



**HAL**  
open science

# Les graphes de démonstration : outil pour l'étude des démonstrations naturelles

Nicolas Balacheff

► **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. Les graphes de démonstration : outil pour l'étude des démonstrations naturelles. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1978. Français. NNT: . tel-00287846

**HAL Id: tel-00287846**

**<https://theses.hal.science/tel-00287846v1>**

Submitted on 13 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble  
Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE**  
Informatique

*par*

**BALACHEFF Nicolas**



**LES GRAPHE DE DEMONSTRATION :  
OUTIL POUR L'ETUDE  
DES DEMONSTRATIONS NATURELLES.**



**Thèse soutenue le 22 mars 1978 devant la Commission d'Examen :**

**Président : B. VAUQUOIS**

**Examineurs : G. GLAESER**

**P. JULLIEN (Rapporteur)**

**J. KUNTZMANN**

**G. VERGNAUD**



Je tiens à remercier

Monsieur le Professeur Bernard VAUQUOIS qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ;

Monsieur le Professeur Jean KUNTZMANN, pour m'avoir conseillé et soutenu sur le chemin que j'ai choisi. Qu'il me soit permis de lui témoigner ici toute ma reconnaissance ;

Monsieur le Professeur Pierre JULLIEN pour l'attention qu'il a bien voulu porter à ce travail ;

Monsieur le Professeur Georges GLAESER et Monsieur Gérard VERGNAUD, maître de recherche au C.N.R.S., qui ont bien voulu accepter de participer au jury.

Je remercie également tous ceux qui m'ont apporté leur aide au cours de ce travail. En particulier Colette et Jean-Marie LABORDE dont les conseils attentifs m'ont aidé à m'initier à la recherche ; Gérard DROUET D'AUBIGNY pour ses conseils en statistique.

Je tiens à remercier Mademoiselle CHRISTIN, qui a réalisé la dactylographie de cette thèse avec gentillesse et application.

Je remercie enfin toute l'équipe du service de tirage pour l'excellente qualité de ce travail et son accueil toujours amical.



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE  
ET MEDICALE DE GRENOBLE

---

Monsieur Gabriel CAU : Président  
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

---

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARDE Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUIET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUFY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZTERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

#### PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

#### PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELDORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUHEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFLISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale



MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULTIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

*Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.*



INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Monsieur Philippe TRAYNARD : Président

Monsieur Pierre-Jean LAURENT : Vice Président

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BLOCH Daniel	Physique du solide
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
	BONNIER Etienne	Electrochimie et électrometallurgie
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	COUMES André	Radioélectricité
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electrostatique
	FOULARD Claude	Automatique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
	PAUTHENET René	Physique du solide
	PERRET René	Servomécanismes
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	SILBER Robert	Mécanique des fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M.	ROUXEL Roland	Automatique
----	---------------	-------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuel	Electronique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	LACOUME Jean-Louis	Géophysique
	LANCIA Roland	Electronique
	ROBERT François	Analyse Numérique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNÝ François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Mathématiques appliquées
	CHARTIER Germain	Electronique
	GUYOT Pierre	Chimie minérale
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	MORET Roger	Electrotechnique nucléaire
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme.	SAUCIER Gabrièle	Informatique fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M.	LANDAU Ioan	Automatique
----	-------------	-------------

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

**LES GRAPHES DE DEMONSTRATION :  
OUTIL POUR L'ETUDE  
DES DEMONSTRATIONS NATURELLES.**

**N. Balacheff**



## T A B L E   D E S   M A T I E R E S

### INTRODUCTION

I	<u>Les objectifs</u> .....	1
II	<u>Les principales approches</u> .....	1
II-1	L'introspection.....	2
II-2	Les méthodes de type expérimental.....	3
II-2.1	Les travaux soviétiques.....	3
II-2.2	PIAGET et l'approche génétique.....	5
II-2.3	NEWELL et SIMON, et l'intelligence artificielle.....	6
III	<u>Notre analyse et ses conséquences</u> .....	8
III-1	Le choix d'un contexte.....	8
III-2	Précisions sur l'objet de notre étude.....	9
III-2.1	Etudier des résolutions de problèmes mathématiques.....	9
III-2.2	... par des personnes parvenues au stade hypothético-déductif...	13
III-2.3	... exprimées par un discours.....	13
IV	<u>Présentation d'un outil pour l'analyse de démonstrations naturelles</u> .....	14
IV-1	Logique formelle et raisonnement.....	14
IV-1.1	Le CP1, premier outil de comparaison des raisonnements.....	16
IV-1.2	Le CP1, modèle pour l'étude des raisonnements.....	18
IV-2	Graphes et raisonnements.....	20
IV-2.1	Les graphes, image de la structure d'un raisonnement.....	20
IV-2.2	Utilisation actuelle des graphes de démonstration.....	22
IV-2.3	Les graphes, outil pour l'analyse des raisonnements.....	28
	<u>LES GRANDES SECTIONS DE CET EXPOSE</u> .....	31
	<u>PARTIE A : GRAPHE D'UNE DEMONSTRATION FORMELLE</u>	
I	<u>Graphe de démonstration</u> .....	32



I-1	S-axiome.....	32
I-2	Règles de déduction.....	33
I-3	Démonstration relativement à une théorie.....	35
I-4	Commentaire sur cette définition.....	35
I-5	Remarque sur le vocabulaire.....	35
I-6	Démonstration minimale.....	36
I-6.1	Définitions.....	36
I-6.2	Suppression des redondances.....	36
I-6.3	Suppression des énoncés inutiles.....	36
I-6.4	Démonstration minimale.....	37
I-7	Représentation d'une démonstration minimale.....	37
I-8	Exemple de représentation.....	37
I-9	Rappel de définitions.....	39
I-10	Théorème 1 de représentation.....	39
II	<u>R-démonstration : définition et graphe de représentation.....</u>	40
II-1	Notation.....	41
II-2	Preuve minimale.....	41
II-3	Représentation d'une preuve minimale, cas 2.....	41
II-4	Procédure de preuve $\rightarrow i$ .....	42
II-5	Procédure de preuve par l'absurde.....	42
II-6	Procédure de preuve $\forall i$ .....	42
II-7	Remarque (généralisation).....	43
II-8	Représentation.....	43
II-9	Remarque (hypothèse).....	43
II-10	Procédure de preuve par cas.....	43
II-10.1	Définition.....	43
II-10.2	Représentation.....	43
II-11	Procédure de preuve $\exists e$ .....	44
II-11.1	Définition.....	44
II-11.2	Représentation.....	44

II-12	R-démonstration : définition.....	44
II-12.1	Remarque.....	46
II-12.2	Commentaire sur la définition.....	46
II-12.3	Niveau d'une R-démonstration.....	46
II-12.4	Propriété 1.....	47
II-12.5	Propriété 2.....	48
II-12.6	Exemple de R-démonstration.....	48
II-13	R-démonstration : représentation.....	51
II-13.1	Remarque et vocabulaire.....	51
II-13.2	Lemme.....	51
II-13.3	Théorème 2 de représentation.....	55
II-13.4	Exemple de représentation d'une R-démonstration.....	57

**PARTIE B : DE LA REDACTION AU GRAPHE DE REPRESENTATION**

0-1	Remarque.....	63
I	<u>Les avertisseurs</u> .....	64
I-1	Les avertisseurs d'inférence.....	64
I-1.1	Les avertisseurs d'inférence ascendants.....	64
I-1.2	Les avertisseurs d'inférence descendants.....	64
I-1.3	Remarque.....	67
I-1.4	Avertisseur d'inférence liant plusieurs énoncés.....	67
I-1.5	Problèmes liés aux relations transitives.....	69
I-1.5.1	Cas général.....	69
I-1.5.2	Cas de l'égalité.....	72
I-1.5.3	Quelques situations et leur règlement.....	73
I-1.6	Donc, premier mot d'une rédaction.....	75
I-1.7	Le retour à la ligne.....	75
I-1.8	Si ... on a ..., Si ... alors .....	78
I-1.9	Si ... alors ... sinon.....	80

I-2	Les avertisseurs de rattachement.....	83
I-3	Les avertisseurs de traduction.....	84
I-4	Les avertisseurs de construction.....	85
I-5	Enchâssement d'un avertisseur.....	87
II	<u>Les énoncés</u> .....	87
II-1	Les énoncés méta-mathématiques.....	88
II-1.1	Les indicateurs de démonstration.....	88
II-1.2	Les arguments de procédure.....	90
II-1.2.1	Ceux qui évacuent une démonstration.....	90
II-1.2.2	Ceux qui rappellent une procédure.....	90
II-1.3	Les énoncés introduits par un verbe indiquant une action.....	92
II-1.4	Expression conditionnelle.....	92
II-1.5	Les phrases interrogatives.....	93
II-1.6	Quelques remarques supplémentaires.....	94
II-1.6.1	Présence de mots méta-mathématiques dans un énoncé mathématique.....	94
II-1.6.2	Indications pour la lecture, et confidences.....	95
II-2	Les énoncés mathématiques.....	95
II-2.1	Traduction des phrases contenant les connecteurs ET, OU.....	96
II-2.2	L'avertisseur d'inférence descendant et l'implication logique...	97
III-2.3	Le symbole $\Leftrightarrow$ .....	97
II-2.4	La traduction des mots par des symboles.....	98
III	<u>De la rédaction à sa représentation par un graphe</u> .....	99
III-1	La suppression des énoncés méta-mathématiques.....	99
III-2	La traduction dans le langage des prédicats.....	100
III-2.1	La traduction des énoncés.....	100
III-2.2	Portée des quantificateurs et désignations.....	101
III-2.2.1	Comment la question se pose.....	101
III-2.2.2	Structure de la rédaction.....	103

III-2.2.3	Remarque sur le repérage des blocs.....	106
III-2.2.4	Réponse à la question.....	106
III-2.3	La traduction de la démonstration.....	108
III-2.3.1	Phase 1 : traduction des énoncés et règlement des conflits de désignation.....	108
III-2.3.2	Phase 2 : suppression de certains quantificateurs.....	111
III-3	Association d'un graphe à une rédaction.....	113
IV	<u>Discussion sur l'éventualité d'un traitement informatique.....</u>	117
<b><u>PARTIE C : APPLICATION A L'ETUDE DES RESOLUTIONS D'UN PROBLEME D'ALGEBRE</u></b>		
0-1	Avertissement.....	120
0-2	Le problème.....	120
0-3	L'échantillon.....	120
0-4	Les conditions de l'observation.....	121
0-5	Le traitement des observations.....	121
0-6	Les principaux paragraphes de cette étude.....	121
I	<u>Le réel</u> .....	122
I-1	Traduction des rédactions, le champ de résolution.....	122
I-2	Première analyse des contenus.....	123
I-2.1	... notée multiplicativement.....	123
I-2.2	Essai de classification des stratégies.....	125
I-3	Structure des résolutions : étude des graphes de représentation.....	127
I-3.1	Circuits et cercles vicieux.....	128
I-3.1.1	Test de la présence d'un circuit dans un graphe.....	128
I-3.1.2	Application.....	128
I-3.1.3	Propriété.....	128
I-3.2	Connexité et déductions explicites.....	130
I-3.2.1	Test de la connexité d'un graphe.....	130
I-3.2.2	Application.....	130
I-3.2.3	Propriété.....	134

I-3.3	Sources et puits du graphe de représentation.....	134
I-3.4	Rédaction ayant la structure d'une R-démonstration.....	136
I-3.5	Dimensions d'une démonstration.....	137
I-4	Ressemblance de deux démonstrations et classement.....	138
I-4.1	Indice de ressemblance.....	138
I-4.2	Exemple et homogénéité d'un échantillon.....	139
I-4.3	Classification des démonstrations.....	141
I-4.3.1	Classification pour l'échantillon DEUG.....	141
I-4.3.2	Classification pour l'échantillon LICENCE.....	143
II	<u>Le structuralement possible</u> .....	146
II-1	Champ de référence.....	147
II-2	Quelques commentaires.....	153
III	<u>Le matériellement possible</u> .....	156
III-1	Comparaison des champs de résolution et du champ de référence...	156
III-2	Confrontation du réel et du structuralement possible.....	158
III-2.1	Echantillon DEUG.....	158
III-2.2	Echantillon LICENCE.....	161
III-2.3	Les démonstrations par l'absurde.....	167
IV	<u>Conclusion</u> .....	169
	<u>CONCLUSION</u> .....	172
	<u>ANNEXES</u>	
	<u>Annexe 1</u> .....	174
	<u>Annexe 2</u> .....	175
	<u>INDEX</u> .....	185
	<u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	186

# INTRODUCTION

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100



## I - LES OBJECTIFS

Notre travail se situe dans le domaine de recherche que constitue l'étude des comportements heuristiques. C'est à dire l'étude des comportements mis en jeu lors de la résolution de problèmes, en considérant ce dernier mot avec son acception la plus large.

