



HAL
open science

Contribution à l'étude des marées dans les mers littorales : application à la Manche

Christian Le Provost

► **To cite this version:**

Christian Le Provost. Contribution à l'étude des marées dans les mers littorales : application à la Manche. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I; Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1974. tel-00284605

HAL Id: tel-00284605

<https://theses.hal.science/tel-00284605>

Submitted on 3 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

et

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Christian LE PROVOST

Ingénieur E.I.H.

PREMIÈRE THÈSE

**Contribution à l'étude des marées
dans les mers littorales
Application à la Manche**

DEUXIÈME THÈSE

(Proposition donnée par la Faculté)

**Le phénomène des ondes de Rossby
engendré par la topographie des fonds marins**

Soutenue le 30 Avril 1974 devant la Commission d'Examen

M. L. NÉEL
Membre de l'Institut, Prix Nobel,

Président

M. J. KRAVTCHENKO

Rapporteurs

M. H. LACOMBE
Membre de l'Institut,

M. A. CRAYA
M. J.P. GERMAIN

Examineurs

AVANT-PROPOS

M. le Professeur NEEL, Membre de l'Institut, m'a fait l'honneur de présider, malgré ses nombreuses charges, le jury qui va examiner ce travail. Je lui présente l'expression de ma respectueuse gratitude.

Cette étude a été réalisée dans le cadre des activités de la Section "Marées et Ondes Internes" de l'Institut de Mécanique de Grenoble. Que tous ceux qui m'ont aidé dans sa réalisation soient assurés de ma reconnaissance.

Celle-ci va tout d'abord vers mon maître, M. le Professeur KRAVTCHENKO, qui m'a accueilli dans ses laboratoires. Il a été pour moi un guide éclairé, ne mesurant jamais ni son temps, ni sa peine, pour m'apporter le concours de sa compétence et son amical soutien. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma totale gratitude.

M. le Professeur CRAYA a accepté d'être membre du jury, je l'en remercie profondément. Je lui suis en outre reconnaissant, de même qu'à M. le Professeur SANTON, de m'avoir fait connaître et aimer la mécanique des fluides par leurs enseignements à l'Ecole des Ingénieurs Hydrauliciens de Grenoble.

Ma reconnaissance va aussi à M. le Professeur LACOMBE, Membre de l'Institut ; il a bien voulu suivre et encourager les activités de notre équipe et me faire l'honneur de s'intéresser à mes travaux ; il a enfin accepté, malgré ses nombreuses occupations, de remplir les fonctions de rapporteur, au sein du jury de cette thèse.

Je remercie également M. le Professeur GERMAIN, lui aussi membre de ce jury ; il m'a toujours accordé conseils et encouragements, avec une constante disponibilité.

La part expérimentale de ce travail est l'oeuvre commune de la Section "Etude des Marées" de l'I.M.G. Je veux remercier tout particulièrement M. CHABERT d'HIERES qui m'a donné la possibilité d'utiliser cet outil remarquable que constitue la plateforme tournante "Coriolis" et son modèle de la Manche. Constamment, il m'a fait bénéficier de sa parfaite maîtrise de l'installation, de ses compétences et de ses conseils. Nos échanges d'idées sur notre travail ont toujours été fructueux et son amitié très précieuse.

M. CARCEL m'a apporté en toutes circonstances une assistance efficace et dévouée dont je le remercie.

Hors du Laboratoire, j'ai pu bénéficier de contacts qui m'ont été des plus utiles. Je tiens à remercier ici :

. MM. les Ingénieurs Généraux de l'Armement GOUGENHEIM, Membre de l'Institut, et EYRIES pour l'intérêt qu'ils ont toujours porté à ces travaux.

. MM. les Ingénieurs en Chef de l'Armement PASQUAY et DEMERLIAC, tous les deux membres de la Section "Marée et Géophysique" du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, les Docteurs CARTWRIGHT et LENNON, les membres de l'Institute of Coastal Oceanography and Tides de Liverpool, dont j'ai pu apprécier le concours et l'expérience. Qu'il me soit permis, en particulier, de rendre hommage à la mémoire du Docteur ROSSITER, ancien Directeur de l'I.C.O.T., dont la disparition prématurée m'a profondément affecté.

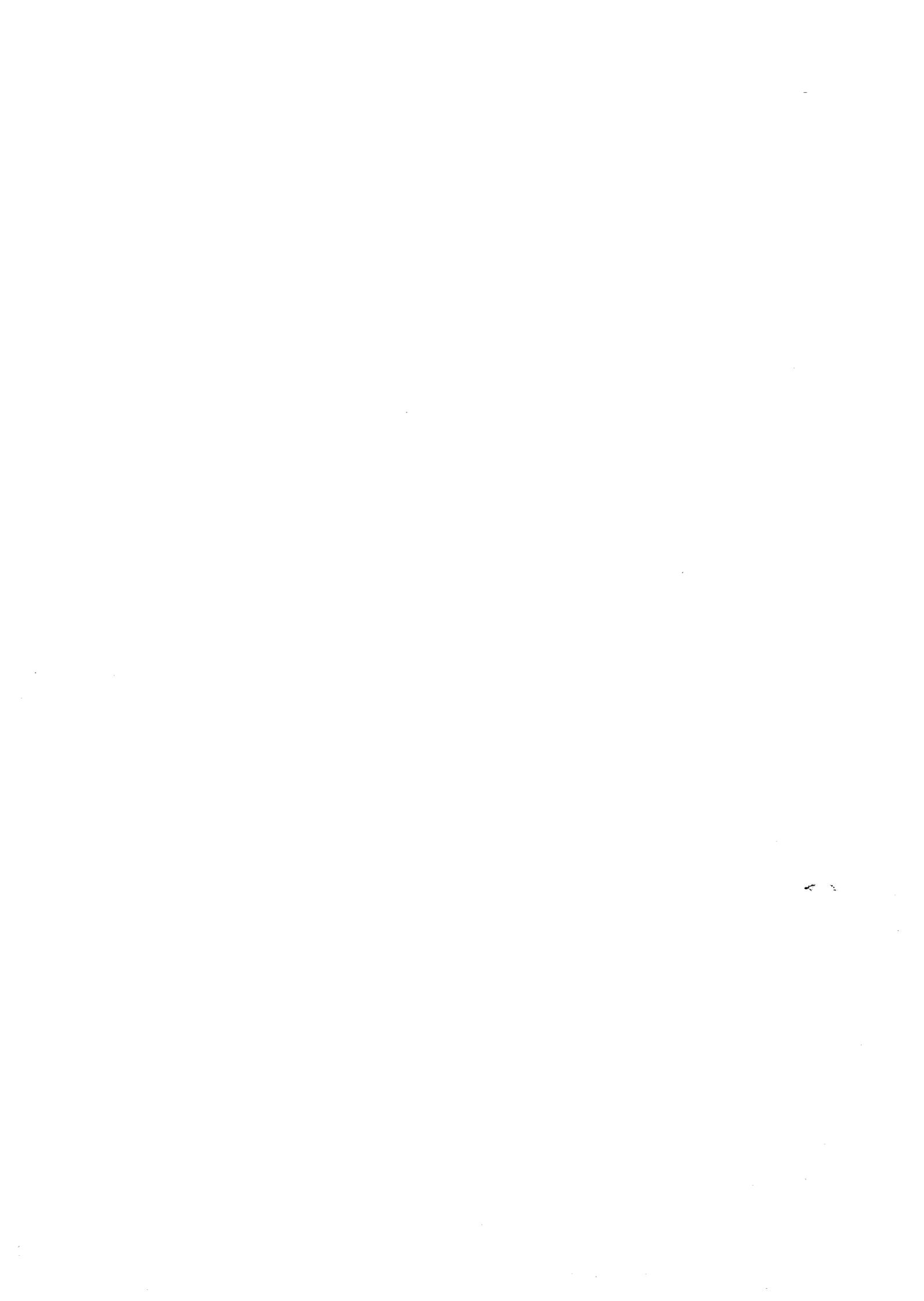
Je remercie enfin tous ceux qui ont contribué à la mise en forme de ce mémoire : Mme ELBERG, qui a dactylographié mon manuscrit et M. BRAUËT et ses collaborateurs, qui en ont effectué le tirage avec leur compétence coutumière.

Ce travail a été réalisé avec l'aide financière apportée, sous forme de contrats de recherche, par :

- le Comité pour l'Exploitation des Océans (C.O.M.E.X.O.) de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique (D.G.R.S.T.),*
- le Centre National pour l'Exploitation des Océans (C.N.E.X.O.),*
- le Service Central Hydrographique et Océanographique de la Marine (S.H.O.M.),*

et, sous forme de crédits d'équipement et de fonctionnement, par l'Université de Grenoble et le Centre National de la Recherche Scientifique (C.N.R.S.)

-o-o-o-o-o-



S O M M A I R E

	Page
* INTRODUCTION	1
* PREMIERE PARTIE :	
<u>LES MAREES, LEUR POTENTIEL GENERATEUR ET LEUR DECOMPOSITION HARMONIQUE</u>	
Introduction	10
Chapitre I-1 : Rappels sur la génération des marées	11
1- Les forces génératrices des marées	12
2- L'expression du potentiel générateur	18
3- Etude sommaire du potentiel générateur en fonction du temps	23
Chapitre I-2 : Les développements harmoniques du potentiel générateur	31
1- Le développement de DARWIN	32
2- Le développement de DOODSON	37
3- La comparaison des développements de DARWIN et DOODSON	41
4- Le nouveau développement de CARTWRIGHT et TAYLER	42
Chapitre I-3 : La décomposition harmonique des observations de marées -	
Cas particulier de la Manche	44
1- Expression de la marée sous forme de série harmonique	44
2- L'analyse harmonique des enregistrements de marées	47
3- Composition harmonique de la marée dans la Manche	59
* DEUXIEME PARTIE :	
<u>ETUDE ANALYTIQUE DES MAREES LITTORALES</u>	
Introduction	66
Chapitre II-1: Les équations du problème et ses conditions aux limites -	
Etude analytique	62
1- Définitions et notations	67
2- Hypothèses classiques et équations des marées littorales ...	68
3- Nouvelle justification des équations des marées littorales .	70
4- Etude analytique des marées littorales	77
Chapitre II-2: Décomposition spectrale du terme quadratique de frottement	88
1- Rappel de l'expression de la force de frottement -	
position du problème.....	88
2- Etude du terme $(h + \zeta)^{-1}$	
3- Etude du terme $R = (u^2 + v^2)^{1/2}$	91
4- Etude du terme $F_x = CRu/h$	97
5- Expression définitive des composantes F_x et F_y	99

Chapitre II-3: Application de la méthode du petit paramètre à la résolution du problème des marées littorales, au second ordre d'approximation	116
1- Etude des systèmes différentiels pour les premiers ordres d'approximation - origine des différentes composantes non-linéaires	117
2- Méthodes pratiques de résolution du problème	130

* TROISIEME PARTIE :

ETUDE EXPERIMENTALE SUR MODELE REDUIT - APPLICATION A LA MANCHE

Introduction	138
Chapitre III-1: Position du problème - Mise en oeuvre pratique des méthodes de résolution	139
1- Etat actuel des connaissances des composantes de marées in situ	139
2- Le modèle réduit de la Manche	141
3- Mise en oeuvre pratique de nos méthodes sur modèle réduit	143
Chapitre III-2: Exemple d'application à l'interaction entre les ondes M_2 et S_2 - Etude de la composante quart-diurne MS_4	155
1- Simulation sur le modèle réduit de la propagation simultanée des ondes M_2 et S_2 - Recherche des caractéristiques de l'onde HG_4	155
2- Etude des ondes quart-diurnes entrant par les limites ..	169
3- Calcul de la solution finale	172
4- Résultats - Caractéristiques de l'onde MS_4	175

* QUATRIEME PARTIE

SUR QUELQUES APPROXIMATIONS DE LA DESCRIPTION HARMONIQUE DES MAREES LITTORALES

Introduction	182
Chapitre IV-1 : Analogies et différences entre les principales composantes du spectre des marées littorales	183
1- Interprétation théorique des analogies entre les cartes des ondes de fréquence voisine	183
2- Comparaison à partir de quelques valeurs observées in situ ..	189
3- Comparaison à partir des réseaux caractéristiques établis pour la Manche	194

Chapitre IV-2 : Séparation des parts astronomiques et non-linéaires pour les ondes mixtes - exemple de l'onde $\mu_2 + 2MS_2$	209
1- Position du problème	209
2- Hypothèses permettant de résoudre le problème de la séparation de l'onde $\mu_2 + 2MS_2$ en ses composantes	211
3- Détermination des paramètres H_{μ_2} , g_{μ_2} , H_{2MS_2} et g_{2MS_2} dans quelques ports d'observation	213
4- Détermination des caractéristiques des ondes μ_2 et $2MS_2$	214
 * CONCLUSIONS	 225
 * ANNEXES	



INTRODUCTION

Les marées sont, avec les mouvements de l'atmosphère, les exemples rares d'écoulements fluides affectant tout le globe terrestre. La difficulté de leur étude théorique et expérimentale est notoire. Pour s'en convaincre, rappelons quelques faits bien connus relatifs aux marées littorales, de structure beaucoup plus complexe encore que les marées océaniques, et qui sont les seules à faire l'objet de notre étude.

En un point déterminé des côtes océanes, la courbe du niveau de la surface marine en fonction du temps n'est pas trop éloignée d'une sinusoïde dont la période est voisine de 12 heures 25 minutes, la demi période de révolution apparente de la lune autour de la terre. Mais cette assimilation n'est que grossière, surtout pour les mers littorales, car la marée, en se propageant dans les zones de petits fonds, se déforme de façon parfois spectaculaire : rappelons qu'on observe ainsi au Havre une tenue du plein de deux heures, et qu'à Portland, en vives eaux, il apparaît deux maxima de dénivellation au cours de la période classique semi-diurne de la marée. - cf fig. 2 -

Une analyse plus complète du phénomène révèle par ailleurs qu'il est loin d'être périodique en t , le temps : son "amplitude" et sa "phase" varient fortement selon que l'on est en marées de vives eaux, de mortes eaux, de solstices ou d'équinoxes ... - cf fig. 1 - On sait d'ailleurs que la période exacte du phénomène est voisine de 18 ans $\frac{2}{3}$.

Par ailleurs, les marnages (dénivellations entre une pleine mer et la basse mer consécutive) varient rapidement d'un point à l'autre de la côte. Prenons à titre d'exemple deux points d'observation situés sur le même méridien, et distants de 170 km l'un de l'autre : Granville dans la baie du Mt. St. Michel, et Swanage, sur

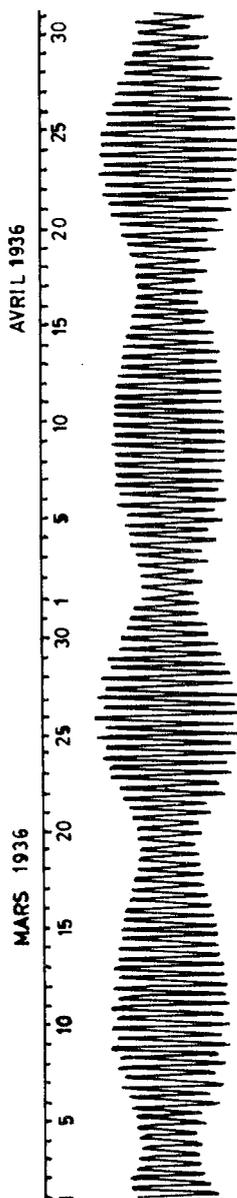


FIG.1: Courbe de marée à Immingham

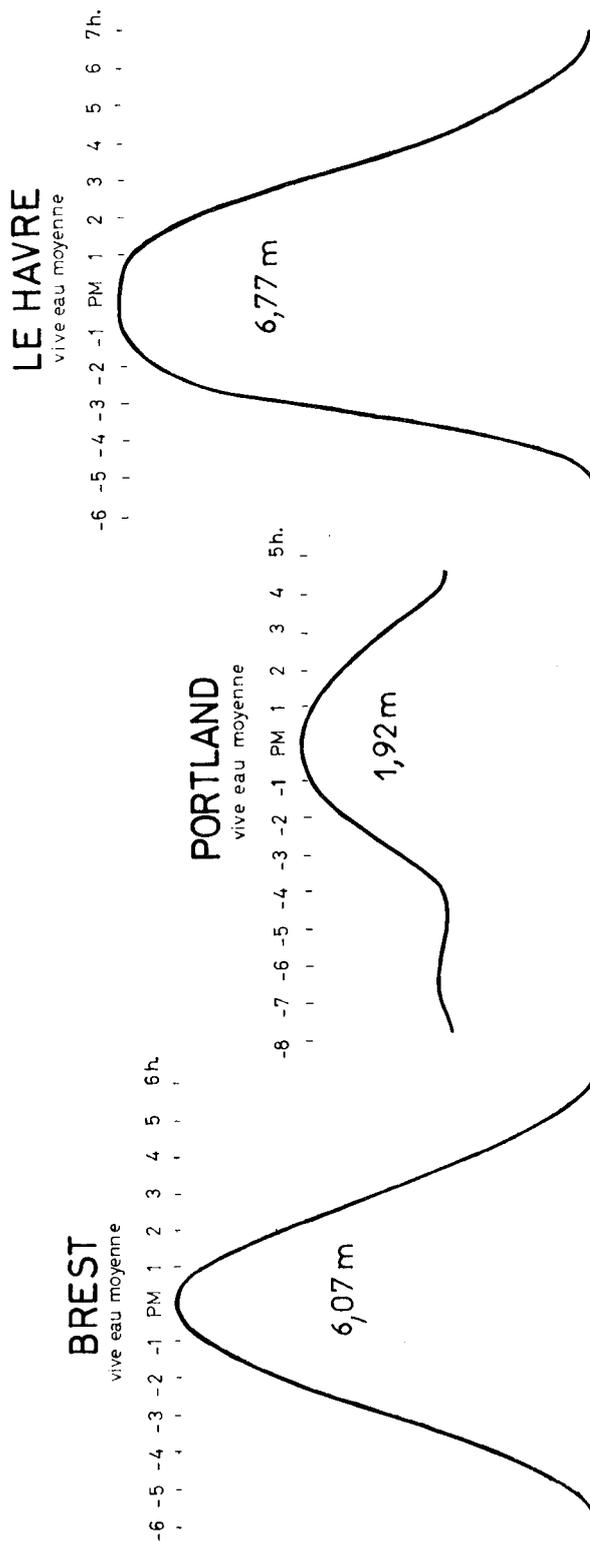


FIG.2: Exemples de courbes de marées observées dans une même zone littorale

la côte est de l'Angleterre. On constate que l'amplitude de la dénivelée atteint 11 mètres en vives eaux au premier point, alors qu'elle ne dépasse pas 1.6 mètre au second.

Tels sont les faits dont il convient de rechercher une interprétation théorique, ne fût-ce que qualitative.

A cette fin, il faut naturellement accumuler les observations in situ, qui doivent, d'après ce que nous avons vu, être poursuivies de façon continue et pendant très longtemps. Or, ces mesures sont délicates, très difficiles à mettre en oeuvre, et fort onéreuses. On conçoit ainsi qu'on ne dispose à l'heure actuelle de données nature que pour un nombre restreint de stations côtières, implantées principalement dans les grands ports. Et il n'en existe que très peu de vraiment sûres au large des mers littorales. Pourtant, la connaissance de la marée dans toute l'étendue de telles mers serait utile pour réduire les sondages marins, pour tracer les itinéraires des navires de gros tonnage à travers les zones de petits fonds, ainsi que pour établir les horaires de leurs passages. Rappelons à ce sujet que le tirant d'eau d'un pétrolier de 500 000 tonnes dépasse 28 mètres. Mais ce n'est pas tout. La connaissance des courants de marées est aussi très utile au navigateur ; or les cartes de roses de courants disponibles sont à la fois peu nombreuses et peu précises.

Faute de savoir aborder ces problèmes d'une manière rationnelle, on s'est contenté pendant longtemps de règles plus ou moins empiriques qui permettaient cependant la prédiction assez précise de la marée le long des côtes. Citons à ce sujet les calculs approchés de LAPLACE qui se sont révélés si utiles et qui le sont encore. Des théories plus élaborées ont vu le jour dans les années 1923-1924 (DEFANT, DOODSON et PROUDMAN). Elles postulent la connaissance a priori des courants de marées dans la mer littorale étudiée : la connaissance des champs de courant permet de définir les champs de marnage, à partir soit de l'équation de continuité (DEFANT - cf [2]), soit des équations de la dynamique des ondes longues (PROUDMAN et DOODSON - cf [9]). L'avantage de ces méthodes tient à ce que les procédés de mesure approchée des courants au large sont connus depuis longtemps, en sorte que les hydrographes étaient à même de fournir aux théoriciens les données expérimentales correspondantes.

H. LACOMBE s'est inspiré en 1950 de ces idées pour calculer numériquement les marnages dans la Manche centrale - cf [8] . Le développement des méthodes de calcul numériques sur ordinateur a permis plus récemment d'exploiter des modèles mathématiques plus élaborés. Citons dans cet ordre d'idées, les travaux de W. HANSEN - cf [4] , [5] , [6] - de GOHIN - cf [3] , de HYACINTHE et KRAVTCHENKO - cf [7] -

On notera toutefois que les théories précédentes ne concernent que les marées littorales moyennes, dont la périodicité temporelle stricte, postulée a priori, est la caractéristique essentielle. Ces approches théoriques que nous venons de rappeler ne sont donc pas susceptibles, de par leur nature même, d'interpréter les variations de marnages et de courants avec le temps, c'est-à-dire la loi de succession de ces marées moyennes. D'un autre côté, les auteurs précités se sont toujours ramenés à des problèmes aux limites de types divers mais dont les conditions aux frontières marines, a priori inconnues, ont dû être choisies de façon empirique, et souvent schématisées à l'extrême.

*
* *

Notre travail a pour but de présenter une méthode nouvelle d'étude des marées littorales, susceptible d'en déterminer les lois dans toute l'étendue du domaine marin, à partir des données côtières. A cet effet, nous étudions la marée sous sa forme spectrale : celle-ci est considérée comme résultant de la superposition de composantes élémentaires, d'origine linéaire ou non, rigoureusement sinusoïdales en tant que fonctions du temps, et dont les périodes peuvent être déterminées a priori. La première partie de cet exposé est ainsi consacrée à un bref rappel des théories classiques de décomposition harmonique de la marée.

Dans une deuxième partie, nous présentons les points essentiels de la méthode que nous avons développée. Elle nous permet une description immédiate et qualitative des différents mécanismes de génération des composantes de la marée : potentiel astronomique, frottement, inégalités de fond, etc... Elle nous conduit à un modèle fin des marées littorales applicable soit sur modèle mathématique, soit sur modèle réduit physique.

Comme nous disposions à l'Institut de Mécanique de Grenoble, d'un modèle réduit hydraulique de la Manche - cf [1] - , c'est naturellement sur celui-ci que nous avons appliqué en premier lieu nos conclusions. En combinant nos prévisions analytiques avec l'emploi de ce modèle réduit, nous avons étudié la plupart des composantes notables de la marée dans cette mer. Cette application fait l'objet de la troisième partie de cet exposé. Nous donnons, en particulier, quelques résultats typiques illustrant les possibilités de nos méthodes.

Enfin, notre analyse nous permet, par ailleurs, de préciser théoriquement, dans la dernière partie de cet exposé, les propriétés essentielles de ces diverses composantes de la marée, et de formuler une approximation simplificatrice de sa définition harmonique. La vérification pratique de ces conclusions conduit à une étude comparative très fine des principales ondes se propageant dans la Manche.

Notons que cette méthode d'analyse présente un inconvénient certain : elle nécessite en effet l'étude d'un nombre élevé de composantes pour permettre une prédiction valable de la marée. Mais, en revanche, elle est sûre et rationnelle, car elle est fondée sur des hypothèses nettement formulées qui paraissent raisonnables a priori, et dont les conséquences sont en bon accord avec les faits observés in situ.

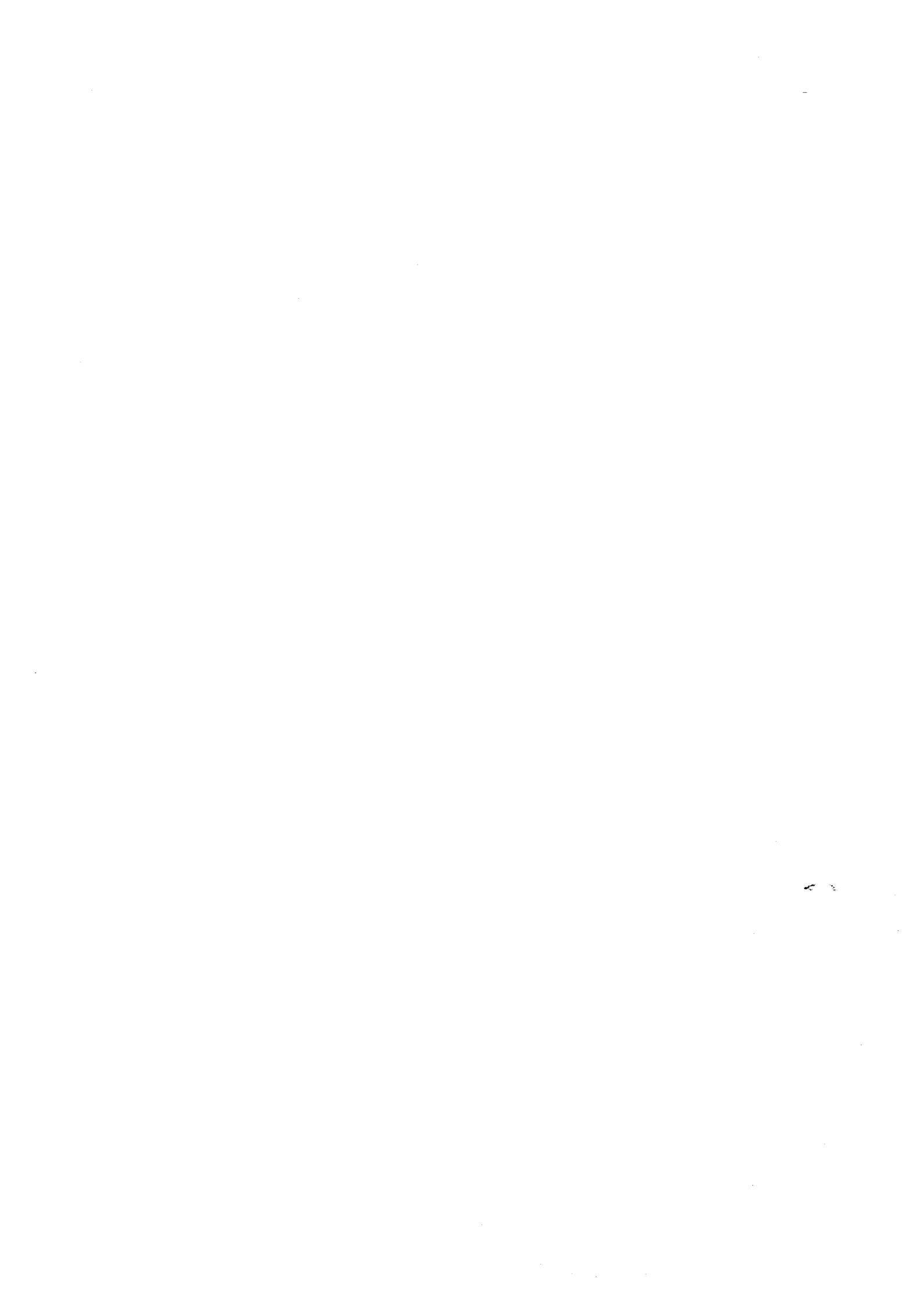
* * *

Si la description spectrale des marées littorales n'est pas nouvelle dans son principe, les travaux présentés ici ont abouti à sa formulation analytique complète, à son exploitation sur modèle mathématique et physique, et à des résultats concrets et nouveaux valables pour l'ensemble du domaine marin exploré. Nous espérons ainsi avoir contribué à interpréter théoriquement, à l'ordre d'approximation atteint aujourd'hui, le mécanisme fin d'un phénomène réputé complexe et fourni des éléments utiles à une meilleure prédiction des marées dans la mer littorale qui nous a servi de domaine d'application : LA MANCHE.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. BONNEFILLE, G. CHABERT D'HIERES - 1967 -
"Etude d'un modèle tournant de mer littorale - Application au problème de l'usine marémotrice des Iles Chausey"
La Houille Blanche - N°6.
- [2] A. DEFANT - 1923 -
"Die Gezeiten der Nordsee - Beobachtungen und Theorie"
Ann. der Hydro. Mar. Met. Vol. 51
- [3] F. GOHIN - 1960 -
" Détermination des dénivellations et des courants de marée"
VII° Congrès de Coastal Engineering
- [4] W. HANSEN - 1940 -
"Ein Verfahren zur Berechnung der eintägigen Tiden"
Ann. Hydr. Mar. Met. Vol.68
- [5] W. HANSEN - 1948 -
" Die Ermittlung der Gezeiten beliebig gestalteter Meeresgebiete mit Hilfe der Randwertverfahrens"
Deutsch Hydro Z. Vol. 1
- [6] W. HANSEN - 1961 -
" Hydrodynamical methods applied to oceanographic problems"
N.A.T.O. Symposium (1961) Inst. für Meeresk. Univ. Hamburg
- [7] J.L. HYACINTHE et J. KRAVTCHENKO - 1967 -
"Modèle mathématique de marées littorales, calcul numérique sur l'exemple de la Manche"
La Houille Blanche - N°6 - pp. 639-650.

- [8] H. LACOMBE - 1950 -
"Détermination de la marée au large à partir des courants de marée.
Application aux marées de la Manche centrale entre le méridien de
Cherbourg et le méridien de Fécamp"
Annales hydrographiques de 1949
- [9] J. PROUDMAN et A.T. DOODSON - 1924 -
"The principal constituent of the tides of the Nord Sea"
Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie A,
Vol.224.



PREMIERE PARTIE

LES MAREES, LEUR POTENTIEL GENERATEUR
ET LEUR DECOMPOSITION HARMONIQUE

INTRODUCTION

L'étude des marées littorales que nous présentons en deuxième et troisième parties repose sur la décomposition spectrale du phénomène. Il y a donc lieu au préalable de rappeler l'origine des marées, et de préciser l'intérêt que présente pour leur étude cette décomposition spectrale.

Après avoir analysé la nature des forces qui engendrent les marées, nous caractérisons les principaux paramètres qui interviennent dans leur évolution en fonction du temps. Ceci nous conduit à rappeler les éléments essentiels de la décomposition spectrale du potentiel générateur des marées océaniques, et de son application à l'analyse harmonique des observations des marées littorales. Nous faisons enfin le point de nos connaissances pratiques dans ce domaine pour le cas d'une mer particulière : la Manche, qui sert par la suite de domaine d'application pour nos théories.

CHAPITRE I-1

RAPPELS SUR LA GENERATION DES MAREES

Comme nous l'avons noté en introduction, l'océanographie dynamique est, avec la météorologie, la seule branche de la Mécanique qui étudie les mouvements de masses fluides répandues sur toute la surface du globe terrestre. Cet effet d'"échelle" implique la mise en oeuvre de méthodes particulières d'investigation qui n'ont été conçues qu'à une époque récente, bien longtemps après l'observation qualitative, "externe", des faits à interpréter. Pour illustrer ces remarques, voici quelques brèves indications historiques concernant le phénomène des marées.

Ce phénomène était déjà connu des anciens, Grecs et Romains. C'est ainsi qu'HERODOTE (425 av. J.C.) mentionne les marées dans le Golfe de Suez, ARISTOTE (324 av. J.C.) et POSIDONIUS (50 av. J.C.) celles des côtes espagnoles, SELEUCUS celles de la Mer Rouge ... STRABON et PLINE (1er siècle ap. J.C.) pressentirent la relation qui existe entre ces mouvements de la mer et ceux du soleil et de la lune. Mais il fallut attendre le XVI^e siècle pour assister aux premières tentatives d'explication du phénomène, en relation avec les besoins de la navigation. Citons naturellement les noms de KEPLER et GALILEE. Et ce fut NEWTON qui établit mathématiquement, pour la première fois, en 1687 la relation existant entre les marées, la lune et le soleil, dans son livre "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Ses travaux furent repris en France au siècle suivant par BERNOULLI. Mais tous deux ne traitèrent que de ce qu'on appelle communément "la marée statique" : ils ne prirent pas en compte les forces d'inertie qui interviennent de façon essentielle dans l'explication du mouvement réel des océans et des mers littorales. Il fallut pour cela attendre LAPLACE en 1774 avec son traité "La Mécanique Céleste" et KELVIN en 1868 qui établirent les bases de la théorie dynamique des marées. Enfin, il convient, pour finir, de citer le grand nom de Henri POINCARÉ, auquel on doit une analyse approfondie des équations linéaires de la marée.

1 - LES FORCES GENERATRICES DES MAREES

Elles sont dues à l'attraction newtonienne de la lune et du soleil sur les océans. Ces deux corps célestes sont d'ailleurs les seuls à produire des effets notables sur les masses d'eau océaniques, l'un à cause de sa proximité relative de la terre, l'autre à cause de l'importance de sa masse.

Les trois principaux facteurs à considérer pour évaluer ces forces génératrices, sont :

- la rotation de la terre
- l'évolution de la lune autour de la terre, suivant une orbite elliptique inclinée par rapport à l'équateur terrestre
- le mouvement du système terre-lune, autour du soleil, suivant l'ecliptique, lui aussi incliné par rapport à l'équateur.

Dans la suite de cet exposé, nous reviendrons plus en détails sur les caractéristiques des mouvements de la lune et du soleil par rapport à la terre. Précisons simplement pour l'instant les forces qui en résultent, en nous inspirant de l'exposé de J. KRAVTCHEENKO - cf [5] - auquel nous renvoyons le lecteur désireux d'avoir de plus amples détails.

1.1 - Axiomes de la mécanique terrestre

Désignons par $Sx_1y_1z_1$ le repère tangentiel direct copernicien dont, rappelons-le, l'origine S est placée au centre de gravité du système solaire, et dont les axes ont des directions fixes par rapport aux étoiles dites fixes. Comme la ligne des pôles terrestres NS possède cette propriété, on peut orienter Sz_1 parallèlement à cette direction privilégiée de la terre. On sait, par ailleurs que la loi fondamentale de la dynamique s'écrit pour un point quelconque P, de masse m, évoluant dans les limites du système solaire :

$$(1) \quad m \vec{\gamma}_a = \vec{F}$$

où \vec{F} est la résultante de toutes les forces appliquées à P et $\vec{\gamma}_a$ est l'accélération absolue de P, c'est-à-dire l'accélération de P dans le mouvement $P/Sx_1y_1z_1$.

Soit maintenant $Txyz$ le repère trirectangle direct, lié au noyau solide de

la terre : T est au centre de gravité de celui-ci, supposé en première approximation fixe par rapport à ce noyau (ce qui revient à négliger les déplacements de T dus aux oscillations des eaux océaniques et aux mouvements de l'atmosphère), Tz est orienté suivant la ligne des pôles ; Tx et Ty sont deux directions rectangulaires quelconques, fixes par rapport à la terre. On sait que le vecteur $\vec{\Omega}$, vitesse instantanée de rotation de Txyz/Sx₁y₁z₁, à la fois fixe dans Sx₁y₁z₁ et Txyz, est orienté suivant Tz et vaut :

$$\omega = |\vec{\Omega}| = \frac{2\pi}{3600.24} \frac{\text{radians}}{\text{secondes sidérales}}$$

Notons alors $\vec{\gamma}_T$ l'accélération absolue de T, c'est-à-dire l'accélération de ce point dans le mouvement Txyz/Sx₁y₁z₁ ; \vec{V}_r et $\vec{\gamma}_r$ respectivement la vitesse et l'accélération relative de P, c'est-à-dire la vitesse et l'accélération de P dans le mouvement P/Txyz. La règle classique de la composition des accélérations permet d'écrire, pour le mouvement P/Sx₁y₁z₁ envisagé comme résultant de la composition de P/Txyz et de Txyz/Sx₁y₁z₁ :

$$(2) \quad \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + [\vec{\gamma}_T + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TP})] + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

Le dernier vecteur du second membre étant l'accélération de CORIOLIS de P, et l'expression entre crochets l'accélération d'entraînement de P. En substituant la valeur de $\vec{\gamma}_a$ ci-dessus dans l'équation (1), on obtient l'équation dite en mouvement relatif :

$$(3) \quad m \vec{\gamma}_r = \vec{F} - m [\vec{\gamma}_T + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TP})] - 2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

Ceci étant, supposons P voisin de la surface de la terre et décomposons \vec{F} en deux termes :

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_A$$

où \vec{F}_t représente la résultante de toutes les forces d'origine terrestre (pesanteur, frottement de contact avec d'autres corps terrestres, attractions électriques de ces corps, etc...) et où \vec{F}_A est la résultante des attractions des corps célestes (soleil, lune, planètes autres que la terre). La loi du mouvement relatif s'écrit alors :

$$m \vec{\gamma}_r = \vec{F}_t - 2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r - m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TP}) + (\vec{F}_A - m \vec{\gamma}_T)$$

Désignons par \vec{g}_{vraie} l'accélération due à l'attraction newtonienne de la terre sur le point P et \vec{F}'_t la résultante de toutes les forces d'origine terrestre autres que la pesanteur. La formule précédente s'écrit :

$$(4) \quad m \vec{\gamma}_\tau = \vec{F}'_t + m [\vec{g}_{\text{vraie}} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{TP})] - 2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_\tau + (\vec{F}_A - m \vec{\gamma}_\tau)$$

C'est la loi fondamentale de la mécanique terrestre en axes liés à notre planète. Le deuxième terme du second membre est ce qu'on appelle le poids vulgaire de M ; d'ailleurs, si H est la projection orthogonale de P sur la ligne des pôles - cf fig. 1.1/1- on a :

$$-\vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \vec{TP}] = \omega^2 \cdot \vec{HP} \quad \Rightarrow \quad \vec{g}_{\text{vulgaire}} = \vec{g}_{\text{vraie}} + \omega^2 \cdot \vec{HP}$$

Le terme $\vec{F}_A - m \vec{\gamma}_\tau$ est la force génératrice des marées que nous allons étudier de plus près.

1.2 - Etude de la force génératrice des marées

Nous allons préciser les propriétés du vecteur $\vec{F}_A - m \vec{\gamma}_\tau$ en interprétant chaque terme qui y figure. Soit M la masse totale de la terre. Le théorème sur le mouvement de son centre de gravité T permet d'écrire :

$$M \vec{\gamma}_T = \vec{R}$$

où \vec{R} est la résultante de toutes les forces extérieures à la terre appliquées à toute la masse formant notre planète. Comme la terre se déplace dans le vide, il n'y a pas de résistances passives en jeu. Dès lors, \vec{R} est la résultante générale des attractions newtoniennes exercées sur les masses en cause par tous les corps du système solaire, autres que la terre elle-même. Un calcul facile montre qu'au degré d'approximation adopté en théorie des marées, on peut négliger les actions de tous les corps du système solaire, à l'exception du soleil et de la lune. Comme les diamètres de ces corps sont négligeables par rapport à leur distance, on montre que la résultante des attractions que l'un quelconque de ces corps exerce sur l'autre s'obtient, avec une approximation suffisante pour nos besoins, en remplaçant chaque corps céleste par une masse ponctuelle fictive égale à la masse totale du corps et placée en son centre de gravité. Ainsi, la résultante cherchée est égale à l'attraction newtonienne que la première masse fictive subit de la part de la seconde.

Notons alors M_S et M_L les masses respectives du soleil et de la lune, L le centre de gravité de cette dernière, \vec{u}_S et \vec{u}_L les vecteurs unitaires portés respectivement par les droites ST et LT , et orientés de façon que :

$$\vec{ST} = \vec{u}_S \cdot ST \quad \text{et} \quad \vec{LT} = \vec{u}_L \cdot LT \quad - \text{ cf fig. I-1/2 -}$$

Le résultat, ci-dessus rappelé, se traduit alors par la relation :

$$M \vec{\gamma}_T = -k \frac{M_S \cdot M}{ST^2} \vec{u}_S - k \frac{M_L \cdot M}{LT^2} \vec{u}_L$$

$$\Rightarrow$$

$$(5) \quad \vec{\gamma}_T = -k \frac{M_S}{ST^2} \vec{u}_S - k \frac{M_L}{LT^2} \vec{u}_L$$

où k est la constante de gravitation universelle.

D'un autre côté, la résultante \vec{F}_A des forces d'origine astronomique exercées sur le point P est égale, d'après ce qui précède, à la somme géométrique des attractions lunaires et solaires appliquées à P . Elle est donnée par :

$$(6) \quad \vec{F}_A = -k \frac{M_S \cdot m}{SP^2} \vec{v}_S - k \frac{M_L \cdot m}{LP^2} \vec{v}_L$$

où \vec{v}_S et \vec{v}_L sont encore des vecteurs unitaires définis par :

$$\vec{SP} = \vec{v}_S \cdot SP \quad \text{et} \quad \vec{LP} = \vec{v}_L \cdot LP$$

L'ensemble de ces formules permet de mettre la force génératrice des marées sous la forme :

$$(7) \quad \vec{F}_A - m \vec{\gamma}_T = -mk \left[M_S \left(\frac{\vec{v}_S}{SP^2} - \frac{\vec{u}_S}{ST^2} \right) + M_L \left(\frac{\vec{v}_L}{LP^2} - \frac{\vec{u}_L}{LT^2} \right) \right]$$

D'après cela, il suffit, pour calculer le premier membre, d'évaluer chacun des termes qui figurent entre les crochets du second ; on peut ainsi discuter séparément les actions respectives de la lune et du soleil.

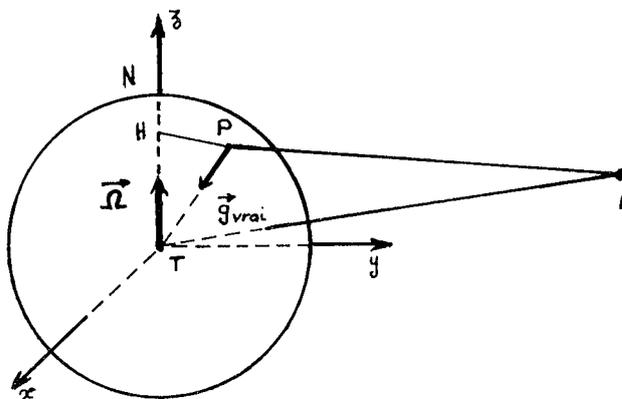


FIG. I.1/1

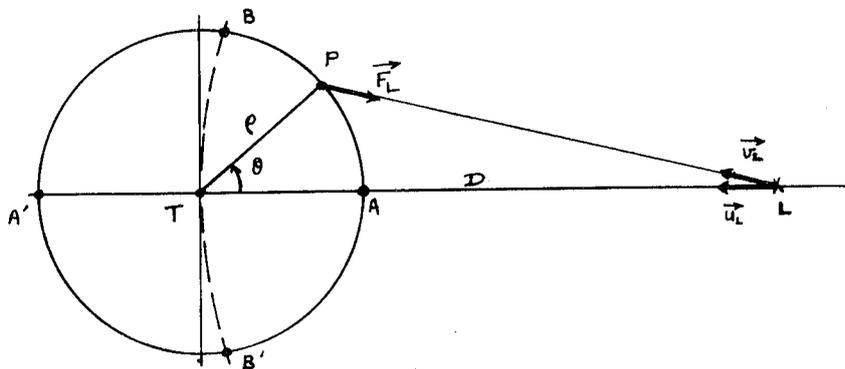


FIG. I.1/2

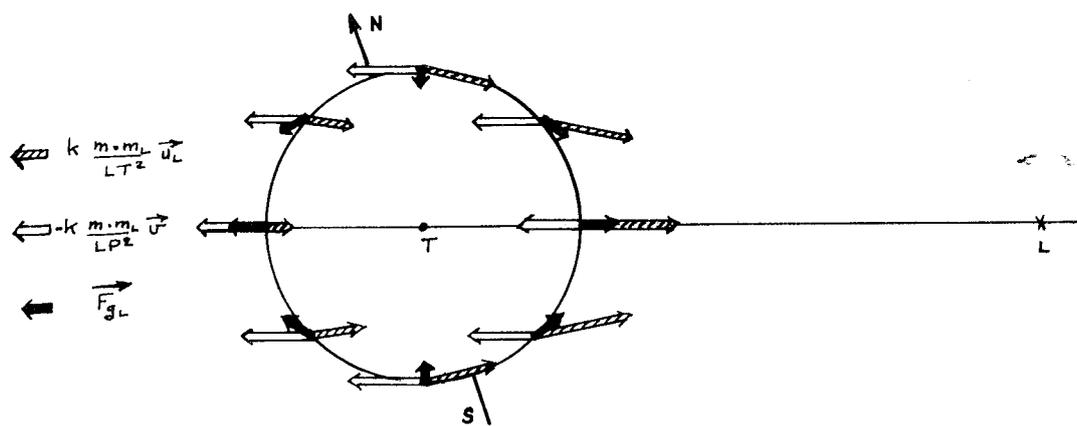


FIG. I.1/3

1.3 - Etude sommaire de la force génératrice lunaire des marées

Posons : $\vec{F}_A = \vec{F}_L + \vec{F}_S$; $\vec{\gamma}_{TL} = -k \frac{M_L}{LT^2} \vec{u}_L$; $\vec{\gamma}_{TS} = -k \frac{M_S}{ST^2} \vec{u}_S$;
 \vec{F}_L et \vec{F}_S étant les attractions de la lune et du soleil respectivement. La force
 génératrice des marées lunaires s'écrit donc :

$$(8) \quad \vec{F}_{gL} = \vec{F}_L - m \vec{\gamma}_{TL} = -m k \left(\frac{\vec{v}_L}{LP^2} - \frac{\vec{u}_L}{LT^2} \right) \cdot M_L$$

Un raisonnement rapide permet d'établir la direction de cette force en chaque point du globe terrestre. En A, point le plus proche de la lune, cf fig. I-1/2, \vec{v}_L et \vec{u}_L sont confondus, et LP est inférieur à LT, \vec{F}_{gL} est donc dirigé vers l'extérieur du globe terrestre. Symétriquement, en A', LP est supérieur à LT : \vec{F}_{gL} est donc toujours dirigé vers l'extérieur de la terre. En B et B', LP est égal à LT, mais \vec{u}_L n'a pas la direction de \vec{v}_L , en sorte que \vec{F}_{gL} est dirigé sensiblement vers T D'une façon générale, il est aisé de déterminer en chaque point du globe terrestre la direction de cette force : elle est ainsi représentée schématiquement sur la figure I-1/3.

Quel est l'ordre de grandeur de l'intensité de cette force ? Comparons-la, en A par exemple, à la pesanteur. La constante universelle k est reliée à la gravité par la relation :

$$g_{vraie} = k \cdot \frac{M}{a^2}$$

où a est le rayon moyen de la terre. Prenons pour valeurs numériques, cf [1] :

$$a = 6\,378 \text{ km} ; \quad TL = D = 384\,400 \text{ km} ; \quad AL = D - a = 378\,022 \text{ km}$$

On en déduit :

$$|\vec{F}_{gL}| = 0,116 \cdot 10^{-6} g_{vraie}$$

Cette force est donc très faible par rapport à la pesanteur.

En prenant en considération la rotation de la terre autour de l'axe des pôles, on constate aisément, à l'aide de la figure I-1/3, qu'une particule située en un point P de la surface terrestre subit au cours de cette rotation une force variable : on conçoit dès lors l'existence des cycles semi-diurnes et diurnes de la marée.

N.B. En ce qui concerne la force génératrice solaire, notons simplement que la masse du soleil correspond à 333 432 fois celle de la terre, que la distance de la terre au soleil est d'environ $149,6 \cdot 10^6$ km. En conséquence on trouve comme ordre de grandeur de la force génératrice solaire :

$$|\vec{F}_{gs}| = 0,052 \cdot 10^{-6} g_{\text{vrai}}$$

soit 2,23 fois moins que la force génératrice lunaire.

La force génératrice des marées résulte de la combinaison de ces deux forces \vec{F}_{gL} et \vec{F}_{gs} . Suivant les positions respectives de la lune et du soleil par rapport à la terre, on conçoit ainsi l'existence d'une modulation de l'amplitude de cette force lorsque ces deux astres passent d'une position de quadrature à une position de conjoncture ou d'opposition : c'est l'incessante évolution de la marée entre les vives eaux et les mortes eaux.

2 - L'EXPRESSION DU POTENTIEL GENERATEUR

Nous allons montrer que ces forces génératrices des marées, décrites au paragraphe précédent, dérivent d'un potentiel. Rappelons qu'avec une approximation suffisante, on peut pour un point P de masse m évoluant à la surface de la terre, les écrire sous la forme (7) :

$$\vec{F}_g = -m k \left[M_s \left(\frac{\vec{u}_s}{SP^2} - \frac{\vec{u}_s}{ST^2} \right) + M_L \left(\frac{\vec{u}_L}{LP^2} - \frac{\vec{u}_L}{LT^2} \right) \right]$$

Notre objectif est donc d'établir l'existence d'une fonction scalaire V , dépendant des coordonnées de P, et d'autres paramètres que nous préciserons, en particulier le temps t, telle que :

$$\vec{F}_g = m \overrightarrow{\text{grad}}_P V$$

et d'en déterminer son expression - V est dit potentiel générateur des marées.

Remarque - La force \vec{F} s'exprimant sous forme d'une somme de deux termes, il suffit pour notre objet, d'établir l'existence des fonctions scalaires V_L et V_S de P, appelées respectivement potentiel générateur solaire et lunaire, telles que :

$$(9) \quad \vec{\text{grad}}_P V_L = -k \cdot M_L \left(\frac{\vec{u}_L}{LP^2} - \frac{\vec{u}}{TL^2} \right) ; \quad \vec{\text{grad}}_P V_S = -k \cdot M_S \left(\frac{\vec{u}_S}{SP^2} - \frac{\vec{u}}{ST^2} \right)$$

Il en résulte que :

$$V = V_L + V_S$$

Et il est clair qu'il suffit d'expliciter V_L pour en déduire V_S .

2.1 - Notations et rappel d'une formule élémentaire

Cette étude est faite en axes liés à la terre ; c'est pourquoi nous utilisons le repère Txyz, déjà introduit au paragraphe précédent. Soient (x_L, y_L, z_L) les coordonnées du centre de gravité L de la lune dans Txyz, (x, y, z) celles du point P lié à la terre, donc indépendantes du temps, et (x_M, y_M, z_M) celles d'un point M quelconque. Nous posons :

$$l = |\vec{LM}| = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2 + (z_M - z_L)^2}$$

$$r = |\vec{LP}| = \sqrt{(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2}$$

$$D = |\vec{LT}| = \sqrt{x_L^2 + y_L^2 + z_L^2}$$

$$\rho = |\vec{TP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = (\vec{TP}, \vec{TL}) \quad \text{mod. } 2\pi$$

θ n'est d'ailleurs défini qu'au signe près, ce qui est sans importance, attendu que ce paramètre n'intervient que par son cosinus dans la suite des calculs. Ce dernier est d'ailleurs donné par la formule :

$$\vec{TP} \cdot \vec{TL} = x \cdot x_L + y \cdot y_L + z \cdot z_L = \rho D \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \rho \cos \theta = \frac{x x_L + y y_L + z z_L}{D}$$

Rappelons un résultat classique et élémentaire de la théorie des potentiels :

$$\frac{\vec{u}}{LP^2} = - \vec{\text{grad}}_{M=P} \frac{1}{l}$$

En effet, la composante suivant Tx du second membre est égale à $\frac{1}{r^2} \frac{x - x_L}{r}$, où $x - x_L/r$ est précisément la composante suivant Tx de \vec{u} .

On peut donc écrire :

$$\vec{F}_{g_L} = -m k M_L \left(\frac{\vec{v}_L}{LP^2} - \frac{\vec{u}_L}{LT^2} \right) = m M_L k \left(\vec{\text{grad}}_{M=P} \frac{1}{\ell} - \vec{\text{grad}}_{M=T} \frac{1}{\ell} \right)$$

La force génératrice lunaire est la différence de deux gradients, l'un pris au point P, l'autre au point T. Il nous faut donc démontrer que cette différence se réduit à un seul gradient au point d'observation P.

$$\vec{\text{grad}}_P V_L = k M_L \left(\vec{\text{grad}}_P \frac{1}{\ell} - \vec{\text{grad}}_T \frac{1}{\ell} \right)$$

2.2 - Démonstration

Dans le triangle LPT, on a la relation :

$$z^2 = D^2 + \rho^2 - 2\rho D \cos \theta$$

d'où :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{D \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{D^2} - 2 \frac{\rho}{D} \cos \theta}}$$

or, P étant situé près de la surface du géoïde, ρ/D est très inférieur à l'unité. Dans le cas de la lune, on a :

$$\frac{\rho}{D} \# \frac{6}{360} = \frac{1}{60}$$

Il s'ensuit que $\left| \frac{\rho^2}{D^2} - \frac{2\rho}{D} \cos \theta \right| \ll 1$, en sorte qu'on peut écrire le développement bien connu :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{D \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{D^2} - \frac{2\rho}{D} \cos \theta}} = \frac{1}{D} \sum_0^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{\rho^n}{D^n}$$

où la notation $P_n(\cos \theta)$ désigne le n-ième polynôme de LEGENDRE dont l'argument est la variable $\cos \theta$. Rappelons que les inégalités $|\cos \theta| \leq 1$ et $\rho/D \ll 1$ garantissent que la série figurant au second membre converge absolument et uniformément

$\forall \theta \in (0, 2\pi)$ et qu'on peut ainsi opérer avec la série de LEGENDRE ci-dessus comme avec un polynôme, pour en évaluer la dérivée et l'intégrale, c'est-à-dire qu'il est légitime de différentier ou d'intégrer la série terme à terme.

En pratique, en raison de la petitesse du paramètre $\frac{\rho}{D}$, on limite ce développement à :

$$\frac{1}{z} \approx \frac{1}{D} \sum_0^3 P_n(\cos \theta) \frac{\rho^n}{D^n}$$

On notera d'ailleurs que la prise en compte du terme $P_3(\cos\theta) \rho^3 / D^3$ est pour la lune presque à la limite de la précision atteinte actuellement dans l'interprétation des mesures faites "in situ". Pour le soleil, il est d'ailleurs négligeable. Comme les quatre premiers polynômes de LEGENDRE sont donnés par les formules :

$$P_0 = 1 \quad ; \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta \quad ; \quad P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \quad ; \quad P_3(\cos\theta) = \frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2}$$

l'expression $\frac{1}{r}$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{D} + \frac{1}{D} \frac{\rho \cos\theta}{D} + \frac{1}{2D} \left[3 \left(\frac{\rho \cos\theta}{D} \right)^2 - \left(\frac{\rho}{D} \right)^2 \right] + \frac{1}{2D} \left[5 \left(\frac{\rho \cos\theta}{D} \right)^3 - 3 \frac{\rho^2}{D^2} \left(\frac{\rho \cos\theta}{D} \right) \right]$$

D'où, en égard à l'expression ci-dessus de $\rho \cos\theta$:

$$\vec{\text{grad}}_P \frac{1}{r} = \vec{i} \frac{x_L}{D^3} + \vec{j} \frac{y_L}{D^3} + \vec{k} \frac{z_L}{D^3} + \frac{1}{D} \vec{\text{grad}}_P \sum_2^3 P_n(\cos\theta) \frac{\rho^n}{D^n}$$

où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes de T_{xyz} .

Comme par ailleurs :

$$\vec{\text{grad}}_T \frac{1}{r} = \vec{i} \frac{x_L}{D^3} + \vec{j} \frac{y_L}{D^3} + \vec{k} \frac{z_L}{D^3}$$

on en déduit :

$$\vec{\text{grad}}_P \frac{1}{r} - \vec{\text{grad}}_T \frac{1}{r} = \frac{1}{D} \vec{\text{grad}}_P \sum_2^3 P_n(\cos\theta) \frac{\rho^n}{D^n}$$

Ainsi, et c'est ce que nous voulons établir, la différence des gradients de la quantité $\frac{1}{r}$ aux points P et T est égale au gradient de la fonction :

$$\frac{1}{D} \sum_2^3 P_n(\cos\theta) \frac{\rho^n}{D^n}$$

calculé au point d'observation P. D'où :

$$(10) \quad V_L = \frac{k M_L}{D} \sum_2^3 P_n(\cos\theta) \frac{\rho^n}{D^n} = V_{L_2} + V_{L_3}$$

2.3 - Expression du potentiel générateur lunaire

En posant avec DOODSON : $G = \frac{3}{4} k M_L \frac{\rho^2}{c^3}$, c étant la distance moyenne de la terre à la lune, (10) s'écrit :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{L2} = G \frac{c^3}{D^3} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right) \\ V_{L3} = G \frac{c^4}{D^4} \frac{\rho}{c} \left(\frac{5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta}{6} \right) \end{array} \right.$$

Ces termes dépendent de deux quantités variables :

θ : fonction de la position du point P sur la terre, et de la lune par rapport à T

$\frac{c}{D}$: fonction de la distance TL

N.B. On raisonnera de même pour établir le potentiel solaire. On introduira ainsi la quantité analogue :

$$G_s = \frac{3}{4} k M_s \frac{\rho^2}{c_s^3} = \frac{M_s}{M_L} \frac{c^3}{c_s^3} G$$

avec C_s : distance moyenne de la terre au soleil

Ordre de grandeur des forces correspondantes

On se limite au potentiel d'ordre 2 lunaire : V_{L2}

force verticale : $F_v = \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{3}{2} k \frac{M_L \rho}{D^3} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right)$

force horizontale : $F_h = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 3 k \frac{M_L \rho}{D^3} \cos \theta \sin \theta = \frac{3}{2} k \frac{M_L \rho}{D^3} \sin 2\theta$

Soit, avec $g_{vraie} = k \frac{M_T}{a^2}$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{F_v}{g_{vraie}} = 8,4 \cdot 10^{-8} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right) \\ \frac{F_h}{g_{vraie}} = 8,4 \cdot 10^{-8} \sin 2\theta \end{array} \right.$$

3 - ETUDE SOMMAIRE DU POTENTIEL GÉNÉRATEUR EN FONCTION DU TEMPS

Reprenons, en négligeant les termes d'ordre 3, l'expression classique du potentiel générateur. Nous nous limitons, par ailleurs au potentiel lunaire, les raisonnements qui suivent restant valables pour le potentiel solaire. Soit :

$$(13) \quad V_L = V_L(\rho, \theta, D) = G \frac{c^3}{D^3} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right)$$

le potentiel créé par la lune à l'instant t au point d'observation P invariablement lié à la terre. Au paragraphe précédent, nous avons précisé la forme de V en tant que fonction des coordonnées x, y, z de P dans le repère $Txyz$. Nous nous proposons maintenant de préciser la manière dont V dépend du temps. Nous nous inspirons en particulier, pour la suite de cet exposé, des leçons de Mécanique Céleste de H. POINCARÉ - cf [6] -

3.1 - Expression du potentiel en fonction du temps

Considérons le trièdre formé par les trois vecteurs menés de T à l'astre L , au point P , et au pôle terrestre - cf fig. I-1/1 - Soit φ' la colatitute de P , δ la distance polaire de la lune, et γ l'angle horaire de cet astre par rapport au lieu d'observation. Ces paramètres sont liés à l'angle θ par la relation classique :

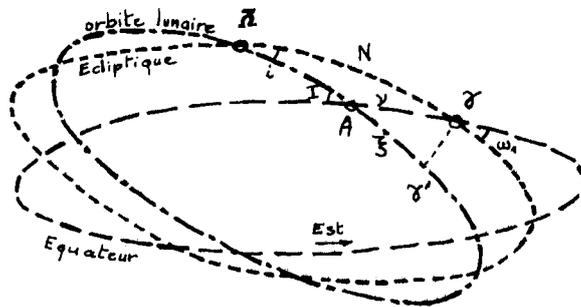
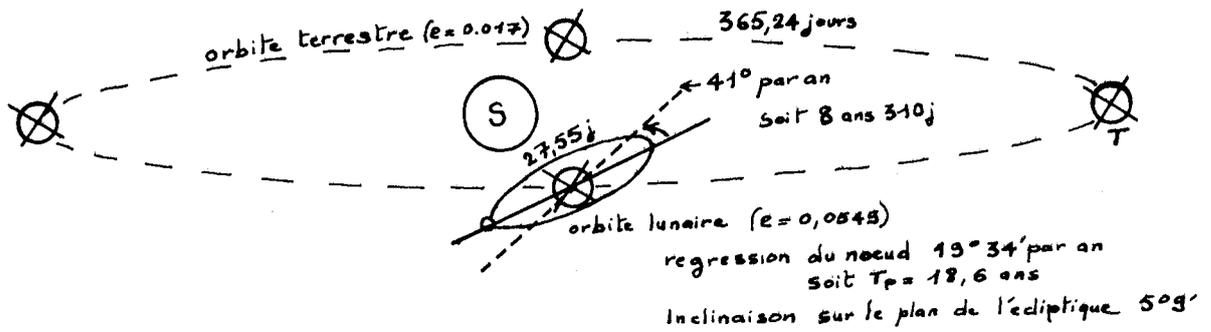
$$\frac{\vec{TP} \cdot \vec{TL}}{TP \cdot TL} = \cos \theta = \cos \delta \cdot \cos \varphi' + \sin \delta \cdot \sin \varphi' \cdot \cos \gamma$$

Par ailleurs, en posant ψ la longitude du lieu P et A l'ascension droite de la lune, γ est égal à :

$$\gamma = \omega t + \psi - A$$

Il s'ensuit que, après quelques calculs élémentaires, l'expression (13) se met sous la forme :

$$(14) \quad V_L = G \frac{c^3}{D^3} \left[\frac{3}{4} \sin^2 \varphi' \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos 2\gamma + \frac{3}{4} \sin 2\varphi' \cdot \sin 2\delta \cdot \cos \gamma + \frac{1}{4} (3 \cos^2 \varphi' - 1) (3 \cos^2 \delta - 1) \right]$$



γ : équinoxe vernal
 $\bar{\Omega}$: noeud de l'orbite lunaire sur l'écliptique
 A : intersection lunaire

$\omega_1 = 23^\circ 27$ minutes
 $i = 5^\circ 9$ minutes
 I varie entre $28^\circ \frac{1}{2}$ et $18^\circ \frac{1}{2}$

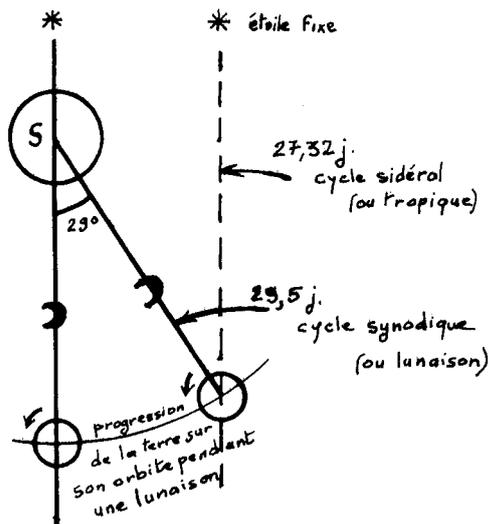


FIG.I.1/4 : Principales caractéristiques des mouvements de la terre et la lune par rapport au soleil (d'après MACMILLAN)

Passons aux notations complexes, sachant que

$$\cos \gamma = \frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_L = G \frac{c^3}{D^3} \sum_{s=-2}^{+2} \Phi_s(\varphi', \delta) e^{si\delta} e^{-sj(\omega t + \psi)}$$

Φ_s sont des fonctions de leurs arguments que nous ne développons pas ici. Notons que D , δ et δ sont des fonctions du temps. Considérons pour simplifier que ces fonctions sont monopériodiques, de pulsation μ_L . Alors les expressions, $\frac{c^3}{D^3} \Phi_s e^{sj\delta}$ peuvent se développer en séries trigonométriques de FOURIER :

$$V_L = G \sum_{s=-2}^{+2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_n(\varphi') e^{-sj(\omega t + \psi)} e^{nj\mu_L t}$$

Il s'ensuit que le second membre est une somme de fonctions purement périodiques du temps, de pulsations

$$\pm 2\omega + n\mu_L \quad ; \quad \pm \omega + n\mu_L \quad ; \quad n\mu_L \quad ; \quad n \in [-\infty, \dots, -2, -1, 0, +1, \dots, +\infty]$$

dont les amplitudes et les phases dépendent de la colatitude φ' et de la longitude ψ du lieu d'observation.

On conçoit qu'on peut ainsi déterminer toutes les composantes significatives du développement du potentiel générateur créé par la lune et le soleil. On analysera par la suite les résultats obtenus par DARWIN et DOODSON à ce sujet. Notons pour l'instant qu'en général, on se contente de l'approximation $|n| \leq 4$. Il s'ensuit que, μ_L étant petit par rapport à ω , les pulsations qui apparaissent ainsi dans ces développements sont toutes voisines de :

0 : composantes à longues périodes

ω : composantes diurnes

2ω : composantes semi-diurnes

Nous allons passer en revue les principales composantes de ce développement. Auparavant, rappelons les caractéristiques des mouvements de la terre et de la lune par rapport au soleil.

3.2 - Les principales caractéristiques des mouvements de la terre et la lune par rapport aux axes coperniciens

Nous rappelons sur les figures I-1/4 quelques caractéristiques essentielles des mouvements de la terre et de la lune dans les axes coperniciens.

* La rotation de la terre sur elle-même se fait en 24 heures sidérales :

$$\omega = \frac{360^\circ}{24 \text{ heures sidérales}} = \frac{15}{0,99727} \frac{\text{degré}}{\text{heure solaire}} = 15,041 \text{ }^\circ/\text{h.}$$

* La lune parcourt son orbite en 27,32 jours solaires

$$\mu_L = \frac{360}{27,32 \times 24} = 0,549 \text{ }^\circ/\text{h.}$$

l'excentricité de son orbite vaut : $e_L = 0,05490$

* La terre parcourt son orbite en 365,25 jours solaires

$$\mu_s = \frac{360}{365,25 \times 24} = 0,041 \text{ }^\circ/\text{h.}$$

l'excentricité de son orbite vaut : $e_s = 0,1675$

* Le périhélie lunaire tourne de 41° par an, soit suivant une période de 8,85 ans Juliens (365,25 jours solaires)

$$\omega = \frac{360}{8,85 \times 365,25 \times 24} = 0,00464 \text{ }^\circ/\text{h.}$$

* Le noeud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique se déplace de $19^\circ 34'$ par an, soit une période de 18,6 ans Juliens.

* L'angle du plan de l'orbite lunaire avec l'écliptique est constant et vaut $5^\circ 9'$

* L'angle de l'écliptique avec l'équateur céleste est constant et vaut $23^\circ 27'$.

En conséquence, l'angle I que fait l'orbite lunaire avec l'équateur céleste varie en 18,6 ans entre $28^\circ \frac{1}{2}$ quand le noeud ascendant coïncide avec l'équinoxe vernal γ , et $18^\circ \frac{1}{2}$ quand le noeud descendant coïncide avec γ (cf fig. I-1/4).

* Notons enfin, pour mémoire que le périhélie solaire se déplace avec une période de 209 siècles Juliens. (ω_s)

3.3 - Les principales composantes du potentiel luni-solaire

Nous rapportant aux conclusions précédentes et aux rappels du dernier paragraphe, nous notons ainsi l'existence de trois catégories différentes de termes :

3.3.1 - Semi-diurnes

* La composante lunaire moyenne M_2 - de pulsation $2(\omega - \mu_L) = 28,984 \text{ } ^\circ/\text{h}$, soit une période de 12 h 25 minutes. Elle correspond au mouvement moyen de la lune ; elle serait seule si l'orbite lunaire coïncidait avec l'équateur, et s'il n'y avait pas d'excentricité.

* La composante solaire moyenne S_2 - de pulsation $2(\omega - \mu_S) = 30,0 \text{ } ^\circ/\text{h}$, soit une période de 12 h. Elle correspond au mouvement moyen apparent du soleil autour de la terre.

* La composante déclinaisonnelle (ou sidérale) luni-solaire K_2 - de pulsation $2\omega = 30,082 \text{ } ^\circ/\text{h}$, soit une période de 11 h 58 minutes. Elle résulte de l'inclinaison de l'orbite lunaire, et de l'écliptique sur l'équateur.

En introduisant l'effet d'excentricité des orbites de la terre et de la lune apparaissent :

* La composante elliptique majeure lunaire N_2 - de pulsation $2\omega - 3\mu_L + \bar{\omega} = 28,4397 \text{ } ^\circ/\text{h}$, soit une période de 12 h 39 minutes.

* La composante elliptique mineure lunaire L_2 - de pulsation $2\omega - \mu_L - \bar{\omega} = 29,528 \text{ } ^\circ/\text{h}$, soit une période de 12 h 11 minutes.

* La composante elliptique de 2ème ordre lunaire $2N_2$, de pulsation : $2\omega - 4\mu_L + 2\bar{\omega} = 27,895 \text{ } ^\circ/\text{h}$, soit une période de 12 h 54 minutes.

* La composante elliptique majeure solaire T_2 , de pulsation $2\omega - 3\mu_S + \bar{\omega}_1 = 29,359 \text{ } ^\circ/\text{h}$, donc de période 12 h 01 minutes.

Enfin, notons l'existence de deux inégalités supplémentaires non négligeables :

* L'éviction, donnant naissance à la composante évictionnelle majeure ν_2 , de pulsation $2\omega - 3\mu_L + 2\mu_S - \bar{\omega} = 28,513 \text{ } ^\circ/\text{h}$, donc de période 12 h 37 minutes;

et la composante évictionnelle mineure λ_2 , de pulsation $2\omega - \mu_L - 2\mu_S + \bar{\omega} = 29,456$ °/h, donc de période 12 h 13 minutes.

* La variation à laquelle correspond la composante μ_2 , de pulsation $2\omega - 4\mu_L + 2\mu_S = 27,968$ °/h, soit une période de 12 h 52 minutes.

3.3.2 - Diurnes

* La composante luni-solaire déclinatoire K_1 , de pulsation $\omega = 15,041$ °/h, donc de période 23 h 56 minutes.

* La composante lunaire principale O_1 , de pulsation $\omega - 2\mu_L = 13,943$ °/h, de période 25 h 49 minutes.

* La composante solaire principale P_1 , de pulsation $\omega - 2\mu_S = 14,959$ °/h, donc de période 24 h 03 minutes.

* La composante lunaire elliptique majeure Q_1 , de pulsation $\omega - 3\mu_L + \bar{\omega} = 13,399$ °/h, soit une période de 26 h 56 minutes.

3.3.3 - Longues périodes

* La composante bimensuelle lunaire M_f de pulsation $2\mu_L = 1,098$ °/h, de période 13,661 jours

* La composante mensuelle lunaire M_m de pulsation $\mu_L - \bar{\omega} = 0,5444$ °/h, donc de période 27,555 jours.

* La composante semi annuelle solaire S_{sa} de pulsation $2\mu_S = 0,0821$ °/h, donc de période 182,621 jours.

Nous n'avons énuméré ici que les principales composantes du spectre complet. Nous avons vu, par ailleurs, combien les mouvements de la terre et de la lune dans les axes coperniciens sont compliqués : ceci nous permet de comprendre la complexité que présente en fait la décomposition spectrale complète du potentiel générateur des marées.

Le premier développement des forces génératrices luni solaires a été donné par DARWIN à la fin du siècle dernier. Comme ce développement a longtemps servi de base à l'analyse et à la prédiction harmonique des marées, nous allons en rappeler les éléments principaux. Nous nous intéressons aussi au développement donné par DODSON en 1921, car ce dernier est plus complet que le précédent et tend actuellement à lui être préféré pour l'analyse et la prédiction des marées .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Annuaire du Bureau des Longitudes
Gauthiers-Villars - PARIS
- [2] A. DEFANT - 1961 -
"Physical Oceanography" Vol. 2
Pergamon Press - Oxford - London
- [3] D.H. MACMILLAN - 1966 -
"Tides"
CR Book limited - The Adelphi - John Adam Street - LONDON WC 2
- [4] A. GOUGENHEIM -
Cours de Marées - PARIS
- [5] J. KRAVTCHENKO
Cours de Marées - ENSTA - PARIS
- [6] H. POINCARÉ - 1910
Leçon de Mécanique Céleste
Tome III - Théorie des Marées
Gauthiers-Villars - PARIS.

CHAPITRE I-2

LES DEVELOPPEMENTS HARMONIQUES DU POTENTIEL GENERATEUR

Rappelons l'expression complète du potentiel générateur de la marée lunaire donnée au § 2 du chapitre précédent.

$$V_L = G \frac{c^3}{D^3} \left[P_2 + \frac{c}{D} \frac{\rho}{c} P_3 + \frac{c^2}{D^2} \frac{\rho^2}{c^2} P_4 + \dots \right] = V_{L2} + V_{L3} + V_{L4} + \dots$$

où P_i sont les polynômes de LEGENDRE :

$$P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{3} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

⋮

$$P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} (\cos \theta)^{n-2k}$$

Notons que la contribution du polynôme P_2 représente environ 98% du potentiel lunaire total et une fraction plus importante encore du potentiel solaire. C'est pourquoi en pratique, on limite souvent les développements au terme P_2 . Il est cependant intéressant de considérer parfois le polynôme P_3 qui introduit les ondes tiers-diurnes.

Nous nous proposons ici d'exprimer avec plus de précision qu'au chapitre précédent cette fonction de θ et de C/D sous forme d'une somme de fonctions sinusoidales du temps, à coefficients dépendant des coordonnées du lieu d'observation.

La question devint d'actualité à la fin du siècle dernier quand la "BRITISH ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE" désigna une commission pour développer les méthodes harmoniques en matière de marées. Un rapport fut rédigé sur ce projet

par Sir William THOMSON (Lord KELVIN) en 1868, suivi d'un second rapport de G.H. DARWIN et J.C. ADAMS en 1883 - cf [2] - Et c'est précisément dans ce second document qu'est présenté le premier développement du potentiel générateur des marées en fonctions sinusoïdales du temps. Ce développement n'est que quasi harmonique : il contient des pseudo-constantes, lentement variables dans le temps. Mais il a été universellement utilisé, et l'est encore actuellement dans de nombreux pays. Un nouveau développement fut calculé par DOODSON en 1921 - cf [3] - échappant cette fois aux restrictions ci-dessus. C'est pourquoi le développement en cause comprend un nombre de composantes nettement supérieur à celui de DARWIN, mais nous verrons plus loin comment la pratique oblige souvent à rassembler certaines fréquences de ce spectre ; ce regroupement permet d'ailleurs la comparaison des caractéristiques des développements de DARWIN et DOODSON. Notons enfin, un développement récent de CARTWRIGHT et TAYLER - cf [1] - qui a conduit en 1971 aux mêmes résultats que ceux de DOODSON, bien que les méthodes d'analyses utilisées par ces auteurs soient totalement différentes de celles de leurs devanciers.

1 - LE DEVELOPPEMENT DE DARWIN

Pour repérer la latitude et la longitude de la lune, cet auteur utilise l'orbite lunaire comme système de référence. Nous ne reproduisons pas ici le détail de ses calculs : ils ont été repris en 1958 par SHUREMAN dans son excellent ouvrage "Manual of Harmonic Analysis and Prediction of Tides" - cf [7] - Donnons -en simplement quelques résultats.

Le potentiel lunaire, par exemple, limité au polynôme P_2 , est mis sous la forme d'une somme de termes à longues périodes, de termes diurnes et de termes semi diurnes :

$$V_{L2} = V_{L2,0} + V_{L2,1} + V_{L2,2}$$

dont les plus significatifs s'écrivent :

* pour les composantes à longues périodes :

dénomination usuelle
de la composante :

$$V_{L2,0} = \frac{3}{4} g \frac{M_L}{M_T} \frac{a^2 \rho^2}{c^3} \left(\frac{1 - 3 \sin^2 \varphi}{3} \right) \times$$

$$\left[\left(\frac{2}{3} - \sin^2 I \right) \times \left\{ \begin{array}{l} (1 + 3/2 e^2) \dots \dots \dots \text{terme constant} \\ + 3e \cos(s-p) \dots \dots \dots M_m \\ + 3m^2 \cos(2s-2h) \dots \dots \dots MS_p \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \right.$$

$$\left. + \sin^2 I \times \left\{ \begin{array}{l} (1 - 5/2 e^2) \cos(2s-2\xi) \dots \dots \dots M_p \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \right]$$

* pour les composantes diurnes :

$$V_{L2,1} = \frac{3}{4} g \frac{M_L}{M_T} \frac{a^2 \rho^2}{c^3} \sin 2\varphi \times$$

$$\left[\sin I \cos^2 I / 2 \times \left\{ \begin{array}{l} (1 - 5/2 e^2) \cos(T - 2s + h + 90^\circ + 2\xi - \nu) \dots \dots O_1 \\ + 7/2 e \cos(T - 3s + h + p + 90^\circ + 2\xi - \nu) \dots \dots Q_1 \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \right.$$

$$\left. + \sin 2I \left\{ \begin{array}{l} (1/2 + 3/4 e^2) \cos(T + h - 90^\circ - \nu) \dots \dots [K_1]^* \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \right]$$

* pour les composantes semi-diurnes :

$$V_{L2,2} = \frac{3}{4} g \frac{M_L}{M_T} \frac{a^2 \rho^2}{c^3} \cos^2 \varphi \times$$

$$\left[\cos^4 I / 2 \left\{ \begin{array}{l} (1 - 5/2 e^2) \cos(2T - 2s + 2h + 2\xi - 2\nu) \dots \dots M_2 \\ + 7/2 e \cos(2T - 3s + 2h + p + 2\xi - 2\nu) \dots \dots N_2 \\ + 105/16 m e \cos(2T - 3s + 4h - p + 2\xi - 2\nu) \dots \dots \nu_2 \\ + 23/8 m^2 \cos(2T - 4s + 4h + 2\xi - 2\nu) \dots \dots \mu_2 \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \right.$$

$$\left. + \sin^2 I \left\{ \begin{array}{l} (1/2 + 3/4 e^2) \cos(2T + 2h - 2\nu) \dots \dots [K_2]^* \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} \right]$$

(*) Les composantes mises entre crochets $[K_1]$ ne constituent qu'une part de la composante totale correspondante, il y a lieu d'y ajouter la part venant du potentiel solaire.

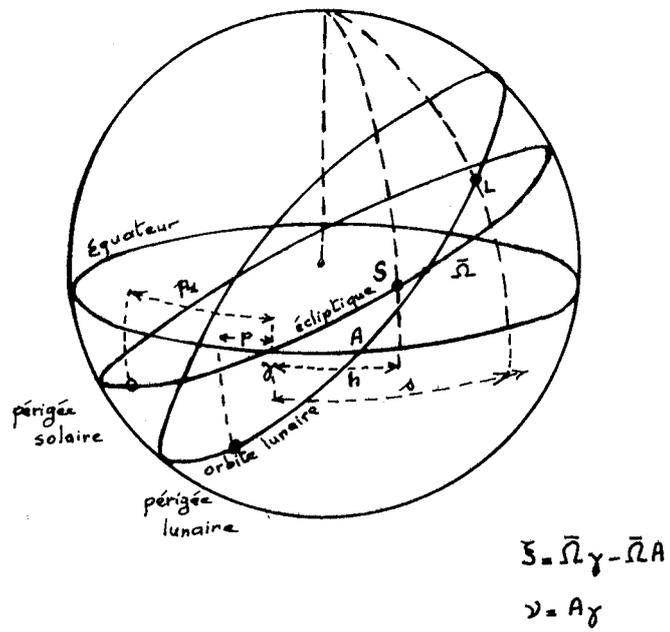


FIG. I.2 / 1

avec les notations :

- φ : latitude du lieu d'observation
 I : inclinaison de l'orbite lunaire sur l'équateur terrestre
 e : excentricité de l'orbite lunaire
 m : rapport des pulsations moyennes des mouvements du soleil et de la lune (0,0748)
 T : angle horaire moyen du soleil au lieu d'observation
 s : longitude moyenne de la lune - cf fig. (I-2/1)
 h : longitude moyenne du soleil
 p : longitude moyenne du périégée lunaire
 ξ : longitude sur l'orbite lunaire de l'intersection de cet orbite avec l'équateur céleste - cf fig. (I-1/4) - compté à partir du noeud ascendant
 ν : longitude sur l'équateur céleste de cette intersection lunaire

Mise à part la variation lente des quantités I, ξ et ν , résultant du mouvement du noeud ascendant de l'orbite lunaire, chaque terme des expressions ci-dessus varie uniformément en fonction du temps.

Le potentiel générateur lunaire s'exprime ainsi sous la forme :

$$V_{L2} = G \sum_i \lambda_i \mathcal{E}_i \cos(V_i + u_i) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_i = f_i C_i$$

* Les arguments V_i regroupent les combinaisons linéaires des quantités T, h, s et p. Ils caractérisent chaque composante du potentiel par sa période, et sont souvent notés sous la forme :

$$\omega_i t + V_{0i}$$

ω_i étant la pulsation de la composante i, t étant le temps solaire moyen compté à partir du 1er janvier de l'année considérée, et V_{0i} étant la valeur de l'argument V_i au premier janvier, 0 h., de cette année.

Rappel de quelques valeurs numériques de vitesses angulaires:

$$\begin{array}{ll}
 T : 15 \text{ }^\circ/\text{h} & s : 0,549 \ 016 \ 53 \text{ }^\circ/\text{h} = \mu_L \\
 h : 0.04106864 \text{ }^\circ/\text{h} = \mu_s & p : 0,004 \ 641 \ 83 \text{ }^\circ/\text{h} = \omega
 \end{array}$$

* Les quantités u_i sont les combinaisons linéaires des paramètres ξ et ν , lentement variables avec le déplacement du noeud de l'orbite lunaire. Dans les ouvrages

spécialisés, comme celui de SHUREMAN, des tables donnent la valeur de ces quantités ξ et ν pour le premier janvier de chaque année, entre 1850 et 1999.

