , et telles que :

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, E_n^j(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} E_n. \quad (12)$$

Ceci est illustré dans la figure 4 ; comme nous l'avons vu dans la section précédente, la première des valeurs propres non perturbées E_0 reste une valeur propre lorsque la perturbation est ajoutée. Observons par ailleurs que le résultat (12) est prouvé pour un modèle obtenu d'une part en ap-

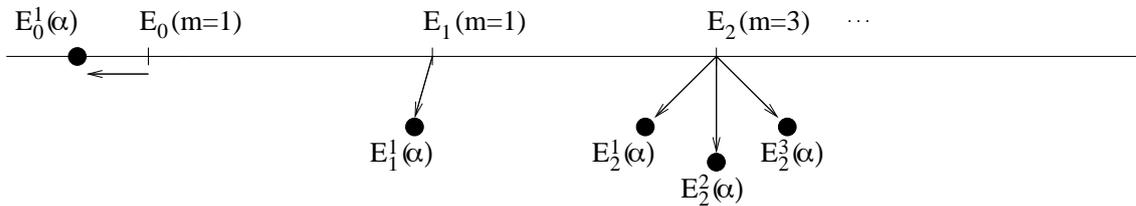


FIG. 4 – Résonances de H

pliquant à H une *transformation de Power-Zienau-Wooley* (voir section 2-6), et d'autre part en imposant une troncature spatiale à l'interaction entre les électrons et le champ de bosons. Cette troncature permet de lever une difficulté apparaissant lorsque le groupe de renormalisation est appliqué : la partie linéaire en α de la perturbation $H_I(\alpha)$ est marginale si l'on n'impose aucune restriction. On pourrait d'ailleurs également contourner cette difficulté en imposant à l'interaction une régularisation infrarouge, mais celle-ci est peut-être physiquement moins justifiée qu'une troncature spatiale. Cette dernière permet de plus de dilater seulement les moments des photons afin de définir $H(\theta)$, et d'étudier ses valeurs propres. Autrement dit dans ce cas, on a $H_0(\theta) = H_{part} \otimes I + e^{-\theta} I \otimes H_f$.

Dans [BFS99] maintenant, les transformations complexes qui sont considérées dilatent à la fois les positions des électrons ($x_j \mapsto e^\theta x_j$) et les moments des photons ($k \mapsto e^{-\theta} k$). L'opérateur non perturbé H_0 devient dans ce cas, une fois dilaté : $H_0(\theta) = H_{part}(\theta) \otimes I + e^{-\theta} I \otimes H_f$. Sans imposer de troncature spatiale à l'interaction (mais toujours pour un ensemble de noyaux fixes et une constante de couplage suffisamment petite), il est alors établi que le spectre de H est absolument continu dans un voisinage des valeurs propres non dégénérées

E_n . Plus exactement même, le résultat de [BFS99] montre que le spectre de H est absolument continu sur l'intervalle $[\inf \sigma(H), \Sigma_{part}]$ excepté peut-être sur un voisinage de ses bornes. Le nombre Σ_{part} désigne ici le *seuil d'ionisation* (pour l'opérateur de Schrödinger H_{part}) défini par $\Sigma_{part} = \inf \sigma_{ess}(H_{part})$.

A propos de l'étude de résonances dans le cadre de l'électrodynamique quantique non relativiste, citons encore [BCFS02] qui permet de simplifier quelque peu la démonstration de [BFS98a, BFS98b] conduisant à (12), en faisant appel à une *application de Feshbach lisse* ; c'est d'ailleurs cette application que nous utiliserons pour étudier les résonances de notre modèle. Dans [Che02], T. Chen applique la méthode du groupe de renormalisation pour étudier l'infimum du spectre d'un Hamiltonien $H(P)$ d'impulsion totale constante égale à P . Une approximation des états métastables plus fine que celle de [BFS99] est obtenue par M. Mück dans [Müc04]. Mentionnons enfin la thèse [Fel02].

5 Principaux résultats et organisation de la thèse

Nous citons dans cette section nos principaux résultats, sans toutefois écrire toutes les hypothèses dont nous aurons besoin pour leurs démonstrations. Nous renvoyons à la section 2-2 notamment, où sont listées la plupart des hypothèses que nous utiliserons. Par ailleurs, les résultats que nous regardons comme les plus importants de cette étude sont les théorèmes 0.4 et 0.6 ; leurs démonstrations ne semblent en effet pas pouvoir se déduire de façon directe de la littérature existant déjà sur le sujet.

Notre thèse est divisée en trois parties. Dans la première, après un chapitre consacré à des définitions, notations et propriétés de base, nous définissons précisément le Hamiltonien H_U^V associé au modèle de l'ion hydrogénoïde confiné. Nous établissons plus exactement le *caractère auto-adjoint* de H_U^V et en déterminons un *domaine de forme* explicite :

Théorème 0.1 *Pour toutes valeurs de la constante de structure fine α et du paramètre de troncature ultraviolette Λ , le Hamiltonien H_U^V est un opérateur auto-adjoint de domaine de forme :*

$$Q(H_U^V) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f), \quad (13)$$

où U^+ désigne la partie positive de U . De même, pour tout $m > 0$, le Hamiltonien massif $H_U^V(m)$, obtenu en remplaçant H_f par $H_f(m)$ dans la définition de H_U^V , est un opérateur auto-adjoint de domaine de forme :

$$Q(H_U^V(m)) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f) \cap Q(\mathcal{N}), \quad (14)$$

où \mathcal{N} est l'opérateur du nombre de photons.

Démonstration

Voir le théorème 2.11 du chapitre 2. \square

Nous établissons ensuite, toujours dans la première partie, l'*analyticité de type (B)* de la famille d'opérateurs dilatés $H_U^V(\theta)$ (obtenue en dilatant à la fois les positions de l'électron et du noyau et les moments des photons) :

Théorème 0.2 *Pour tout θ dans un voisinage complexe de 0, l'opérateur $H_U^V(\theta)$ est strictement m -sectoriel, de domaine de forme $Q(H_U^V(\theta)) = Q(H_U^V)$. De plus, l'application $\theta \mapsto H_U^V(\theta)$ est analytique de type (B).*

Démonstration

Voir le théorème 2.14 du chapitre 2. \square

Dans la deuxième partie de notre thèse, nous nous intéressons à la question de l'existence d'un état fondamental pour H_U^V . Notons que les résultats exposés dans cette deuxième partie ont été annoncés dans [AF06b] puis démontrés dans [AF06a]. Nous résolvons le problème de l'existence d'un état fondamental de manière non perturbative, c'est-à-dire pour toutes valeurs de q et Λ , en nous basant sur la méthode de [GLL01]. La clé de notre démonstration réside dans le choix des conditions de liaison suivantes :

$$(C.L.) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E(H_U^V) < E(H_0^V), \\ (ii) \quad E(H_U^V) < E(H_U^0). \end{array} \right.$$

Nous avons noté ici $E(A)$ l'infimum du spectre de l'opérateur A auto-adjoint et semi-borné inférieurement ; H_0^V (respectivement H_U^0) désigne de plus le Hamiltonien H_U^V dans lequel on a remplacé U par 0 (respectivement V par 0). Nous montrons tout d'abord que ces conditions de liaison sont bien adaptées au modèle de l'ion hydrogénoïde confiné :

Théorème 0.3 *Supposons que les conditions (C.L.) soient satisfaites. Alors, pour toutes valeurs de α et Λ , H_U^V possède un état fondamental, dans le sens où :*

$$\exists \Phi \in D(H_U^V), \|\Phi\| = 1, H_U^V \Phi = E(H_U^V) \Phi. \quad (15)$$

Démonstration

Voir le théorème 3.14 du chapitre 3. \square

La démonstration de ce théorème suit celle de [GLL01]. Toutefois, certaines différences, que nous détaillerons, apparaissent. Par exemple, la preuve de la décroissance exponentielle de l'état fondamental de $H_U^V(m)$ (voir section 3-2) ne nécessite pas le recours à [Gri02]. La définition de H_U^V utilisant les formes quadratiques permet aussi de justifier rigoureusement les questions de domaines intervenant dans les calculs, à l'aide des égalités (13)-(14).

Nous montrons ensuite, dans le chapitre 4 de la partie II, que :

Théorème 0.4 *Pour toutes valeurs de α et Λ , les conditions de liaison (C.L.) sont satisfaites.*

Démonstration

Voir les théorèmes 4.2 et 4.15 du chapitre 4. \square

La démonstration de la condition (C.L.) (i) suit encore [GLL01] et utilise essentiellement une propriété d'invariance par translation de H_0^V . En revanche, dans la mesure où H_U^0 n'est pas invariant par translation, la condition (C.L.) (i) est nettement plus difficile à obtenir et ne semble pas avoir d'équivalent déjà traité dans la littérature. Toute la difficulté vient du fait que, pour obtenir un état minimisant l'énergie de H_U^V , il pourrait *a priori* être nécessaire de placer le noyau et l'électron infiniment loin l'un de l'autre, en laissant par ailleurs le centre de masse localisé autour de l'origine. Cela entraînerait dans ce cas $E(H_U^V) = E(H_U^0)$. Pour contourner ce problème, nous aurons recours à un opérateur intermédiaire représentant des états virtuels, où le noyau et l'électron seront couplés chacun à un nuage de photons propre, le nuage de photons de l'électron ne pouvant pas interagir avec le noyau et réciproquement. Nous utiliserons alors des outils de localisation développés dans [LL03].

Dans la troisième partie enfin, nous abordons la question de l'existence de résonances pour H_U^V . Les résultats de cette partie sont exposés dans [Fau06]. Tout d'abord, avec l'aide de la méthode de projection de Feshbach, nous établissons l'absolue continuité d'une partie du spectre de H_U^V :

Théorème 0.5 *Soit $\Lambda > 0$ et supposons que $\alpha > 0$ est suffisamment petit. Alors le spectre de H_U^V est absolument continu sur :*

$$\mathcal{E} := [E(H_U^V), \infty[\setminus \mathcal{V}, \quad (16)$$

où \mathcal{V} est un voisinage d'ordre α^3 de l'ensemble $\{E(H_U^V)\} \cup \{e_n\}_{n \geq 0}$.

Démonstration

Voir le corollaire 5.12 du chapitre 5. \square

Rappelons que $\{e_n\}_{n \geq 0}$ désigne l'ensemble des valeurs propres de $P^2/2M + U$. La démonstration de ce théorème suit celle de [BFS99] et nécessite que l'on suppose satisfaites des hypothèses liées à *la règle d'or de Fermi*. Au cours de la preuve, nous détaillerons certaines estimations sensiblement différentes de celles obtenues dans [BFS99]. Les différences proviennent essentiellement de la particularité de notre modèle, de notre utilisation des formes quadratiques, et de quelques modifications que nous apportons.

Le dernier chapitre de notre thèse correspond à l'étude proprement dite des résonances. Comme dans [BFS98a] que nous avons déjà mentionné, cette étude des résonances nécessite deux choses : d'une part, on transforme H_U^V par une transformation de Power-Zienau-Wooley (voir section 2-6) ; d'autre part, on restreint l'interaction obtenue en imposant une troncature spatiale. Dans notre cas, la troncature spatiale que nous imposerons ne concernera *que la variable interne* r . Nous notons \tilde{H}_U^V l'opérateur obtenu après ces deux modifications ; nous l'écrivons sous la forme :

$$\tilde{H}_U^V = \tilde{H}_{part} \otimes I + I \otimes H_f + \tilde{H}_I(\alpha). \quad (17)$$

Nous notons de plus $\{\tilde{E}_l + e_n\}$ l'ensemble des valeurs propres de \tilde{H}_{part} . En supposant que le confinement engendré par $U(R)$ est au moins de l'ordre de R^2 en $+\infty$, nous serons alors en mesure de montrer :

Théorème 0.6 Soit $\Lambda > 0$ et supposons que $\alpha > 0$ est suffisamment petit. Soit (l, n) tel que :

$$\inf \sigma(\tilde{H}_{part}) \leq \tilde{E}_l + e_n < e_0. \quad (18)$$

Notons m la multiplicité de $\tilde{E}_l + e_n$ comme valeur propre (discrète) de \tilde{H}_{part} . Considérons enfin la famille d'opérateurs $\tilde{H}_U^V(\theta)$ obtenue à partir de \tilde{H}_U^V par dilatations complexes. Alors, pour tout θ proche de 0 et dans une région complexe convenablement choisie, il existe m valeurs propres $E_{l,n}^j(\alpha)$ de $\tilde{H}_U^V(\theta)$, indépendantes de θ , et telles que :

$$E_{l,n}^j(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} E_l + e_n. \quad (19)$$

En supposant de plus qu'une certaine hypothèse liée à la règle d'or de Fermi est satisfaite, ceci implique que $E_{l,n}^j(\alpha)$ est une résonance pour \tilde{H}_U^V .

Démonstration

Voir le théorème 6.10 du chapitre 6. \square

Plus précisément, nous montrerons que le spectre de $\tilde{H}_U^V(\theta)$ est localisé dans une région de la forme de celle hachurée dans la figure 5.

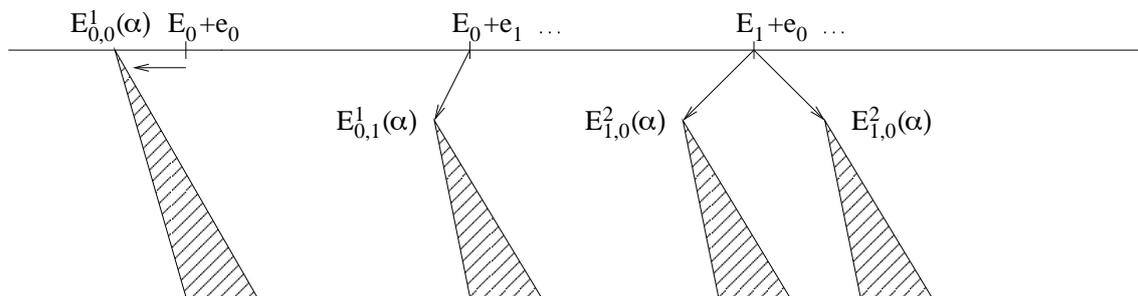


FIG. 5 – Spectre de $\tilde{H}_U^V(\theta)$

La démonstration de ce fait reprend les idées de [BFS98a, BFS98b], avec des outils développés dans [BCFS02]. Cependant, notre preuve ne peut se déduire directement de celles de [BFS98a, BFS98b, BCFS02], le caractère confinant du potentiel U jouant un rôle essentiel. En effet, l'intérêt principal de la transformation de Power-Zienau-Wooley utilisée ici est qu'elle améliore le comportement infrarouge de l'interaction. La perte générée, cependant, consiste en ce que le nouvel opérateur de couplage n'est plus borné lorsque les variables positions x_1, x_2 tendent vers l'infini. Pour contrôler ceci, plutôt que d'insérer directement une troncature spatiale en x_1, x_2 dans l'interaction (comme dans [BFS98a]), on insère seulement une troncature spatiale en la variable interne r ; c'est le potentiel $U(R)$ qui permet de contrôler le "reste" de l'interaction. Par rapport à [BFS98a, BFS98b], cela implique que l'on dilate à la fois les positions des particules non relativistes et celles des photons (non plus seulement celles des photons), ayant ainsi à gérer des opérateurs non normaux. Par ailleurs, toujours par rapport à [BFS98a, BFS98b], les estimations requises au cours de la preuve sont sensiblement modifiées.

Nous donnerons en fait des hypothèses suffisantes pour pouvoir appliquer le groupe de renormalisation, hypothèses différentes de celles de [BFS98a, BFS98b] (voir en particulier l'hypothèse $(\mathcal{H}_{1/2})$ de la section 6-2). Nous vérifierons alors bien entendu que, d'une part, ces hypothèses sont vérifiées par \tilde{H}_U^V , et d'autre part, qu'elles rendent effectivement possible une application (efficace) du groupe de renormalisation à partir de \tilde{H}_U^V . Le point crucial du chapitre 6 consistera donc à montrer que l'opérateur \tilde{H}_U^V constitue un bon "point de départ" pour appliquer le groupe de renormalisation. En revanche, une fois ceci prouvé, nous appliquerons les résultats de [BFS98b, BCFS02] conduisant à l'existence de résonances sans détailler la démonstration.

Pour établir le résultat du théorème 0.6, nous aurons une nouvelle fois besoin de supposer que des hypothèses liées à la règle d'or de Fermi sont vérifiées. En annexe, nous montrerons que l'une de ces conditions est effectivement satisfaite ; ceci sera fait dans le cas où le potentiel confinant U est harmonique et pour α suffisamment petit.

Première partie

Définition du Hamiltonien. Caractère autoadjoint.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et différents outils qui nous serviront tout au long de notre étude. En particulier, nous donnons, dans la première section, quelques propriétés des formes quadratiques associées à un opérateur auto-adjoint, ou à un opérateur strictement m -sectoriel, dans un espace de Hilbert. Nous définissons ensuite l'espace de Fock des états du champ électromagnétique quantifié, ainsi que certaines classes d'opérateurs agissant dans cet espace. Enfin, nous consacrons la dernière section à une brève description de la notion de résonances que nous utiliserons dans la partie III.

1-1 Formes quadratiques

Dans toute cette section, \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert quelconque, muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . Si A est un opérateur de \mathcal{H} , nous noterons son domaine $D(A)$; lorsque $D(A)$ est dense, l'adjoint de A est bien défini, et sera noté A^* .

Nous appelons ici forme quadratique q de \mathcal{H} , de la même façon que dans [RS80], une application sesquilinéaire de $Q(q) \times Q(q)$ dans \mathbb{C} telle que $Q(q)$ est un sous-espace vectoriel dense de \mathcal{H} . On peut trouver une étude détaillée de ces applications dans [Kat66]. $Q(q)$ est appelé domaine de forme de q , et les notions de forme quadratique symétrique, semi-bornée, fermée... sont définies dans [Kat66] ou [RS80] (voir également [LB03]); nous ne les redonnons pas ici. Nous rappelons brièvement dans cette première section quelques propriétés associant formes quadratiques et opérateurs.

1-1.1 Forme quadratique associée à un opérateur auto-adjoint

Considérons un opérateur auto-adjoint de \mathcal{H} , noté A . Il existe alors une représentation spectrale de A telle que A devient la multiplication par x dans un certain espace $\oplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$, avec $N \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ (cf.[RS80]).

Définition 1.1 Avec les notations précédentes, on appelle forme quadratique associée à A la

forme de domaine :

$$Q(A) := \left\{ \psi = (\psi_n)_{n=1}^N \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mu_n), \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi_n(x)|^2 d\mu_n(x) < \infty \right\}, \quad (1.1)$$

définie, dans cette représentation, par :

$$q_A(\phi, \psi) = \sum_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} x \overline{\phi_n(x)} \psi_n(x) d\mu_n(x). \quad (1.2)$$

$Q(A)$ est alors appelé domaine de forme de l'opérateur auto-adjoint A , et on peut montrer que q_A est fermée sur $Q(A)$.

La plupart des opérateurs desquels nous étudierons le domaine de forme seront semi-bornés inférieurement. Dans ce cas, le domaine de forme peut être explicité de la façon suivante :

Proposition 1.1 *Soit A un opérateur auto-adjoint semi-borné inférieurement et soit M sa borne inférieure (en particulier, $A - M \geq 0$). Alors :*

$$Q(A) = D((A - M)^{1/2}). \quad (1.3)$$

Démonstration

Il suffit d'observer que pour tout $(\phi, \psi) \in D(A) \times D(A)$:

$$q_A(\phi, \psi) = (\phi, A\psi) = ((A - M)^{1/2}\phi, (A - M)^{1/2}\psi) + M(\phi, \psi). \quad (1.4)$$

On conclut en utilisant le fait que $D(A)$ est à la fois un cœur de $(A - M)^{1/2}$ et un cœur de forme de q_A . \square

Les égalités (1.4) montrent de plus que la forme quadratique associée à un opérateur auto-adjoint semi-borné inférieurement est elle-même semi-bornée inférieurement. Réciproquement, on a (cf. [Kat66]) :

Proposition 1.2 *Soit q une forme quadratique fermée et semi-bornée inférieurement. Alors il existe un unique opérateur A auto-adjoint et semi-borné inférieurement tel que $q = q_A$.*

Considérons deux opérateurs auto-adjoints A et B tels que la forme quadratique $q_{A+B} := q_A + q_B$ définie sur $Q(A) \cap Q(B)$ soit fermée et semi-bornée inférieurement. Utilisant la proposition 1.2, on peut alors associer à q_{A+B} un opérateur auto-adjoint que l'on note $A \dot{+} B$. En particulier, $A \dot{+} B$ est bien défini si A et B sont auto-adjoints et positifs, puisqu'on a :

Proposition 1.3 *Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques fermées et positives telles que $Q(q_1) \cap Q(q_2)$ est dense. Alors la forme quadratique q définie sur $Q(q_1) \cap Q(q_2)$ par $q = q_1 + q_2$ est également fermée et positive.*

Démonstration

Le démonstration est directe à partir des définitions de formes quadratiques fermées et positives. \square

Remarquons que, lorsqu'on peut le définir, l'opérateur $A \dot{+} B$ n'est pas, en général, égal à la "somme des opérateurs" A et B , même si $A + B$ préalablement défini sur $D(A) \cap D(B)$ est fermable. On a toutefois :

Proposition 1.4 *Soient A un opérateur auto-adjoint semi-borné inférieurement et soit B un opérateur auto-adjoint relativement borné par rapport à A avec borne relative strictement plus petite que 1. Alors B est également relativement borné par rapport à A au sens des formes avec borne relative strictement plus petite que 1. De plus :*

$$A + B = A \dot{+} B.$$

En d'autres termes, les opérateurs obtenus en appliquant respectivement le théorème de Kato-Rellich et le théorème KLMN sont les mêmes.

Démonstration

Le fait que B soit relativement borné par rapport à A au sens des formes avec borne relative strictement plus petite que 1 est un résultat que l'on peut trouver dans [RS75, Théorème X.18]. En utilisant que A est semi-borné inférieurement, on en déduit d'ailleurs que $q_{A \dot{+} B}$ est semi-bornée inférieurement.

Ensuite, on observe que q_{A+B} et $q_{A \dot{+} B}$ coïncident sur $D(A)$. Or d'après le théorème de Kato-Rellich, $D(A)$ est un cœur de $A + B$; c'est donc également un cœur de forme de q_{A+B} . Par ailleurs d'après le théorème KLMN, $D(A)$ est un cœur de forme de $q_{A \dot{+} B}$. Ainsi q_{A+B} et $q_{A \dot{+} B}$ sont deux formes quadratiques fermées qui coïncident sur un cœur commun à chacune d'entre elles; elles sont donc égales. On en déduit $A + B = A \dot{+} B$. \square

1-1.2 Forme strictement m-sectorielle et analyticité de type (B)

Nous avons rappelé brièvement dans la sous-section précédente comment associer un opérateur auto-adjoint et une forme quadratique symétrique et fermée. Dans cette sous-section, suivant encore [Kat66] ou [RS80], nous nous plaçons dans un cadre un peu plus général en rappelant quelques propriétés permettant d'associer certains opérateurs fermés, non auto-adjoints, à des formes quadratiques non symétriques. Nous rappelons également la notion d'analyticité de type (B) (cf. [Kat66] ou [RS78]) que nous utiliserons en particulier dans la partie III.

Commençons par rappeler :

Définition 1.2 *Une forme quadratique q est dite strictement m-sectorielle si q est fermée et s'il existe $\tau \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]0, \pi/2[$ tels que :*

$$\forall \phi \in Q(q), \left| \arg[e^{i\tau} q(\phi, \phi) + z \|\phi\|^2] \right| \leq \theta. \quad (1.5)$$

La proposition suivante montre qu'on peut associer de manière unique un opérateur fermé à une forme quadratique strictement m -sectorielle :

Proposition 1.5 *Soit q une forme quadratique strictement m -sectorielle. Il existe un unique opérateur fermé H , appelé opérateur strictement m -sectoriel, tel que :*

- a) $D(H) \subset Q(q)$ et pour tout $\phi, \psi \in D(H)$, $q(\phi, \psi) = (\phi, H\psi)$,
- b) $D(H^*) \subset Q(q)$ et pour tout $\phi, \psi \in D(H^*)$, $q(\phi, \psi) = (H^*\phi, \psi)$.

Démonstration

Voir par exemple [RS80, Théorème VIII.16]. \square

Rappelons ensuite la notion d'analyticité de type (B) pour une famille d'opérateurs dépendant d'un paramètre complexe θ :

Définition 1.3 *Soit D un domaine inclus dans \mathbb{C} . La famille de formes quadratiques $(q_\theta)_{\theta \in D}$ est dite analytique de type (b) sur D si :*

1. Pour tout $\theta \in D$, q_θ est strictement m -sectorielle, et le domaine de forme Q de q_θ est indépendant de θ .
2. Pour tout $\phi \in Q$, $\theta \mapsto q_\theta(\phi, \phi)$ est analytique sur D .

La famille d'opérateurs strictement m -sectoriels H_θ associée à q_θ par la proposition 1.5 est dite analytique de type (B).

On peut montrer qu'une famille analytique de type (B) est analytique au sens de Kato (cf. [Kat66] ou [RS78]). Ainsi, en particulier, on a le résultat suivant :

Proposition 1.6 *Soit H_θ une famille analytique de type (B) sur un domaine complexe D contenant 0. Supposons de plus que $H(\theta)$ est auto-adjoint pour θ réel. Soit $E(0)$ une valeur propre de $H(0)$ de multiplicité finie m , telle que $E(0)$ est isolée du reste du spectre de $H(0)$.*

Pour θ dans un voisinage de 0, il existe alors des valeurs propres $E_1(\theta), \dots, E_m(\theta)$ (non nécessairement distinctes) de $H(\theta)$, telles que pour tout $1 \leq i \leq m$, $\theta \mapsto E_i(\theta)$ est analytique.

Démonstration

Voir par exemple [RS78, Théorème XII.13]. \square

1-2 Espace de Fock

1-2.1 Définitions et notations

Mathématiquement, un photon polarisé peut être représenté par un élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$. L'espace \mathbb{R}^3 correspond en effet à l'espace physique dans lequel évoluent les particules, et le fait que les vecteurs d'état associés à ces particules soient à valeurs dans

\mathbb{C}^2 est dû à la polarisation. Pour des raisons de commodité, nous utiliserons l'isomorphisme d'espaces de Hilbert :

$$L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2) \simeq L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}). \quad (1.6)$$

Un photon polarisé sera donc décrit par un élément de $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$.

Notons dès maintenant pour simplifier les écritures :

$$\underline{\mathbb{R}}^3 := \{\underline{y} = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}\} = \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}. \quad (1.7)$$

De même pour $A \subset \mathbb{R}^3$, nous noterons $\underline{A} := A \times \{1, 2\}$, puis :

$$\int_{\underline{A}} d\underline{y} := \sum_{\lambda=1,2} \int_A dy. \quad (1.8)$$

Nous utiliserons systématiquement la variable y pour décrire la position des photons que nous considérerons, et leur impulsion sera décrite par la variable k . En d'autres termes, nous pourrions choisir de décrire un photon polarisé, de façon équivalente, soit par un vecteur d'état $\phi \in L^2(\underline{\mathbb{R}}^3)$, soit, le plus souvent, par sa transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ que nous écrivons :

$$(\mathcal{F}\Phi)(\underline{k}) := \widehat{\phi}(\underline{k}) = \widehat{\phi}((k, \lambda)) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot y} \phi((y, \lambda)) dy. \quad (1.9)$$

Nous dirons que y est un élément de l'espace des configurations et que sa variable duale k est un élément de l'espace des moments.

Les photons étant des bosons (c'est-à-dire des particules de spin entier), la fonction d'onde décrivant un système de n photons polarisés doit être symétrique ; elle sera ainsi vue comme un élément de l'espace :

$$S_n L^2(\underline{\mathbb{R}}^3) \otimes \cdots \otimes L^2(\underline{\mathbb{R}}^3), \quad (1.10)$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation agissant dans le produit tensoriel de n copies de $L^2(\underline{\mathbb{R}}^3)$:

$$S_n \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)}. \quad (1.11)$$

Σ_n désigne ici l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Utilisant la notation $\underline{\mathbb{R}}^{3n} := (\underline{\mathbb{R}}^3)^n$ ainsi que l'isomorphisme d'espaces de Hilbert :

$$L^2(\underline{\mathbb{R}}^3) \otimes \cdots \otimes L^2(\underline{\mathbb{R}}^3) \simeq L^2(\underline{\mathbb{R}}^{3n}), \quad (1.12)$$

nous représenterons le plus souvent un système de n photons polarisés par un élément de l'ensemble :

$$L_s^2(\underline{\mathbb{R}}^{3n}) := \left\{ \Phi^{(n)} \in L^2(\underline{\mathbb{R}}^{3n}), \forall \sigma \in \Sigma_n, \Phi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = \Phi^{(n)}(\underline{y}_{\sigma(1)}, \dots, \underline{y}_{\sigma(n)}) \right\}. \quad (1.13)$$

Le nombre de photons n'est généralement pas conservé au cours d'un processus d'interaction entre la matière et le champ électromagnétique. Un état de ce dernier est alors décrit par un élément de l'espace de Fock symétrique \mathcal{F}_s défini par :

$$\mathcal{F}_s := \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{+\infty} L_s^2(\underline{\mathbb{R}}^{3n}). \quad (1.14)$$

Nous écrivons un élément Φ appartenant à \mathcal{F}_s de la façon suivante :

$$\Phi = (\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}(\underline{y}_1), \Phi^{(2)}(\underline{y}_1, \underline{y}_2), \dots). \quad (1.15)$$

Pour $\Phi \in \mathcal{F}_s$, nous noterons également :

$$\mathcal{F}\Phi = \widehat{\Phi} := (\widehat{\Phi}^{(0)}, \widehat{\Phi}^{(1)}(\underline{k}_1), \widehat{\Phi}^{(2)}(\underline{k}_1, \underline{k}_2), \dots), \quad (1.16)$$

où $\widehat{\Phi}^{(0)} := \Phi^{(0)}$ et pour $n \geq 1$,

$$\widehat{\Phi}^{(n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) := \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{-i(k_1 \cdot y_1 + \dots + k_n \cdot y_n)} \Phi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) dy_1 \dots dy_n. \quad (1.17)$$

L'usage semble être d'utiliser $\widehat{\Phi}$ plutôt que Φ pour décrire un état du champ de photons. Toutefois, comme dans la partie II nous localiserons les *positions* des photons, nous aurons besoin de considérer la représentation de Φ dans l'espace des configurations.

On voit (cf. par exemple [RS80]) que \mathcal{F}_s est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathcal{F}_s} = \overline{\Phi^{(0)}} \Psi^{(0)} + \sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \overline{\Phi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)} \Psi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) dy_1 \dots dy_n. \quad (1.18)$$

Ainsi, lorsque le champ électromagnétique quantifié est dans l'état physique correspondant à un certain vecteur unitaire $\Phi \in \mathcal{F}_s$, la probabilité que n photons se trouvent dans la région A de \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$\int_{A^n} |\Phi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)|^2 dy_1 \dots dy_n. \quad (1.19)$$

L'état du vide de photons correspond au vecteur :

$$\Omega = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}_s. \quad (1.20)$$

L'ensemble décrivant les états n'ayant qu'un nombre fini de photons est défini quant à lui par le sous-espace vectoriel de \mathcal{F}_s :

$$\mathcal{F}_s^0 := \{ \Phi \in \mathcal{F}_s, \exists N, \forall n \geq N, \Phi^{(n)} = 0 \}. \quad (1.21)$$

Il est facile de voir que \mathcal{F}_s^0 est dense dans \mathcal{F}_s . Nous définissons enfin le sous-espace vectoriel de \mathcal{F}_s^0 , D_S , lui aussi dense dans \mathcal{F}_s , par :

$$D_S := \{ \Phi \in \mathcal{F}_s^0, \forall n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{1, 2\}^n, \Phi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n}) \}, \quad (1.22)$$

où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n})$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur \mathbb{R}^{3n} .

1-2.2 Opérateurs de création et d'annihilation

Nous définissons dans cette sous-section les opérateurs de création et d'annihilation qui agissent dans l'espace \mathcal{F}_s ; nous en donnons également quelques propriétés fondamentales.

Tout d'abord, l'opérateur d'annihilation $a(f)$ est défini sur \mathcal{F}_s^0 , pour $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, par :

$$a(f)S_n\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n := \frac{\sqrt{n+1}}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (f, \phi_{\sigma(1)})\phi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)}. \quad (1.23)$$

On peut voir que $D((a(f))^*)$ contient \mathcal{F}_s^0 . L'opérateur de création $a^*(f)$ est alors défini comme étant la restriction de $(a(f))^*$ à \mathcal{F}_s^0 :

$$a^*(f) := (a(f))^*|_{\mathcal{F}_s^0}. \quad (1.24)$$

Comme les adjoints de $a(f)$ et $a^*(f)$ sont à domaine dense, ces opérateurs sont fermables ; nous continuerons à noter $a(f)$ et $a^*(f)$ leurs fermetures respectives.

Remarquons que $a(f)$ est appelé opérateur d'annihilation car il "transforme" un état à n photons en un état à $n - 1$ photons :

$$a(f) : L_s^2(\mathbb{R}^{3n}) \rightarrow L_s^2(\mathbb{R}^{3(n-1)}). \quad (1.25)$$

Et de même, $a^*(f)$ est appelé opérateur de création car il "transforme" un état à n photons en un état à $n + 1$ photons :

$$a^*(f) : L_s^2(\mathbb{R}^{3n}) \rightarrow L_s^2(\mathbb{R}^{3(n+1)}). \quad (1.26)$$

Pour $\Phi \in \mathcal{F}_s^0$, on peut voir que $a(f)$ et $a^*(f)$ opèrent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (a(f)\Phi)^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) &= \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(y)} \Phi^{(n+1)}(\underline{y}, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) d\underline{y}, \\ (a^*(f)\Phi)^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(\underline{y}_i) \Phi^{(n-1)}(\underline{y}_1, \dots, \hat{\underline{y}}_i, \dots, \underline{y}_n), \end{aligned} \quad (1.27)$$

où la notation $(\underline{y}_1, \dots, \hat{\underline{y}}_i, \dots, \underline{y}_n)$ signifie que la variable \underline{y}_i est retirée du n-uple $(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)$.

Ecrivons $a^\#(f)$ pour $a(f)$ ou $a^*(f)$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\lambda \in \{1, 2\}$, définissons :

$$a_\lambda^\#(f) := a^\#(f_\lambda), \quad (1.28)$$

où $f_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est définie par :

$$f_\lambda(k, \mu) := \delta_{\lambda\mu} f(k). \quad (1.29)$$

On peut montrer que les opérateurs de création $a_\lambda^*(f)$ et d'annihilation $a_\lambda(f)$ satisfont aux Relations Canoniques de Commutation :

$$\begin{aligned} [a_\lambda(f), a_{\lambda'}^*(g)] &= \delta_{\lambda\lambda'}(f, g), \\ [a_\lambda(f), a_{\lambda'}(g)] &= [a_\lambda^*(f), a_{\lambda'}^*(g)] = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

On souhaite maintenant écrire $a_\lambda^*(f)$ et $a_\lambda(f)$ sous la forme :

$$a_\lambda^*(f) := \int_{\mathbb{R}^3} a_\lambda^*(y) f(y) dy, \quad a_\lambda(f) := \int_{\mathbb{R}^3} a_\lambda(y) \overline{f(y)} dy. \quad (1.31)$$

Ces notations, fréquemment utilisées en physique, prennent un sens si on considère chaque membre de l'égalité comme une forme quadratique sur $D_S \times D_S$. Plus précisément, pour $y \in \mathbb{R}^3$, on définit l'opérateur $a_\lambda(y)$ sur D_S par :

$$(a_\lambda(y)\Phi)^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = \sqrt{n+1}\Phi^{(n+1)}((y, \lambda), \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n). \quad (1.32)$$

Puis $a_\lambda^*(y)$ est défini comme une forme quadratique sur $D_S \times D_S$ par :

$$\langle \Phi, a_\lambda^*(y)\Psi \rangle := \langle a_\lambda(y)\Phi, \Psi \rangle. \quad (1.33)$$

Remarquons que $a_\lambda^*(y)$ n'est pas défini comme un opérateur car, formellement, on a :

$$(a_\lambda^*(y)\Phi)^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda\lambda_i} \delta(y - y_i) \Phi^{(n-1)}(\underline{y}_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, \underline{y}_n), \quad (1.34)$$

où $\delta_{\lambda\lambda_i}$ est le symbole de Kronecker et où $\delta(\cdot)$ désigne la distribution de Dirac. Les égalités (1.31) signifient donc que pour tout $(\Phi, \Psi) \in D_S \times D_S$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \Phi, a_\lambda^*(f)\Psi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Phi, a_\lambda^*(y)\Psi \rangle f(y) dy, \\ \langle \Phi, a_\lambda(f)\Psi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Phi, a_\lambda(y)\Psi \rangle \overline{f(y)} dy. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Si on se place dans l'espace des moments plutôt que dans l'espace des configurations, on peut définir de même, pour $k \in \mathbb{R}^3$, un opérateur $\hat{a}_\lambda(k)$ sur D_S par :

$$(\hat{a}_\lambda(k)\hat{\Phi})^{(n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = \sqrt{n+1}\hat{\Phi}^{(n+1)}((k, \lambda), \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n), \quad (1.36)$$

et une forme quadratique $\hat{a}_\lambda^*(k)$ sur $D_S \times D_S$ par :

$$\langle \hat{\Phi}, \hat{a}_\lambda^*(k)\hat{\Psi} \rangle := \langle \hat{a}_\lambda(k)\hat{\Phi}, \hat{\Psi} \rangle. \quad (1.37)$$

Notons qu'alors pour tout $(\Phi, \Psi) \in D_S \times D_S$:

$$\begin{aligned} \langle \Phi, a_\lambda^*(f)\Psi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^3} \langle \hat{\Phi}, \hat{a}_\lambda^*(k)\hat{\Psi} \rangle \hat{f}(k) dk, \\ \langle \Phi, a_\lambda(f)\Psi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^3} \langle \hat{\Phi}, \hat{a}_\lambda(k)\hat{\Psi} \rangle \overline{\hat{f}(k)} dk. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Et de même :

$$\begin{aligned} \langle \Phi, a_\lambda^*(y)\Psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \hat{\Phi}, \hat{a}_\lambda^*(k)\hat{\Psi} \rangle e^{-ik \cdot y} dk, \\ \langle \Phi, a_\lambda(y)\Psi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \hat{\Phi}, \hat{a}_\lambda(k)\hat{\Psi} \rangle e^{ik \cdot y} dk. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Remarquons enfin que les opérateurs de création permettent de construire une base Hilbertienne de \mathcal{F}_s à partir d'une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous donnons ce résultat sous la forme d'une proposition dont la démonstration, directe, n'est pas écrite ici.

Proposition 1.7 Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^3)$. Alors l'ensemble des vecteurs de la forme :

$$|i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f := \frac{1}{\sqrt{p_1! \dots p_n!}} a^*(f_{i_1})^{p_1} \dots a^*(f_{i_n})^{p_n} \Omega \quad (1.40)$$

constituent une base Hilbertienne de \mathcal{F}_s . De plus, tout élément Φ de \mathcal{F}_s s'écrit sous la forme :

$$\Phi = \sum_{n \geq 0} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} \sum_{p_1, \dots, p_n} \Phi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n} |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f. \quad (1.41)$$

1-2.3 Seconde quantification

Nous définissons dans cette sous-section la seconde quantification d'un opérateur et étudions plus en détail les cas particuliers de l'opérateur représentant le nombre de photons, \mathcal{N} , et de l'opérateur représentant l'énergie du champ de photons libres, H_f .

D'une façon générale, si A est un opérateur de $L^2(\mathbb{R}^3)$ de domaine dense $D(A)$, on définit l'opérateur $A^{(n)}$ agissant dans $L^2_s(\mathbb{R}^{3n})$ et de domaine $S_n \otimes_{i=1}^n D(A)$ par :

$$A^{(n)} := A \otimes I \otimes \dots \otimes I + I \otimes A \otimes I \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes I \otimes A. \quad (1.42)$$

La seconde quantification de A , notée $d\Gamma(A)$, est alors l'opérateur de \mathcal{F}_s de domaine :

$$D_A := \left\{ \Phi \in \mathcal{F}_s^0, \forall n, \Phi^{(n)} \in \otimes_{i=1}^n D(A) \right\}, \quad (1.43)$$

défini par :

$$d\Gamma(A) := \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)}. \quad (1.44)$$

Il est facile de voir que D_A est dense dans \mathcal{F}_s et on peut montrer (cf.[RS80]) que $d\Gamma(A)$ est essentiellement auto-adjoint sur D_A . On note encore $d\Gamma(A)$ sa fermeture.

L'opérateur du nombre de photons est défini comme étant la seconde quantification de l'identité :

$$\mathcal{N} := d\Gamma(I). \quad (1.45)$$

La dénomination "nombre de photons" est justifiée par le fait que, pour tout $\Phi \in D(\mathcal{N})$, on a :

$$(\mathcal{N}\Phi)^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = n\Phi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n). \quad (1.46)$$

Il est alors facile de constater que le domaine de \mathcal{N} est donné par :

$$D(\mathcal{N}) := \left\{ \Phi \in \mathcal{F}_s, \sum_{n \geq 1} n^2 \|\Phi^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})} < \infty \right\}. \quad (1.47)$$

Quant au domaine de forme de \mathcal{N} , on peut voir de façon similaire qu'il s'écrit :

$$Q(\mathcal{N}) := \left\{ \Phi \in \mathcal{F}_s, \sum_{n \geq 1} n \|\Phi^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})} < \infty \right\}. \quad (1.48)$$

Au sens des formes quadratiques sur $D_S \times D_S$, on a d'ailleurs :

$$\langle \Phi, \mathcal{N}\Psi \rangle = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle a_\lambda(y)\Phi, a_\lambda(y)\Psi \rangle dy = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi}, \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Psi} \rangle dk. \quad (1.49)$$

Maintenant, l'opérateur représentant l'énergie du champ de photons libre est défini par :

$$H_f := d\Gamma(\omega(-i\nabla)) = d\Gamma(\mathcal{F}^{-1}\omega\mathcal{F}), \quad (1.50)$$

où ω est la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} telle que $\omega(k) = |k|$. En effet, dans les unités telles que $\hbar = c = 1$, l'énergie d'un photon de moment k est égale à $|k|$. On notera parfois \widehat{H}_f l'énergie du champ de photons libre agissant dans l'espace des moments et défini par :

$$\widehat{H}_f := \mathcal{F}H_f\mathcal{F}^{-1}. \quad (1.51)$$

Nous serons amené à utiliser par la suite un modèle dans lequel les photons possèdent une masse $m > 0$; l'opérateur H_f sera alors remplacé par :

$$H_f(m) := d\Gamma(\omega_m(-i\nabla)), \quad (1.52)$$

où $\omega_m(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$. On adoptera d'ailleurs la convention $H_f = H_f(0)$. Notons que les inégalités $\max(|k|, m) \leq \sqrt{k^2 + m^2} \leq |k| + m$ vérifiées pour tout $k \in \mathbb{R}^3$ impliquent :

$$Q(H_f(m)) = Q(H_f) \cap Q(\mathcal{N}). \quad (1.53)$$

Au sens des formes quadratiques sur $D_S \times D_S$, on a pour tout $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \langle \Phi, H_f(m)\Psi \rangle &= \sum_{\lambda=1,2} \langle a_\lambda(\cdot)\Phi, \omega_m(-i\nabla)a_\lambda(\cdot)\Psi \rangle \\ &= \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_m(k) \langle \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi}, \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Psi} \rangle dk. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Enfin, on pourrait montrer que D_S est un cœur respectivement de \mathcal{N} , H_f et $H_f(m)$.

Terminons cette sous-section par deux propositions utiles pour la suite ; la première est une estimation de $\|a^\#(f)\Phi\|$ en fonction de $\|H_f^{1/2}\Phi\|$, et la seconde une estimation de $\|a^\#(f)\Phi\|$ en fonction de $\|\mathcal{N}^{1/2}\Phi\|$.

Proposition 1.8 *Soit f dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que $\widehat{f}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Alors, pour tout $\Phi \in Q(H_f)$, on a :*

$$\|a(f)\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2 \leq \left\| \frac{\widehat{f}}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|H_f^{1/2}\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2, \quad (1.55)$$

$$\|a^*(f)\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2 \leq \left\| \frac{\widehat{f}}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|H_f^{1/2}\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2 + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2. \quad (1.56)$$

Démonstration

Comme D_S est un cœur de H_f , c'est aussi un cœur de forme de q_{H_f} ; il suffit alors de montrer la proposition pour tout $\Phi \in D_S$. Soient donc $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que $\widehat{f}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\Phi \in D_S$. On a :

$$\begin{aligned}
\|a(f)\Phi\|^2 &= \sum_{n \geq 0} (n+1) \left\| \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(\underline{y})} \Phi^{(n+1)}(\underline{y}, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) d\underline{y} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 \\
&= \sum_{n \geq 0} (n+1) \left\| \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\widehat{f}(\underline{k})} \widehat{\Phi}^{(n+1)}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) d\underline{k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 \\
&\leq \left\| \frac{\widehat{f}}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \sum_{n \geq 0} (n+1) \left\| \sqrt{\omega(\underline{k})} \widehat{\Phi}^{(n+1)}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3(n+1)})}^2 \\
&= \left\| \frac{\widehat{f}}{\sqrt{\omega}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 q_{H_f}(\Phi, \Phi),
\end{aligned} \tag{1.57}$$

donc la première inégalité est vérifiée. On en déduit directement la seconde grâce aux Relations Canoniques de Commutation, en écrivant que :

$$\|a^*(f)\Phi\|^2 = \|a(f)\Phi\|^2 + \|f\|^2 \|\Phi\|^2. \tag{1.58}$$

□

On a de même, avec \mathcal{N} à la place de H_f :

Proposition 1.9 *Soit f dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Alors, pour tout $\Phi \in Q(\mathcal{N})$, on a :*

$$\|a(f)\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\mathcal{N}^{1/2}\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2, \tag{1.59}$$

$$\|a^*(f)\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\mathcal{N}^{1/2}\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2 + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \|\Phi\|_{\mathcal{F}_s}^2. \tag{1.60}$$

1-2.4 Produit tensoriel d'espaces de Fock

A plusieurs reprises au cours de notre étude, nous serons amené à considérer des produits tensoriels d'espaces de Fock. Nous donnons ici des isomorphismes permettant d'écrire $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s$ d'une manière différente et parfois plus commode. Nous voyons également comment se comportent les opérateurs \mathcal{N} et H_f définis dans la sous-section précédente dans les différents points de vue. Nous renvoyons à [DG99] pour de plus amples détails.

Commençons par une proposition dont la démonstration est directe :

Proposition 1.10 *Il existe un isomorphisme unitaire d'espaces de Hilbert :*

$$\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)) \simeq \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s, \tag{1.61}$$

où $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3))$ est l'espace de Fock symétrique construit à partir de $L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$ de la même façon que \mathcal{F}_s a été construit en (1.14) à partir de $L^2(\mathbb{R}^3)$. De plus l'unique application \mathcal{I} telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\Omega &= \Omega \otimes \Omega, \\ \mathcal{I}a^*(f \oplus g)\mathcal{I}^{-1} &= a^*(f) \otimes I + I \otimes a^*(g),\end{aligned}\tag{1.62}$$

sur $\mathcal{F}_s^0 \otimes \mathcal{F}_s^0$, constitue un tel isomorphisme. On a enfin :

$$\mathcal{I}d\Gamma(I \oplus I)\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{N} \otimes I + I \otimes \mathcal{N},\tag{1.63}$$

et de même :

$$\mathcal{I}d\Gamma(\omega(-i\nabla) \oplus \omega(-i\nabla))\mathcal{I}^{-1} = H_f \otimes I + I \otimes H_f =: \tilde{H}_f,\tag{1.64}$$

sur $D(\mathcal{N} \otimes \mathcal{N})$ et $D(H_f \otimes H_f)$ respectivement.

Maintenant, de la même manière qu'en (1.6), les espaces de Hilbert suivant sont isomorphes :

$$L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \simeq L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2) \simeq L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}),\tag{1.65}$$

et nous noterons donc de façon cohérente avec (1.7) :

$$\underline{\mathbb{R}}^3 := \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\} = \{\underline{k} = (\underline{k}, \mu) = (k, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\} = \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}^2\}.\tag{1.66}$$

On peut alors définir des opérateurs de création et d'annihilation dans $\mathcal{F}_s(L^2(\underline{\mathbb{R}}^3))$ comme nous l'avons fait pour \mathcal{F}_s . Leur construction étant en tout point similaire, nous ne la reproduisons pas ; de plus, nous continuerons à noter $a^*(f)$ et $a(f)$ respectivement, pour $f \in L^2(\underline{\mathbb{R}}^3)$, les opérateurs de création et d'annihilation dans $\mathcal{F}_s(L^2(\underline{\mathbb{R}}^3))$. Leurs "noyaux", définis au sens des formes quadratiques, seront notés quant à eux $a_{\lambda, \mu}^\#(y)$ pour $\lambda, \mu \in \{1, 2\}$ et $y \in \mathbb{R}^3$. Ainsi par exemple, l'opérateur de nombre dans $\mathcal{F}_s(L^2(\underline{\mathbb{R}}^3))$, noté encore \mathcal{N} , s'écrit au sens des formes quadratiques :

$$\begin{aligned}\langle \Phi, \mathcal{N}\Psi \rangle &= \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mu=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle a_{\lambda, \mu}(y)\Phi, a_{\lambda, \mu}(y)\Psi \rangle dy \\ &= \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mu=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \hat{a}_{\lambda, \mu}(k)\hat{\Phi}, \hat{a}_{\lambda, \mu}(k)\hat{\Psi} \rangle dk.\end{aligned}\tag{1.67}$$

On pourrait écrire le même genre de relations pour $a^*(f)$, $a(f)$, \tilde{H}_f , ... en adaptant celles obtenues dans le cas de \mathcal{F}_s .

1-3 Dilatations complexes et résonances

Dans cette section nous rappelons très brièvement la notion de résonances que nous utiliserons ainsi que quelques-unes de ses propriétés. Nous n'écrivons pas les démonstrations, qui sont semblables à celles écrites dans le cas d'opérateurs de Schrödinger (voir par exemple [AC71, BC71], [Sim72, Sim73], [RS78], [CFKS87], [HS96]).

Considérons l'espace de Hilbert :

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^6) \otimes \mathcal{F}_s. \quad (1.68)$$

Définissons, pour θ dans un voisinage réel de 0, la famille d'isométries \mathcal{U}_θ agissant dans \mathcal{H} par :

$$\mathcal{U}_\theta := \mathcal{U}_{part}^\theta \otimes \mathcal{U}_{ph}^\theta, \quad (1.69)$$

où $\mathcal{U}_{part}^\theta$ est définie pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R}^6)$ par :

$$(\mathcal{U}_{part}^\theta \phi)(x_1, x_2) := e^{3\theta} \phi(e^\theta x_1, e^\theta x_2), \quad (1.70)$$

et où $\mathcal{U}_{ph}(\theta)$ est définie pour tout $\Phi \in \mathcal{F}_s$ par :

$$(\mathcal{U}_{ph}^\theta \Phi)^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = e^{3n\theta/2} \Phi^{(n)}(e^\theta y_1, \dots, e^\theta y_n). \quad (1.71)$$

On a une première proposition :

Proposition 1.11 *Soit \mathcal{A} l'ensemble des vecteurs $u \in \mathcal{H}$ tels que l'application $\theta \mapsto \mathcal{U}_\theta u$ admet un prolongement analytique à un voisinage complexe de 0. Alors \mathcal{A} est dense dans \mathcal{H} .*

Soit maintenant H un opérateur auto-adjoint de \mathcal{H} . Posons pour θ dans un voisinage réel de 0 :

$$H(\theta) := \mathcal{U}_\theta H \mathcal{U}_\theta^*, \quad (1.72)$$

et supposons que l'application $\theta \mapsto H(\theta)$ admet un prolongement, sur un voisinage complexe de 0, à une famille d'opérateurs analytiques au sens de Kato. On définit :

Définition 1.4 *Supposons qu'il existe une valeur propre E de $H(\theta)$ telle que $\text{Im}(E) < 0$ et telle que E est indépendante de θ , pour θ dans une région complexe proche de 0. Alors E est appelée résonance de H .*

En supposant toujours l'analyticité de $H(\theta)$, on peut étudier grâce aux dilatations complexes l'absolue continuité du spectre de H :

Proposition 1.12 *Soit I un intervalle fermé. Supposons qu'il existe θ complexe dans un voisinage de 0 tel que $I \subset \rho(H(\theta))$ où $\rho(H(\theta))$ désigne l'ensemble résolvant de $H(\theta)$. Alors la résolvante de H définie par $R(z) := (H - z)^{-1}$ admet un prolongement analytique depuis le demi-plan supérieur \mathbb{C}^+ sur $\mathbb{C}^+ \cup V(I)$ où $V(I)$ est un voisinage complexe de I . De plus, le spectre de H est absolument continu sur l'intervalle I .*

Démonstration

Voir les références citées au début de cette section. \square

Chapitre 2

Le Hamiltonien H_U^V

Dans ce chapitre, nous définissons le Hamiltonien associé au modèle de l'ion hydrogénoïde confiné en électrodynamique quantique non relativiste. Nous montrons, en utilisant les formes quadratiques, que cet opérateur est auto-adjoint, et nous en donnons un domaine de forme explicite. Nous établissons ensuite l'analyticité de type (B) sur un voisinage de 0.

2-1 Définition formelle

Nous nous plaçons en jauge de Coulomb pour décrire le Hamiltonien ; les unités sont de plus choisies telles que $\hbar = c = 1$. L'espace de Hilbert décrivant les états possibles du système que nous étudions est :

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^6) \otimes \mathcal{F}_s. \quad (2.1)$$

L'espace $L^2(\mathbb{R}^6) \simeq L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$ correspond aux états de l'électron et du noyau (pour lesquels le spin est négligé), et \mathcal{F}_s correspond comme nous l'avons vu aux états du champ électromagnétique quantifié. Nous utiliserons la plupart du temps l'isomorphisme d'espaces de Hilbert :

$$\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s) = \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \mathcal{F}_s dX. \quad (2.2)$$

Par abus de notation, si A est un opérateur de $L^2(\mathbb{R}^6)$, nous désignerons encore par la lettre A l'opérateur $A \otimes I$ agissant dans \mathcal{H} , et de même, si B est un opérateur de \mathcal{F}_s , nous écrirons B pour $I \otimes B$. Le produit scalaire sur \mathcal{H} sera noté (\cdot, \cdot) , tandis que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ correspondra au produit scalaire sur \mathcal{F}_s . Nous utiliserons de plus la même notation dans le cas de vecteurs, c'est-à-dire que l'on pourra par exemple écrire, pour $\Phi \in \mathcal{H}$:

$$\|\nabla\Phi\|^2 = (\nabla\Phi, \nabla\Phi) = \sum_{i=1,6} (\nabla_i\Phi, \nabla_i\Phi) = \sum_{i=1,6} \int_{\mathbb{R}^6} \langle (\nabla_i\Phi)(X), (\nabla_i\Phi)(X) \rangle dX, \quad (2.3)$$

le symbole ∇ désignant ici le gradient dans \mathbb{R}^6 .

Rappelons que nous avons défini les variables internes (r, p) et les variables associées au centre de masse (R, P) dans la section 1 de l'introduction générale. Rappelons de plus que,

formellement, c'est-à-dire sans nous intéresser pour l'instant à un domaine de définition sur lequel il serait auto-adjoint, le Hamiltonien que nous nous proposons d'étudier s'écrit :

$$H_U^V := \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j A_j)^2 + H_f + U + V. \quad (2.4)$$

Le potentiel de Coulomb V responsable de l'attraction électron-noyau agit sur la variable interne r et s'écrit :

$$V(r) := -C \frac{Zq^2}{|r|}, \quad (2.5)$$

où C est une constante strictement positive ; d'autre part, U est un potentiel *confinant* agissant sur le centre de masse R . Nous donnons la liste des hypothèses sur U dont nous aurons besoin dans la section suivante.

Le potentiel vecteur du champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb, $A_j := (A_j^1, A_j^2, A_j^3)$, est défini pour $i = 1, 2, 3$ par :

$$A_j^i := \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} A^i(x_j) dX, \quad (2.6)$$

où nous avons posé $X = (x_1, x_2)$. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, $A^i(x)$ est l'opérateur de \mathcal{F}_s :

$$A^i(x) := \sum_{\lambda=1,2} [a_\lambda^*(h^i((x - \cdot), \lambda)) + a_\lambda(h^i((x - \cdot), \lambda))], \quad (2.7)$$

où la fonction de couplage $h^i \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est définie par :

$$h^i(y, \lambda) := \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{\sqrt{|k|}} \varepsilon_\lambda^i(k) e^{-ik \cdot y} dk. \quad (2.8)$$

En écrivant, par un léger abus de notation, $h^i(x - (y, \lambda)) := h^i(x - y, \lambda)$, $A^i(x)$ s'écrit plus simplement :

$$A^i(x) = a^*(h^i(x - \cdot)) + a(h^i(x - \cdot)). \quad (2.9)$$

Les vecteurs ε_λ que nous avons utilisés dans la définition (2.8) sont des vecteurs de polarisation en jauge de Coulomb. Autrement dit, le triplet $(k/|k|, \varepsilon_1(k), \varepsilon_2(k))$ forme une base orthonormale de \mathbb{R}^3 . Nous choisissons les vecteurs suivants (où $k := (k^1, k^2, k^3)$) :

$$\varepsilon_1(k) = \frac{(k^2, -k^1, 0)}{\sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}}, \quad \varepsilon_2(k) = \frac{k}{|k|} \wedge \varepsilon_1(k). \quad (2.10)$$

Notons d'ailleurs que $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ ne sont bien définis que sur $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ où Oz est l'axe $\{(0, 0, k^3), k^3 \in \mathbb{R}\}$. Enfin, $\widehat{\chi}_\Lambda$ est la fonction de troncature ultraviolette, dépendant du paramètre Λ . Nous donnerons les hypothèses sur $\widehat{\chi}_\Lambda$ dont nous aurons besoin dans la section 2-2 suivante.

On montre (voir par exemple [RS75, Théorème X.41]) en utilisant le théorème de Nelson que $A^i(x)$ est essentiellement auto-adjoint sur \mathcal{F}_s^0 pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$. Donc,

comme on peut montrer que $A_j(\cdot)$ est mesurable, d'après [RS78, Théorème XIII.85], l'opérateur A_j est auto-adjoint sur :

$$D(A_j) = \left\{ \Phi \in \mathcal{H}, \text{ pour presque tout } X, \Phi(X) \in D(A(x_j)), \right. \\ \left. \text{et } \int_{\mathbb{R}^6} \|A(x_j)\Psi(X)\|^2 dX < \infty \right\}. \quad (2.11)$$

On a enfin pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, au sens des formes quadratiques sur $D_S \times D_S$:

$$\langle \Phi, A^i(x)\Psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{\sqrt{|k|}} \varepsilon_\lambda^i(k) \langle \widehat{\Phi}, (\widehat{a}_\lambda^*(k)e^{-ik \cdot x} + \widehat{a}_\lambda(k)e^{ik \cdot x}) \widehat{\Psi} \rangle dk. \quad (2.12)$$

Remarque 2.1

Plutôt que H_U^V , on pourra parfois faire appel au Hamiltonien réordonné au sens de Wick : H_U^V :. D'une manière générale, pour un opérateur A s'exprimant en fonctions des opérateurs de création et d'annihilation, on note : A : l'opérateur issu de A et réordonné au sens de Wick l'opérateur obtenu en "plaçant les opérateurs de création à gauche et les opérateurs d'annihilation à droite".

Ainsi dans le cas de H_U^V , les produits d'opérateurs de création et d'annihilation n'apparaissent que dans le développement des termes $A^i(x_j)^2$, pour lesquels on a :

$$: A^i(x_j)^2 := a^*(h^i(x_j - \cdot))^2 + a(h^i(x_j - \cdot))^2 + 2a^*(h^i(x_j - \cdot))a(h^i(x_j - \cdot)). \quad (2.13)$$

Or, comme par les relations canoniques de commutation :

$$[a(h^i(x_j - \cdot)), a^*(h^i(x_j - \cdot))] = \|h^i\|^2, \quad (2.14)$$

on constate que H_U^V et : H_U^V : ne diffèrent que d'une constante (dépendant notamment du paramètre de troncature ultraviolette Λ et de la constante de structure fine α). En particulier donc, H_U^V et : H_U^V : possèdent les mêmes propriétés spectrales.

