



Etude des milieux pulvérulents non chargés dans l'hypothèse de la plasticité parfaite : application au problème d'une roue rigide reposant sur du sable

Jean-Louis Auriault

► To cite this version:

Jean-Louis Auriault. Etude des milieux pulvérulents non chargés dans l'hypothèse de la plasticité parfaite : application au problème d'une roue rigide reposant sur du sable. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT : . tel-00279759

HAL Id: tel-00279759

<https://theses.hal.science/tel-00279759>

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E

Présentée
à la Faculté des Sciences de l'Université
de Grenoble

Pour obtenir le Grade de Docteur de Spécialités
(Troisième Cycle Mécanique des Solides)

par

Jean-Louis AURIAULT
Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

"ETUDE DES MILIEUX PULVERULENTS NON CHARGES
DANS L'HYPOTHESE DE LA PLASTICITE PARFAITE.
APPLICATION AU PROBLEME D'UNE ROUE RIGIDE
REPOSANT SUR DU SABLE".

Soutenue le 23 Décembre 1965, devant la Commission d'Examen

MM. J. KRAVTCHENKO	Président
L. SANTON	
N. GASTINEL	Examineurs
J. BIAREZ	
R. SIBILLE	Invité

GRENOBLE

AVANT-PROPOS

Les recherches dont les résultats sont exposés dans ce mémoire ont été poursuivies au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble.

Que tous ceux qui ont été mes maîtres reçoivent l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens en particulier à remercier très vivement Monsieur le Professeur KRAVTCHENKO, Directeur des Laboratoires, pour l'aide permanente et les précieux conseils qu'il m'a prodigués ; je me souviendrai, non sans émotion, des colloques animés que nous avons tenus à la Société Scientifique du Dauphiné en compagnie de Monsieur NEGRE dont les conseils amicaux me furent d'une très grande utilité.

Je voudrais remercier Monsieur SIBILLE pour son aide précieuse tant sur le plan professionnel que sur celui de la recherche.

Je remercie également Monsieur le Professeur GASTINEL et les Ingénieurs du Laboratoire de Mathématiques Appliquées pour l'aide importante qu'ils m'ont accordée dans la résolution numérique de mes problèmes.

Je remercie enfin Madame DOMENECH pour le soin qu'elle a apporté à l'exécution matérielle de ce mémoire.

SOMMAIRE

Pages

Avant-Propos

<u>Introduction</u>	1
<u>Chapitre I : Position du problème</u>	2
A - <u>NOTATIONS</u>	2
B - <u>PROBLEME</u>	3
C - <u>HYPOTHESES DE CALCUL</u>	5
a) Problème plan :	5
b) Roue rigide :	5
c) Plasticité parfaite sous la roue :	5
d) Conditions aux limites	6
e) Choix de P_1	9
D - <u>METHODE HABITUELLE DE CALCUL DU TENSEUR DES</u> <u>CONTRAINTES</u>	9
1) Formules classiques :	9
2) Conditions aux limites :	10
3) Variables de SOKOLOWSKI - Schéma à trois zones :	11
E - <u>CONCLUSION</u>	14
<u>Chapitre II : Méthode de MM. KRAVTCHENKO et SIBILLE</u>	15
<u>Chapitre III : Etude des courbes intégrales</u>	23
A - <u>ETUDE DES POINTS SINGULIERS</u>	23
1) Etude des points singuliers du premier sys- tème :	23
2) Etude des points singuliers du deuxième sys- tème :	26
3) Etude des points singuliers du troisième sys- tème :	33
4) Conclusion :	38
B - <u>ETUDE DES COURBES INTEGRALES. CONDITIONS AUX</u> <u>LIMITES</u>	40
1) Courbes intégrales :	40
2) Conditions aux limites :	40
3) Calcul de ψ_i sur la roue :	42
4) Conditions aux frontières particulières : .	45

	Pages
<u>Chapitre IV : Conduite des calculs</u>	48
A - <u>SCHEMA GENERAL DE CALCUL</u>	48
B - <u>PASSAGE DE LA SINGULARITE</u>	49
<u>1)</u> Intégration numérique des équations différentielles :	49
<u>2)</u> Schéma d'intégration des systèmes différentiels :	50
a) Premier système	51
b) Deuxième système	51
c) Troisième système	56
C - <u>INTEGRATION DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES DANS LE RESTE DU DOMAINE</u>	57
<u>1)</u> Zone 1 de RANKINE :	57
<u>2)</u> Zone 3 :	58
<u>3)</u> Zone 4 :	59
<u>4)</u> Calcul de la résultante horizontale H_M , verticale Q_M et du couple C_M s'exerçant sur la branche OM du contour :	60
D - <u>PROGRAMMES</u>	61
<u>Chapitre V : Application au cas $\rho = 26^\circ$</u>	62
<u>1)</u> Détermination pratique des valeurs minima de Q, H et C pour un enfoncement donné de la roue :	62
<u>2)</u> Résultats :	65
a) Cas I : H et C nuls	65
b) Cas II : Roue à la limite de patinage ..	66
<u>3)</u> Comparaison avec l'expérience :	72
a) Cas I : Roue sans couple ni effort de traction	72
b) Cas II : C et H $\neq 0$	74
<u>Conclusion</u> :	78
<u>Bibliographie</u> :	79

INTRODUCTION

Nous nous sommes proposés dans le présent mémoire de passer pratiquement les singularités situées sur le contour d'un milieu pulvérulent non chargé dans le cas le plus général. La méthode KRAVTCHENKO - SIBILLE permet en théorie ce passage.

Nous avons ensuite appliqué les résultats obtenus au cas particulier d'une roue rigide reposant sur un milieu pulvérulent. Des études dans ce domaine ont été faites par MM. DUPERRIN, OBERTI et BOUCHERIE du point de vue expérimental et M. STERENBERG du point de vue théorique.

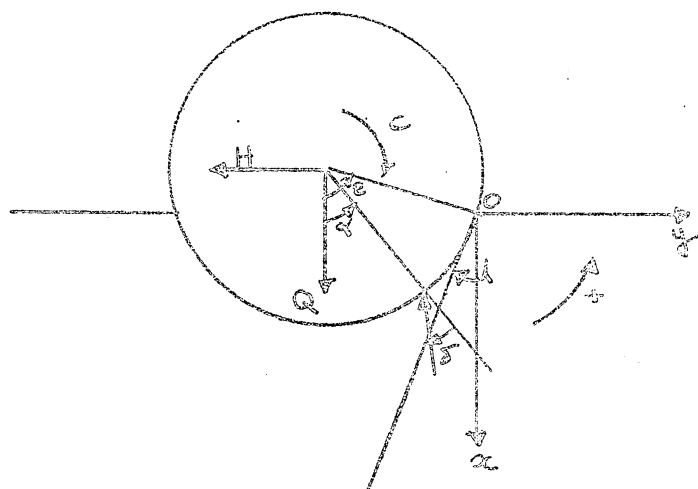
Nous avons adopté les mêmes hypothèses de base que M. STERENBERG, ce qui nous permet d'établir des comparaisons.

CHAPITRE I

POSITION DU PROBLEME

L'étude du comportement d'un sol pulvérulent soumis à l'action d'une roue rigide présente différents aspects suivant le type d'action de la roue. Nous nous limiterons ici aux actions statiques, les actions dynamiques entraînant l'emploi de nouveaux paramètres et des difficultés de calcul considérables.

A - NOTATIONS.



Nous considérons une roue de rayon R reposant sur un sol de frottement interne ϕ , de cohésion $c = 0$. Le sol est incliné de β sur l'horizontale.

L'enfoncement de la roue est mesuré par ε .

δ est l'inclinaison des contraintes sol-roue.

La roue exerce sur le sol un effort vertical Q , un effort horizontal H , et un couple C .

Un point du contour de la roue est repéré par l'angle α

Pour l'étude du sol nous emploierons les paramètres suivants :

φ : inclinaison de la contrainte principale majeure sur l'axe des x .

σ_1 et σ_2 : contraintes principales.

σ : contrainte moyenne $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

r et θ : coordonnées polaires d'un point du milieu

ψ : inclinaison de la contrainte principale majeure sur le rayon vecteur issu de l'origine.

$$\psi = \varphi - \theta$$

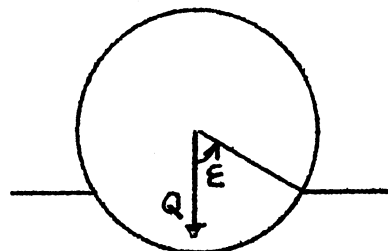
γ : densité du milieu.

B - PROBLEME:

Nous distinguerons deux cas suivant que le problème est symétrique par rapport à la verticale du centre de la roue ou non.

1er cas : $\beta = 0$ $C = 0$ $H = 0$

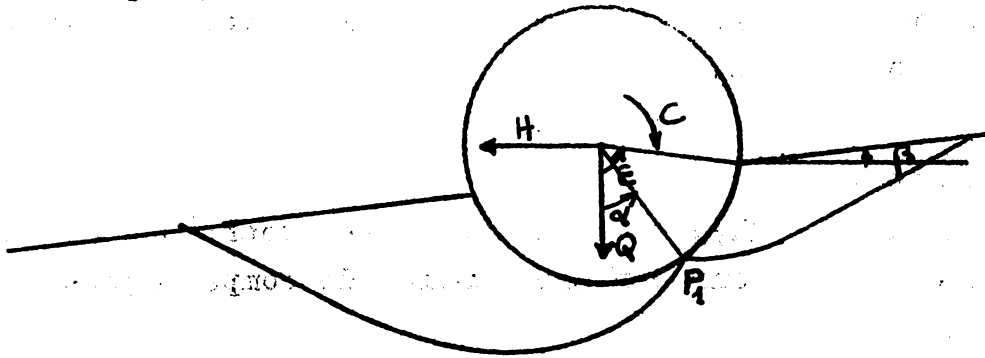
Le problème consiste à trouver ε tel que l'arc de longueur $2\varepsilon R$ en contact avec le sol ait une force portante Q .



2e cas : roue à la limite de patinage :

C et $H \neq 0$; β quelconque.

Le problème n'est plus symétrique, même si $\beta = 0$.
Ce cas est très intéressant car il donne les valeurs maxima de C et H que peut créer le sol.



Nous verrons par la suite qu'il se forme sous la roue deux zones se rejoignant en un point P_1 repéré par l'angle γ_0 . Nous avons donc 6 paramètres : ϵ , γ_0 , β , C , Q et H . Nous considérerons pratiquement ici que le cas $\beta = 0$, seul cas que MM. DUPERRIN, OBERTI et STERENBERG ont étudié, afin d'établir des comparaisons.

Nous avons donc 5 paramètres reliés par les 3 équations de la statique et la condition de limite de patinage. Nous ne pourrions donc fixer a priori qu'un seul paramètre, les autres seront alors déterminés. Dans la pratique, c'est Q qui est donné. Pour faciliter les calculs, c'est ϵ que nous choisirons ; Q , C et H s'en déduiront.

- 5 -

C - HYPOTHESES DE CALCUL.

a) Problème plan :

Nous avons supposé le problème plan, c'est-à-dire que la troisième dimension de la roue, sa largeur, était suffisamment grande par rapport aux deux premières. Cette hypothèse n'est justifiée que dans des cas particuliers comme les grands rouleaux de compactage.

b) Roue rigide :

Là aussi, l'hypothèse faite se rapproche peu de la réalité si ce n'est pour certains engins de compactage.

c) Plasticité parfaite sous la roue :

Nous avons adopté pour loi rhéologique du matériau la loi de Coulomb :

$$\tau = \sigma_m \tan \varphi$$

(le matériau considéré est pulvérulent).

Le sol est donc supposé à l'état plastique. Si cette hypothèse est parfaitement valable au voisinage immédiat de la roue, où les déplacements sont assez importants pour justifier une mise en plasticité, elle l'est certainement bien moins aux environs. Toutefois, cette restriction n'est pas gênante, car nous considérons seulement dans l'étude qui suit le sol au voisinage immédiat de la roue.

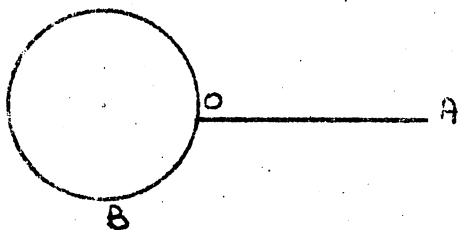
d) Conditions aux limites :

Le système

$$(1) \quad \begin{cases} \tau = \tau_n \operatorname{tg} \rho \\ \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

permet en principe de calculer en un point du sol les coordonnées du tenseur contrainte.

Pour mener à bien cette intégration, nous avons besoin de données sur les frontières :



Sur OA celles-ci nous sont imposées : le sol est non chargé.

Comme nous le verrons par la suite, l'existence d'un point singulier en O pour les équations différentielles (1) et le type de ces équations, nous imposent le choix de deux hypothèses :

- choix de l'hypothèse sur l'état de plasticité -maximum ou minimum- (existant) sur le contour de la roue,

- choix de l'hypothèse sur la loi de variation de l'inclinaison de la contrainte s'exerçant sur la surface limite roue-sol avec le point du contour considéré.

Cet état et cette loi sont a priori inconnus.

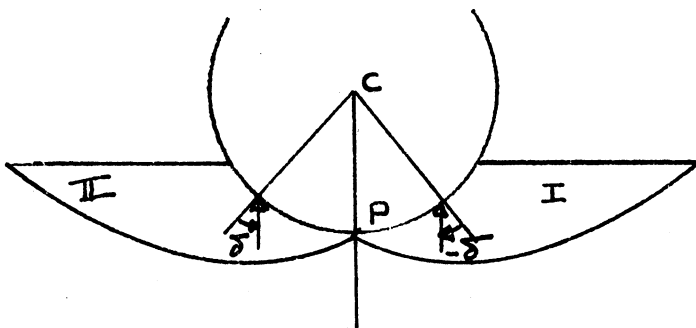
Toutefois, des considérations de physique permettront, du moins pour la première hypothèse, de faire un choix.

Nos hypothèses sont les mêmes que celles de M. STERENBERG

Cas 1 : C , H et β nuls.

Comme nous l'avons vu, le problème est symétrique. La dilatation linéaire du sol perpendiculairement à la ligne de contact sol-roue étant négative au moment de l'application de la roue sur le sol, celui-ci est en état de butée.

De plus, le mouvement relatif sol-roue impose les inclinaisons de contraintes indiquées sur le schéma :



Le plus simple alors est de supposer δ constant et égal au frottement roue-sol.

Ceci conduit au point P à deux inclinaisons différentes de la contrainte, ce qui est

gênant physiquement. Mathématiquement, cette singularité peut être passée comme celle du point O.

M. STUTZ a donné une méthode qui permet d'éviter la discontinuité en P, en remarquant que sur l'axe de symétrie

CP , $\delta = 0$. Cette méthode donne une loi de variation de sur le contour de la roue.

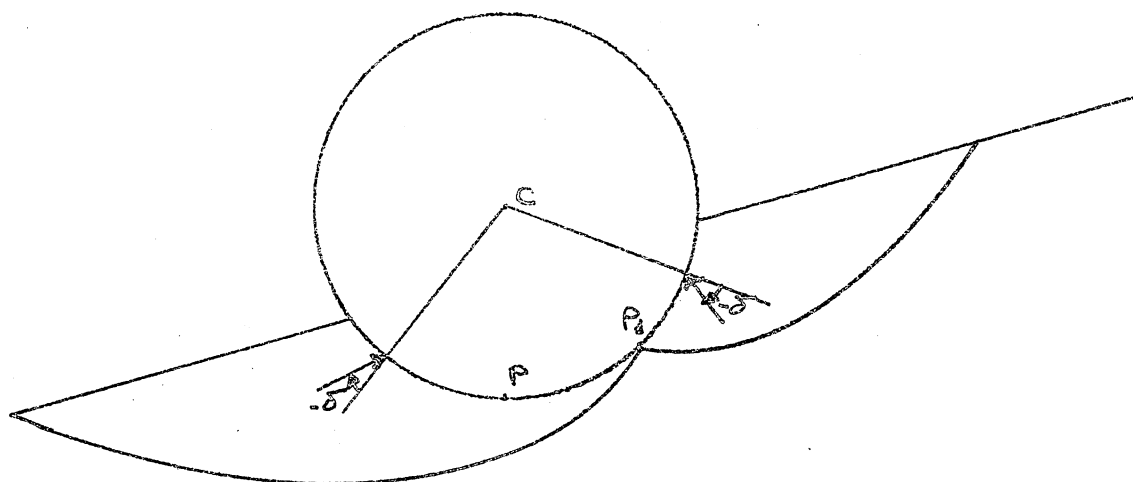
Cas 2 : C ou H ou $\beta \neq 0$.

Partons du Cas 1 et appliquons progressivement à la roue un couple C ou un effort H. Le sol reste en état de butée. En effet, pour passer dans un état de poussée, il faudrait des déplacements relatifs très importants que nous sommes loins de constater.

Toutefois, si le sol reste en état de butée, l'inclinaison des contraintes va changer, du moins dans la zone II. Le fait que la roue soit à la limite du patinage nous permet de penser que dans cette zone, l'inclinaison des contraintes est $+\delta$ comme indiqué sur le schéma.

Le problème n'est plus symétrique par rapport à C. MM. DUPERRIN et OBERTI ont montré en utilisant l'appareil analogique à deux dimensions de TAYLOR-SCHNEEBELI que le point P se déplaçait vers l'amont au contact roue-sol.

Nous utiliserons donc le schéma suivant :



Lorsque la roue est soumise à un couple, le point P se trouve en P₁.

e) Choix de P_1 :

La position de P_1 introduit un nouveau paramètre. Nous faisons l'hypothèse suivante : à chaque position de P correspond un schéma d'intégration des équations différentielles donnant les coordonnées du tenseur contrainte, donc à chaque point P correspond un couple C .

Nous prendrons pour P_1 le point P qui donne le couple minimum. Il n'est pas possible à notre connaissance de justifier ce choix si ce n'est par le fait que nous nous plaçons dans le sens de la sécurité. D'autre part, cela revenant à fixer un paramètre du problème α_{P_1} , nous pourrions mettre en évidence d'une façon plus nette les lois qualitatives qui régissent les phénomènes étudiés. Dans la comparaison avec l'expérience, nous serons amenés à considérer α_{P_1} variable. M. STERENBERG a utilisé cette hypothèse en considérant P_1 comme position de P lorsque la roue est à la limite de patinage.

D - METHODE HABITUELLE DE CALCUL DU TENSEUR DES CONTRAINTES.

Pour un milieu pulvérulent les notations sont celles définies dans I, A.

1) Formules classiques :

En un point $M(x,y)$ du massif, l'état de contrainte est défini par les trois quantités $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, contraintes normales et tangentielles sur les facettes parallèles aux axes Ox et Oy passant par ce point. La condition de plasticité de Coulomb $\tau_n = \sigma_n \tan \varphi$ impose une relation entre ces trois valeurs, ce qui permet de les exprimer en fonction des

deux paramètres σ et φ :

$$\sigma : \text{contrainte moyenne} = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2)$$

φ : angle de la contrainte principale majeure avec Ox.