* Le facteur constant G est égal à : $\frac{3}{4} g \frac{M_L}{M_T} \frac{a^2 p^2}{c^3}$

* Le facteur de latitude λ_i correspond à :

$$\begin{aligned} \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi}{2} & \dots \text{ pour les composantes à longue période} \\ \sin^2 \varphi & \dots \text{ pour les composantes diurnes} \\ \cos^2 \varphi & \dots \text{ pour les composantes semi-diurnes} \end{aligned}$$

* Le coefficient e_i se présente sous forme d'un produit d'une fonction de e et m d'une part, par une fonction de I d'autre part.

Le premier facteur est dit elliptique, car les quantités m et e se rapportent, comme nous l'avons vu, aux mouvements Képlériens (en première approximation) de la terre dans les axes coperniciens et de la lune dans le repère lié à la terre.

Le second facteur, fonction du paramètre I seul, est dit facteur d'obliquité. On sait d'ailleurs que I subit de légères variations périodiques, de période 18 ans 2/3.

* Le rapport entre la valeur vraie du facteur d'obliquité et sa valeur moyenne est appelé facteur nodal f_i . Il est fonction de la longitude du noeud de l'orbite lunaire. Les tables des ouvrages spécialisés donnent les valeurs de f_i pour le milieu de chaque année, de 1850 à 1999.

* Le coefficient C_i caractérise l'importance moyenne de la composante d'indice i.

Remarque : Comme le potentiel générateur créé par le soleil est de même forme analytique que celui de la lune, les formules précédentes sont applicables à la définition du potentiel solaire, à condition d'effectuer les substitutions suivantes :

$$G \longrightarrow G_s = \frac{3}{4} \frac{M_s}{M_T} \frac{a^2 p^2}{c^3}$$

e \longrightarrow e_s : excentricité de l'orbite terrestre

I \longrightarrow ω_s : obliquité de l'écliptique

s \longrightarrow h : longitude moyenne du soleil

p \longrightarrow p_1 : longitude du périégée solaire (0,000 001 96 °/h)

ξ et ν sont nuls.

Ce premier développement du potentiel générateur donné par DARWIN contenait 32 termes lunaires. Le calcul plus complet de SHUREMAN a conduit à prendre en compte 63 termes lunaires, et même 83 si l'on renonce à négliger le terme d'ordre 4 de ce potentiel (contenant le polynôme P_3). Viennent s'y ajouter par ailleurs les termes solaires, au nombre de 59. Dans les tableaux 1, 2, 3 et 4 présentés en Annexe I, nous donnons la liste de ces différentes composantes : leur nom de code, les caractéristiques de leur argument, leur pulsation et la valeur de leur coefficient caractéristique. Sur ces tableaux, on trouvera en correspondance avec les termes donnés par SHUREMAN, ceux résultant du développement de DOODSON que nous présentons ci-dessous.

2 - LE DEVELOPPEMENT DE DOODSON

A la différence de DARWIN, DOODSON utilise la théorie moderne lunaire de BROWN exprimant la longitude et la latitude de la lune par rapport à l'écliptique. Les développements obtenus sont cette fois purement harmoniques, et conduisent en conséquence à un bien plus grand nombre de constituants (environ 400 - cf [3]).

Le potentiel est exprimé sous la forme :

$$V = G \sum_i \lambda_i \text{Coef}_i \cos \text{Arg}_i$$

avec les mêmes définitions pour les facteurs G et λ_i . Par contre les arguments sont cette fois fonction de :

- τ : temps moyen lunaire local ($\tau = T + h - s$)
- s : longitude moyenne de la lune
- h : longitude moyenne du soleil
- p : longitude du périégée lunaire
- N : longitude du noeud ascendant de l'orbite lunaire (ou $N' = -N$)
- p_1 : longitude du périégée solaire

Nous donnons dans les tableaux 1, 2, 3 et 4 présentés en annexe I, et déjà cités plus haut, la liste de ces diverses composantes : leur nombre argument que nous allons définir ci-dessous, les caractéristiques de cet argument, leur vitesse angulaire, et la valeur de leur coefficient caractéristique.

SPECTRE DU POTENTIEL GENERATEUR

selon A.T. DOODSON

Groupes des ONDES à LONGUES PERIODES et des ONDES DIURNES

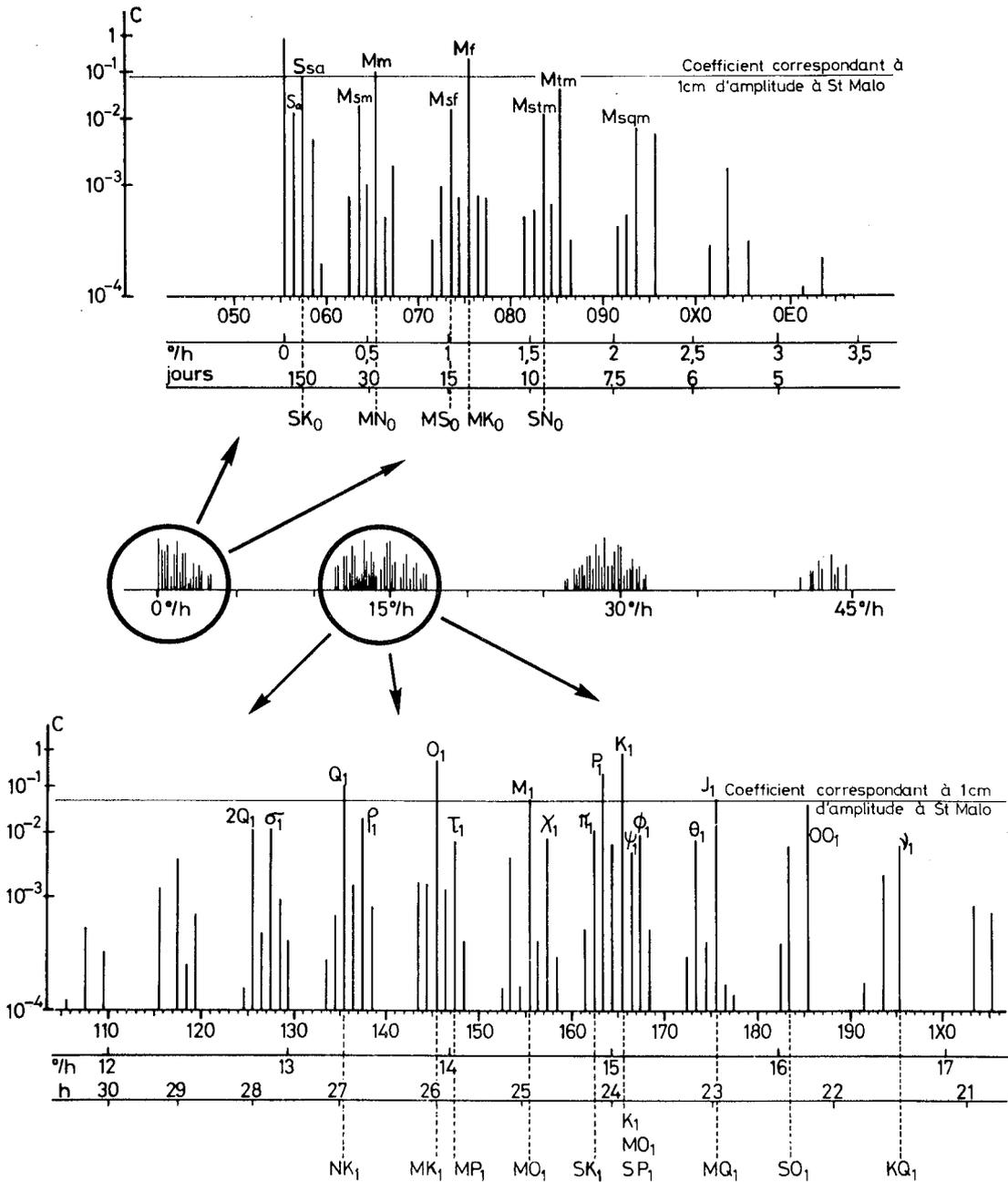


FIG.I.2/2

Définition du nombre argument selon DOODSON

Pour caractériser chaque composante, DOODSON a introduit des notations spéciales qu'il convient de préciser. Chaque argument est la combinaison des divers paramètres : τ , s , h , p , N' et p_1 :

$$Arg = A\tau + Bs + Ch + Dp + EN' + Fp_1 + n \cdot 90^\circ$$

Comme les coefficients entiers A, B, dépassent rarement 4 en valeur absolue, DOODSON proposa de leur ajouter l'entier +5 , sauf à τ , de façon à obtenir pour chaque composante un nombre indicatif à six chiffres significatifs de la forme:

$$A \cdot 10^5 + (B+5) \cdot 10^4 + (C+5) \cdot 10^3 + (D+5) \cdot 10^2 + (E+5) \cdot 10 + (F+5) \quad (*)$$

qui présente l'avantage de caractériser complètement chaque onde en fréquence, cet indicatif croissant de façon régulière avec la fréquence.

Par ailleurs, nous verrons plus loin qu'on ne peut séparer ces divers constituants à partir d'un enregistrement de marées, que si celui-ci a été fait pendant un laps de temps assez long. Or, on constate que seules peuvent se séparer sur une année d'observation les composantes dont les arguments diffèrent au moins des multiples de h (mais non de p, N' et p_1) ; un avantage de la convention de DOODSON est de permettre un regroupement immédiat des composantes non séparables sur un an, en ne considérant que les trois premiers chiffres du nombre argument.

Sur les figures I-2/2 et I-2/3, nous avons illustré graphiquement les résultats du développement de DOODSON, en portant en ordonnée l'amplitude des coefficients Coef_i caractérisant l'intensité de chaque groupe de composantes séparables sur un an d'enregistrement de marée. L'axe des abscisses a été gradué en nombres arguments de DOODSON limités aux 3 premiers chiffres significatifs (1ère ligne des abscisses), en degrés par heure pour les pulsations (2ème ligne des abscisses), et en jours, heures, minutes pour les périodes (3ème ligne des abscisses). Sur la figure I-2/3, nous avons par ailleurs détaillé la constitution du spectre au voisinage de l'onde lunaire principale afin de donner une idée plus complète de la complexité du développement de DOODSON.

Nous commentons ces figures plus loin. Comparons auparavant ce spectre à celui obtenu par DARWIN.

(*) Quand le nombre 10 apparaît dans ces sommes, il est noté par X , 11 par E.

SPECTRE DU POTENTIEL GENERATEUR

selon A.T. DOODSON

Groupe des SEMI-DIURNES

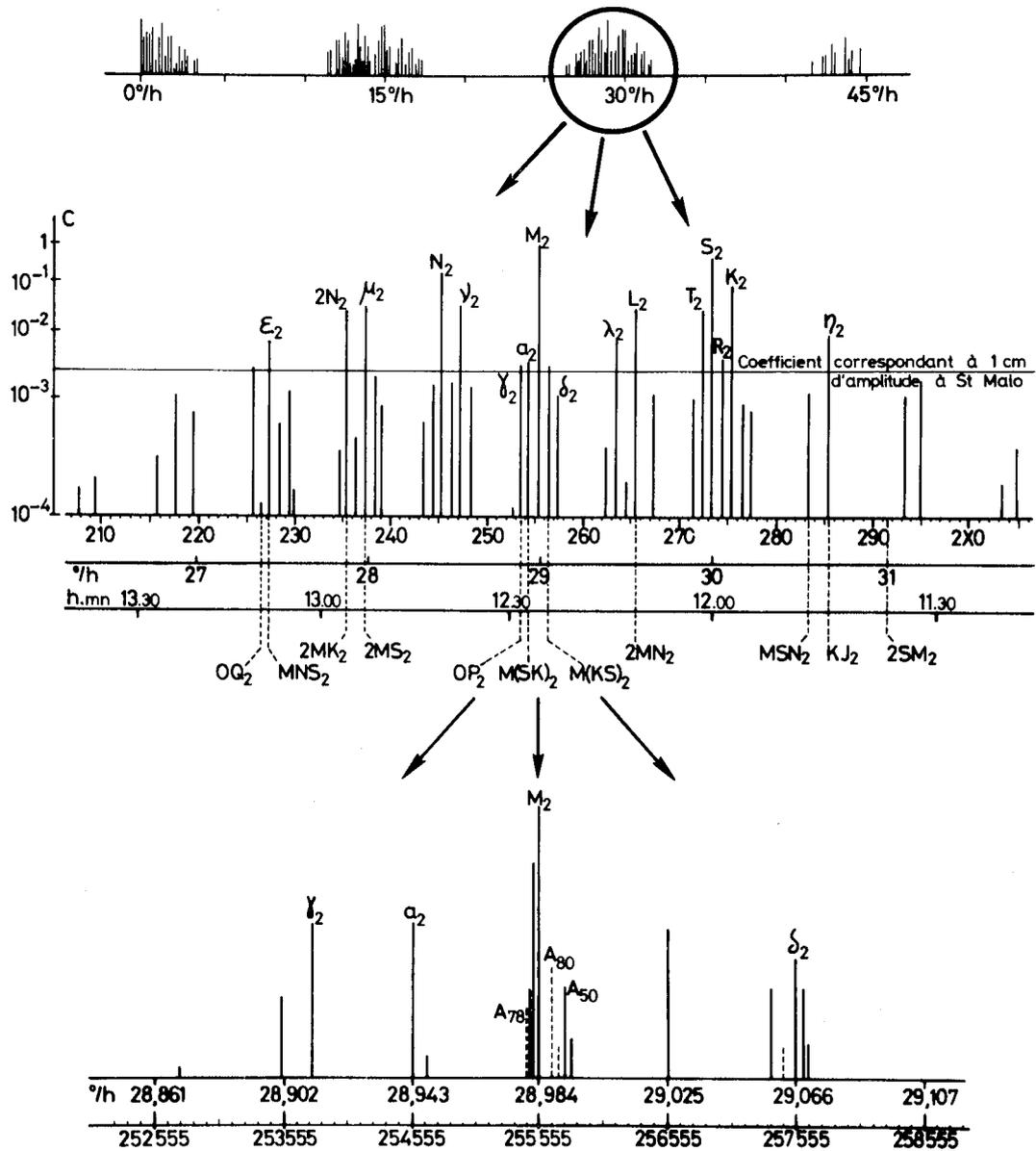


FIG.I.2/3

3 - LA COMPARAISON DES DEVELOPPEMENTS DE DARWIN ET DOODSON

Ces développements ne sont pas directement comparables puisque celui de DARWIN n'est que quasi harmonique, alors que celui de DOODSON correspond, comme nous l'avons déjà souligné, à une somme de fonctions rigoureusement sinusoïdales de t . On peut cependant retrouver à partir des développements du second auteur, les composantes du premier. En effet, la formule de DOODSON présente des groupements de termes de pulsations très voisines : si l'on néglige les faibles différences de pulsations, et si l'on attribue une même pulsation moyenne à tous les termes d'un même groupe, on retrouve une expression du potentiel qui peut être mise sous la forme mentionnée par DARWIN :

$$V = G \sum \lambda_i j_i C_i \cos(V_i + v_i)$$

où j_i et v_i sont des termes correctifs lentement variables en fonction du temps, permettant de compenser les approximations faites sur les pulsations.

Sur les figures I-2/2 et I-2/3, nous avons reporté au-dessus des raies les plus importantes du spectre de DOODSON, les noms de code désignant classiquement les principales composantes proposées par DARWIN. Et dans les tableaux 1, 2 et 3 de l'Annexe I, nous trouvons en parallèle avec les résultats de DOODSON, toutes les composantes données par SHUREMAN.

Cette comparaison permet de constater que le développement quasi-harmonique de SHUREMAN (dérivé, rappelons-le, de celui de DARWIN) est incomplet et que quelques constantes de cet auteur sont fausses. Notons les écarts de 50% sur le coefficient de M_1 et 21% sur celui de M_2 .

Mais, ces deux cas mis à part (M_1 et M_2), les différences entre les deux formes du potentiel restent minimes. C'est pourquoi les spécialistes se sont généralement contentés des anciennes tables donnant les f_i et M_i calculés à partir de la décomposition de DARWIN. Aujourd'hui, cependant, les progrès d'analyse harmonique sont tels qu'il devient indispensable d'utiliser des constantes plus précises - cf [4] - Une table de nouvelles constantes, appelées j et v , a ainsi été établie par HORN en 1967 à partir des développements de DOODSON - cf [5] - Nous l'utiliserons par la suite dans le chapitre relatif à l'étude de certaines ondes de marées, telles que M_2 .

4 - LE NOUVEAU DEVELOPPEMENT DE CARTWRIGHT ET TAYLER

Ce développement tout récent (1971, cf [1]), a été obtenu par des méthodes numériques très différentes de celles de DOODSON. Les résultats en sont cependant voisins et apportent donc la preuve que les développements de 1921 prennent en compte tous les termes significatifs, calculés sans erreur notable.

Ces auteurs donnent par ailleurs un développement harmonique du "potentiel radiationnel", introduit il y a quelques années par W. MUNK - cf [6] - pour tenir compte des effets directs et indirects des radiations solaires sur le phénomène des marées. Nous avons repris dans le tableau 5 de l'Annexe I la liste des composantes ainsi mises en évidence : nous verrons plus loin l'intérêt que présente leur prise en compte.

Ces divers développements, même quand ils sont incomplets, comme celui de DARWIN, permettent de définir la nature du spectre du potentiel générateur des marées. Nous rappellerons en conclusion ses caractéristiques principales, en nous reportant aux figures I-2/2 et I-2/3 pour illustrer notre exposé :

- Ce spectre, fort complexe, est à raies bien définies, se divisant en quatre groupes : les longues périodes, les diurnes, les semi-diurnes et les tiers-diurnes
- Chaque groupe est constitué par un ensemble de composantes de fréquences très rapprochées et d'importance très variable (notons que les échelles utilisées en ordonnées sur les figures I-2/2 et I-2/3 sont logarithmiques)
- En introduisant la notion de correction nodale, l'ensemble de ces composantes se réduit à un nombre plus raisonnable. Le nouveau spectre ainsi obtenu n'en garde pas moins les mêmes caractéristiques : il est constitué de composantes de fréquences bien déterminées, et très rapprochées les unes des autres. Nous verrons au chapitre suivant les difficultés qui résultent de cette forme très particulière de spectre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D.C. CARTWRIGHT et R.J. TAYLER - 1971
 "New Computations of the Tide generating Potential"
 Geoph. J. R. Astr. Soc. - 23 - pp. 45-74
- [2] G.H. DARWIN - 1883
 "Report on harmonic analysis of tidal observations"
 Brit. Ass. for adv. Sci. Rep. - pp. 48-118
 ou Scient. pap. 1 - Cambridge (1907)
- [3] A.T. DOODSON - 1921
 "The harmonic development of the Tide Generating Potential"
 Proceeding of the Royal Society A - Vol. 100 - pp.305-328
 ou Rev. Hydr. Intern. 31 - pp. 37-61
- [4] A.T. DOODSON, W. HORN, A. GOUGENHEIM, H.A. MARMER - 1954
 Compte-rendu de la Commission des Composantes de la Marée
 "Développement type du potentiel générateur de la marée"
 Rev. Hydr. Intern. 31 - pp.29-36
- [5] W. HORN - 1967
 "Tafeln der Astronomischen Argumente $V_0 + v$ und der Korrekturen
 j, v , 1900 - 1999"
 Deutsches Hyd. Inst. pub. N°2276 - Hamburg
- [6] W.H. MUNK et D.E. CARTWRIGHT - 1966
 "Tidal spectroscopy and prediction"
 Phil. Trans. R. Soc. A. 259 - pp. 533-581
- [7] P. SCHUREMAN - 1958
 "Manual of Harmonic analysis and Prediction of Tides"
 Special pub. N°98 - US Dept of Commerce -
 Coast and Geodetic Survey - U.S.A.

CHAPITRE I-3

LA DECOMPOSITION HARMONIQUE DES OBSERVATIONS DE MAREES
CAS PARTICULIER DE LA MANCHE

1 - EXPRESSION DE LA MAREE SOUS FORME DE SERIE HARMONIQUE

Nous venons de voir que le potentiel générateur des marées peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions circulaires de pulsations connues. D'après la théorie dynamique des marées océaniques, il correspond à chaque terme élémentaire de ce potentiel, une dénivellation forcée de même période, dont l'amplitude et le déphasage dépendent des conditions hydrodynamiques du système océanique considéré. La marée réelle résulte de la superposition de ces marées partielles qu'on appelle ondes composantes ou élémentaires.

Celles-ci, caractérisées par leur période, sont désignées par une lettre suivie d'un indice précisant le groupe auquel elles appartiennent :

- a pour les ondes annuelles
- m pour les ondes mensuelles
- f pour les ondes semi-mensuelles
- 1 pour les ondes diurnes
- 2 pour les ondes semi-diurnes
- 3 pour les ondes tiers-diurnes

Ainsi s'écrivent les ondes $M_2, S_2 \dots O_1, K_1, \dots M_m, M_f, S_a \dots$

Ces ondes d'origine astronomique ou radiationnelles sont seules à prendre naissance dans les océans. Dans les mers littorales, on doit ajouter des ondes supérieures et composées pour tenir compte de la déformation des courbes de marées. Nous verrons, en effet, qu'on doit faire apparaître des termes fortement non linéaires dans les équations pour décrire le phénomène dans le voisinage des côtes. Ces ondes sont notées par des ensembles de chiffres, de lettres et d'indices combinés suivant

la convention ci-après :

* Pour les harmoniques d'ordre supérieur d'une onde génératrice, leur nom de code rappelle la lettre caractéristique de cette composante et leur indice est le produit de l'indice de l'onde génératrice par l'ordre de ces harmoniques.

Par exemple, l'onde M_4 est l'harmonique 2 de l'onde M_2
et l'onde M_6 est l'harmonique 3 de l'onde M_2

* Pour les ondes d'interaction entre diverses ondes génératrices, leur nom de code rappelle les lettres caractéristiques des ondes génératrices, éventuellement précédées d'un chiffre précisant la composition spectrale de l'onde considérée, le tout suivi d'un indice permettant de définir le groupe auquel cette onde appartient: semi-diurne, quart-diurne

Par exemple : - l'onde $2MS_2$ est l'onde d'interaction entre les ondes génératrices M_2 et S_2 , appartenant au groupe des semi-diurnes et de pulsation :

$$\omega_{2MS_2} = 2 \omega_{M_2} - \omega_{S_2}$$

- l'onde MN_4 est l'onde d'interaction entre M_2 et S_2 , appartenant au groupe des quart-diurnes

- l'onde $3M_2S_2$ est l'onde d'interaction entre M_2 et S_2 , appartenant au groupe des semi-diurnes et de pulsation :

$$\omega_{3M_2S_2} = 3 \omega_{M_2} - 2 \omega_{S_2}$$

On obtient ainsi des ondes, d'origine non linéaire, semi-diurne, diurne, et de longue période. De plus, on voit apparaître des composantes quart-diurne, sixième-diurne, huitième-diurne ... de pulsations respectives voisines de 4ω , 6ω , 8ω , ... inexistantes dans le spectre du potentiel générateur, inexistantes donc dans la marée océane et qui n'apparaissent que dans les mers littorales, en raison de la présence de termes non-linéaires nouveaux dans les équations décrivant les marées dans les zones côtières.

Notons enfin que les fréquences de certaines ondes d'interaction correspondent exactement à celles des ondes élémentaires du potentiel générateur : ce sont les ondes mixtes. Sur les figures I-2/2 et I-2/3 du chapitre précédent, nous avons reporté les composantes les plus importantes du groupe des semi-diurnes. Citons :

l'onde $2MS_2$, confondue avec M_2
 $2MN_2$, confondue avec L_2
 $2MK_2$, confondue avec $2N_2$...

On distingue donc dans le spectre réel de la marée en un point quelconque d'une mer littorale :

- les ondes d'origine astronomique
- les ondes d'origine radiationnelles (ou météorologiques)
- les ondes d'origine purement non-linéaire
- les ondes mixtes.

Et la marée s'exprime d'une manière générale sous la forme :

$$(1) \quad H(x, y, t) = H_0(x, y) + \sum_{i=1}^N f_i A_i \cos [\omega_i t + (V_0 + u)_i - g_i]$$

avec :

$H_0(x, y)$: niveau moyen

$A_i(x, y)$: amplitude de la composante d'indice i

$g_i(x, y)$: déphasage de cette composante par rapport au passage de l'astre perturbateur correspondant au méridien de Greenwich (on appelle "astre perturbateur" l'astre fictif qui, tournant autour de la terre d'un mouvement circulaire, dans le plan de l'équateur, exercerait sur une particule placée en un point (x, y) une force de même fréquence que celle de l'onde d'indice i)

ω_i : pulsation de l'onde d'indice i

V_0 : déphasage de l'astre perturbateur correspondant, par rapport à son passage à Greenwich, pour $t = 0$

f_i : facteur nodal relatif à l'onde d'indice i pour la période considérée

u_i : correction nodale de phase relative à cette onde pour la période considérée

En pratique, on ne cherchait pas jusqu'ici à déterminer théoriquement ces paramètres d'amplitude et de phase A_i et g_i : on les a toujours déduits d'observations appropriées, aux endroits où elles sont réalisables, par un calcul spécial d'analyse harmonique.

2 - L'ANALYSE HARMONIQUE DES ENREGISTREMENTS DE MAREES

Précisons le problème très particulier d'analyse numérique qui se rattache à cette analyse harmonique : on dispose de l'enregistrement d'une courbe de marée $H(x,y,t)$ pendant un temps déterminé τ , il s'agit de trouver une représentation de cette courbe sous la forme (1), c'est-à-dire de calculer les paramètres A_i et g_i , sachant que l'on connaît a priori les fréquences significatives contenues dans ce signal $H(x,y,t)$ connu pour $0 \leq t \leq \tau$. La résolution de ce problème relève bien entendu de la théorie de la transformation de FOURIER. Rappelons quelques éléments de cette théorie, essentiels pour notre propos - cf [10] -

2.1 - Rappels de notions classiques de la transformation de FOURIER

On considère un signal quelconque $y = f(t)$. On va lui associer une autre représentation de ce signal sous la forme $Y = F(\nu)$ dans laquelle la variable indépendante est la fréquence ν (de dimension inverse du temps), on va établir les liens entre $f(t)$ et $F(\nu)$ et montrer que l'on passe de l'une de ces deux représentations du signal à l'autre par la transformation de FOURIER.

2.1.1 - $f(t)$ est une fonction périodique de période T

On sait que dans ce cas, $f(t)$ peut s'écrire :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi \nu_0 n t + b_n \sin 2\pi \nu_0 n t)$$

avec :

$$\nu_0 = \frac{1}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos 2\pi \nu_0 n t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin 2\pi \nu_0 n t \, dt$$

Si l'on pose :

$$F(n\nu_0) = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

où j est l'unité imaginaire,

il s'ensuit que :

$$F(n\nu_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-2\pi j n \nu_0 t} dt$$

l'ensemble des nombres $F(n\nu_0)$ forme le spectre de fréquence du signal $f(t)$. C'est une grandeur, en général complexe que l'on peut décomposer en :

un spectre d'amplitudes : $|F(n\nu_0)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

et un spectre de phases : $\varphi(n\nu_0) = \text{Arc tg} \left(+ \frac{b_n}{a_n} \right)$

$$(2) \quad F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(n\nu_0)| e^{-j\varphi(n\nu_0)} \delta(\nu - n\nu_0)$$

où $\delta(\nu)$ est la fonction de dirac

Notons que le spectre $F(\nu)$ d'une fonction périodique est composé de raies discontinues, car $F(\nu) \equiv 0 \quad \forall \nu$ sauf si $\nu = n\nu_0$, n entier ≥ 0 .

Ainsi la donnée de $F(\nu)$ sous la forme ci-dessus détermine complètement $f(t)$ périodique : car $F(\nu)$ étant connu, les valeurs des constantes de FOURIER de $f(t)$ le sont aussi.

2.1.2 - f(t) n'est pas une fonction périodique

On considère alors cette non-périodicité comme résultant d'un passage à la limite $T \rightarrow \infty$. Alors $\nu_0 = \frac{1}{T} \rightarrow 0$, et le spectre est défini par une fonction continue :

$$(3) \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi j \nu t} dt$$

2.1.3 - Conditions d'existence, et propriétés de la transformée de FOURIER

Rappelons que pour qu'une fonction $f(t)$ ait une transformée de FOURIER, il faut et il suffit que :

1. La fonction soit bornée (pas de valeurs infinies)
2. L'intégrale de $f(t)$ entre $-\infty$ et $+\infty$ ait une valeur finie
3. Les discontinuités de $f(t)$, ses maxima et minima soient en nombre fini.

On note $F(\nu) \rightleftharpoons f(t)$ la transformée de FOURIER de $f(t)$ quand elle existe. Les propriétés les plus importantes de cette transformation sont :

1. la linéarité :

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \rightleftharpoons F(\nu) \\ g(t) \rightleftharpoons G(\nu) \end{array} \right\} \Rightarrow a f(t) + b g(t) \rightleftharpoons a F(\nu) + b G(\nu)$$

2. la similitude :

$$f(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

3. la translation :

$$\begin{aligned} f(t-a) &\rightleftharpoons e^{-2\pi j a \nu} F(\nu) \\ F(\nu-a) &\rightleftharpoons f(t) e^{2\pi j a t} \end{aligned}$$

4. la dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{d f(t)}{dt} &\rightleftharpoons 2\pi j \nu F(\nu) \\ \frac{d^n f(t)}{dt^n} &\rightleftharpoons (2\pi j \nu)^n F(\nu) \end{aligned}$$

2.1.4 - Convolution - Théorème de PLANCHEREL

Soient deux fonctions $e(t)$ et $h(t)$. On définit leur produit de convolution, noté :

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

par l'intégrale :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Cette opération est associative, commutative et distributive.

Le théorème de PLANCHEREL établit que la transformée de FOURIER d'un produit de convolution est un produit simple, et inversement :

$$\begin{aligned} e(t) * h(t) &\rightleftharpoons E(\nu) \cdot H(\nu) \\ e(t) \cdot h(t) &\rightleftharpoons E(\nu) * H(\nu) \end{aligned}$$

2.1.5 - Quelques cas particuliers importants de transformation de FOURIER

Fonction circulaire :

$$(4) \quad f(t) = A \cos 2\pi \nu_0 t \quad \rightleftharpoons \quad F(\nu) = \frac{A}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

où $\delta(\nu)$ est la fonction de dirac . $F(\nu)$ se compose de deux raies à $\pm \nu_0$.
cf fig. I-3/1.

Fonction porte

Considérons une fonction qui vaut 1 dans l'intervalle $(-T, +T)$ et nulle au-dehors :

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [-T, +T] \\ 0 & \text{pour } t \notin [-T, +T] \end{cases}$$

$$(5) \quad a(t) \iff A(\nu) = 2T \frac{\sin 2\pi \nu T}{2\pi \nu T}$$

La fonction $A(\nu)$ est représentée sur la figure I-3/2.

Fonction circulaire tronquée entre $-T$ et $+T$

Par définition, une fonction circulaire tronquée est le produit d'une sinusoïde (définie entre $-\infty$ et $+\infty$) par une fonction porte.

Nous connaissons les transformées de FOURIER de ces deux fonctions, et nous savons par ailleurs que la transformée de leur produit est le produit de convolution de leurs transformées :

$$F_1(t) = F(t) \cdot a(t) \iff F_1(\nu) = F(\nu) * A(\nu)$$

soit :

$$F_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} [\delta(\tau - \nu_0) + \delta(\tau + \nu_0)] \frac{\sin 2\pi T (\nu - \tau)}{\pi (\nu - \tau)} d\tau$$

La transformée de FOURIER d'une telle fonction est donc :

$$(6) \quad F_1(\nu) = \frac{A}{2} \left[\frac{\sin 2\pi T (\nu - \nu_0)}{\pi (\nu - \nu_0)} + \frac{\sin 2\pi T (\nu + \nu_0)}{\pi (\nu + \nu_0)} \right]$$

La fonction $F_1(\nu)$ est représentée sur la figure I-3/3 pour le cas particulier $T = \frac{\pi}{2\nu_0}$.

De même, pour une fonction circulaire tronquée déphasée par rapport à l'origine :

$$\begin{cases} f_1'(t) = A \cos 2\pi \nu_0 (t - t_0) & \text{pour } t \in [-T, +T] \\ f_1'(t) = 0 & \text{pour } t \notin [-T, +T] \end{cases}$$

la transformée de FOURIER est :

$$(7) \quad F_1'(\nu) = \frac{A}{2} \left[e^{-2j\pi t_0 \nu_0} \frac{\sin 2\pi t (\nu - \nu_0)}{\pi (\nu - \nu_0)} + e^{2j\pi t_0 \nu_0} \frac{\sin 2\pi t (\nu + \nu_0)}{\pi (\nu + \nu_0)} \right]$$

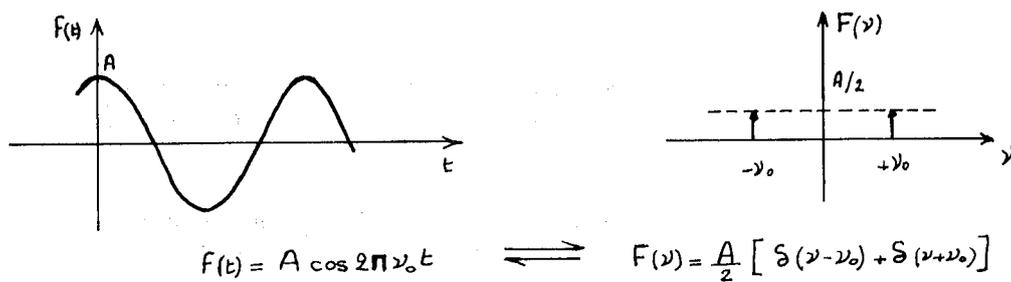


FIG. I.3/1

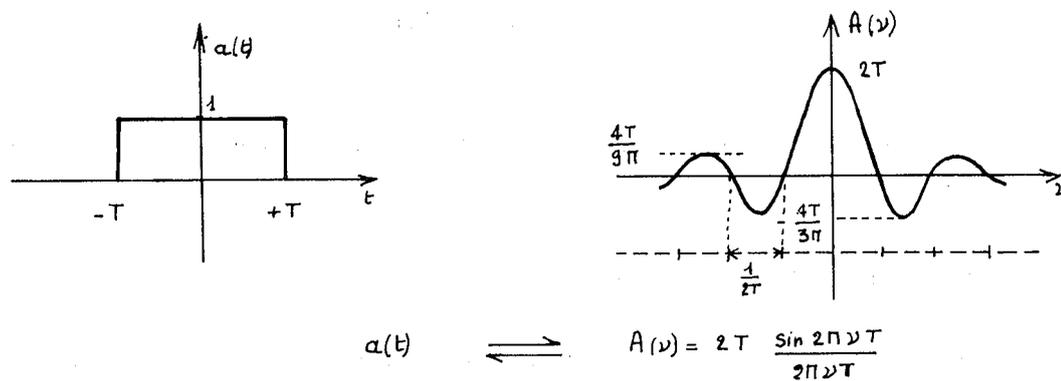


FIG. I.3/2

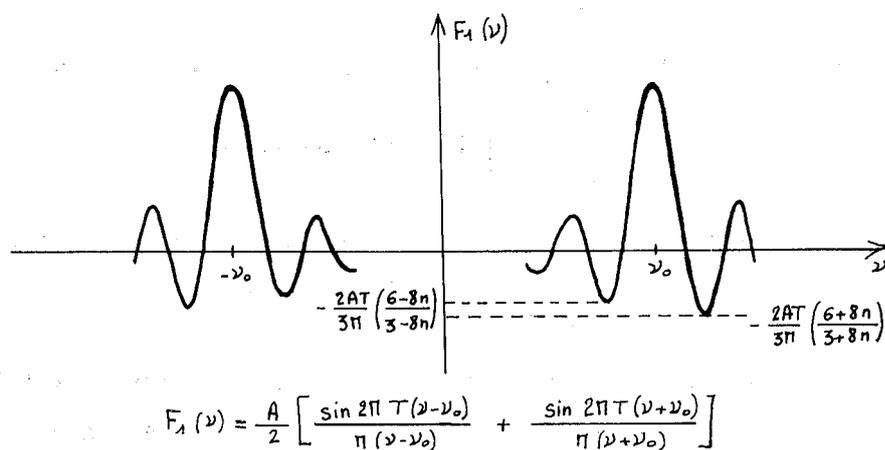


FIG. I.3/3

fonction complexe que l'on peut définir par sa phase et son module.

$$\mathcal{R}_e [F'_1(\nu)] = \frac{A}{2} \cos 2\pi \nu_0 t_0 \left[\frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_0)}{\pi(\nu + \nu_0)} + \frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_0)}{\pi(\nu - \nu_0)} \right]$$

$$\mathcal{J}_m [F'_1(\nu)] = \frac{A}{2} \sin 2\pi \nu_0 t_0 \left[\frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_0)}{\pi(\nu + \nu_0)} - \frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_0)}{\pi(\nu - \nu_0)} \right]$$

$$F'_1(\nu) = \sqrt{\mathcal{R}_e [F'_1(\nu)]^2 + \mathcal{J}_m [F'_1(\nu)]^2}$$

$$\Phi'_1(\nu) = \text{Arc tg} \frac{\mathcal{J}_m [F'_1(\nu)]}{\mathcal{R}_e [F'_1(\nu)]}$$

Nous représentons sur la figure I-3/4 la valeur du module de cette fonction pour le cas $T = \pi/\nu_0$.

Fonction somme de plusieurs sinusoïdes

Puisque la transformation de FOURIER est un opérateur linéaire, il est aisé de déduire de ces exemples précédents la transformation de FOURIER d'une fonction du type :

$$f(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos 2\pi \nu_i t$$

C'est un spectre de raie d'amplitude $A_i/2$ aux fréquences ν_i et $-\nu_i$:

$$F(\nu) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{2} [\delta(\nu - \nu_i) + \delta(\nu + \nu_i)]$$

Lorsque la fonction $f(t)$ n'est définie que sur un intervalle $[-T, +T]$, sa transformée de FOURIER devient plus complexe : elle est composée de la somme de N courbes du type de celles de la figure I-3/5 :

$$\begin{cases} F'_1(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos 2\pi \nu_i (t - t_i) & \text{pour } t \in [-T, +T] \\ F'_1(t) = 0 & \forall t \notin [-T, +T] \end{cases}$$

$$(8) \quad \Rightarrow F'_1(\nu) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{2} \left[e^{-2j\pi t_i \nu} \frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_i)}{\pi(\nu - \nu_i)} + e^{2j\pi t_i \nu} \frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_i)}{\pi(\nu + \nu_i)} \right]$$

L'amplitude calculée par la transformation de FOURIER à la fréquence ν_i a donc pour valeur celle de l'amplitude exacte de la composante de fréquence ν_i , augmentée des résidus de toutes les autres composantes du signal complet, à cette fréquence.

Notons que le résidu d'une composante de fréquence ν_k à la fréquence ν_i est d'autant plus faible que :

- la longueur d'enregistrement est voisine de $1/(\nu_i - \nu_k)$
- l'intervalle $\nu_i - \nu_k$ est grand
- l'amplitude de la composante de fréquence ν_k est petite
- l'intervalle de définition du signal est grand.

2.2 - Influence de la digitalisation des enregistrements

Pour être traitées numériquement les observations sont généralement enregistrées sous forme digitalisées. Le signal $f(t)$ est ainsi défini :

$$\hat{f}(t) = f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{k}{F_e}\right)$$

avec $T_e = 1/F_e$: temps séparant deux échantillons de la fonction $f(t)$.

La transformée de FOURIER d'une telle fonction s'écrit donc, en utilisant la formule classique de POISSON $\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \right]$:

$$\hat{f}(t) \iff \hat{F}(\nu) = F(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n F_e)$$

Soit :

$$(9) \quad \hat{F}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\nu - n F_e)$$

Le spectre de la fonction digitalisée $\hat{f}(t)$ ne diffère de celui de la fonction $f(t)$ qu'en ce qu'il est "périodisé" avec la période $T_e = \frac{1}{F_e}$

Soit F_c la fréquence, dite de coupure, au-delà de laquelle le spectre exact $F(\nu)$ est considéré comme négligeable. Pour que la répétition périodique du spectre ne le déforme pas entre $-F_c$ et $+F_c$, il faut et il suffit que la fréquence d'échantillonnage soit égale ou supérieure à $2F_c$:

$$F_e \geq 2 F_c$$

d'où le théorème de SHANNON :

On peut reconstituer complètement une fonction à partir de ses échantillons si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la plus haute fréquence significative contenue dans son spectre.

2.3 - Application à l'analyse harmonique des courbes de marées

Rappelons que l'on considère la marée comme résultant de la superposition de N marées partielles sinusoïdales de fréquence ν_i ($i = 1, N$). Sa dénivellation peut s'écrire sous la forme :

$$\zeta(t) = a_0 + \sum_{i=1}^N (a_i \cos 2\pi \nu_i t + b_i \sin 2\pi \nu_i t) = \zeta_0 + \sum_{i=1}^N \zeta_i \cos(2\pi \nu_i t - \varphi_i)$$

Le problème revient alors à déterminer les constantes a_i et b_i à partir des enregistrements de $\zeta(t)$ réalisés in situ.

En pratique, cette dénivellation n'est enregistrée que sur un laps de temps déterminé, $2T$, et digitalisée en $2m+1$ valeurs, avec une période d'échantillonnage donnée Δt . L'expression exacte du spectre du signal $\zeta(t)$ ainsi défini est alors :

$$\hat{F}(\nu) = \sum_{k=-m}^{+m} \left[a_0 + \sum_{i=1}^N (a_i \cos 2\pi \nu_i k \Delta t + b_i \sin 2\pi \nu_i k \Delta t) \right] \times e^{-2j\pi \nu k \Delta t} \times \Delta t$$

soit :

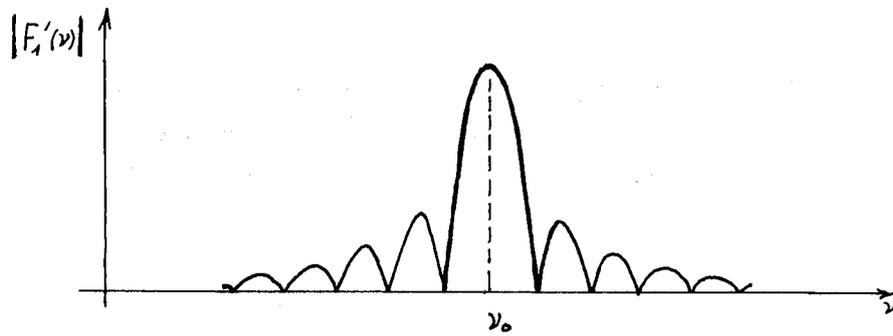
$$(10) \quad \hat{F}(\nu) = \frac{\Delta t}{2} \left\{ a_0 I_0(\nu) + \sum_{i=1}^N [a_i I_i(\nu) + j b_i I'_i(\nu)] \right\}$$

avec :

$$I_0(\nu) = 2 \frac{\sin(2m+1)\pi \nu \Delta t}{\sin \pi \nu \Delta t}$$

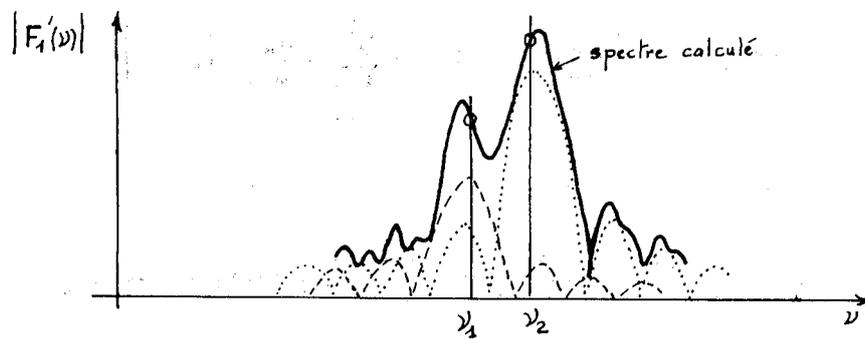
$$I_i(\nu) = \frac{\sin(2m+1)\pi(\nu-\nu_i)\Delta t}{\sin \pi(\nu-\nu_i)\Delta t} + \frac{\sin(2m+1)\pi(\nu+\nu_i)\Delta t}{\sin \pi(\nu+\nu_i)\Delta t}$$

$$I'_i(\nu) = \frac{\sin(2m+1)\pi(\nu-\nu_i)\Delta t}{\sin \pi(\nu-\nu_i)\Delta t} - \frac{\sin(2m+1)\pi(\nu+\nu_i)\Delta t}{\sin \pi(\nu+\nu_i)\Delta t}$$



$$F_1'(\nu) = \frac{A}{2} \left[e^{-2j\pi t_0 \nu_0} \frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_0)}{\pi(\nu - \nu_0)} + e^{2j\pi t_0 \nu_0} \frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_0)}{\pi(\nu + \nu_0)} \right]$$

FIG.I.3/4



$$F_1'(\nu) = \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{2} \left[e^{-2j\pi t_i \nu_i} \frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_i)}{\pi(\nu - \nu_i)} + e^{2j\pi t_i \nu_i} \frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_i)}{\pi(\nu + \nu_i)} \right]$$

FIG.I.3/5

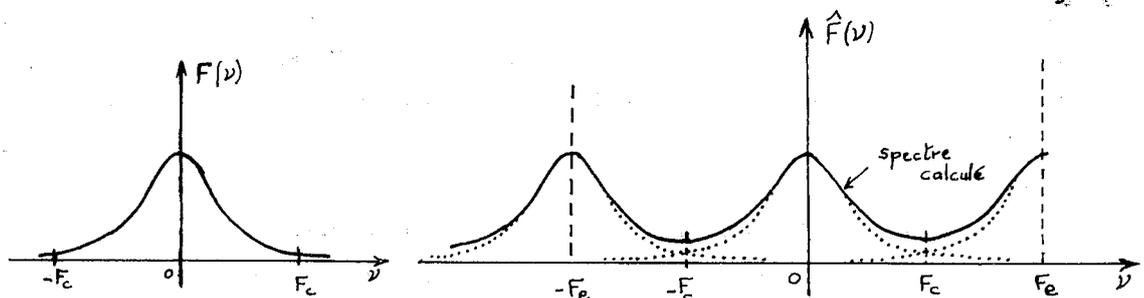


FIG.I.3/6: Correspondance entre le spectre d'une fonction définie continuellement $F(\nu)$ et celui d'une fonction digitalisée $\hat{F}(\nu)$

On voit que si l'on calcule $\hat{F}(\nu_i)$ - c'est-à-dire pour la fréquence correspondant à la marée partielle d'indice i - la transformation de FOURIER ne donne pas directement la valeur de a_i et b_i , mais une relation entre ces paramètres que nous allons expliciter.

En prenant la partie réelle de (10), on a en effet la relation entre les a_i :

$$(11a) \quad a_i \left[1 + \frac{\sin(2m+1)2\pi\nu_i\Delta t}{(2m+1)\sin 2\pi\nu_i\Delta t} \right] = \frac{2}{2m+1} \mathcal{R}_e [\hat{F}(\nu_i)] + (\text{résidus})_{\mathcal{R}_e}$$

avec :

$$\mathcal{R}_e [\hat{F}(\nu_i)] = \sum_{k=-m}^{+m} \zeta(k\Delta t) \cdot \cos 2\pi\nu_i k\Delta t$$

$$(\text{résidus})_{\mathcal{R}_e} = - \left[\frac{a_0}{2m+1} I_0(\nu_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{a_k}{2m+1} I_k(\nu_i) \right]$$

et en prenant la partie imaginaire de (10), la relation :

$$(11b) \quad b_i \left[1 - \frac{\sin(2m+1)2\pi\nu_i\Delta t}{(2m+1)\sin 2\pi\nu_i\Delta t} \right] = \frac{2}{2m+1} \mathcal{J}_m [\hat{F}(\nu_i)] + (\text{résidus})_{\mathcal{J}_m}$$

avec :

$$\mathcal{J}_m [\hat{F}(\nu_i)] = \sum_{k=-m}^{+m} \zeta(k\Delta t) \cdot \sin 2\pi\nu_i k\Delta t$$

$$(\text{résidus})_{\mathcal{J}_m} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{b_k}{2m+1} I'_k(\nu_i)$$

On est ainsi conduit à résoudre un système de $2N+1$ équations linéaires à $2N+1$ inconnues. Mais la forme de ces équations montre que la i -ième relation définit a_i directement à partir de la transformée de FOURIER, chaque fois que les résidus des seconds membres sont nuls ou négligeables. Nous allons décrire sommairement l'un des artifices utilisés pour se placer dans de telles circonstances.

Comme nous l'avons déjà noté au paragraphe 2.1.1 de ce chapitre, ces résidus sont d'autant plus faibles que les raies du spectre sont plus écartées les unes des autres. Malheureusement, cette circonstance favorable ne se présente pas dans le cas des marées, comme nous l'avons vu au chapitre I-2. Néanmoins, les deux observations suivantes permettent de surmonter cette difficulté :

a) Les résidus, d'après les formules ci-dessus, ne donnent une contribution importante aux seconds membres que pour les raies voisines de celle qui est étudiée.

b) Ces résidus sont des fonctions de la durée d'enregistrement $(2m+1) \Delta t$.
On note que m intervient sous le signe du sinus.

On peut donc choisir judicieusement cette durée d'enregistrement de façon à diminuer les valeurs de $I_k(\nu)$ et $I'_k(\nu)$, pour les valeurs des indices k voisins de l'indice i que nous étudions. On constate ainsi, par exemple, que :

- les composantes M_2 et S_2 ne peuvent être séparées qu'après 15 jours au moins d'enregistrement,
- les composantes S_2 et K_2 ne peuvent l'être qu'après 183 jours.

On comprend ainsi pourquoi il est si utile d'avoir des enregistrements de longue durée, de l'ordre de l'année, sur lesquels il est loisible de choisir, pour chaque composante d'indice i , la période τ permettant de la séparer de sa voisine la plus importante, d'indice j , sachant que :

$$\tau \approx \frac{1}{|\nu_i - \nu_j|}$$

Il est donc toujours indiqué de se placer dans ces conditions optimales d'analyse - que l'on choisisse la méthode des heures spéciales, cf [8], la méthode des moindres carrés, cf [9] et [13], ou d'autres méthodes de même type, comme celle qui utilise la "Fast Fourier Transform" - cf [1].

Notons quelques points intéressants concernant ces deux dernières méthodes. Ecrivons auparavant les équations (11) sous la forme matricielle :

$$\begin{vmatrix} l_{00} & & & \\ & M_{\alpha\beta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_{NN} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{R}_{e0} \\ \vdots \\ \mathcal{R}_{eN} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} l'_{00} & & & \\ & M'_{\alpha\beta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & l'_{NN} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{I}_{m1} \\ \vdots \\ \mathcal{I}_{mN} \end{vmatrix}$$

avec : $l_{\alpha\beta} = I_{\alpha}(\nu_{\beta})$

$l'_{\alpha\beta} = I'_{\alpha}(\nu_{\beta})$

et $\hat{F}(\nu_{\beta}) = \mathcal{R}_{e\beta} + j \mathcal{I}_{m\beta}$

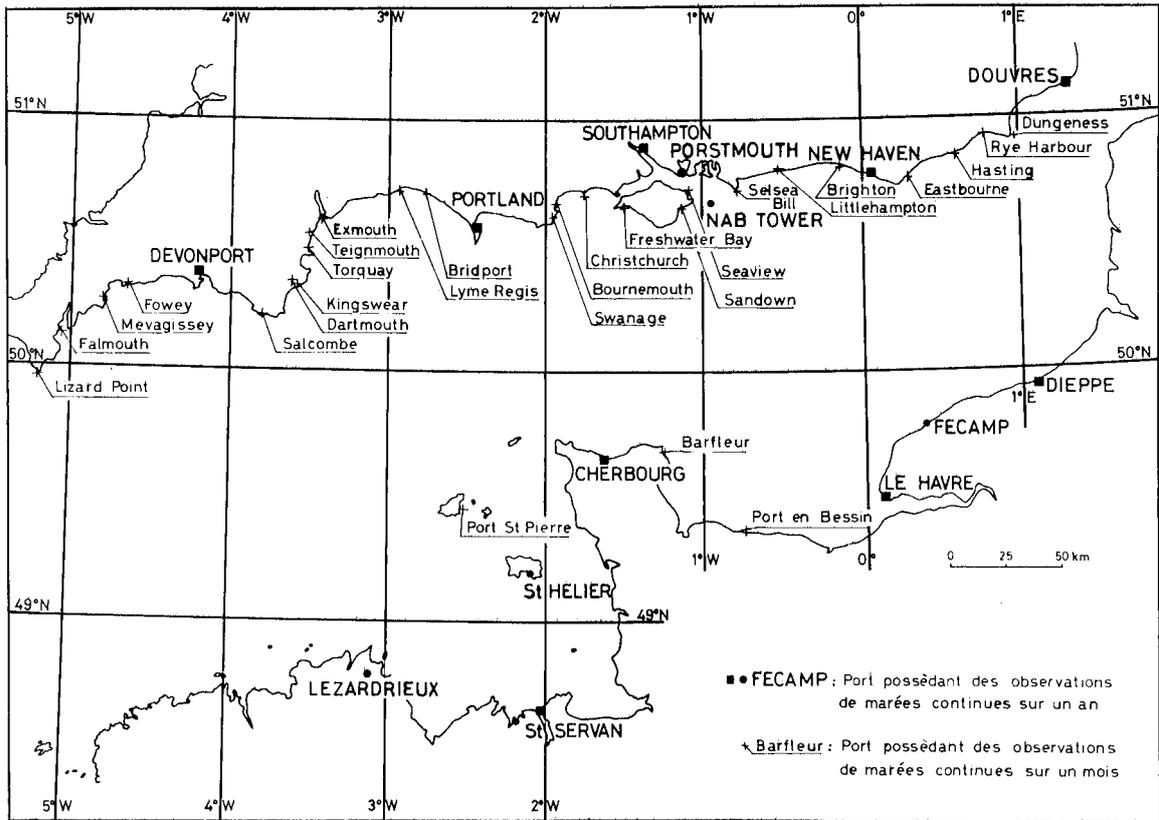


FIG.I.3/7

La méthode des moindres carrés classique revient précisément à calculer les coefficients $l_{\alpha\beta}$, $l'_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta}$ pour les N fréquences ν_i jugées significatives du spectre étudié. Par contre, dans le cas particulier d'application de la "Fast Fourier Transform", les valeurs ν_β pour lesquelles sont calculés ces coefficients, sont imposées par le choix de l'intervalle de digitalisation de la courbe enregistrée et de la durée de son enregistrement : elles ne coïncident généralement pas avec les valeurs ν_i précédentes. Mais que ce soit pour l'une ou l'autre de ces deux méthodes, notons que les artifices utilisés pour réduire les résidus assurent le bon conditionnement de ces systèmes en vue de leur traitement numérique : les matrices $M_{\alpha\beta}$ et $M'_{\alpha\beta}$ présentent dans ce cas une diagonale forte.

Mais il n'est pas toujours possible de se placer dans ces circonstances favorables à une bonne séparation des composantes de la marée. C'est le cas des observations de courte durée : le problème est alors d'autant plus difficile à résoudre que l'enregistrement est court. En nous reportant à l'écriture matricielle proposée plus haut, notons que la réduction du temps d'enregistrement a pour effet de faire tendre les matrices $M_{\alpha\beta}$ et $M'_{\alpha\beta}$ vers des matrices singulières. Le bruit de fond des enregistrements prend alors de plus en plus d'importance. Il existe donc dans ce cas une limite à la possibilité de résolution du problème. Mais on peut encore faire reculer cette limite au-delà de laquelle toute analyse harmonique perd sa validité, en utilisant des artifices de calcul, comme les techniques de filtrage [12], ou en introduisant des hypothèses appropriées comme dans la méthode des marées différences, ou la méthode de concordance sur groupes d'ondes proposée par EYRIES - cf [6]-

Nous ne développons pas ici ces techniques. Nous renvoyons le lecteur aux références bibliographiques proposées, et particulièrement à l'ouvrage récent de GODIN (cf [7]) qui reprend en détail la plupart des méthodes utilisées à ce jour pour résoudre ce problème.

3 - COMPOSITION HARMONIQUE DE LA MAREE DANS LA MANCHE

Depuis la fin du siècle dernier, il est donc possible de caractériser la marée observée en un point déterminé par ses caractéristiques spectrales : l'amplitude et la phase de chaque composante par rapport à une origine des temps définie de façon universelle : l'heure de passage de l'astre perturbateur lié à la composante en cause au méridien de Greenwich. Les analyses nécessaires à l'obtention de ces constantes sont

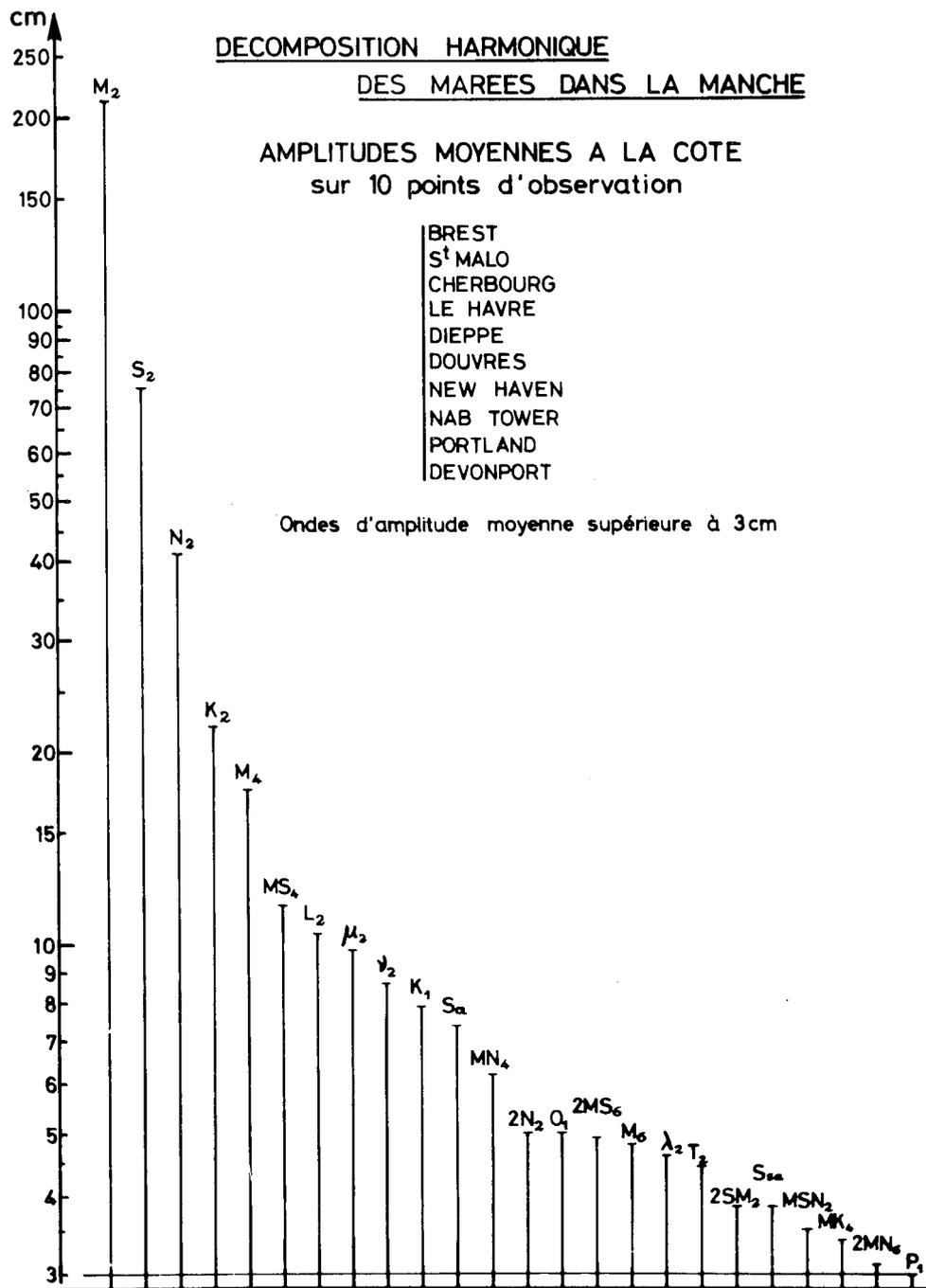


FIG.I.3/8

généralement réalisées par les services hydrographiques des pays intéressés. Toutes les données ainsi obtenues sont publiées régulièrement par le Bureau Hydrographique International, dans un ouvrage spécial sur les constantes harmoniques de la marée - cf [2] -

Portons notre intérêt sur le cas particulier de la Manche qui nous servira de domaine d'application pour les théories que nous allons présenter. Pour faire la synthèse de toutes les données d'observation in situ que nous pouvions utiliser, nous nous sommes reportés bien sûr aux publications générales du B.H.I., mais nous avons utilisé aussi des fiches inédites des Services Hydrographiques Français (le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine), Allemand (Deutsches Hydrographisches Institut) et Anglais (Institut of Coastal Oceanography and Tides). A l'issue de cette synthèse, plusieurs remarques s'imposent :

* En ce qui concerne la situation géographique des points de mesure, nous constatons que ceux-ci sont en nombre restreints ; ils sont tous répartis le long des côtes, excepté les deux ports principaux des îles Anglo-Normandes - cf fig.I-3/7. Notre connaissance du spectre expérimental de la marée est donc très limitée.

* Pour chaque lieu d'observation, nous disposons souvent de plusieurs séries de résultats, obtenus par analyse de différentes périodes d'observations, et suivant des méthodes parfois fort différentes. L'examen critique de ces données montre la fréquente dispersion des valeurs d'amplitude et de phase relatives à un même point d'observation. Ces écarts résultent naturellement des difficultés d'analyse de la marée que nous évoquions plus haut. Il convient donc d'insister sur l'imprécision parfois difficile à éliminer des données in situ. Par ailleurs, elles sont malheureusement en nombre très limité.

* Enfin, le nombre de composantes significatives de la marée est relativement élevé. C'est là que réside l'inconvénient de la méthode harmonique qui nécessite, pour être efficace, la détermination, non seulement, d'un grand nombre de composantes d'origine astronomique, mais aussi, comme nous l'avons déjà vu plus haut, la prise en compte de composantes non linéaires d'autant plus nombreuses que les perturbations dues aux petits fonds sont plus notables.

Pour mesurer les difficultés du problème pratique que pose la Manche, nous avons établi un classement qualitatif des différentes composantes à étudier, en moyennant leurs amplitudes connues en quelques points significatifs. Le résultat est présenté sur la figure I-3/8. Notons la prédominance, dans cette mer, de l'onde

semi-diurne lunaire moyenne M_2 , et l'importance d'une façon générale des autres ondes semi-diurnes : S_2 , N_2 et K_2 surtout, mais aussi L_2 , μ_2 , ν_2 , $2N_2$, λ_2 , T_2 Les ondes diurnes ont de toute évidence une influence secondaire, que ce soit O_1 , K_1 ou P_1 . Par contre les ondes d'origine non linéaire ne sont pas à négliger : M_4 , MS_4 , MN_4 et MK_4 pour les quart-diurnes, $2MS_6$, M_6 , $2MN_6$ pour les sixième-diurnes. Au total, nous répertorions sur la figure I-3/8, 24 ondes d'amplitude "moyenne" supérieure à 3cm. Cette "moyenne" est certes bien artificielle, mais elle est quand même suffisamment objective pour nous donner, avec l'exemple de la Manche, une idée de la complexité du problème que nous nous proposons d'étudier.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. BOZZI-ZADRO et G. PORETTI - 1972
"Special techniques for the Analysis of Tidal series"
Pure Applied Geoph. 95-3 - pp.18-26
- [2] BUREAU HYDROGRAPHIQUE INTERNATIONAL - 1966
"Marées - Constantes harmoniques"
Publication spéciale n°26 - Monaco
- [3] D.E. CARTWRIGHT - 1961
"A precise application of **FOURIER** series analysis to the evaluation
of Tidal harmonics from a year's serie of hourly readings"
Committee on Tides - Ass. Int. d'océanog. physique - PARIS
- [4] DEUTSCHS HYDROGRAPHISCHES INSTITUT - 1962
"Gezeitentafeln für das Jahr Band 1 Europaïsch Gewässen" - Hamburg
- [5] A.T. DOODSON - 1928
"The Analysis of tidal observations"
Phil. Trans. Roy. Soc. A227 - pp.90-108
- [6] M. EYRIES - 1965
"Analyse d'une courte durée d'observation de la marée ou du courant
de marée"
Actes du Symposium sur le matériel marégraphique et la prédiction
des marées - PARIS - 3-7 mai 1965
- [7] GODIN - 1972
"The Analysis of tides"
Liverpool University Press , University of Toronto Press
- [8] A. GOUGENHEIM
"Cours de pratique des marées"
Ecole d'Application du Service Hydrographique - PARIS

- [9] R. LECOLAZET - 1961
"La théorie générale de l'analyse harmonique par combinaisons
linéaires d'ordonnées - Comparaison avec la méthode des moindres
carrés"
Committee on Tides - Ass. Int. d'Océanograph. phys. - PARIS
- [10] J. MAX - 1972
"Méthodes et techniques de traitement de signal et applications
aux mesures physiques"
Editions Masson - PARIS
- [11] J.N. PASQUAY - 1972
"Quelques aspects de l'analyse harmonique de la marée par la
méthode des heures spéciales"
Publication du Service Hydrographique de la Marine - Brest - Paris
- [12] J.R. ROSSITER et G.W. LENNON - 1968
"An Intensive analysis of shallow water Tides"
Geophy. J.R. Ast. Soc. 16 pp. 175-293
- [13] A.C.M. VAN ETTE et H.J. SCHOEMAKER - 1967
"Harmonic Analysis of Tides - essential features and disturbing
influences"
Actes du symposium sur les marées
Bureau Hydrographique International - Monaco.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE ANALYTIQUE DES MAREES LITTORALES

INTRODUCTION

La deuxième partie de notre mémoire est consacrée à la théorie des marées littorales. Nous commençons par écrire les équations du phénomène : à cet effet, nous sommes conduits à adopter quelques hypothèses simplificatrices pour la plupart classiques, mais que nous espérons avoir justifié avec plus de rigueur qu'on ne semble l'avoir fait jusqu'ici. On aboutit ainsi à un système quasi linéaire de trois équations aux dérivées partielles, à trois variables indépendantes.

Nous envisageons ensuite, relativement à ce système, plusieurs problèmes aux limites que nous avons de fortes raisons de croire correctement posés (au sens de HADAMARD) . Malheureusement, il ne semble pas y avoir encore dans la littérature de démonstrations rigoureuses des théorèmes d'existence et d'unicité que nous invoquons pour justifier les processus d'approximations successives utilisés pour résoudre les problèmes posés.

Deux difficultés essentielles se présentent ici. D'une part, les frontières des domaines où sont à définir les inconnues (le profil des côtes) sont très tourmentées et ne remplissent pas les conditions usuelles de régularité qui garantissent les énoncés d'existence et d'unicité des solutions, dans des problèmes analogues, déjà résolus par les analystes. En second lieu, la forme empirique adoptée pour la loi du frottement de fond n'est pas analytique. Nous introduisons des procédés nouveaux d'approximation qui semblent en accord avec la réalité physique et qui permettent d'aborder l'étude du système d'équations aux dérivées partielles gouvernant les marées littorales au moyen de la décomposition harmonique combinée avec la méthode des petits paramètres de POINCARÉ. Ce procédé, proposé par J. KRAVTCHEKNO et moi-même, nous a permis d'aboutir à des conclusions nouvelles, en accord inespéré avec les données disponibles in situ. Ainsi, on a su décrire les mécanismes de propagation de la marée dans une zone littorale en interprétant la génération de ses diverses composantes; on a su, par ailleurs, dresser les cartes de ces composantes dans toute l'étendue d'une mer particulière : la Manche, à l'aide d'un modèle hydraulique dont nous justifions l'utilisation. Il s'en faut de beaucoup que toutes les conséquences des méthodes mises en oeuvre soient exploitées à ce jour : nous terminons par des indications d'ordre pratique quant aux perspectives de développement et d'applications de ces méthodes sur modèles mathématiques.

CHAPITRE II-1

LES EQUATIONS DU PROBLEME ET SES CONDITIONS AUX LIMITES

ETUDE ANALYTIQUE

La propagation de la marée dans une mer littorale est un des phénomènes de propagation susceptible d'être décrit au moyen des équations des ondes longues. Celles-ci sont classiques : elles ont été largement utilisées par les théoriciens et les ingénieurs. Leur justification et leur exploitation ont déjà fait l'objet de nombreuses publications.

Après avoir précisé nos définitions et notations, nous rappelons les hypothèses classiques qui permettent d'établir ces équations des marées littorales, en reprenant la formulation proposée par HYACINTHE et KRAVTCHENKO - cf [6] -

Mais le nombre d'hypothèses faites généralement pour établir ces relations peut être réduit. En nous inspirant d'une méthode développée par FRIEDRICHS, cf [3], et KELLER - cf [7] - dès 1948, et reprise en 1960 par WEHAUSEN et LAITONE - cf [9]-, nous présentons, à partir des équations complètes de l'hydrodynamique tridimensionnelle, une justification différente des équations approchées décrivant les marées littorales. Notre discussion permet de mieux apprécier la validité physique des différentes hypothèses classiquement admises, en précisant celles qui sont nécessaires et indépendantes et celles qui apparaissent comme conséquences des premières.

1 - DEFINITIONS ET NOTATIONS

Nous considérons, dans un domaine D tridimensionnel, une mer littorale dont la surface libre est soumise à une pression constante p ; ainsi, nous admettons que cette surface est non perturbée par l'action des vents. Les dimensions de D sont suffisamment petites pour y négliger la courbure du géoïde et les forces locales résultant de l'action du potentiel générateur luni-solaire sur les masses d'eau de ce domaine.

Le domaine D est limité par le fond, les côtes (constituant la portion S_1 de la frontière S), les surfaces ouvertes sur l'océan, en principe verticales (formant la portion S_2 de la frontière S), et enfin la surface libre S_3 .

Le fluide, incompressible, et de densité constante ρ , est en mouvement sous l'influence des conditions qui règnent aux limites marines : ce sont les masses océaniques qui, agissant à travers S_2 , induisent dans D les oscillations des eaux enfermées dans ce domaine. On définit un système d'axes trirectangles Oxyz, lié à la terre, tel que :

O est situé dans D sur le géoïde

Oz est dirigé suivant la verticale ascendante au point O

Oxy est dans le plan tangent en O à la surface du géoïde

Ox est tangent à la parallèle issue de O et orienté vers l'est

Oy est tangent au méridien passant par O et orienté vers le sud.

On note par ailleurs :

$\Omega = 2\pi/24$ heures solaires : pulsation correspondant au vecteur rotation de la terre $\vec{\Omega}$ par rapport au repère copernicien

$\varphi(x,y)$ = latitude du point (x,y)

$p(x,y,z,t)$ = pression du liquide

$\zeta(s,y,t)$ = cote de la surface libre

$-h(x,y)$ = cote du fond

h_0 = profondeur moyenne sur D

$\left. \begin{array}{l} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{array} \right\}$ composantes du vecteur vitesse \vec{V} suivant les axes Oxyz

μ = coefficient de viscosité

$g(x,y)$ = accélération de la pesanteur, dirigée suivant Oz, en vertu de l'hypothèse négligeant la courbure du géoïde

2 - HYPOTHESES CLASSIQUES ET EQUATIONS DES MAREES LITTORALES

Rappelons ici les hypothèses classiques, résumées par exemple par HYACINTHE et KRAVTCHEENKO - cf [6] - qui caractérisent les marées littorales :

a) w est négligeable vis à vis de u et v. On pose $w \equiv 0$

b) $\vec{V}(M,t)$ ne dépend pas de z : $\vec{V} = \vec{V}(x,y,t)$

c) D est assez petit pour que :

α - φ varie peu dans le domaine considéré, de sorte qu'on ne retient qu'une latitude moyenne valable pour l'ensemble de D

β - $g(x,y)$ soit pratiquement constant dans D.

N.B. Ces deux conditions sont restrictives, on peut s'en passer au prix de complications de calcul.

γ) - La courbure du géoïde étant négligée, l'on assimile la projection verticale de S_3 sur le géoïde G à sa projection sur le plan tangent à G en O.

δ) - L'action du potentiel générateur des marées soit négligeable dans D.

d) Il est possible de linéariser l'accélération relative \vec{dV}/dt et d'écrire :

$$\vec{dV}/dt = \vec{\partial V}/dt$$

N.B. Cette condition est restrictive et nous ne l'adopterons pas dans la suite de ce travail.

e) D est assez étendu pour que l'accélération de CORIOLIS : $2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$ doive être prise en compte dans ce domaine.

f) La viscosité du liquide est négligeable ; les forces intérieures au liquide se réduisent à des pressions dont la répartition suivant toute normale au géoïde est, comme on peut le vérifier, hydrostatique.

g) Les frottements du fond sur le prisme liquide P, de base $d\sigma$ sur le géoïde, à génératrice normale à celui-ci, équivalent à une force approximativement horizontale $-\rho C |\vec{V}| \vec{V} d\sigma$, où C est une constante empirique dont la valeur numérique résulte de nombreux essais et de l'interprétation des données nature - cf [1] [2]. Ainsi, nous admettons implicitement que la pente de la surface du fond $z = -h(x,y)$ est faible.

Le volume d'eau enfermé dans le prisme P défini ci-dessus est soumis, d'après les hypothèses qui précèdent, à son poids vulgaire, aux pressions hydrostatiques latérales admettant une résultante horizontale :

$$-g\rho(\zeta+h) \overrightarrow{\text{grad}} \zeta d\sigma$$

à la réaction du fond, à la force de frottement, à la force de CORIOLIS, et aux pressions à la surface libre, alors que les quantités d'accélération relative admettent comme résultante horizontale :

$$\rho(\zeta+h) \frac{d\vec{V}}{dt} d\sigma$$

En écrivant le théorème des quantités de mouvement appliqué à P en projection horizontale et l'équation de continuité, on obtient alors les équations classiques des marées littorales :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} + 2 \vec{\Omega}_n \wedge \vec{V} + C \frac{\vec{V}}{h+\zeta} \vec{V} + g \overrightarrow{\text{grad}} \zeta = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div} [(h+\zeta) \vec{V}] = 0 \end{cases}$$

en désignant par $\vec{\Omega}_n$ la composante de $\vec{\Omega}$ suivant la verticale locale Oz.

Ces deux équations sont équivalentes à trois relations scalaires entre les trois inconnues u, v et ζ dépendant des trois variables indépendantes x, y et t.

3 - NOUVELLE JUSTIFICATION DES EQUATIONS DES MAREES LITTORALES

De toutes les hypothèses précédemment écrites, ne retenons pour l'instant que celles qui sont énoncées aux paragraphes c- γ , assimilant le géoïde à son plan tangent en O ; c- δ , négligeant l'action du potentiel générateur sur les masses d'eau contenues dans le domaine considéré, D ; et e- supposant D assez étendu pour que les effets de la force de CORIOLIS soient sensibles.

Nous négligeons, par ailleurs, les effets de turbulence.

Le fluide contenu dans D obéit aux équations de NAVIER-STOKES, (équations dynamiques et de continuité), à la condition de vitesse normale au fond, et à la condition cinématique de surface. Cet ensemble d'équations et de conditions aux frontières, écrites dans le système d'axes Oxyz défini précédemment, conduit aux relations :

$$(2-a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + 2 \Omega \cos \varphi w - 2 \Omega \sin \varphi v = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$(2-b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \Omega \sin \varphi u = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$(2-c) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + 2 \Omega \cos \varphi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$(2-d) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(2-e) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w \quad \text{pour } z = \zeta(x, y, t)$$

$$(2-f) \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = -w \quad \text{pour } z = -h(x, y)$$

$$(2-g) \quad p = P_a \quad \text{pour } z = \zeta(x, y, t)$$

Les mouvements marins du type des marées littorales se caractérisent par des échelles horizontales nettement supérieures aux échelles verticales. Nous inspirant des idées de FRIEDRICHS - cf [3], KELLER - cf [7], WEHAUSEN et LAITONE - cf [9], et GERMAIN - cf [4] - relatives à l'établissement des équations des ondes longues, nous réduisons (2) à un système sans dimensions, en rapportant les dimensions horizontales à une grandeur caractéristique λ (longueur d'onde du mouvement étudié) et les dimensions verticales à la profondeur h_0 , le temps à une période T caractéristique des mouvements horizontaux, et les vitesses à une grandeur caractéristique U_0 . Nous posons donc :

$$(3-a) \quad \begin{cases} x = \lambda \alpha = \frac{\alpha}{\bar{\omega}} \\ y = \lambda \beta = \frac{\beta}{\bar{\omega}} \\ z = h_0 \gamma \\ t = T \tau = \frac{\lambda}{U_0} \tau = \frac{\tau}{\bar{\omega} U_0} \end{cases}$$

$$(3-b) \quad \begin{cases} \bar{\omega} = \frac{1}{\lambda} \\ \sigma = \frac{h_0}{\lambda} = \bar{\omega} h_0 \quad (*) \\ \lambda = U_0 T \end{cases}$$

$$(3-c) \quad \begin{cases} u = U_0 \bar{u} \\ v = U_0 \bar{v} \\ w = U_0 \bar{w} \end{cases}$$

$$(3-d) \quad \begin{cases} \Omega = \bar{\omega} U_0 \bar{\Omega} \\ p = \rho g h_0 \bar{p} \\ \zeta = h_0 \bar{z} \\ d = h_0 \bar{H} \end{cases}$$

(*) ordre de grandeur de σ : $50 \text{ m} / 1000 \text{ km} = 5 \cdot 10^{-5}$

Le système (2) s'écrit alors comme suit :

$$(4-a) \quad \bar{\omega} U_0^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\omega} U_0^2 \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \beta} \right) + \frac{U_0^2 \bar{w}}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \gamma} + 2 \bar{\Omega} \cos \varphi \bar{\omega} U_0^2 - 2 \bar{\Omega} \sin \varphi \bar{\omega} U_0^2 \bar{v} =$$

$$- \frac{1}{\rho} \rho g h_0 \bar{\omega} \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} + \frac{\mu}{\rho} \bar{\omega}^2 U_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{U_0}{h_0^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \gamma^2}$$

$$(4-b) \quad \bar{\omega} U_0^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\omega} U_0^2 \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta} \right) + \frac{U_0^2 \bar{w}}{h_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \gamma} + 2 \bar{\Omega} \sin \varphi \bar{\omega} U_0^2 \bar{u} =$$

$$- \frac{1}{\rho} \rho g h_0 \bar{\omega} \frac{\partial \pi}{\partial \beta} + \frac{\mu}{\rho} \bar{\omega}^2 U_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{U_0}{h_0^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \gamma^2}$$

$$(4-c) \quad \bar{\omega} U_0^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{\omega} U_0^2 \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \beta} \right) + \frac{U_0^2 \bar{w}}{h_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma} + 2 \bar{\Omega} \cos \varphi \bar{\omega} U_0^2 \bar{u} =$$

$$- \frac{1}{\rho} \rho g h_0 \bar{\omega} \frac{\partial \pi}{\partial \gamma} - g + \frac{\mu}{\rho} \bar{\omega}^2 U_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{U_0}{h_0^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \gamma^2}$$

$$(4-d) \quad \bar{\omega} U_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta} \right) + \frac{U_0}{h} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma} = 0$$

$$(4-e) \quad \bar{\omega} U_0 h_0 \frac{\partial Z}{\partial t} + \bar{\omega} U_0 h_0 \left(\bar{u} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = U_0 \bar{w} \quad \text{pour } \gamma = Z(\alpha, \beta, t)$$

$$(4-f) \quad \bar{\omega} U_0 h_0 \left(\bar{u} \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) = - U_0 \bar{w} \quad \text{pour } \gamma = -H(\alpha, \beta)$$

$$(4-g) \quad \pi = \frac{P_0}{\rho g h_0} \quad \text{pour } \gamma = Z(\alpha, \beta, t)$$

Introduisons à présent les paramètres adimensionnels classiques :

$$R_o = \frac{1}{2 \bar{\Omega} \sin \varphi} = \frac{U_0 / \lambda}{2 \bar{\Omega} \sin \varphi} = \frac{\text{force d'inertie spatiale horizontale}}{\text{force de Coriolis horizontale}} \quad (\text{nombre de Rossby})$$

$$R_e = \frac{U_0 h_0}{\nu} = \dots = \frac{\text{force d'inertie spatiale}}{\text{force de viscosité}} \quad (\text{nombre de Reynolds})$$

$$F_r = \frac{U_0^2}{g h} = \dots = \frac{\text{énergie cinétique du courant}}{\text{énergie potentielle}} \quad (\text{nombre de Froude})$$

Moyennant ces notations, (4) devient :

$$(5-a) \quad \sigma \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{R_o} \bar{v} + \frac{1}{F_r} \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_o \sin \varphi} \bar{w} \right) + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_e} \left[\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \gamma^2} \right]$$

$$(5-b) \quad \sigma \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{R_o} \bar{u} + \frac{1}{F_r} \frac{\partial \pi}{\partial \beta} \right) + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_e} \left[\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \gamma^2} \right]$$

$$(5-c) \quad \sigma \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \beta} + \frac{1}{\rho_0 g \varphi} \bar{u} \right) + \frac{1}{Fr} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} + 1 \right) + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma} = \frac{1}{Re} \left[\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \gamma^2} \right]$$

$$(5-d) \quad \sigma \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma} = 0$$

$$(5-e) \quad \sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \bar{w} \quad \text{pour } \gamma = Z(\alpha, \beta, \tau)$$

$$(5-f) \quad \sigma \left(\bar{u} \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \bar{v} \frac{\partial H}{\partial \beta} \right) = -\bar{w} \quad \text{pour } \gamma = -H(\alpha, \beta)$$

On suppose alors - et nous insistons sur le fait qu'il s'agit là d'une hypothèse - que les solutions de ce système sont développables par rapport à la profondeur relative $\sigma = h_0 / \lambda$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}_0 + \sigma \bar{u}_1 + \sigma^2 \bar{u}_2 + \dots \\ \bar{v} = \bar{v}_0 + \sigma \bar{v}_1 + \sigma^2 \bar{v}_2 + \dots \\ \bar{w} = \bar{w}_0 + \sigma \bar{w}_1 + \sigma^2 \bar{w}_2 + \dots \\ \Pi = \Pi_0 + \sigma \Pi_1 + \sigma^2 \Pi_2 + \dots \\ Z = Z_0 + \sigma Z_1 + \sigma^2 Z_2 + \dots \end{array} \right.$$

On porte alors ces expressions dans (4) et on identifie dans les résultats les coefficients de même puissance en σ^n (c'est la méthode classique du petit paramètre). L'équation (4-g) peut, en particulier, s'écrire sous la forme :

$$(5-g) \quad \Pi(\alpha, \beta, Z, \tau) = P_a / \rho g h_0 = \Pi_0(\alpha, \beta, Z, \tau) + \sigma \Pi_1(\alpha, \beta, Z, \tau) + \dots \\ = \Pi_0(\alpha, \beta, Z_0, \tau) + \sigma \left[\Pi_1(\alpha, \beta, Z_0, \tau) + Z_1 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \gamma} \right] \\ + \sigma^2 \left[\Pi_2(\alpha, \beta, Z_0, \tau) + Z_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial \gamma} + Z_2 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \gamma} \right] + \dots$$

Par identification aux différents ordres de σ , on déduit de (5) et (6) :

à l'ordre 0 :

$$\left. \begin{array}{l} (d) \Rightarrow \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow \bar{w}_0 = \bar{w}_0(\alpha, \beta, \tau) \\ (e) \text{ et } (f) \Rightarrow \bar{w}_0 = 0 \text{ pour } \gamma = -H \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{w}_0 = 0 \quad \forall \gamma \quad (\neq -a)$$

$$(a) \text{ et } (b) \Rightarrow \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \gamma^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}_0 = E_0(\alpha, \beta, \tau) + \gamma E'_0(\alpha, \beta, \tau) \\ \bar{v}_0 = F_0(\alpha, \beta, \tau) + \gamma F'_0(\alpha, \beta, \tau) \end{cases} \quad (7-b)$$

$$(c) \text{ et } (g) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi_0}{\partial \gamma} + 1 = 0 \\ \pi_0 = P_a / \rho g h_0 \text{ pour } \gamma = z_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \pi_0 &= -\gamma + C(\alpha, \beta, \tau) \\ C(\alpha, \beta, \tau) &= \frac{P_a}{\rho g h_0} + z_0 \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \pi_0 = -\gamma + z_0 + \frac{P_a}{\rho g h_0} \quad (7-c)$$

Nous voyons ainsi, qu'à l'approximation d'ordre zéro :

- la composante verticale de la vitesse est d'ordre 1 au moins,
- les composantes horizontales de la vitesse sont indépendantes de la profondeur, ou fonctions linéaires de la profondeur
- la pression est hydrostatique suivant une verticale

à l'ordre 1 :

$$(8-a) \quad \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \tau} + \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \beta} - \frac{1}{R_0} \bar{v}_0 + \frac{1}{Fr} \frac{\partial \pi_0}{\partial \alpha} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \gamma} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \gamma^2}$$

$$(8-b) \quad \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \tau} + \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \alpha} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta} + \frac{1}{R_0} \bar{u}_0 + \frac{1}{Fr} \frac{\partial \pi_0}{\partial \beta} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \gamma} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \gamma^2}$$

$$(8-c) \quad \frac{1}{R_0 \rho g \varphi} \bar{u}_0 + \frac{1}{Fr} \frac{\partial \pi_1}{\partial \gamma} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \gamma^2}$$

$$(8-d) \quad \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta} + \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \gamma} = 0$$

$$(8-e) \quad \frac{\partial z_0}{\partial \tau} + \bar{u}_0 \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \bar{v}_0 \frac{\partial z_0}{\partial \beta} = \bar{w}_1 \quad \text{pour } \gamma = z_0$$

$$(8-f) \quad \bar{u}_0 \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \bar{v}_0 \frac{\partial H}{\partial \beta} = -\bar{w}_1 \quad \text{pour } \gamma = -H$$

$$(8-g) \quad \pi_1(\alpha, \beta, z_0, \tau) + z_1 \frac{\partial \pi_0(\alpha, \beta, z_0, \tau)}{\partial \gamma} = 0$$

Soit :

$$\pi_1(\alpha, \beta, z_0, \tau) = z_1$$

Supposons que $E'_0 = F'_0 = 0$ dans (7-b), c'est-à-dire que les composantes \bar{u}_0 et \bar{v}_0 de la vitesse sont indépendantes de la cote verticale (hypothèse ayant un sens physique très raisonnable) :

$$\bar{u}_0 = E_0(\alpha, \beta, \tau)$$

$$\bar{v}_0 = F_0(\alpha, \beta, \tau)$$

(Si on admet $E_0' \neq 0$ et $F_0' \neq 0$, la suite du calcul montre d'ailleurs qu'on ne retrouve pas les équations des ondes longues). Il en résulte que :

$$\underline{1} - (8-d) \Rightarrow \bar{w}_1 = - \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta} \right) \gamma + G_1(\alpha, \beta, \tau)$$

$$(8-f) \Rightarrow \bar{u}_0 \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \bar{v}_0 \frac{\partial H}{\partial \beta} = -\bar{w}_1 \quad \text{pour } \gamma = -H \\ = - \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta} \right) H - G_1(\alpha, \beta, \tau)$$

De (8d) et (8f), il résulte que :

$$-G_1(\alpha, \beta, \tau) = \frac{\partial H \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial H \bar{v}_0}{\partial \beta}$$

D'où :

$$\bar{w}_1 = - \frac{\partial H \bar{u}_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial H \bar{v}_0}{\partial \beta} - \gamma \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta} \right) \quad (9-a)$$

$$\text{et : } \left. \begin{array}{l} (8-d) \\ (8-g) \\ (8-e) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial z_0}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \alpha} [\bar{u}_0(z_0 + H)] + \frac{\partial}{\partial \beta} [\bar{v}_0(z_0 + H)] = 0 \quad (9-b)$$

Ainsi, la vitesse verticale w_1 s'exprime au moyen des approximations d'ordre zéro.