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent, nous aurons besoin de faire appel dans la suite à un modèle dans lequel les photons sont considérés comme massifs. Dans ce cas, le Hamiltonien associé au système, agissant lui aussi dans \mathcal{H} , est défini formellement par :

$$H_U^V(m) := \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j A_j)^2 + H_f(m) + U + V, \quad (2.15)$$

où $H_f(m)$ est l'opérateur défini en (1.52), associé à l'énergie du champ de photons libres et considérés comme massifs.

2-2 Hypothèses supplémentaires sur le modèle

Nous dressons dans cette section les principales hypothèses, concernant notamment le potentiel confinant U , dont nous aurons besoin pour obtenir nos résultats.

Commençons par une hypothèse qui nous permettra de définir convenablement les opérateurs contenant U dans leur définition :

$$(\mathcal{H}_0) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad U \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3), \\ (ii) \quad \inf(U) > -\infty \text{ et } U^- \text{ est à support compact.} \end{array} \right.$$

La notation U^- désigne la partie négative de U , et d'une manière générale, si $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, nous noterons A^+ et A^- respectivement les parties positives et négatives de A .

Nous aurons aussi besoin de :

$$(\mathcal{H}_1) \left\{ \begin{array}{l} P^2/2M + U \text{ possède un état fondamental } \phi_U > 0 \text{ d'énergie } e_0 < 0 \\ \text{tel que } \phi_U, \nabla \phi_U \in L^\infty(\mathbb{R}^3). \end{array} \right.$$

Le fait de supposer $e_0 < 0$ dans l'hypothèse (\mathcal{H}_1) n'est pas nécessaire. Cependant, quitte à translater, on peut toujours se ramener à $e_0 < 0$; comme ceci nous sera utile pour obtenir l'existence d'un état fondamental dans la partie II, nous conservons cette hypothèse. Par ailleurs, si les deux hypothèses (\mathcal{H}_0) et (\mathcal{H}_1) sont toutes deux vérifiées, l'opérateur $e^{-t(P^2/2M+U)}$ est "positivity improving" pour tout $t > 0$ (voir par exemple [RS78]), si bien que l'état fondamental fourni par l'hypothèse (\mathcal{H}_1) est non dégénéré.

Dans un souci de simplification, nous supposerons parfois :

$$(\mathcal{H}_{dis}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Le spectre de } P^2/2M + U \text{ est purement discret.} \end{array} \right.$$

L'hypothèse suivante est plus forte que $(\mathcal{H}_0)(ii)$ et (\mathcal{H}_{dis}) . Elle se révélera nécessaire pour obtenir l'existence de résonances dans la partie III :

$$(\mathcal{H}_2) \left\{ \begin{array}{l} \exists c_0 > 0, \exists c_1 \in \mathbb{R}, \forall R \in \mathbb{R}^3, U(R) \geq c_0 R^2 - c_1. \end{array} \right.$$

Ensuite, comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, nous ferons appel à une méthode de dilatations complexes lors de notre étude des résonances. Aussi faut-il que U possède certaines propriétés d'analyticité que nous explicitons maintenant. Tout d'abord nous ferons l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}_U) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } a > 0 \text{ tel que } U \text{ est une fonction analytique à valeurs réelles sur} \\ \{z \in \mathbb{C}^3, z = e^{i\nu} R, |\nu| \leq a, R \in \mathbb{R}^3\}. \end{array} \right.$$

Le réel θ_0 étant suffisamment petit, et θ appartenant au disque $D(0, \theta_0) \subset \mathbb{C}$, nous définissons la forme quadratique q_U^θ sur $Q(P^2/2M + U)$ par :

$$q_U^\theta(\phi, \psi) := \frac{e^{-2\theta}}{2M} \int_{\mathbb{R}^3} (\overline{P\phi})(R)(P\psi)(R)dR + \int_{\mathbb{R}^3} U(e^\theta R)\overline{\phi}(R)\psi(R)dR. \quad (2.16)$$

Le fait que q_U^θ soit bien définie est garanti par l'hypothèse (\mathcal{H}_3) que nous écrivons maintenant :

$$(\mathcal{H}_3) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad D(P^2/2M + U) = D(P^2) \cap D(U^+), \\ (ii) \quad \text{Il existe } c > 0 \text{ et } C(\theta_0) \in \mathbb{R} \text{ telles que } C(\theta_0) \xrightarrow{\theta_0 \rightarrow 0} 0 \text{ et } \forall \theta \in D(0, \theta_0), \\ \quad |(\phi, [e^{2\theta}U(e^\theta \cdot) - U(\cdot)]\psi)| \leq C(\theta_0) |(\phi, U(\cdot)\psi)| + c\|\phi\|\|\psi\|, \\ \quad \text{pour tous } \phi \in L^2(\mathbb{R}^6) \text{ et } \psi \in D(U^+), \\ (iii) \quad \forall \psi \in Q(\frac{P^2}{2M} + U), \theta \mapsto q_U^\theta(\psi, \psi) \text{ est analytique sur } D(0, \theta_0). \end{array} \right.$$

Notons que cette hypothèse est satisfaite si, par exemple, $U(R) = c_0 R^2 - c_1$ avec $c_0 > 0$.

En ce qui concerne la troncature ultraviolette $\widehat{\chi}_\Lambda$, nous considérerons deux fonctions ; nous utiliserons la première dans la partie II concernant l'existence d'un état fondamental :

$$(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^1) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \widehat{\chi}_\Lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \\ (ii) \quad \widehat{\chi}_\Lambda(k) \text{ ne dépend que de } |k|, \\ (iii) \quad \widehat{\chi}_\Lambda = 1 \text{ sur } B(0, \Lambda/2), \text{ et } \widehat{\chi}_\Lambda = 0 \text{ sur } B(0, \Lambda)^c. \end{array} \right.$$

Ici, la notation $B(0, r)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon r dans \mathbb{R}^3 ; la notation B^c désigne le complémentaire de l'ensemble B . Dans la partie III, de la même façon que pour U , nous aurons besoin d'une hypothèse d'analyticité sur $\widehat{\chi}_\Lambda$. Pour simplifier, nous choisissons alors pour $\widehat{\chi}_\Lambda$ la fonction gaussienne suivante :

$$(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2) \left\{ \widehat{\chi}_\Lambda(k) = e^{-k^2/(Z^4 q^8 \Lambda^2)} \right.$$

Notons que les résultats de la partie II seront valables à la fois sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^1)$ et sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$, tandis que les résultats de la partie III ne seront valables que sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$.

2-3 Le Hamiltonien associé aux particules non relativistes H_{part}

Si le champ de photons n'est pas pris en compte, le système que nous étudions se réduit à un électron et un noyau interagissant par l'intermédiaire du potentiel de Coulomb, et dont le centre de masse est confiné par un potentiel U . L'énergie de ce modèle de mécanique quantique est représentée, mathématiquement, par un opérateur de Schrödinger agissant dans $L^2(\mathbb{R}^6)$. Nous écrivons dans cette section cet opérateur et en donnons les principales propriétés.

2-3.1 Définition et caractère auto-adjoint de H_{part}

Notons que l'on a, au sens d'opérateurs auto-adjoints de domaines $H^2(\mathbb{R}^6)$ (où $H^s(\mathbb{R}^6)$ désigne l'espace de Sobolev habituel sur \mathbb{R}^6) :

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu}. \quad (2.17)$$

Définissons maintenant à l'aide de l'hypothèse (\mathcal{H}_0) le Hamiltonien associé aux particules :

Proposition 2.2 *Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_0) vérifiée. Définissons la forme quadratique $\tilde{q}_{H_{part}}$ sur :*

$$\tilde{Q}(H_{part}) := Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) = H^1(\mathbb{R}^6) \cap Q(U^+) \subset L^2(\mathbb{R}^6) \quad (2.18)$$

de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{H_{part}}(\phi, \psi) := & \frac{1}{2m_1}(p_1\phi, p_1\psi) + \frac{1}{2m_2}(p_2\phi, p_2\psi) - ((V^-)^{1/2}\phi, (V^-)^{1/2}\psi) \\ & - ((U^-)^{1/2}\phi, (U^-)^{1/2}\psi) + ((U^+)^{1/2}\phi, (U^+)^{1/2}\psi). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Alors $\tilde{q}_{H_{part}}$ est une forme quadratique fermée et semi-bornée inférieurement. L'opérateur auto-adjoint qui lui est associée par la proposition 1.2 est noté H_{part} : autrement dit, $q_{H_{part}} = \tilde{q}_{H_{part}}$.

Démonstration

En premier lieu, observons que $\tilde{q}_{H_{part}}$ est bien définie sur $\tilde{Q}(H_{part})$. En effet, $V^- = -V$ est relativement borné par rapport à $p^2/2\mu$ avec borne relative 0, et donc (cf. [RS75, Théorème X.18]) V^- est relativement borné par rapport à $p^2/2\mu$ au sens des formes avec borne relative 0. De même, par $(\mathcal{H}_0)(ii)$, U^- est relativement borné par rapport à $P^2/2M$ au sens des formes avec borne relative 0. En utilisant (2.17), on voit donc que $q_{H_{part}}$ est bien définie. Par ailleurs $\tilde{Q}(H_{part})$ est dense puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \subset \tilde{Q}(H_{part})$. De plus pour tout ϕ dans $\tilde{Q}(H_{part})$, on a :

$$(1-a) \left[\frac{1}{2m_1} (p_1\phi, p_1\phi) + \frac{1}{2m_2} (p_2\phi, p_2\phi) \right] + ((U^+)^{1/2}\phi, (U^+)^{1/2}\phi) q_{H_{part}}(\phi, \phi) \quad (2.20)$$

$$\leq \tilde{q}_{H_{part}}(\phi, \phi) + C(a) \|\phi\|^2,$$

où $a > 0$ peut-être choisi aussi petit qu'on le veut, et où $C(a)$ est une constante positive dépendant de a . Ceci prouve que $\tilde{q}_{H_{part}}$ est fermée et semi-bornée inférieurement par la proposition 1.3, puisque $q_{p^2/2\mu + P^2/2M}$ et q_{U^+} sont fermées et positives respectivement sur $H^1(\mathbb{R}^6)$ et $Q(U^+)$. \square

On peut par ailleurs définir $P^2/2M + U$ "directement" en utilisant le fait que, si (\mathcal{H}_0) est vérifiée, $P^2/2M + U$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (cf. [RS75]). Mais on a la proposition suivante :

Proposition 2.3 H_{part} est égal à la fermeture de $(p^2/2\mu + V) \otimes I + I \otimes (P^2/2M + U)$ défini sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. En particulier, $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ est un cœur de forme de $q_{H_{part}}$.

Démonstration

Il suffit de constater que, vue la définition (2.19) de $q_{H_{part}}$, $H_{part}|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)}$ est égal à $(p^2/2\mu + V) \otimes I + I \otimes (P^2/2M + U)|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)}$. Or cet opérateur est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, et on conclut en utilisant le fait que H_{part} est auto-adjoint. \square

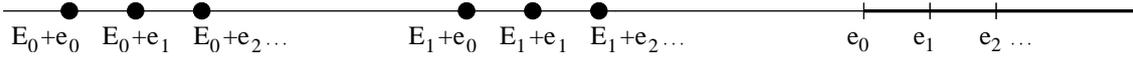
Cette proposition permet de décrire le spectre de H_{part} :

$$\sigma(H_{part}) = \overline{\sigma(p^2/2\mu + V) + \sigma(P^2/2M + U)}. \quad (2.21)$$

On sait que le spectre de $p^2/2\mu + V$ est constitué d'une suite $(E_l)_{l \geq 0}$ croissante de valeurs propres strictement négatives s'accumulant en 0, et de la demi-droite de spectre absolument continu $[0, \infty[$. Afin de décrire le spectre de $P^2/2M + U$, supposons pour simplifier que (\mathcal{H}_{dis}) est vérifiée. Alors $\sigma(P^2/2M + U)$ est constitué d'une suite croissante de valeurs propres $(e_n)_{n \geq 0}$. Par (2.21), le spectre de H_{part} s'obtient donc comme décrit dans la figure 2.1 ; les ronds noirs représentent des valeurs propres et le trait épais du spectre essentiel.

2-3.2 Analyticité de type (B) de $H_{part}(\theta)$

Nous établissons dans cette sous-section l'analyticité de type (B) de la famille d'opérateurs $H_{part}(\theta)$ pour θ dans un voisinage complexe de 0. Cette famille d'opérateurs est définie par

FIG. 2.1 – Spectre du Hamiltonien associé aux particules H_{part}

dilatations complexes, comme expliqué dans la section 1-3. Nous considérons donc la famille d'isométries $\mathcal{U}_{part}^\theta$, pour θ dans un voisinage réel de 0, telles que :

$$(\mathcal{U}_{part}^\theta \phi)(x_1, x_2) := e^{3\theta} \phi(e^\theta x_1, e^\theta x_2), \quad (2.22)$$

pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R}^6)$. Il est alors facile de voir que, si (\mathcal{H}_U) est vérifiée, toujours pour θ dans un voisinage réel de 0, et sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$:

$$H_{part}(\theta) := \mathcal{U}_{part}^\theta H_{part} (\mathcal{U}_{part}^\theta)^* = e^{-2\theta} \sum_{j=1,2} \frac{p_j^2}{2m_j} + e^{-\theta} V + U(e^\theta \cdot). \quad (2.23)$$

On souhaite prolonger l'égalité (2.23) sur un voisinage complexe de 0, de telle façon que la famille d'opérateurs obtenue soit analytique de type (B). Pour ce faire, nous allons supposer que les hypothèses (\mathcal{H}_U) et (\mathcal{H}_3) sont satisfaites. Ceci nous permettra également de décrire le spectre de $H_{part}(\theta)$.

Commençons par la partie de H_{part} liée aux variables internes (p, r) .

Lemme 2.4 *Définissons, pour θ dans un voisinage complexe de 0, la forme quadratique q_V^θ sur $H^1(\mathbb{R}^3)$ de la façon suivante :*

$$q_V^\theta(\phi, \psi) := \frac{e^{-2\theta}}{2\mu} (p\phi, p\psi) - e^{-\theta} ((V^-)^{1/2} \phi, (V^-)^{1/2} \psi). \quad (2.24)$$

Pour θ_0 suffisamment petit et θ dans le disque complexe $D(0, \theta_0)$, q_V^θ est une forme strictement m -sectorielle de domaine $H^1(\mathbb{R}^3)$; on note $e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V$ l'opérateur associé à q_V^θ par la proposition 1.5. Alors, $\theta \mapsto e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$.

Démonstration

Fixons $\theta_0 > 0$ et $\theta \in D(0, \theta_0)$. Remarquons tout d'abord que la forme quadratique q_V^θ donnée en (2.24) est bien définie dans la mesure où $H^1(\mathbb{R}^3) \subset D((V^-)^{1/2})$. Plus précisément, on sait (cf. par exemple [RS78]) que pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que pour tout ψ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$:

$$((V^-)^{1/2} \psi, (V^-)^{1/2} \psi) \leq a(p\psi, p\psi) + b(\psi, \psi). \quad (2.25)$$

Cette inégalité montre que q_V^θ est fermée sur $H^1(\mathbb{R}^3)$. En effet, si (ψ_n) est une suite de $H^1(\mathbb{R}^3)$ telle que $\psi_n \rightarrow \psi$ et $q_\theta(\psi_n - \psi_m, \psi_n - \psi_m) \rightarrow 0$, on a :

$$|q_V^\theta(\psi_n - \psi_m, \psi_n - \psi_m)| \geq \left(\frac{|e^{-2\theta}|}{2\mu} - a |e^{-\theta}| \right) \|p(\psi_n - \psi_m)\|^2 - |e^{-\theta}| b \|\psi_n - \psi_m\|^2. \quad (2.26)$$

Si a est choisi si petit que $|e^{-2\theta}|/2\mu - a|e^{-\theta}| > 0$ pour tout θ dans $D(0, \theta_0)$, on en déduit que $\|p(\psi_n - \psi_m)\| \rightarrow 0$, et donc que $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi q_V^θ est fermée sur $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Maintenant, pourvu que θ_0 soit choisi suffisamment petit, on peut voir que :

$$|\arg[e^{2\theta} q_V^\theta(\psi, \psi) + (E_0 + 1)(\psi, \psi)]| \leq \theta_1, \quad (2.27)$$

pour un certain θ_1 tel que $0 < \theta_1 < \pi/2$. Autrement dit, pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, q_V^θ est strictement m -sectorielle, de domaine $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Enfin, vue la définition (2.24), il est évident que pour tout $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\theta \mapsto q_V^\theta(\psi, \psi)$ est analytique sur $D(0, \theta_0)$. On en déduit donc immédiatement que $e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$. \square

Remarque 2.5 *L'opérateur strictement m -sectoriel associé par le lemme précédent à la forme quadratique q_V^θ définie en (2.24) n'est autre que l'opérateur $e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^3)$.*

Démonstration

Il s'agit de déterminer le domaine de $e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V$ défini par le lemme 2.4. Notons que nous aurions pu définir "directement" cet opérateur sur $H^2(\mathbb{R}^3)$ en posant :

$$\left(e^{-2\theta} \frac{p^2}{2\mu} + e^{-\theta} V \right) \psi := e^{-2\theta} \frac{p^2}{2\mu} \psi + e^{-\theta} V \psi. \quad (2.28)$$

Or on peut montrer que l'égalité (2.28) définit un opérateur strictement m -sectoriel sur $H^2(\mathbb{R}^3)$, dans le sens où il est fermé et vérifie $\operatorname{Re}(\psi, (p^2/2\mu + e^\theta V)\psi) \geq 0$ pour tout $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$. On peut ainsi lui associer une forme quadratique strictement m -sectorielle \tilde{q}_V^θ . Alors, par construction, $H^2(\mathbb{R}^3)$ est un cœur de forme de \tilde{q}_V^θ , et d'autre part, il est facile de voir que $H^2(\mathbb{R}^3)$ est aussi un cœur de forme de q_V^θ . Finalement, \tilde{q}_V^θ et q_V^θ sont deux formes quadratiques fermées qui coïncident sur un cœur commun ; donc $\tilde{q}_V^\theta = q_V^\theta$. En particulier on a bien :

$$D(e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V) = H^2(\mathbb{R}^3). \quad (2.29)$$

\square

Passons maintenant à la seconde partie de H_{part} liée aux variables associées au centre de masse (R, P) :

Lemme 2.6 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) et (\mathcal{H}_3) sont satisfaites. Pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, la forme quadratique q_U^θ définie en (2.16) est strictement m -sectorielle, de domaine $Q(P^2/2M + U)$; on note $e^{-2\theta} P^2/2M + U(e^\theta \cdot)$ l'opérateur associé à q_U^θ par la proposition 1.5. Alors, l'application $\theta \mapsto e^{-2\theta} P^2/2M + U(e^\theta \cdot)$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$.*

Démonstration

Rappelons que q_U^θ est bien définie sur $Q(P^2/2M + U)$ par l'hypothèse (\mathcal{H}_3) , et qu'on a pour tout $\phi \in Q(P^2/2M + U)$:

$$q_U^\theta(\phi, \phi) := \frac{e^{-2\theta}}{2M}(P\phi, P\phi) + \int_{\mathbb{R}^3} U(e^\theta R)\overline{\phi}(R)\phi(R)dR. \quad (2.30)$$

Montrons tout d'abord que q_U^θ est fermée sur $Q(P^2/2M + U)$. Soit (ψ_n) une suite de $Q(P^2/2M + U)$ telle que $\psi_n \rightarrow \psi$ et $q_U^\theta(\psi_n - \psi_m, \psi_n - \psi_m) \rightarrow 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2M} \overline{P(\psi_n - \psi_m)}(R)P(\psi_n - \psi_m)(R)dR \\ & + (1 - C(\theta_0)) \int_{\mathbb{R}^3} U^+(R)\overline{(\psi_n - \psi_m)}(R)(\psi_n - \psi_m)(R)dR \\ & - (1 + C(\theta_0)) \inf(U) \|\psi_n - \psi_m\|^2 \\ & \leq |e^{2\theta} q_U^\theta(\psi_n - \psi_m, \psi_n - \psi_m)| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

où $C(\theta_0)$ est la constante positive définie dans l'hypothèse (\mathcal{H}_3) , et où $\inf(U) > -\infty$ par l'hypothèse (\mathcal{H}_0) . On en déduit que $\psi \in Q(P^2/2M + U)$ et donc que q_U^θ est fermée.

Maintenant, par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)(ii)$, on a pour tout $\psi \in Q(P^2/2M + U)$:

$$|e^{2\theta} q_U^\theta(\psi, \psi) - q_{P^2/2M+U}(\psi, \psi)| \leq C(\theta_0) [q_{P^2/2M+U}(\psi, \psi) + (2 \inf(U) + c)\|\psi\|^2]. \quad (2.32)$$

Pourvu que θ_0 soit choisi suffisamment petit, on en déduit que pour tout $\psi \in Q(P^2/2M + U)$:

$$\arg [e^{2\theta} q_U^\theta(\psi, \psi) + (1 + 2 \inf(U) + c)(\psi, \psi)] \leq \theta_2, \quad (2.33)$$

où θ_2 est un certain réel tel que $0 < \theta_2 < \pi/2$. On a donc montré que, pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, q_U^θ est une forme strictement m-sectorielle.

Enfin, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)(iii)$, pour tout $\phi \in Q(P^2/2M + U)$, $\theta \mapsto q_U^\theta(\phi, \phi)$ est analytique sur $D(0, \theta_0)$. Ainsi, $\theta \mapsto e^{-2\theta} P^2/2M + U(e^\theta \cdot)$ est bien analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$. \square

Les lemmes 2.4 et 2.6 vont maintenant nous permettre de définir $H_{part}(\theta)$ pour $\theta \in D(0, \theta_0)$ de telle façon que $H_{part}(\theta)$ soit analytique de type (B) et :

$$\sigma(H_{part}(\theta)) = \sigma(e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V) + \sigma(e^{-2\theta} P^2/2M + U(e^\theta \cdot)). \quad (2.34)$$

Nous allons pour ce faire appliquer le lemme d'Ichinose (cf.[RS78]) :

Proposition 2.7 *Soit θ_0 suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) et (\mathcal{H}_3) sont vérifiées. Soit $H_{part}(\theta)$, pour $\theta \in D(0, \theta_0)$, la fermeture de $(e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V) \otimes I + I \otimes (e^{-2\theta} P^2/2M + U(e^\theta \cdot))$ défini préalablement sur $D(e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V) \otimes D(e^{-2\theta} P^2/2M + U(e^\theta \cdot)) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$. Alors $\theta \mapsto H_{part}(\theta)$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$, de domaine de forme $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+)$, et pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ est un cœur de forme de $q_{H_{part}(\theta)}$. De plus on a :*

$$\sigma(H_{part}(\theta)) = \sigma(e^{-2\theta} p^2/2\mu + e^{-\theta} V) + \sigma(e^{-2\theta} P^2/2M + U(e^\theta \cdot)). \quad (2.35)$$

Démonstration

Pour pouvoir appliquer le lemme d'Ichinose à $H_{part}(\theta)$, il nous faut considérer les secteurs associés aux opérateurs strictement m-sectoriels $e^{-2\theta}p^2/2\mu + e^{-\theta}V$ et $e^{-2\theta}P^2/2M + U(e^\theta \cdot)$. Or, on peut montrer que :

$$S_{-E_0-1; -2\text{Im}\theta; \theta_1} := \{z, -2\text{Im}\theta - \theta_1 \leq \arg(z - E_0 - 1) \leq -2\text{Im}\theta + \theta_1\} \quad (2.36)$$

est un secteur de $e^{-2\theta}p^2/2\mu + e^{-\theta}V$; et en utilisant les hypothèses (\mathcal{H}_0) et (\mathcal{H}_3) , on peut montrer de même que :

$$\begin{aligned} S_{-2\inf(U)-1; -2\text{Im}\theta; \theta_2} \\ := \{z, -2\text{Im}\theta - \theta_2 \leq \arg(z - 2\inf(U) - c - 1) \leq -2\text{Im}\theta + \theta_2\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

est un secteur de $e^{-2\theta}P^2/2M + U(e^\theta \cdot)$. Ainsi, le lemme d'Ichinose s'applique à $H_{part}(\theta)$, ce qui entraîne :

$$\sigma(H_{part}(\theta)) = \sigma(e^{-2\theta}p^2/2\mu + e^{-\theta}V) + \sigma(e^{-2\theta}P^2/2M + U(e^\theta \cdot)). \quad (2.38)$$

Définissons maintenant la forme quadratique $\tilde{q}_{H_{part}(\theta)}$ sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{H_{part}(\theta)}(\phi, \psi) &:= \frac{e^{-2\theta}}{2m}(p\phi, p\psi) + e^{-\theta} \int_{\mathbb{R}^6} V(r)\bar{\phi}(r, R)\psi(r, R)drdR \\ &+ \frac{e^{-2\theta}}{2M}(P\phi, P\psi) + \int_{\mathbb{R}^6} U(e^\theta R)\bar{\phi}(r, R)\psi(r, R)drdR. \end{aligned} \quad (2.39)$$

En utilisant les hypothèses (\mathcal{H}_0) et $(\mathcal{H}_3)(iii)$, on peut montrer, de la même façon que ce que nous avons fait dans les démonstrations des lemmes 2.4 et 2.6, que $\tilde{q}_{H_{part}(\theta)}$ est bien définie et fermée sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+)$. On peut également montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ est un cœur de $\tilde{q}_{H_{part}(\theta)}$, et que $\tilde{q}_{H_{part}(\theta)}$ est strictement m-sectorielle. Ainsi, une nouvelle application de la proposition 1.5 fournit l'existence d'un unique opérateur $\tilde{H}_{part}(\theta)$ associé à $\tilde{q}_{H_{part}(\theta)}$.

Or, en utilisant notamment le fait que $H_{part}(\theta)^* = H_{part}(\bar{\theta})$, on peut montrer que $H_{part}(\theta)$ vérifie lui aussi les propriétés a) et b) de la proposition 1.5 caractérisant l'unique opérateur associé à $\tilde{q}_{H_{part}(\theta)}$. On en déduit ainsi que $H_{part}(\theta) = \tilde{H}_{part}(\theta)$, et donc en particulier que $Q(H_{part}(\theta)) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+)$.

Pour conclure, on obtient grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)(iii)$ que $\theta \mapsto H_{part}(\theta)$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$. \square

Utilisons cette proposition pour décrire le spectre de $H_{part}(\theta)$. D'une part, on a :

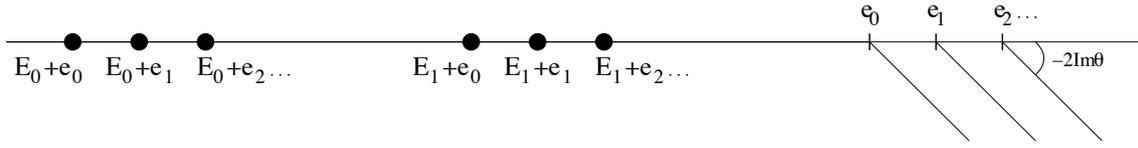
$$\sigma(e^{-2\theta}p^2/2\mu + e^{-\theta}V) = \sigma_{pp}(p^2/2\mu + V) \cup \{e^{-2\theta}\mu | \mu \in [0, \infty[\}. \quad (2.40)$$

D'autre part, supposant pour simplifier que (\mathcal{H}_{dis}) est vérifiée, et puisque $e^{-2\theta}P^2/2M + U(e^\theta \cdot)$ est analytique de type (B), on a :

$$\sigma(e^{-2\theta}P^2/2M + U(e^\theta \cdot)) = \sigma(P^2/2M + U). \quad (2.41)$$

Ainsi, on obtient le spectre de $H_{part}(\theta)$ comme représenté dans la figure 2.2 ; (E_l) désigne toujours la suite des valeurs propres de $p^2/2\mu + V$ et (e_n) la suite des valeurs propres de $P^2/2M + U$.

Donnons maintenant une proposition qui nous servira par la suite :

FIG. 2.2 – Spectre du Hamiltonien dilaté associé aux particules $H_{part}(\theta)$

Proposition 2.8 Soit θ_0 suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) et (\mathcal{H}_3) sont vérifiées. En tant que sous-espaces vectoriels de $L^2(\mathbb{R}^6)$, on a l'inclusion suivante :

$$D(H_{part}) \subset D(H_{part}(\theta)). \quad (2.42)$$

Démonstration

Soit $\phi \in D(H_{part})$. En utilisant l'hypothèse (\mathcal{H}_3) , on a pour tout $\psi \in D(H_{part}(\theta)^*)$:

$$\begin{aligned} & |(H_{part}(\theta)^*\psi, \phi)| \\ &= |q_{H_{part}(\theta)}(\psi, \phi)| \\ &\leq \left| \frac{e^{-2\theta}}{2m}(p\psi, p\phi) + \frac{e^{-2\theta}}{2M}(P\psi, P\phi) + e^{-\theta} \int_{\mathbb{R}^6} V(r)\bar{\psi}(r, R)\phi(r, R)drdR \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^6} U(R)\bar{\psi}(r, R)\phi(r, R)drdR \right| + C(\theta_0)\|U\phi\|\|\psi\| + c\|\phi\|\|\psi\| \\ &\leq a|q_{H_{part}}(\psi, \phi)| + b\|\phi\|\|\psi\|, \end{aligned} \quad (2.43)$$

où a et b sont des constantes positives. Donc $\phi \in D(H_{part}(\theta))$ et la proposition est démontrée. \square

2-4 Caractère auto-adjoint de H_U^V

Nous montrons dans cette section que H_U^V est auto-adjoint pour toutes valeurs de la charge q et du paramètre de troncature ultraviolette Λ . Nous verrons que le domaine de forme $Q(H_U^V)$ est explicite et ne dépend pas des paramètres q et Λ , puis nous relierons notre définition avec celle de [Hir02] basée sur une représentation en intégrale fonctionnelle.

2-4.1 Domaine de forme

Commençons par un lemme :

Lemme 2.9 Supposons que l'une des deux hypothèses $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^1)$ ou $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ est vérifiée. Alors, pour tous $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$, $j \in \{1, 2\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\|A_j^i \Phi\|^2 \leq a_1 \left\| H_f^{1/2} \Phi \right\|^2 + b_1 \|\Phi\|^2, \quad (2.44)$$

où a_1 et b_1 sont des constantes positives dépendant de Λ .

Démonstration

La démonstration est similaire à celle donnée dans [GLL01, Lemme A.4]. On suppose que la troncature ultraviolette $\widehat{\chi}_\Lambda$ est donnée par l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^1)$; la preuve serait similaire (mais avec des constantes différentes dans (2.49)) dans le cas de l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$. En utilisant la notation (1.28), on a pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} (A_j^i \Phi, A_j^i \Phi) &= \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} \int_{\mathbb{R}^6} \langle (a^*(h_\lambda^i(x_j - \cdot)) + a(h_\lambda^i(x_j - \cdot))) \Phi(X), \\ &\quad (a^*(h_{\lambda'}^i(x_j - \cdot)) + a(h_{\lambda'}^i(x_j - \cdot))) \Phi(X) \rangle dX \\ &\leq 2 \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^6} [\|a^*(h_\lambda^i(x_j - \cdot))\Phi(X)\|^2 + \|a(h_\lambda^i(x_j - \cdot))\Phi(X)\|^2] dX \end{aligned} \quad (2.45)$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Or, vue la définition (2.8) de h_λ^i , la transformée de Fourier de $h_\lambda^i(x_j - \cdot)$ vaut :

$$(\mathcal{F}h_\lambda^i(x_j - \cdot))(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{\sqrt{|k|}} \varepsilon_\lambda^i(k) e^{-ik \cdot x_j}. \quad (2.46)$$

Ainsi,

$$\|\mathcal{F}h_\lambda^i(x_j - \cdot)\|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{1}{|k|} dk = \frac{\Lambda^2}{2\pi}, \quad (2.47)$$

et

$$\left\| \frac{(\mathcal{F}h_\lambda^i(x_j - \cdot))}{\sqrt{\omega}} \right\|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{1}{|k|^2} dk = \frac{\Lambda}{\pi}. \quad (2.48)$$

D'où, par la proposition 1.8 :

$$\begin{aligned} (A_j^i \Phi, A_j^i \Phi) &\leq 2 \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{2\Lambda}{\pi} \|H_f^{1/2} \Phi(X)\|^2 + \frac{\Lambda^2}{2\pi} \|\Phi(X)\|^2 \right] dX \\ &= \frac{8\Lambda}{\pi} (H_f^{1/2} \Phi, H_f^{1/2} \Phi) + \frac{2\Lambda^2}{\pi} (\Phi, \Phi). \end{aligned} \quad (2.49)$$

On a donc bien le résultat. \square

Soit maintenant $\tilde{q}_{H_U^V}$ la forme quadratique de domaine

$$\tilde{Q}(H_U^V) := Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f), \quad (2.50)$$

définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{H_U^V}(\Phi, \Psi) &:= \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} ((p_j - q_j A_j) \Phi, (p_j - q_j A_j) \Psi) + (H_f^{1/2} \Phi, H_f^{1/2} \Psi) \\ &\quad - ((V^-)^{1/2} \Phi, (V^-)^{1/2} \Psi) - ((U^-)^{1/2} \Phi, (U^-)^{1/2} \Psi) + ((U^+)^{1/2} \Phi, (U^+)^{1/2} \Psi). \end{aligned} \quad (2.51)$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.10 *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^1)$ (ou $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$) sont vérifiées. Alors $\tilde{q}_{H_U^V}$ est bien définie et on a pour tout $\Phi \in \tilde{Q}(H_U^V)$:*

$$\tilde{q}_{H_U^V}(\Phi, \Phi) \geq a_2 \left[\sum_{j=1,2} \|p_j \Phi\|^2 + \|(U^+)^{1/2} \Phi\|^2 + \|H_f^{1/2} \Phi\|^2 \right] - b_2 \|\Phi\|^2, \quad (2.52)$$

où a_2 et b_2 sont des constantes positives dépendant de q , Λ , m_1 et m_2 .

Démonstration

Comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de $H_f^{1/2}$ (puisque c'est un cœur de H_f), le lemme 2.9 entraîne que $D(H_f^{1/2}) = Q(H_f) \subset D(A_j^i)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$; ainsi $\tilde{q}_{H_U^V}$ est bien définie.

Pour obtenir (2.52), prenons Φ dans $\tilde{Q}(H_U^V)$ et remarquons que :

$$\sum_{j=1,2} \|(p_j - q_j A_j) \Phi\|^2 \geq \sum_{j=1,2} \left[(1 - \mu_j) \|p_j \Phi\|^2 + \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right) q_j^2 \|A_j \Phi\|^2 \right], \quad (2.53)$$

pour tous μ_1, μ_2 tels que $0 < \mu_1, \mu_2 < 1$. Or d'après le lemme 2.9 :

$$\left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right) q_j^2 \|A_j \Phi\|^2 \geq \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right) q_j^2 \left[a_1 \|H_f^{1/2} \Phi\|^2 + b_1 \|\Phi\|^2 \right], \quad (2.54)$$

et on choisit alors μ_j tel que $0 < \mu_j < 1$ et $(1 - 1/\mu_j) q_j^2 a_1 < 1/2$ (on vérifie sans peine que de tels μ_j existent). Ainsi :

$$\sum_{j=1,2} \|(p_j - q_j A_j) \Phi\|^2 + \|H_f^{1/2} \Phi\|^2 \geq a'_2 \left[\sum_{j=1,2} \|p_j \Phi\|^2 + \|H_f^{1/2} \Phi\|^2 \right] - b'_2 \|\Phi\|^2, \quad (2.55)$$

où a'_2 et b'_2 sont des constantes positives dépendant de q et Λ . Le résultat s'en déduit alors facilement en utilisant l'écriture du Laplacien (2.17), dans la mesure où V est relativement borné par rapport à p^2 au sens des formes avec borne relative 0, et puisque U est semi-borné inférieurement par l'hypothèse (\mathcal{H}_0) . \square

Les deux lemmes précédents nous permettent de définir H_U^V comme opérateur auto-adjoint :

Théorème 2.11 *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^1)$ (ou $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$) sont vérifiées. Alors la forme quadratique $\tilde{q}_{H_U^V}$ est fermée et semi-bornée inférieurement sur $\tilde{Q}(H_U^V)$; de plus, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de forme de $\tilde{q}_{H_U^V}$. L'opérateur auto-adjoint (et semi-borné inférieurement) qui est associé à $\tilde{q}_{H_U^V}$ par la proposition 1.2 est noté H_U^V : autrement dit, $q_{H_U^V} = \tilde{q}_{H_U^V}$.*

Démonstration

Montrons d'abord que $\tilde{q}_{H_U^V}$ est fermée sur $\tilde{Q}(H_U^V)$: soit $(\Phi_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\tilde{Q}(H_U^V)$ telle que :

$$\tilde{q}_{H_U^V}(\Phi_n - \Phi_m, \Phi_n - \Phi_m) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \Phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi. \quad (2.56)$$

Il s'agit de montrer que $\Phi \in \tilde{Q}(H_U^V)$. Or, d'après le lemme 2.10 et vue la définition de Φ_n , on a :

$$\sum_{j=1,2} \|p_j(\Phi_n - \Phi_m)\|^2 + \|(U^+)^{1/2}(\Phi_n - \Phi_m)\|^2 + \|H_f^{1/2}(\Phi_n - \Phi_m)\|^2 \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.57)$$

Mais par la proposition 1.3, $q_{p_1^2+p_2^2} + q_{U^+} + q_{H_f}$ est une forme quadratique fermée (et positive) sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f)$, et donc $\Phi \in \tilde{Q}(H_U^V)$.

Le caractère semi-borné inférieurement de $\tilde{q}_{H_U^V}$ est immédiat par le lemme 2.10.

Enfin, la définition (2.51) de $\tilde{q}_{H_U^V}$ et le lemme 2.9 entraînent immédiatement que pour tout Φ dans $\tilde{Q}(H_U^V)$:

$$\tilde{q}_{H_U^V}(\Phi, \Phi) \leq a_3 \left[\sum_{j=1,2} \|p_j \Phi\|^2 + \|(U^+)^{1/2} \Phi\|^2 + \|H_f^{1/2} \Phi\|^2 \right] + b_3 \|\Phi\|^2, \quad (2.58)$$

où a_3 et b_3 sont des constantes positives dépendant de q, Λ, m_1, m_2 . Or comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ est un cœur de $p_1^2 + p_2^2 + U^+$ et comme D_S est un cœur de H_f , $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de forme de $q_{p_1^2+p_2^2} + q_{U^+} + q_{H_f}$. On déduit alors de l'inégalité précédente que $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est également un cœur de forme de $\tilde{q}_{H_U^V}$. \square

Notons pour terminer cette sous-section que la méthode que nous venons d'employer pour définir H_U^V permet de définir de la même façon les opérateurs auto-adjoints H_0^V, H_U^0 ou encore $H_U^V(m)$. Il suffit en effet d'adapter dans chaque cas la définition de $q_{H_U^V}$ de la façon suivante : on fait $U = 0$ (respectivement $V = 0$) pour définir $q_{H_0^V}$ (respectivement $q_{H_U^0}$), et on remplace H_f par $H_f(m)$ pour définir $q_{H_U^V(m)}$. On montre ainsi :

$$Q(H_0^V) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(H_f) \quad , \quad Q(H_U^0) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f), \quad (2.59)$$

et, par (1.53) :

$$Q(H_U^V(m)) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f(m)) = Q(H_U^V) \cap Q(\mathcal{N}). \quad (2.60)$$

2-4.2 Représentation en intégrale fonctionnelle

Dans cette sous-section, nous décrivons très brièvement une autre façon de définir H_U^V utilisée dans [Hir02], basée sur une représentation en intégrale fonctionnelle. Cette définition présente l'avantage par rapport à la nôtre de fournir un domaine explicite de l'opérateur auto-adjoint $H_{U^-}^V$; en revanche ni le domaine, ni le domaine de forme de H_U^V ne sont explicites avec cette définition. C'est pourquoi nous avons utilisé une définition basée sur les formes quadratiques, qui nous a permis d'obtenir un domaine de forme explicite pour H_U^V . Nous montrons finalement dans cette sous-section que notre définition et celle de [Hir02] coïncident.

Nous renvoyons, par exemple, à [Sim74], [Sim79], [Hir97], [Hir04], [Spo04] pour les définitions des objets que nous employons ici.

Plutôt que de considérer la représentation de Fock \mathcal{F}_s pour décrire les états du champ de photons, on aurait pu considérer une représentation dite de Schrödinger, associé à un certain espace L^2 noté $L^2(Q, d\mu)$. Comme dans [Hir02], on pourrait alors prouver que, pour toutes valeurs de q et Λ , l'opérateur :

$$\widehat{H}_0 := \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j A_j)^2 + H_f \quad (2.61)$$

est auto-adjoint sur $D(p_1^2 + p_2^2) \cap D(H_f)$. Ce résultat est obtenu à partir de formules FKN (Feynmann-Kac-Nelson) et FKI (Feynmann-Kac-Itô) desquelles on déduit la représentation en intégrale fonctionnelle suivante :

$$(F, e^{-t\widehat{H}_0} G) = \int_M (F(X_0), J_t(X) G(X_t))_{L^2(Q)} dX. \quad (2.62)$$

Dans (2.62), on a noté $M = \mathbb{R}^6 \times P$, où (P, db) est un espace de probabilité associé au mouvement brownien en 6 dimensions $\{b(t)\}_{t \geq 0}$. De plus, $X_t = X + b(t)$ désigne le processus de Wiener sur M . Ensuite, $J_t(X)$ est défini par :

$$J_t(X) = \Xi_0^* e^{-i\phi_0(K(t))} \Xi_t, \quad (2.63)$$

où Ξ_t désigne la seconde quantification de $\oplus^3 \xi_t$. Ici, $\xi_t : \oplus^3 L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \oplus^3 L^2(\mathbb{R}^4)$ est une isométrie définie par :

$$\widehat{\xi_t f}(k, k_0) = \frac{e^{-itk_0}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\omega(k)}{\omega(k)^2 + |k_0|^2}} \widehat{f}(k). \quad (2.64)$$

Dans (2.63), $\phi_0(f)$ désigne un processus aléatoire Gaussien sur certain un espace de probabilité $(Q_0, d\mu_0)$, indexé par l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles telles que $f \in \oplus^3 L^2(\mathbb{R}^4)$. Enfin, dans (2.63) encore, $K(t)$ désigne l'intégrale stochastique :

$$K(t) = \oplus_{i=1}^3 q_1 \int_0^t \xi_s \rho(\cdot - X_s) db_i^1(s) + \oplus_{i=1}^3 q_2 \int_0^t \xi_s \rho(\cdot - X_s) db_i^2(s), \quad (2.65)$$

avec $\widehat{\rho}(k) = \widehat{\chi}_\Lambda(k) / (\pi \sqrt{2|k|})$.

Dans la mesure où l'on peut montrer que $V - U^-$ est relativement borné par rapport à \widehat{H}_0 avec borne relative 0 (à condition que (\mathcal{H}_0) soit vérifiée), d'après le théorème de Kato-Rellich, l'opérateur :

$$\widehat{H}_{U^-}^V := \widehat{H}_0 + V - U^- \quad (2.66)$$

est auto-adjoint sur $D(p_1^2 + p_2^2) \cap D(H_f)$. On termine alors la définition du Hamiltonien associé au système en posant :

$$\widehat{H}_U^V := \widehat{H}_{U^-}^V + U^+. \quad (2.67)$$

Montrons donc que les deux définitions coïncident :

Proposition 2.12 *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) et $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^1)$ (ou $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$) sont vérifiées. Alors on a :*

$$H_U^V = \widehat{H}_U^V. \quad (2.68)$$

Démonstration

Comme on a $H_U^V = H_{U^-}^V \dot{+} U^+$ et $\widehat{H}_U^V := \widehat{H}_{U^-}^V \dot{+} U^+$, il suffit de montrer que $H_{U^-}^V = \widehat{H}_{U^-}^V$. Or, de la même façon que pour H_U^V , on montrerait que $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de forme pour $q_{H_{U^-}^V}$; et d'autre part, d'après [Hir02], $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de $\widehat{H}_{U^-}^V$. Donc $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de forme de $q_{\widehat{H}_{U^-}^V}$. Comme on peut constater que $q_{H_{U^-}^V}$ et $q_{\widehat{H}_{U^-}^V}$ coïncident sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$, la proposition est démontrée. \square

2-5 Analyticité de type (B) de $H_U^V(\theta)$

Nous établissons dans cette section l'analyticité de type (B) de la famille $H_U^V(\theta)$ obtenue par une méthode de dilatations complexes (voir section 1-3). Plus précisément, rappelons que, pour θ dans un voisinage réel de 0, la famille d'isométries \mathcal{U}_θ agissant dans \mathcal{H} est définie par :

$$\mathcal{U}_\theta := \mathcal{U}_{part}^\theta \otimes \mathcal{U}_{ph}^\theta, \quad (2.69)$$

où $\mathcal{U}_{part}^\theta$ est définie en (2.22), et où pour tout $\Phi \in \mathcal{F}_s$:

$$(\mathcal{U}_{ph}^\theta \Phi)^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = e^{3n\theta/2} \Phi^{(n)}(e^\theta y_1, \dots, e^\theta y_n). \quad (2.70)$$

Afin d'étudier $H_U^V(\theta)$, écrivons H_U^V de la façon suivante (sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ pour l'instant) :

$$H_U^V = H_0 + W_g(\widehat{\chi}_\Lambda), \quad (2.71)$$

avec :

$$H_0 = \sum_{j=1,2} \frac{p_j^2}{2m_j} + H_f + U + V = H_{part} + H_f, \quad (2.72)$$

et :

$$W_g(\widehat{\chi}_\Lambda) := \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (-2q_j p_j \cdot A_j(\widehat{\chi}_\Lambda) + q_j^2 A_j(\widehat{\chi}_\Lambda)^2). \quad (2.73)$$

L'indice g apparaissant dans (2.73) trouvera sa signification dans la partie III où nous traiterons W_g comme une perturbation de l'opérateur H_0 ; le réel $g := (q^2 \Lambda)^{3/2}$ sera alors le paramètre perturbatif en fonction duquel nous exprimerons W_g . Nous avons par ailleurs souligné ici la dépendance de W_g en la fonction de troncature ultraviolette $\widehat{\chi}_\Lambda$. On peut montrer que sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$, et pour θ réel :

$$H_0(\theta) := \mathcal{U}_\theta H_0 \mathcal{U}_\theta^* = H_{part}(\theta) + e^{-\theta} H_f, \quad (2.74)$$

et :

$$W_g(\theta) := \mathcal{U}_\theta W_g(\widehat{\chi}_\Lambda) \mathcal{U}_\theta^* = e^{-2\theta} W_g(\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} \cdot)). \quad (2.75)$$

Voyons alors comment définir $H_U^V(\theta)$ pour θ dans un voisinage complexe de 0. En ce qui concerne $H_0(\theta)$, il suffit de suivre ce que nous avons fait dans la proposition 2.7 :

Lemme 2.13 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) et (\mathcal{H}_3) sont vérifiées. Soit $H_0(\theta)$, pour $\theta \in D(0, \theta_0)$, la fermeture de $H_{part}(\theta) \otimes I + I \otimes e^{-\theta} H_f$ préalablement défini sur $D(H_{part}(\theta)) \otimes D(H_f) \subset L^2(\mathbb{R}^6) \otimes \mathcal{F}_s$. Alors $\theta \mapsto H_0(\theta)$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$, de domaine $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f)$, et pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, $C_0^\infty \otimes D_S$ est un cœur de forme de $q_{H_0(\theta)}$. De plus on a :*

$$\sigma(H_0(\theta)) = \sigma(H_{part}(\theta)) + e^{-\theta} \sigma(H_f). \quad (2.76)$$

Démonstration

La forme quadratique $\tilde{q}_{e^{-\theta} H_f} := e^{-\theta} q_{H_f}$ définie sur $Q(H_f)$ est évidemment bien définie et fermée, et on a pour tout $\psi \in Q(H_f)$:

$$\tilde{q}_{e^{-\theta} H_f}(\psi, \psi) = e^{-\theta} q_{H_f}(\psi, \psi) \in e^{-\theta} \mathbb{R}_+. \quad (2.77)$$

La méthode pour démontrer le lemme est alors la même que celle que nous avons employée dans la preuve de la proposition 2.7 afin de définir $H_{part}(\theta)$. On montre en particulier que $H_0(\theta)$ est l'opérateur strictement m-sectoriel associé à la forme quadratique $\tilde{q}_{H_0(\theta)}$ définie sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f)$ par :

$$\tilde{q}_{H_0(\theta)}(\Phi, \Psi) := q_{H_{part}(\theta)}(\Phi, \Psi) + e^{-\theta} q_{H_f}(\Phi, \Psi). \quad (2.78)$$

□

Supposons encore une fois, pour simplifier, que l'hypothèse (\mathcal{H}_{dis}) est vérifiée. Alors la figure 2.2 donne le spectre de $H_{part}(\theta)$, et d'autre part on sait que le spectre de H_f est constitué d'une valeur propre située en 0 et de la demi-droite de spectre absolument continu $]0, \infty[$. On obtient ainsi le spectre de $H_0 = H_0(0)$, puis le spectre de l'opérateur dilaté $H_0(\theta)$, grâce à (2.76) (voir les figures 2.3 et 2.4).

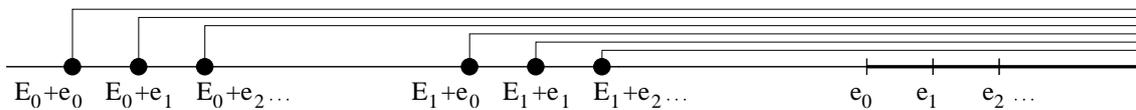


FIG. 2.3 – Spectre du Hamiltonien non perturbé H_0

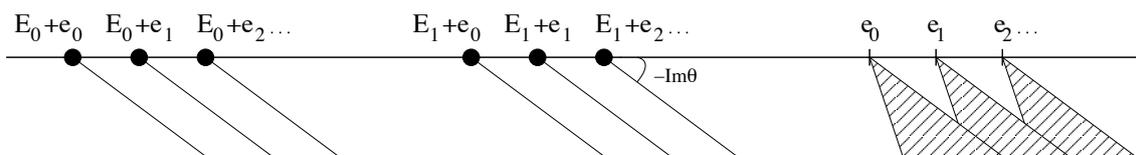


FIG. 2.4 – Spectre du Hamiltonien dilaté non perturbé $H_0(\theta)$

Définissons maintenant, pour θ dans un voisinage complexe de 0, la forme quadratique $\tilde{q}_{W_g(\theta)}$ de domaine $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(H_f)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{W_g(\theta)}(\Phi, \Psi) = & -e^{-2\theta} \sum_{j=1,2} \frac{q_j}{2m_j} [(p_j \Phi, A_j(\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} \cdot)) \Psi) + (A_j(\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} \cdot)) \Phi, p_j \Psi)] \\ & + e^{-2\theta} \sum_{j=1,2} \frac{q_j^2}{2m_j} (A_j(\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} \cdot)) \Phi, A_j(\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} \cdot)) \Psi). \end{aligned} \quad (2.79)$$

On a alors :

Théorème 2.14 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Pour $\theta \in D(0, \theta_0)$, définissons la forme quadratique $\tilde{q}_{H_U^V(\theta)}$ sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f)$ de la façon suivante :*

$$\tilde{q}_{H_U^V(\theta)} := q_{H_0(\theta)} + \tilde{q}_{W_g(\theta)}. \quad (2.80)$$

Alors $\tilde{q}_{H_U^V(\theta)}$ est bien définie et c'est une forme quadratique strictement m -sectorielle ; on note $H_U^V(\theta)$ l'opérateur qui lui est associé par la proposition 1.5. L'application $\theta \mapsto H_U^V(\theta)$ est de plus analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$.

Démonstration

D'après la forme explicite de $\widehat{\chi}_\Lambda$ donnée par l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$, on a :

$$\begin{aligned} |e^{-2\theta} \widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k) - \widehat{\chi}_\Lambda(k)| &= \left| e^{-2\theta} e^{-e^{-2\theta} k^2 / (Z^2 q^4 \Lambda)^2} - e^{-k^2 / (Z^2 q^4 \Lambda)^2} \right| \\ &\leq a(\theta_0) \frac{k^2}{Z^4 q^8 \Lambda^2} e^{-k^2 / (Z^2 q^4 \Lambda)^2}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

où $a(\theta_0)$ est une constante positive telle que $a(\theta_0) \rightarrow 0$ lorsque $\theta_0 \rightarrow 0$. On peut alors en déduire que pour tout $\Phi \in C_0^\infty \otimes D_S$:

$$|\tilde{q}_{W_g(\theta)}(\Phi, \Phi) - \tilde{q}_{W_g(0)}(\Phi, \Phi)| \leq a(\theta_0) \left[a q_{p_1^2 + p_2^2 + H_f}(\Phi, \Phi) + b \|\Phi\|^2 \right], \quad (2.82)$$

où a et b sont des constantes positives dépendant des paramètres q, Λ, m_1, m_2 . Pour obtenir (2.82), il suffit d'ailleurs de reprendre la démonstration du lemme 2.9 en remplaçant $\widehat{\chi}_\Lambda(k)$ par $k^2 \widehat{\chi}_\Lambda(k) / (Z^2 q^4 \Lambda)^2$. D'autre part, (2.82) entraîne que $\tilde{q}_{W_g(\theta)}$ est bien définie sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(H_f)$.

Maintenant, en utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)(ii)$ et le lemme 2.10, on peut montrer que (2.82) implique :

$$\left| q_{H_U^V(\theta)}(\Phi, \Phi) - q_{H_U^V}(\Phi, \Phi) \right| \leq b(\theta_0) \left[a' q_{H_U^V}(\Phi, \Phi) + b' \|\Phi\|^2 \right], \quad (2.83)$$

où a' et b' sont des constantes positives dépendant de q, Λ, m_1, m_2 , et où $b(\theta_0)$ est une constante positive tendant vers 0 lorsque $\theta_0 \rightarrow 0$. Ceci prouve que, pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, $q_{H_U^V(\theta)}$ est strictement m -sectorielle, de domaine $Q(H_U^V)$.

Enfin, les hypothèses $(\mathcal{H}_3)(iii)$ et $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$ entraînent que $\theta \mapsto H_U^V(\theta)$ est analytique de type (B) et le théorème est démontré. \square

2-6 La transformation de Power-Zienau-Wooley

L'un des outils importants de notre analyse, qui apparaîtra à la fois dans la partie concernant l'état fondamental et dans celle concernant les résonances, est la *transformation de Power-Zienau-Wooley* (cf.[CTDRG01a]) ; on la trouve également parfois sous le nom de transformation de Pauli-Fierz dans la littérature. Mathématiquement, la transformation est représentée par un opérateur unitaire agissant dans l'espace de Hilbert associé au système que l'on considère. Dans notre cas, l'espace de Hilbert \mathcal{H} est défini en (2.1), et l'opérateur \mathcal{U}_{PZW} correspondant à la transformation de Power-Zienau-Wooley est défini par :

$$\mathcal{U}_{PZW} := \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \mathcal{U}_{PZW}(X) dX, \quad (2.84)$$

où pour $X \in \mathbb{R}^6$:

$$\mathcal{U}_{PZW}(X) := e^{-i \sum_{j=1,2} q_j x_j \cdot A(0)}. \quad (2.85)$$

Regardons l'action de cet opérateur sur le Hamiltonien $H_U^V(m)$ (où $m \geq 0$ et où $H_U^V(0)$ désigne H_U^V). En faisant commuter $\hat{a}_\lambda(k)$ et $\mathcal{F}A(0)\mathcal{F}^{-1}$, on constate que, au sens d'opérateurs sur D_S , on a pour $X \in \mathbb{R}^6$, $\lambda \in \{1, 2\}$ et $k \in \mathbb{R}^3$:

$$\hat{b}_\lambda(k, X) := \mathcal{F}\mathcal{U}_{PZW}(X)\mathcal{F}^{-1}\hat{a}_\lambda(k)\mathcal{F}\mathcal{U}_{PZW}^*(X)\mathcal{F}^{-1} = \hat{a}_\lambda(k) - iw_\lambda(k, X), \quad (2.86)$$

où $w_\lambda(k, X)$ est l'opérateur de multiplication dans D_S défini par :

$$w_\lambda(k, X) := \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\chi}_\lambda(k)}{|k|^{1/2}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \sum_{j=1,2} q_j x_j. \quad (2.87)$$

Ainsi, formellement, le Hamiltonien transformé par Power-Zienau-Wooley s'écrit :

$$\tilde{H}_U^V(m) := \mathcal{U}_{PZW} H_U^V(m) \mathcal{U}_{PZW}^* = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j \tilde{A}_j)^2 + \tilde{H}_f(m) + U + V, \quad (2.88)$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j &:= \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \tilde{A}_j(X) dX, \\ \tilde{A}_j(X) &= A(x_j) - A(0) \quad \text{pour } X \in \mathbb{R}^6, \end{aligned} \quad (2.89)$$

et, la deuxième des égalités suivantes étant écrite au sens des formes quadratiques sur $D_S \times D_S$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_f(m) &:= \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \tilde{H}_f^m(X) dX, \\ \mathcal{F}\tilde{H}_f^m(X)\mathcal{F}^{-1} &= \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_m(k) \hat{b}_\lambda^*(k, X) \hat{b}_\lambda(k, X) dk \quad \text{pour } X \in \mathbb{R}^6. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Remarque 2.15

L'un des intérêts principaux de cette transformation est qu'elle "améliore" le comportement infrarouge du potentiel d'interaction électromagnétique A . En effet, comme on peut le voir

en (2.8), les fonctions $e^{-ik \cdot x} \widehat{h}^i(k)$ intervenant dans la définition de $A(x)$ sont de l'ordre de $O(|k|^{-1/2})$ au voisinage de 0. Or après la transformation, comme $A(x)$ est remplacé par $A(x) - A(0)$, les fonctions $e^{-ik \cdot x} \widehat{h}^i(k)$ sont remplacées par $(e^{-ik \cdot x} - 1) \widehat{h}^i(k)$, qui sont de l'ordre de $|x|O(|k|^{1/2})$ au voisinage de $k = 0$.

Le comportement infrarouge de $A(x)$ est donc "amélioré" par un facteur $|k|$, mais on s'aperçoit que le prix à payer est l'apparition devant $\widetilde{A}(x)$ d'un facteur $|x|$. Pour contrôler ce dernier, on utilisera la décroissance exponentielle de l'état fondamental dans la partie II, tandis que dans la partie III, on utilisera d'une part le confinement imposé par U , et d'autre part une troncature spatiale en la variable r .