On peut considérer dans ce domaine deux grands types de travaux :

- Ceux dont la finalité est la découverte, la description et l'explication des mécanismes intellectuels et de leurs articulations dans la démarche qui conduit un individu à la solution d'un problème.

- Ceux dont la finalité est de proposer des méthodes qui permettent de résoudre des problèmes, soit pour les diffuser, soit pour les utiliser à la démonstration automatique.

Nos préoccupations sont celles d'un enseignant, et nous rattachons notre travail au premier type. Cela ne signifie pas que nous perdions de vue les applications, mais nous pensons que la connaissance approfondie du fonctionnement intellectuel de l'élève est un préalable nécessaire à une conception scientifique de l'enseignement.

## II - LES PRINCIPALES APPROCHES

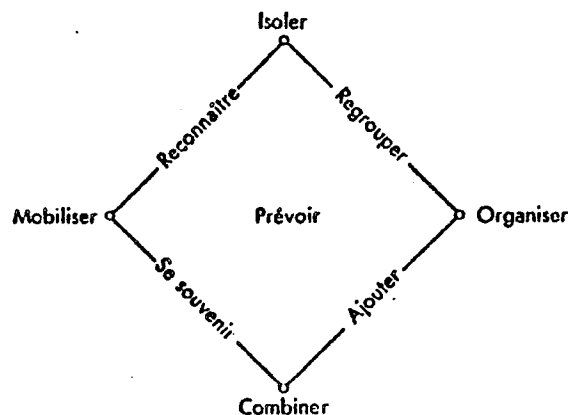
Nous avons abordé cette recherche par un tour d'horizon des méthodes utilisées dans les travaux historiques ou contemporains [ 4 ]. Outre les finalités, nous distinguons deux facteurs discriminants : la méthode et le choix du modèle sous-jacent aux interprétations. Nous ne cherchons pas, dans les pages qui suivent, à faire une étude exhaustive mais à dégager les principaux courants de recherche en les illustrant par les travaux les plus importants.



## II-1. L'introspection

Historiquement l'introspection caractérise les premières approches. A l'image de DESCARTES [ 14 ] dans *"le discours de la méthode"*, il s'agit de recherches poursuivies par des scientifiques se préoccupant du fonctionnement de leur propre pensée. Un exemple célèbre est la conférence de POINCARÉ à la Société de Psychologie de PARIS en 1908 (voir [ 46 ] ). Plus tard HADAMARD essaie une étude plus générale, en s'appuyant en particulier sur une *"Enquête sur les méthodes de travail des mathématiciens"*. Cependant l'analyse qu'il fait reste largement introspective, et cela délibérément car les approches dites objectives où l'expérimentateur est différent du penseur, où l'observation et la pensée n'interfèrent pas, lui semblent donner *"des renseignements indirects dont on ne déchiffre pas facilement la signification"* ([22] p 14 ).

Certains travaux contemporains font encore une large part à l'introspection, ils sont dominés par l'oeuvre de Georges POLYA ([47], [48], [49]). A la différence de ses prédécesseurs que nous pouvons rattacher au premier type de finalité, le souci de POLYA est d'abord pédagogique : proposer des moyens d'enseigner la résolution de problèmes, permettre l'amélioration des aptitudes dans ce domaine. Il ne résiste cependant pas à la tentation de donner un modèle du *"comment nous pensons"*, et de proposer un schéma pour lequel il a la prudence d'avertir qu'il faut le *"prendre pour ce qu' (il) vaut"* ([48] p 247 ) :



POLYA n'explique pas sur quoi il fonde sa description. En fait il nous livre les résultats "*d'une longue et sérieuse étude des méthodes de résolution*" centrée sur son expérience personnelle de la résolution des problèmes. On ne peut considérer qu'il décrit autre chose que son propre "*comportement mental*" ([48] p 255)

## II-2. Les méthodes de type expérimental

Les travaux les plus récents ont pour la plupart abandonné l'introspection pour l'étude des comportements heuristiques au profit de méthodes de type expérimental. Ils sont caractérisés, bien sûr, par la dissociation de l'observateur et de l'observé, mais surtout par la dialectique expérimentale : construction d'hypothèses / expérimentation vérificatrice. Ces méthodes exigent du chercheur une réflexion préalable sur l'objet de son étude et la définition d'une problématique car "*une bonne expérience n'est jamais instituée que pour répondre à une question, et pour qu'une question soit bien posée il faut pouvoir la situer dans un ensemble de problèmes*" (PIAGET [15]).

L'élaboration d'une problématique est fortement liée au choix d'un modèle, éventuellement révisable au fil de la recherche, qui sera sous-jacent à l'interprétation des faits observés. Les différences dans les choix du modèle sont de ce fait aussi fondamentales que les différences méthodologiques. C'est relativement à ces deux caractères que nous nous intéressons aux approches suivantes qui nous paraissent caractéristiques et illustrant bien les principaux courants contemporains.

### II-2.1. Les travaux soviétiques

Les travaux soviétiques, dont nous avons pris connaissance essentiellement par les "*Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics*" ([60], [61], [62]) se rattachent à deux types de méthodes. Les méthodes expérimentales classiques où l'expérience se déroule sans intervention de l'expérimentateur, en utilisant des groupes expérimentaux et des groupes témoins (BRUSHLINSKII [9]).

L'autre type de méthode consiste en des interrogations individuelles des élèves au cours desquelles l'interrogateur intervient dans le but de répondre à des questions précises qu'il s'est fixé à l'avance (TALYZINA [ 54]). L'existence d'un modèle sous-jacent à ces recherches n'est pas toujours évidente, TALYZINA conduit sa recherche pour répondre à des questions qu'elle s'est posée à la suite d'une observation préliminaire des difficultés de trois étudiants à résoudre des problèmes de géométrie. D'autres approches explicitent des principes théoriques a priori, par exemple sur les conditions du développement de l'enfant (SHCHEDROVITSKII-YAKOBSON [ 52]), nous avons été particulièrement intéressés par BRUSHLINSKII qui pose les bases d'un modèle des activités de la pensée ; la résolution d'un problème est le produit d'un processus intellectuel dont les opérations élémentaires doivent être conjecturées à partir de faits observables lors de la résolution ([ 9 ]). Le matériel expérimental (les problèmes choisis) est en général de type scolaire.

Les travaux de V.A. KRUTETSKII [33 ] se distinguent à la fois par la diversité des méthodes utilisées et l'approche historico-critique du sujet. L'objet de son étude est plus vaste que celui qui nous intéresse ici puisqu'il s'agit d'aptitudes aux mathématiques. L'originalité de son approche est le doublement d'une méthode expérimentale classique par des études ou observations non expérimentales : questionnaires adressés à des enseignants et à des mathématiciens professionnels afin de relever leur point de vue sur ce que peut être une aptitude aux mathématiques, analyse des biographies de mathématiciens et physiciens fameux. La population scolaire sur laquelle porte l'étude est composée de trois sous populations dont les individus sont respectivement : les bons en mathématiques (capable pupils), les moyens en mathématiques (average pupils), les mauvais en mathématiques (incapable pupils). A ces élèves sur lesquels porte l'étude expérimentale, KRUTETSKII ajoute des élèves présentant des talents particuliers en mathématiques (mathematically gifted pupils) avec lesquels il poursuit des entretiens à partir du même matériel expérimental. Ce matériel expérimental est constitué de problèmes dont la forme est analogue à ceux que les élèves peuvent rencontrer à l'école. Ces problèmes ont été conçus non pour mesurer des aptitudes mais pour en analyser les structures, pour mettre en évidence les aspects qualitatifs de la solution. L'attention est centrée sur la description du processus de résolution. ([33 ] p 97 ).

Le deuxième aspect important de cette approche est l'analyse historico-critique qui a précédé l'investigation et lui sert de base. A partir de cette analyse, KRUTETSKII décompose l'aptitude aux mathématiques en aptitudes élémentaires ([33] pp 87-88 ) telles que : l'aptitude à isoler la forme du contenu, l'aptitude à opérer sur des symboles, etc...

Pour l'essentiel ses objectifs sont de dégager les différentes formes de l'aptitude aux mathématiques (structures of abilities) et l'évolution de leurs manifestations aux différents niveaux scolaires depuis le pré-élémentaire.

#### II-2.2. PIAGET et l'approche génétique

La méthode clinique, dont l'application à la psychologie est l'oeuvre de PIAGET, refuse de "s'astreindre à présenter des problèmes standardisés, des questions au vocabulaire fixé une fois pour toutes, et (préfère) au contraire, à partir d'idées directrices précises, adapter les expressions et au besoin les situations elles-mêmes aux réponses, aux attitudes et au vocabulaire même du sujet". ([57] p 68 ). Par son questionnement PIAGET cherche à "découvrir quelque chose sur les processus de raisonnement qui se (trouvent) derrière les réponses justes, avec un intérêt particulier pour ceux que (cachent) les réponses fausses" (1) "(C')est une mise en question systématique des affirmations du sujet, non pour mesurer la solidité de ses convictions, mais pour saisir son activité logique profonde, non pas seulement ses performances fonctionnelles et ses croyances spontanées, mais la structure caractéristique d'un certain stade de développement". (2)

Le questionnement, bien qu'il n'ait pas été programmé à l'avance, n'est pas le fruit de spéculations arbitraires de l'observateur. Il est fondé sur un modèle. La pensée est opératoire et ses opérations ne sont pas isolées mais constituent un ensemble structuré, un système.

(1) [11] p 7 ; (2) [57] p 75

L'idée centrale des travaux de PIAGET, et qui constitue l'essence de la psychologie génétique, est que la connaissance de la construction de cette structure au cours du développement de l'enfant permet celle de son état final, la pensée adulte. Cette approche a conduit PIAGET à mettre en évidence des plateaux (ou stades), correspondant à des états de stabilité dans l'évolution de la pensée. Il ne faut pas voir là un modèle statique, en effet l'évolution de l'enfant est un processus dynamique, les stades ne sont que des points de repère dans ce processus qui, en fait, conduit "*de certains états d'équilibre approché à d'autres, qualitativement différents, en passant par de multiples déséquilibres et rééquilibrations*" ([43] p 9).

Ainsi pour les psychologues de l'école genevoise le problème est d'établir les lois réelles des opérations de la pensée et de les expliquer, c'est-à-dire non pas les fonder (au sens d'analyser leur validité formelle) mais exclusivement de comprendre et de reconstituer génétiquement. Les travaux de PIAGET portent moins sur l'étude des comportements heuristiques que sur la nature des opérations logiques et leur structure d'ensemble, ils prouvent l'existence d'une logique du sujet.

### II-2.3. NEWELL et SIMON, et l'intelligence artificielle.

Les travaux de NEWELL et SIMON sont centrés sur l'étude de la résolution de problèmes par des adultes. Leur développement est très fortement lié à celui de l'informatique et en particulier à celui de l'intelligence artificielle. Ainsi le support théorique de ces travaux est-il fondé sur l'hypothèse que, du point de vue de ses activités intellectuelles, l'homme est un système de traitement de l'information. L'essentiel du modèle ainsi déterminé peut se résumer dans les propositions suivantes ([38] p 789).

-Seule une petite partie des caractéristiques générales du STI\* humain est invariante d'une tâche à l'autre, d'un chercheur à l'autre.

---

\* Système de traitement de l'information.