2 - Intégrons (8a) et (8b) entre H et Z, connaissant Π_0 par (7c)

$$(8-a) \Rightarrow \int_{-H}^Z \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \tau} + u_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + v_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \beta} - \frac{1}{R_0} \bar{v}_0 + \frac{1}{F_r} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} \right) d\gamma = \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \gamma} \right]_{-H}^Z$$

$$(8-b) \Rightarrow \int_{-H}^Z \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \tau} + u_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \alpha} + v_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta} + \frac{1}{R_0} \bar{u}_0 + \frac{1}{F_r} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} \right) d\gamma = \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \gamma} \right]_{-H}^Z$$

Le second membre représente le frottement au fond et à la surface libre.

Pour aller plus loin et expliciter ces conditions aux limites, il faut faire appel à des hypothèses nouvelles quant à la nature de l'interaction entre le fond et le liquide. Nous avons déjà noté plus haut que l'ensemble des résultats obtenus jusqu'à présent sur le sujet nous incite à renoncer à la loi élémentaire de frottement proportionnel à la vitesse et à adopter la loi quadratique - cf [1] et [2] .

Nous admettons donc que :

$$\frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \gamma} \right)_{-H} = -C |\vec{V}_0| u_0 \quad ; \quad \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \gamma} \right)_{-H} = -C |\vec{V}_0| v_0$$

C étant une constante qu'on suppose universelle.

Par ailleurs, nous avons admis qu'à la surface libre règne la pression atmosphérique seule, ce qui revient à négliger la viscosité de l'air. Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \gamma} \right)_z \equiv 0 \quad ; \quad \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \gamma} \right)_z \equiv 0$$

en sorte que :

$$\frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \gamma} \right]_{-H}^z = -C |\vec{V}_0| u_0 \quad ; \quad \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \gamma} \right]_{-H}^z = -C |\vec{V}_0| v_0$$

On est ainsi conduit aux équations des marées littorales que nous avons annoncées plus haut :

$$(9-c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \tau} + \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \beta} - \frac{1}{R_0} \bar{v}_0 + \frac{1}{F_r} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} = -\frac{C}{H+z_0} \sqrt{\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2} \bar{u}_0 \\ \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \tau} + \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \alpha} + \bar{v}_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta} + \frac{1}{R_0} \bar{u}_0 + \frac{1}{F_r} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} = -\frac{C}{H+z_0} \sqrt{\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2} \bar{v}_0 \\ \frac{\partial z_0}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \alpha} [\bar{u}_0 (z_0 + H)] + \frac{\partial}{\partial \beta} [\bar{v}_0 (z_0 + H)] = 0 \end{array} \right.$$

$$3 - (d) \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \gamma^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \pi_1}{\partial \gamma} = -\frac{F_r}{R_0 \operatorname{tg} \varphi} \bar{u}_0$$

car $\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \beta}$ ne dépend pas de γ . On en tire :

$$\pi_1 = -\frac{F_r}{R_0 \operatorname{tg} \varphi} \bar{u}_0 \gamma + C'(\alpha, \beta, \tau)$$

$$\text{or } (g) \Rightarrow \pi_1(\alpha, \beta, z_0, \tau) = z_1 \quad \Rightarrow \quad C'(\alpha, \beta, \tau) = \frac{F_r}{R_0 \operatorname{tg} \varphi} \bar{u}_0 z_0 + z_1$$

$$\text{d'où } \pi_1 = \frac{-F_r}{R_0 \operatorname{tg} \varphi} \bar{u}_0 (\gamma - z_0) + z_1$$

ou encore :

$$(9-d) \quad p_0 + \sigma p_1 = P_a - \rho g [\bar{z} - (z_0 + \sigma z_1)] - \rho \cdot 2 \Omega \cos \varphi u_0 (\bar{z} - z_0)$$

Les calculs précédents montrent que les seules hypothèses à faire pour justifier ces équations approchées 9-b et 9-c portent sur :

- a) La distinction entre les ordres de grandeur des échelles horizontales et verticales du phénomène, c'est là un aspect caractéristique des marées littorales
- b) La répartition uniforme des vitesses horizontales sur une verticale, hypothèse à demi suggérée déjà par les équations (7-b), et par ailleurs raisonnable du point de vue physique.

Il en résulte alors par simple voie de conséquence que :

- a) Les vitesses verticales sont négligeables par rapport aux vitesses horizontales. La formule (9-a) donne par ailleurs l'expression de la vitesse verticale à l'ordre 1 en fonction des vitesses horizontales à l'ordre zéro.
- b) La pression à l'ordre zéro est hydrostatique sur une verticale. A l'ordre 1, cette pression reste hydrostatique, à condition d'ajouter au champ de gravité, un champ correspondant à l'accélération verticale de Coriolis. C'est ce qu'exprime la relation (9-d).

Les solutions (u_0, v_0, ζ_0) des équations des marées littorales, mises sous leur forme classique, apparaissent ainsi comme la première approximation d'un développement des solutions exactes par rapport au petit paramètre h_0/λ appelé la profondeur relative.

N.B. Dans la suite de l'exposé, nous nous limitons aux équations (9-c). Le domaine D devient alors bidimensionnel et limité par S_1 et S_2 qui sont désormais des lignes. Les conditions à la surface libre et au fond sont satisfaites d'elles-mêmes. Il reste à écrire les conditions aux limites le long de la frontière $S = S_1 + S_2$ et les conditions initiales.

4 - ETUDE ANALYTIQUE DES MAREES LITTORALES

4.1 - Le problème hyperbolique

Le système (1), identique au système (9-c), est quasi linéaire en u, v, ζ et du type hyperbolique - cf [6] - Le problème de CAUCHY est bien étudié aujourd'hui pour de tels systèmes hyperboliques à coefficients et données aux frontières assez

réguliers. Mais l'étude de la marée littorale se ramène malheureusement à un problème mixte pour lequel il n'existe pas encore de résultats d'existence et d'unicité. Nous présentons ci-après les problèmes aux limites qui se posent en suivant l'analyse qu'en ont faite HYACINTHE et KRAVTCHENKO en 1967 - cf[6] -

Etant donné les hypothèses formulées précédemment, les mouvements dans D ne peuvent être provoqués que par des actions exercées sur les eaux de D aux limites ouvertes S_2 qui jouent un rôle comparable à celui d'un batteur dans un canal à houle : ce sont les oscillations des masses océanes engendrées par les effets de la lune et du soleil. Or il est possible de simuler cette action en imposant à chaque instant et en chaque point la composante \vec{V}_n de \vec{V} normale à S_2 tout au long de cette frontière marine. Comme par ailleurs \vec{V}_n est nul le long de S_1 , il suffit de se donner l'état initial du liquide dans D pour définir complètement le problème :

- Les données initiales définissent la solution de (1) dans la portion de cylindre C de l'espace x, y, t (à génératrices parallèles à l'axe des t) de base S , tel que $t \in [0, +\infty]$ et les multiplicités caractéristiques de (1) issues de S . Dans ce domaine, le problème à résoudre est classique : c'est celui de CAUCHY.

- Dans la portion restante de C , on est conduit à des problèmes mixtes, analogues à ceux qui se rencontrent dans les théories des oscillations forcées des cordes vibrantes ou des eaux enfermées dans un canal à houle et mises en mouvement par un batteur .

- Comme le phénomène des marées met en jeu des forces dissipatives importantes, on vérifie sur des exemples simples, en s'appuyant sur les propriétés des systèmes hyperboliques, que le régime établi est pratiquement indépendant des conditions initiales. On peut donc choisir celles-ci de façon arbitraire. Il est commode au point de vue numérique de partir de l'état de repos.

Il reste à préciser la loi $\vec{V}_n(M, t)$ sur S_2 pour $t \in [0, +\infty]$. Dans le cas de l'étude des marées moyennes, on se donne habituellement une fonction périodique du temps définie à partir des données nature (généralement des fonctions sinusoïdales) et on étudie l'établissement des marées moyennes à partir du repos. On admet alors que pour $t = 0$, il existe une discontinuité pour le champ des vitesses, le long de S_2 , car les vitesses sont sinusoïdales à la frontière, de phase variable avec le point M , en sorte que $\vec{V}_n(M, t) = 0$ ne peut y être réalisé en tout point au même instant. Des exemples montrent que cette discontinuité n'exerce pas d'influence sensible sur le résultat. Ce point, d'ailleurs, a été justifié en toute rigueur dans le cas de

problèmes aux limites plus simples.

- On pourrait imaginer comme loi $\vec{V}_n(M,t)$, $M \in S_2$, une fonction plus proche de la réalité que la simple sinusoïde précédente décrivant la marée moyenne, par exemple une loi traduisant l'évolution de la marée entre ses vives eaux et ses mortes eaux. Un tel problème n'a pas encore été traité, à notre connaissance. Mais nous ne nous y attardons pas, car nous avons choisi a priori d'aborder notre étude des marées littorales sous une autre forme.

4.2 - Réduction au problème elliptique linéarisé - Méthode de W.HANSEN et ses variantes

Supposons, à titre de première approximation, que le problème posé soit linéaire. Le système d'équations correspondant, déduit de (1), se présente sous la forme :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = C_v v - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -C_v u - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad C_v = 2 \Omega \sin \varphi$$

Soit, en écriture matricielle :

$$(11) \quad M \cdot S = 0 \quad \text{avec} \quad M = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -C_v & gh \frac{\partial}{\partial x} \\ C_v & \frac{\partial}{\partial t} & gh \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{vmatrix} hu \\ hv \\ \zeta \end{vmatrix}$$

Or, dans la première partie de cet exposé, nous avons pu définir la marée océanique au moyen de sa décomposition spectrale, par un ensemble théoriquement infini de composantes dont les fréquences sont données par le spectre du potentiel générateur. Toutefois, en vue des applications, il suffit de se limiter à un nombre relativement restreint de termes significatifs dont les fréquences se retrouvent effectivement dans les analyses des courbes de marées (cf I-3/3).

Nous admettons que la solution de (10) peut se représenter sous forme de sommes de composantes élémentaires sinusoïdales de type :

(*)

$$\begin{array}{l}
 (12-a) \quad \zeta = A_i \alpha_i \\
 (12-b) \quad u = A_i \mu_i \\
 (12-c) \quad v = A_i \nu_i
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (12-a) \\ (12-b) \\ (12-c) \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{pour } i=1, \dots, N \\
 \text{avec}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \alpha_i = \zeta_{i2}(x,y) \cos[\omega_i t + \varphi_{i2}(x,y)] \\
 \mu_i = u_{i2}(x,y) \cos[\omega_i t + \psi_{i2}(x,y)] \\
 \nu_i = v_{i2}(x,y) \cos[\omega_i t + \chi_{i2}(x,y)]
 \end{array} \right.$$

les notations ci-après sont adoptées :

ω_i : pulsations correspondant à celles du potentiel générateur limité à N composantes significatives

A_i : grandeur caractérisant la i-ième composante, par exemple la valeur du coefficient correspondant du potentiel générateur, défini en I-2/1 ou 2, éventuellement corrigée par la contribution du potentiel radiatif

α_i, μ_i, ν_i : valeurs réduites de la dénivellation et des composantes de la vitesse de la i-ième composante, caractérisées par leurs modules $\zeta_{i2}, u_{i2}, v_{i2}$, et leurs déphasages $\varphi_{i2}, \psi_{i2}, \chi_{i2}$.

Pour simplifier les écritures, nous introduisons les notations complexes :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \alpha_i = \bar{\alpha}_i e^{j\omega_i t} + c.c. \quad (\text{complexe conjugué}) \\
 \mu_i = \bar{\mu}_i e^{j\omega_i t} + c.c. \quad (\text{complexe conjugué}) \\
 \nu_i = \bar{\nu}_i e^{j\omega_i t} + c.c. \quad (\text{complexe conjugué})
 \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } \bar{\alpha}_i = \frac{1}{2} \zeta_{i2} (\cos \varphi_{i2} + j \sin \varphi_{i2})$$

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{2} u_{i2} (\cos \psi_{i2} + j \sin \psi_{i2})$$

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{2} v_{i2} (\cos \chi_{i2} + j \sin \chi_{i2})$$

Les quantités complexes $\bar{\alpha}_i, \bar{\mu}_i, \bar{\nu}_i$ doivent alors vérifier, indépendamment pour chaque i, les équations :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 j \omega_i \bar{\mu}_i + g \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial x} - C_v \bar{\nu}_i = 0 \\
 j \omega_i \bar{\nu}_i + g \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial y} + C_v \bar{\mu}_i = 0 \\
 j \omega_i \bar{\alpha}_i + \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{\mu}_i) + \frac{\partial}{\partial y} (h \bar{\nu}_i) = 0
 \end{array} \right.$$

(*) Nous utilisons la convention de l'indice muet

qui peuvent aussi s'écrire sous la forme classique :

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{m}_i = \frac{-g}{c_v^2 - \omega_i^2} \left[j \omega_i \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial x} + c_v \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial y} \right] \\ \bar{v}_i = \frac{g}{c_v^2 - \omega_i^2} \left[c_v \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial x} - j \omega_i \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_i}{\partial y^2} + k_1 \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial y} - \frac{c_v^2 - \omega_i^2}{gh} \bar{\alpha}_i = 0 \end{cases}$$

avec :

$$k_1 = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{c_v}{j \omega_i} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{c_v}{j \omega_i} \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

Aux notations près, on retrouve un système d'équations déjà étudié par W. HANSEN - cf [5] - Nous résumons les principales conclusions de cet auteur, valables pour chaque indice i :

- 1- Le système (15) est elliptique
- 2- Un problème aux limites, correctement posé relativement à (15), revient à en trouver une solution connaissant les caractéristiques de la dénivellation ($\bar{\alpha}_i$) sur S_1 , et celles de la composante normale de la vitesse sur S_2 .
- 3- L'unicité de cette solution s'établit aisément au moyen de raisonnements fondés sur la formule intégrale de GREEN.

On notera que dans (15) l'effet de frottement est négligé, en raison de la loi quadratique que nous avons adoptée. En fait, W. HANSEN en tient compte en postulant une forme linéaire de la force F de frottement :

$$\vec{F} \begin{cases} -\rho u \\ -\rho v \\ 0 \end{cases} \quad \text{soit pour (14), les termes supplémentaires} \quad \begin{cases} -\rho \bar{m}_i \\ -\rho \bar{v}_i \\ 0 \end{cases}$$

qui ne change rien à la nature du problème posé, mais permet de traduire plus correctement la réalité. Le coefficient ρ est choisi de façon empirique.

Dans l'article précité, W. HANSEN présente, en application de sa théorie, une étude de la composante M_2 dans la Manche, à l'aide d'un modèle mathématique -cf [5]

Il obtient ainsi des résultats assez concordant avec les données in situ; en dépit des approximations grossières, on arrive à une description satisfaisante de la composante M_2 en cause. Par contre, la méthode de HANSEN ne peut, de par sa nature même, interpréter le mécanisme de la génération des harmoniques d'ordres supérieurs comme $M_4, M_6 \dots$ ou d'interaction : $MS_4, 2MS_6 \dots$ qui possèdent cependant - pour la Manche en particulier - des amplitudes importantes. Avec cette formulation linéaire, tout un ensemble de propriétés caractéristiques de la propagation des marées dans les mers littorales échappe à toute analyse théorique.

4.3 - Une méthode d'approximations successives

Avec J. KRAVTCHENKO, nous nous sommes alors proposés d'étudier le problème posé relativement à (1) au moyen d'un processus d'approximations successives, à partir de la solution linéaire, de manière à prendre en compte les termes non linéaires des équations en cause - cf [8] - Le système (1) s'écrit sous la forme matricielle :

$$(16) \quad M \cdot S = B + E \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} -h(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) \\ -h(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) \\ -\frac{\partial \zeta u}{\partial x} - \frac{\partial \zeta v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} -\frac{ch}{h+\zeta} u \sqrt{u^2+v^2} \\ -\frac{ch}{h+\zeta} v \sqrt{u^2+v^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons cherché une solution au problème, posé relativement à (16), sous la forme :

$$(*) \quad (17) \quad \begin{cases} \zeta = A_i \alpha_i + A_i^P F_{ip}(\omega_1 t, \omega_1 t, x, y) + A_i^q A_j^r g_{ijqr}(\omega_1 t, \omega_1 t, \omega_1 t, x, y) + \dots \\ u = A_i \mu_i + A_i^P h_{ip}(\omega_1 t, \omega_1 t, x, y) + A_i^q A_j^r k_{ijqr}(\omega_1 t, \omega_1 t, \omega_1 t, x, y) + \dots \\ v = A_i \nu_i + A_i^P l_{ip}(\omega_1 t, \omega_1 t, x, y) + A_i^q A_j^r m_{ijqr}(\omega_1 t, \omega_1 t, \omega_1 t, x, y) + \dots \end{cases}$$

c'est-à-dire, sous forme matricielle :

$$S = A_i S_{i1} + A_i^P S_{ip} + A_i^q A_j^r S_{ijqr} + \dots$$

avec :

$$S_{i1} = \begin{pmatrix} h \mu_i \\ h \nu_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} \quad S_{ip} = \begin{pmatrix} h \cdot h_{ip} \\ h \cdot l_{ip} \\ f_{ip} \end{pmatrix} \quad S_{ijqr} = \begin{pmatrix} h k_{ijqr} \\ h m_{ijqr} \\ g_{ijqr} \end{pmatrix}$$

(*) Nous introduisons impérativement la pulsation ω_1 dans toutes les fonctions f, g, h, k, l, m. Ce point se trouvera justifié dans les chapitres suivants.

en supposant que les conditions aux limites admettent elles aussi des représentations analytiques approchées de la forme (17). C'est la méthode des petits paramètres de POINCARÉ.

En portant (17) dans (16) et en égalant à zéro les coefficients de A_i ou de $A_i A_j$, ... on obtient pour chaque ordre d'approximation, relativement aux paramètres caractéristiques A_i , un système définissant les fonctions f_{ip} , h_{ip} , l_{ip} , ou g_{ijqr} , k_{ijqr} , m_{ijqr} , ou ...

$$(18) \quad \begin{cases} M S_{i1} = 0 \\ M S_{ip} = B_{ip} + E_{ip} \\ M S_{ijqr} = B_{ijqr} + E_{ijqr} \\ \vdots \end{cases}$$

avec, pour l'ordre 2 en A_i , par exemple :

$$B_{i2} = \begin{vmatrix} -h \left(\mu_i \frac{\partial \mu_i}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial \mu_i}{\partial y} \right) \\ -h \left(\mu_i \frac{\partial \nu_i}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial \nu_i}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial(\alpha_i \mu_i)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha_i \nu_i)}{\partial y} \end{vmatrix} \quad E_{i2} = \begin{vmatrix} -C \mu_i \sqrt{\mu_i^2 + \nu_i^2} \\ -C \nu_i \sqrt{\mu_i^2 + \nu_i^2} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Au paragraphe I-3/3, nous avons noté que les non-linéarités introduisent dans le spectre des marées littorales des fréquences harmoniques et composées des fréquences génératrices. Appliquant un procédé classique en théorie des vibrations forcées, nous allons chercher les solutions de (18) sous la forme :

$$(19-a) \quad \begin{cases} f_{ip} = \sum_{ip}^{(a,b)}(x,y) \cos[(a\omega_1 + b\omega_i)t + \varphi_{ip}^{(a,b)}(x,y)] \\ h_{ip} = u_{ip}^{(a,b)}(x,y) \cos[(a\omega_1 + b\omega_i)t + \psi_{ip}^{(a,b)}(x,y)] \\ l_{ip} = v_{ip}^{(a,b)}(x,y) \cos[(a\omega_1 + b\omega_i)t + \chi_{ip}^{(a,b)}(x,y)] \end{cases} \quad (a, b = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$$

$$(19-b) \quad \begin{cases} g_{ijqr} = \sum_{ijqr}^{(a,b,c)}(x,y) \cos[(a\omega_1 + b\omega_i + c\omega_j)t + \varphi_{ijqr}^{(a,b,c)}(x,y)] \\ k_{ijqr} = u_{ijqr}^{(a,b,c)}(x,y) \cos[(a\omega_1 + b\omega_i + c\omega_j)t + \psi_{ijqr}^{(a,b,c)}(x,y)] \\ m_{ijqr} = v_{ijqr}^{(a,b,c)}(x,y) \cos[(a\omega_1 + b\omega_i + c\omega_j)t + \chi_{ijqr}^{(a,b,c)}(x,y)] \end{cases} \quad (a, b, c = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$$

$$\text{soit : } S_{ip} = S_{ip}^{(a,b)} ; \quad S_{ijqr} = S_{ijqr}^{(a,b,c)} ; \quad \dots$$

en supposant encore que les conditions aux limites admettent des représentations approchées du même type que (19-a), (19-b)

Les systèmes (18) se subdivisent en autant de systèmes partiels que l'on a de valeurs d'indices $i, j, q, r, \dots, a, b, \dots$ dès lors que les seconds membres $B_{ip} + E_{ip}, B_{ijq2} + E_{ijq2}, \dots$ sont exprimés eux aussi sous la forme de développements du type (19) :

$$(21) \quad \left. \begin{aligned} B_{ip} + E_{ip} &= B_{ip}^{(a,b)} + E_{ip}^{(a,b)} \\ B_{ijqr} + E_{ijqr} &= B_{ijqr}^{(a,b,c)} + E_{ijqr}^{(a,b,c)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (22) \quad \left\{ \begin{aligned} M \cdot S_{ip}^{(a,b)} &= B_{ip}^{(a,b)} + E_{ip}^{(a,b)} \\ M \cdot S_{ijqr}^{(a,b,c)} &= B_{ijqr}^{(a,b,c)} + E_{ijqr}^{(a,b,c)} \end{aligned} \right.$$

Ainsi, le problème global posé en (1) revient à résoudre une infinité de systèmes de type (22) : chaque système correspond à un ordre d'approximation en A_i , et à une fréquence déterminée. L'ensemble des fréquences à considérer est constitué par le sous-ensemble e_1 des fréquences d'origine astronomique et radiationnelle, complété par le sous-ensemble e_2 de toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers entre les éléments de e_1 .

Reprenant les notations complexes définies par (13) :

$$(23) \quad \begin{aligned} \zeta_{ip}^{(a,b)} \cos [(a\omega_1 + b\omega_i)t + \varphi_{ip}^{(a,b)}] &= \overline{\zeta}_{ip}^{(a,b)} e^{j(a\omega_1 + b\omega_i)t} + c.c. \\ \zeta_{ijqr}^{(a,b,c)} \cos [(a\omega_1 + b\omega_i + c\omega_j)t + \varphi_{ijqr}^{(a,b,c)}] &= \overline{\zeta}_{ijqr}^{(a,b,c)} e^{j(a\omega_1 + b\omega_i + c\omega_j)t} + c.c. \end{aligned}$$

on constate aisément que chaque ensemble de valeurs complexes $\{\overline{\zeta}_{ip}^{(a,b)}, \overline{u}_{ip}^{(a,b)}, \overline{v}_{ip}^{(a,b)}\}$ ou $\{\overline{\zeta}_{ijqr}^{(a,b,c)}, \overline{u}_{ijqr}^{(a,b,c)}, \overline{v}_{ijqr}^{(a,b,c)}\}$ vérifie un système linéaire de même type que (14), mais avec seconds membres. Ceux-ci décrivent, à la différence des cas linéaires où ils sont nuls, les contributions des effets non linéaires. Ils sont définis à un ordre donné d'approximation par les approximations supposées déterminées des ordres précédents.

Pratiquement, on limitera le nombre de systèmes en tenant compte des données nature disponibles, c'est-à-dire en se limitant aux composantes significatives.

En dépit de cette simplification, on conçoit que le problème reste d'autant plus complexe que les non linéarités sont importantes. Dans certains cas pratiques,

il faut poursuivre les calculs jusqu'à un ordre d'approximation élevé : c'est bien là la faiblesse essentielle de la méthode harmonique, qui offre l'avantage de nous faire comprendre les mécanismes physiques en jeu, mais dont l'emploi exige un effort préliminaire de longue haleine.

Rappelons que, pour pouvoir appliquer notre méthode, il faut que les vecteurs B_{ij} et E_{ij} , B_{ijqr} et E_{ijqr} puissent s'exprimer sous la forme (21). Il est aisé d'obtenir de telles représentations analytiques pour les composantes des vecteurs B_{ij} , B_{ijqr} puisqu'elles ne font intervenir que des produits de fonctions circulaires. Par contre, cette représentation semble a priori difficile pour les composantes provenant du terme de frottement, non analytique en A_i . Le chapitre suivant est consacré à l'étude de cette représentation, indispensable à la mise en oeuvre de la méthode harmonique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. BONNEFILLE - 1968
 "Contribution théorique et expérimentale à l'étude du régime des marées" - Thèse
 ou "Note sur le coefficient de frottement de la marée dans les mers littorales"
 Bulletin du GREC N°4 - 1968
- [2] BOWDEN et FAIRBAIRN - 1956
 Proceed. of the Royal Society - pp. 422-438
- [3] K.O. FRIEDRICHS - 1948
 "On the derivation of the shallow water theory"
 Comm. Appl. Meth. 1 - pp.71-85
- [4] J.P. GERMAIN - 1967
 "Contribution à la théorie des houles en eau peu profonde"
 Thèse - Faculté des Sciences de Grenoble
- [5] W. HANSEN - 1948
 "De Ermittlung der Gezeiten baliebig gestalteter Meeresgebiete mit Hilfe der Randwertverfahrens"
 Deutsche Hydrog. Zeitschrift - Band 1 - Hilf 5/6
- [6] J.L. HYACINTHE et J. KRAVTCHENKO - 1967
 "Modèle mathématique des marées littorales - Calcul numérique sur l'exemple de la Manche"
 La Houille Blanche N°6 - pp.639-650
- [7] J. KELLER - 1948
 "The solitary wave and periodic waves in shallow water"
 Comm. Appl. Math. 1 - pp.323-329
- [8] J. KRAVTCHENKO et C. LE PROVOST - 1970
 "Une méthode approchée de calcul des composantes de la marée littorale"
 C.R. Acad. Sc. Paris - t 270 série A pp. 1451-1454

- [9] J.V. WEHAUSEN et E.V. LAITONE - 1960
"Surface waves"
Encyclopedia of Physics - Vol IX Fluid dynamics III
Springer Verlag - Berlin - Gottingen - Heidelberg

CHAPITRE II-2

DECOMPOSITION SPECTRALE DU TERME QUADRATIQUE DE FROTTEMENT

Dans les mers littorales, le frottement du liquide en mouvement sur les fonds joue un rôle essentiel dans le mécanisme non linéaire des déformations des ondes de marées. Or la force de frottement dans les équations des ondes longues se présente, ainsi que nous l'avons vu au chapitre précédent, comme une fonction non analytique par rapport aux amplitudes des ondes composantes, dans le voisinage des valeurs nulles de celles-ci. Il convient donc de rechercher une approximation de cette force sous forme d'un développement limité de FOURIER généralisé ; c'est une étape essentielle de la méthode dont nous avons esquissé les grandes lignes au paragraphe I-3/3-3 ci-dessus.

Ce problème a été abordé depuis longtemps : LORENTZ fut le premier, en 1918 et 1926, à linéariser ce terme pour une onde fondamentale, dans le cas monodimensionnel - cf [7] - On retrouve des développements semblables chez MAZURE (1937), DRONKERS (1947), STROBAND (1947), SCHONFELD (1951) - cf [2], [8], [9], [11] - mais ces développements ne sont valables que pour le cas monodimensionnel. Applicables à des estuaires, ces formules sont insuffisantes pour l'étude des marées littorales bidimensionnelles. Des calculs ont été réalisés dans ce dernier cas, mais seulement pour des marées monopériodiques, ou des marées composées d'un fondamental et de son premier harmonique - cf les travaux de SCHONFELD (1956), HOLSTERS (1959), DRONKERS (1961) - cf [3-4-10] - Mais, à notre connaissance, le cas général, celui d'une marée réelle multipériodique, se propageant dans un domaine à deux dimensions, n'a pas encore été traité. Les développements que nous présentons ci-après sont valables pour des marées multipériodiques, mais à la condition particulière qu'une de leurs composantes soit "dominante", terme dont nous allons préciser le sens - cf [5]-[6] .

1 - RAPPEL DE L'EXPRESSION DE LA FORCE DE FROTTEMENT -
POSITION DU PROBLEME

Nous avons vu au paragraphe 2 du chapitre précédent que, pour une colonne fluide de masse unité, la force de frottement \vec{F} est définie classiquement par :

$$(1) \quad \vec{F} = \frac{c}{h+\zeta} |\vec{V}| \vec{V}$$

Nous avons aussi supposé que la dénivellation ζ et les composantes u et v de la vitesse \vec{V} sont, en première approximation, développables en composantes élémentaires sinusoïdales définies par un système d'expressions linéaires et homogènes, de degré 1 par rapport aux amplitudes :

$$\begin{array}{l} (2-a) \\ (2-b) \\ (2-c) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \zeta = A_i \alpha_i \\ u = A_i \mu_i \\ v = A_i \nu_i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour } i = 1 \dots N \\ \text{avec} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \zeta_{i1}(x,y) \cos[\omega_i t + \varphi_{i1}(x,y)] \\ \mu_i = u_{i1}(x,y) \cos[\omega_i t + \varphi_{i1}(x,y)] \\ \nu_i = v_{i1}(x,y) \cos[\omega_i t + \chi_{i1}(x,y)] \end{array} \right.$$

Ainsi, nous supposons nuls les courants moyens au premier ordre et nous approchons les inconnues au moyen de polynômes trigonométriques en t que nous appelons développements limités généralisés de FOURIER. Le vecteur \vec{F} a ainsi pour composantes :

$$(3-a) \quad F_x = \frac{C}{h+\zeta} R u$$

$$(3-b) \quad F_y = \frac{C}{h+\zeta} R v$$

où

$$(3-c) \quad R = \sqrt{u^2 + v^2} = \left\{ [A_i u_{i1} \cos(\omega_i t + \varphi_{i1})]^2 + [A_i v_{i1} \cos(\omega_i t + \chi_{i1})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Remarque : Cette expression approchée de R ne fait intervenir que des termes linéaires de la solution du problème. Nous avons vu précédemment qu'il est nécessaire de faire figurer dans (2) des termes complémentaires, non linéaires par rapport aux A_i , pour obtenir une meilleure représentation de la réalité. On améliore donc R en faisant figurer dans (3-c) les termes en cause. A condition que la nouvelle approximation ainsi obtenue vérifie toujours l'hypothèse de l'onde dominante, le raisonnement que nous présentons ci-après reste valable, quel que soit l'ordre d'approximation adopté pour (2).

Nous nous proposons de former les développements limités généralisés de FOURIER de F_x et F_y , dont les coefficients seront des polynômes en A_i et A_j^p/A_1^q , p et q étant des entiers tels que $p \geq 1$, $q \geq 0$ et $p - q = 1$, ($j = 2, 3 \dots N$), l'indice $i = 1$ correspond à l'onde dominante.

Admettant que l'on ait réussi à former les développements limités de $1/(h+\zeta)$ et R du type cherché, il en sera de même pour le produit $R/(h+\zeta)$ et par suite, u et v étant de la même forme - pour les expressions :

$$\frac{C R u}{h+\zeta} \quad \text{et} \quad \frac{C R v}{h+\zeta}$$

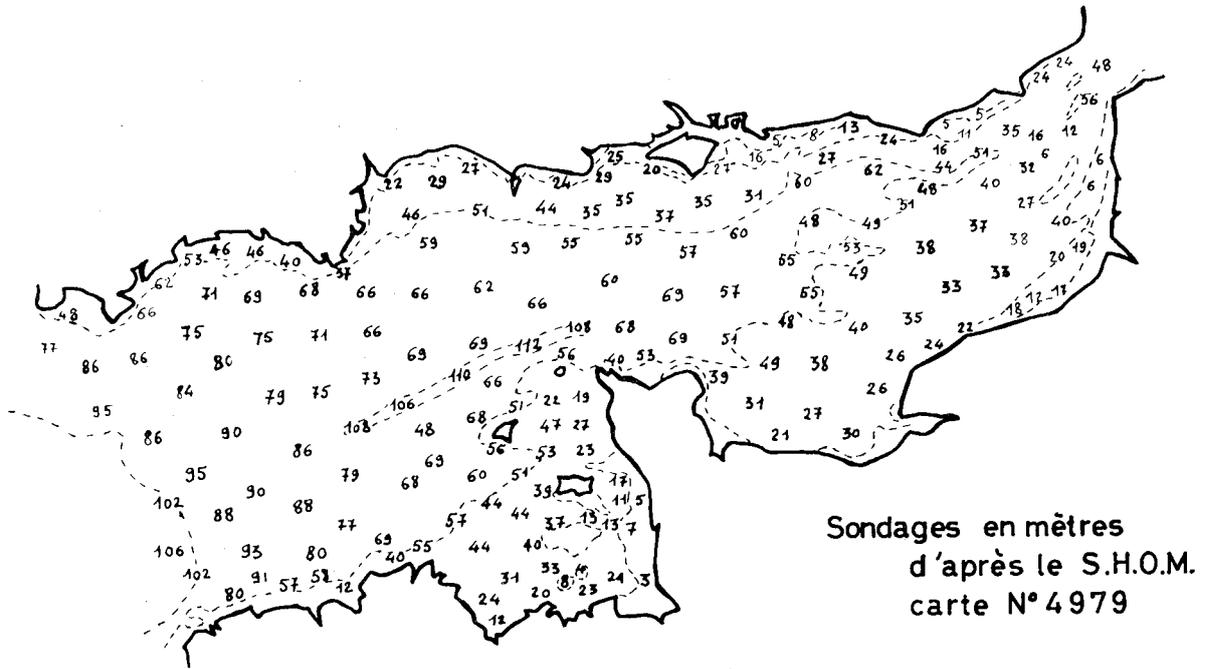


FIG.II.2/1: Carte bathymétrique de LA MANCHE

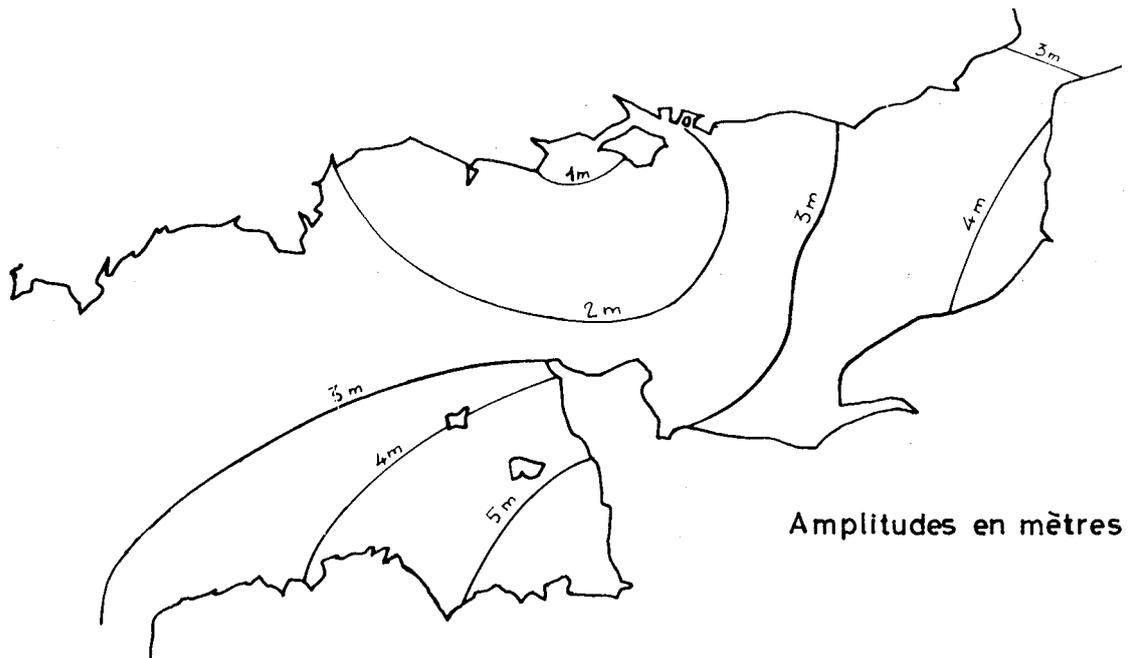


FIG.II.2/2: Amplitudes de vives eaux moyennes

Ceci résulte de ce que le produit de deux polynômes trigonométriques est encore un polynôme trigonométrique. Le problème consiste donc à chercher les représentations adéquates de $(h + \zeta)^{-1}$ et R.

2 - ETUDE DU TERME $(h + \zeta)^{-1}$

En nous reportant aux cartes bathymétriques de la Manche, par exemple, et aux courbes d'égaux amplitudes de ses marées moyennes, nous constatons que le rapport ζ/h est toujours très inférieur à 1, sauf pour les zones côtières et les bancs découvrants - cf figure II-2/1 et II-2/2.

Nous pouvons, dès lors, admettre que $\zeta/h \ll 1$ dans toute l'étendue du domaine littoral considéré, à condition que l'on remplace le tracé réel des côtes par un contour voisin. Cette approximation est justifiée car les solutions du système d'équations des marées littorales, quasi linéaire et de type hyperbolique, sont stables relativement aux données aux limites, pour des domaines limités par des frontières régulières. Ceci revient à affirmer qu'on change peu les solutions en changeant peu les données en cause. L'extension de ces conclusions aux frontières marines réelles, fort irrégulières, reste à faire ; mais nous pouvons admettre cette généralisation, vérifiée par de nombreuses expériences sur modèles mathématiques.

Le développement ci-après est donc légitime :

$$(4) \quad \frac{c}{h+\zeta} = \frac{c}{h} \left[1 - \frac{\zeta}{h} + \frac{\zeta^2}{h^2} + \dots \right]$$

En substituant à ζ sa valeur (2), on voit que le terme $c/h+\zeta$ de (1) admet bien une représentation du type généralisé de FOURIER, c'est-à-dire pluri-périodique, dont les coefficients sont des monômes de degré zéro, un, deux, ... en $A_i, A_j \dots$ multipliés par des fonctions du temps.

Nous expliciterons ces expressions ultérieurement, jusqu'aux ordres d'approximation en A_i reconnus comme significatifs.

3 - ETUDE DU TERME R

D'après (3-c), R n'est pas holomorphe en A_i dans le voisinage des valeurs $A_i = 0$ des amplitudes. Il est donc impossible de développer R en série de TAYLOR par rapport à ces paramètres dans le voisinage de l'état de repos de la masse liquide.

Pour tourner cette difficulté, nous introduisons une hypothèse qui se trouve être bien vérifiée par les résultats des observations in situ faites dans plusieurs mers littorales. Nous l'énonçons comme suit :

Il existe dans la région marine considérée une composante que nous appelons dominante (désignée par l'indice 1) caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (5-a) \quad & u_{11}^2(x,y) + v_{11}^2(x,y) \neq 0 \\ (5-b) \quad & A_1^2 [u_{11}^2(x,y) + v_{11}^2(x,y)] \gg \sum_2^N A_i^2 [u_{i1}^2(x,y) + v_{i1}^2(x,y)] \end{aligned} \right\} \forall (x,y) \in \mathcal{D}$$

Nous allons déduire de (5-a) et (5-b) un développement de R de la forme cherchée, au voisinage du système de valeurs $A_1 > 0, A_2, A_3, \dots, A_4$, les (N-1) constantes $A_j (j = 2, \dots, N)$ étant supposées assez petites par rapport à A_1 . Le raisonnement repose sur quelques inégalités élémentaires : comme nous ne cherchons pas les conditions optimales de validité de ces inégalités, nous nous bornons à des majorations grossières qui suffisent à notre objet. Notons toutefois qu'il serait possible mais fastidieux de les améliorer.

3.1 - Une inégalité élémentaire

Soit a_i et φ_i , $i = 1, \dots, N$ deux suites réelles, pour l'instant quelconques, et $U(a_i, \varphi_i)$ l'expression définie par :

$$U(a_i, \varphi_i) = \sum_{i=1}^N a_i \cos \varphi_i$$

Il est évident que $U(a_i, \varphi_i) \leq \sum_{i=1}^N |a_i|$. Nous allons démontrer que :

$$(6) \quad \left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^2 \leq N \sum_{i=1}^N a_i^2$$

Cette inégalité résulte des identités suivantes :

$$2 a_i a_j = a_i^2 + a_j^2 - (a_i - a_j)^2$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 + 2 \sum'_{i,j} a_i a_j$$

le symbole \sum' désignant la sommation étendue à toutes les valeurs i, j , telles que $i \neq j$. On voit que :

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^2 = N \sum_{i=1}^N a_i^2 - \sum'_{i,j} (a_i - a_j)^2$$

Comme la somme $\sum_{i,j}'$ du second membre est ≥ 0 , l'inégalité (6) résulte de l'identité précédente. On voit de plus qu'on ne peut remplacer dans (16) le facteur N qui figure au second membre par un nombre positif inférieur, car pour $a_1 = a_2 = \dots = a_N$, (6) se réduit à une identité. En revanche, si l'un au moins des nombres a_i , a_1 par exemple, n'est pas nul, et s'il existe un autre indice j , $j = 2$, par exemple, tel que $a_1 - a_2 \neq 0$, (6) est vérifié au sens strict. Le signe \geq doit y être remplacé par $>$.

3.2 - Développement de R

De la définition (3-c) de R , on déduit la majoration :

$$R^2 \leq (A_i u_{i2})^2 + (A_i v_{i2})^2$$

Compte-tenu de (6), cela donne :

$$R^2 \leq N A_i^2 (u_{i2}^2 + v_{i2}^2)$$

Et dans l'hypothèse de l'existence d'une onde dominante, on aura, strictement :

$$(7) \quad 0 < R^2 < S^2 \quad \text{avec} \quad S^2 = N A_i^2 (u_{i2}^2 + v_{i2}^2)$$

Par ailleurs, de la définition (3-c) de R , on tire :

$$(8) \quad 2R^2 = A_i^2 (u_{i2}^2 + v_{i2}^2) + A_i^2 \beta_i + A_i A_j \gamma_{ij}$$

formule où l'on a noté :

$$\beta_i = u_{i2}^2 \cos(2\omega_i t + 2\psi_{i2}) + v_{i2}^2 \cos(2\omega_i t + 2\chi_{i2})$$

$$\gamma_{ij} = u_{i2} u_{j2} \left\{ \cos[(\omega_i + \omega_j)t + \psi_{i2} + \psi_{j2}] + \cos[(\omega_i - \omega_j)t + \psi_{i2} - \psi_{j2}] \right\} + v_{i2} v_{j2} \left\{ \cos[(\omega_i + \omega_j)t + \chi_{i2} + \chi_{j2}] + \cos[(\omega_i - \omega_j)t + \chi_{i2} - \chi_{j2}] \right\}$$

Posons alors :

$$\begin{cases} 2R^2 = S^2 + F(t) \\ F(t) = (1-N) A_i^2 (u_{i2}^2 + v_{i2}^2) + A_i^2 \beta_i + A_i A_j \gamma_{ij} \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$(9) \quad R \sqrt{2} = S \sqrt{1 + F(t)/S^2}$$

avec $\left| F(t) / S^2 \right| < 1$ strictement. Le radical (9) est donc développable en série du binôme en $F(t)/S^2$, normalement convergente $\forall t, \forall A_j$ ($j = 2, 3 \dots N$), pourvu que les hypothèses (5), caractérisant l'onde dominante soient vérifiées. On trouve :

$$(10-a) \quad R \sqrt{2} = S + \frac{1}{2} \frac{F(t)}{S} + \dots + k_{0,m} \frac{F^m(t)}{S^{2m-1}} + \dots$$

où

$$(10-b) \quad k_{0,m} = (-1)^{m-1} 1.3.5 \dots (2m-3) 2^m m!$$

D'autre part, l'hypothèse de l'onde dominante, d'indice 1, se traduit par l'inégalité stricte ci-après :

$$A_1^2 (u_{11}^2 + v_{11}^2) > \sum_{j=2}^N A_j^2 (u_{j1}^2 + v_{j1}^2)$$

soit :

$$\alpha = \sum_{j=2}^N \frac{A_j^2 (u_{j1}^2 + v_{j1}^2)}{A_1^2 (u_{11}^2 + v_{11}^2)} < 1$$

or, avec la convention de l'indice muet, $j = 2, 3, \dots N$, on a :

$$S^2 = N A_1^2 (u_{11}^2 + v_{11}^2) \left[1 + \frac{A_j^2 (u_{j1}^2 + v_{j1}^2)}{A_1^2 (u_{11}^2 + v_{11}^2)} \right]$$

On en déduit que $1/S^{2m-1}$ est développable en série normalement convergente du binôme en α :

$$(11-a) \quad \frac{1}{S^{2m-1}} = \frac{1}{A_1^{2m-1} N^{\frac{2m-1}{2}} (u_{11}^2 + v_{11}^2)^{\frac{2m-1}{2}}} \left\{ 1 + \dots + k_{m,n} \frac{[A_j^2 (u_{j1}^2 + v_{j1}^2)]^n}{A_1^{2n} (u_{11}^2 + v_{11}^2)^n} + \dots \right\}$$

$$(11-b) \quad k_{m,n} = (-1)^n \frac{(2m-1)(2m+1) \dots (2m+2n-3)}{2^n n!}$$

On constate ainsi que R admet le développement de terme général :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_{0,m} k_{m,n}}{A_1^{2m+2n-1} N^{\frac{2m-1}{2}} (u_{11}^2 + v_{11}^2)^{\frac{2m+2n-1}{2}}} [A_j^2 (u_{j1}^2 + v_{j1}^2)]^n C_m^k [A_9^2 \beta_9]^{m-k} [A_9 A_l \gamma_{9l}]^k \\ \text{avec } q, l = 1, 2, \dots N \quad \text{et } j = 2, 3 \dots N \end{array} \right.$$

Le temps n'intervient dans ces expressions que par les facteurs β_9 et γ_{9l} . L'expression (12) est un polynôme des variables ci-après :

$\cos(\omega_i t + \psi_{i1}) ; \cos(\omega_i t + \chi_{i1}) ; \cos[(\omega_i \pm \omega_j)t + \psi_{i1} \pm \psi_{j1}] ; \cos[(\omega_i \pm \omega_j)t \pm \chi_{i1} \pm \chi_{j1}]$
qu'on peut aisément transformer en formes linéaires du type :

$$(13) \quad \frac{A_j^{2n} A_q^{2m-k} A_l^k}{A_1^{2m+2n-1}} f(a, b, c, d, \dots) f(j, q, l, \dots) (m, n, k, \dots) \times \cos \left[(a\omega_1 + b\omega_j + c\omega_q + d\omega_l + \dots)t + \Phi_{(j, q, l, \dots)}^{(a, b, c, d, \dots)}(m, n, k, \dots) \right]$$

où f et Φ sont des fonctions de leurs arguments : a_{i1} , φ_{i1} , u_{i1} , ψ_{i1} , v_{i1} , χ_{i1} , N , déterminés $\forall (x, y) \in D$ dès que l'approximation d'ordre 1, cf (2), aura été explicitée. Rappelons d'ailleurs que, cette approximation (2) n'étant que très approchée, il faut en fait prendre en compte dans la définition de R des approximations d'ordre supérieur. Mais, comme nous l'avons remarqué au début du paragraphe II-2/1, cette prise en compte des termes d'ordre supérieur n'introduit que des complications de calcul sans rien changer au raisonnement précédent, sous la réserve, toutefois, que l'hypothèse de l'onde dominante reste vérifiée.

Il nous reste maintenant, en vue des applications, à expliciter les développements ci-dessus, dont nous avons indiqué seulement la forme analytique générale.

Remarques : Les termes $(h + \mathfrak{S})^{-1}$ et R pouvant s'exprimer sous forme de développements de FOURIER généralisés, il en est de même, comme nous l'avons vu, des produits $c(h + \mathfrak{S})^{-1}Ru$ et $c(h + \mathfrak{S})^{-1}Rv$. Dans la mesure où le rapport \mathfrak{S}/h est petit devant 1 dans D , les composantes F_x et F_y prennent alors la forme :

$$(14) \quad \frac{C A_j^{2n} A_q^{2m-k+1} A_l^k}{h A_1^{2m+2n-1}} \left\{ \begin{array}{l} F_x^{(a', b', c', \dots)}_{(j, q, l, \dots)}(m, n, k, \dots) \\ F_y^{(a', b', c', \dots)}_{(j, q, l, \dots)}(m, n, k, \dots) \end{array} \right\} \times \cos \left[(a'\omega_1 + b'\omega_j + c'\omega_q + d'\omega_l + \dots)t + \left\{ \begin{array}{l} \Phi_x^{(a', b', c', \dots)}_{(j, q, l, \dots)}(m, n, k, \dots) \\ \Phi_y^{(a', b', c', \dots)}_{(j, q, l, \dots)}(m, n, k, \dots) \end{array} \right\} \right]$$

Ces termes, comme on le voit, contiennent en facteur, par ordre d'importance décroissante, les expressions :

$$A_1^2, A_1 A_j, A_j^2, A_j A_s, A_j^3/A_1, A_j^2 A_s/A_1, A_j^4/A_1^2, \dots$$

pour j et $s = 2, \dots, N$; $j \neq s$

Or, dans la Manche, par exemple, les ondes principales sont M_2 (l'onde dominante) S_2 , N_2 et K_2 - cf § I-3/3. En leur affectant respectivement les indices 1, 2, 3 et 4, on déduit des données d'observation les valeurs approchées ci-après :

$$\frac{A_2}{A_1} \approx 0,35 \quad ; \quad \frac{A_3}{A_1} \approx 0,19 \quad ; \quad \frac{A_4}{A_1} \approx 0,1$$

Le facteur $A_1 A_2$ ne vaut donc, en pourcentage de A_1^2 , que 35% ; A_2^2 , 12% ; $A_2 A_3$, 7% ; A_2^3/A_1 , 4% ; A_2^4/A_1^2 , 1% ; ... Les calculs numériques que nous présentons plus loin, poursuivis à partir de ces développements, pour le cas de la Manche, montrent par ailleurs que les fonctions FX et FY sont de même ordre pour $a' + b' + c' + \dots = n$ constant, c'est-à-dire pour un même groupe d'ondes (semi-diurnes, sixième-diurnes, ...) et qu'elles décroissent rapidement quand n croît. Ainsi les développements obtenus sont assez rapidement convergents par rapport à la suite des termes en $A_j^{2n} A_q^{2m+1-k} A_l^k / A_1^{2m+2n-1}$, pour qu'on puisse les limiter aux premiers termes : A_1^2 , $A_1 A_j$, A_j^2 , $A_j A_s$.

Résumons, avant de poursuivre, l'ensemble des résultats ci-dessus. Les uns sont à caractère analytique. Ils montrent que, moyennant la validité expérimentalement constatée de l'hypothèse de l'onde dominante, les termes de frottement admettent rigoureusement une représentation du type (14) sous réserve, bien entendu, de l'existence de développements du type (2) pour les composantes de la vitesse.

En second lieu, une discussion numérique des données in situ relative à la Manche conduit à adopter pour les termes en cause les expressions approchées :

$$\frac{C}{h} A_i A_j \left\{ \begin{array}{l} FX_{(i,j)}^{(a',b',c')} \\ FY_{(i,j)}^{(a',b',c')} \end{array} \right\} \cos \left[(a' \omega_1 + b' \omega_i + c' \omega_j) t + \left\{ \begin{array}{l} \Phi X_{(i,j)}^{(a',b',c')} \\ \Phi Y_{(i,j)}^{(a',b',c')} \end{array} \right\} \right]$$

que nous allons expliciter au paragraphe suivant. Elles se présentent comme des formes quadratiques homogènes du second degré par rapport aux A_i dont les coefficients sont des fonctions linéaires des cosinus des angles $\omega_1 t$, $\omega_i t$, $\omega_j t$

A l'ordre d'approximation adopté, le terme de frottement apparaît ainsi comme une fonction analytique et régulière de ses arguments, ce qui permet alors la mise en oeuvre d'une variante de la méthode des petits paramètres de POINCARÉ.

Une question se pose ici : notre méthode d'analyse des équations des marées littorales doit être limitée à l'ordre d'approximation retenu, qui néglige les termes non analytiques du type $A_j^n A_q^m A_l^k / A_1^q$. La suppression des termes négligés n'altère-t-elle pas la solution du problème que nous avons à résoudre ?

La réponse doit être prudente, tant qu'on n'aura pas justifié, au moyen de majorations, que les termes négligés sont effectivement petits par rapport aux termes

conservés, et que leur influence sur la solution reste petite. Dans l'état actuel des choses, seule l'expérience permettra un contrôle de la validité des raisonnements ci-dessus.

4 - ETUDE DU TERME $F_x = C Ru/h$

Nous allons expliciter le développement du terme $F_x \cdot \frac{h\sqrt{2}}{c} = \sqrt{2} Ru$

De (12), on déduit :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} Ru = A_i M_i \quad k_{0,m} k_{m,n} \quad [A_j^2 (u_{j1}^2 + v_{j1}^2)]^n C_m^k [A_q \beta_q]^{m-k} [A_q A_q \gamma_{qe}]^k \\ A_1^{2m+2n-1} N^{\frac{2m-1}{2}} (u_{11}^2 + v_{11}^2)^{\frac{2m+2n-1}{2}} \\ \text{avec } i, q, l = 1, 2, \dots, N \quad \text{et } j = 2, 3, \dots, N \end{array} \right.$$

Rappelons que nous nous limitons aux approximations d'ordres A_1^2 , $A_1 A_j$, A_j^2 et $A_j A_s$. Ces termes ont été réunis sur les tableaux 1 et 1 bis présentés en annexe II. Sur les tableaux 2 et 2 bis de cette même annexe, nous les avons regroupés différemment par rapport à ces différents ordres d'approximation.

Nous constatons que les différentes expressions obtenues se composent de produits du type :

$$M_1 \gamma_{1j} ; M_1 \gamma_{j1} ; M_1 \gamma_{1j}^2 ; M_1 \beta_j ; M_1 \gamma_{1j} \gamma_{11} ; M_j \gamma_{1j} -$$

- que nous transformons en sommes de fonctions sinusoïdales de fréquences multiples ou composées des fréquences des ondes génératrices définies en (2) - multipliés par une série, notée σ_a , σ_b , σ_c ou σ_d dans les tableaux annexes II-2 et II-2 bis. Or ces séries peuvent s'exprimer sous des formes plus simples :

$$* \quad \sigma_a = \sqrt{N(u_{11}^2 + v_{11}^2)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{0,m}}{N^m (u_{11}^2 + v_{11}^2)^m} \left[u_{11}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{11}) + v_{11}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_{11}) - (N-1) (u_{11}^2 + v_{11}^2)^m \right] \right\}$$

soit :

$$\sigma_a = \sqrt{u_{11}^2 + v_{11}^2} \left\{ 1 + \frac{u_{11}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{11}) + v_{11}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_{11})}{u_{11}^2 + v_{11}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Comme on a :

$$u_{11}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{11}) + v_{11}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_{11}) = \cos 2\omega_1 t (u_{11}^2 \cos 2\psi_{11} + v_{11}^2 \cos 2\chi_{11}) - \sin 2\omega_1 t (u_{11}^2 \sin 2\psi_{11} + v_{11}^2 \sin 2\chi_{11})$$

nous posons :

$$(16) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\theta = \frac{(u_{ii}^2 \sin 2\psi_{ii} + v_{ii}^2 \sin 2\chi_{ii})}{(u_{ii}^2 \cos 2\psi_{ii} + v_{ii}^2 \cos 2\chi_{ii})} \\ J_1^2 = \frac{(u_{ii}^2 \cos 2\psi_{ii} + v_{ii}^2 \cos 2\chi_{ii})^2 + (u_{ii}^2 \sin 2\psi_{ii} + v_{ii}^2 \sin 2\chi_{ii})^2}{(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)^2} \end{cases}$$

Observons que ces paramètres J_1 et θ caractérisent la rose de courant correspondant à l'onde dominante au point x, y considéré. Cette rose se réduit à une droite lorsque $J_1 = 1$, et à un cercle si $J_1 = 0$.

Il s'ensuit alors que :

$$\sigma_a = \sqrt{u_{ii}^2 + v_{ii}^2} \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

On a de même :

$$* \quad \sigma_b = \sqrt{N(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m k_{0,m}}{N^m (u_{ii}^2 + v_{ii}^2)^m} \left[u_{ii}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{ii}) + v_{ii}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_{ii}) - (N-1)(u_{ii}^2 + v_{ii}^2) \right]^{m-1} \right\}$$

$$\text{or} \quad 2m k_{0,m} = 2m \times (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)}{2^m m!} = k_{1,m-1}$$

$$\text{d'où :} \quad \sigma_b = \frac{1}{2\sqrt{u_{ii}^2 + v_{ii}^2}} \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$* \quad \sigma_c = \sqrt{N(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1) k_{0,m}}{2 N^m (u_{ii}^2 + v_{ii}^2)^m} \left[u_{ii}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{ii}) + v_{ii}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_{ii}) - (N-1)(u_{ii}^2 + v_{ii}^2) \right]^{m-2} \right\}$$

$$\text{or} \quad -4m(m-1) k_{0,m} = -4m(m-1) (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)}{2^m m!} = k_{2,m-2}$$

$$\text{d'où :} \quad \sigma_c = \frac{-1}{8(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)^{3/2}} \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$* \quad \sigma_d = \sqrt{N(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)} \left\{ \frac{1}{2(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{0,m} k_{m,1}}{N^m (u_{ii}^2 + v_{ii}^2)^{m+1}} \left[u_{ii}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{ii}) + v_{ii}^2 \dots \right]^m \right\}$$

$$\text{or} \quad 2 k_{0,m} k_{m,1} = 2 \cdot (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)}{2^m m!} (-1) \frac{2m-1}{2} = (1-2m) k_{0,m}$$

$$\text{d'où :} \quad \sigma_d = \frac{1}{2\sqrt{u_{ii}^2 + v_{ii}^2}} \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{-\frac{1}{2}} \times \frac{u_{ii}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{ii}) + v_{ii}^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_{ii}) - (N-1)(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)}{2(u_{ii}^2 + v_{ii}^2)^{3/2}}$$

$\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d$ sont donc des fonctions des quantités :

$$s_n = \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{1 - \frac{n}{2}} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3$$

Nous montrons en annexe II-3 que les développements de s_0, s_1 et s_2 en séries de FOURIER s'écrivent :

$$(17-a) \quad s_n = G_{n,0} + G_{n,2} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots + G_{n,2k} \cos[2k(\omega_1 t + \theta)] + \dots,$$

les coefficients $G_{p,q}$ étant de la forme :

$$(17-b) \quad G_{p,q} = \mathcal{F}_{p,q} [F(J), E(J)]$$

avec :

$$J = \left(\frac{2J_1}{1+J_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Les fonctions $E(J)$ et $F(J)$ de (17-b) sont les intégrales elliptiques de LEGENDRE de 1ère et 2ème espèce - cf [1] - et $\mathcal{F}_{p,q}(F,E)$ sont des fonctions de F et E que nous formulons en annexe II.

Nous obtenons ainsi des expressions de σ_a , σ_b , σ_c et σ_d sous forme de séries de FOURIER dont l'argument est l'angle $(2\omega_1 t + 2\theta)$. Reportant ces développements dans les tableaux II-2 et II-2 bis, nous formons des expressions nouvelles, mieux adaptées à la représentation spectrale que nous cherchons à établir, des termes en A_1^2 , $A_1 A_j$, A_j^2 et $A_j A_s$ (cf tableau 3 - Annexe II). A partir de celles-ci, il est facile d'exprimer le terme R_u sous la forme d'un développement en A_1^2 , $A_1 A_j$, A_j^2 et $A_j A_s$, dont les coefficients sont des sommes de fonctions sinusoidales du temps.

Des conclusions similaires s'appliquent évidemment à R_v .

5 - EXPRESSIONS DEFINITIVES DES COMPOSANTES F_x et F_y

5.1 - Forme définitive de ces expressions

La décomposition de F_x et F_y sous la forme de séries de FOURIER généralisées est ainsi de la forme :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{c}{h} A_i A_j F X_{ij}^{(n)} \cos [\Omega_{ij}^{(n)} t + \Phi X_{ij}^{(n)}] \\ F_y = \frac{c}{h} A_i A_j F Y_{ij}^{(n)} \cos [\Omega_{ij}^{(n)} t + \Phi Y_{ij}^{(n)}] \end{array} \right\} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

où l'on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{ij}^{(n)} = p_k(i,j,n) \omega_k \\ k = 1, 2, \dots, N \end{array} \right.$$

p_k : entier positif, négatif ou nul

$F\chi_{ij}^{(n)}, F\gamma_{ij}^{(n)}, \Phi\chi_{ij}^{(n)}, \Phi\gamma_{ij}^{(n)}$:
fonctions de $\Omega_{ij}^{(n)}, \zeta_{l,1}(x,y), \varphi_{l,1}(x,y), u_{l,1}(x,y), \psi_{l,1}(x,y),$
 $v_{l,1}(x,y), \chi_{l,1}(x,y)$, pour $l=1, i, j$ et de $G_{pq}(J)$ -

Pour l'ordre A_1^2 , par exemple, on trouve, en utilisant toujours la convention de l'indice muet ($n=0$, à ∞) :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x(A_1^2) = \frac{c}{h} \frac{A_1^2 u_{11}}{2\sqrt{2}} \sqrt{u_{11}^2 + v_{11}^2} \left\{ G_{0,2n} \cos[(2n+1)\omega_1 t + \psi_{11} + 2n\theta] \right. \\ \left. + G_{0,2n+2} \cos[(2n+1)\omega_1 t - \psi_{11} + (2n+2)\theta] \right\} \\ F_y(A_1^2) = \frac{c}{h} \frac{A_1^2 v_{11}}{2\sqrt{2}} \sqrt{u_{11}^2 + v_{11}^2} \left\{ G_{0,2n} \cos[(2n+1)\omega_1 t + \chi_{11} + 2n\theta] \right. \\ \left. + G_{0,2n+2} \cos[(2n+1)\omega_1 t - \chi_{11} + (2n+2)\theta] \right\} \end{array} \right.$$

Pour les autres approximations ($A_1 A_j, A_j^2, A_j A_s$) les termes correspondants de la décomposition sont de même type. Nous ne les donnons pas ici, pour ne pas alourdir le texte, mais l'ensemble de ces résultats est présenté en annexe II-5.

5.2 - Caractéristiques du spectre de cette décomposition

Les quantités $\Omega_{ij}^{(n)}$ s'écrivent d'une façon générale :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à l'ordre } A_1^2 : \quad (2n+1)\omega_1 \\ \text{à l'ordre } A_1 A_j : \quad 2n\omega_1 + \varepsilon\omega_j \\ \text{à l'ordre } A_j^2 : \quad (2n+1)\omega_1 + 2\varepsilon\delta\omega_j \\ \text{à l'ordre } A_j A_s : \quad (2n+1)\omega_1 + \varepsilon\omega_j + \varepsilon\omega_s \end{array} \right\} \text{ avec } \begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ ou } -1 \\ \delta = 0 \text{ ou } 1 \\ n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{array}$$

On voit que toutes les pulsations $\Omega_{ij}^{(n)}$ figurant dans l'expression du frottement sont impaires en ω_1 et ω_j . Sauf exception, ces fréquences n'apparaissent pas dans le développement du potentiel générateur des marées. Mais l'algorithme des approximations successives, décrit en II-1/4-3, montre que les ondes d'ordre 2, sont définies par des systèmes d'équations aux dérivées partielles non homogènes dont les seconds membres proviennent en particulier des termes de frottement. Ainsi apparaissent des oscillations forcées de même fréquence que celles qui composent le spectre de la force de frottement, ci-dessus défini. Et les observations in situ montrent effectivement l'existence de ces ondes de pulsation impaire en ω_1 et ω_j . Notre théorie, développée jusqu'ici qualitativement, décrit donc le mécanisme de la génération "sur place" de ces composantes de la marée littorale. A notre connaissance, c'est la première interprétation théorique précise de ce fait ; si l'on attribuait généralement

l'apparition de l'harmonique $3\omega_1$ à l'influence du frottement, aucun raisonnement n'était venu jusqu'ici confirmer cette hypothèse. On voit que notre théorie en apporte la justification, et va même plus loin, puisqu'elle permet d'expliquer la présence de toutes les fréquences du type (20) dans le spectre des marées.

Rappelons les noms de code, bien connus des spécialistes, correspondant aux ondes engendrées par l'effet du frottement. Nous nous bornons à ne citer que les ondes d'interaction dues aux quatre composantes principales de la marée que l'on rencontre dans la plupart de nos mers littorales, à savoir : M_2, S_2, N_2, K_2 - (cf § I-III-3).

a - A l'ordre A_1^2 :

Les pulsations qui apparaissent à cet ordre du fait du frottement sont de la forme :

$$\Omega_{A_1}^{(m)} = (2m+1) \omega_1$$

En développant cette formule, on voit que les ondes correspondantes ont les fréquences ci-après

$$\omega_1 : M_2 \quad ; \quad 3\omega_1 : M_6 \quad ; \quad 5\omega_1 : M_{10} \quad ; \quad 7\omega_1 : M_{14} \quad \dots$$

Les termes en A_1^2 représentent donc la contribution principale du frottement à l'onde dominante et à ses harmoniques, à l'exclusion de toutes les autres composantes. Ainsi on constate l'amortissement de l'onde dominante (M_2), et la génération de tous les harmoniques directs impairs de celle-ci ($M_6, M_{10}, M_{14} \dots$)

b - A l'ordre $A_1 A_j$

Les pulsations à considérer sont de la forme :

$$\Omega_{A_j}^{(m)} = 2m \omega_1 + \epsilon \omega_j$$

Les ondes correspondantes sont du type :

$$\begin{aligned} \omega_j &: S_2, N_2, K_2, \dots \\ 2\omega_1 - \omega_j &: 2MS_2, 2MN_2, 2MK_2, \dots; \quad 2\omega_1 + \omega_j : 2MS_6, 2MN_6, 2MK_6, \dots \\ 4\omega_1 - \omega_j &: 4MS_6, 4MN_6, 4MK_6, \dots; \quad 4\omega_1 + \omega_j : 4MS_{10}, 4MN_{10}, \dots; \dots \end{aligned}$$

* Les termes en $A_1 A_j$ traduisent l'influence de la composante dominante sur l'amortissement des ondes de pulsation ω_j : celles-ci sont nettement plus

amorties en présence de l'onde dominante que si elles se propageaient seules.

* Le frottement engendre, par ailleurs, tout un ensemble d'ondes non linéaires dont certaines sont très importantes, $2MS_2$, $2MN_2$, $2MS_6$, $2SM_6$ par exemple.

c - A l'ordre A_j^2

Les pulsations qui apparaissent à cet ordre sont du type :

$$\Omega_{jj}^{(n)} = (2n+1) \omega_1 + 2 \varepsilon \delta \omega_j$$

Elles correspondent aux ondes :

$$\omega_1 : M_2 \quad ; \quad 3\omega_1 : M_6 \quad ; \quad 5\omega_1 : M_{10} \quad ; \quad \dots$$

$$2\omega_j - \omega_1 : 2SM_2, 2NM_2, \dots \quad ; \quad 2\omega_j + \omega_1 : 2SM_6, 2NM_6, \dots$$

$$3\omega_1 - 2\omega_j : 3M2S_2, 3M2N_2, \dots \quad ; \quad 3\omega_1 + 2\omega_j : 3M2S_{10}, \dots \quad ; \quad \dots$$

* Les termes en A_j^2 traduisent l'effet amortisseur des ondes de fréquence ω_j sur l'onde dominante M_2 et leur contribution aux harmoniques directs de M_2 .

* Ils font apparaitre, par ailleurs, d'autres ondes d'interaction dont certaines sont encore non négligeables, telles $2SM_2$.

d - A l'ordre $A_j A_s$

Les pulsations à considérer à cet ordre sont :

$$\Omega_{js}^{(n)} = (2n+1) \omega_1 + \varepsilon \omega_j + \varepsilon \omega_s$$

Elles correspondent aux ondes :

$$\omega_1 + \omega_j - \omega_s : MSN_2, MNS_2, MSK_2, MKS_2, \dots$$

$$\omega_1 + \omega_j + \omega_s : MSN_6, MSK_6, MNS_6, \dots$$

$$3\omega_1 - \omega_j - \omega_s : 3MSN_2, \dots$$

$$3\omega_1 + \omega_j - \omega_s : 3MSN_6, \dots$$

* A cet ordre d'approximation, nous rencontrons les interactions triples. Les principales correspondent aux ondes M_2 , S_2 et N_2 , ou M_2 , S_2 et K_2 , ...

notons ainsi l'apparition des composantes : $MSN_2, MSN_6 \dots$

Remarquons qu'à l'ordre d'approximation adopté, nos développements ne font pas apparaître les harmoniques impaires des ondes secondaires comme $S_6, N_6, \dots, S_{10}, N_{10} \dots$. Une analyse plus complète exigerait la prise en compte d'ordres plus élevés d'approximation pour en interpréter la génération. Une évaluation grossière des termes négligés dans nos développements permet de penser a priori que l'amplitude de ces oscillations doit être faible. C'est effectivement ce que l'on constate en consultant les résultats d'observations in situ (cf § I-3/3).

5.3 - Importance relative des différentes composantes de ce spectre

Au paragraphe précédent, nous avons constaté que les pulsations qui apparaissent du fait du frottement dans les marées se répartissent en sous-ensembles, correspondant aux différents ordres d'approximation considérés, $A_1^2, A_1 A_j \dots$. De plus, les éléments de chacun de ces sous-ensembles peuvent être classés en groupes caractérisés chacun par un jeu donné de nombres $n, \mathfrak{S}, \mathfrak{E}$. Ces groupes constituent un ensemble infini ; mais beaucoup d'ondes de ce spectre sont pratiquement négligeables. Nous nous proposons ci-après d'étudier l'importance relative des différentes composantes (adiimensionnelles) de ce spectre : $FX_{ij}^{(n)}$ et $FY_{ij}^{(n)}$ ainsi que les valeurs de leurs phases respectives $\phi X_{ij}^{(n)}$ et $\phi Y_{ij}^{(n)}$ - cf (18) et annexe II-5.

Plaçons-nous en un point quelconque M , du domaine littoral étudié, et écrivons les composantes de la vitesse en ce point, sous la forme (12) :

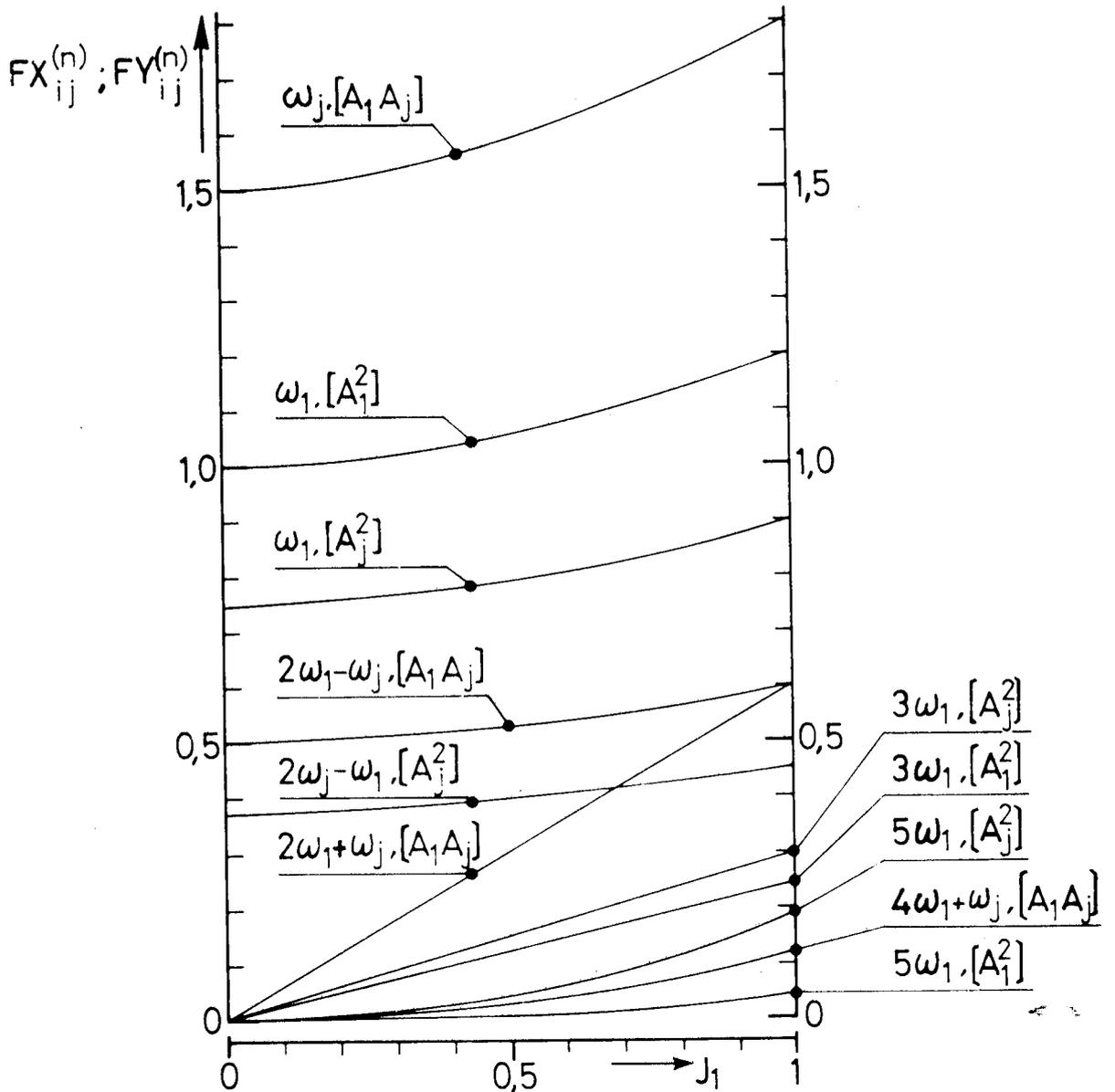
$$\begin{cases} u = A_i u_{i1}(M) \cos [\omega_i t + \psi_{i1}(M)] \\ v = A_i v_{i1}(M) \cos [\omega_i t + \chi_{i1}(M)] \end{cases}$$

Pour simplifier l'étude des coefficients $FX, FY, \phi X$ et ϕY , nous nous limitons comme précédemment, à ne tenir compte, à titre d'ondes génératrices, que des quatre principales semi-diurnes (M_2, S_2, N_2 et K_2). Ces composantes ont sensiblement la même fréquence ; nous montrons plus loin, dans la quatrième partie, que leurs réseaux caractéristiques sont en conséquence voisins et qu'on peut les déduire les uns des autres par une simple affinité sur les amplitudes, et un décalage sur les phases, constant sur tout le domaine :

$$\begin{aligned} A_j u_{j1} &= k_j A_1 u_{11} & \psi_{j1} &= \psi_{11} + \omega_j t_j \\ A_j v_{j1} &= k_j A_1 v_{11} & \chi_{j1} &= \chi_{11} + \omega_j t_j \end{aligned}$$

où les t_j sont des constantes indépendantes de x, y .