Par ailleurs, en insérant (2.86) et (2.87) dans (2.90), puis en développant l'expression obtenue, on peut encore écrire

$$\widetilde{H}_U^V(m) = \widetilde{H}_{part} + \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j \widetilde{A}_j)^2 + I + H_f(m), \quad (2.91)$$

où le "nouveau" Hamiltonien associé aux particules \widetilde{H}_{part} est (en posant $\widetilde{r} := x_1 - Zx_2$) :

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{part} = & H_{part} + q^2 \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega_m(k)}{|k|} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)^2}{4\pi^2} (\varepsilon_\lambda(k) \cdot \widetilde{r})^2 dk \\ & + 2q^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)^2}{\pi^2 |k|} \left[\frac{1}{2m_1} \sin^2(k \cdot x_1/2) + \frac{Z}{2m_2} \sin^2(k \cdot x_2/2) \right] dk, \end{aligned} \quad (2.92)$$

et où le "nouveau" terme d'interaction I s'écrit :

$$I = \int_{\mathbb{R}^6}^\oplus I(X) dX, \quad (2.93)$$

avec pour $X \in \mathbb{R}^6$, au sens des formes quadratiques sur $D_S \times D_S$:

$$\mathcal{F}I(X)\mathcal{F}^{-1} := iq \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega_m(k)}{|k|^{1/2}} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \widetilde{r} [\widehat{a}_\lambda^*(k) - \widehat{a}_\lambda(k)] dk. \quad (2.94)$$

On peut alors montrer, de la même façon que nous l'avons fait pour $H_U^V(m)$:

Proposition 2.16 *Supposons que l'hypothèse (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Alors l'opérateur $\widetilde{H}_U^V(m)$ défini formellement par (2.91)-(2.94) s'identifie à un opérateur auto-adjoint dont le domaine de forme est :*

$$Q(\widetilde{H}_U^V(m)) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(\widetilde{r}^2) \cap Q(H_f(m)). \quad (2.95)$$

De plus, $\Phi \in Q(H_U^V(m))$ si et seulement si $\mathcal{U}_{PZW}\Phi \in Q(\widetilde{H}_U^V(m))$, et pour tout $\Phi \in Q(H_U^V(m))$:

$$q_{\widetilde{H}_U^V(m)}(\mathcal{U}_{PZW}\Phi, \mathcal{U}_{PZW}\Phi) = q_{H_U^V(m)}(\Phi, \Phi). \quad (2.96)$$

Démonstration

Pour prouver la première partie de la proposition et définir $\tilde{H}_U^V(m)$, il suffit de suivre la même procédure que pour $H_U^V(m)$. On peut ainsi remarquer que \tilde{H}_{part} donné en (2.92) est bien défini en tant que forme quadratique de domaine $Q(\tilde{H}_{part}) := Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(\tilde{r}^2)$. De plus, encore une fois de la même façon que pour $H_U^V(m)$, on peut voir que $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de forme de $q_{\tilde{H}_U^V(m)}$. Ainsi, l'égalité (2.95), valide par définition pour $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$, se prolonge sur $Q(H_U^V(m))$, et montre que \mathcal{U}_{PZW} envoie $Q(H_U^V(m))$ sur $Q(\tilde{H}_U^V(m))$. \square

Remarque 2.17

Observons qu'après la transformation de Power-Zienau-Wooley, le "nouveau" Hamiltonien associé aux particules \tilde{H}_{part} n'est pas unitairement équivalent à "l'ancien" H_{part} . En particulier donc, ces deux opérateurs n'ont pas le même spectre, et les valeurs propres "non perturbées" ne sont pas les mêmes selon que l'on se place dans l'un ou l'autre des deux points de vues. Nous reviendrons sur ce point dans la partie III. Toutefois, comme \tilde{H}_U^V et H_U^V sont unitairement équivalents, le spectre du Hamiltonien total n'est bien sûr pas modifié par la transformation.

Deuxième partie

Existence d'un état fondamental

Chapitre 3

Preuve de l'existence d'un état fondamental

Dans ce chapitre, supposant que les conditions de liaison (C.L.) sont vérifiées, nous établissons l'existence d'un état fondamental pour H_U^V quelles que soient les valeurs de la charge q et du paramètre de troncature ultraviolette Λ . Pour ce faire, nous suivons la stratégie de [GLL01]. Plus précisément, dans une première section, nous montrons que si les photons sont considérés comme massifs, le Hamiltonien associé, $H_U^V(m)$, possède un état fondamental noté Φ_m . Ensuite, nous établissons dans la section 3-2 la décroissance exponentielle de Φ_m , puis nous montrons dans la section 3-3 que le nombre de photons dans l'état Φ_m est borné indépendamment de m . Enfin, nous montrons dans la dernière section, en utilisant les propriétés de Φ_m démontrées auparavant, que la suite Φ_m converge fortement lorsque $m \rightarrow 0$. Ceci nous permettra de conclure à l'existence d'un état fondamental pour H_U^V .

Par rapport à [GLL01], nous aurons besoin d'adapter les démonstrations, notamment en raison de notre définition de H_U^V basée sur l'utilisation des formes quadratiques. De plus, dans la section 3-2, nous obtiendrons la décroissance exponentielle de Φ_m sans avoir recours à la méthode développée dans [Gri02].

Dans toute ce chapitre, nous supposons donc que :

$$(C.L.) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E(H_U^V) < E(H_0^V), \\ (ii) \quad E(H_U^V) < E(H_U^0). \end{array} \right.$$

La démonstration de ces deux conditions de liaison fera l'objet du chapitre suivant.

D'autre part, dans toute la partie II, nous supposerons pour fixer les idées que la fonction de troncature ultraviolette $\widehat{\chi}_\Lambda$ est donnée par l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^1)$ (voir section 2-2). Cela dit, chacun des résultats serait également valable en considérant plutôt $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$. Nous ne précisons pas systématiquement dans chacun des énoncés que l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^1)$ est supposée vérifiée.

3-1 Existence d'un état fondamental Φ_m pour le Hamiltonien massif $H_U^V(m)$

Rappelons la définition formelle de $H_U^V(m)$ donnée en (2.15) :

$$H_U^V(m) := \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j A_j)^2 + H_f(m) + U + V, \quad (3.1)$$

et son domaine de forme obtenu en (2.60) :

$$Q(H_U^V(m)) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f(m)) = Q(H_U^V) \cap Q(\mathcal{N}). \quad (3.2)$$

Dans un premier temps, nous allons montrer que $E(H_U^V(m)) \rightarrow E(H_U^V)$ lorsque $m \rightarrow 0$, et de même pour H_0^V et H_U^0 . En particulier donc, pour m suffisamment petit, $H_U^V(m)$ vérifiera lui aussi les conditions de liaison (C.L.). Ensuite nous donnerons une condition permettant de conclure à l'existence d'un état fondamental pour $H_U^V(m)$, et nous nous attacherons dans le reste de la section à montrer que cette condition est vérifiée. Les conditions de liaison joueront alors un rôle essentiel.

3-1.1 Convergence de $E(H_U^V(m))$ lorsque $m \rightarrow 0$

Commençons par établir la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_0) vérifiée. Alors l'infimum du spectre du Hamiltonien massif $H_U^V(m)$ converge vers l'infimum du spectre de H_U^V lorsque m tend vers 0 :*

$$E(H_U^V(m)) \xrightarrow{m \rightarrow 0} E(H_U^V). \quad (3.3)$$

De la même façon :

$$E(H_0^V(m)) \xrightarrow{m \rightarrow 0} E(H_0^V) \quad , \quad E(H_U^0(m)) \xrightarrow{m \rightarrow 0} E(H_U^0). \quad (3.4)$$

Démonstration

Observons tout d'abord, par (3.2), que si m et m' sont tels que $m > m' > 0$, alors :

$$Q(H_U^V(m)) = Q(H_U^V(m')) \subset Q(H_U^V). \quad (3.5)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E(H_U^V) &= \inf_{\|\Psi\|=1, \Psi \in Q(H_U^V)} q_{H_U^V}(\Psi, \Psi) \\ &\leq \inf_{\|\Psi\|=1, \Psi \in Q(H_U^V(m'))} q_{H_U^V}(\Psi, \Psi) \\ &\leq \inf_{\|\Psi\|=1, \Psi \in Q(H_U^V(m'))} q_{H_U^V(m')}(\Psi, \Psi) \\ &= E(H_U^V(m')) \leq \dots \leq E(H_U^V(m)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donc $E(H_U^V(m))$ est une fonction de m croissante et minorée sur $[0, \infty[$. Ainsi, $E(H_U^V(m))$ converge lorsque $m \rightarrow 0$ vers une certaine limite notée E qui vérifie $E \geq E(H_U^V)$. Il s'agit maintenant de montrer l'inégalité inverse $E \leq E(H_U^V)$.

Pour ce faire, considérons $\varepsilon > 0$ et Φ_ε normalisé dans $Q(H_U^V)$ tel que :

$$q_{H_U^V}(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \leq E(H_U^V) + \varepsilon. \quad (3.7)$$

En particulier, on a $\Phi_\varepsilon \in Q(H_f)$ et donc :

$$q_{H_f}(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \left\| H_f^{1/2} \Phi_\varepsilon \right\|_{L^2(\mathbb{R}^6; L^2(\mathbb{R}^{3n}))}^2 < \infty. \quad (3.8)$$

Notons Π_n le projecteur sur $L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s^{(n)})$ où $\mathcal{F}_s^{(n)}$ est l'espace des états du champ de radiation ayant un nombre de photons plus petit que n , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_s^{(n)} := \{ \Phi \in \mathcal{F}_s^0, \forall k > n, \Phi^{(k)} = 0 \}. \quad (3.9)$$

On a alors évidemment $\Pi_n \Phi_\varepsilon \rightarrow \Phi_\varepsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$; et $H_f^{1/2} \Pi_n \Phi_\varepsilon \rightarrow H_f^{1/2} \Phi_\varepsilon$ puisque $H_f^{1/2}(\Phi_\varepsilon - \Pi_n \Phi_\varepsilon)$ s'écrit comme le reste d'une série normalement convergente. De plus comme Π_n commute avec p_1, p_2 , et U^+ , on a aussi $p_1 \Pi_n \Phi_\varepsilon \rightarrow p_1 \Phi_\varepsilon, p_2 \Pi_n \Phi_\varepsilon \rightarrow p_2 \Phi_\varepsilon$ et $(U^+)^{1/2} \Pi_n \Phi_\varepsilon \rightarrow (U^+)^{1/2} \Phi_\varepsilon$. Ainsi, l'estimation (2.58) obtenue dans le chapitre précédent implique :

$$q_{H_U^V}(\Pi_n \Phi_\varepsilon, \Pi_n \Phi_\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q_{H_U^V}(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon). \quad (3.10)$$

Considérons alors n_0 tel que $\left| q_{H_U^V}(\Pi_{n_0} \Phi_\varepsilon, \Pi_{n_0} \Phi_\varepsilon) / \|\Pi_{n_0} \Phi_\varepsilon\|^2 - q_{H_U^V}(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \right| \leq \varepsilon$. Notons, pour simplifier l'écriture, $\tilde{\Phi}_\varepsilon := \Pi_{n_0} \Phi_\varepsilon$. On a ainsi pour tout $m > 0$:

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon \in Q(H_U^V) \cap Q(\mathcal{N}) = Q(H_U^V(m)), \quad (3.11)$$

et on peut donc calculer :

$$\begin{aligned} E(H_U^V(m)) &= \inf_{\Phi \in Q(H_U^V(m)), \|\Phi\|=1} q_{H_U^V(m)}(\Phi, \Phi) \\ &\leq q_{H_U^V(m)}(\tilde{\Phi}_\varepsilon, \tilde{\Phi}_\varepsilon) / \|\tilde{\Phi}_\varepsilon\|^2 \\ &\leq q_{H_U^V}(\tilde{\Phi}_\varepsilon, \tilde{\Phi}_\varepsilon) / \|\tilde{\Phi}_\varepsilon\|^2 + m \cdot q_{\mathcal{N}}(\tilde{\Phi}_\varepsilon, \tilde{\Phi}_\varepsilon) / \|\tilde{\Phi}_\varepsilon\|^2 \\ &\leq q_{H_U^V}(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) + \varepsilon + m \cdot n_0 \\ &\leq E(H_U^V) + 2\varepsilon + m \cdot n_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En passant à la limite quand $m \rightarrow 0$, on obtient $E \leq E(H_U^V) + 2\varepsilon$; et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien le résultat. Les limites (3.4) s'obtiennent de la même façon. \square

La démonstration du corollaire qui suit est immédiate à partir de la proposition précédente. Néanmoins le résultat est utile : si H_U^V vérifie les conditions de liaison (i) et (ii), alors, pour m suffisamment petit, $H_U^V(m)$ les vérifie également :

Corollaire 3.2 *Supposons que l'hypothèse (\mathcal{H}_0) et que les conditions de liaison (C.L.) sont vérifiées. Alors pour m suffisamment petit :*

$$(C.L.)_m \begin{cases} (i)_m & E(H_U^V(m)) < E(H_U^V(0)), \\ (ii)_m & E(H_U^V(m)) < E(H_U^0(m)). \end{cases}$$

3-1.2 Une condition suffisante pour l'existence d'un état fondamental

Déterminons maintenant une condition, commode à démontrer à partir des conditions de liaison, qui permet d'affirmer que l'infimum du spectre de $H_U^V(m)$ est une valeur propre :

Proposition 3.3 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Supposons de plus que pour toute suite normalisée $(\Psi^j)_{j \geq 0}$ de $Q(H_U^V(m))$ convergeant faiblement vers 0 et telle que $q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j)$ est bornée, on a :*

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j) > E(H_U^V(m)). \quad (3.13)$$

Alors $E(H_U^V(m))$ est une valeur propre de $H_U^V(m)$, c'est-à-dire :

$$\exists \Phi_m \in D(H_U^V(m)), \|\Phi_m\| = 1, H_U^V(m)\Phi_m = E(H_U^V(m))\Phi_m. \quad (3.14)$$

Démonstration

Supposons que l'hypothèse décrite dans l'énoncé de la proposition est satisfaite et montrons qu'un état fondamental existe pour $H_U^V(m)$. Soit $(\Phi^j)_{j \geq 0} \subset Q(H_U^V(m))$ une suite normalisée telle que :

$$q_{H_U^V(m)}(\Phi^j, \Phi^j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} E(H_U^V(m)). \quad (3.15)$$

Puisque (Φ^j) et $([H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Phi^j)$ sont des suites bornées, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, on peut en extraire des sous-suites faiblement convergentes. Pour simplifier, on continue à noter (Φ^j) et $([H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Phi^j)$ ces sous-suites faiblement convergentes. Leurs limites faibles sont notées respectivement Φ_m et Φ'_m . L'état Φ_m étant le candidat idéal pour être vecteur propre associé à $H_U^V(m)$, commençons par montrer que $\Phi_m \in Q(H_U^V(m))$. Pour tout $\Psi \in Q(H_U^V(m))$, on a :

$$(\Psi, [H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Phi^j) = ([H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Psi, \Phi^j). \quad (3.16)$$

Faisant tendre j vers l'infini, on obtient :

$$(\Psi, \Phi'_m) = ([H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Psi, \Phi_m). \quad (3.17)$$

Ainsi $\Phi_m \in Q(H_U^V(m))$ et $[H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Phi_m = \Phi'_m$.

Posons maintenant $\Psi^j := \Phi^j - \Phi_m$; par définition de Φ_m , Ψ^j converge faiblement vers 0, et d'autre part :

$$\|\Psi^j\|^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1 - \|\Phi_m\|^2. \quad (3.18)$$

On aimerait montrer que Ψ^j converge fortement vers 0, c'est-à-dire que $\|\Phi_m\| = 1$. Or, si l'on suppose que $\liminf_{j \rightarrow \infty} \|\Psi^j\| > 0$, la suite $(\Psi^j / \|\Psi^j\|)$ est bien définie à partir d'un certain rang, et vérifie les propriétés citées dans l'énoncé de la proposition. On a donc par hypothèse :

$$q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j) - E(H_U^V(m))\|\Psi^j\|^2 > 0. \quad (3.19)$$

Mais d'autre part vue la définition (3.15) de (Φ^j) , on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} q_{H_U^V(m)}(\Phi^j, \Phi^j) - E(H_U^V(m))(\Phi^j, \Phi^j) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| [H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} (\Phi_m + \Psi^j) \right\|^2 \\
&= \left\| [H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Phi_m \right\|^2 + \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| [H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Psi^j \right\|^2,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

ou encore :

$$[H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Phi_m = 0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| [H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Psi^j \right\|, \tag{3.21}$$

ce qui est en contradiction avec (3.19). Donc nécessairement $\liminf_{j \rightarrow \infty} \|\Psi^j\| = 0$, si bien que l'on peut trouver une sous-suite de Ψ^j convergeant fortement vers 0. Ainsi, $\|\Phi_m\| = 1$, et comme $[H_U^V(m) - E(H_U^V(m))]^{1/2} \Phi_m = 0$, on en déduit directement que $\Phi_m \in D(H_U^V(m))$, puis que $H_U^V(m)\Phi_m = E(H_U^V(m))\Phi_m$. \square

3-1.3 Localisation des photons

Dans cette sous-section, nous allons montrer que si dans un état Φ , l'électron et le noyau sont localisés dans une région finie de l'espace, on peut distinguer, dans ce même état Φ , les photons "proches" de l'électron et du noyau des photons "éloignés". Il semble en effet naturel que les photons "éloignés" de l'électron et du noyau n'interagissent que "faiblement" avec ces derniers, si bien que leur contribution à l'énergie de Φ n'intervienne, à une erreur négligeable près, qu'au travers de l'opérateur d'énergie du champ libre, $H_f(m)$. Le fait que les photons soient considérés comme massifs sera un point crucial de notre démonstration en raison de l'estimation valable uniquement pour $m > 0$:

$$q_{\mathcal{N}} \leq \frac{1}{m} q_{H_f(m)}. \tag{3.22}$$

Commençons par définir une fonction localisant l'électron et le noyau dans une région finie de l'espace : soit $\phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \quad \phi_1 = 1 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \leq 1, |R| \leq 1\}, \\ * \quad \phi_1 = 0 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \geq 2\} \cup \{X \in \mathbb{R}^6, |R| \geq 2\}, \\ * \quad 0 \leq \phi_1 \leq 1. \end{array} \right.$$

Soit de plus, pour tout $T > 0$, $\phi_{1,T}(X) := \phi_1(X/T)$.

Définissons ensuite les objets qui vont nous permettre de localiser les photons : soient $j_1, j_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \quad j_1 = 1 \text{ sur la boule } B(0, 1), \\ * \quad j_1 = 0 \text{ sur } B(0, 2)^c, \\ * \quad 0 \leq j_1 \leq 1, \\ * \quad j_1^2 + j_2^2 = 1. \end{array} \right.$$

Puis de la même façon que pour $\phi_{1,T}$, soit pour tous $Q > 0$, $y \in \mathbb{R}^3$ et $i \in \{1, 2\}$, $j_{i,Q}(y) = j_i(y/Q)$. On obtient alors une isométrie partielle \mathcal{U}_Q de \mathcal{F}_s dans $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s$ en posant :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_Q \Omega &:= \Omega \otimes \Omega, \\ \mathcal{U}_Q a^*(f_1) \dots a^*(f_n) \Omega &:= c_Q^*(f_1) \dots c_Q^*(f_n) \Omega \otimes \Omega, \end{aligned} \quad (3.23)$$

avec :

$$c_Q^*(f_i) := a^*(j_{1,Q} f_i) \otimes I + I \otimes a^*(j_{2,Q} f_i). \quad (3.24)$$

Remarquons que d'après la proposition 1.7, (3.23) est suffisant pour définir \mathcal{U}_Q sur \mathcal{F}_s tout entier. Par ailleurs, le fait que \mathcal{U}_Q soit une isométrie partielle se montre directement en utilisant l'égalité $j_1^2 + j_2^2 = 1$ et les relations canoniques de commutation (1.30).

Définissons un opérateur auto-adjoint agissant dans $L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$ à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 3.4 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit la forme quadratique $\tilde{q}_{\tilde{H}_U^V(m)}$ définie sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(\tilde{H}_f(m))$ par :*

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{\tilde{H}_U^V(m)}(\Phi, \Psi) &= \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} ([(p_j - q_j A_j) \otimes I] \Phi, [(p_j - q_j A_j) \otimes I] \Psi) \\ &\quad + (\tilde{H}_f(m)^{1/2} \Phi, \tilde{H}_f(m)^{1/2} \Psi) - ((-V)^{1/2} \Phi, (-V)^{1/2} \Psi) \\ &\quad - ((U^-)^{1/2} \Phi, (U^-)^{1/2} \Psi) + ((U^+)^{1/2} \Phi, (U^+)^{1/2} \Psi), \end{aligned} \quad (3.25)$$

où nous avons posé $\tilde{H}_f(m) := H_f(m) \otimes I + I \otimes H_f(m)$. Alors $\tilde{q}_{\tilde{H}_U^V(m)}$ est fermée et semi-bornée inférieurement ; on note $\tilde{H}_U^V(m)$ l'opérateur associé à $\tilde{q}_{\tilde{H}_U^V(m)}$ par la proposition 1.2. De plus, $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S \otimes D_S$ est un cœur de $\tilde{H}_U^V(m)$, et on a sur cet ensemble :

$$\tilde{H}_U^V(m) = H_U^V(m) \otimes I + I \otimes H_f(m). \quad (3.26)$$

Démonstration

Il suffit d'adapter le travail effectué pour définir H_U^V dans la sous-section 2-4.1. \square

Le résultat principal de cette sous-section est alors le suivant :

Théorème 3.5 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit $m > 0$ et soit $\Psi \in Q(H_U^V(m))$. On a :*

$$\begin{aligned} q_{H_U^V(m)}(\phi_{1,T} \Psi, \phi_{1,T} \Psi) &= q_{\tilde{H}_U^V(m)}(\mathcal{U}_Q \phi_{1,T} \Psi, \mathcal{U}_Q \phi_{1,T} \Psi) \\ &\quad + \nu(Q, T, m) \left[a q_{H_U^V(m)}(\Psi, \Psi) + b \|\Psi\|^2 \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

où a, b sont des constantes positives indépendantes de Q, T, m , et où pour tous $T, m > 0$ fixés : $\nu(Q, T, m) \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0$.

La démonstration est basée sur [GLL01, Lemme A.1] ; nous la réécrivons au sens des formes quadratiques en justifiant rigoureusement les questions de domaines. Commençons par un lemme permettant de comparer les énergies associées à $H_f(m)$ et $\tilde{H}_f(m)$:

Lemme 3.6 Soient $m > 0$ et $\Psi \in Q(H_f(m))$. On a :

$$q_{H_f(m)}(\Psi, \Psi) = q_{\tilde{H}_f(m)}(\mathcal{U}_Q \Psi, \mathcal{U}_Q \Psi) + \nu_1(Q) [q_{\mathcal{N}}(\Psi, \Psi) + \|\Psi\|^2], \quad (3.28)$$

où ν_1 vérifie : $\nu_1(Q) \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0$.

Démonstration

Observons tout d'abord que si $\Psi \in Q(H_f(m))$, il est clair, dans la mesure où $j_1, j_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, que $\mathcal{U}_Q \Psi \in Q(\tilde{H}_f(m))$. Cherchons alors une expression de la différence $\tilde{q}_{D_f(m)}$ définie sur $Q(H_f(m))$ par :

$$\tilde{q}_{D_f(m)} := q_{H_f(m)} - q_{\mathcal{U}_Q^* \tilde{H}_f(m) \mathcal{U}_Q}. \quad (3.29)$$

Considérons $(f_i)_{i \geq 0}$ une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que pour tous $i \geq 0$ et $\lambda \in \{1, 2\}$, $f_i(\cdot, \lambda) \in H^1(\mathbb{R}^3)$. En particulier, on a ainsi $\omega_m(-i\nabla) f_i \in L^2(\mathbb{R}^3)$ pour tout $i \geq 0$. Utilisant la définition de $H_f(m)$, on observe que pour tous $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \left[H_f(m) - \mathcal{U}_Q^* \tilde{H}_f(m) \mathcal{U}_Q \right] a^*(f_{i_1}) \dots a^*(f_{i_n}) \Omega \\ &= \mathcal{U}_Q^* \sum_{l=1}^n c_Q^*(f_{i_l}) \dots [a^*([j_{1,Q}, \omega_m(-i\nabla)] f_{i_l}) \otimes I + I \otimes a^*([j_{2,Q}, \omega_m(-i\nabla)] f_{i_l})] \\ & \quad \times \dots c_Q^*(f_{i_n}) \Omega \otimes \Omega, \end{aligned} \quad (3.30)$$

où le crochet $[j_{1,Q}, \omega_m(-i\nabla)]$ désigne le commutateur de $j_{1,Q}$ et $\omega_m(-i\nabla)$ et de même pour le second crochet. Notons $h_{1,Q} := [j_{1,Q}, \omega_m(-i\nabla)]$, $h_{2,Q} := [j_{2,Q}, \omega_m(-i\nabla)]$ pour simplifier l'écriture. On en déduit l'égalité des opérateurs suivants sur l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $a^*(f_{i_1}) \dots a^*(f_{i_n}) \Omega$:

$$\begin{aligned} & H_f(m) - \mathcal{U}_Q^* \tilde{H}_f(m) \mathcal{U}_Q \\ &= \mathcal{U}_Q^* \sum_{l \geq 0} [a^*(h_{1,Q} f_l) \otimes I + I \otimes a^*(h_{2,Q} f_l)] [a(j_{1,Q} f_l) \otimes I + I \otimes a(j_{2,Q} f_l)] \mathcal{U}_Q. \end{aligned} \quad (3.31)$$

On note $D_f(m) := H_f(m) - \mathcal{U}_Q^* \tilde{H}_f(m) \mathcal{U}_Q$ l'opérateur défini sur D_S . En utilisant l'isomorphisme \mathcal{I} donné dans la proposition 1.10, il reste simplement :

$$D_f(m) = \mathcal{U}_Q^* \mathcal{I} \sum_{l \geq 0} a^*(h_{1,Q} f_l \oplus h_{2,Q} f_l) a(j_{1,Q} f_l \oplus j_{2,Q} f_l) \mathcal{I}^{-1} \mathcal{U}_Q. \quad (3.32)$$

Soit alors $\Psi \in Q(H_f(m))$ et $\Psi_q \in D_S$ tel que $\Psi_q \rightarrow \Psi$ et $q_{H_f(m)}(\Psi - \Psi_q, \Psi - \Psi_q) \rightarrow 0$ quand $q \rightarrow \infty$. Puisque $\Psi_q \in D_S$, on peut écrire en utilisant (3.31) :

$$\langle \Psi_q, D_f(m) \Psi_q \rangle = \sum_{l \geq 0} \langle a(h_{1,Q} f_l \oplus h_{2,Q} f_l) \mathcal{I}^{-1} \mathcal{U}_Q \Psi_q, a(j_{1,Q} f_l \oplus j_{2,Q} f_l) \mathcal{I}^{-1} \mathcal{U}_Q \Psi_q \rangle. \quad (3.33)$$

Notons pour simplifier $\tilde{\Psi}_q := \mathcal{I}^{-1} \mathcal{U}_Q \Psi_q$. Le terme du produit scalaire apparaissant dans (3.33) et correspondant à la $(n+1)^e$ composante de $\tilde{\Psi}_q$ dans $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & (n+1) \sum_{l \geq 0} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \left(h_{1,Q} f_l \oplus h_{2,Q} f_l, \tilde{\Psi}_q^{(n+1)}(\cdot, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ & \quad \times \left(j_{1,Q} f_l \oplus j_{2,Q} f_l, \tilde{\Psi}_q^{(n+1)}(\cdot, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Remarquons que dans la dernière égalité (3.34), nous avons utilisé implicitement l'isomorphisme (1.65) et la notation (1.66). Par ailleurs, on peut montrer que h_1 et h_2 se prolongent à des opérateurs bornés de $L^2(\mathbb{R}^3)$ vérifiant :

$$\|h_{1,Q}\| = \|[j_{1,Q}, \omega(-i\nabla)]\| \leq \frac{C}{Q}, \quad \|h_{2,Q}\| = \|[j_{2,Q}, \omega(-i\nabla)]\| \leq \frac{C}{Q}, \quad (3.35)$$

où C est une constante positive. Comme $h_{1,Q}$, $h_{2,Q}$ sont de plus symétriques, et comme $(f_l)_{l \geq 0}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^3)$, (3.34) se simplifie en :

$$(n+1) \sum_{\lambda, \lambda'=1,2} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \left(h_{\lambda,Q} \tilde{\Psi}_q^{(n+1)}((\cdot, \lambda), \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n), \right. \\ \left. j_{\lambda',Q} \tilde{\Psi}_q^{(n+1)}((\cdot, \lambda'), \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \right)_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n. \quad (3.36)$$

En utilisant (3.35) et le fait que $\|j_{\lambda',Q}\|_\infty = 1$, on obtient que le module de (3.36) est majoré par :

$$(n+1) \frac{2C}{Q} \left\| \tilde{\Psi}_q^{(n+1)} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3(n+1)})}, \quad (3.37)$$

ce qui conduit en prenant la somme sur $n \geq 0$, dans la mesure où \mathcal{U}_Q et \mathcal{I} sont des isométries, à :

$$|\langle \Psi_q, D_f(m) \Psi_q \rangle| \leq \frac{2C}{Q} \langle \Psi_q, (\mathcal{N} + 1) \Psi_q \rangle. \quad (3.38)$$

En prenant la limite quand $q \rightarrow \infty$ et en utilisant (3.22), on en déduit :

$$\tilde{q}_{D_f(m)}(\Psi, \Psi) \leq \frac{2C}{Q} [q_{\mathcal{N}}(\Psi, \Psi) + \|\Psi\|^2]. \quad (3.39)$$

On a donc bien le résultat. \square

Poursuivant la démonstration du théorème 3.5, il nous faut maintenant comparer les énergies associées à $(p_j - q_j A_j)^2$ et $(p_j - q_j A_j)^2 \otimes I$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.7 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soient $m > 0$ et $\Psi \in Q(H_U^V(m))$. On a :*

$$\|(p_j - q_j A_j) \phi_{1,T} \Psi\|^2 = \|(p_j - q_j A_j) \otimes I \mathcal{U}_Q \phi_{1,T} \Psi\|^2 \\ + \nu_2(Q, T, m) \left[a' q_{H_U^V(m)}(\Psi, \Psi) + b' \|\Psi\|^2 \right], \quad (3.40)$$

où a', b' sont des constantes positives indépendantes de Q, T, m et où pour tous $T, m > 0$ fixés : $\nu_2(Q, T, m) \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0$.

Démonstration

Tout d'abord, si $\Psi \in Q(H_U^V(m))$, il est clair que $\phi_{1,T} \Psi \in Q(H_U^V(m))$ vue la définition de $\phi_{1,T}$, puis que $\mathcal{U}_Q \phi_{1,T} \Psi \in Q(H_U^V(m) \otimes I)$ vue la définition de $j_{1,Q}$ intervenant dans \mathcal{U}_Q . Les éléments apparaissant dans (3.40) sont donc bien définis et il nous faut estimer la différence :

$$D_j := \|(p_j - q_j A_j) \phi_{1,T} \Psi\|^2 - \|(p_j - q_j A_j) \otimes I \mathcal{U}_Q \phi_{1,T} \Psi\|^2. \quad (3.41)$$

Notons Q_j l'opérateur défini sur $Q(H_U^V(m))$ par :

$$Q_j := (p_j - q_j A_j) - \mathcal{U}_Q^*(p_j - q_j A_j) \otimes I\mathcal{U}_Q. \quad (3.42)$$

On a alors :

$$D_j = 2\text{Re}((p_j - q_j A_j)\phi_{1,T}\Psi, Q_j\phi_{1,T}\Psi) - \|Q_j\phi_{1,T}\Psi\|^2, \quad (3.43)$$

et on veut majorer $|D_j|$. En utilisant les lemmes 2.9 et 2.10, ainsi que le fait que $V + U^-$ est relativement borné par rapport à $p_1^2 + p_2^2$ avec borne relative 0, on montre facilement que pour tout $\Phi \in Q(H_U^V(m))$:

$$\|(p_j - q_j A_j)\Phi\|^2 \leq a_1 q_{H_U^V(m)}(\Phi, \Phi) + b_1 \|\Phi\|^2, \quad (3.44)$$

où a_1, b_1 sont des constantes positives indépendantes de m . D'autre part, en faisant commuter p_1, p_2 et $\phi_{1,T}$, on montre, de la même façon par exemple que dans [CFKS87, IMS Localization Formula], que :

$$q_{H_U^V(m)}(\phi_{1,T}\Psi, \phi_{1,T}\Psi) = q_{H_U^V(m)}(\phi_{1,T}^2\Psi, \Psi) + (|\nabla\phi_{1,T}|^2\Psi, \Psi). \quad (3.45)$$

D'où, par (3.44) et puisque $\phi_{1,T}, \nabla\phi_{1,T} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\|(p_j - q_j A_j)\phi_{1,T}\Psi\|^2 \leq a_2 q_{H_U^V(m)}(\Psi, \Psi) + b_2 \|\Psi\|^2, \quad (3.46)$$

où a_2, b_2 sont des constantes positives indépendantes de m . Revenant à (3.43), il nous reste à estimer $\|Q_j\phi_{1,T}\Psi\|$. Comme \mathcal{U}_Q n'agit que sur \mathcal{F}_s , on a $p_j - \mathcal{U}_Q^*(p_j \otimes I)\mathcal{U}_Q = 0$, et donc :

$$Q_j\phi_{1,T}\Psi = -q_j [A_j - \mathcal{U}_Q^*A_j \otimes I\mathcal{U}_Q] \phi_{1,T}\Psi. \quad (3.47)$$

Or, vues les définitions de A_j et \mathcal{U}_Q , on a pour presque tout $X \in \mathbb{R}^6$ et pour $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} & [A_j^i - \mathcal{U}_Q^*A_j^i \otimes I\mathcal{U}_Q](X) \\ &= \mathcal{U}_Q^* [a^*([j_{1,Q} - 1]h^i(x_j - \cdot)) \otimes I + I \otimes a^*(j_{2,Q}h^i(x_j - \cdot))] \mathcal{U}_Q \\ & \quad + \mathcal{U}_Q^* [a([j_{1,Q} - 1]h^i(x_j - \cdot)) \otimes I + I \otimes a(j_{2,Q}h^i(x_j - \cdot))] \mathcal{U}_Q. \end{aligned} \quad (3.48)$$

En utilisant une nouvelle fois l'isomorphisme donné dans le lemme 1.10, on en déduit :

$$\begin{aligned} \|Q_j\phi_{1,T}\Psi\|^2 &= q_j^2 \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^6} \|\mathcal{U}_Q^* \mathcal{I} [a^*([j_{1,Q} - 1]h^i(x_j - \cdot)) \oplus j_{2,Q}h^i(x_j - \cdot)] \\ & \quad + a([j_{1,Q} - 1]h^i(x_j - \cdot)) \oplus j_{2,Q}h^i(x_j - \cdot)] \mathcal{I}^{-1} \mathcal{U}_Q \phi_{1,T}(X)\Psi(X)\|^2 dX. \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'estimation des opérateurs de créations et d'annihilation en fonction de l'opérateur du nombre de photons donne alors (étant entendu que ces opérateurs agissent ici dans $\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3))$ et qu'il s'agit donc d'adapter, de manière évidente, la proposition 1.9) :

$$\begin{aligned} \|Q_j\phi_{1,T}\Psi\|^2 &\leq 4q_j^2 \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^6} \phi_{1,T}(X)^2 \left[\|[j_{1,Q} - 1]h^i(x_j - \cdot) \oplus j_{2,Q}h^i(x_j - \cdot)\|^2 \right. \\ & \quad \left. \times q_{\mathcal{N}}(\mathcal{I}^{-1} \mathcal{U}_Q \Psi(X), \mathcal{I}^{-1} \mathcal{U}_Q \Psi(X)) + \|\Psi(X)\|^2 \right] dX. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Maintenant on constate, de la même façon que dans la proposition 1.10, que :

$$q_{\mathcal{N}}(\mathcal{I}^{-1}\mathcal{U}_Q\Psi(X), \mathcal{I}^{-1}\mathcal{U}_Q\Psi(X)) = q_{\mathcal{N}}(\Psi(X), \Psi(X)). \quad (3.51)$$

En utilisant alors les faits que $\phi_{1,T} = 0$ sur $B(0, 2T)^c$ et $j_{1,Q} - 1 = 0 = j_{2,Q}$ sur $B(0, Q)$, on peut obtenir, à partir de (3.50), l'inégalité suivante :

$$\|Q_j\phi_{1,T}\Psi\|^2 \leq C \sum_{i=1}^3 \int_{B(0, Q-2T)^c \times \{1,2\}} |h^i(\underline{y})|^2 d\underline{y} [q_{\mathcal{N}}(\Psi, \Psi) + \|\Psi\|^2], \quad (3.52)$$

où C est une constante positive, et en supposant ici que $Q > 2T$. Or, comme $h^i \in L^2(\mathbb{R}^3)$ on a, pour $T > 0$ fixé :

$$\int_{B(0, Q-2T)^c \times \{1,2\}} |h^i(\underline{y})|^2 d\underline{y} \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0. \quad (3.53)$$

Ainsi, en utilisant l'estimation :

$$q_{\mathcal{N}} \leq \frac{1}{m} q_{H_f(m)} \leq \frac{1}{m} [a_3 q_{H_V^Y(m)} + b_3], \quad (3.54)$$

où a_3 et b_3 sont des constantes positives indépendantes de m , et en insérant (3.46) et (3.52) dans (3.43), on obtient le résultat annoncé. \square

Appliquons pour conclure les deux lemmes que nous venons de démontrer afin d'obtenir le théorème 3.5 :

Démonstration du théorème 3.5

Soient donc $m > 0$ et $\Psi \in Q(H_V^Y(m))$. Notons :

$$\tilde{\nu}(Q, T, m) = q_{H_V^Y(m)}(\phi_{1,T}\Psi, \phi_{1,T}\Psi) - q_{\tilde{H}_f(m)}(\mathcal{U}_Q\phi_{1,T}\Psi, \mathcal{U}_Q\phi_{1,T}\Psi). \quad (3.55)$$

En développant $q_{H_V^Y(m)}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(Q, T, m) &= q_{H_f(m)}(\phi_{1,T}\Psi, \phi_{1,T}\Psi) - q_{\tilde{H}_f(m)}(\mathcal{U}_Q\phi_{1,T}\Psi, \mathcal{U}_Q\phi_{1,T}\Psi) \\ &+ \|(p_j - q_j A_j)\phi_{1,T}\Psi\|^2 - \|(p_j - q_j A_j) \otimes I\mathcal{U}_Q\phi_{1,T}\Psi\|^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Nous avons utilisé dans cette équation le fait que $(U + V) - \mathcal{U}_Q^*(U + V) \otimes I\mathcal{U}_Q = 0$ dans la mesure où \mathcal{U}_Q n'agit que sur \mathcal{F}_s . En appliquant les résultats des lemmes 3.6 et 3.7, il vient immédiatement (en utilisant une fois encore $\|\phi_{1,T}\|_{\infty} \leq 1$) :

$$|\tilde{\nu}(Q, T, m)| \leq \nu_1(Q) [q_{\mathcal{N}}(\Psi, \Psi) + \|\Psi\|^2] + \nu_2(Q, T, m) [a' q_{H_V^Y(m)}(\Psi, \Psi) + b' \|\Psi\|^2]. \quad (3.57)$$

Une nouvelle utilisation de (3.54) permet alors de conclure. \square

3-1.4 Démonstration de l'existence d'un état fondamental pour $H_U^V(m)$

Avant de procéder à la démonstration proprement dite de l'existence d'un état fondamental pour $H_U^V(m)$, nous avons encore besoin de quelques préliminaires. Tout d'abord, rappelant la définition de ϕ_1 , déjà utilisée dans la sous-section précédente, nous définissons de plus $\phi_2, \phi_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^6)$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \phi_1 = 1 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \leq 1, |R| \leq 1\}, \\ * \phi_1 = 0 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \geq 2\} \cup \{X \in \mathbb{R}^6, |R| \geq 2\}, \\ * 0 \leq \phi_1 \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * \phi_2(X) = \phi_2(r), \\ * \phi_2 = 1 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \geq 2\}, \\ * \phi_2 = 0 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \leq 1\}, \\ * 0 \leq \phi_2 \leq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * \phi_3 = 1 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \leq 1, |R| \geq 2\}, \\ * \phi_3 = 0 \text{ sur } \{X \in \mathbb{R}^6, |r| \geq 2\} \cup \{X \in \mathbb{R}^6, |R| \leq 1\}, \\ * 0 \leq \phi_3 \leq 1, \end{array} \right.$$

et enfin $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1$. Nous posons alors $\phi_{i,T}(X) = \phi_i(X/T)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Soit maintenant P_Ω la projection sur le sous-espace vectoriel de \mathcal{F}_s engendré par Ω . Nous donnons un résultat dont nous nous servirons par la suite :

Lemme 3.8 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit $(\Psi^j)_{j \geq 0}$ une suite normalisée de $Q(H_U^V(m))$ convergeant faiblement vers 0 et telle que $q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j)$ est bornée. Posons :*

$$\nu'(Q, T, m, j) := m(\mathcal{U}_Q \phi_{1,T} \Psi^j, I \otimes P_\Omega \mathcal{U}_Q \phi_{1,T} \Psi^j). \quad (3.58)$$

Alors pour tous $Q, T, m > 0$ fixés, on a : $\liminf_{j \rightarrow \infty} (\nu'(Q, T, m, j)) = 0$.

Démonstration

La démonstration est en tout point identique à celle de [GLL01, Lemme A.3]. Le point essentiel réside en la compacité de l'opérateur suivant :

$$\phi_{1,T} \Gamma(j_{1,Q}) \left[1 + \sum_{j=1,2} p_j^2 + H_f(m) \right]^{-1/2}, \quad (3.59)$$

où $\Gamma(j_{1,Q})$ est défini par $\Gamma(j_{1,Q}) a^*(f_1) \dots a^*(f_n) \Omega := a^*(j_{1,Q} f_1) \dots a^*(j_{1,Q} f_n) \Omega$; le fait que l'opérateur (3.59) soit compact s'obtient en utilisant que $\phi_{1,T}$ et $j_{1,Q}$ sont à supports compacts. \square

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat principal de cette section :

Théorème 3.9 *Soit $m > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) et (C.L.) sont vérifiées. Alors le Hamiltonien massif $H_U^V(m)$ possède un état fondamental normalisé Φ_m , dans le sens où $\|\Phi_m\| = 1$, $\Phi_m \in D(H_U^V(m))$ et :*

$$H_U^V(m) \Phi_m = E(H_U^V(m)) \Phi_m. \quad (3.60)$$

Démonstration

Utilisons la proposition 3.3 : soit $(\Psi^j)_{j \geq 0}$ une suite normalisée convergeant faiblement vers 0 telle que $\Psi^j \in Q(H_U^V(m))$ pour tout j , et telle que $q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j)$ est bornée ; le théorème sera démontré si l'on prouve :

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j) > E(H_U^V(m)). \quad (3.61)$$

De la même façon que l'on a écrit l'égalité (3.45), on a, puisque $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1$:

$$q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j) = \sum_{i=1,2,3} q_{H_U^V(m)}(\phi_{i,T}\Psi^j, \phi_{i,T}\Psi^j) - \sum_{i=1,2,3} (\Psi^j, |\nabla\phi_{i,T}|^2 \Psi^j). \quad (3.62)$$

Déjà, par définition de ϕ_i , on a $|\nabla\phi_i| \leq C_i$ pour une certaine constante positive C_i ; par conséquent :

$$- \sum_{i=1,2,3} (\Psi^j, |\nabla\phi_{i,T}|^2 \Psi^j) \geq -\frac{\text{Cste}}{T^2}. \quad (3.63)$$

Passons à l'estimation de $q_{H_U^V(m)}(\phi_{1,T}\Psi^j, \phi_{1,T}\Psi^j)$. Rappelant la définition de $\tilde{H}_U^V(m)$ donnée dans la proposition 3.4, et particulièrement la propriété (3.26), on observe que :

$$q_{\tilde{H}_U^V(m)} \geq [E(H_U^V(m)) + m] I \otimes I - mI \otimes P_\Omega. \quad (3.64)$$

Pour obtenir (3.64), nous avons utilisé l'inégalité $H_f(m) \geq mI - mP_\Omega$. D'après le théorème 3.5 et le lemme 3.8, on a ainsi :

$$\begin{aligned} & q_{H_U^V(m)}(\phi_{1,T}\Psi^j, \phi_{1,T}\Psi^j) \\ &= q_{\tilde{H}_U^V(m)}(\mathcal{U}_Q\phi_{1,T}\Psi^j, \mathcal{U}_Q\phi_{1,T}\Psi^j) + \nu(m, Q, T) \\ &\geq [E(H_U^V(m)) + m] \|\phi_{1,T}\Psi^j\|^2 + \nu(Q, T, m) - \nu'(Q, T, m, j), \end{aligned} \quad (3.65)$$

avec $\nu(Q, T, m) \xrightarrow[Q \rightarrow \infty]{} 0$ pour tous $T, m > 0$ fixés, et $\liminf_{j \rightarrow \infty} (\nu'(Q, T, m, j)) = 0$ pour tous $Q, T, m > 0$ fixés. Notons que le terme $\nu(Q, T, m)$ n'est pas tout à fait le même que dans le théorème 3.5 ; on a ici utilisé le fait que la suite $q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j)$ est bornée pour "insérer" sa borne supérieure dans $\nu(Q, T, m)$.

Poursuivons notre démonstration en étudiant $q_{H_U^V(m)}(\phi_{2,T}\Psi^j, \phi_{2,T}\Psi^j)$. On a :

$$q_{H_U^V(m)}(\phi_{2,T}\Psi^j, \phi_{2,T}\Psi^j) = q_{H_U^0(m)}(\phi_{2,T}\Psi^j, \phi_{2,T}\Psi^j) - \|(-V)^{1/2}\phi_{2,T}\Psi^j\|^2. \quad (3.66)$$

Mais, par définition, $\phi_{2,T}$ est à support dans $\{X \in \mathbb{R}^6, |r| \geq T\}$; ainsi :

$$q_{H_U^V(m)}(\phi_{2,T}\Psi^j, \phi_{2,T}\Psi^j) \geq \left[E(H_U^0(m)) - Zq^2 \frac{C}{T} \right] \|\phi_{2,T}\Psi^j\|^2, \quad (3.67)$$

où C est la constante positive apparaissant dans la définition (2.5) de V .

Enfin, il nous faut estimer $q_{H_U^V(m)}(\phi_{3,T}\Psi^j, \phi_{3,T}\Psi^j)$. On a :

$$\begin{aligned} q_{H_U^V(m)}(\phi_{3,T}\Psi^j, \phi_{3,T}\Psi^j) &= q_{H_U^0(m)}(\phi_{3,T}\Psi^j, \phi_{3,T}\Psi^j) \\ &+ \|(U^+)^{1/2}\phi_{3,T}\Psi^j\|^2 - \|(U^-)^{1/2}\phi_{3,T}\Psi^j\|^2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Or $\phi_{3,T}$ est à support dans $\{X \in \mathbb{R}^6, |R| \geq T\}$, et d'après l'hypothèse (\mathcal{H}_0) , U^- est à support compact. Ainsi, lorsque T est suffisamment grand, $(U^-)^{1/2}\phi_{3,T} = 0$. On en déduit :

$$q_{H_U^V(m)}(\phi_{3,T}\Psi^j, \phi_{3,T}\Psi^j) \geq E(H_0^V(m)) \|\phi_{3,T}\Psi^j\|^2, \quad (3.69)$$

dès que T est suffisamment grand.

Insérons maintenant nos 4 estimations (3.63), (3.65), (3.67), (3.69) dans (3.62) : on obtient, puisque encore une fois $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1$, et puisque d'autre part $\|\phi_{i,T}\Psi^j\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j) &\geq \min [E(H_U^V(m)) + m, E(H_U^0(m)), E(H_0^V(m))] \\ &\quad + \nu(m, Q, T) + \nu'(m, Q, T, j) - Zq^2 \frac{C}{T} - \frac{C_{ste}}{T^2}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

pour tout T suffisamment grand. Soit alors $\varepsilon > 0$ et soit T_0 suffisamment grand tel que :

$$-Zq^2 \frac{C}{T_0} - \frac{C_{ste}}{T_0^2} \geq -\varepsilon. \quad (3.71)$$

Fixons de plus Q_0 tel que $|\nu(m, Q_0, T_0)| \leq \varepsilon$; on sait d'après le lemme 3.8 que :

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (\nu'(m, Q_0, T_0, j)) = 0. \quad (3.72)$$

Ceci implique que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \left(q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j) \right) \geq \min [E(H_U^V(m)) + m, E(H_U^0(m)), E(H_0^V(m))] - 2\varepsilon. \quad (3.73)$$

Et donc, puisque l'hypothèse (C.L.) est satisfaite, le corollaire 3.2 entraîne que, pour m suffisamment petit :

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(q_{H_U^V(m)}(\Psi^j, \Psi^j) \right) &\geq \min [E(H_U^V(m)) + m, E(H_U^0(m)), E(H_0^V(m))] \\ &> E(H_U^V(m)). \end{aligned} \quad (3.74)$$

On a bien obtenu ce qu'il fallait démontrer. \square

3-2 Décroissance exponentielle de Φ_m

Ayant obtenu dans la section précédente l'existence d'un état fondamental Φ_m pour $H_U^V(m)$, nous abordons maintenant l'étude des propriétés de cet état fondamental. Nous commençons par établir dans cette section la décroissance exponentielle de Φ_m en la variable spatiale X ; ceci se révélera essentiel pour la suite. Par ailleurs nous allons obtenir la décroissance exponentielle "directement", c'est-à-dire sans avoir recours à la méthode développée dans [Gri02].

Proposition 3.10 *Soit $m > 0$ suffisamment petit. Supposons les hypothèses (\mathcal{H}_0) et (C.L.) vérifiées. Soit Φ_m un état fondamental de $H_U^V(m)$ obtenu par le théorème 3.9 ; soit de plus $\beta > 0$ tel que :*

$$0 < \beta^2 < \min(E(H_0^V) - E(H_U^V), E(H_U^0) - E(H_U^V)). \quad (3.75)$$

Il existe alors une constante positive C_0 indépendante de m telle que :

$$\|e^{\beta|X|}\Phi_m\|^2 \leq C_0. \quad (3.76)$$

Démonstration

Rappelons que pour $i = 1, 2, 3$, $\phi_{i,T}$ a été définie dans la section précédente. Posons de plus :

$$\bar{\phi}_{1,T} := \sqrt{\phi_{2,T}^2 + \phi_{3,T}^2}, \quad (3.77)$$

c'est-à-dire encore : $\bar{\phi}_{1,T}^2 = 1 - \phi_{1,T}^2$. On a alors :

$$\|e^{\beta|X|}\Phi_m\|^2 = \|\phi_{1,T}e^{\beta|X|}\Phi_m\|^2 + \|\bar{\phi}_{1,T}e^{\beta|X|}\Phi_m\|^2. \quad (3.78)$$

Puisque $\phi_{1,T}$ est à support compact, le premier des deux termes du membre de droite de (3.78) est plus petit qu'une certaine constante positive C_1 qui ne dépend pas de m . Il reste donc à estimer le deuxième terme de (3.78).

Posons pour ce faire $G_T := \bar{\phi}_{1,T} \exp(f_\varepsilon)$, où f_ε est définie pour tout $\varepsilon > 0$ par :

$$f_\varepsilon(X) := \frac{\beta|X|}{1 + \varepsilon|X|}. \quad (3.79)$$

Observons que f_ε et $|\nabla f_\varepsilon|$ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^6)$, et, plus précisément, que $|\nabla f_\varepsilon| \leq \beta$. Puisque $\Phi_m \in Q(H_U^V(m))$, il est ainsi facile de voir que $G_T\Phi_m \in Q(H_U^V(m))$; alors, utilisant le fait que Φ_m est un état fondamental de $H_U^V(m)$, on obtient en faisant commuter p_1, p_2 et G_T (comme dans (3.45), (3.62)) :

$$q_{H_U^V(m)}(G_T\Phi_m, G_T\Phi_m) - E(H_U^V(m))\|G_T\Phi_m\|^2 = (\Phi_m, |\nabla G_T|^2\Phi_m). \quad (3.80)$$

Or, vue la définition de G_T , on peut calculer :

$$|\nabla G_T|^2 = |\nabla \bar{\phi}_{1,T}|^2 e^{2f_\varepsilon} + 2(\nabla \bar{\phi}_{1,T} \cdot \nabla f_\varepsilon) e^{f_\varepsilon} G_T + |\nabla f_\varepsilon|^2 G_T^2. \quad (3.81)$$

Donc, en insérant (3.81) dans (3.80), et puisque $\nabla \bar{\phi}_{1,T}$ est à support compact, on en déduit :

$$\begin{aligned} & q_{H_U^V(m)}(G_T\Phi_m, G_T\Phi_m) - E(H_U^V(m))\|G_T\Phi_m\|^2 - (G_T\Phi_m, |\nabla f_\varepsilon|^2 G_T\Phi_m) \\ &= (\Phi_m, [|\nabla \bar{\phi}_{1,T}|^2 e^{2f_\varepsilon} + 2(\nabla \bar{\phi}_{1,T} \cdot \nabla f_\varepsilon) e^{f_\varepsilon} G_T] \Phi_m) \\ &\leq C_2, \end{aligned} \quad (3.82)$$

où C_2 est une constante positive indépendante de m et de ε (mais dépendante de T).

Notons maintenant que $\phi_{1,T/2} \times \bar{\phi}_{1,T} = 0$, si bien que (en utilisant que $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 1$ et en faisant encore commuter p_1, p_2 et $\phi_{i,T}$) :

$$\begin{aligned} & q_{H_U^V(m)}(G_T\Phi_m, G_T\Phi_m) \\ &= \sum_{i=2,3} q_{H_U^V(m)}(G_T\Phi_m, \phi_{i,T/2}^2 G_T\Phi_m) \\ &= \sum_{i=2,3} q_{H_U^V(m)}(\phi_{i,T/2} G_T\Phi_m, \phi_{i,T/2} G_T\Phi_m) - \sum_{i=2,3} (G_T\Phi_m, |\nabla \phi_{i,T/2}|^2 G_T\Phi_m). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Or, de la même façon que nous l'avons utilisé dans la démonstration du théorème 3.9, on a d'une part :

$$q_{H_U^V(m)}(\phi_{2,T/2}G_T\Phi_m, \phi_{2,T/2}G_T\Phi_m) \geq \left[E(H_U^0(m)) - Zq^2\frac{2C}{T} \right] \|\phi_{2,T/2}G_T\Phi_m\|^2, \quad (3.84)$$

et d'autre part, pour T suffisamment grand :

$$q_{H_U^V(m)}(\phi_{3,T/2}G_T\Phi_m, \phi_{3,T/2}G_T\Phi_m) \geq E(H_0^V(m))\|\phi_{3,T/2}G_T\Phi_m\|^2. \quad (3.85)$$

Ainsi, en insérant (3.84) et (3.85) dans (3.83) et puisqu'on a toujours $|\nabla\phi_{i,T}| \leq \text{Cste}/T$ (voir (3.63)), on obtient :

$$\begin{aligned} & q_{H_U^V(m)}(G_T\Phi_m, G_T\Phi_m) \\ & \geq \min [E(H_0^V(m)), E(H_U^0(m))] \|G_T\Phi_m\|^2 - \left(Zq^2\frac{2C}{T} + \frac{\text{Cste}}{T^2} \right) \|G_T\Phi_m\|^2, \end{aligned} \quad (3.86)$$

pour tout T suffisamment grand. De $|\nabla f_\varepsilon| \leq \beta$, on déduit alors :

$$\begin{aligned} & q_{H_U^V(m)}(G_T\Phi_m, G_T\Phi_m) - E(H_U^V(m))\|G_T\Phi_m\|^2 - (G_T\Phi_m, |\nabla f_\varepsilon|^2 G_T\Phi_m) \\ & \geq \min [E(H_0^V(m)) - E(H_U^V(m)), E(H_U^0(m)) - E(H_U^V(m))] \|G_T\Phi_m\|^2 \\ & \quad - \beta^2 \|G_T\Phi_m\|^2 - \left(Zq^2\frac{2C}{T} + \frac{\text{Cste}}{T^2} \right) \|G_T\Phi_m\|^2. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ainsi, la convergence de $E(H(m))$ vers $E(H)$ établie à la proposition 3.1 (H désigne ici H_U^V , H_U^0 ou H_0^V), entraîne que, pour m suffisamment petit :

$$\begin{aligned} & q_{H_U^V(m)}(G_T\Phi_m, G_T\Phi_m) - E(H_U^V(m))\|G_T\Phi_m\|^2 - (G_T\Phi_m, |\nabla f_\varepsilon|^2 G_T\Phi_m) \\ & \geq \frac{1}{2} [\min [E(H_0^V) - E(H_U^V), E(H_U^0) - E(H_U^V)] - \beta^2] \|G_T\Phi_m\|^2 \\ & \quad - \left(Zq^2\frac{2C}{T} + \frac{\text{Cste}}{T^2} \right) \|G_T\Phi_m\|^2. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Notons que le terme entre crochets dans (3.88) est strictement positif d'après la définition (3.75) de β . Comme le dernier terme du membre de droite de (3.88) tend vers 0 quand $T \rightarrow \infty$, il existe donc T_0 tel que, pour tout $m > 0$ suffisamment petit :

$$\begin{aligned} & q_{H_U^V(m)}(G_{T_0}\Phi_m, G_{T_0}\Phi_m) - E(H_U^V(m))\|G_{T_0}\Phi_m\|^2 - (G_{T_0}\Phi_m, |\nabla f_\varepsilon|^2 G_{T_0}\Phi_m) \\ & \geq \frac{1}{4} [\min [E(H_0^V) - E(H_U^V), E(H_U^0) - E(H_U^V)] - \beta^2] \|G_{T_0}\Phi_m\|^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Il ne nous reste plus qu'à combiner (3.82) et (3.89) pour obtenir :

$$\|G_{T_0}\Phi_m\|^2 \leq \frac{4C_2}{\min [E(H_0^V) - E(H_U^V), E(H_U^0) - E(H_U^V)] - \beta^2} := C_3, \quad (3.90)$$

cette inégalité étant vraie pour tout $m > 0$ suffisamment petit et tout $\varepsilon > 0$, avec C_3 ne dépendant ni de m ni de ε . Faisant tendre ε vers 0, on en déduit :

$$\|\bar{\phi}_{1,T_0} e^{\beta|X|} \Phi_m\|^2 \leq C_3, \quad (3.91)$$

pour tout $m > 0$ suffisamment petit. Nous avons donc obtenu le résultat en posant $C_0 := C_1 + C_3$. \square

3-3 Contrôle du nombre de photons

Maintenant que nous avons établi la décroissance exponentielle de l'état fondamental Φ_m , nous passons à une autre de ses propriétés essentielles, à savoir que le nombre de photons dans l'état Φ_m est borné, indépendamment de m . La démonstration est basée sur une identité connue dans la littérature sous le nom de "Pull-through formula"; nous l'écrivons ici dans l'espace de fonctions $L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{H})$ (cf.[Gér00]), en utilisant le caractère explicite du domaine de forme $Q(H_U^V(m))$. Par ailleurs, nous devons effectuer sur $H_U^V(m)$ la *transformation de Power-Zienau-Wooley* définie dans la section 2-6, afin "d'améliorer" le comportement infrarouge des fonctions de couplage \widehat{h}^i . Comme expliqué dans la section 2-6, le comportement de $A(x_j)$ en la variable x_j sera, lui, "moins bon" après la transformation; mais la décroissance exponentielle de Φ_m nous permettra de compenser cette perte.

Le lemme qui suit permet de définir $\widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi}$ pour $\Phi \in Q(\mathcal{N})$; sa démonstration est directe en utilisant l'écriture (1.49) de \mathcal{N} au sens des formes.

Lemme 3.11 *Soit $\Phi \in Q(\mathcal{N})$ et $\lambda \in \{1, 2\}$; de façon cohérente avec (1.36), on définit $\widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi}$ pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ par :*

$$(\widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi})^{(n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) := \sqrt{n+1}\widehat{\Phi}^{(n+1)}((k, \lambda), \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n). \quad (3.92)$$

On a alors $\widehat{a}_\lambda(\cdot)\widehat{\Phi} \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}_s)$, et :

$$q_{\mathcal{N}}(\Phi, \Phi) = \sum_{\lambda=1,2} \left\| \widehat{a}_\lambda(\cdot)\widehat{\Phi} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F}_s)}^2 = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \left\| \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi} \right\|_{\mathcal{F}_s}^2 dk. \quad (3.93)$$

De plus, pour $\Phi_1 \in Q(\mathcal{N})$, $\Phi_2 \in \mathcal{F}_s$ et $\lambda \in \{1, 2\}$, on définit $(\widehat{\Phi}_1, \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi}_2)$ pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ par :

$$(\widehat{\Phi}_1, \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi}_2) := \sum_{n \geq 0} \sqrt{n+1} \left(\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2((k, \lambda), \cdot) \right)_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}. \quad (3.94)$$

On a alors $(\widehat{\Phi}_1, \widehat{a}_\lambda(\cdot)\widehat{\Phi}_2) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, et :

$$\left\| (\widehat{\Phi}_1, \widehat{a}_\lambda(\cdot)\widehat{\Phi}_2) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq q_{\mathcal{N}}(\Phi_1, \Phi_1) \|\Phi_2\|^2 + \|\Phi_1\|^2 \|\Phi_2\|^2. \quad (3.95)$$

Appliquons la définition du lemme précédent à l'état fondamental Φ_m , et montrons :

Proposition 3.12 *Soit $m > 0$ suffisamment petit. Supposons les hypothèses (\mathcal{H}_0) et (C.L.) vérifiées. Soit Φ_m un état fondamental normalisé de $H_U^V(m)$ obtenu par le théorème 3.9. On a pour $\lambda = 1, 2$ et pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$:*

$$\left\| \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{\Phi}_m \right\|_{\mathcal{H}} \leq C \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}}, \quad (3.96)$$

où C est une constante positive dépendant des paramètres q, Λ, m_1, m_2 , mais ne dépendant pas de m .