- Ces caractéristiques sont suffisantes pour déterminer que l'environnement de la tâche est représenté comme un espace problème et que la résolution a lieu dans cet espace problème.

- Les structures de l'environnement de la tâche déterminent les structures possibles de l'espace problème.

- La structure de l'espace problème détermine les programmes qui peuvent être utilisés pour la résolution.

Cette approche informatique détermine le matériel expérimental, il s'agit de problèmes de type combinatoire bien adaptés au traitement automatique : les puzzles arithmétiques, ou cryptarithmiques, parmi lesquels le fameux DONALD + GERALD = ROBERT dont on trouvera une étude très fouillée dans les travaux de GROSSEL [21] ; le calcul des propositions ; les problèmes d'échec.

NEWELL et SIMON confrontent leur théorie à la réalité, s'efforçant de mesurer et cataloguer les comparaisons. Le processus de validation est moins expérimental qu'empirique, le modèle est conféré à l'analyse de protocoles verbaux. Cette technique, affirment-ils, est le label (hallmark) d'une approche par les systèmes de traitement de l'information (information processing approach).<sup>(1)</sup>

Pour cette école américaine, expliquer le comportement heuristique d'un sujet c'est décrire les manipulations d'information à un niveau tel qu'un simple interpréteur (au sens informatique) puisse transformer cette description en un processus effectif de résolution.<sup>(1)</sup>

(1) [38] pp 11-12

### III - NOTRE ANALYSE ET SES CONSEQUENCES

#### III-1. Le choix d'un contexte

Nous avons, au paragraphe I, indiqué à quel type d'objectif nous rattachions notre travail. En fait, et le paragraphe II le montre, cela est insuffisant pour nous situer. Dire que l'on veut contribuer à une explication des mécanismes intellectuels, suppose que l'on a donné un sens déterminé au substantif "*explication*". Si nous prenons le dictionnaire, expliquer c'est "*faire connaître la raison*" (Larousse), plus précisément expliquer "*une réalité quelconque (...) c'est montrer qu'elle est nécessaire*" ([45] p 7).

En ce sens la théorie proposée par NEWELL et SIMON ne nous paraît pas être explicative des comportements heuristiques, car elle n'en dégage pas le caractère de nécessité. Elle est par contre descriptive, dans un sens très fort puisqu'ils exigent que la description soit suffisante pour la reconstitution opérationnelle du processus qu'elle recouvre. Cette théorie est actuellement incapable de fournir un modèle explicatif, en effet elle devrait pour cela être déductive c'est-à-dire être définie à partir d'objets et de règles de construction. Or, si les objets (espace problème, programmes) sont définis, les règles de construction (détermination de l'espace problème, mécanisme de sélection ou de construction des programmes de résolution) ne le sont pas, seule leur existence est affirmée. ([38] p 790). L'exposé de Human Problem Solving n'est pas une explication mais une description des comportements de résolution, particulièrement adéquate aux types de problèmes que les auteurs ont choisis d'étudier.

L'approche génétique fournit, au contraire, un contexte théorique qui permettra de construire un modèle explicatif des comportements heuristiques. Nous justifions cette affirmation en relevant deux traits fondamentaux de cette approche. Les comportements intellectuels de l'adulte ne sont pas envisagés directement, ou comme une entité propre, mais comme conséquents du développement de l'enfant ; ainsi la nécessité génétique confère le caractère explicatif.

Le deuxième trait, qui en fait est un corollaire du précédent, est que le modèle ainsi construit décrira les comportements de résolution relativement à une logique du sujet et non à une théorie logique déterminée a priori, qui fournit un vocabulaire de description, mais qui lui est étrangère.

De l'approche de KRUTETSKII nous ne retiendrons pas le principe d'une étude, pour ainsi dire orthogonale à l'approche génétique puisqu'elle cherche à dégager les caractères d'une aptitude aux mathématiques dans la comparaison des démarches d'élèves d'une même tranche d'âge mais réputés forts, moyens ou faibles dans cette discipline. Rappelons que ce travail débouche sur l'hypothèse de l'existence d'une boîte noire ("*an accepter of a mathematical operation*") qui serait le noeud de l'aptitude à résoudre des problèmes ; cette boîte noire, produit d'une pensée mathématique généralisée, serait bien développée chez les élèves bons en mathématique et quasiment absente chez ceux qui sont plus faibles. KRUTETSKII exprime enfin son projet de découvrir les conditions de formation de cette boîte noire et d'en exhiber le contenu et le fonctionnement. N'est-ce pas là, en fait, un projet d'étude de la formation des connaissances mathématiques et de leur structuration ?

Dans l'immédiat, nous retiendrons de ces travaux la diversité des approches, et l'élaboration d'un matériel expérimental de type scolaire.

Nous allons dans la suite préciser l'objet de notre travail et décrire l'outil que nous avons conçu pour l'étude des raisonnements naturels.

### III-2. Précisions sur l'objet de notre étude

#### III-2.1. Etudier des résolutions de problèmes mathématiques...

Les situations problématiques ne sont pas le privilège d'un domaine particulier, on est susceptible d'en rencontrer à tout instant de la vie quotidienne.



La résolution de problèmes fait partie de la pédagogie de la plupart des disciplines et le choix des mathématiques vient de notre participation à leur enseignement et du rôle essentiel qu'y joue cette activité.

Cependant nous n'envisagerons pas n'importe quel type de problèmes mathématiques. En particulier nous nous définissons des problèmes qui présentent des situations familières, ou se rapprochant du réel, et qui ajoutent aux difficultés proprement mathématiques des difficultés dues à la modélisation, ou simplement la difficulté à saisir la réalité qui est présentée, comme en témoigne une anecdote rapportée par J. ADDA ([ 1 ] p 18).

*"Des collègues de Bretagne m'ont raconté qu'ils ont fait l'expérience de présenter deux problèmes "analogues" (au sens de : mêmes valeurs numériques, même structure syntaxique des questions) sur la numération : dans le premier exercice, il s'agissait d'appartements regroupés par immeubles, blocs, HLM, dans l'autre d'artichauts regroupés par cageots, palettes, camions. Ces deux problèmes ont été présentés d'une part à des enfants d'une zone urbaine de "grands ensembles" et d'autre part, dans une école rurale d'une région productrice d'artichauts : dans chaque cas les enfants ont quasiment tous répondu correctement au problème dont les données leur étaient familières et n'ont "rien compris" à celui qui traitait d'objets inconnus".*

Nous nous limiterons donc aux problèmes énoncés dans le langage des mathématiques que les élèves apprennent au cours de leur scolarité. Nous veillerons aussi à ce que la formulation soit assez claire pour que l'on soit sûr que l'étude porte sur une activité de l'esprit liée à la résolution du problème proprement mathématique.

Nous allons préciser encore les types de problèmes mathématiques que nous distinguons, non par leur contenu mais par leur forme et leur situation relativement aux connaissances de l'élève.

- Les problèmes pour lesquels l'élève connaît une solution type, ou pour lesquels un algorithme de résolution a été enseigné.

Par exemple trouver l'inverse, si il existe, de telle matrice à coefficients réels, pour des étudiants de l'université ; ou encore trouver la solution d'une équation du second degré pour des élèves du deuxième cycle du second degré. En terme d'activité intellectuelle, ce type de problème ne renvoie qu'à l'exécution d'un calcul bien déterminé, non à un raisonnement.

- Les problèmes, que POLYA appelle "*à démontrer*", pour lesquels l'élève ne possède pas de modèle, ou d'algorithme de résolution. Il s'agit de confirmer ou de réfuter une affirmation à partir d'un certain nombre d'énoncés que l'on appelle les données du problème. Les énoncés de ces problèmes sont le plus souvent de la forme : montrer que si...alors... — par exemple :

Montrer que si une partie du plan admet deux centres de symétries distincts, alors elle admet une infinité de centres de symétrie.

Parfois les données sont implicites comme dans l'énoncé suivant :

Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

En fait on peut toujours ramener ce type d'énoncé au précédent au sacrifice du style, en dégageant les données ( $E$  est l'ensemble des nombres premiers) et la conclusion ( $E$  est infini).

- Les problèmes, que POLYA appelle "*à résoudre*", pour lesquels l'élève ne connaît pas à l'avance la marche à suivre pour découvrir l'inconnue qui peut être un énoncé ou un objet mathématique. C'est souvent le cas des problèmes de lieu géométrique. Ce type de problème exige de l'élève à la fois l'intuition de la solution et un raisonnement afin de fonder la solution avancée.

Il est bien clair que nous n'utiliserons pas les problèmes du premier type qui réduisent l'activité de pensée à l'exécution d'un calcul, parmi ceux qui requièrent l'élaboration d'un raisonnement nous nous limiterons aux problèmes dits "à démontrer". En effet la démarche intellectuelle liée aux problèmes du troisième type est double : d'une part conjecturer la solution à partir d'indices éventuellement mis en évidence par une activité raisonnante, d'autre part établir le raisonnement qui fonde ce que l'intuition n'a fait que rendre probable. De plus, on peut imaginer qu'au sein de la pensée ces deux activités agissent l'une sur l'autre : le raisonnement infirme la solution pressentie mais, par les défauts mêmes mis en évidence, donne des indices pour une autre voie ; ou l'intuition d'une solution contient en même temps l'intuition de la preuve sans que l'on puisse faire la part de l'une et de l'autre.

Aussi, il nous semble plus prudent, actuellement, de ne se préoccuper que des problèmes à démontrer ne mettant en jeu que la construction d'un raisonnement mathématique, cheminement d'une famille d'énoncés vers un énoncé donné. Ceci ne signifie pas que l'intuition est écartée de l'activité de pensée étudiée, elle est en fait étroitement liée au raisonnement "*sinon comment aurait-on su choisir, à chaque pas, parmi toutes les constructions symboliques permises, la construction pertinente ?*" (BLANCHE [5] p 37)

Pour résumer :

Les problèmes dont nous observerons la résolution, seront la demande clairement formulée à l'élève d'établir la vérité ou la fausseté d'un énoncé mathématique à partir d'un ensemble (éventuellement vide) d'énoncés que nous appellerons données du problème.

### III-2.2. ...Par des personnes parvenues au stade hypothético-déductif...

Dès le début de sa scolarisation tout individu est susceptible de rencontrer des problèmes mathématiques. Cependant, nous ne remonterons pas jusque là, en effet nous savons aujourd'hui [40] que les processus intellectuels mis en jeu pour les résoudre ne sont pas de la même nature chez l'enfant de l'école primaire et chez l'adolescent, et donc a fortiori chez l'adulte. Les mots utilisés par PIAGET pour les désigner sont assez clairs : "*pensée opératoire concrète*" pour l'enfant, "*pensée formelle*" pour l'adolescent. Plus précisément l'enfant du niveau concret correspond à la tranche d'âge de 7-8 à 11-12 ans, la tranche d'âge 12 à 14-15 ans est marquée par la mise en place d'un système de pensée formelle. Ce système se caractérise selon PIAGET par le fait de porter non plus sur des objets mais sur des propositions, d'être combinatoire, de constituer "*un système d'opérations à la seconde puissance*"<sup>(1)</sup> et enfin de subordonner le réel au possible ([40], troisième partie). Nous ne nous attacherons pas au dernier aspect, étant donné la nature des problèmes que nous utiliserons, nous conserverons les autres et dirons en résumé que la pensée formelle se caractérise par la construction d'un système hypothético-déductif sur les propositions. Notre but étant d'étudier des comportements heuristiques lors d'activités mathématiques abstraites, nous nous plaçons au-delà de la genèse de la pensée formelle en prenant nos échantillons dans la population des élèves du deuxième cycle du second degré, ou à l'université.

### III-2.3. ...exprimées par un discours.

La constitution de corpus pour l'étude de comportements heuristiques semble être, actuellement, en butte à une certaine surenchère quant au choix des observables. Ce peut être aussi bien des attitudes que des productions : déplacement de l'oeil au cours de la lecture des données, film des expressions corporelles au cours de la recherche, enregistrement de sons, enfin des brouillons (traces écrites) ou des rédactions.