DECOMPOSITION SPECTRALE DE LA FORCE DE FROTTEMENT



$$F_X = \frac{C}{h} A_i A_j F_{ij}^{(n)} \cos(\Omega_{ij}^{(n)} t + \Phi X_{ij}^{(n)}) \quad \text{et} \quad F_Y = \frac{C}{h} A_i A_j F_{ij}^{(n)} \cos(\Omega_{ij}^{(n)} t + \Phi Y_{ij}^{(n)})$$

avec : $\Omega_{ij}^{(n)} = p_k(i, j, n) \omega_k$; $k = 1, 2, \dots, N$

$$\text{valeurs de } F_{ij}^{(n)} \text{ et } \Phi_{ij}^{(n)} \text{ pour } \left\{ \begin{array}{l} u_{i1} = v_{i1} = 1; \psi_{i1} = 0; \chi_{i1} = f(J_1) \\ \psi_{j1} = \omega_j t_j; \chi_{j1} = \chi_{i1} + \omega_j t_j \end{array} \right.$$

FIG. II.2/3

Une simple modification de l'orientation des axes Ox et Oy permet d'obtenir au point M considéré :

$$u_{11} = v_{11}$$

Bien entendu, l'angle de rotation du repère est variable avec le point considéré. Pour simplifier encore, choisissons une nouvelle valeur des paramètres A_j (qui ne sont définis qu'à un facteur multiplicatif près), telle que :

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{j1} = 1 \end{cases} \Rightarrow u_{11} = v_{11} = u_{j1} = v_{j1} = 1$$

Un choix convenable de l'origine des temps permet par ailleurs de poser :

$$\psi_{11} = 0 \Rightarrow \psi_{j1} = \omega_j t_j$$

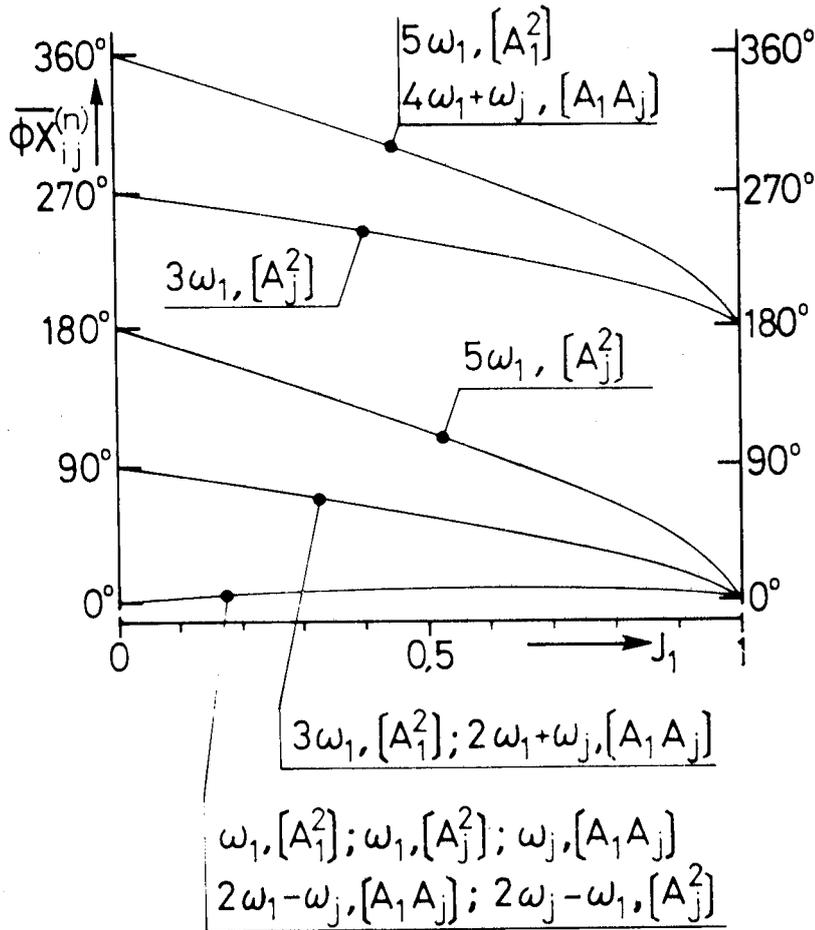
Nous constatons ainsi qu'en chaque point, la représentation de la rose de courant d'une composante élémentaire, j , est une ellipse dépendant d'un seul paramètre, χ_{j1} , donc χ_{11} . Il est, par ailleurs, aisé de constater que l'étude de la variation des coefficients F_X , F_Y , ϕ_X et ϕ_Y en fonction de $\chi_{11} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ suffit à la définition complète de la rose de frottement : on passe en effet de l'intervalle $[-\pi, 0]$ à $[0, \pi]$ par changement de sens de rotation sur l'ellipse de courant et l'ellipse de frottement, et on déduit l'intervalle $\chi_{11} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par symétrie par rapport à Oy et changement de sens de rotation sur les ellipses de courant et de frottement. Nous avons donc étudié ces fonctions F_X , F_Y , ϕ_X , ϕ_Y , pour les différentes pulsations du spectre obtenu précédemment, en fonction du paramètre $\chi_{11} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ou, ce qui revient au même, de J_1 , qui caractérise la forme de la rose de courant de l'onde dominante (celle-ci correspondant, rappelons-le, à une droite lorsque $J_1 = 1$, et à un cercle pour $J_1 = 0$).

Les résultats de l'étude numérique de ces coefficients $F\chi_{ij}^{(n)} = F\chi_{ij}^{(n)}$, $\phi\chi_{ij}^{(n)}$ et $\phi Y_{ij}^{(n)} = P_{\phi}(i, j, n)(\chi_{11} + \omega_j t_j) - \phi\chi_{ij}^{(n)}$, en fonction de J_1 , sont présentés sur les graphiques des figures II-2/3 et II-2/4. Ils appellent quelques commentaires.

* A chaque ordre d'approximation, A_1^2 , $A_1 A_j$, A_j^2 , les fonctions $F\chi_{ij}^{(n)}$ et $FY_{ij}^{(n)}$ décroissent rapidement quand n croît :

$$\begin{aligned} \text{à l'ordre } A_1^2 : & \quad F\chi_{11}^{(0)}(\omega_1) \in [1 ; 1.2] \\ & \quad F\chi_{11}^{(1)}(3\omega_1) \in [0 ; 0.24] \\ & \quad F\chi_{11}^{(2)}(5\omega_1) \in [0 ; 0.0343] \\ & \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

DECOMPOSITION SPECTRALE DE LA FORCE DE FROTTEMENT



$$F_X = \frac{C}{h} A_i A_j F X_{ij}^{(n)} \cos(\Omega_{ij}^{(n)} t + \overline{\phi X_{ij}^{(n)}}) \quad \text{et} \quad F_Y = \frac{C}{h} A_i A_j F Y_{ij}^{(n)} \cos(\Omega_{ij}^{(n)} t + \overline{\phi Y_{ij}^{(n)}})$$

avec : $\Omega_{ij}^{(n)} = p_k(i, j, n) \omega_k$; $k = 1, 2, \dots, N$

valeurs de $\left\{ \begin{array}{l} \overline{\phi X_{ij}^{(n)}} = \overline{\phi X_{ij}^{(n)}} + p_k(i, j, n) \omega_j t_j \\ \overline{\phi Y_{ij}^{(n)}} = p_k(i, j, n) (\chi_{11} + \omega_j t_j) - \overline{\phi X_{ij}^{(n)}} \end{array} \right.$

pour $\left\{ \begin{array}{l} u_{i1} = v_{i1} = 1 \\ \psi_{11} = 0 \text{ et } \chi_{11} = f(J_1) \\ \psi_{j1} = \omega_j t_j \\ \chi_{j1} = \chi_{11} + \omega_j t_j \end{array} \right.$

FIG. II.2/4

$$\begin{aligned}
\text{à l'ordre } A_1 A_j : \quad & FX_{1j}^{(0)} (\omega_j) \in [1.5 ; 1.8] \\
& FX_{1j}^{(1)} (2\omega_1 - \omega_j) \in [0.5 ; 0.6] \\
& FX_{1j}^{(1)} (2\omega_1 + \omega_j) \in [0 ; 0.6] \\
& FX_{1j}^{(2)} (4\omega_1 - \omega_j) \in [0 ; 0.12] \\
\text{à l'ordre } A_j^2 : \quad & FX_{jj}^{(0)} (\omega_1) \in [0.75 ; 0.9] \\
& FX_{jj}^{(0)} (2\omega_j - \omega_1) \in [0.375 ; 0.450] \\
& FX_{jj}^{(1)} (3\omega_1) \in [0 ; 0.3] \\
& FX_{jj}^{(2)} (5\omega_1) \in [0 ; 0.18] \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Les tableaux de nombres ci-dessus incitent à penser que l'amplitude des ondes correspondantes diminue avec $1/n$. Ce fait est en accord avec les observations in situ, quant à l'importance relative des ondes $M_6, M_{10}, M_{14}, \dots$ ou $2MS_2, 2SM_2, 3M2S_2 \dots$. Il semble donc raisonnable de limiter (18) aux premiers harmoniques.

* Pour n, δ et ε fixés, ces fonctions varient peu avec i et j :

$$\begin{aligned}
FX_{11}^{(0)} (\omega_1) &\in [1.0 ; 1.2] \\
FX_{1j}^{(0)} (\omega_j) &\in [1.5 ; 1.8] \quad ; \quad FX_{1j}^{(1)} (2\omega_1 - \omega_j) \in [0.5 ; 0.6] \\
FX_{jj}^{(0)} (\omega_1) &\in [0.75 ; 0.9] \quad ; \quad FX_{jj}^{(0)} (2\omega_j - \omega_1) \in [0.375 ; 0.450]
\end{aligned}$$

C'est un argument de plus en faveur de notre approximation qui consiste à se limiter dans les développements (18) aux premiers ordres d'approximation $A_1^2, A_1 A_j, A_j^2$ et $A_j A_s$.

* Les effets du frottement sont maxima lorsque $J_1 = 1$, c'est-à-dire lorsque la rose de courant de l'onde dominante se réduit à un segment de droite.

* Quand la rose de courant de l'onde dominante est circulaire, les fonctions FX et FY sont nulles pour toutes les fréquences autres que celles voisines de l'onde dominante : il y a en ces points amortissement des ondes génératrices (M_2, S_2, \dots), génération d'ondes non linéaires de fréquences voisines de celles-ci ($2MS_2, 2SM_2, \dots$) mais aucune contribution aux ondes harmoniques ou d'interaction d'ordre supérieur comme $M_6, M_{10}, 2MS_6, \dots$

* Le graphique des phases, ϕX et ϕY , figure II-2/4, nous indique que les termes d'ordres A_1^2 et A_j^2 , relatifs à la fréquence de l'onde dominante (ω_1), ont la

même phase. Les effets d'amortissement correspondants s'ajoutent donc : comme nous l'avons déjà noté, l'onde dominante est plus amortie lorsqu'elle se propage en présence d'ondes secondaires que si elle était seule, puisque, aux termes d'ordre A_1^2 , viennent s'ajouter des termes d'ordre A_j^2 .

* En revanche, pour les harmoniques d'ordre supérieur, M_6 , M_{10} , les termes d'ordre A_j^2 sont déphasés de 180° par rapport aux termes d'ordre A_1^2 : les harmoniques M_6 , M_{10} , ... présentent une amplitude plus faible du fait de la présence des ondes secondaires, que s'ils étaient créés par la propagation de l'onde dominante seule.

Cet ensemble de remarques nous permet déjà de mieux comprendre certains aspects des mécanismes de génération sur place des composantes non linéaires de la marée littorale dues au frottement : l'amortissement des ondes d'origine astronomique, et les transferts d'énergie vers les harmoniques d'ordre supérieur. Nous reviendrons sur ces conclusions au chapitre suivant.

5.4 - Application numérique

Nous terminerons ce chapitre par une application numérique des résultats précédents à la détermination du spectre de la force de frottement s'exerçant en un point particulier d'un domaine littoral.

Nous avons choisi un point situé dans la Manche pour lequel nous disposons de données d'observations qui semblent sûres, et où la rose de courant présente une allure assez régulière pour pouvoir être schématisée par la simple superposition de deux composantes (M_2 et S_2) entre les vives et mortes eaux moyennes. Ce point d'observation est situé à peu près à égale distance des Iles d'Aurigny, Guernesey et Jersey, et de la côte du Cotentin - cf figure II-2/5-a. Des mesures de vitesse ont été réalisées en ce point par les services d'"ELECTRICITE DE FRANCE" - cf [12] - et nous connaissons ainsi pour ce voisinage l'allure de la rose de courant pour les coefficients 45, 70 et 95 - cf figure II-2/5-b. Les composantes u et v du vecteur vitesse suivant les directions Ouest-Est et Nord-Sud varient en fonction du temps suivant des lois quasi sinusoïdales, tant au coefficient 70 que 95 - cf figure II-2/5-c. En assimilant la marée de coefficient 70 à l'onde M_2 , ce qui est loin d'être justifié, mais peut être considéré comme une première approximation de la réalité, nous schématisons la rose de courant correspondante par l'ellipse définie par les équations paramétriques.

$$\begin{cases} u = 0,5 \cos \left(\omega_{M_2} t - \frac{\pi}{6} \right) \\ v = 0,8 \cos \left(\omega_{M_2} t + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad - \text{ cf figure II-2/5-d}$$

L'origine des temps étant choisie à la pleine mer au point d'observation. Pour représenter la marée de coefficient 95, nous l'assimilons à la superposition des composantes M_2 et S_2 , prises en phase, et nous définissons la rose de courant sous la forme :

$$(21) \quad \begin{cases} u = 0,5 \cos \left(\omega_{M_2} t - \frac{\pi}{6} \right) + 0,19 \cos \left(\omega_{S_2} t - \frac{\pi}{6} \right) \\ v = 0,8 \cos \left(\omega_{M_2} t + \frac{\pi}{4} \right) + 0,5 \cos \left(\omega_{S_2} t + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad - \text{ cf figure II-2/5-d}$$

Répetons que ces formules (21) n'ont pas la prétention de représenter correctement la rose de courant réelle. Elles n'en constituent qu'une schématisation dont nous nous contenterons au cours de l'application numérique qui suit. Comportant la superposition d'une onde secondaire (S_2) à l'onde dominante (M_2), cette schématisation suffit pour notre objet.

Ecrivons d'ailleurs les formules (21) sous la forme classique (2) :

$$(22) \quad \begin{cases} u = A_1 u_{11} \cos (\omega_1 t + \psi_{11}) + A_2 u_{21} \cos (\omega_2 t + \psi_{21}) \\ v = A_1 v_{11} \cos (\omega_1 t + \chi_{11}) + A_2 v_{21} \cos (\omega_2 t + \chi_{21}) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 0,5 & u_{11} = u_{21} = 1 & \psi_{11} = \psi_{21} = 0 \\ A_{21} = 0,19 & v_{11} = v_{21} = 1,6 & \chi_{11} = \chi_{21} = 70^\circ \end{array}$$

Utilisant les formules de l'annexe II-5, nous avons effectué le calcul des fonctions F_X , F_Y , ϕ_X et ϕ_Y pour les principales composantes significatives du spectre définissant la force de frottement $\vec{F}(F_X, F_Y)$, telles que nous les avons définies en (18). Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau II-2/1.

Par ailleurs, à partir de la formule empirique (21) et de l'expression (1), il est possible de calculer les valeurs approchées des composantes F_X et F_Y du frottement, en fonction du temps. Nous avons fait l'analyse spectrale des courbes ainsi obtenues afin de comparer le spectre correspondant à celui que nous avons défini précédemment à partir de nos résultats analytiques. Nous utilisons pour cette analyse spectrale une méthode de calcul très précise décrite dans la troisième partie du présent mémoire. Les résultats de ces calculs sont consignés dans le tableau II-2/2 ci-après.

		Module	Phase	Module	Phase	Module	Phase	Module	Phase
		w_1		$3w_1$		$5w_1$			
A_1^2	Comp. en x	0,3065	352,5	0,0478	243,1	0,00357	306,1		
	Comp. en y	0,5934	292,4	0,0688	168,2	0,00457	226,1		
		w_2		$2w_1 - w_2$		$2w_1 + w_2$		$4w_1 + w_2$	
A_1A_2	Comp. en x	0,1765	352,5	0,0588	352,5	0,0479	243,1	0,00459	306,0
	Comp. en y	0,3447	292,4	0,1139	292,4	0,0615	168,2	0,00659	226,2
		w_1		$3w_1$		$5w_1$		$2w_2 - w_1$	
A_2^2	Comp. en x	0,0339	352,5	0,0088	63,1	0,00275	126,0	0,0169	352,6
	Comp. en y	0,0656	292,4	0,0126	348,2	0,00353	46,2	0,0328	292,4

Tableau II-2/1 Composantes du spectre ($\frac{h}{c} F_x, \frac{h}{c} F_y$) aux différents ordres d'approximation.
- Calcul analytique -

		Module	Phase	Module	Phase	Module	Phase	Module	Phase
		w_1		w_2		$2w_1 - w_2$		$2w_1 + w_2$	
Comp. en x		0,3399	352,6	0,1795	352,6	0,0556	352,6	0,0432	243,1
Comp. en y		0,6574	292,4	0,3473	292,4	0,1070	292,4	0,0622	168,2
		$3w_1$		$2w_2 - w_1$		$2w_2 + w_1$		$4w_1 - w_2$	
Comp. en x		0,0397	243,1	0,0167	352,6	0,0130	243,1	0,0068	63,1
Comp. en y		0,0570	168,1	0,0323	292,4	0,0187	168,2	0,0098	348,2
		$3w_1 - 2w_2$		$4w_1 + w_2$		$3w_1 + 2w_2$		$5w_1$	
Comp. en x		0,005	172,6	0,00356	306,0	0,002	226,2	0,00139	306,0
Comp. en y		0,0097	112,4	0,00458	226,2	0,0026	306,1	0,00178	226,2

Tableau II-2/2 Composantes du spectre ($\frac{h}{c} F_x, \frac{h}{c} F_y$)
- Calcul numérique -

On obtient un spectre de raies relativement simple : nous donnons ici l'amplitude de 12 composantes qui nous semblent significatives, mais la plus petite retenue ne fait plus que 4 ‰ de la composante la plus grande, elle est donc déjà insignifiante.

Comparons ces résultats numériques aux valeurs déduites des formules analytiques, présentées dans le tableau II-2/1. Considérons successivement les amplitudes des différentes fréquences obtenues :

* ω_1 : l'écart entre la valeur calculée analytiquement et celle que nous avons obtenue par analyse spectrale est de 10%, si l'on ne tient compte que de l'approximation d'ordre A_1^2 . Mais si nous prenons en compte la contribution d'ordre A_2^2 (leurs phases étant égales), cet écart se réduit à 0,15%.

* ω_2 : l'écart n'est ici que de 2 %.

* $2\omega_1 - \omega_2$: l'écart atteint 5%

* $2\omega_1 + \omega_2$: l'écart atteint 5%

* $3\omega_1$: en considérant l'ordre A_1^2 , nous avons un écart de 18%, mais en retranchant à la contribution d'ordre A_1^2 celle d'ordre A_2^2 (elles sont en opposition de phase), nous réduisons cet écart à 1,5%.

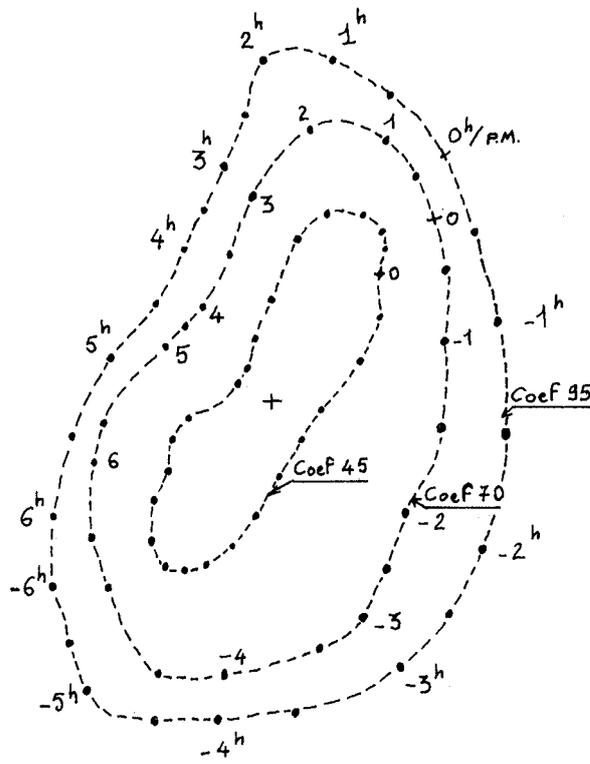
* $2\omega_2 - \omega_1$: l'écart est de 1,3 %

* Nous n'avons pas évalué les valeurs données par les expressions analytiques pour les pulsations : $2\omega_2 + \omega_1$, $3\omega_1 - 2\omega_2$, $3\omega_1 + 2\omega_2$, à cause de la difficulté des calculs correspondants. Notons que l'analyse spectrale donne pour ces composantes des amplitudes qui ne valent plus que 4%, 2% et 1,5% de l'amplitude des composantes principales (de pulsation ω_1).

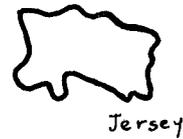
* En revanche, nous avons calculé la composante correspondant à la pulsation $5\omega_1$. En ne considérant que l'ordre A_1^2 nous trouvons 60% d'écart avec les valeurs données par l'analyse spectrale. Mais la prise en compte de l'ordre A_2^2 réduit cet écart à 25%. A priori, ce pourcentage est encore notable. Mais il faut remarquer que l'intensité de cette composante ne vaut plus que 0,6% de la composante principale : il s'agit donc d'un effet secondaire.

* Nous retrouvons ce même écart de 25% pour la composante de pulsation $4\omega_1 + \omega_2$. Mais l'amplitude correspondante ne vaut plus que 0,4% de la composante principale. A ce niveau, la contribution de ces termes est négligeables. Les écarts, encore notables, entre les valeurs numériques et les valeurs déduites des calculs analytiques sont donc de peu d'importance.

Ainsi, l'application numérique précédente permet d'apprécier la qualité des expressions (18) que nous proposons pour représenter les composantes F_x et F_y du frottement. Elle permet en particulier de se rendre compte de l'influence non négligeable des termes d'ordre A_j^2 dans la définition des composantes du frottement correspondant aux pulsations $\omega_1, 3\omega_1, 5\omega_1 \dots$. Elle illustre, par ailleurs, de façon très nette la rapidité de la convergence de ces développements (18).

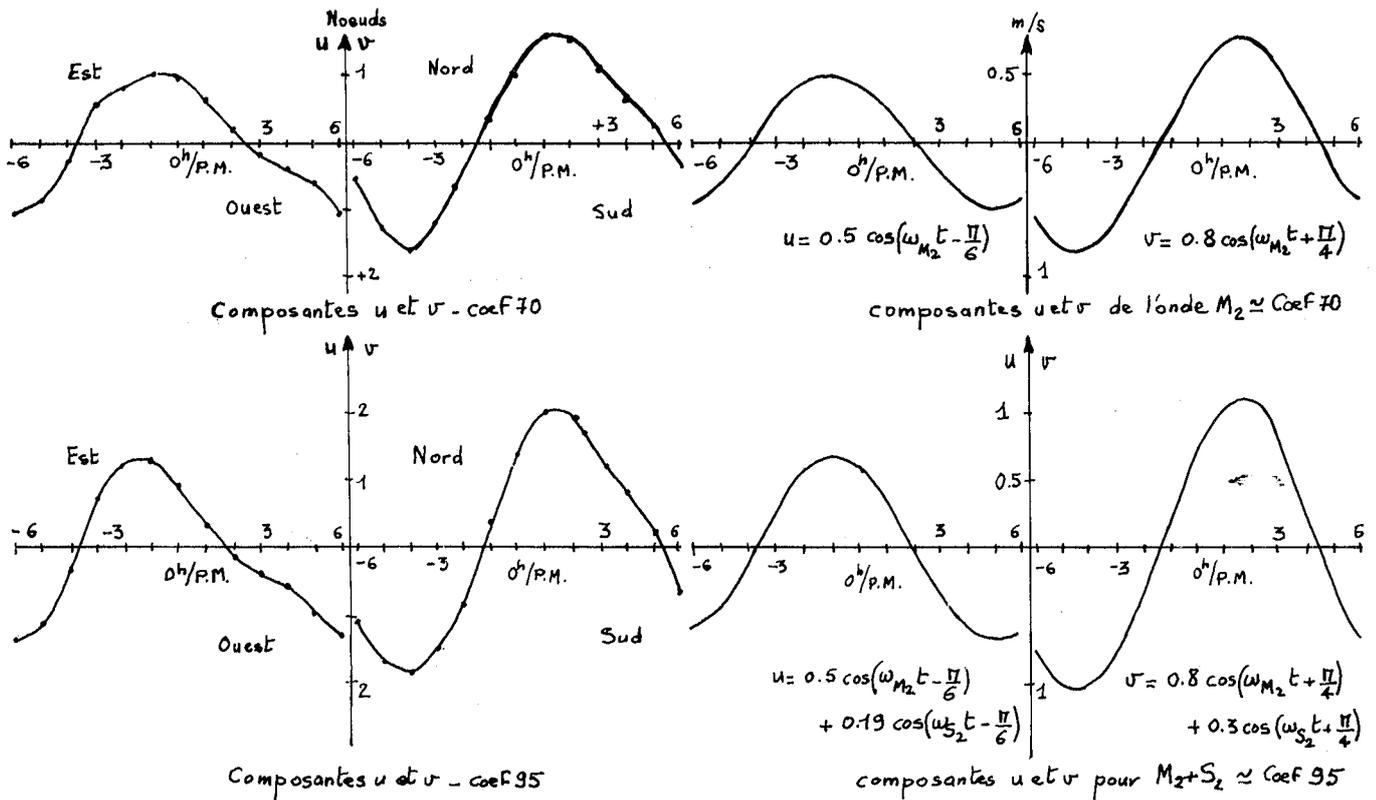


(b) roses relevées in situ - (E.d.F.)



Point d'observation

(a) localisation géographique du point d'observation



(c) Roses de courants in situ

(d) roses de courant approchées

FIG.II.2/5 : Schématisation d'une rose de courant observée in situ

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P.F. BYRD et M.D. FRIEDMAN
"Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists"
- [2] J.J. DRONKERS - 1947
"Methoden van getijberekening" (Methods of Tidal computations)
De Ingenieur (The Hague)
- [3] J.J. DRONKERS - 1961
"The linearization of the quadratic resistance term in the equations of motion for a pure harmonic tide in a sea"
NATO - Symposium Inst. Für Meeresk. Univers. Hamburg
- [4] H. HOLSTERS - 1959
"Calcul d'une marée sinusoidale simple se propageant dans deux dimensions"
Ann. des Travaux Publics Belges - Brussels.
- [5] C. LE PROVOST - 1973
"Décomposition spectrale du terme quadratique de frottement dans les équations des marées littorales - Méthode d'analyse"
C.R. Acad. Sciences - Paris - t.276 - série A - pp.571-574
- [6] C. LE PROVOST - 1973
"Décomposition spectrale du terme quadratique de frottement dans les équations des marées littorales - Résultats"
C.R. Acad. Sciences - Paris - t 276 - série A pp.653-656
- [7] H.A. LORENTZ - 1926
"Verslag Staatscommissie Zuiderzee 1918-1926"
Report of the government Zuiderzee Commission
Ag. Landsdrukkerij - The Hague
- [8] J.P. MAZURE - 1937
"De berekening van getijden en stormvloeden op benedenrivieren"
(The computation of the tides and storm surges on maritime rivers)
Thesis - Delf.

- [9] J.C. SCHONFELD - 1951
"Propagation of tides and similar waves"
Thesis - Staatsdrukkerij - The Hague
- [10] J.C. SCHONFELD - 1956
"Harmonic analysis of quadratic friction in two dimensionnal tidal
flow"
Report - Rijkswaterstaat - The Hague
- [11] H.J. STROBAND - 1947
"Een bijdragr tot de kennis von de getijberekening op benedenrivieren
en zeearmen"
(Contribution to tidal hydraulics of estuaries)
De Ingenieur - The Hague
- [12] Rapport E.D.F. - 1961
"Les conditions naturelles du golfe de St-Malo. Les courants de
marées"
Rapport N°3 - 1er Aout 61 - Laboratoire National d'Hydraulique

CHAPITRE II-3APPLICATION DE LA METHODE DU PETIT PARAMETREA LA RESOLUTION DU PROBLEME DES MAREES LITTORALESAU SECOND ORDRE D'APPROXIMATION

Rappelons les conclusions des chapitres antérieurs. Nous admettons que par un procédé quelconque, numérique ou non, les composantes linéaires fondamentales correspondant au spectre du potentiel générateur ont été préalablement déterminées. Les termes représentatifs du frottement dans les équations des marées littorales peuvent se représenter sous la forme de polynômes en A_j dont les coefficients sont des sommes de fonctions circulaires. La méthode par approximations successives proposée en II-1/4-3 devient ainsi applicable pour traiter le problème des marées littorales.

L'algorithme utilisé est fondé sur l'extension aux équations des marées de la méthode des petits paramètres de POINCARÉ - cf [6]. Il consiste à rechercher une solution supposée a priori développable en séries par rapport à un ensemble de petits paramètres caractérisant les diverses ondes génératrices des marées induites aux limites marines du domaine D étudié par les effets du potentiel générateur sur les masses d'eau océaniques. A chaque approximation, les fonctions correspondantes sont par ailleurs considérées comme des sommes de fonctions circulaires dont les coefficients et les phases ne dépendent que des coordonnées x, y des points d'observation. Cette hypothèse est en bon accord avec les données in situ, issues des analyses spectrales des courbes de marées enregistrées le long des côtes : ce sont des spectres de raies, dont les fréquences sont bien définies à partir des fréquences du potentiel générateur des marées (cf I-3/3).

Dans ce chapitre, nous allons étudier les systèmes d'équations aux dérivées partielles que vérifient les premiers ordres d'approximations de ces développements, pour les fréquences les plus significatives de la marée réelle. La discussion nous

permettra de préciser les mécanismes d'amortissement des ondes d'origine astronomique, et de génération des ondes d'origine non linéaire. Nous pourrions indiquer ainsi l'origine des principales ondes non linéaires de la marée apparaissant dans des domaines littoraux comme la Manche. Chemin faisant, nous poserons les principes de plusieurs méthodes pratiques destinées à l'étude précise, sur modèle mathématique ou sur modèle physique, du problème des marées littorales.

1 - ETUDE DES SYSTEMES DIFFERENTIELS POUR LES PREMIERS ORDRES
D'APPROXIMATION - ORIGINE DES DIFFERENTES COMPOSANTES NON LINEAIRES

Nous reprenons les notations du paragraphe II-2/4-3. Nous supposons, par ailleurs que les conditions aux limites peuvent se mettre sous la forme (17)+(19) proposée au paragraphe précité. Rappelons que les solutions $S_{ip}^{(a,b)}$ et $S_{ijqr}^{(a,b,c)}$ vérifient les équations aux dérivées partielles ci-après, notées sous forme matricielle :

$$(1-a) \quad M \cdot S_{ip}^{(a,b)} = B_{ip}^{(a,b)} + E_{ip}^{(a,b)}$$

$$(1-b) \quad M \cdot S_{ijqr}^{(a,b,c)} = B_{ijqr}^{(a,b,c)} + E_{ijqr}^{(a,b,c)}$$

Nous allons préciser la forme de ces vecteurs $B_{ip}^{(a,b)}$, $E_{ip}^{(a,b)}$, $B_{ijqr}^{(a,b,c)}$,... et développer les systèmes (1). L'hypothèse faite sur la nature des solutions des équations des marées, à savoir qu'elles se présentent sous forme de séries généralisées de FOURIER en t, va nous permettre de nous ramener à des systèmes linéaires de premier ordre à deux variables seulement : x et y. Nous avons déjà noté que ces systèmes sont elliptiques, après élimination de la variable temps.

1.1 - Ordre A₁

Rappelons que les matrices $S_{1,2}^{(a,b)}$ sont définies en fonction des amplitudes et des phases des inconnues, par :

$$S_{1,2}^{(a,b)} = \begin{vmatrix} h u_{12}^{(a,b)} \cos [(a+b) \omega_1 t + \psi_{12}^{(a,b)}] \\ h v_{12}^{(a,b)} \cos [(a+b) \omega_1 t + \chi_{12}^{(a,b)}] \\ \zeta_{12}^{(a,b)} \cos [(a+b) \omega_1 t + \varphi_{12}^{(a,b)}] \end{vmatrix} \quad \text{avec } (a+b) = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

que nous écrivons plus simplement $S_{1,2}^{(k)}$ avec $k = a + b$.

Nous avons vu au chapitre précédent que les vecteurs $E_{12}^{(a,b)}$ ont la forme :

$$\text{pour } a+b=2k+1 : E_{12}^{(a,b)} = \begin{vmatrix} C F \chi_{11}^{(k)} \cos[(2k+1)\omega_1 t + \Phi \chi_{11}^{(k)}] \\ C F \gamma_{11}^{(k)} \cos[(2k+1)\omega_1 t + \Phi \gamma_{11}^{(k)}] \\ 0 \end{vmatrix} = C F_{11} [S_{11}, (2k+1)\omega_1 t]$$

$$\text{pour } a+b=2k : E_{12}^{(a,b)} = 0$$

Nous notons $F_{11} [S_{11}, (2k+1)\omega_1 t]$ pour rappeler que les composantes du vecteur F_{11} dépendent des caractéristiques du vecteur S_{11} représentant la solution d'ordre 1, de pulsation ω_1 , et que par ailleurs ce vecteur F_{11} est relatif à la pulsation $(2k+1)\omega_1$.

Il est par ailleurs aisé de mettre les vecteurs $B_{12}^{(a,b)}$ sous une forme semblable .

$$B_{12}^{(a,b)} = \begin{vmatrix} -h \left[\mu_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial y} \right] \\ -h \left[\mu_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial y} \right] \\ -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha_1 \mu_1] - \frac{\partial}{\partial y} [\alpha_1 \nu_1] \end{vmatrix}$$

On vérifie facilement que $B_{12}^{(a,b)}$ se réduit à la somme de deux vecteurs (*) :

$$(2-a) \quad B_{12}^{(a,b)} = J_{12} [S_{11}, C^k] + J'_{12} [S_{11}, 2\omega_1 t]$$

$$(2-b) \quad J_{12} [S_{11}, C^k] = \begin{vmatrix} -\frac{h}{2} \left[u_{11} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + v_{11} \frac{\partial u_{11}}{\partial y} \cos(\psi_{11} - \chi_{11}) - u_{11} v_{11} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} \sin(\psi_{11} - \chi_{11}) \right] \\ -\frac{h}{2} \left[v_{11} \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + u_{11} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \cos(\psi_{11} - \chi_{11}) - u_{11} v_{11} \frac{\partial \chi_{11}}{\partial x} \sin(\psi_{11} - \chi_{11}) \right] \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \zeta_{11} u_{11}}{\partial x} \cos(\psi_{11} - \varphi_{11}) + \frac{\partial \zeta_{11} v_{11}}{\partial y} \cos(\chi_{11} - \varphi_{11}) - \zeta_{11} u_{11} \sin(\psi_{11} - \varphi_{11}) \frac{\partial(\psi_{11} - \varphi_{11})}{\partial x} - \zeta_{11} v_{11} \sin(\chi_{11} - \varphi_{11}) \frac{\partial(\chi_{11} - \varphi_{11})}{\partial y} \right] \end{vmatrix}$$

$$(2-c) \quad J'_{12} [S_{11}, 2\omega_1 t] = \begin{vmatrix} -\frac{h}{2} \left[u_{11} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} \cos(2\omega_1 t + 2\psi_{11}) + v_{11} \frac{\partial u_{11}}{\partial y} \cos(2\omega_1 t + \psi_{11} + \chi_{11}) - u_{11}^2 \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} \sin(2\omega_1 t + 2\psi_{11}) - u_{11} v_{11} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} \sin(2\omega_1 t + \psi_{11} + \chi_{11}) \right] \\ -\frac{h}{2} \left[u_{11} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \cos(2\omega_1 t + \psi_{11} + \chi_{11}) + v_{11} \frac{\partial v_{11}}{\partial y} \cos(2\omega_1 t + 2\chi_{11}) - u_{11} v_{11} \frac{\partial \chi_{11}}{\partial x} \sin(2\omega_1 t + \psi_{11} + \chi_{11}) - v_{11}^2 \frac{\partial \chi_{11}}{\partial y} \sin(2\omega_1 t + 2\chi_{11}) \right] \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \zeta_{11} u_{11}}{\partial x} \cos(2\omega_1 t + \psi_{11} + \varphi_{11}) + \frac{\partial \zeta_{11} v_{11}}{\partial y} \cos(2\omega_1 t + \chi_{11} + \varphi_{11}) - \zeta_{11} u_{11} \sin(2\omega_1 t + \psi_{11} + \varphi_{11}) \frac{\partial(\psi_{11} + \varphi_{11})}{\partial x} - \zeta_{11} v_{11} \sin(2\omega_1 t + \chi_{11} + \varphi_{11}) \frac{\partial(\chi_{11} + \varphi_{11})}{\partial y} \right] \end{vmatrix}$$

(*) Nous mettons le lecteur en garde contre une confusion possible de J_{12} avec la grandeur J_1 introduite au chapitre précédent.

En explicitant ces diverses expressions, on voit que les solutions $S_{1,2}^{(k)}$ sont définies par les systèmes linéaires :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} k=0 & M S_{1,2}^{(0)} = J_{1,2} [S_{11}, c^{12}] \\ k=1 & M S_{1,2}^{(1)} = C \cdot F_{11} [S_{11}, \omega_1 t] \\ k=2 & M S_{1,2}^{(2)} = J'_{1,2} [S_{11}, 2\omega_1 t] \\ k=3 & M S_{1,2}^{(3)} = C \cdot F_{11} [S_{11}, 3\omega_1 t] \\ k=4 & M S_{1,2}^{(4)} = 0 \\ \vdots & \vdots \\ k=2n & M S_{1,2}^{(2n)} = 0 \\ k=2n+1 & M S_{1,2}^{(2n+1)} = C \cdot F_{11} [S_{11}, (2n+1)\omega_1 t] \\ \vdots & \vdots \end{array} \right.$$

Précisons le sens de ces équations. Au premier membre de chacune d'elles, figurent linéairement les inconnues d'ordre 2 ; dans les seconds apparaissent les approximations d'ordre inférieur, supposées déjà déterminées par un calcul antérieur. Par analogie avec la théorie des vibrations des systèmes mécaniques à un nombre fixé de degrés de liberté, on peut donc interpréter ces seconds membres comme "générateurs" d'ondes forcées de pulsation $k\omega_1$. Si nous ignorons, pour l'instant, les contributions des limites, les expressions (3) nous permettent de constater les points suivants.

a) $k=0$ - Il apparaît une solution $S_{1,2}^{(0)}$ indépendante du temps. Elle correspond à un courant moyen et à une dénivellation du niveau moyen, par rapport au géoïde. Nous avons étudié expérimentalement cette dénivellation dans la Manche, pour une marée moyenne - cf [2] et [3]. Nous retrouvons ici ce phénomène, dans le cadre d'une théorie plus précise et plus générale qu'en [2] et [3], puisqu'elle prend en compte les contributions de toutes les composantes de la marée. Cette variation est produite, à cet ordre d'approximation, par les non-linéarités de petits fonds liées aux termes d'accélération spatiale, et aux termes quadratiques de l'équation de continuité.

b) $k=1$ - A la fréquence de l'onde fondamentale, on constate la présence d'un terme générateur dérivant du frottement. Il représente, comme nous l'avons noté au chapitre précédent, la part principale de l'amortissement de l'onde fondamentale.

c) $k = 2$ - Une onde de pulsation $2\omega_1$ est produite du fait de l'existence des termes non linéaires d'accélération spatiale et des termes quadratiques de l'équation de continuité. L'onde M_4 est donc engendrée à l'intérieur du domaine marin en particulier par les effets de petits fonds intervenant dans la propagation de l'onde M_2 .

d) Pour toutes les pulsations paires autres que $2\omega_1$, les seconds membres des équations (3) sont nuls. Les systèmes d'équations correspondants sont donc linéaires et homogènes par rapport aux inconnues et leurs dérivées. Elles n'admettent que la solution zéro si les valeurs des inconnues à la frontière sont nulles. Les termes de petits fonds n'engendrent donc, à l'ordre A_1^2 , qu'une dénivellation du niveau moyen, par rapport au géoïde, et une contribution à l'harmonique 2.

e) Pour toutes les pulsations de rang impair ($k = 2n+1$), le frottement produit des termes générateurs donnant naissance aux harmoniques $M_6, M_{10}, M_{14} \dots$. Nous avons vu cependant au chapitre précédent que ces termes décroissent rapidement avec n , les valeurs in situ confirmant d'ailleurs cette prévision de calcul.

f) Nous devons enfin rappeler que les vecteurs J_{12}, J_{12}^1 et F_{11} sont entièrement définis par la solution d'ordre 1, relative à l'onde dominante seule. Il s'ensuit - et c'est une conclusion essentielle - que les solutions $S_{12}^{(k)}$ sont indépendantes des autres ondes présentes dans le spectre de la marée linéaire : pour déterminer dans D la contribution de l'ordre A_1^2 à l'onde principale M_2 , et ses dérivées, principalement M_4 et M_6 , il suffit de réaliser sur modèle, soit mathématique, soit hydraulique, une marée linéaire correspondant à l'onde dominante seule, avec les conditions aux limites adéquates, et cela quelles que soient les autres composantes de la marée réelle.

1.2 - Ordre $A_1 A_j$, $j \neq 1$

Nous cherchons les solutions $S_{1j11}^{(a,b,c)}$:

$$S_{1j11}^{(a,b,c)} = \begin{cases} h u_{1j11}^{(a,b,c)} \cos \{ [(a+b)\omega_1 + c\omega_j]t + \psi_{1j11}^{(a,b,c)} \} \\ h v_{1j11}^{(a,b,c)} \cos \{ [(a+b)\omega_1 + c\omega_j]t + \chi_{1j11}^{(a,b,c)} \} \\ \zeta_{1j11}^{(a,b,c)} \cos \{ [(a+b)\omega_1 + c\omega_j]t + \varphi_{1j11}^{(a,b,c)} \} \end{cases}$$

$j = 2, 3, \dots, \infty$
 $a+b = 0, 1, 2, \dots, \infty$
 $c = 0, 1, 2, \dots, \infty$

que nous notons plus simplement $S_{1j11}^{(k,c)}$ avec $k = a + b$.

Rappelons que nous avons mis au chapitre précédent, le vecteur $E_{1j11}^{(a,b,c)}$ sous la forme :

$$\text{pour } \begin{cases} \alpha + b = 2n \\ c = \varepsilon = \pm 1 \end{cases} : E_{1j11}^{(a,b,c)} = \begin{vmatrix} C \cdot F \chi_{1j}^{(n)} \cos[(2n\omega_1 + \varepsilon\omega_j)t + \phi \chi_{1j}^{(n)}] \\ C \cdot F \gamma_{1j}^{(n)} \cos[(2n\omega_1 + \varepsilon\omega_j)t + \phi \gamma_{1j}^{(n)}] \\ 0 \end{vmatrix} = C \cdot F_{1j} [S_{11}, S_{j1}, (2n\omega_1 + \varepsilon\omega_j)t]$$

sinon: $E_{1j11}^{(a,b,c)} = 0$

Il est, par ailleurs, aisé de mettre les vecteurs $B_{1j11}^{(a,b,c)}$ sous une forme semblable .

$$B_{1j11}^{(a,b,c)} = \begin{vmatrix} -h \left[\mu_1 \frac{\partial \mu_j}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \mu_j}{\partial y} + \mu_j \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \nu_j \frac{\partial \mu_1}{\partial y} \right] \\ -h \left[\mu_1 \frac{\partial \nu_j}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \nu_j}{\partial y} + \mu_j \frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \nu_j \frac{\partial \nu_1}{\partial y} \right] \\ -\frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \mu_j + \alpha_j \mu_1) - \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \nu_j + \alpha_j \nu_1) \end{vmatrix}$$

On montre facilement que $B_{1j11}^{(a,b,c)}$ se réduit à la somme de deux vecteurs

$$(4-a) \quad B_{1j11}^{(a,b,c)} = J_{1j11} [S_{11}, S_{j1}, (\omega_1 - \omega_j)t] + J'_{1j11} [S_{11}, S_{j1}, (\omega_1 + \omega_j)t]$$

Nous ne donnons pas J_{1j11} et J'_{1j11} sous forme explicite, pour ne pas alourdir le texte, mais leur calcul est vraiment élémentaire.

En développant ces diverses expressions, nous voyons que les solutions $S_{1j11}^{(k,c)}$ sont définies par les systèmes :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} k=0, c=1 & M \cdot S_{1j11}^{(0,1)} = C \cdot F_{1j} [S_{11}, S_{j1}, \omega_j t] \\ k=0, c \neq 1 & M \cdot S_{1j11}^{(0,c)} = 0 \\ k=1, c = \varepsilon = \pm 1 & M \cdot S_{1j11}^{(1,\varepsilon)} = J_{1j11} [S_{11}, S_{j1}, (\omega_1 + \varepsilon\omega_j)t] \\ k=1, c \neq \varepsilon & M \cdot S_{1j11}^{(1,c)} = 0 \\ k=2n, c = \varepsilon = \pm 1 & M \cdot S_{1j11}^{(2n,\varepsilon)} = C \cdot F_{1j} [S_{11}, S_{j1}, (2n\omega_1 + \varepsilon\omega_j)t] \\ k=2n, c \neq \varepsilon & M \cdot S_{1j11}^{(2n,c)} = 0 \\ k=2n+1, \forall c & M \cdot S_{1j11}^{(2n+1,c)} = 0 \end{array} \right.$$

En faisant abstraction du rôle générateur des conditions aux limites, les expressions (5) nous permettent d'identifier les ondes qui sont engendrées par les

non-linéarités dans le domaine marin considéré, à l'ordre d'approximation $A_1 A_j$:

a) $k = 1, c = -1$ - Les non-linéarités des petits fonds (accélération spatiale, termes quadratiques de l'équation de continuité) engendrent des composantes à longues périodes (de pulsations $\omega_1 - \omega_j$). Ce sont les ondes :

MS_0 se superposant à la composante d'origine astronomique MS_f

MN_0 se superposant à la composante d'origine astronomique M_m

MK_0 se superposant à la composante d'origine astronomique M_f

Elles engendrent aussi les principales ondes diurnes d'interaction :

MK_1 se superposant à la composante d'origine astronomique O_1

MO_1 se superposant à la composante d'origine astronomique K_1

b) $k = 1, c = +1$ - Les non-linéarités des petits fonds engendrent par ailleurs une composante d'interaction de rang 2 entre l'onde dominante et chacune des ondes secondaires du spectre :

MS_4, MN_4, MK_4, \dots (pulsation : $\omega_1 + \omega_j$)

c) $k = 0, c = 1$ - C'est à cet ordre $A_1 A_j$ qu'apparaît l'amortissement des diverses ondes secondaires du spectre. Rappelons la remarque que nous avons déjà faite à ce sujet au paragraphe II-2/5-3 : si les diverses ondes d'indice j se propageaient seules dans D , leur amortissement serait d'ordre A_j^2 ; comme elles sont, en réalité, accompagnées d'une onde dominante, les termes d'amortissement correspondant à ces fréquences apparaissent dès l'ordre $A_1 A_j$: ces ondes sont ainsi plus amorties que si elles se propageaient seules.

d) $k = 2n, c = -$ - Le frottement engendre par ailleurs des ondes d'interaction de rang impair entre l'onde dominante et chaque onde secondaire du spectre :

$2MS_2, 2MN_2, 2MK_2, \dots$ (pulsation $2\omega_1 - \omega_j$)

$2MS_6, 2MN_6, 2MK_6, \dots$ (pulsation $2\omega_1 + \omega_j$)

$4MS_6, 4MN_6, 4MK_6, \dots$ (pulsation $4\omega_1 - \omega_j$)

$4MS_{10}, 4MN_{10}, 4MK_{10}, \dots$ (pulsation $4\omega_1 + \omega_j$)

\vdots
 \vdots
 \vdots
 (pulsation $2n\omega_1 \pm \omega_j$)
 \vdots
 \vdots

Au chapitre précédent, nous avons vu que l'importance des termes générateurs correspondant à ces diverses composantes décroît rapidement avec n croissant ; il en est donc de même de l'amplitude de ces composantes ; les valeurs déduites d'observations in situ confirment encore cette prévision de nos calculs.

e) Pour toutes les autres valeurs possibles de k et c, les seconds membres des équations (1-b) sont nuls. Si aucune contribution des limites n'intervient dans D pour ces fréquences, les solutions correspondantes sont zéro pour les raisons indiquées au § 1-1d.

f) Remarquons enfin que les vecteurs J_{1j11} , J'_{1j11} et F_{4j} , sont fonction seulement des caractéristiques de l'onde dominante et de celles de l'onde d'indice j; ces quantités sont indépendantes des autres ondes du spectre. Les solutions $S_{1j11}^{(k,c)}$ ne dépendent ainsi, en dehors des conditions aux limites, que de l'onde d'indice j et de l'onde dominante. Pour étudier l'amortissement d'une onde secondaire, ou les ondes d'interaction entre une onde secondaire et la composante fondamentale, il suffit donc, à cette approximation $A_1 A_j$, de considérer sur modèle soit physique, soit mathématique, la propagation simultanée de deux ondes seulement : l'onde d'indice j et l'onde dominante, avec par ailleurs des conditions aux limites adéquates pour toutes ces ondes harmoniques ou d'interaction. Cette conclusion est encore essentielle pour justifier nos méthodes d'essais sur le modèle tournant.

1.3 - Ordre A_j^2 , $j \neq 1$

Nous cherchons les solutions $S_{j2}^{(a,b)}$:

$$S_{j2}^{(a,b)} = \begin{vmatrix} h u_{j2}^{(a,b)} \cos [(a \omega_1 + b \omega_j)t + \psi_{j2}^{(a,b)}] \\ h v_{j2}^{(a,b)} \cos [(a \omega_1 + b \omega_j)t + \psi_{j2}^{(a,b)}] \\ \int_{j2}^{(a,b)} \cos [(a \omega_1 + b \omega_j)t + \psi_{j2}^{(a,b)}] \end{vmatrix} \quad \text{avec } a \text{ et } b = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Nous avons vu au chapitre précédent que les vecteurs $E_{j2}^{(a,b)}$ sont de la forme :

pour $\begin{cases} a = 2k+1 \\ b = 2\epsilon\delta \end{cases}$:

$$E_{j2}^{(a,b)} = \begin{vmatrix} C \cdot F X_{jj}^{(m)} \cos \{ [(2n+1) \omega_1 + 2\epsilon\delta \omega_j]t + \Phi X_{jj}^{(m)} \} \\ C \cdot F Y_{jj}^{(m)} \cos \{ [(2n+1) \omega_1 + 2\epsilon\delta \omega_j]t + \Phi Y_{jj}^{(m)} \} \\ 0 \end{vmatrix} = C \cdot F_{jj} \begin{matrix} [S_{11}, S_{j1}, \\ (2n+1)\omega_1 + 2\epsilon\delta\omega_j t] \end{matrix}$$

pour $a = 2k, \forall b$ $E_{j2}^{(a,b)} = 0$

Il est par ailleurs aisé de mettre le vecteur $B_{j2}^{(a,b)}$ sous une forme analogue .

$$B_{j2}^{(a,b)} = \begin{vmatrix} -h \left[\mu_j \frac{\partial \mu_j}{\partial x} + \nu_j \frac{\partial \mu_j}{\partial y} \right] \\ -h \left[\mu_j \frac{\partial \nu_j}{\partial x} + \nu_j \frac{\partial \nu_j}{\partial y} \right] \\ -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha_j \mu_j] - \frac{\partial}{\partial y} [\alpha_j \nu_j] \end{vmatrix}$$

comme au § II-3/1-1, on démontre aisément que :

$$(6-a) \quad B_{j2}^{(a,b)} = J_{j2}(S_{j1}, C^{(a)}) + J'_{j2}(S_{j1}, 2\omega_j t)$$

Nous n'écrivons pas explicitement les vecteurs J_{j2} et J'_{j2} , pour ne pas alourdir ce texte. Ils s'obtiennent encore par un calcul élémentaire.

En développant ces diverses expressions, nous voyons que les solutions $S_{j2}^{(a,b)}$ sont définies par les systèmes :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a=0, b=0 & M \cdot S_{j2}^{(0,0)} = J_{j2}(S_{j1}, C^{(a)}) \\ a=0, b=2 & M \cdot S_{j2}^{(0,2)} = J'_{j2}(S_{j1}, 2\omega_j t) \\ a=0, b \neq 0 \text{ et } 2 & M \cdot S_{j2}^{(0,b)} = 0 \\ a=1, b=0 & M \cdot S_{j2}^{(1,0)} = C \cdot F_{jj}[S_{j1}, S_{j1}, \omega_1 t] \\ a=2n+1, b=0 & M \cdot S_{j2}^{(2n+1,0)} = C \cdot F_{jj}[S_{j1}, S_{j1}, (2n+1)\omega_1 t] \\ a=2n \quad \forall b & M \cdot S_{j2}^{(2n,b)} = 0 \\ a=2n+1 \quad b=\varepsilon=\pm 1 & M \cdot S_{j2}^{(2n+1,2\varepsilon)} = C \cdot F_{jj}[S_{j1}, S_{j1}, (2n+1)\omega_1 t + 2\varepsilon \delta \omega_j t] \end{array} \right.$$

Faisant toujours abstraction de l'influence éventuelle des conditions aux limites, les expressions (7) nous permettent d'identifier les ondes qui sont engendrées par les termes non linéaires à cet ordre d'approximation A_j^2 .

a) $a=0, b=0$ - Les non-linéarités de petits fonds (accélération spéciale, termes quadratiques de l'équation de continuité) font apparaître une solution $S_{j2}^{(0,0)}$ indépendante du temps : elle représente la contribution de l'onde secondaire d'indice j à la variation du niveau moyen.

b) $a=0, b=2$ - Ces non-linéarités de petits fonds engendrent par ailleurs une composante de pulsation $2\omega_j$. C'est l'harmonique 2 de l'onde secondaire d'indice j : telle $S_4, N_4, K_4 \dots$

c) $a=1, b=0$ - A l'ordre A_j^2 , nous retrouvons ainsi la pulsation ω_1 . Comme nous l'avons déjà noté au chapitre précédent, ce terme vient s'ajouter à celui de l'amortissement principal de l'onde dominante M_2 , qui est d'ordre A_1^2 .

On a ainsi le modèle du mécanisme décrivant les effets amortisseurs de chaque onde secondaire sur l'onde dominante.

d) $a = 2n+1$, $b = 0$ - Nous retrouvons aussi à l'ordre étudié les pulsations $3\omega_1, 5\omega_1, \dots (2n+1)\omega_1 \dots$. Nous avons vu au chapitre précédent que les termes d'amplitude F_{jj} étaient en opposition de phase avec ceux d'amplitude F_{11} . Il s'ensuit que les composantes résultantes le sont aussi. C'est pourquoi les composantes $M_6, M_{10} \dots$ ont des amplitudes plus faibles quand M_2 ne se propage pas seule, mais accompagnée des ondes secondaires S_2, N_2, \dots

e) $a = 2n+1$, $b = \xi$ - Le frottement engendre par ailleurs des ondes d'interaction de rang impair entre l'onde dominante et chaque onde secondaire du spectre :

$2SM_2, 2NM_2 \dots\dots$	(pulsation $2\omega_j - \omega_1$)
$2SM_6, 2NM_6 \dots\dots$	(pulsation $2\omega_j + \omega_1$)
$3M2S_2, 3M2N_2 \dots\dots$	(pulsation $3\omega_1 - 2\omega_j$)
$3M2S_{10}, 3M2N_{10} \dots\dots$	(pulsation $3\omega_1 + 2\omega_j$)
\vdots	\vdots

Nous avons vu au chapitre précédent que l'intensité des termes générateurs $F_{jj} [(2n+1)\omega_1 + \xi\omega_j]$ décroît rapidement avec n . Il en est donc de même de ces diverses composantes. Les valeurs déduites d'observations in situ confirment ces remarques.

f) Pour toutes les autres valeurs possibles de a et b , les seconds membres des équations (1-a) sont nuls. Si aucune contribution des limites n intervient dans D pour ces fréquences, les solutions correspondantes sont donc zéro pour les raisons indiquées au § 1.1-d.

g) Nous observons pour finir que, dans la définition des vecteurs J_{j2}, J'_{j2} et F_{jj} , n'interviennent que les caractéristiques de l'onde dominante et celles de l'onde d'indice j , indépendamment des autres composantes du spectre. Les solutions $S_{j2}^{(a,b)}$ ne dépendent donc que de l'onde dominante, et de celle d'indice j . Une meilleure approximation de l'amortissement de l'onde dominante, et de ses harmoniques impairs est donc obtenue en étudiant sur modèle mathématique ou physique la propagation simultanée de l'onde dominante et de chacune des principales ondes secondaires, en absence de toutes les autres. On peut simultanément déterminer les ondes d'interaction notées plus haut, à condition de respecter les conditions aux limites adéquates pour ces composantes.

1.4 - Ordre $A_j A_s$, j et $s \neq 1, j \neq s$

Nous cherchons les solutions du type $S_{js11}^{(a,b,c)}$:

$$S_{js11}^{(a,b,c)} = \begin{vmatrix} h U_{js11}^{(a,b,c)} \cos [(a\omega_1 + b\omega_j + c\omega_s)t + \psi_{js11}^{(a,b,c)}] \\ h V_{js11}^{(a,b,c)} \cos [(a\omega_1 + b\omega_j + c\omega_s)t + \chi_{js11}^{(a,b,c)}] \\ Y_{js11}^{(a,b,c)} \cos [(a\omega_1 + b\omega_j + c\omega_s)t + \varphi_{js11}^{(a,b,c)}] \end{vmatrix}$$

Au chapitre précédent, nous avons écrit le vecteur $E_{js11}^{(a,b,c)}$ sous la forme :

$$\text{pour } \begin{cases} a = 2n+1 \\ b \text{ et } c = \epsilon = \pm 1 \end{cases} \quad E_{js11}^{(a,b,c)} = \begin{vmatrix} C \cdot F X_{js}^{(n)} \cos \{ [(2n+1)\omega_1 + \epsilon\omega_j + \epsilon\omega_s]t + \phi X_{js}^{(n)} \} \\ C \cdot F Y_{js}^{(n)} \cos \{ [(2n+1)\omega_1 + \epsilon\omega_j + \epsilon\omega_s]t + \phi Y_{js}^{(n)} \} \\ 0 \end{vmatrix} = C \cdot F_{js} \begin{bmatrix} S_{11}, S_{j1}, S_{s1} \\ (2n+1)\omega_1 t + \epsilon\omega_j t + \epsilon\omega_s t \end{bmatrix}$$

$$\text{sinon : } E_{js11}^{(a,b,c)} = 0$$

Comme aux paragraphes précédents, il est aisé de décomposer comme suit le vecteur $B_{js11}^{(a,b,c)}$:

$$(8-a) \quad B_{js11}^{(a,b,c)} = J_{js11} [S_{j1}, S_{s1}, (\omega_j - \omega_s)t] + J'_{js11} [S_{j1}, S_{s1}, (\omega_j + \omega_s)t]$$

et les solutions $S_{js11}^{(a,b,c)}$ sont définies par les systèmes :

$$(9) \quad \begin{cases} a=0, b \text{ et } c = \epsilon & M S_{js11}^{(0,1,\epsilon)} = J_{js11} [S_{j1}, S_{s1}, (\omega_j + \epsilon\omega_s)t] \\ a = 2n+1, b \text{ et } c = \epsilon & M S_{js11}^{(2n+1,\epsilon,\epsilon)} = C \cdot F_{js} \begin{bmatrix} S_{11}, S_{j1}, S_{s1} \\ (2n+1)\omega_1 t + \epsilon\omega_j t + \epsilon\omega_s t \end{bmatrix} \\ a = 2n+1, b \text{ et } c \neq \epsilon & M S_{js11}^{(2n+1,b,c)} = 0 \\ a = 2n, n \neq 0, \forall b \text{ et } c & M S_{js11}^{(2n,b,c)} = 0 \end{cases}$$

On peut ainsi préciser la nature des ondes qui sont engendrées à cet ordre d'approximation $A_j A_s$:

a) $a = 0, b = 1, c = 1$ - Les non-linéarités des petits fonds (accélération spéciale, termes quadratiques de l'équation de continuité) engendrent des composantes à longues périodes :

SK_0 se superpose linéairement à la composante d'origine astronomique S_{sa}
 SN_0 se superpose linéairement à la composante d'origine astronomique MS_{tm}

Elles engendrent aussi diverses ondes diurnes d'interaction :

SK_1 se superposant à la composante d'origine astronomique M_1

NK_1 se superposant à la composante d'origine astronomique Q_1

b) $a = 0, b = 1, c = 1$ - Ces non-linéarités de petits fonds créent par ailleurs des composantes d'interaction de rang 2 entre les principales ondes composantes secondaires du spectre :

$$SN_4, SK_4, NK_4 \dots \text{ pulsation } (\omega_j + \omega_s)$$

c) C'est à cet ordre que le frottement fait apparaître, nous l'avons vu au chapitre précédent, les ondes d'interaction triples :

$$\begin{array}{ll} MSN_2, MNS_2, MSK_2, MKS_2 & (\text{pulsation } \omega_1 + \omega_j - \omega_s) \\ MSN_6, MNS_6, MSK_6 \dots & (\text{pulsation } \omega_1 + \omega_j + \omega_s) \\ 3MSN_2 \dots & (\text{pulsation } 3\omega_1 + \omega_j - \omega_s) \end{array}$$

Ces diverses ondes sont certainement de faible amplitude, les plus importantes étant naturellement les premières citées.

d) Pour cet ordre d'approximation, nous constatons que chaque onde d'interaction **ne** dépend que des caractéristiques de l'onde dominante et des deux autres ondes génératrices en cause. Il suffit donc, pour l'obtenir, d'étudier sur modèle mathématique ou physique, la propagation simultanée de ces trois ondes, indépendamment de toutes les autres composantes existant dans le spectre, à condition naturellement, de réaliser les conditions aux frontières adéquates par rapport à cette onde.

1.5 - Remarques concernant les termes d'amortissement des ondes principales

Nous verrons plus loin qu'il est possible d'évaluer l'importance des diverses composantes non linéaires de même origine, pour un même groupe d'ondes (cf IV^o partie). On constate ainsi que les composantes d'amortissement de l'onde dominante et des principales ondes secondaires sont très importantes : pour la Manche, par exemple, la composante d'amortissement de l'onde M_2 à l'ordre A_1^2 , décrite par la solution $S_{12}^{(1)}$, est de l'ordre de grandeur des composantes S_2 et N_2 observées in situ. En extrapolant le raisonnement de la IV^o partie à l'ordre 3 d'approximation en A_1 (ce qui, notons le, n'est absolument pas fondé dans le cadre de la théorie que nous développons), on peut présumer a priori que le terme d'amortissement de l'onde M_2 , à l'ordre A_1^3 , est encore sensible. On se rend compte de même de l'importance de l'amortissement des ondes S_2, N_2 et K_2 , dû au frottement. Il ne faut donc pas se limiter à l'ordre $A_1 A_j$ pour la définition de ces principaux termes d'amortissement. En ce qui concerne la transformation du terme non analytique de frottement en une somme de fonctions circulaires analytique par rapport aux A_i , le raisonnement

présenté reste valable quelle que soit l'approximation retenue pour définir les vitesses. Nous avons en effet remarqué au chapitre II-2 qu'il est possible de réaliser ces calculs en prenant une expression de la solution (u, v) aussi complète que possible, donc développée à l'ordre d'approximation jugé nécessaire : il suffit pour cela de considérer les composantes d'amortissement d'ordre $A_1^2, A_1^3, A_1 A_j \dots$ comme de nouvelles composantes du spectre. Nous nous apercevons ainsi que la méthode du petit paramètre, tout en restant applicable, devient très laborieuse. D'autre part, remarquons que les ondes M_2, S_2, N_2, K_2 observées dans la nature sont des ondes amorties, donc de toute évidence assez différentes des ondes "linéaires" que nous regardons comme données a priori. On est ainsi tenté d'adopter, comme première approximation de ces ondes, des solutions déjà amorties en vue du calcul de leurs harmoniques et interactions. La détermination de la solution amortie de l'onde M_2 peut se faire soit par la méthode du petit paramètre, appliquée jusqu'à l'ordre 3 au moins en A_1 , comme nous venons de le voir plus haut, soit par une méthode de même genre que celle proposée par DRONKERS - cf [4] - pour le calcul d'une marée monopériodique, admettant une linéarisation de la force de frottement de la forme :

$$\begin{cases} F_x = \lambda u + m \frac{\partial v}{\partial t} \\ F_y = \lambda v - m \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

les coefficients λ et m étant déduits des caractéristiques de la rose de courant de l'onde dominante. Notons que les calculs justificatifs du procédé de linéarisation correspondant peuvent être rattachés à ceux que nous avons présentés au chapitre précédent, en les limitant à une onde monopériodique. Posons cette solution amortie égale à :

$$A'_1 Q_1 = A_1 S_{11} + A_1^2 S_{12}^{(1)} + A_1^3 S_{13}^{(1)}$$

Nous choisissons maintenant comme définition du terme A'_1 le rapport, en un point particulier du domaine marin étudié, entre l'amplitude de cette composante et celle de la marée de vives eaux maximum observée, ceci afin de pouvoir comparer les amplitudes réelles des différentes ondes d'origine astronomique amorties, les unes par rapport aux autres.

Toujours à partir de la méthode des petits paramètres, on peut calculer de même les solutions amorties :

$$A'_j Q_j = A_j S_{j1} + A_1 A_j S_{1j11}^{(0)} + A_1^2 A_j S_{1j21}^{(0,1,0)}$$

avec une définition semblable de A'_j .

Rappelons que la solution $A'_1 Q_1$ se détermine à l'ordre ci-dessus, indépendamment des autres ondes du spectre, et que chaque solution $A'_j Q_j$ se définit pour

l'onde d'indice j en présence de l'onde dominante seule.

Nous proposons donc de chercher à définir d'abord, par l'un de ces moyens, ou par d'autres, les solutions amorties $A_1'Q_1$ et $A_j'Q_j$. Nous étudierons ensuite le problème des interactions entre ces diverses ondes, non plus au moyen de la méthode stricte des petits paramètres, mais d'une méthode de perturbation dans laquelle la solution $A_1'Q_1$ représente la solution aussi exacte que possible du problème de la propagation de l'onde M_2 seule, et les solutions $A_j'Q_j$ des mouvements perturbateurs - cf VAN DYKE [7]. On identifie alors les termes de même puissance en A_j' , en postulant a priori que les solutions cherchées sont de la forme (19-a-b)- (cf chapitre II-1).

Nous ne reprenons pas le raisonnement correspondant à cette nouvelle méthode, car ses conclusions sont identiques à celles présentées précédemment, dans le cadre de l'application stricte de la méthode des petits paramètres de POINCARÉ, tant sur l'origine des différentes ondes non linéaires du spectre des marées littorales que sur leur dépendance aux ondes génératrices. Ces conclusions sont regroupées dans le tableau II-3/1 pour le cas de la Manche. Notons que les non-linéarités de petits fonds (accélération spatiale, continuité) engendrent des harmoniques de rang pair par rapport aux ondes génératrices amorties, et que le frottement donne naissance aux ondes de rang impair. Remarquons qu'en nous limitant aux ordres ci-dessus, nous ne prévoyons pas l'apparition de composantes telles que $S_6, M_8 \dots$: ces ondes atteignent quelques centimètres dans certaines régions de la Manche, mais sur des zones certainement très limitées, au voisinage des très petits fonds, zones que nous avons exclues de notre analyse, pour nous limiter au second ordre par rapport aux ondes génératrices amorties.

Remarque : Nous avons toujours fait abstraction jusqu'à présent des conditions aux limites relatives aux ondes non linéaires. En fait, in situ, chacune d'elles résulte, dans un domaine D , de la superposition de deux ondes de même fréquence, mais d'origine totalement différente. La première, I , est engendrée sur place, dans D , par les effets de frottement et de petits fonds accompagnant la propagation de l'onde dominante et des principales composantes secondaires, c'est le mécanisme que nous venons de décrire. La seconde, E , résulte de l'oscillation correspondant à cette fréquence, existant éventuellement aux frontières marines S_2 de D . Si les frontières S_2 sont choisies à la limite du plateau continental, cette composante est nulle, puisque seules existent dans l'océan des ondes dont les fréquences apparaissent dans le potentiel générateur. Si S_2 est situé sur le plateau continental, l'onde E n'est plus nulle sur S_2 et correspond à la superposition

de l'onde incidente, engendrée entre la limite du plateau continental et la frontière S_2 , et de l'onde sortant de D par S_2 .

Ces ondes I et E sont toutes deux de second ordre par rapport aux ondes principales amorties, telles que nous venons de les définir plus haut. Leurs interactions avec l'onde dominante et les autres composantes du spectre sont donc au moins du troisième ordre d'approximation par rapport aux A'_1 . Quant à leurs harmoniques, ils sont d'ordre quatre ou plus. Comme ces ondes ne sont pas dispersives et que nous nous limitons au second ordre, $A'_1{}^2$, on peut donc considérer pour notre objet qu'elles se superposent linéairement.

2 - METHODES PRATIQUES DE RESOLUTION DU PROBLEME

L'analyse que nous venons de présenter dans la première partie de ce chapitre nous permet de comprendre les phénomènes physiques qui accompagnent la propagation non linéaire de la marée réelle : c'est l'aspect qualitatif de la question. Mais elle apporte aussi les éléments essentiels à la conception et à la justification d'une nouvelle méthode pratique de résolution de ce problème, dans un domaine littoral donné, au moyen soit d'un modèle réduit physique, soit de modèles mathématiques de cette mer : on peut alors établir une description qualitative de la marée. Rappelons notre but : déterminer les caractéristiques d'amplitude et de phase de toutes les composantes significatives de la marée sur tout un domaine marin donné, à partir de la connaissance des caractéristiques de ces ondes en quelques points seulement, données par l'analyse spectrale d'observations faites in situ,

2.1 - Principes de l'étude des marées littorales sur modèle physique

Nous avons vu précédemment que les caractéristiques de l'onde dominante sont indépendantes de celles des autres ondes du spectre, jusqu'à l'ordre d'approximation $A_1 A_j$ et qu'il en est de même de ses harmoniques directes (niveaux moyens, M_4 , M_6 , M_8 ... pour le cas où l'onde dominante est M_2). A la condition que le modèle réduit physique soit en similitude avec la nature, pour la géométrie du bassin, la force de CORIOLIS (si le bassin est suffisamment grand pour qu'elle ait une incidence notable sur le phénomène - cf BONNEFILLE [1]), et le frottement, nous pouvons donc espérer représenter avec une bonne approximation l'onde M_2 sur tout le domaine en simulant correctement les conditions que vérifie cette onde seule aux limites ouvertes de D.

A l'intérieur de ce domaine, la part des ondes harmoniques M_4 , M_6 engendrée sur place, par les effets des non-linéarités, est reproduite elle aussi

correctement. Il y a lieu, par ailleurs, de régler, par un moyen direct ou indirect, les conditions aux limites sur S_2 relatives à ces harmoniques.

Pour étudier l'oscillation M_2 et ses harmoniques (M_4 et M_6 principalement), il suffit donc de réaliser sur le modèle les conditions aux limites pour ces oscillations seules, sans tenir compte des autres composantes de la marée. L'avantage de cette méthode est évidente : elle permet de simplifier considérablement la simulation des conditions aux limites, puisqu'elle réduit le nombre d'ondes à y représenter. Elle facilite par ailleurs l'analyse de la marée partielle ainsi obtenue à l'intérieur de D, puisque le phénomène correspondant est dans ce cas rigoureusement périodique.

Nous avons vu, par ailleurs, au cours des paragraphes précédents que les ondes secondaires, comme S_2 , N_2 , K_2 , notables dans le cas de la Manche, sont plus fortement amorties quand elles se propagent en présence d'une onde dominante que si elles étaient seules, et que cet amortissement est, pour chaque onde, fonction des caractéristiques de celle-ci et de l'onde dominante seule. Pour étudier chaque onde secondaire, avec une approximation suffisante, il suffit de représenter aux limites cette onde, et l'onde dominante seules. Une telle simulation permet en même temps d'améliorer la représentation de l'amortissement de l'onde dominante, et de réaliser sur le modèle le mécanisme de la génération de ses harmoniques impaires. A condition de représenter correctement aux limites, chacune des composantes d'interaction entre cette onde secondaire et l'onde dominante, cette simulation conduit par ailleurs à une bonne représentation de ces composantes. A ce degré d'approximation, la représentation des conditions aux limites est déjà un peu plus complexe, de même que le signal résultant à l'intérieur du domaine. Mais les avantages demeurent certains : le phénomène à reproduire et analyser est encore considérablement simplifié.

L'examen - d'après les données nature - de l'ensemble des ondes d'interaction apparaissant dans un domaine littoral comme la Manche montre que certaines interactions triples ne sont pas négligeables. Reprenant les conclusions des paragraphes précédents, disons pour résumer qu'il est possible de représenter une onde d'interaction de ce type en simulant sur modèle réduit, simultanément, la propagation des trois ondes génératrices correspondantes, avec des conditions aux limites correctes pour cette composante.

Ainsi l'étude pratique de la marée réelle, sur modèle réduit physique, doit se trouver considérablement simplifiée par l'application des méthodes dont on vient

d'indiquer le principe. Celles-ci ont été utilisées en particulier pour l'étude fine des marées dans la Manche, sur le modèle hydraulique tournant de cette mer implanté à Grenoble. Elles ont conduit à des résultats satisfaisants dont nous donnons quelques exemples dans la troisième partie de cet exposé.

2.2 - Etudes sur modèles mathématiques de type hyperbolique

Les méthodes décrites précédemment et applicables aux modèles réduits physiques peuvent être aisément adaptées aux modèles mathématiques. Les modèles de type hyperbolique étudiés jusqu'à présent, ont été conçus pour représenter correctement des marées moyennes de vives eaux. Pour une mer littorale comme la Manche, par exemple, cf § II-1/4-1, on introduit classiquement comme conditions aux limites, une vitesse normale variant de façon sinusoïdale en fonction du temps, avec une période égale à celle de l'onde principale M_2 , et on règle ce modèle de façon à représenter correctement la marée en quelques ports où l'on possède au préalable des enregistrements de vives eaux.

A partir d'un tel modèle, on peut définir un processus d'approximations successives du même type que celui que nous avons proposé pour l'utilisation des modèles physiques :

- En introduisant aux limites une onde de période égale à M_2 , et d'amplitude adéquate, on doit pouvoir représenter correctement cette onde dans tout le domaine D , le réglage des conditions aux limites étant réalisé de façon à reproduire les caractéristiques de l'onde M_2 en quelques points témoins de la frontière terrestre. A condition de régler les conditions aux frontières pour les harmoniques $M_4, M_6 \dots$ on obtient aussi par ce procédé une bonne définition de ces composantes dans D , indépendamment de toutes les autres ondes.
- En introduisant aux limites de ce modèle un signal composé de la somme de deux mouvements sinusoïdaux, de pulsation ω_{M_2} et ω_{S_2} par exemple, on doit pouvoir, après un réglage correct des amplitudes de ces mouvements aux limites, définir avec une bonne approximation l'onde S_2 par analyse spectrale de signal résultant en chaque point D . Par ce moyen, et à condition de respecter les conditions aux limites relatives aux ondes d'interaction correspondantes, on obtient une représentation satisfaisante de celles-ci sur l'ensemble de D .
- Une approche analogue peut être utilisée pour l'étude des interactions triples.

De telles méthodes n'ont pas encore été mises en pratique ; leur mise en oeuvre fait l'objet de nos travaux en cours. L'exploitation de tels modèles sera indéniablement très intéressante. Il deviendra en effet possible de calculer les composantes de la marée dans toutes les mers littorales où les phénomènes non linéaires sont importants.

Par ailleurs, la réalisation de ces modèles pour le cas particulier de la Manche nous fournira des éléments de comparaison sur les possibilités et les limites des modèles mathématiques, comparés aux modèles physiques.

2.3 - Etude de la marée sur modèles mathématiques de type elliptique

Nous avons vu précédemment (II-1-4c) qu'en postulant a priori que les solutions recherchées s'expriment sous forme de sommes fonctions sinusoïdales du temps, on aboutit à des systèmes elliptiques d'équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont les amplitudes et les phases des vitesses et des marnages. En cherchant à calculer ces solutions par approximations successives, nous avons vu, par ailleurs, que le problème global se décompose en une série de systèmes indépendants, également de type elliptique, linéaires, avec seconds membres : un système par fréquence significative du spectre, et par ordre d'approximation. Chacun de ces systèmes peut être écrit dès qu'on connaît les solutions des approximations antérieures. Nous avons vérifié qu'en prenant soin de définir comme ondes génératrices non les ondes linéaires correspondantes, mais des ondes déjà convenablement amorties, les développements que nous avons postulés convergent assez vite. Nous pouvons donc raisonnablement nous limiter au second ordre d'approximation par rapport aux paramètres A'_j et A'_s .

Nous concevons ainsi un troisième mode de détermination de la marée, sous une forme spectrale. Les méthodes d'intégration des systèmes elliptiques ont déjà été développées comme nous l'avons vu précédemment, pour le cas des équations de marées linéaires. Nous pouvons donc généraliser ces méthodes à la détermination des différentes composantes harmoniques de la marée. Les applications numériques restent à faire, il ne semble pas y avoir à ce sujet de difficultés majeures. Ce sera l'objet de nos futurs travaux.

Entre ces trois possibilités d'application de nos développements à la détermination précise de la marée réelle, nous avons choisi en premier lieu d'utiliser les techniques liées aux modèles réduits physiques puisque nous disposons dans notre laboratoire du modèle réduit de la Manche. La troisième partie de cet exposé est consacrée à la description de cette application et à la présentation des résultats que nous avons obtenus.

TABLEAU II-3/1 - Origine des principales ondes non linéaires (pour le cas de la Manche)
 approximations par rapport aux amplitudes des principales ondes génératrices
 amorties

Origine Ap- proximations	Petits Fonds Accélérations spatiales	Frottement
$A'_{M2}{}^2$	* Niveau moyen * $M_4 (2w_{M2})$	* $M_6 (3w_1)$ * $M_{10} (5w_1)$ *
$A'_{M2} \cdot A'_{S2}$	* $MS_0 (w_{M1} - w_{S2})$ confondue avec MS_f * $MS_4 (w_{M2} + w_{S2})$	* $2MS_2 (2w_{M2} - w_{S2})$ confondue avec * $2MS_6 (2w_{M2} + w_{S2})$ * $4MS_6 (4w_{M2} - w_{S2})$ * $4MS_{10} (4w_{M2} + w_{S2})$ ⋮
$A'_{M2} \cdot A'_{N2}$	* $MN_0 (w_{M2} - w_{N2})$ confondue avec M_m * $MN_4 (w_{M2} - w_{N2})$	* $2MN_2 (2w_{M2} - w_{N2})$ confondue avec L_2 * $2MN_6 (2w_{M2} + w_{N2})$ * $4MN_6 (4w_{M2} - w_{N2})$ * ⋮
$A'_{M2} \cdot A'_{K2}$	* $MK_0 (w_{M2} - w_{K2})$ confondue avec M_f * $MK_4 (w_{M2} + w_{K2})$	* $2MK_2 (2w_{N2} - w_{K2})$ confondue avec $2N_2$ * $2MK_6 (2w_{M2} + w_{K2})$ * $4MK_6 (4w_{M2} - w_{K2})$ * ⋮
⋮	⋮	⋮
$A'_{S2}{}^2$	* Niveau moyen * $S_4 (2w_{S2})$	* Amortissement complémentaire de l'onde M_2 * $M_6 (3w_1), M_{10} (5w_1), \dots$ compléments à l'onde $A'_{M2}{}^2$ * $2SM_2 (2w_{S2} - w_{M2})$ * $2SM_6 (2w_{S2} + w_{M2})$ * $3M2S_2 (3w_{M2} - w_{S2})$ * ⋮

A_{N2}^2	<ul style="list-style-type: none"> * Niveaux moyens * $N_4 (2w_{N2})$ 	<ul style="list-style-type: none"> * Amortissement complémentaire de l'onde M_2 * $M_6 (3w_1), M_{10} (5w_1) \dots$ compléments à l'onde A_{M6}^2 * $2NM_2 (2w_{N2} - w_{M2})$ * \vdots
\vdots	\vdots	\vdots
$A_{S2}^1 \cdot A_{N2}^1$	<ul style="list-style-type: none"> * $SN_0 (w_{S2} - w_{N2})$ confondue avec MS_{tm} * $SN_4 (w_{S2} + w_{M2})$ 	<ul style="list-style-type: none"> * $MSN_2 (w_{M2} + w_{S2} - w_{N2})$ * $MNS_2 (w_{M2} + w_{N2} - w_{S2})$ confondue avec * \vdots * \vdots
$A_{S2}^1 \cdot A_{K2}^1$	<ul style="list-style-type: none"> * $SK_0 (w_{S2} - w_{K2})$ confondu avec S_{sa} * $SK_4 (w_{S2} + w_{K2})$ 	<ul style="list-style-type: none"> * $MSK_2 (w_{M2} + w_{S2} - w_{K2})$ * $MKS_2 (w_{M2} + w_{K2} - w_{S2})$ * \vdots * \vdots
\vdots	\vdots	\vdots

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. BONNEFILLE - 1968
"Contribution théorique et expérimentale à l'étude du régime des marées"
Thèse
- [2] G. CHABERT D'HIERES, J. KRAVTCHENKO et C. LE PROVOST - 1968
"Remarques sur le niveau moyen de la surface libre d'un liquide soumis à une oscillation périodique - Application aux marées littorales"
C.R. Acad. Sciences - PARIS - t.267 - pp.569-572
- [3] G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST - 1969
"Les niveaux moyens dans les mers littorales - Application à la Manche pour une marée de vive eau moyenne"
Cahiers Océanographiques - XXI^e année - n^o3 - Mars 1969
- [4] J.J. DRONKERS - 1961
"The linearization of the quadratic resistance term in the equations of motion for a pure harmonic tide in a sea"
NATO - Symposium Inst. Für Meereskunde Univers. Hamburg
- [5] J. KRAVTCHENKO et C. LE PROVOST - 1970
"Une méthode approchée de calcul des composantes de la marée littorale"
C.R. Acad. Sciences - PARIS - t.270 - pp. 1451-1454
- [6] H. POINCARÉ - 1910
"Leçons de mécanique céleste " - III
Gauthiers-Villars - PARIS
- [7] M. VAN DYKE - 1964
"Perturbation methods in fluid mechanics"
Academic Press - New York - London

TROISIEME PARTIE

ETUDE EXPERIMENTALE SUR MODELE REDUIT

APPLICATION A LA MANCHE

INTRODUCTION

L'étude globale précise, sur modèle réduit, de la marée dans une mer littorale est impossible en raison de la complexité du phénomène. Etant données les caractéristiques de la marée réelle, une telle simulation exigerait la reproduction, aux limites marines du domaine à étudier, d'une loi de vitesse fort compliquée, résultant de la superposition d'un grand nombre de fonctions circulaires, multipériodiques, dont les amplitudes sont a priori inconnues. Les essais nécessiteraient, par ailleurs, des durées d'enregistrement importantes, afin de pouvoir analyser correctement les différentes ondes du spectre résultant. D'un autre côté, l'approximation linéaire est insuffisante, selon ce qu'on a vu, car la propagation des ondes dans les mers littorales est essentiellement non linéaire : les ondes d'origine astronomique, en se propageant dans les domaines littoraux, s'amortissent et se déforment en donnant naissance à des ondes dérivées ou d'interaction dont les amplitudes sont parfois importantes (jusqu'à 20% de l'amplitude des composantes élémentaires génératrices).