Démonstration

Notons ici $\tilde{H}_U^V(m)$, de la même façon que dans la section 2-6, le Hamiltonien obtenu à partir de $H_U^V(m)$ par la transformation de Power-Zienau-Wooley. Comme la transformation est unitaire, on a $E(\tilde{H}_U^V(m)) = E(H_U^V(m))$, et en notant $\Phi'_m := \mathcal{U}_{PZW}\Phi_m$, on a de plus :

$$\|\Phi'_m\| = 1 \quad , \quad \Phi'_m \in D(\tilde{H}_U^V(m)) \quad \text{et} \quad \tilde{H}_U^V(m)\Phi'_m = E(H_U^V(m))\Phi'_m. \quad (3.97)$$

Autrement dit, Φ'_m est un état fondamental normalisé de $\tilde{H}_U^V(m)$. Comme Φ_m et Φ'_m appartiennent à $Q(\mathcal{N})$ par les égalités de domaines (2.60) et (2.95), le lemme précédent permet de donner un sens à $\hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}_m$ et $\hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}'_m$. Nous allons chercher à estimer $\|\hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}_m\|$ à partir de $\|\hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}'_m\|$. On a en effet, d'après (2.86), au sens d'une égalité dans $L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{H})$:

$$\hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}_m = \mathcal{U}_{PZW}^* \hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}'_m - iw_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}_m. \quad (3.98)$$

Or, la définition de w_λ donnée en (2.87) entraîne directement que :

$$\begin{aligned} \|w_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{H})} &\leq \frac{1}{2\pi} (|q_1| + |q_2|) \left\| \frac{\hat{\chi}_\Lambda(\cdot)}{|\cdot|^{1/2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| |X| \Phi_m \|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C_1 \left\| \frac{\hat{\chi}_\Lambda(\cdot)}{|\cdot|^{1/2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

où C_1 est une constante positive indépendante de m par la décroissance exponentielle de Φ_m établie dans la proposition 3.10. Il nous reste donc à estimer $\|\hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}'_m\|$ dans (3.98).

L'idée de la démonstration est, d'une part, de déterminer le commutateur de $\tilde{H}_U^V(m)$ et $\hat{a}_\lambda(k)$, et d'autre part, d'utiliser le fait que Φ'_m est un état fondamental de $\tilde{H}_U^V(m)$, afin d'obtenir une expression de $\hat{a}_\lambda(k)\hat{\Phi}'_m$. Toutefois, il n'est pas clair a priori que, pour presque tout k dans \mathbb{R}^3 , $\hat{a}_\lambda(k)\hat{\Phi}'_m$ appartienne au domaine de définition du Hamiltonien transformé. Nous allons donc avoir recours aux définitions données dans le lemme 3.11. On vérifie ainsi que, pour tous Φ_1, Φ_2 dans $D(\tilde{H}_U^V(m))$, au sens d'une égalité dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, on a :

$$\begin{aligned} &\left(\hat{\Phi}_1, \hat{a}_\lambda(\cdot)\mathcal{F} \left[\tilde{H}_U^V(m) - E(H_U^V(m)) \right] \mathcal{F}^{-1} \hat{\Phi}_2 \right) \\ &= \left(\hat{\Phi}_1, C_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}_2 \right) + \left(\mathcal{F} \left[\tilde{H}_U^V(m) - E(H_U^V(m)) \right] \mathcal{F}^{-1} \hat{\Phi}_1, \hat{a}_\lambda(\cdot)\hat{\Phi}_2 \right). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Rappelons que l'application \mathcal{F} utilisée dans la dernière équation désigne la "transformée de Fourier" dans l'espace de Fock, définie en (1.16). Par ailleurs l'opérateur $C_\lambda(k)$ est défini pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} C_\lambda(k) &:= \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \sum_{j=1,2} \frac{q_j}{2m_j} \mathcal{F}(p_j - q_j \tilde{A}(x_j)) \mathcal{F}^{-1} (1 - e^{-ik \cdot x_j}) \right. \\ &\quad \left. + \omega_m(k) \hat{b}_\lambda(k, X) \right] dX. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Notons que cet opérateur est bien défini sur $Q(\tilde{H}_U^V(m))$; en effet, en ce qui concerne le premier des deux termes du membre de droite de (3.101), on sait, d'après (2.95), (2.60) et le lemme 2.9,

que $Q(\tilde{H}_U^V(m)) \subset Q(H_f) \cap Q(p_j^2) \subset D(p_j - q_j \tilde{A}_j)$; en ce qui concerne le second terme, il suffit d'utiliser le fait que, encore d'après (2.95) et (2.60), $Q(\tilde{H}_U^V(m)) \subset Q(\mathcal{N})$. Notons de plus que (3.100) peut s'obtenir en "développant" chacun des trois termes à partir de sa définition donnée respectivement en (3.94), (3.101) et (3.92).

Appliquons (3.100) pour $\Phi_2 = \Phi'_m$; on en déduit que pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ et tout $\Phi_1 \in D(\tilde{H}_U^V(m))$:

$$\left(\mathcal{F} \left[\tilde{H}_U^V(m) - E(H_U^V(m)) \right] \mathcal{F}^{-1} \hat{\Phi}_1, \hat{a}_\lambda(k) \hat{\Phi}_2 \right) = - \left(\hat{\Phi}_1, C_\lambda(k) \hat{\Phi}'_m \right). \quad (3.102)$$

Comme l'opérateur $\mathcal{F}[\tilde{H}_U^V(m) - E(H_U^V(m))]\mathcal{F}^{-1}$ est positif, pour tout $k \in \mathbb{R}^3$,

$$R_m(k) := \left[\mathcal{F}[\tilde{H}_U^V(m) - E(H_U^V(m))]\mathcal{F}^{-1} + \omega_m(k) \right]^{-1} \quad (3.103)$$

est bien défini de \mathcal{H} dans $D(\tilde{H}_U^V(m))$. Ajoutons alors de chaque côté de l'égalité (3.102) le terme défini pour presque tout k : $(\hat{\Phi}_1, \omega_m(k) \hat{a}_\lambda(k) \hat{\Phi}'_m)$. En posant de plus $\hat{\Phi}_1 = R_m(k) \hat{\Psi}_1$, on obtient que, pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ et tout $\Psi_1 \in \mathcal{H}$:

$$\left(\hat{\Psi}_1, \hat{a}_\lambda(k) \hat{\Phi}'_m \right) = - \left(\hat{\Psi}_1, R_m(k) [C_\lambda(k) - \omega_m(k) \hat{a}_\lambda(k)] \hat{\Phi}'_m \right). \quad (3.104)$$

On en déduit immédiatement l'égalité suivante, valide encore pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$:

$$\hat{a}_\lambda(k) \hat{\Phi}'_m = R_m(k) [C_\lambda(k) - \omega_m(k) \hat{a}_\lambda(k)] \hat{\Phi}'_m. \quad (3.105)$$

Estimons le membre de droite de (3.105). Commençons par ce qui correspond au premier terme de $C_\lambda(k)$ dans (3.101) que l'on note:

$$C_\lambda^1(k) := \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \sum_{j=1,2} \frac{q_j}{2m_j} \mathcal{F}(p_j - q_j \tilde{A}(x_j)) \mathcal{F}^{-1} (1 - e^{-ik \cdot x_j}) \right] dX. \quad (3.106)$$

Calculons:

$$\begin{aligned} & \left\| R_m(k) \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \mathcal{F}(p_j - q_j \tilde{A}(x_j)) \mathcal{F}^{-1} (1 - e^{-ik \cdot x_j}) dX \hat{\Phi}'_m \right\| \\ & \leq \sup_{\Psi \in \mathcal{H}, \|\Psi\|=1} \left\| \mathcal{F}(p_j - q_j \tilde{A}_j) \mathcal{F}^{-1} R_m(k) \hat{\Psi} \right\| \left\| \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} (1 - e^{-ik \cdot x_j}) dX \hat{\Phi}'_m \right\|. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Mais, de la même manière que pour H_U^V , on a pour \tilde{H}_U^V :

$$\left\| (p_j - q_j \tilde{A}_j) \Phi \right\|^2 \leq a q_{\tilde{H}_U^V}(\Phi, \Phi) + b \|\Phi\|^2 \leq a q_{\tilde{H}_U^V(m)}(\Phi, \Phi) + b \|\Phi\|^2, \quad (3.108)$$

pour tout $\Phi \in Q(\tilde{H}_U^V(m))$, où a et b sont des constantes positives indépendantes de m . Appliquant ceci aux états de la formes $\Phi = \mathcal{F}^{-1} R_m(k) \hat{\Psi}$ avec $\|\Psi\| = 1$, on en déduit:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{F}(p_j - q_j \tilde{A}_j) \mathcal{F}^{-1} R_m(k) \hat{\Psi} \right\|^2 & \leq a + [b + E(H_U^V(m))] \|R_m(k) \hat{\Psi}\|^2 \\ & \leq a + \frac{c}{|k|^2}, \end{aligned} \quad (3.109)$$

où c est également une constante positive indépendante de m . Nous avons utilisé dans la dernière inégalité d'une part le fait que, d'après (3.103), $\|R_m(k)\| \leq 1/\omega_m(k) \leq 1/|k|$, et d'autre part le fait que $E(H_U^V(m))$ est borné indépendamment de m , pour m dans tout intervalle de la forme $[0, m_0]$, avec m_0 fini (puisque $E(H_U^V(m))$ converge quand m tend vers 0).

Revenant à (3.107), le deuxième facteur du membre de droite est majoré directement de la façon suivante :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} (1 - e^{-ik \cdot x_j}) dX \widehat{\Phi}'_m \right\| \leq |k| \left\| |x_j| \widehat{\Phi}'_m \right\| = |k| \left\| |x_j| \Phi_m \right\| \leq |k| C_2, \quad (3.110)$$

où C_2 est une constante positive indépendante de m d'après la proposition 3.10. Ainsi, (3.107), (3.109) et (3.110) entraînent :

$$\left\| R_m(k) C_\lambda^1(k) \widehat{\Phi}'_m \right\| \leq \text{Cste} (|k|^{1/2} + |k|^{-1/2}) \widehat{\chi}_\Lambda(k). \quad (3.111)$$

Notons le rôle essentiel de la transformation de Power-Zienau-Wooley, sans laquelle on aurait seulement dans la dernière équation une majoration de l'ordre de $1/|k|^{3/2}$, qui n'appartiendrait donc pas à $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Désignant le deuxième terme du membre de droite dans (3.101) par :

$$C_\lambda^2(k) := \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \omega_m(k) \widehat{b}_\lambda(k, X) dX, \quad (3.112)$$

il nous reste à estimer d'après (3.105) :

$$R_m(k) [C_\lambda^2(k) - \omega_m(k) \widehat{a}_\lambda(k)] \widehat{\Phi}'_m = R_m(k) \omega_m(k) \widetilde{w}_\lambda(k) \widehat{\Phi}'_m. \quad (3.113)$$

Or, de la même manière que dans (3.99), on a directement :

$$\left\| R_m(k) \omega_m(k) \widetilde{w}_\lambda(k) \widehat{\Phi}'_m \right\| \leq \left\| \widetilde{w}_\lambda(k) \widehat{\Phi}'_m \right\| \leq \text{Cste} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}} \left\| |X| \Phi_m \right\| \leq C_3 \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}}, \quad (3.114)$$

où C_3 est encore une constante positive indépendante de m . En ajoutant (3.111) et (3.114), on obtient que pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\| \widehat{a}_\lambda(k) \widehat{\Phi}'_m \right\| \leq C_4 \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}}, \quad (3.115)$$

où C_4 est une constante positive indépendante de m . En ajoutant enfin (3.115) à (3.99), on en déduit le résultat. \square

Le corollaire qui suit est simplement une réécriture de la proposition précédente en termes de l'opérateur du nombre de photons \mathcal{N} :

Corollaire 3.13 *Soit $m > 0$ suffisamment petit. Supposons les hypothèses (\mathcal{H}_0) et (C.L.) vérifiées. Soit Φ_m un état fondamental normalisé de $H_U^V(m)$ obtenu par le théorème 3.9. Alors :*

$$q_{\mathcal{N}}(\Phi_m, \Phi_m) \leq C', \quad (3.116)$$

où C' est une constante positive indépendante de m .

3-4 Convergence forte de Φ_m lorsque $m \rightarrow 0$

Nous passons maintenant à la démonstration proprement dite de l'existence d'un état fondamental pour H_U^V . Le cœur de la preuve est d'établir la convergence forte de Φ_m lorsque m tend vers 0. Pour cela, nous allons utiliser les propriétés de Φ_m que nous avons obtenu plus haut, et appliquer le théorème de Rellich-Kondrachov (voir par exemple [Bre83] ou [LL01]). La preuve est une nouvelle fois basée sur [GLL01].

Théorème 3.14 *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) et (C.L.) sont vérifiées. Alors, pour toutes valeurs de q et Λ , H_U^V possède un état fondamental normalisé Φ_0 , c'est-à-dire :*

$$\|\Phi_0\| = 1 \quad , \quad \Phi_0 \in D(H_U^V) \quad , \quad H_U^V \Phi_0 = E(H_U^V) \Phi_0. \quad (3.117)$$

Démonstration

Montrons tout d'abord qu'il suffit d'établir que Φ_m converge fortement dans \mathcal{H} lorsque m tend vers 0. Choisissons une suite quelconque $(m_j)_{j \geq 1}$ de réels strictement positifs, telle que (m_j) est décroissante, et telle que m_1 est suffisamment petit, de telle sorte que $H_U^V(m_j)$ possède un état fondamental pour tout j par le théorème 3.9. Pour simplifier les notations, cet état fondamental est noté Φ_j plutôt que Φ_{m_j} . On a alors $\Phi_j \in Q(H_U^V(m_j)) \subset Q(H_U^V)$ pour tout j , et :

$$q_{H_U^V}(\Phi_j, \Phi_j) \leq q_{H_U^V(m_j)}(\Phi_j, \Phi_j) = E(H_U^V(m_j)) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} E(H_U^V), \quad (3.118)$$

par la proposition 3.1. Par conséquent $q_{H_U^V}(\Phi_j, \Phi_j)$ converge vers $E(H_U^V)$; et donc, si Φ_j converge fortement vers un certain Φ_0 dans \mathcal{H} , on en déduit que $\Phi_0 \in Q(H_U^V)$ et $q_{H_U^V}(\Phi_0, \Phi_0) = E(H_U^V)$. Comme H_U^V est semi-borné inférieurement, ceci implique directement que Φ_0 est un état fondamental normalisé pour H_U^V , dans le sens où (3.117) est vérifiée.

Réduisons encore le problème en montrant maintenant qu'il suffit de prouver que $\widehat{\Phi}_j^{(n)}$ converge fortement pour tout n dans un espace $L^2(O)$ où O est un ouvert borné. Ecrivons en effet $\widehat{\Phi}_j$ sous la forme :

$$\widehat{\Phi}_j = (\widehat{\Phi}_j^{(0)}(X), \widehat{\Phi}_j^{(1)}(X, \underline{k}_1), \widehat{\Phi}_j^{(2)}(X, \underline{k}_1, \underline{k}_2), \dots), \quad (3.119)$$

en utilisant l'isomorphisme d'espaces de Hilbert (S_n désigne toujours la symétrisation relativement aux variables $(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$) :

$$\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}^6) \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S_n L^2(\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^{3n}). \quad (3.120)$$

On a alors, premièrement :

$$\sum_{n \geq n_0} \left\| \widehat{\Phi}_j^{(n_0)} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^{3n})}^2 \leq \frac{C'}{n_0}, \quad (3.121)$$

avec C' indépendante de j , d'après le corollaire 3.13 ; deuxièmement, pour tout $n \geq 0$:

$$\int_{|X| \geq L} \left\| \widehat{\Phi}_j^{(n)}(X, \cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}^2 dX \leq e^{-2\beta L} C_0^2, \quad (3.122)$$

avec C_0 indépendante de j , d'après la proposition 3.10 ; et enfin troisièmement, pour tout $n \geq 0$ et pour presque tout $(X, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$:

$$\widehat{\Phi}_j^{(n)}(X, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = 0 \text{ dès que } \exists i, |k_i| > \Lambda, \quad (3.123)$$

d'après la proposition 3.12, en écrivant que :

$$\widehat{\Phi}_j^{(n)}(X, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{a}_{\lambda_i}(k_i) \widehat{\Phi}_j \right)^{(n-1)}(X, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_i, \dots, \underline{k}_n). \quad (3.124)$$

Ces trois remarques permettent d'affirmer que si $\widehat{\Phi}_j^{(n)}$ converge fortement, pour tout $n \geq 0$, tout $L > 0$ et tout n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dans $L^2(O_L^{(n)})$, où $O_L^{(n)}$ est le sous-ensemble de $L^2(\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^{3n})$ défini par :

$$O_L^{(n)} := \{(X, k_1, \dots, k_n), |X| < L, \forall 1 \leq i \leq n, |k_i| < \Lambda\}, \quad (3.125)$$

alors $\widehat{\Phi}_j$ converge fortement dans \mathcal{H} (nous avons identifié ici, pour la commodité des écritures, $\widehat{\Phi}_j^{(n)}$ et $\widehat{\Phi}_j^{(n)}((\cdot, \lambda_1), \dots, (\cdot, \lambda_n))$; nous conservons cette notation pour la suite).

Fixons donc $n \geq 0$, $L > 0$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{1, 2\}^n$, et montrons que $\widehat{\Phi}_j^{(n)}$ converge fortement dans $L^2(O_L^{(n)})$. Considérant en particulier le fait que $O_L^{(n)}$ est un ouvert borné, nous pouvons utiliser le théorème de Rellich-Kondrachov : si $\widehat{\Phi}_j^{(n)}$ converge faiblement dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(O_L^{(n)})$ pour un certain $p \geq 1$, alors $\widehat{\Phi}_j^{(n)}$ converge fortement dans $L^q(O_L^{(n)})$, pour tout q tel que $q < ((6 + 3n)p)/(6 + 3n - p)$. Comme la valeur qui nous intéresse est $q = 2$, la dernière condition implique que p doit vérifier : $p > 2(6 + 3n)/(8 + 3n)$. Et comme $2(6 + 3n)/(8 + 3n)$ est dans l'intervalle $]3/2, 2[$, il suffit, pour pouvoir conclure, de vérifier que $\widehat{\Phi}_j^{(n)}$ converge faiblement dans $W^{1,p}(O_L^{(n)})$ pour tout p dans $]3/2, 2[$.

Soit donc $p \in]3/2, 2[$. Comme $(\widehat{\Phi}_j^{(n)})_j$ est bornée dans $L^2(O_L^{(n)})$, elle est aussi bornée dans $L^p(O_L^{(n)})$ puisque $p < 2$. Montrons que $(\nabla \widehat{\Phi}_j^{(n)})_j$ est également bornée dans $L^p(O_L^{(n)})$. Soit $\phi \in C_0^\infty(O_L^{(n)})$; on a pour $i \in \{1, 2, \dots, (6 + 3n)\}$:

$$\left| \nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)}(\phi) \right| = \left| \int_{O_L^{(n)}} \widehat{\Phi}_j^{(n)}(X, k_1, \dots, k_n) (\nabla_i \phi)(X, k_1, \dots, k_n) dX dk_1 \dots dk_n \right|. \quad (3.126)$$

Si $i \in \{1, \dots, 6\}$, on en déduit par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \left| \nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)}(\phi) \right| &\leq \text{Cste} \left\| \left| \nabla_X \widehat{\Phi}_j^{(n)} \right| \right\|_{L^p(O_L^{(n)})} \|\phi\|_{L^{p'}(O_L^{(n)})} \\ &\leq \text{Cste} (\Phi_j^{(n)}, (p_1^2 + p_2^2) \Phi_j^{(n)})^{1/2} \|\phi\|_{L^{p'}(O_L^{(n)})} \\ &\leq C \|\phi\|_{L^{p'}(O_L^{(n)})}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

où p' désigne le réel tel que $1/p + 1/p' = 1$, et où C est une constante positive indépendante de j . Dans la dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que :

$$(\Phi_j^{(n)}, (p_1^2 + p_2^2) \Phi_j^{(n)}) \leq aE(H_U^V(m_j)) + b \leq c, \quad (3.128)$$

où a , b et c sont des constantes positives ne dépendant pas de j .

Si maintenant $i \in \{7, \dots, (6 + 3n)\}$, notons, pour $\varepsilon > 0$, $O_{L,\varepsilon}^{(n)}$ l'ensemble :

$$O_{L,\varepsilon}^{(n)} := \left\{ (X, k_1, \dots, k_n) \in O_L^{(n)}, \forall l, \sqrt{(k_l^1)^2 + (k_l^2)^2} \geq \varepsilon \right\}. \quad (3.129)$$

On a alors :

$$\left| \nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)}(\phi) \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{O_{L,\varepsilon}^{(n)}} \widehat{\Phi}_j^{(n)}(X, k_1, \dots, k_n) (\nabla_i \phi)(X, k_1, \dots, k_n) dX dk_1 \dots dk_n \right|. \quad (3.130)$$

Or, en utilisant l'écriture (3.124), on peut montrer que $\widehat{\Phi}_j^{(n)}(X, k_1, \dots, k_n)$ est dérivable sur $O_{L,\varepsilon}^{(n)}$ par rapport à k_l^ν pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$ et tout $\nu \in \{1, 2, 3\}$. On a en effet, en réutilisant les notations de la sous-section précédente :

$$\widehat{a}_{\lambda_l}(k_l) \widehat{\Phi}_j = \mathcal{U}_{PZW}^* R_m(k_l) [C_{\lambda_l}^1(k_l) - \omega_{m_j}(k_l) w_{\lambda_l}(k_l)] \widehat{\Phi}_j' - i w_{\lambda_l}(k_l) \widehat{\Phi}_j, \quad (3.131)$$

et il est alors facile de voir que chacun des termes apparaissant dans la dernière égalité est dérivable par rapport à k_l^ν sur $O_{L,\varepsilon}^{(n)}$. Notons d'ailleurs que le recours à l'ensemble $O_{L,\varepsilon}^{(n)}$ est justifié par le fait que les vecteurs de polarisation $\varepsilon_\lambda(k)$ ne sont pas dérivables sur $\{(0, 0, k^3), k^3 \in \mathbb{R}\}$. De plus, en utilisant le même type d'estimations que dans la démonstration de la proposition 3.12, on peut déduire de (3.131) que, pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ tel que $|k| < \Lambda$ et $(k^1, k^2) \neq (0, 0)$, on a :

$$\left\| \nabla_k (\widehat{a}_\lambda(k) \widehat{\Phi}_j) \right\| \leq \frac{C_1}{|k|^{1/2} \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}}, \quad (3.132)$$

où C_1 est une constante positive ne dépendant pas de j .

Revenant alors à (3.130), on obtient en intégrant par parties :

$$\left| \nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)}(\phi) \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{O_{L,\varepsilon}^{(n)}} (\nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)})(X, k_1, \dots, k_n) \phi(X, k_1, \dots, k_n) dX dk_1 \dots dk_n \right|, \quad (3.133)$$

dans la mesure où le terme intégré tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, d'après l'égalité (3.124) et l'estimation (3.96). Or, (3.124) et (3.132) entraînent que $\nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)}$ est dans $L^p(O_L^{(n)})$ dès que $p < 2$; et donc, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \left| \nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)}(\phi) \right| &\leq \left\| \nabla_i \widehat{\Phi}_j^{(n)} \right\|_{L^p(O_L^{(n)})} \|\phi\|_{L^{p'}(O_L^{(n)})} \\ &\leq C_2 \|\phi\|_{L^{p'}(O_L^{(n)})}, \end{aligned} \quad (3.134)$$

où C_2 est une constante positive ne dépendant pas de j .

Pour conclure, (3.127) et (3.134) prouvent que $(\nabla \widehat{\Phi}_j^{(n)})_j$ est une suite bornée de $L^p(O_L^{(n)})$, pour $p \in]3/2, 2[$. Donc $(\widehat{\Phi}_j^{(n)})_j$ est une suite bornée de $W^{1,p}(O_L^{(n)})$; on en extrait une sous-suite faiblement convergente par le théorème de Banach-Alaoglu, et on conclut, pour p bien choisi, à la convergence forte dans $L^2(O_L^{(n)})$ par le théorème de Rellich-Kondrachov. Ainsi le théorème est démontré. \square

Remarque 3.15

En utilisant la représentation en intégrale fonctionnelle décrite brièvement dans la sous-section 2-4.2, on peut montrer que l'état fondamental Φ de H_U^V obtenu par le théorème précédent est non dégénéré. Il est en effet démontré dans [Hir00] que $\nu^{-1}e^{-tH_U^V}\nu$ est "positivity improving" (voir par exemple [RS78]) dans $L^2(\mathbb{R}^6 \times Q)$. Rappelons que $L^2(Q)$ désigne une représentation de Schrödinger de l'espace de Fock \mathcal{F}_s ; d'autre part, ν désigne ici un opérateur unitaire de $L^2(Q)$ dans \mathcal{F}_s .

Toutefois, si dans le cas où les spins de l'électron et du noyau sont pris en compte, l'existence d'un état fondamental pour H_U^V devrait pouvoir être démontrée de façon similaire à ce que nous avons fait, le caractère non dégénéré obtenu par la méthode de [Hir00] n'est lui valable que pour un modèle sans spin. Pour l'étude de la multiplicité des états fondamentaux dans le cas de modèles de Pauli-Fierz avec spins, nous renvoyons à [Hir05].

Chapitre 4

Conditions de liaison

Dans le chapitre précédent, pour obtenir l'existence d'un état fondamental du Hamiltonien H_U^V , nous avons dû supposer à de nombreuses reprises que les conditions de liaison (C.L.) étaient satisfaites. Rappelons que celles-ci sont définies de la façon suivante :

$$(C.L.) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E(H_U^V) < E(H_0^V), \\ (ii) \quad E(H_U^V) < E(H_U^0). \end{array} \right.$$

Dans ce chapitre, Nous établissons que ces conditions sont effectivement vérifiées, pour toutes valeurs de la charge q et du paramètre de troncature ultraviolette Λ . Nous ferons pour cela l'hypothèse (\mathcal{H}_1) (voir section 2-2).

La première des deux conditions de liaison, $E(H_U^V) < E(H_0^V)$ est la plus simple à obtenir. Sa preuve est basée sur la méthode utilisée dans [GLL01, Théorème 3.1] et s'appuie essentiellement sur une propriété d'invariance par translation de H_0^V . En revanche, l'opérateur H_U^0 n'étant pas invariant par translation, nous ne pourrons pas suivre la même méthode pour obtenir la seconde condition de liaison $E(H_U^V) < E(H_U^0)$. Nous aurons recours à un Hamiltonien intermédiaire noté \tilde{H}_U^0 et qui lui possédera, en un certain sens que nous expliciterons, une propriété d'invariance par translation. Il nous faudra par ailleurs faire appel à des outils de localisation semblables à certains de ceux utilisés dans [LL03].

4-1 Preuve de $E(H_U^V) < E(H_0^V)$

Commençons par une proposition qui établit l'invariance par translation de H_0^V ; pour cela, définissons l'opérateur de translation \mathcal{U}_{y_0} , pour $y_0 \in \mathbb{R}^3$, par :

$$\mathcal{U}_{y_0} = e^{iy_0 \cdot (p_1 + p_2 + d\Gamma(-i\nabla))}. \quad (4.1)$$

Notons que \mathcal{U}_{y_0} est une isométrie de \mathcal{H} ; de plus, si $\Psi \in \mathcal{H}$ est écrit sous la forme $\Psi = \Psi_{part} \otimes a^*(f_1)^{\alpha_1} \dots a^*(f_n)^{\alpha_n} \Omega$, alors on a :

$$\mathcal{U}_{y_0} \Psi = \Psi_{part}(\cdot + y_0, \cdot + y_0) \otimes a^*(f_1(\cdot + y_0))^{\alpha_1} \dots a^*(f_n(\cdot + y_0))^{\alpha_n} \Omega. \quad (4.2)$$

Autrement dit, \mathcal{U}_{y_0} translate à la fois l'électron, le noyau, et les photons dans la direction y_0 . Cette opération ne modifie pas l'énergie associée au Hamiltonien H_0^V :

Proposition 4.1 *Pour tous $\Phi \in Q(H_0^V)$ et $y \in \mathbb{R}^3$, on a $\mathcal{U}_{y_0}\Phi \in Q(H_0^V)$ et :*

$$q_{H_0^V}(\Phi, \Phi) = q_{H_0^V}(\mathcal{U}_{y_0}\Phi, \mathcal{U}_{y_0}\Phi). \quad (4.3)$$

Démonstration

On observe facilement que pour tout $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$, $\mathcal{U}_{y_0}\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ et :

$$q_{H_0^V}(\Phi, \Phi) = q_{H_0^V}(\mathcal{U}_{y_0}\Phi, \mathcal{U}_{y_0}\Phi). \quad (4.4)$$

On conclut alors en utilisant d'une part que $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$ est un cœur de forme de $q_{H_0^V}$, et d'autre part que \mathcal{U}_{y_0} est une isométrie. \square

Rappelons que e_0 représente l'énergie de l'état fondamental de $P^2/2M + U$, et que selon l'hypothèse (\mathcal{H}_1) , cette énergie est strictement négative. Nous plaçant un instant dans le cadre de la mécanique quantique, il est facile de voir que :

$$E(H_{part}(U, V)) = E(H_{part}(0, V)) + e_0, \quad (4.5)$$

où nous avons souligné la dépendance de H_{part} en les potentiels U et V . Le théorème suivant montre que le couplage avec les photons ne peut que "renforcer la liaison" due à la présence du potentiel U .

Théorème 4.2 *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) et (\mathcal{H}_1) sont vérifiées. Alors :*

$$E(H_U^V) \leq E(H_0^V) + e_0. \quad (4.6)$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer que $E(H_U^V) \leq E(H_0^V) + e_0 + \varepsilon$. Considérons pour cela un élément Φ_ε normalisé dans $Q(H_0^V)$, tel que :

$$q_{H_0^V}(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) < E(H_0^V) + \varepsilon. \quad (4.7)$$

Rappelons que ϕ_U est l'état fondamental de $P^2/2M + U$ associé à la valeur propre e_0 . L'idée de la preuve est de considérer l'état $\phi_U \mathcal{U}_y \Phi_\varepsilon$ et de montrer qu'il existe un certain y_0 pour lequel :

$$q_{H_U^V}(\phi_U \mathcal{U}_{y_0} \Phi_\varepsilon, \phi_U \mathcal{U}_{y_0} \Phi_\varepsilon) < [E(H_0^V) + e_0 + \varepsilon] \|\phi_U \mathcal{U}_{y_0} \Phi_\varepsilon\|^2. \quad (4.8)$$

La première question qui se présente est de savoir si, pour un quelconque y de \mathbb{R}^3 , $\phi_U \mathcal{U}_y \Phi_\varepsilon$ est un élément de $Q(H_U^V)$. Déjà, puisque $\mathcal{U}_y \Phi_\varepsilon \in \mathcal{H}$ et puisque d'après l'hypothèse (\mathcal{H}_1) , ϕ_U est bornée sur \mathbb{R}^3 , on peut affirmer que $\phi_U \mathcal{U}_y \Phi_\varepsilon \in \mathcal{H}$. Notons pour simplifier l'écriture $\Phi_y := \phi_U \mathcal{U}_y \Phi_\varepsilon$ et montrons donc que $\Phi_y \in Q(H_U^V) = Q(p^2) \cap Q(P^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f)$. Comme encore une fois $\phi_U \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ par l'hypothèse (\mathcal{H}_1) , on a immédiatement $\Phi_y \in Q(H_f)$ en écrivant :

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left\langle H_f^{1/2} \Phi_y(X), H_f^{1/2} \Phi_y(X) \right\rangle dX \leq \left(\sup_{\mathbb{R}^3} \phi_U \right)^2 q_{H_f}(\mathcal{U}_y \Phi_\varepsilon, \mathcal{U}_y \Phi_\varepsilon) < \infty. \quad (4.9)$$

De la même façon, $\Phi_y \in Q(p^2)$. Pour montrer que $\Phi_y \in Q(P^2) \cap Q(U^+)$, il suffit de montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} \langle (P\Phi_y)(X), (P\Phi_y)(X) \rangle + U(R) \langle \Phi_y(X), \Phi_y(X) \rangle \right] dX < \infty. \quad (4.10)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} \langle (P\Phi_y)(X), (P\Phi_y)(X) \rangle \right] dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} \phi_U(R)^2 \langle (P\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X), (P\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X) \rangle \right] dX \\ &+ \int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} |(P\phi_U)(R)|^2 \langle (\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X), (\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X) \rangle \right] dX \\ &+ 2\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} \overline{(P\phi_U)(R)} \phi_U(R) \langle (\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X), (P\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X) \rangle \right] dX \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Notons que chacune des trois intégrales du membre de droite de cette égalité a bien un sens dans la mesure où ϕ_U et $P\phi_U$ sont bornées d'après l'hypothèse (\mathcal{H}_1) , et puisque d'autre part on a vu que $\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon \in Q(H_U^V) \subset Q(P^2)$. Une intégration par partie permet alors de calculer le dernier terme de l'égalité précédente de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} \overline{(P\phi_U)(R)} \phi_U(R) \langle (\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X), (P\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X) \rangle \right] dX \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} [(P^2\phi_U)(R)\phi_U(R) + |(P\phi_U)(R)|^2] \langle (\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X), (\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X) \rangle \right] dX. \end{aligned} \quad (4.12)$$

D'après la définition de ϕ_U , on a $(P^2/2M + U)\phi_U = e_0\phi_U$, et on obtient donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} \langle (P\Phi_y)(X), (P\Phi_y)(X) \rangle + U(R) \langle \Phi_y(X), \Phi_y(X) \rangle \right] dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} \left[\frac{1}{2M} \phi_U(R)^2 \langle (P\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X), (P\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X) \rangle \right] dX + e_0 \|\Phi_y\|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Par conséquent, pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, on a bien $\Phi_y \in Q(H_U^V)$. Par ailleurs, les calculs que nous venons d'effectuer permettent d'obtenir de la même manière (c'est-à-dire en faisant commuter ϕ_U et P , puisque P est la seule partie de H_U^V qui ne commute pas avec ϕ_U) :

$$\begin{aligned} q_{H_U^V}(\Phi_y, \Phi_y) &= q_{H_f}(\Phi_y, \Phi_y) - \|(V^-)^{1/2}\Phi_y\|^2 + e_0 \int_{\mathbb{R}^6} \phi_U(R)^2 \|\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon(X)\|_{\mathcal{F}_s}^2 dX \\ &+ \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} \int_{\mathbb{R}^6} \phi_U(R)^2 \|((p_j - q_j A_j)\mathcal{U}_y\Phi_\varepsilon)(X)\|_{\mathcal{F}_s}^2 dX. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Intégrons cette dernière égalité en y sur \mathbb{R}^3 puis faisons le changement de variables $x_1 + y \rightarrow x_1$, $x_2 + y \rightarrow x_2$. Nous obtenons alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3} q_{H_U^V}(\Phi_y, \Phi_y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_U(y)^2 dy [q_{H_0^V}(\Phi_\varepsilon\Phi_\varepsilon) + e_0(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon)] = q_{H_0^V}(\Phi_\varepsilon\Phi_\varepsilon) + e_0, \quad (4.15)$$

puisque par définitions : $\|\phi_U\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$ et $\|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} = 1$. Or, nous avons supposé au début de la démonstration que $q_{H_U^V}(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) < E(H_U^V) + \varepsilon$, et on a $\int_{\mathbb{R}^3} \|\Phi_y\|^2 dy = 1$. Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^3} q_{H_U^V}(\Phi_y, \Phi_y) - [E(H_U^V) + e_0 + \varepsilon](\Phi_y, \Phi_y) dy < 0. \quad (4.16)$$

On en déduit qu'il existe nécessairement $y_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$q_{H_U^V}(\Phi_{y_0}, \Phi_{y_0}) - [E(H_U^V) + e_0 + \varepsilon](\Phi_{y_0}, \Phi_{y_0}) < 0. \quad (4.17)$$

En particulier, Φ_{y_0} ne peut-être que $\neq 0$. Nous avons donc obtenu ce qu'il fallait démontrer : $E(H_U^V) < E(H_U^V) + e_0 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. \square

4-2 Preuve de $E(H_U^V) < E(H_U^0)$

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, H_U^0 n'est pas invariant par translation, et nous ne pouvons donc pas employer la méthode de la section précédente pour obtenir la seconde condition de liaison. Voyons où se situe la difficulté. Considérons une suite minimisante (Φ_j) approximant l'état fondamental de H_U^0 , c'est-à-dire $q_{H_U^0}(\Phi_j, \Phi_j) \rightarrow E(H_U^0)$. Comme V est strictement négatif, on a bien sûr $q_{H_U^V}(\Phi_j, \Phi_j) < q_{H_U^0}(\Phi_j, \Phi_j)$, et on peut espérer que l'inégalité stricte persiste au passage à la limite. Mais, si dans l'état Φ_j , l'électron et le noyau sont "situés loin l'un de l'autre", l'énergie apportée par le potentiel de Coulomb V est petite, et peut tendre vers 0 lorsque j tend vers l'infini. Le problème n'est donc pas trivial.

Commençons cependant par traiter le cas évident, celui où, dans l'état Φ_j , la probabilité de trouver les deux particules non relativistes dans une boule de rayon fixé indépendamment de j ne peut tendre vers 0 :

Théorème 4.3 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit (Φ_j) une suite normalisée dans \mathcal{H} telle que $\forall j, \Phi_j \in Q(H_U^0)$, et :*

$$q_{H_U^0}(\Phi_j, \Phi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} E(H_U^0). \quad (4.18)$$

Supposons de plus que :

$$\exists \rho > 0, \exists a > 0, \forall j, \int_{B(0, \rho)} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \|\Phi_j(X)\|^2 dR \right] dr \geq a. \quad (4.19)$$

On a alors : $E(H_U^V) \leq E(H_U^0) - Zq^2Ca/\rho$, où C est la constante positive apparaissant dans la définition de V .

Démonstration

Puisque $Q(H_U^V) = Q(H_U^0)$, on a $\Phi_j \in Q(H_U^V)$ pour tout j , et il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} q_{H_U^V}(\Phi_j, \Phi_j) &= q_{H_U^0}(\Phi_j, \Phi_j) + \int_{\mathbb{R}^6} V(X) \|\Phi_j(X)\|^2 dX \\ &\leq q_{H_U^0}(\Phi_j, \Phi_j) - \int_{B(0, \rho)} \int_{\mathbb{R}^3} Zq^2 \frac{C}{\rho} \|\Phi_j(X)\|^2 dX \\ &\leq q_{H_U^0}(\Phi_j, \Phi_j) - Zq^2 \frac{C}{\rho} a. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En faisant tendre j vers l'infini, on en déduit le résultat. \square

Il nous faut maintenant considérer le cas où (4.19) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire le cas où, dans l'état Φ_j , le noyau et l'électron sont "de plus en plus éloignés" l'un de l'autre lorsque j tend vers l'infini. Décrivons, de manière heuristique pour l'instant, de quelle façon nous allons procéder pour obtenir le résultat. En faisant appel à des outils développés dans [LL03], notre premier objectif va être de localiser les deux particules dans des boules de rayons fixés. Ensuite, nous localiserons également les photons autour de l'électron et du noyau. Nous pourrions alors montrer que l'énergie de l'état obtenu (c'est-à-dire une fois particules non-relativistes et photons localisés) est comparable à l'énergie d'un état virtuel où coexisteraient, d'une part, l'électron et son nuage de photons propre, et d'autre part, le noyau et son nuage de photons propre. Le qualificatif "propre" signifie ici que les photons associés à l'électron n'interagissent pas avec le noyau, et réciproquement. Nous pourrions ainsi translater les deux systèmes "électron-nuage de photons" et "noyau-nuage de photons" sans modifier la position du centre de masse, et sans modifier surtout l'énergie de l'état considéré.

Explicitons tout d'abord le Hamiltonien décrivant ces états où l'électron et le noyau interagissent de façon indépendante avec les photons : on définit formellement l'opérateur \tilde{H}_U^0 agissant dans $L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$ par :

$$\tilde{H}_U^0 := \frac{1}{2m_1}(p_1 - q_1 A_1)^2 \otimes I + \frac{1}{2m_2} I \otimes (p_2 - q_2 A_2)^2 + \tilde{H}_f + U + V, \quad (4.21)$$

où \tilde{H}_f désigne ici (la fermeture de) l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$:

$$\tilde{H}_f := H_f \otimes I + I \otimes H_f. \quad (4.22)$$

La première composante du produit tensoriel $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s$ correspond aux photons interagissant avec l'électron, tandis que la deuxième composante correspond aux photons interagissant avec le noyau. Notons par ailleurs que le caractère auto-adjoint de \tilde{H}_U^0 s'obtient de façon semblable à ce que nous avons fait pour H_U^V , ou encore pour $\tilde{H}_U^V(m)$ dans la proposition 3.4. Plus précisément :

Proposition 4.4 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit la forme quadratique $\tilde{q}_{\tilde{H}_U^0}$ définie sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(\tilde{H}_f)$ par :*

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{\tilde{H}_U^0}(\Phi, \Psi) &= \frac{1}{2m_1}([(p_1 - q_1 A_1) \otimes I]\Phi, [(p_1 - q_1 A_1) \otimes I]\Psi) \\ &\quad + \frac{1}{2m_2}([I \otimes (p_2 - q_2 A_2)]\Phi, [I \otimes (p_2 - q_2 A_2)]\Psi) \\ &\quad + (\tilde{H}_f^{1/2}\Phi, \tilde{H}_f^{1/2}\Psi) - ((-V)^{1/2}\Phi, (-V)^{1/2}\Psi) \\ &\quad - ((U^-)^{1/2}\Phi, (U^-)^{1/2}\Psi) + ((U^+)^{1/2}\Phi, (U^+)^{1/2}\Psi), \end{aligned} \quad (4.23)$$

Alors $\tilde{q}_{\tilde{H}_U^0}$ est fermée et semi-bornée inférieurement ; on note \tilde{H}_U^0 l'opérateur associé à $\tilde{q}_{\tilde{H}_U^0}$ par la proposition 1.2. De plus, $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S \otimes D_S$ est un cœur de \tilde{H}_U^0 , et on a sur cet ensemble :

$$\tilde{H}_U^0 := \frac{1}{2m_1}(p_1 - q_1 A_1)^2 \otimes I + \frac{1}{2m_2} I \otimes (p_2 - q_2 A_2)^2 + \tilde{H}_f + U + V. \quad (4.24)$$

Démonstration

Il suffit encore une fois d'adapter le travail effectué pour définir H_U^V dans la sous-section 2-4.1. \square

Etablissons maintenant la propriété d'invariance par translation de \tilde{H}_U^0 , cruciale pour notre démonstration à venir. Définissons l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{T}_t := e^{it\frac{m_2}{M}(p_1+d\Gamma(-i\nabla))} \otimes e^{-it\frac{m_1}{M}(p_2+d\Gamma(-i\nabla))}. \quad (4.25)$$

Constatons que \mathcal{T}_t est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$ et que, si $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$ est écrit sous la forme $\Psi = \Psi_{at} \otimes a^*(f_1)^{\alpha_1} \dots a^*(f_n)^{\alpha_n} \Omega \otimes a^*(g_1)^{\beta_1} \dots a^*(g_m)^{\beta_m} \Omega$, alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t \Psi = & \Psi_{at}(\cdot + \frac{m_2}{M}t, \cdot - \frac{m_1}{M}t) \otimes a^*(f_1(\cdot + \frac{m_2}{M}t))^{\alpha_1} \dots a^*(f_n(\cdot + \frac{m_2}{M}t))^{\alpha_n} \Omega \\ & \otimes a^*(g_1(\cdot - \frac{m_1}{M}t))^{\beta_1} \dots a^*(g_m(\cdot - \frac{m_1}{M}t))^{\beta_m} \Omega. \end{aligned} \quad (4.26)$$

On voit que la position R du centre de masse n'est pas modifiée par l'action de \mathcal{T}_t , et que les photons de la première composante du produit tensoriel $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s$ sont translatés dans la même direction que l'électron, tandis que les photons de la deuxième composantes sont translatés dans la même direction que le noyau. De plus \mathcal{T}_t ne modifie pas l'énergie associée à \tilde{H}_U^0 dans le sens suivant :

Proposition 4.5 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Pour tous $\Phi \in Q(\tilde{H}_U^0)$ et $t \in \mathbb{R}^3$, on a $\mathcal{T}_t \Phi \in Q(\tilde{H}_U^0)$ et :*

$$q_{\tilde{H}_U^0}(\Phi, \Phi) = q_{\tilde{H}_U^0}(\mathcal{T}_t \Phi, \mathcal{T}_t \Phi). \quad (4.27)$$

Démonstration

Il suffit d'adapter le démonstration de la proposition 4.1. \square

Maintenant que nous avons bien défini ce Hamiltonien "intermédiaire", nous allons pouvoir montrer que, d'une part, $E(H_U^V) < E(\tilde{H}_U^0)$, et que d'autre part, si (4.19) n'est pas vérifiée, $E(\tilde{H}_U^0) \leq E(H_U^0)$. Comme ces deux preuves sont assez longues, nous leur consacrons à chacune une sous-section. Toutefois, la démonstration de la seconde inégalité réutilisera beaucoup d'idées apparaissant dans la première des deux sous-sections, si bien que nous donnerons plusieurs résultats sans les détailler.

4-2.1 Preuve de $E(H_U^V) < E(\tilde{H}_U^0)$

4-2.1.1 Localisation de l'électron et du noyau

Comme annoncé plus haut, nous commençons par construire un état approximant $E(\tilde{H}_U^0)$ et dans lequel électron et noyau sont localisés dans des boules de rayon fixé :

Lemme 4.6 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit $R_0 > 0$ et $L > 0$; il existe alors $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3$ et $\Psi \in Q(\tilde{H}_U^0)$ tels que Ψ soit à support dans $B(y_1, R_0) \times B(y_2, R_0) \subset \mathbb{R}^6$, tels que $\text{dist}(y_1, y_2) = 3L$, et tels que :*

$$\frac{q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi, \Psi)}{\|\Psi\|^2} \leq E(\tilde{H}_U^0) + \frac{C_1}{R_0^2}, \quad (4.28)$$

où C_1 est une constante positive indépendante de R_0 .

Démonstration

Le rayon $R_0 > 0$ étant fixé, considérons $\Psi \in D(\tilde{H}_U^0)$ de norme 1 tel que :

$$(\Psi, \tilde{H}_U^0 \Psi) < E(\tilde{H}_U^0) + \frac{1}{R_0^2}. \quad (4.29)$$

Définissons une fonction $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $0 \leq u \leq 1$, $u = 1$ sur $B(0, 1/2)$ et $u = 0$ sur $B(0, 1)^c$. Définissons de plus pour $y, y' \in \mathbb{R}^3$:

$$u_{1,y}(X) := u\left(\frac{x_1}{R_0} - y\right) \quad , \quad u_{2,y'}(X) := u\left(\frac{x_2}{R_0} - y'\right). \quad (4.30)$$

Observons que l'on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_{1,y}^2(X) dy = \int_{\mathbb{R}^3} u_{2,y'}^2(X) dy' = \int_{\mathbb{R}^3} u^2(z) dz =: \beta > 0, \quad (4.31)$$

où β est indépendant de R_0 . Posons maintenant $\Psi_{y,y'} := \frac{1}{\beta} u_{1,y} u_{2,y'} \Psi$ et voyons si, pour un certain couple (y, y') et à une normalisation près, $\Psi_{y,y'}$ répond au problème posé. Comme $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, il est facile de montrer que $\Psi_{y,y'} \in Q(\tilde{H}_U^0)$. Calculons par ailleurs à l'aide de (4.31) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^6} (\Psi_{y,y'}, \Psi_{y,y'}) dy dy' &= \frac{1}{\beta^2} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{\mathbb{R}^3} u_{1,y}^2(X) dy \int_{\mathbb{R}^3} u_{2,y'}^2(X) dy' \|\Psi(X)\|^2 dX \\ &= (\Psi, \Psi) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.32)$$

De plus, en faisant commuter $u_{1,y}$, $u_{2,y'}$ et p_1 , p_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi_{y,y'}, \Psi_{y,y'}) &= \frac{1}{\beta^2} (\Psi, (|\nabla_{x_1} u_{1,y}|^2 u_{2,y'}^2 + |\nabla_{x_2} u_{2,y'}|^2 u_{1,y}^2) \Psi) \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2} \text{Re} \left[(u_{1,y}^2 u_{2,y'}^2 \Psi, \tilde{H}_U^0 \Psi) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Intégrons d'abord le premier terme du membre de droite de (4.33) en y, y' :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^6} (\Psi, (|\nabla_{x_1} u_{1,y}|^2 u_{2,y'}^2 + |\nabla_{x_2} u_{2,y'}|^2 u_{1,y}^2) \Psi) dy dy' \\ &= \beta \int_{\mathbb{R}^6} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Psi(X), \frac{1}{R_0^2} |(\nabla u)\left(\frac{x_1}{R_0} - y\right)|^2 \Psi(X) \rangle dy dX \\ &\quad + \beta \int_{\mathbb{R}^6} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \Psi(X), \frac{1}{R_0^2} |(\nabla u)\left(\frac{x_2}{R_0} - y'\right)|^2 \Psi(X) \rangle dy' dX \\ &= \frac{2\beta C_0}{R_0^2}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

où C_0 est la constante indépendante de R_0 définie par $C_0 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(z)|^2 dz > 0$; puis en ce qui concerne le second terme, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^6} (u_{1,y}^2 u_{2,y'}^2 \Psi, \tilde{H}_U^0 \Psi) dy dy' = \beta^2 (\Psi, \tilde{H}_U^0 \Psi). \quad (4.35)$$

Alors, (4.32)-(4.35) et (4.29) entraînent :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^6} \left[q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi_{y,y'}, \Psi_{y,y'}) - (\Psi_{y,y'}, \left(\frac{2C_0}{\beta R_0^2} + \frac{1}{R_0^2} + E(\tilde{H}_U^0) \right) \Psi_{y,y'}) \right] dy dy' \\ &= (\Psi, \tilde{H}_U^0 \Psi) - E(\tilde{H}_U^0) - \frac{1}{R_0^2} \\ &< 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

On en déduit l'existence de $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi_{y_1, y_2}, \Psi_{y_1, y_2}) < \left[E(\tilde{H}_U^0) + \frac{C_1}{R_0^2} \right] (\Psi_{y_1, y_2}, \Psi_{y_1, y_2}), \quad (4.37)$$

où $C_1 := 1 + 2C_0\beta > 0$. En particulier donc, $\Psi_{y_1, y_2} \neq 0$, et (4.28) est démontrée.

Il reste à voir que l'on peut choisir y_1 et y_2 de telle sorte que $\text{dist}(y_1, y_2) = 3L$, L étant un réel positif quelconque. Ceci est immédiat par la proposition 4.5, en posant $\Psi := \mathcal{T}_t \Psi_{y_1, y_2}$ où $t = 3L - (y_1 - y_2)$. \square

4-2.1.2 Localisation des photons

L'étape suivante de notre démarche consiste à localiser les photons dans des boules de rayon L autour de l'électron et du noyau préalablement localisés. Dans la mesure où certains points de cette étape sont démontrés explicitement dans [LL03], nous y ferons référence sans les détailler. Commençons par introduire un nouvel opérateur intermédiaire agissant dans $L^2(B(y_1, R_0) \times B(y_2, R_0); \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$, et dont le principal intérêt, par rapport à \tilde{H}_U^0 , est qu'il possède un état fondamental :

Proposition 4.7 *Supposons que l'hypothèse (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit $\tilde{H}_{U,D}^0$ l'opérateur agissant dans $L^2(B(y_1, R_0) \times B(y_2, R_0); \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$ et défini de la même façon que \tilde{H}_U^0 , à ceci près que les opérateurs p_j sont remplacés par les opérateurs $p_{j,D} := -i\nabla_{x_j}$ de domaines $H_0^1(B(y_j, R_0))$. Alors $\tilde{H}_{U,D}^0$ définit un opérateur auto-adjoint de domaine de forme :*

$$Q(\tilde{H}_{U,D}^0) = H_0^1(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f). \quad (4.38)$$

De plus, $\tilde{H}_{U,D}^0$ possède un état fondamental normalisé $\Phi_D \in Q(\mathcal{N})$ qui vérifie :

$$q_{\tilde{H}_{U,D}^0}(\Phi_D, \Phi_D) \leq E(\tilde{H}_U^0) + \frac{C_1}{R_0^2}. \quad (4.39)$$

Démonstration

La définition de $\tilde{H}_{U,D}^0$ comme opérateur auto-adjoint à partir des formes quadratiques est une nouvelle adaptation de la méthode employée dans la sous-section 2-4.1 pour définir H_U^V . Quant à l'existence de l'état fondamental Φ_D , on l'obtiendrait en reprenant point par point la démonstration du chapitre 3 conduisant à l'existence d'un état fondamental pour H_U^V . Il n'est en effet pas nécessaire d'avoir recours à des conditions de liaison pour $\tilde{H}_{U,D}^0$, car dans ce cas, l'électron et le noyau sont de toutes façon localisés dans une région finie de l'espace. Par ailleurs, on a $\Phi_D \in Q(\mathcal{N})$, de la même façon qu'on avait $\Phi \in Q(\mathcal{N})$ pour Φ état fondamental de H_U^V .

Enfin, si l'on considère un état "localisé" Ψ fourni par le lemme 4.6, sa restriction à $B(y_1, R_0) \times B(y_2, R_0)$ (notée encore Ψ) appartient à $Q(\tilde{H}_{U,D}^0)$, et donc :

$$q_{\tilde{H}_{U,D}^0}(\Phi_D, \Phi_D) \leq q_{\tilde{H}_{U,D}^0}(\Psi, \Psi) = q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi, \Psi) \leq E(\tilde{H}_U^0) + \frac{C_1}{R_0^2}. \quad (4.40)$$

Ceci termine la preuve de la proposition. \square

Nous identifierons dorénavant l'état Φ_D de $Q(\tilde{H}_{U,D}^0)$ et l'état de $Q(\tilde{H}_U^0)$ obtenu à partir de Φ_D en posant $\Phi_D(X) = 0$ en dehors de $B(y_1, R_0) \times B(y_2, R_0)$. C'est à partir de cet état que nous allons localiser les photons.

Choisissons une base orthonormale quelconque $(f_i)_{i \geq 0}$ de $L^2(\underline{\mathbb{R}}^3)$ et rappelons avec la notation (1.40), que l'ensemble des vecteurs de la forme :

$$|i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{p_1! \dots p_n!}} a^*(f_{i_1})^{p_1} \dots a^*(f_{i_n})^{p_n} \Omega \quad (4.41)$$

constituent une base Hilbertienne de \mathcal{F}_s . L'opérateur de localisation des photons $\mathcal{J}_L := \mathcal{J}_L^1 \otimes \mathcal{J}_L^2$ est alors défini sur les éléments de base de $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s$, pour $L > 0$, par :

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_L (|i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f \otimes |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_f) \\ &= \mathcal{J}_L^1 |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f \otimes \mathcal{J}_L^2 |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_f \\ &:= \frac{1}{\sqrt{p_1! \dots p_n!}} \frac{1}{\sqrt{p'_1! \dots p'_{n'}!}} a^*(h_1 f_{i_1})^{p_1} \dots a^*(h_1 f_{i_n})^{p_n} \Omega \\ & \quad \otimes a^*(h_2 f_{i'_1})^{p'_1} \dots a^*(h_2 f_{i'_{n'}})^{p'_{n'}} \Omega, \end{aligned} \quad (4.42)$$

où les fonctions de localisation $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ sont choisies de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \quad 0 \leq h_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq h_2 \leq 1, \\ * \quad h_1 = 1 \text{ sur } B(y_1, L/2) \text{ et } h_2 = 1 \text{ sur } B(y_2, L/2), \\ * \quad h_1 = 0 \text{ sur } B(y_1, L)^c \text{ et } h_2 = 0 \text{ sur } B(y_2, L)^c. \end{array} \right.$$

Observons que h_1 localise les photons dans une région où se trouve l'électron tandis que h_2 localise les photons dans une région où se trouve le noyau.

Rappelons, avec les notations de la sous-section 1-2.4, que l'espace $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s$ est isomorphe à $\mathcal{F}_s(L^2(\underline{\mathbb{R}}^3))$, et que nous continuons à noter \mathcal{N} l'opérateur de nombre dans $\mathcal{F}_s(L^2(\underline{\mathbb{R}}^3))$.

Définissons alors un nouvel opérateur \mathcal{N}_∞ , représentant le nombre de photons situés en dehors de $B(y_1, L) \cup B(y_2, L)$, par :

$$(\mathcal{N}_\infty \Phi)^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = n \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{y_i \in B(y_1, L)^c \cap B(y_2, L)^c} \Phi^{(n)}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n), \quad (4.43)$$

pour tout $\Phi \in D(\mathcal{N})$.

L'une des clés pour obtenir une estimation suffisamment fine du "coût" de localisation des photons est d'obtenir une borne supérieure du nombre de photons dans l'état Φ_D . C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.8 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit Φ_D l'état fondamental de $\tilde{H}_{U,D}^0$ obtenu à la proposition 4.7. On a :*

$$q_{\mathcal{N}}(\Phi_D, \Phi_D) \leq C_1(1 + |\ln(\Lambda R_0)|), \quad (4.44)$$

où C_1 est une constante positive indépendante de R_0 . De plus pour tout $0 < \gamma < 1$:

$$q_{\mathcal{N}_\infty}(\Phi_D, \Phi_D) \leq C_2 \left(\frac{R_0}{L^\gamma} \right)^2, \quad (4.45)$$

où C_2 est une constante positive dépendant de γ , mais ne dépendant pas de R_0 ni de L .

Démonstration

Suivant la démarche de [LL03, Lemme 6.1], nous allons chercher comment obtenir une borne supérieure de $\|\hat{a}_{\lambda,\mu}(k)\hat{\Phi}_D\|$ pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \{1, 2\}$. Notons d'ailleurs que $\hat{a}_{\lambda,\mu}(\cdot)\hat{\Phi}_D$ est bien définie en tant que fonction de $L^2(\mathbb{R}^3; L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s))$ dans la mesure où $\Phi_D \in Q(\mathcal{N})$ (il suffit pour le montrer d'adapter le lemme 3.11 au cas de $\mathcal{F}_s(L^2(\underline{\mathbb{R}}^3))$).