---

(1) "*Les opérations concrètes sont des opérations à la première puissance en ce sens qu'elles portent directement sur les objets : telle est par exemple la construction des relations entre éléments donnés.... Les opérations interpropositionnelles portent sur des énoncés dont le contenu intrapropositionnel consiste en opérations de classes et de relations*". ([40] p 222-223)

Autrement dit des faits et des discours. A notre avis les informations du premier groupe : les faits, ne peuvent jouer qu'un rôle d'informateurs complémentaires. Par exemple, toute manifestation factuelle (il sursaute) ne pourra prendre de signification qu'accompagnée d'un discours écrit ou oral (il énonce une proposition) et c'est l'étude de ce discours qui primera le fait dans l'analyse de la pensée. Par ailleurs, il nous semble que la prise en compte de l'expression corporelle spontanée risque de conduire à l'analyse de faits plus liés à la personnalité de l'individu qu'à la nature de sa pensée. Pour résumer nous reprendrons l'affirmation de R. BLANCHE ([5] p 220) :

*"Un travail de pensée que l'on croit reconnaître derrière un comportement ne prend la forme d'un raisonnement qu'une fois traduit, tant bien que mal, en un discours, en un langage".*

Alors que pour l'étude de la genèse de la pensée logique, le recours au seul langage est fondamentalement inadéquat, de par la réalité des stades pré-opératoires et opératoires concrets, au-delà il ne devient plus que techniquement imparfait. En effet, la pensée formelle se caractérise (entre autres) par une combinatoire sur les propositions et non sur les objets, il est alors naturel en se plaçant à quelques temps de sa genèse d'aborder son observation par le biais du discours.

L'étude des comportements heuristiques au travers du langage est une étude au travers d'un écran, dont on peut essayer d'estimer l'opacité. En tout état de cause on peut envisager de le neutraliser, mais sûrement pas espérer le supprimer.

#### IV - PRESENTATION D'UN OUTIL POUR L'ANALYSE DE DEMONSTRATIONS NATURELLES

##### IV-1. Logique formelle et raisonnement.

Rappelons, de façon rapide, ce qu'est un système formel :

a) il a pour objet de manipuler des configurations de signes construites suivant des règles bien définies à l'avance.

b) il permet de passer d'une configuration de signes à une autre en utilisant des règles préalablement définies, sans considérer autre chose que des signes.

Ce qui caractérise donc un système formel c'est la manipulation de signes, ou de configurations de signes, en tant qu'objets et non en tant que signifiants. Par opposition on dit d'un système dans lequel on considère, dans une certaine mesure, la signification des symboles, qu'il est naïf. C'est dans ce sens que nous dirons de la logique des élèves qu'elle est naïve. Notons que ceci ne signifie pas qu'elle ne soit pas abstraite ou (et) symbolique. Nous avons dit plus haut que la pensée formelle se caractérise, entre autres, par la constitution d'un système hypothético-déductif sur des propositions, ou plutôt des énoncés verbaux. La logique qui se constitue ainsi est une logique naïve, en effet le passage d'une proposition à une autre ne se fait pas par l'application aveugle d'une règle ; c'est bien le contenu significatif des énoncés qui permet de pronostiquer un énoncé successeur, la règle servant à établir ce que l'intuition a annoncé. La pensée formelle ne recouvre donc pas un système formel, mais un système abstrait permettant la manipulation de symboles ou de groupes de symboles exprimés par un énoncé. Une inférence consistant à passer d'un énoncé ou un groupe d'énoncés à un autre, raisonner c'est articuler les inférences. Exprimé dans un discours, le raisonnement apparaît comme un calcul sur les énoncés, *"et, si ce calcul demeure lié au langage courant dans la pensée des sujets, il peut être exprimé symboliquement grâce à l'algèbre de la logique des propositions"*.<sup>(1)</sup>

La traduction des énoncés verbaux dans le langage du calcul des propositions est un peu schématique, celle dans le langage des prédicats du premier ordre ne prend plus les énoncés comme des atomes, des blocs que l'on ne pénètre pas, mais permet d'en analyser les termes et d'exprimer les expressions *"pour tout"* et *"il existe"* qui sont bien indispensables dès que l'on veut énoncer certaines propriétés d'ensembles dont on ne peut envisager d'énumérer les éléments. Le calcul des prédicats du premier ordre est un système formel logistique, tout énoncé syntaxiquement correct de la langue naturelle peut y être traduit et aussi le raisonnement, en traduisant l'inférence par la déduction logique.

(1) PIAGET [40] p 270

Cette traduction du discours dans le langage du calcul des prédicats n'est pas gratuite, sa première richesse est "son efficacité indubitable lorsqu'il s'agit de contrôler la correction d'un argument quelconque".<sup>(1)</sup> Ceci constitue déjà un outil important pour l'étude des résolutions de problèmes mathématiques, nous allons montrer quel parti on peut en tirer encore et en particulier en quoi le calcul des prédicats du premier ordre peut être considéré comme un modèle.

Dans la suite, selon un usage établi, nous désignerons le calcul des prédicats du premier ordre par CP1.

#### IV-1.1. Le CP1, premier outil de comparaison des raisonnements.

Les raisonnements des élèves, pour des problèmes mathématiques, ont pour véhicule un langage dans lequel on trouve des expressions relevant du formalisme mathématique.

$$\textcircled{1} \quad \forall x (x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0)$$

ou des textes en français :

$\textcircled{2}$  Tout triangle qui a deux angles égaux est isocèle.

$\textcircled{3}$  5271 est un entier naturel.

ou même des expressions mélangeant les deux types d'expression :

$\textcircled{4}$  "Pour toute application  $f$  de  $E$  dans  $F$  nous avons l'équivalence suivante :

$f$  est surjective  $\iff [(\forall b \in F) \text{ l'équation } f(x) = b \text{ a au moins une solution}]$ "<sup>(2)</sup>

Ces énoncés peuvent être traduits dans le langage du calcul des prédicats. Par exemple :

$x^2$   $\textcircled{1'}$  Soit  $P(x)$  le prédicat :  $x$  est un réel, et  $Q(x)$  le prédicat : est positif ou nul, alors l'énoncé se traduit par :  $\forall x [P(x) \supset Q(x)]$

(1) KLEENE. [30] p 69 - (2) QUEYSANNE-REVUZ manuel de 2e CT, tome 1 p 84.

②' Soit  $A(x)$  le prédicat :  $x$  a deux angles égaux, et  $I(x)$  le prédicat :  $x$  est isocèle, alors l'énoncé se traduit par :  $\forall x [A(x) \supset I(x)]$

③' Soit  $N(x)$  le prédicat :  $x$  est un entier naturel, alors l'énoncé se traduit par :  $N(5271)$

④' Soient :  $M(x)$  le prédicat :  $x$  est une application de  $E$  dans  $F$ ,  
 $S(x)$  le prédicat :  $x$  est surjective,  
 $E(x,y)$  le prédicat d'égalité :  $x = y$ ,  
 $F(x)$  le prédicat :  $x \in F$ .

alors l'énoncé cité en exemple sera traduit par :

$$\cdot \forall f (M(f) \supset (S(f) \sim \forall b (F(b) \supset \exists x E(f(x), b))))$$

Certes comme l'exemple 4-4' le montre, dans cette traduction nous perdons la compréhension immédiate de l'énoncé d'origine et cela par la nature même du système formel. Il faut tenir à jour un petit dictionnaire de version pour pouvoir à nouveau interpréter le prédicat. D'ailleurs, pour faciliter ce retour au langage source on s'autorise d'ordinaire à ne pas désigner certains prédicats par leur nom, mais à les exprimer par leur traduction dans un strict formalisme mathématique. (i.e. en refusant les recours à la langue naturelle).

Par exemple  $E(x,y)$  devient  $x = y$ ,  $F(b)$  devient  $b \in F$ , et  $Q(x)$  sera  $x^2 \geq 0$ . Ainsi le dernier exemple, si on note  $F^E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ , devient :

$$\textcircled{4}'' \quad \forall f (f \in F^E \supset (S(f) \sim \forall b (b \in F \supset \exists x f(x) = b)))$$

Ceci est une entorse à la définition d'un système formel, cependant elle est considérée simplement comme un abus nécessaire par les logiciens eux-mêmes.

Les élèves, ainsi que la plupart des mathématiciens professionnels, expriment leurs raisonnements dans un langage où se mêlent le formalisme mathématique et la langue courante.



Les modalités d'apparition d'un type d'expression ou de l'autre, de leur mélange, ne sont fixées par aucune règle universelle. Bien qu'il s'agisse de ce que l'on appelle habituellement le style, les variations d'un élève à l'autre peuvent être telles que nous considérerons qu'ils n'utilisent pas le même langage ; et plus : qu'un même élève est susceptible de changer de langage, pour un même raisonnement, d'un discours à l'autre. La condition première pour comparer deux raisonnements est de pouvoir discerner si deux énoncés sont en fait synonymes. Pour cela nous utilisons le langage des prédicats comme moyen terme, deux énoncés seront dits *synonymes* s'ils ont la même traduction dans le langage du CP1. Ainsi ① est synonyme de l'énoncé : le carré de tout nombre réel est positif ou nul, qui a aussi pour traduction dans le CP1 :  $\forall x [P(x) \supset Q(x)]$ .

Il reste un problème que nous n'avons pas soulevé ici et que nous reprendrons plus loin (Partie B), c'est celui du passage du langage des élèves au langage du CP1.

#### IV-1.2. Le CP1, modèle pour l'étude des raisonnements.

Un modèle au sens mathématique est une représentation de la réalité à l'intérieur de laquelle on peut exécuter des calculs, faire des prévisions. L'adéquation du modèle à la réalité qu'il représente se juge à la pertinence des prévisions qu'il permet.

En ce sens le CP1 constitue un modèle de la pensée formelle. Certes, et parce qu'il n'est qu'une représentation, c'est une réduction de la réalité. On perd en la représentant ainsi, ce qui fait de la pensée formelle une pensée intelligente : la possibilité de comprendre, de saisir globalement et éventuellement de façon instantanée. Cependant il n'est pas possible de l'atteindre dans sa stricte réalité, il faut se résoudre à un certain réductionnisme sans s'y abandonner. En effet, par sa nature même, puisqu'il n'est pas la réalité, un modèle n'est pas définitif. Nous n'attendons donc pas du CP1 qu'il soit la pensée formelle, mais qu'il soit adéquat à la représenter.

De même que tout raisonnement, exprimé dans un discours, peut être traduit par une déduction du CP1, toute déduction du CP1 peut être racontée dans un discours qui peut être considéré comme l'expression d'un raisonnement. C'est en cela que le CP1 est un modèle adéquat, et non par le fait que le discours ainsi construit soit l'expression d'un raisonnement effectivement dû à un individu existant.

A propos de l'ensemble des 16 opérations binaires élémentaires, PIAGET se pose la question de savoir si le sujet (pour nous : l'élève) a conscience de l'existence du système des opérations propositionnelles en tant que système. Et il répond :

*" Sur le terrain de cette logique en actes qu'est celle de l'adolescent et qui n'a encore rien à voir avec la logique formulée du logicien, nous entendrons donc par conscience du système la mise en connexions voulue et recherchée pour elle-même des diverses opérations possibles de l'ensemble : en ce cas, il semble clair que, après une phase de construction progressive et encore peu ordonnée, durant le sous-stade III A, les sujets du niveau III B ont conscience du système..."<sup>(1)</sup>*

et il ajoute en note : *On peut naturellement avoir conscience d'un système opératoire sans savoir le traduire en symboles algébriques..."*

Rappelons que nous nous situons au-delà de la genèse de la pensée formelle, dans le cadre des mathématiques dont l'enseignement contient un peu de logique (en particulier l'introduction des quantificateurs et leur usage). Nous sommes alors fondés à affirmer que si une déduction logique n'est pas la traduction d'un raisonnement effectivement dû à un individu existant, elle correspond cependant à un raisonnement qu'il aurait pu faire. Cette éventualité recouvre deux réalités bien différentes :

- l'élève a eu l'intuition de ce raisonnement ou même l'a fait, mais il ne l'a pas exprimé ; nous dirons alors de ce raisonnement qu'il est *matériellement possible*<sup>(2)</sup> puisque l'élève aurait pu effectivement l'énoncer.