σ_1 et σ_2 sont les contraintes principales au point M.

On a en effet :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2\varphi) \\ \sigma_y = \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2\varphi) \\ \tau_{xy} = \sigma \sin \varphi \sin 2\varphi \end{array} \right.$$

De même, sur une facette dont la normale fait l'angle avec l'axe Ox, les contraintes normales et tangentielles prennent les expressions :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_n = \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2(\varphi - \alpha)) \\ \sigma_t = \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2(\varphi - \alpha)) \\ \tau = \sigma \sin \varphi \sin 2(\varphi - \alpha) \end{array} \right.$$

d'où les conditions aux limites.

2) Conditions aux limites :

Sur la surface horizontale du massif OA, on a par hypothèse : $\sigma_n = \tau = 0$, et on se trouve en poussée ; le dernier système donne alors :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Sur le contour OB, on a l'état de butée.

a) Contraintes inclinées à $-\delta$ sur les normales au contour

$$-tg\delta = \frac{\tau}{\sigma_n} \quad \text{donc} \quad \varphi = \alpha - \frac{\delta + \Delta}{2}$$

avec $\sin \Delta = \frac{\sin \delta}{\sin \rho}$

b) Contraintes inclinées à $+\delta$ sur les normales au contour

$$tg\delta = \frac{\tau}{\sigma_n} \quad \text{et} \quad \varphi = \alpha + \frac{\delta + \Delta}{2}$$

Au point 0 la fonction φ présente donc une discontinuité; Rappelons brièvement à ce sujet, la théorie de M. SOKOLOWSKI et le schéma à trois zones auquel elle donne lieu.

3) Variables de SOKOLOWSKI - Schéma à trois zones :

Les équations de l'équilibre indéfini écrites en fonction de σ et φ donnent le système, en coordonnées cartésiennes :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \sin \rho \sin 2\varphi - 2 \sin \rho \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= \delta \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \sin \rho \sin 2\varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial y} (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) + 2 \sin \rho \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

et en coordonnées polaires de mêmes axes :

$$\left| \begin{aligned} & (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\ & - 2\sigma \sin \rho \left(\frac{\cos 2\varphi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma \sin \rho \cos 2\varphi = \gamma \cos \theta \\ & \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r} (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \\ & 2\sigma \sin \rho \left(\frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{2}{r} \sigma \sin \rho \sin 2\varphi = -\gamma \sin \theta \end{aligned} \right.$$

Introduisons les variables de SOKOLOWSKI :

$$\left| \begin{aligned} \xi &= \chi + \varphi \\ \eta &= \chi - \varphi \end{aligned} \right. \text{ avec } \chi = \frac{\cot \rho}{2} \operatorname{Log} \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

Remarquons que l'emploi de ces variables impose que σ soit différent de zéro dans le domaine où on les utilise. Nous obtenons alors :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial y} &= a = - \frac{\gamma \sin(\varphi + \mu)}{\cos \rho \cos(\varphi - \mu)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial y} &= b = - \frac{\gamma \sin(\varphi - \mu)}{\cos \rho \cos(\varphi + \mu)} \end{aligned} \right.$$

C'est un système aux dérivées partielles, semi-linéaire, de type hyperbolique, dans lequel la première famille des bicaractéristiques est définie par les relations :

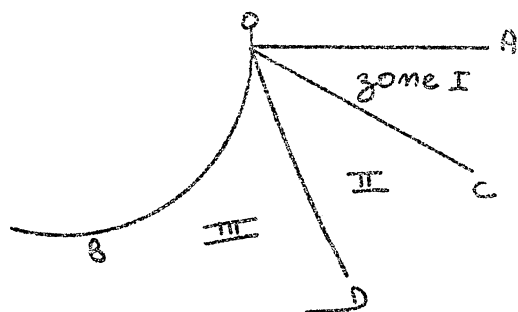
$$\left| \begin{aligned} y' &= \operatorname{tg}(\varphi + \mu) \\ d\xi &= a dx \end{aligned} \right.$$

et la seconde famille par les relations :

$$\begin{cases} y' = \operatorname{tg}(\varphi - \mu) \\ d\eta = b \, dx \end{cases}$$

En Mécanique des Sols, les conditions aux limites introduisent presque toujours en un point, une discontinuité dans la variable φ . C'est ce qui se passe dans notre cas. Pour résoudre le problème SOKOLOWSKI a bâti un schéma à trois zones en utilisant la méthode du Saut de PRANDTL. Cette solution n'est qu'une solution parmi l'infinité de celles que l'on peut construire et qui sont statiquement possibles.

Schéma à trois zones $\nabla \neq 0$ à l'origine :



Dans ce schéma les zones I et III sont limitées, d'un côté par les frontières OA et OB du massif et de l'autre par les bicaractéristiques de même famille OC et OD dont les pentes à l'origine correspondent aux valeurs φ_1 et φ_2 de φ en ce point O. Pour relier ces deux zones, le saut de PRANDTL

impose alors que dans la zone intermédiaire II toutes les bicaractéristiques de la même famille que OC et OD enveloppent le point O. Les équations en variables de SOKOLOWSKI montrent que, dans cette zone II, le point O peut être considéré comme une bicaractéristique dégénérée sur laquelle on peut appliquer la relation de KOTTER : $d\sigma + 2\sigma \operatorname{tg} \rho \, d\varphi = 0$ (En réalité, c'est seulement parce qu'on démontre que η (ou ξ) reste constant au passage de la discontinuité en O, que l'on conclut que ce point peut être considéré comme une bicaractéristique (cf. Cours de M. KRAVTCHENKO).

Ainsi construit, ce schéma répond le problème : dans la zone I, on a un problème de CAUCHY du type I ; dans notre cas, le massif est en état de RANKINE et on connaît explicitement V et φ en tous les points de la zone I.

Dans la zone II, c'est un problème du type II, où les données sont les deux bicaractéristiques O et OC, et dans la zone III, c'est un problème du type III dans lequel on connaît les valeurs de V et de φ sur la bicaractéristique OD et la fonction φ sur la frontière OC. On trouve donc les valeurs de V en tous les points de OH et par conséquent la répartition des contraintes sur le contour. Mais rappelons que ceci n'est valable que lorsque V ne s'annule pas en O, ce qui est précisément notre cas.

E - CONCLUSION.

Nous remarquons donc que la méthode habituellement employée pour passer la singularité n'est plus applicable : en effet, nous ne pouvons plus employer les variables de SOKOLOWSKI χ n'étant plus défini. O est un point singulier non seulement en regard de la discontinuité de φ en ce point mais en regard de la valeur que prend V en ce point et qui, elle, n'est pas discontinue. Nous sommes donc en présence d'une double singularité au point O. Il n'est plus possible de construire une solution dans laquelle toutes les bicaractéristiques d'une famille passent par le point singulier.

Pour résoudre cette singularité particulière, MM. KRAVTCHENKO et SIBILLE ont élaboré une méthode qui fait l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE II

METHODE DE MM. KRAVTCHENKO ET SIBILLE

La méthode de MM. KRAVTCHENKO et SIBILLE consiste à chercher au voisinage du point singulier une solution de la forme :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \equiv \sigma_0(\theta) + r \sigma_1(\theta) + r^2 \sigma_2(\theta) + \dots + r^n \sigma_n(\theta) + \dots \\ \varphi \equiv \varphi_0(\theta) + r \varphi_1(\theta) + r^2 \varphi_2(\theta) + \dots + r^n \varphi_n(\theta) + \dots \end{array} \right.$$

où r et θ sont les coordonnées polaires du plan quand on prend pour origine le point singulier, $\sigma_i(\theta)$ et $\varphi_i(\theta)$ des fonctions de θ seulement et analytiques.

Remarquons que les identités (1) ne représentent pas la solution la plus générale puisque l'on n'y considère qu'un développement limité en r de σ et φ .

Les équations de l'équilibre indéfini, en fonction de r et φ , s'écrivent :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - 2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \\ + \frac{2}{r} \sigma \sin \rho \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma \sin \rho \cos 2\varphi = \sigma \cos \theta \\ \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \\ + \frac{2}{r} \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma \sin \rho \sin 2\varphi = -\sigma \sin \theta \end{array} \right.$$

Pour la suite du calcul, nous prendrons $\gamma = 1$. On se ramènera aux cas où $\gamma \neq 1$ par un changement d'unité appropriée.

En introduisant les identités (1) dans les équations (2), nous obtenons si nous limitons au 3e ordre les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
 (2 \text{ bis}) \quad & \left[1 + \sin p \left(\cos 2\psi_0 - 2r\psi_1 \sin 2\psi_0 - 2r^2(\psi_1^2 \cos 2\psi_0 + \psi_2 \sin 2\psi_0) \right) \right] \times \\
 & (\sigma_1 + 2r\sigma_2 + 3r^2\sigma_3) - 2(\sigma_0 + r\sigma_1 + r^2\sigma_2) (\psi_1 + 2r\psi_2 + 3r^2\psi_3) \times \\
 & \sin p \times \left[\sin 2\psi_0 + 2r\psi_1 \cos 2\psi_0 + 2r^2(-\psi_1^2 \sin 2\psi_0 + \psi_2 \cos 2\psi_0) \right] \\
 & + \frac{1}{r} \sin p \left[\sin 2\psi_0 + 2r\psi_1 \cos 2\psi_0 + 2r^2(-\psi_1^2 \sin 2\psi_0 + \psi_2 \cos 2\psi_0) \right. \\
 & \left. + 2r^3(-2\psi_1\psi_2 \cos 2\psi_0 - (\psi_3 - \frac{2}{3}\psi_1^3) \sin 2\psi_0) \right] \times \\
 & \left(\frac{d\sigma_0}{d\theta} + r \frac{d\sigma_1}{d\theta} + r^2 \frac{d\sigma_2}{d\theta} + r^3 \frac{d\sigma_3}{d\theta} \right) \\
 & + \frac{2}{r} (\sigma_0 + r\sigma_1 + r^2\sigma_2 + r^3\sigma_3) \sin p \times \left(\frac{d\psi_0}{d\theta} + r \frac{d\psi_1}{d\theta} + r^2 \frac{d\psi_2}{d\theta} + r^3 \frac{d\psi_3}{d\theta} \right) \times \\
 & \left[\cos 2\psi_0 - 2r\psi_1 \sin 2\psi_0 - 2r^2(\psi_1^2 \cos 2\psi_0 + \psi_2 \sin 2\psi_0) \right. \\
 & \left. - 2r^3(-2\psi_1\psi_2 \cos 2\psi_0 - (\psi_3 - \frac{2}{3}\psi_1^3) \sin 2\psi_0) \right] \\
 & + \frac{2}{r} (\sigma_0 + r\sigma_1 + r^2\sigma_2 + r^3\sigma_3) \sin p \times \left[\cos 2\psi_0 - 2r\psi_1 \sin 2\psi_0 \right. \\
 & \left. - 2r^2(\psi_1^2 \cos 2\psi_0 + \psi_2 \sin 2\psi_0) - 2r^3(-2\psi_1\psi_2 \cos 2\psi_0 - (\psi_3 - \frac{2}{3}\psi_1^3) \sin 2\psi_0) \right] \\
 & \equiv \cos \theta
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \sin p \left[\sin 2\varphi_0 + 2r\varphi_1 \cos 2\varphi_0 + 2r^2(-\varphi_1^2 \sin 2\varphi_0 + \varphi_2 \cos 2\varphi_0) \right] \times \\
 & (\sigma_1 + 2r\sigma_2 + 3r^2\sigma_3) \\
 & + e(\sigma_0 + r\sigma_1 + r^2\sigma_2) \sin p(\varphi_1 + 2r\varphi_2 + 3r^2\varphi_3) \times \\
 & \left[\cos 2\varphi_0 - 2r\varphi_1 \sin 2\varphi_0 - 2r^2(\varphi_1^2 \cos 2\varphi_0 + \varphi_2 \sin 2\varphi_0) \right] \\
 & + \frac{1}{r} \left[1 - \sin p(\cos 2\varphi_0 - 2\varphi_1 \sin 2\varphi_0 - 2r^2(\varphi_1^2 \cos 2\varphi_0 + \varphi_2 \sin 2\varphi_0)) \right. \\
 & \left. - 2r^3(-2\varphi_1\varphi_2 \cos 2\varphi_0 - (\varphi_3 - \frac{2}{3}\varphi_1^3) \sin 2\varphi_0) \right] \times \\
 & \left(\frac{d\sigma_0}{d\theta} + r \frac{d\sigma_1}{d\theta} + r^2 \frac{d\sigma_2}{d\theta} + r^3 \frac{d\sigma_3}{d\theta} \right) \\
 & + \frac{2}{r} (\sigma_0 + r\sigma_1 + r^2\sigma_2 + r^3\sigma_3) \sin p \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta} + r \frac{d\varphi_1}{d\theta} + r^2 \frac{d\varphi_2}{d\theta} + r^3 \frac{d\varphi_3}{d\theta} \right) \times \\
 & \left[\sin 2\varphi_0 + 2r\varphi_1 \cos 2\varphi_0 + 2r^2(-\varphi_1^2 \sin 2\varphi_0 + \varphi_2 \cos 2\varphi_0) \right. \\
 & \left. + 2r^3(-2\varphi_1\varphi_2 \cos 2\varphi_0 - (\varphi_3 - \frac{2}{3}\varphi_1^3) \sin 2\varphi_0) \right] \\
 & + \frac{2}{r} (\sigma_0 + r\sigma_1 + r^2\sigma_2 + r^3\sigma_3) \sin p \times \left[\sin 2\varphi_0 + 2r\varphi_1 \cos 2\varphi_0 \right. \\
 & \left. + 2r^2(-\varphi_1^2 \sin 2\varphi_0 + \varphi_2 \cos 2\varphi_0) + 2r^3(-2\varphi_1\varphi_2 \cos 2\varphi_0 - (\varphi_3 - \frac{2}{3}\varphi_1^3) \sin 2\varphi_0) \right] \\
 & \equiv -\sin \theta
 \end{aligned}$$

Identifions les termes en $\frac{1}{r}$, r , r^2 etc...

L'identification des termes en $\frac{1}{r}$ donne :

$$(3) \quad \begin{cases} \sin p \sin 2\varphi_0 \frac{d\tau_0}{d\theta} + 2\tau_0 \sin p \cos 2\varphi_0 \frac{d\varphi_0}{d\theta} + 2\tau_0 \sin p \cos 2\varphi_0 = 0 \\ (1 - \sin p \cos 2\varphi_0) \frac{d\tau_0}{d\theta} + 2\tau_0 \sin p \sin 2\varphi_0 \frac{d\varphi_0}{d\theta} + 2\tau_0 \sin p \sin 2\varphi_0 = 0 \end{cases}$$

soit encore :

$$(4) \quad (\sin p - \cos 2\varphi_0) \frac{d\tau_0}{d\theta} = 0, \text{ d'où deux cas à distinguer}$$

1er cas :

$$\cos 2\varphi_0 = \sin p \quad \text{soit} \quad \varphi_0 = \pm \mu \quad (2\mu = \frac{\pi}{2} - p)$$

(3)₁ s'écrit alors $\frac{d\tau_0}{d\theta} \pm 2\tau_0 \tan p = 0$; on est dans le cas de la singularité de PRANDTL.

2e cas :

$$\varphi_0 \neq \pm \mu \quad \text{alors} \quad \frac{d\tau_0}{d\theta} = 0 \quad \tau_0 = \text{constante}$$

- Si $\tau_0 \neq 0$, (3)₁ donne $1 + \frac{d\varphi_0}{d\theta} = 0$ soit $\varphi_0 = -\theta + \theta_0$
d'où $\varphi = \varphi_0 + \theta = \text{constante}$.

Le point origine n'est pas un point singulier.

- Si $\tau_0 = 0$, alors φ_0 est indéterminé.

Pour étudier ce dernier sous-cas, poursuivons l'identification des termes en r^0 , r^1 etc... dans les identités 2 bis.

L'identification des termes en r^0 donne, après avoir résolu les équations par rapport aux dérivées :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_0}{d\theta} = \frac{\cos\theta - \sin\rho \cos(2\varphi_0 + \theta) - \sigma_1 \cos^2\rho}{2\sigma_1 \sin\rho (\cos 2\varphi_0 - \sin\rho)} - 1 \\ \frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{\sigma_1 \sin 2\varphi_0 - \sin(2\varphi_0 + \theta)}{\cos 2\varphi_0 - \sin\rho} \end{cases}$$

Ce système définit φ_0 et σ_1 en fonction de la variable θ et des constantes du milieu. Il n'est autre que le système donné par M. SOKOLOWSKI dans le cas d'un problème aux conditions aux limites homothétiques dans une homothétie de centre le point singulier. En effet, dans ce cas, les termes φ_i , σ_{i+1} , $i \geq 1$ sont identiquement nuls.

L'identification des termes en r donne les équations suivantes, résolues par rapport aux dérivées :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\theta} = \frac{1}{2\sigma_1 \sin\rho (\cos 2\varphi_0 - \sin\rho)} \times \left[2\sigma_2 (\sin\rho \cos 2\varphi_0 - 1) \right. \\ \quad + 2\varphi_1 \sin\rho \left(2\sigma_1 \frac{d\varphi_0}{d\theta} \sin 2\varphi_0 - 4\sigma_1 \sin 2\varphi_0 - \frac{d\sigma_1}{d\theta} (\cos 2\varphi_0 - \sin\rho) \right) \\ \quad \left. - 2\sin\rho (\cos 2\varphi_0 - \sin\rho) - \sin\rho \frac{d\varphi_0}{d\theta} (\cos 2\varphi_0 - \sin\rho) \right] \\ \frac{d\sigma_2}{d\theta} = \frac{2\sigma_2 \sin 2\varphi_0 - 4\sigma_1 \varphi_1 \sin\rho \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta} + 2 \right)}{\cos 2\varphi_0 - \sin\rho} \end{cases}$$

Enfin, l'identification des termes en r^2 conduit à :

$$(7) \quad \left[\begin{aligned} \frac{d\psi_2}{d\theta} &= \frac{1}{2\sigma_1 \sin(\cos(2\psi_0) - \sin\psi)} \times \left[-3\sigma_3(1 - \sin\psi \cos 2\psi_0) \right. \\ &+ (\cos 2\psi_0 - \sin\psi) \left[-2\psi_1 \sin\psi \frac{d\sigma_2}{d\theta} - 2\sin\psi \frac{d\sigma_1}{d\theta} \psi_2 \right. \\ &- 2\sigma_2 \sin\psi \frac{d\psi_1}{d\theta} + 4\sigma_1 \psi_1^2 \sin\psi \frac{d\psi_0}{d\theta} - 2\sigma_3 \sin\psi \frac{d\psi_0}{d\theta} \\ &+ 10\sigma_1 \psi_1^2 \sin\psi - 5\sigma_3 \sin\psi \left. \right] + 2\psi_1 \sin\psi \sin 2\psi_0 \left(\psi_1 \frac{d\sigma_1}{d\theta} + 2\sigma_1 \frac{d\psi_1}{d\theta} \right) \\ &+ 2\sin\psi \sin 2\psi_0 (\sigma_1 \psi_2 + \sigma_2 \psi_1) \left(2 \frac{d\psi_0}{d\theta} + 5 \right) \left. \right] \\ \\ \frac{d\sigma_3}{d\theta} &= \frac{1}{\cos 2\psi_0 - \sin\psi} \times \left[3\sigma_3 \sin 2\psi_0 - 2\sin\psi \left(\psi_1 \frac{d\sigma_1}{d\theta} + 2\sigma_1 \frac{d\psi_1}{d\theta} \right) \right. \\ &\left. - 2\sin\psi (\sigma_1 \psi_2 + \sigma_2 \psi_1) \right] \end{aligned} \right]$$

Ainsi, en intégrant par une méthode quelconque et, successivement, les systèmes (5), (6), (7), etc... nous obtenons les différents termes du développement limité de σ et ψ .