La méthode pour majorer $\|\hat{a}_{\lambda,\mu}(k)\hat{\Phi}_D\|$ est la même que celle que nous avons employée dans la démonstration de la proposition 3.12, c'est-à-dire l'application combinée d'une transformation de Power-Zienau-Wooley et d'une "Pull-Through Formula". Définissons tout d'abord la transformation unitaire dont nous allons avoir besoin, et qui est quelque peu différente de celle définie dans la section 2-6. Posons ainsi :

$$\tilde{\mathcal{U}}_{PZW} = \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \tilde{\mathcal{U}}_{PZW}(X) dX, \quad (4.46)$$

où pour $X \in \mathbb{R}^6$:

$$\tilde{\mathcal{U}}_{PZW}(X) = e^{-iq_1(x_1-y_1) \cdot A(y_1)} \otimes e^{-iq_2(x_2-y_2) \cdot A(y_2)}. \quad (4.47)$$

Pour définir précisément l'action de $\tilde{\mathcal{U}}_{PZW}$ sur les différentes parties intervenant dans \tilde{H}_U^0 , il suffit de procéder de la même façon que pour \mathcal{U}_{PZW} et $H_U^V(m)$ dans la section 2-6. Nous nous contentons donc d'écrire formellement les opérateurs. On a d'abord :

$$\hat{b}_{\lambda,\mu}(k, X) := \mathcal{F} \tilde{\mathcal{U}}_{PZW}(X) \mathcal{F}^{-1} \hat{a}_{\lambda,\mu}(k) \mathcal{F} \tilde{\mathcal{U}}_{PZW}^*(X) \mathcal{F}^{-1} = \hat{a}_{\lambda,\mu}(k) - iw_{\lambda,\mu}(k, X), \quad (4.48)$$

où $w_{\lambda,\mu}(k, X)$ est l'opérateur de multiplication :

$$w_{\lambda,\mu}(k, X) := \frac{1}{2\pi} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}} \left[q_1 \delta_{\mu 1} \varepsilon_\lambda(k) \cdot (x_1 - y_1) e^{-ik \cdot x_1} \right. \\ \left. + q_2 \delta_{\mu 2} \varepsilon_\lambda(k) \cdot (x_2 - y_2) e^{-ik \cdot x_2} \right]. \quad (4.49)$$

On en déduit que :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{PZW} \widetilde{H}_U^0 \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW}^* = \frac{1}{2m_1} (p_1 - q_1 \widetilde{A}_1)^2 \otimes I + I \otimes \frac{1}{2m_2} (p_2 - q_2 \widetilde{A}_2)^2 + \widetilde{H}_f + U + V, \quad (4.50)$$

où \widetilde{A}_j et \widetilde{H}_f sont définis par :

$$\widetilde{A}_j := \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \widetilde{A}_j(X) dX, \quad (4.51) \\ \widetilde{A}_j(X) = A(x_j) - A(y_j) \quad \text{pour } X \in \mathbb{R}^6,$$

et :

$$\widetilde{H}_f := \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \widetilde{H}_f(X) dX, \quad (4.52) \\ \mathcal{F} \widetilde{H}_f(X) \mathcal{F}^{-1} = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mu=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) \widehat{b}_{\lambda,\mu}^*(k, X) \widehat{b}_{\lambda,\mu}(k, X) dk \quad \text{pour } X \in \mathbb{R}^6.$$

En posant $\Phi'_D := \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW} \Phi_D$, on a alors, toujours formellement :

$$\mathcal{F} \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW} \left[\widetilde{H}_{U,D}^0 - E(\widetilde{H}_{U,D}^0) \right] \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW}^* \mathcal{F}^{-1} \widehat{a}_{\lambda,\mu}(k) \widehat{\Phi}'_D \\ = \left[\mathcal{F} \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW} \widetilde{H}_{U,D}^0 \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW}^* \mathcal{F}^{-1}, \widehat{a}_{\lambda,\mu}(k) \right] \widehat{\Phi}'_D \\ = \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \frac{1}{\pi} \frac{q_1}{2m_1} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}} \delta_{\mu 1} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \mathcal{F}(p_1 - q_1 \widetilde{A}(x_1)) \otimes I \mathcal{F}^{-1} (e^{-ik \cdot y_1} - e^{-ik \cdot x_1}) dX \\ + \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \frac{1}{\pi} \frac{q_2}{2m_2} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}} \delta_{\mu 2} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \mathcal{F} I \otimes (p_2 - q_2 \widetilde{A}(x_2)) \mathcal{F}^{-1} (e^{-ik \cdot y_2} - e^{-ik \cdot x_2}) dX \\ + \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \omega(k) \widehat{b}_{\lambda,\mu}(k, X) dX. \quad (4.53)$$

Comme $\mathcal{F} \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW} \left[\widetilde{H}_{U,D}^0 - E(\widetilde{H}_{U,D}^0) \right] \widetilde{\mathcal{U}}_{PZW}^* \mathcal{F}^{-1} + \omega(k)$ est inversible pour presque tout k , et comme on a :

$$|e^{-ik \cdot y_j} - e^{-ik \cdot x_j}| \leq |k| |y_j - x_j| \leq |k| R_0, \quad (4.54)$$

puisque x_j est localisé dans $B(y_j, R_0)$ dans l'état Φ_D , on en déduit en utilisant le même type d'estimations que dans la démonstration de la proposition 3.12 :

$$\left\| \widehat{a}_{\lambda,\mu}(k) \widehat{\Phi}'_D \right\| \leq C'_1 R_0 \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}}, \quad (4.55)$$

où C'_1 est une constante positive indépendante de R_0 . Notons que, pour obtenir (4.55), il est nécessaire de constater que $E(\tilde{H}_{U,D}^0)$ est une fonction décroissante de R_0 , si bien qu'elle est bornée indépendamment de R_0 . Si par ailleurs, au lieu de (4.54), on écrit plus simplement que :

$$|e^{-ik \cdot y_j} - e^{-ik \cdot x_j}| \leq 2, \quad (4.56)$$

cela nous conduit à :

$$\left\| \hat{a}_{\lambda,\mu}(k) \hat{\Phi}_D \right\| \leq C'_2 \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{3/2}}, \quad (4.57)$$

où C'_2 est également une constante positive indépendante de R_0 .

De plus, revenant à (4.53), on peut écrire $\hat{a}_{\lambda,\mu}(k) \hat{\Phi}_D$ sous la forme :

$$\hat{a}_{\lambda,\mu}(k) \hat{\Phi}_D = \sum_{j=1,2} e^{-ik \cdot y_j} \hat{T}_{\lambda,\mu}^j(k), \quad (4.58)$$

avec, encore en utilisant le même type d'estimations que dans la démonstration de la proposition 3.12 :

$$\left\| \nabla_k \hat{T}_{\lambda,\mu}^j(k) \right\| \leq \frac{C'_3 R_0}{|k|^{1/2} \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}}, \quad (4.59)$$

pour presque tout $k \in \mathbb{R}^3$ tel que $|k| < \Lambda$, où C'_3 est une constante positive indépendante de R_0 . La fin de la preuve consiste alors à écrire que :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{N}_\infty}(\Phi_D, \Phi_D) &= \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mu=1,2} \int_{y \in B(y_1, L)^c \cap B(y_2, L)^c} \|a_{\lambda,\mu}(y) \Phi_D\|^2 dy \\ &\leq 2 \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mu=1,2} \sum_{j=1,2} \int_{y \in B(y_1, L)^c \cap B(y_2, L)^c} \|T_{\lambda,\mu}^j(y - y_j)\|^2 dy, \end{aligned} \quad (4.60)$$

puis à calculer, pour $0 < \gamma < 1$, comme dans la démonstration du lemme 5.1 de [LL03] :

$$\begin{aligned} \int_{y \in B(y_1, L)^c \cap B(y_2, L)^c} \|T_{\lambda,\mu}^j(y - y_j)\|^2 dy &\leq \frac{1}{L^{2\gamma}} \int_{\mathbb{R}^3} |y|^{2\gamma} \|T_{\lambda,\mu}^j(y)\|^2 dy \\ &= \frac{C_\gamma}{L^{2\gamma}} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\left(\nabla_k \hat{T}_{\lambda,\mu}^j(k), \nabla_{k'} \hat{T}_{\lambda,\mu}^j(k') \right)}{|k - k'|^{2\gamma+1}} dk dk' \\ &\leq C'_\gamma \frac{R_0^2}{L^{2\gamma}}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

où C_γ et C'_γ sont des constantes positives indépendantes de R_0 et L , et où nous avons utilisé (4.59) dans la dernière inégalité. Ainsi (4.45) est démontrée.

Quant à (4.44), il suffit pour l'obtenir d'écrire que pour tout $a > 0$:

$$q_{\mathcal{N}}(\Phi_D, \Phi_D) = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mu=1,2} \left[\int_{|k| \leq a} \left\| \hat{a}_{\lambda,\mu}(k) \hat{\Phi}_D \right\|^2 dk + \int_{|k| \geq a} \left\| \hat{a}_{\lambda,\mu}(k) \hat{\Phi}_D \right\|^2 dk \right]. \quad (4.62)$$

En effet, en majorant la première intégrale grâce à (4.55), la seconde grâce à (4.57), puis en prenant le minimum sur $0 < a < \Lambda$ des majorants obtenus, on obtient (4.44). Ainsi le lemme est démontré. \square

Nous écrivons maintenant une proposition qui fournit l'existence d'un état approximant l'état fondamental de \tilde{H}_U^0 et dans lequel électron, noyau et photons sont localisés. Le lemme 4.8 étant établi, la preuve de cette proposition est tout à fait similaire à celle donné dans [LL03] aussi nous ne la reproduisons pas.

Proposition 4.9 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soient $R_0 > 0$ et $L > 2R_0$; il existe alors $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\text{dist}(y_1, y_2) = 3L$, et $\Psi_0 \in Q(\tilde{H}_U^0)$, $\|\Psi_0\| = 1$ tel que, d'une part, $\Psi_0(X)$ soit à support dans $B(y_1, R_0) \times B(y_2, R_0) \subset \mathbb{R}^6$, et tel que d'autre part, pour tout $n \geq 0$:*

$$\Psi_0^{(n)}(X, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = 0 \text{ dès que } \exists i, y_i \in B(y_1, L)^c \cap B(y_2, L)^c. \quad (4.63)$$

De plus, pour tout $0 < \gamma < 1$, Ψ_0 vérifie :

$$q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi_0, \Psi_0) \leq E(\tilde{H}_U^0) + \frac{C_1}{R_0^2} + \frac{C_2}{(L - 2R_0)^\gamma} \left(\frac{R_0}{L^\gamma} \right) (1 + |\ln(\Lambda R_0)|), \quad (4.64)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives pouvant dépendre de γ mais ne dépendant pas de R_0 ni de L .

Démonstration

Voir [LL03]. L'idée est de considérer $\Psi_0 = \mathcal{J}_L \Phi_D / \|\mathcal{J}_L \Phi_D\|$ où \mathcal{J}_L est l'opérateur de localisation défini en (4.42). On a alors facilement $\mathcal{J}_L \Phi_D \in Q(\tilde{H}_U^0)$, et :

$$\begin{aligned} \frac{q_{\tilde{H}_U^0}(\mathcal{J}_L \Phi_D, \mathcal{J}_L \Phi_D)}{\|\mathcal{J}_L \Phi_D\|^2} &= \frac{q_{\tilde{H}_{U,D}^0}(\mathcal{J}_L \Phi_D, \mathcal{J}_L \Phi_D)}{\|\mathcal{J}_L \Phi_D\|^2} \\ &= E(\tilde{H}_{U,D}^0) + \frac{(\mathcal{J}_L \Phi_D, [\tilde{H}_{U,D}^0, \mathcal{J}_L] \Phi_D)}{\|\mathcal{J}_L \Phi_D\|^2}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

On majore ensuite $E(\tilde{H}_{U,D}^0)$ grâce à (4.39) et il reste à estimer le commutateur $[\tilde{H}_{U,D}^0, \mathcal{J}_L]$; on utilise pour ce faire le lemme 4.8; on montrerait que cela conduit à (4.64). \square

4-2.1.3 Construction d'un état de $Q(H_U^V)$ à partir d'un état de $Q(\tilde{H}_U^0)$

Il s'agit maintenant de construire, à partir de l'état Ψ_0 donné par la proposition 4.9, un état Ξ dans $Q(H_U^V)$ dont l'énergie relativement à H_U^V soit comparable à l'énergie de Ψ_0 relativement à \tilde{H}_U^0 . Décrivons la façon de procéder.

Considérons $(f_k)_{k \geq 0}$ une base orthonormale de $L^2(B(y_1, L) \times \{1, 2\})$, et $(g_l)_{l \geq 0}$ une base orthonormale de $L^2(B(y_2, L) \times \{1, 2\})$. Rappelons alors que :

* $\left\{ |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{p_1! \dots p_n!}} a^*(f_{i_1})^{p_1} \dots a^*(f_{i_n})^{p_n} \Omega, n \in \mathbb{N}, i_k, p_k \in \mathbb{N} \right\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_s(L^2(B(y_1, L) \times \{1, 2\}))$,

* $\left\{ |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_g = \frac{1}{\sqrt{p'_1! \dots p'_{n'}!}} a^*(g_{i'_1})^{p'_1} \dots a^*(g_{i'_{n'}})^{p'_{n'}} \Omega, n' \in \mathbb{N}, i'_k, p'_k \in \mathbb{N} \right\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{F}_s(L^2(B(y_2, L) \times \{1, 2\}))$,

où $\mathcal{F}_s(L^2(B(y_j, L) \times \{1, 2\}))$ désigne l'espace de Fock symétrique construit de la même façon que \mathcal{F}_s , mais à partir de $L^2(B(y_j, L) \times \{1, 2\})$ au lieu de $L^2(\mathbb{R}^3)$. L'état localisé Ψ_0 s'écrit ainsi sous la forme :

$$\Psi_0(X) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n' \geq 0}} \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_n \\ i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n'}}} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_n \\ p'_1, \dots, p'_{n'}}} \Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}}(X) |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f \otimes |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_g, \quad (4.66)$$

pour presque tout $X \in \mathbb{R}^6$, avec $\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}} \in L^2(\mathbb{R}^6)$, et :

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n' \geq 0}} \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_n \\ i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n'}}} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_n \\ p'_1, \dots, p'_{n'}}} \int_{\mathbb{R}^6} \left| \Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}}(X) \right|^2 dX = 1. \quad (4.67)$$

Nous définissons alors un état $\Xi \in \mathcal{H}$ à partir de Ψ_0 en posant :

$$\Xi(X) := \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n' \geq 0}} \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_n \\ i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n'}}} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_n \\ p'_1, \dots, p'_{n'}}} \Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}}(X) |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f \hat{\otimes} |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_g, \quad (4.68)$$

pour presque tout $X \in \mathbb{R}^6$, où la notation $\hat{\otimes}$ désigne :

$$\begin{aligned} & |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f \hat{\otimes} |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_g \\ & := \frac{1}{\sqrt{p_1! \dots p_n!} \sqrt{p'_1! \dots p'_{n'}!}} a^*(f_{i_1})^{p_1} \dots a^*(f_{i_n})^{p_n} a^*(g_{i'_1})^{p'_1} \dots a^*(g_{i'_{n'}})^{p'_{n'}} \Omega. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Dans la mesure où $[a(f_i), a^*(g_{i'})] = 0$ puisque f_i et $g_{i'}$ sont à support disjoints, on peut constater que $\Xi \in Q(H_V^Y)$ et que $\|\Xi\| = \|\Psi_0\| = 1$.

Donnons à présent un lemme tiré de [LL03], dont la démonstration est directe, et qui va nous permettre de comparer $q_{H_V^Y}(\Xi, \Xi)$ et $q_{\tilde{H}_0^Y}(\Psi_0, \Psi_0)$.

Lemme 4.10 *Soient, en utilisant les notations précédentes :*

$$\begin{aligned} \Phi_f & := |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f, \\ \Phi_g & := |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_g, \\ \Phi_{fg} & := |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f \hat{\otimes} |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_g. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Soient de plus β et γ deux combinaisons linéaires quelconques d'opérateurs d'annihilation. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{fg}, \beta \gamma \Phi_{fg} \rangle & = \langle \Phi_f, \beta \gamma \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \Phi_g \rangle + \langle \Phi_f, \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \beta \gamma \Phi_g \rangle \\ & \quad + \langle \Phi_f, \beta \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \gamma \Phi_g \rangle + \langle \Phi_f, \gamma \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \beta \Phi_g \rangle, \\ \langle \Phi_{fg}, \beta^* \gamma^* \Phi_{fg} \rangle & = \langle \Phi_f, \beta^* \gamma^* \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \Phi_g \rangle + \langle \Phi_f, \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \beta^* \gamma^* \Phi_g \rangle \\ & \quad + \langle \Phi_f, \beta^* \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \gamma^* \Phi_g \rangle + \langle \Phi_f, \gamma^* \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \beta^* \Phi_g \rangle, \\ \langle \Phi_{fg}, \beta^* \gamma \Phi_{fg} \rangle & = \langle \Phi_f, \beta^* \gamma \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \Phi_g \rangle + \langle \Phi_f, \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \beta^* \gamma \Phi_g \rangle \\ & \quad + \langle \Phi_f, \beta^* \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \gamma \Phi_g \rangle + \langle \Phi_f, \gamma \Phi_f \rangle \langle \Phi_g, \beta^* \Phi_g \rangle. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Remarque 4.11

Observons qu'une formule du type (4.10) ne serait pas valable pour calculer $(\Phi_{fg}, \beta\gamma^*\Phi_{fg})$.

Nous sommes maintenant en mesure de passer à la démonstration du principal résultat de ce paragraphe :

Théorème 4.12 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Alors :*

$$E(H_U^V) < E(\tilde{H}_U^0). \quad (4.72)$$

Démonstration

On conserve les notations utilisées précédemment. Ψ_0 désigne ainsi l'état normalisé fourni par la proposition 4.9 dans lequel électron, noyau et photons sont localisés. Comme nous l'avons déjà dit, l'idée est de comparer $q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi_0, \Psi_0)$ et $q_{H_U^V}(\Xi, \Xi)$. Or, pour calculer $q_{H_U^V}(\Xi, \Xi)$, nous allons utiliser le lemme 4.10, et il est donc plus commode, au vu de la remarque 4.11, de travailler ici avec les Hamiltoniens réordonnés au sens de Wick (voir remarque 2.1).

Soit $\{e_l\}_{l \geq 0}$ une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que, pour tout $l \geq 0$, $e_l \in H^2(\mathbb{R}^3)$. On peut donc écrire la fonction $\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n}$ donnée en (4.66) sous la forme :

$$\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n}(X) = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l' \geq 0}} \Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{l, l'} e_l(x_1) e_{l'}(x_2). \quad (4.73)$$

En développant chacune des parties apparaissant dans la définition de $q_{\tilde{H}_U^0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi_0, \Psi_0) \\ &= \frac{1}{2m_1} \sum_{n, i, p, l} \sum_{o, j, q, m} \overline{\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{l, l'}}_{i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n} \Psi_{j_1, q_1; \dots; j_o, q_o}^{m, m'} \delta_{l' m'} \delta_{(i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n)(j'_1, q'_1; \dots; j'_o, q'_o)} \times \\ & \quad \int_{\mathbb{R}^3} \langle e_l(x_1) | i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, : (p_1 - q_1 A(x_1))^2 : e_m(x_1) | j_1, q_1; \dots; j_n, q_n \rangle_f \rangle dx_1 \\ &+ \frac{1}{2m_2} \sum_{n, i, p, l} \sum_{o, j, q, m} \overline{\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{l, l'}}_{i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n} \Psi_{j_1, q_1; \dots; j_o, q_o}^{m, m'} \delta_{lm} \delta_{(i_1, p_1; \dots; i_n, p_n)(j_1, q_1; \dots; j_o, q_o)} \times \\ & \quad \int_{\mathbb{R}^3} \langle e_{l'}(x_2) | i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n \rangle_g, : (p_2 - q_2 A(x_2))^2 : e_{m'}(x_2) | j'_1, q'_1; \dots; j'_n, q'_n \rangle_g \rangle dx_2 \\ &+ \sum_{n, i, p, l} \sum_{o, j, q, m} \overline{\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{l, l'}}_{i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n} \Psi_{j_1, q_1; \dots; j_o, q_o}^{m, m'} \delta_{lm} \delta_{l' m'} \delta_{(i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n)(j'_1, q'_1; \dots; j'_o, q'_o)} \times \\ & \quad \langle | i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, H_f | j_1, q_1; \dots; j_n, q_n \rangle_f \rangle \\ &+ \sum_{n, i, p, l} \sum_{o, j, q, m} \overline{\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{l, l'}}_{i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n} \Psi_{j_1, q_1; \dots; j_o, q_o}^{m, m'} \delta_{lm} \delta_{l' m'} \delta_{(i_1, p_1; \dots; i_n, p_n)(j_1, q_1; \dots; j_o, q_o)} \times \\ & \quad \langle | i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n \rangle_g, H_f | j'_1, q'_1; \dots; j'_n, q'_n \rangle_g \rangle \\ &+ \sum_{n, i, p, l} \sum_{o, j, q, m} \overline{\Psi_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n}^{l, l'}}_{i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n} \Psi_{j_1, q_1; \dots; j_o, q_o}^{m, m'} \delta_{(i_1, p_1; \dots; i_n, p_n)(j_1, q_1; \dots; j_o, q_o)} \delta_{(i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n)(j'_1, q'_1; \dots; j'_o, q'_o)} \times \\ & \quad \int_{\mathbb{R}^6} U(R) e_l(x_1) e_{l'}(x_2) e_m(x_1) e_{m'}(x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Passons maintenant au calcul de $q_{H_U^V}(\Xi, \Xi)$. En développant $q_{H_U^V}$ et en utilisant le lemme 4.10, on trouve :

$$q_{H_U^V}(\Xi, \Xi) = [1] + [2] + [3] + [4] + [5], \quad (4.74)$$

avec :

$$\begin{aligned}
[1] &= \frac{1}{2m_1} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{l'm'} \delta_{(i'_1,p'_1;\dots;i'_n,p'_n)(j'_1,q'_1;\dots;j'_o,q'_o)} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \langle e_l(x_1) | i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, : (p_1 - q_1 A(x_1))^2 : e_m(x_1) | j_1, q_1; \dots; j_n, q_n \rangle_f \rangle dx_1 \\
&+ \frac{1}{2m_2} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{lm} \delta_{(i_1,p_1;\dots;i_n,p_n)(j_1,q_1;\dots;j_o,q_o)} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \langle e_{l'}(x_2) | i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n \rangle_g, : (p_2 - q_2 A(x_2))^2 : e_{m'}(x_2) | j'_1, q'_1; \dots; j'_n, q'_n \rangle_g \rangle dx_2 \\
&+ \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{lm} \delta_{l'm'} \delta_{(i'_1,p'_1;\dots;i'_n,p'_n)(j'_1,q'_1;\dots;j'_o,q'_o)} \times \\
&\quad \langle | i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, H_f | j_1, q_1; \dots; j_n, q_n \rangle_f \rangle \\
&+ \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{lm} \delta_{l'm'} \delta_{(i_1,p_1;\dots;i_n,p_n)(j_1,q_1;\dots;j_o,q_o)} \times \\
&\quad \langle | i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n \rangle_g, H_f | j'_1, q'_1; \dots; j'_n, q'_n \rangle_g \rangle \\
&+ \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{(i_1,p_1;\dots;i_n,p_n)(j_1,q_1;\dots;j_o,q_o)} \delta_{(i'_1,p'_1;\dots;i'_n,p'_n)(j'_1,q'_1;\dots;j'_o,q'_o)} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^6} U(R) \overline{e_l(x_1) e_{l'}(x_2)} e_m(x_1) e_{m'}(x_2) dx_1 dx_2 \\
&+ \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{(i_1,p_1;\dots;i_n,p_n)(j_1,q_1;\dots;j_o,q_o)} \delta_{(i'_1,p'_1;\dots;i'_n,p'_n)(j'_1,q'_1;\dots;j'_o,q'_o)} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^6} V(r) \overline{e_l(x_1) e_{l'}(x_2)} e_m(x_1) e_{m'}(x_2) dx_1 dx_2, \\
[2] &= - \frac{q_1}{m_1} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{l'm'} \delta_{(i_1,p_1;\dots;i_n,p_n)(j_1,q_1;\dots;j_o,q_o)} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \overline{e_l(x_1)} (p_1 e_m)(x_1) \langle | i'_1, p'_1; \dots; i'_n, p'_n \rangle_g, A(x_1) | j'_1, q'_1; \dots; j'_o, q'_o \rangle_g \rangle dx_1 \\
&- \frac{q_2}{m_2} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{lm} \delta_{(i'_1,p'_1;\dots;i'_n,p'_n)(j'_1,q'_1;\dots;j'_o,q'_o)} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \overline{e_{l'}(x_2)} (p_2 e_{m'})(x_2) \langle | i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, A(x_2) | j_1, q_1; \dots; j_o, q_o \rangle_f \rangle dx_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[3] &= \frac{q_1^2}{2m_1} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{l'm'} \delta_{(i_1,p_1;\dots;i_n,p_n)(j_1,q_1;\dots;j_o,q_o)} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \overline{e_l(x_1)} e_m(x_1) \langle |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'} \rangle_g, : A(x_1)^2 : |j'_1, q'_1; \dots; j'_{o'}, q'_{o'} \rangle_g dx_1 \\
&+ \frac{q_2^2}{2m_2} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{lm} \delta_{(i'_1,p'_1;\dots;i'_{n'},p'_{n'})(j'_1,q'_1;\dots;j'_{o'},q'_{o'})} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \overline{e_{l'}(x_2)} e_{m'}(x_2) \langle |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, : A(x_2)^2 : |j_1, q_1; \dots; j_o, q_o \rangle_f dx_2, \\
[4] &= \frac{q_1^2}{m_1} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{l'm'} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \overline{e_l(x_1)} e_m(x_1) \langle |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, A(x_1) |j_1, q_1; \dots; j_o, q_o \rangle_f \rangle \\
&\quad \times \langle |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'} \rangle_g, A(x_1) |j'_1, q'_1; \dots; j'_{o'}, q'_{o'} \rangle_g dx_1 \\
&+ \frac{q_2^2}{m_2} \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{lm} \times \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \overline{e_{l'}(x_2)} e_{m'}(x_2) \langle |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, A(x_2) |j_1, q_1; \dots; j_o, q_o \rangle_f \rangle \\
&\quad \times \langle |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'} \rangle_g, A(x_2) |j'_1, q'_1; \dots; j'_{o'}, q'_{o'} \rangle_g dx_2, \\
[5] &= \sum_{n,i,p,l} \sum_{o,j,q,m} \overline{\Psi_{i_1,p_1;\dots;i_n,p_n}^{l,l'}} \Psi_{j_1,q_1;\dots;j_o,q_o}^{m,m'} \delta_{lm} \delta_{l'm'} \times \\
&\quad \left[\sum_{\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |k| \langle \widehat{a}_\lambda(k) \mathcal{F} |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, \mathcal{F} |j_1, q_1; \dots; j_o, q_o \rangle_f \rangle \right. \\
&\quad \times \langle \mathcal{F} |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'} \rangle_g, \widehat{a}_\lambda(k) \mathcal{F} |j'_1, q'_1; \dots; j'_{o'}, q'_{o'} \rangle_g dx \\
&\quad \left. + \sum_{\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} |k| \langle \mathcal{F} |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n \rangle_f, \widehat{a}_\lambda(k) \mathcal{F} |j_1, q_1; \dots; j_o, q_o \rangle_f \rangle \right. \\
&\quad \left. \times \langle \widehat{a}_\lambda(k) \mathcal{F} |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'} \rangle_g, \mathcal{F} |j'_1, q'_1; \dots; j'_{o'}, q'_{o'} \rangle_g dx \right].
\end{aligned}$$

Tout d'abord, on constate que

$$[1] = q_{\widetilde{H}^0}(\Psi_0, \Psi_0) - ((-V)^{1/2} \Psi_0, (-V)^{1/2} \Psi_0). \quad (4.75)$$

Or, par la proposition 4.9, Ψ_0 est à support dans $B(y_1, R_0) \times B(y_2, R_0)$ avec $R_0 < 2L$ et $\text{dist}(y_1, y_2) = 3L$. On en déduit donc :

$$-((-V)^{1/2} \Psi_0, (-V)^{1/2} \Psi_0) \leq -Zq^2 \frac{C}{5L} (\Psi_0, \Psi_0) = -Zq^2 \frac{C}{5L}. \quad (4.76)$$

Observons que l'invariance par translation de \tilde{H}_U^0 donnée dans la proposition 4.5 apparaît ici comme une propriété cruciale, puisque c'est elle qui nous permet de contrôler l'éloignement de x_1 et x_2 , et donc l'énergie apportée par le potentiel de Coulomb V .

Ensuite, en ce qui concerne [3], on peut montrer de la même façon que dans [LL03, Lemme 5.6], que, pour tout $0 < \gamma < 1$:

$$[3] \leq \frac{C_\gamma}{L^{2\gamma}} (1 + q_{\mathcal{N}}(\Phi_D, \Phi_D)), \quad (4.77)$$

où C_γ est une constante positive dépendant de γ . On obtient cette dernière équation en utilisant le fait que [3] correspond à la partie quadratique de l'interaction entre des photons et une particule non relativiste (x_1 ou x_2) localisés dans des régions respectives séparées d'une distance plus grande que L . La présence de Φ_D dans le membre de droite vient d'ailleurs du choix de Ψ_0 que nous avons fait dans la démonstration de la proposition 4.9, c'est-à-dire $\Psi_0 = \mathcal{J}_L \Phi_D / \|\mathcal{J}_L \Phi_D\|$. D'après le lemme 4.8 et (4.77), on a donc :

$$[3] \leq \frac{C_3}{L^{2\gamma}} (1 + |\ln(\Lambda R_0)|), \quad (4.78)$$

où C_3 est également une constante positive dépendant de γ .

Enfin, on peut supposer que [2] + [4] + [5] ≤ 0 , dans la mesure où si l'on remplace Ξ par $\tilde{\Xi}$, où pour presque tout $X \in \mathbb{R}^6$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}(X) := & \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n' \geq 0}} \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_n \\ i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n'}}} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_n \\ p'_1, \dots, p'_{n'}}} \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l' \geq 0}} \Psi^{l, l'}_{i_1, p_1; \dots; i_n, p_n} \times \\ & \Psi^{l', l}{}_{i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}} \times \\ & \overline{e_l(x_1) e_{l'}(x_2) |i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f^{(-)} \hat{\otimes} |i'_1, p'_1; \dots; i'_{n'}, p'_{n'}\rangle_g}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

avec :

$$|i_1, p_1; \dots; i_n, p_n\rangle_f^{(-)} := \frac{1}{\sqrt{p_1! \dots p_n!}} (-a^*(f_{i_1}))^{p_1} \dots (-a^*(f_{i_n}))^{p_n} \Omega, \quad (4.80)$$

alors on peut montrer que d'une part $\tilde{\Xi} \in Q(H_U^V)$, $\|\tilde{\Xi}\| = 1$, et d'autre part :

$$q_{H_U^V}(\tilde{\Xi}, \tilde{\Xi}) = [1] + [3] - [2] - [4] - [5]. \quad (4.81)$$

Quitte à changer Ξ en $\tilde{\Xi}$, on suppose donc [2] + [4] + [5] ≤ 0 . Ainsi, d'après (4.75), (4.76) et (4.78), on a (en revenant maintenant à H_U^V plutôt que : H_U^V) :

$$q_{H_U^V}(\Xi, \Xi) \leq q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi_0, \Psi_0) + \frac{C_3}{L^{2\gamma}} (1 + |\ln(\Lambda R_0)|) - Zq^2 \frac{C}{5L}. \quad (4.82)$$

Il reste à insérer dans la dernière inégalité l'estimation (4.64) de la proposition 4.9 pour obtenir :

$$q_{H_U^V}(\Xi, \Xi) \leq E(\tilde{H}_U^0) + \frac{C_1}{R_0^2} + \left[\frac{C_2}{(L - 2R_0)^\gamma} \left(\frac{R_0}{L^\gamma} \right) + \frac{C_3}{L^{2\gamma}} \right] (1 + |\ln(\Lambda R_0)|) - Zq^2 \frac{C}{5L}. \quad (4.83)$$

Fixons γ tel que $\frac{3}{4} < \gamma < 1$, puis choisissons R_0 de la forme $R_0 = L^\tau$ avec $\frac{1}{2} < \tau < 2\gamma - 1$. On a alors, pour L suffisamment grand :

$$\frac{C_1}{R_0^2} + \left[\frac{C_2}{(L - 2R_0)^\gamma} \left(\frac{R_0}{L^\gamma} \right) + \frac{C_3}{L^{2\gamma}} \right] (1 + |\ln(\Lambda R_0)|) - Zq^2 \frac{C}{5L} < 0. \quad (4.84)$$

Par (4.83), on en déduit directement :

$$E(H_U^V) < E(\tilde{H}_U^0), \quad (4.85)$$

et le théorème est démontré. \square

4-2.2 Preuve de $E(\tilde{H}_U^0) \leq E(H_U^0)$

Il nous reste à montrer la seconde inégalité $E(\tilde{H}_U^0) \leq E(H_U^0)$, dans le cas où (4.19) n'est pas vérifiée, ce qui terminera la démonstration de la condition de liaison (C.L.)*(ii)*. Insistons sur le fait que nous ne sommes en mesure de prouver l'inégalité $E(\tilde{H}_U^0) \leq E(H_U^0)$ que dans le cas particulier où (4.19) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire le cas où il existe une suite minimisante pour H_U^0 , (Φ_j) , telle que noyau et électron sont "de plus en plus éloignés l'un de l'autre" dans l'état Φ_j , lorsque j tend vers l'infini.

Théorème 4.13 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soit (Φ_j) une suite normalisée dans \mathcal{H} telle que $\forall j, \Phi_j \in Q(H_U^0)$, et :*

$$q_{H_U^0}(\Phi_j, \Phi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} E(H_U^0). \quad (4.86)$$

Supposons de plus que (4.19) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists j_n, \int_{B(0,n)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\Phi_{j_n}(R, r)\|^2 dR dr \leq \frac{1}{n}. \quad (4.87)$$

On a alors :

$$E(\tilde{H}_U^0) \leq E(H_U^0). \quad (4.88)$$

Démonstration

Dans la mesure où la preuve de (4.88) utilise beaucoup d'arguments similaires à ceux de la sous-section précédente, nous ferons souvent référence à cette dernière.

Soient τ_n et ν_n des fonctions définies sur \mathbb{R}^3 pour $n \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Si } |r| \leq n - \frac{1}{2}, \tau_n(r) = 1, \\ * \text{ Si } |r| \geq n, \nu_n(r) = 1, \\ * \text{ Si } n - \frac{1}{2} \leq |r| \leq n, \tau_n(r) = \tau\left(\frac{|r|-(n-1)}{|r|}r\right) \text{ et } \nu_n(r) = \nu\left(\frac{|r|-(n-1)}{|r|}r\right), \\ \quad \text{où } \tau \text{ et } \nu \text{ sont des fonctions indépendantes de } n \text{ définies pour } 1/2 \leq |r| \leq 1, \\ * \text{ } 0 \leq \nu_n \leq 1 \text{ et } 0 \leq \tau_n \leq 1 \\ * \nu_n, \tau_n \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ * \nu_n^2 + \tau_n^2 = 1. \end{array} \right.$$

Il est alors facile de voir que $\tau_n \Phi_{j_n}, \nu_n \Phi_{j_n} \in Q(H_U^0)$, et en faisant commuter τ_n, ν_n avec p_1, p_2 , de la même manière que ce que nous avons fait à plusieurs reprises, on obtient :

$$q_{H_U^0}(\Phi_{j_n}, \Phi_{j_n}) = q_{H_U^0}(\tau_n \Phi_{j_n}, \tau_n \Phi_{j_n}) + q_{H_U^0}(\nu_n \Phi_{j_n}, \nu_n \Phi_{j_n}) - (\Phi_{j_n}, (|\nabla \tau_n|^2 + |\nabla \nu_n|^2) \Phi_{j_n}). \quad (4.89)$$

Or en utilisant l'hypothèse (4.87), on a :

$$\begin{aligned} & (\Phi_{j_n}, (|\nabla \tau_n|^2 + |\nabla \nu_n|^2) \Phi_{j_n}) \\ &= \int_{\{n-\frac{1}{2} \leq |r| \leq n\}} (|\nabla \tau(r)|^2 + |\nabla \nu(r)|^2) \int_{\mathbb{R}^3} \|\Phi_{j_n}(R, r)\|^2 dR dr \\ &\leq \frac{\text{Cste}}{n}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

et donc en revenant à (4.89), cela implique :

$$q_{H_U^0}(\nu_n \Phi_{j_n}, \nu_n \Phi_{j_n}) - E(H_U^0)(\nu_n \Phi_{j_n}, \nu_n \Phi_{j_n}) \leq q_{H_U^0}(\Phi_{j_n}, \Phi_{j_n}) - E(H_U^0) + \frac{\text{Cste}}{n}. \quad (4.91)$$

Comme, en utilisant encore l'hypothèse (4.87), on a de plus :

$$1 \geq \|\nu_n \Phi_{j_n}\|^2 \geq \int_{B(0,n)^c} \int_{\mathbb{R}^3} \|\Phi_{j_n}(X)\|^2 dRdr \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad (4.92)$$

on déduit de (4.91) que $\nu_n \Phi_{j_n} / \|\nu_n \Phi_{j_n}\|$ est une suite normalisée, minimisante pour H_U^0 . L'intérêt de s'être ramené à cette suite est que $\nu_n \Phi_{j_n} = 0$ pour $|r| \leq n - 1/2$; pour n suffisamment grand, $\nu_n \Phi_{j_n}$ est ainsi un état approprié pour pouvoir localiser électron et noyau dans des boules disjointes. On montre en effet en suivant la même méthode que pour la proposition 4.9 :

Proposition 4.14 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Soient $R_0 > 0$ et $L > 2R_0$; il existe alors $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\text{dist}(y_1, y_2) \geq 3L$, et $\Xi_0 \in Q(H_U^0)$, $\|\Xi_0\| = 1$ tel que, d'une part, $\Xi_0(X)$ soit à support dans $B(y_1, R_0) \cup B(y_2, R_0) \subset \mathbb{R}^3$, et tel que d'autre part, pour tout $n \geq 0$:*

$$\Xi_0^{(n)}(X, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) = 0 \text{ dès que } \exists i, y_i \in B(y_1, L)^c \cap B(y_2, L)^c. \quad (4.93)$$

De plus, pour tout $0 < \gamma < 1$, Ξ_0 vérifie :

$$q_{H_U^0}(\Xi_0, \Xi_0) \leq E(H_U^0) + \frac{C_1}{R_0^2} + \frac{C_2}{(L - 2R_0)^\gamma} \left(\frac{R_0}{L^\gamma} \right) (1 + |\ln(\Lambda R_0)|), \quad (4.94)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives pouvant dépendre de γ mais ne dépendant pas de R_0 ni de L .

Démonstration

L'idée est à peu près la même que dans la sous-section précédente. Considérant $R_0 > 0$ et $L > 0$ tel que $L - 2R_0 > 0$, on fixe n_0 tel que : $\nu_{n_0} \Phi_{j_{n_0}}(X) = 0$ sur $\{X, |r| \leq 3L\}$. Alors, partant de l'état $\nu_{n_0} \Phi_{j_{n_0}} / \|\nu_{n_0} \Phi_{j_{n_0}}\|$, on localise d'abord l'électron et le noyau dans des boules de rayon R_0 , comme nous l'avons fait dans le lemme 4.6. Ensuite, on définit un nouvel Hamiltonien $H_{U,D}^0$ en remplaçant dans H_U^0 le Laplacien par le Laplacien de Dirichlet sur $B(y_1, R_0) \cup B(y_2, R_0)$. On constate, comme dans la proposition 4.7, que $H_{U,D}^0$ possède un état fondamental Φ'_D ; et c'est à partir de cet état fondamental qu'on localise les photons autour de l'électron et du noyau. En particulier, au lieu de (4.42), l'opérateur de localisation des photons, \mathcal{J}'_L , est ici défini par :

$$\mathcal{J}'_L a^*(h_{i_1})^{p_1} \dots a^*(h_{i_n})^{p_n} \Omega := a^*(hh_{i_1})^{p_1} \dots a^*(hh_{i_n})^{p_n} \Omega, \quad (4.95)$$

où h est une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $0 \leq h \leq 1$, telle que $h = 1$ sur $B(y_1, L/2) \cup B(y_2, L/2)$, et telle que $h = 0$ sur $B(y_1, L)^c \cap B(y_2, L)^c$. On pose donc $\Xi_0 := \mathcal{J}'_L \Phi'_D / \|\mathcal{J}'_L \Phi'_D\|$, et on prouve (4.94) à l'aide d'estimations semblables à celles que nous avons obtenues dans le lemme 4.8. \square

Suite de la démonstration du théorème 4.13

Maintenant que nous avons, par la proposition 4.14, un état localisé Ξ_0 d'énergie proche de l'infimum du spectre de H_U^0 , on souhaite construire un état Ψ dans $Q(\tilde{H}_U^0)$ d'énergie comparable

à celle de Ξ_0 . On procède de façon inverse par rapport à ce que nous avons fait dans le théorème 4.12. Plus précisément, vue la définition (4.95) de \mathcal{J}'_L , on peut écrire Ξ_0 sous la forme :

$$\Xi_0(X) = \sum_{\substack{i_1, p_1, \dots, i_k, p_k \\ i'_1, p'_1, \dots, i'_{k'}, p'_{k'}}} \Xi_{i_1, p_1, \dots, i_k, p_k}^{i'_1, p'_1, \dots, i'_{k'}, p'_{k'}}(X) a^*(f_{i_1})^{p_1} \dots a^*(f_{i_k})^{p_k} a^*(g_{i'_1})^{p'_1} \dots a^*(g_{i'_{k'}})^{p'_{k'}} \Omega, \quad (4.96)$$

pour presque tout $X \in \mathbb{R}^6$. Dans cette écriture de $\Xi_0(X)$, la somme porte sur l'ensemble des variables, comme dans la définition (4.66) de $\Psi_0(X)$; les f_{i_j} sont à support dans $B(y_1, L)$, et les $g_{i'_j}$ sont à support dans $B(y_2, L)$. Il suffit, pour obtenir ceci, de décomposer la fonction h intervenant dans la définition de \mathcal{J}'_L en $h = h|_{B(y_1, L)} + h|_{B(y_2, L)}$ dans la mesure où $B(y_1, L)$ et $B(y_2, L)$ sont disjointes ; on place alors les termes de la forme $a^*(h|_{B(y_1, L)} f)$ à gauche et les termes de la forme $a^*(h|_{B(y_2, L)} f)$ à droite.

Ainsi, on définit un état $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^6; \mathcal{F}_s \otimes \mathcal{F}_s)$ en posant :

$$\Psi(X) := \sum_{\substack{i_1, p_1, \dots, i_k, p_k \\ i'_1, p'_1, \dots, i'_{k'}, p'_{k'}}} \Xi_{i_1, p_1, \dots, i_k, p_k}^{i'_1, p'_1, \dots, i'_{k'}, p'_{k'}}(X) a^*(f_{i_1})^{p_1} \dots a^*(f_{i_k})^{p_k} \Omega \otimes a^*(g_{i'_1})^{p'_1} \dots a^*(g_{i'_{k'}})^{p'_{k'}} \Omega. \quad (4.97)$$

On peut voir que $\Psi \in Q(H_U^0)$, $\|\Psi\| = 1$, et de plus, en développant $q_{H_U^0}(\Xi_0, \Xi_0)$ et $q_{\tilde{H}_U^0}(\Psi, \Psi)$ de la même façon que dans la sous-section précédente, on peut montrer :

$$E(\tilde{H}_U^0) \leq E(H_U^0) + \varepsilon(R_0, L, \gamma), \quad (4.98)$$

où $\varepsilon(R_0, L, \gamma)$ peut être rendu aussi petit qu'on le veut. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire ici d'éliminer certains termes quitte à remplacer Ψ par un autre état $\tilde{\Psi}$, comme nous l'avons fait en (4.79), puisque ces termes convergent de toute façon vers 0 lorsque R_0 et L tendent vers l'infini (le problème venait du fait qu'ils pouvaient converger comme $1/L$ dans la sous-section précédente, ce qui n'était pas suffisant). Le théorème est donc démontré. \square

Pour conclure, nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 4.15 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Alors :*

$$E(H_U^V) < E(H_U^0). \quad (4.99)$$

Démonstration

C'est une conséquence directe des théorèmes 4.3, 4.12 et 4.13. \square

Troisième partie

Instabilité des valeurs propres non perturbées et résonances

Chapitre 5

Absolute continuité du spectre essentiel

Rappelons l'écriture du Hamiltonien associé au système que nous étudions :

$$H_U^V = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j A_j)^2 + U + V + H_f. \quad (5.1)$$

A partir de maintenant, nous allons traiter l'interaction entre les particules non relativistes (le noyau et l'électron) et le champ électromagnétique comme une perturbation. Nous allons donc réutiliser la décomposition en deux parties de H_U^V , définie en (2.71)-(2.72)-(2.73) ; plus précisément :

$$H_0 := \sum_{j=1,2} \frac{p_j^2}{2m_j} + U + V + H_f \quad (5.2)$$

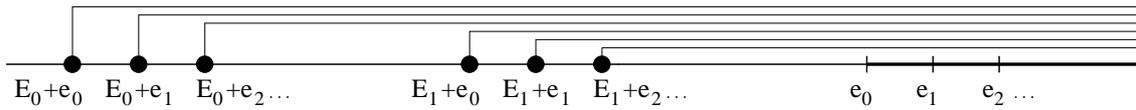
sera traité comme l'opérateur non perturbé, et :

$$W_g := \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (-2q_j p_j \cdot A_j + q_j^2 A_j^2) \quad (5.3)$$

sera traité comme la perturbation. Ceci est justifié par le fait que la valeur physique de la *constante de structure fine* $\alpha := q^2/\hbar c$ est environ $1/137$; rappelons que q désigne la charge d'un électron, \hbar la constante de Planck, c la vitesse de la lumière, et que nous avons choisi les unités de telle façon que $\hbar = c = 1$. Evidemment, comme le montre la définition (2.5), le potentiel de Coulomb V dépend lui aussi de q , si bien que les choix (5.2)-(5.3) ne semblent pas adapter à une étude perturbative de H_U^V ; mais nous commencerons, dans la première section de ce chapitre, par effectuer un changement de variables qui mettra en relief le caractère perturbatif de l'interaction champ-particules.

Rappelons également la description du spectre de H_0 que nous avons obtenue (en supposant que l'hypothèse (\mathcal{H}_{dis}) est vérifiée) : cf. figure 5.1.

Dans la partie II, nous avons montré que la première valeur propre de H_0 , $E_0 + e_0$, reste une valeur propre lorsqu'on insère dans le Hamiltonien l'interaction avec les photons. Il n'a d'ailleurs pas été nécessaire d'avoir recours à une théorie perturbative pour obtenir l'existence de cet état fondamental pour H_U^V . Maintenant, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction générale, on s'attend à ce que les autres valeurs propres de H_0 deviennent des résonances

FIG. 5.1 – Spectre du Hamiltonien non perturbé H_0

sous l'effet de la perturbation. En particulier donc, on s'attend à ce que le spectre de H_U^V autour des valeurs propres de H_0 soit absolument continu.

Soit \mathcal{V} un voisinage d'ordre $O(\alpha^3)$ de l'ensemble $\{E_0 + e_0\} \cup \{e_n\}_{n \geq 0}$. Dans ce chapitre, suivant principalement les travaux de V. Bach, J. Fröhlich et I. M. Sigal (cf.[BFS99]), nous allons montrer que le spectre de H_U^V est absolument continu dans l'ensemble :

$$\mathcal{E} := [E_0 + e_0, \infty[\setminus \mathcal{V}. \quad (5.4)$$

Nous supposons pour ce faire que la constante de couplage α est suffisamment petite et que certaines hypothèses ($\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}$) (cf.section 5-5), liées à la *règle d'or de Fermi*, sont satisfaites. Nous utiliserons par ailleurs une méthode de *dilatations complexes*, et l'*application de Feshbach*, définie dans la deuxième section de ce chapitre, jouera un rôle essentiel dans notre démonstration.

5-1 Un changement de coordonnées

Comme annoncé dans l'introduction, nous commençons par effectuer un changement de coordonnées, afin de faire ressortir le caractère perturbatif du couplage entre les deux particules non-relativistes et les photons. Plus précisément, considérons l'opérateur unitaire \mathcal{U}_d agissant dans \mathcal{H} et dilatant à la fois les positions respectives de l'électron et du noyau et les impulsions des photons de la façon suivante :

$$(x_j, k) \mapsto (x_j/Zq^2, Z^2q^4k). \quad (5.5)$$

Autrement dit, $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_{part}^d \otimes \mathcal{U}_{ph}^d$, avec, pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R}^6)$:

$$(\mathcal{U}_{part}^d \phi)(x_1, x_2) := \frac{1}{Z^3q^6} \phi(x_1/Zq^2, x_2/Zq^2), \quad (5.6)$$

et pour tout $\Phi \in \mathcal{F}_s$:

$$(\mathcal{F}\mathcal{U}_{ph}^d \Phi)^{(n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) := Z^{6n} q^{12n} \widehat{\Phi}^{(n)}(Z^2q^4\underline{k}_1, \dots, Z^2q^4\underline{k}_n). \quad (5.7)$$

Pour la commodité des écritures, dans (5.7), nous avons noté $Z^2q^4\underline{k}_i = (Z^2q^4k_i, \lambda)$. On définit alors $H_d := \mathcal{U}_d H_U^V \mathcal{U}_d^*$. Un calcul direct entraîne que, sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$:

$$\frac{1}{Z^2q^4} H_d = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} \left(p_j - q_j Zq^2 \tilde{A}_j(Zq^2 \cdot) \right)^2 + \tilde{U} + \tilde{V} + H_f. \quad (5.8)$$

Dans la dernière égalité, les opérateurs $\tilde{A}_j, \tilde{U}, \tilde{V}$ sont définis par :

$$\tilde{A}_j(\hat{\chi}_\Lambda) := A_j(\hat{\chi}_\Lambda(Z^2 q^4 \cdot)) \quad , \quad \tilde{U}(R) := \frac{1}{Z^2 q^4} U(R/Zq^2) \quad , \quad \tilde{V}(r) := -\frac{C}{|r|}, \quad (5.9)$$

où nous avons souligné la dépendance de A_j et \tilde{A}_j en la fonction de troncature ultraviolette $\hat{\chi}_\Lambda$. On redéfinit alors $\hat{\chi}_\Lambda := \hat{\chi}_\Lambda(Z^2 q^4 \cdot)$, $V := \tilde{V}$ et $U := \tilde{U}$. En particulier, supposant que $\hat{\chi}_\Lambda$ est initialement donnée par l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\hat{\chi}_\Lambda}^2)$, on voit que la nouvelle fonction de troncature ultraviolette s'écrit :

$$\hat{\chi}_\Lambda(k) = e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (5.10)$$

On redéfinit également $H_U^V := \frac{1}{Z^2 q^4} H_d$, si bien que dorénavant :

$$H_U^V = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j Z q^2 A_j(Z q^2 \cdot))^2 + H_f + U + V. \quad (5.11)$$

Cette dernière égalité peut-être vue comme une écriture formelle de l'opérateur H_U^V , ou bien comme une égalité sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$; toutefois, en suivant point par point la méthode employée dans le chapitre 2, on montrerait que H_U^V est bien défini comme opérateur auto-adjoint associé à une forme quadratique semi-bornée inférieurement et fermée sur $Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(H_f)$.

Notons que dans le “nouveau” Hamiltonien H_U^V , V ne dépend plus du paramètre q ; seul en dépend, comme on le souhaitait, le terme correspondant à l'interaction entre les particules non-relativistes et le champ de photons. Observons par ailleurs que le “nouveau” Hamiltonien et “l'ancien” *ne sont pas* unitairement équivalents ; la fonction de troncature ultraviolette $\hat{\chi}_\Lambda$ et les potentiels U, V ne sont de plus pas les mêmes dans chacun des deux points de vue. En revanche, on obtient facilement le spectre de l'un des deux Hamiltoniens à partir du spectre de l'autre.

Définissons maintenant le paramètre perturbatif g en utilisant les notations de [BFS98a, BFS99] :

$$g := (q^2 \Lambda)^{3/2}. \quad (5.12)$$

Reprenant l'écriture $H_U^V := H_0 + W_g$ rappelée en (5.2)-(5.3) et valide sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$, nous décomposons la perturbation W_g en :

$$W_g := gW_1 + g^2W_2, \quad (5.13)$$

où l'on a posé, toujours au sens d'opérateurs de domaines $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$:

$$W_1 := -\frac{2Z}{2m_1 \Lambda^{3/2}} p_1 \cdot A_1(Zq^2 \cdot) + \frac{2Z^2}{2m_2 \Lambda^{3/2}} p_2 \cdot A_2(Zq^2 \cdot), \quad (5.14)$$

$$W_2 := \frac{Z^2}{2m_1 \Lambda^3} A_1(Zq^2 \cdot)^2 + \frac{Z^4}{2m_2 \Lambda^3} A_2(Zq^2 \cdot)^2. \quad (5.15)$$

En utilisant encore les notations de [BFS98a, BFS99], on écrit au sens des formes quadratiques sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S \times C_0^\infty(\mathbb{R}^6) \otimes D_S$:

$$\mathcal{F}W_1\mathcal{F}^{-1} := \sum_{j=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} [G_{1,0}^j(\underline{k}) \otimes \hat{a}_\lambda^*(k) + G_{0,1}^j(\underline{k}) \otimes \hat{a}_\lambda(k)] dk, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}W_2\mathcal{F}^{-1} := & \sum_{j=1,2} \int_{\mathbb{R}^6} [G_{2,0}^j(\underline{k}; \underline{k}') \otimes \widehat{a}_\lambda^*(k)\widehat{a}_{\lambda'}^*(k') + G_{0,2}^j(\underline{k}; \underline{k}') \otimes \widehat{a}_\lambda(k)\widehat{a}_{\lambda'}(k') \\ & + G_{1,1}^j(\underline{k}; \underline{k}') \otimes \widehat{a}_\lambda^*(k)\widehat{a}_{\lambda'}(k')] d\underline{k}d\underline{k}' + \Lambda_0^j. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Pour $m + n = 1$, on notera parfois $G_{m,n}^j(\underline{k}, \underline{k}') = G_1^j(\underline{k})$ afin d'avoir une seule écriture pour les deux cas $m + n = 1$ et $m + n = 2$. Ainsi, pour tout $\underline{k}, \underline{k}' \in \mathbb{R}^3$, pour $j \in \{1, 2\}$ et pour $m + n \in \{1, 2\}$, $G_{m,n}^j(\underline{k}, \underline{k}')$ est défini comme étant la fermeture de l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^6)$ de domaine $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$ s'écrivant sous la forme :

$$\begin{aligned} G_{1,0}^1(\underline{k}) &= G_{0,1}^1(\underline{k})^* = \frac{iZ}{2m_1\Lambda^{3/2}} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi\sqrt{|k|}} e^{-iZq^2k.x_1} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_1}, \\ G_{1,0}^2(\underline{k}) &= G_{0,1}^2(\underline{k})^* = \frac{-iZ^2}{2m_2\Lambda^{3/2}} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi\sqrt{|k|}} e^{-iZq^2k.x_2} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_2}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} G_{2,0}^1(\underline{k}; \underline{k}') &= G_{0,2}^1(\underline{k}; \underline{k}')^* = \frac{Z^2}{2m_1\Lambda^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)\widehat{\chi}_\Lambda(k')}{4\pi^2\sqrt{|k||k'|}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \varepsilon_{\lambda'}(k') e^{-iZq^2k.x_1} e^{-iZq^2k'.x_1}, \\ G_{2,0}^2(\underline{k}; \underline{k}') &= G_{0,2}^2(\underline{k}; \underline{k}')^* = \frac{Z^4}{2m_2\Lambda^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)\widehat{\chi}_\Lambda(k')}{4\pi^2\sqrt{|k||k'|}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \varepsilon_{\lambda'}(k') e^{-iZq^2k.x_2} e^{-iZq^2k'.x_2}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} G_{1,1}^1(\underline{k}; \underline{k}') &= \frac{Z^2}{2m_1\Lambda^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)\widehat{\chi}_\Lambda(k')}{2\pi^2\sqrt{|k||k'|}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \varepsilon_{\lambda'}(k') e^{-iZq^2k.x_1} e^{iZq^2k'.x_1}, \\ G_{1,1}^2(\underline{k}; \underline{k}') &= \frac{Z^4}{2m_2\Lambda^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)\widehat{\chi}_\Lambda(k')}{2\pi^2\sqrt{|k||k'|}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \varepsilon_{\lambda'}(k') e^{-iZq^2k.x_2} e^{iZq^2k'.x_2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

En particulier, pour $m + n = 2$, $G_{m,n}(\underline{k}, \underline{k}')$ est un opérateur borné. Les constantes Λ_0^j apparaissant dans (5.17) sont quant à elles définies par :

$$\Lambda_0^1 = \frac{Z^2}{4\pi^2 m_1 \Lambda^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|} dk, \quad \Lambda_0^2 = \frac{Z^4}{4\pi^2 m_2 \Lambda^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|} dk. \quad (5.21)$$

Dans la mesure où le problème considéré reste le même si l'on ajoute à H_U^V une constante, nous ne tiendrons plus compte de $\Lambda_0^1 + \Lambda_0^2$ dans la suite.

5-2 L'application de Feshbach

Comme dans [BFS98a, BFS98b, BFS99] notamment, nous allons utiliser dans cette section la méthode dite de projection de Feshbach. Notons que cette méthode est également employée en physique théorique, comme par exemple dans [CTDRG01b], où elle est liée à l'introduction d'un opérateur appelé *opérateur de déplacement*. Commençons cette section par une remarque introduisant l'application de Feshbach. Considérons, d'une manière générale, un opérateur auto-adjoint H agissant dans un certain espace de Hilbert \mathcal{H} et s'écrivant sous la forme :

$$H = H^0 + W, \quad (5.22)$$

l'opérateur W étant traité comme une perturbation de l'opérateur auto-adjoint H^0 . Considérant les résolvantes de H et H^0 , on a, formellement, pour $z \in \rho(H) \cap \rho(H^0)$:

$$[H - z]^{-1} = [H^0 - z]^{-1} \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n (W[H^0 - z]^{-1})^n \right). \quad (5.23)$$

Supposons maintenant que l'on souhaite étudier le spectre de H dans une région D contenant une partie du spectre de H^0 . Soient P la projection spectrale associée à H^0 sur $\sigma(H^0) \cap D$ et $\bar{P} := 1 - P$. Alors pour $z \in \sigma(H^0) \cap D$, $(H^0 - z)\bar{P}$ est inversible, mais $(H^0 - z)P$ ne l'est pas ; en particulier (5.23) n'est plus valable. On peut s'attendre en revanche à ce que l'inversibilité de $(H - z)$ sur le sous-espace $P\mathcal{H}$ soit suffisante pour avoir l'inversibilité de $(H - z)$ sur \mathcal{H} tout entier. Plus précisément on peut espérer que :

$$[H - z]^{-1} \text{ existe} \iff P[H - z]^{-1}P \text{ existe}. \quad (5.24)$$

Evidemment, (5.24) n'est vraie que sous certaines conditions bien choisies ; cela suggère toutefois d'étudier l'opérateur $P[H - z]^{-1}P$. On peut ainsi voir que formellement, c'est-à-dire en supposant que tout est bien défini :

$$P[H - z]^{-1}P = \left[P(H - z)P - PHP\bar{P} (\bar{P}(H - z)\bar{P})^{-1} \bar{P}HP \right]^{-1}. \quad (5.25)$$

On est ainsi amené à définir en suivant [BFS98a, BFS98b, BFS99] :

Définition 5.1 Soient H^0 et H deux opérateurs fermés d'un espace de Hilbert \mathcal{H} tels que $D(H^0) = D(H)$. Soit $W := H - H^0$ et soit P une projection telle que $P\mathcal{H} \subset D(H^0)$ et telle que P commute avec H^0 . On pose également $\bar{P} = 1 - P$. On suppose que $\bar{P}HP\bar{P}$ se prolonge à un opérateur inversible sur $\bar{P}\mathcal{H}$ et que les opérateurs :

$$\begin{aligned} (\bar{P}HP\bar{P})^{-1}\bar{P} \quad , \quad PWP\bar{P}(\bar{P}HP\bar{P})^{-1}\bar{P} \quad , \quad (\bar{P}HP\bar{P})^{-1}\bar{P}WP, \\ PWP\bar{P}(\bar{P}HP\bar{P})^{-1}\bar{P}WP \quad , \quad PWP \end{aligned} \quad (5.26)$$

se prolongent à des opérateurs bornés de \mathcal{H} . L'opérateur de Feshbach $\mathcal{F}_P(H)$ associé à P et à H est alors défini par :

$$\mathcal{F}_P(H) := PHP - PHP\bar{P}(\bar{P}HP\bar{P})^{-1}\bar{P}HP. \quad (5.27)$$

Remarquons que l'hypothèse (5.26) combinée avec le fait que PH^0 est fermé sur $P\mathcal{H}$, entraîne que $\mathcal{F}_P(H)$ est un opérateur fermé sur $P\mathcal{H}$. En fait, l'hypothèse $\|PWP\| < \infty$ n'est pas nécessaire pour définir $\mathcal{F}_P(H)$; et on peut également s'en passer dans la proposition qui suit. Mais comme elle permet de montrer que $\mathcal{F}_P(H)$ est un opérateur fermé, et comme on sera en mesure de la vérifier lors de l'utilisation qui nous intéresse, on conserve cette hypothèse. On montre alors que l'application de Feshbach \mathcal{F}_P est *isospectrale* dans le sens suivant :

Proposition 5.1 On conserve les notations de la définition précédente. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{P}(H - z)\bar{P}$ est inversible sur $\bar{P}\mathcal{H}$ et tel que les opérateurs :

$$\begin{aligned} (\bar{P}HP\bar{P} - z)^{-1}\bar{P} \quad , \quad PWP\bar{P}(\bar{P}HP\bar{P} - z)^{-1}\bar{P} \quad , \quad (\bar{P}HP\bar{P} - z)^{-1}\bar{P}WP, \\ PWP\bar{P}(\bar{P}HP\bar{P} - z)^{-1}\bar{P}WP \quad , \quad PWP \end{aligned} \quad (5.28)$$

se prolongent en des opérateurs bornés sur \mathcal{H} . Alors :

1. $\mathcal{F}_P(H - z)$ est inversible sur $P\mathcal{H}$ si et seulement si $H - z$ est inversible sur \mathcal{H} , et dans ce cas $\mathcal{F}_P(H - z)^{-1} = P(H - z)^{-1}P$. De manière équivalente :

$$z \in \sigma(H) \iff 0 \in \sigma(\mathcal{F}_P(H - z)). \quad (5.29)$$

2. Si ψ est un vecteur propre de H associé à la valeur propre z , alors $P\psi$ est un vecteur propre de $\mathcal{F}_P(H - z)$ associé à la valeur propre 0.
3. Réciproquement, si ϕ est un vecteur propre de $\mathcal{F}_P(H - z)$ associé à la valeur propre 0, alors $\left[P - (\overline{P}H\overline{P} - z)^{-1}\overline{P}WP \right] \phi$ est un vecteur propre de H associé à la valeur propre z .
4. Enfin :

$$\dim \text{Ker}(H - z) = \dim \text{Ker}\mathcal{F}_P(H - z). \quad (5.30)$$

Démonstration

Voir [BFS98a] ou [BFS98b]. \square

D'après la proposition 5.1, pour montrer que le spectre de H est vide dans une certaine région D , il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}_P(H - z)$ est inversible pour tout $z \in D$. Ceci peut s'avérer plus simple que l'étude "directe" du spectre de H dans la mesure où $\mathcal{F}_P(H - z)$ opère dans l'espace $P\mathcal{H}$ qui est un sous-espace de \mathcal{H} . Pour cette raison, l'application \mathcal{F}_P est parfois qualifiée de *décimation* des degrés de liberté correspondant à $\overline{P}\mathcal{H}$. Notons enfin que l'application Feshbach est définie pour $H = H^0 + W$ où H^0 est un opérateur fermé mais non nécessairement auto-adjoint. Nous aurons besoin en effet d'appliquer une certaine application Feshbach à $H_V^Y(\theta)$ (définie dans la section 2-5), et bien entendu, pour θ complexe, $H_0(\theta)$ n'est pas auto-adjoint ($H_0(\theta)$ n'est pas même normal pour $\theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

5-3 La condition ($\mathcal{H}_{-1/2}$)

Pour pouvoir appliquer l'application Feshbach à $H_V^Y(\theta)$, nous allons montrer, rapidement, que les opérateurs de couplages $G_{m,n}^j$ vérifient une certaine propriété notée ici ($\mathcal{H}_{-1/2}$). Notons d'ailleurs, pour simplifier et pour $m + n \in \{1, 2\}$:

$$G_{m,n} := \sum_{j=1,2} G_{m,n}^j. \quad (5.31)$$

Rappelons que nous avons défini $G_{m,n}^j(\underline{k}, \underline{k}')$ en (5.18)-(5.20) pour tout $(\underline{k}, \underline{k}') \in \mathbb{R}^6$.