- l'élève n'a pas eu conscience de pouvoir faire ce raisonnement, nous dirons alors qu'il est *structurellement possible*.

(1) PIAGET [40] p 268.

(2) Nous empruntons ce vocabulaire à Jean PIAGET, avec la même signification. in [40] p 228.

Nous arrivons ici à la qualité majeure du calcul des prédicats du premier ordre relativement à l'étude des comportements heuristiques. La démonstration automatique, branche récente à la fois des mathématiques et de l'informatique, nous fournit les techniques pour exhiber tout ou une partie des déductions possibles à partir d'une famille de prédicats. Elle est, de ce fait, un outil essentiel pour élaborer tout ou une partie des raisonnements structurellement possibles pour un problème donné.

## IV-2. Graphes et raisonnements

### IV-2.1. Les graphes, images de la structure d'un raisonnement.

Le raisonnement exprimé par un discours apparaît comme une file d'énoncés, pour cela, et parce que l'on veut éviter des lourdeurs de style ou d'écriture (il faudrait trouver un moyen de conserver à chaque étape un résultat susceptible d'être encore utilisé), un énoncé n'est pas en général le conséquent de celui (ceux) qui le précède(nt) immédiatement dans le discours. Ou encore, le prédécesseur dans le temps (discours oral) ou dans l'espace (discours écrit) d'un énoncé n'est pas en général son antécédent au regard de la logique. Prenons par exemple la démonstration du théorème d'algèbre suivant :

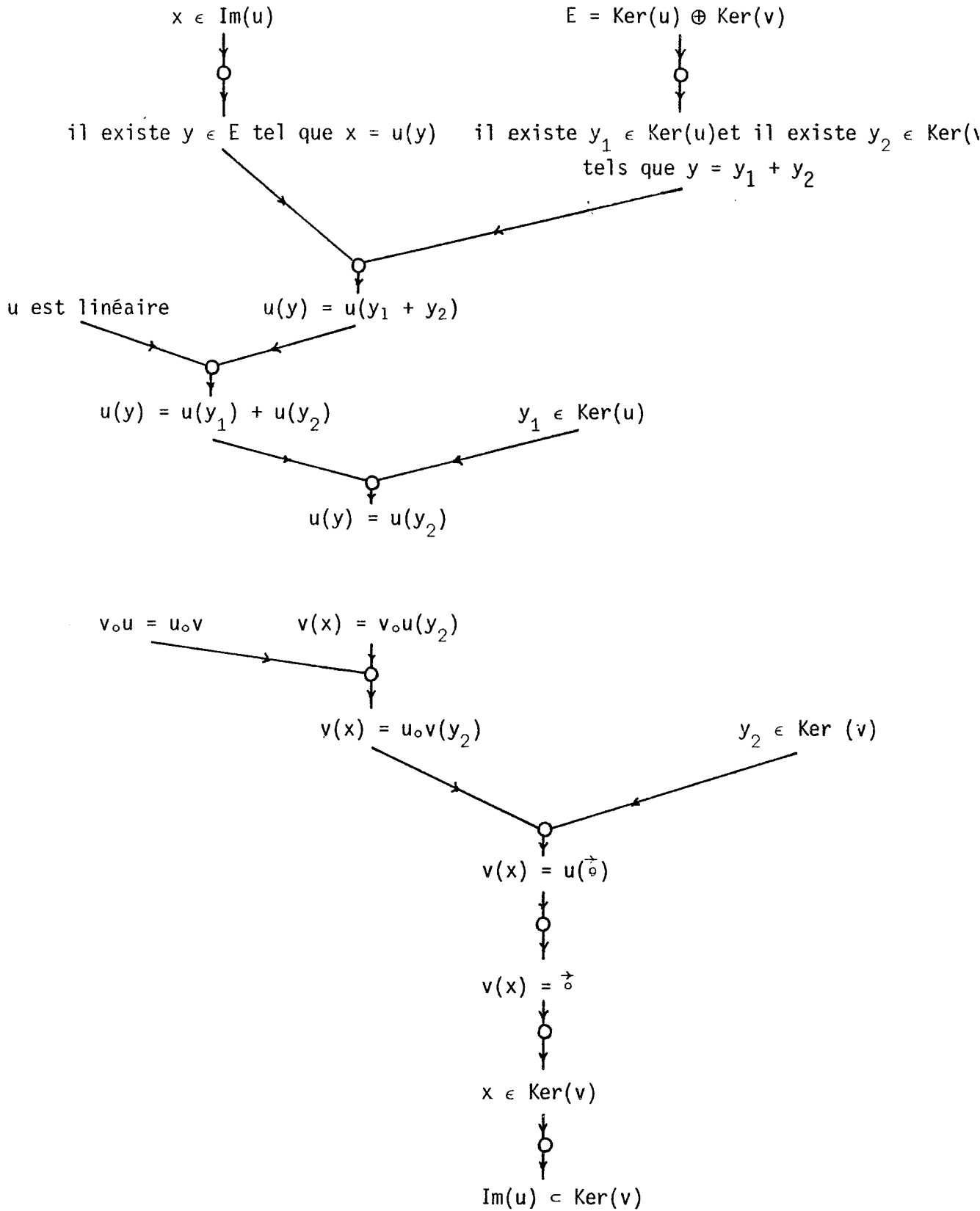
Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $u \circ v = v \circ u$  et  $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Ker}(u)$  alors  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$ .

Démonstration :

Soit un élément quelconque  $x$  de  $\text{Im}(u)$  ; il existe  $y$  tel que  $x = u(y)$ .  
 $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Ker}(u)$  donc il existe  $y_1 \in \text{Ker}(u)$  et il existe  $y_2 \in \text{Ker}(v)$  tels que  $y = y_1 + y_2$ . Alors  $u(y) = u(y_1 + y_2)$ , et  $u$  est linéaire donc  $u(y) = u(y_1) + u(y_2)$  et  $u(y) = u(y_2)$  puisque  $y_1 \in \text{Ker}(u)$ . On a enfin  $v(x) = v \circ u(y_2)$  soit  $v(x) = u \circ v(y_2)$  par hypothèse et  $y_2 \in \text{Ker}(v)$  donc  $v(x) = u(\vec{0})$  et  $v(x) = \vec{0}$ .  
 Ou encore  $x \in \text{Ker}(v)$  ; et :  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$ .

Ce texte, bien qu'il convienne à tout lecteur mathématicien, masque par son caractère littéraire la structure profonde de la démonstration, c'est-à-dire l'articulation des énoncés.

Cette structure peut être mise en évidence en représentant la démonstration par un graphe orienté de noeuds et d'étoiles<sup>(1)</sup>, dont les noeuds correspondront aux énoncés et les étoiles aux inférences; ainsi pour l'exemple précédent on obtient le graphe suivant :



(1) Voir J. KUNTZMANN [31] p 59

D'emblée le graphe paraît beaucoup plus "parlant" que le discours relativement à la structure du raisonnement.

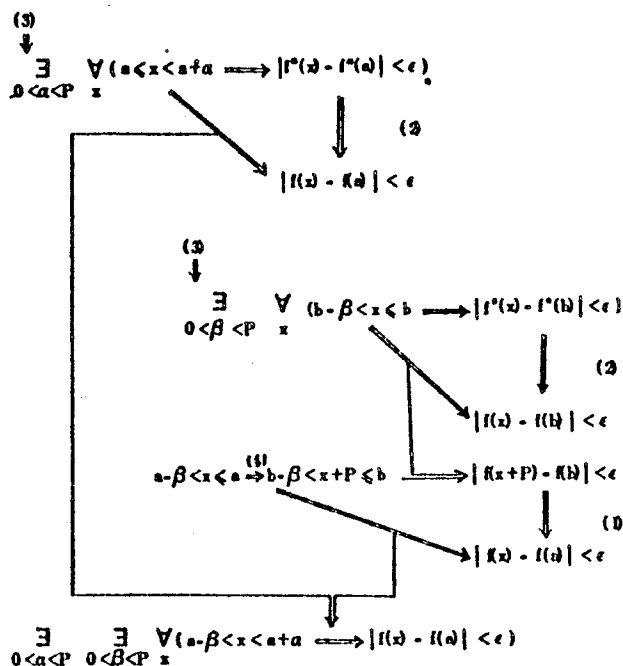
Nous n'avons représenté que les inférences explicitement indiquées dans la rédaction et nous constatons que le graphe est constitué de deux morceaux bien distincts. Ceci n'est pas mis en évidence au niveau du discours, en fait certaines de ces liaisons sont implicites et nous verrons plus loin (Partie B) comment nous pouvons parfois les prendre en compte. C'est donc par cette représentation que nous aborderons l'étude des raisonnements.

IV-2.2. Utilisations actuelles des graphes de démonstration

Dans l'enseignement des mathématiques, les graphes de démonstration ne sont pas très utilisés, du moins en France, cependant on les voit apparaître dans quelques ouvrages. C'est en fait une conséquence du développement de la présence de l'informatique, en particulier dans l'univers scolaire.

Dans la pratique pédagogique la fonction du graphe de démonstration est celle d'un langage, qui permet en particulier une visualisation de la structure de la démonstration. Autrement dit le graphe est un mode d'écriture du raisonnement. Ce langage n'est pas très fixé et on peut noter diverses tentatives.

Dans l'exemple polonais que nous donne S. TURNAU [55], l'écriture se rapproche assez de celle que nous avons adoptée plus haut, en voici un exemple où il s'agit de montrer qu'une fonction  $f$  est continue en un point  $a$  sachant que: (1)  $P$  est une période de  $f$ , (2)  $f^*$  est la restriction de  $f$  à  $[a, a + P]$ , (3)  $f$  est continue sur  $[a, a + P]$ , (4)  $a + P = b$ .

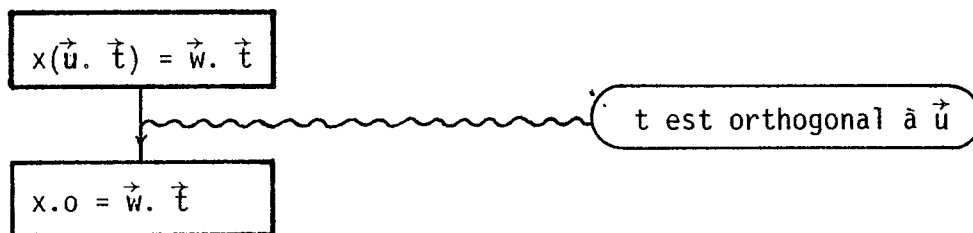


En France ce sont plutôt des *Logigrammes*, schémas de boîtes et de flèches, inspirés du langage des organigrammes développé par l'informatique. Le graphisme, par l'utilisation de boîtes d'aspects différents, est plus sophistiqué.