En pratique, il n'est pas possible de déterminer le rayon de convergence de (1) et d'écrire explicitement les termes d'un ordre supérieur à 3 étant donné la complexité des équations différentielles.

Le système d'ordre n s'écrit :

$$\frac{d\tau_{n+1}}{d\theta} = \frac{-1}{\cos 2\varphi_0 - \sin \varphi} \left[\begin{aligned} &-(n+1) \tau_{n+1} \sin 2\varphi_0 - \sin \varphi \left(a_0 \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=n+1}}^n b_i \times j \times \tau_j \right. \\ &- b_0 \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=n+1}}^n a_i \times j \times \tau_j \Big) + 2 \sin \varphi \left(a_0 \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=n}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j+1}}^j a_k \rho \varphi_p \right) \right. \\ &+ b_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+j=n}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j+1}}^j b_k \rho \varphi_p \right) \Big) - \sin \varphi \left(a_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^n a_k \frac{d\tau_i}{d\theta} \right. \\ &+ b_0 \sum_{\substack{i=1 \\ k+i=n+1}}^n b_k \frac{d\tau_i}{d\theta} \Big) - 2 \sin \varphi \left(a_0 \sum_{\substack{i=2 \\ i+j=n+1}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j}}^j b_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \right) \right. \\ &- b_0 \sum_{\substack{i=2 \\ i+j=n+1}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j}}^j a_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \right) \Big) - 2 \tau_1 \sin \varphi \times \\ &\left. \left(a_0 \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=n}}^n b_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} - b_0 \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=n}}^n a_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \right) \right. \\ &\left. - 2 \sin \varphi \left(a_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^{n+1} \tau_i b_k - b_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^{n+1} \tau_i a_k \right) \right] \end{aligned} \right]$$

$$\frac{d\varphi_n}{d\theta} = \frac{-1}{2 \tau_1 \sin \varphi (\cos 2\varphi_0 - \sin \varphi)} \left[\begin{aligned} &(1 - \sin \varphi \cos 2\varphi_0) (n+1) \tau_{n+1} \\ &+ \sin \varphi \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=n+1}}^n b_i j \tau_j - 2 \sin \varphi \sum_{\substack{i=1 \\ i+j=n}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j+1}}^j a_k \rho \varphi_p \right) \\ &+ \sin \varphi \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^n a_k \frac{d\tau_i}{d\theta} + 2 \sin \varphi \sum_{\substack{i=2 \\ i+j=n+1}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j}}^j b_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \right) + 2 \tau_1 \sin \varphi \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=n}}^n b_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \\ &+ 2 \sin \varphi \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^n \tau_i b_k - \sin^2 \varphi \left[b_0 (n+1) \tau_{n+1} + b_0 \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=n+1}}^n b_i j \tau_j \right. \\ &+ a_0 \sum_{\substack{i=0 \\ i+j=n+1}}^n a_i \times j \times \tau_j - 2 b_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+j=n}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j+1}}^j a_k \rho \varphi_p \right) - a_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^n b_k \frac{d\tau_i}{d\theta} \\ &+ 2 a_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+j=n}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j+1}}^j b_k \rho \varphi_p \right) + b_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^n a_k \frac{d\tau_i}{d\theta} + 2 b_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^n \tau_i b_k \\ &+ 2 b_0 \sum_{\substack{i=2 \\ i+j=n+1}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j}}^j b_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \right) + 2 a_0 \sum_{\substack{i=2 \\ i+j=n+1}}^n \left(\tau_i \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=j}}^j a_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \right) \\ &\left. + 2 \tau_1 \left(b_0 \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=n}}^n b_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} + a_0 \sum_{\substack{k=0 \\ k+l=n}}^n a_k \frac{d\varphi_p}{d\theta} \right) + 2 a_0 \sum_{\substack{i=1 \\ i+k=n+1}}^{n+1} \tau_i a_k \right] \end{aligned} \right]$$

où a_i et b_i représentent les coefficients de r^i dans les développements de $\sin 2\varphi_0$ et $\cos 2\varphi_0$.

CHAPITRE III

ETUDE DES COURBES INTEGRALES

A - ETUDE DES POINTS SINGULIERS.

1) Etude des points singuliers du premier système :

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d\varphi_0}{d\theta} = \frac{\cos \theta - \sin \rho \cos (2\varphi_0 + \theta) - \sigma_1 \cos^2 \rho}{2 \sigma_1 \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho)} - 1 \\ \frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{\sigma_1 \sin 2\varphi_0 - \sin (2\varphi_0 + \theta)}{\cos 2\varphi_0 - \sin \rho} \end{array} \right.$$

Les singularités du système (5) ont été étudiées par MM. RAVIZE et HEURTAUX en utilisant la méthode de H. POINCARÉ. Rappelons brièvement cette méthode : on introduit la variable auxiliaire t , définie à une constante additive près, par :

$$(5 \text{ bis}) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d\varphi_0}{dt} = \cos \theta - \sin \rho \cos (2\varphi_0 + \theta) - \sigma_1 \cos^2 \rho \\ \quad \quad \quad - 2 \sigma_1 \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho) \\ \frac{d\theta}{dt} = 2 \sigma_1 \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho) \\ \frac{d\sigma_1}{dt} = 2 \sigma_1 \sin \rho (\sigma_1 \sin 2\varphi_0 - \sin (2\varphi_0 + \theta)) \end{array} \right.$$

Les seconds membres étant holomorphes dans le voisinage de tout système de valeurs initiales, les seuls points singuliers de (5) sont donnés par :

$$\frac{d\gamma_0}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\tau_1}{dt} = 0 \quad t = \pm \infty$$

D'où deux lignes de points singuliers

$$\gamma_0 = -X\mu \quad \tau_1 = \frac{\cos(\theta + X\epsilon)}{\cos \rho}$$

où $X = +1$: sol en état de poussée

$X = -1$: sol en état de butée.

Ces lignes coïncident avec la limite de la zone de RANKINE.

Pour étudier les courbes $\tau_1(\theta)$ et $\gamma_0(\theta)$ au voisinage des points singuliers, nous posons :

$$\tau_1 = \frac{\cos(\alpha + X\epsilon)}{\cos \rho} + h_1 \quad \gamma_0 = -X\mu + f_0$$

$$\theta = \alpha + g$$

où

$$\frac{\cos(\alpha + X\epsilon)}{\cos \rho}, -X\mu$$

et α sont les coordonnées d'un point singulier et f_0, g, h_1 des infiniment petits.

En portant les valeurs ci-dessus dans les équations (5 bis), en linéarisant et en intégrant, M. HEURTAUX a obtenu les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -X\mu + (Bt + C) \exp(-4X \sin p \cos(\alpha + Xp)t) \\ \theta &= \alpha - \exp(-4X \sin p \cos(\alpha + Xp)t) \times \\ &\quad \left[Bt + C + \frac{X B}{4 \sin p \cos(\alpha + Xp)} \right] \\ \tau_i &= \frac{\cos(\alpha + Xp)}{\cos p} + \frac{\exp(-4X \sin p \cos(\alpha + Xp)t)}{\cos^3 p} \times \\ &\quad \left[(\sin \alpha - X \sin p \cos(\alpha + Xp))(Bt + C) + \right. \\ &\quad \left. B \left(\frac{X \cos p \sin(\alpha + Xp)}{4 \sin p \cos(\alpha + Xp)} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

où B et C sont des constantes.

Le point singulier est atteint pour $t = X \infty$

$$\frac{d\varphi_0}{d\theta} = -1 + \frac{1}{4X \sin p \cos(\alpha + Xp)} \times \frac{1}{t + \frac{C}{B}}$$

Toutes les courbes $\varphi_0(0)$ ont une tangente commune au point singulier. Il en est de même pour les courbes $\sigma_1(0)$

Nous remarquons d'autre part que le point singulier est un point d'arrêt pour les courbes intégrales.

2) Etude des points singuliers du deuxième système (6) :

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\theta} &= \frac{1}{2\sigma_1 \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho)} \left[2\varphi_1 \sin \rho (4\sigma_1 \sin 2\varphi_0 \right. \\ &\quad + 2\sigma_1 \frac{d\varphi_0}{d\theta} \sin 2\varphi_0 - \frac{d\sigma_1}{d\theta} (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho)) + 2\sigma_2 (\sin \rho \cos 2\varphi_0 \\ &\quad \left. - 1 - 2 \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho) - \sin \rho \frac{d\varphi_2}{d\theta} (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho) \right] \\ \frac{d\sigma_2}{d\theta} &= \frac{2\sigma_2 \sin 2\varphi_0 - 4\sigma_1 \varphi_1 \sin \rho (\frac{d\varphi_0}{d\theta} + 2)}{\cos 2\varphi_0 - \sin \rho} \end{aligned}$$

L'étude des singularités du système (6) se présente d'une façon assez différente de l'étude des singularités de (5).

En effet le système (6) contient d'une part les inconnues propres à ce système : σ_2 et φ_1 et, d'autre part les inconnues du système (5) σ_1 et φ_0 .

Les deuxièmes membres de (6) sont holomorphes dans le voisinage de tout système de valeurs initiales de sorte que (6) est du type étudié par H. POINCARÉ.

Introduisons donc la variable auxiliaire t_1 de la façon suivante :

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt_1} &= -\frac{d\varphi_1}{dt} \cdot 2\varphi_1 \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho) - 2\varphi_2 \frac{d\theta}{dt} (1 - \sin \rho \cos 2\varphi_0) \\ &\quad - \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta} + 2 \right) (2\varphi_2 \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho) - 4\varphi_1 \varphi_2 \sin \rho \sin 2\varphi_0) \\ \frac{d\varphi_2}{dt_1} &= 2\varphi_1 \sin \rho \left[2\varphi_2 \sin 2\varphi_0 - 4\varphi_1 \varphi_2 \sin \rho \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta} + 2 \right) \right] \times \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt_1} &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

de façon que les deuxièmes membres se mettent sous forme de polynômes après développement de TAYLOR au voisinage d'un point.

Les points singuliers de (6) sont donnés par :

$$\frac{d\varphi_2}{dt_1} = \frac{d\varphi_1}{dt_1} = \frac{d\theta}{dt_1} = 0 \quad t = \pm \infty$$

$\frac{d\theta}{dt_1} = 0$ donne $\varphi_0 = -X\mu$ comme pour le premier ordre, donc $\theta = \alpha$ d'après III.A.1)

et $\theta = \alpha$ quels que soient φ_2 et φ_1 sont vérifiées quand $\varphi_0 = -X\mu$

Nous sommes donc en présence d'un plan de points singuliers dans l'espace $(\varphi_2, \varphi_1, \theta)$

Les deuxièmes membres de (6) dépendant de τ_1 et γ_0 nous ne pouvons pas linéariser (6) seul, mais (5) et (6) ensemble..., c'est-à-dire que, dans la linéarisation de (6), h_1 , f_0 et g doivent être considérés comme des inconnues, a priori infiniment petits du même ordre que h_2 et f_1 introduits ci-dessous.

Nous posons :

$$\tau_1 = \frac{\cos(\alpha + \chi e)}{\cos \rho} + h_1$$

$$\gamma_0 = -\chi \mu + f_0$$

$$\theta = \alpha + g$$

$$\tau_2 = \tau_{20} + h_2$$

$$\gamma_1 = \gamma_{10} + f_1$$

où τ_{20} , γ_{10} et α sont les coordonnées d'un point singulier dans l'espace $(\tau_2, \gamma_1, \theta)$.

Nous distinguerons deux cas :

a) τ_{20} et $\gamma_{10} \neq 0$

ou l'un des deux seulement $\neq 0$

Nous ne traitons que le cas où τ_{20} et $\gamma_{10} \neq 0$.
Les autres cas conduisent aux mêmes résultats.

Linéarisons (6.1) :

$$(6.2) \quad \left| \begin{aligned} h'_2(t_1) &= 8 \operatorname{tg}^2 \rho \cos^2(\alpha + \chi e) \left[-2 \tau_{20} \cos^2 \rho f_0 - \gamma_{10} \times \right. \\ &\quad \left. (-g(\sin \alpha + \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)) + 2 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) f_0 - h_1 \cos^2 \rho) \right] \\ f'_1(t_1) &= -4 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) \gamma_{10} \left[-g(\sin \alpha + \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)) \right. \\ &\quad \left. + 2 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) f_0 - h_1 \cos^2 \rho \right] - 2 \tau_{20} \cos^2 \rho \times \\ &\quad 4 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) f_0 \end{aligned} \right.$$

Nous voyons que :

$$h_2'(t_1) = \frac{e \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)}{\cos^2 \rho} f_1'(t_1)$$

(6.3) soit
$$h_2(t_1) = \frac{e \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)}{\cos^2 \rho} f_1(t_1)$$

la constante d'intégration est nulle car h_2 et f_1 s'annulent pour la même valeur de t_1 .

La deuxième équation de (6.2) s'intègre facilement en remplaçant g , f_0 et h_1 par leurs valeurs trouvées en III.A.1) et, en remarquant que :

$$\frac{dt}{dt_1} = \frac{d\theta}{dt} = 4 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) f_0$$

$$f_1(t) = \gamma_{10} \left[(\sin \alpha + \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)) \int_{f_0}^{\frac{g}{f_0}} dt + \cos^2 \rho \int_{f_0}^{\frac{h_1}{f_0}} dt - e \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) \int dt \right] - 2 \sigma_{20} \cos^2 \rho \int dt$$

$$f_1(t) = -t \left[2 \sigma_{20} \cos^2 \rho + 2 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) \gamma_{10} \right]$$

$$+ \text{Log} \left| t + \frac{C}{B} \right| \times \frac{-1}{4 \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)} + \text{Cste}$$

$f_1(t) \rightarrow \infty$ avec t

$f_1(t)$ ne peut être considéré comme un infiniment petit.

Il n'existe donc pas de point singulier à distance finie (le point origine exclu).

Les courbes admettent une asymptote que l'on trouve, en posant :

$$\frac{d\sigma_2}{d\varphi_1} \sim \frac{\sigma_2}{\varphi_1} \quad \text{avec} \quad \sigma_2 \rightarrow \infty, \quad \varphi_1 \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad t \rightarrow \infty$$

Un calcul d'équivalence au voisinage de $t = \infty$ conduit à :

$$\frac{\sigma_2}{\varphi_1} \sim \frac{2X \sin \rho \cos(\alpha + X\rho)}{\cos^2 \rho} \quad \theta = \alpha$$

qui représente la direction asymptotique.

b) $\sigma_{20} = \varphi_{10} = 0$

Dans ce cas, nous ne pouvons plus linéariser (6.1), les termes du premier ordre étant nuls.

Nous devons considérer les termes du deuxième ordre :

$$(6.4) \quad \begin{cases} h'_2(t_1) = 8 \tan^2 \rho \cos^2(\alpha + X\rho) \left[-\varepsilon h_2 f_0 \cos^2 \rho + \right. \\ \left. f_1 \left(g(\sin \alpha + X \sin \rho \cos(\alpha + X\rho)) - 2X \sin \rho \cos(\alpha + X\rho) f_0 + h_1 \cos^2 \rho \right) \right] \\ f'_1(t_1) = 4X \sin \rho \cos(\alpha + X\rho) \left[-\varepsilon h_2 f_0 \cos^2 \rho + \right. \\ \left. f_1 \left(g(\sin \alpha + X \sin \rho \cos(\alpha + X\rho)) - 2X \sin \rho \cos(\alpha + X\rho) f_0 + h_1 \cos^2 \rho \right) \right] \end{cases}$$

La relation (6.3) est toujours valable :

$$(6.3) \quad h_e(t) = \frac{e \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)}{\cos^2 \rho} f_1(t)$$

Portons (6.3) dans la deuxième équation de (6.4), et comme en a) remplaçons f_0 , g et h_1 par leurs valeurs en fonction de t :

$$f_1'(t) = f_1 \left[-8 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) t - \frac{1}{t + \frac{C}{B}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad & f_1(t) = \frac{D \exp(-8 \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) t)}{t + \frac{C}{B}} \\ (6.5) \quad & h_e(t) = \frac{e \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)}{\cos^2 \rho} f_1(t) \end{aligned}$$

$\nabla_{20} = \varphi_{20} = 0$ $\theta = \alpha$ représente donc un point singulier pour (6.1).

Au point singulier, les tangentes aux courbes sont données par :

$$\frac{d\varphi_1}{d\theta} = \frac{d\varphi_1}{dt} \times \frac{dt}{d\theta} \rightarrow 0 \text{ avec } t \rightarrow \chi \infty$$

de même :

$$\frac{d\sigma_2}{d\theta} \rightarrow 0 \quad \text{avec } t \rightarrow \chi \infty$$

Toutes les courbes intégrales admettent même tangente au point singulier.

Remarquons d'autre part que le point singulier est un point d'arrêt pour les courbes intégrales, comme au premier ordre.

Remarque : les valeurs $\nabla_2 = 0$ et $\varphi_0 = 0$ représentent le deuxième ordre de ∇ et φ dans la zone I de RANKINE. En effet, dans cette zone, les valeurs de ∇ sont homothétiques par rapport à l'origine et φ est constant. Tous les termes ∇_i et φ_{i-1} pour $i \geq 2$ sont nuls.

c) Conclusion :

Il existe deux points singuliers : $\varphi_1 = \nabla_2 = 0$ et le point à l'infini dans la direction

$$\frac{\nabla_2}{\varphi_1} = \frac{e \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)}{\cos^2 \rho} \quad \theta = \alpha$$

3) Etude des points singuliers du troisième système (7) :

Cette étude est en tout point semblable à celle faite au 2) pour les points singuliers du deuxième système. Nous nous bornons à en donner les grandes lignes.

Les deuxièmes membres de (7) sont holomorphes dans le voisinage de tout système de valeurs initiales.