Au chapitre précédent, nous avons exposé les principes d'une méthode de détermination, sur modèle hydraulique, des composantes du spectre de la marée littorale. Nous avons vu qu'il est possible, moyennant certaines approximations, de déterminer ces ondes séparément ou par groupes, ce qui simplifie considérablement à la fois le problème de la réalisation des conditions aux limites, et celui de l'analyse spectrale des courbes enregistrées.

Nous présentons ci-après la mise en oeuvre pratique de cette méthode sur le modèle réduit physique de la Manche implanté sur la plateforme tournante de l'Université de Grenoble, et nous donnons en exemple les résultats obtenus pour une onde particulière, afin d'illustrer la qualité et la précision des réseaux caractéristiques auxquels nous sommes conduits. Nous présentons, dans le cadre de l'étude des interactions entre l'onde M_2 et l'onde S_2 , les réseaux caractéristiques de l'onde d'interaction quart-diurne, MS_4 .

CHAPITRE III-1POSITION DU PROBLEME - MISE EN OEUVRE PRATIQUE DES METHODES DE RESOLUTION

Rappelons que notre objectif est de définir les caractéristiques, en amplitude et en phase, de chaque composante significative de la marée dans la Manche, connaissant ces caractéristiques en quelques points des côtes de cette mer littorale.

1 - ETAT ACTUEL DES CONNAISSANCES DES COMPOSANTES DE MAREES IN SITU

Nous avons déjà abordé ce sujet au § I-3/3. Nous avons vu que le volume des données nature présentées sous forme élaborée de constantes harmoniques, caractéristiques de la marée en un point donné, est très réduit : quelques ports sur les côtes françaises et anglaises, et quelques îles au milieu de la mer littorale étudiée. Pour connaître les constantes harmoniques nature, il faut en effet, nous l'avons vu, enregistrer la marée in situ pendant une période suffisamment longue pour pouvoir ensuite analyser correctement les enregistrements obtenus : ces observations et ces dépouillements sont délicats et onéreux ; c'est ce qui explique la rareté des données disponibles in situ.

Nos sources de documentation à ce sujet ont été principalement les publications du BUREAU HYDROGRAPHIQUE INTERNATIONAL - cf [1] - Mais quand il nous a été possible de le faire, nous sommes remontés à l'origine même des données de cet ouvrage en nous adressant aux services hydrographiques français, anglais et allemands, et les informations supplémentaires que nous avons pu y recueillir nous ont ainsi permis de mieux interpréter la dispersion des données disponibles dans la littérature. Ces services nous ont par ailleurs fourni des résultats inédits qui nous ont été fort utiles. Le tableau III-1/1 permet d'apprécier le volume et la qualité des données ainsi recueillies, pour une onde quelconque, en l'occurrence l'onde MS_4 que nous étudions plus loin. Sur ce tableau, nous précisons l'époque d'observation, ainsi que la durée des enregistrements correspondants. On constate, comme nous l'avons annoncé plus haut, une certaine dispersion dans l'ensemble des valeurs correspondant à un

même point, déduites d'enregistrements de durées variables réalisés à des époques différentes. Certaines valeurs sont issues d'enregistrements d'un an, d'autres d'un mois, ce sont généralement les deux ordres de grandeurs habituels pour les durées des mesures qui ont fait l'objet de publications. Naturellement, les valeurs données par des enregistrements de longue durée se révèlent beaucoup plus sûres, nous le verrons plus loin. Mais, même pour les données fournies par des observations de l'ordre de l'année, les résultats diffèrent parfois de façon sensible : ceci tient probablement aux techniques même d'analyses qui s'améliorent avec le temps. Dans de tels cas, un choix est nécessaire, et parfois délicat. Nous verrons comment le modèle nous apporte sur ce point un moyen de trouver les valeurs à retenir.

Pour bien situer la difficulté du problème que nous nous proposons de résoudre, analysons brièvement les données regroupées dans le tableau III-1/1 relatives à l'ordre MS_4 . L'amplitude de cette composante varie beaucoup d'un point à l'autre de la Manche : elle ne vaut, en effet, que 5 cm à New Haven, 8 cm à Cherbourg et Portland, 10 cm à Christchurch et Swanage (ce qui représente cependant 25% de l'onde principale M_2 en ces lieux d'observation) ; elle atteint 16cm au Havre et 21 cm à St.-Malo. On conçoit la difficulté qu'il y aurait à déterminer par interpolation, de ces données, une répartition vraisemblable des amplitudes de cette onde, sur toute la Manche. Et le problème de la détermination de la carte des phases est aussi complexe : si la propagation apparente de cette onde est d'ouest en est, le long de la côte française, ($g = 335^\circ$ à St-Malo, 49° à Cherbourg, 130° au Havre...) elle est d'est en ouest sur la côte anglaise : $g = 273^\circ$ à Douvres, 51° à Nab Tower, 82° à Portland, 188° à Devonport L'examen de ces quelques valeurs numériques met bien en évidence la complexité du problème et l'insuffisance des données actuelles pour dresser les cartes des caractéristiques de cette onde, non seulement au large mais même le long des côtes.

La description d'une telle onde sur toute la Manche peut sembler a priori sans objet : 20 cm d'eau peuvent paraître négligeables. Mais avant de poursuivre, rappelons que nous étudions ici la marée dans le contexte de sa structure harmonique. Or si l'amplitude de MS_4 n'atteint que 21 cm à St.-Malo, celle de la composante M_4 , de même nature, y vaut 28 cm, celle de MN_4 : 11 cm ... Ainsi, quand ces trois ondes sont en phases, elles entraînent à elles seules plus de 50 cm de dénivellation du plan d'eau. Ce qui n'est pas négligeable.

L'exploitation du modèle réduit de la Manche pourra nous fournir des renseignements précieux pour définir les diverses composantes significatives de la marée, à partir des valeurs de leurs amplitudes et de leurs phases connues en quelques ports le long des côtes.

2 - LE MODELE REDUIT DE LA MANCHE

2.1 - Caractéristiques du modèle

Nous ne reprenons pas ici la description détaillée de ce modèle qui a déjà fait l'objet de plusieurs publications (CHABERT D'HIERES - 1962 - cf [2] - DALVERNY et FONTANET - 1959 - cf [9]). Rappelons simplement quelques-unes de ses caractéristiques principales :

- Echelles géométriques du modèle $[\lambda] = 1/50\ 000$ en plan et $[\zeta] = 1/500$ pour l'échelle verticale. La distorsion est donc de 100.
- Echelles des temps et des vitesses imposées par la similitude de FROUDE :

$$t_{\text{modèle}} = t_{\text{nature}} \times \frac{[\lambda]}{[\zeta]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2230}$$

$$v_{\text{modèle}} = v_{\text{nature}} \times \frac{[\lambda]}{[t]} = \frac{1}{22,3}$$

- Etant donné l'importance de la distorsion, le frottement est représenté artificiellement dans toute la masse, pour réaliser une répartition uniforme de la vitesse sur chaque verticale, conformément à l'une des hypothèses des ondes longues.
- L'onde de marée est produite sur le modèle par un générateur qui impose, à l'entrée de la Manche, le champ des vitesses en similitude avec celles créées par la marée océanique. Des canaux d'amortissement et de réglage permettent de simuler l'effet de la mer du Nord pour les marées de vives eaux moyennes, et d'absorber les ondes réfléchies par les fonds et les côtes de la Manche.
- Pour simuler l'accélération de CORIOLIS, le modèle est construit sur une plateforme tournante de 14 mètres de diamètre dont la rotation d'un tour en 50,4 secondes simule l'effet de rotation de la terre pour une latitude moyenne de 50°.

Soulignons la précision atteinte pour le mouvement de cette plateforme : planéité et horizontalité réglées à 0,01 mm, vitesse de rotation moyenne constante à 2.10^{-4} près .

2.2 - La similitude du modèle

La règle à satisfaire est la similitude de FROUDE. Seule la distorsion a posé des problèmes délicats : comme les ondes étudiées sont du type long, leur mouvement se caractérise en particulier par une répartition hydrostatique des pressions - cf § II-1/3 - qu'il faut dès lors respecter strictement sur le modèle. Un élément naturel a facilité la réalisation de cette contrainte : la pente naturelle des fonds marins est très faible, et la distorsion n'a pas introduit de très fortes pentes sur les fonds. Par ailleurs, comme nous l'avons noté plus haut, le frottement a été réparti dans toute la masse fluide, supprimant ainsi les gradients verticaux de vitesses. Par une vérification a posteriori, nous avons pu constater que la répartition des pressions est bien hydrostatique sur toute verticale de ce modèle, même dans les régions à fonds fortement accidentés, comme le voisinage du Raz Blanchard. La similitude est donc satisfaisante pour notre objet.

2.3 - Le réglage du modèle

On a choisi de procéder au réglage du modèle pour une marée de vive eau moyenne, le critère d'étalonnage choisi étant le marnage. Cette opération consiste à ajuster empiriquement la distribution des rugosités, et les réflexions dans les canaux annexes, de façon à obtenir le long des côtes, dans les ports où l'on possède au préalable des courbes observées de dénivellation, des marnages en bonne concordance avec ces données in situ. La précision atteinte est satisfaisante puisque les écarts sur les marnages le long des côtes ne dépassent pas 1 à 2% (CHABERT D'HIERES - 1962 - cf [2]). Les lignes d'égaux phases sont aussi en bon accord avec la nature (10 à 15 minutes d'écart au maximum).

Nous vérifierons plus loin qu'un tel réglage correspond à une bonne représentation sur le modèle des principales ondes semi-diurnes : M_2 , S_2 , N_2 ce point est naturellement essentiel pour la suite de nos travaux.

2.4 - Le générateur de marée

Le générateur de marées, situé à la limite atlantique du modèle, est du type porte dont le pivot est au point de coordonnées $49^{\circ}30'N$ - $6^{\circ}10'W$ environ, et dont l'extrémité côtoie la pointe Nord-ouest de la Bretagne. Pour réaliser des marées monopériodiques, ce générateur est mû par un système bielle-manivelle, et le mouvement produit est pratiquement sinusoïdal. Pour imposer à ce générateur un mouvement plus complexe composé de la somme de plusieurs composantes sinusoïdales, le volet est

équipé d'un système d'entraînement par vérin hydraulique dont le piston est asservi de manière à réaliser un déplacement imposé par une tension électrique donnée. Ce système, mis au point par M. CHABERT D'HIERES, présente des performances remarquables et assure des déplacements du générateur en coïncidence quasi parfaite avec les mouvements recherchés (l'écart absolu entre le mouvement réel et le mouvement à réaliser est toujours inférieur à 0,2mm pour des déplacements de l'ordre de plusieurs dizaines de centimètres. Les taux d'harmoniques observés pour des mouvements sinusoïdaux sont, par exemple, toujours inférieurs à quelques ‰).

2.5 - L'appareil enregistreur de niveau

Pour enregistrer la marée, nous disposons de limnimètres à pointes vibrantes, asservies à suivre le niveau de la surface libre. Ils sont reliés à une centrale de mesure qui digitalise les informations pour leur traitement ultérieur sur ordinateur. Le pouvoir de résolution de cet ensemble est de l'ordre de 0,1 mm, mais nos enregistrements sont faits sur un grand nombre de périodes du phénomène, ce qui nous permet d'assurer nos résultats à 0,05 mm près. La précision ainsi atteinte correspond à 2,5 cm dans la nature.

3 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE DE NOS METHODES SUR MODELE REDUIT

Rappelons que notre méthode consiste à étudier sur le modèle réduit les diverses composantes de la marée par groupes restreints, de façon à simplifier le problème de réalisation des conditions aux limites. Commençons par présenter l'exemple le plus simple : l'étude de l'onde dominante M_2 et ses deux principaux harmoniques directs : M_4 et M_6 .

3.1 - Etude de l'onde dominante et ses harmoniques

Nous avons noté au chapitre précédent que les caractéristiques de l'onde M_2 peuvent être obtenues avec une bonne approximation sur le modèle réduit en ne représentant aux limites marines de celui-ci que les conditions relatives à cette onde, en faisant abstraction de toutes les autres composantes du spectre. Puisque le modèle est réglé en similitude pour les ondes semi-diurnes d'origine astronomique, il suffit d'imposer au générateur un mouvement d'amplitude adéquate pour obtenir une représentation assez précise de cette onde dans toute l'étendue de la Manche.

Mais nous avons vu que cette simulation partielle de la marée permet, par ailleurs, de déterminer les harmoniques M_4 et M_6 , à condition de respecter de plus

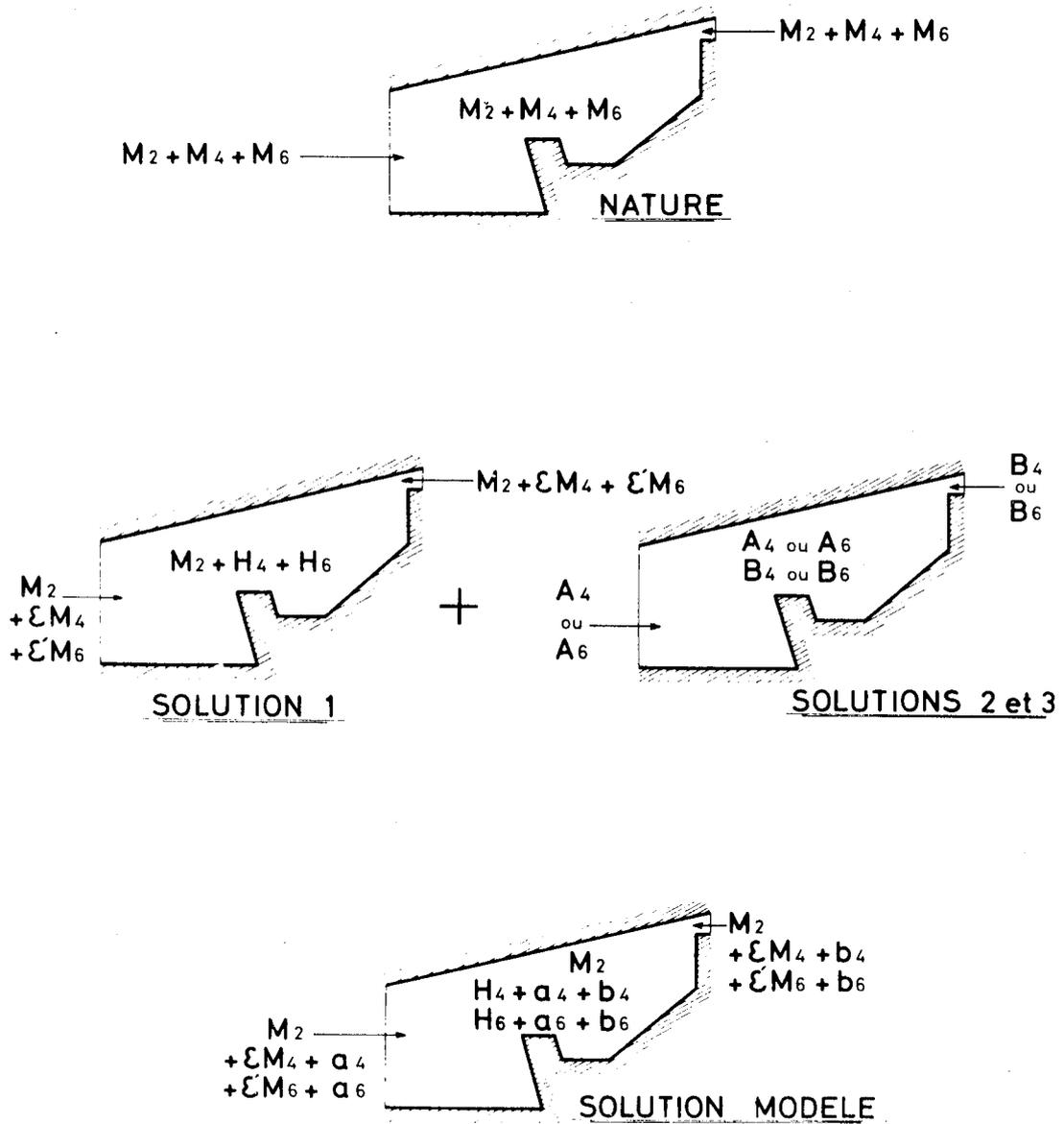


FIG.III.1/1

les conditions aux frontières relatives à ces ondes. Rappelons, en effet, que ces harmoniques M_4 et M_6 présents dans la Manche ont une double origine :

- * Une part I_{M_4} , I_{M_6} , est engendrée à l'intérieur de D par la propagation de l'onde M_2 .
- * L'autre part, E_{M_4} , E_{M_6} , résulte de la propagation à l'intérieur de D des ondes quart-diurnes et sixième-diurnes engendrées aux limites de la Manche par les conditions frontières.

En imprimant au générateur de marée un mouvement ayant la période de l'onde M_2 , on réalise en fait aux limites ouvertes de D, une loi de vitesse représentant la somme de :

- * l'onde M_2 , en similitude avec la nature,
- * et de diverses ondes que nous noterons E_{M_4} et E'_{M_6} , dont les amplitudes et les phases, à priori inconnues, sont fonctions de la cinématique du générateur de marée et de la géométrie de l'ensemble du domaine constitué par le modèle et ses canaux annexes.

On voit ainsi qu'avec notre simulation de la marée, on observe à l'intérieur de D une onde dont le fondamental M_2 représente certes correctement l'onde M_2 naturelle, mais dont les harmoniques H_4 et H_6 (on se limite à l'harmonique 3) ne correspondent pas aux ondes M_4 et M_6 existant in situ. L'ensemble $M_2 + H_4 + H_6$ constitue ce que nous appelons la solution 1 - cf figure III-1/1. Il y a donc lieu de corriger les conditions aux limites relatives à ces différents harmoniques en y superposant des ondes supplémentaires a_4 et b_4 , issues de la frontière atlantique, b_4 et b_6 , issues du Pas de Calais, de même fréquence que M_4 et M_6 , de façon à obtenir dans D les superpositions $H_4 + a_4 + b_4$ et $H_6 + a_6 + b_6$ qui représentent une approximation suffisante des composantes M_4 et M_6 naturelles. Cette correction peut se faire directement sur le modèle, à l'aide de générateurs complémentaires placés à la limite Atlantique et à la limite Mer du Nord. Mais la mise au point d'un tel ensemble est complexe, et nous avons préféré chercher à atteindre les mêmes résultats par un procédé différent et plus simple à la fois.

Rappelons à cet effet certains résultats du chapitre précédent. Nous avons noté, par exemple, que l'onde M_4 vérifie un système d'équations du type :

$$M \cdot S_{12}^{(2)} = J'_{12} [Q_{11}, 2\omega_4 t]$$

Nous reprenons les mêmes notations que précédemment.

La solution H_4 , déterminée sur le modèle réduit physique, constitue une solution particulière de ce problème non homogène.

Les solutions a_4 et b_4 que nous voulons y ajouter sont, elles, des solutions de l'équation homogène :

$$M \cdot S_{12}^{(2)} = 0$$

Elles peuvent donc être étudiées séparément sur le modèle réduit, en imposant à la limite Atlantique pour l'onde a_4 , à la limite Mer du Nord pour l'onde b_4 , un mouvement de période quart-diurne. Mais les caractéristiques de ces ondes sont a priori inconnues. Nous les définissons avec une amplitude quelconque : nous obtenons ainsi les ondes A_4 et B_4 - nous les appelons solutions 2 et 3 - cf figure III-1/1. Ces ondes étant considérées comme linéaires, il est possible de passer de A_4 à a_4 , B_4 à b_4 par une simple affinité sur le réseau des amplitudes, et un simple décalage sur le réseau des phases. Le problème qui reste à résoudre est alors de déterminer les coefficients d'affinité et les valeurs des déphasages à appliquer pour que la superposition $H_4 + a_4 + b_4$ coïncide de façon satisfaisante avec l'onde M_4 observée in situ.

Un raisonnement analogue s'applique à l'onde M_6 .

L'étude de ces ondes se fait donc en trois étapes :

* Simulation de l'onde génératrice M_2 sur le modèle : à partir des enregistrements de la marée sur celui-ci, on décompose le phénomène global en son fondamental et ses harmoniques :

$$M_2 + H_4 + H_6$$

soit :

$$A(x, y, t) = A_{M_2} \cos(\omega_{M_2} t - \chi_{M_2}) + A_{H_4} \cos(2\omega_{M_2} t - \chi_{H_4}) + A_{H_6} \cos(3\omega_{M_2} t - \chi_{H_6}) + \varepsilon(x, y, t)$$

avec :

$A_{M_2}(x, y)$, $A_{H_4}(x, y)$, $A_{H_6}(x, y)$: amplitudes des composantes M_2 , H_4 , H_6
 $\chi_{M_2}(x, y)$, $\chi_{H_4}(x, y)$, $\chi_{H_6}(x, y)$: retards de phase de ces composantes au point (x, y) par rapport à une origine des temps donnée : le passage du maximum du fondamental M_2 à St-Malo

$\varepsilon(x, y, t)$: écart résiduel de cette décomposition par rapport au signal réel.

* Etude des caractéristiques des ondes A_4 , B_4 , A_6 , B_6 , dont on ne retient que la composante fondamentale, négligeant les contributions non linéaires :

$$f'(x, y, t) = A_{A_4} \cos(2\omega_{M_2} t - \phi_{A_4}) + \varepsilon'(x, y, t)$$

avec :

$A_{A_4}(x, y), \dots$: amplitude de l'onde A_4 ,

$\phi_{A_4}(x, y), \dots$: retard de phase de cette composante au point (x, y) par rapport à son passage à St-Malo

* Détermination des coefficients d'affinité k_{A_4} , k_{A_6} entre A_4 et a_4 , A_6 et a_6 ..., des déphasages ψ_{A_4} , ψ_{B_4} , ... entre a_4 et A_4 , a_6 et A_6 , ... et superposition des composantes :

$$H_4 + a_4 + b_4$$

$$H_6 + a_6 + b_6$$

soit M'_4 l'onde ainsi définie :

$$A_{M'_4} \cos(2\omega_{M_2} t - \chi_{M'_4}) = A_{H_4} \cos(2\omega_{M_2} t - \chi_{H_4}) + k_{A_4} A_{A_4} \cos(2\omega_{M_2} t - \phi_{A_4} - \psi_{A_4}) + k_{B_4} A_{B_4} \cos(2\omega_{M_2} t - \phi_{B_4} - \psi_{B_4})$$

Ces paramètres k_{A_4} , k_{B_4} , ψ_{A_4} , ψ_{B_4} relatifs à l'onde quart-diurne sont à déterminer de façon à faire coïncider l'onde M'_4 ainsi définie avec l'onde M_4 observée in situ. Ils doivent donc vérifier en chaque point (x, y) de D, la relation :

$$A_{M_4} e^{-j\chi_{M_4}} = A_{H_4} e^{-j\chi_{H_4}} + k_{A_4} A_{A_4} e^{-j(\phi_{A_4} + \psi_{A_4})} + k_{B_4} A_{B_4} e^{-j(\phi_{B_4} + \psi_{B_4})}$$

qui forme un système de deux équations à quatre inconnues. Deux points de comparaison avec la nature suffisent pour permettre le calcul de ces paramètres k_{A_4} , k_{B_4} , ψ_{A_4} et ψ_{B_4} .

Remarque : En fait, nous le verrons dans l'application présentée au chapitre suivant, on préfère utiliser davantage de points de comparaison pour cette détermination afin de répartir les écarts éventuels entre la solution ainsi construite et la réalité, sur toute la Manche. Nous utilisons à cet effet une méthode d'erreur minimale, soit :

$$\varepsilon_4^i - j\eta_4^i = A_{M_4} e^{-j\chi_{M_4}} - A_{M'_4} e^{-j\chi_{M'_4}}$$

le vecteur représentant dans le plan complexe l'écart entre l'onde M_4 et la solution M'_4 au point (x,y) d'indice i . Si nous choisissons m points de comparaison, nous déterminons les paramètres k_A, k_B, \dots de façon à rendre minimale la somme des carrés des modules de ces vecteurs :

$$\sum_{i=1}^m (\varepsilon_4^i)^2 + (\eta_4^i)^2$$

Cette variante classique de résolution des systèmes surabondants par la méthode des moindres carrés a l'avantage de conduire à un ajustement des ondes telles que leurs phases et leurs amplitudes soient réglées au mieux aux différents points de comparaison utilisés.

3.2 - Généralisation de l'étude d'une onde quelconque

L'étude d'une onde quelconque se fera suivant une méthode identique à celle présentée ci-dessus.

* Comme toute onde génératrice autre que l'onde dominante doit être étudiée en présence de cette dernière, sa détermination se fait donc à l'aide du générateur d'ondes à plusieurs composantes, suivant une procédure semblable à celle permettant de définir l'onde M_2 , à la différence près que nous avons dans ce cas, non plus une seule onde fondamentale sur le modèle, mais deux composantes induites simultanément à la limite Atlantique : l'onde fondamentale, et l'onde à étudier. Si cette dernière est une semi-diurne, la limite Mer du Nord, convenablement réglée pour ce groupe d'ondes, est automatiquement correcte (c'est ce que nous vérifierons expérimentalement dans l'application présentée au chapitre suivant). Mais si la composante à étudier correspond à un autre groupe d'ondes, diurne par exemple, il y a lieu de modifier le procédé proposé ci-dessus, de manière à réaliser des conditions correctes à la frontière Est de la Manche.

D'autres simplifications sont d'ailleurs possibles pour l'étude de ces composantes d'origine astronomique. Nous ne voulons pas entrer ici dans le détail de ces applications, mais nous en donnerons un exemple au chapitre suivant.

* Pour l'étude de toute autre onde d'origine non linéaire, MS_4 par exemple, la procédure est analogue à celle présentée pour la détermination des composantes M_4 et M_6 . Elle se réalise en trois étapes :

- La simulation de la propagation simultanée des ondes génératrices sur le modèle (M_2 et S_2 par exemple, pour la composante MS_4). Appelons HG_4 l'onde

d'interaction donnée dans D par le modèle. Rappelons que cette onde est en fait la somme de la part I_{MS_4} , engendrée dans la Manche par la propagation simultanée de M_2 et S_2 , et des deux ondes ε_{MS_4} et ε'_{MS_4} entrant dans D par les limites Atlantique et Mer du Nord, et correspondant aux harmoniques créées par le générateur d'ondes, et aux ondes réfléchies dans les canaux connexes au modèle.

- L'étude des caractéristiques des ondes entrant par les limites, avec la fréquence de l'onde étudiée (celle de MS_4 pour notre exemple), et se propageant librement dans le modèle.
- La détermination des coefficients d'affinité, et des déphasages à appliquer à ces diverses ondes pour faire coïncider la solution établie avec les données de mesures faites in situ.

3.3 - Applications pratiques : étude du spectre complet de la marée dans la Manche

Ces méthodes ont été appliquées à la détermination de presque toutes les ondes significatives de la marée dans la Manche, dont on a donné un classement approximatif par ordre d'importance décroissant au chapitre I-3/3. C'est ainsi que nous avons étudié les composantes d'origine astronomiques :

- semi-diurnes : $M_2, S_2, N_2, K_2, \nu_2$ - cf [3] , [4] -
- diurnes : K_1, O_1, P_1, Q_1 - cf [5] -

et les composantes d'origine non linéaires :

- semi-diurnes : $M_2 + 2MS_2, 2SM_2$ - cf [6] -
- quart-diurnes : M_4, MS_4, MN_4, MK_4 - cf [3] , [7]
- sixième-diurnes : $M_6, 2MS_6, 2MN_6, 2MK_6$ - cf [3] , [8]

L'étude des ondes mixtes $L_2 + 2MN_2$ et $2N_2 + 2MK_2$ est en cours. Celle des ondes d'interaction triple comme $MSN_2, MSN_6 \dots$ reste à faire. Elle est prévue pour un proche avenir. L'ensemble de ces résultats sera regroupé dans un atlas proposant les configurations d'amplitude et de phase de toutes les ondes harmoniques significatives de la marée dans la Manche. Ces résultats sont originaux, la seule onde connue jusqu'à présent de façon précise et dans toute l'étendue de la Manche étant la composante dominante M_2 .

TABLEAU III.1/1

ORIGINE des DONNEES : SHOM: Service Hydrographique et Océanographique - Paris
 DHI: Deutsches Hydrographisches Institut - Hambourg
 BHI: Bureau Hydrographique International - Monaco
 ICOT: Institut of Coastal Oceanography and Tides. Liverpool

DATE: époque des observations.

DUREE: durée des enregistrements en mois.

A_0 : amplitude de l'onde

g : retard de phase de l'onde au point considéré par rapport au passage de l'astre correspondant au méridien de Greenwich.

LIEU	ORIGINE	DATE	DUREE	M ₂		S ₂		MS ₄	
				A_0 cm	g d°	A_0 cm	g d°	A_0 cm	g d°
ST HELIER (Jersey) 49°41'N - 2°07'W	ICOT	1952	12	336,0	182,2	132,4	230,7	14,7	355,0
	DHI	1962	-	335,6	182,0	132,0	231,0	14,7	355,0
ST SERVAN 48°38'N - 2°02'W	SHOM	1875	12	380,8	177,1	148,1	225,0	8,35	331,1
	SHOM	1876	12	379,5	178,1	146,3	225,0	7,82	329,1
	DHI	1878	12	375,5	173,8	149,4	228,0	20,29	342,4
	DHI	1962	-	374,0	180,0	149,0	229,0	20,53	342,0
	SHOM	1964	12	368,7	178,0	148,7	227,4	20,7	335,1
CHERBOURG 49°39'N - 1°37'W	SHOM	1877	12	188,1	228,6	69,1	273,2	2,44	91,8
	SHOM	1883	12	187,7	228,5	68,95	273,3	2,39	91,6
	DHI	1901	12	187,0	230,2	69,38	273,1	8,03	73,8
	DHI	1962	-	186,3	230,0	69,0	273,0	7,82	73,9
LE HAVRE 49°23'N - 0°06' E	SHOM	1895	12	266,54	285,3	88,02	332,9	12,4	168,5
	DHI	1939	12	263,15	284,9	87,03	331,8	16,12	127,8
	DHI	1962	-	261,4	285,0	88,0	332,0	16,6	127,0
	SHOM	1964	12	261,1	284,1	88,0	330,6	16,1	129,6
BARFLEUR 48°40'N - 1°15'W	SHOM	1869	1,5	194,9	261,0	71,0	302,0	9,5	62,7
PORT-EN-BESSIN 49°21'N - 0°46'W	SHOM	1868	1,5	234,2	272,3	76,6	318,3	13,2	102,1
FECAMP 48°46'N - 0°23' E	DHI	1942	12	267,63	298,6	87,25	345,7	8,54	206,5
	DHI	1962	-	266,3	298,0	87,0	345,0	8,8	206,0
DIEPPE 49°56'N - 1°05' E	DHI	1941	12	305,63	312,6	97,42	1,7	15,96	280,0
	DHI	1962	-	303,4	312,0	98,0	2,0	15,6	352,0
	SHOM	1964	24	307,9	311,1	101,5	1,1	17,4	241,6
DOUVRES 51°02'N - 1°19' E	BHI	1960	12	228,05	332,9	71,38	24,1	16,8	273,2
	DHI	1962	-	223,4	330,0	71,0	21,0	18,6	277,0
HASTINGS 50°51'N - 0°35' E	BHI	1963	1	247,2	323,0	88,7	17,0	14,9	283,0
EASTBOURNE 50°46'N - 0°17' E	BHI	1959	1	247,8	325,0	80,5	6,0	9,4	288,0
NEW HAVEN 50°47'N - 0°04' E	ICOT	1857	12	222,0	319,8	72,3	8,4	5,4	282,9
	BHI	1959	1	225,6	322,0	71,0	8,0	3,0	277,0
	DHI	1962	-	221,4	322,0	76,0	8,0	4,9	300,0
BRIGHTON 50°49'N - 0°03'W	BHI	1959	1	218,5	322,0	69,5	8,0	4,6	339,0
SHOREHAM 50°50'N - 0°15'W	BHI	1959	1	212,4	322,0	65,5	8,0	3,4	353,0
LITTLEHAMPTON 50°48'N - 0°32'W	BHI	1959	1	197,5	323,0	54,3	16,0	5,5	317,0

TABLEAU III.1/1

LIEU	ORIGINE	DATE	DUREE	M ₂		S ₂		MS ₄	
				$\frac{1}{g}$ cm	g d°	$\frac{1}{g}$ cm	g d°	$\frac{1}{g}$ cm	g d°
BOGNOR REGIS 50°47'N - 0°40'W	BHI	1959	1	182,0	323,0	60,4	10,0	4,3	35,0
SELSEY BILL 50°43'N - 0°47'W	BHI	1963	1	168,9	321,0	57,9	10,0	6,1	40,0
NAB TOWER 50°40'N - 0°57'W	BHI	1935	12	143,5	317,3	44,8	0,9	9,8	51,3
	DHI	1962	-	143,4	317,0	45,0	1,0	9,8	51,0
PORTSMOUTH 50°48'N - 1°07'W	BHI	1930	12	142,9	326,1	44,1	11,0	13,6	67,7
	ICOT	1962	12	140,0	328,1	42,2	13,2	13,3	71,7
	DHI	1962	-	142,4	326,0	44,0	11,0	13,7	68,0
SOUTHAMPTON 50°54'N - 1°24'W	BHI	1924	12	135,9	329,2	40,7	15,1	16,5	77,4
	DHI	1962	-	135,6	329,0	41,0	15,0	16,6	78,0
SEAVIEW 50°49'N - 1°06'W	BHI	1894	1	134,7	327,0	41,8	6,0	10,7	52,0
SANDOWN 50°38'N - 1°08'W	BHI	1958	2	118,8	317,0	37,8	8,0	4,8	47,0
FRESHWATER BAY 50°40'N - 1°31'W	BHI	1938	1	61,6	276,0	21,3	311,0	11,0	68,0
CHRISTCHURCH 50°48'N - 1°45'W	BHI	1963	1	41,8	285,0	12,5	312,0	8,29	102,0
BOURNEMOUTH 50°43'N - 1°52'W	BHI	1963	1	39,7	270,0	18,0	299,0	11,7	84,0
SWANAGE 50°37'N - 1°57'W	BHI	1963	1	36,3	260,0	18,3	285,0	10,1	78,0
PORTLAND 50°34'N - 2°26'W	BHI	1924	12	63,0	193,9	32,4	142,9	7,5	81,6
	DHI	1962	-	63,4	194,0	32,0	143,0	7,8	82,0
BRIDPORT 50°42'N - 2°45'W	BHI	1951	1	117,0	169,0	52,4	230,0	7,9	121,0
LYME REGIS 50°45'N - 2°56'W	BHI	1960	1	110,9	178,0	51,2	229,0	4,6	130,0
EXMOUTH 50°37'N - 3°25'W	BHI	1960	1	113,1	184,0	46,6	246,0	2,4	192,0
TEIGNMOUTH 50°35'N - 3°30'W	BHI	1960	1	128,3	172,0	53,6	228,0	6,7	151,0
TORQUAY 50°28'N - 3°31'W	BHI	1960	1	130,8	172,0	55,5	227,0	9,1	154,0
KINGSWEAR 50°21'N - 3°34'W	BHI	1960	1	137,8	169,0	56,1	224,0	6,1	216,0
DARTMOUTH 50°22'N - 3°35'W	BHI	1937	1	139,0	165,0	56,4	220,0	7,6	162,0
SALCOMBE 50°15'N - 3°47'W	BHI	1960	1	148,4	169,0	57,3	212,0	8,5	182,0
DEVONPORT 50°22'N - 4°11'W	BHI	1954	12	167,2	153,2	61,3	206,0	10,0	186,8
	ICOT	1962	12	169,0	154,4	60,3	206,7	9,5	188,2
	DHI	1962	-	164,8	153,0	61,0	206,0	9,8	187,0
FOWEY 50°20'N - 4°38'W	BHI	1961	1	165,8	148,0	53,9	198,0	7,3	210,0
FALMOUTH 50°09'N - 5°03'W	BHI	1961	1	163,7	147,0	56,1	196,0	10,7	208,0

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BUREAU HYDROGRAPHIQUE INTERNATIONAL - 1966
 "Marées - Constantes harmoniques"
 Publication spéciale N°26 - MONACO
- [2] G. CHABERT-D'HIERES - 1962
 "Réglage et exploitation de la plaque tournante de Grenoble"
 Mémoires et travaux de la SHF - suppl. au vol. 1 - La Houille Blanche
- [3] G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST - 1970
 "Etude des phénomènes non linéaires dérivés de l'onde lunaire
 moyenne M_2 dans la Manche"
 Cahiers océanographiques - vol XXII - 6 -
- [4] G. CHABERT-D'HIERES et C. LE PROVOST - 1971
 "Détermination des caractéristiques des composantes S_2 , N_2 et K_2
 dans la Manche, à l'aide d'un modèle réduit hydraulique"
 C.R. Acad. Sciences - t 272 - Série A - pp. 1603-1606
- [5] G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST - 1971
 " Détermination des caractéristiques des composantes diurnes K_1 et O_1
 dans la Manche, sur modèle réduit hydraulique"
 C.R. Acad. Sciences - t 272 - Série A - pp.1026-1029
- [6] G. CHABERT-D'HIERES et C. LE PROVOST - 1972
 "Détermination des composantes d'interaction ($2MS_2$) et $2SM_2$
 dérivés de la propagation des ondes de marées M_2 et S_2 dans la
 Manche, à l'aide d'un modèle hydraulique"
 C.R. Acad. Sciences - t 275 - Série A - pp.341-344
- [7] G. CHABERT-D'HIERES et C. LE PROVOST - 1973
 "Les ondes quart-diurnes d'interaction non linéaire MS_4 , MN_4 et MK_4
 dans la Manche et leur comparaison à l'onde quart-diurne principale M_4 "
 C.R. Acad. Sciences - t 276 - Série A - pp.153-156

- [8] G. CHABERT-D'HIERES et C. LE PROVOST - 1973
"Les ondes sixième-diurnes d'interaction $2M_{S_6}$, $2M_{SM_6}$, $2M_{MN_6}$ et $2M_{K_6}$
dans la Manche, et leur comparaison à l'onde sixième diurne prin-
cipale M_6 "
C.R. Acad. Sciences - t.276 - Série A - pp. 1581-1584
- [9] J. DALVERNY et P. FONTANET - 1959
"Réalisation de plaques tournantes - Plaque de Grenoble"
La Houille Blanche n°5 - pp.598-606

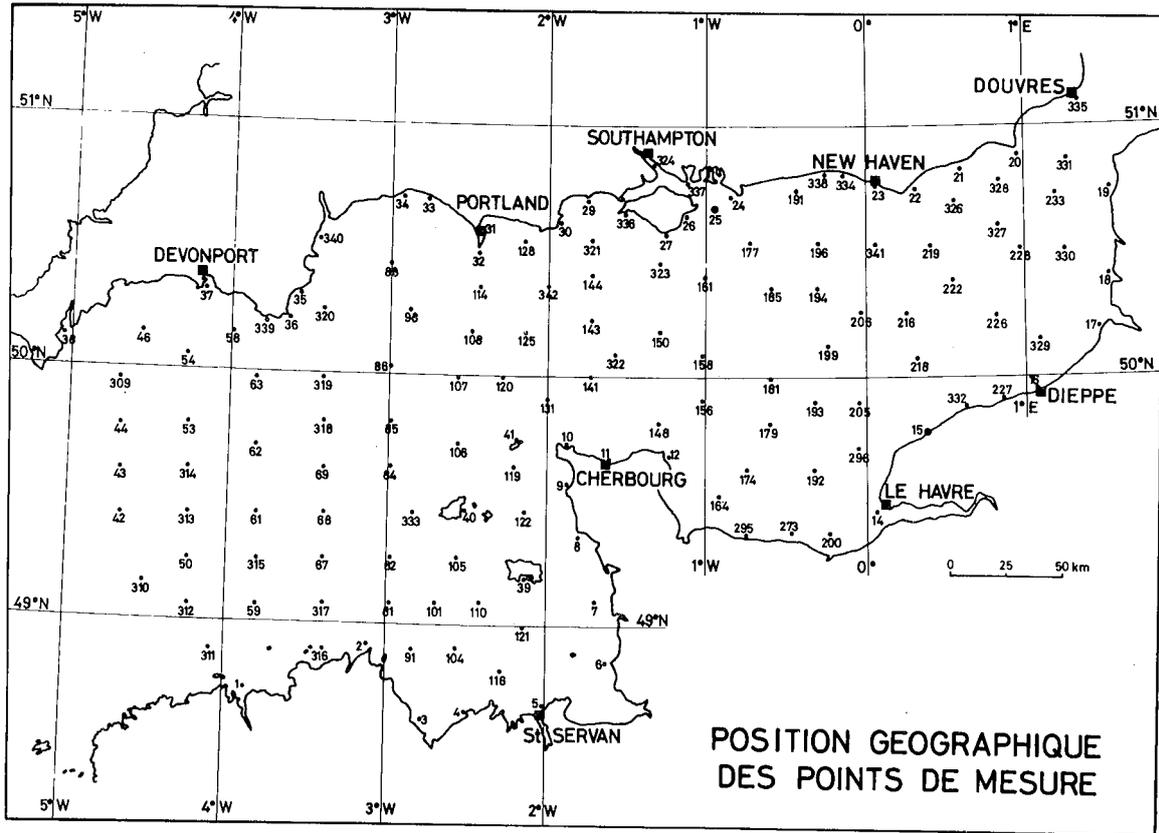


FIG. III. 2/1

CHAPITRE III-2

EXEMPLE D'APPLICATION

A L'INTERACTION ENTRE LES ONDES M_2 ET S_2 - ETUDE DE LA COMPOSANTE QUART DIURNE MS_4

Afin d'illustrer l'exposé du chapitre précédent sur nos méthodes de détermination des composantes de la marée dans la Manche, à l'aide du modèle réduit tournant de cette mer, nous présentons ci-après l'étude détaillée d'une onde particulière engendrée par l'interaction entre l'onde dominante M_2 , et la principale onde secondaire du spectre des marées dans la Manche, à savoir S_2 . Nous avons choisi la composante quart-diurne MS_4 . Son étude va se faire en trois étapes suivant le programme défini au paragraphe III-1/3-2.

1 - SIMULATION SUR LE MODELE REDUIT DE LA PROPAGATION SIMULTANNEE DES ONDES M_2 ET S_2 - RECHERCHE DES CARACTERISTIQUES DE L'ONDE HG_4

1.1 - Simulation des ondes M_2 et S_2 - Enregistrement de la marée

Comme nous l'avons déjà noté, le modèle est réglé pour les marées semi-diurnes. A l'aide du générateur de marée, nous induisons à la limite Atlantique une onde telle que, à St-Malo, port de référence pour nos essais, nous obtenions des amplitudes correctes pour les composantes M_2 et S_2 , ce dont nous nous assurons au moyen d'une analyse spectrale. Nous verrons par la suite que ce contrôle ponctuel suffit à garantir une bonne représentation de ces deux composantes sur tout le domaine marin considéré.

Nous procédons à des enregistrements de la dénivellation en 145 points : la carte de la figure III-2/1 en donne la répartition dans la Manche. Les moyens dont nous disposons nous permettent l'observation simultanée de 3 points ; pour explorer l'ensemble du réseau, il convient donc de procéder à 3×48 mesures, plus un essai de réglage à St-Malo. Il importe naturellement de raccorder en phase de

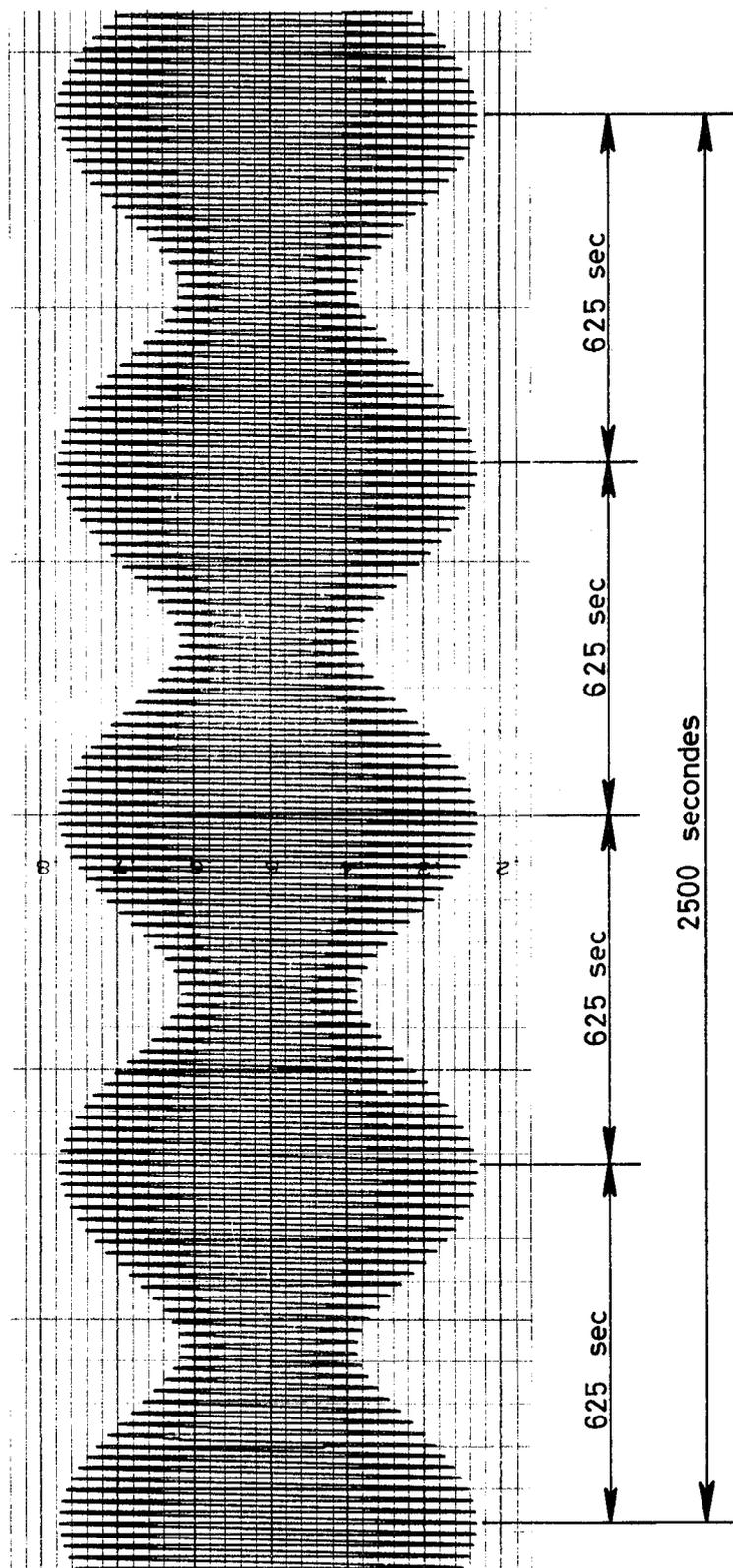


FIG. III.2/2: Allure de la marée $M_2 + S_2$ sur le modèle

de façon simple ces divers enregistrements successifs les uns par rapport aux autres. Nous cherchons donc à réaliser chacune des mesures dans les mêmes conditions, c'est-à-dire à simuler un essai simultané en 145 points, ce qui exige un déphasage imposé entre les ondes M_2 et S_2 . Malheureusement de tels essais sont impossibles à réaliser à partir d'un fonctionnement continu du modèle réduit, car les périodes de ces deux ondes sont pratiquement incommensurables entre elles en sorte que la période du mouvement résultant est trop grande. Nous avons éliminé cette difficulté en modifiant légèrement leurs fréquences de façon à rendre le phénomène global périodique.

Par raison de similitude, la période exacte de l'onde M_2 est sur le modèle de 19,9967 secondes et celle de S_2 de 19,3196 secondes, soit des fréquences de 0,0500082 Hz et 0,0517608 Hz. En choisissant de réaliser des ondes de fréquence légèrement différentes :

$$\begin{aligned} f_{M_2} &= 0,05 \text{ Hz} & \text{soit} & \quad T_{M_2} = 20 \text{ secondes} \\ f_{S_2} &= 0,0516 \text{ Hz} & & \quad T_{S_2} = 19,3798 \text{ secondes} \end{aligned}$$

on ne change guère les caractéristiques du phénomène, car les écarts de fréquence par rapport aux valeurs exactes sont faibles. Les valeurs approchées retenues présentent un double avantage :

- 1- Ces fréquences sont faciles à réaliser électroniquement en vue du pilotage du vérin d'entraînement du générateur.
- 2- Le phénomène devient périodique en 125 périodes de l'onde M_2 et 129 périodes de S_2 .

La marée sur le modèle se présente alors comme un signal pseudo-sinusoïdal périodique sur 2500 secondes et comportant quatre battements au cours de cette période - cf figure III-2/2. En vue du traitement numérique de ces signaux, nous avons décidé de les enregistrer sur un battement complet, soit 625 secondes. Nous reviendrons sur ce point plus loin ; notons ici simplement qu'une telle durée d'enregistrement facilite la séparation des ondes composant le spectre total du signal.

1.2 - Traitement numérique des enregistrements

Nous voulons exprimer le signal enregistré en chaque point, sous la forme :

$$(1) \quad \mathcal{A}(x, y, t) = \sum_{i=0}^N \mathcal{A}_i(x, y) \cos [\omega_i t - R_i(x, y)] + \varepsilon_N(x, y, t)$$

avec : N : nombre de composantes prises en compte

ω_i : pulsation de ces composantes

A_i : amplitude de ces composantes

R_i : retard de phase de ces composantes par rapport à une origine des temps déterminée

\mathcal{E}_N : résidu de cette décomposition spectrale limitée à N composantes

1.2.1 - Composition du spectre

Différents problèmes se posent, que nous allons analyser ci-après : l'analyse spectrale de tels signaux est complexe, nous l'avons vu au chapitre I-III § 2. Précisons les principales composantes résultant, dans la nature, de la propagation simultanée des ondes M_2 et S_2 et correspondant donc au problème partiel étudié :

* ondes à longues périodes : MS_0 , vitesse angulaire : 1,016 °/h
période : 14 j. 21 h.

* ondes semi-diurnes :

onde	M_2	S_2	$2MS_2$	$2SM_2$	$3M2S_2$
vitesse angulaire °/h	28,984	30,00	27,968	31,016	26,952
période h.mn	12 h 25	12 h 00	12 h 52	11 h 36	13 h 21

* ondes quart-diurnes :

onde	M_4	MS_4	S_4	$3MS_4$	$3SM_4$
vitesse angulaire °/h	57,968	58,984	60,0	56,952	61,016
période h.mn	6 h 12	6 h 06	6 h 00	6 h 19	5 h 54

* ondes sixième-diurnes :

onde	M_6	$2MS_6$	$2SM_6$	S_6	$4MS_6$	$4SM_6$
vitesse angulaire °/h	96,952	87,968	88,984	90,000	85,936	91,016
période h.mn	4 h 08	4 h 06	4 h 03	4 h 00	4 h 11	3 h 57

* onde huitième diurne : M_8 : vitesse angulaire 115,936 °/h
période : 3 h 06' 18''

Sur le modèle réduit, les ondes H_2 et G_2 (identiques aux ondes M_2 et S_2 naturelles mais dont les harmoniques H_4 et G_4 diffèrent de M_4 et S_4) ont les fréquences de 0,05 Hz et 0,0516 Hz. Celles des principales ondes harmoniques ou d'interaction attendues sont les suivantes :

Onde	H_2	G_2	$2HG_2$	$2GH_2$	$3H2G_2$	H_4	HG_4	G_4	$3HG_4$
Fréquence Hz	0,05	0,0516	0,0484	0,0532	0,0468	0,1000	0,1016	0,1032	0,0984

Onde	$3GH_4$	H_6	$2HG_6$	$2GH_6$	G_6	$4HG_6$	$4GH_6$	HG_0
Fréquence Hz	0,1048	0,150	0,1516	0,1532	0,1548	0,1484	0,1564	0,0016

1.2.2 - Choix de la durée d'enregistrement et de la fréquence d'échantillonnage

Les fréquences de ces diverses composantes sont distantes de 0,0016 Hz. Or nous savons que la transformée de FOURIER d'une courbe sinusoïdale tronquée sur un intervalle de temps $[-T, +T]$ donne une image de cette fonction dans le domaine des fréquences de la forme :

$$f(t) = A \cos 2\pi \nu_0 t \iff$$

$$(2) \quad F(\nu) = \frac{A}{2} \left[\frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_0)}{\pi(\nu - \nu_0)} + \frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_0)}{\pi(\nu + \nu_0)} \right]$$

cf chapitre I-3/2. L'allure de cette courbe $F(\nu)$ est rappelée sur la figure III-2/3.

Pour que l'une quelconque des composantes du spectre global des signaux que nous avons à étudier n'apporte aucun résidu dans le calcul des autres fréquences du spectre, il faut et il suffit que la durée d'enregistrement soit :

$$2T = \frac{1}{0,0016} = 625 \text{ secondes}$$

C'est ce qui justifie le choix de la durée de nos enregistrements : nous devons enregistrer nos signaux sur un pseudo-battement complet du phénomène, de façon à éliminer au mieux les résidus introduits artificiellement par la méthode d'analyse de FOURIER.

En ce qui concerne l'échantillonnage, rappelons que le théorème de SHANNON nous indique qu'une courbe peut être définie complètement par ses échantillons, pris à la fréquence F_e , si aucune composante significative n'existe dans son spectre au-dessus de la fréquence $F_e/2$. Une analyse spectrale détaillée de la marée enregistrée sur le modèle en un point où les harmoniques sont importants, par exemple le Havre, montre, nous le verrons plus loin, que le spectre résultant présente des raies discernables du bruit de fond jusqu'à M_{16} dont la fréquence est 0,4 Hz. Il faut donc, pour ne pas perdre d'informations utiles, choisir au moins :

$$F_e = 0,8 \text{ Hz} \quad \text{soit} \quad \Delta T_e = 1,25 \text{ s}$$

Mais il convient de tenir compte aussi de la présence sur le modèle d'une onde de fréquence parasite, liée à la régulation du mouvement de rotation de la plateforme, à la valeur de 1,15 Hz. Suivant la fréquence d'échantillonnage retenue, on risque donc de voir cette fréquence parasite se superposer à une fréquence significative des spectres réels à étudier. La figure III-2/4 permet de situer la position de cette raie parasite, après repliement du spectre, en fonction de la fréquence de digitalisation du signal.

On constate en particulier que, entre 0,95 Hz et 1,35 Hz, la fréquence en cause se localise dans le domaine du spectre qui nous intéresse essentiellement : celui qui va des longues périodes à l'onde M_8 . Or cette cause d'erreur est à exclure. Il reste donc deux domaines de fréquence d'échantillonnage possible : de 0,8 à 0,95 Hz, et au-dessus de 1,35 Hz. Pour des raisons de commodité, au niveau du système de pilotage des prises d'information, nous avons retenu comme fréquence d'échantillonnage la valeur 1,5 Hz, soit :

$$\Delta T_e = 2/3 \text{ seconde.}$$

La raie parasite correspondant à la fréquence de régulation se localise alors sur l'onde M_{14} : cette fréquence n'est donc plus très significative dans nos analyses, mais l'harmonique correspondant a toujours une amplitude très faible dans la Manche. Dès lors, l'erreur commise est pratiquement sans importance.

Pour simplifier le générateur d'impulsions des prises d'information, nous avons choisi d'enregistrer le phénomène sur un nombre entier de périodes de l'onde M_2 , ce qui conduit aux chiffres suivants :

Cadence d'échantillonnage	: 0,666 s
Durée d'enregistrement	: 640 s (32 périodes de M_2)
Nombre d'observations	: 960

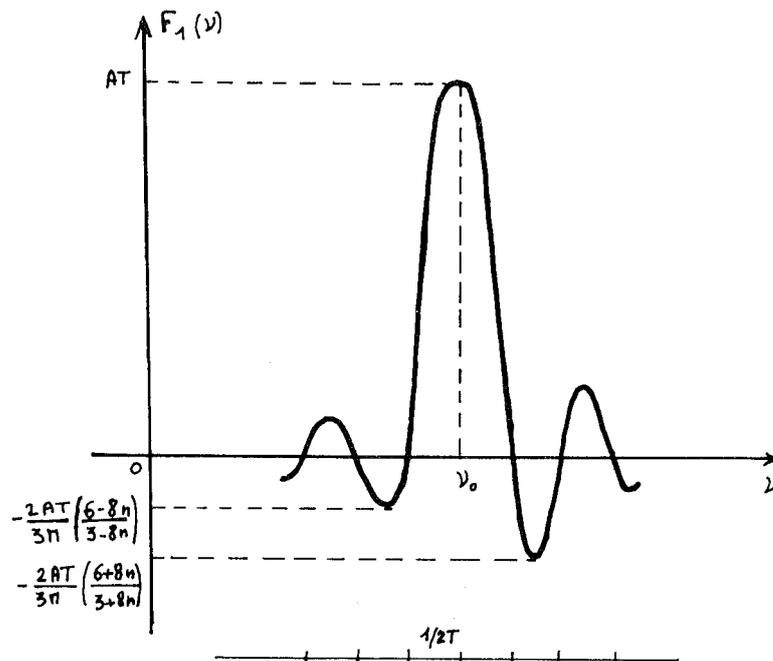


FIG. III.2/3 : Transformée de Fourier de
 $f(t) = A \cos 2\pi\nu_0 t$
 définie sur $(-T = n/\nu_0; +T)$

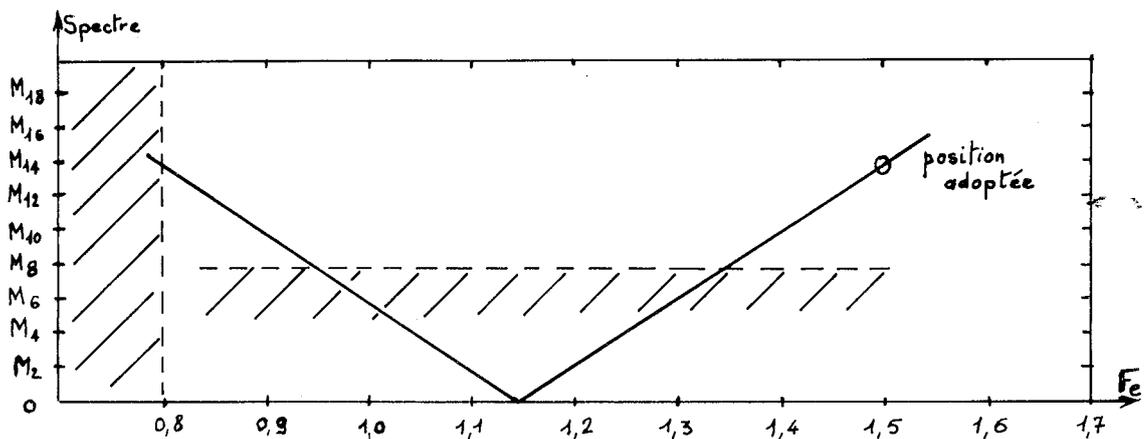


FIG. III.2/4 : Position de la raie parasite dans le spectre
 en fonction de la fréquence d'échantillonnage F_e



LE MODELE DE LA MANCHE SUR SA PLATEFORME TOURNANTE

1.2.3 - Méthode numérique d'analyse

Puisque nous nous plaçons, quant à la durée d'enregistrement et à la fréquence d'échantillonnage, dans les conditions les plus favorables à l'élimination des résidus des différentes ondes les unes sur les autres, nous adoptons la méthode la plus classique d'analyse harmonique - cf [3] - permettant de calculer directement, à partir des valeurs ζ_i de la dénivellation $\zeta(t)$ digitalisée, les amplitudes et les phases des composantes correspondant aux fréquences qui nous intéressent, à savoir :

$M_2, S_2, 2MS_2, 2SM_2, 3M2S_2$

$M_4, S_4, MS_4, 3MS_4, 3SM_4$

$M_6, 2MS_6, 2SM_6$

M_8

MS_0

Cependant, comme notre analyse ne porte pas sur 625 secondes exactement, à cause du pas d'échantillonnage de la dénivellation (elle est en fait réalisée sur $937 \times 2/3 \text{ s} = 624, 666 \text{ s}$), nous avons complété le schéma classique de notre analyse harmonique par une procédure du type "marées différences" préconisée par EYRIES en 1965 - cf [1] et [2]. Nous avons ainsi retranché, après le calcul de l'amplitude et de la phase de chaque onde (d'indice i), la contribution de cette composante à la dénivellée $\zeta(t)$, de façon à éliminer les résidus éventuels de cette onde sur ses voisines. Cette suite d'opération est naturellement programmée de façon à retrancher d'abord les ondes les plus importantes, essentiellement M_2 et S_2 qui ont seules une incidence résiduelle non négligeable sur leurs composantes voisines.

Le calcul numérique a été conduit sur IBM 1130. La séparation des composantes s'est avérée excellente puisque l'analyse spectrale de la courbe "résidu", obtenue après avoir calculé et retranché le nombre de fois nécessaire les 15 ondes citées plus haut, donne à ces fréquences des ondes résiduelles inférieures à 5 mm nature, de l'ordre du niveau général du "bruit" apparaissant dans ce spectre. Prenons comme exemple les résultats obtenus au Havre, port où il existe des composantes d'ordres supérieures importantes. A l'issue de l'analyse, nous avons trouvé comme valeur des composantes cherchées :

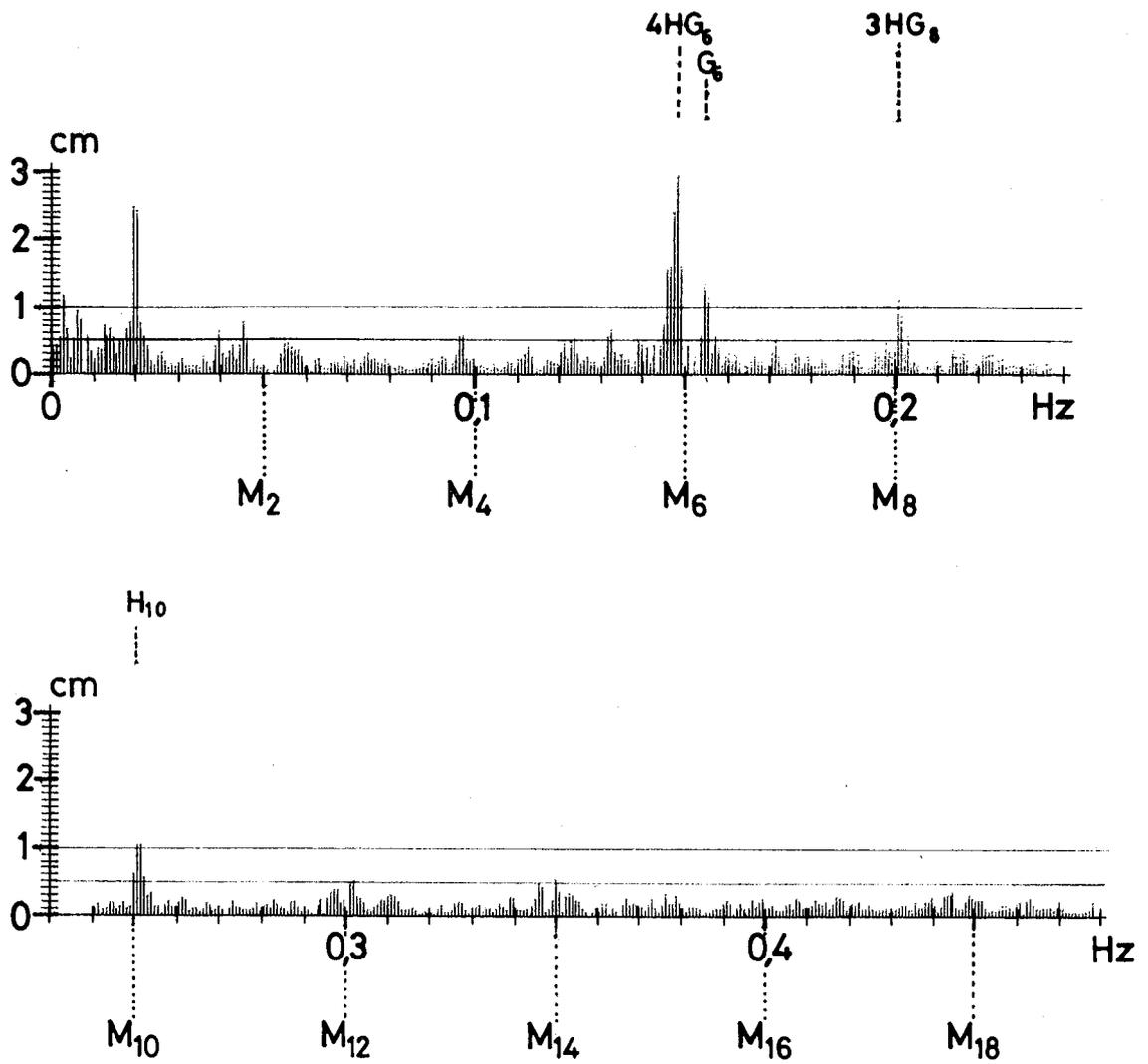


FIG.III.2/5 - Spectre de la marée résiduelle au HAVRE.

H_2 ($\approx M_2$)	260,9 cm	H_4	16,6 cm	H_6	9,8 cm
G_2 ($\approx S_2$)	88,5 cm	G_4	2,0 cm	$2HG_6$	7,2 cm
$2HG_2$	14,2 cm	HG_4	12,0 cm	$2GH_6$	2,5 cm
$2GH_2$	3,0 cm	$3HG_4$	2,2 cm	H_8	1,2 cm
$3H2G_2$	3,0 cm	$3GH_4$	0,2 cm	HG_6	1,1 cm

La figure III-2/5 montre le spectre de la courbe résiduelle :

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{15} A_i \cos(\omega_i t - R_i)$$

Nous remarquons que le niveau général du bruit de fond est très faible et que les composantes significatives restant dans ce spectre sont peu nombreuses. Notons :

$4HG_6$	2,9 cm	$3HG_8$	1,4 cm
G_6	1,3 cm	H_{10}	1,0 cm

et une raie parasite de 2,5 cm d'amplitude à la fréquence de 0,0196 Hz. L'onde correspondante est engendrée par les défauts de planéité du mouvement de la plateforme, pourtant réduits au minimum.

1.3 - Les résultats

Dans ce chapitre, nous nous intéressons spécialement à la composante HG_4 . Mais il y a lieu, avant d'aller plus loin dans la présentation de ces résultats, de vérifier la concordance obtenue pour les ondes M_2 et S_2 entre le modèle et la nature. C'est moyennant ce préalable que nos conclusions auront toute leur signification. Les caractéristiques en amplitudes et en phases, données par le modèle, sont représentées schématiquement sur les cartes des figures III-2/6 et III-2/7. La description de ces composantes est excellente car la comparaison de ces solutions aux valeurs déduites d'observations in situ est satisfaisante : les écarts sont au plus de quelques centimètres sur les marnages (maximum d'écart à Devonport pour l'onde M_2 : 6 cm pour une amplitude de 169 cm), et de quelques degrés sur les phases : 1 à 2 degrés au maximum partout, sauf au voisinage du point amphidromique où l'écart atteint 15° pour l'onde M_2 . Nous pouvons donc conclure au bon réglage du modèle en vue de l'étude de la génération des termes non linéaires due à la propagation simultanée de ces deux ondes M_2 et S_2 .

Les caractéristiques de l'onde HG_4 ainsi obtenue sont représentées sur les cartes de la figure III-2/8. Les amplitudes A_{HG_4} de cette composante varient dans la Manche entre 0 et 25 cm, et le réseau d'égales valeurs correspondant se trace de

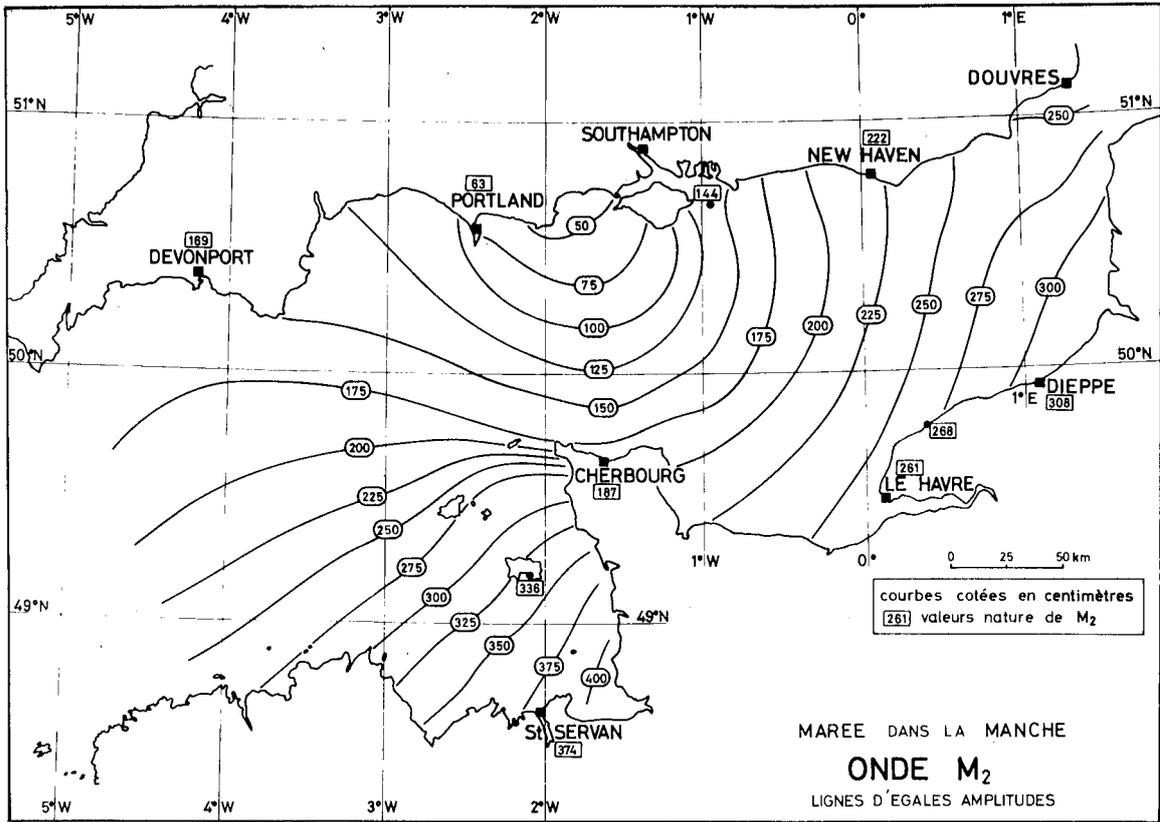
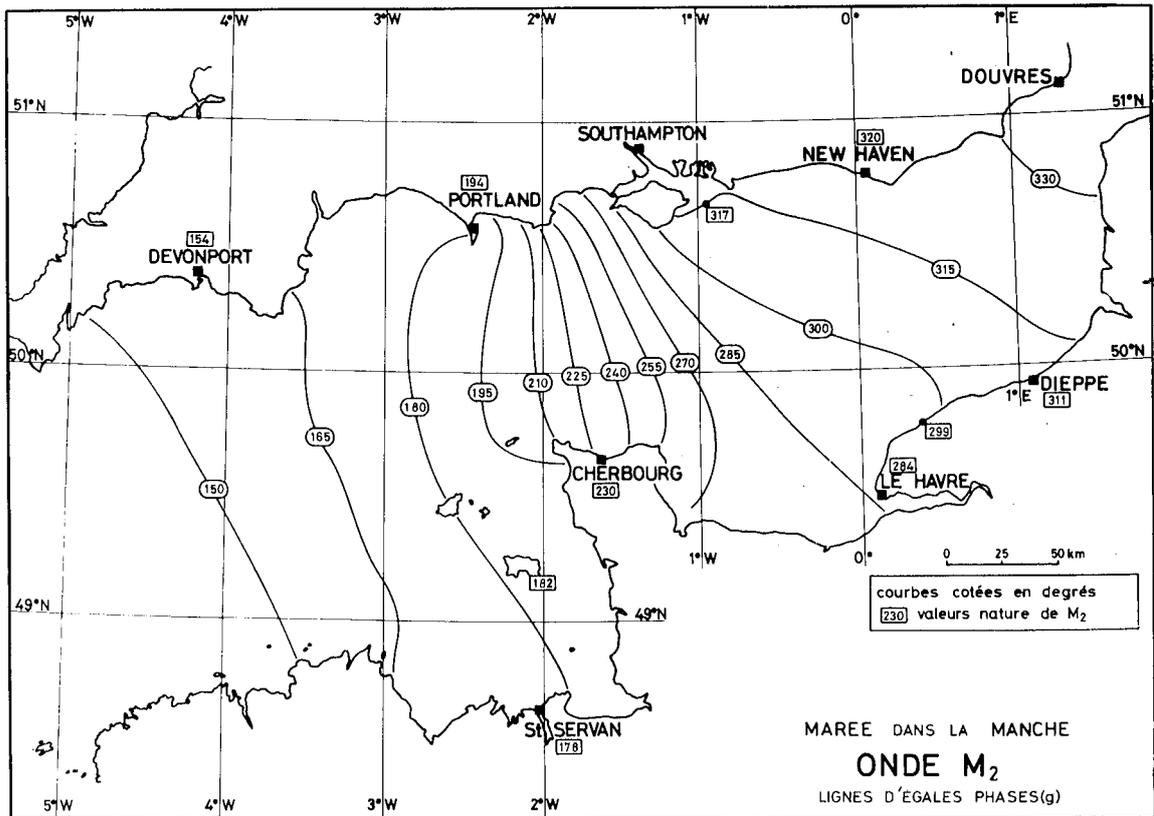


FIG.III.2/6



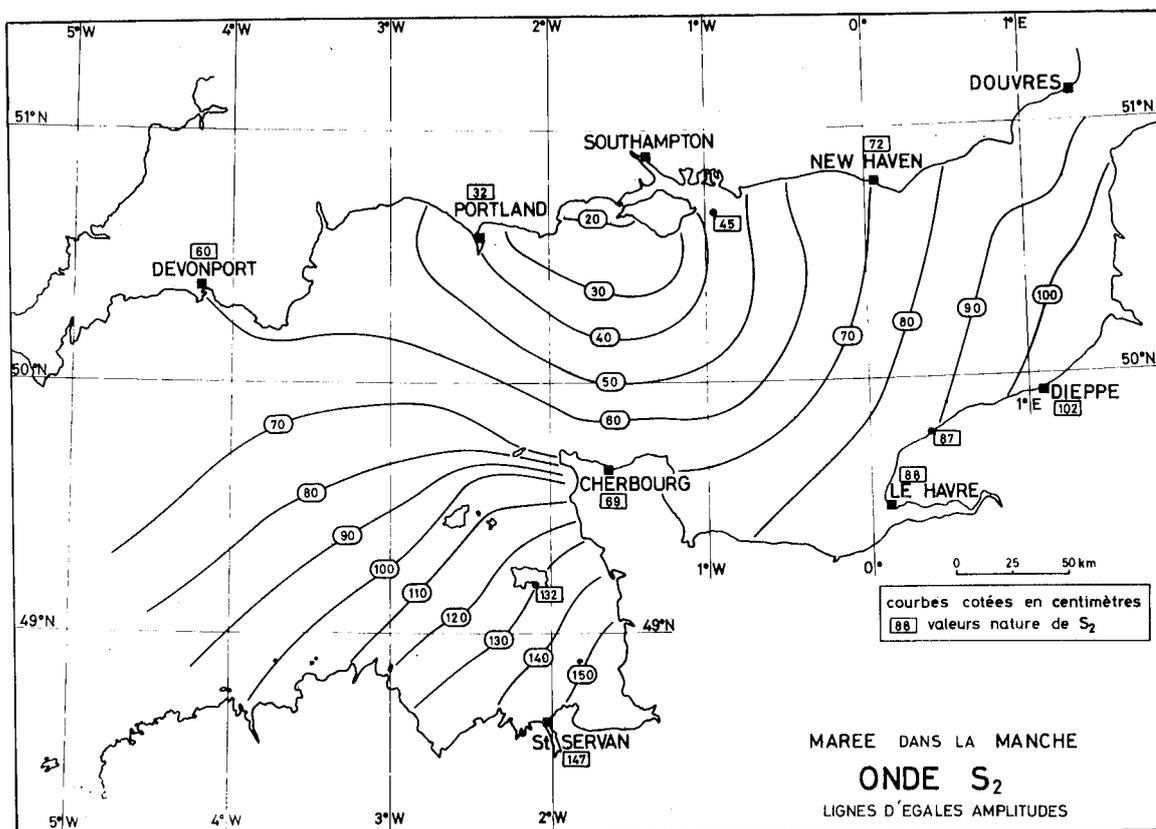
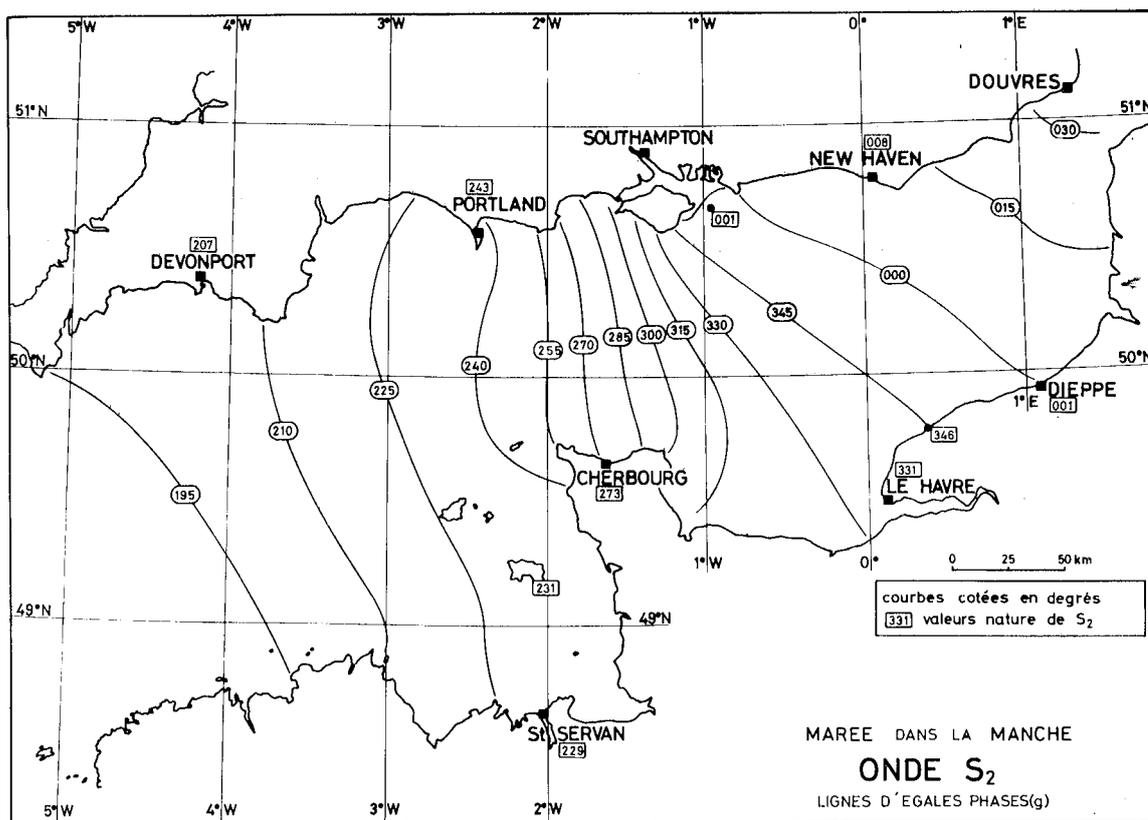


FIG. III. 2/7



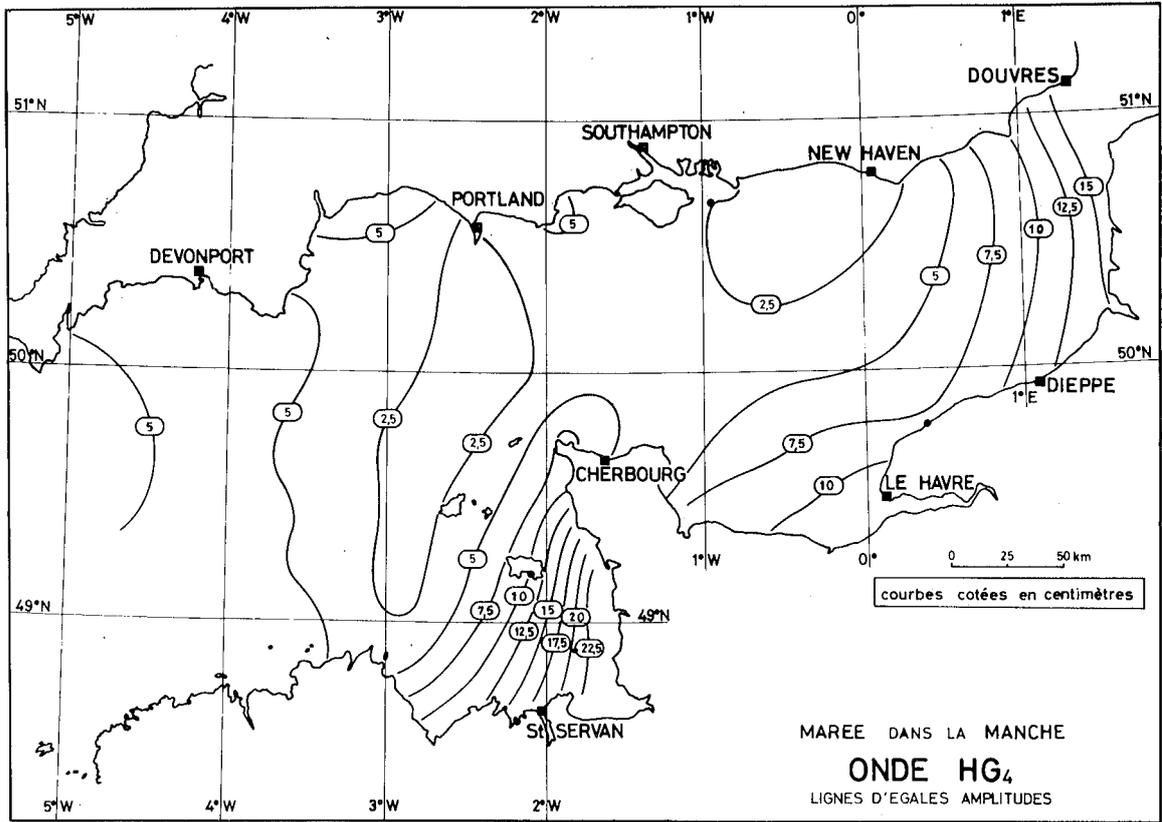
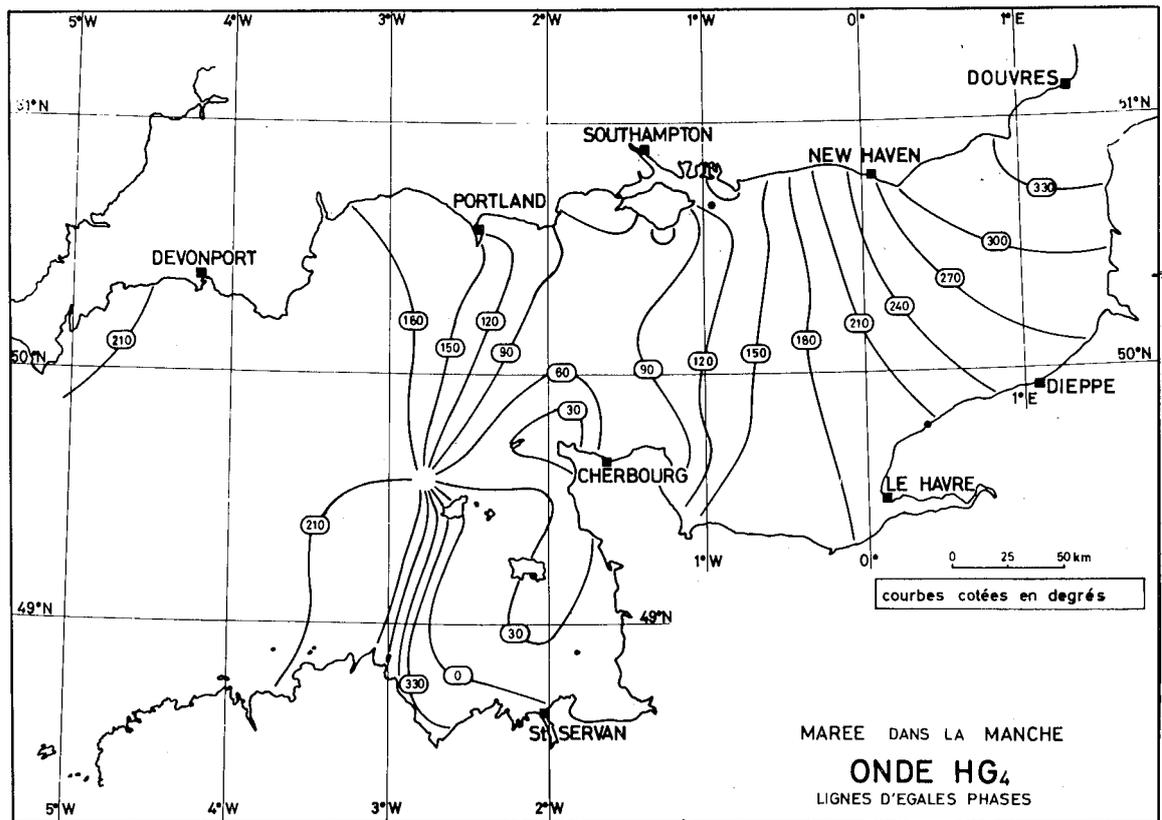


FIG.III.2/8



façon régulière et aisée en raison des variations régulières de cette grandeur. Le réseau d'égales phases ϕ_{HG_4} , retards par rapport au passage de cette onde à St-Malo, est aussi très facile à définir, pour les mêmes raisons.