Considérant maintenant l'opérateur de dilatations \mathcal{U}_θ défini en (2.69), on pose sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^6)$, pour tout $(\underline{k}, \underline{k}') \in \mathbb{R}^6$ et tout θ dans un voisinage complexe de 0 :

$$G_{m,n}(\underline{k}, \underline{k}', \theta) := G_{m,n}[\widehat{\chi}_\Lambda](\underline{k}, \underline{k}', \theta) := e^{-2\theta} G_{m,n}[\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} \cdot)](\underline{k}, \underline{k}'). \quad (5.32)$$

Nous supposons ici que l'hypothèse donnant l'analyticité de $\widehat{\chi}_\Lambda$, ($\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2$), est vérifiée. Nous avons de plus souligné la dépendance des opérateurs $G_{m,n}$ en la fonction de troncature ultraviolette $\widehat{\chi}_\Lambda$. Etant donnée l'expression (2.75) de $W_g(\theta)$, on a donc :

$$W_g(\theta) = gW_1(\theta) + g^2W_2(\theta), \quad (5.33)$$

où $W_1(\theta)$ et $W_2(\theta)$ sont les opérateurs W_1 et W_2 où l'on a remplacé $G_{m,n}^j(\underline{k}, \underline{k}')$ par $G_{m,n}^j(\underline{k}, \underline{k}', \theta)$ dans les expressions respectives (5.18)-(5.20) écrites au sens des formes quadratiques. Notons de plus qu'il est facile de voir que, pour $m + n = 1$ et $j \in \{1, 2\}$, $G_{m,n}^j(\underline{k}, \theta)$ se prolonge à un opérateur bien défini sur $Q(p_j)$, et que pour $m + n = 2$, $G_{m,n}(\underline{k}, \underline{k}', \theta)$ se prolonge à un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^6)$.

La propriété $(\mathcal{H}_{-1/2})$ que nous requérons, et qui sera suffisante pour obtenir l'existence de l'opérateur de Feshbach associé à $H_U^V(\theta) - z$, est la suivante :

$$(\mathcal{H}_{-1/2}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une fonction positive } J_{-1/2} \text{ et } \theta_0 > 0 \text{ tels que :} \\ (i) \text{ Pour } m + n = 1 \text{ et } \underline{k} \in \mathbb{R}^3, \theta \mapsto G_{m,n}(\underline{k}; \theta) |H_{part} + i|^{-1/2} \\ \text{est analytique sur } D(0, \theta_0) \text{ et on a :} \\ \sup_{|\theta| \leq \theta_0} \|G_{m,n}(\underline{k}; \theta) |H_{part} + i|^{-1/2}\| \leq J_{-1/2}(k). \\ (ii) \text{ Pour } m + n = 2 \text{ et } (\underline{k}, \underline{k}') \in \mathbb{R}^6, \theta \mapsto G_{m,n}(\underline{k}; \underline{k}'; \theta) \\ \text{est analytique sur } D(0, \theta_0) \text{ et on a :} \\ \sup_{|\theta| \leq \theta_0} \|G_{m,n}(\underline{k}; \underline{k}'; \theta)\| \leq J_{-1/2}(k) J_{-1/2}(k'). \\ (iii) \left[\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |k|^{-1}) J_{-1/2}(k)^2 dk \right]^{1/2} := \Lambda_{-1/2} < \infty. \end{array} \right.$$

Montrons alors que cette propriété est effectivement vérifiée :

Proposition 5.2 *Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ sont satisfaites. Alors la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ est vérifiée, avec :*

$$J_{-1/2}(k) \leq c|k|^{-1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}, \quad (5.34)$$

où c est une constante positive.

Démonstration

L'hypothèse (\mathcal{H}_0) assure que H_{part} est bien défini. Considérant les définitions des opérateurs $G_{m,n}(\underline{k}, \underline{k}', \theta)$ données par (5.18)-(5.20) et (5.32), on peut voir que la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ est vérifiée avec :

$$J_{-1/2}(k) \leq c|k|^{-1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (5.35)$$

La condition $(\mathcal{H}_{-1/2})(i)$ s'obtient notamment en utilisant le fait que pour tout $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$ et tout $j \in \{1, 2\}$:

$$\| \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_j} |H_{part} + i|^{-1/2} \| \leq \text{Cste}. \quad (5.36)$$

Le caractère analytique est de plus immédiat par l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$. \square

5-4 Existence de l'opérateur de Feshbach associé à $H_U^V(\theta)$

Dans tout le reste de ce chapitre, nous supposons que l'hypothèse (\mathcal{H}_{dis}) est satisfaite, c'est-à-dire que le spectre de $P^2/2M + U$ est purement discret. On souhaite montrer que le spectre

de H_U^V est absolument continu dans l'ensemble $\mathcal{E} = [E_0 + e_0, \infty[\setminus \mathcal{V}$, où rappelons-le, \mathcal{V} est un voisinage d'ordre g^2 de $\{E_0 + e_0\} \cup \{e_n\}_{n \geq 0}$. Pour ce faire, par la méthode générale brièvement exposée dans la section 1-3, il suffit de montrer que, pour θ complexe et dans un voisinage de 0, le spectre de $H_U^V(\theta)$ est vide sur $[E_0 + e_0, \infty[\setminus \mathcal{V}$; et pour montrer ce dernier point, nous allons utiliser la méthode de projection de Feshbach décrite dans la section précédente.

5-4.1 Notations et idée de la démonstration

Fixons une valeur propre non perturbée $E_l + e_n$ de H_0 telle que $E_l + e_n \in \mathcal{E}$. Quitte à translater, nous supposons que $E_l + e_n = 0$. Notons par ailleurs que, pour $\theta \in D(0, \theta_0)$ tel que $\text{Im}(\theta) > 0$:

$$\delta_{l,n} := \text{dist}(E_l + e_n, \sigma(H_{part}(\theta)) \cap \mathbb{R} \setminus \{E_l + e_n\}) > 0. \quad (5.37)$$

En effet, vue la figure 2.2, pour $\text{Im}(\theta) > 0$, les seuls points d'accumulation réels de $\sigma(H_{part}(\theta))$ sont situés dans $\{e_n\}_{n \geq 0}$. Donc pour $E_l + e_n \in \mathcal{E}$, (5.37) est vérifiée et $\delta_{l,n}$ ne dépend pas de θ . Renommons pour simplifier $\delta := \delta_{l,n}$ puis définissons pour $\text{Im}(\theta) > 0$:

$$\begin{aligned} \delta_+ &:= \text{dist}(E_l + e_n, \sigma(H_{part}(\theta)) \cap \mathbb{R}_+ \setminus \{E_l + e_n\}), \\ \delta_- &:= \text{dist}(E_l + e_n, \sigma(H_{part}(\theta)) \cap \mathbb{R}_- \setminus \{E_l + e_n\}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Considérons l'intervalle :

$$I_{l,n} := \left[-\frac{2}{3}\delta_-, \frac{2}{3}\delta_+\right]. \quad (5.39)$$

Le choix du coefficient $2/3$ dans (5.39) est une question de commodité. Nous allons en effet montrer que le spectre de H_U^V est absolument continu sur $I_{l,n}$; et comme le raisonnement sera également valable en remplaçant $2/3$ par $1 - O(g^{2-2\varepsilon})$ dans (5.39), pour tout $0 < \varepsilon < 1/3$, nous pourrions bien en déduire que le spectre de H_U^V est absolument continu sur $[E_0 + e_0, \infty[\setminus \mathcal{V}$, l'ensemble \mathcal{V} étant un voisinage d'ordre g^2 de $\{E_0 + e_0\} \cup \{e_n\}_{n \geq 0}$.

Posons maintenant $\theta := i\nu$ avec $\nu > 0$, et définissons, pour $\rho_0 > 0$, l'ensemble $V_{l,n}(\rho_0)$ de la façon suivante (cf. figure 5.2) :

$$V_{l,n}(\rho_0) := \left\{ z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) \in I_{l,n}, |\text{Im}(z)| \leq \frac{1}{2}\rho_0 \sin \nu \right\}. \quad (5.40)$$

On a ainsi :

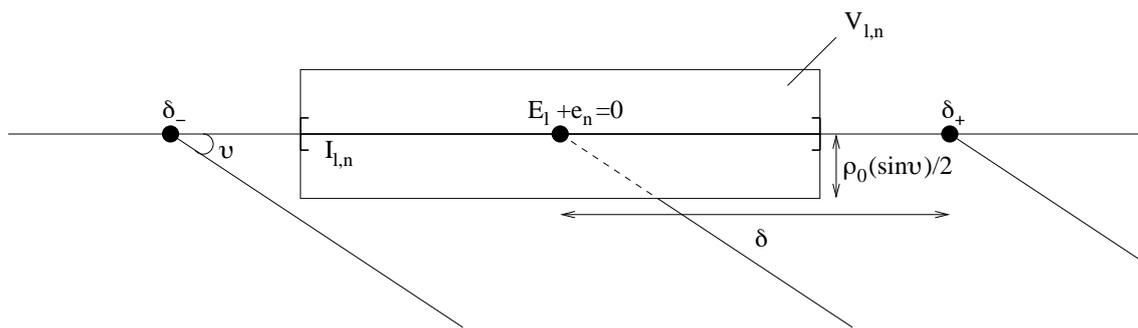
$$\sigma(H_0(\theta)) \cap V_{l,n}(\rho_0) = \{se^{-i\text{Im}\theta}, 0 \leq s \leq \rho_0/2\}. \quad (5.41)$$

Or, puisque $H_0(\theta) = H_{part}(\theta) + e^{-\theta}H_f$, le sous-espace de $Q(H_0(\theta))$ correspondant aux états "d'énergie" dans $\{se^{-i\text{Im}\theta}, 0 \leq s \leq \rho_0/2\}$ est $\tilde{P}_{l,n}(\theta)\mathcal{H}$, où $\tilde{P}_{l,n}(\theta)$ est la projection :

$$\tilde{P}_{l,n}(\theta) := P_{part,l,n}(\theta) \otimes \mathbf{1}_{H_f \leq \rho_0/2}. \quad (5.42)$$

Ici, $\mathbf{1}_{H_f \leq \rho_0/2}$ désigne la projection spectrale relativement à H_f sur les états d'énergie inférieure à $\rho_0/2$; $P_{part,l,n}(\theta)$ est la projection sur le sous-espace propre de $L^2(\mathbb{R}^6)$ associé à la valeur propre $E_l + e_n$ de $H_{part}(\theta)$, définie par :

$$P_{part,l,n}(\theta) := \frac{i}{2\pi} \int_{|z - (E_l + e_n)| = \delta_{l,n}/2} \frac{dz}{H_{part}(\theta) - z}. \quad (5.43)$$


 FIG. 5.2 – L'ensemble $V_{l,n}(\rho_0)$

Choisissons alors la projection :

$$P_{l,n}(\theta) := P_{part,l,n}(\theta) \otimes \mathbf{1}_{H_f < \rho_0}. \quad (5.44)$$

Ainsi, pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, avec $\bar{P}_{l,n}(\theta) := 1 - P_{l,n}(\theta)$, on a :

$$\bar{P}_{l,n}(\theta)(H_0(\theta) - z)\bar{P}_{l,n}(\theta) \text{ est inversible.} \quad (5.45)$$

Ceci étant donné, notre but dans cette section va être de montrer que, pour $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, l'opérateur de Feshbach associé à $H_U^V(\theta)$ et $P_{l,n}(\theta)$, $\mathcal{F}_{P_{l,n}(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$, existe. Puis dans un second temps, qui correspondra à la section 5-5, nous montrerons que $\mathcal{F}_{P_{l,n}(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$ est inversible, cette fois-ci pour $z \in V_{l,n}(\rho_0) \setminus \mathcal{R}_{l,n}$, où $\mathcal{R}_{l,n}$ est un ensemble strictement inclus dans le demi-plan inférieur. Ainsi, par la proposition 5.1, nous pourrions conclure à l'absence de spectre de $H_U^V(\theta)$ dans $I_{l,n}$.

Redéfinissons pour la commodité des écritures :

$$P(\theta) := P_{l,n}(\theta) \quad , \quad \bar{P}(\theta) := 1 - P(\theta). \quad (5.46)$$

Commençons donc par montrer que, pour $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, l'opérateur $\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$ existe, c'est-à-dire que les hypothèses de la définition 5.1 sont vérifiées. La première chose qu'il nous faut montrer est que $\bar{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\bar{P}(\theta)$ est inversible. Posons :

$$H_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} := \bar{P}(\theta)(H_0(\theta) - z)\bar{P}(\theta). \quad (5.47)$$

L'idée de la preuve est d'écrire :

$$\bar{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\bar{P}(\theta) = \left[1 + \bar{P}(\theta)W_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[H_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right] H_{0,z}^{\bar{P}(\theta)}. \quad (5.48)$$

Si $\bar{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\bar{P}(\theta)$ est inversible, en développant en série de Neumann, on obtient :

$$\left[\bar{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\bar{P}(\theta) \right]^{-1} = \left[H_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \sum_{n \geq 0} \left(-\bar{P}(\theta)W_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[H_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right)^n. \quad (5.49)$$

Ainsi, pour prouver que $\bar{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\bar{P}(\theta)$ est inversible, il suffit de montrer que, pour tout $N \geq 0$:

$$\left\| \left[H_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \sum_{n=0}^N \left(\bar{P}(\theta)W_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[H_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right)^n \right\| \leq C_0 c^N, \quad (5.50)$$

où C_0 et c sont des constantes telles que $C_0 > 0$ et $0 < c < 1$. Nous allons prouver ceci à l'aide de quelques lemmes, en suivant [BFS99]. Nous détaillerons généralement les démonstrations dans la mesure où les résultats, ou les estimations, que nous utiliserons, seront souvent différents de ceux de [BFS99]. Par ailleurs, dans un souci de simplification, nous n'écrivons la preuve que pour la partie de $W_g(\theta)$ linéaire en les opérateurs d'annihilation ; on pourrait inclure les autres termes de $W_g(\theta)$ en procédant de façon similaire.

Définissons, pour tout $\tau > 0$:

$$B_\theta(\tau) := H_0(\theta) + e^{-\theta}\tau = H_{part}(\theta) + e^{-\theta}(H_f + \tau). \quad (5.51)$$

Dans la première égalité, définition de $B_\theta(\tau)$, il est sous-entendu que, pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, $D(B_\theta(\tau)) = D(H_0(\theta))$; cela montre de plus que le domaine de forme de $B_\theta(\tau)$ est égal à $Q(H_0)$ (par le lemme 2.13). La seconde égalité est valable, par exemple, sur $D_{H_{part}(\theta)} \otimes D(H_f)$. Nous considérons aussi l'opérateur $\widehat{B}_\theta(\tau)$ correspondant à la représentation dans l'espace des moments et défini par :

$$\widehat{B}_\theta(\tau) := \mathcal{F}B_\theta(\tau)\mathcal{F}^{-1} = H_{part}(\theta) + e^{-\theta}(\widehat{H}_f + \tau). \quad (5.52)$$

L'idée est d'utiliser l'opérateur $B_\theta(\tau)$ afin de montrer (5.50), en écrivant :

$$\left\| \overline{P}(\theta)W_g(\theta)\overline{P}(\theta) \left[H_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| \leq \left\| \overline{P}(\theta)W_g(\theta) |B_\theta(\tau)|^{-1} \right\| \times \left\| |B_\theta(\tau)| \left[H_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| \quad (5.53)$$

On s'attend à ce que le deuxième facteur du membre de droite de (5.53) soit borné par une constante, et que le premier facteur soit petit lorsque g est petit. Comme la preuve est assez longue, nous la divisons en deux sous-sections. Nous allons obtenir une estimation du deuxième facteur de (5.53) dans la proposition 5.5 de la sous-section 5-4.2 ; une estimation du premier facteur du membre de droite de (5.53) est obtenue dans la proposition 5.7 de la sous-section 5-4.3.

5-4.2 Première étape

Commençons par des estimations de l'opérateur dilaté associé aux particules $H_{part}(\theta)$.

Lemme 5.3 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) et (\mathcal{H}_3) sont vérifiées, si bien que $H_{part}(\theta)$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$ par la proposition 2.7. Pour $\theta \in D(0, \theta_0)$, posons $\Delta H_{part}(\theta) := H_{part}(\theta) - H_{part}$ sur $D(H_{part})$ (cet opérateur est bien défini par la proposition 2.8). On a alors :*

$$\left\| \Delta H_{part}(\theta)(H_{part} \pm i)^{-1} \right\| \leq c(\theta), \quad (5.54)$$

où $c(\theta)$ est une constante positive telle que $c(\theta) \rightarrow 0$ quand $\theta \rightarrow 0$.

Démonstration

Soit $\theta \in D(0, \theta_0)$. Notons tout d'abord que $\Delta H_{part}(\theta)(H_{part} \pm i)^{-1}$ est bien défini sur $L^2(\mathbb{R}^6)$ puisque $D(H_{part}) = D(\Delta H_{part}(\theta))$ par définition. On a alors :

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta H_{part}(\theta)(H_{part} \pm i)^{-1} \right\| \\ &= \sup_{\substack{\phi \in Q(H_{part}), \psi \in L^2(\mathbb{R}^6) \\ \|\phi\|, \|\psi\|=1}} \left| (\phi, \Delta H_{part}(\theta)(H_{part} \pm i)^{-1}\psi) \right| \\ &= \sup_{\substack{\phi \in Q(H_{part}), \psi \in L^2(\mathbb{R}^6) \\ \|\phi\|, \|\psi\|=1}} \left| q_{H_{part}(\theta)}(\phi, (H_{part} \pm i)^{-1}\psi) - q_{H_{part}}(\phi, (H_{part} \pm i)^{-1}\psi) \right|. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Mais en utilisant la définition (2.39) de $q_{H_{part}(\theta)}$ et l'hypothèse (\mathcal{H}_3) , on peut montrer :

$$\begin{aligned} & \left| q_{H_{part}(\theta)}(\phi, (H_{part} \pm i)^{-1}\psi) - q_{H_{part}}(\phi, (H_{part} \pm i)^{-1}\psi) \right| \\ & \leq c'(\theta) \left[a \left| q_{H_{part}}(\phi, (H_{part} \pm i)^{-1}\psi) \right| + b \|\phi\| \|(H_{part} \pm i)^{-1}\psi\| \right] \\ & \leq c(\theta) \|\phi\| \|\psi\|, \end{aligned} \quad (5.56)$$

où a, b sont des constantes positives, et où $c'(\theta), c(\theta)$ sont des constantes positives tendant vers 0 quand $\theta \rightarrow 0$. Ainsi le lemme est démontré. \square

De la même façon que pour $P(\theta)$, redéfinissons par commodité :

$$P_{part}(\theta) := P_{part, l, n}(\theta) \quad , \quad \bar{P}_{part}(\theta) := 1 - P_{part}(\theta), \quad (5.57)$$

puis posons $P_{part} = P_{part}(0), \bar{P}_{part} = \bar{P}_{part}(0)$. On a alors :

Lemme 5.4 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_0), (\mathcal{H}_U), (\mathcal{H}_{dis})$ et (\mathcal{H}_3) sont vérifiées. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et $\rho_0 < \delta/3$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de la forme $z = z_0 - \tau e^{-i\nu}$ avec $z_0 \in V_{l, n}(\rho_0)$ et $\tau \geq 0$, l'opérateur $(H_{part}(\theta) - z)\bar{P}_{part}(\theta)$ est inversible et on a :*

$$\left\| [(H_{part}(\theta) - z)\bar{P}_{part}(\theta)]^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\max(\tau, \delta) \sin \nu}, \quad (5.58)$$

où C est une constante positive. Si de plus $z \in \rho(H_{part}(\theta))$, on a :

$$\left\| (H_{part}(\theta) - z)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|z|} + \frac{C}{\max(\tau, \delta) \sin \nu}. \quad (5.59)$$

Démonstration

Nous allons avoir besoin de distinguer les parties du spectre “à gauche” et “à droite” de $E_l + e_n = 0$. Définissons tout d'abord $P_n(\theta)$ la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre e_n de $e^{-2\theta} P^2 / 2M + U(e^\theta \cdot)$, puis notons (en tant qu'opérateurs de $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \simeq L^2(\mathbb{R}^6)$) :

$$P_{\leq}(\theta) := \sum_{n': e_{n'} < 0} 1 \otimes P_{n'}(\theta) + \sum_{\substack{n', n': e_{n'} > 0 \\ E_l + e_{n'} \leq 0}} P_{part, l', n'}(\theta) \quad , \quad \bar{P}_{\leq}(\theta) := 1 - P_{\leq}(\theta). \quad (5.60)$$

On a alors :

$$\overline{P}_{part}(\theta) = \overline{P}_{\leq}(\theta) + P_{<}(\theta), \quad (5.61)$$

où $P_{<}(\theta) := P_{\leq}(\theta) - P_{part}(\theta)$.

Soit $\theta = i\nu \in D(0, \theta_0)$. Commençons donc par estimer $[(H_{part}(\theta) - z)P_{<}(\theta)]^{-1}$: comme z est supposé de la forme $z = z_0 - \tau e^{-i\nu}$ avec $z_0 \in V_{l,n}(\rho_0)$ et $\tau \geq 0$, il est facile de constater que $(H_{part}(\theta) - z)P_{<}(\theta)$ est inversible. De plus, comme par construction le spectre de $H_{part}(\theta)P_{<}(\theta)$ est la partie du spectre de $H_{part}(\theta)$ située “à gauche” de $E_l + e_n = 0$, on peut voir que $H_{part}(\theta)P_{<}(\theta)$ est un opérateur strictement m -sectoriel dont un secteur est :

$$S_{l,n} = \{z = a + e^{-i\nu}\tau, a \leq -\delta_-, \tau \geq 0\}. \quad (5.62)$$

D’après [RS80, Théorème VIII.17], on a donc :

$$\|[(H_{part}(\theta) - z)P_{<}(\theta)]^{-1}\| \leq [\text{dist}(z, S_{l,n})]^{-1} \leq \frac{c_0}{\max(\delta, \tau) \sin \nu}, \quad (5.63)$$

où c_0 est une constante positive.

Passons à l’estimation de $[(H_{part}(\theta) - z)\overline{P}_{\leq}(\theta)]^{-1}$. Vu le choix que nous avons fait de $P_{\leq}(\theta)$, le spectre de $H_{part}(\theta)\overline{P}_{\leq}(\theta)$ n’est autre que la partie du spectre de $H_{part}(\theta)$ située “à droite” de $E_l + e_n = 0$. On en déduit que pour z de la forme $z = z_0 - \tau e^{-i\nu}$, $(H_{part}(\theta) - z)\overline{P}_{\leq}(\theta)$ est inversible. Plutôt que d’utiliser le même argument que pour $[(H_{part}(\theta) - z)P_{<}(\theta)]^{-1}$, nous donnons une autre démonstration, basée sur [BFS99, Lemme 3.8], qui fonctionnerait également dans le cas d’opérateurs de Schrödinger plus compliqués. Posons $\overline{P}_{\leq} := \overline{P}_{\leq}(0)$. Comme $(H_{part} - z)\overline{P}_{\leq}$ est également inversible, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & (H_{part}(\theta) - z)\overline{P}_{\leq}(\theta) \\ &= [(H_{part} - z)\overline{P}_{\leq}] \left[(H_{part}(\theta)\overline{P}_{\leq}(\theta) - H_{part}\overline{P}_{\leq}) ((H_{part} - z)\overline{P}_{\leq})^{-1} \right. \\ & \quad \left. + z(\overline{P}_{\leq} - \overline{P}_{\leq}(\theta)) ((H_{part} - z)\overline{P}_{\leq})^{-1} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Or, en utilisant le théorème spectral, on a :

$$\|[(H_{part} \pm i)((H_{part} - z)\overline{P}_{\leq})^{-1}]\| = \sup_{t \geq \delta} \frac{|t + i|}{|t - z|} \leq \frac{c_1}{\delta}, \quad (5.65)$$

où c_1 est une constante positive. D’autre part, en utilisant le lemme 5.3, on peut montrer :

$$\|[(H_{part}(\theta)\overline{P}_{\leq}(\theta) - H_{part}\overline{P}_{\leq} + z(\overline{P}_{\leq} - \overline{P}_{\leq}(\theta)))(H_{part} \pm i)^{-1}]\| \leq c_2 c(\theta), \quad (5.66)$$

où c_2 est une constante positive et $c(\theta)$ est la constante définie dans (5.54). En insérant alors (5.65) et (5.66) dans (5.64) et en développant en série de Neumann, on en déduit :

$$\|[(H_{part}(\theta) - z)\overline{P}_{\leq}(\theta)]^{-1}\| \leq \left[1 - \frac{c_1 c_2 c(\theta)}{\delta} \right]^{-1} \|[(H_{part} - z)\overline{P}_{\leq}]^{-1}\|, \quad (5.67)$$

pourvu que θ_0 soit suffisamment petit, de telle sorte que $c_1 c_2 c(\theta)/\delta < 1$. Remarquons qu’ici apparaît l’intérêt de la décomposition (5.61), car en considérant \overline{P}_{part} à la place de \overline{P}_{\leq} dans

(5.65), on aurait seulement un majorant de la forme $c_1/\delta \sin \nu$, qui ne serait donc pas suffisant pour pouvoir écrire (5.67). Finalement, en utilisant le théorème spectral, on a :

$$\left\| [(H_{part} - z)\overline{P}_{\leq}]^{-1} \right\| \leq \frac{c_3}{\max(\delta, \tau)}, \quad (5.68)$$

où c_3 est une constante positive. En insérant ceci dans (5.67) puis en ajoutant (5.63), on en déduit (5.58).

Pour prouver (5.59), il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \|(H_{part}(\theta) - z)^{-1}\| &\leq \|(H_{part}(\theta) - z)^{-1}P_{part}(\theta)\| + \|(H_{part}(\theta) - z)^{-1}\overline{P}_{part}(\theta)\| \\ &= \frac{1}{|z|} + \|(H_{part}(\theta) - z)^{-1}\overline{P}_{part}(\theta)\|. \end{aligned} \quad (5.69)$$

On conclut en utilisant (5.58). \square

Nous pouvons maintenant passer à l'estimation du deuxième facteur de (5.53) :

Proposition 5.5 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) et (\mathcal{H}_3) sont vérifiées. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et $\rho_0 < \delta/3$. Pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, on a :*

$$\left\| B_\theta(\rho_0) [(H_0(\theta) - z)\overline{P}(\theta)]^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\delta \sin \nu}, \quad (5.70)$$

où C est une constante positive.

Démonstration

Décomposons $\overline{P}(\theta)$ en deux termes :

$$\overline{P}(\theta) = \overline{P}_{part}(\theta) \otimes I + P_{part}(\theta) \otimes \mathbf{1}_{H_f \geq \rho_0}. \quad (5.71)$$

Commençons par estimer :

$$\left\| B_\theta(\rho_0) [(H_0(\theta) - z)\overline{P}_{part}(\theta) \otimes I]^{-1} \right\|. \quad (5.72)$$

Déjà, le spectre de spectre de $H_0(\theta)\overline{P}_{part}(\theta) \otimes I$ n'est autre que le spectre de $H_0(\theta)$ privé de la demi-droite $E_l + e_n + e^{-i\nu}\mathbb{R}_+$. Ainsi pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, l'opérateur $(H_0(\theta) - z)\overline{P}_{part} \otimes I$ est inversible. On en déduit en utilisant le théorème spectral :

$$\begin{aligned} &\left\| B_\theta(\rho_0) [(H_0(\theta) - z)\overline{P}_{part}(\theta) \otimes I]^{-1} \right\| \\ &= \left\| \overline{P}_{part}(\theta) \otimes I + (e^{-\theta}\rho_0 + z) [(H_0(\theta) - z)\overline{P}_{part}(\theta) \otimes I]^{-1} \right\| \\ &\leq c_0 + (\rho_0 + |z|) \sup_{t \geq 0} \left\| [(H_{part}(\theta) - (z - te^{-i\nu}))\overline{P}_{part}(\theta)]^{-1} \right\|, \end{aligned} \quad (5.73)$$

où c_0 est une constante positive. D'après le lemme 5.4, ceci implique :

$$\left\| B_\theta(\rho_0) [(H_0(\theta) - z)\overline{P}_{part}(\theta) \otimes I]^{-1} \right\| \leq c_0 + C \frac{\rho_0 + |z|}{\delta \sin \nu} \leq \frac{c_1}{\delta \sin \nu}, \quad (5.74)$$

où c_1 est une contante positive. Estimons maintenant le second terme :

$$\left\| B_\theta(\rho_0) [(H_0(\theta) - z)P_{part}(\theta) \otimes \mathbf{1}_{H_f \geq \rho_0}]^{-1} \right\|. \quad (5.75)$$

Le spectre de $H_0(\theta)P_{part}(\theta) \otimes \mathbf{1}_{H_f \geq \rho_0}$ n'est constitué que de la demi-droite $e^{-i\nu}(\rho_0 + \mathbb{R}_+)$. On en déduit que pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, l'opérateur $(H_0(\theta) - z)P_{part}(\theta) \otimes \mathbf{1}_{H_f \geq \rho_0}$ est inversible. Par ailleurs, en utilisant encore le théorème spectral, on a :

$$\begin{aligned} & \left\| B_\theta(\rho_0) [(H_0(\theta) - z)P_{part}(\theta) \otimes \mathbf{1}_{H_f \geq \rho_0}]^{-1} \right\| \\ &= \left\| e^{-\theta}(H_f + \rho_0) [(e^{-\theta}H_f - z)\mathbf{1}_{H_f \geq \rho_0}]^{-1} \right\| \\ &\leq \sup_{t \geq \rho_0} \frac{t + \rho_0}{|e^{-\theta}t - z|} \leq \frac{c_2}{\delta \sin \nu}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

où c_2 est une constante positive. Par, (5.73) et (5.76), la proposition est démontrée. \square

5-4.3 Deuxième étape

Comparons maintenant $B_\theta(\tau)$ avec H_f puis avec H_{part} :

Lemme 5.6 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) et (\mathcal{H}_3) sont vérifiées. Soit $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$, soit $\tau > 0$ et soit $\omega \geq 0$. On a d'une part :*

$$\left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} (H_f + \omega) \right\| \leq \frac{c}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{\omega}{\tau} \right), \quad (5.77)$$

où c est une constante positive, et d'autre part :

$$\left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} (H_{part} \pm i) \right\| \leq \frac{c'}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right), \quad (5.78)$$

où c' est également une constante positive.

Démonstration

Le spectre de $B_\theta(\tau)$ est simplement le spectre de $H_0(\theta)$ où la demi-droite $e^{-i\nu}\mathbb{R}_+$ est remplacée par $e^{-i\nu}(\tau + \mathbb{R}_+)$. En particulier donc, pour tout $\tau > 0$, $B_\theta(\tau)$ est inversible. On écrit alors en utilisant le théorème spectral :

$$\left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} (H_f + \omega) \right\| = \sup_{t \geq 0} (t + \omega) \left\| [H_{part}(\theta) + e^{-\theta}(\tau + t)]^{-1} \right\|. \quad (5.79)$$

Puisqu'on a $e^{-\theta}(\tau + t) \in \rho(H_{part}(\theta))$, par l'estimation (5.59) du lemme 5.4, on a :

$$\begin{aligned} \left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} (H_f + \omega) \right\| &\leq \sup_{t \geq 0} (t + \omega) \left[\frac{1}{\tau + t} + \frac{C}{\max(t + \tau, \delta) \sin \nu} \right] \\ &\leq \frac{c}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{\omega}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (5.80)$$

où c est une constante positive et C est la constante apparaissant dans le lemme 5.4. Pour montrer le second point, on écrit :

$$\left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} (H_{part} \pm i) \right\| = \sup_{t \geq 0} \left\| |H_{part}(\theta) + e^{-\theta}(t + \tau)|^{-1} (H_{part} \pm i) \right\|. \quad (5.81)$$

Or on peut montrer que :

$$\begin{aligned} & |H_{part}(\theta) + e^{-\theta}(t + \tau)|^{-1} (H_{part} \pm i) \\ &= \left[\mathcal{U} + (\pm i - e^{-\theta}(t + \tau)) [H_{part}(\theta) + e^{-\theta}(t + \tau)]^{-1} \right] \\ & \quad \times \left[1 + (H_{part} \pm i)^{-1} \Delta H_{part}(\theta) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

où \mathcal{U} désigne l'isométrie apparaissant dans la décomposition polaire de $B_\theta(\tau)$, c'est-à-dire $B_\theta(\tau) = \mathcal{U} |B_\theta(\tau)|$. Les lemmes 5.3, 5.4 entraînent donc :

$$\begin{aligned} & \left\| |H_{part}(\theta) + e^{-\theta}(t + \tau)|^{-1} (H_{part} \pm i) \right\| \\ & \leq \frac{1}{1 - b(\theta)} \left(1 + (1 + t + \tau) \left[\frac{1}{\tau + t} + \frac{C}{\max(t + \tau, \delta) \sin \nu} \right] \right). \end{aligned} \quad (5.83)$$

En prenant le sup sur $t \geq 0$, on en déduit :

$$\left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} (H_{part} \pm i) \right\| \leq \frac{c'}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right), \quad (5.84)$$

où c' est une constante positive ; le lemme est ainsi démontré. \square

Passons alors à l'estimation de $W_g(\theta)$ relativement à $B_\theta(\rho_0)$ (ou, plus généralement, relativement à $B_\theta(\tau)$ pour tout $\tau > 0$) :

Proposition 5.7 *Soit θ_0 suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\lambda}^2)$ sont vérifiées. Soit $\theta = i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et soit $\tau > 0$. On a :*

$$\left\| W_g(\theta) |B_\theta(\tau)|^{-1} \right\| \leq c \frac{g\tau^{-1/2}}{\delta \sin \nu}, \quad (5.85)$$

où c est une constante positive.

Démonstration

Notons que $(H_f + \omega)^{1/2}$ commute avec $|B_\theta(\tau)|^{-1}$ puisque ces deux opérateurs peuvent être vus comme des fonctions de H_f . Ainsi, le lemme 5.6 implique, pour tous $\tau > 0$ et $\omega \geq 0$:

$$\left\| |H_{part} + i|^{1/2} (H_f + \omega)^{1/2} |B_\theta(\tau)|^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{\omega}{\tau} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right)^{1/2}, \quad (5.86)$$

où C est une constante positive.

Nous ne regardons comme annoncé plus haut que la partie de de $W_g(\theta)$ linéaire en les opérateurs d'annihilation $a(h^i)$ (partie qui correspond donc à la fonction de couplage $G_{0,1}$). En faisant commuter $\widehat{a}_\lambda(k)$ et $B_\theta(\tau)^{-1}$, on peut montrer que, pour tous $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$ normalisés :

$$\begin{aligned} & |(\Phi, W_g(\theta) |B_\theta(\tau)|^{-1} \Psi)| \\ & \leq g \left[\sup_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \left\| G_{0,1}(\underline{k}, \theta) \left| \widehat{B}_\theta(\tau + \omega(k)) \right|^{-1} \left(\widehat{H}_f + \omega(k) \right)^{1/2} \right\|^2 \frac{dk}{\omega(k)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

L'idée est alors d'écrire :

$$\begin{aligned} & \left\| G_{0,1}(\underline{k}, \theta) \left| \widehat{B}_\theta(\tau + \omega(k)) \right|^{-1} \left(\widehat{H}_f + \omega(k) \right)^{1/2} \right\| \\ & \leq \left\| G_{0,1}(\underline{k}, \theta) |H_{part} + i|^{-1/2} \right\| \times \left\| |H_{part} + i|^{1/2} (H_f + \omega(k))^{1/2} |B_\theta(\tau + \omega(k))|^{-1} \right\|. \end{aligned} \quad (5.88)$$

On majore le second facteur du membre de droite de (5.88) à l'aide de (5.86). Quant au premier facteur, pour le majorer, on applique la proposition 5.2 d'après laquelle la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ est vérifiée. On en déduit :

$$\begin{aligned} & \left\| G_{0,1}(\underline{k}, \theta) \left| \widehat{B}_\theta(\tau + \omega(k)) \right|^{-1} \left(\widehat{H}_f + \omega(k) \right)^{1/2} \right\| \\ & \leq \frac{\sqrt{2}C}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right)^{1/2} J_{-1/2}(k), \end{aligned} \quad (5.89)$$

Insérant alors ceci dans (5.90), on obtient :

$$|(\Phi, W_g(\theta) |B_\theta(\tau)|^{-1} \Psi)| \leq g\tau^{-1/2} \frac{C'}{\delta \sin \nu} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\omega(k)} J_{-1/2}(k)^2 dk \right]^{1/2}, \quad (5.90)$$

où C' est une constante positive. Comme d'après la proposition 5.2, l'intégrale apparaissant dans la dernière ligne existe, on peut conclure :

$$|(\Phi, W_g(\theta) B_\theta(\tau)^{-1} \Psi)| \leq c \frac{g\tau^{-1/2}}{\delta \sin \nu}, \quad (5.91)$$

où c est une constante positive. La proposition est donc démontrée. \square

5-4.4 Conclusion

Nous pouvons maintenant établir le principal résultat de cette section, à savoir l'existence de $\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$ pour $z \in V_{l,n}(\rho_0)$.

Théorème 5.8 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\widehat{\chi}_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et $\rho_0 < \delta/3$. On suppose que $g\rho_0^{-1/2}/(\delta \sin \nu)^2$ est suffisamment petit. Alors, pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, l'opérateur*

$\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)$ se prolonge à un opérateur inversible sur $\overline{P}(\theta)\mathcal{H}$ et les opérateurs :

$$\begin{aligned} & [\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)]^{-1} \overline{P}(\theta)W_g(\theta)P(\theta), \\ & P(\theta)W_g(\theta)\overline{P}(\theta) [\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)]^{-1}, \\ & P(\theta)W_g(\theta)\overline{P}(\theta) [\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)]^{-1} \overline{P}(\theta)W_g(\theta)P(\theta), \\ & P(\theta)W_g(\theta)P(\theta) \end{aligned} \quad (5.92)$$

se prolongent à des opérateurs bornés.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que, pour g suffisamment petit, on pourrait montrer, en suivant en particulier la méthode de la proposition 2.8, que :

$$D(H_U^V(\theta)) = D(H_0(\theta)). \quad (5.93)$$

Ensuite, vue la définition de la projection $P(\theta)$, on a bien $P(\theta)\mathcal{H} \subset D(H_0(\theta))$.

Pour montrer que $\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)$ est inversible pour $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, on revient à notre point de départ (5.48)-(5.53). D'après les proposition 5.5 et 5.7, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \overline{P}(\theta)W_g(\theta)\overline{P}(\theta) \left[H_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| & \leq \left\| \overline{P}(\theta)W_g(\theta) |B_\theta(\rho_0)|^{-1} \right\| \times \left\| |B_\theta(\rho_0)| \left[H_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| \\ & \leq \frac{cCg\rho_0^{-1/2}}{(\delta \sin \nu)^2}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Donc, si $g\rho_0^{-1/2}/(\delta \sin \nu)^2$ est suffisamment petit, $\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)$ est bien inversible pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$. De plus, (5.48) permet de développer $[\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)]^{-1}$ en série de Neumann de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & [\overline{P}(\theta)(H_U^V(\theta) - z)\overline{P}(\theta)]^{-1} \\ & = \left(H_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right)^{-1} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\overline{P}(\theta)W_g(\theta)\overline{P}(\theta) \left(H_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right)^{-1} \right)^n. \end{aligned} \quad (5.95)$$

On peut alors montrer de façon similaire que les opérateurs donnés en (5.92) se prolongent à des opérateurs bornés. \square

Vue la définition 5.1 de l'application de Feshbach, on peut montrer que le théorème précédent entraîne :

Corollaire 5.9 Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et $\rho_0 < \delta/3$. On suppose que $g\rho_0^{-1/2}/(\delta \sin \nu)^2$ est suffisamment petit. Alors, pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, l'opérateur de Feshbach $\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$ associé à $(H_U^V(\theta) - z)$ et $P(\theta)$ existe.

5-5 Absolue continuité du spectre autour des valeurs propres non perturbées

Nous avons montré que pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$, pourvu que ρ_0 soit choisi comme dans le corollaire 5.9, l'opérateur $\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$ existe. Ainsi, par la proposition 5.1, on a :

$$\sigma(H_U^V(\theta)) \cap V_{l,n}(\rho_0) = \{z \in V_{l,n}(\rho_0), 0 \in \sigma(\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z))\}. \quad (5.96)$$

Le but de cette section est de montrer que l'ensemble apparaissant dans le membre de droite de (5.96) est situé strictement dans le demi-plan inférieur. Par un raisonnement général utilisant les dilatations complexes (voir section 1-3), ceci impliquera que le spectre de H_U^V est absolument continu dans l'intervalle $I_{l,n}$.

Dans la mesure où la démonstration du principal résultat de cette section est en tout point identique à celle de [BFS99, Lemme 3.16], nous ne donnons pas tous les détails. Commençons par quelques définitions : soient, pour $\theta \in D(0, \theta_0)$, les matrices :

$$Z_{l,n}^{\text{od}}(\theta) := \int_{\mathbb{R}^3} P_{\text{part}}(\theta) G_{0,1}(\underline{k}, \theta) \overline{P}_{\text{part}}(\theta) [H_{\text{part}}(\theta) - (E_l + e_n) + |k| - i0]^{-1} \overline{P}_{\text{part}}(\theta) G_{1,0}(\underline{k}, \theta) P_{\text{part}}(\theta) d\underline{k}, \quad (5.97)$$

$$Z_{l,n}^d(\theta) := \int_{\mathbb{R}^3} P_{\text{part}}(\theta) G_{0,1}(\underline{k}, \theta) P_{\text{part}}(\theta) G_{1,0}(\underline{k}, \theta) P_{\text{part}}(\theta) \frac{d\underline{k}}{|\underline{k}|}, \quad (5.98)$$

$$Z_{l,n}(\theta) := Z_{l,n}^d(\theta) - Z_{l,n}^{\text{od}}(\theta). \quad (5.99)$$

On pose de plus pour simplifier : $Z_{l,n}^{\text{od}} := Z_{l,n}^{\text{od}}(0)$, $Z_{l,n}^d := Z_{l,n}^d(0)$ et $Z_{l,n} := Z_{l,n}(0)$. Soit encore :

$$\Gamma_{l,n} := \min \{ \sigma(\text{Im}(Z_{l,n}^{\text{od}})) \}. \quad (5.100)$$

La partie imaginaire d'une matrice A est ici définie par : $\text{Im}(A) := (A - A^*)/2i$. Comme nous l'avons annoncé à plusieurs reprises, nous aurons besoin dans notre preuve de l'hypothèse suivante, liée à la "règle d'or de Fermi" :

$$(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}) \quad \Gamma_{l,n} > 0.$$

Nous vérifierons en annexe que l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\Gamma_{0,1}})$ (correspondant à la "première" valeur propre $E_0 + e_1$) est effectivement satisfaite dans le cas explicite $U(R) = c_0 R^2 - c_1$ où $c_0 > 0$. Pour simplifier la démonstration, nous allons en fait supposer ici :

$$(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}^s) \quad \Gamma_{l,n} > 0 \text{ est une valeur propre non dégénérée de } \text{Im}(Z_{l,n}^{\text{od}}).$$

Faisant donc l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}^s)$, on note $\phi_{l,n,0}$ le vecteur propre unitaire correspondant à la valeur propre $\Gamma_{l,n}$ de $\text{Im}(Z_{l,n}^{\text{od}})$. On définit alors :

$$\Delta E_{l,n} := \text{Re} [(\phi_{l,n,0}, Z_{l,n} \phi_{l,n,0})]. \quad (5.101)$$

Etant données les constantes positives ε et C , on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{l,n} &:= E_l + e_n + g^2(\Delta E_{l,n} - i\Gamma_{l,n}) - i\mathcal{Q}_{l,n}, \\ \mathcal{R}_{l,n}(\varepsilon, C) &:= \mathcal{S}_{l,n} + e^{-\theta}\mathbb{R}_+ + D(0, Cg^{2+\varepsilon}), \end{aligned} \quad (5.102)$$

où l'ensemble $\mathcal{Q}_{l,n} := \{z \in \mathbb{C} \mid -\mu \leq \arg(z) \leq \mu\}$ (avec $0 < \mu < \pi/2$) est tel que :

$$\{(\phi, Z_{l,n}\phi), \|\phi\| = 1\} \subset \Delta E_{l,n} - i\Gamma_{l,n} - i\mathcal{Q}_{l,n}. \quad (5.103)$$

Notons qu'il existe bien μ strictement compris entre 0 et $\pi/2$ tel que $\mathcal{Q}_{l,n}$ vérifie (5.103) car $(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}^s)$ est supposée vérifiée.

Théorème 5.10 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) , (\mathcal{H}_3) , $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ et $(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}^s)$ sont vérifiées. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1/3$. On pose $\rho_0 := g^{2-2\varepsilon}$ et on suppose que g est suffisamment petit. Alors il existe une constante C positive telle que (voir figure 5.3) :*

$$V_{l,n}(\rho_0) \setminus \mathcal{R}_{l,n}(\varepsilon, C) \subset \rho(H_U^V(\theta)). \quad (5.104)$$

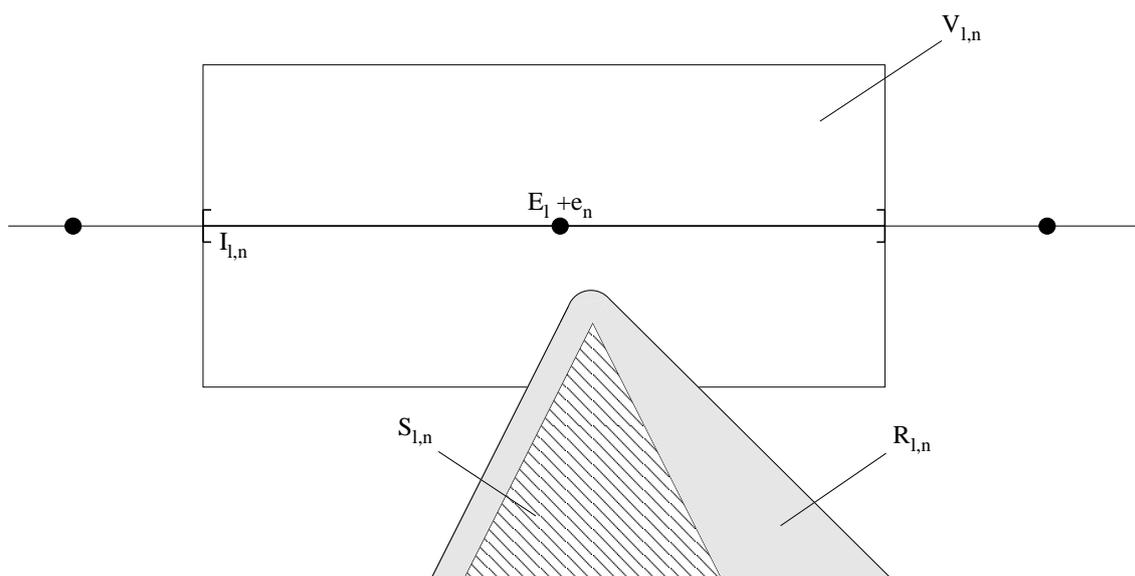


FIG. 5.3 – L'ensemble résolvant de $H_U^V(\theta)$: $V_{l,n}(\rho_0) \setminus \mathcal{R}_{l,n}(\varepsilon, C) \subset \rho(H_U^V(\theta))$

Démonstration

Vu le choix $\rho_0 = g^{2-2\varepsilon}$, on a $g\rho_0^{-1/2} = g^\varepsilon$; donc, quitte à choisir g suffisamment petit, $g\rho_0^{-1/2}/(\delta \sin \nu)^2$ peut être rendu aussi petit qu'on le veut, si bien que $\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$ existe pour tout $z \in V_{l,n}(\rho_0)$ d'après le corollaire 5.9. L'idée est alors de montrer que :

$$\|\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z) - (E_l + e_n - z + g^2 Z_{l,n}(\theta) + e^{-\theta} H_f) P(\theta)\| \leq Cg^{2+\varepsilon}. \quad (5.105)$$

Ceci s'obtient de la même façon que dans [BFS99, Lemme 3.16] : on développe $\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z)$ à partir de son expression donnée dans la définition 5.1, puis on montre que le terme d'ordre g^2 est justement $g^2 Z_{l,n}(\theta)$.

Maintenant, pour tout $\theta \in D(0, \theta_0)$, on peut écrire $Z_{l,n}(\theta) = \mathcal{U}_\theta Z_{l,n} \mathcal{U}_\theta^{-1}$, où \mathcal{U}_θ est l'application (2.69) définie ici pour θ complexe. En particulier, les matrices $Z_{l,n}(\theta)$ et $Z_{l,n}$ sont semblables, si bien que de la même façon que dans (5.103) :

$$\{(\phi, Z_{l,n}(\theta)\phi), \|\phi\| = 1\} \subset \Delta E_{l,n} - i\Gamma_{l,n} - i\mathcal{Q}_{l,n}. \quad (5.106)$$

On en déduit :

$$\sigma((E_l + e_n + g^2 Z_{l,n}(\theta) + e^{-\theta} H_f) P(\theta)) \subset \mathcal{S}_{l,n} + e^{-\theta} \mathbb{R}_+. \quad (5.107)$$

Or, on peut constater que (5.105) implique :

$$\begin{aligned} & \{z \in V_{l,n}(\rho_0), 0 \in \sigma(\mathcal{F}_{P(\theta)}(H_U^V(\theta) - z))\} \\ & \subset \sigma((E_l + e_n + g^2 Z_{l,n}(\theta) + e^{-\theta} H_f) P(\theta)) + D(0, Cg^{2+\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.108)$$

On obtient ainsi le résultat puisque (5.107) et (5.108) entraînent (5.104). \square

Les deux corollaires qui suivent sont des conséquences directes du théorème 5.10. Le premier utilise un résultat classique basé sur les dilatations complexes (voir section 1-3) ; le second est une généralisation du premier, obtenu en considérant la réunion des intervalles $I_{l,n}$ possibles.

Corollaire 5.11 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) , (\mathcal{H}_3) , $(\mathcal{H}_{\hat{\chi}_\Lambda}^2)$ et $(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}})$ sont vérifiées. Soient $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1/3$. On pose $\rho_0 := g^{2-2\varepsilon}$ et on suppose que g est suffisamment petit. Alors le spectre de H_U^V est absolument continu dans l'intervalle $I_{l,n}$.*

Corollaire 5.12 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_{dis}) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\hat{\chi}_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Soit \mathcal{V} un voisinage d'ordre $O(g^2) = O(\alpha^3)$ de l'ensemble $\{E_0 + e_0\} \cup \{e_n\}_{n \geq 0}$; posons :*

$$\mathcal{E} := [E_0 + e_0, \infty[\setminus \mathcal{V}. \quad (5.109)$$

Supposons de plus que pour tout (l, n) tel que $E_l + e_n \in \mathcal{E}$, l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}})$ est vérifiée. Alors pour g suffisamment petit, le spectre de H_U^V est absolument continu dans l'ensemble \mathcal{E} .

Chapitre 6

Application du groupe de renormalisation et existence de résonances

Dans le chapitre précédent, nous avons montré (en supposant que l'hypothèse (\mathcal{H}_{dis}) était vérifiée) que le spectre de H_U^V est absolument continu sur l'intervalle $[E_0 + e_0, \infty[$, sauf peut-être dans un voisinage d'ordre $O(g^2)$ de $(E_0 + e_0) \cup \{e_n\}_{n \geq 0}$. Rappelons-le, $E_0 + e_0$ est l'énergie de l'état fondamental du Hamiltonien non perturbé H_0 , et $\{e_n\}_{n \geq 0}$ est l'ensemble des seuils du Hamiltonien associé à l'électron et au noyau H_{part} . En particulier donc, nous avons prouvé que les valeurs propres non perturbées de la forme $E_l + e_n$ sont instables sous l'effet du couplage entre les particules non relativistes et les photons (en supposant toujours que $E_l + e_n$ se situe en dehors d'un voisinage de $(E_0 + e_0) \cup \{e_n\}_{n \geq 0}$, et pourvu de plus que l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}})$ liée à la règle d'or de Fermi (cf. section 5-5) soit satisfaite).

Dans ce chapitre, nous allons établir plus précisément l'existence de résonances pour un opérateur régularisé \tilde{H}_U^V construit à partir de H_U^V . Comme annoncé dans la section 1-3, nous appelons ici résonance de H une valeur propre $E(\theta)$ du Hamiltonien dilaté $H(\theta)$, située strictement dans le demi-plan inférieur, et telle que $E(\theta)$ est indépendante de θ . Une valeur propre non perturbée E étant donnée, nous montrerons alors l'existence de résonances E^j de \tilde{H}_U^V telles que $E^j \rightarrow E$ lorsque la constante de structure fine α tend vers 0.

Pour obtenir ce résultat, nous nous basons sur une méthode développée dans [BFS98a, BFS98b] et liée à un outil mathématique appelé *groupe de renormalisation*. L'idée est de voir le Hamiltonien associé au problème comme un élément d'un certain espace de Banach et d'observer le comportement de cet élément sous l'effet répété d'une application "renormalisante". Une des principales caractéristiques de celle-ci est de réduire l'ensemble des degrés de libertés du système considéré ; la perte se retrouve toutefois dans l'opérateur obtenu, les "paramètres" qui le définissent comme élément de l'espace de Banach étant "renormalisés". Alors, si l'espace de Banach est bien choisi et si le Hamiltonien possède de bonnes propriétés, on peut espérer que la limite obtenue après un nombre infini d'étapes soit plus simple à analyser que l'opérateur initial.

L'application que nous avons choisie pour "décimer" les degrés de liberté est l'*application de Feshbach lisse* construite dans [BCFS02]. L'une de ses principales caractéristiques est d'être isospectrale, de la même façon que l'application de Feshbach "originale" que nous avons décrit dans la section 5-2. Par rapport à celle-ci, elle apporte de plus des simplifications intéressantes.

Nous réutiliserons d'ailleurs, sans le démontrer, un résultat de [BCFS02] établissant que l'application de renormalisation est contractante dans un espace de Banach adapté. De même, une fois le groupe de renormalisation appliqué, le résultat donnant la forme du spectre de $\tilde{H}_U^V(\theta)$, pour θ convenablement choisi, est démontré dans [BFS98b] et [BCFS02]. Nous le citerons donc sans le détailler. En fait, le problème que nous nous posons, puis que nous établissons dans ce chapitre, est de savoir si l'opérateur $\tilde{H}_U^V(\theta)$ peut être vu comme un bon "point de départ" pour appliquer le groupe de renormalisation. Ce problème est très lié à la définition de $\tilde{H}_U^V(\theta)$, et ne peut en particulier pas se résoudre de la même façon que dans [BFS98b, BCFS02]. Nous aurons besoin d'adapter les conditions requises ; en plus de la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ mentionnée à la section 5-3, nous vérifierons ainsi une nouvelle condition, notée $(\mathcal{H}_{1/2})$, qui s'avérera suffisante pour pouvoir appliquer le groupe de renormalisation.

Notons pour finir cette introduction que la régularisation mentionnée plus haut consiste, dans un premier temps, à appliquer la transformation de Power-Zienau-Wooley décrite dans la section 2-6 à H_U^V , puis, dans un second temps, à restreindre les interactions électron-photons et noyau-photons obtenues. Une restriction semblable est imposée dans [BFS98a] : il s'agit de supposer que l'interaction avec le champ de photons disparaît lorsque l'électron et le noyau sont "très éloignés" l'un de l'autre ; dans la mesure où l'on s'intéresse à des états où l'électron et le noyau sont liés, cette simplification semble physiquement cohérente. Ainsi, on remplacera $A(x_j)$ par $\chi_{r_0}(r)A(x_j)$, où χ_{r_0} est une fonction de troncature dépendant du paramètre arbitrairement choisi r_0 .

6-1 Transformation de Power-Zienau-Wooley

Pour pouvoir appliquer le groupe de renormalisation développé dans [BFS98a, BFS98b] au modèle que l'on étudie, nous allons avoir besoin de supposer que H_U^V vérifie, en plus de la propriété $(\mathcal{H}_{-1/2})$ définie dans la section 5-3, une autre condition notée $(\mathcal{H}_{1/2})$. Cette condition souligne le fait que le comportement infrarouge de l'interaction $A(x)$, qui est de l'ordre de $|k|^{-1/2}$, est trop singulier pour pouvoir appliquer le groupe de renormalisation. Pour résoudre ce problème, on pourrait ainsi choisir d'imposer une régularisation infrarouge à $A(x)$ (par exemple une fonction de troncature). Mais plutôt qu'une telle simplification, nous commençons par faire appel à une transformation de Power-Zienau-Wooley.