Le système (7) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sqrt{3}}{d\theta} &= \frac{1}{\cos 2\varphi_0 - \sin \rho} \left[-2 \sin \rho (\sqrt{1} \varphi_2 + \sqrt{2} \varphi_1) \left(2 \frac{d\varphi_0}{d\theta} + 5 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 3 \sqrt{3} \sin 2\varphi_0 - 2 \sin \rho \varphi_1 \left(\varphi_1 \frac{d\sqrt{1}}{d\theta} + 2 \sqrt{1} \frac{d\varphi_1}{d\theta} \right) \right] \\
 \frac{d\varphi_2}{d\theta} &= \frac{1}{2 \sqrt{1} \sin \rho} \left[-2 \varphi_1 \sin \rho \frac{d\sqrt{2}}{d\theta} - 2 \sin \rho \varphi_2 \frac{d\sqrt{1}}{d\theta} \right. \\
 &\quad - 2 \sqrt{2} \sin \rho \frac{d\varphi_1}{d\theta} + 4 \sqrt{1} \varphi_1^2 \sin \rho \frac{d\varphi_0}{d\theta} - 2 \sqrt{3} \sin \rho \frac{d\varphi_0}{d\theta} \\
 &\quad \left. + 10 \sqrt{1} \varphi_1^2 \sin \rho - 5 \sqrt{3} \sin \rho \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2 \sqrt{1} \sin \rho (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho)} \left[-3 \sqrt{3} (1 - \sin \rho \cos 2\varphi_0) \right. \\
 &\quad + 2 \varphi_1 \sin \rho \sin 2\varphi_0 \left(\varphi_1 \frac{d\sqrt{1}}{d\theta} + 2 \sqrt{1} \frac{d\varphi_1}{d\theta} \right) \\
 &\quad \left. + 2 \sin \rho \sin 2\varphi_0 (\sqrt{1} \varphi_2 + \sqrt{2} \varphi_1) \left(2 \frac{d\varphi_0}{d\theta} + 5 \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Nous introduisons la variable auxiliaire t_1 par :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_3}{dt_1} &= 2\sigma_1 \sin \rho \left[3\sigma_3 \sin 2\varphi_0 \frac{d\theta}{dt} - e \sin \rho (\sigma_1 \varphi_2 + \sigma_2 \varphi_1) \right. \\
 &\quad \left. \left(2 \frac{d\varphi_0}{dt} + 5 \frac{d\theta}{dt} \right) - 2 \sin \rho \varphi_1 \frac{d\theta}{dt} \left(\varphi_1 \frac{d\sigma_1}{d\theta} + 2\sigma_1 \frac{d\varphi_1}{d\theta} \right) \right] \\
 \frac{d\varphi_2}{dt_1} &= (\cos 2\varphi_0 - \sin \rho) \left[-2\varphi_1 \sin \rho \frac{d\sigma_2}{dt} - 3 \sin \rho \varphi_2 \frac{d\sigma_1}{dt} \right. \\
 &\quad - 2\sigma_2 \sin \rho \frac{d\varphi_0}{dt} + 4\sigma_1 \varphi_1^2 \sin \rho \frac{d\varphi_0}{dt} - 2\sigma_3 \sin \rho \frac{d\varphi_0}{dt} \\
 &\quad \left. + 10 \sigma_1 \varphi_1^2 \sin \rho \frac{d\theta}{dt} - 5\sigma_2 \sin \rho \frac{d\theta}{dt} \right] \\
 &\quad - 3\sigma_3 \frac{d\theta}{dt} (1 - \sin \rho \cos 2\varphi_0) + 2\varphi_1 \sin \rho \sin 2\varphi_0 \times \\
 &\quad \left(\varphi_1 \frac{d\sigma_1}{dt} + 2\sigma_2 \frac{d\varphi_1}{dt} \right) + 2 \sin \rho \sin 2\varphi_0 (\sigma_1 \varphi_2 + \sigma_2 \varphi_1) \times \\
 &\quad \left(2 \frac{d\varphi_0}{dt} + 5 \frac{d\theta}{dt} \right) \\
 \frac{d\theta}{dt_1} &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\
 \frac{d\theta}{dt_1} &= 0 \text{ donne } \varphi_0 = -\chi_\mu, \theta = \alpha
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt_1} = \frac{d\sigma_3}{dt_1} = 0 \text{ sont identiquement vérifiées.}$$

Nous posons :

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + f_2$$

$$\sigma_3 = \sigma_{30} + h_3$$

Les deuxièmes membres de (7.1) contenant non seulement γ_3 et γ_2 mais $\gamma_2, \gamma_1, \gamma_1$ et γ_0 , nous devons linéariser (5), (6) et (7) en même temps en considérant g, f_0, f_1, h_1, h_2 comme des inconnues, a priori infiniment petits du même ordre que f_2 et f_3 .

Nous sommes amenés à distinguer deux cas :

a) γ_{20} et $\gamma_{30} \neq 0$

Ce cas conduit comme dans 2).a) à des fonctions h_3 et f_2 tendant vers l'infini avec t alors que, par hypothèse, ce sont des infiniment petits.

Il n'y a donc pas de point singulier à distance finie, l'origine exceptée, et un calcul d'équivalence donne la direction asymptotique :

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_2} = \frac{e X \sin \varphi \cos(\alpha + \chi e)}{\cos \varphi}$$

b) $\gamma_{20} = \gamma_{30} = 0$

Dans ce cas, la linéarisation n'est plus possible. Nous devons donc considérer les termes du deuxième ordre.

Nous obtenons :

$$h_3(t_1) = \frac{e X \sin \varphi \cos(\alpha + \chi e)}{\cos \varphi} f_2(t_1)$$

puis :

$$\frac{df_2}{dt} = f_2 \left[-12 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) - \frac{1}{t + \frac{c}{B}} \right] + f_1 \left[4 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) - \frac{1}{t + \frac{c}{B}} \right]$$

L'équation sans second membre donne :

$$f_2 = E \frac{\exp(-12 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) t)}{t + \frac{c}{B}} \quad \text{où } E = \text{constante.}$$

Faisons varier la constante :

$$E' = D \exp(4 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) t) \left[4 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) - \frac{1}{t + \frac{c}{B}} \right]$$

$$E = D \left[\exp(4 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) t) - \int \frac{\exp(4 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) t)}{t + \frac{c}{B}} dt \right] + F$$

L'intégrale qui figure dans l'expression de E n'est autre que l'exponentielle intégrale $E_x(4 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) t)$ du moins au voisinage de l'infini.

$$\text{Or, au voisinage de } +\infty \quad \frac{e^u}{u} \ll e^u$$

$$\Rightarrow e^u \gg \int \frac{e^u}{u} du$$

Donc :

$$E \sim D \exp(4 \chi \sin p \cos (\alpha + \chi p) t) + F$$

et

$$f_2 = D \frac{\exp(-8\lambda \sin p \cos(\alpha + \lambda e)t)}{t + \frac{c}{B}} + F \frac{\exp(-12\lambda \sin p \cos(\alpha + \lambda e)t)}{t + \frac{c}{B}}$$

$$h_3 = \frac{e \lambda \sin p \cos(\alpha + \lambda e)}{\cos^2 p} f_2$$

Au point singulier les tangentes aux courbes sont données par :

$$\frac{d\psi_2}{d\theta} = \left(\frac{f_2'}{g'} \right)_{t=\lambda_\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dh_3}{d\theta} = \left(\frac{h_3'}{g'} \right)_{t=\lambda_\infty} = 0$$

Toutes les courbes intégrales ont même tangente.

Le point singulier est encore un point d'arrêt pour les courbes intégrales.

4) Conclusion :

Les singularités des systèmes (6) et (7) coïncident avec celles de (5) : $\psi_0 = -\lambda \mu$. Ceci est valable pour tous les systèmes suivants correspondant aux termes des développements limités de ψ et σ . En effet, dans les expressions de $\frac{d\psi_i}{d\theta}$ et $\frac{d\sigma}{d\theta}$ apparaît toujours au dénominateur la quantité $\cos^2 \psi_0 - \sin^2 p$. Mais les singularités de l'ordre deux et au-dessus ne sont pas du même type que celles du premier ordre. Le système (5) admet une ligne de points

singuliers alors que les systèmes (6) et (7) ont un seul point singulier à distance finie -le point origine- et des branches infinies de même direction asymptotique. C'est de là que découlent les principales difficultés de l'intégration numérique des équations différentielles.

$$\varphi_0 = -\chi_\mu, \quad \varphi_1 = \dots = \varphi_i = 0, \quad \sigma_1 = \frac{\cos(\alpha + \chi_0)}{\cos \rho},$$

$$\sigma_2 = \dots = \sigma_{i+1} = 0, \quad \theta = \alpha$$

qui représentent dans l'espace à $3i + 4$ dimensions le seul point singulier à distance finie sont précisément les coefficients du développement limité de σ et φ sur la bicaractéristique limitant la zone de RANKINE dans le cas d'un milieu pesant pulvérulent non chargé.

Les autres points singuliers sont à l'infini et donnent des valeurs infinies de certains φ_i et σ_i . Ces points singuliers ne peuvent donc être utilisés pour le passage de la singularité à l'origine. Ceci est évident d'après le raisonnement fait dans le § II, où l'on distingue le cas du massif non chargé, qui conduit aux systèmes (5), (6), (7), etc... et, celui du massif chargé qui conduit au passage de la singularité par le saut de PRANDTL.

B - ETUDE DES COURBES INTEGRALES. CONDITIONS AUX LIMITES.

1) Courbes intégrales :

Les deuxièmes membres des équations différentielles des systèmes (5), (6) et (7) étant holomorphes dans le voisinage de tout système de valeurs initiales, il ne passe par un point de l'espace, différent des points singuliers étudiés en A), qu'une courbe intégrale et une seule.

Or, toutes les courbes intégrales du premier système passent par l'un des points singuliers situé sur la ligne de point singulier. Les courbes intégrales passant par un point singulier donné engendrent une surface, puisque cela revient à fixer une condition géométrique supplémentaire.

Pour les autres systèmes, le raisonnement reste valable, la ligne de points singuliers dégénérant en un point singulier et une asymptote passant par ce point. Les courbes intégrales passant par l'origine engendrent une surface.

2) Conditions aux limites :

Nous intégrons les équations différentielles dans un domaine limité par le contour de la roue et la dernière bicaractéristique de la zone de RANKINE. Les conditions aux limites comportent donc deux parties :

a) La bicaractéristique limitant la zone de RANKINE.

σ et φ sont imposés sur cette frontière qui coïncide avec la ligne de points singuliers.

$$\varphi = -X\mu \qquad \sigma = \frac{\cos(\alpha + X_e)}{\cos \varphi} r$$

d'où : $\varphi_0 = -\chi_\mu$, $\sigma_1 = \frac{\cos(\alpha + \chi_e)}{\cos \rho}$, $\varphi_i = 0$, $\sigma_{i+1} = \infty$, $i \geq 1$

Pour un problème particulier, α et ρ sont des données. Cela revient à faire le choix d'un point singulier.

Toutes les solutions des équations intégrales satisfaisant à ces conditions aux limites sont des courbes situées sur une même surface dans les espaces $(\varphi_i, \sigma_{i+1}, \theta)$. Cela va nous permettre en b) de trouver les conditions aux limites possibles sur le contour de la roue.

Remarquons d'autre part que σ_i et φ_i sont continues au travers de la bicaractéristique limite.

b) Le contour de la roue.

Comme nous venons de le voir les courbes intégrales du premier système par exemple sont situées, pour un problème donné, sur une surface.

Pour avoir une solution du problème, nous devons donc nous fixer sur le contour de la roue la valeur de σ_1 ou de φ_0 . σ_1 étant l'inconnue, c'est φ_0 que nous fixerons. La droite $\varphi_0 = (\varphi_0)_0$, $\theta = 1$ coupe la surface intégrale en un point (que nous supposons unique) et, par ce point, il ne passe qu'une courbe intégrale $\sigma_1 = \sigma_1(\theta)$, $\varphi_0 = \varphi_0(\theta)$.

Le raisonnement est valable pour les autres systèmes différentiels.

Pour pouvoir résoudre le problème, nous devons donc nous donner φ_0, φ_1 etc..., c'est-à-dire φ sur le contour de la roue.

φ est directement lié à l'inclinaison δ des contraintes sur la roue par :

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + \lambda + \frac{\delta(\theta) + \Delta(\theta)}{e} - \frac{\pi}{2} (\lambda - 1)$$

où $\Delta(\theta) = \text{Arc sin} \left(\frac{\sin \delta}{\sin \lambda} \right)$

et θ est l'angle polaire du point du contour considéré. φ est donc directement lié à $\delta(\theta)$ qui sera la donnée frontière sur la roue.

3) Calcul de φ_i sur la roue :

L'équation du contour de la roue est :

$$r = 2R \sin(\lambda - \theta)$$

Posons $\lambda - \theta = \eta$. Au voisinage de l'origine :

$$r \approx 2R\eta \quad \text{soit} \quad \eta \approx \frac{r}{2R}$$

Au voisinage de l'origine, nous connaissons les développements de $\delta(\theta)$ qui est une donnée et de $\Delta(\theta)$ qui lui est directement lié :

$$\delta(\theta) = \delta_0 + \delta_1 \eta + \delta_2 \eta^2 + \dots$$

$$\Delta(\theta) = \Delta_0 + \Delta_1 \eta + \Delta_2 \eta^2 + \dots$$

Et, puisque :
$$\varphi = \theta - \lambda + \frac{\delta(\theta) - X \Delta(\theta)}{2} - \frac{\pi}{4} (X-1)$$

$$\varphi = \frac{\delta_0 - X \Delta_0}{2} + \frac{\pi}{4} (1-X) + \left(\frac{\delta_1 - X \Delta_1}{2} - 1 \right) \eta + \frac{\delta_2 - X \Delta_2}{2} \eta^2 + \dots$$

d'où :

$$\varphi_0 = \frac{\delta_0 - X \Delta_0}{2} + \frac{\pi}{4} (1-X)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2R} \left(\frac{\delta_1 - X \Delta_1}{2} - 1 \right)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4R^2} \frac{\delta_2 - X \Delta_2}{2}$$

Quand δ est une constante sur la roue :

$$\delta_1 = \delta_2 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$$

et :
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} (1-X) + \frac{\delta_0 + X \Delta_0}{2}$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2R} \quad \varphi_2 = 0$$

De la définition de Δ :

$$\sin \Delta = \frac{\sin \delta}{\sin \rho}$$

nous tirons :

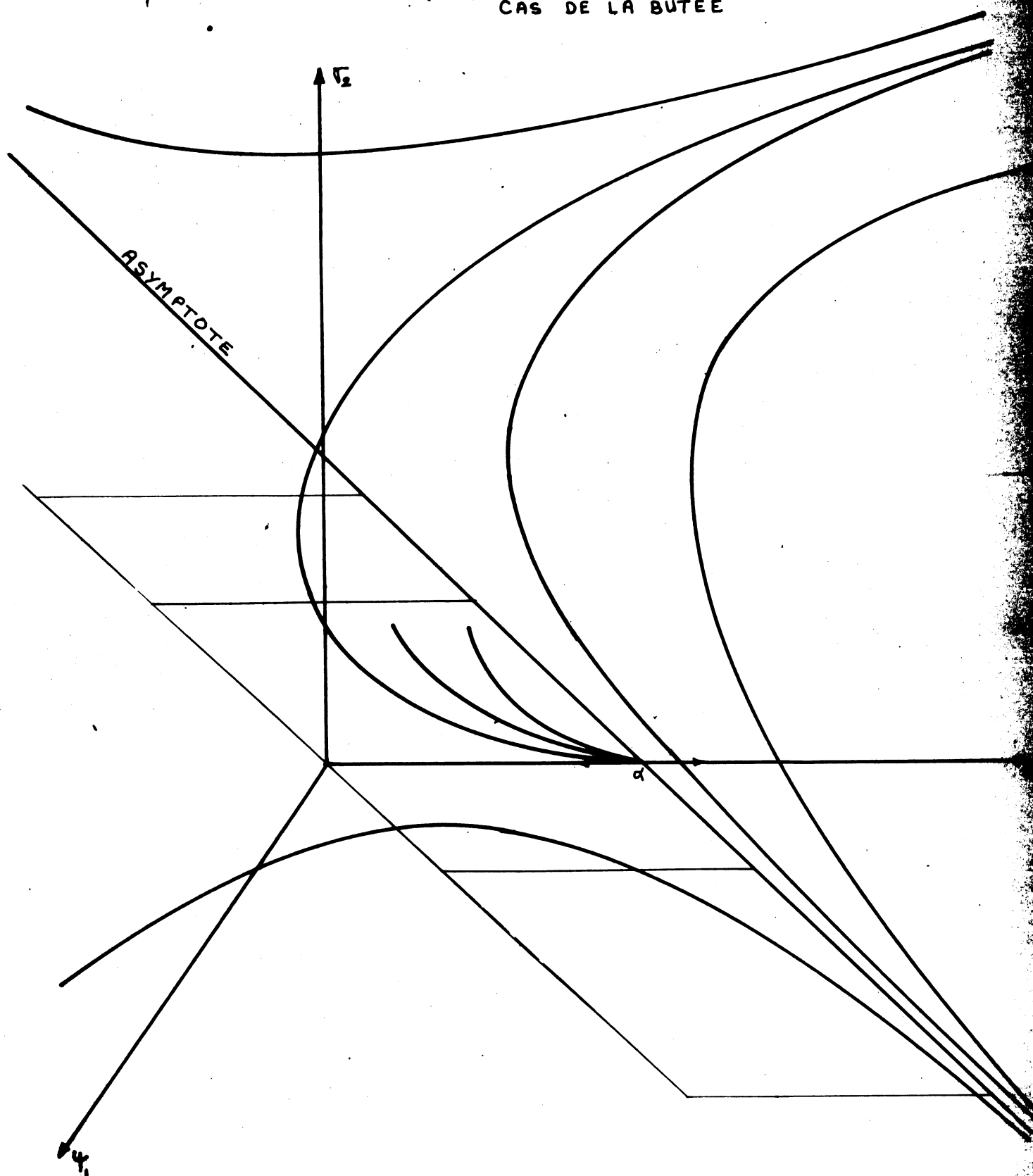
$$\Delta_0 = \text{Arc sin } \frac{\sin \delta_0}{\sin \rho}$$

puis :
$$\Delta_1 = \frac{\delta_1 \cos \delta_0}{\cos \Delta_0 \sin \rho}$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{\cos \Delta_0} \left[\sin \Delta_0 \Delta_1^2 + \frac{\cos \delta_0}{\sin \rho} \delta_2 - \frac{\sin \delta_0}{2 \sin \rho} \delta_1^2 \right]$$

INTEGRALES DU SECOND SYSTEME

CAS DE LA BUTEE



4) Conditions aux frontières particulières :

Comme nous le verrons au chapitre suivant, nous intégrons les premières équations différentielles à partir des données initiales sur la roue. Or, pour :

$$\varphi_0 = -\chi_\mu, \quad \sigma_1 \neq \frac{\cos(\varphi + \chi_\mu)}{\cos \rho}$$

sur le contour de la roue, $\frac{d\sigma_1}{d\theta}$, $\frac{d\varphi_0}{d\theta}$, ... etc.. sont

infinis. L'intégration numérique n'est plus possible. Si $\varphi_0 = +\mu$, ou le contour de la roue est une bicaractéristique, ou une enveloppe de bicaractéristique.

a) Le contour de la roue est une bicaractéristique :

Il n'est plus nécessaire d'intégrer les systèmes différentiels que nous donne la méthode de MM. KRAVTCHENKO et SIBILLE. En effet, nous pouvons intégrer l'équation de KÖTTER le long de la frontière :

$$\sigma(d\varphi + d\theta) + \chi \frac{\cot \rho}{\sigma} d\sigma = -\chi r \sigma (\cos \theta - \sin \theta) \times \\ \frac{\tan(\varphi + \theta + \chi_\mu) \sin(\varphi + \theta - \chi_\mu)}{\cos \rho \cos(\varphi + \theta + \chi_\mu)}$$

b) Le contour de la roue est une enveloppe de bicaractéristique :

Ceci est en particulier le cas lorsque $\delta = -\rho$ en butée. KARMAN a démontré l'existence d'une approximation permettant, dans un premier pas lors de l'intégration, de s'éloigner de la zone $\frac{d\varphi}{d\theta}$, $\frac{d\sigma}{d\theta}$ infinis.