Remarquons que cette composante HG_4 présente un point amphidromique réel près de Guernesey : la propagation apparente de cette onde est correcte par rapport à ce qu'on observe in situ. Par contre, il existe un point amphidromique virtuel en Manche orientale : la propagation apparente de cette composante est d'Ouest en Est le long de la côte anglaise, alors que, dans la nature, l'onde MS_4 se propage au contraire d'Est en Ouest. Il est nécessaire, comme nous l'avons noté, de corriger les conditions aux limites relatives à cette fréquence afin de retrouver la réalité à partir de l'onde HG_4 .

2 - ETUDE DES ONDES QUART-DIURNES ENTRANT PAR LES LIMITES

Rappelons que nous notons $A_4^{MS_4}$ une onde ayant la période de la composante MS_4 , et entrant dans la Manche par la limite Atlantique, et $B_4^{MS_4}$ l'onde de même fréquence entrant par la limite Mer du Nord, l'amplitude et la phase de ces ondes étant a priori arbitraires.

L'étude de la propagation de ces deux ondes est nettement plus simple que dans le cas précédent. Il suffit en effet de faire fonctionner, à la limite Atlantique, ou à la limite Mer du Nord du modèle, un générateur de marée mono-périodique. On enregistre suivant la grille classique des 145 points définie précédemment, la dénivellation en chaque point de mesure sur 3 périodes du phénomène à raison de 36 points de digitalisation par période. Chaque essai, portant sur 3 points de mesure, est séparé du suivant par un nombre entier de périodes de l'onde étudiée, afin d'être toujours dans les mêmes conditions de phases pour tous les essais et pouvoir ainsi aisément les rattacher les uns aux autres.

Comme nous ne retenons des dénivellations enregistrées que leur composante fondamentale, nous déterminons cette dernière par simple analyse harmonique des signaux enregistrés. Notons qu'avec 36 points par période et 3 périodes pour chaque enregistrement, le signal est très bien défini, et les valeurs calculées très cohérentes les unes par rapport aux autres. Ceci tient au fait que nous étudions ici des phénomènes purement périodiques.

Les caractéristiques de ces ondes $A_4^{MS_4}$ et $B_4^{MS_4}$ sont représentées sur les cartes des figures III-2/9 et III-2/10. Les réseaux d'égales amplitudes $A_4^{MS_4}$

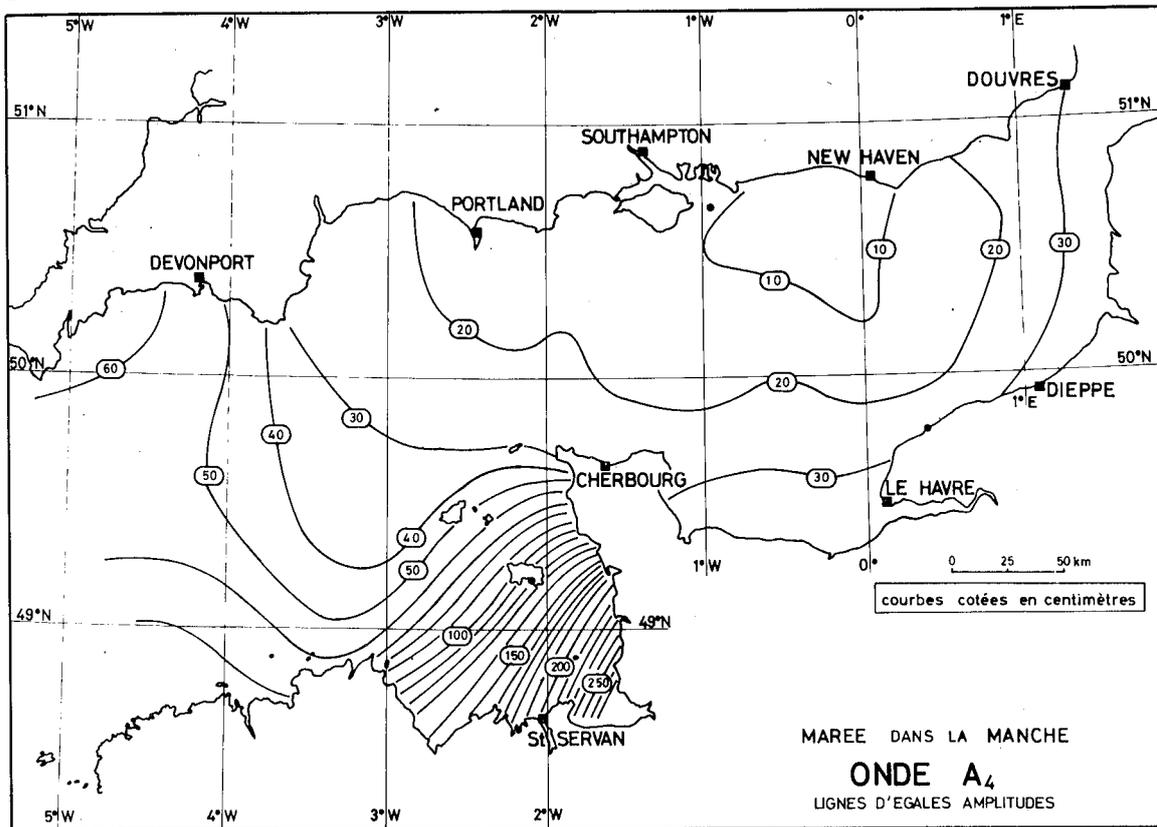
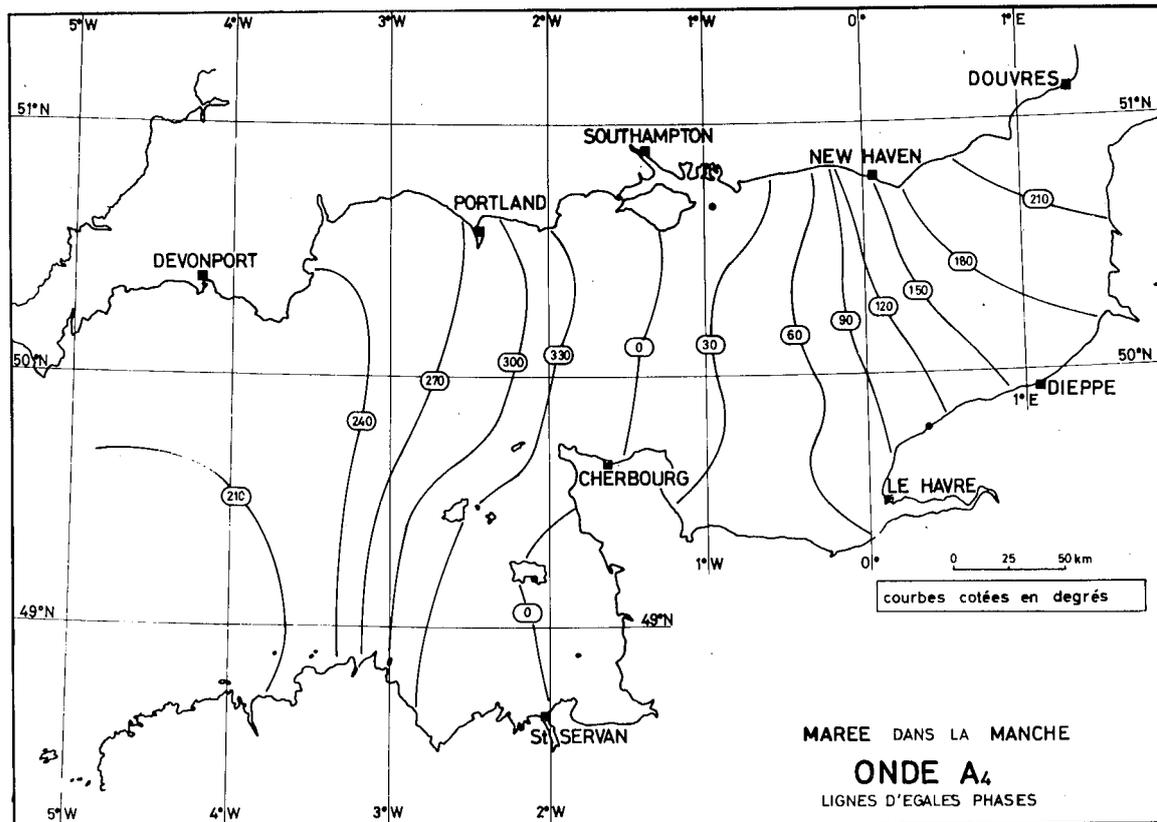


FIG.III.2/9



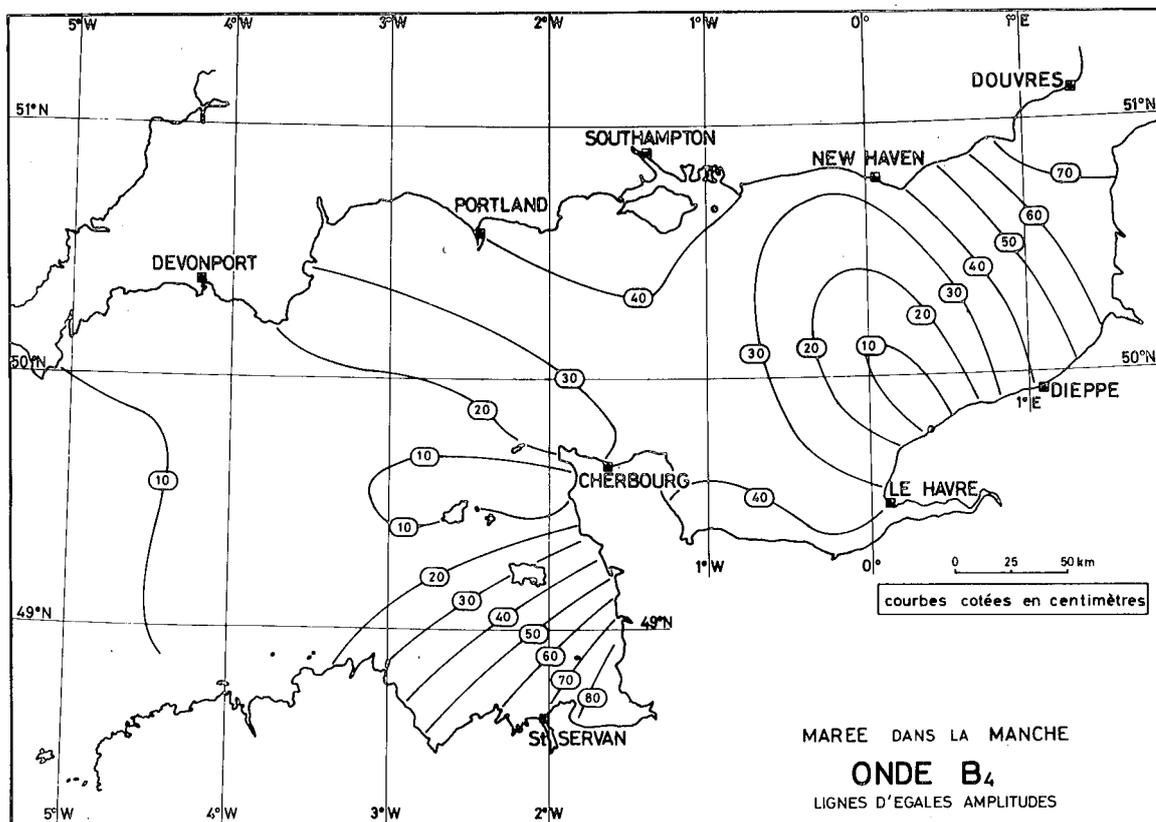
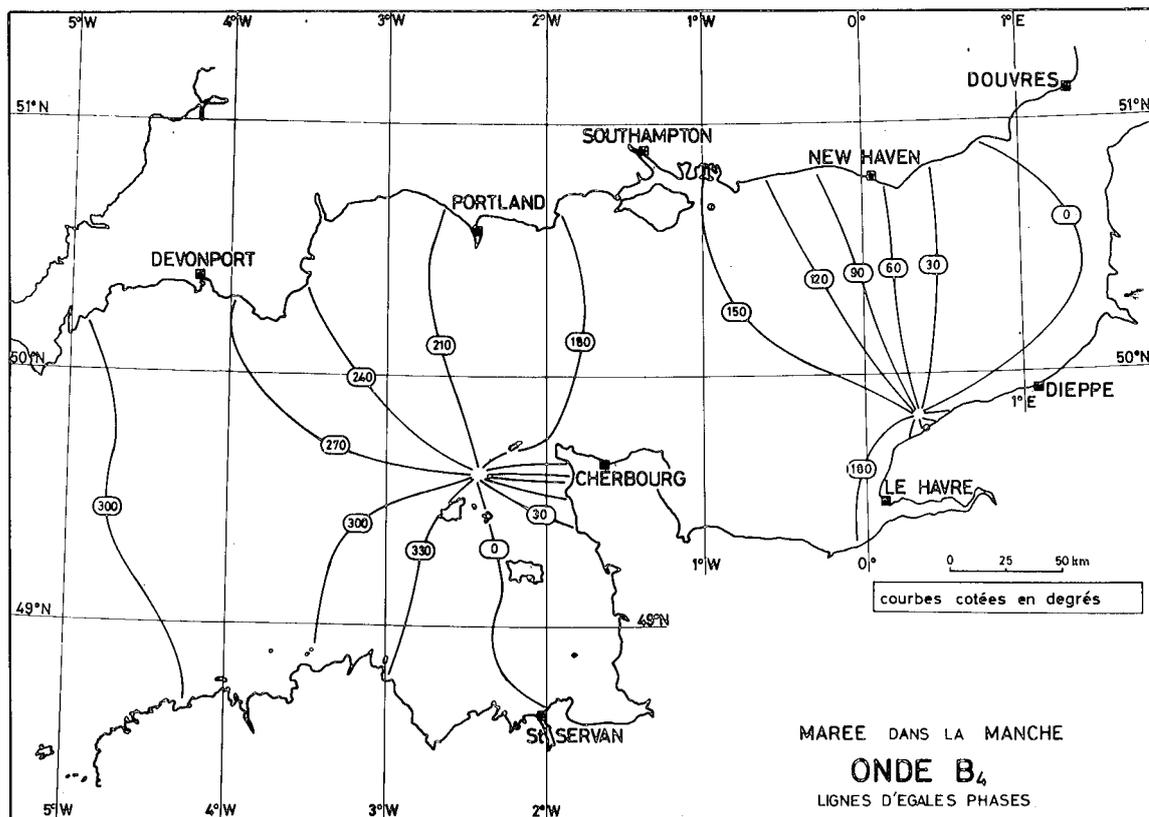


FIG.III. 2/10



et $A_{B_4}^{MS_4}$ et d'égales phases $\phi_{A_4}^{MS_4}$ et $\phi_{B_4}^{MS_4}$ se tracent comme toujours avec une très grande facilité.

3 - CALCUL DE LA SOLUTION FINALE

Il nous reste à superposer à l'onde HG_4 les ondes $a_4^{MS_4}$ et $b_4^{MS_4}$ que nous allons déduire de $A_4^{MS_4}$ et $B_4^{MS_4}$ par affinité sur les amplitudes et décalage sur les phases de façon à obtenir une onde résultante aussi voisine que possible de ce que nous connaissons de l'onde MS_4 en quelques points le long des côtes, d'après les données nature disponibles. Dans les quelques ports où la marée a été observée et analysée, cette onde est définie par son amplitude A_{MS_4} et par sa phase g_{MS_4} . Cette dernière est, par ailleurs, liée aux phases des ondes génératrices M_2 et S_2 . Nous cherchons donc à représenter correctement, non seulement la distribution des amplitudes et des phases conformément à la nature, mais aussi cette liaison entre l'onde étudiée et ses composantes génératrices.

Dans la nature, la dénivellation $H(t)$ observée in situ est décomposée, après analyse, sous la forme (cf § I-3/1) :

$$(3-a) \quad H(t) = H_0 + \int_{M_2} A_{M_2} \cos [\omega_{M_2} t + (V_0 + u)_{M_2} - g_{M_2}] + \int_{S_2} A_{S_2} \cos [\omega_{S_2} t + (V_0 + u)_{S_2} - g_{S_2}] \\ + \int_{MS_4} A_{MS_4} \cos [\omega_{MS_4} t + (V_0 + u)_{MS_4} - g_{MS_4}] + \dots$$

avec :

$$(3-b) \quad (V_0 + u)_{MS_4} = (V_0 + u)_{M_2} + (V_0 + u)_{S_2}$$

$$(3-c) \quad \omega_{MS_4} = \omega_{M_2} + \omega_{S_2}$$

Sur le modèle, on va définir une solution $H'(\tau)$, avec une origine de temps quelconque, sous la forme :

$$(4) \quad H'(\tau) = H'_0 + A'_{M_2} \cos (\omega_{M_2} \tau - R_{M_2}) + A'_{S_2} \cos (\omega_{S_2} \tau - R_{S_2}) + A'_{MS_4} \cos (\omega_{MS_4} \tau - R_{MS_4}) + \dots$$

Posons $\tau = t + T_0$. On cherche à construire $H'(\tau)$ de telle façon que $H(t) = H'(\tau)$, c'est-à-dire que :

$$(5) \quad \begin{cases} \int_{M_2} A_{M_2} \cos [\omega_{M_2} t + (V_0 + u)_{M_2} - g_{M_2}] = A'_{M_2} \cos [\omega_{M_2} t - R_{M_2}] \\ \int_{S_2} A_{S_2} \cos [\omega_{S_2} t + (V_0 + u)_{S_2} - g_{S_2}] = A'_{S_2} \cos [\omega_{S_2} t - R_{S_2}] \\ \int_{MS_4} A_{MS_4} \cos [\omega_{MS_4} t + (V_0 + u)_{MS_4} - g_{MS_4}] = A'_{MS_4} \cos [\omega_{MS_4} t - R_{MS_4}] \end{cases}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 (6-a) \quad \int_{M_2} A_{M_2} &= A'_{M_2} & (6-d) \quad (V_0+u)_{M_2} - g_{M_2} &= \omega_{M_2} T_1 - R_{M_2} \\
 (6-b) \quad \int_{S_2} A_{S_2} &= A'_{S_2} & \text{et } (6-e) \quad (V_0+u)_{S_2} - g_{S_2} &= \omega_{S_2} T_1 - R_{S_2} \\
 (6-c) \quad \int_{MS_4} A_{MS_4} &= A'_{MS_4} & (6-f) \quad (V_0+u)_{MS_4} - g_{MS_4} &= \omega_{MS_4} T_1 - R_{MS_4}
 \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, nous simulons sur le modèle, les ondes M_2 et S_2 de façon que $A_{M_2} = A'_{M_2}$ et $A_{S_2} = A'_{S_2}$: on choisit ainsi arbitrairement $f_{M_2} = f_{S_2} = 1$ pour simplifier le problème. Il s'ensuit que nous devons avoir $A_{MS_4} = A'_{MS_4}$. Des relations (6-d), (6-e) et (6-f), on déduit, par ailleurs :

$$(7) \quad g_{MS_4} = (g_{M_2} + g_{S_2}) = R_{MS_4} - (R_{M_2} + R_{S_2})$$

Comme on cherche à obtenir l'égalité :

$$A_{MS_4} e^{-j R_{MS_4}} = A_{HG_4} e^{-j R_{HG_4}} + R_{A_4}^{MS_4} e^{-j (\phi_{A_4}^{MS_4} + \psi_{A_4}^{MS_4})} + R_{B_4}^{MS_4} e^{-j (\phi_{B_4}^{MS_4} + \psi_{B_4}^{MS_4})}$$

ceci équivaut, d'après l'égalité (7) à l'expression :

$$(8) \quad A_{MS_4} e^{-j g_{MS_4}} = A_{HG_4} e^{-j [R_{HG_4} - (R_{M_2} + R_{S_2}) + g_{M_2} + g_{S_2}]} + R_{A_4}^{MS_4} e^{-j [\phi_{A_4}^{MS_4} + \psi_{A_4}^{MS_4}]} + R_{B_4}^{MS_4} e^{-j [\phi_{B_4}^{MS_4} + \psi_{B_4}^{MS_4}]}$$

Notons que nous avons défini, sur la figure III-2/8, l'onde HG_4 par ses phases ϕ_{HG_4} , retards par rapport au passage de cette onde à St-Malo. Avec une origine des temps quelconque, on a donc en un point (x, y) la relation :

$$R_{HG_4}(x, y) = \phi_{HG_4}(x, y) + (R_{HG_4})_{St\text{-}Malo}$$

de même

$$R_{M_2}(x, y) = \phi_{M_2}(x, y) + (R_{M_2})_{St\text{-}Malo}$$

$$R_{S_2}(x, y) = \phi_{S_2}(x, y) + (R_{S_2})_{St\text{-}Malo}$$

Comme, par ailleurs, les réseaux M_2 et S_2 représentés sur le modèle sont en bonne concordance avec la nature, on peut considérer que :

$$g_{M_2}(x, y) = \phi_{M_2}(x, y) + (g_{M_2})_{St\text{-}Malo}$$

$$g_{S_2}(x, y) = \phi_{S_2}(x, y) + (g_{S_2})_{St\text{-}Malo}$$

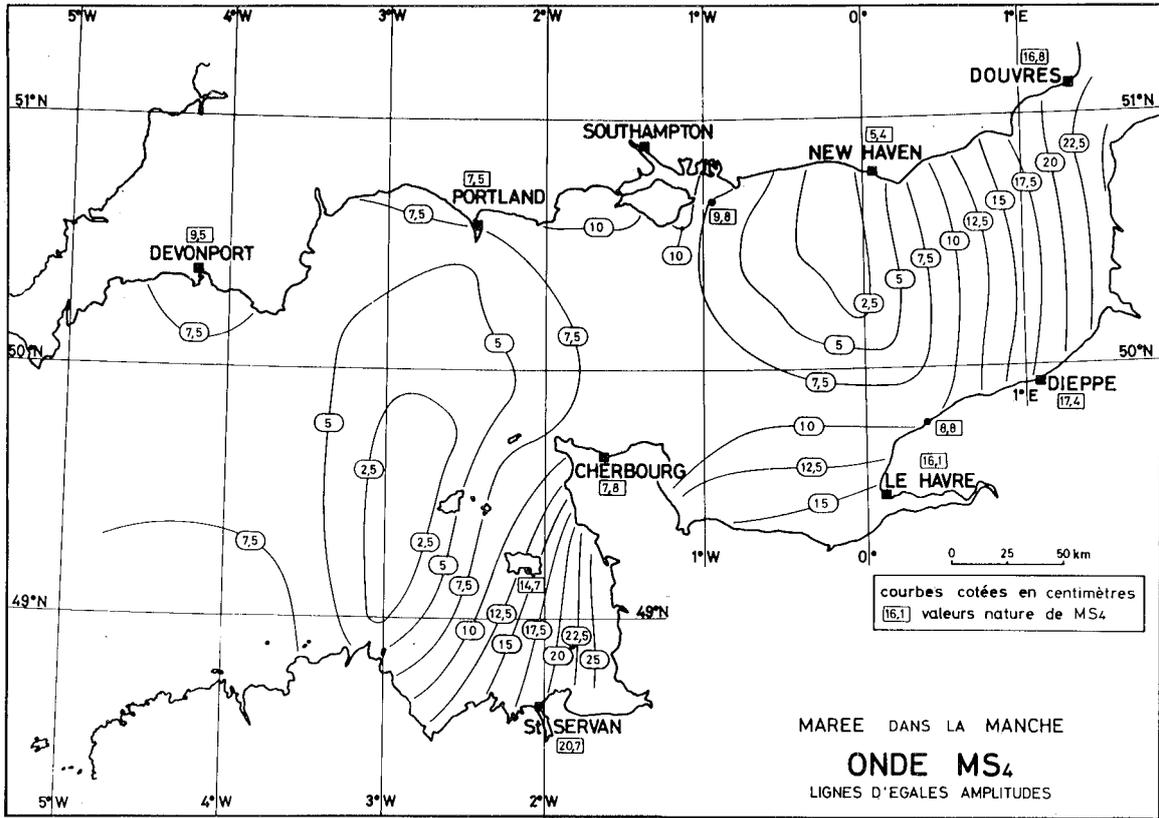
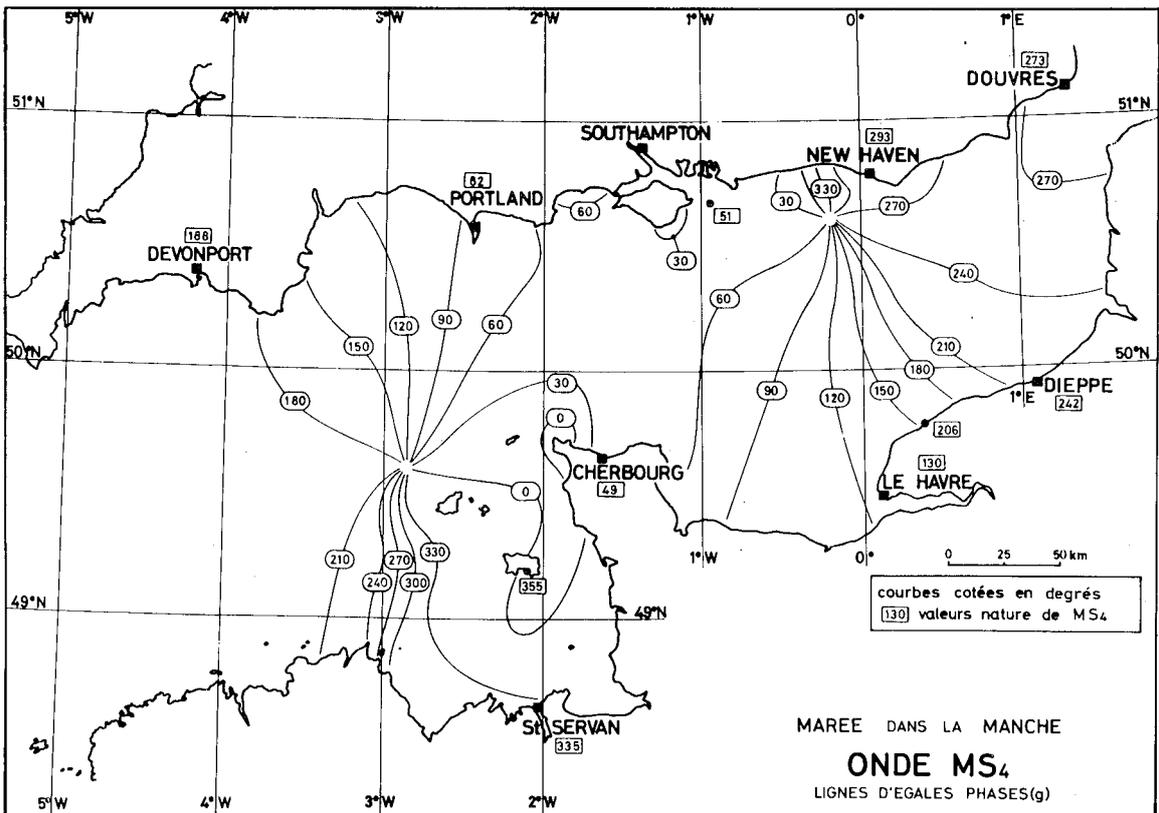


FIG.III.2/11



L'expression (8) s'écrit alors :

$$(9) \quad A_{MS_4} e^{-j\theta_{MS_4}} = A_{HG_4} e^{-j \{ \Phi_{HG_4} + [R_{HG_4} - (R_{M_2} + R_{S_2})]_{St-Malo} + (g_{M_2} + g_{S_2})_{St-Malo} \}} \\ + k_{A_4}^{MS_4} e^{-j [\Phi_{A_4}^{MS_4} + \Psi_{A_4}^{MS_4}]} \\ + k_{B_4}^{MS_4} e^{-j [\Phi_{B_4}^{MS_4} + \Psi_{B_4}^{MS_4}]}$$

Nous déterminons les coefficients $k_{A_4}^{MS_4}$, $k_{B_4}^{MS_4}$ et les déphasages $\Psi_{A_4}^{MS_4}$, $\Psi_{B_4}^{MS_4}$ suivant la méthode exposée au chapitre précédent (cf § III-1/3-1). Nous choisissons comme ports de référence :

St-Malo, Cherbourg, Le Havre, Dieppe, Douvres, Nab Tower, Portland et Devonport.

Le calcul numérique nous conduit aux valeurs :

$$k_{A_4}^{MS_4} = 0,0689 \qquad k_{B_4}^{MS_4} = 0,1160 \\ \Psi_{A_4}^{MS_4} = 51,20^\circ \qquad \Psi_{B_4}^{MS_4} = 247,40^\circ$$

La superposition des ondes HG_4 , $a_4^{MS_4}$ et $b_4^{MS_4}$ est réalisée sur ordinateur aux 145 points de la grille définie ci-dessus. Les résultats obtenus sont reportés sur les cartes de la figure III-2/11 donnant les lignes d'égaux amplitudes et d'égaux phases de la solution ainsi construite.

4 - RESULTATS - CARACTERISTIQUES DE L'ONDE MS_4

Les réseaux ainsi établis sont présentés sur les cartes de la figure III-2/11 sans difficultés en raison de la régularité remarquable des résultats obtenus. Ils se caractérisent essentiellement par la présence de deux points amphidromiques réels, l'un en Manche occidentale, au voisinage de Guernesey, l'autre en Manche orientale, au large de Brighton. Cette configuration explique ainsi le sens de propagation apparent de l'onde MS_4 , sur les côtes françaises et anglaises. Remarquons que la forme de ces réseaux nous permet de mieux comprendre la génération de cette composante et de confirmer ce que nous avons noté dans la deuxième partie de cet exposé, chapitre III, à savoir que cette onde est engendrée principalement par les effets de petits fonds et les termes d'accélération spatiale : elle est en effet produite principalement dans les zones où ces accélérations sont importantes : la partie centrale de la Manche, où les vitesses sont relativement grandes, et varient rapidement en intensité et direction, tout particulièrement au cap de la Hague. Nous observons effectivement sur la carte 11 que l'onde MS_4 semble rayonner à partir du Cap de la Hague, et qu'elle se propage, pour une plus grande part, d'Ouest en Est dans la zone orientale de la Manche, et d'Est en Ouest dans la zone occidentale :

AMPLITUDE et PHASE de L'ONDE MS₄

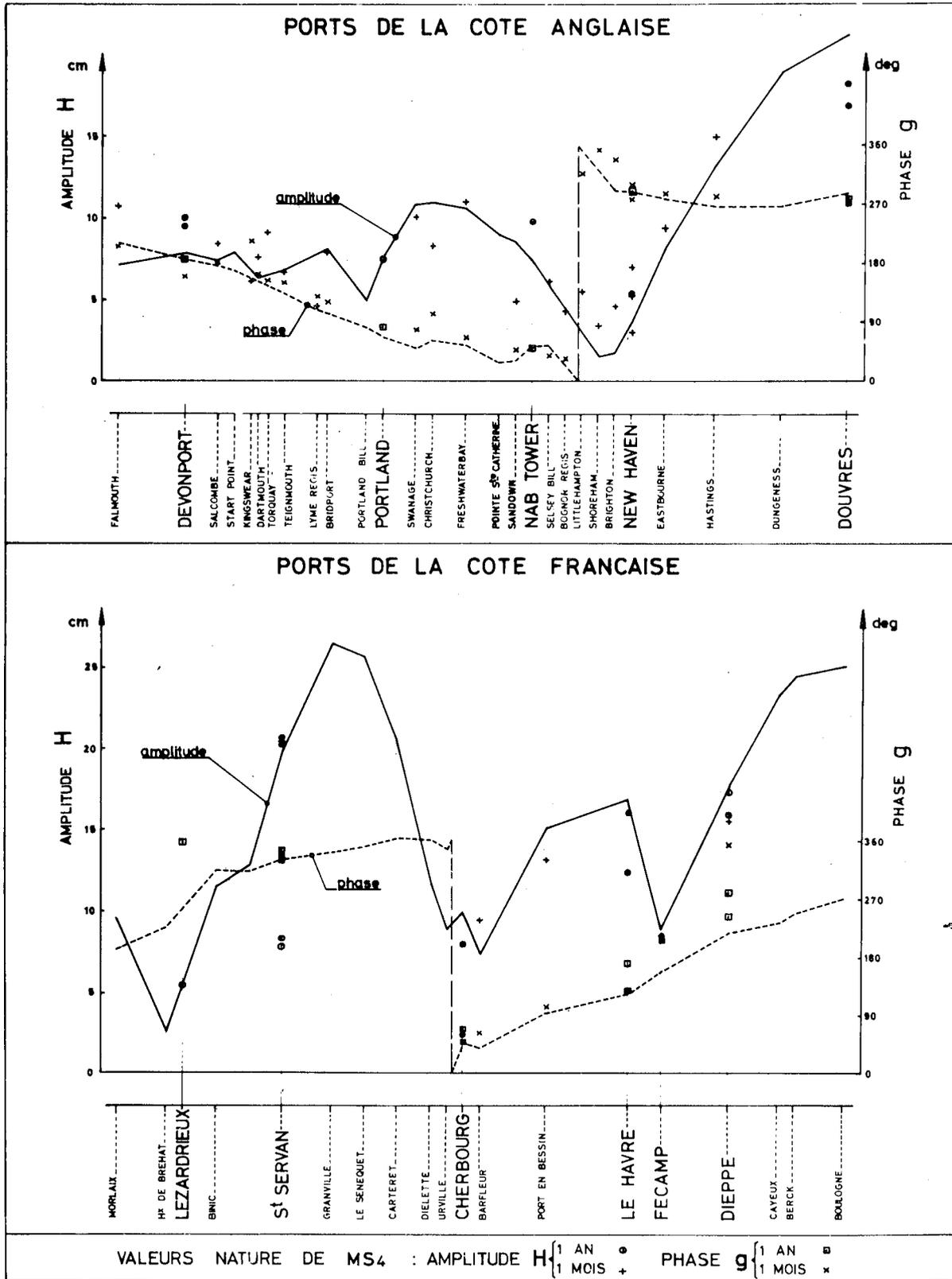


FIG.III. 2 / 12

il y a bien génération pour cette onde dans la partie centrale de cette mer.

Comparons la solution obtenue avec les valeurs déduites d'observations in situ. Reportons nous à la figure III-2/12 qui facilite cette comparaison : elle représente, sur un développement linéaire des côtes françaises et anglaises, les variations de l'amplitude et de la phase de l'onde MS_4 solution le long des frontières littorales, et les valeurs déduites d'observations in situ y sont par ailleurs portées, dans les ports où elles sont connues. En Manche occidentale, pour les amplitudes, les écarts sont inférieurs à 2,5 cm, la limite de résolution de notre système de mesure. Par contre, en Manche orientale, notre solution semble s'écarter de la réalité. Nous relevons en effet un écart de 4,5 cm à Douvres où l'amplitude n'est que de 16,8 cm. Mais il faut remarquer que ce point de comparaison est le seul dont nous disposons dans cette zone : or il se situe trop près de la limite Mer du Nord du modèle pour que nous soyons sûrs des mesures en ce point. Le Service Central Hydrographique et Océanographique de la Marine effectue actuellement des observations de marées à Boulogne, et leur dépouillement nous apportera certainement des indications très utiles pour préciser nos solutions dans cette zone.

Le réseau des phases est lui aussi en très bon accord avec la nature en Manche occidentale et centrale : les écarts ne sont généralement que de quelques degrés, et ne dépassent pas 15° pour les valeurs issues d'observations faites sur des durées de l'ordre de l'année. En Manche orientale, il apparaît un écart de 24° à Dieppe, ce qui semble confirmer l'imperfection de notre solution dans cette zone. Notons, enfin, l'écart important présenté à Fécamp : 49° ; mais la valeur nature semble pour ce point s'écarter de façon anormale des valeurs voisines observées au Havre et à Dieppe : la donnée naturelle est donc probablement suspecte pour ce port et cette composante.

Notons à ce sujet que nos résultats peuvent parfois être utiles pour orienter un choix possible entre diverses valeurs proposées en un même point par des analyses résultant d'enregistrements et de traitements numériques différents. Prenons, pour cette onde MS_4 , l'exemple de St-Malo. Nous relevons dans la bibliographie quatre séries de données possibles :

1875 -	<i>A</i>	= 8,35 cm	g = 331°
1876 -	<i>A</i>	= 7,82 cm	g = 329°
1878 -	<i>A</i>	= 20,3 cm	g = 342°
1963 -	<i>A</i>	= 20,7 cm	g = 335°

Un choix est donc nécessaire entre deux ordres de grandeur pour l'amplitude : 8 cm et 20 cm. En excluant volontairement le port de St-Malo dans la détermination des coefficients de superposition des ondes HG_4 , A_4^{MS4} et B_4^{MS4} , la solution optimale obtenue propose pour ce point une amplitude voisine de 20 cm : c'est donc certainement cet ordre de grandeur qui est valable. On remarque de même, d'une façon plus générale, pour l'étude de toutes les ondes composantes de la marée, que les valeurs déduites d'observations faites sur des durées de l'ordre de l'année sont plus sûres que celles portant sur des périodes plus courtes (généralement le mois). Cette conclusion est d'ailleurs entièrement logique, nous l'avons déjà faite au chapitre I-3.

Malgré quelques écarts, on peut conclure, pour l'ensemble, à une bonne correspondance entre nos résultats et ce qui existe dans la nature. Cette conclusion est valable pour toutes les composantes que nous avons étudiées. Nos méthodes, appliquées sur le modèle réduit de la Manche, nous conduisent donc à une bonne définition des composantes harmoniques de la marée, à partir de leur connaissance en quelques points seulement de la côte. C'est bien le but que nous nous étions fixé en abordant cette étude.

QUATRIEME PARTIE

SUR QUELQUES APPROXIMATIONS DE LA DESCRIPTION HARMONIQUE

DES MAREES LITTORALES

INTRODUCTION

Nous avons insisté, dès l'introduction, sur un inconvénient de notre méthode d'analyse des marées fondée sur la décomposition harmonique. Rappelons, qu'avant d'aboutir à une description précise de la marée, elle nécessite, en effet, l'étude d'un nombre élevé de composantes. Comme nous l'indiquons au chapitre III-1, il se trouve que, dans le cas de la Manche, il existe une vingtaine de composantes d'amplitude moyenne supérieure à 3 cm. On peut donc éprouver quelque découragement devant la tâche à entreprendre pour édifier une description rigoureuse des marées littorales, fondée sur la méthode harmonique.

En fait, nous allons montrer dans ce chapitre que ces composantes peuvent être rangées par groupes. Les cartes caractéristiques des ondes de chaque groupe présentent entre elles des analogies qui permettent de décrire avec une approximation satisfaisante toutes les ondes d'un même groupe à partir des caractéristiques de l'une d'entre elles seulement. On conçoit que cette propriété, dont nous allons donner une justification théorique et que nous contrôlerons expérimentalement, est de nature à simplifier considérablement l'étude harmonique des marées. Elle permet, par ailleurs, de résoudre certains problèmes théoriques et pratiques, comme la séparation des parts astronomiques et non linéaires composant les ondes mixtes, $M_2 + 2MS_2$ par exemple. Elle rend enfin possible la mise au point de nouvelles techniques d'analyse et de prédiction des marées littorales.

CHAPITRE IV-1

ANALOGIES ET DIFFERENCES ENTRE LES PRINCIPALES COMPOSANTES

DU SPECTRE DES MAREES LITTORALES

La comparaison entre les réseaux caractéristiques des diverses composantes de la marée dans la Manche montre que des ondes de fréquences voisines possèdent des propriétés voisines : tel est le cas, par exemple, des ondes M_2 , S_2 , N_2 , K_2 . Il existe cependant quelques exceptions à cette règle, pour l'instant empirique : l'onde M_2 , par exemple, de période voisine de celle de N_2 suit des lois de propagation totalement différentes des précédentes. Nous nous proposons de justifier théoriquement ces analogies, d'interpréter les écarts constatés, et de montrer l'accord de ces prévisions de calcul avec les données modèle et nature.

1 - INTERPRETATION THEORIQUE DES ANALOGIES

ENTRE LES CARTES DES ONDES DE FREQUENCE VOISINE

1.1 - Cas des ondes d'origine astronomique

Reprenons les notations de la deuxième partie de ce mémoire. Nous avons vu que les ondes d'origine astronomique sont induites dans le domaine littoral D étudié par les limites ouvertes sur l'océan et les mers adjacentes, et qu'une première approximation de leur solution peut être obtenue par résolution d'un système d'équations linéaires du type :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = C_v \cdot v - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = - C_v u - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

avec $C_v = 2 \cdot \Omega \sin \varphi$

En nous bornant aux solutions périodiques, nous avons supposé a priori que celles-ci sont de la forme :

$$(2) \quad A_i S_{i1} = \begin{vmatrix} h A_i u_{i1} \cos(\omega_i t + \psi_{i1}) \\ h A_i v_{i1} \cos(\omega_i t + \chi_{i1}) \\ A_i S_{i1} \cos(\omega_i t + \varphi_{i1}) \end{vmatrix}$$

Compte tenu de (2), le système (1) devient linéaire, homogène, et peut s'écrire :

$$(3) \quad \bar{M}_i \cdot \bar{S}_{i1} = 0$$

avec :

$$\bar{S}_{i1} = \begin{vmatrix} h u_{i1} \cos \psi_{i1} \\ h u_{i1} \sin \psi_{i1} \\ h v_{i1} \cos \chi_{i1} \\ h v_{i1} \sin \chi_{i1} \\ S_{i1} \cos \varphi_{i1} \\ S_{i1} \sin \varphi_{i1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{M}_i = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_i & -C_v & 0 & gh \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \omega_i & 0 & 0 & -C_v & 0 & gh \frac{\partial}{\partial x} \\ C_v & 0 & 0 & -\omega_i & gh \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & C_v & \omega_i & 0 & 0 & gh \frac{\partial}{\partial y} \\ -gh \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -gh \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & gh \omega_i \\ 0 & -gh \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -gh \frac{\partial}{\partial y} & gh \omega_i & 0 \end{vmatrix}$$

Supposons que pour $i = 1, 2, 3 \dots N_G$, les pulsations ω_i sont très voisines les unes des autres, et notons ω_G leur valeur moyenne. L'exemple d'un tel groupe d'ondes est fourni par les composantes semi-diurnes, d'origine astronomique M_2, S_2, N_2 et K_2 - de vitesses angulaires respectivement 28,984 °/h ; 30,000 °/h ; 28,440 °/h ; 30,082 °/h. Il s'ensuit que $\bar{M}_i \simeq \bar{M}_G$, \bar{M}_G étant la matrice déduite de \bar{M}_i en changeant ω_i en ω_G . Le système ainsi obtenu est alors le même pour toutes les ondes en cause, car les matrices \bar{M}_i ne diffèrent les unes des autres que par la valeur de ω_i qui y figure.

Supposons alors que les conditions aux limites vérifient les hypothèses suivantes :

- les amplitudes des ondes étudiées sont proportionnelles aux A_i le long des limites ouvertes
- leurs phases sont égales, à un glissement près de l'origine des temps, valable pour chaque onde

(nous verrons plus loin que ces conditions sont effectivement vérifiées, pour les ondes d'origine astronomique amorties, observées in situ).

Il en résulte que les solutions S_{i1} sont proportionnelles entre elles, à un déphasage près. Si S_G est la solution type de ce groupe d'ondes de fréquences

voisines de :

$$S_G = \begin{vmatrix} h u_G \cos(\omega_G t + \psi_G) \\ h v_G \cos(\omega_G t + \chi_G) \\ J_G \cos(\omega_G t + \varphi_G) \end{vmatrix}$$

on en déduit la solution particulière de fréquence ω_i par la relation :

$$(4-a) \quad S_{i1} \simeq A_i S_G(t+t_i)$$

soit :

$$(4-b) \quad \begin{cases} \xi_{i1} = \xi_G(x,y) \\ u_{i1} = u_G(x,y) \\ v_{i1} = v_G(x,y) \end{cases} \quad (4-c) \quad \begin{cases} \varphi_{i1} = \varphi_G(x,y) + \omega_i t_i \\ \psi_{i1} = \psi_G(x,y) + \omega_i t_i \\ \chi_{i1} = \chi_G(x,y) + \omega_i t_i \end{cases}$$

où t_i est une époque fixée pour chaque indice i et, par suite, indépendante du temps et du point (x,y) .

Cette démonstration n'est valable que pour les composantes "linéaires" d'origine astronomique. Mais nous verrons plus loin que la propriété avancée se vérifie encore de façon satisfaisante pour les ondes d'origine astronomiques réelles, c'est-à-dire amorties. Nous admettons donc pour la suite cette propriété non seulement pour les ondes linéaires, mais aussi pour les ondes amorties.

1.2 - Cas des ondes d'origine non linéaire

Comme les ondes génératrices d'origine astronomique vérifient les propriétés de similitudes ci-dessus définies, nous allons voir les conséquences qui en résultent pour les ondes non linéaires harmoniques et d'interaction.

Au chapitre II-3, on a constaté que ces ondes pouvaient être classées en deux grands groupes : les ondes engendrées par les effets de petits fonds et celles créées par le frottement. Considérons successivement ces deux catégories de composantes.

1.2.1 - Les ondes dues aux effets de petits fonds

Prenons comme exemple les ondes quart-diurnes, engendrées par les quatre principales composantes de la marée dans une mer comme la Manche : M_2, S_2, N_2, K_2 . Rappelons que les ondes correspondantes $M_4, MS_4, MN_4, MK_4, S_4 \dots$ sont solutions des équations :

$$(5-a) \quad M \cdot S_{j2}^{(2)} = J'_{j2} (Q_j, 2\omega_j t)$$

ou

$$(5-b) \quad M \cdot S_{ij11}^{(1,1)} = J'_{ij11} [Q_i, Q_j, (\omega_i + \omega_j)t]$$

Nous reprenons les notations du chapitre II-3.

Ces seconds membres sont des formes linéaires en sinus et cosinus de l'argument $(\omega_i + \omega_j)t$ (qui se réduit donc, dans l'approximation considérée à $2\omega_\alpha t$), dont les phases à l'origine se déduisent quand i et j varient, de la phase d'un mouvement type (i_1, j_1) par un changement de l'origine des temps. Les coefficients de ces fonctions circulaires sont des formes quadratiques homogènes des amplitudes des ondes génératrices amorties. Or ces amplitudes sont, comme nous l'avons vu ci-dessus, proportionnelles entre elles. Il s'ensuit que les seconds membres de (5) se déduisent de l'un d'entre eux, $\forall (i, j)$, par multiplication par un facteur ne dépendant que de (i, j) et par un changement de l'origine des temps, fonction également du même jeu d'indices. On montre ainsi par un calcul élémentaire que :

$$2 J'_{j2} (Q_j, 2\omega_j t + 2\omega_j t_j) \simeq J'_{ij11} [Q_i, Q_j, (\omega_i + \omega_j)t + \omega_i t_i + \omega_j t_j]$$

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \forall i \text{ et } j \in [1, N_\alpha]$$

Utilisant alors la linéarité des premiers membres de (5), ainsi que le fait que nous nous bornons à la recherche de solutions sinusoïdales de ces systèmes, et en admettant que les conditions aux limites ouvertes vérifient les mêmes propriétés de proportionnalité sur les amplitudes, et de déphasage, nous voyons que toutes les ondes d'interaction du groupe considéré se déduisent d'une onde type, notée S_{g4} , par une affinité sur les amplitudes, et un déphasage. On trouve ainsi, en particulier :

$$(6-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{M_4}(x, y) = A'_{M_2}{}^2 S_{g4}(x, y) \cos [2\omega_{M_2} t + \varphi_{g4}(x, y) + 2\omega_{M_2} t_{M_2}] \\ S_{MS_4}(x, y) = 2 A'_{M_2} A'_{S_2} S_{g4}(x, y) \cos [(\omega_{M_2} + \omega_{S_2})t + \varphi_{g4}(x, y) + \omega_{M_2} t_{M_2} + \omega_{S_2} t_{S_2}] \\ S_{MN_4}(x, y) = 2 A'_{M_2} A'_{N_2} S_{g4}(x, y) \cos [(\omega_{M_2} + \omega_{N_2})t + \varphi_{g4}(x, y) + \omega_{M_2} t_{M_2} + \omega_{N_2} t_{N_2}] \\ \vdots \end{array} \right.$$

avec les relations de proportionnalités :

$$(6-b) \quad \frac{|S_{M_4}|}{|S_{MS_4}|} = \frac{A'_{M_2}{}^2}{2A'_{M_1}A'_{S_2}} \quad ; \quad \frac{|S_{M_4}|}{|S_{MN_4}|} = \frac{A'_{M_2}{}^2}{2A'_{M_2}A'_{N_2}} \quad ; \quad \dots$$

et les glissements de phases :

$$(6-c) \quad \varphi_{M_4} - \varphi_{MS_4} = \varphi_{M_2} - \varphi_{S_2} \quad ; \quad \varphi_{M_4} - \varphi_{MN_4} = \varphi_{M_2} - \varphi_{N_2} \quad ; \quad \dots$$

1.2.2 - Les ondes créées par le frottement

Rappelons que les ondes correspondantes sont solutions d'équations du type :

$$M \cdot S_{12}^{(2n+1)} = C \cdot F_{11} [Q_1, (2n+1)\omega_1 t]$$

ou
$$M \cdot S_{1j1}^{(2n, \varepsilon)} = C \cdot F_{1j} [Q_1, Q_j, (2n\omega_1 + \varepsilon\omega_j) t]$$

ou
$$M \cdot S_{j2}^{(2n+1, \varepsilon 5)} = C \cdot F_{jj} [Q_1, Q_j, [(2n+1)\omega_1 + 2\varepsilon\omega_j] t]$$

Reportons nous à l'étude numérique que nous avons présentée au chapitre II-2, portant sur la valeur des paramètres $FX_{ij}^{(n)}$, $FY_{ij}^{(n)}$, $\Phi X_{ij}^{(n)}$ et $\Phi Y_{ij}^{(n)}$ qui interviennent précisément dans la définition des vecteurs F_{11} , F_{1j} , F_{jj} (§ II-2/5-3).

On constate sur la figure II-2/3 de ce chapitre II-2, que les courbes relatives à un même groupe de fréquences voisines, égales à :

* $\omega_1, \omega_j, 2\omega_1 - \omega_j, 2\omega_j - \omega_1, \dots$

* $3\omega_1, 2\omega_1 + \omega_j, \dots$

* $5\omega_1, 4\omega_1 + \omega_j, \dots$

présentent respectivement d'étroites analogies. Un examen précis des valeurs de ces différents paramètres permet de conclure que :

* pour le groupe $\omega_1, \omega_j, 2\omega_1 - \omega_j, \dots$:

$$(7-a) \quad \frac{FX_{11}^{(0)}(\omega_1)}{FX_{1j}^{(0)}(\omega_j)} \approx \frac{FY_{11}^{(0)}(\omega_1)}{FY_{1j}^{(0)}(\omega_j)} \approx 0,67 \quad ; \quad \frac{FX_{11}^{(0)}(\omega_1)}{FX_{jj}^{(0)}(\omega_1)} \approx \frac{FY_{11}^{(0)}(\omega_1)}{FY_{jj}^{(0)}(\omega_1)} \approx 1,33 \quad ; \quad \dots Y(x,y)$$

* pour le groupe $3\omega_1, 2\omega_1 + \omega_j, 2\omega_j + \omega_1, \dots$:

$$(7-b) \quad \frac{FX_{11}^{(1)}(3\omega_1)}{FX_{jj}^{(1)}(2\omega_1 + \omega_j)} \approx \frac{FY_{11}^{(1)}(3\omega_1)}{FY_{jj}^{(1)}(2\omega_1 + \omega_j)} \approx 0,40 ; \quad \frac{FX_{11}^{(1)}(3\omega_1)}{FX_{jj}^{(0)}(2\omega_j + \omega_1)} \approx \frac{FX_{11}^{(1)}(3\omega_1)}{FY_{jj}^{(0)}(2\omega_j + \omega_1)} \approx 0,53 ; \dots$$

$V(x,y)$

* des conclusions analogues valent aussi pour les autres groupes de fréquences composant le spectre des forces de frottement.

Notons, par ailleurs, que les phases $\emptyset X$ et $\emptyset Y$ se trouvent être égales pour chaque groupe d'ondes, à une constante près, quel que soit le point (x,y) considéré.

Les raisonnements développés au précédent alinéa s'appliquent sans changement. On peut donc écrire, pour les sixième-diurnes, par exemple :

$$(8-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_{M_6}(x,y) = \left\{ A'_{M_2}{}^2 FX_{11}^{(1)} - (A'_{S_2}{}^2 + A'_{N_2}{}^2 + A'_{K_2}{}^2 + \dots) FX_{jj}^{(1)} \right\} \mathcal{S}_{g_6}(x,y) \\ \qquad \qquad \qquad \cos [3\omega_{M_2}t + \varphi_{g_6}(x,y) + 3\omega_{M_2}t_{M_2}] \\ \mathcal{S}_{2MS_6}(x,y) = \left\{ A'_{M_2} A'_{S_2} FX_{1j}^{(1)} \right\} \mathcal{S}_{g_6}(x,y) \\ \qquad \qquad \qquad \cos [(2\omega_{M_2} + \omega_{S_2})t + \varphi_{g_6}(x,y) + 2\omega_{M_2}t_{M_2} + \omega_{S_2}t_{S_2}] \\ \mathcal{S}_{2MN_6}(x,y) = \left\{ A'_{M_2} A'_{N_2} FX_{1j}^{(1)} \right\} \mathcal{S}_{g_6}(x,y) \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \qquad \cos [(2\omega_{M_2} + \omega_{N_2})t + \varphi_{g_6}(x,y) + 2\omega_{M_2}t_{M_2} + \omega_{N_2}t_{N_2}] \\ \mathcal{S}_{2MS_6}(x,y) = \left\{ A'_{S_2}{}^2 FX_{jj}^{(0)} \right\} \mathcal{S}_{g_6}(x,y) \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \qquad \cos [(2\omega_{S_2} + \omega_{M_2})t + \varphi_{g_6}(x,y) + 2\omega_{S_2}t_{S_2} + \omega_{M_2}t_{M_2}] \end{array} \right.$$

où $\mathcal{S}_{g_6}(x,y)$ et $\varphi_{g_6}(x,y)$ constituent une solution type pour les sixième-diurnes, les fonctions FX étant calculées en un point quelconque du domaine étudié.

Les rapports d'affinité, pour les amplitudes, se définissent comme suit :

$$(8-b) \quad \frac{|\mathcal{S}_{M_6}|}{|\mathcal{S}_{2MS_6}|} = \frac{A'_{M_2}{}^2}{A'_{M_2} A'_{S_2}} \frac{FX_{11}^{(1)}(3\omega_{M_2})}{FX_{1j}^{(1)}(2\omega_{M_2} + \omega_{S_2})} - \frac{A'_{S_2}{}^2 + A'_{N_2}{}^2 + \dots}{A'_{M_2} \cdot A'_{S_2}} \frac{FX_{jj}^{(1)}(3\omega_{M_2})}{FX_{1j}^{(1)}(2\omega_{M_2} + \omega_{S_2})}$$

\vdots

et les glissements de phases :

$$(8-c) \quad \varphi_{M_6} - \varphi_{2MS_6} = \varphi_{M_2} - \varphi_{S_2}$$

\vdots

1.3 - Conclusions

Les raisonnements précédents justifient d'une manière approchée la propriété annoncée sous réserve de la vérification de ces propriétés aux limites : ainsi les ondes d'origine astronomique appartenant à un même groupe, semi-diurne par exemple, doivent avoir des réseaux caractéristiques voisins ; en conséquence, les ondes harmoniques qu'elles engendrent possèdent elles aussi des propriétés analogues, à condition qu'elles correspondent à un même groupe : semi-diurne, quart-diurne, sixième-diurne, dixième-diurne ..., et qu'elles soient engendrées par un même mécanisme : effets de petits fonds, ou de frottement.

2 - COMPARAISONS A PARTIR DE QUELQUES VALEURS OBSERVEES IN SITU

En nous référant aux constantes harmoniques provenant des documents que nous ont fournis les Services Hydrographiques français, anglais et allemands, nous avons pu comparer les différentes ondes observées le long des côtes françaises de la Manche (des comparaisons semblables auraient d'ailleurs pu être faites le long de la côte anglaise). Notre étude porte sur les composantes principales semi-diurnes, quart-diurnes et sixième-diurnes.

2.1 - Les ondes semi-diurnes

Aux différents ports d'observation, nous avons rapporté l'amplitude de chaque composante au coefficient correspondant du potentiel générateur. Les résultats sont regroupés sur la figure IV-1/1.

Nous constatons que l'ensemble de ces ondes semi-diurnes peut se diviser en trois groupes :

* Les ondes M_2 , N_2 et \mathcal{D}_2 semblent avoir un comportement quasi identique tout au long de la côte française. Cette constatation confirme les prévisions théoriques précédentes : ces trois ondes, d'origine purement astronomique et de fréquences voisines, sont bien proportionnelles aux coefficients correspondants du potentiel générateur ; il est, par ailleurs, aisé de vérifier que les déphasages entre ces ondes restent constants d'un port d'observation à l'autre.

* Les ondes S_2 , K_2 et T_2 ont un comportement voisin de celui du groupe précédent, mais leurs amplitudes relatives, rapportées aux coefficients respectifs du potentiel générateur, sont différentes. Ce deuxième groupe correspond aux ondes

astronomiques semi-diurnes perturbées par les effets radiationnels décrits sommairement au chapitre I-2 § 4. La contribution de ce potentiel radiatif, explicité par MUNK et CARTWRIGHT, cf [1] et [2], se localise en effet dans le spectre des semi-diurnes, à la fréquence de ces trois ondes S_2 , N_2 et K_2 . Il en résulte une modification de l'amplitude et de la phase des ondes astronomiques venant de l'Atlantique ; l'action directe de ce potentiel sur les masses d'eau littorales est négligeable. Les constantes A_{S_2} , A_{K_2} , et A_{T_2} à considérer dans notre théorie correspondent donc en fait à la combinaison des potentiels astronomiques et radiationnels. L'écart que nous constatons sur la figure IV-1/1 entre les ondes M_2 , N_2 , ν_2 et les ondes S_2 , K_2 , T_2 , peut donc être interprété à partir de l'hypothèse de l'effet radiatif sur les ondes S_2 , K_2 et T_2 .

* Les autres ondes μ_2 , λ_2 , L_2 , $2N_2$... résultent de la superposition d'ondes astronomiques, et d'ondes non linéaires :

$$\begin{aligned} \text{"}\mu_2\text{"} &\iff \mu_2 + 2MS_2 \\ \text{"}L_2\text{"} &\iff L_2 + 2MN_2 \\ \text{"}2N_2\text{"} &\iff 2N_2 + 2MK_2 \end{aligned}$$

C'est pourquoi leur comportement doit échapper à la règle d'affinité des amplitudes ci-dessus énoncée : c'est bien ce qui résulte des figures précédentes.

Ces comparaisons confirment que les caractéristiques des diverses ondes semi-diurnes peuvent se déduire les unes des autres avec une bonne approximation par affinité sur les amplitudes, et glissement sur les phases, à condition que ces ondes soient de même nature, c'est-à-dire d'origine purement astronomique, ou astronomique et radiative.

2.2 - Les ondes quart-diurnes

Au paragraphe précédent, nous avons justifié théoriquement une propriété commune aux ondes quart-diurnes, M_4 , MS_4 , MN_4 et MK_4 ; leurs amplitudes sont proportionnelles entre elles, les coefficients de proportionnalité étant liés à l'intensité moyenne de leurs ondes génératrices : M_{M_2} , M_{S_2} , M_{N_2} et M_{K_2} . Prenant comme ports de référence : Brest, St-Malo, Cherbourg, le Havre, Dieppe, Douvres, New Haven, Nab Tower, Portland et Devonport, on peut définir à partir des données observées in situ une valeur moyenne de l'amplitude de ces quatre ondes M_2 , S_2 , N_2 et K_2 :

AMPLITUDES "A" des PRINCIPALES ONDES SEMI-DIURNES
 le long des côtes françaises de la Manche
 RAPPORTEES AUX COEFFICIENTS CORRESPONDANTS "C"
 DU POTENTIEL GENERATEUR

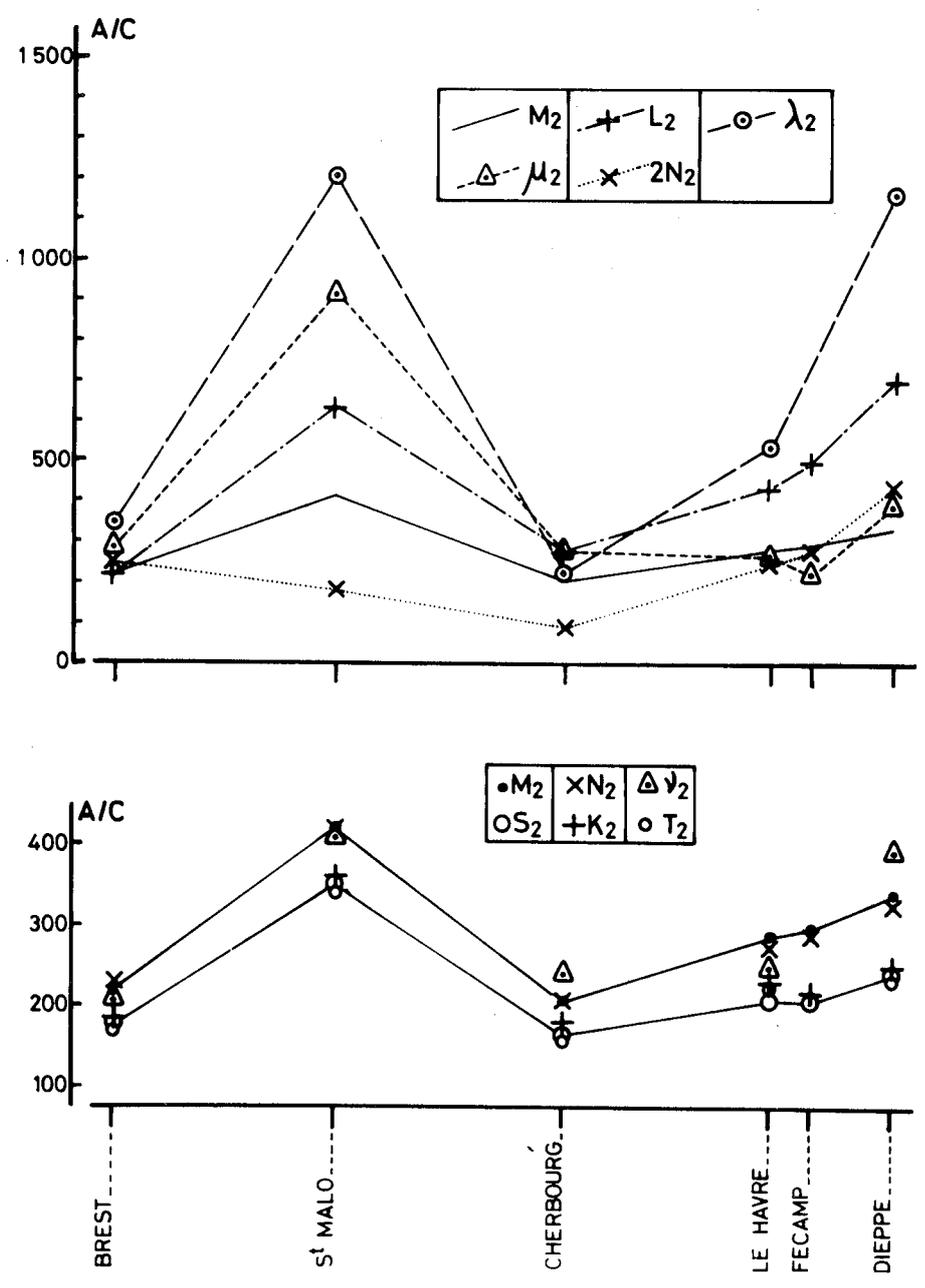


FIG. IV.1/1

$$\begin{aligned} M_{M_2} &= 216 \text{ cm} \\ M_{N_2} &= 42 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{S_2} &= 76 \text{ cm} \\ M_{K_2} &= 22 \text{ cm} \end{aligned}$$

En comparant les amplitudes relatives des quatre ondes M_4 , MS_4 , MN_4 et MK_4 , rapportées aux coefficients :

$$K_{M_4} = M_{M_2}^2$$

$$K_{MS_4} = 2 M_{M_2} M_{S_2}$$

$$K_{MN_4} = 2 M_{M_2} M_{N_2}$$

$$K_{MK_4} = 2 M_{M_2} M_{K_2}$$

on constate, cf figure IV-1/2, que ces ondes sont bien proportionnelles à ces coefficients.

Il est par ailleurs aisé de vérifier que les déphasages entre ces ondes restent sensiblement constants d'un port à l'autre, et vérifient à une dizaine de degrés près, les relations :

$$g_{M_4} - 2g_{M_2} = g_{MS_4} - (g_{M_2} + g_{S_2}) = g_{MN_4} - (g_{M_2} + g_{N_2}) = g_{MK_4} - (g_{M_2} + g_{K_2})$$

Ces constatations confirment donc bien les prévisions de nos théories.

2.3 - Les ondes sixième-diurnes

Jusqu'ici, il semble avoir été admis classiquement que les corrections dites nodales (cf chapitre I-2) valables pour les ondes sixième-diurnes étaient proportionnelles au cube des corrections nodales applicables aux ondes génératrices, ce qui supposait que ces ondes étaient d'ordre trois par rapport à leurs ondes génératrices :

$$f_{M_6} = f_{M_2}^3 \quad ; \quad f_{2MS_6} = f_{M_2}^2 f_{S_2} \quad ; \quad f_{2SM_6} = f_{S_2}^2 f_{M_2}$$

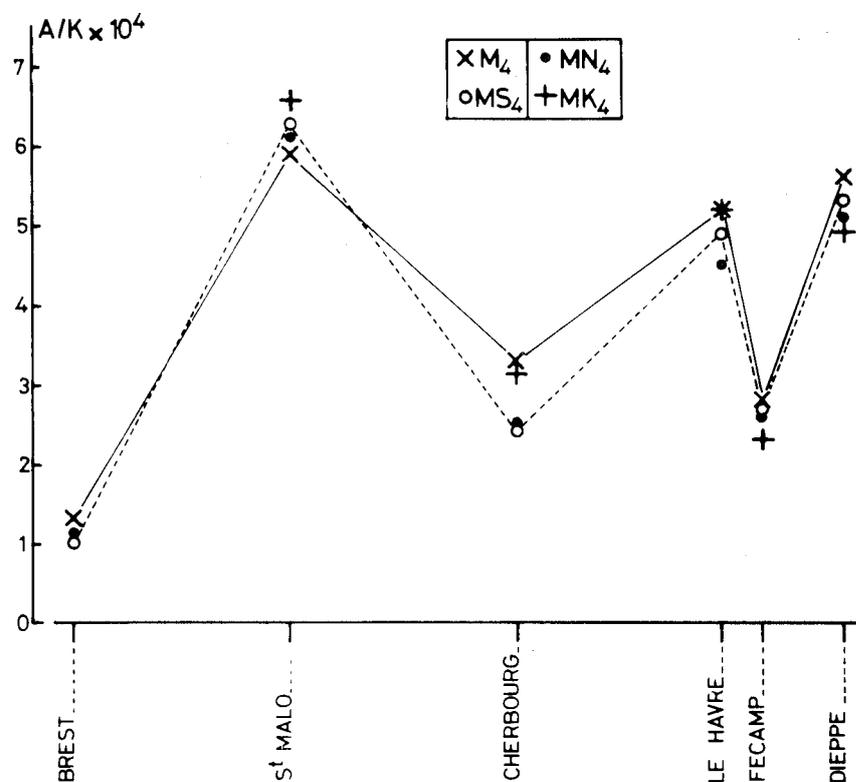
Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de justification théorique pour cette règle empirique. Notons qu'elle est en accord avec la loi qui définit la puissance de ces ondes. On admettait ainsi, par exemple, pour la composante $2MS_6$:

$$f_{2MS_6} = f_{M_2}^2 f_{S_2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{2MS_6} = 2\omega_{M_2} + \omega_{S_2}$$

Or, les développements limités que nous avons utilisés pour décrire le mécanisme de la génération des composantes non linéaires de la marée nous ont amenés à constater que ces mécanismes sont plus complexes. Nous avons vu ainsi que ces ondes peuvent être considérées, avec une approximation déjà satisfaisante, comme proportionnelles entre elles dans des rapports du type (8-b) :

$$\frac{|S_{M_6}|}{|S_{2MS_6}|} = \frac{A_{M_2}^2 F X_{M_2}^{(1)}(3\omega_1) - (A_{S_2}^2 + A_{N_2}^2 + A_{K_2}^2) F X_{S_2}^{(1)}(3\omega_1)}{A_{M_2} A_{S_2} F X_{M_2}^{(1)}(2\omega_{M_2} + \omega_{S_2})}$$

AMPLITUDES "A" des PRINCIPALES ONDES QUART-DIURNES
 le long des côtes françaises de la Manche
 RAPPORTEES AUX AMPLITUDES MOYENNES "M"
 DE LEURS ONDES GENERATRICES



NOTA:

$$M_4: K = M_{M_2}^2$$

$$MN_4: K = 2 M_{M_2} \cdot M_{N_2}$$

$$MS_4: K = 2 M_{M_2} \cdot M_{S_2}$$

$$MK_4: K = 2 M_{M_2} \cdot M_{K_2}$$

FIG.IV.1/2

Ces deux lois s'excluent l'une l'autre. C'est pourquoi, pour les ondes sixième-diurnes M_6 , $2MS_6$, $2MN_6$ et $2SM_6$, nous avons comparé leurs amplitudes réduites à celles de leurs ondes génératrices, en admettant comme hypothèses de proportionnalité d'une part la loi cubique, classiquement admise jusqu'à présent en théorie harmonique des marées, et d'autre part la loi plus complexe que nous proposons. Nous constatons sur la figure IV-1/3 que, dans la première hypothèse, les différentes ondes réduites présentent des différences notoires. Par contre, la réduction de ces ondes, effectuée convenablement par rapport à nos conclusions théoriques, conduit à une onde de type unique, ce qui confirme nos prévisions.

Mais ces comparaisons ne portent que sur un nombre très restreint de points de référence. L'application de nos méthodes à l'étude de la marée sur le modèle réduit de la Manche nous a permis, nous l'avons vu dans la troisième partie de cet exposé, de déterminer d'une manière précise ces diverses ondes, sur toute l'étendue de ce domaine littoral. Les résultats nous offrent l'occasion de comparer de façon beaucoup plus complète les correspondances que nous venons de constater entre les diverses ondes considérées, et de déterminer les limites de ces analogies.

3 - COMPARAISONS A PARTIR DES RESEAUX CARACTERISTIQUES ETABLIS POUR LA MANCHE

Comme nous l'avons indiqué à la fin du chapitre III-1, nos recherches ont abouti à l'établissement, en particulier, des cartes des composantes :

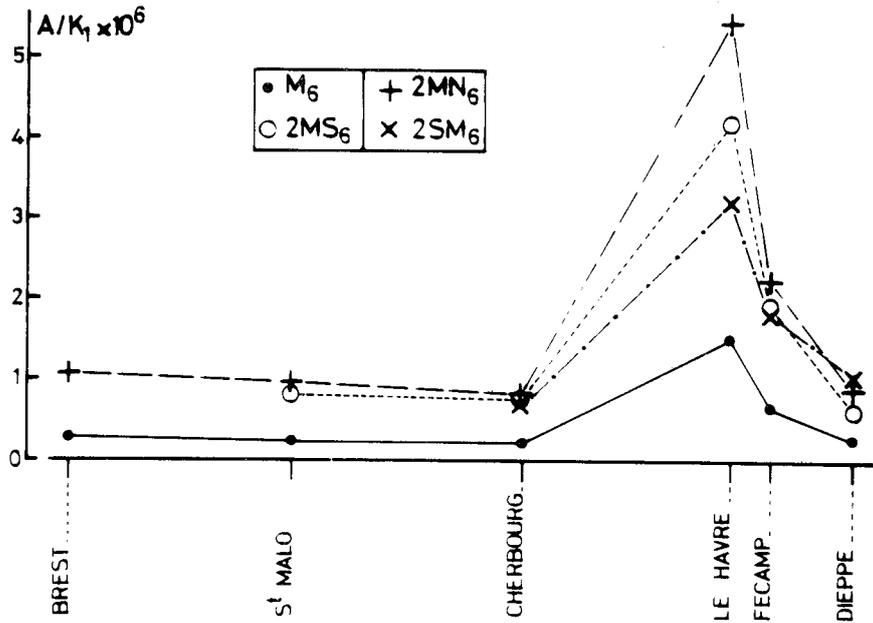
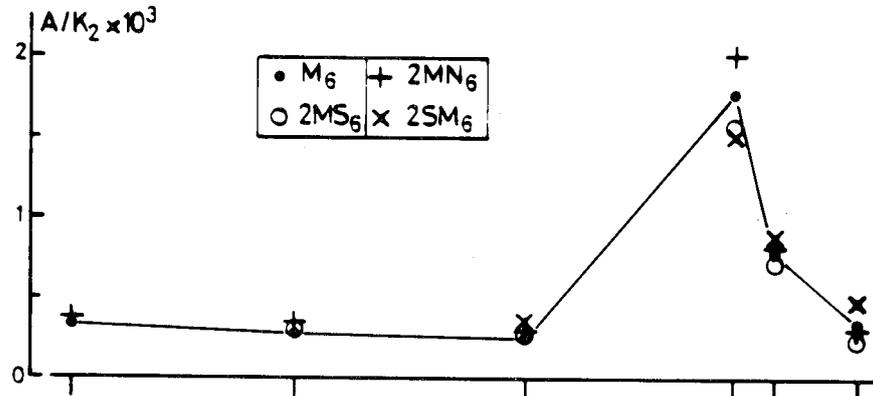
$M_2 - M_4 - M_6 -$	cf [3]
$S_2 - N_2 - K_2 -$	cf [4]
MS_4, MN_4, \dots	cf [5]
$2MS_6, 2MN_6, ..$	cf [6]

Rappelons que les caractéristiques de ces différentes ondes sont déterminées numériquement en 145 points uniformément répartis sur toute l'étendue de la Manche et le long de ses côtes. La densité des points de mesure nous permet une comparaison instructive entre les lois de propagation de ces différentes ondes.

3.1 - Les composantes semi-diurnes d'origine astronomique ou assimilées

Nous allons comparer en détail les ondes S_2 et N_2 à l'onde principale M_2 .