Partons du Hamiltonien H_U^V obtenu dans la section 5-1 et adaptons les résultats de la section 2-6 afin de pouvoir appliquer une transformation de Power-Zienau-Wooley convenable. Plus précisément, choisissons la transformation $\tilde{\mathcal{U}}_{PZW}$ définie par

$$\tilde{\mathcal{U}}_{PZW} = \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \tilde{\mathcal{U}}_{PZW}(X) dX \quad \text{où} \quad \tilde{\mathcal{U}}_{PZW}(X) = e^{-i \sum_{j=1,2} q_j Z q^2 x_j \cdot A(0)}. \quad (6.1)$$

De la même façon que dans la section 2-6, on définit alors :

$$\hat{b}_\lambda(k, X) := \mathcal{F} \tilde{\mathcal{U}}_{PZW}(X) \mathcal{F}^{-1} \hat{a}_\lambda(k) \mathcal{F} \tilde{\mathcal{U}}_{PZW}^*(X) \mathcal{F}^{-1} = \hat{a}_\lambda(k) - i w_\lambda(k, X), \quad (6.2)$$

avec maintenant :

$$w_\lambda(k, X) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)}{|k|^{1/2}} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \sum_{j=1,2} q_j Z q^2 x_j. \quad (6.3)$$

On écrit encore le nouvel Hamiltonien \tilde{H}_U^V , unitairement équivalent à H_U^V , sous la forme :

$$\tilde{H}_U^V := \tilde{U}_{PZW} H_U^V \tilde{U}_{PZW}^* = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_j} (p_j - q_j Z q^2 \tilde{A}_j(Z q^2 \cdot))^2 + \tilde{H}_f + U + V, \quad (6.4)$$

avec $\tilde{A}_j = \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \tilde{A}_j(X) dX$, $\tilde{H}_f = \int_{\mathbb{R}^6}^{\oplus} \tilde{H}_f(X) dX$, et

$$\tilde{A}_j(X) = A(x_j) - A(0) \quad , \quad \mathcal{F} \tilde{H}_f(X) \mathcal{F}^{-1} = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k| \hat{b}_\lambda^*(k, X) \hat{b}_\lambda(k, X) dk. \quad (6.5)$$

Développant alors (6.4), on peut réécrire \tilde{H}_U^V sous la forme :

$$\tilde{H}_U^V = \tilde{H}_{part} + H_f + g \tilde{W}_1 + g^2 \tilde{W}_2. \quad (6.6)$$

Le “nouvel” Hamiltonien associé aux particules s’écrit dans ce point de vue :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{part} := & H_{part} + g^2 \frac{Z^2}{\Lambda^3} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)^2}{4\pi^2} (\varepsilon_\lambda(k) \cdot \tilde{r})^2 dk \\ & + 2g^2 \frac{Z^2}{\Lambda^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)^2}{\pi^2 |k|} \left[\frac{1}{2m_1} \sin^2(Z q^2 k \cdot x_1 / 2) + \frac{Z}{2m_2} \sin^2(Z q^2 k \cdot x_2 / 2) \right] dk. \end{aligned} \quad (6.7)$$

En ce qui concerne la partie correspondant à l’interaction, on peut écrire de la même façon que dans (5.16) :

$$\mathcal{F} \tilde{W}_1 \mathcal{F}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\tilde{G}_{1,0}(\underline{k}) \otimes \hat{a}_\lambda^*(k) + \tilde{G}_{0,1}(\underline{k}) \otimes \hat{a}_\lambda(k) \right] dk, \quad (6.8)$$

où les opérateurs $\tilde{G}_{1,0}(\underline{k})$ et $\tilde{G}_{0,1}(\underline{k})$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1,0}(\underline{k}) &= \tilde{G}_{0,1}(\underline{k})^* \\ &= \frac{iZ}{2m_1 \Lambda^{3/2}} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZ q^2 k \cdot x_1} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_1} \\ &\quad - \frac{iZ^2}{2m_2 \Lambda^{3/2}} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZ q^2 k \cdot x_2} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_2} \\ &\quad - \frac{iZ}{\Lambda^{3/2}} \frac{|k|^{1/2} \hat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \tilde{r}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Rappelons que la notation \tilde{r} désigne $\tilde{r} := x_1 - Z x_2$. Par ailleurs, la partie quadratique de l’interaction, \tilde{W}_2 , s’obtient en remplaçant dans l’expression (5.17) de W_2 les opérateurs $G_{m,n}$ par de nouveaux opérateurs $\tilde{G}_{m,n}$ (avec $m + n = 2$). Ceux-ci s’obtiennent à partir de $G_{m,n}$ en remplaçant les termes $e^{\pm iZ q^2 k \cdot x_j}$ par $e^{\pm iZ q^2 k \cdot x_j} - 1$.

Comme dans la section 2-6, on peut montrer que l’opérateur \tilde{H}_U^V est bien défini dans le sens suivant :

Proposition 6.1 *Supposons que (\mathcal{H}_0) est vérifiée. Alors l’opérateur \tilde{H}_U^V défini formellement par (6.4), (6.6) s’identifie à un opérateur auto-adjoint dont le domaine de forme est :*

$$Q(\tilde{H}_U^V) = Q(p_1^2 + p_2^2) \cap Q(U^+) \cap Q(\tilde{r}^2) \cap Q(H_f). \quad (6.10)$$

Démonstration

Voir la preuve de la proposition 2.16 \square

Décrivons le spectre du “nouvel” Hamiltonien non perturbé \tilde{H}_0 défini par :

$$\tilde{H}_0 := \tilde{H}_{part} + H_f. \quad (6.11)$$

Plaçons-nous pour simplifier dans le cas de l’atome d’hydrogène, c’est-à-dire dans le cas $Z = 1$. Le Hamiltonien associé aux particules (6.7) s’écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{part} = & \frac{p^2}{2\mu} + V + C_0 g^2 r^2 + \frac{P^2}{2M} + U \\ & + 2g^2 \frac{1}{\Lambda^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)^2}{\pi^2 |k|} \left[\frac{1}{2m_1} \sin^2(q^2 k \cdot x_1 / 2) + \frac{1}{2m_2} \sin^2(q^2 k \cdot x_2 / 2) \right] dk, \end{aligned} \quad (6.12)$$

C_0 désignant une constante positive. Or puisque $r^2 \rightarrow \infty$ lorsque $|r| \rightarrow \infty$, le spectre de $p^2/2\mu + V + C_0 g^2 r^2$ est purement discret. Plus précisément, comme le paramètre g est supposé petit, on peut voir que les valeurs propres de $p^2/2\mu + V$ sont légèrement déplacées sous l’effet de la perturbation $C_0 g^2 r^2$; on note $(\tilde{E}_l)_{l \geq 0}$ l’ensemble des valeurs propres correspondantes. D’autre part, la demi-droite $[0, \infty[$ de spectre essentiel de $p^2/2\mu + V$ se transforme sous l’effet de la perturbation $C_0 g^2 r^2$ en une suite de valeurs propres que l’on note $(\tilde{E}_l^c(g))_{l \geq 1}$ et qui vérifient

$$\tilde{E}_l^c(g) - \tilde{E}_{l-1}^c(g) \xrightarrow{g \rightarrow 0} 0. \quad (6.13)$$

Ainsi, si l’on suppose que l’hypothèse (\mathcal{H}_{dis}) est vérifiée, on en déduit que le spectre de $p^2/2\mu + V + Cg^2 r^2 + P^2/2M + U$ est également purement discret. Il en est donc de même pour le spectre de \tilde{H}_{part} : ses valeurs propres sont $\tilde{E}_l + e_n$ et $\tilde{E}_l^c + e_n$, légèrement perturbées par le dernier terme apparaissant dans (6.12). Pour ne pas alourdir les notations, on continue à noter $\tilde{E}_l + e_n$ et $\tilde{E}_l^c + e_n$ les valeurs propres de \tilde{H}_{part} (voir figure 6.1).

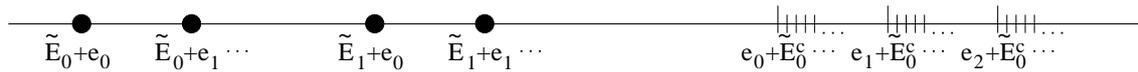


FIG. 6.1 – Spectre du “nouvel” Hamiltonien associé aux particules \tilde{H}_{part} dans le cas $Z = 1$

Notons que dans le cas $Z > 1$, la situation est plus complexe dans la mesure où r est remplacé par $\tilde{r} = x_1 - Zx_2$ dans (6.12). Néanmoins, on peut toujours affirmer d’une part que le spectre de \tilde{H}_{part} est purement discret, et d’autre part que les valeurs propres $E_l + e_n$ de H_{part} sont légèrement déplacées ; de la même façon que dans le cas $Z = 1$, on note $\tilde{E}_l + e_n$ les valeurs propres de \tilde{H}_{part} correspondantes.

Terminons cette partie en donnant une proposition établissant l’analyticité de type (B) de $\tilde{H}_U^V(\theta)$:

Proposition 6.2 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\tilde{\chi}_\Lambda^2})$ sont vérifiées. Alors pour $\theta \in D(0, \theta_0)$ l’opérateur $\tilde{H}_U^V(\theta)$ obtenu par dilatations complexes s’identifie à un opérateur strictement m -sectoriel, et $\theta \mapsto \tilde{H}_U^V(\theta)$ est analytique de type (B) sur $D(0, \theta_0)$.*

Démonstration

Il suffit de suivre ce que nous avons fait pour $H_U^V(\theta)$ dans la section 2-5. \square

6-2 La condition ($\mathcal{H}_{1/2}$)

Comme expliqué dans la section 2-6, le comportement infrarouge du potentiel vecteur d'interaction obtenu une fois la transformation de Power-Zienau-Wooley effectuée, $\tilde{A}(x)$, est “meilleur” que celui de $A(x)$. Regardons par exemple l'opérateur $\tilde{G}_{1,0}$ défini en (6.9) : son comportement infrarouge est de l'ordre de $|k|^{1/2}$ puisque :

$$\left| e^{\pm i Z q^2 k \cdot x_j} - 1 \right| \leq Z q^2 |k| |x_j|. \quad (6.14)$$

Pour contrôler le facteur $|x_j|$ qui apparaît alors, on requiert un certain confinement des particules non-relativistes x_1 et x_2 . Plus précisément, il est facile de voir que chacun des trois termes de (6.9) est relativement borné par rapport à $\left| \tilde{H}_{part} \right|^{1/2}$; de plus, le mouvement du centre de masse R est bien confiné si l'on suppose que l'hypothèse (\mathcal{H}_2) est satisfaite (c'est-à-dire si $U(R) \geq c_0 R^2 - c_1$ avec $c_0 > 0$). Cependant, la variable interne r n'est confinée que par l'intermédiaire du terme d'ordre $O(g^2 \tilde{r}^2)$ apparaissant dans l'expression (6.7) de l'opérateur \tilde{H}_{part} . Ainsi, on a seulement :

$$\left\| \tilde{G}_{1,0}(\underline{k}) \left| \tilde{H}_{part} + i \right|^{-1/2} \right\| = O(g^{-1}) |k|^{1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (6.15)$$

Ceci apparaît comme insuffisant pour pouvoir appliquer le groupe de renormalisation. On demande en effet que la perturbation \tilde{W}_g soit “petite” comparée à \tilde{H}_0 lorsque g est suffisamment petit. Pour contourner cette difficulté, d'une façon semblable à ce qui est fait dans [BFS98a], on considère le modèle simplifié dans lequel une troncature spatiale est imposée à \tilde{W}_g . Autrement dit, on remplace \tilde{W}_g par $\tilde{W}_{g;\text{reg}}$ où :

$$\tilde{W}_{g;\text{reg}} := \chi_{r_0}(r) \tilde{W}_g. \quad (6.16)$$

La fonction χ_{r_0} est choisie sous une forme gaussienne de la même façon que $\hat{\chi}_\Lambda$. En d'autres termes :

$$\chi_{r_0}(r) := e^{-r^2/r_0^2}. \quad (6.17)$$

En particulier, χ_{r_0} est analytique sur \mathbb{C}^3 ; le paramètre r_0 désigne un nombre arbitrairement grand mais fini. Notons d'ailleurs que dans [BFS98a], la troncature spatiale utilisée (qui restreint l'interaction dans *toutes* les directions) est de la forme e^{-x^4/x_0^4} : une puissance 2 dans l'exponentiel n'est pas suffisante. Ceci est toutefois suffisant dans notre cas dans la mesure où l'on dilate à la fois les positions des particules x_j et les positions des photons y . Le Hamiltonien “régularisé” est donc ici défini par :

$$\tilde{H}_{U;\text{reg}}^V := \tilde{H}_0 + \tilde{W}_{g;\text{reg}}. \quad (6.18)$$

Ecrivons maintenant la condition $(\mathcal{H}_{1/2})$ dont nous avons besoin :

$$(\mathcal{H}_{1/2}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une fonction positive } J_{1/2} \text{ et } \theta_0 > 0 \text{ tels que :} \\ (i) \text{ Pour } m+n=1, \text{ et } \underline{k} \in \mathbb{R}^3, \text{ on a :} \\ \quad \sup_{|\theta| \leq \theta_0} \|G_{m,n}(\underline{k}; \theta) |H_{part} + i|^{-1}\| \leq J_{1/2}(k), \\ (ii) \text{ Pour } m+n=2, \text{ et } \underline{k}, \underline{k}' \in \mathbb{R}^3, \text{ on a :} \\ \quad \sup_{|\theta| \leq \theta_0} \|G_{m,n}(\underline{k}; \underline{k}'; \theta) |H_{part} + i|^{-1}\| \leq J_{1/2}(k) J_{1/2}(k'), \\ \quad \sup_{|\theta| \leq \theta_0} \|G_{m,n}(\underline{k}; \underline{k}'; \theta) |H_{part} + i|^{-1/2}\| \leq J_{1/2}(k) J_{-1/2}(k'), \\ \quad \text{où } J_{-1/2} \text{ est définie par la condition } (\mathcal{H}_{-1/2}), \\ (iii) \text{ Il existe } \beta > 0 \text{ tel que } \sup_{k \in \mathbb{R}^3} \left\{ |k|^{\frac{1}{2}(1-\beta)} J_{1/2}(k) \right\} := \Lambda_\beta < \infty. \end{array} \right.$$

En particulier, la condition $(\mathcal{H}_{1/2})(ii)$ présuppose que la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ est satisfaite, et que $G_{m,n}(\underline{k}; \underline{k}'; \theta)$ est symétrique sous l'échange des variables \underline{k} et \underline{k}' .

On a alors :

Proposition 6.3 *Soit θ_0 suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_2) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Alors $\tilde{H}_{U,\text{reg}}^V$ satisfait aux conditions $(\mathcal{H}_{-1/2})$ et $(\mathcal{H}_{1/2})$ (dans lesquelles H_{part} et $G_{m,n}$ sont remplacés respectivement par \tilde{H}_{part} et $\tilde{G}_{m,n,\text{reg}} := \chi_{r_0} \tilde{G}_{m,n}$), avec :*

$$J_{-1/2}(k) := \text{Cste} |k|^{-1/2} e^{-k^2/\Lambda^2} \quad , \quad J_{1/2}(k) := \text{Cste} |k|^{1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (6.19)$$

Démonstration

Ecrivons la preuve pour $\tilde{G}_{1,0,\text{reg}}$, le cas des autres opérateurs $\tilde{G}_{m,n,\text{reg}}$ se traitant de la même façon. Notons que :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1,0,\text{reg}}(\underline{k}; \theta) &= \tilde{G}_{0,1,\text{reg}}(\underline{k}; \bar{\theta})^* \\ &= \chi_{r_0}(e^\theta r) e^{-2\theta} \frac{iZ}{2m_1 \Lambda^{3/2}} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZq^2 k \cdot x_1} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_1} \\ &\quad - \chi_{r_0}(e^\theta r) e^{-2\theta} \frac{iZ^2}{2m_2 \Lambda^{3/2}} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZq^2 k \cdot x_2} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_2} \\ &\quad - \chi_{r_0}(e^\theta r) e^{-2\theta} \frac{iZ}{\Lambda^{3/2}} \frac{|k|^{1/2} \hat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \tilde{r}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Utilisant tout d'abord le fait que $|e^{\pm iZq^2 k \cdot x_j} - 1| \leq 2$, on en déduit :

$$\begin{aligned} &\left\| \chi_{r_0}(e^\theta r) \left[e^{-2\theta} \frac{iZ}{2m_1 \Lambda^{3/2}} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZq^2 k \cdot x_1} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-2\theta} \frac{iZ^2}{2m_2 \Lambda^{3/2}} \frac{\hat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZq^2 k \cdot x_2} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_2} \right] \left| \tilde{H}_{part} + i \right|^{-1/2} \right\| \\ &\leq \text{Cste} |k|^{-1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

D'autre part, en utilisant le fait que $|\chi_{r_0}(e^\theta r)\tilde{r}| \leq \text{Cste}(1+|R|)$ et l'hypothèse (\mathcal{H}_2) , on obtient :

$$\left\| \chi_{r_0}(e^\theta r) e^{-2\theta} \frac{iZ}{\Lambda^{3/2}} \frac{|k|^{1/2} \widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \tilde{r} \left| \widetilde{H}_{part} + i \right|^{-1/2} \right\| \leq \text{Cste} |k|^{-1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (6.22)$$

Ainsi la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ pour \widetilde{H}_U^V est satisfaite, avec :

$$J_{-1/2}(k) = \text{Cste} |k|^{-1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (6.23)$$

Passons maintenant à la condition $(\mathcal{H}_{1/2})$. En utilisant à la fois le fait que $\left| e^{\pm iZq^2 k \cdot x_j} - 1 \right| \leq Zq^2 |k| |x_j|$, l'inégalité $|\chi_{r_0}(e^\theta r)x_j| \leq \text{Cste}(1+|R|)$, et l'hypothèse (\mathcal{H}_2) , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left\| \chi_{r_0}(e^\theta r) \left[e^{-2\theta} \frac{iZ}{2m_1 \Lambda^{3/2}} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZq^2 k \cdot x_1} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - e^{-2\theta} \frac{iZ^2}{2m_2 \Lambda^{3/2}} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi \sqrt{|k|}} \left(e^{-iZq^2 k \cdot x_2} - 1 \right) \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_2} \right] \left| \widetilde{H}_{part} + i \right|^{-1} \right\| \\ & \leq \text{Cste} |k|^{1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Par ailleurs, de la même façon qu'en (6.22), on a :

$$\left\| \chi_{r_0}(e^\theta r) e^{-2\theta} \frac{iZ}{\Lambda^{3/2}} \frac{|k|^{1/2} \widehat{\chi}_\Lambda(e^{-\theta} k)}{2\pi} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \tilde{r} \left| \widetilde{H}_{part} + i \right|^{-1} \right\| \leq \text{Cste} |k|^{1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (6.25)$$

Ainsi la condition $(\mathcal{H}_{1/2})$ pour \widetilde{H}_U^V est satisfaite, avec $\beta = 1$ et :

$$J_{1/2}(k) = \text{Cste} |k|^{1/2} e^{-k^2/\Lambda^2}. \quad (6.26)$$

□

A partir de maintenant, pour alléger les notations, on redéfinit :

$$\widetilde{W}_g := \widetilde{W}_{g;\text{reg}} \quad , \quad \widetilde{H}_U^V := \widetilde{H}_{U;\text{reg}}^V. \quad (6.27)$$

6-3 Un espace de Banach de Hamiltoniens $H(\mathcal{W}_{\geq 0})$

Dans cette section, nous définissons l'espace de Banach dans lequel opérera l'application de renormalisation que nous définirons par la suite. Cet espace de Banach est choisi de telle manière que, pour une certaine valeur propre $\widetilde{E}_l + e_n$, l'opérateur de Feshbach lisse (que nous expliciterons par la suite) associé à $\widetilde{H}_U^V(\theta) - z$ constitue un vecteur initial "convenable" pour pouvoir appliquer le groupe de renormalisation. Plus précisément, d'une part, on souhaite que l'opérateur de Feshbach associé à $\widetilde{H}_U^V(\theta) - z$ soit un élément de notre espace de Banach ; d'autre part, on souhaite que l'application de renormalisation soit contractante.

Nous choisissons ainsi un espace construit de la même façon que dans [BFS98b, BCFS02]. Comme nous ferons appel par la suite à l'application de Feshbach *lisse*, nous considérons l'espace construit dans [BCFS02] plutôt que celui utilisé dans [BFS98b] ; et comme les opérateurs

$\tilde{G}_{m,n}$ sont donnés ici explicitement, cela nous permet de choisir un espace de Banach légèrement plus simple que celui de [BCFS02].

Commençons par définir un premier espace de Banach $\mathcal{W}_{\geq 0}^\#$ par :

$$\mathcal{W}_{\geq 0}^\# := \mathbb{C} \oplus \mathcal{T} \oplus \mathcal{W}_{\geq 1}^\# := \mathbb{C} \oplus \mathcal{T} \oplus \bigoplus_{M+N \geq 1} \mathcal{W}_{M,N}^\# \quad (6.28)$$

où l'on a posé :

$$\mathcal{T} := \left\{ f \in C^1([0, 1]), f(0) = 0, \|f\|_{\mathcal{T}} := \sup_{\gamma \in [0,1]} |f'(\gamma)| < \infty \right\}, \quad (6.29)$$

et, en notant B_1 la boule unité dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{M,N}^\# &:= \{f_{M,N} : [0, 1] \times \underline{B}_1^M \times \underline{B}_1^N \rightarrow \mathbb{C} \text{ telle que :} \\ & * \text{ Pour tout } (\underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}) \in \underline{B}_1^{M+N}, f_{M,N}(\cdot; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}) \in C^1([0, 1]), \\ & * \text{ Pour tout } \gamma \in [0, 1], f_{M,N}(\gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}) \text{ est symétrique} \\ & \quad \text{par rapport à l'échange des variables } \underline{k}^{(M)} \text{ et } \tilde{\underline{k}}^{(N)}, \\ & * \|f_{M,N}\|^\# := \|f_{M,N}\| + \|\partial_\gamma f_{M,N}\| < \infty \}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Dans l'ensemble précédent, $\partial_\gamma f_{M,N}$ désigne la dérivée de $f_{M,N}$ par rapport à la première variable, et la norme $\|f_{M,N}\|$ est définie par :

$$\|f_{M,N}\| := \sup_{[0,1] \times \underline{B}_1^{M+N}} \left| f_{M,N}(\gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}) \right| \prod_{i=1}^M |k_i|^{-1/2} \prod_{j=1}^N |\tilde{k}_j|^{-1/2}. \quad (6.31)$$

Nous avons de plus utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{k}^{(M)} &:= (k_1, \dots, k_M) \in \mathbb{R}^{3M}, \\ \tilde{\underline{k}}^{(N)} &:= (\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_N) \in \mathbb{R}^{3N}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

On définit ensuite l'espace $\mathcal{W}_{\geq 1}^\# := \{\underline{w} := (w_{M,N})_{M+N \geq 1}\}$ muni de la norme :

$$\|\underline{w}\|_{\zeta,1}^\# := \sum_{M+N \geq 1} \zeta^{-(M+N)} \|w_{M,N}\|^\#, \quad (6.33)$$

où $0 < \zeta < 1$ est un certain paramètre que l'on précisera par la suite. On pose de plus :

$$\mathcal{W}_{0,0}^\# := \{f_{0,0} \in C^1([0, 1]), \|f_{0,0}\|^\# := \|f_{0,0}\|_\infty + \|\partial_\gamma f_{0,0}\|_\infty < \infty\}. \quad (6.34)$$

On peut montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Banach entre $\mathbb{C} \oplus \mathcal{T}$ et $\mathcal{W}_{0,0}^\#$; à partir de maintenant, nous identifions donc les deux espaces $\mathbb{C} \oplus \mathcal{T}$ et $\mathcal{W}_{0,0}^\#$. Ainsi, nous pouvons écrire un élément de $\mathcal{W}_{\geq 0}^\#$ sous la forme $\underline{w} := (w_{M,N})_{M+N \geq 0}$, et nous munissons $\mathcal{W}_{\geq 0}^\#$ de la norme :

$$\|\underline{w}\|_\zeta^\# := \sum_{M+N \geq 0} \zeta^{-(M+N)} \|w_{M,N}\|^\#. \quad (6.35)$$

Notre but est d'identifier un élément de $\mathcal{W}_{\geq 0}^\#$ avec un opérateur de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{red} défini par :

$$\mathcal{H}_{\text{red}} := \mathbf{1}_{H_f < 1} \mathcal{F}_s. \quad (6.36)$$

Pour ce faire, on définit une application H telle que pour tout $\underline{w} \in \mathcal{W}_{\geq 0}^\#$:

$$H(\underline{w}) := \sum_{M+N \geq 0} W_{M,N}(\underline{w}) := w_{0,0}[H_f] \mathbf{1}_{H_f < 1} + \sum_{M+N \geq 1} W_{M,N}(\underline{w}), \quad (6.37)$$

où l'on a posé pour $M + N \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} W_{M,N}(\underline{w}) \mathcal{F}^{-1} \\ & := \mathbf{1}_{\hat{H}_f < 1} \int_{\underline{B}_1^{M+N}} \hat{a}^*(\underline{k}^{(M)}) w_{M,N}[\hat{H}_f; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \hat{a}(\tilde{\underline{k}}^{(N)}) d\underline{k}^{(M)} d\tilde{\underline{k}}^{(N)} \mathbf{1}_{\hat{H}_f < 1}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Notons que les opérateurs $w_{0,0}[H_f]$ et $w_{M,N}[\hat{H}_f; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}]$ sont bien définis par le calcul fonctionnel, puisque H_f et \hat{H}_f sont des opérateurs auto-adjoints positifs. Par ailleurs, l'égalité (6.38) est écrite implicitement au sens des formes quadratiques sur $D_S \times D_S$; nous verrons toutefois que $W_{M,N}(\underline{w})$ s'identifie à un opérateur borné de \mathcal{H}_{red} . Enfin nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{a}^*(\underline{k}^{(M)}) & := \prod_{j=1}^M \hat{a}_{\lambda_j}^*(k_j) \quad , \quad \hat{a}(\tilde{\underline{k}}^{(N)}) := \prod_{j=1}^N \hat{a}_{\tilde{\lambda}_j}(\tilde{k}_j), \\ d\underline{k}^{(M)} & := d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_M \quad , \quad d\tilde{\underline{k}}^{(N)} := d\tilde{k}_1 \dots d\tilde{k}_N. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Nous donnons maintenant une proposition dont la démonstration est semblable à celle de [BCFS02, Théorème III.1]; elle permet d'identifier un élément de l'espace de Banach $\mathcal{W}_{\geq 0}^\#$ avec un opérateur de \mathcal{H}_{red} écrit sous la forme (6.37).

Proposition 6.4 *Soit ζ tel que $0 < \zeta < 1$. L'application H définie par (6.37) est un plongement de $\mathcal{W}_{\geq 0}^\#$ dans l'ensemble des opérateurs bornés de \mathcal{H}_{red} noté $\mathcal{B}[\mathcal{H}_{\text{red}}]$. De plus, pour tout $\underline{w} \in \mathcal{W}_{\geq 0}^\#$, on a :*

$$\|H(\underline{w})\|_{\mathcal{H}_{\text{red}}} \leq \|\underline{w}\|_{\zeta}^\#. \quad (6.40)$$

Démonstration

Dans la mesure où nous avons utilisé des normes $\|\cdot\|_\infty$ dans la définition (6.31) de $\|f_{M,N}\|$, à la place des normes $\|\cdot\|_2$ qui sont utilisées dans [BCFS02], la démonstration est légèrement plus simple. L'idée est de montrer que, pour tous $\Phi, \Psi \in D_S$, et tous M, N , on a :

$$|(\Phi, W_{M,N}(\underline{w})\Psi)| \leq \left\| (H_f P_\Omega^\perp)^{M/2} \Phi \right\|_{\mathcal{H}_{\text{red}}} \left\| (H_f P_\Omega^\perp)^{N/2} \Psi \right\|_{\mathcal{H}_{\text{red}}} \|w_{M,N}\|, \quad (6.41)$$

où rappelons-le, P_Ω désigne la projection sur le sous-espace vectoriel engendré par l'état du vide de photons Ω . Ainsi :

$$\left\| (H_f P_\Omega^\perp)^{-M/2} W_{M,N}(\underline{w}) (H_f P_\Omega^\perp)^{-N/2} \right\|_{\mathcal{H}_{\text{red}}} \leq \|w_{M,N}\|. \quad (6.42)$$

De plus il est facile de constater que :

$$\|W_{M,N}(\underline{w})\|_{\mathcal{H}_{\text{red}}} \leq \left\| (H_f P_\Omega^\perp)^{-M/2} W_{M,N}(\underline{w}) (H_f P_\Omega^\perp)^{-N/2} \right\|_{\mathcal{H}_{\text{red}}}. \quad (6.43)$$

Vue la définition (6.35) de $\|\cdot\|_\zeta^\#$, on a donc bien le résultat pour tout ζ tel que $0 < \zeta < 1$. \square

Afin de contrôler la dépendance des opérateurs que l'on va étudier en le paramètre spectral z , on introduit l'espace :

$$\mathcal{W}_{\geq 0} := \left\{ \underline{w}[\cdot] : D_{1/2} \rightarrow \mathcal{W}_{\geq 0}^\#, \underline{w}[\cdot] \text{ est analytique} \right\}, \quad (6.44)$$

où $D_{1/2}$ désigne le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1/2\}$. Cet espace est muni de la norme :

$$\|\underline{w}[\cdot]\|_\zeta := \sup_{z \in D_{1/2}} \|\underline{w}[z]\|_\zeta^\#. \quad (6.45)$$

On introduit de même l'espace de Banach $H(\mathcal{W}_{\geq 0})$ de la façon suivante :

$$H(\mathcal{W}_{\geq 0}) := \left\{ H(\underline{w}[\cdot]) : D_{1/2} \rightarrow H(\mathcal{W}_{\geq 0}^\#), H(\underline{w}[\cdot]) \text{ est analytique} \right\}, \quad (6.46)$$

en le munissant de la norme :

$$\|H(\underline{w}[\cdot])\| := \sup_{z \in D_{1/2}} \|H(\underline{w}[z])\|_{\mathcal{H}_{\text{red}}}. \quad (6.47)$$

C'est dans cet espace de Banach que va agir l'application de renormalisation.

6-4 L'application de Feshbach lisse

Plutôt que l'application Feshbach définie dans la section 5-2, nous allons utiliser une application légèrement différente appelée dans [BCFS02] "application de Feshbach lisse" (smooth Feshbach map). En effet, une difficulté apparaît avec l'utilisation de l'application de Feshbach de la section 5-2, venant du fait que la projection $\mathbf{1}_{H_f \leq \rho}$ n'est pas dérivable "par rapport à H_f ". Or vue la définition (6.29) de l'espace \mathcal{T} , nous serons amené à considérer la dérivée de telles projections. Suivant [BFS98b], on pourrait contourner ce problème et continuer à utiliser l'application de la section 5-2 ; mais dans la mesure où l'application de Feshbach lisse de [BCFS02] apporte des simplifications sensibles, c'est cette dernière que nous allons employer. L'idée est de remplacer $\mathbf{1}_{H_f \leq \rho}$ par $\chi_\rho(H_f)$ où χ_ρ est une fonction régulière. Nous nous contentons ici de donner la définition de l'application de Feshbach lisse et quelques-unes de ses propriétés que nous utiliserons. On pourra trouver de plus amples détails dans [BCFS02], [Che02] et [GH07].

Définition 6.1 Soient H^0 et H deux opérateurs fermés d'un espace de Hilbert \mathcal{H} tels que $D(H^0) = D(H)$. Soit $W := H - H^0$ sur $D(H^0)$. Soient χ et $\bar{\chi}$ deux opérateurs bornés, différents de 0, commutant entre eux, et tels que $\chi^2 + \bar{\chi}^2 = 1$. On suppose que :

- $\chi H^0 \subset H^0 \chi$ et $\bar{\chi} H^0 \subset H^0 \bar{\chi}$,
- H^0 et $H^0 + \bar{\chi} W \bar{\chi}$ sont inversibles avec inverses bornés de $D(H^0) \cap \text{Ran} \bar{\chi}$ dans $\text{Ran} \bar{\chi}$.

c) $\bar{\chi}[H^0 + \bar{\chi}W\bar{\chi}]^{-1}\bar{\chi}W\chi$ est un opérateur borné de $D(H^0)$ dans \mathcal{H} .

L'opérateur de Feshbach lisse $\mathcal{F}_\chi(H, H^0)$ associé à χ et à la "paire de Feshbach" (H, H^0) est alors défini par :

$$\mathcal{F}_\chi(H, H^0) := H^0 + \chi W\chi - \chi W\bar{\chi} [H^0 + \bar{\chi}W\bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}W\chi. \quad (6.48)$$

Remarquons que si $\chi = P$ est une projection, on a :

$$P\mathcal{F}_P(H, H^0)P = \mathcal{F}_P(H), \quad (6.49)$$

où $\mathcal{F}_P(H)$ est l'opérateur de Feshbach défini à la section 5-2. De la même façon que pour $\mathcal{F}_P(H)$, on montre alors que l'application de Feshbach lisse \mathcal{F}_χ est *isospectrale* dans le sens suivant :

Proposition 6.5 *On conserve les notations de la définition précédente. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que les conditions a), b), c) sont satisfaites avec H^0 remplacé par $H^0 - z$. Alors :*

1. $\mathcal{F}_\chi(H - z, H^0 - z)$ est inversible sur $\text{Ran}(\chi)$ si et seulement si $H - z$ est inversible sur \mathcal{H} , et dans ce cas :

$$\mathcal{F}_\chi(H - z, H^0 - z)^{-1} = \chi(H - z)^{-1}\chi + \bar{\chi}(H^0 - z)^{-1}\bar{\chi}. \quad (6.50)$$

De plus, en notant :

$$\begin{aligned} Q_\chi(H, H^0) &:= \chi - \bar{\chi} [H^0 + \bar{\chi}W\bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}W\chi \\ Q_\chi^\#(H, H^0) &:= \chi - \chi W\bar{\chi} [H^0 + \bar{\chi}W\bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}, \end{aligned} \quad (6.51)$$

les opérateurs bornés respectivement sur $D(H^0)$ et \mathcal{H} , on a :

$$\begin{aligned} (H - z)^{-1} &= Q_\chi(H - z, H^0 - z)\mathcal{F}_\chi(H - z, H^0 - z)^{-1}Q_\chi^\#(H - z, H^0 - z) \\ &\quad + \bar{\chi} [H^0 + \bar{\chi}W\bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

2. Si ψ est un vecteur propre de H associé à la valeur propre z , alors $\chi\psi$ est un vecteur propre de $\mathcal{F}_\chi(H - z, H^0 - z)$ associé à la valeur propre 0.
3. Réciproquement, si ϕ est un vecteur propre de $\mathcal{F}_\chi(H - z, H^0 - z)$ associé à la valeur propre 0, alors $Q_\chi(H - z, H^0 - z)\phi$ est un vecteur propre de H associé à la valeur propre z .
4. Enfin :

$$\dim \text{Ker}(H - z) = \dim \text{Ker}\mathcal{F}_\chi(H - z, H^0 - z). \quad (6.53)$$

Démonstration

Voir [BCFS02] et [GH07]. \square

6-5 Existence de l'opérateur de Feshbach lisse associé à $\tilde{H}_U^V(\theta)$

Supposons encore que (\mathcal{H}_{dis}) est vérifiée et fixons dès maintenant une valeur propre non perturbée $\tilde{E}_l + e_n$ telle que $(l, n) \neq (0, 0)$ et $\tilde{E}_l + e_n < e_0$. Quitte à translater, on suppose de plus que $\tilde{E}_l + e_n = 0$.

Bien que l'on utilise dans ce chapitre l'application de Feshbach lisse, la méthode pour obtenir l'existence de l'opérateur de Feshbach associé à la paire de Feshbach $(\tilde{H}_U^V(\theta) - z, \tilde{H}_0(\theta) - z)$ est à peu près la même que celle que nous avons employée dans la section 5-4. Nous écrivons donc uniquement les étapes de la preuve.

Contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre précédent, il n'est pas utile ici de montrer l'existence de l'opérateur de Feshbach pour z situé dans l'ensemble $V_{l,n}$ (défini en (5.40)). Il sera suffisant d'obtenir le résultat pour z dans le disque $D(0, \rho_0/2)$ dans la mesure où la résonance recherchée issue de $\tilde{E}_l + e_n$ sera située dans ce disque.

Commençons par définir les opérateurs χ et $\bar{\chi}$ de la définition (6.1) que nous allons utiliser ici. Pour $\rho_0 > 0$, on définit les opérateurs $\chi_{\rho_0}(H_f)$ et $\bar{\chi}_{\rho_0}(H_f)$ par :

$$\begin{aligned} \chi_{\rho_0}(H_f) &:= \sin \left[\frac{\pi}{2} \Theta(H_f/\rho_0) \right], \\ \bar{\chi}_{\rho_0}(H_f) &:= \sqrt{1 - \chi_{\rho_0}^2(H_f)} = \cos \left[\frac{\pi}{2} \Theta(H_f/\rho_0) \right]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

La fonction $\Theta \in C_0^\infty([0, \infty[; [0, 1])$ est choisie telle que $\Theta = 1$ sur $[0, 3/4[$ et $\Theta = 0$ sur $[1, \infty[$. De la même façon qu'en (5.43), (5.57), notons $\tilde{P}_{part}(\theta)$ la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $\tilde{E}_l + e_n$ de $\tilde{H}_{part}(\theta)$, définie par :

$$\tilde{P}_{part}(\theta) := \frac{i}{2\pi} \int_{|z - (\tilde{E}_l + e_n)| = \delta/2} \frac{dz}{\tilde{H}_{part}(\theta) - z}, \quad \bar{\tilde{P}}_{part}(\theta) := 1 - \tilde{P}_{part}(\theta). \quad (6.55)$$

Ici, $\delta > 0$ désigne la distance de $\tilde{E}_l + e_n$ au reste du spectre de \tilde{H}_{part} . A partir de (6.54) et (6.55), définissons donc :

$$P(\theta) := \tilde{P}_{part}(\theta) \otimes \chi_{\rho_0}(H_f), \quad \bar{P}(\theta) := \tilde{P}_{part}(\theta) \otimes \bar{\chi}_{\rho_0}(H_f) + \bar{\tilde{P}}_{part}(\theta) \otimes \mathbf{1}. \quad (6.56)$$

Notons que (6.56) implique $P(\theta)^2 + \bar{P}(\theta)^2 = 1$.

Posons pour simplifier $D_{\rho_0/2} := D(0, \rho_0/2)$; le théorème qui suit montre que l'opérateur $\mathcal{F}_{P(\theta)}(\tilde{H}_U^V(\theta) - z, \tilde{H}_0(\theta) - z)$ est bien défini pour tout $z \in D_{\rho_0/2}$.

Théorème 6.6 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_2) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et $\rho_0 > 0$ avec $\rho_0 < (\delta \sin \nu)/2 < 1$. On suppose que $g\rho_0^{-1/2}$ est suffisamment petit. Alors, pour tout $z \in D_{\rho_0/2}$, les conditions a), b), c) de la définition 6.1 sont satisfaites avec $H^0 = \tilde{H}_0(\theta) - z$, $H = \tilde{H}_U^V(\theta) - z$, $\chi = P(\theta)$ et $\bar{\chi} = \bar{P}(\theta)$. Ainsi, pour tout $z \in D_{\rho_0/2}$, l'opérateur $\mathcal{F}_{P(\theta)}(\tilde{H}_U^V(\theta) - z, \tilde{H}_0(\theta) - z)$ existe et vérifie les résultats de la proposition 6.5.*

Démonstration

La preuve suit celle du théorème 5.8. L'un des points essentiels est que, par la proposition 6.3, la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ est satisfaite pour \tilde{H}_U^V . En revanche la condition $(\mathcal{H}_{1/2})$ n'est pas nécessaire ici. Décrivons les étapes de la démonstration en les comparant à celles de la démonstration du théorème 5.8.

Tout d'abord, comme dans le théorème 5.8, on pourrait montrer que l'on a ici $D(\tilde{H}_U^V(\theta)) = D(\tilde{H}_0(\theta))$. Ensuite, vues les définitions de $P(\theta)$ et $\bar{P}(\theta)$, on peut constater que la condition a) de la définition 6.1 est bien satisfaite. En utilisant alors le fait que $|z| \leq \rho_0/2 \leq (\delta \sin \nu)/4$, on peut voir que :

$$\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} := \mathbf{1}_{\text{Ran}(\bar{P}(\theta))}(\tilde{H}_0(\theta) - z)\mathbf{1}_{\text{Ran}(\bar{P}(\theta))} \quad (6.57)$$

est inversible sur $D(\tilde{H}_0(\theta)) \cap \text{Ran}(\bar{P}(\theta))$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\text{Ran}(\bar{P}(\theta))} \left[(\tilde{H}_0(\theta) - z) + \bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) \right] \mathbf{1}_{\text{Ran}(\bar{P}(\theta))} \\ &= \left[\mathbf{1} + \bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right] \tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Si l'opérateur précédent est inversible, en développant en série de Neumann, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\text{Ran}(\bar{P}(\theta))} \left[(\tilde{H}_0(\theta) - z) + \bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) \right]^{-1} \mathbf{1}_{\text{Ran}(\bar{P}(\theta))} \\ &= \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \sum_{n \geq 0} \left[-\bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right]^n. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Ainsi, pour prouver que $(\tilde{H}_0(\theta) - z) + \bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta)$ est inversible sur $D(\tilde{H}_0(\theta)) \cap \text{Ran}(\bar{P}(\theta))$, il s'agit de montrer que :

$$\left\| \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \sum_{n=0}^N \left[-\bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right]^n \right\| \leq C_0 c^N, \quad (6.60)$$

où C_0 et c sont des constantes telles que $C_0 > 0$ et $0 < c < 1$. Comme dans la section 5-4, nous nous intéressons seulement à la partie linéaire de $\tilde{W}_g(\theta)$ en les opérateurs d'annihilation pour ne pas alourdir la démonstration. On inclurait les autres termes en procédant de façon similaire. Nous voulons montrer :

$$\left\| \bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| < 1. \quad (6.61)$$

Pour ce faire, on écrit de la même façon qu'en (5.53) :

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| \\ & \leq \left\| \bar{P}(\theta)\tilde{W}_g(\theta)\bar{P}(\theta) |B_\theta(\rho_0)|^{-1} \right\| \times \left\| |B_\theta(\rho_0)| \left[\tilde{H}_{0,z}^{\bar{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| \end{aligned} \quad (6.62)$$

où $B_\theta(\rho_0)$ est ici l'opérateur défini de la même façon qu'en (5.51) par :

$$B_\theta(\rho_0) := \tilde{H}_0(\theta) + e^{-\theta} \rho_0 = \tilde{H}_{part}(\theta) + e^{-\theta} (H_f + \rho_0). \quad (6.63)$$

D'une part, on montre comme dans la proposition 5.5 que :

$$\left\| |B_\theta(\rho_0)| \left[\widetilde{H}_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| \leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu}. \quad (6.64)$$

En particulier, pour obtenir (6.64), on a besoin d'une estimation similaire à celle du lemme 5.3, du type :

$$\left\| \Delta \widetilde{H}_{part}(\theta) (\widetilde{H}_{part} \pm i)^{-1} \right\| \leq \tilde{b}(\theta), \quad (6.65)$$

où $\tilde{b}(\theta)$ est une constante positive tendant vers 0 lorsque $\theta \rightarrow 0$, et où $\Delta \widetilde{H}_{part}(\theta)$ est défini par : $\Delta \widetilde{H}_{part}(\theta) := \widetilde{H}_{part}(\theta) - \widetilde{H}_{part}$.

D'autre part, de la même façon que dans la proposition 5.7, en utilisant le fait que la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ est satisfaite par \widetilde{H}_U^V , on peut montrer que :

$$\left\| \overline{P}(\theta) \widetilde{W}_g(\theta) \overline{P}(\theta) |B_\theta(\rho_0)|^{-1} \right\| \leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu} g \rho_0^{-1/2}. \quad (6.66)$$

En insérant (6.64) et (6.66) dans (6.62), on obtient donc :

$$\left\| \overline{P}(\theta) \widetilde{W}_g(\theta) \overline{P}(\theta) \left[\widetilde{H}_{0,z}^{\overline{P}(\theta)} \right]^{-1} \right\| \leq \frac{\text{Cste}}{(\delta \sin \nu)^2} g \rho_0^{-1/2}. \quad (6.67)$$

Ainsi, pourvu que $g \rho_0^{-1/2}$ soit très petit devant $(\delta \sin \nu)^2$, (6.61) est démontrée si bien que $(\widetilde{H}_0(\theta) - z) + \overline{P}(\theta) \widetilde{W}_g(\theta) \overline{P}(\theta)$ est inversible sur $D(\widetilde{H}_0(\theta)) \cap \text{Ran}(\overline{P}(\theta))$. Le fait que l'opérateur donné dans la condition c) de la définition 6.1 se prolonge à un opérateur borné sur $D(\widetilde{H}_0(\theta))$ s'obtient de façon similaire. \square

6-6 Le point de départ du groupe de renormalisation

Rappelons que nous avons fixé une valeur propre non perturbée $\widetilde{E}_l + e_n$ telle que $(l, n) \neq (0, 0)$ et $\widetilde{E}_l + e_n < e_0$. Nous avons supposé, quitte à translater, que $\widetilde{E}_l + e_n = 0$; pour simplifier, nous supposons de plus que $\widetilde{E}_l + e_n$ est une valeur propre non dégénérée de \widetilde{H}_{part} . Toutefois, une démonstration semblable fonctionnerait également pour dans le cas d'une valeur propre discrète de multiplicité finie quelconque.

A partir du développement en série de Neumann (6.59) valable pour $z \in D_{\rho_0/2}$, nous allons montrer dans cette section que l'opérateur

$$\mathcal{F}_{P(\theta)}(\widetilde{H}_U^V(\theta) - z, \widetilde{H}_0(\theta) - z) \Big|_{\text{Ran}(P(\theta))}, \quad (6.68)$$

s'identifie à un élément de l'espace de Banach $\mathcal{W}_{\geq 0}$. Rappelons d'ailleurs que, par définition, on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{P(\theta)}(\widetilde{H}_U^V(\theta) - z, \widetilde{H}_0(\theta) - z) \\ & := (\widetilde{H}_0(\theta) - z) + P(\theta) \widetilde{W}_g(\theta) P(\theta) \\ & \quad - P(\theta) \widetilde{W}_g(\theta) \overline{P}(\theta) \left[(\widetilde{H}_0(\theta) - z) + \overline{P}(\theta) \widetilde{W}_g(\theta) \overline{P}(\theta) \right]^{-1} \overline{P}(\theta) \widetilde{W}_g(\theta) P(\theta). \end{aligned} \quad (6.69)$$

6-6.1 Définition de la famille d'opérateurs $H_{(0)}[z]$

Notre premier objectif est de construire un opérateur $H_{(0)}[z] \in H(\mathcal{W}_{\geq 0}^\#)$ à partir de l'opérateur de Feshbach donné en (6.68)-(6.69). Le paramètre spectral sera représenté par la lettre z sur $D_{1/2} := D(0, 1/2)$ et par la lettre ξ sur $D_{\rho_0/2} = D(0, \rho_0/2)$; z et ξ sont reliés par une simple homothétie définie plus bas en (6.75). De la même façon que dans [BFS98a], commençons par définir, pour $\xi \in D_{\rho_0/2}$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{eff}}[\xi] &:= e^{i\nu} \mathbf{1}_{H_f < \rho_0} \left\langle \mathcal{F}_{P(\theta)}(\tilde{H}_U^V(\theta) - \xi, \tilde{H}_0(\theta) - \xi) + \xi \right\rangle_{part} \mathbf{1}_{H_f < \rho_0} \\ &= H_f \mathbf{1}_{H_f < \rho_0} + e^{i\nu} \langle \dots \rangle_{part}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

La notation $\langle \dots \rangle_{part}$ est ici une contraction de :

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle_{part} &:= \left\langle P(\theta) \left[\tilde{W}_g(\theta) - \tilde{W}_g(\theta) \bar{P}(\theta) \left[(\tilde{H}_0(\theta) - \xi) + \bar{P}(\theta) \tilde{W}_g(\theta) \bar{P}(\theta) \right]^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \bar{P}(\theta) \tilde{W}_g(\theta) \right] P(\theta) \right\rangle_{part}, \end{aligned} \quad (6.71)$$

où, pour un opérateur A borné sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^6) \otimes \mathcal{F}_s$, l'opérateur $\langle A \rangle_{part}$ agissant dans \mathcal{F}_s est défini comme étant l'opérateur associé à la forme quadratique (bornée) :

$$q_{\langle A \rangle_{part}}(\Phi, \Psi) := (\phi_0(\theta) \otimes \Phi, A\phi_0(\theta) \otimes \Psi). \quad (6.72)$$

Ici, $\phi_0(\theta)$ désigne un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre non dégénérée $\tilde{E}_l + e_n = 0$ de $\tilde{H}_{part}(\theta)$. L'égalité (6.71) a alors un sens puisqu'on peut voir que $\mathcal{F}_{P(\theta)}(\tilde{H}_U^V(\theta) - \xi, \tilde{H}_0(\theta) - \xi) + \xi$ est un opérateur borné de \mathcal{H} .

Observons que $\tilde{H}_{\text{eff}}[\xi]$ est un opérateur agissant dans $\mathbf{1}_{H_f < \rho_0} \mathcal{F}_s$. Afin d'obtenir un opérateur agissant dans $\mathcal{H}_{\text{red}} = \mathbf{1}_{H_f < 1} \mathcal{F}_s$, on dilate les moments des photons grâce à la transformation unitaire \mathcal{U}_{ρ_0} définie par :

$$(\mathcal{F}\mathcal{U}_{\rho_0}\Phi)^{(n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) := \rho_0^{3n} \hat{\Phi}^{(n)}(\rho_0 \underline{k}_1, \dots, \rho_0 \underline{k}_n). \quad (6.73)$$

Par commodité, dans (6.73), nous avons encore utilisé la notation $\rho_0 \underline{k}_i = (\rho_0 k_i, \lambda)$. On pose alors, pour tout $\xi \in D_{\rho_0/2}$:

$$H_{\text{eff}}[\xi] := \frac{1}{\rho_0} \mathcal{U}_{\rho_0} \tilde{H}_{\text{eff}}[\xi] \mathcal{U}_{\rho_0}^* = H_f \mathbf{1}_{H_f < 1} + \frac{e^{i\nu}}{\rho_0} \mathcal{U}_{\rho_0} \langle \dots \rangle_{part} \mathcal{U}_{\rho_0}^*. \quad (6.74)$$

Maintenant, $H_{\text{eff}}[\xi]$ opère comme on le souhaitait dans \mathcal{H}_{red} , mais est défini pour $\xi \in D_{\rho_0/2}$. Afin d'obtenir une famille d'opérateurs $H_{(0)}[z]$ avec $z \in D_{1/2}$, on dilate le paramètre spectral grâce à la transformation :

$$Z_{(0)} : D_{\rho_0/2} \rightarrow D_{1/2} \quad , \quad \xi \mapsto \frac{e^{i\nu}}{\rho_0} \xi. \quad (6.75)$$

Evidemment, $Z_{(0)}$ est une bijection. On obtient ainsi une famille d'opérateurs bornés $H_{(0)}[z]$ agissant dans \mathcal{H}_{red} et définis, pour tout $z \in D_{1/2}$, par :

$$\begin{aligned} H_{(0)}[z] &:= H_{\text{eff}}[Z_{(0)}^{-1}(z)] \\ &= \frac{e^{i\nu}}{\rho_0} \mathbf{1}_{H_f < 1} \mathcal{U}_{\rho_0} \left\langle \mathcal{F}_{P(\theta)}(\tilde{H}_U^V(\theta) - Z_{(0)}^{-1}(z), \tilde{H}_0(\theta) - Z_{(0)}^{-1}(z)) \right\rangle_{\text{part}} \mathcal{U}_{\rho_0}^* \mathbf{1}_{H_f < 1} \\ &\quad + z \mathbf{1}_{H_f < 1}. \end{aligned} \quad (6.76)$$

6-6.2 Caractéristique de $H_{(0)}[\cdot]$ en tant qu'élément de $H(\mathcal{W}_{\geq 0})$

Passons donc au principal résultat de cette section ; il nous permettra par la suite de voir que $H_{(0)}[z]$ est un bon "point de départ" pour pouvoir appliquer le groupe de renormalisation.

Théorème 6.7 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_2) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ et $\rho_0 > 0$ avec $\rho_0 < (\delta \sin \nu)/2 < 1$. Soient enfin $\beta, \varepsilon > 0$.*

On suppose que $g\rho_0^{-1/2}$ est suffisamment petit. Alors, $H_{(0)}[\cdot]$ appartient à $H(\mathcal{W}_{\geq 0})$. Si l'on pose $H_{(0)}[z] := H(\underline{w}_{(0)}[z])$, on a de plus $\underline{w}_{(0)}[\cdot] \in B(\beta, \varepsilon)$, où :

$$\begin{aligned} B(\beta, \varepsilon) &:= \left\{ \underline{w}[\cdot] = (E[\cdot], T[\cdot], (w_{M,N}[\cdot])_{M+N \geq 1}) \in \mathcal{W}_{\geq 0}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{z \in D_{1/2}} \|T[z, \gamma] - \gamma\|_T \leq \beta, \sup_{z \in D_{1/2}} |E[z]| \leq \varepsilon, \sup_{z \in D_{1/2}} \|(w_{M,N}[z])_{M+N \geq 1}\|_\zeta^\# \leq \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Notons que le paramètre $\zeta > 0$ apparaissant dans la définition de $\mathcal{W}_{\geq 0}$ est choisi tel que $\rho_0^{1/2} \leq \zeta < 1$.

Démonstration

La preuve suit celles de [BFS98a, BFS98b, BCFS02] avec certaines modifications dues principalement au caractère confinant du potentiel U . En particulier le fait que la condition $(\mathcal{H}_{1/2})$ est satisfaite pour \tilde{H}_U^V (d'après la proposition 6.3) sera un point essentiel de la démonstration. Nous soulignerons d'ailleurs les éléments qui diffèrent de [BFS98a, BFS98b, BCFS02] et nous contenterons pour le reste de renvoyer à ces références.

Considérons tout d'abord l'opérateur $\tilde{H}_{\text{eff}}[\xi]$, défini en (6.70) pour tout $\xi \in D_{\rho_0/2}$. Nous l'écrivons de la façon suivante :

$$\tilde{H}_{\text{eff}}[\xi] = \mathbf{1}_{H_f < \rho_0} \left[\tilde{E}_{\text{eff}}[\xi] + \tilde{T}_{\text{eff}}[\xi; H_f] + \tilde{W}_{\text{eff}}[\xi; H_f] \right] \mathbf{1}_{H_f < \rho_0}, \quad (6.78)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\text{eff}}[\xi] &:= \tilde{w}_{0,0}^{\text{eff}}[\xi, 0], \\ \tilde{T}_{\text{eff}}[\xi; H_f] &:= H_f + \tilde{w}_{0,0}^{\text{eff}}[\xi; H_f] - \tilde{w}_{0,0}^{\text{eff}}[\xi, 0], \\ \tilde{W}_{\text{eff}}[\xi; H_f] &:= \sum_{M+N \geq 1} \tilde{W}_{M,N}^{\text{eff}}[\xi; H_f]. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Pour tout $M + N \geq 1$, nous avons posé :

$$\widetilde{W}_{M,N}^{\text{eff}}[\xi; H_f] := \mathcal{F}^{-1} \int_{\mathbb{R}^{3(M+N)}} \widehat{a}^*(\underline{k}^{(M)}) \widetilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}[\xi; \widehat{H}_f; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \widehat{a}(\tilde{\underline{k}}^{(N)}) d\underline{k}^{(M)} d\tilde{\underline{k}}^{(N)} \mathcal{F}. \quad (6.80)$$

Rappelons que l'opérateur \widehat{H}_f est défini par $\widehat{H}_f = \mathcal{F} H_f \mathcal{F}^{-1}$. En utilisant alors une *Pull-Through formula* (c'est-à-dire en faisant commuter $\widehat{a}^\#(\underline{k})$ avec des fonctions de H_f) combinée avec un *théorème de réarrangement de Wick* et (6.59), on pourrait montrer que (cf.[BFS98b]) :

$$\begin{aligned} & \widetilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}[\xi; \gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \\ &= e^{i\nu} \sum_{L=1}^{\infty} (-1)^{L-1} \sum_{\substack{m_l+n_l+p_l+q_l=1,2 \\ l=1,\dots,L}} \delta_{M,\sum_{l=1}^M m_l} \delta_{N,\sum_{l=1}^N n_l} \prod_{l=1}^L \binom{m_l+p_l}{p_l} \binom{n_l+q_l}{q_l} \\ & \quad \left\{ \widetilde{D}_L \left[\xi; \widehat{H}_f; \left\{ W_{p_l,q_l}^{m_l,n_l}; \underline{k}_l^{(m_l)}; \tilde{\underline{k}}_l^{(n_l)} \right\}_{l=1}^L; \left\{ R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f; \theta] \right\}_{l=1}^{L-1} \right] \right\}_{M,N}^{\text{symm}}, \end{aligned} \quad (6.81)$$

où $\left\{ f \left[\underline{k}^{(m)}; \tilde{\underline{k}}^{(n)} \right] \right\}_{m,n}^{\text{symm}}$ est la symétrisation de f par rapport aux variables $\underline{k}^{(m)}$ et $\tilde{\underline{k}}^{(n)}$:

$$\left\{ f \left[\underline{k}^{(m)}; \tilde{\underline{k}}^{(n)} \right] \right\}_{m,n}^{\text{symm}} := \frac{1}{m!n!} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tilde{\pi} \in S_n} f \left[\underline{k}_{\pi(1)}, \dots, \underline{k}_{\pi(m)}; \tilde{\underline{k}}_{\tilde{\pi}(1)}, \dots, \tilde{\underline{k}}_{\tilde{\pi}(n)} \right], \quad (6.82)$$

et où :

$$\begin{aligned} & \widetilde{D}_L \left[\xi; \gamma; \left\{ W_{p_l,q_l}^{m_l,n_l}; \underline{k}_l^{(m_l)}; \tilde{\underline{k}}_l^{(n_l)} \right\}_{l=1}^L; \left\{ R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f; \theta] \right\}_{l=1}^{L-1} \right] \\ &:= \prod_{l=1}^L (-g)^{m_l+n_l+p_l+q_l} \chi_{\rho_0}(\gamma + \tau_0) \left(\phi_0(\theta) \otimes \Omega, W_{p_1,q_1}^{m_1,n_1}[\underline{k}_1^{(m_1)}; \tilde{\underline{k}}_1^{(n_1)}] \right. \\ & \quad \left. R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f + \gamma + \tau_1; \theta] W_{p_2,q_2}^{m_2,n_2}[\underline{k}_2^{(m_2)}; \tilde{\underline{k}}_2^{(n_2)}] \dots \right. \\ & \quad \left. R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f + \gamma + \tau_{L-1}; \theta] W_{p_L,q_L}^{m_L,n_L}[\underline{k}_L^{(m_L)}; \tilde{\underline{k}}_L^{(n_L)}] \phi_0(\theta) \otimes \Omega \right) \chi_{\rho_0}(\gamma + \tau_L). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Dans la dernière égalité, nous avons utilisé les notations :

$$\begin{aligned} R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f; \theta] &:= \mathcal{F} \overline{P}(\theta) \left[\widetilde{H}_{0,\xi}^{\overline{P}}(\theta) \right]^{-1} \overline{P}(\theta) \mathcal{F}^{-1} \\ &= \mathcal{F} \overline{P}(\theta) \left[\mathbf{1}_{\text{Ran}(\overline{P}(\theta))} (\widetilde{H}_0(\theta) - \xi) \mathbf{1}_{\text{Ran}(\overline{P}(\theta))} \right]^{-1} \overline{P}(\theta) \mathcal{F}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

et :

$$\begin{aligned} & W_{p_l,q_l}^{m_l,n_l}[\underline{k}_l^{(m_l)}; \tilde{\underline{k}}_l^{(n_l)}] := \\ & \int_{\mathbb{R}^{3(p_l+q_l)}} \widetilde{G}_{m_l+p_l,n_l+q_l} \left[\underline{k}_l^{(m_l)}, \underline{y}_l^{(p_l)}; \tilde{\underline{k}}_l^{(n_l)}, \tilde{\underline{y}}_l^{(q_l)}; \theta \right] \otimes \widehat{a}^*(\underline{y}_l^{(p_l)}) \widehat{a}(\tilde{\underline{y}}_l^{(q_l)}) d\underline{y}_l^{(p_l)} d\tilde{\underline{y}}_l^{(q_l)}. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Nous avons posé par ailleurs :

$$\tau_l := \sum_{j=1}^l |\tilde{k}_j^{(n_j)}| + \sum_{j=l+1}^L |k_j^{(m_j)}| := \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} |\tilde{k}_j^i| + \sum_{j=l+1}^L \sum_{i=1}^{m_j} |k_j^i|. \quad (6.86)$$

Nous passons maintenant à un point essentiel qui va nous permettre par la suite d'estimer $\tilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}$; nous lui consacrons un lemme en regardant seulement, pour alléger la preuve, les termes de $W_{p,q}^{m,n}[\underline{k}^{(m)}; \tilde{\underline{k}}^{(n)}]$ ne contenant pas d'opérateurs de création, c'est-à-dire que l'on suppose $p = 0$. On pourrait inclure les termes pour $p = 1$ et $p = 2$ de façon similaire.