Nous donnons ici une démonstration voisine.

Posons : $\tau_1 = \tau_0 + \epsilon_1$ $\psi_0 = -\chi_0 + \epsilon_0$

où ϵ_1 et ϵ_0 sont des infiniment petits de même ordre.

Alors $\theta \sim 1 + \epsilon_1^2 \theta_1 \sim 1 + \epsilon_0^2 \theta_2$ puisque
 que θ_1 $\frac{d\psi_0}{d\theta}$ et $\frac{d\tau_1}{d\theta}$ θ_2 sont infinies sur la roue. Vérifions
 et θ_2 sont des constantes.

En portant ces valeurs dans le système différentiel, nous obtenons :

$$\epsilon_1 \theta_1 \sim \frac{2 \epsilon_0 \cos \rho}{\cos(\lambda + \chi_0) - \tau_1 \cos \rho}$$

$$\epsilon_0 \theta_2 \sim \frac{4 \epsilon_0 \tau_1 \sin \rho}{\cos(\lambda + \chi_0) - \tau_1 \cos \rho}$$

Or $\epsilon_0^2 \theta_2 \sim \epsilon_1^2 \theta_1$

d'où $\epsilon_1 \sim \epsilon_0 \tau_1 \chi_0 \times \chi$

θ_1 et θ_2 sont bien des constantes.

Si nous prenons comme référence $\theta = 1$,

$$\epsilon_0^2 \theta_2 = \chi \frac{2 \epsilon_0^2 \tau_1 \sin \rho}{\cos(\lambda + \chi_0) - \tau_1 \cos \rho} = \theta = 1$$

$$\varepsilon_0^2 = X(\theta - 1) \frac{\cotg \rho}{e} \left(\frac{\cos(\lambda + \lambda_e)}{\cos \rho} - 1 \right) = (\varphi_0 + \lambda_\mu)^2$$

$$(\varphi_0 + \lambda_\mu)^2 = X \frac{\cotg \rho}{e} \left(\frac{\cos(\lambda + \lambda_e)}{\cos \rho} - 1 \right) (\theta - 1)$$

de même : $\sigma_1 - \sigma_{10} = 1 + e \lambda \log \rho (\varphi_0 + \lambda_\mu)$

où σ_{10} est la valeur de σ_1 sur le contour de la roue.

Comme nous le verrons par la suite, nous n'intégrons pas les deuxième et troisième systèmes différentiels à partir de données initiales sur la roue. Il n'est donc pas nécessaire de trouver dans ce cas des expressions approchées de φ_i et σ_{i+1} .

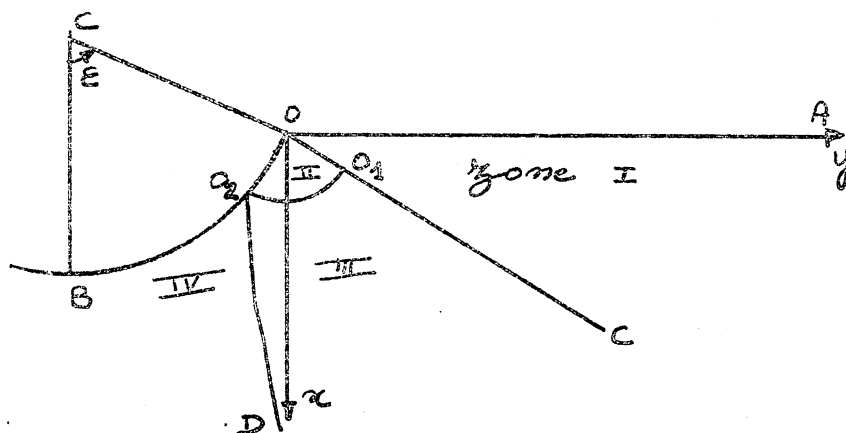
c) Limites d'utilisation du schéma de passage de la singularité.

CHAPITRE IV

CONDUITE DES CALCULS

Tous les calculs numériques ont été effectués sur la machine IBM 7044 des services de Mathématiques Appliquées de St Martin d'Hères. La programmation a été réalisée en langage ALGOL. La traduction en langage machine a été faite sur machine IBM 1401, au moment du passage du programme en machine IBM 7044 suivant la méthode habituelle.

A - SCHEMA GENERAL DE CALCUL.



Comme nous l'avons vu la méthode de MM. KRAVTCHENKO et SIBILLE permet de résoudre la singularité à l'origine. Toutefois, nous ne connaissons pas le rayon de convergence du développement limité utilisé. C'est pourquoi il convient de n'intégrer les systèmes différentiels obtenus que dans une zone 2

très petite dans le voisinage de l'origine. Nous nous sommes limités à un cercle de rayon 0,05 (Rayon de la roue $R = 1$).

Sur O_1O_2 , limite de la zone 2, ∇ et ψ sont donc maintenant connus et $\nabla \psi$ est différent de zéro. Nous sommes ramenés à un problème classique d'intégration par la méthode des bicaractéristiques. Nous considérerons une zone 3 analogue à un saut de Prandtl où nous remplaçons la bicaractéristique dégénérée à l'origine par la courbe O_1O_2 , et une zone 4 du type classique.

Dans la zone 1 règne l'équilibre de RANKINE. La solution est explicite. Sur OC :

$$\left| \begin{array}{l} \psi = \frac{x}{\tan \mu} \\ \nabla = \frac{x}{1 - \sin \mu} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

dans le cas de la butée

sur la roue, cas auquel nous nous limiterons dans ce chapitre.

B - PASSAGE DE LA SINGULARITE.

1) Intégration numérique des équations différentielles :

Nous avons utilisé une méthode du type RUNGE-KUTTA de rang 4.

Cette méthode consiste à remplacer le développement de TAYLOR de la fonction à intégrer :

$$(1) \quad y_{x+h} = y_x + h y'_x + \frac{h^2}{2} y''_x + \frac{h^3}{6} y'''_x + \dots$$

où y est solution de $y' = F(x, y)$
et h représente le pas d'intégration, par une formule du type

$$(2) \quad y_{x+h} = y_x + h \left[\alpha_1 F(x, y) + \alpha_2 F(x + \mu_1 h, y + b_1 h) + \alpha_3 F(x + \mu_2 h, y + b_2 h) + \dots + \alpha_p F(x + \mu_p h, y + b_p h) \right]$$

où α_i , μ_i , b_i sont déterminés de telle façon que le 2^e membre de (2) étant développé en série par rapport au pas les coefficients d'un certain nombre de termes de cette série -ici 5- soient les mêmes que ceux de (1).

Cela présente l'avantage par rapport à (1) de ne pas nécessiter le calcul des dérivées successives de y .

Cette méthode est très puissante comme nous avons pu le montrer sur un exemple. Nous avons intégré une courbe avec deux pas successifs : h et $h/10$, $h = 0,2$ dans un cas de butée avec $\lambda = -40^\circ$. La différence des valeurs d'arrivées était de l'ordre de 10^{-5} .

2) Schéma d'intégration des systèmes différentiels :

Le système différentiel en $\frac{d\sigma_{i+1}}{d\theta}$ et $\frac{d\varphi_i}{d\theta}$ contient aux deuxièmes membres les fonctions σ_{j+1} , φ_j , $j \leq i$.

Nous intégrons tout d'abord le premier système en $\frac{d\sigma_1}{d\theta}$ et $\frac{d\varphi_0}{d\theta}$ dont les deuxièmes membres ne sont fonctions que de σ_1 , φ_0 et θ .

a) Premier système :

Nous employons la méthode de tir à partir de la roue, c'est-à-dire que, avec des données initiales sur la roue, φ_0 imposé et σ_1 arbitraire, nous intégrons les équations différentielles jusqu'au point singulier de la limite de la zone de RANKINE. Et nous ajustons la donnée initiale σ_1 de façon qu'en fin de tir la valeur de σ_1 soit celle imposée par la zone de RANKINE. Nous procédons de cette façon pour deux raisons :

- Il est possible de partir du point singulier ; mais, la densité des courbes dans le voisinage de celui-ci est telle que les erreurs d'intégration s'amplifient énormément lorsqu'on s'en éloigne (cf. figure 1). Ceci est dû à l'existence d'une ligne continue de points singuliers. Dans le sens adopté, les erreurs d'intégration en fin de tir sont négligeables.

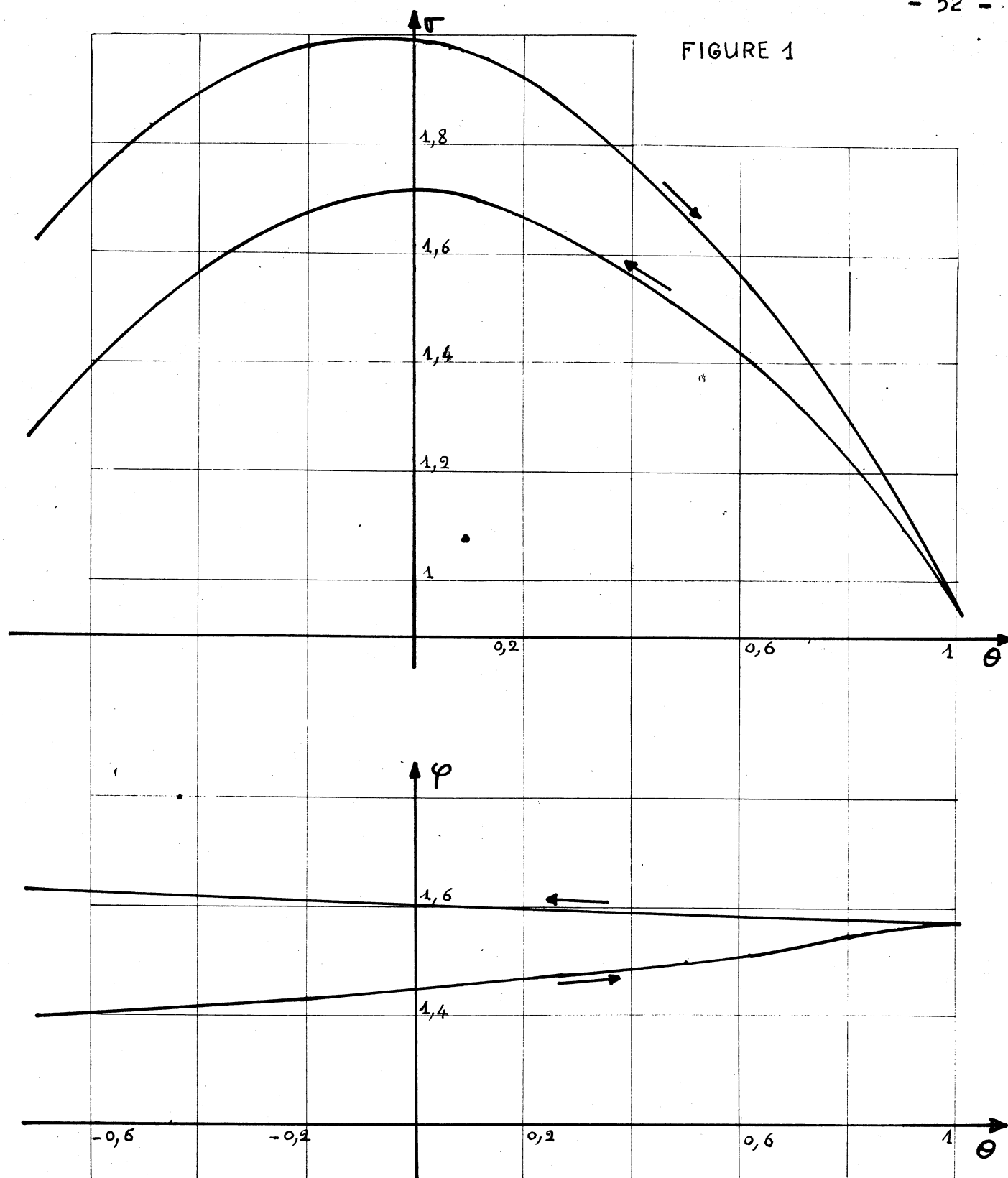
MM. CAQUOT et KERISEL ont intégré les équations différentielles en partant du point singulier. Ceci explique les différences enregistrées entre leurs résultats et ceux de la méthode de tir.

- Si le tir était effectué à partir du point singulier, ce sont deux valeurs qu'il faudrait ajuster pour obtenir φ_0 sur la roue.

b) Deuxième système :

Le type de la singularité n'est plus le même qu'en a). L'ajustement sur la valeur de $\sigma_2 = 0$ devient impossible, la plupart des courbes partant à l'infini lorsqu'on s'approche de la limite de la zone de RANKINE.

FIGURE 1



ERREURS SUR σ ET φ SUIVANT LE SENS D'INTEGRATION

→ Sens d'intégration

$$\lambda = -40^\circ \quad \varepsilon = 50^\circ \quad \delta = 17,33^\circ \quad \rho = 26^\circ$$

Nous pratiquons donc un tir dans l'autre sens. Ce qui n'était pas possible en a) l'est maintenant :

- Le point singulier est un point isolé. Les erreurs d'intégration ne s'amplifient plus.

- L'étude au voisinage du point singulier donne des équations qui ne dépendent que d'un paramètre. Nous n'aurons à ajuster qu'un seul paramètre.

L'initialisation de ce tir pose quelques problèmes :

- Pour pouvoir utiliser les approximations au voisinage des points singuliers, il faut se trouver très près de ceux-ci. Nous avons poussé l'intégration du premier système jusqu'à $\psi_0 + \chi\mu < 10^{-6}$ et nous constatons que ceci est suffisant.

- La variable auxiliaire t introduite à une constante additive près, doit être connue en valeur vraie.

Au voisinage des points singuliers :

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \theta &= \alpha - \exp(-4\chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) t) \left[Bt + C + \frac{B\chi}{4 \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)} \right] \\
 \psi_0 &= -\chi\mu + \exp(-4\chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) t) [Bt + C] \\
 \sigma_1 &= \frac{\cos(\alpha + \chi e)}{\cos \rho} + \exp(-4\chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e) t) \times \\
 &\quad \left[(Bt + C) \frac{\sin \alpha - \chi \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)}{\cos^2 \rho} + \frac{B}{\cos^2 \rho} \left(\frac{\chi \cos \rho \sin(\alpha + \chi e)}{4 \sin \rho \cos(\alpha + \chi e)} - 1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Ces 3 équations ne permettent pas de déterminer t , et nous ne pouvons pas utiliser les valeurs de θ , φ_0 et v_1 aux extrémités d'un pas car ces valeurs sont trop voisines : nous nous trouvons près d'un point singulier.

Seul $t + \frac{C}{B}$ est calculable :

$$(4) \quad t + \frac{C}{B} = \frac{\varphi_0 + X\mu}{\alpha - \theta - \varphi_0 - X\mu} \times \frac{X}{4 \sin p \cos(\alpha + Xe)}$$

Or :

$$\varphi_1 = D \frac{\exp(-8 X \sin p \cos(\alpha + Xe) t)}{t + \frac{C}{B}}$$

$$\varphi_1 = \left[D \exp(8 X \sin p \cos(\alpha + Xe) \frac{C}{B}) \right] \frac{\exp(-8 X \sin p \cos(\alpha + Xe) (t + \frac{C}{B}))}{t + \frac{C}{B}}$$

ne dépend que de $t + \frac{C}{B}$ puisque, le premier système différentiel étant intégré, la quantité entre crochets est une constante qui dépend seulement des conditions aux limites du deuxième système.

Nous posons donc :

$$\varphi_1 = K \frac{\exp(-8 X \sin p \cos(\alpha + Xe) (t + \frac{C}{B}))}{t + \frac{C}{B}}$$

$$v_2 = \varphi_1 \frac{e X \sin p \cos(\alpha + Xe)}{\cos^2 p}$$

où K est la constante à ajuster dans le tir.

Dans les équations précédentes α est la valeur de θ au point singulier correspondant au dernier tir effectué sur le premier système. Cette valeur diffère légèrement de l'argument de la dernière bicaractéristique de la zone de RANKINE. Nous prenons :

$$\alpha = (\varphi_0 + \lambda \mu) \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta} + 2 \right) + \theta \quad \text{où } \varphi_0, \theta \text{ ont les mêmes}$$

valeurs qu'en (3).

Pour intégrer le deuxième système nous devons connaître $\nabla_1(\theta)$ et $\varphi_0(\theta)$ puisque les deuxièmes membres contiennent ces fonctions en plus des inconnues $\nabla_2(\theta)$ et $\varphi_1(\theta)$. Or, il n'est pas possible d'intégrer le premier et le deuxième système simultanément, en partant des bonnes données initiales pour le premier, puisque les erreurs d'intégration s'amplifient dans ce sens du tir.

Nous plaçons donc lors du premier tir les valeurs de $\nabla_1(\theta)$ et $\varphi_0(\theta)$ en mémoire, et nous intégrons le deuxième système avec un pas d'intégration identique à celui employé pour le premier afin de faire coïncider les points successifs.

c) Troisième système :

Les singularités du troisième système sont les mêmes que celles du deuxième.

Nous procédons de la même façon pour l'intégration numérique : un tir sur le contour de la roue.

Nous posons :

$$\begin{aligned} \psi_2 &= K \frac{\exp(-8X \sin \rho \cos(\alpha + X_e)(t + \frac{C}{B}))}{t + \frac{C}{B}} \\ &+ K_1 \frac{\exp(-12X \sin \rho \cos(\alpha + X_e)(t + \frac{C}{B}))}{t + \frac{C}{B}} \\ \psi_3 &= \frac{2X \sin \rho \cos(\alpha + X_e)}{\cos^2 \rho} \psi_2 \end{aligned}$$

où K prend la valeur ajustée lors de l'intégration du deuxième système et où K_1 est une constante à ajuster.