AMPLITUDES "A" des PRINCIPALES ONDES SIXIEME-DIURNES
 le long des côtes françaises de la Manche
 RAPPORTEES AUX AMPLITUDES MOYENNES "M₆"
 DE LEURS ONDES GENERATRICES



NOTA:	M ₆ : K ₁ = M _{M2} ³	K ₂ = 0.23 M _{M2} ² - 0.28 (M _{S2} ² + M _{N2} ² +)
	2MS ₆ et 2MN ₆ : K ₁ = M _{M2} ² · M _{S2(ou N2)}	K ₂ = 0.58 M _{M2} · M _{S2(ou N2)}
	2SM ₆ : K ₁ = M _{S2} ² · M _{M2}	K ₂ = 0.45 M _{S2} ²

FIG.IV.1/3

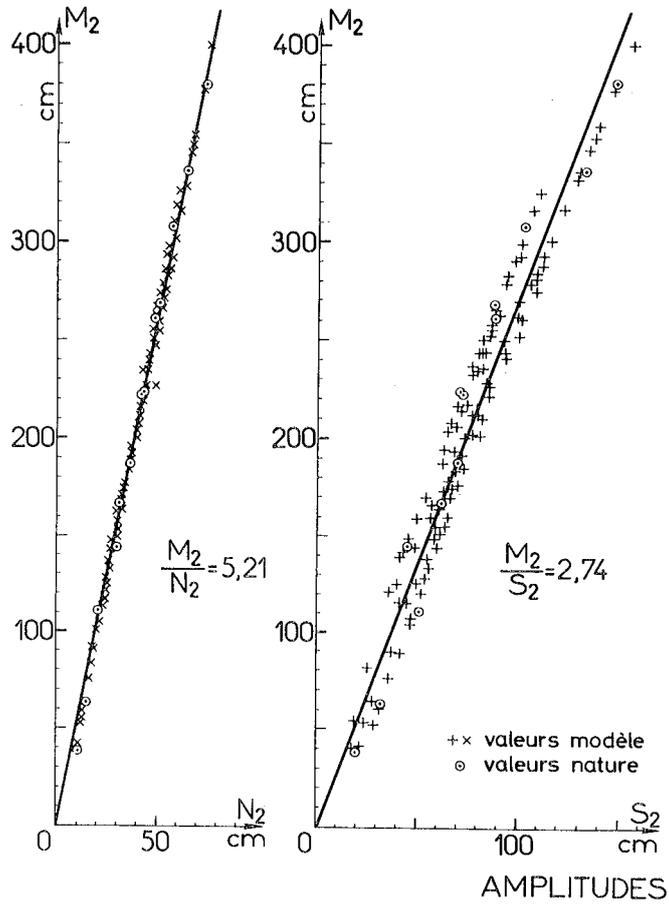


FIG.IV.1/4

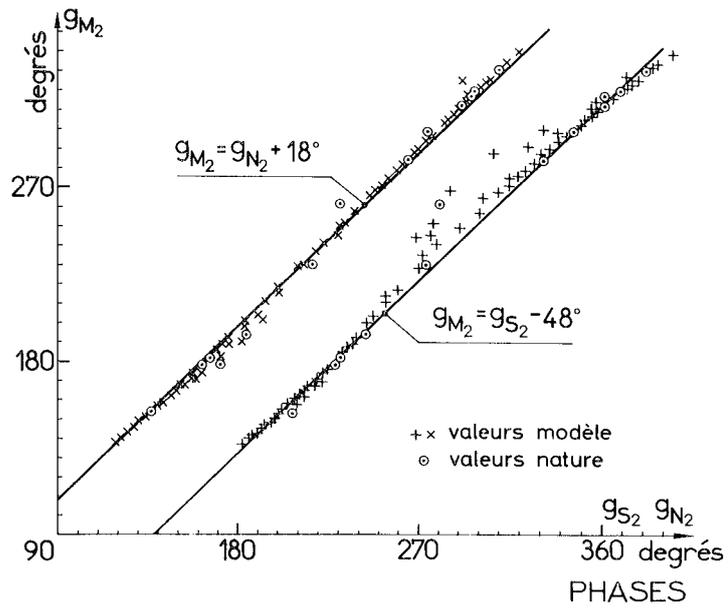


FIG.IV.1/5

3.1.1 - Comparaison de N_2 à M_2

La figure IV-1/4 illustre la correspondance existant manifestement entre les amplitudes des ondes M_2 et N_2 : il y a corrélation linéaire quasi parfaite en tous les points des réseaux M_2 et N_2 . La valeur du rapport de proportionnalité trouvée ainsi expérimentalement est : $A_{M_2} / A_{N_2} = 5,21$. Or le rapport entre leurs coefficients dans les développements du potentiel générateur est $C_{M_2} / C_{N_2} = 0,9085 / 0,1759 = 5,16$, nous confirmons ainsi la proportionnalité de ces deux ondes à leurs coefficients du potentiel générateur.

La figure IV-1/5 traduit la correspondance existant entre les phases de ces deux ondes : cette corrélation est aussi presque parfaitement linéaire, et nous en déduisons la relation moyenne :

$$g_{M_2} = g_{N_2} + 18^\circ$$

Mais, naturellement, ces corrélations ne sont pas parfaites. Peut-on interpréter les écarts constatés ? Sur le réseau de la figure IV-1/6, on voit que le rapport entre les amplitudes des ondes N_2 et M_2 : A_{N_2} / A_{M_2} , garde une valeur voisine de 0,19 sur presque toute l'étendue de la Manche. Mais il s'accroît au centre de cette mer à proximité du point amphidromique de ces ondes, pour atteindre 0,27, à Swanage, par exemple. Ce fait est d'ailleurs aussi perceptible sur le graphique IV-1/4 : dans la zone des petites amplitudes, les points s'écartent de la droite moyenne de façon régulière et significative. Le graphique IV-1/5 montre, par ailleurs, que les points correspondant à la Manche occidentale sont situés sous la droite moyenne : indice d'une faible avance de phase de l'onde M_2 par rapport à l'onde N_2 . Et c'est l'inverse en Manche orientale : l'onde M_2 est en retard de phase par rapport à l'onde N_2 . Ces diverses remarques s'interprètent aisément en considérant que le point amphidromique virtuel caractérisant l'onde M_2 est plus rapproché de la côte anglaise que celui de l'onde N_2 (cf figure IV-1/7). Physiquement, ceci signifie que l'onde réfléchie se propageant d'est en ouest dans la Manche est relativement plus forte pour l'onde M_2 que pour l'onde N_2 : ceci rejoint les notions d'amortissement des ondes au cours de leur propagation, que nous avons développées au chapitre II-2 : l'onde N_2 est plus amortie dans la réalité que si elle se propageait seule, parce qu'elle est en présence de l'onde dominante M_2 .

Il y a lieu, par ailleurs, de noter le déplacement faible, mais perceptible du point amphidromique de l'onde N_2 vers l'ouest, par rapport à la position de celui de l'onde M_2 . Un calcul rapide, à partir de la valeur des périodes de ces deux compo-

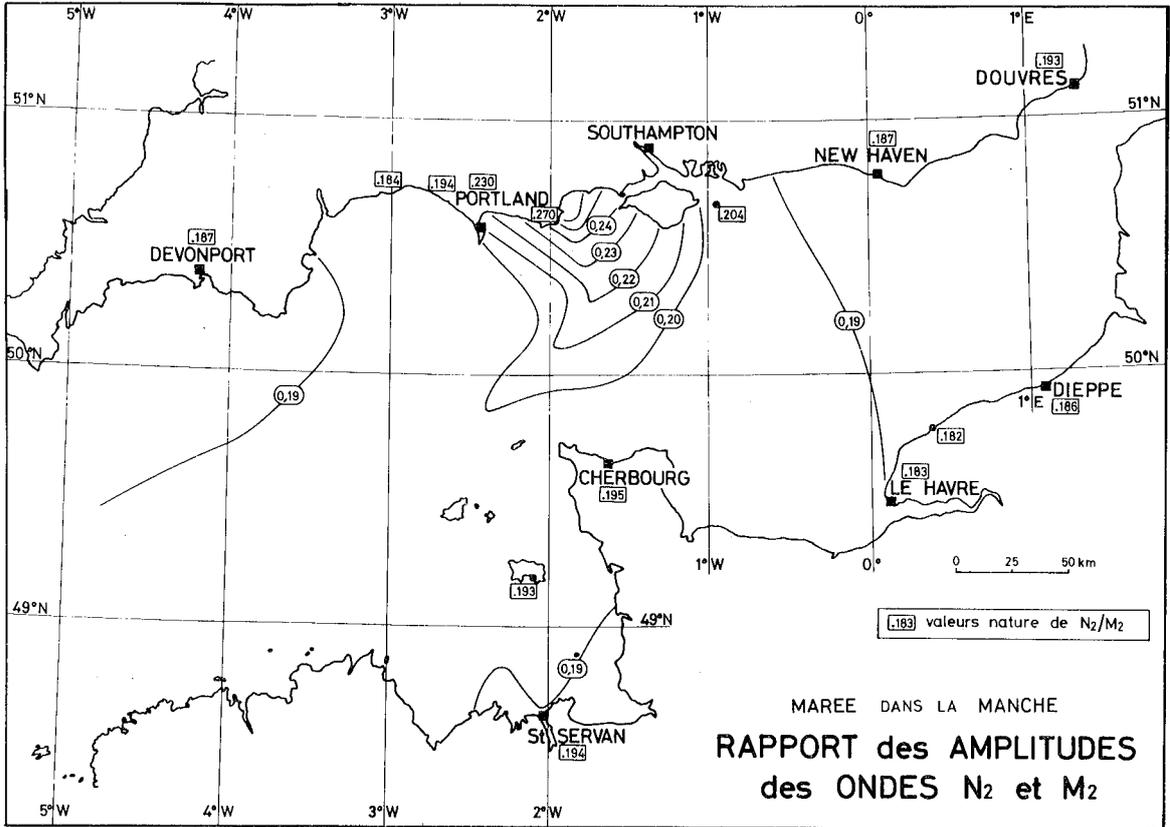


FIG.IV.1/6

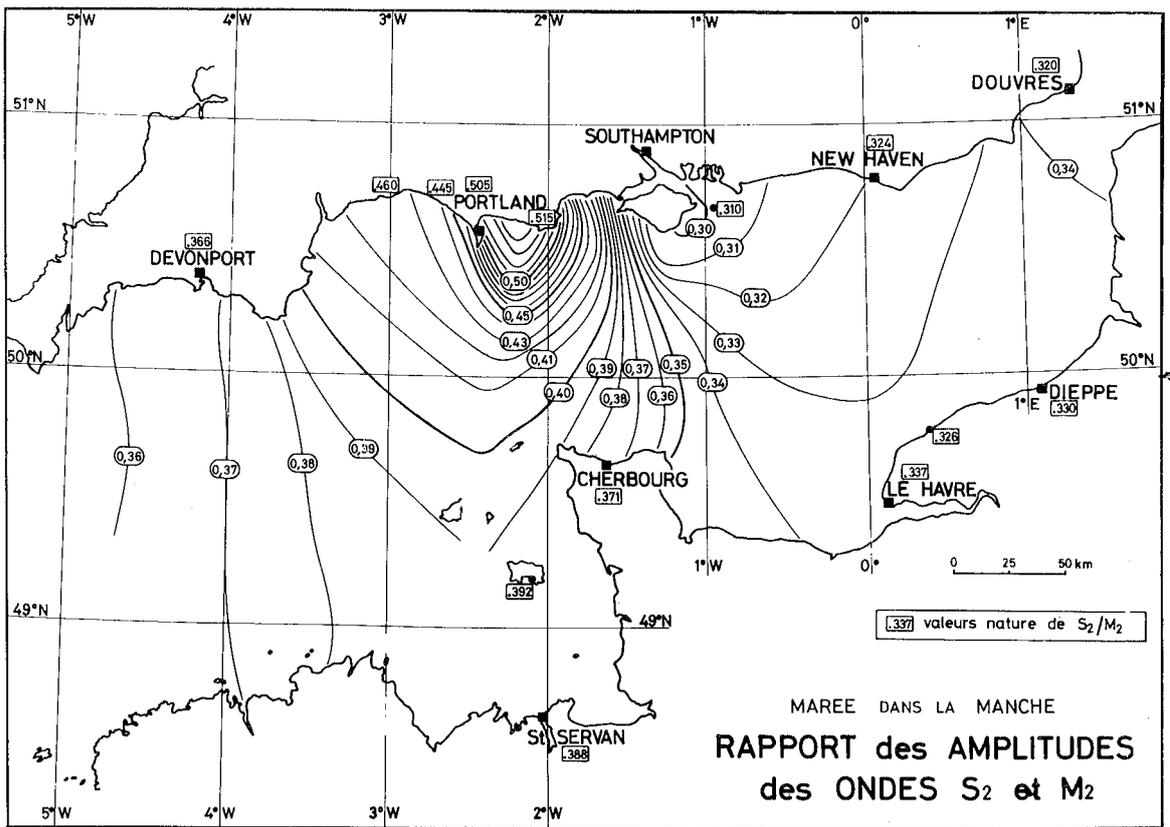
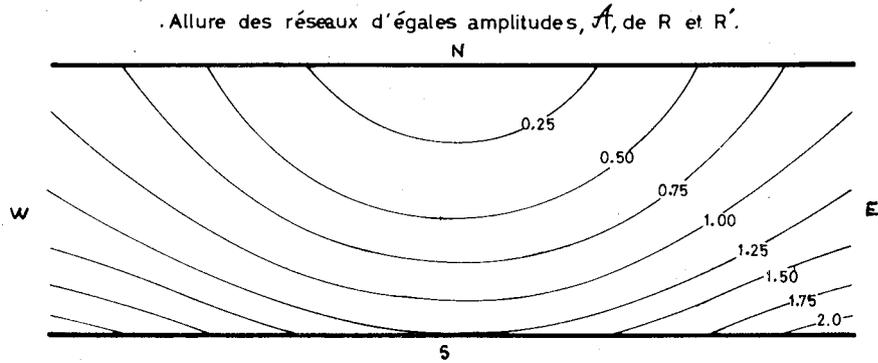


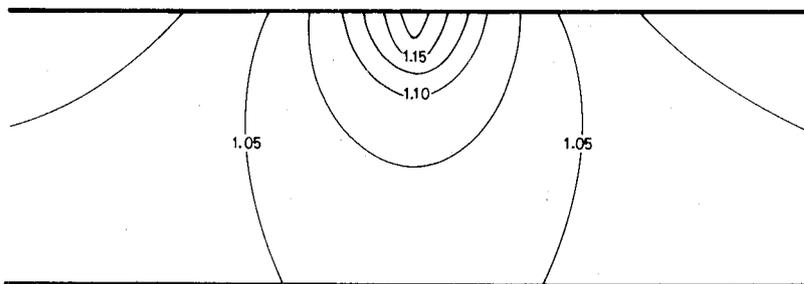
FIG.IV.1/8

FIG.IV.1/7: RAPPORT entre les AMPLITUDES de deux AMPHIDROMIES de KELVIN "R" et "R'" de mêmes caractéristiques et dont les points amphidromiques sont géographiquement voisins.

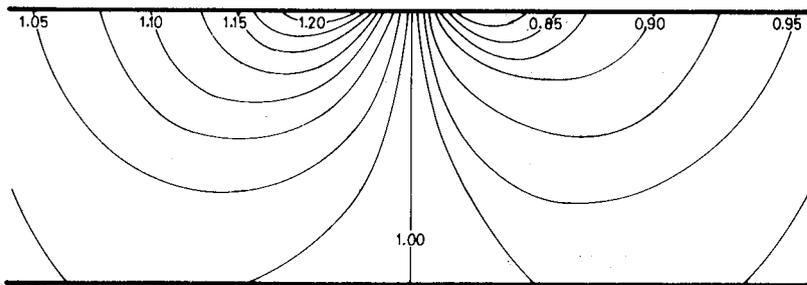


RESEAUX D'EGAL RAPPORT $A_{R'}/A_R$

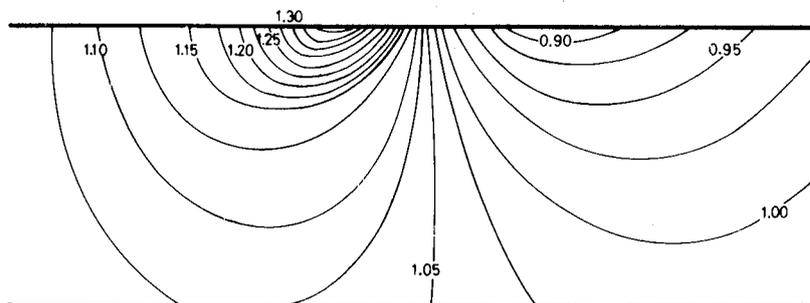
Cas 1: Le point amphidromique de R' est situé au Nord de celui de R



Cas 2: Le point amphidromique de R' est situé à l'Est de celui de R



Cas 3: Le point amphidromique de R' est situé au Nord-Est de celui de R



santes : 12 h 25 mn pour M_2 et 12 h 39 mn pour N_2 , et de la longueur d'onde approximative des ondes semi-diurnes dans la Manche : 1000 km, permet d'estimer ce déplacement à 5 km environ : déplacement léger qui se traduit, au niveau de la figure IV-1/6, par une incurvation des lignes d'égal rapport vers l'ouest.

3.1.2. Comparaison entre M_2 et S_2

Revenons aux figures IV-1/4 et 5. La comparaison entre les ondes S_2 et M_2 est plus complexe. Le graphique (b) de la figure IV-1/4 est cependant suggestif : les points se répartissent en deux groupes, situés de part et d'autre de la droite moyenne ; l'un correspond aux points situés en Manche occidentale : $A_{M_2} = k A_{S_2} - \epsilon$, l'autre à ceux de la Manche orientale : $A_{M_2} = k A_{S_2} + \epsilon$. Ces propriétés s'interprètent aisément en supposant que le point amphidromique de l'onde S_2 est plus à l'est que celui de l'onde M_2 . Ceci tient à la différence de période existant entre ces deux ondes. Un calcul de même type que celui que nous avons réalisé pour la comparaison entre les ondes M_2 et N_2 permet d'évaluer ce déplacement à la valeur approximative de 8,5 km. Mais le déplacement du point amphidromique virtuel de l'onde S_2 vers l'est, par rapport à la position de celui de l'onde M_2 ne suffit pas à expliquer l'allure du réseau des lignes d'égal rapport A_{S_2} / A_{M_2} de la figure IV-1/8. Il semble nécessaire d'admettre de plus un déplacement de ce point vers le nord, comme pour le réseau N_2 (cf figure IV-1/7). Et ceci s'interprète de la même manière par le fait que l'onde S_2 s'amortit plus fortement que si elle se propageait seule, en raison de la présence de l'onde dominante M_2 . Ainsi, il existe des différences entre les réseaux caractéristiques des ondes M_2 et S_2 . Ces écarts sont plus notables que ceux qui résultent de la comparaison entre les cartes M_2 et N_2 . Nous voyons toutefois qu'on peut admettre entre les réseaux caractéristiques de ces deux ondes M_2 et S_2 une affinité sur les amplitudes définies par le rapport :

$$\frac{A_{M_2}}{A_{S_2}} = 2,74$$

et un décalage des phases suivant la relation $g_{M_2} = g_{S_2} - 48^\circ$; les écarts maximum entre la solution ainsi obtenue et nos résultats antérieurs n'excédant pas 10 à 12 cm sur les amplitudes et 25° sur les phases.

Rappelons que le rapport entre les amplitudes des ondes M_2 et S_2 n'est pas identique à celui des coefficients correspondants du potentiel générateur :

$$\frac{C_{M_2}}{C_{S_2}} = \frac{0,9085}{0,4227} = 2,14$$

On a interprété ci-dessus cet écart par le fait que l'onde solaire S_2 , à la différence

des composantes M_2 et N_2 , n'est pas une onde d'origine purement astronomique. Une part non négligeable de celle-ci est attribuée à l'effet radiationnel, qui crée une onde de même fréquence que l'onde S_2 d'origine astronomique mais en opposition de phase avec celle-ci. C'est ainsi que peut s'expliquer la réduction de l'amplitude de l'onde S_2 réelle de près de 20 % par rapport à ce qui résulterait du potentiel générateur astronomique.

3.1.3 - Conclusions concernant les ondes semi-diurnes d'origine astronomique et radiationnelle

La comparaison que nous venons de faire entre les ondes M_2 , S_2 et N_2 est très instructive : elle confirme les propriétés de similitude que nous présentions ; elle permet aussi de caractériser et d'interpréter les écarts à cette correspondance : l'influence de la variation de période, des effets d'amortissement, et des contributions radiationnelles.

Il est donc possible de déduire les caractéristiques des diverses ondes semi-diurnes d'origine astronomique et radiationnelle des caractéristiques de l'une d'elles, par simple affinité sur les amplitudes, et glissement sur les phases : si les ondes considérées sont d'origine purement astronomique, la connaissance des coefficients correspondants du potentiel générateur suffit pour déterminer les rapports de similitude entre leurs amplitudes ; pour la définition des déphasages existant entre ces ondes, nous établirons au chapitre suivant une règle permettant de les déterminer, à partir de la connaissance de l'un d'entre eux. Pour les ondes d'origine à la fois astronomique et radiationnelle, le problème est plus complexe, mais les données relatives à un seul point d'observation in situ permettent de calculer le coefficient de proportionnalité et le déphasage, valables pour tout le domaine marin considéré. Toutefois, certaines précautions s'imposent lorsqu'on applique ces principes :

- Le domaine ne doit pas être trop étendu ; notons cependant qu'appliqué à toute la Manche, il ne semble pas introduire d'écarts trop importants.
- Il convient de prendre comme onde de référence, pour les composantes d'un même groupe, celle qui se trouve au centre de la bande spectrale à définir : l'onde M_2 , par exemple, pour les composantes semi-diurnes.

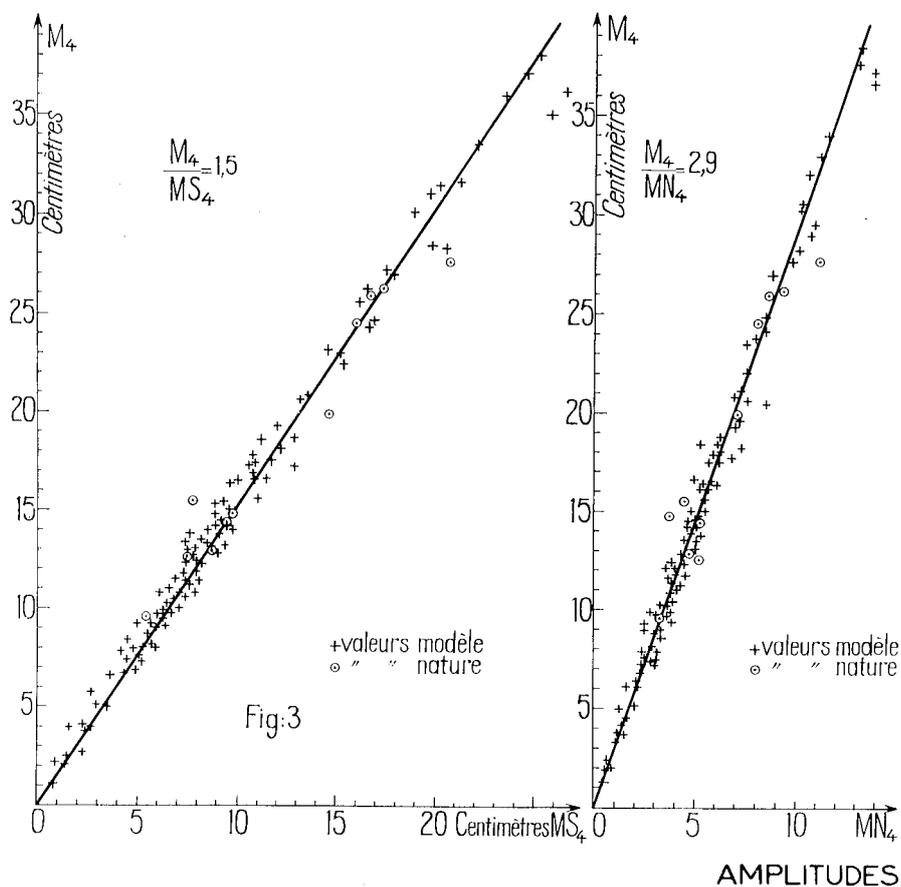


FIG.IV.1/9

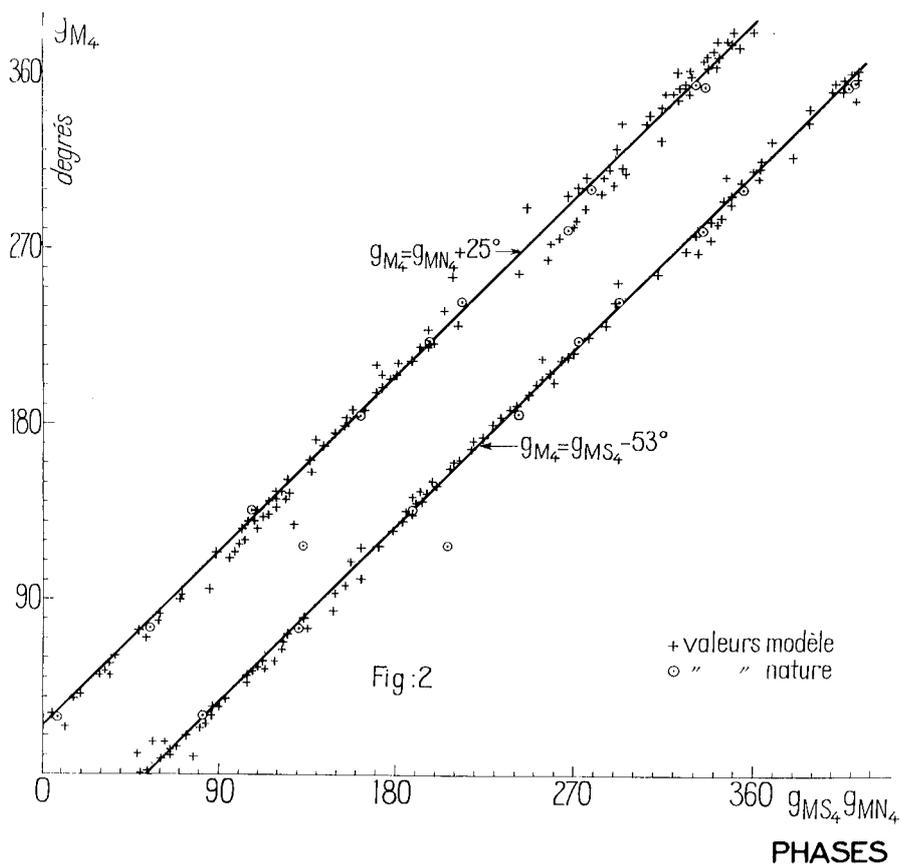


FIG.IV.1/10

3.2 - Les composantes quart-diurnes

La figure IV-1/9 donne la comparaison des amplitudes des ondes M_4 , MS_4 et MN_4 . Elle montre que la règle de proportionnalité est bien vérifiée par ces composantes. Nous relevons ainsi sur ces graphiques les valeurs ci-après des rapports que nous désignons dans la suite p :

$$p_{M_4/MS_4} = \frac{|\zeta_{M_4}|}{|\zeta_{MS_4}|} \approx 1,5 \quad ; \quad p'_{M_4/MN_4} = \frac{|\zeta_{M_4}|}{|\zeta_{MN_4}|} \approx 2,9 \quad \forall(x,y)$$

La figure IV-1/10 illustre la corrélation entre les phases de ces trois ondes, elle montre que leur propagation apparente est sensiblement la même : leurs réseaux de cotidales sont quasi identiques, à un changement près des phases, que nous notons :

$$\left. \begin{aligned} \Delta g_{MS_4/M_4} &= g_{MS_4}(x,y) - g_{M_4}(x,y) \approx 53^\circ \\ \Delta g'_{MN_4/M_4} &= g_{MN_4}(x,y) - g_{M_4}(x,y) \approx -25^\circ \end{aligned} \right\} \forall(x,y)$$

Or, au § 1.2.1, nous avons prévu théoriquement que ces corrélations résulteraient des formules :

$$\left[\frac{|\zeta_{M_4}|}{|\zeta_{MS_4}|} \right]_{\text{théorique}} = \frac{A_{M_2}^2}{2 A'_{M_2} A'_{S_2}} \quad ; \quad \left[\frac{|\zeta_{M_4}|}{|\zeta_{MN_4}|} \right]_{\text{théorique}} = \frac{A_{M_2}^2}{2 A'_{M_2} A'_{N_2}}$$

$$g_{M_4} = g_{MS_4} + (g_{M_2} - g_{S_2}) \quad ; \quad g_{M_4} = g_{MN_4} + (g_{M_2} - g_{N_2})$$

Prenant les valeurs numériques établies aux paragraphes précédents pour les relations existant entre les ondes semi-diurnes M_2 , S_2 et N_2 :

$$A_{M_2} / A_{S_2} \approx 2,74 \quad ; \quad A_{M_2} / A_{N_2} \approx 5,21$$

$$g_{M_2} - g_{S_2} \approx -48^\circ \quad ; \quad g_{M_2} - g_{N_2} \approx 18^\circ$$

on en déduit les valeurs théoriques des grandeurs ci-après :

$$p_{th} = \left[\frac{|\zeta_{M_4}|}{|\zeta_{MS_4}|} \right]_{th} \approx 1,37 \quad ; \quad p'_{th} = \left[\frac{|\zeta_{M_4}|}{|\zeta_{MN_4}|} \right]_{th} \approx 2,6$$

$$\Delta g_{th} = [g_{MS_4} - g_{M_4}]_{th} \approx 48^\circ \quad ; \quad \Delta g'_{th} = [g_{MN_4} - g_{M_4}]_{th} \approx -18^\circ$$

Calculées à partir des caractéristiques des ondes M_2 , S_2 , N_2 précédemment déterminées, on voit que les valeurs prévues par la théorie sont bien vérifiées par les données nature et modèle :

- Pour la relation entre les réseaux M_4 et M_{S4} , on a :

$$p/p_K = 1,09 \quad ; \quad \Delta g - \Delta g_K = 5^\circ$$

- Pour la relation entre les réseaux M_4 et MN_4 , on note :

$$p'/p'_K = 1,1 \quad ; \quad \Delta g' - \Delta g'_K = -7^\circ$$

La comparaison des réseaux de l'onde MK_4 à l'onde M_4 , par exemple, conduirait à des résultats semblables, nous ne les rapportons pas ici, pour ne pas allonger l'exposé.

Ainsi, les caractéristiques des principales ondes quart-diurnes peuvent être déterminées avec une précision satisfaisante dès que l'on connaît les réseaux d'amplitudes et de phases de l'une d'elles, par exemple l'onde M_4 . Le passage des cartes d'une composante à l'autre se fait par simple affinité sur les amplitudes et décalage sur les phases. Les coefficients de proportionnalité et les valeurs des déphasages à appliquer peuvent être déterminés à partir des caractéristiques de ces ondes connues en quelques points où nous disposons de résultats d'observations in situ. Dans ce cas, les erreurs maxima que l'on peut commettre en déduisant, par exemple, les réseaux MS_4 de ceux de M_4 ne dépassent pas 2cm pour les amplitudes, et 10° pour les phases, par rapport aux solutions définies par des méthodes plus précises. On notera, de plus, que ces coefficients de proportionnalité entre les amplitudes, et les déphasages, peuvent être déterminés de façon purement théorique, à partir des caractéristiques des ondes génératrices. Dans ce cas, les écarts entre les réseaux résultants et nos solutions précises, peuvent atteindre quelques centimètres sur les amplitudes (3 cm par exemple pour l'onde MS_4 déduite de M_4) et une vingtaine de degrés sur les phases.

Selon le degré d'approximation recherché dans la détermination des caractéristiques de ces ondes, de telles procédures peuvent donc être très intéressantes.

3.3 - Les composantes sixième-diurnes

Nous avons étendu l'analyse précédente aux ondes sixième-diurnes M_6 , $2MS_6$, et $2MN_6$. Nous avons utilisé dans ce but, les valeurs numériques des caractéristiques

de ces ondes aux 145 points où nos méthodes permettent de les déterminer. Toutefois, les amplitudes étant faibles en certains points, nous n'avons retenu que celles qui dépassent 1,5 cm dans la nature : ailleurs, les résultats expérimentaux fournis par le modèle tournant manquent de précision.

Reportons nous donc aux figures IV-1/11 et 12. On en déduit expérimentalement les valeurs ci-après des rapports de proportionnalité, et des angles de déphasage :

$$P_{M_6/2MS_6} = \frac{|S_{M_6}|}{|S_{2MS_6}|} \approx 1,04 \quad ; \quad P'_{M_6/2MN_6} = \frac{|S_{M_6}|}{|S_{2MN_6}|} \approx 1,7$$

$$\Delta g_{M_6/2MS_6} = g_{M_6} - g_{2MS_6} \approx -35^\circ \quad ; \quad \Delta g'_{M_6/2MN_6} = g_{M_6} - g_{2MN_6} \approx 32^\circ$$

Notons cependant que la dispersion des points expérimentaux est quand même plus grande pour ce groupe d'ondes que dans les cas précédents.

Partant des valeurs des rapports A'_{M_2}/A'_{S_2} et A'_{M_2}/A'_{N_2} ..., déjà relevés précédemment, et des expressions données dans la partie théorique de ce chapitre sur la correspondance entre les caractéristiques des composantes et leurs ondes génératrices, on en déduit les valeurs suivantes :

$$P_H = \left[\frac{|S_{M_6}|}{|S_{2MS_6}|} \right]_H \approx 0,91 \quad ; \quad P'_H = \left[\frac{|S_{M_6}|}{|S_{2MN_6}|} \right]_H \approx 1,68$$

$$\Delta g_H = [g_{M_6} - g_{2MS_6}]_H \approx -48^\circ \quad ; \quad \Delta g'_H = [g_{M_6} - g_{2MN_6}]_H \approx 18^\circ$$

soit, pour les composantes M_6 et $2MS_6$:

$$\frac{P}{P_H} = 1,14 \quad ; \quad \Delta g - \Delta g_H = 13^\circ$$

et pour les composantes M_6 et $2MN_6$:

$$\frac{P'}{P'_H} = 1,01 \quad ; \quad \Delta g' - \Delta g'_H = 14^\circ$$

Des comparaisons semblables, réalisées uniquement sur les valeurs déduites d'observations in situ, pour d'autres sixième-diurnes comme $2MK_6$ et $2SM_6$, conduisent de même aux rapports :

$$P = \frac{|S_{M_6}|}{|S_{2MK_6}|} \approx 3,4 \quad ; \quad P_H = \left[\frac{|S_{M_6}|}{|S_{2MK_6}|} \right]_H \approx 3,14 \quad \text{soit} \quad \frac{P}{P_H} = 1,08$$

$$P = \frac{|S_{M_6}|}{|S_{2SM_6}|} \approx 2,97 \quad ; \quad P_H = \left[\frac{|S_{M_6}|}{|S_{2SM_6}|} \right]_H \approx 3,36 \quad \text{soit} \quad \frac{P}{P_H} = 0,89$$

Les caractéristiques des principales ondes sixième-diurnes peuvent donc, elles aussi, se déduire de celles de l'une d'entre elles, par exemple l'onde M_6 ; la détermination des paramètres de proportionnalités et les valeurs des déphasages entre ces ondes peuvent encore être déduites soit expérimentalement de quelques observations in situ, soit théoriquement, des caractéristiques des ondes génératrices. Dans le premier procédé, il est raisonnable de chiffrer l'écart entre les solutions approchées ainsi construites et les solutions plus élaborées du genre de celles que nous avons établies à l'aide du modèle, à 1,5 cm maximum sur les amplitudes et 20 à 25° sur les phases. Dans le second procédé, ces écarts peuvent atteindre 2 cm pour les amplitudes, et 30° sur les phases. Ce ne sont certes pas des écarts négligeables, surtout en valeur relative, mais de telles approximations peuvent encore être utiles pour définir d'une façon simple et rapide l'allure de réseaux de moindre importance comme ceux de $2MK_6$ ou $2SM_6$.

4 - CONCLUSIONS

Il apparaît ainsi possible de diviser le spectre total de la marée dans une mer littorale en groupes caractérisés par la valeur de leur fréquence : longues périodes, diurnes, semi-diurnes, quart-diurnes, sixième diurnes ... et par leur nature : ondes d'origine astronomique, ondes de petits fonds, ondes engendrées par le frottement ... Pour chacun de ces groupes, les ondes qui les composent présentent des propriétés communes, qu'il est possible de prévoir théoriquement.

Nous avons ainsi analysé de façon détaillée les analogies et différences existant entre les principales ondes semi-diurnes, d'origine astronomique ou assimilées (ondes radiationnelles) : les relations théoriques obtenues entre les caractéristiques de ces composantes sont vérifiées de façon satisfaisante. Les écarts observés ont pu, d'ailleurs, être interprétés théoriquement dans une large mesure.

Nous avons montré, de même, qu'il est possible de définir les groupes d'ondes non linéaires comme les quart-diurnes ou les sixième-diurnes, à partir des réseaux caractéristiques d'une seule onde de chaque groupe et des caractéristiques des ondes génératrices.

Nous avons passé sous silence un groupe d'ondes qui ne relève pas de l'analyse qui précède : les composantes que nous pouvons appeler "mixtes", c'est-à-dire correspondant à des ondes à la fois non linéaires et d'origine purement astronomique. Les lois de leur propagation sont naturellement très différentes de celles des autres

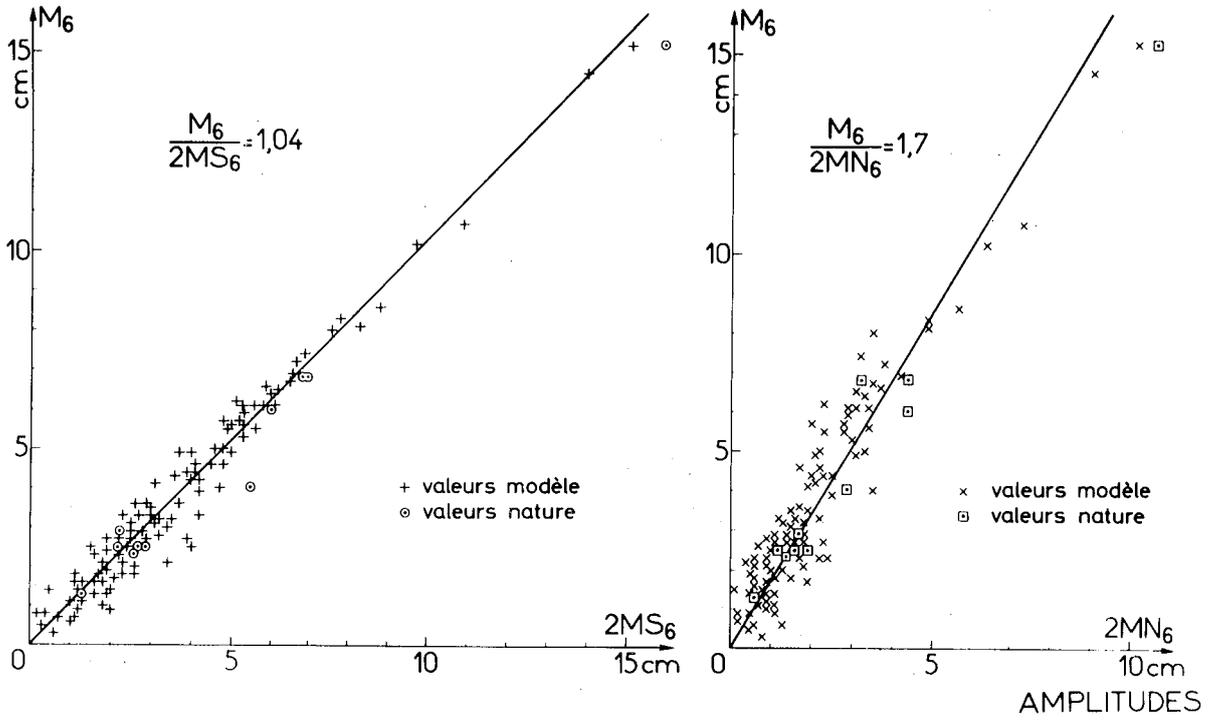


FIG. IV.1/11

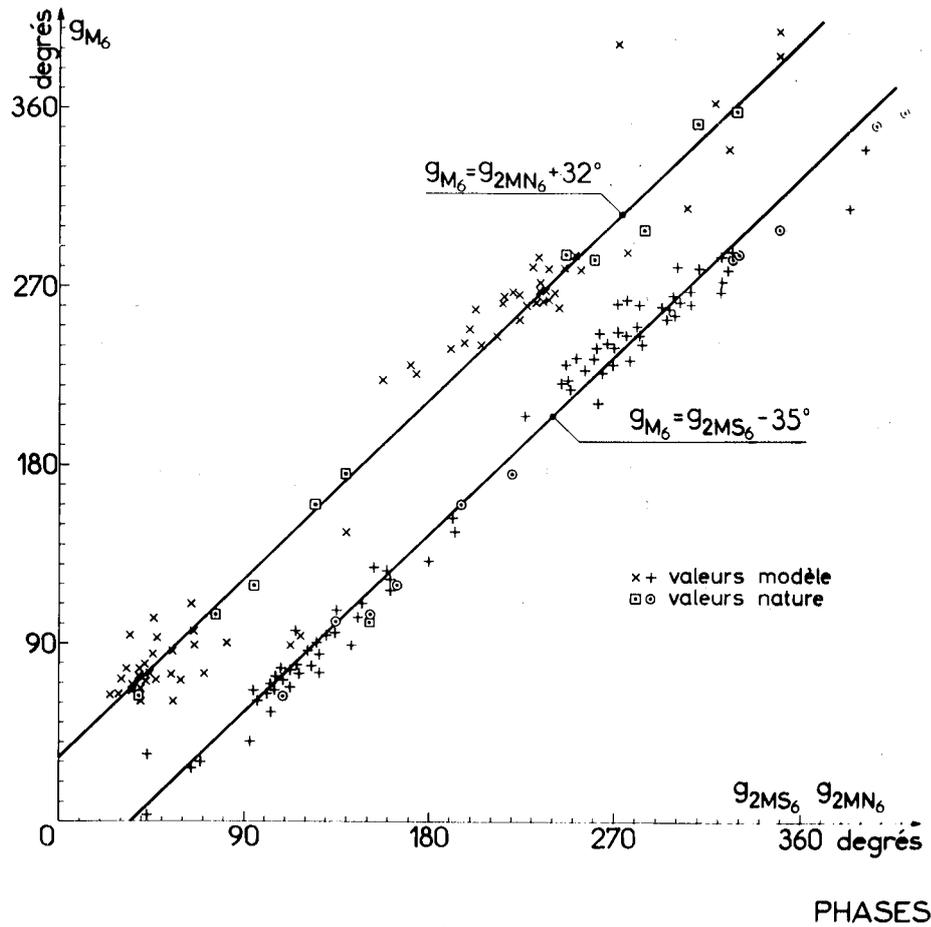


FIG. IV.1/12

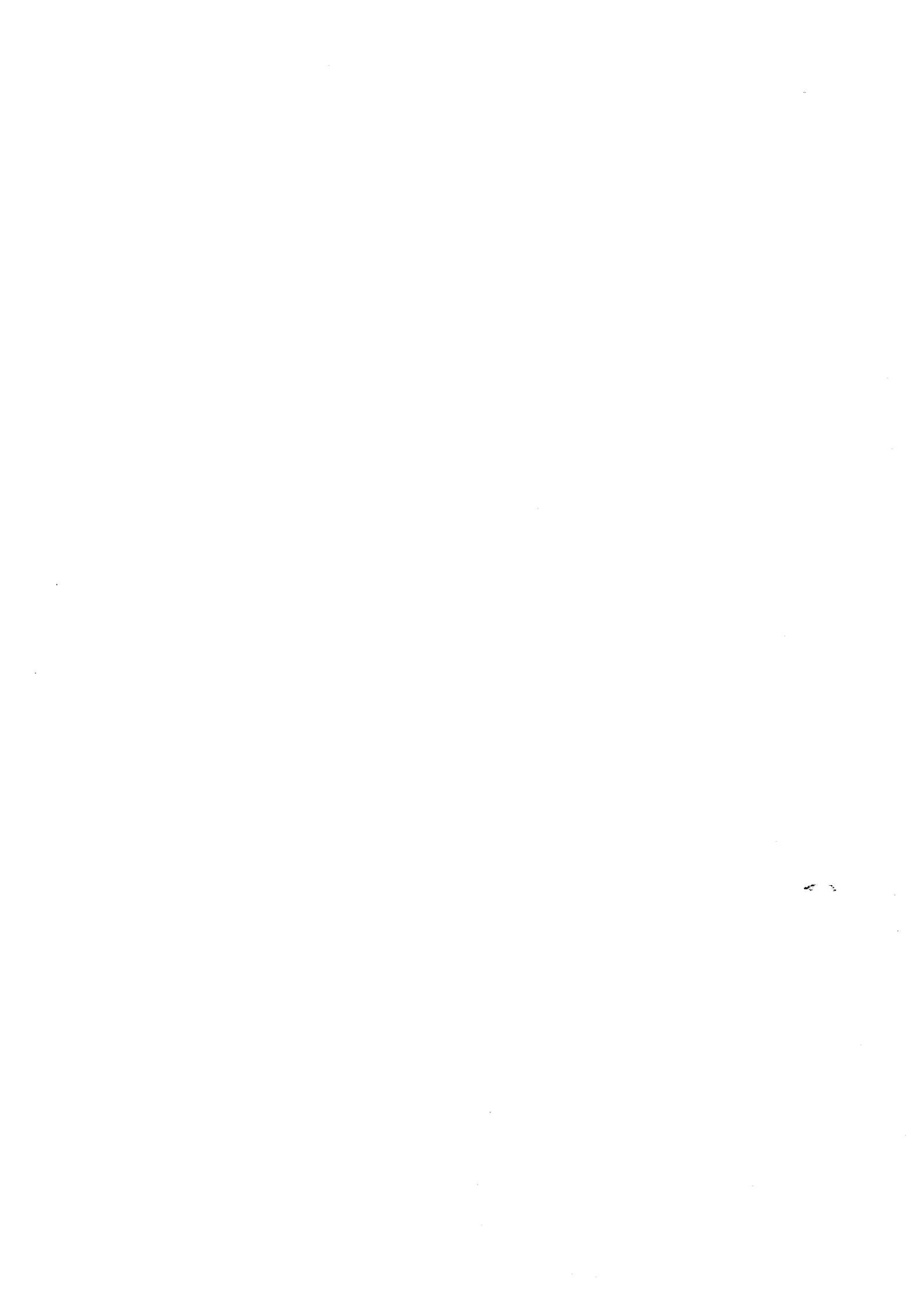
ondes, même voisines en fréquence. Nous allons, dans le dernier chapitre qui suit, montrer qu'on peut tirer parti des résultats ci-dessus pour analyser d'une manière approfondie la structure des ondes en cause.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D.C. CARTWRIGHT et R.J. TAYLER - 1971
 "New computations of the tide generating potential"
 Geoph. J.R. Astr. Soc. 23 - pp. 45-74
- [2] W.H. MUNK et D.E. CARTWRIGHT - 1966
 "Tidal spectroscopy and prediction"
 Phil. Trans. R. Soc. - A.259 - pp.533-581
- [3] G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST - 1970
 "Etude des phénomènes non-linéaires dérivés de l'onde lunaire
 moyenne M_2 dans la Manche"
 Cahiers Océanographiques - vol. XXII - 6
- [4] G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST - 1971
 "Détermination des caractéristiques des composantes S_2 , N_2 et K_2 ..."
 C.R. Acad. Sciences - t.272 - série A - pp.1603-1606
- [5] G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST - 1973
 "Les ondes quart-diurnes d'interaction non-linéaires MS_4 , MN_4 et MK_4 "
 C.R. Acad. Sciences - t.276 - Série A - pp.153-156
- [6] G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST - 1973
 "Les ondes sixième-diurnes d'interaction $2MS_6$, $2SM_6$, $2MN_6$ et $2MK_6$ "
 C.R. Acad. Sciences - t.276 - Série A - pp.1581-1584
- [7] J. KRAVTCHENKO -
 Cours de l'ENSTA - PARIS

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. EYRIES - 1965
"Analyse d'une courte durée d'observation de la marée ou du courant de marée"
Actes du symposium sur le matériel maregraphique et la prédiction des marées - PARIS - 3-7 mai 1965
- [2] M. EYRIES -
"La méthode des concordances et l'analyse harmonique par les constantes approchées"
Revue hydrographique Internationale - vol. XXXIV n°1
- [3] J. MAX - 1972
"Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques"
Editions MASSON - PARIS



CHAPITRE IV-2

SEPARATION DES PARTS ASTRONOMIQUE ET NON LINEAIRE
POUR LES ONDES MIXTES - EXEMPLE DE L'ONDE $\mathcal{M}_2 + 2MS_2$

Les ondes que nous appelons mixtes sont en partie engendrées par les effets du potentiel générateur sur les masses d'eau océaniques. Ces parts d'origine astronomique sont induites dans le domaine littoral étudié D, par ses limites. L'autre part, d'origine non linéaire, est engendrée sur place, à l'intérieur même de D par les effets non linéaires accompagnant la propagation des ondes principales (leurs ondes génératrices). Nous n'obtenons, par analyse harmonique des enregistrements de marées in situ, que la somme de ces deux parts, a priori indissociables. Nous nous proposons ici, à la lumière des conclusions précédentes, de présenter une méthode de séparation de ces composantes. Nous allons traiter dans la suite le cas de l'onde variationnelle semi-diurne \mathcal{M}_2 superposée à l'onde non-linéaire $2MS_2$. Mais les raisonnements sont aisément transposables à toutes les autres ondes mixtes, $L_2 + 2MN_2$ ou $2N_2 + 2MK_2$, par exemple.

1 - POSITION DU PROBLEME

L'analyse des observations faites in situ permet de déterminer l'amplitude A et la phase ϕ correspondant à la fréquence de ces ondes \mathcal{M}_2 et $2MS_2$. Elles en représentent la somme que nous notons $\mathcal{M}_2 + 2MS_2$. A partir de ces données A et ϕ , nous nous proposons de déterminer les amplitudes et les phases respectives de l'onde astronomique \mathcal{M}_2 et de la composante non linéaire $2MS_2$.

Soient $H_{\mathcal{M}_2}(x,y)$ et $g_{\mathcal{M}_2}(x,y)$, $H_{2MS_2}(x,y)$ et $g_{2MS_2}(x,y)$, les amplitudes et les phases respectives de ces ondes, et $F_{\mathcal{M}_2}$, $u_{\mathcal{M}_2}$, f_{2MS_2} et u_{2MS_2} leurs corrections nodales pour la période d'observation considérée. Nous avons ainsi (cf chapitre I-3) :

$$(1) \quad A \cos(\omega t - \phi) = F_{\mathcal{M}_2} H_{\mathcal{M}_2} \cos[\omega t + (V_0 + u)_{\mathcal{M}_2} - g_{\mathcal{M}_2}] \\ + F_{2MS_2} H_{2MS_2} \cos[\omega t + (V_0 + u)_{2MS_2} - g_{2MS_2}]$$

avec :

- ω : pulsation commune des ondes M_2 et $2MS_2$, de vitesse angulaire $27^{\circ}968/h$, donc de période 12 h 52 mn
- t : temps compté par rapport au 1er janvier 0 h de l'année où ont commencé les observations de la marée que nous avons analysée
- V_0 : déphasage de l'astre perturbateur correspondant par rapport à son passage à Greenwich, pour $t = 0$
- (notons que $(V_0)_{2MS_2} = 2 (V_0)_{M_2} - (V_0)_{S_2}$)

Remarques :

1. Il a toujours été admis classiquement que les corrections nodales pour l'onde $M_2 + 2MS_2$ étaient égales à $f_{M_2}^2$ et $2(u)_{M_2} - (u)_{S_2}$. Nous avons déjà noté que le raisonnement correspondant a très probablement consisté à se référer à la loi de composition angulaire de la composante considérée pour en déduire sa loi de comportement par rapport aux ondes génératrices. Ainsi :

$$f_{2MS_2} = f_{M_2}^2 \times f_{S_2} = f_{M_2}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{2MS_2} = 2\omega_{M_2} - \omega_{S_2}$$

puisque $f_{S_2} = 1$

Or, les développements que nous avons présentés précédemment nous ont conduit à constater que la loi de dépendance d'une telle composante à ses ondes génératrices est très complexe, mais qu'elle peut être considérée en première approximation comme proportionnelle à : $A'_{M_2} \times A'_{S_2}$. Il s'ensuit que :

$$(2) \quad F_{2MS_2} = F_{M_2} \times F_{S_2} = F_{M_2}$$

2. Les valeurs de f_i sont déduites par interpolation des tables de SHUREMAN cf [4] ou de HORN - cf [2] - pour le mois central de la période de dépouillement. Les valeurs " u " sont prises dans ces tables pour le 1er janvier 0h de l'année de début d'observation.

3. Au point de vue pratique, pour les applications numériques que nous présentons ci-après, signalons que les valeurs de A et \emptyset que nous allons utiliser proviennent des données relevées dans les tables du BHI ou sur les fiches qui nous ont été communiquées par les Services Hydrographiques français, anglais et allemands - cf chapitre I-3. Sur ces documents, sont indiqués les quantités $H(x,y)$ et $g(x,y)$: amplitude et phase moyennes pour la fréquence considérée au point (x,y) . Nous en déduirons les valeurs de A et \emptyset par les relations :

$$A = fH \quad \text{et} \quad \emptyset = g - (V_0 + u)$$

et nous supposons, ce qui semble très vraisemblable, que les valeurs de f et $(V_0 + u)$ utilisées lors du calcul des quantités H et g par les services effectuant le dépouillement, ont été relevées dans les tables de SHUREMAN.

Pour déterminer les quatre paramètres inconnus H_{μ_2} , g_{μ_2} , H_{2MS_2} et g_{2MS_2} , nous ne disposons que des 2 équations (1), le temps étant éliminé.

Il est donc nécessaire de faire de nouvelles hypothèses de façon à trouver les deux équations manquantes pour fermer le système aux quatre inconnues.

2 - HYPOTHESES PERMETTANT DE RESOUDRE LE PROBLEME DE LA SEPARATION DE L'ONDE $\mu_2 + 2MS_2$ EN SES COMPOSANTES

L'onde μ_2 , d'origine purement astronomique, appartient au groupe des semi-diurnes M_2 , S_2 , N_2 , K_2 ... Etant donné les conclusions du chapitre précédent, ses caractéristiques doivent donc se déduire de celles, déjà connues, de l'une des ondes précitées, sous réserve de déterminer le coefficient de proportionnalité à appliquer, ainsi que la valeur du déphasage à adopter.

Il convient tout d'abord de choisir une onde de référence. Nous avons le choix entre les composantes M_2 et N_2 , car les ondes S_2 et K_2 sont perturbées par les effets radiationnels. L'onde la mieux connue est naturellement la composante dominante M_2 . Mais par sa position dans le spectre des semi-diurnes, elle est plus éloignée que N_2 de la fréquence de l'onde μ_2 . Nous avons choisi de nous rapporter à l'onde M_2 , mais ce choix est arbitraire, il serait même instructif de comparer les résultats ainsi obtenus à ceux que donneraient l'utilisation de l'onde N_2 .

Le rapport de proportionnalité entre les ondes M_2 et μ_2 est égal, d'après ce que nous avons indiqué au chapitre précédent, à celui des coefficients correspondants du potentiel générateur, à savoir :

$$(5) \quad \frac{A_{\mu_2}}{A_{M_2}} = \frac{C_{\mu_2}}{C_{M_2}} = \frac{0,2777}{0,90812}$$

Notons que nous retenons pour le calcul la valeur numérique de C_{μ_2} donnée par DOODSON ; différente de celle qu'a proposée DARWIN : 0,219. La valeur choisie est en effet plus exacte et s'est d'ailleurs trouvée confirmée par le nouveau développement de CARTWRIGHT et TAYLER (cf [1]).

LE HAVRE

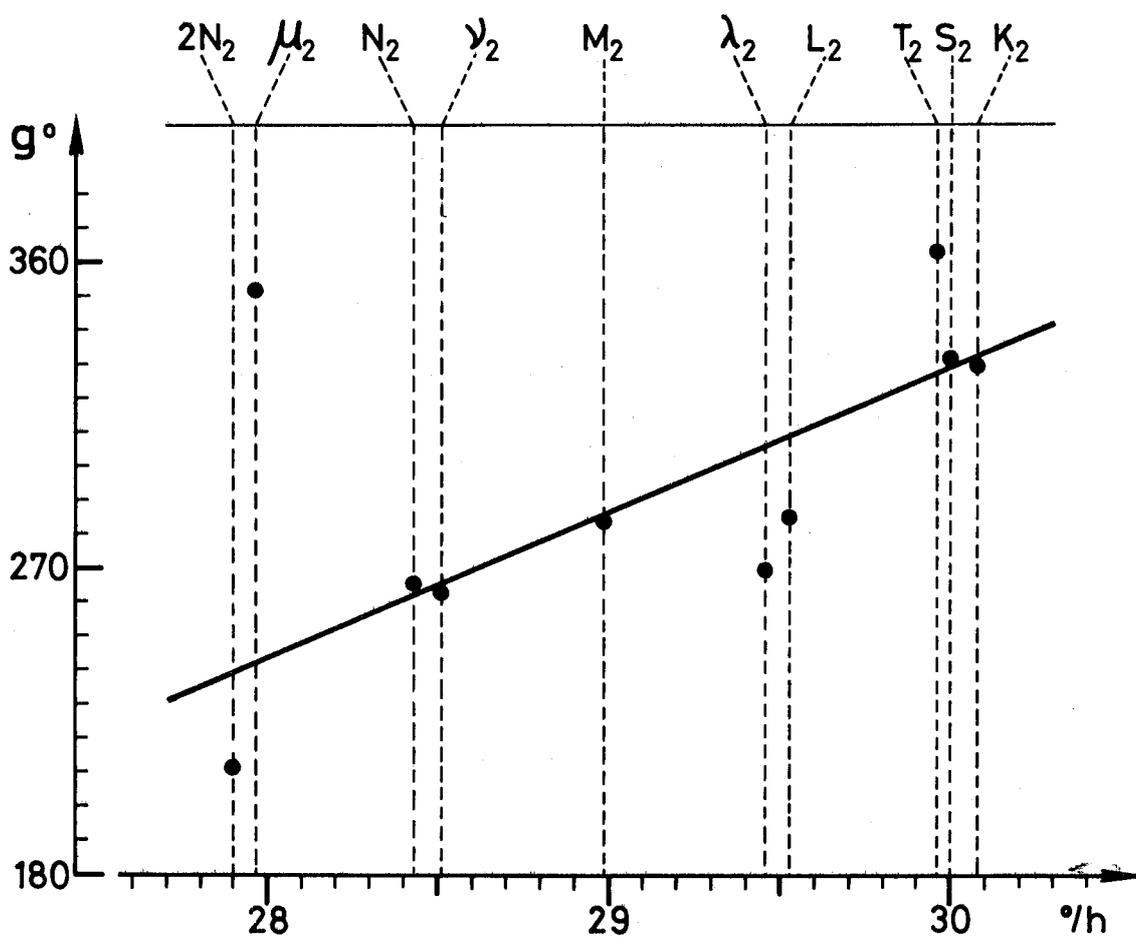


FIG. IV. 2/1

Phase g en fonction de la vitesse angulaire
pour les principales ondes semi-diurnes

En ce qui concerne la valeur du déphasage à appliquer au réseau des cotidales de l'onde M_2 pour obtenir celui de l'onde μ_2 , nous nous inspirons de constatations déjà formulées par J.R. ROSSITER dans un rapport interne de son Institut. Ces remarques confirment d'ailleurs une des hypothèses adoptées par LAPLACE pour calculer la marée à Brest. Sur le graphique de la figure IV-2/1, nous avons porté la phase g de chaque onde semi-diurne en fonction de sa vitesse angulaire, pour un port particulier : le Havre. Nous constatons ainsi que les déphasages g des ondes astronomiques M_2 , N_2 , ν_2 , et des ondes d'origine à la fois astronomique et radiationnelle, S_2 et K_2 , varient linéairement en fonction de la vitesse angulaire. Certes les phases des ondes mixtes comme μ_2 , $2N_2$, λ_2 et L_2 ne vérifient pas cette relation linéaire. Seule l'onde T_2 susceptible d'être classée dans le même groupe que S_2 et K_2 présente par rapport à cette règle un écart surprenant. Mais l'amplitude de cette composante n'atteint pas 3cm dans ce port, il est donc possible que sa phase soit imprécise. Cette relation linéaire entre les déphasages des ondes M_2 , N_2 , ν_2 , S_2 , K_2 et éventuellement T_2 se vérifie aussi approximativement pour tous les autres ports de la Manche ; nous admettons a priori la validité de cette règle pour l'ensemble de la mer littorale. Pratiquement, nous nous rapportons aux phases des ondes M_2 et N_2 pour définir celle de μ_2 ; les deux ondes de référence sont en effet les plus importantes, d'origine purement astronomique et leurs caractéristiques sont bien connues. On a :

$$(4) \quad g_{\mu_2}(x,y) = g_{M_2}(x,y) + (\omega_{\mu_2} - \omega_{M_2}) \frac{g_{M_2}(x,y) - g_{N_2}(x,y)}{\omega_{M_2} - \omega_{N_2}}$$

3 - DETERMINATION DES PARAMETRES H_{μ_2} , g_{μ_2} , H_{2MS2} et g_{2MS2} DANS QUELQUES PORTS D'OBSERVATION

Une fois déterminées les quantités H_{μ_2} et g_{μ_2} par le procédé décrit au paragraphe précédent, il devient immédiat de calculer H_{2MS2} et g_{2MS2} à partir des valeurs H et g relevées sur les tables du BHI et les fiches des différents services hydrographiques, pour les ports où nous disposons d'analyses de marées. Nous nous bornons naturellement aux valeurs déduites d'observations portant sur une année, les résultats provenant d'enregistrements mensuels n'étant pas sûrs.

Posons :

$$(5) \quad \begin{cases} R = F.H \\ S = g - (V_0 + u) \end{cases} \quad \begin{cases} R_1 = F_{\mu_2} H_{\mu_2} \\ S_1 = g_{\mu_2} - (V_0 + u)_{\mu_2} \end{cases}$$

et rappelons que nous définissons comme suit H_{μ_2} et g_{μ_2} :

$$(6) \quad H_{\mu_2} = H_{M_2} \times \frac{C_{\mu_2}}{C_{M_2}} \quad \text{et} \quad g_{\mu} = g_{M_2} + (\omega_{\mu_2} - \omega_{M_2}) \frac{g_{M_2} - g_{N_2}}{\omega_{M_2} - \omega_{N_2}}$$

Ainsi :

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} H_{2MS_2} = \frac{1}{F_{2MS_2}} [R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos(\delta - \delta_1)]^{1/2} \\ g_{2MS_2} = (V_0 + u)_{2MS_2} - \text{Arc tg} \frac{R \sin \delta - R_1 \sin \delta_1}{R \cos \delta - R_1 \cos \delta_1} \end{cases}$$

Dans le tableau IV-2/1, nous avons relevé toutes les données que nous possédons relativement à l'onde $\mu_2 + 2MS_2$ et portant sur des périodes de l'ordre de l'année. Nous y avons joint les données H_{M_2} , g_{M_2} , g_{N_2} , les coefficients f et $V_0 + u$ relevés dans les tables de SHUREMAN - cf [4] - pour l'onde $\mu_2 + 2MS_2$. Les valeurs numériques des coefficients F_{μ_2} , $(V_0 + u)_{\mu_2}$; $F_{2MS_2} = F_{M_2}$ ainsi que les paramètres $(V_0 + u)_{2MS_2} = 2(V_0 + u)_{M_2} - (V_0 + u)_{S_2}$ sont empruntés aux tables de HORN - cf [2]. Les résultats du calcul, réalisé sur ordinateur, sont présentés dans le tableau IV-2/2.

Nous avons ainsi séparé les ondes μ_2 et $2MS_2$ dans les divers ports d'observation que nous connaissons. Il reste maintenant à déterminer les caractéristiques de ces deux ondes sur toute l'étendue de la Manche, afin de contrôler la cohérence de nos résultats.

4 - DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DES ONDES μ_2 ET $2MS_2$

4.1 - L'onde μ_2

Elle peut naturellement être déterminée de façon approchée à partir des réseaux définissant l'onde M_2 , puisque nous connaissons maintenant le rapport de proportionnalité entre μ_2 et M_2 : 0,03058, et l'angle de déphasage moyen entre celles-ci : 35°.

Mais nous pouvons aussi déterminer une solution plus précise à l'aide du modèle réduit, suivant les méthodes décrites au chapitre III-1 ; les valeurs que nous avons utilisées sont déduites du calcul que nous venons de présenter et les résultats sont consignés dans le tableau IV-2. Nous avons appliqué ce deuxième procédé, en choisissant pour déterminer nos solutions les valeurs marquées d'un astérisque sur le tableau IV-2. Les résultats sont représentés sur les cartes de la figure IV-2/2 donnant les lignes d'égaux amplitudes et d'égaux phases de cette composante μ_2 .

Nous constatons sur la figure IV-2/3 que la correspondance entre la solution ainsi définie et les valeurs de μ_2 que nous avons calculées est excellente : les écarts sont inférieurs au demi-centimètre pour les amplitudes et à 10° pour les phases, dans les ports où les données disponibles permettent de faire cette comparaison.

4.2 - L'onde $2MS_2$

Pour définir cette onde, nous disposons donc des valeurs de ses amplitudes et phases en quelques points le long des côtes, calculées au paragraphe IV-2/3 et consignées dans le tableau IV-2/2. Rappelons que cette composante est d'origine non linéaire : elle résulte de l'interaction entre M_2 et S_2 . La détermination de ses caractéristiques se fait encore sur modèle réduit en appliquant les méthodes présentées précédemment. La simulation sur modèle de la propagation simultanée des ondes M_2 et S_2 , présentée déjà au chapitre III-2, conduit à la définition de l'onde $2MG_2$ qu'il faut corriger en lui superposant les ondes $a_2^{\mu_2}$ et $b_2^{\mu_2}$ entrant dans la Manche par les limites atlantique et Mer du Nord pour obtenir la solution définitive $2MS_2$. Sans reproduire ici le détail des calculs, nous donnons simplement les résultats sur les cartes de la figure IV-2/4. Les réseaux obtenus diffèrent considérablement des réseaux classiques caractérisant les ondes semi-diurnes : le point amphidromique est réel, situé au centre de la Manche. L'intérêt de ces résultats réside dans le fait qu'ils permettent de définir pour la première fois l'allure des lignes d'égaux amplitudes et d'égaux phases d'une onde semi-diurne d'origine non linéaire.

La solution obtenue est en très bon accord avec les valeurs caractéristiques de l'onde $2MS_2$ calculées au § IV-2/3 : les écarts sont partout inférieurs à 10° sur les phases - cf figure IV-2/5 ; en ce qui concerne les amplitudes, les écarts sont de l'ordre du centimètre, le maximum se situant à St-Malo (1,9 cm d'écart pour une amplitude de 24,8 cm). Il subsiste un point critique : Douvres, mais ce port est situé à l'extrême limite est du modèle réduit. Les données correspondantes sont donc peu significatives.

5 - CONCLUSIONS

Les résultats que nous présentons relativement aux ondes μ_2 et $2MS_2$ semblent se recommander par leur précision et leur cohérence, apportant ainsi une confirmation à la validité de la méthode utilisée pour la séparation de ces composantes. Ce procédé a été appliqué, dans ce chapitre, à la définition de deux ondes particulières μ_2 et $2MS_2$, mais il peut être aisément étendu à l'étude d'autres composantes mixtes, telle la superposition $L_2 + 2MN_2$ par exemple, qui pose de grands problèmes pour la prédiction

des marées : en un même lieu d'observation, en effet, les analyses harmoniques conduisent souvent à des valeurs d'amplitude et de phase très variables pour cette fréquence, suivant la période d'enregistrement ; nous espérons pouvoir donner bientôt les caractéristiques de ces composantes qui sont parmi les dernières qui nous restent à étudier dans le cadre de la description précise des marées dans la Manche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D.C. CARTWRIGHT et R.J. TAYLER - 1971
"New computations of the tide generating potential"
Geop. J.R. Astr. Soc. - 23 - pp.45-74
- [2] W. HORN - 1967
"Tafeln der Astronomischen Arguments $V_0 + v$ und der Korrekturen
j, v, 1900 - 1999"
Deutsches Hydr. Inst. pub. n°2276 - Hamburg
- [3] J.R. ROSSITER - 1969
"A note on some troublesome harmonic constituents"
Internal Report N°14 - ICOT - Liverpool
- [4] P. SHUREMAN - 1958
"Manual of Harmonic analysis and Prediction of Tides "
Special Pub. N°98 - U.S. Dept. of Commerce
Coast and Geoditic Survey - U.S.A.

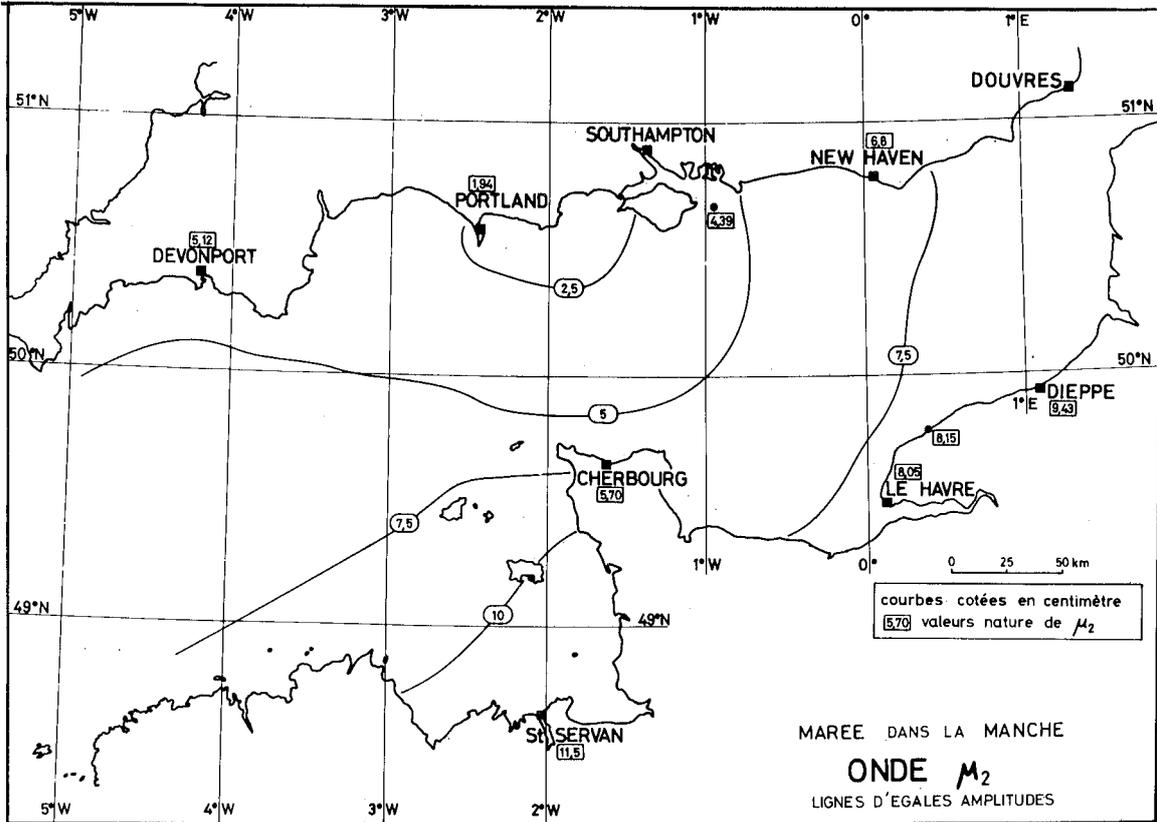
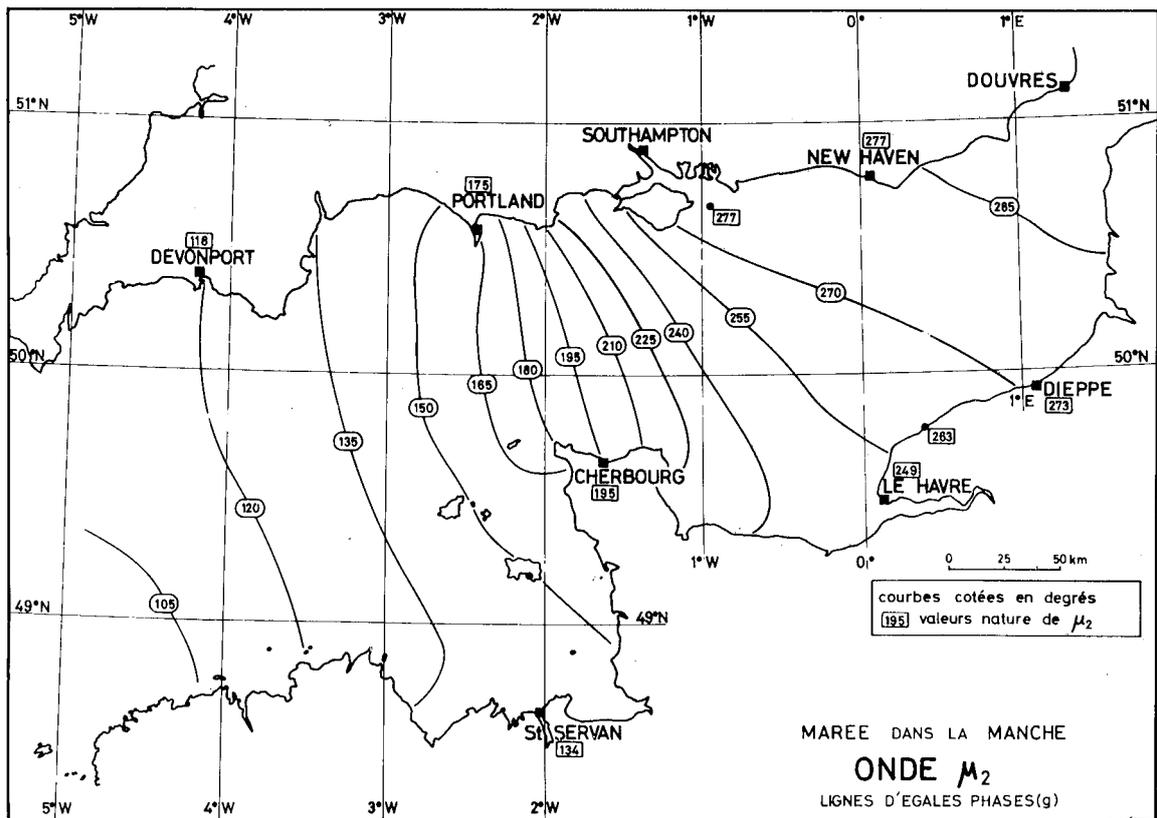


FIG. IV.2/2



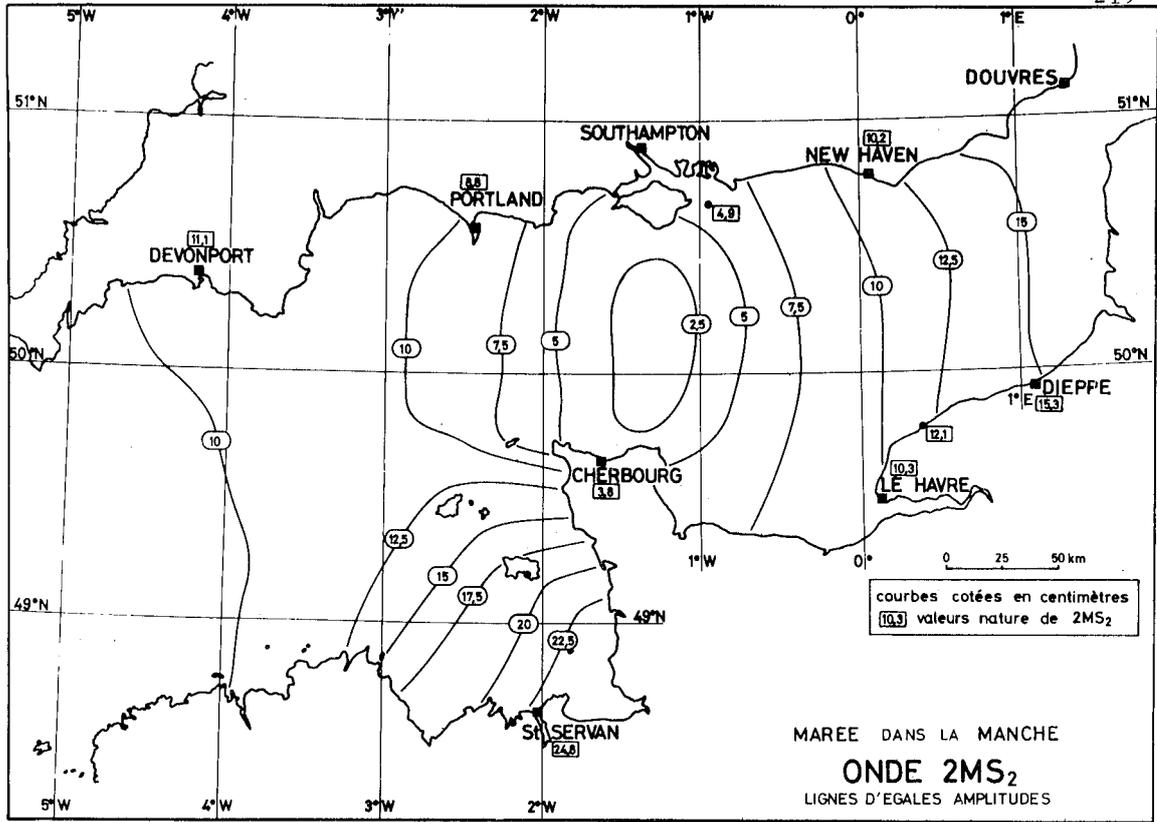
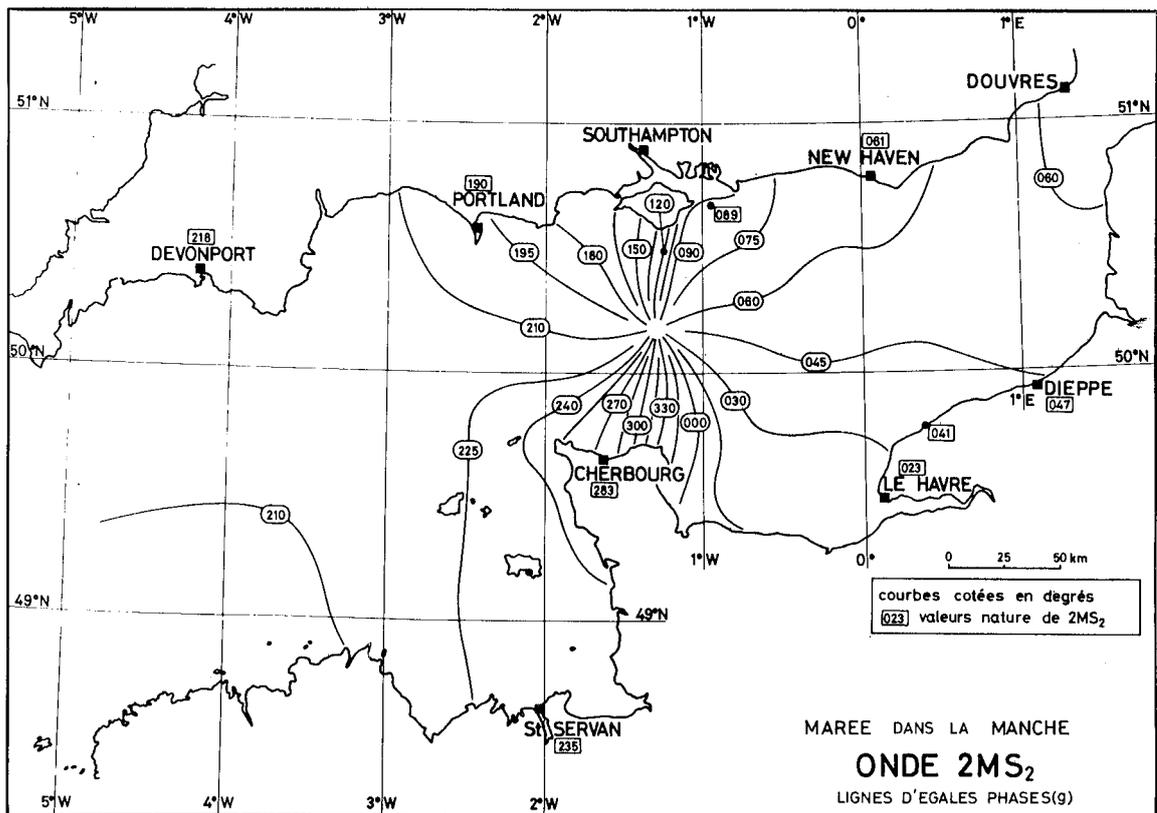