Dans l'exemple suivant, qui représente l'étude dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  du système d'équations à coefficients réels :

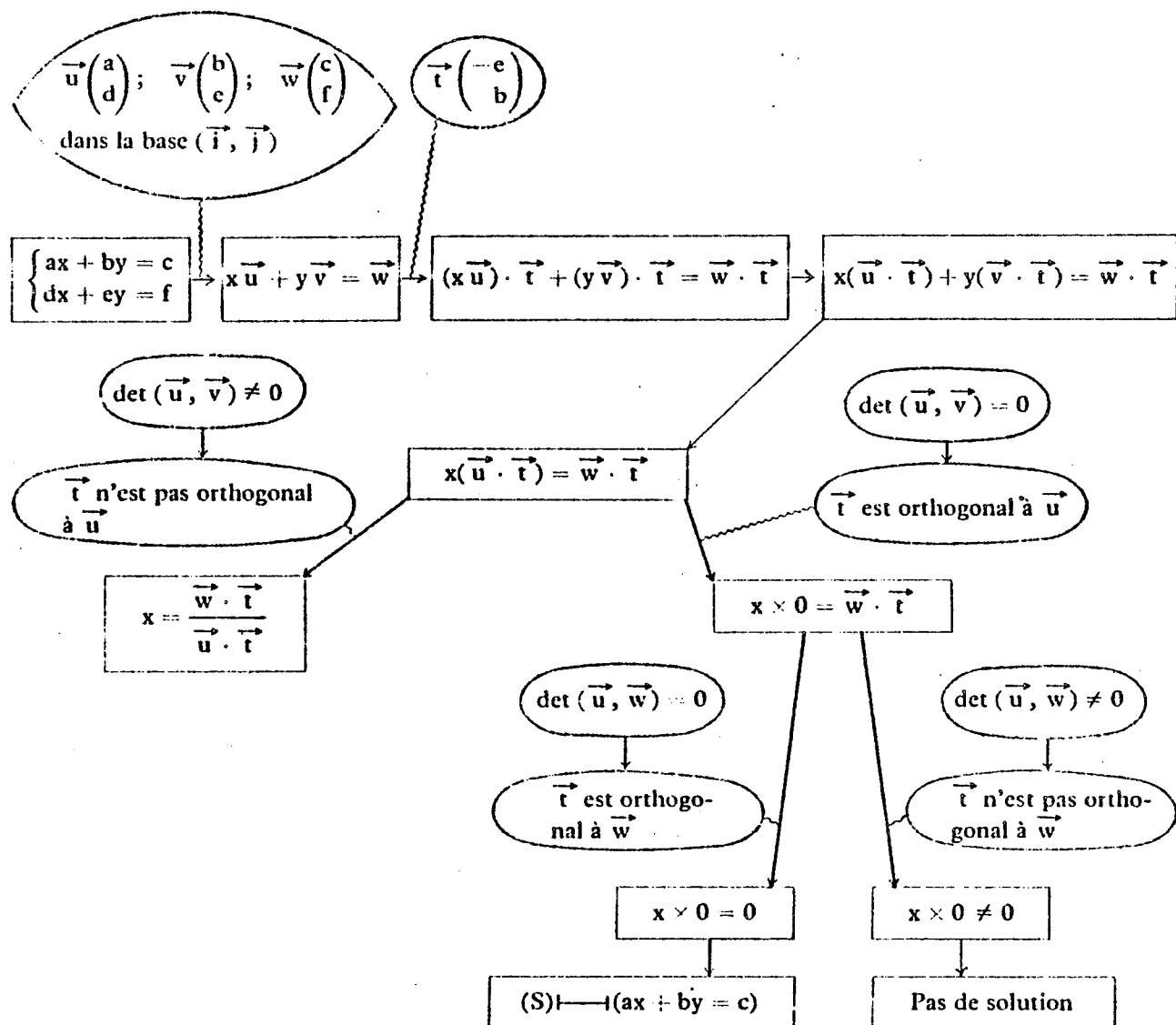
$$S \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

des boîtes de formes différentes et même des arcs de dessins différents sont utilisés pour distinguer les hypothèses des énoncés fabriqués au cours du calcul proprement dit. Par exemple :



signifie :

$x \cdot o = \vec{w} \cdot \vec{t}$  est déduit de  $x(\vec{u} \cdot \vec{t}) = \vec{w} \cdot \vec{t}$  sous l'hypothèse :  $\vec{t}$  est orthogonal à  $\vec{u}$ .



(Galion 3e [e] fiche 12')

Ce type de représentation ne permet pas seulement d'exposer une démonstration, mais aussi de construire des exercices d'un type nouveau ; par exemple : compléter le contenu des boîtes, ou découvrir les boîtes manquantes, ou justifier des inférences, comme dans l'exemple suivant :

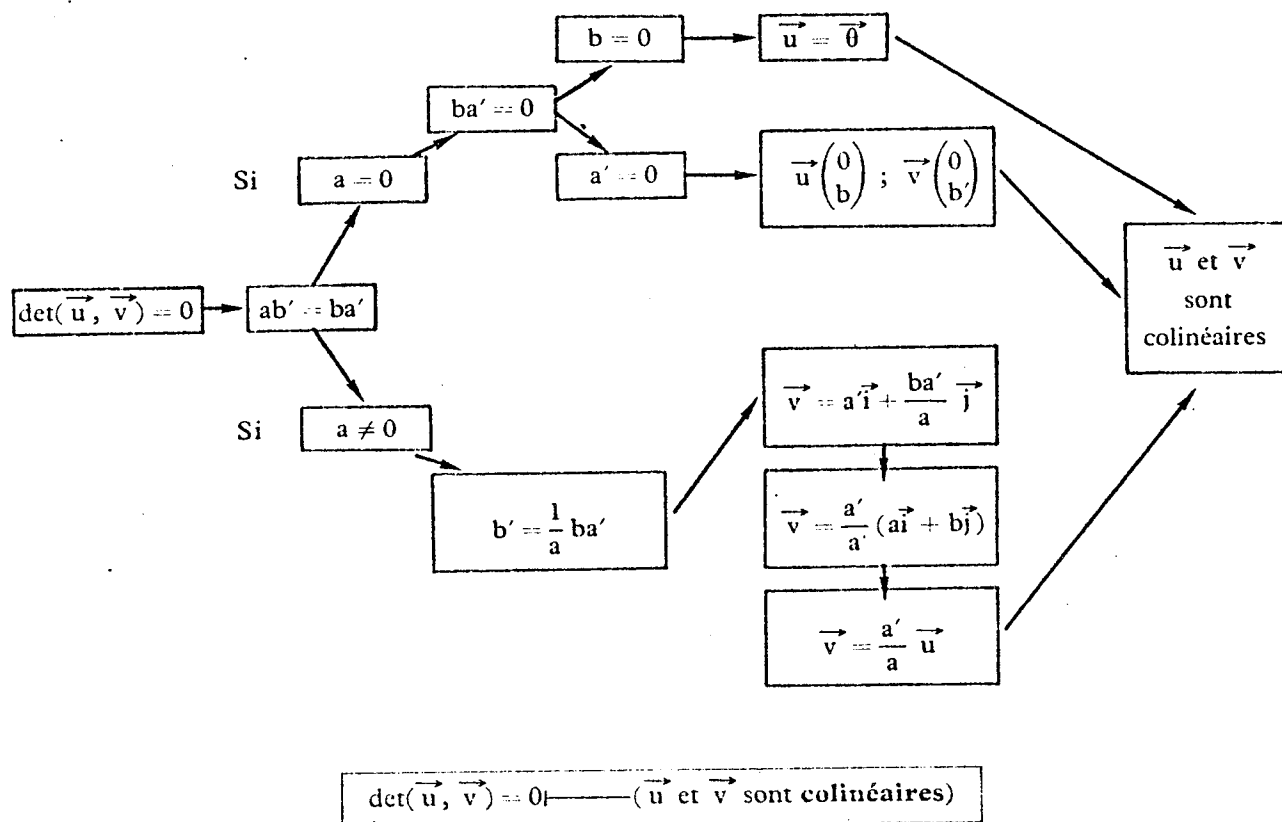
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs d'un espace vectoriel  $E$  de dimension 2, rapporté à la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ,  $\vec{u}$  a pour composantes  $(a, b)$  et  $\vec{v}$  a pour composantes  $(a', b')$ .

Il s'agit d'étudier la démonstration de :

si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Hypothèse:  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Etudie l'organigramme et justifie chaque stade:



(Galion 3e [e] fiche 16)

Parmi les tentatives dans cette direction, nous notons particulièrement les propositions d'enseignants de mathématiques (I.R.E.M. de Toulouse [26]) pour fixer ce type de représentation. Il s'agit en fait d'utiliser des graphes de noeuds et d'étoiles, les noeuds sont marqués par des énoncés mathématiques et les étoiles représentent les inférences.

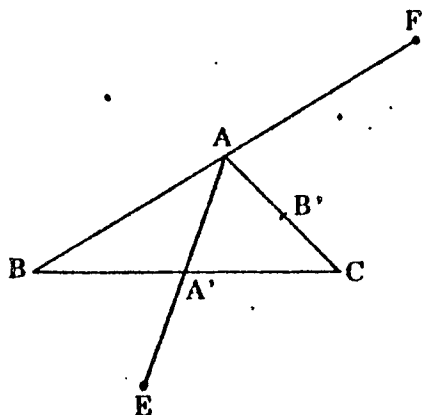
Au niveau du dessin les noeuds sont des boîtes de formes différentes suivant la catégorie de l'énoncé associé : un cadre double pour les hypothèses, un cercle pour les théorèmes utilisés, un cadre simple pour les énoncés produits par le raisonnement. Exemple :

Le graphe suivant donne une solution du problème de géométrie :

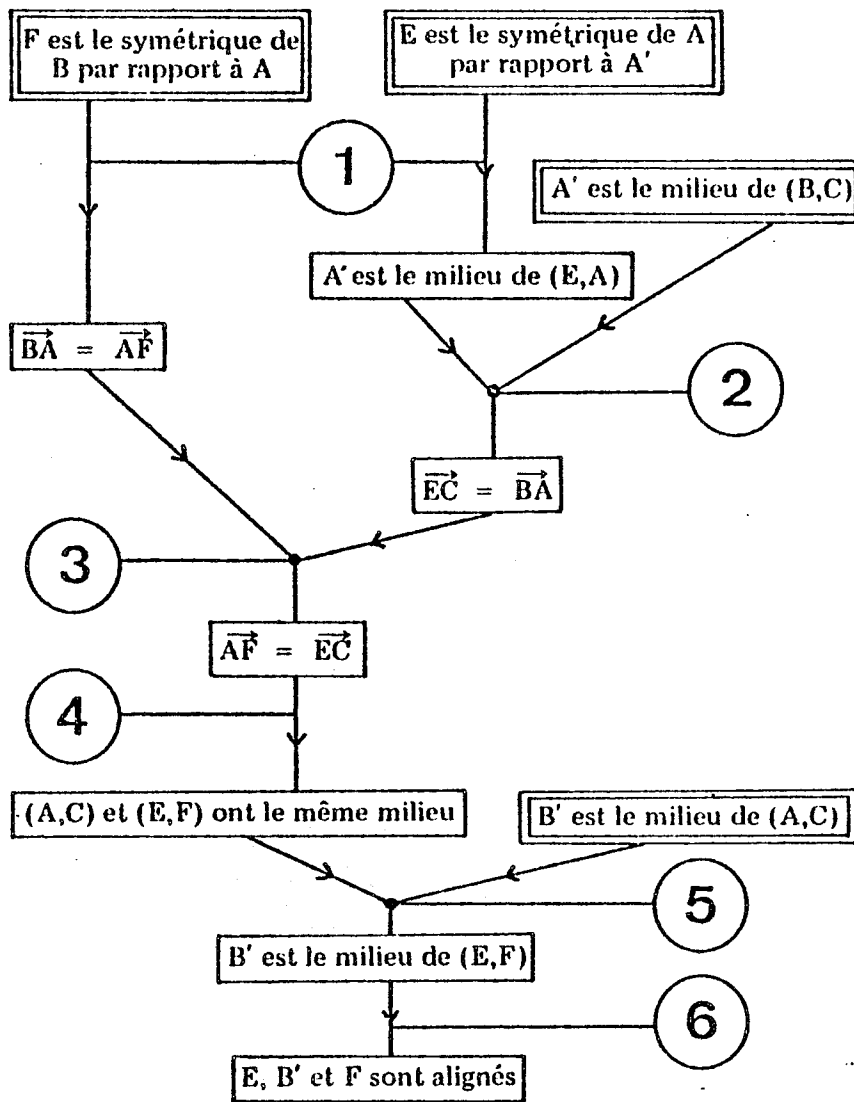
"Soit un triangle ABC ; soient A' le milieu de (B,C) et B' le milieu de (C,A) ; soient E le symétrique de A par rapport à A' et F le symétrique de B par rapport à A.

Démontrer que E, B' et F sont alignés".





- ① : Définition de la symétrie centrale ;
- ② et ④ : "XYZT est un parallélogramme" est synonyme de " $\vec{XY} = \vec{TZ}$ " et de " (X,Z) et (T,Y) ont le même milieu" ;
- ③ et ⑤ : transitivité de l'égalité ;
- ⑥ Deux points et leur milieu sont sur une même droite.



Ces utilisations des graphes de démonstration ont pour objectif de visualiser un raisonnement et même, pour le dernier exemple, de fournir un langage pour l'exprimer.