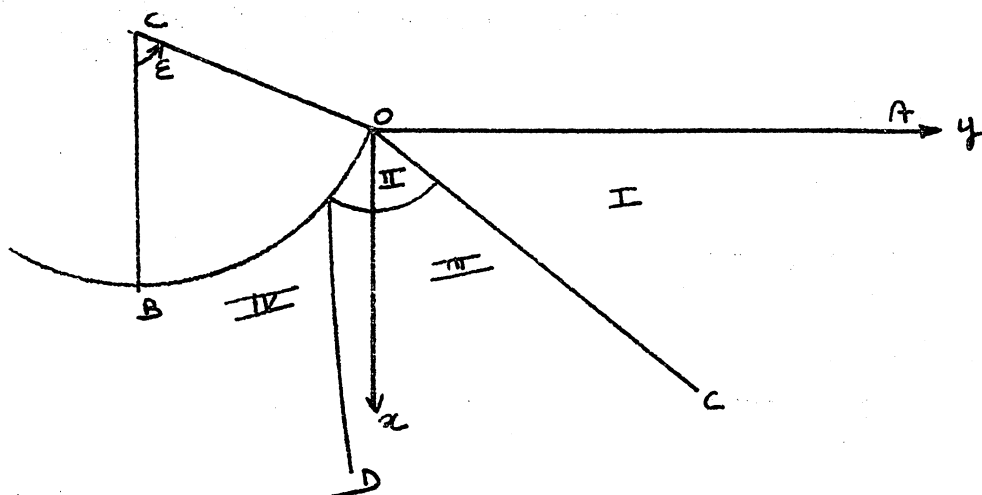
Les deuxièmes membres contiennent $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_0, \psi_1, \psi_2$. Nous intégrons simultanément le deuxième et le troisième système, en prenant pour valeur de K la valeur trouvée en b). $\psi_1(\theta)$ et $\psi_0(\theta)$ sont donnés par la mémoire.

Remarque :

Les deuxièmes membres de (6) et (7) contiennent aussi $\frac{d\psi_0}{d\theta}$ et $\frac{d\psi_1}{d\theta}$. Pour ne pas surcharger le programme, nous ne les plaçons pas en mémoire lors de la première intégration. En b) et c) nous intégrons en fait (5) et (6), (5), (6) et (7) simultanément, ce qui nous permet d'avoir $\frac{d\psi_0}{d\theta}$ et $\frac{d\psi_1}{d\theta}$, mais en reinitialisant à chaque pas $\psi_1(\theta)$ et $\psi_0(\theta)$ sur les

valeurs en mémoire. Ceci nous permet d'employer les mêmes procédures d'intégration lors des 3 tirs.

C - INTEGRATION DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES DANS LE RESTE DU
DOMAINE.



1) Zone 1 de RANKINE :

La solution est explicite. Sur OC nous avons :

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{x}{\operatorname{tg} \mu} \\ v = \frac{x}{1 - \sin \rho} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

2) Zone 3 :

Sur $O_1 O_2$, que nous avons choisi comme étant un cercle de rayon r_0 , x, y, ∇ et φ sont donnés par :

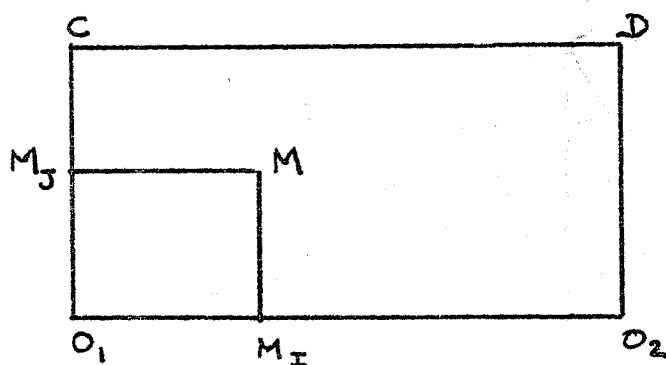
$$r = r_0$$

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$\nabla = r \nabla_1(\theta) + r^2 \nabla_2(\theta) + r^3 \nabla_3(\theta)$$

$$\varphi = \varphi_0(\theta) + \theta + r \varphi_1(\theta) + r^2 \varphi_2(\theta)$$



On obtient un point M par l'intersection des deux bicaractéristiques de familles différentes issues de points précédents M_1 et M_2 . x, y, ∇ et φ en M sont alors donnés par le système :

$$y - y_i = \operatorname{tg}(\varphi_i - \mu)(x - x_i)$$

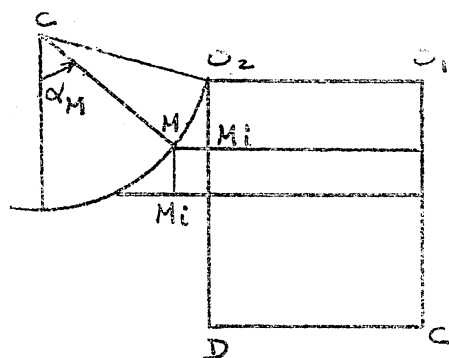
$$y - y_j = \operatorname{tg}(\varphi_j + \mu)(x - x_j)$$

$$\nabla - \nabla_i - 2\nabla_i \operatorname{tg} \rho (\varphi - \varphi_i) = \frac{\sin(\varphi_i + \mu)(x - x_i)}{\cos \rho \cos(\varphi_i - \mu)}$$

$$\nabla - \nabla_j + 2\nabla_j \operatorname{tg} \rho (\varphi - \varphi_j) = \frac{\sin(\varphi_j - \mu)(x - x_j)}{\cos \rho \cos(\varphi_j + \mu)}$$

En fin de calcul, nous connaissons O_2D et σ et φ sur cette bicaractéristique.

3) Zone 4 :



Les points sur le contour O_2B s'obtiennent par l'intersection de celui-ci avec les bicaractéristiques de la première famille issues des points de O_2D obtenus précédemment.

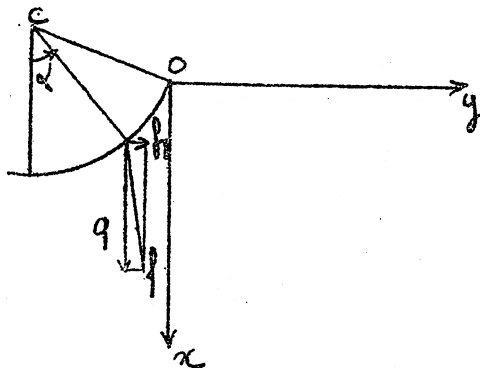
La méthode d'intégration est la même que pour la zone 3, sauf pour le dernier pas vers la roue où :

$$\begin{aligned} y_M &= \sin \alpha_M - \cos h \\ x_M &= \cos \alpha_M + \sin h \\ y_M - y_{M1} &= (x_M - x_{M1}) \operatorname{tg}(\varphi_{M1} + \mu) \\ \varphi_M &= \varphi_{O2} + \alpha_M - \varepsilon \\ \sigma_M &= \sigma_{M1} - 2 \sigma_{M1} \operatorname{tg} \rho (\varphi_M - \varphi_{M1}) - \frac{\sin(\varphi_{M1} - \mu)(x_M - x_{M1})}{\cos \rho \cos(\varphi_{M1} + \mu)} \end{aligned}$$

L'intersection de la bicaractéristique avec le cercle donne deux points. Une procédure de choix permet à la machine d'éliminer systématiquement celui qui ne convient pas.

L'intégration dans la zone 4 donne donc sur OB un certain nombre de points où sont connus σ et φ , c'est-à-dire l'état des contraintes.

- 4) Calcul de la résultante horizontale H_M , verticale Q_M et du couple C_M s'exerçant sur la branche OM du contour :



En un point M les composantes verticale q , horizontale h , et tangentielle r de la contrainte f s'exerçant sur un élément entourant ce point sont :

$$\begin{cases} q = \sigma (\cos \alpha + \sin \rho \cos (2\varphi - \alpha)) \\ h = \sigma (\sin \alpha + \sin \rho \sin (2\varphi - \alpha)) \\ r = \sigma \sin \rho \sin (2\varphi - \alpha) \end{cases}$$

Par sommation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_M &= \int_0^M q \, d\alpha \\ H_M &= \int_0^M h \, d\alpha \\ C_M &= \int_0^M R \, r \, d\alpha \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{avec en } 0 \\ q = 0 \\ h = 0 \\ r = 0 \\ \alpha = \varepsilon \end{array}$$

La machine effectue ces sommations et donne en chacun des points M trouvés précédemment les valeurs de Q , H et C .

D - PROGRAMMES.

Le pas d'intégration suivant la bicaractéristique tournante dans les zones 3 et 4 ne doit pas être aussi petit que celui de la zone 2, surtout au voisinage de la ligne de points singuliers, car cela conduirait à des temps d'intégration prohibitifs sans gain en précision.

L'intégration dans la zone 2, qui se fait en premier lieu, donne donc sur O_1O_2 des valeurs de σ et φ en des points beaucoup trop rapprochés. Il serait possible, grâce à une procédure de choix appropriée d'en faire choisir un certain nombre par la machine. Mais, cela compliquerait beaucoup le programme.

Nous avons préféré diviser le calcul en deux parties faisant l'objet de deux programmes :

- Intégration dans la zone 2.
- Intégration dans les zones 3 et 4, le choix des points sur O_1O_2 se faisant à la main.

Ceci permet en outre une plus grande souplesse dans le calcul. En effet, les différentes intégrations nécessitent des tâtonnements dans le choix de la grandeur et du nombre des pas d'intégrations qui sont propres à chaque problème. Un programme unique aurait constamment une de ses moitiés improductive.

CHAPITRE V

APPLICATION AU CAS $\rho = 26^\circ$

Les calculs qui suivent se rapportent à un milieu pulvérulent dont l'angle de frottement interne est $\rho = 26^\circ$. C'est précisément le cas du modèle analogique utilisé par MM. OBERTI, DUPERRIN, BOUCHERIE et PONCET MONTANGE au Laboratoire de Mécanique des Sols de Grenoble. Pour mesurer l'influence de l'angle δ du frottement roue-terrain, nous avons envisagé les deux cas où δ est égal à $\frac{\rho}{2} = 13^\circ$ et où δ est égal à $\frac{2}{3}\rho = 17^\circ 33'$. Pour chacun de ces cas nous avons calculé, pour un certain nombre de valeurs de l'enfoncement, les valeurs correspondantes du couple et des efforts verticaux et horizontaux appliqués à la roue.

Nous avons ensuite comparé les résultats obtenus d'une part à ceux théoriques de M. STERENBERG, d'autre part à ceux expérimentaux de M. BOUCHERIE.

1) Détermination pratique des valeurs minima de Q , H et C pour un enfoncement donné E de la roue :

Cas I : $C = H = 0$.

A partir des résultats fournis par la machine, on construit point par point la courbe $Q_1 = Q_1(\alpha)$ qui donne en chaque point M repéré par α la résultante des efforts verticaux s'exerçant sur l'arc OM.

La charge appliquée à la roue est :

$$Q = 2 Q_1(0).$$

Cas II : C et $H \neq 0$.

On trace les courbes $C_1 = C_1(\alpha)$ et $C_2 = C_2(\alpha)$ qui donnent en un point M repéré par α la résultante du couple s'exerçant sur OM respectivement dans les cas $\delta = + 17.33$ et $\delta = - 17.333$.

On construit alors $C = C_1(\alpha) + C_2(\alpha)$.

Le minimum de C donne l'abscisse angulaire du point P et la valeur recherchée du couple.

On procède de la même façon pour la charge verticale Q . Les minima de Q et C sont obtenus pour la même valeur de α .

Pour H , on constate que la courbe n'admet pas de minimum mais un point d'inflexion de même abscisse que C_m et Q_m . Nous prendrons pour H_m la valeur correspondant à ce point d'inflexion.

Remarquons que Q_m , H_m et C_m sont des nombres adimensionnels.

Nous donnons, à titre d'exemple, les graphiques qui ont servi à déterminer Q_m , H_m et C_m dans le cas $\epsilon = 50^\circ$

$\delta = 17^\circ 33$. Sur le même graphique sont représentées les courbes obtenues par M. STERENBERG. Nous constatons une différence notable (graphique 1).

$$\varepsilon = 50^\circ \quad \rho = 26^\circ \quad \delta = 17^\circ 33'$$

- 64 -

$$\alpha_0 = 22^\circ 4'$$

$$\frac{C_m}{\gamma R^3} = 1,25$$

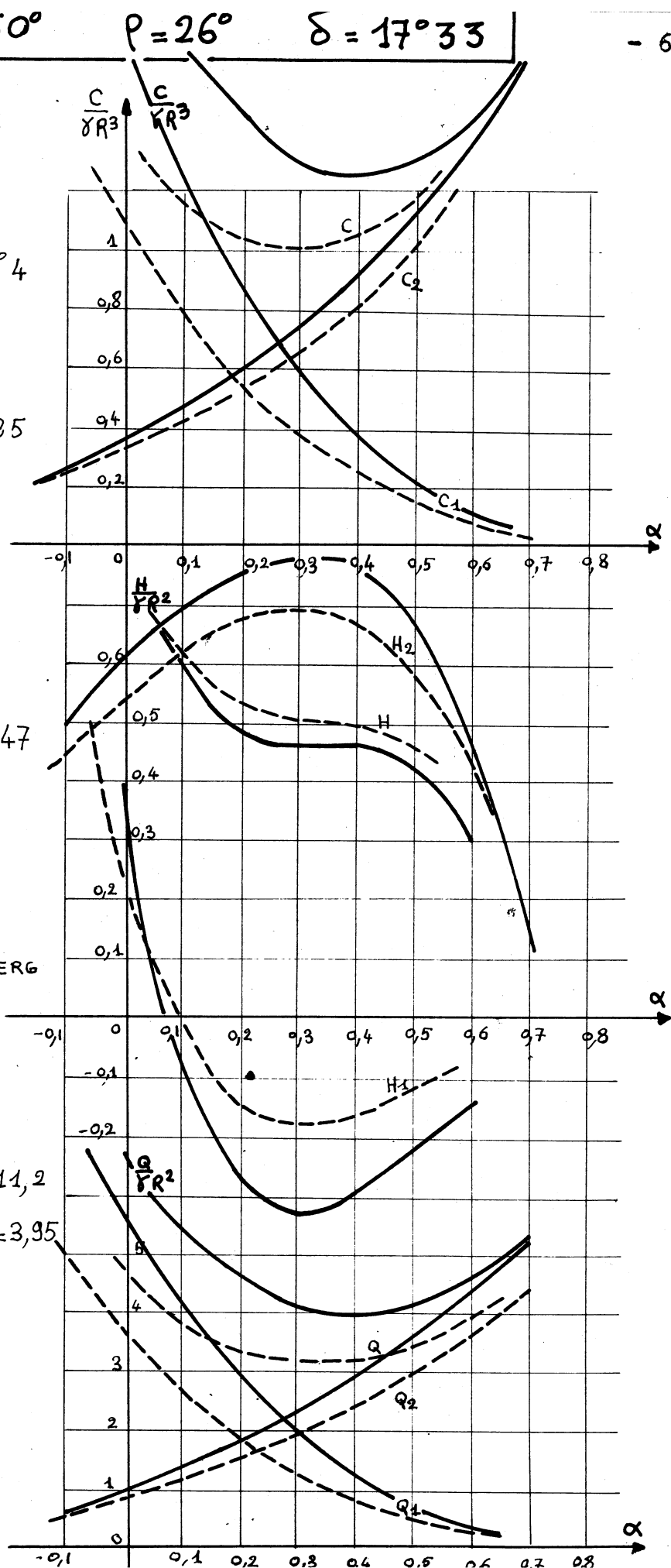
$$\frac{H_m}{\gamma R^2} = 0,47$$

----- RESULTATS STERENBERG

$$\text{CAS I : } \frac{Q}{\gamma R^2} = 11,2$$

$$\text{CAS II : } \frac{Q_m}{\gamma R^2} = 3,95$$

GRAPHIQUE 1



2) Résultats :

a) Cas I : H et C nuls.

Les résultats sont condensés dans le tableau suivant. Nous y avons fait figurer au-dessous de nos résultats ceux obtenus par M. STERENBERG.

ε en degrés	10	20	30	40	50	60
$\frac{Q}{\gamma R^2}$	$\delta = 17^\circ 33$					
	0,396	1,76	3,88	7,46	11,2	15,68
	0,18	0,86	2,18	4,30	6,94	11,03
$\frac{Q}{\gamma R^2}$	$\delta = 13^\circ$					
	0,36	1,55	3,56	6,48	10,2	13,7
	0,16	0,77	2,00	3,95	6,34	9,94

Variation de l'enfoncement ε avec la charge Q

Nous constatons sur le graphique 2 que l'angle de frottement roue-terrain n'a pas une très grande influence dans le cas où nous nous plaçons : inclinaison des contraintes constantes sur la roue. Toutefois, nous n'avons pas traité le cas $\delta = \rho$ qui pourrait donner des résultats moins groupés : on se rappelle que pour un mur de soutènement, le coefficient de butée croît fortement lorsque δ tend vers ρ .

b) Cas II : Roue à la limite de patinage :

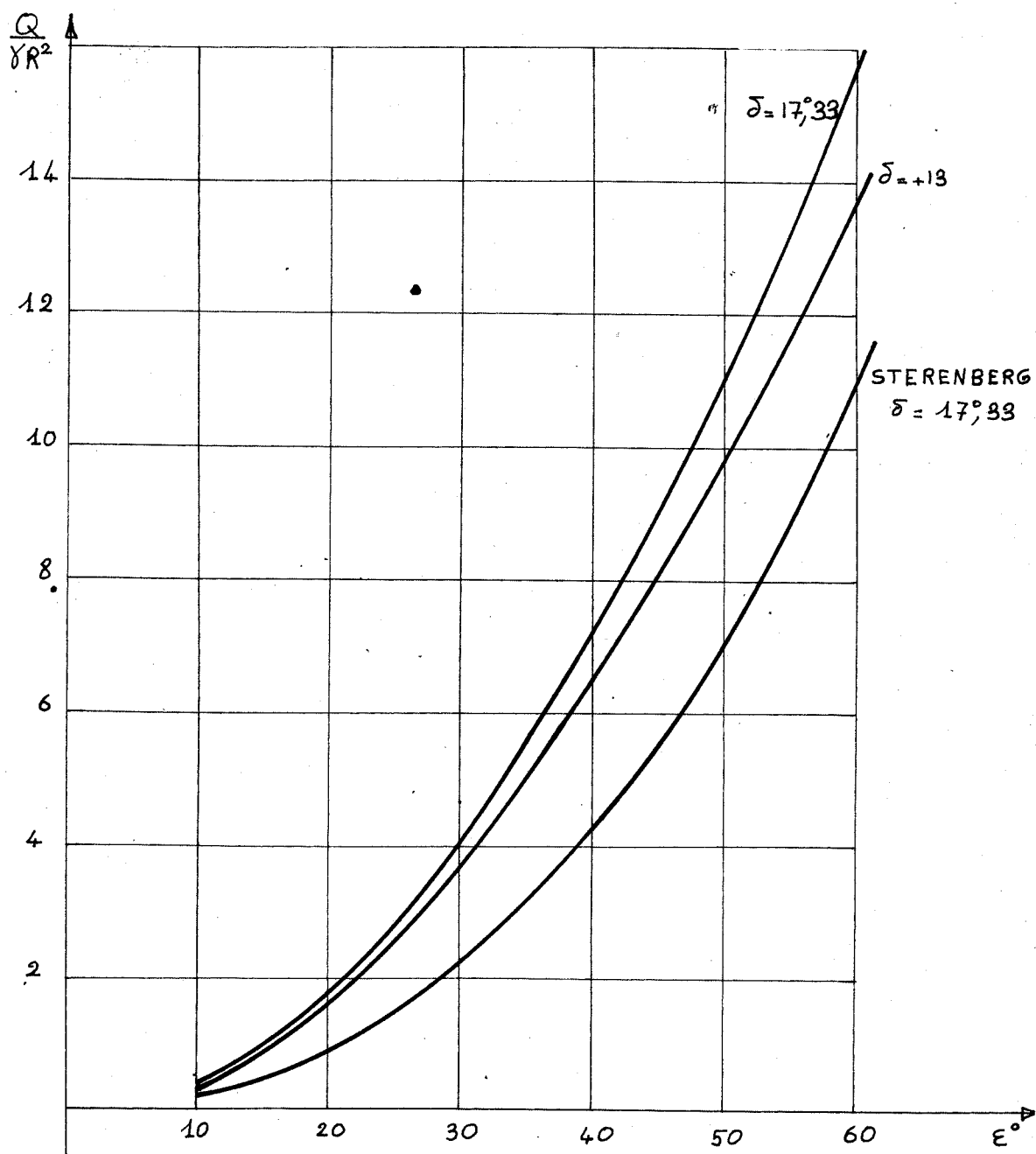
Les résultats sont condensés dans les tableaux ci-dessous. α_0 est l'abscisse angulaire de P.

$$\delta = 17^{\circ}33$$

ε en degrés	10	20	30	40	50	60
α_0 en degrés	6,2	11,2	16	20,9	22,4	23,5
$Q_m/\gamma R^2$	0,1	0,49	1,28	2,3	3,95	5,85
$H_m/\gamma R^2$	0,0325	0,115	0,235	0,305	0,47	0,505
$C_m/\gamma R^2$	0,036	0,16	0,38	0,72	1,25	1,88

$$\delta = 13^{\circ}$$

ε en degrés	10	20	30	40	50	60
α_0 en degrés	4,9	8,6	12,1	16	17,2	18,2
$Q_m/\gamma R^2$	0,19	0,75	1,55	2,95	4,65	6,7
$H_m/\gamma R^2$	0,033	0,115	0,218	0,325	0,425	0,4
$C_m/\gamma R^2$	0,035	0,115	0,375	0,705	1,12	1,63



GRAPHIQUE 2

- Position du point P :

Les résultats figurent sur le graphique 3. Il faut remarquer que le minimum des courbes $C(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ est parfois difficile à déterminer, ces courbes étant très aplaties dans son voisinage.