FIG. IV.2/4



AMPLITUDE et PHASE de L'ONDE μ_2

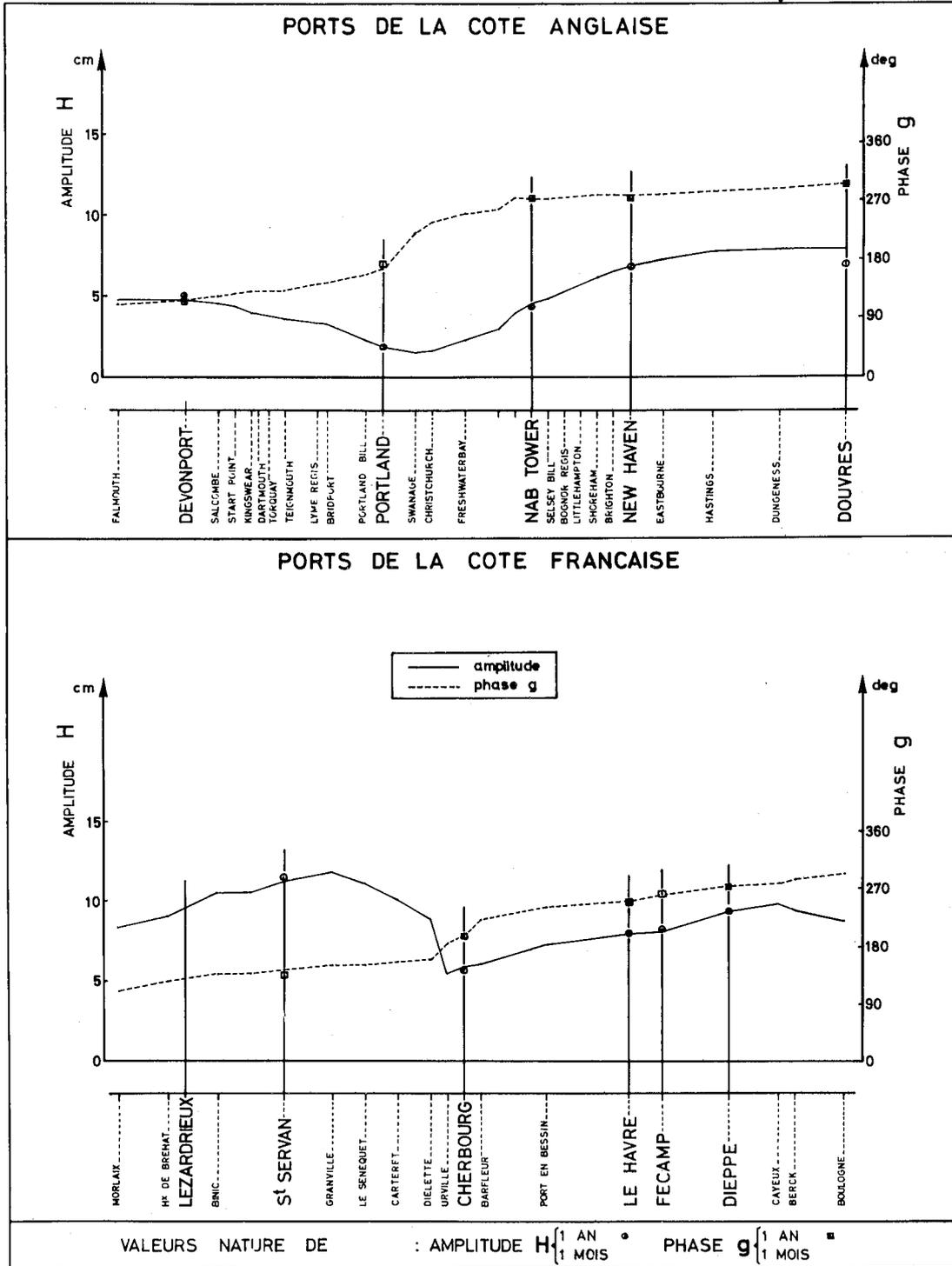


FIG.IV. 2/3

AMPLITUDE et PHASE de L'ONDE 2MS₂

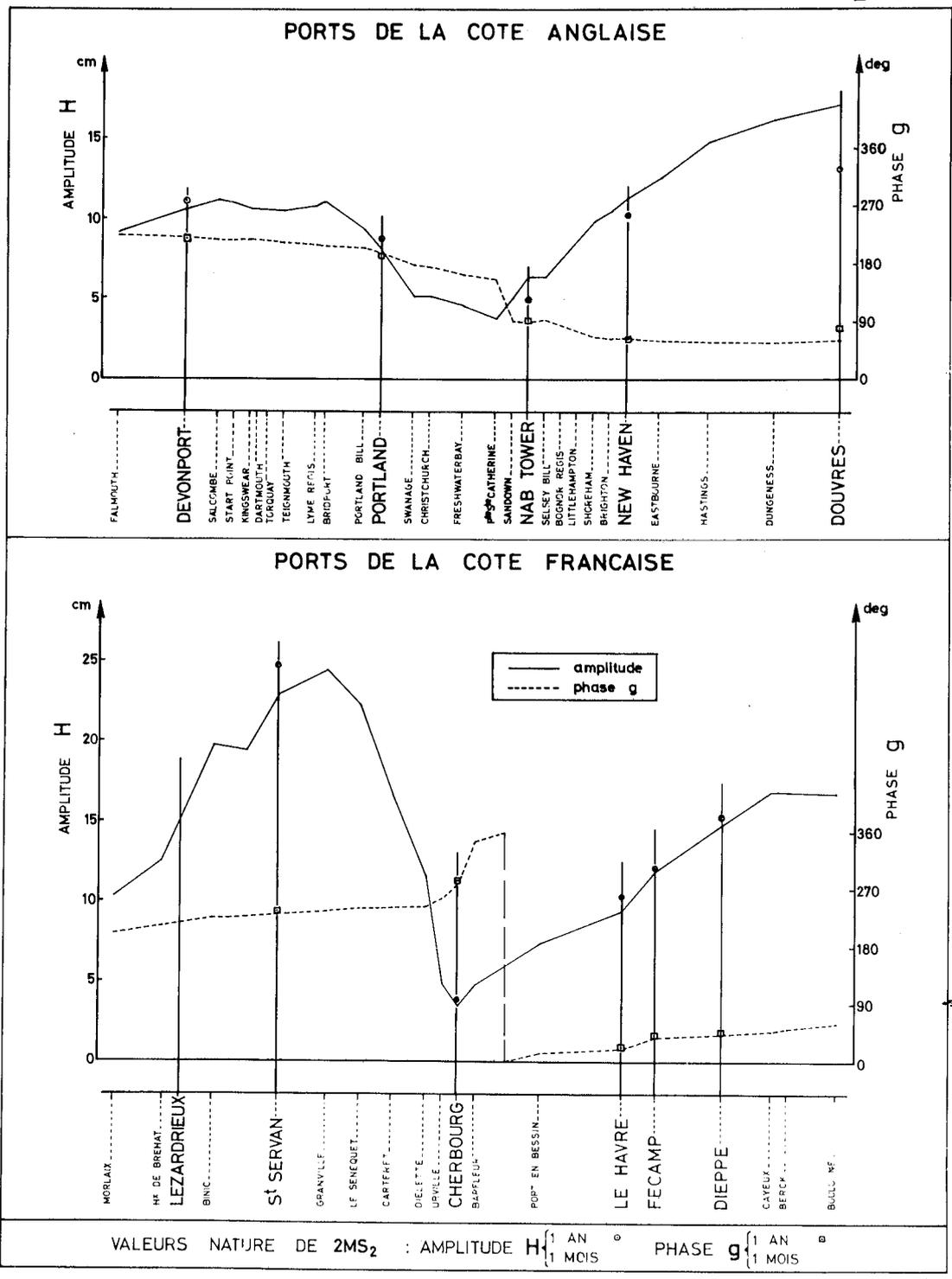


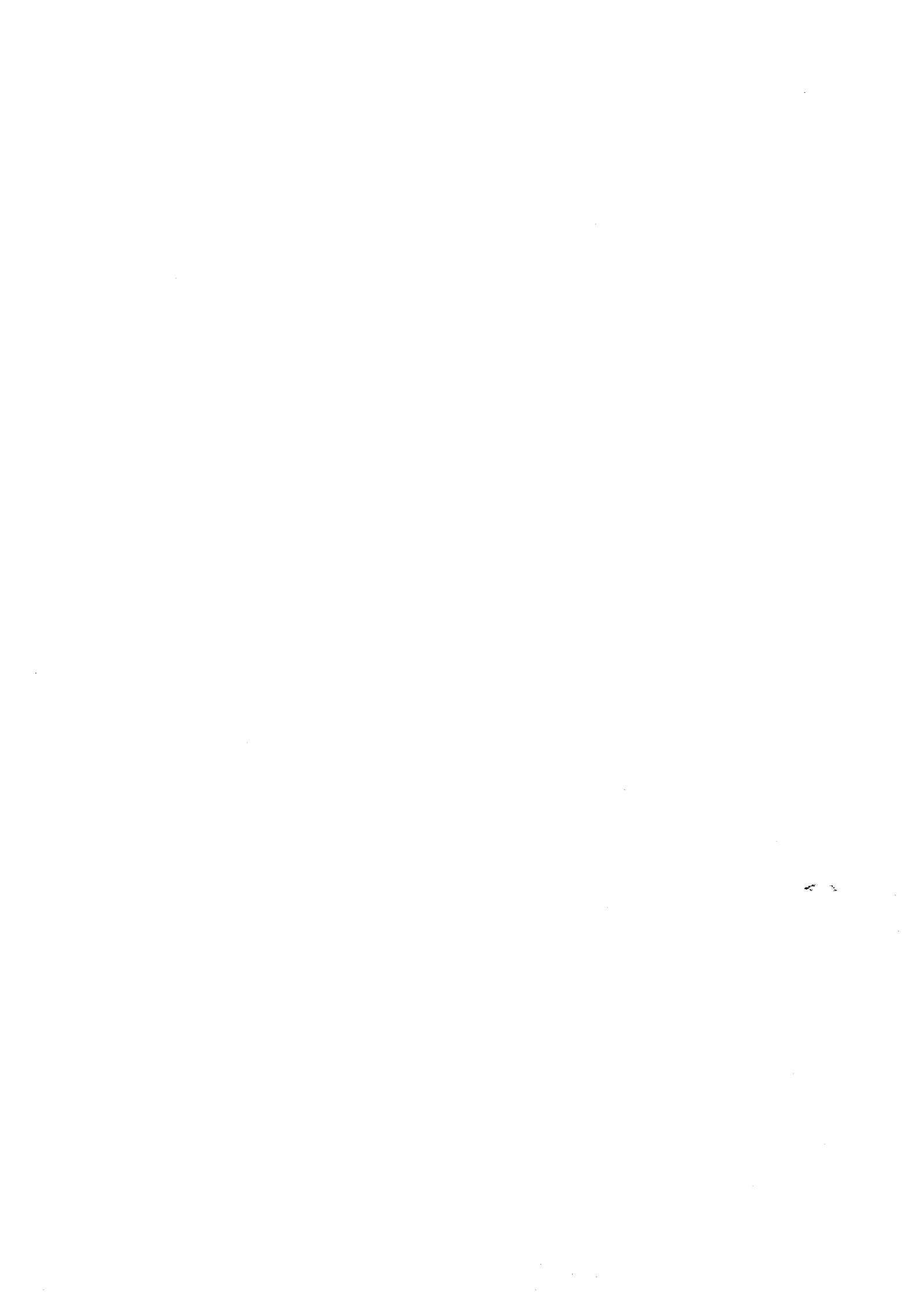
FIG. IV.2/5

PORTS	DATE	H _{M₂}	G _{M₂}	H _{μ₂}	G _{μ₂}	G _{N₂}	f	V ₀ +U	j _{sw}	V ₀ +V _{sw}	j _{ast}	V ₀ +V _{ast}
St HELIER	1952	336.0	182.2	22.0	198.2	166.1	0.970	187.1	0.970	188.4	0.970	187.1
	1962	335.5	182.0	22.4	198.0	166.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0
St MALO	1875	380.8	177.1	26.8	195.1	161.1	0.964	307.1	0.964	306.6	0.964	307.1
	1876	379.5	178.1	31.6	195.1	159.1	0.963	149.3	0.963	149.6	0.963	149.3
	1878	375.5	179.8	25.6	206.7	155.2	0.976	144.8	0.976	146.4	0.976	144.8
	1964	368.7	178.0	25.6	196.7	162.2	1.005	295.4	1.005	293.3	1.005	295.4
CHERBOURG	1962	374.6	180.0	26.4	202.0	162.0	1.024	253.0	1.024	251.3	1.024	253.0
	1877	188.1	228.6	7.5	216.3	206.8	0.967	302.8	0.967	303.6	0.967	302.8
LE HAVRE	1873	187.7	228.5	8.4	211.9	208.9	1.030	23.4	1.030	24.8	1.030	23.4
	1901	187.0	230.2	7.8	233.5	216.9	1.021	215.8	1.021	217.6	1.021	215.8
	1962	186.3	230.0	6.8	228.0	211.0	1.024	253.0	1.024	251.3	1.025	253.0
	1895	266.5	285.3	10.6	319.5	261.9	0.964	134.4	0.964	134.8	0.964	134.4
	1962	261.1	285.0	7.8	298.0	264.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0
	1959	263.0	285.0	7.5	331.0	265.5	1.031	233.7	1.031	235.0	1.031	233.7
FECAMP	1964	261.1	284.1	7.2	351.5	264.9	1.001	295.4	1.001	293.3	1.001	295.4
	1962	267.6	298.6	6.3	1.5	274.1	1.035	67.4	1.035	66.6	1.035	67.4
DIEPPE	1962	266.3	298.0	7.8	1.0	279.0	1.024	253.0	1.024	251.3	1.024	253.0
	1942	305.6	312.6	10.6	7.9	289.7	1.036	67.4	1.036	66.6	1.036	67.4
	1962	303.0	312.0	10.7	11.0	292.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.025	253.0
	1955	307.9	311.1	10.9	10.9	290.9	1.014	94.1	1.014	92.1	1.014	94.1
DOUVRES	1883	223.4	330.0	9.1	44.0	310.0	1.030	23.4	1.030	24.8	1.030	23.4
	1962	223.0	330.0	8.8	54.0	310.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0
HASTINGS EASTBOURNE NEW HAVEN	1960	228.0	332.9	8.6	51.8	313.3	1.037	259.9	1.037	259.5	1.037	260.0
	1963	247.2	323.0	2.8	89.0	294.0	1.014	94.1	1.014	92.1	1.014	94.1
	1959	247.8	325.0	2.1	0.0	308.0	1.037	59.1	1.037	59.5	1.037	59.1
NAB TOWER	1957	222.0	319.8	6.3	18.9	297.0	1.026	17.4	1.026	19.0	1.026	17.4
	1959	225.6	322.0	4.0	20.0	305.0	1.037	59.1	1.037	59.5	1.037	59.1
PORTSMOUTH	1935	143.5	317.0	0.9	36.1	295.3	0.986	197.2	0.986	199.3	0.986	197.3
	1962	143.4	317.0	1.0	36.0	295.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0
	1930	142.9	326.2	2.0	42.8	302.6	0.968	315.4	0.968	314.3	0.968	315.4
SOUTHAMPTON	1962	142.5	326.0	1.9	296.0	303.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0
	1962	140.0	328.1	1.5	24.0	304.6	1.024	253.0	1.024	251.3	1.024	253.0
PORTLAND	1944	135.9	329.2	1.8	349.4	310.2	1.031	283.7	1.031	282.6	1.031	283.8
	1962	135.5	329.0	1.9	349.0	310.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0
DEVONPORT	1944	63.0	193.9	10.6	189.2	185.9	1.032	283.7	1.032	282.6	1.032	283.7
	1962	63.4	194.0	10.7	189.0	184.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0
DEVONPORT	1962	169.0	154.4	11.9	195.1	137.2	1.026	253.0	1.026	251.3	1.026	253.0
	1954	167.2	153.2	11.6	189.4	134.5	0.986	182.1	0.986	184.4	0.986	182.1
	1962	166.7	153.0	11.7	189.0	134.0	1.024	253.0	1.025	251.3	1.024	253.0

Tableau N° IV.2/1

PORTS		μ_2+2MS_2		μ_2		$2MS_2$	
		H cm	g d°	H cm	g d°	H cm	g d°
St HÉLIER	*	22.00	198.20	10.29	152.16	16.60	225.99
		22.40	198.00	10.27	152.14	16.92	222.10
St MALO	*	26.80	195.10	11.66	147.24	20.85	219.09
		31.60	195.10	11.62	142.64	26.19	215.99
		25.60	206.70	11.50	133.89	24.77	234.62
		25.60	196.70	11.29	148.52	19.94	219.56
		26.40	202.00	11.47	146.41	22.05	225.70
CHERBOURG	*	7.50	216.30	5.76	187.92	3.66	265.46
		8.45	211.90	5.75	191.92	3.63	246.07
		7.80	233.50	5.72	205.38	3.85	279.74
		6.80	228.00	5.70	194.54	3.75	283.39
LE HAVRE	*	10.60	319.50	8.16	241.63	11.94	1.81
		7.80	298.00	7.99	245.81	6.94	1.64
		7.50	331.00	8.05	248.61	10.25	23.42
		7.20	351.50	7.99	248.27	11.92	30.15
FECAMP	*	6.30	1.50	8.19	252.88	11.82	41.75
		7.80	1.00	8.15	262.54	12.08	41.16
DIEPPE	*	10.60	7.90	9.36	269.87	10.35	8.21
		10.70	11.00	9.28	274.68	14.90	47.51
		10.90	10.90	9.43	273.40	15.31	46.51
DOUVRES		9.10	44.00	6.84	292.68	13.22	74.20
		8.80	54.00	6.83	292.68	13.64	77.58
		8.60	51.80	6.98	296.32	13.21	79.86
HASTINGS		1.80	89.00	7.57	268.88	9.37	86.90
EASTBOURNE		2.10	0.0	7.59	293.28	1.84	2.83
NEW HAVEN	*	6.35	18.90	6.80	277.25	10.19	61.26
		4.00	20.00	6.91	290.28	7.96	80.53
NAB TOWER	*	0.90	36.10	4.39	276.50	4.90	89.33
		1.00	36.00	4.39	275.95	4.96	84.21
PORTSMOUTH		2.00	42.80	4.37	282.16	5.66	83.36
		1.90	296.00	4.36	283.08	2.54	91.77
		1.50	24.00	4.29	284.25	4.77	84.51
SOUTHAMPTON		1.80	349.40	4.16	293.74	3.48	87.24
		1.90	349.00	4.15	293.54	3.44	84.84
PORTLAND	*	10.60	189.20	1.93	178.97	8.71	190.35
		10.70	189.00	1.94	175.34	8.82	190.28
DEVONPORT	*	11.90	195.10	5.17	122.30	11.49	218.88
		11.60	189.40	5.12	118.30	11.06	217.67
		11.70	189.00	5.10	117.54	11.17	212.95

Tableau N°IV.2/2



C O N C L U S I O N S

Les lois de propagation de la marée dans les mers littorales sont fortement non linéaires ; par ailleurs, son spectre est très complexe, même dans l'océan, où elle peut être décrite au moyen d'équations linéarisées. Les difficultés que pose l'étude précise de ce phénomène résultent de ces deux traits caractéristiques.

Pour l'aborder, nous avons adopté les hypothèses classiques des ondes longues, et retenu pour la représentation analytique du frottement, dans les équations correspondantes, la loi quadratique. Ce ne sont là que des approximations de la réalité, mais la concordance entre les prévisions qu'on en tire et les données d'observations in situ nous apporte, dans une certaine mesure, une justification a posteriori de la validité physique des hypothèses simplificatrices faites au départ. Il est certain que certains aspects du mouvement dont nous avons fait abstraction doivent faire sentir leurs effets à partir d'un certain degré de précision ; c'est pourquoi certains auteurs ont formulé récemment pour ces problèmes des hypothèses différentes, visant à faire intervenir la dimension verticale, et la turbulence. Citons, par exemple, les recherches de HEAPS, GERMAIN, ou celles de l'Ecole Soviétique d'Océanographie (MARTCHOUK, KOTCHERGUINE, TAMSALU, KONIAKHINA). Les travaux de B. KOGAN sur le sujet sont aussi suggestifs, et certainement pleins de promesses. Mais, dans l'état actuel de nos connaissances des marées littorales, le modèle théorique que nous avons adopté, si approché soit-il, semble suffisamment précis pour permettre d'interpréter qualitativement et quantitativement un bon nombre de phénomènes observés.

Afin de pouvoir étudier le problème posé par approximations successives, et suivant un mode de décomposition harmonique, nous avons été conduits à traduire la loi de frottement adoptée au moyen d'une expression analytique approchée. Cette formulation nous a ainsi permis de mieux évaluer le rôle essentiel que joue le frottement dans l'amortissement des ondes de marées. Elle nous a conduit, par ailleurs, à établir une classification de celles-ci en trois groupes :

- les ondes d'origine astronomique et radiationnelle, engendrées par l'action de l'océan aux limites,
- les ondes d'origine non linéaire, inexistantes dans l'océan, et engendrées dans les zones littorales par les effets du frottement et des petits fonds affectant la propagation des ondes principales,
- les ondes mixtes, correspondant à la superposition d'ondes d'origine astronomique ou radiationnelle, et d'ondes non linéaires.

Il y a lieu, par ailleurs, de diviser les ondes d'origine non linéaire en deux catégories : l'une correspondant aux ondes engendrées par les effets directs du frottement, et l'autre liée aux effets de petits fonds, c'est-à-dire aux variations de profondeur, et à l'importance du champ d'accélération spatiale. Certes, cette distinction ne constitue qu'une classification grossière, valable principalement au large des zones littorales ; elle devient incomplète lorsqu'on étudie les zones de très petits fonds : le long des côtes, et dans les estuaires ; les effets des non-linéarités sont si importants qu'il est alors nécessaire, pour décrire le phénomène avec précision, de prendre en compte des approximations d'ordre supérieur que nous avons négligées au cours de notre exposé.

Les méthodes d'analyse que nous avons utilisées nous ont permis d'obtenir, à l'aide d'un modèle réduit de la Manche, une description précise des composantes harmoniques de la marée dans cette mer. Nous espérons avoir ainsi contribué à créer une technique originale d'utilisation des modèles réduits physiques. L'emploi systématique de ce moyen d'investigation nous a permis non seulement de décrire le phénomène principal, mais aussi d'analyser des effets secondaires, parfois très fins, et ceci avec une précision inespérée.

Passons maintenant aux applications à l'océanographie. Notre travail a abouti à l'établissement des cartes caractéristiques de presque toutes les composantes significatives du spectre des marées dans toute l'étendue de la Manche. A l'exception de l'onde dominante M_2 , toutes les autres composantes du phénomène étaient jusqu'ici inconnues au large. Notons que la précision des résultats obtenus dépend étroitement des valeurs de référence choisies le long des côtes pour caractériser les différentes ondes étudiées. Dans la mesure du possible, nous n'avons retenu que les valeurs nature que nous considérons comme sûres. Mais il est certain que nos solutions pourront être améliorées localement en exploitant les futurs résultats d'obser-

vations in situ. Pour l'instant, nous nous sommes limités à vérifier la concordance de nos solutions avec les mesures nature récentes dont nous avons eu connaissance grâce à l'obligeance de leurs auteurs. Les caractéristiques observées se trouvent en bon accord avec les valeurs que nous avons annoncées. Citons, par exemple, les observations faites par CARTWRIGHT au large de Guernesey, ou celles, toutes récentes du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, dans la région d'Antifer, près du Havre.

Ces cartes constituent des documents utiles pour les Hydrographes qui sont appelés désormais à prédire la marée au large avec précision. Elles ne peuvent certes pas remplacer totalement les observations in situ, mais elles doivent contribuer à réduire leur nombre au minimum.

Enfin, les similitudes entre les ondes de même origine et de fréquence voisine que nous avons caractérisées viennent confirmer certaines hypothèses adoptées au départ pour justifier des méthodes d'analyse et de prédiction des marées différentes de la méthode harmonique. Citons, par exemple, la théorie de LAPLACE, utilisée en France pour prédire la marée à Brest, et la "response method" développée récemment par MUNK et CARTWRIGHT.

Pour finir, rappelons que des méthodes analogues à celles que nous avons appliquées sur modèle réduit peuvent être envisagées sur des modèles mathématiques. C'est la voie dans laquelle s'engagent actuellement nos recherches. En cas de succès, on aura ainsi la possibilité d'établir les cartes des constantes harmoniques de la marée pour toutes les mers littorales où les phénomènes non linéaires sont importants, la Mer du Nord ou la Mer d'Irlande, par exemple.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J.P. GERMAIN - 1972
" Théorie générale des mouvements d'un fluide parfait pesant, en eau peu profonde, de profondeur constante"
CRAS t.274 - pp.997-1000
- [2] B. KAGAN - 1968
"Les méthodes hydrodynamiques pour l'étude de la marée"
LENINGRADE
- [3] KOTCHERGUINE, TAMSALU, KONIAKHINA - 1972
"Modèle numérique tridimensionnel pour le calcul des marées"
Congrès Ondes Internes dans l'Océan - Novossibirsk 1972 - pp.181-186
- [4] W. MUNK et DE CARTWRIGHT - 1966
"Tidal spectroscopy and prediction"
Phil. Trans. R. Soc. A.259 - pp.533-581.

ANNEXES

	Page
Annexe I	I
Annexe II.1	X
Annexe II.2	XII
Annexe II.3	XIV
Annexe II.4	XVI
Annexe II.5	XVII

Tableau 1

Développements du potentiel générateur selon
DARWIN et DOODSON
Composantes à longues périodes

ANNEXE I

Selon SHUREMAN

$$V_0 = V_{20} + V_{30} = G \left[\frac{1-3\sin^2\varphi}{2} \sum fC \cos(V+u) + \frac{2}{15} \sin\varphi (3-5\sin^2\varphi) \sum f'C' \cos(V+u') \right]$$

Selon DOODSON

$$V_0 = V_{20} + V_{30} = G \left[\frac{1-3\sin^2\varphi}{2} \sum \text{Coef} \cos \text{Arg} + 1,11803 \sin\varphi (3-5\sin^2\varphi) \sum \text{Coef}' \sin \text{Arg}' \right]$$

Selon DOODSON			Vitesses angulaires o/h	Périodes en jours	selon SHUREMAN (DARWIN)		
Nombre Argument	Arg ou Arg' en Tsh p N' p ₁	Coef ou Coef'(*)			Symbole et Référence	Argument Vou' en Tsh p p ₁	fC ou f'C'(*)
055 555	terme permanent	0,50458	0	—	A ₁	—	0,5044
555	—	0,23411	0	—	B ₁	—	0,2340
565	N'	-0,06552					
575	2N'	0,00064					
655	P	0,00026 *	0,0046418		A ₆₆	p-90°	0,0022
056 554	h-p ₁	-0,00016	0,0410667		B ₂	h-p ₁	0,0118
554	—	0,01176					
556	h+p ₁	-0,00061	0,0410706		B ₈	h+p ₁ -180°	0,0006
057 355	2h-2p	0,00073			B ₃	2h-2p ₁	0,0003
553	2h-2p ₁	0,00030					
555	2h	0,00012			A ₁₃	2h	0,0001
555	—	0,07287	0,0821373	182,621	B ₆ (S _{3a})	—	0,0728
565	2h+N'	-0,00181					
575	2h+2N'	-0,00040					
058 554	3h-p ₁	0,00427	0,1232040		B ₇	3h-p ₁	0,0043
059 553	4h-2p ₁	0,00017	0,1642706		B ₉	4h-2p ₁	0,0002
062 656	s-3h+p+p ₁	0,00068	0,4715230				
063 445	s-2h-p-N'	-0,00016					
645	s-2h+p-N'	-0,00113					
655	s-2h+p	0,01578	0,4715211		A ₄ (M _{3m})	s-2h+p	0,0116
665	s-2h+p+N'	-0,00103					
064 456	s-h-p+p ₁	0,00051	0,5033080				
555	—	-0,00044					
654	—	-0,00010					
065 445	s-p	-0,00542	0,5443747	27,555	A ₂ (M _m) (M _{N0})	s-p	0,0827
455	—	0,08254					
465	—	-0,00535					
545	—	-0,00024 *					
555	s	0,00466 *	0,5490165		A ₆₄	s-90°	0,0399
565	—	0,00073 *					
655	s+p	-0,00442	0,5536584		A ₈	s+p+180°	0,0043
665	—	-0,00179					
675	—	-0,00047					
066 454	—	-0,00043					
067 455	s+2h-p	-0,00116	0,6265120		A ₁₁	s+2h-p+180°	0,0006
465	—	-0,00058					
071 755	—	0,00026					
072 556	2s-3h+p ₁	0,00091	0,9748292				

Selon DOODSON			Vitesses angulaires o/h	Périodes en jours	selon SHUREMAN (DARWIN)			
Nombre Argument	Arg ou Arg' en Tsh p N' p ₂	Coef ou Coef' (%)			Symbole et Référence	Argument Vaut en Tsh p p ₂	fC ou fC' (%)	
073	545 555 565 655	2s-2h	0,00098 0,01370 -0,00088 0,00015 *	1,015 8958	14,765	A5 (MSj) MS ₀	2s-2h	0,0084
074	554 556 566	2s-h+p ₁	-0,00017 0,00048 0,00012					
075	345 355 365 455 465 555 565 575 585	2s-2p 2s-p 2s	-0,00036 0,00677 -0,00044 0,00076 * 0,00012 0,15642 0,06481 0,00607 -0,00013	1,0887494 1,0933912 1,0980331	13,661	A3 A65 A6 (Mp) KO, MK ₀	2s-2p 2s-p-90° 2s	0,0068 0,0065 0,1566
076	554 564	2s+h-p ₁	-0,00054 -0,00014					
077	355 365	2s+2h-2p	-0,00047 -0,00015					
081	655	3s-4h+p	0,00042	1,48941686				
082	456 656 666	3s-3h-p+p ₁	0,00016 0,00026 0,00011	1,51920380				
083	445 455 465 555 655 665 675	3s-2h-p 3s-2h+p	0,00022 0,00217 -0,00014 0,00013 * 0,00569 0,00238 0,00021	1,5695548		A10 (MS _{em})	3s-2h+p	0,0043
084	456 466 555		0,00028 0,00010 -0,00016					
085	255 455 465 475 555 565 675	3s-p 3s	0,00054 0,02995 0,01241 0,00117 0,00038 * 0,00024 * -0,00012	1,6424078 1,6470496		A7 (MEm) A67	3s-p 3s-90°	0,0303 0,0032
086	454		-0,00026					
091	555 755	4s-4h	0,00020 0,00014	2,03379156				
092	556 566	4s-3h+p ₁	0,00032 0,00013					
093	355 555 565 575	4s-2h	0,00025 0,00478 0,00200 0,00019	2,1139288		A12 (MS _{qm})	4s-2h	0,0025
095	355 365 375 455	4s-2p 4s-p	0,00396 0,00165 0,00016 0,00011	2,1867825 2,1914243		A9 A68	4s-2p 4s-p-90°	0,0040 0,0009
0X1	655		0,00023					
0X3	455 465		0,00116 0,00048					
0X5	255 265		0,00045 0,00019					
0E1	555		0,00012					
0E3	355		0,00019					

Tableau 2

Développements du potentiel générateur selon
DARWIN et DOODSON
Composantes diurnes

ANNEXE I

Selon SHUREMAN

$$V_1 = V_{21} + V_{31} = G \left[\sin 2\varphi \sum fC \cos(Y+u) + \frac{2}{15} \cos\varphi (1-5\sin^2\varphi) \sum f'C' \cos(V'+u) \right]$$

Selon DOODSON

$$V_1 = V_{21} + V_{31} = G \left[\sin 2\varphi \sum \text{Coef} \sin \text{Arg} + 0,72618 \cos\varphi (1-5\sin^2\varphi) \sum \text{Coef}' \cos \text{Arg}' \right]$$

Selon DOODSON			Vitesses angulaires °/h	périodes en heures minutes	selon SHUREMAN (DARWIN)		
Nombre Argument	Arg ou Arg' en TshpN'p	Coef ou Coef'(*)			Symbole et Référence	Argument VouV' en Tshp p	fC ou fC'(*)
105	955	T-5s+4p	0,00011	11,76553678			
107	755	T-5s+2h+2p	0,00046				
109	555	T-6s+4h	0,00028				
115	755	T-4s+2p	-0,00010 (*)				
845			0,00021				
855			0,00108				
117	555	T-4s+2h	-0,00010 (*)				
645			0,00053				
655			0,00278				
118	654	T-4s+3h+p-p ₁	0,00021				
119	445		0,00010				
455			0,00054				
124	756		-0,00013				
125	645		-0,00023 *				
655		T-3s+p	-0,00058 *	12,8496444	A70	T-4s+h+p	0,0032
745			0,00180				
755		T-3s+2p	0,00955	12,8542862	A17 (2Q ₁)	T-4s+h+2p+90	0,0097
126	556		-0,00016				
655			-0,00011				
754			0,00015				
127	455		-0,00011 *				
545			0,00218				
555		T-3s+2h	0,01153	12,9271398	A20 (σ ₂)	T-4s+3h+90	0,0061
128	544		0,00014				
554			0,00079				
129	355		0,00035				
133	855		-0,00023				
134	656		-0,00061				
135	435		-0,00028				
545			-0,00044 *				
555		T-2s	-0,00211	13,3940190	A69	T-3s+h	0,0116
635			-0,00042				
645		T-2s+p-N'	0,01360				
655		T-2s+p	0,07216	13,3986609	A15 (Q ₁) NK ₁	T-3s+h+p +90	0,0730
755			-0,00013 *				
855			-0,00019				
136	456		-0,00013				
555			-0,00039				
644			0,00011				
654			0,00068				
137	445		0,00258				
455		T-2s+2h-p	0,01371	13,4715145	A18 (p ₁)	T-3s+2h-p+90	0,0142
555			-0,00018 *				
655			-0,00078 *				
665			0,00024				

Selon DOODSON			Vitesses angulaires o/h	périodes en heures minutes	selon SHUREMAN (DARWIN)		
Nombre Argument	Arg ou Arg' en TshpN'p ₁	Coef ou Coef'(*)			Symbole et Référence	Argument VouV' en Tshpp ₂	f _c ou f' _c (*)
138	444 454	0,00011 0,00064					
139	455	-0,00014					
143	535 745 755	-0,00017 -0,00020 -0,00113					
144	546 556	-0,00015 -0,00130					
145	455 535 545 555 645 655 665 755 765	0,00012 * -0,00218 0,07105 0,37689 0,00016 -0,00108 * 0,00044 * -0,00243 -0,00040	13,9430356	25,49	A ₁₄ (O ₁) MK ₁	T-2s+h+90°	0,3771
			13,9476774		A ₇₂	T-2s+h+p	0,0060
			13,9533192		A ₂₅	T-2s+h+2p-90°	0,0024
146	544 554	0,00012 0,00115					
147	355 455 545 555 565	-0,00021 -0,00021 * 0,00014 -0,00491 0,00107	14,0251729	25,40	A ₂₉ (I ₁) MP ₁	T-2s+3h-90°	0,0030
148	554	-0,00033					
152	656	-0,00014					
153	645 655	-0,00063 -0,00278	14,4145567		A ₁₉	T-s+h+p-90°	0,0015
154	656	0,00015					
155	435 445 455 545 555 565 645 655 665 675	0,00017 -0,00197 -0,01065 0,00098 * -0,00661 * 0,00086 * 0,00085 -0,02964 -0,00594 0,00017	14,4874103		A ₁₆ (M ₁)	T-s+h-p-90°	0,0104
			14,4920521	24,50	A ₇₁ (M ₁)	T-s+h	0,0367
			14,4966939	24,49	A ₂₃ (M ₁) NO ₁	T-s+h+p-90°	0,0297
156	555 654	0,00016 -0,00018					
157	445 455 465	0,00016 -0,00566 -0,00124	14,5695476	24,42	A ₂₇ (X ₁)	T-s+3h-p-90°	0,0042
158	454	-0,00024					
161	557	0,00042	14,8767980		B ₁₇	T-3h+2p ₁ +90°	0,0004
162	556	0,01029	14,9178647	24,07	B ₁₅ (Π ₁)	T-2h+p ₁ +90°	0,0103
163	535 545 555 555 557 755	0,00014 -0,00199 0,00030 0,17554 -0,00011 -0,00026	14,9589314 14,9589314	24,03	A ₂₁ B ₁₄ (P ₁) SK ₁ B ₂₅	T-h+90° T-h+90° T-h+2p ₁ -90°	0,0003 0,1755 0,0001
164	554 556	-0,00147 -0,00423	14,9999980 15,0000020		B ₁₆ B ₂₃	T-p ₁ -90° T+p ₁ -90°	0,0015 0,0042
165	455 545 555 555 565 575 655	-0,00036 * 0,01050 -0,16817 -0,36233 -0,07182 0,00154 -0,00013 *	15,0364268 15,0410686	23,56	A ₇₃ B ₂₂ (K ₁) A ₂₂ (K ₁) MO ₁ SP ₁ K ₁	T+h-p T+h-90°	0,0020 0,1681 0,3623

V

Selon DOODSON			Vitesses angulaires °/h	périodes en heures minutes	selon SHUREMAN (DARWIN)			
Nombre Argument	Arg ou Arg' en TshpN'p ₁	Coef ou Coef'(*)			Symbole et Référence	Argument VeuV' en Tshp p ₁	f _c ou f' _c (%)	
166	554	T+s+h-p ₁	-0,00423	15,0821353	23,52	B ₂₄ (ψ ₁)	T+2h-p ₁ -90°	0,0042
167	355 553 555 565 575	T+s+2h-2p ₁ T+s+2h	-0,00026 -0,00011 -0,00756 0,00029 0,00014	15,1232020 15,1232059	23,48	B ₂₆ B ₁ ·A ₃₈ (φ ₁)	T+3h-2p ₁ -90° T+3h-90°	0,0001 0,0076
168	554	T+s+3h-p ₁	-0,00044	15,1642726		B ₃₂	T+4h-p ₁ -90°	0,0004
172	656		-0,00024					
173	445 645 655 665 765	T+2s-2h+p T+2s-2h+p+N' T+2s-2h+2p+N'	-0,00017 0,00018 -0,00566 -0,00112 -0,00089 *	15,5125897	23,12	A ₂₈ (θ ₁)	T+s-h+p-90°	0,0042
174	456 555		-0,00018 0,00016					
175	445 455 465 475 555 655 665 675	T+2s-p T+2s T+2s+p	0,00087 -0,02964 -0,00587 0,00013 -0,00241 * 0,00046 0,00029 0,00017	15,5854433 15,5900852 15,5947270	23,06	A ₂₄ (J ₁) M _{Q₁} A ₇₄ A ₃₃	T+s+h-p-90° T+s+h T+s+h+p+90°	0,0297 0,0134 0,0005
176	454		0,00015					
177	455	T+2s+2h-p	0,00012	15,6675806		A ₃₆	T+s+3h-p+90°	0,0001
182	556		-0,00032					
183	545 555 565	T+3s-2h	-0,00016 -0,00492 -0,00096	16,0569644	22,25	A ₃₀ (S ₀₁) S ₀₁	T+2s-h-90°	0,0030
185	355 365 455 465 555 565 575 585	T+3s-p T+3s+N'	-0,00240 -0,00048 -0,00040 * -0,00016 * -0,01623 -0,01039 -0,00218 -0,00014	16,1344599 16,1391017	22,18	A ₇₅ A ₃₁ (O ₀₁)	T+2s+h-p T+2s+h-90°	0,0022 0,0163
191	655		-0,00015					
193	455 465 655 665		-0,00078 -0,00015 -0,00059 -0,00038	16,6106228		A ₃₅	T+3s-h+p-90°	0,0004
195	255 455 465 475	T+4s-p	-0,00019 -0,00311 -0,00199 -0,00042	16,6834764	21,35	A ₃₂ (λ ₁) K _{Q₁}	T+3s+h-p-90	0,0032
1x3	555 565	T+5s-2h	-0,00050 -0,00032	17,1549975			T+4s-h-90°	0,0003
1x5	355 365	T+5s-2p	-0,00041 -0,00027	17,2278511		A ₃₄	T+4s+h-2p-90°	0,0004
1E3	455							

Tableau 3

Développements du potentiel générateur selon
DARWIN et DOODSON
Composantes semi-diurnes

ANNEXE I

Selon SHUREMAN

$$V_2 = V_{22} + V_{32} = G \left[\cos^2 \varphi \sum f C \cos(V+u) + \frac{2}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \sum f' C' \cos(V+u') \right]$$

Selon DOODSON

$$V_2 = V_{22} + V_{32} = G \left[\cos^2 \varphi \sum \text{Coef} \cos \text{Arg} + 2,59808 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sum \text{Coef}' \cos \text{Arg}' \right]$$

Selon DOODSON			Vitesses angulaires °/h	périodes en heures minutes	Selon SHUREMAN (DARWIN)		
Nombre Argument	Arg ou Arg' en TshpN'ps	Coef ou Coef' (*)			Symbole et Référence	Argument VouV' en TshpN'ps	f C ou f' C' (*)
207 855	2T-5s+2h+3p	0,00015					
209 655		0,00018					
215 955		0,00027					
217 755		0,00111					
219 555		0,00069					
225 655 755 855	2T-3s+p	-0,00027 * 0,00253	27,3416364	13,10	OQ ₂	2T-5s+2h+p	
226 654		-0,00012					
227 555 645 655		-0,00027 * -0,00025 0,00671	27,4238337	13,08	E ₂ et MNS ₂	2T-5s+4h+p	
228 654		0,00054					
229 455		0,00130					
22X 454		0,00015					
234 756		-0,00031					
235 535 555 645 655 745 755	2T-2s 2T-2s+p 2T-2s+2p	-0,00014 -0,00027 * -0,00156 * -0,00086 0,02301	27,8860712 27,89071299 27,8953548		2MK ₂ A ₇₇ A ₄₂ (2N ₂)	2T-4s+2h 2T-4s+2h+p+90° 2T-4s+2h+2p	0,0062 0,0235
236 556 655 754		-0,00040 -0,00025 0,00036					
237 455 545 555		-0,00029 * -0,00104 0,02777	27,9682084	12,52	$\sqrt{2} A_{45} (M_2)$	2T-4s+4h	0,0219
238 554		0,00183					
239 355		0,00085					
243 635 855		-0,00015 -0,00056					
244 656		-0,00147					
245 435 545 555 556 645 655 755	2T-s	-0,00063 -0,00097 * -0,00569 * 0,00014 -0,00648 0,17387 0,00011 *	28,4350877 28,4397295		A ₇₆ A ₄₀ (N ₂)	2T-3s+2h+90° 2T-3s+2h+p	0,0223 0,1759
246 456 555 654		-0,00033 -0,00094 0,00163					

Selon DOODSON			Vitesses angulaires °/h	périodes en heures minutes	selon SHUREMAN (DARWIN)			
Nombre Argument	Arg ou Arg' en TshpN'p ₂	Coef ou Coef'(*)			Symbole et Référence	Argument YmV' en Tshp p ₂	f _c ou f _{c'} (*)	
247	445 455 555 655 665	2T-3+2h-p	-0,00123 0,03303 0,00015 * 0,00017 -0,00012	28,512 583	12,37	A43 (2 ₂)	2T-3s+4h-p	0,0341
248	454		0,00153					
252	756		-0,00011					
253	535 555 755	2T-2h 2T-2h+2p	-0,00040 -0,00273	28,9019663 28,9112506	12,27	OP ₂ T ₂		
254	555 556 655	2T-h 2T-h+p ₁	-0,00314 0,00014			M(SK) ₂ a ₂		
255	455 535 545 555 655 665 755 765	2T-p 2T 2T+p 2T+2p	0,00032 * 0,00047 -0,03386 0,90812 0,00086 * 0,00016 * 0,00053 0,00019	28,9794624 28,9841042 28,9887460 28,9933879	 12,25	A38 A39 (M ₂) A80 K ₀₂ A50	2T-2s+2h-p-30 2T-2s+2h 2T-2s+2h+p -90° 2T-2s+2h+2p	0,0012 0,9085 0,0034 0,0005
256	554 555	2T+h	0,00276	29,0251729		M(KS) ₂		
257	355 455 555 555 565 575	2T+2h	-0,00052 0,00017 * 0,00107 -0,00051 0,00018	29,0662415	12,23	A54 (S ₂) MKS ₂	2T-2s+4h	0,0007
262	656		-0,00033					
263	645 655	2T+s-2h+p	0,00024 -0,00670	29,4556253	12,13	A44 (A ₂)	2T-s+p+180°	0,0066
264	456 555		-0,00010 0,00017					
265	445 455 545 555 565 645 655 665 675	2T+s-p 2T+s 2T+s+p	0,00035 -0,02567 -0,00031 * 0,00525 * 0,00039 * -0,00012 0,00643 0,00283 0,00040	29,5284789 29,5331208 29,5377626	12,11	A44 (L ₂) et 2MN ₂ A79 A48 (L ₂)	2T-s+2h-p+180° 2T-s+2h-30° 2T-s+2h+p	0,0251 0,0209 0,0064
267	455 465	2T+s+2h-p	0,00123 0,00059	29,6106162		A52	2T-s+4h-p	0,0009
271	557	2T+2s-4h+2p ₁	0,00101	29,9178666		B42	2T-2h+2p ₁	0,0010
272	556	2T+2s-3h+p ₁	0,02479	29,9589333	12,01	B40 (T ₂)	2T-h+p ₁	0,0248
273	545 555 555	2T+2s-2h	0,00094 0,42286 0,00072	30,000	12,00	B39 (S ₂) A46 (S ₂)	2T	0,4227 0,0006
274	554 556	2T+2s-h-p ₁	-0,00354 0,00092	30,0410667	11,59	B41 (R ₂) B48	2T+h-p ₁ +180°	0,0035 0,0009
275	455 545 555 555 565 575	2T+2s	0,00029 * -0,00147 0,07858 0,03648 0,03423 0,00372	30,0821373	11,58	A47 (K ₂) B47 (K ₂)	2T+2h	0,0786 0,0365
276	554	2T+2s+h-p ₁	0,00092			B49	2T+3h-p ₁	0,0009

Selon DOODSON			Vitesses angulaires °/h	périodes en heures minutes	selon SHUREMAN (DARWIN)		
Nombre Argument	Arg ou Arg' en TshpN'p ₁	Coef ou Coef' (*)			Symbole et Référence	Argument Vau' en Tsh p p ₁	f _c ou f' _c (*)
277 555	2T+2s+2h	0,00078	30,1642746		B56	2T+4h	0,0008
283 455			30,5443747	11,47	MSN ₂		
283 655 665	2T+3s-2h+p	0,00123 0,00054	30,5536584		A53 (S ₂)	2T+S+p	0,0009
285 445 455 465 475 555 565	2T+3s-p	-0,00012 0,00643 0,00280 0,00030 0,00048 * 0,00031 *	30,6265120 30,6311538	11,45	A ₄₉ (η ₂) et K ₂ A ₈₁	2T+S+2h+p 2T+S+2h-30°	0,0064 0,0019
291 555	2T+4s-4h		31,0158958	11,36	2SM ₂		
293 555 565	2T+4s-2h	0,00107 0,00046	31,0980331		A54	2T+2s	0,0007
295 355 365 555 565 575	2T+4s-2p 2T+4s	0,00053 0,00023 0,00168 0,00146 0,00047	31,1208867 31,1801703		A51 A56	2T+2s+2h-2p 2T+2s+2h	0,0005 0,0017
2X3 455		0,00017					
2X5 455	2T+5s-p	0,00032	31,7245450		A57	2T+3s+2h-p	0,0003

Tableau 4

Développements du potentiel générateur selon
DARWIN et DOODSON
Composantes tiers-diurnes

ANNEXE I

Selon SHUREMAN

$$V_3 = \frac{2}{3} G \cos^3 \varphi \sum f' C' \cos(V+u)$$

Selon DOODSON

$$V_3 = G \cos^3 \varphi \sum \text{Coef}' \cos \text{Arg}'$$

Selon DOODSON			Vitesses angulaires °/h	périodes en heures minutes	Selon SHUREMAN		
Nombre Argument	Arg' en TshpN'p ₁	Coef'			Symbole et Référence	Argument V' en Tsh p p ₁	f' _c
327 655		-0,00017					
335 755	3T-2s+2p	-0,00056	42,387407		A85	3T-5s+3h+2p	0,0003
337 555		-0,00057					
345 645 655	3T-s+p	0,00018 -0,00326	42,931781		A83	3T-4s+3h+p	0,0050
347 455	3T-s+2h-p	-0,00061	43,004635		A86	3T-4s+5h-p	0,0007
355 545 555	3T-N' 3T	0,00066 -0,01188	42,476156	8,17	A82 (M ₃)	3T-3s+3h	0,0178
363 655		0,00017					
365 455 655 665	3T+S-p 3T+S+p	0,00067 -0,00025 -0,00011	44,020531 44,029815		A84 A88	3T-2s+3h-p 3T-2s+3h+p	0,0010 0,0004
375 555 565	3T+2s	-0,00155 -0,00068	44,574183		A87	3T-s+3h	0,0024

Tableau 5

Developpement du potentiel radiatif
 selon CARTWRITH et TAYLER

ANNEXE I

$$R = S \sum \text{Coef} \cos \text{Arg}$$

* Composante n'apparaissant pas dans le potentiel
générateur astronomique

Nombre Argument	Arg en τ, s, h, p, N, p_a	Coef	période	Symbole ou Référence
055 555	terme constant	-0,18894		B_1
556	p_a	-0,00341		*
056 554	$h - p_a$	-0,00316		B_2
555	h	0,40694	365,243j.	* S_a
556	$h + p_a$	0,00148		B_3
057 554	$2h - p_a$	0,01022		* B_6 S_{2a}
555	$2h$	-0,05879	182,621j.	
058 553	$3h - 2p_a$	-0,00024		*
554	$3h - p_a$	-0,00246		B_7
162 556	$\tau + s - 3h + p_a$	0,00367	24h.07	B_{15} π_1
163 555	$\tau + s - 2h$	0,23140	24h.03	B_{14} P_1
556	$\tau + s - 2h + p_a$	-0,03482		*
164 554	$\tau + s - h + p_a$	-0,00581		B_{16}
555	$\tau + s - h$	-1,38710	24h00	* S_1
556	$\tau + s - h + p_a$	-0,00185		B_{23}
165 554	$\tau + s - p_a$	0,01161		* B_{22} K_1
555	$\tau + s$	-0,22144	23h56	
556	$\tau + s + p_a$	0,00050		*
166 554	$\tau + s + h - p_a$	-0,00185	23h52	B_{24} ψ_1
555	$\tau + s + h$	-0,05969		*
556	$\tau + s + h + p_a$	0,00025		*
167 554	$\tau + s + 2h - p_a$	-0,00150		*
555	$\tau + s + 2h$	-0,00996	23h48	B_{31} ϕ_1
168 554	$\tau + s + 3h - p_a$	-0,00042		B_{32}
272 556	$2\tau + 2s - 3h + p_a$	0,02333	12h01	B_{40} T_2
273 555	$2\tau + 2s - 2h$	0,55741	12h00	B_{39} S_2
274 554	$2\tau + 2s - h + p_a$	-0,01400	11h59	B_{41} R_2
556	$2\tau + 2s - h + p_a$	0,00040		B_{48}
275 555	$2\tau + 2s$	0,04800	11h58	B_{47} K_2
276 555	$2\tau + 2s + h - p_a$	0,00040		B_{49}
277 555	$2\tau + 2s + 2h$	0,00103		B_{56}

Etude du terme de frottement
développement de l'expression:
 $\sqrt{2} Ru$

$i=1$	$(\mu_1/A_1^{2m+2n-2}) C_m^k (R_{0,m} R_{m,n} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2+u_2^2)^{\frac{2m+2n-1}{2}}) \{A_j^2 (u_j^2+u_j^2)\}^n \{A_9^2 \beta_9\}^{m-k} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}$	
	$n=0$	$(\mu_1/A_1^{2m-2}) C_m^k (R_{0,m} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2+u_2^2)^{\frac{2m-1}{2}}) \{A_9^2 \beta_9\}^{m-k} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}^k$
	$k=0$	$(\mu_1/A_1^{2m-2}) (R_{0,m} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2+u_2^2)^{\frac{2m-1}{2}}) \{A_1^{2m} \beta_1^m + \dots C_m^z A_9^{2m-2z} A_8^{2z} \beta_9^{m-2} \beta_8^{2z}\}$
	$z=0$	$A_j^2 (\dots)_0 \mu_1 \beta_1^m$ A_j^{2m}/A_1^{2m-2}
	$z=1$	$A_j^2 (\dots)_0 \mu_1 m \beta_1^{m-1} \beta_j$ $A_j^{2m-2} A_1^2 / A_1^{2m-2}$
	$z=2$	A_j^4 / A_1^2
	$k=1$	$(\mu_1/A_1^{2m-2}) m (\dots)_0 \{A_1^{2m-2} \beta_1^{m-1} + \dots C_{m-1}^z A_1^{2(m-1-z)} \beta_1^{m-1-2z} (A_j^2 \beta_j)^z\} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}$
	$z=0$	$m A_1 A_j (\dots)_0 \mu_1 \gamma_j \beta_1^{m-1}$ $m A_j A_8 (\dots)_0 \mu_1 \gamma_j \beta_1^{m-1}$ A_j^{2m-1} / A_1^{2m-3}
	$z=1$	A_j^3 / A_1
	$k=2$	$(\mu_1/A_1^{2m-2}) \frac{m(m-1)}{2} (\dots)_0 \{A_1^{2m-4} \beta_1^{m-2} + \dots C_{m-2}^z A_1^{2(m-2-z)} \beta_1^{m-2-2z} (A_j^2 \beta_j)^z\} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}$
	$z=0$	$\frac{m(m-1)}{2} A_j^2 (\dots)_0 \mu_1 \gamma_j^2 \beta_1^{m-2}$ $m(m-1) A_j A_8 (\dots)_0 \mu_1 \beta_1^{m-2} \gamma_j \gamma_8$ A_j^{2m-2} / A_1^{2m-4}
	$z=1$	A_j^4 / A_1^2
	$k=3$	$(\mu_1/A_1^{2m-2}) \frac{m(m-1)(m-2)}{6} (\dots)_0 \{A_1^{2m-6} \beta_1^{m-3} + \dots\} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}^3$
	$z=0$	A_j^5 / A_1
	$n=1$	$(\mu_1/A_1^{2m}) C_m^k (R_{0,m} R_{m,1} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2+u_2^2)^{\frac{2m+1}{2}}) \{A_j^2 (u_j^2+u_j^2)\} \{A_9^2 \beta_9\}^{m-k} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}^k$
	$k=0$	$(\mu_1/A_1^{2m}) (\dots)_1 \{A_j^2 (u_j^2+u_j^2)\} \{A_1^{2m} \beta_1^m + \dots C_m^z A_9^{2(m-z)} A_8^{2z} \beta_9^{m-2} \beta_8^{2z}\}$
	$z=0$	$A_j^2 (\dots)_1 (u_j^2+u_j^2) \mu_1 \beta_1^m$ A_j^{2m+2} / A_1^{2m}
	$z=1$	A_j^4 / A_1^2
	$k=1$	$(\mu_1/A_1^{2m}) m (\dots)_1 \{A_j^2 (u_j^2+u_j^2)\} \{A_1^{2m-2} \beta_1^{m-1} + \dots C_{m-1}^z A_9^{2(m-1-z)} A_8^{2z} \beta_9^{m-1-2z} \beta_8^{2z}\} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}$
	$z=0$	A_j^3 / A_1
	$n=2$	$(\mu_1/A_1^{2m+2}) C_m^k (R_{0,m} R_{m,2} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2+u_2^2)^{\frac{2m+3}{2}}) \{A_j^2 (u_j^2+u_j^2)\}^2 \{A_9^2 \beta_9\}^{m-k} \{A_7 A_8 \gamma_9 e\}^k$
	$k=0$	$(\mu_1/A_1^{2m+2}) (\dots)_2 \{A_j^2 (u_j^2+u_j^2)\}^2 \{A_1^{2m} \beta_1^m + \dots C_m^z A_9^{2(m-z)} A_8^{2z} \beta_9^{m-2} \beta_8^{2z}\}$
	$z=0$	A_j^4 / A_1^2

Tableau 1 bis

Etude du terme de frottement
 développement de l'expression:
 $\sqrt{2} Ru$

ANNEXE II

$i \neq 1$	$(A_j \mu_j / A_s^{2m+2n-1}) C_m^k (k_{0,m} k_{m,n} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2 + v_1^2)^{\frac{2m+2n-1}{2}}) \{A_s^2 (u_j^2 + v_j^2)\}^m \{A_q^2 \beta_q\}^{m-k} \{A_q A_e \gamma_{qe}\}$	
$n=0$	$(A_j \mu_j / A_s^{2m-1}) C_m^k (k_{0,m} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2 + v_1^2)^{\frac{2m-1}{2}}) \{A_q^2 \beta_q\}^{m-k} \{A_q A_e \gamma_{qe}\}^k$	
	$k=0$	$(A_j \mu_j / A_s^{2m-1}) (\dots)_0 \{A_1^{2m} \beta_1^m + \dots C_m^k A_q^{2(m-k)} A_e^{2k} \beta_q^{m-k} \beta_e^k + \dots\}$
	$\pi=0$	$\pi=1$
	$A_1 A_j (\dots)_0 \mu_j \beta_1^m$ A_j^{2m-1} / A_s^{2m-1}	A_j^2 / A_s ...
	$k=1$	$(A_j \mu_j / A_s^{2m-1}) (\dots)_1 \{A_1^{2m-2} \beta_1^{m-1} + \dots C_{m-1}^k A_q^{2(m-1-k)} A_e^{2k} \beta_q^{m-1-k} \beta_e^k + \dots\} \{A_q A_e \gamma_{qe}\}$
	$\pi=0$	$\pi=1$
	$m A_j^2 (\dots)_0 \mu_j \beta_1^{m-1} \gamma_{1j}$ $m A_j A_s (\dots)_0 \mu_j \beta_1^{m-1} \gamma_{1s}$ $A_j^2 A_s / A_1$	A_j^2 / A_1^2
	$k=2$	$(A_j \mu_j / A_s^{2m-1}) \frac{m(m-1)}{2} \{A_1^{2m-4} \beta_1^{m-2} + \dots C_{m-2}^k A_q^{2(m-2-k)} A_e^{2k} \beta_q^{m-2-k} \beta_e^k + \dots\} \{A_q A_e \gamma_{qe}\}^2$
	$\pi=0$	
	A_j^3 / A_s	
$n=1$	$(A_j \mu_j / A_s^{2m+4}) C_m^k (k_{0,m} k_{m,2} / N^{\frac{2m-1}{2}} (u_1^2 + v_1^2)^{\frac{2m+1}{2}}) \{A_s^2 (u_j^2 + v_j^2)\} \{A_q^2 \beta_q\}^{m-k} \{A_q A_e \gamma_{qe}\}^k$	
	$k=0$	$(A_j \mu_j / A_s^{2m+1}) (\dots)_1 \{A_s^2 (u_j^2 + v_j^2)\} \{A_1^{2m} \beta_1^m + \dots C_m^k A_q^{2(m-k)} A_e^{2k} \beta_q^{m-k} \beta_e^k + \dots\}$
	$\pi=0$	
	A_j^3 / A_1	

A_1^2 $i=1 \ n=0$ $k=0 \ r=0$	$u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \times \sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{0,m}}{N^m(u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^m \right\}$ <p style="text-align: center;">σ_a</p>
$A_1 A_j$ $i=1 \ n=0$ $k=1 \ r=0$	$u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \left\{ 2u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \psi_1 - \psi_j] \right] + 2v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j] \right] \right\} \times$ $\sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)} \times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m k_{0,m}}{N^m(u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^{m-1} \right\}$ <p style="text-align: center;">σ_b</p>
$i \neq 1 \ m=0$ $k=0 \ r=0$	$+ u_j \cos(\omega_j t + \psi_j) \times \sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{0,m}}{N^m(u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^m \right\}$ <p style="text-align: center;">σ_a</p>
A_j^2 $i=1 \ m=0$ $k=0 \ r=1$	$u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \times \left\{ u_j^2 \cos(2\omega_j t + 2\psi_j) + v_j^2 \cos(2\omega_j t + 2\chi_j) - (N-1)(u_j^2 + v_j^2) \right\}$ $\times \sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)} \times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m k_{0,m}}{N^m(u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^{m-1} \right\}$ <p style="text-align: center;">σ_b</p>
$i=1 \ m=0$ $k=2 \ r=0$	$+ u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \left\{ 2u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \psi_1 - \psi_j] \right] + 2v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j] \right] \right\}^2$ $\times \sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)} \times \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1) k_{0,m}}{2 N^m(u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^{m-2} \right\}$ <p style="text-align: center;">σ_c</p>
$i=1 \ m=1$ $k=0 \ r=0$	$+ u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \times (u_j^2 + v_j^2) \times$ $\sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)} \left\{ \frac{1}{2(u_1^2 + v_1^2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{0,m} \times k_{m,1}}{N^m(u_1^2 + v_1^2)^{m+1}} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^m \right\}$ <p style="text-align: center;">σ_d</p>
$i \neq 1 \ m=0$ $k=1 \ r=0$	$u_j \cos(\omega_j t + \psi_j) \left\{ 2u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 - \psi_j] \right] + 2v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j] \right] \right\}$ $\sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)} \times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m k_{0,m}}{N^m(u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^{m-1} \right\}$ <p style="text-align: center;">σ_b</p>

Tableau 2 bis

Etude du terme de frottement
développement de l'expression:

$$\sqrt{2} R u$$

ANNEXE II

$A_j A_s$	$u_j \cos(\omega_j t + \psi_j) \times \left\{ 2 u_j u_s \left[\cos[(\omega_j + \omega_s) t + \psi_j + \psi_s] + \cos[(\omega_j - \omega_s) t + \psi_j - \psi_s] \right] + \right.$
$i=1 \quad n=0$ $k=2 \quad r=0$	$2 v_j v_s \left[\cos[(\omega_j + \omega_s) t + \chi_j + \chi_s] + \cos[(\omega_j - \omega_s) t + \chi_j - \chi_s] \right] \left. \right\}$
$\times \sqrt{N(u_i^2 + v_i^2)}$	$\times \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m R_{0,m}}{N^m (u_i^2 + v_i^2)^m} \left[u_i^2 \cos(2\omega_i t + 2\psi_i) + v_i^2 \cos(2\omega_i t + 2\chi_i) - (N-1)(u_i^2 + v_i^2) \right]^{m-1} \right\}$
σ_b	
$i=1 \quad n=0$ $k=2 \quad r=0$	$+ u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \times \left\{ 2 u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j) t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j) t + \psi_1 - \psi_j] \right] + \right.$
$2 v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j) t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j) t + \chi_1 - \chi_j] \right] \left. \right\} \times$	
$\times 2 \times \left\{ 2 u_1 u_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s) t + \psi_1 + \psi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s) t + \psi_1 - \psi_s] \right] + \right.$	
$2 v_1 v_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s) t + \chi_1 + \chi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s) t + \chi_1 - \chi_s] \right] \left. \right\}$	
$\sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)}$	$\times \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1) R_{0,m}}{2 N^m (u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^{m-2} \right\}$
σ_c	
$i=1 \quad n=0$ $k=1 \quad r=0$	$+ u_j \cos(\omega_j t + \psi_j) \times \left\{ 2 u_1 u_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s) t + \psi_1 + \psi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s) t + \psi_1 - \psi_s] \right] + \right.$
$2 v_1 v_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s) t + \chi_1 + \chi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s) t + \chi_1 - \chi_s] \right] \left. \right\} \times$	
$\sqrt{N(u_1^2 + v_1^2)}$	$\times \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m R_{0,m}}{N^m (u_1^2 + v_1^2)^m} \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) - (N-1)(u_1^2 + v_1^2) \right]^{m-1} \right\}$
σ_b	

Développement des fonctions s_0, s_1, s_2
sous forme de séries de Fourier

$$s_0 = \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{\frac{1}{2}} = G_{00} + G_{02} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots + G_{0n} \cos n(\omega_1 t + \theta) + \dots$$

$$s_1 = \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{\frac{1}{2}} = G_{10} + G_{11} \cos(\omega_1 t + \theta) + G_{12} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots + G_{1n} \cos n(\omega_1 t + \theta) + \dots$$

$$s_2 = \left\{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \right\}^{-\frac{1}{2}} = G_{20} + G_{21} \cos(\omega_1 t + \theta) + G_{22} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots + G_{2n} \cos n(\omega_1 t + \theta) + \dots$$

$$\text{avec } \begin{cases} G_{i0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s_i d(\omega_1 t + \theta) \\ i = 0, 1, 2 \\ n = 1 \rightarrow \infty \\ G_{in} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s_i \cos n(\omega_1 t + \theta) d(\omega_1 t + \theta) \end{cases}$$

en posant: $E(J) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - J^2 \sin^2 z)^{\frac{1}{2}} dz$ avec $J = \left(\frac{2J_1}{1+J_1} \right)^{\frac{1}{2}}$
 $F(J) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - J^2 \sin^2 z)^{-\frac{1}{2}} dz$

les intégrales elliptiques de LEGENDRE de 2^{ème} et 1^{ère} espèce,

on trouve :

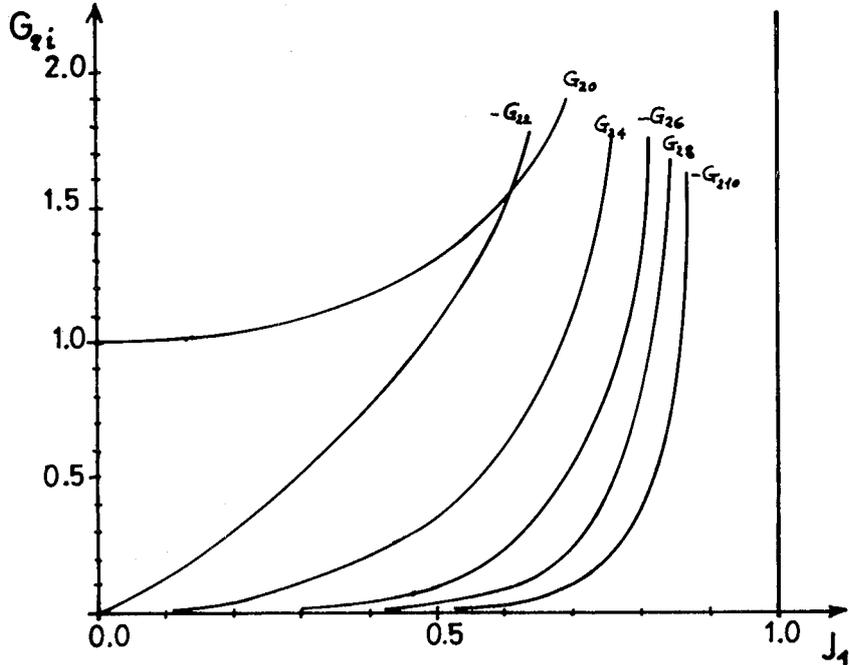
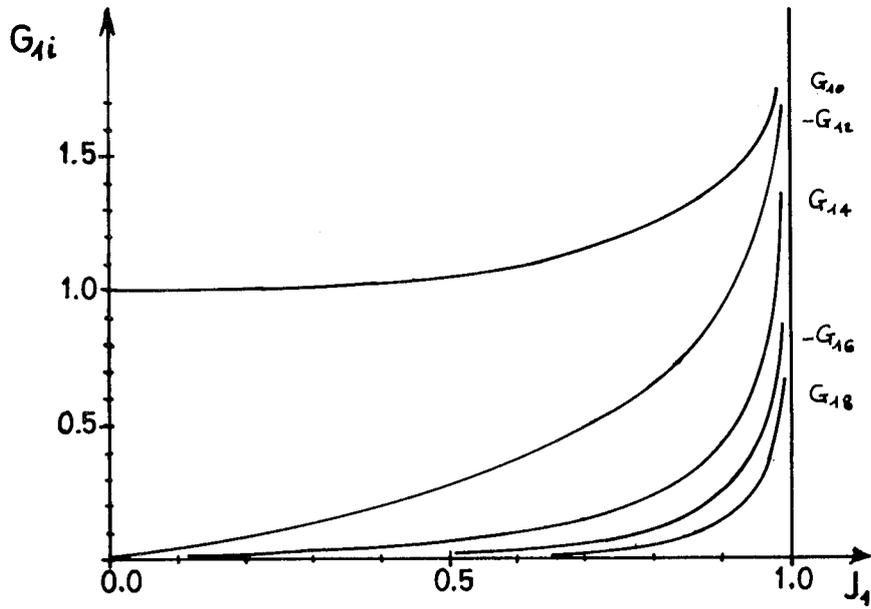
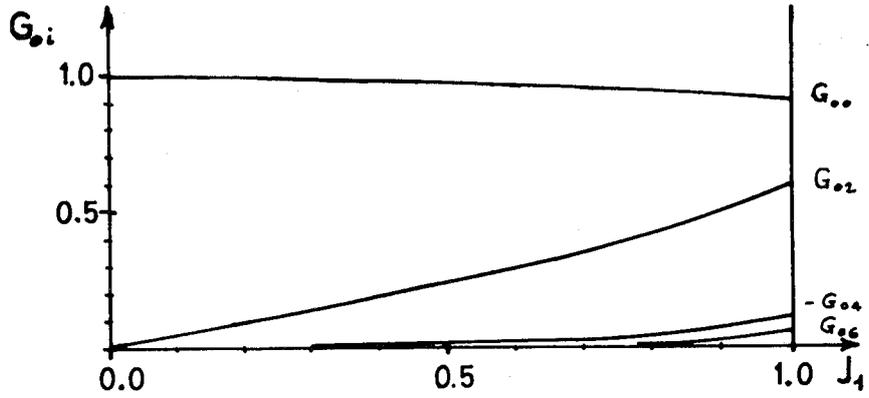
- * $G_{00} = \frac{2^{3/2}}{\pi} (2 - J^2)^{-1/2} E(J)$
- * $G_{01} = 0$
- * $G_{02} = \frac{2^{5/2}}{3\pi} (2 - J^2)^{-1/2} \left\{ E(J) + \frac{2(1-J^2)}{J^2} [E(J) - F(J)] \right\}$
- * $G_{03} = 0$
- * $G_{04} = \frac{2^{6/2}}{15\pi} \frac{(2 - J^2)^{-1/2}}{J^4} \left\{ 8(J^4 - 3J^2 + 2) F(J) - (J^4 - 16J^2 + 16) E(J) \right\}$
- * $G_{05} = 0$
- *

- * $G_{10} = \frac{2^{1/2}}{\pi} (2 - J^2)^{1/2} F(J)$
- * $G_{11} = 0$
- * $G_{12} = \frac{2^{3/2}}{\pi} (2 - J^2)^{1/2} \left\{ F(J) - \frac{2}{J^2} [F(J) - E(J)] \right\}$
- * $G_{13} = 0$
- * $G_{14} = \frac{2^{5/2}}{3\pi} \frac{(2 - J^2)^{1/2}}{J^4} \left\{ (3J^4 - 16J^2 + 16) F(J) - 8(2 - J^2) E(J) \right\}$
- * $G_{15} = 0$
- *

- * $G_{20} = \frac{2^{-1/2}}{\pi} \frac{(2 - J^2)^{3/2}}{1 - J^2} E(J)$
- * $G_{21} = 0$
- * $G_{22} = \frac{2^{1/2}}{\pi} \left\{ \frac{2(2 - J^2)^{3/2}}{J^2} F(J) - \frac{(2 - J^2)^{5/2}}{J^2(1 - J^2)} E(J) \right\}$
- * $G_{23} = 0$
- * $G_{24} = \frac{2^{1/2}}{\pi} \frac{(2 - J^2)^{3/2}}{J^4} \left\{ 8(J^2 - 2) F(J) + \frac{J^4 - 16J^2 + 16}{1 - J^2} E(J) \right\}$
- * $G_{25} = 0$
- *

ANNEXE II.3

Courbes $G_{i,n}$ en fonction de J_4



Développement de l'expression: $\sqrt{2} Ru$

A_1^2	$u_1 \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \cos(\omega_1 t + \psi_1) \{ G_{00} + G_{02} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{02n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$
$A_1 A_j$	$\frac{u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1)}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \psi_1 - \psi_j] \right] + \right. \\ \left. v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j] \right] \right\} \times \\ \times \{ G_{10} + G_{12} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{12n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \} \\ + u_j \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \cos(\omega_j t + \psi_j) \{ G_{00} + G_{02} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{02n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$
A_j^2	$\frac{u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1)}{2 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ u_j^2 \cos(2\omega_j t + 2\psi_j) + v_j^2 \cos(2\omega_j t + 2\chi_j) \right\} \times \{ G_{10} + \dots G_{12n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$ $- \frac{(N-1) u_1 (u_j^2 + v_j^2)}{2 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \cos(\omega_1 t + \psi_1) \{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \}^{-\frac{1}{2}}$ $- \frac{u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1)}{8 (u_1^2 + v_1^2)^{3/2}} \left\{ 2 u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \psi_1 - \psi_j] \right] + \right. \\ \left. 2 v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j] \right] \right\} \times \\ \times \{ G_{20} + G_{22} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{22n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$ $+ \frac{u_1 (u_j^2 + v_j^2)}{2 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \cos(\omega_1 t + \psi_1) \{ G_{00} + G_{02} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{02n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$ $- \frac{u_1 (u_j^2 + v_j^2)}{2 (u_1^2 + v_1^2)^{3/2}} \cos(\omega_1 t + \psi_1) \left[u_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\psi_1) + v_1^2 \cos(2\omega_1 t + 2\chi_1) \right] \{ G_{10} + \dots G_{12n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$ $+ \frac{(N-1) u_1 (u_j^2 + v_j^2)}{2 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \cos(\omega_1 t + \psi_1) \{ 1 + J_1 \cos(2\omega_1 t + 2\theta) \}^{-\frac{1}{2}}$ $+ \frac{u_j \cos(\omega_j t + \psi_j)}{2 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ 2 u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \psi_1 - \psi_j] \right] + \right. \\ \left. 2 v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j] \right] \right\} \times \\ \times \{ G_{10} + G_{12} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{12n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$
$A_j A_s$	$\frac{u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1)}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ u_j u_s \left[\cos[(\omega_j + \omega_s)t + \psi_j + \psi_s] + \cos[(\omega_j - \omega_s)t + \psi_j - \psi_s] \right] + \right. \\ \left. v_j v_s \left[\cos[(\omega_j + \omega_s)t + \chi_j + \chi_s] + \cos[(\omega_j - \omega_s)t + \chi_j - \chi_s] \right] \right\} \times \\ \times \{ G_{10} + G_{12} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{12n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$ $- \frac{u_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1)}{(u_1^2 + v_1^2)^{3/2}} \left\{ u_1 u_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \psi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \psi_1 - \psi_j] \right] + \right. \\ \left. v_1 v_j \left[\cos[(\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j] + \cos[(\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j] \right] \right\} \times \\ \times \left\{ u_1 u_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s)t + \psi_1 + \psi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s)t + \psi_1 - \psi_s] \right] + \right. \\ \left. v_1 v_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s)t + \chi_1 + \chi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s)t + \chi_1 - \chi_s] \right] \right\} \times \\ \times \{ G_{20} + G_{22} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{22n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$ $+ \frac{u_j \cos(\omega_j t + \psi_j)}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ u_1 u_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s)t + \psi_1 + \psi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s)t + \psi_1 - \psi_s] \right] + \right. \\ \left. v_1 v_s \left[\cos[(\omega_1 + \omega_s)t + \chi_1 + \chi_s] + \cos[(\omega_1 - \omega_s)t + \chi_1 - \chi_s] \right] \right\} \times \\ \times \{ G_{10} + G_{12} \cos(2\omega_1 t + 2\theta) + \dots G_{12n} \cos[2n(\omega_1 t + \theta)] + \dots \}$

ANNEXE II.5

Expression du frottement
Composantes F_x et F_y

h/c F _x		h/c F _y	
A_1^2			
ω_1	$\frac{A_1^2 u_1}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \left\{ G_{00} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \frac{G_{02}}{2} \cos(\omega_1 t + 2\theta - \psi_1) \right\}$	$\frac{A_1^2 v_1}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \left\{ G_{00} \cos(\omega_1 t + \chi_1) + \frac{G_{02}}{2} \cos(\omega_1 t + 2\theta - \chi_1) \right\}$	
$3\omega_1$	$\frac{A_1^2 u_1}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \left\{ \frac{G_{02}}{2} \cos(3\omega_1 t + 2\theta + \psi_1) + \frac{G_{04}}{2} \cos(3\omega_1 t + 4\theta - \psi_1) \right\}$	$\frac{A_1^2 v_1}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \left\{ \frac{G_{02}}{2} \cos(3\omega_1 t + 2\theta - \chi_1) + \frac{G_{04}}{2} \cos(3\omega_1 t + 4\theta - \chi_1) \right\}$	
$(2n+1)\omega_1$	$\frac{A_1^2 u_1}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \left\{ \frac{G_{0,2n}}{2} \cos[(2n+1)\omega_1 t + 2n\theta + \psi_1] + \frac{G_{0,2n+2}}{2} \cos[(2n+1)\omega_1 t + (2n+2)\theta - \psi_1] \right\}$	$\frac{A_1^2 v_1}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \left\{ \frac{G_{0,2n}}{2} \cos[(2n+1)\omega_1 t + 2n\theta + \chi_1] + \frac{G_{0,2n+2}}{2} \cos[(2n+1)\omega_1 t + (2n+2)\theta - \chi_1] \right\}$	
$A_1 A_j$			
ω_j	$\frac{A_1 A_j}{\sqrt{2} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ G_{10} [u_1^2 u_j \cos(\omega_j t + \psi_j) + u_1 v_1 v_j \cos(\chi_1 - \psi_1) \cos(\omega_j t + \chi_j)] + \frac{G_{12}}{2} [u_1^2 u_j \cos(\omega_j t + \psi_j) \cos 2(\psi_1 - \theta) + u_1 v_1 v_j \cos(2\theta - \chi_1 - \psi_1) \cos(\omega_j t + \chi_j)] \right\} + \frac{A_1 A_j u_j}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} G_{00} \cos(\omega_j t + \psi_j)$	$\frac{A_1 A_j}{\sqrt{2} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ G_{10} [u_1 v_1 u_j \cos(\psi_1 - \chi_1) \cos(\omega_j t + \psi_j) + v_1^2 v_j \cos(\omega_j t + \chi_j)] + \frac{G_{12}}{2} [u_1 v_1 u_j \cos(\omega_j t + \psi_j) \cos(2\theta - \psi_1 - \chi_1) + v_1^2 v_j \cos 2(\theta - \chi_1) \cos(\omega_j t + \chi_j)] \right\} + \frac{A_1 A_j v_j}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + v_1^2} G_{00} \cos(\omega_j t + \chi_j)$	
$2\omega_1 - \omega_j$	$\frac{A_1 A_j}{\sqrt{2} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ \frac{G_{10}}{2} [u_1^2 u_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t + 2\psi_1 - \psi_j] + u_1 v_1 v_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t + \chi_1 - \chi_j + \psi_1]] + \frac{G_{12}}{2} [u_1^2 u_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - \psi_j + 2\theta] + u_1 v_1 v_j \cos(\chi_1 - \psi_1) \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - \chi_j + 2\theta]] + \frac{G_{14}}{4} [u_1^2 u_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - 2\psi_1 - \psi_j + 4\theta] + u_1 v_1 v_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - \chi_1 - \chi_j - \psi_1 + 4\theta]] \right\} + A_1 A_j u_j \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \frac{G_{02}}{2\sqrt{2}} \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t + 2\theta - \psi_j]$	$\frac{A_1 A_j}{\sqrt{2} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ \frac{G_{10}}{2} [u_1 v_1 u_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t + \psi_1 + \chi_1 - \psi_j] + v_1^2 v_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t + 2\chi_1 - \chi_j]] + \frac{G_{12}}{2} [u_1 v_1 u_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - \psi_j + 2\theta] \cos(\psi_1 - \chi_1) + v_1^2 v_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - \chi_j + 2\theta]] + \frac{G_{14}}{4} [u_1 v_1 u_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - \psi_1 - \chi_1 - \psi_j + 4\theta] + v_1^2 v_j \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t - 2\chi_1 - \chi_j + 4\theta]] \right\} + A_1 A_j v_j \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \frac{G_{02}}{2\sqrt{2}} \cos[(2\omega_1 - \omega_j)t + 2\theta - \chi_j]$	
$2\omega_1 + \omega_j$	$\frac{A_1 A_j}{\sqrt{2} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ \frac{G_{10}}{2} [u_1^2 u_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + 2\psi_1 + \psi_j] + u_1 v_1 v_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + \chi_1 + \chi_j + \psi_1]] + \frac{G_{12}}{2} [u_1^2 u_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + \psi_j + 2\theta] + u_1 v_1 v_j \cos(\chi_1 - \psi_1) \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + \chi_j + 2\theta]] + \frac{G_{14}}{4} [u_1^2 u_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t - 2\psi_1 + \psi_j + 4\theta] + u_1 v_1 v_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t - \chi_1 + \chi_j - \psi_1 + 4\theta]] \right\} + A_1 A_j u_j \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \frac{G_{02}}{2\sqrt{2}} \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + 2\theta + \psi_j]$	$\frac{A_1 A_j}{\sqrt{2} \sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \left\{ \frac{G_{10}}{2} [u_1 v_1 u_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + \psi_1 + \chi_1 + \psi_j] + v_1^2 v_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + 2\chi_1 + \chi_j]] + \frac{G_{12}}{2} [u_1 v_1 u_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + \psi_j + 2\theta] \cos(\psi_1 - \chi_1) + v_1^2 v_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + \chi_j + 2\theta]] + \frac{G_{14}}{4} [u_1 v_1 u_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t - \psi_1 - \chi_1 + \psi_j + 4\theta] + v_1^2 v_j \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t - 2\chi_1 + \chi_j + 4\theta]] \right\} + A_1 A_j v_j \sqrt{u_1^2 + v_1^2} \frac{G_{02}}{2\sqrt{2}} \cos[(2\omega_1 + \omega_j)t + 2\theta + \chi_j]$	

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 20 Mars 1976

Le Président de la thèse



VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Institut
National Polytechnique



Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



ERRATAPremière thèse :

- p. 3 : lire "la côte Sud de l'Angleterre".
- p. 15 : lire $\vec{ST} = \vec{u}_s \cdot ST$ et $\vec{LT} = \vec{u}_L \cdot LT$
- p. 27 : avant-dernière ligne, lire "évection évectionnelle"
- p. 48 : paragraphe 2.1.3, remplacer "il faut et il suffit" ... par "il suffit" ..
- p. 53 : bas de la page, lire "soit F_c la fréquence" ... et non " F_e "
- p. 74 : équation (8-c), lire $\frac{1}{R_o \operatorname{tg} \varphi} \bar{u}_o + \frac{1}{F_r} \frac{\partial \pi_1}{\partial \gamma} = 0$
 (et non $= \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \gamma^2}$)
- p. 97 : ajouter le trait de fraction dans la formule (15) $\frac{k_{o,m} k_{m,n}}{A_1^{2m+2n-1} \dots}$
- p. 110 : Tableau II.2/1 : pour l'ordre $A_1 A_2$, la fréquence ω_2 , la composante en y : 0,347 au lieu de 0,3447 ; pour la fréquence $2\omega_1 + \omega_2$: 0,0459 au lieu de 0,0479, 0,0655 au lieu de 0,0615.
- p. 131 : ligne 18 : lire ", et la réalisation sur modèle du mécanisme de génération"
- p. 134 : Tableau II.3/1 : ordre $A'_{M_2} A'_{S_2}$, lire : $MS_o(\omega_{M_2} \omega_{S_2})$ au lieu de $MS_o(\omega_{M_1})$
 $2 MS_2 \dots$ confondu avec M_2
 ordre $A'_{M_2} A'_{N_2}$, lire : $MN_4(\omega_{M_2} + \omega_{N_2})$
 ordre A'_{S_2} , lire : $3 M_2 S_2 (3\omega_{M_2} - 2\omega_{S_2})$
- p. 135 : ordre $A'_{S_2} A'_{N_2}$: $MNS_2 \dots$ confondu avec E_2
- p. 158 : paragraphe 1.2.1 : MS_o vitesse ...
 période 14 j. 18 h.
- p. 172 : bas de page, formule (5), lire : " $= A'_{M_2} \cos(\omega_{M_2} \tau - R_{M_2})$ " ...
 au lieu de " $\omega_{M_2} \tau$ "
- p. IX : lire "CARTWRIGHT"

Seconde thèse :

- p. 1 : 2ème ligne, lire "se propagent"
 3ème ligne, lire $(g \frac{\sin b}{m})^{\frac{1}{2}}$ et non $g \sin b/m$