Lemme 6.8 *Supposons que les conditions $(\mathcal{H}_{-1/2})$ et $(\mathcal{H}_{1/2})$ sont satisfaites par \tilde{H}_U^V pour un certain $\theta_0 > 0$. Soient $\underline{k}^{(m)} \in \mathbb{R}^{3m}$ et $\tilde{\underline{k}}^{(n)} \in \mathbb{R}^{3n}$. Soient $\omega > 0$ et $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p = 0$ et $1 \leq m + n + q \leq 2$. Soit enfin $0 < \rho_0 < 1$. Alors pour tout $\theta = i\nu \in D(0, \theta_0)$ tel que $\nu > 0$, on a :*

$$\left\| W_{p,q}^{m,n}[\underline{k}^{(m)}; \tilde{\underline{k}}^{(n)}] \left[\hat{B}_\theta(\rho_0 + \omega) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{C}{\delta \sin \nu} \rho_0^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta_{p+q,0}} \prod_{j=1}^m J_{1/2}(k_j) \prod_{j=1}^n J_{1/2}(\tilde{k}_j), \quad (6.87)$$

où C est une constante positive, et où $\hat{B}_\theta(\rho_0) := \mathcal{F}B_\theta(\rho_0)\mathcal{F}^{-1}$, l'opérateur $B_\theta(\rho_0)$ étant défini en (6.63).

Démonstration

Notons les estimations suivantes, que l'on obtiendrait de la même façon que dans le lemme 5.6 :

$$\left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} (H_f + \omega) \right\| \leq \frac{c}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{\omega}{\tau} \right), \quad (6.88)$$

$$\left\| |B_\theta(\tau)|^{-1} \left(\tilde{H}_{part} + i \right) \right\| \leq \frac{c'}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right), \quad (6.89)$$

pour tous $\tau > 0$ et $\omega \geq 0$, où c et c' sont des constantes positives.

Notons $i := m + n$, $j := p + q$, et considérons chacun des couples (i, j) tels que $i, j \in \{0, 1, 2\}$ et $i + j \in \{1, 2\}$. Tout d'abord, si $i = 0$ et $j \in \{1, 2\}$, en utilisant le fait que la condition $(\mathcal{H}_{-1/2})$ est satisfaite par \tilde{H}_U^V , on peut montrer, de la même façon qu'en (6.66), que :

$$\left\| W_{p,q}^{0,0} \left[\hat{B}_\theta(\rho_0 + \omega) \right]^{-1} \right\| \leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu} \rho_0^{-1/2}. \quad (6.90)$$

Supposons maintenant que $i \in \{1, 2\}$ et $j = 0$. En utilisant (6.89) et le fait que la condition $(\mathcal{H}_{1/2})$ est satisfaite par \tilde{H}_U^V , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left\| W_{0,0}^{m,n}[\underline{k}^{(m)}; \tilde{\underline{k}}^{(n)}] \left[\hat{B}_\theta(\rho_0 + \omega) \right]^{-1} \right\| \\ & \leq \left\| \tilde{G}_{m,n}[\underline{k}^{(m)}; \tilde{\underline{k}}^{(n)}; \theta] \left[\tilde{H}_{part} + i \right]^{-1} \right\| \times \left\| \left[\tilde{H}_{part} + i \right] \left[\hat{B}_\theta(\rho_0 + \omega) \right]^{-1} \right\| \\ & \leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu} \rho_0^{-1} \times \prod_{j=1}^m J_{1/2}(k_j) \prod_{j=1}^n J_{1/2}(\tilde{k}_j). \end{aligned} \quad (6.91)$$

Envisageons enfin le cas $i = 1$ et $j = 1$. Supposons par exemple que $m = q = 1$ et $n = p = 0$. On calcule (toujours en notant $\underline{k} = (k, \lambda)$ et $\underline{\tilde{y}} = (\tilde{y}, \tilde{\mu})$) :

$$\begin{aligned}
 & \left\| W_{0,1}^{1,0}[\underline{k}^{(m)}] \left[\widehat{B}_\theta(\rho_0 + \omega) \right]^{-1} \right\| \\
 &= \left\| \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{G}_{1,1}[\underline{k}; \underline{\tilde{y}}; \theta] \otimes \widehat{a}(\underline{\tilde{y}}) d\underline{\tilde{y}} \left[\widehat{B}_\theta(\rho_0 + \omega) \right]^{-1} \right\| \\
 &\leq \left[\sup_{\tilde{\mu}=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\tilde{y}|} \left\| \widetilde{G}_{1,1}[\underline{k}; \underline{\tilde{y}}; \theta] \left[\widehat{B}_\theta(\rho_0 + \omega + |\tilde{y}|) \right]^{-1} \left(\widehat{H}_f + |\tilde{y}| \right)^{1/2} \right\|^2 d\underline{\tilde{y}} \right]^{1/2} \quad (6.92) \\
 &\quad \times \sup_{\|\Psi\|=1} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{y}| \left\| \left(\widehat{H}_f + |\tilde{y}| \right)^{-1/2} \widehat{a}(\underline{\tilde{y}}) \Psi \right\|^2 d\underline{\tilde{y}} \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

On montrerait que le terme apparaissant à la dernière ligne de (6.92) est plus petit que 1. En ce qui concerne le terme de l'avant dernière ligne, en utilisant (6.88), (6.89) et le fait que les deux conditions $(\mathcal{H}_{-1/2})$, $(\mathcal{H}_{1/2})$ sont satisfaites par \widetilde{H}_U^V , on peut calculer :

$$\begin{aligned}
 & \left\| \widetilde{G}_{1,1}[\underline{k}; \underline{\tilde{y}}; \theta] \left[\widehat{B}_\theta(\rho_0 + \omega + |\tilde{y}|) \right]^{-1} \left(\widehat{H}_f + |\tilde{y}| \right)^{1/2} \right\| \\
 &\leq \left\| \widetilde{G}_{1,1}[\underline{k}; \underline{\tilde{y}}; \theta] |\widetilde{H}_{part} + i|^{-1/2} \right\| \\
 &\quad \times \left\| |\widetilde{H}_{part} + i|^{1/2} \left[\widehat{B}_\theta(\rho_0 + \omega + |\tilde{y}|) \right]^{-1} \left(\widehat{H}_f + |\tilde{y}| \right)^{1/2} \right\| \quad (6.93) \\
 &\leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{1}{\rho_0} \right)^{1/2} J_{1/2}(k) J_{-1/2}(\tilde{y}).
 \end{aligned}$$

En l'insérant dans (6.92), ceci implique :

$$\begin{aligned}
 & \left\| W_{0,1}^{1,0}[\underline{k}^{(m)}] \left[\widehat{B}_\theta(\rho_0 + \omega) \right]^{-1} \right\| \\
 &\leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu} \left(1 + \frac{1}{\rho_0} \right)^{1/2} J_{1/2}(k) \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\tilde{y}|} J_{-1/2}(\tilde{y})^2 d\underline{\tilde{y}} \right]^{1/2} \quad (6.94) \\
 &= \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu} \Lambda_{-1/2} \rho_0^{-1/2} J_{1/2}(k).
 \end{aligned}$$

Finalement, d'après (6.90), (6.91) et (6.94), le lemme est démontré. \square

Retour à la preuve du théorème 6.7

Pour finir la preuve du théorème 6.7, à l'aide du lemme 6.8, il suffit de suivre [BFS98b]. D'ailleurs, quelques simplifications dues à l'utilisation de l'application de Feshbach lisse apparaissent. Précisons. Tout d'abord, en utilisant l'identité $\widehat{B}_\theta(\rho_0) \phi_0(\theta) \otimes \Omega = \rho_0 \phi_0(\theta) \otimes \Omega$, le lemme 6.8 et l'estimation obtenue de la même façon qu'en (6.64) :

$$\left\| \widehat{B}_\theta(\rho_0) R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f + \gamma + \mu_i; \theta] \right\| \leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu}, \quad (6.95)$$

on peut montrer (voir [BFS98b, Lemme 3.7]) :

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{D}_L \left[\xi; \gamma; \left\{ W_{p_l, q_l}^{m_l, n_l}; \underline{k}_l^{(m_l)}; \tilde{\underline{k}}_l^{(n_l)} \right\}_{l=1}^L; \left\{ R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f; \theta] \right\}_{l=1}^{L-1} \right] \right| \\ & \leq \prod_{l=1}^L (C_1 g \rho_0^{-1/2})^{m_l + n_l + p_l + q_l} \rho_0^{1 - \frac{1}{2}(M+N)} C_2^{M+N} \prod_{j=1}^M J_{1/2}(k_j) \prod_{j=1}^N J_{1/2}(\tilde{k}_j). \end{aligned} \quad (6.96)$$

Ici pour simplifier l'écriture, nous n'avons pas explicité la dépendance de la constante positive C_1 en δ , ν et Λ . De même C_2 désigne une constante positive dépendant de Λ .

Ensuite, en insérant (6.96) dans (6.81), on montrerait que :

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}[\xi; \gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \right| \\ & \leq \rho_0^{1 - \frac{1}{2}(M+N)} (C_3 g \rho_0^{-1/2})^{M+N+2\delta_{M+N,0}} \prod_{j=1}^M J_{1/2}(k_j) \prod_{j=1}^N J_{1/2}(\tilde{k}_j), \end{aligned} \quad (6.97)$$

où C_3 est encore une constante positive dépendant de δ , ν et Λ .

Maintenant, dans la mesure où l'on aimerait montrer que $H_{(0)}[\cdot] \in H(W_{\geq 0})$, vue la définition de l'espace de Banach $W_{\geq 0}$, il nous faut considérer la dérivée de $\tilde{D}_L[\dots]$ par rapport à γ . Remarquons alors que l'on a :

$$\begin{aligned} \overline{R}_0[\widehat{H}_f; \theta] &= \left[\overline{P}_{part}(\theta) \tilde{H}_{part}(\theta) \otimes \mathbf{1} + e^{-i\nu} \overline{P}_{part}(\theta) \otimes (\widehat{H}_f - \xi) \right]^{-1} \\ &+ P_{part}(\theta) \overline{\chi}_{\rho_0}(\widehat{H}_f)^2 \left[e^{-i\nu} \widehat{H}_f - \xi \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.98)$$

ce qui implique :

$$\partial_\gamma \overline{R}_0[\gamma; \theta] = -e^{-i\nu} \overline{R}_0[\gamma; \theta]^2 + \frac{2\overline{\chi}_{\rho_0}(\gamma) \partial_\gamma \overline{\chi}_{\rho_0}(\gamma)}{e^{-i\nu} \gamma - \xi} P_{part}(\theta). \quad (6.99)$$

Observons ici l'intérêt de l'application de Feshbach lisse sans laquelle les fonctions $\overline{\chi}_{\rho_0}$ ne seraient pas dérivables. De plus, d'une façon similaire encore à ce que nous avons fait pour obtenir (6.64), on pourrait montrer que :

$$\left\| \widehat{B}_\theta(\rho_0) R_0^{\overline{P}}[\widehat{H}_f + \gamma + \mu_l; \theta]^2 \right\| \leq \frac{\text{Cste}}{\delta \sin \nu} \rho_0^{-1}. \quad (6.100)$$

En utilisant ceci, on montrerait que la formule de Leibniz pour les dérivées entraîne :

$$\begin{aligned} & \left| \partial_\gamma \tilde{D}_L \left[\xi; \gamma; \left\{ W_{p_l, q_l}^{m_l, n_l}; \underline{k}_l^{(m_l)}; \tilde{\underline{k}}_l^{(n_l)} \right\}_{l=1}^L; \left\{ R_0^{\overline{P}}[H_f; \theta] \right\}_{l=1}^{L-1} \right] \right| \\ & \leq \prod_{l=1}^L (C_1 g \rho_0^{-1/2})^{m_l + n_l + p_l + q_l} \rho_0^{-\frac{1}{2}(M+N)} C_2^{M+N} \prod_{j=1}^M J_{1/2}(k_j) \prod_{j=1}^N J_{1/2}(\tilde{k}_j), \end{aligned} \quad (6.101)$$

où les constantes positives C_1 et C_2 sont supposées être les mêmes qu'en (6.96), quitte à les augmenter. En insérant alors (6.101) dans (6.81), de la même façon qu'en (6.97), on pourrait

montrer que :

$$\begin{aligned} & \left| \partial_\gamma \tilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}[\xi; \gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \right| \\ & \leq \rho_0^{-\frac{1}{2}(M+N)} (C_3 g \rho_0^{-1/2})^{M+N+2\delta_{M+N,0}} \prod_{j=1}^M J_{1/2}(k_j) \prod_{j=1}^N J_{1/2}(\tilde{k}_j). \end{aligned} \quad (6.102)$$

Nous avons finalement obtenu une estimation de $\tilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}$ et de sa dérivée $\partial_\gamma \tilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}$. Il nous faut maintenant revenir à l'opérateur qui nous intéresse, c'est-à-dire $H_{(0)}[z]$ défini en (6.74)-(6.76). Or, les opérateurs $H_{(0)}[z]$ et $\tilde{H}_{\text{eff}}[\xi]$ sont reliés entre eux de la façon suivante :

$$H_{(0)}[z] = \frac{e^{i\nu}}{\rho_0} \mathcal{U}_{\rho_0} \tilde{H}_{\text{eff}}[Z_{(0)}^{-1}(z)] \mathcal{U}_{\rho_0}^*. \quad (6.103)$$

La décomposition (6.79)-(6.80) de $\tilde{H}_{\text{eff}}[\xi]$ entraîne donc que pour tout $z \in D_{1/2}$, l'opérateur $H_{(0)}[z]$ s'écrit sous la forme :

$$H_{(0)}[z] = \mathbf{1}_{H_f < 1} [E_{(0)}[z] + T_{(0)}[z; H_f] + W_{(0)}[z; H_f]] \mathbf{1}_{H_f < 1}, \quad (6.104)$$

avec :

$$\begin{aligned} E_{(0)}[z] & := w_{0,0}^{(0)}[z, 0], \\ T_{(0)}[z; H_f] & := H_f + w_{0,0}^{(0)}[z; H_f] - w_{0,0}^{(0)}[z, 0], \\ W_{(0)}[z; H_f] & := \sum_{M+N \geq 1} W_{M,N}^{(0)}[z; H_f], \end{aligned} \quad (6.105)$$

et pour tout $M + N \geq 1$:

$$W_{M,N}^{(0)}[z; H_f] := \mathcal{F}^{-1} \int_{\mathbb{R}^{3(M+N)}} \hat{a}^*(\underline{k}^{(M)}) w_{M,N}^{(0)}[z; \hat{H}_f; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \hat{a}(\tilde{\underline{k}}^{(N)}) d\underline{k}^{(M)} d\tilde{\underline{k}}^{(N)} \mathcal{F}. \quad (6.106)$$

De plus, pour tout $M + N \geq 0$, on peut voir que $w_{M,N}^{(0)}$ est relié à $\tilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}$ de la façon suivante :

$$w_{M,N}^{(0)}[z; \gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] = \rho_0^{\frac{3}{2}(M+N)-1} \tilde{w}_{M,N}^{\text{eff}}[Z_{(0)}^{-1}(z); \rho_0 \gamma; \rho_0 \underline{k}^{(M)}; \rho_0 \tilde{\underline{k}}^{(N)}]. \quad (6.107)$$

A partir de (6.97) et (6.102) on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \left| w_{M,N}^{(0)}[z; \gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \right| + \left| \partial_\gamma w_{M,N}^{(0)}[z; \gamma; \underline{k}^{(M)}; \tilde{\underline{k}}^{(N)}] \right| \\ & \leq 2\rho_0^{M+N} (C_3 g \rho_0^{-1/2})^{M+N+2\delta_{M+N,0}} \prod_{j=1}^M J_{1/2}(\rho_0 k_j) \prod_{j=1}^N J_{1/2}(\rho_0 \tilde{k}_j) \\ & \leq \rho_0^{\frac{3}{2}(M+N)} (C_4 g \rho_0^{-1/2})^{M+N+2\delta_{M+N,0}} \prod_{j=1}^M |k_j|^{1/2} \prod_{j=1}^N |\tilde{k}_j|^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.108)$$

où C_4 est une constante positive (dépendant de δ , ν et Λ). Finalement donc, nous avons montré $H_{(0)}[z] = H(\underline{w}_{(0)}[z])$ avec $\underline{w}_{(0)} = \left(E_{(0)}, T_{(0)}, (w_{M,N}^{(0)})_{M+N \geq 1} \right)$ et :

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D_{1/2}} |E_{(0)}[z]| &\leq C_4 g^2 \rho_0^{-1}, \\ \sup_{z \in D_{1/2}} \|T_{(0)}[z; \gamma] - \gamma\|_T &\leq 2C_4 g^2 \rho_0^{-1}, \\ \sup_{z \in D_{1/2}} \left\| (w_{M,N}^{(0)}[z])_{M+N \geq 1} \right\|_{\zeta}^{\#} &\leq \sum_{M+N \geq 1} (C_4 g \rho_0^{-1/2})^{M+N} = \frac{C_4 g \rho_0^{-1/2}}{(1 - C_4 g \rho_0^{-1/2})}, \end{aligned} \quad (6.109)$$

à condition de choisir le paramètre ζ de telle manière que $\zeta \geq \rho_0^{1/2}$, et pourvu que l'on ait $C_4 g \rho_0^{-1/2} < 1$.

Il nous reste à vérifier l'analyticité de $w_{(0)}[\cdot]$ sur $D_{1/2}$. Or, on peut constater que :

$$\partial_z \bar{R}_0[\hat{H}_f; \theta] = -\bar{R}_0[\hat{H}_f; \theta]^2. \quad (6.110)$$

De la même façon qu'en (6.100)-(6.102), ceci implique alors, pour tous $0 \leq \gamma < 1$, $\underline{k}^{(M)}$ et $\underline{\tilde{k}}^{(N)}$:

$$\left| \partial_z w_{M,N}^{(0)}[z; \gamma; \underline{k}^{(M)}; \underline{\tilde{k}}^{(N)}] \right| \leq \text{Cste}. \quad (6.111)$$

On en déduit l'analyticité de $w_{(0)}$ sur $D_{1/2}$.

Ainsi, β et ε étant fixés, par (6.109) et pourvu que $g \rho_0^{-1/2}$ soit choisi suffisamment petit, nous avons bien obtenu $H_{(0)}[\cdot] = H(w_{(0)}[\cdot])$, avec :

$$w_{(0)} \in B(\beta, \varepsilon). \quad (6.112)$$

Le théorème est donc démontré. \square

6-7 L'application de renormalisation

Comme dans le chapitre 5, nous aurons besoin pour obtenir l'existence de résonances de supposer qu'une hypothèse liée à la règle d'or de Fermi est satisfaite. Rappelons que $\tilde{E}_l + e_n = 0$ désigne une valeur propre (supposée non dégénérée) de \tilde{H}_{part} telle que $(l, n) \neq (0, 0)$ et $\tilde{E}_l + e_n < e_0$. De la même façon qu'en (5.97)-(5.98), les nombres Z_0^{od} et Z_0^{d} sont ici définis par :

$$\begin{aligned} Z_0^{\text{od}} &:= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{P}_{part} \tilde{G}_{0,1}(\underline{k}) \bar{\tilde{P}}_{part} \left[\tilde{H}_{part} + |k| - i0 \right]^{-1} \bar{\tilde{P}}_{part} \tilde{G}_{1,0}(\underline{k}) \tilde{P}_{part} d\underline{k}, \\ Z_0^{\text{d}} &:= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{P}_{part} \tilde{G}_{0,1}(\underline{k}) \tilde{P}_{part} \tilde{G}_{1,0}(\underline{k}) \tilde{P}_{part} \frac{d\underline{k}}{|k|}, \end{aligned} \quad (6.113)$$

avec les notations $\tilde{P}_{part} := \tilde{P}_{part}(0)$, $\bar{\tilde{P}}_{part} := \bar{\tilde{P}}_{part}(0)$. Pour montrer que $\tilde{E}_l + e_n$ devient une résonance lorsqu'on ajoute la perturbation \tilde{W}_g , nous supposons que :

$$(\mathcal{H}_{\Gamma_0}) \quad \Gamma_0 := \text{Im}(Z_0^{\text{od}}) > 0.$$

Revenons à la famille d'opérateurs $H_{(0)}[z]$ définie dans la section précédente pour $z \in D_{1/2}$. Le nombre $\rho > 0$ étant fixé, nous avons montré dans le théorème 6.7 qu'en choisissant $\rho_0 > 0$ tel que $\rho_0 \leq \delta \sin(\nu)/2$ et $\zeta < 1$ tel que $\zeta \geq \rho_0^{1/2}$, on avait $H_{(0)}[\cdot] \in B(\rho/8, \rho/8)$, pourvu que $g\rho_0^{-1/2}$ soit suffisamment petit. De plus, par le caractère isospectral de l'application de Feshbach lisse (proposition 6.5), on a :

$$\begin{aligned} z &\in \sigma(H_{(0)}[z]) \cap D_{1/2} \\ &\Leftrightarrow Z_{(0)}^{-1}(z) \in \sigma\left(\tilde{H}_{\text{eff}}[Z_{(0)}^{-1}(z)]\right) \cap D_{\rho_0/2} \\ &\Leftrightarrow 0 \in \sigma\left(\mathcal{F}_{P(\theta)}\left(\tilde{H}_U^V(\theta) - Z_{(0)}^{-1}(z), \tilde{H}_0(\theta) - Z_{(0)}^{-1}(z)\right)\right) \cap D_{\rho_0/2} \\ &\Leftrightarrow Z_{(0)}^{-1}(z) \in \sigma\left(\tilde{H}_U^V(\theta)\right) \cap D_{\rho_0/2}. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Pour la première équivalence, nous avons utilisé l'égalité (6.103) ; pour la seconde, nous avons repris la définition (6.70) ; quant à la dernière, il s'agit d'une conséquence de la proposition 6.5.

Passons maintenant à la définition de l'application de renormalisation, basée sur celles données dans [BFS98b] ou [BCFS02] : pour tout $\rho > 0$ suffisamment petit et $\underline{w} \in B(\rho/8, \rho/8)$ de la forme $\underline{w} = (E, T, (w_{M,N})_{M+N \geq 1})$, on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\rho(H(\underline{w}[z])) - z &:= \rho^{-1} \mathcal{U}_\rho \mathcal{F}_{\chi_\rho(H_f)}\left(H(\underline{w}[Z^{-1}(z)]) - Z^{-1}(z), \right. \\ &\quad \left. E[Z^{-1}(z)] + T[Z^{-1}(z); H_f] - Z^{-1}(z)\right) \mathcal{U}_\rho^*. \end{aligned} \quad (6.115)$$

L'application Z est définie de façon similaire à $Z_{(0)}$ en (6.75) :

$$\begin{aligned} Z : \{\xi, |\xi - E[\xi]| \leq \rho/2\} &\rightarrow D_{1/2} \\ \xi &\mapsto \rho^{-1}(\xi - E[\xi]). \end{aligned} \quad (6.116)$$

Par ailleurs, $\chi_\rho(H_f)$ est défini en (6.54). Remarquons que Z est effectivement une bijection, ce que l'on peut voir en utilisant le fait que, puisque $\underline{w} \in B(\rho/8, \rho/8)$, on a $|E[\xi]| \leq \rho/8$ pour tout $\xi \in D_{1/2}$. On déduit de ceci que pour tout $\xi \in \{\xi, |\xi - E[\xi]| \leq \rho/2\}$:

$$|\rho \partial_\xi Z(\xi) - 1| < 1, \quad (6.117)$$

à condition que ρ soit suffisamment petit. Donc Z est bien une bijection. On a alors :

Théorème 6.9 Soit $\rho := (16C_\Theta)^{-2}$ et $\zeta := (4C_\Theta)^{-1}\rho^{1/2}$, où $C_\Theta \geq 1$ est une constante ne dépendant que de la fonction Θ définie en (6.54). Soit de plus $\varepsilon_0 := (8C_\Theta)^{-1}\rho$. Alors, pour tous β et ε tels que $0 < \beta \leq \varepsilon_0$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, on a :

$$\mathcal{R}_\rho : H(B(\beta, \varepsilon)) \rightarrow H\left(B\left(\beta + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right). \quad (6.118)$$

Démonstration

Dans la mesure où l'espace de Banach $\mathcal{W}_{\geq 0}$ que nous avons choisi est légèrement différent de celui de [BCFS02], il faut adapter la démonstration par rapport à celle de [BCFS02]. Toutefois, les modifications ne présentent pas de difficultés et il suffit de reprendre point par point la preuve de [BCFS02]. \square

6-8 Existence de résonances

Il ne nous reste plus qu'à itérer l'application renormalisante \mathcal{R}_ρ en partant de l'opérateur initial $H_{(0)}[\cdot]$. Par le théorème 6.9, on voit que la perturbation est de plus en plus petite sous l'effet de la renormalisation. Ainsi, en appliquant un nombre infini de fois l'application \mathcal{R}_ρ , on obtient un opérateur sans perturbation, pour lequel l'état fondamental correspond donc au vide de photon Ω . Puis comme dans [BFS98b] ou [BCFS02], ceci permet d'obtenir pour \tilde{H}_U^V l'existence d'une résonance issue de $\tilde{E}_l + e_n$.

Plus précisément, pour $n \geq 1$, on définit :

$$H_{(n)}[\cdot] := H \left((E_{(n)}, T_{(n)}, (w_{M,N}^{(n)})_{M+N \geq 1}) \right) := \mathcal{R}_\rho^n(H_{(0)}[\cdot]). \quad (6.119)$$

Fixons ρ , ζ et ε_0 comme dans le théorème 6.9 et considérons $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\beta, \varepsilon < \varepsilon_0$. Choisissons de plus $\rho_0 > 0$ tel que $\rho_0 \leq \min(\zeta^2, (\delta \sin \nu)/2)$. Alors, pourvu que $g\rho_0^{-1/2}$ soit suffisamment petit, d'après les théorèmes 6.7 et 6.9, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$H_{(n)}[\cdot] \in H \left(B(\beta + \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2^n}) \right). \quad (6.120)$$

De la même façon qu'en (6.116), considérons l'application :

$$\begin{aligned} Z_{(n)} : \{z \in D_{1/2}, |z - E_{(n-1)}[z]| \leq \rho/2\} &\rightarrow D_{1/2} \\ z &\mapsto \frac{1}{\rho} (z - E_{(n-1)}[z]). \end{aligned} \quad (6.121)$$

Comme pour Z en (6.116), on peut voir que $Z_{(n)}$ est une bijection. De plus, par le caractère isospectral de l'application de Feshbach lisse (voir proposition 6.5), on a, comme en (6.114) :

$$z \in \sigma(H_{(n)}[z]) \cap D_{1/2} \Leftrightarrow Z_{(n)}^{-1}(z) \in \sigma \left(H_{(n-1)} \left[Z_{(n)}^{-1}(z) \right] \right) \cap D_{\rho/2}. \quad (6.122)$$

On montre alors :

Théorème 6.10 *Soit $\theta_0 > 0$ suffisamment petit. Supposons que les hypothèses (\mathcal{H}_0) , (\mathcal{H}_U) , (\mathcal{H}_2) , (\mathcal{H}_3) et $(\mathcal{H}_{\chi_\Lambda}^2)$ sont vérifiées. Fixons ρ et ζ comme dans le théorème 6.9. Soit $\rho_0 > 0$ suffisamment petit, puis supposons que $g > 0$ est également suffisamment petit. Soient $\theta := i\nu \in D(0, \theta_0)$ avec $\nu > 0$ tel que $\rho_0 < (\delta \sin \nu)/2 < 1$. Notons :*

$$E_{(\infty)} := \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{(0)}^{-1} \circ Z_{(1)}^{-1} \circ \dots \circ Z_{(n)}^{-1}(0). \quad (6.123)$$

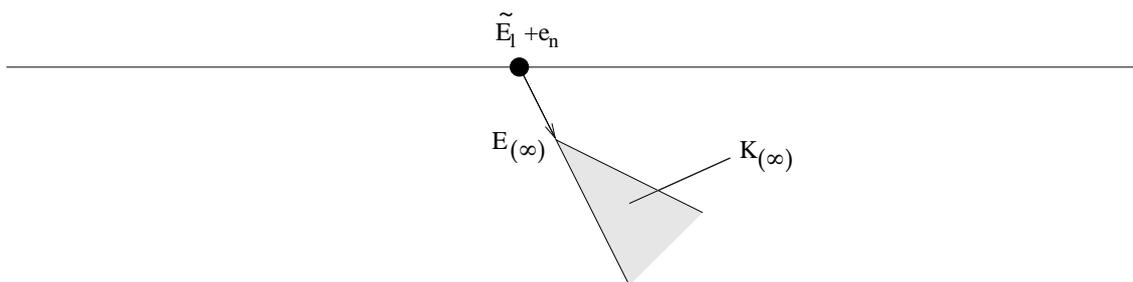
Alors on a :

$$\sigma \left(\tilde{H}_U^V(\theta) \right) \cap D_{\rho_0/2} \subset E_{(\infty)} + K_{(\infty)}(\tau, C), \quad (6.124)$$

où $K_{(\infty)}(\tau, C)$ est une région du plan complexe définie par :

$$K_{(\infty)}(\tau, C) := \{e^{-i\nu}a + b, 0 \leq a \leq 1, |b| \leq Ca^\tau\}. \quad (6.125)$$

Ici $\tau > 1$ et la constante C peut être choisie plus petite que 1 pourvu que g soit suffisamment petit. En supposant de plus que l'hypothèse (\mathcal{H}_{Γ_0}) est satisfaite, ceci implique que $E_{(\infty)}$ est une résonance pour \tilde{H}_U^V .

FIG. 6.2 – Résonance issue de $\tilde{E}_l + e_n$

Démonstration

Pour montrer que $E_{(\infty)}$ est une valeur propre de $\tilde{H}_U^V(\theta)$, on peut suivre [BFS98b, Théorème V.10] ou [BCFS02, Théorème III.10]. L'idée de la démonstration est de considérer, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:

$$E_{(m,n)} := Z_{(m)}^{-1} \circ \dots \circ Z_{(n)}^{-1}(0). \quad (6.126)$$

On montre alors tout d'abord que, pour tout m fixé, $E_{(m,n)}$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$. On note $E_{(m,\infty)}$ la limite correspondante, puis on définit pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{(m)} := H_{(m-1)}[E_{(m,\infty)}]. \quad (6.127)$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on voit que $S_{(m)} \in H(W_{\geq 0}^\#)$. Le point clé de la preuve réside alors en l'identité valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$(S_{(m)} - E_{(m,\infty)}) Q_{(m)} \mathcal{U}_\rho^* = \rho \mathcal{U}_\rho^* \chi_1(H_f) (S_{(m+1)} - E_{(m+1,\infty)}), \quad (6.128)$$

où \mathcal{U}_ρ est l'opérateur unitaire de dilatation défini en (6.73), et où l'on a posé, au sens de la définition (6.51), encore pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$Q_{(m)} = Q_{\chi_\rho(H_f)} (S_{(m)}, W_{0,0} [\underline{w}^{(m)}[e_{(m,\infty)}]]). \quad (6.129)$$

Définissons alors, pour $m, n \in \mathbb{N}^*$: $\Psi_{(m,n)} := \Omega$ si $m = n$ et, si $m < n$:

$$\Psi_{(m,n)} := Q_{(m)} \mathcal{U}_\rho^* Q_{(m+1)} \mathcal{U}_\rho^* \dots Q_{(n-1)} \Omega. \quad (6.130)$$

On pourrait montrer que pour tout m fixé, $\Psi_{(m,n)}$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$; puis notant $\Psi_{(m,\infty)}$ la limite correspondante, on montrerait que :

$$\|\Psi_{(m,\infty)} - \Omega\|_{m \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (6.131)$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, $\Psi_{(m,\infty)} \neq 0$. Or en utilisant la continuité de $H_{(m)}$ et (6.128), on peut également montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{(m)} \Psi_{(m,\infty)} = E_{(m,\infty)} \Psi_{(m,\infty)} \quad (6.132)$$

(on montre en fait que $\|(S_{(m)} - E_{(m,n)}) \Psi_{(m,n)}\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$). Pour m suffisamment grand, $\Psi_{(m,\infty)}$ est donc un vecteur propre de $S_{(m)}$ associé à la valeur propre $E_{(m,\infty)}$. Par le

caractère isospectrale de l'application de Feshbach lisse (proposition 6.5), on peut en déduire que $\Psi_{(1,\infty)}$ est un vecteur propre de $S_{(1)}$ associé à la valeur propre $E_{(1,\infty)}$. Enfin, en appliquant encore une fois la proposition 6.5, de la même façon qu'en (6.114), on obtient bien que $E_{(\infty)} = Z_{(0)}^{-1}(E_{(1,\infty)})$ est une valeur propre de $\tilde{H}_U^V(\theta)$.

Par ailleurs, pour montrer l'inclusion (6.124), on peut suivre [BFS98b, Théorème V.7]. Le cœur de la démonstration est de définir, à partir des fonctions $T_{(n)}$, une fonction "limite" $T_{(\infty)}$ telle que $\sigma\left(\tilde{H}_U^V(\theta)\right) \cap D_{\rho_0/2}$ soit approximativement égal à $E_{(\infty)} + \{e^{-i\nu}T_{(\infty)}[\gamma], 0 \leq \gamma \leq 1\}$. Formellement, on définit $T_{(\infty)}$ en se basant sur l'idée suivante :

1. Sur $\{\gamma, \rho_0 \leq \gamma \leq 1\}$, $T_{(\infty)}$ est essentiellement donnée par $T_{(0)}$.
2. Sur $\{\gamma, \rho\rho_0 \leq \gamma \leq \rho_0\}$, $T_{(\infty)}$ est essentiellement donnée par $T_{(1)}$.
3. Sur $\{\gamma, \rho^2\rho_0 \leq \gamma \leq \rho\rho_0\}$, $T_{(\infty)}$ est essentiellement donnée par $T_{(2)}$, etc.

Le "premier" terme de chaque fonction $T_{(n)}[\gamma, z]$ est de plus, par construction, égal à γ , d'où la forme de la région $K_{(\infty)}$ dans laquelle on peut localiser le spectre de $\tilde{H}_U^V(\theta)$. Cependant, la définition proprement dite de $T_{(\infty)}$ est assez technique, car les fonctions $T_{(n)}$ dépendent à la fois de γ et du paramètre spectral z . On renvoie à [BFS98b] pour plus de détails.

Pour conclure, $\sigma\left(\tilde{H}_U^V(\theta)\right) \cap D_{\rho_0/2}$ est de la forme donnée dans la figure 6.2, ce qui implique que $E_{(\infty)}$ ne dépend pas de θ , à condition que $\theta \in D(0, \theta_0)$ soit tel que $\rho_0 < \delta \sin(\text{Im}(\theta))/2$. Il suffit pour montrer ce dernier point d'utiliser des méthodes classiques liées aux dilatations complexes. \square

Annexe A

Vérification d'une hypothèse liée à la règle d'or de Fermi

Nous proposons dans cette annexe une vérification de l'une des hypothèses ($\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}$) liée à la règle d'or de Fermi. Nous avons en effet eu recours à celles-ci à plusieurs reprises dans la partie III : nous avons dû supposer une telle hypothèse satisfaite à la fois dans le chapitre 5 pour obtenir l'absolue continuité du spectre de H_U^V , et dans le chapitre 6 pour obtenir l'existence de résonances.

Reprenant les notations du chapitre 5 (section 5-5), il s'agit de montrer que :

$$(\mathcal{H}_{\Gamma_{l,n}}) \quad \Gamma_{l,n} > 0,$$

où $\Gamma_{l,n} = \min \{ \sigma(\text{Im}(Z_{l,n}^{\text{od}})) \}$ et où la matrice $Z_{l,n}^{\text{od}}$ est définie par :

$$Z_{l,n}^{\text{od}} := \int_{\mathbb{R}^3} P_{part,l,n} G_{0,1}(\underline{k}) \overline{P}_{part,l,n} [H_{part} - (E_l + e_n) + |k| - i0]^{-1} \overline{P}_{part,l,n} G_{1,0}(\underline{k}) P_{part,l,n} d\underline{k}. \quad (\text{A.1})$$

Rappelons que $P_{part,l,n}$ désigne la projection sur l'espace propre associé à la valeur propre $E_l + e_n$ de H_{part} , et que $\overline{P}_{part,l,n} = 1 - P_{part,l,n}$.

Intéressons-nous à la "première" valeur propre non perturbée $E_0 + e_1$ au-dessus de l'énergie $E_0 + e_0$ de l'état fondamental non perturbé. Montrons alors :

Théorème A.1 *Supposons que le potentiel confinant U est harmonique de la forme :*

$$U(R) = \beta^2 R^2 - c_1, \quad (\text{A.2})$$

avec $\beta > 0$ suffisamment petit et $c_1 \in \mathbb{R}$. Supposons de plus que $\alpha = q^2$ est suffisamment petit. Alors $(\mathcal{H}_{\Gamma_{0,1}})$ est vérifiée, et on a :

$$\Gamma_{0,1} = \min \{ \sigma(\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}})) \} = c_0 \beta^{5/2} + O(q^2), \quad (\text{A.3})$$

où c_0 est une constante strictement positive.

Démonstration

Rappelons qu'après le changement de coordonnées de la section 5-1, on a $V(r) = -C/|r|$. Les paramètres μ et C étant traités comme des constantes, on a donc $E_1 - E_0 = O(1)$, où rappelons-le encore, E_0 et E_1 désignent les deux premières valeurs propres de $p^2/2\mu + V$. D'ailleurs, en notant Ψ_0 le vecteur propre normalisé associé à la valeur propre (non dégénérée) E_0 de $P^2/2M + U$, on peut montrer que :

$$\Psi_0(r) = \frac{(\mu C)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu C|r|}. \quad (\text{A.4})$$

Puisque $e_1 - e_0 = \sqrt{2/M}\beta = O(\beta)$, pour β suffisamment petit ($\beta \ll 1$), on en déduit que $E_0 + e_1$ est la première valeur propre de H_{part} (de multiplicité 3) au-dessus de $E_0 + e_0$. On peut alors constater que la partie imaginaire de la matrice apparaissant en (A.1) se simplifie en :

$$\begin{aligned} \text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}}) &= \int_{\mathbb{R}^3} P_{part,0,1} G_{0,1}(\underline{k}) P_{part,0,0} \delta(|k| - (e_1 - e_0)) \\ &\quad P_{part,0,0} G_{1,0}(\underline{k}) P_{part,0,1} d\underline{k}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ecrivons, grâce à notre choix explicite de U , les fonctions propres Φ_0 et Φ_1^j (avec $j = 1, 2, 3$) associées respectivement aux valeurs propres e_0 et e_1 de $P^2/2M + U$:

$$\Phi_0(R) = \prod_{j=1,2,3} \phi_0(R^j) \quad , \quad \Phi_1^j(R) = \left(\prod_{i=1,2,3, i \neq j} \phi_0(R^i) \right) \phi_1(R^j). \quad (\text{A.6})$$

Ici, ϕ_0 et ϕ_1 sont les deux premiers vecteurs propres normalisés de l'oscillateur harmonique à une dimension, définis par :

$$\phi_0(x) = \left(\frac{\sqrt{2M}\beta}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\sqrt{2M}\beta x^2/2} \quad , \quad \phi_1(x) = \frac{(\sqrt{2M}\beta)^{3/4}}{\pi^{1/4}} x e^{-\sqrt{2M}\beta x^2/2}. \quad (\text{A.7})$$

D'après (A.5), il s'agit donc de calculer pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} (\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}}))_{i,j} &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \Psi_0(r) \Phi_1^i(R) G_{0,1}(\underline{k}) \Psi_0(r) \Phi_0(R) dr dR \right] \\ &\quad \times \mathcal{C} \left[\int_{\mathbb{R}^6} \Psi_0(r) \Phi_1^j(R) G_{0,1}(\underline{k}) \Psi_0(r) \Phi_0(R) dr dR \right] \\ &\quad \times \delta(|k| - (e_1 - e_0)) d\underline{k}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dans l'équation précédente, \mathcal{C} désigne la conjugaison dans \mathbb{C} . Reprenons l'expression de $G_{0,1}(\underline{k})$ donnée en (5.18) :

$$G_{0,1}(\underline{k}) = \frac{-iZ}{2m_1\Lambda^{3/2}} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi\sqrt{|k|}} e^{iZq^2k.x_1} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_1} + \frac{iZ^2}{2m_2\Lambda^{3/2}} \frac{\widehat{\chi}_\Lambda(k)}{2\pi\sqrt{|k|}} e^{iZq^2k.x_2} \varepsilon_\lambda(k) \cdot \nabla_{x_2}. \quad (\text{A.9})$$

Nous allons exprimer (A.8) à partir de (A.9), en remplaçant tout d'abord l'exponentielle $e^{iZq^2k.x_j}$ par 1. Nous allons ainsi obtenir une matrice définie positive ; nous verrons ensuite que la perte occasionnée par cette approximation de $e^{iZq^2k.x_j}$ par 1 est très petite grâce à l'hypothèse α suffisamment petit ; nous pourrions ainsi en déduire le résultat.

Nous notons A la matrice obtenue en remplaçant $e^{iZq^2k.x_j}$ par 1 dans $\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}})$. Commençons par exprimer p_1 et p_2 en fonction de p et P :

$$p_1 = \frac{m_1}{M}P - p \quad , \quad p_2 = \frac{m_2}{M}P + p. \quad (\text{A.10})$$

Comme Φ_0 et Φ_1^j sont orthogonaux, on voit que seuls les termes proportionnels à P conduisent à un résultat non nul dans le calcul de $A_{i,j}$.

Passons en coordonnées sphériques pour calculer l'intégrale sur k : posons :

$$k^1 = \rho \cos \theta \sin \varphi \quad , \quad k^2 = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad k^3 = \rho \cos \varphi, \quad (\text{A.11})$$

avec $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Etant donné le choix (2.10) que nous avons fait des vecteurs de polarisation, ceux-ci s'écrivent dans les nouvelles coordonnées :

$$\varepsilon_1(k) = (\sin \theta, -\cos \theta, 0) \quad , \quad \varepsilon_2(k) = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi). \quad (\text{A.12})$$

Regardons par exemple le coefficient $A_{1,2}$: par (A.8), en faisant la somme sur $\lambda = 1, 2$ et en utilisant les coordonnées sphériques, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{1,2} = & C_0 \frac{\beta^2 \widehat{\chi}_\Lambda(\sqrt{2/M}\beta)}{\sqrt{\beta}} \\ & \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\phi_1, (\sin \theta)\phi'_0) \times (\phi_1, (-\cos \theta)\phi'_0) \sin \varphi d\varphi d\theta \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\phi_1, (\cos \theta \cos \varphi)\phi'_0) \times (\phi_1, (\sin \theta \cos \varphi)\phi'_0) \sin \varphi d\varphi d\theta \right], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

où C_0 est une constante dépendant notamment des masses m_1, m_2 , et où ϕ'_0 désigne la dérivée de ϕ_0 . En calculant par exemple les intégrales sur θ , on en déduit que $A_{1,2} = 0$. De même, en regardant à chaque fois l'intégrale sur φ ou l'intégrale sur θ , on montrerait facilement que :

$$A_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j. \quad (\text{A.14})$$

Montrons en revanche que les coefficients diagonaux sont strictement positifs : par exemple pour $A_{1,1}$, on peut calculer :

$$\begin{aligned} A_{1,1} = & C_1 \frac{\beta^2 \widehat{\chi}_\Lambda(\sqrt{2/M}\beta)}{\sqrt{\beta}} \\ & \times \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\phi_1, (\sin \theta)\phi'_0)^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\phi_1, (\cos \theta \cos \varphi)\phi'_0)^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \right], \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

où C_1 est une constante strictement positive dépendant de m_1 et m_2 . Si le second terme de la somme entre crochets est nul, le premier se simplifie :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\phi_1, (\sin \theta) \phi'_0)^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = c_1(\phi_1, \phi'_0)^2 = c'_1 \beta, \quad (\text{A.16})$$

où c_1 et c'_1 sont des constantes strictement positives. Il reste donc :

$$A_{1,1} = C'_1 \widehat{\chi}_\Lambda(\sqrt{2/M}\beta) \beta^{5/2}, \quad (\text{A.17})$$

où C'_1 est une constante strictement positive. De la même façon, on obtiendrait d'ailleurs :

$$A_{2,2} = C'_2 \widehat{\chi}_\Lambda(\sqrt{2/M}\beta) \beta^{5/2}, \quad A_{3,3} = C'_3 \widehat{\chi}_\Lambda(\sqrt{2/M}\beta) \beta^{5/2}, \quad (\text{A.18})$$

où C'_2 et C'_3 sont des constantes strictement positives.

Il nous reste à montrer que la matrice $\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}}) - A$ est petite comparée à A . En effet, $\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}}) - A$ n'est autre que $\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}})$ où, dans au moins l'une des deux fonctions $G_{0,1}(k)$, les termes $e^{iZq^2k \cdot x_j}$ (pour $j = 1, 2$) sont remplacés par $e^{iZq^2k \cdot x_j} - 1$. En utilisant alors l'inégalité :

$$\left| e^{iZq^2k \cdot x_j} - 1 \right| \leq Zq^2 |k| |x_j|, \quad (\text{A.19})$$

on pourrait en déduire que pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\left| (\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}}) - A)_{i,j} \right| \leq C(\beta) \alpha, \quad (\text{A.20})$$

où $C(\beta)$ est une constante positive dépendant de β (et de m_1, m_2, C). Finalement donc, pour α suffisamment petit (en particulier $\alpha \ll \beta$), on a :

$$\|\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}}) - A\| \ll \min(\sigma(A)). \quad (\text{A.21})$$

Ceci implique que $\text{Im}(Z_{0,1}^{\text{od}})$ est définie positive puisque A l'est. \square

Remarque A.2

1. *Physiquement, la condition $\alpha \ll \beta$ permet de supposer que, par exemple, la raie associée à la transition $E_1 + e_1 \rightarrow E_0 + e_0$ est bien résolue. En effet, la largeur de la raie correspondant à la transition électronique $E_1 + e_1 \rightarrow E_0 + e_1$ est d'ordre $O(\alpha^3)$ (puisque la valeur propre non dégénérée $E_1 + e_1$ donne lieu à une résonance située à une distance $O(\alpha^3)$ de l'axe réel). Ainsi le centre de la raie $E_1 + e_1 \rightarrow E_0 + e_0$ est "loin" du centre de la raie $E_1 + e_1 \rightarrow E_0 + e_1$.*
2. *La condition $\alpha \ll \beta$ est également requise (implicitement) dans la partie III, puisqu'alors nous avons dû supposer $g \ll \delta$, où δ représentait la distance de la valeur propre non perturbée considérée au reste du spectre de H_{part} .*
3. *Par une démonstration semblable à celle du théorème précédent, on pourrait montrer que :*

$$\min \{ \sigma(\text{Im}(Z_{1,0}^{\text{od}})) \} = O(1). \quad (\text{A.22})$$

Il s'agirait pour cela de regarder en premier lieu le terme de $\text{Im}(Z_{1,0}^{\text{od}})$ correspondant à la transition $E_1 + e_0 \rightarrow E_0 + e_0$, en remplaçant de plus $e^{iZq^2k \cdot x_j}$ par 1 dans $G_{0,1}(k)$. On montrerait alors que les autres termes de $\text{Im}(Z_{1,0}^{\text{od}})$ sont négligeables par rapport au précédent, pourvu que $\alpha \ll \beta \ll 1$. Ainsi, les premières valeurs propres issues de $E_0 + e_n$, dues à la présence du potentiel confinant U , donnent lieu à des résonances bien plus proches de l'axe réel que les autres.

Bibliographie

- [AC71] J. Aguilar and J. M. Combes. A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians. *Comm. Math. Phys.*, 22 :269–279, 1971.
- [AF06a] L. Amour and J. Faupin. The confined hydrogenoid ion in non-relativistic quantum electrodynamics. *Cubo Math. J.*, To appear, 2006.
- [AF06b] L. Amour and J. Faupin. L'ion hydrogénéoïde confiné en électrodynamique quantique non relativiste. *C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. I* 343 :27–30, 2006.
- [AGG06] L. Amour, B. Grébert, and J. C. Guillot. The dressed mobile atoms and ions. *J. Math. Pures et Appl.*, 86 :177–200, 2006.
- [AH97] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. *J. Funct. Anal.*, 151 :455–503, 1997.
- [AH00] A. Arai and M. Hirokawa. Ground states of a general class of quantum field Hamiltonians. *Rev. Math. Phys.*, 12(8) :1085–1135, 2000.
- [AHH99] A. Arai, M. Hirokawa, and F. Hiroshima. On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoffs. *J. Funct. Anal.*, 168 :470–497, 1999.
- [BC71] E. Balslev and J. M. Combes. Spectral properties of Schrödinger operators with dilation analytic interactions. *Comm. Math. Phys.*, 22 :280–294, 1971.
- [BCFS02] V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Smooth Feshbach map and operator-theoretic renormalization group methods. *Comm. Math. Phys.*, 203 :44–92, 2002.
- [BCV03] J. M. Barbaroux, T. Chen, and S. Vugalter. Binding conditions for atomic N -electron systems in non-relativistic QED. *Ann. Henri Poincaré*, 4(6) :1101–1136, 2003.
- [BFS95] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Mathematical theory of non-relativistic matter and radiation. *Lett. Math. Phys.*, 34 :183–201, 1995.
- [BFS98a] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles. *Adv. in Math.*, 137 :299–395, 1998.
- [BFS98b] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory. *Adv. in Math.*, 137 :205–298, 1998.
- [BFS99] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation fields. *Comm. Math. Phys.*, 207(2) :249–290, 1999.

- [BFSS99] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal, and A. Soffer. Positive commutators and spectrum of Pauli-Fierz Hamiltonian of atoms and molecules. *Comm. Math. Phys.*, 207(4) :557–587, 1999.
- [Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1983.
- [CFKS87] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [Che02] T. Chen. Operator-theoretic infrared renormalization and construction of dressed 1-particle states in non-relativistic qed. *PhD thesis, ETH Zürich*, 2002.
- [CT04] C. Cohen-Tannoudji. *Cours au collège de France 2003-2004*. www.phys.ens/cours/college-de-france, 2004.
- [CTDRG01a] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes*. Editions du CNRS, 2001.
- [CTDRG01b] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. Editions du CNRS, 2001.
- [DBIW89] F. Diedrich, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland. Laser cooling to the zero-point energy of motion. *Phys. Rev. Lett.*, 62 :403–406, 1989.
- [DG99] J. Dereziński and C. Gérard. Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. *Rev. Math. Phys.*, 11(4) :383–450, 1999.
- [Dic53] R. H. Dicke. The Effect of Collisions upon the Doppler Width of Spectral Lines. *Phys. Rev.*, 89(2) :472–473, 1953.
- [Fau06] J. Faupin. Resonances of the confined hydrogenoid ion and the Dicke effect in non relativistic quantum electrodynamics. *mp_arc*, preprint, 2006.
- [Fel02] A. Felhi. Analyse spectrale de l'hamiltonien associé à un atome non relativiste couplé à un champ électromagnétique quantifié. *Thèse de l'Université Paris 13*, 2002.
- [FGS02] J. Fröhlich, M. Griesemer, and B. Schlein. Asymptotic completeness for Rayleigh scattering. *Ann. Henri Poincaré*, 3 :107–170, 2002.
- [FGS06] J. Fröhlich, M. Griesemer, and I. M. Sigal. Mourre Estimate and Spectral Theory for the Standard Model of Non-Relativistic qed. *mp_arc*, preprint, 2006.
- [Frö73] J. Fröhlich. On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless scalar bosons. *Ann. Henri Poincaré*, 19 :1–103, 1973.
- [Frö74] J. Fröhlich. Existence of dressed one-electron states in a class of persistent models. *Fortschr. Phys.*, 22 :159–198, 1974.
- [GGM04] V. Georgescu, C. Gérard, and J. S. Møller. Spectral theory of massless Pauli-Fierz models. *Comm. Math. Phys.*, 249 :29–78, 2004.
- [GH07] M. Griesemer and D. Hasler. On the Smooth Feshbach-Schur Map. *mp_arc*, preprint, 2007.
- [GLL01] M. Griesemer, E. H. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, 145 :557–595, 2001.

- [Gri02] M. Griesemer. Exponential decay and ionization thresholds in non-relativistic quantum electrodynamics. *J. Funct. Anal.*, 210 :321–340, 2002.
- [GS03] S. Gustafson and I. M. Sigal. *Mathematical concepts of Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 2003.
- [Gér00] C. Gérard. On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré*, 1 :443–459, 2000.
- [HH06] D. Hasler and I. Herbst. Absence of Ground States for a Class of Translation Invariant Models of Non-relativistic qed. *mp_arc*, preprint, 2006.
- [Hir97] F. Hiroshima. Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics. *Rev. Math. Phys.*, 9 :489–530, 1997.
- [Hir99] F. Hiroshima. Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics. i. *J. math. phys.*, 40(12) :6209–6222, 1999.
- [Hir00] F. Hiroshima. Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics. ii. *J. math. phys.*, 41(2) :661–674, 2000.
- [Hir02] F. Hiroshima. Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary coupling constants. *Ann. Henri Poincaré*, 3 :171–201, 2002.
- [Hir04] F. Hiroshima. Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field. *Topics in the theory of Schrödinger Operators*, ed H. Araki and H. Ezawa, pages 145–272, 2004.
- [Hir05] F. Hiroshima. Multiplicity of ground states in quantum field models : applications of asymptotic fields. *J. Funct. Anal.*, 224 :431–470, 2005.
- [Hir06] M. Hirokawa. Infrared Catastrophe for Nelson’s Model. *Publications of RIMS*, 42(4) :897–922, 2006.
- [HS95] M. Hübner and H. Spohn. Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 62(3) :289–323, 1995.
- [HS96] P. D. Hislop and I. M. Sigal. *Introduction to Spectral Theory With Applications to Schrödinger Operators*. Springer Verlag, 1996.
- [Hun86] W. Hunziker. Distortion analyticity and molecular resonance curves. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 45 :339–358, 1986.
- [Hun90] W. Hunziker. Resonances, metastable states and exponential decay laws in perturbation theory. *Comm. Math. Phys.*, 132 :177–188, 1990.
- [Kat66] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, 1966.
- [LB03] P. Lévy-Bruhl. *Introduction à l’analyse spectrale*. Dunod, 2003.
- [Lie91] E. H. Lieb. *The stability of matter : From atoms to stars*. Springer Verlag, 1991.
- [LL01] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis, second edition*. Amer. Math. Soc., 2001.
- [LL03] E. H. Lieb and M. Loss. Existence of atoms and molecules in non-relativistic quantum electrodynamics. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 7 :667–710, 2003.
- [LMS02] J. Lorinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. The infrared behaviour in Nelson’s model of a quantum particle coupled to a massless scalar field. *Ann. Henri Poincaré*, 3(2) :269–295, 2002.

- [LMS06] M. Loss, T. Myao, and H. Spohn. Lowest energy states in nonrelativistic qed : atoms and ions in motion. *mp_arc*, preprint, 2006.
- [Møl05] J. S. Møller. The translation invariant massive Nelson model : I. The bottom of the spectrum. *Ann. Henri Poincaré*, 6 :1091–1135, 2005.
- [Mou81] E. Mourre. Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. *Comm. Math. Phys.*, 78 :391–408, 1981.
- [Müc04] M. Mück. Construction of metastable states in Quantum Electrodynamics. *Rev. Math. Phys.*, 16(1) :1–28, 2004.
- [RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, vol. II, Fourier Analysis, Self-adjointness*. Academic Press, New York, 1975.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, vol. IV, Analysis of operators*. Academic Press, New York, 1978.
- [RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, vol. I, Functional Analysis, second edition*. Academic Press, New York, 1980.
- [Sig84] I. M. Sigal. Complex transformation method and resonances in one-body quantum systems. *Ann. Henri Poincaré*, 41 :103–114, 1984.
- [Sim72] B. Simon. Quadratic Forms Techniques and the Balslev-Combes theorem. *Comm. Math. Phys.*, 27 :1–9, 1972.
- [Sim73] B. Simon. Resonances in n-body quantum systems with dilation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory. *Ann. Math.*, 97 :247–274, 1973.
- [Sim74] B. Simon. *The $P(\Phi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory*. Princeton University Press, 1974.
- [Sim78] B. Simon. Resonances and complex scaling : a rigorous overview. *Int. J. Quant. Chem.*, 14 :529–542, 1978.
- [Sim79] B. Simon. *Functional integral and quantum physics*. Academic Press, 1979.
- [Spo98] H. Spohn. Ground state of a quantum particle coupled to a scalar Bose field. *Lett. Math. Phys.*, 44(1) :9–16, 1998.
- [Spo04] H. Spohn. *Dynamics of charged particles and their radiation field*. Cambridge university press, 2004.
- [TDC⁺94] R. Taïeb, R. Dum, J. I. Cirac, P. Marte, and P. Zoller. Cooling and localization of atoms in laser-induced potential wells. *Phys. Rev. A*, 49 :4876–4887, 1994.
- [WD75] D. Wineland and H. Dehmelt. Laser fluorescence spectroscopy on tl+ mono-ion oscillator iii (side band cooling). *Bull. Am. Phys. Soc.*, 20 :637, 1975.
- [WI79] D. J. Wineland and W. M. Itano. Laser cooling of atoms. *Phys. Rev. A*, 20(4) :1521–1540, 1979.
- [Zhi60] G. M. Zhislin. Discussion of the spectrum of the Schrödinger operator. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 9 :81–128, 1960.

Résumé

Nous considérons un ion hydrogénoïde (un noyau et un électron) en interaction avec le champ électromagnétique quantifié dans le modèle mathématique standard de l'électrodynamique quantique non relativiste. Plutôt que de supposer que le noyau est fixe, nous supposons seulement que le centre de masse de l'ion est confiné par un potentiel. Cette hypothèse est utilisée en physique théorique pour expliquer l'effet Lamb-Dicke. Dans un premier temps, à l'aide de conditions de liaison bien choisies, nous établissons l'existence d'un état fondamental pour l'opérateur Hamiltonien de Pauli-Fierz associé au modèle, sans condition sur la constante de couplage. Dans un second temps, en adaptant les techniques de V. Bach, J. Fröhlich et I. M. Sigal basées sur l'application d'un groupe de renormalisation, nous obtenons l'existence de résonances pour un modèle régularisé, en supposant cette fois-ci que la constante de couplage est suffisamment petite.

Abstract

We consider a hydrogenoid ion (one nucleus and one electron) interacting with the quantized electromagnetic field in the standard mathematical model of non-relativistic quantum electrodynamics. Rather than treating the nucleus as static, we only assume that the center of mass of the ion is confined by a potential. This assumption is used in theoretical Physics to explain the Lamb-Dicke effect. On one hand, by establishing some suitably chosen binding conditions, we prove the existence of a ground state for the Pauli-Fierz Hamiltonian associated with the model, for all values of the coupling constant. On the other hand, adapting the renormalization group method developed by V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, we obtain the existence of resonances for a regularized model, for sufficiently small values of the coupling constant.