Nos courbes ne présentent pas le point d'inflexion trouvé par M. STERENBERG mais un changement de pente très marqué pour $\varepsilon = 40^\circ$.

- Variation de l'enfoncement avec la charge :

Les résultats sont présentés sur le graphique 4 pour $\delta = + 17^\circ 33'$. Nous y avons porté les résultats du Cas I pour comparaison.

Nous constatons qu'à une charge Q donnée, correspondent des enfoncements plus forts dans le Cas II. L'application d'un couple C_m diminue donc la force portante de la roue et ce, dans une notable proportion.

D'autre part, dans le 1er cas, l'enfoncement pour une charge donnée, diminue quand le frottement δ augmente ; c'est le contraire qui se produit dans le cas II : L'application d'un couple à une roue provoque un supplément d'enfoncement qui est d'autant plus grand que le frottement roue-terrain est plus grand.

- Variations de C_m et H_m en fonction de la charge Q_m :

Les résultats sont représentés dans les graphiques 5 et 6.

Pour le couple, nos résultats coïncident exactement avec ceux de M. STERENBERG et, c'est pourquoi nous ne pouvons représenter ceux-ci sur le graphique 5.

L'influence du frottement est très grande : une augmentation de $4^{\circ}33$ de celui-ci permet, à charge et rayons égaux, d'augmenter la valeur du couple limite de 40 % environ.

Pour l'effort horizontal, δ a aussi une influence prépondérante, un peu moins de 20 % dans le même cas. Le graphique 6 met en évidence un maximum pour $H_m(Q)$. La valeur maximum $\mathcal{H}$ de H_m est la limite supérieure de l'effort de traction que pourra exercer la roue pour un frottement donné de celle-ci avec le terrain. Elle démontre le fait, couramment utilisé, qu'il existe une charge Q_0 bien déterminée qui donne à la roue sa plus grande possibilité de traction.

La valeur $\mathcal{H}$ varie avec δ $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\delta)$

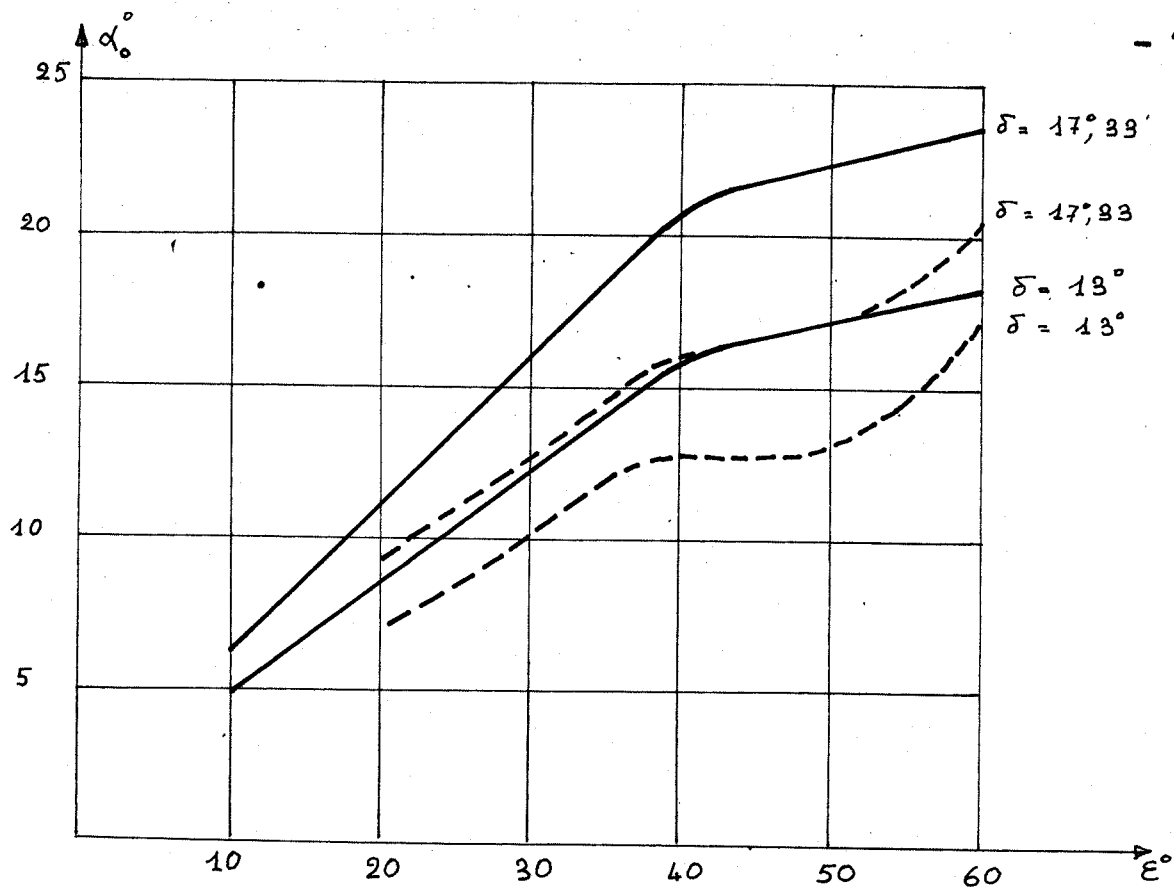
Nous pouvons, connaissant cette courbe, résoudre le problème suivant :

Une roue chargée d'un poids Q repose sur un milieu pulvérulent. L'angle de frottement roue-sol est δ . On désire lui faire exercer un effort de traction H .

3 cas se présentent suivant la valeur de H_m donnée par le graphique 6 à partir de Q et celle de $\mathcal{H}(\delta)$

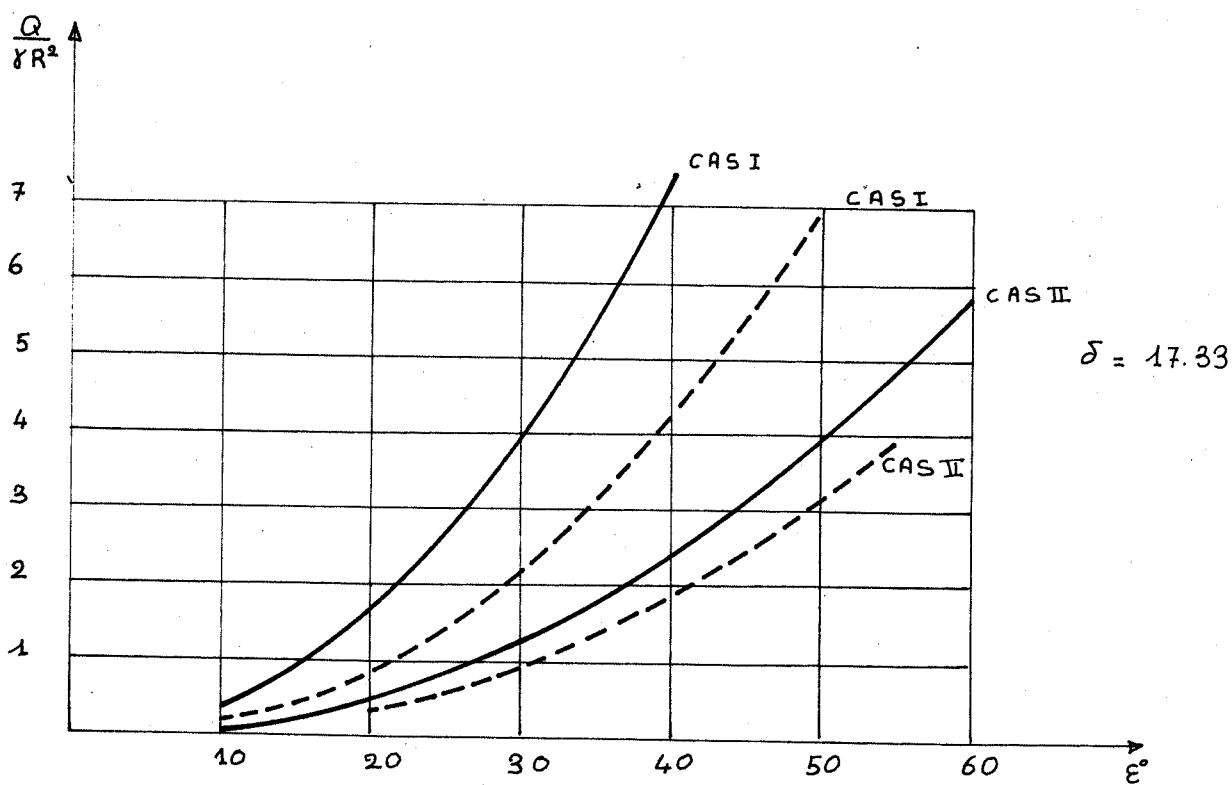
- $H > \mathcal{H}(\delta)$ Il faut augmenter δ pour augmenter $\mathcal{H}(\delta)$.
- $H_m < H < \mathcal{H}(\delta)$ La roue peut démarrer à condition d'augmenter la charge jusqu'à ce que $H_m = H$.
- $H < H_m$ La roue démarre avant d'atteindre la limite de patinage.

Par la méthode employée, nous obtenons des valeurs dans le sens de la sécurité.

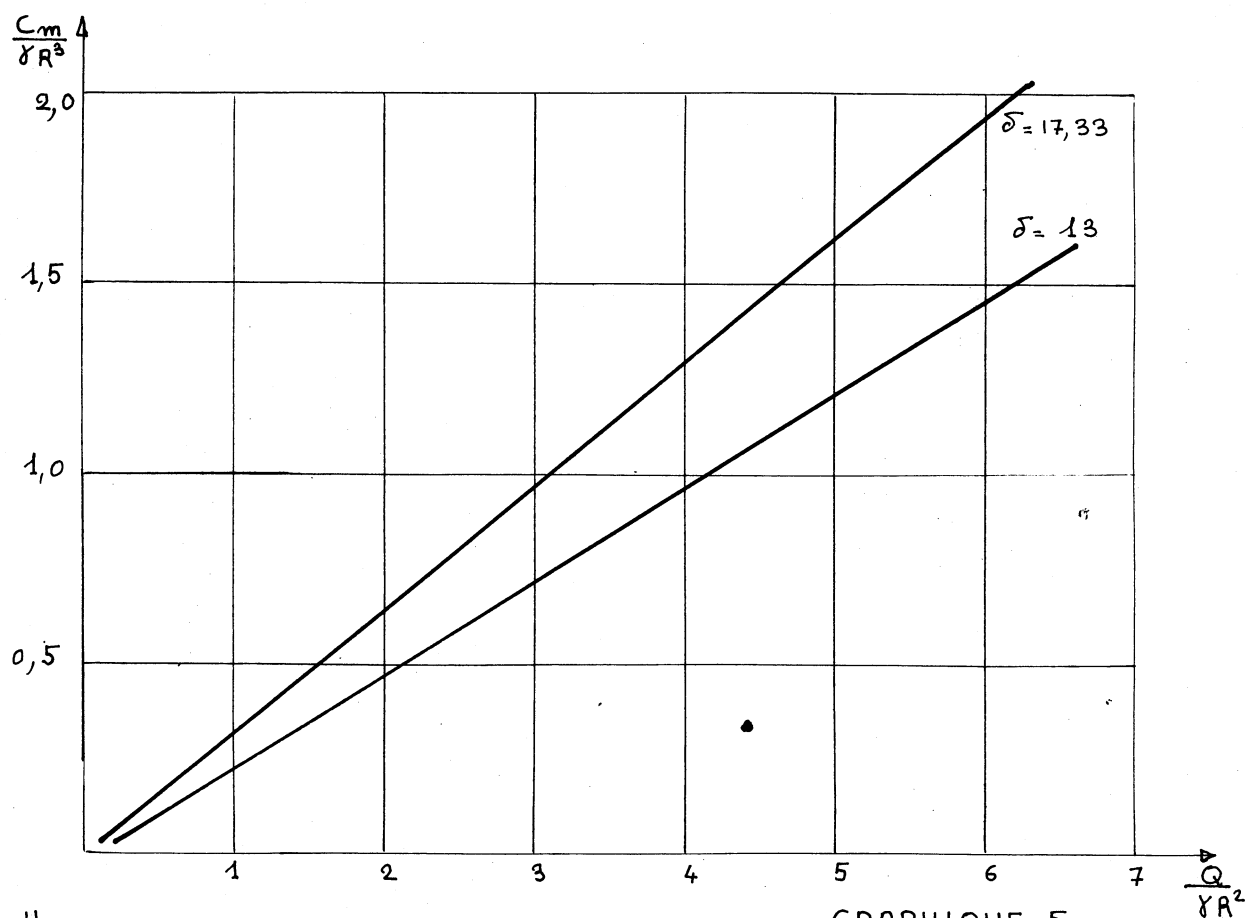


GRAPHIQUE 3

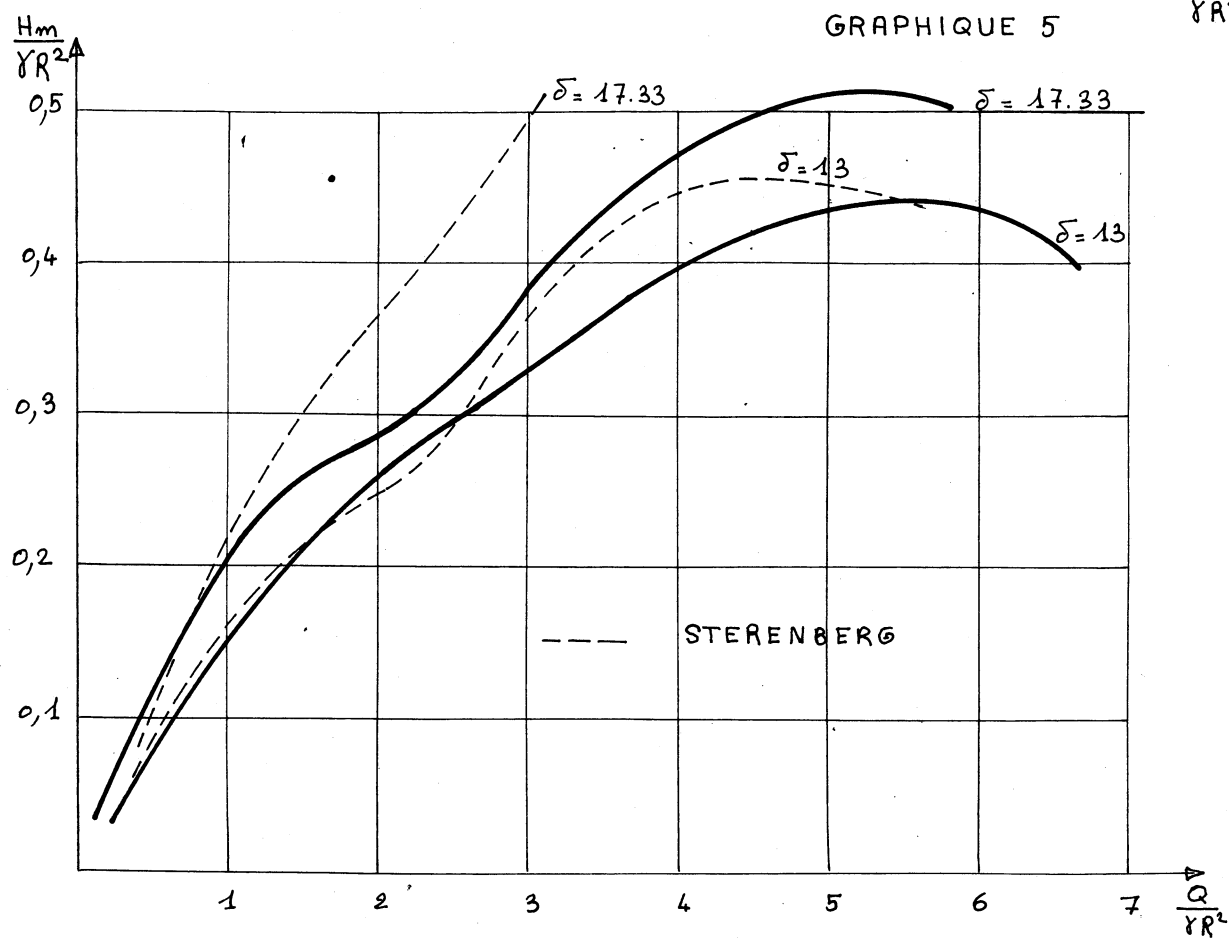
----- STERENBERG



GRAPHIQUE 4



GRAPHIQUE 5



GRAPHIQUE 6

3) Comparaison avec l'expérience :

Ainsi que nous l'avons vu au Chapitre III, pour résoudre le problème de la roue sur un milieu pulvérulent, nous devons nous donner la répartition sur le contour de l'angle de frottement roue-sol. Nous en avons choisi une qui ne correspond pas nécessairement à celle de l'expérience qui est inconnue. Nous n'espérons donc pas retrouver exactement les résultats de l'expérience, mais constater des ordres de grandeur équivalents.

a) Cas I : Roue sans couple ni effort de traction.