La seule utilisation de ces graphes pour appréhender les mécanismes sous-jacents au raisonnement, nous l'avons trouvée chez POLYA, dans [48] chapitre 7 : "Représentation géométrique du processus de résolution". Nous reproduisons ci-dessous cette représentation à propos du problème :

"Trouver le volume  $V$  d'un tronc de pyramide droite de base carrée. On donne la hauteur  $h$  du tronc, la longueur  $a$  du côté de la base supérieure, et la longueur  $b$  du côté de la base inférieure".

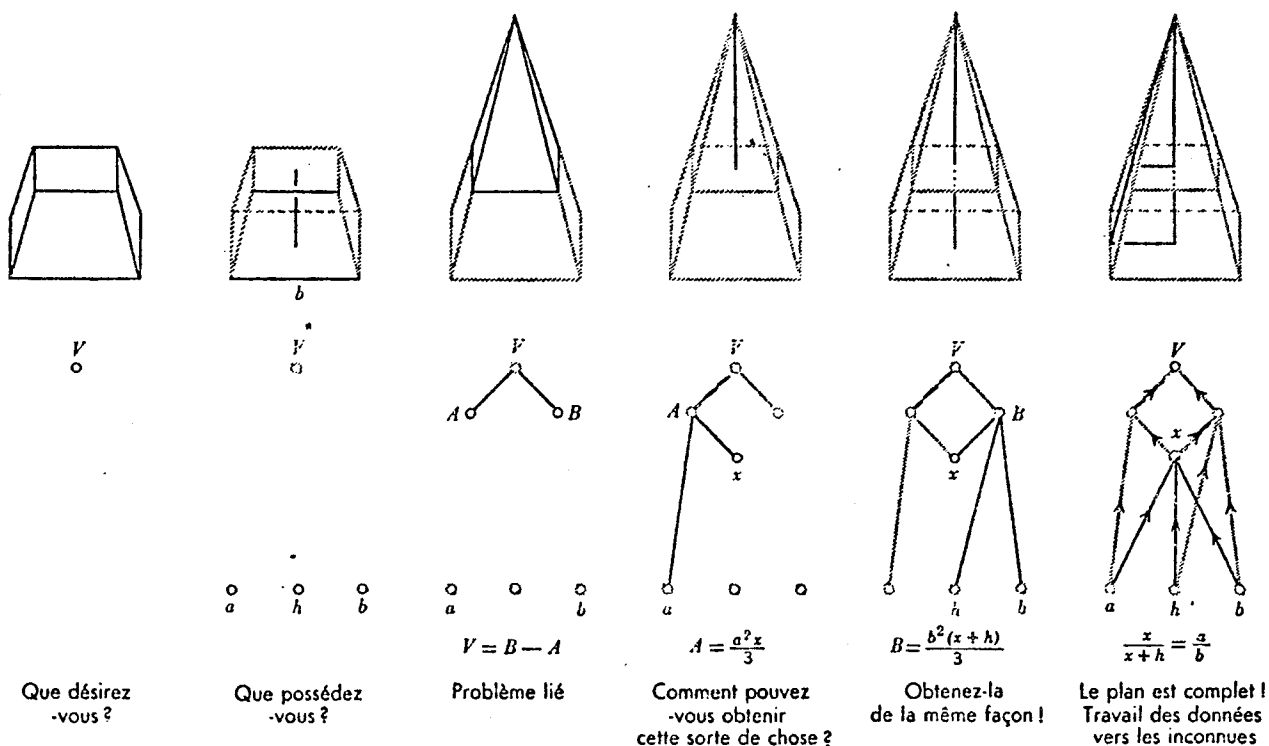
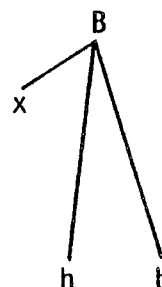


FIG. 7.8. — Progression simultanée à quatre niveaux.

En fait le graphe est utilisé comme un dessin, les images successives illustrent le processus que POLYA conseille pour résoudre ce type de problème : trouver un moyen pour se rapprocher de l'inconnue. Lorsque l'on parvient à la dernière image on ne s'intéresse plus au graphe obtenu puisque le problème est résolu. Mais la différence la plus fondamentale avec les exemples précédents, et notre approche, c'est qu'il ne s'agit pas d'un graphe de démonstration.

En effet les arcs ne marquent pas des inférences mais tout autre chose : les sommets correspondent à des variables et la situation ci-contre signifie que l'on sait exprimer B à partir de x, h et b.



#### IV-2.3. Les graphes, outil pour l'analyse des raisonnements.

Nous nous proposons d'utiliser les graphes de démonstration non seulement comme un langage pour exprimer un raisonnement, mais comme un outil pour en étudier les structures, ou comparer les raisonnements entre eux.

La première idée pour représenter une démonstration, est de lui associer un graphe dont les sommets sont les énoncés qu'elle met en jeu. En fait ceci est un peu rapide car, parmi ces énoncés, il en est qui peuvent avoir des statuts différents à des endroits différents du discours ; par exemple dans la démonstration de  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  où  $f$  est une application et,  $A$  et  $B$  deux ensembles : l'énoncé  $x \in f^{-1}(A \cap B)$  est une hypothèse dans la démonstration de  $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  par contre il est obtenu en dernière inférence dans celle de  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$ . Pour rendre compte de cette différence importante et la conserver au niveau de la représentation, nous repérons les hypothèses en donnant à chacune un nom distinct. Ainsi un même énoncé étant posé deux fois comme hypothèse correspond à deux noms différents.

Le graphe de noeuds et d'étoiles associé à une démonstration a donc pour noeuds les énoncés et les noms d'hypothèses qu'elle met en jeu.

Les étoiles représentent les inférences. Une branche d'une étoile est appelée *entrée* si elle est orientée vers l'intérieur de l'étoile, et *sortie* dans le cas contraire. Un énoncé, ou nom d'hypothèse,  $E$  et un énoncé  $F$  seront respectivement attachés à une entrée et une sortie d'une même étoile si, dans la démonstration,  $F$  est explicitement un conséquent direct d'une famille d'énoncés dans laquelle figure  $E$ .

Il nous sera utile par la suite d'avoir une définition plus formelle de la représentation d'une démonstration. En particulier nous préférons considérer les énoncés comme les étiquettes des noeuds d'un graphe plutôt que comme les noeuds eux-mêmes.

Nous notons  $(X,A)$  le graphe d'ensemble de noeuds (ou de sommets)  $X$ , et d'ensemble d'étoiles (ou d'arcs)  $A$ . Soit  $\mathcal{D}$  le discours exprimant un certain raisonnement, c'est une file d'énoncés. Nous notons  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  l'ensemble des énoncés de  $\mathcal{D}$  qui ne sont pas des hypothèses, et des noms d'hypothèses.

Le graphe de noeuds et d'étoiles  $(X,A)$  représente  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

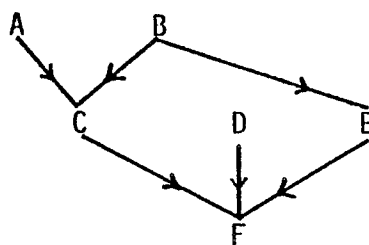
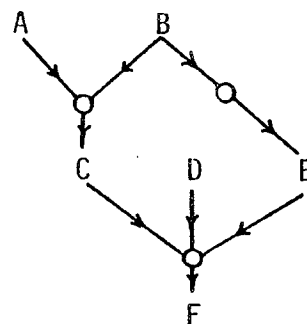
- i) il existe une bijection  $\phi$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  sur  $X$
- ii) il existe une étoile reliée en entrée aux noeuds  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et en sortie aux noeuds  $\{y_1, \dots, y_p\}$  si et seulement si le discours  $\mathcal{D}$  explicite que la famille  $\{\phi^{-1}(x_1), \dots, \phi^{-1}(x_n)\}$  a pour conséquent direct la famille  $\{\phi^{-1}(y_1), \dots, \phi^{-1}(y_p)\}$

On vérifie aisément que le graphe qui satisfait la définition précédente a les mêmes propriétés topologiques que le graphe  $(X',A')$  d'ensemble de sommets  $X'$ , et d'ensemble d'arcs  $A'$ , vérifiant les deux conditions suivantes :

- i) il existe une bijection  $\phi$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  sur  $X'$
- ii) il existe un arc d'un sommet  $x$  vers un sommet  $y$  si et seulement si le discours  $\mathcal{D}$  exprime que  $\phi^{-1}(y)$  est un conséquent direct d'une famille d'énoncés qui contient  $\phi^{-1}(x)$ .

Ainsi lorsque l'on ne s'intéressera qu'aux propriétés topologiques de la représentation, on retiendra cette seconde définition qui est plus aisée à manipuler.

Pour illustrer ceci, si le graphe de noeuds et d'étoiles que nous représentons ci-contre, est celui d'une certaine démonstration, pour étudier ses propriétés topologiques nous lui substituons le graphe au sens ordinaire représenté par le dessin ci-dessous :



C'est ce que nous ferons en particulier pour la partie A de ce travail.

Notre premier objectif est d'utiliser l'objet mathématique qu'est le graphe pour caractériser des structures du raisonnement.

Une première réalisation est illustrée dans le paragraphe I-3 de la partie C, nous montrons les liens qu'il peut y avoir entre certaines propriétés topologiques du graphe de démonstration et certaines structures du raisonnement qu'il représente.

Notre second objectif est de permettre une comparaison des démonstrations. Cet objectif est partiellement atteint dès que nous savons associer un graphe au discours exprimant un raisonnement ; en effet chaque discours est associé à un seul graphe, mais un même graphe peut être la représentation de plusieurs discours différents, on a ainsi un premier élément de comparaison. Des discours qui ne sont pas associés à un même graphe de représentation ne sont pas nécessairement radicalement différents. Il est utile de pouvoir apprécier, si possible quantifier la proximité de deux démonstrations. Cela permet en particulier d'envisager une classification des démonstrations proposées par des individus. Les paragraphes I-4 et III-2 de la partie C sont des tentatives dans ce sens.

LES GRANDES SECTIONS DE

CET EXPOSE.

Notre étude actuelle porte sur des documents écrits, le plan adopté pour exposer ce travail est le suivant :

Partie A : Graphe d'une démonstration formelle.

Nous établissons essentiellement un résultat sur le type du graphe que l'on peut associer à une démonstration formelle.

Partie B : De la rédaction au graphe de démonstration.

Nous tentons de fixer un protocole pour traduire le discours exprimant un raisonnement par écrit, par un graphe.

Partie C : Application à l'étude des résolutions d'un problème d'algèbre.

Il s'agit, en l'illustrant par un exemple, de montrer les possibilités de l'outil que nous proposons.

Remarque : Dans toute la suite, pour simplifier les figures nous représentons l'étoile à deux branches  $\rightarrow \circ \rightarrow$  par un arc simple  $\rightarrow$



**PARTIE A**

**GRAPHE D'UNE**

**DEMONSTRATION FORMELLE**





## I - GRAPHE DE DEMONSTRATION

Il existe plusieurs présentations possibles de la logique formelle (CHURCH [12], KLEENE [30], etc...) elles diffèrent entre elles par le choix des axiomes et (ou) des règles de dérivation ; toutes sont définies sur le langage des prédicats du premier ordre.

Il faut donc faire un choix, nous suivrons S. C. KLEENE à partir du livre "LOGIQUE MATHEMATIQUE" [30], et adopterons en général les notations de cet ouvrage. Avant de définir la notion de démonstration relativement à une théorie mathématique, nous allons préciser ce que nous entendons par S-axiome et rappeler les règles de déduction dérivées du système de KLEENE; Pour l'utilisation que nous désirons faire d'un système formel nous avons intérêt à considérer un ensemble de règles de déduction plus riche que celui réduit au seul modus-ponens.