- Comparaison avec les résultats de M. BOUCHERIE :

Dans le cas d'une roue de 70 cm de diamètre, sur l'appareil analogue à rouleaux de longueur 6 cm, M. BOUCHERIE obtient comme enfoncement e de la roue des valeurs que nous comparons à celles données par notre calcul avec $\delta = 17^{\circ}33$.

Q_{kg}	5	10	15	20	30	40	50
e cm BOUCHERIE	0,3	0,6	0,9	1,3	1,9	2,4	4,0
e cm calculé	0,4	0,9	1,3	1,7	2,5	3,4	4,4

- Comparaison avec les résultats de M. DUPERRIN :

Avec une roue de diamètre 40 cm :

Q_{kg}	5,7	3,13	1,08
ε° DUPERRIN	90°	48°5	32°6
ε° calculé	53°	40°	24°

$$\delta = 17^{\circ}33$$

Avec une roue de diamètre 60 cm :

$$Q = 10 \text{ kg}$$

$$\varepsilon^{\circ} \text{ expérimental} : 18^{\circ}5$$

$$\varepsilon^{\circ} \text{ calculé} : 15^{\circ} \text{ avec } \delta = 17^{\circ}33$$

$$17^{\circ} \text{ avec } \delta = 13^{\circ}$$

- Comparaison avec les résultats de M. OBERTI :

Les expériences ont été réalisées avec une roue de 35 cm de diamètre.

Q_{kg}	2	4	6
ε° OBERTI	29°	36°	43°
ε° calculé	11°	16°	20°

- Conclusion :

Les roues de petit diamètre donnent des résultats très éloignés de ceux de la théorie. Ceci peut s'expliquer par le fait que la roue n'est pas assez grande par rapport aux dimensions des rouleaux. Ainsi, comme l'a montré M. DUPERRIN sur le graphique 8 de la page 42 de sa thèse de troisième cycle, il n'y a pas similitude pour les petits diamètres.

Les roues de grand diamètre donnent des résultats d'ordre de grandeur comparable. Pour la roue de 70 cm de M. BOUCHERIE, la théorie donne des enfoncements plus forts, pour la roue de 60 cm de M. DUPERRIN des enfoncements plus faibles.

Les résultats sont rappelés sur le graphique 7.

b) Cas II : C et $H \neq 0$.

Nos hypothèses de calcul diffèrent très sensiblement des données de l'expérience. En effet, pour un essai à H et Q constant, M. BOUCHERIE a constaté la formation d'une vague importante à l'amont de la roue quand $\frac{H}{Q}$ est faible et à l'aval dans le cas contraire. Toutefois, si la vague amont a une grosse influence du fait qu'elle est à l'état de butée avec un frottement roue-terrain $-\delta$, la vague aval ne doit pas changer dans de grandes proportions nos résultats, le frottement roue-terrain étant $+\delta$. Nous pouvons dans ce dernier cas comparer qualitativement les résultats.

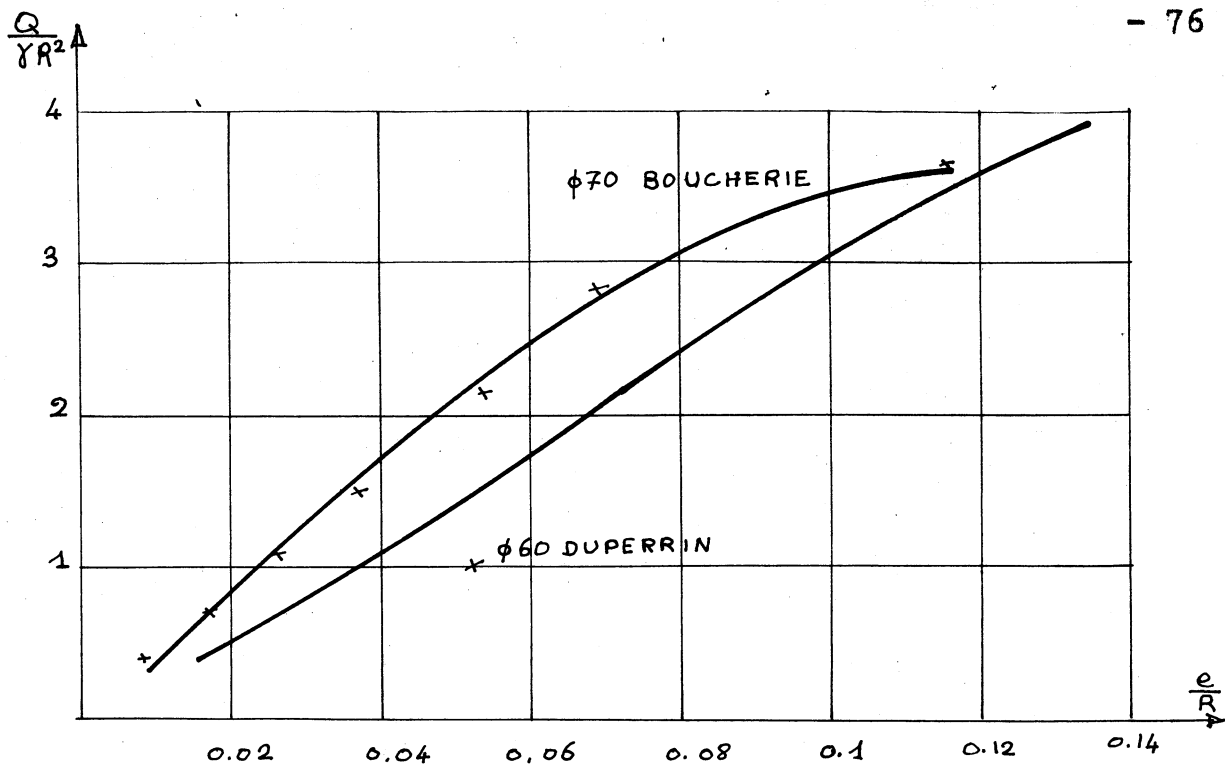
Pour ce faire, nous avons porté sur le graphique 8 $Q(\alpha)$ avec H constant et sur le graphique 9 les courbes $Q(\alpha)$, $H(\alpha)$ et $C(\alpha)$ relatives à différents enfoncements pour $\delta = \frac{2}{3} e$.

$\frac{H}{Q}$ est grand, c'est-à-dire que nous nous plaçons au départ dans les petites valeurs de α , par exemple en A. H et Q restant constants, A va se déplacer sur une parallèle à l'axe des α (graphique 9). Au fur et à mesure que la roue avance, le glissement augmente, α croît et nous constatons sur le graphique que ε c'est-à-dire l'enfoncement augmente, ceci jusqu'au régime permanent où α garde une valeur constante.

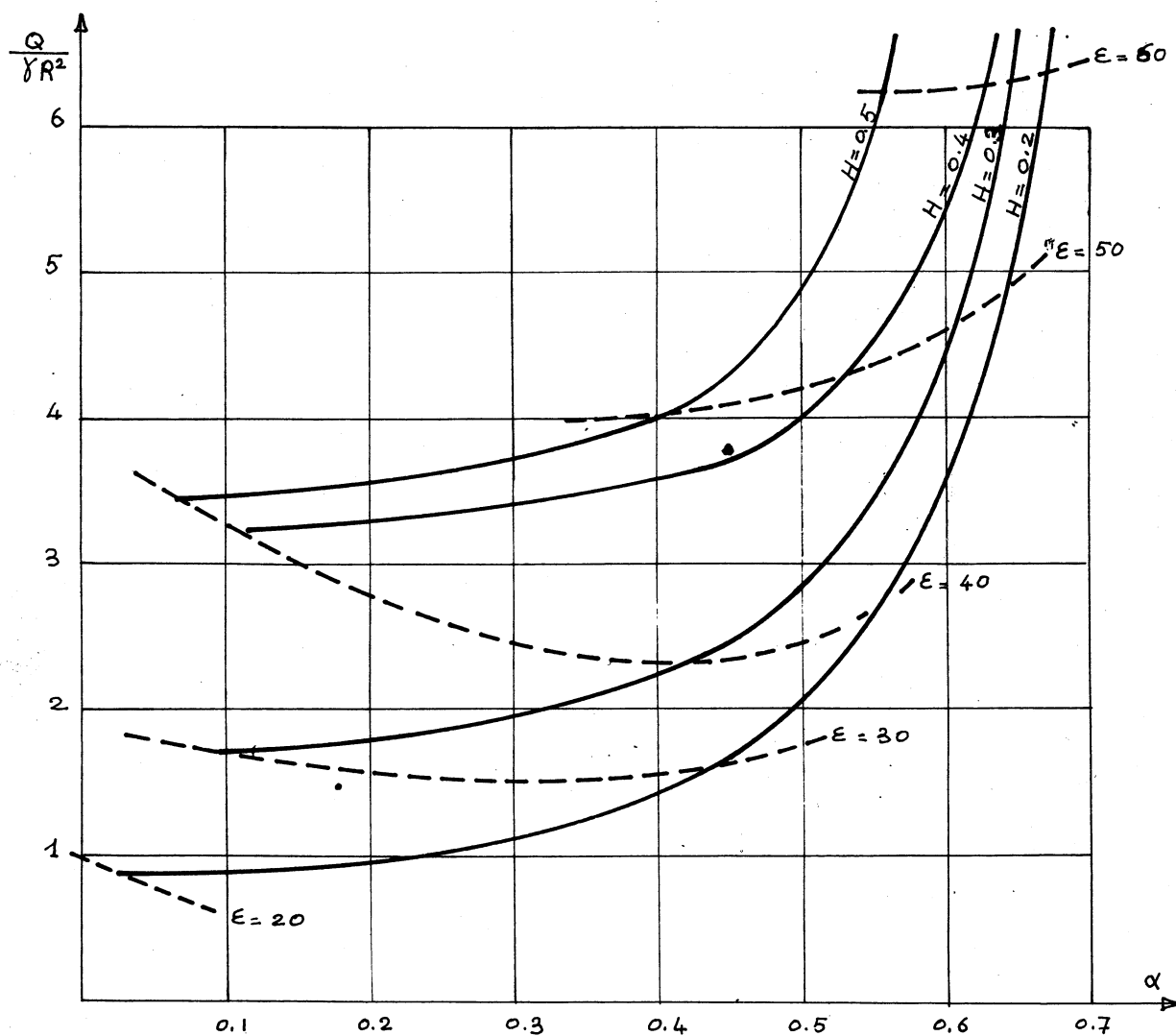
Pour $\frac{H}{Q}$ faible, d'après le graphique, le phénomène est le même mais nettement plus accentué. Mais une vague amont importante se forme qui, a pour conséquence, d'augmenter la portance du milieu et l'enfoncement décroît pour se stabiliser en régime permanent.

Les résultats qualitatifs fournis par le calcul sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de M. BOUCHERIE.

Nous constatons que φ_p , abscisse angulaire du point P séparation des deux zones du schéma adopté varie en fonction du glissement q de la roue. La loi $\varphi_p(q)$ ne peut nous être fournie par le calcul statique effectué. Une étude cinématique est nécessaire.



GRAPHIQUE 7

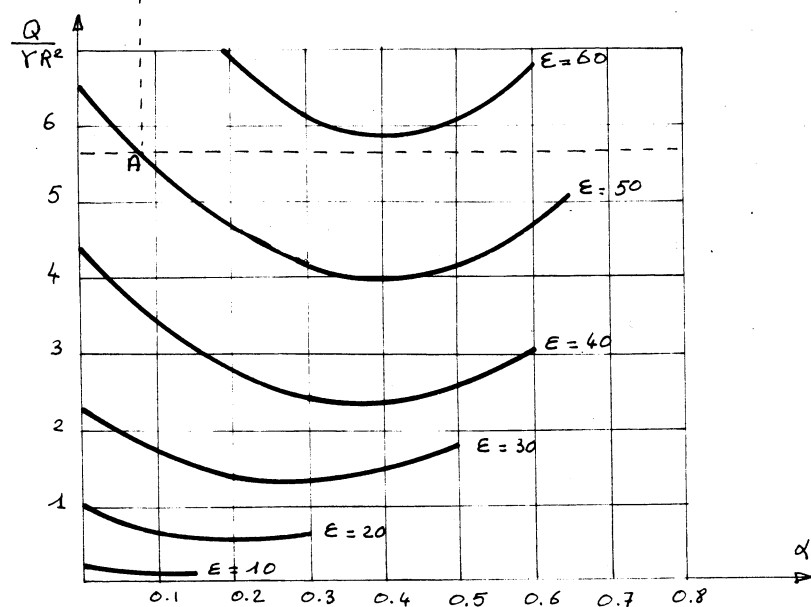
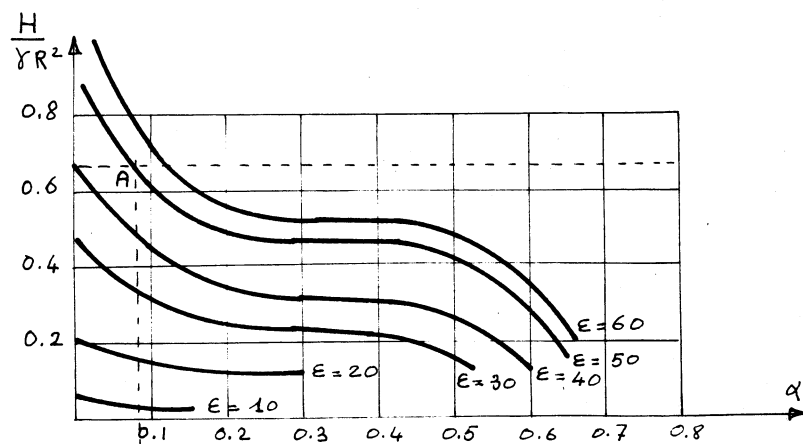
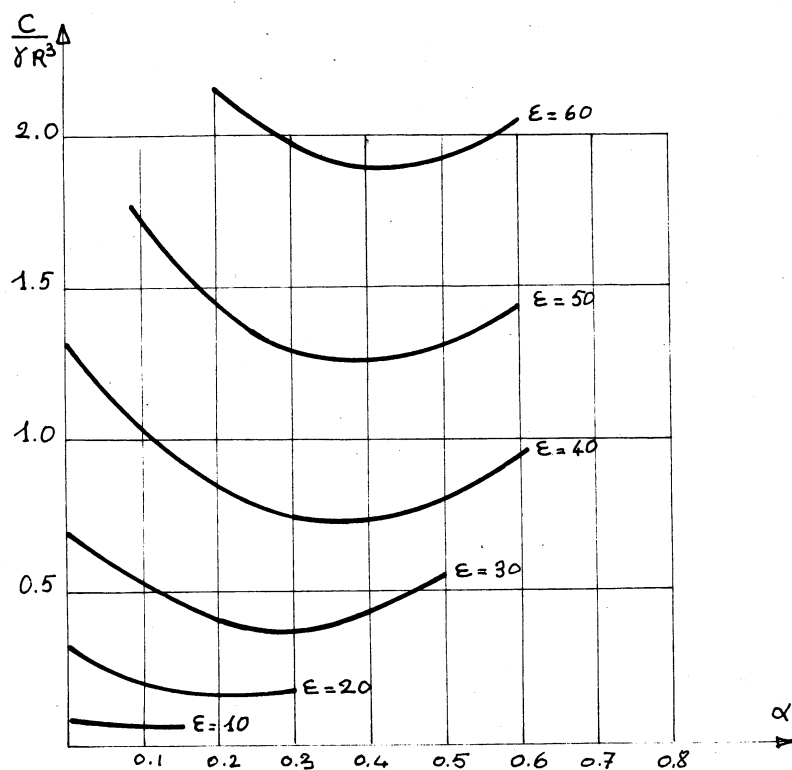


GRAPHIQUE 8

GRAPHIQUE 9

COURBES $C(\alpha)$ $H(\alpha)$ $Q(\alpha)$

CAS II



CONCLUSION

La méthode KRAVTCHENKO-SIBILLE permet un passage théorique de la singularité à l'origine dans le cas d'un milieu pulvérulent non chargé aux frontières quelconques.

Nous avons étudié les singularités des équations différentielles obtenues afin de pouvoir pratiquement effectuer leur intégration numérique. Nous avons programmé cette intégration dans un cas particulier : celui d'une roue rigide reposant sur un milieu pulvérulent.

Les résultats numériques obtenus sont en très bonne concordance avec l'expérience dans le cas de la roue statique, compte tenu du fait que la répartition des inclinaisons des contraintes sur la roue est inconnue.

Dans le cas d'une roue mobile, nous retrouvons les lois qualitatives observées. Mais ne perdons pas de vue que l'inclinaison des contraintes et α_p lié au glissement sont des inconnues que l'étude statique ne peut fournir.

Nous n'avons fait ici qu'effleurer le problème du mouvement de la roue.

BIBLIOGRAPHIE

- M. BOUCHERIE : "Etude de la locomotion tous terrains".
Thèse de 3e Cycle, Grenoble,
17 Juillet 1964.
- A. CAQUOT et J. KERISEL : "Traité de Mécanique des Sols".
Gauthier-Villars, Paris,
1956.
- CH. DUPERRIN : "Etude de la locomotion tous terrains".
Thèse de 3e Cycle, Grenoble,
19 Janvier 1962.
- M. HEURTAUX : "Calcul des contraintes en poussée exercées par
un massif pulvérulent sur un écran rigide".
Thèse de 3e Cycle, Grenoble,
19 Janvier 1960.
- J. KARMAN : "Uber elastische Genzzustande"
Verhandlungen des zweiten Internationalen Kongresses
fur technische Mechanik, Zurich,
1927.
- J. KRAVTCHENKO : "Cours de troisième Cycle",
1963-1964.
- J. KRAVTCHENKO - R. SIBILLE : "Etude des singularités rencon-
trées dans les problèmes d'équilibre limite".
C.R.A.S. à paraître.
- A. OBERTI : "Etude de la locomotion tous terrains",
Thèse de 3e Cycle, Grenoble,
12 Juillet 1963.
- I.G. PETROVSKI : "Lectures on Partial Differential Equations",
Interscience Publishers L T D, London,
1964.

H. POINCARÉ : "Sur les courbes définies par les équations différentielles",
4e Partie, Journal de Mathématiques,
1886.

H. RAVIZE : "Poussée des terres",
Dunod, Paris,
1945.

V.V. SOKOLOVSKI : "Statics of Granular Media",
Pergamon Press,
1965.

J. STERENBERG : "Etude de la locomotion tous terrains",
Thèse de 3e Cycle, Grenoble,
10 Octobre 1963.