### I-1. S-axiome

Parmi les énoncés présentés dans le cours de mathématique nous pouvons distinguer essentiellement : les axiomes de la théorie développée et les théorèmes qui en sont déduits. Il y a de plus les définitions. La distinction entre axiome et théorème n'est pas définitive ; tel donné comme axiome dans une présentation (axiome de thalès en classe de 4e, 1971) sera obtenu comme théorème dans une autre présentation (théorème de thalès en classe de 2e, 1958). De même un énoncé peut être considéré comme une définition, et dans un cadre différent comme un théorème. Considérons les énoncés :

$E_1$  : Une partie  $H$  de  $G$  est un sous groupe du groupe  $(G, .)$  si et seulement si c'est une partie non vide de  $G$  qui a une structure de groupe pour la loi induite par  $(G, .)$ .

$E_2$  : Une partie  $H$  de  $G$  est un sous groupe du groupe  $(G, .)$  si et seulement si c'est une partie non vide de  $G$  et si pour tout  $x \in H$  et pour tout  $y \in H$  :  $xy^{-1} \in H$ .

Suivant les présentations on peut choisir de prendre  $E_1$  pour définition d'un sous-groupe et de déduire  $E_2$ , qui sera donc un théorème ; ou de prendre  $E_2$  pour définition et déduire  $E_1$ .

Aussi nous appellerons indifféremment *S-axiomes* les axiomes, théorèmes ou définitions, rencontrés dans une présentation d'une théorie mathématique donnée.

## I-2. Règles de déduction

La liste de règles dérivées que nous allons donner est établie à partir de celle proposée par S. C. KLEENE. ([30] p 52)

Nous étendrons certaines d'entre elles à des familles finies de formules, les justifications sont immédiates dans le système logique de KLEENE, nous ne les donnerons pas ici. Par ailleurs nous ne retiendrons pas les règles dites de déduction subsidiaire, nous pensons qu'elles ont un caractère différent et qu'elles sont sous-jacentes à des procédures de preuve. Nous les retrouverons plus loin (§ II).  $r$  étant une famille finie de formules et  $C$  une formule nous noterons  $\frac{r}{C}$  la règle, si elle existe, qui permet de déduire  $C$  de  $r$ .

Nous nommerons  $*e$  (respectivement :  $*i$ ) la règle d'élimination (respectivement : introduction) du symbole logique  $*$ .

$A, B, A_1, \dots, A_n$  désignent des formules du langage des prédicats :

$$*e \quad \frac{A, A \supset B}{B} \quad (\text{modu ponens})$$

$$*i \quad \frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{A_1 \& A_2 \dots \& A_n}$$

$*e$  Quelle que soit la partie non vide  $\{i_1, \dots, i_k\}$  de  $\{1, \dots, n\}$  :

$$\frac{A_1 \& A_2 \dots \& A_n}{A_{i_1} \& A_{i_2} \dots \& A_{i_k}}$$

$$\text{Si } k = 1 \text{ on a la règle : } \frac{A_1 \& A_2 \dots \& A_n}{A_{i_1}}$$

$$\forall i \quad \frac{A}{A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n} \quad \text{et } A \in \{A_1, \dots, A_n\}$$

$$\neg e \quad \frac{\neg \neg A}{A} \quad \frac{A, \neg A}{B}$$

$$\sim i \quad \frac{A \supset B, B \supset A}{A \sim B}$$

$$\sim e \quad \frac{A \sim B}{A \supset B} \quad \frac{A \sim B}{B \supset A}$$

Nous ajouterons la règle suivante, qui ne figure pas parmi les règles dérivées proposées par KLEENE mais qui est d'un usage courant et sera utile à la description des démonstrations :

$$\text{règle du syllogisme : } \frac{A_1 \supset A_2, A_2 \supset A_3}{A_1 \supset A_3}$$

Et enfin les règles dérivées, propres au calcul des prédicats, qui portent sur l'introduction et l'élimination de quantificateurs ([30] p 125)

$x$  et  $r$  désignant deux variables quelconques non nécessairement distinctes,  $A(r)$  est le résultat de la substitution de  $r$  aux occurrences libres de  $x$  dans  $A(x)$ .

$\forall e$   $r$  étant libre pour  $x$  dans  $A(x)$  :

$$\frac{\forall x A(x)}{A(r)}$$

$\exists i$   $r$  étant libre pour  $x$  dans  $A(x)$  :

$$\frac{A(r)}{\exists x A(x)}$$

### I-3. Démonstration relativement à une théorie mathématique

Soit  $\mathcal{C}$  une théorie mathématique,  $\mathcal{A}$  un ensemble éventuellement vide d'énoncés que nous appellerons données et  $\mathcal{C}$  un énoncé. Nous appellerons *démonstration* de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$  relativement à  $\mathcal{C}$ , une file d'énoncés  $A_1 \dots A_n$  telle que  $A_n$  soit identique à  $\mathcal{C}$  et, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_i$  satisfait l'une exactement des propositions suivantes :

- $A_i$  est un S-axiome de  $\mathcal{C}$ .
- $A_i$  est un élément de  $\mathcal{A}$ .
- Il existe une partie  $\{i_1, \dots, i_k\}$  de  $\{1, \dots, n\}$  vérifiant pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$  :  $i_j < i$ , et,  $A_i$  est déduit de  $A_{i_1} \dots A_{i_k}$  à l'aide d'une règle de déduction.

### I-4. Commentaire sur cette définition

Un énoncé  $A_i$  ne peut être à la fois une donnée et un axiome, et si  $A_i$  est obtenu grâce à l'application d'une règle de déduction ce ne peut être ni une donnée ni un axiome. Autrement dit l'ensemble des données ne doit pas être trop riche, ou redondant.

### I-5. Remarque sur le vocabulaire

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on parlera simplement de la démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$ .

Les logiciens ont l'habitude de réserver la dénomination "*démonstration*" pour le cas où  $\mathcal{A}$  est vide, et "*déduction*" dans le cas contraire. N'ayant pas besoin de distinguer clairement ces deux cas nous ne retenons qu'une seule de ces deux appellations et sacrifiant à l'usage banal nous avons choisi la première.

## I-6. Démonstration minimale

### I-6.1. Définitions.

Soit  $\mathcal{D} : A_1 \dots A_n$  une démonstration d'un énoncé  $\mathcal{C}$  à partir d'un ensemble  $\mathcal{A}$  de données.

i) nous dirons que l'énoncé  $A_i$  est *antécédent* de l'énoncé  $A_j$  si  $i < j$  et l'une des propositions suivantes est vérifiée :

-  $A_j$  est déduite de  $A_i$  par application d'une des règles de déduction.

- Il existe un sous-ensemble  $\{i_1, \dots, i_k\}$  de  $\{1, \dots, n\}$  tel que pour tout  $p \in \{1, \dots, k\}$  :  $i_p < j$ , et,  $A_j$  est déduit de  $A_i, A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  en utilisant l'une des règles de déduction.

ii) nous dirons qu'un énoncé  $A_i, i \neq n$ , est *inutile* si il n'est antécédent d'aucun énoncé de  $\mathcal{D}$ .

iii) nous dirons que  $\mathcal{D}$  est *redondante* si il existe deux énoncés  $A_i$  et  $A_j, i \neq j$ , identiques.

### I-6.2. Suppression des redondances.

Soit  $\mathcal{D} : A_1 \dots A_n$  une démonstration de l'énoncé  $\mathcal{C}$  à partir de l'ensemble de données  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{D}$  est redondante, et,  $A_i$  et  $A_k$  les deux énoncés identiques ( $i < k < n$ ) alors la file  $\mathcal{D}' : A_1 \dots A_{k-1} A_{k+1} \dots A_n$  est encore une démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$ .

Si  $k = n$ , la file  $\mathcal{D}'' : A_1 \dots A_i$  est encore une démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$ .

### I-6.3. Suppression des énoncés inutiles.

Soit  $\mathcal{D} : A_1 \dots A_n$  une démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$ .

Si  $A_i$  est un énoncé inutile de  $\mathcal{D}$ , alors  $\mathcal{D}' : A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n$  est encore une démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{K}$ .

#### I-6.4. Démonstration minimale.

Soient un ensemble  $\mathcal{K}$  de données, et un énoncé  $\mathcal{C}$ . Nous dirons que  $\mathcal{D}$  est une *démonstration minimale* de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{K}$  si et seulement si elle n'est pas redondante et aucun de ses énoncés n'est inutile.

*Remarque :*

A partir de toute démonstration  $\mathcal{D}$  on peut construire une démonstration minimale  $\mathcal{D}'$ . On pourra utiliser pour le réaliser effectivement, des algorithmes sur les files : recherche d'éléments d'une file vérifiant une propriété, suppression d'éléments d'une file.

#### I-7. Représentation d'une démonstration minimale

Soient un ensemble  $\mathcal{K}$  de données et un énoncé  $\mathcal{C}$ .

Soit  $\mathcal{D} : A_1 \dots A_n$  une démonstration minimale de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{K}$ . Nous pouvons lui associer un graphe  $G = (X, A)$  d'ensemble de sommets  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  et d'ensemble d'arcs  $A$  défini de la façon suivante :

L'ensemble  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  des énoncés de la démonstration  $\mathcal{D}$  a exactement  $n$  éléments car  $\mathcal{D}$  est minimale, soit alors la bijection  $\phi$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  sur  $X$  définie par :  
 pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$   $\phi(A_i) = x_i$  ;  
 $A$  est l'ensemble des couples  $(x_i, x_j)$  tels que  $i < j$  et  $\phi^{-1}(x_i)$  est antécédent de  $\phi^{-1}(x_j)$ .

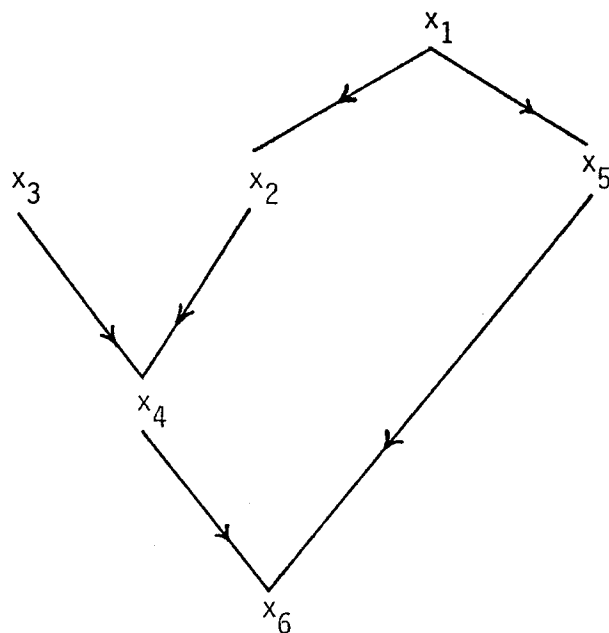
#### I-8. Exemple de représentation

Nous choisissons un exemple simple en prenant pour  $\mathcal{K}$  l'ensemble  $\{A \supset (B \supset c), A \& B\}$  et pour  $\mathcal{C}$  l'énoncé  $c$ . La démonstration est donnée en écrivant les énoncés les uns en dessous des autres. Nous justifions dans la colonne de droite chaque pas de calcul.

1	$A \& B$	Donnée
2	$A$	$\&e, 1$
3	$A \supset (B \supset c)$	Donnée
4	$B \supset c$	$\supset e, 2 - 3$
5	$B$	$\&e, 1$
6	$c$	$\supset e, 4 - 5$

C'est bien une démonstration minimale de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$ .

$\mathcal{E}_g$  est un ensemble à six éléments  $\{A_1, \dots, A_6\}$ , où  $A_i$  désigne l'énoncé de la ligne  $i$  dans la démonstration ci-dessus. Soit  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  et  $\phi$  la bijection de  $\mathcal{E}_g$  sur  $X$  qui vérifie pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\} : \phi(A_i) = x_i$ . Le graphe dont nous donnons ici un dessin est la représentation de la démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$ .





### I-9. Rappel de définitions

Afin de préciser notre vocabulaire, nous rappelons ici quelques définitions classiques de la théorie des graphes :

Soit  $G = (X, A)$  un graphe orienté.  $x \in X$ , on appelle *degré intérieur* de  $x$ , noté  $d_i(x)$ , le nombre d'arcs d'extrémité terminale  $x$  ; le *degré extérieur* de  $x$ , noté  $d_e(x)$ , est le nombre d'arcs d'origine  $x$ .

si  $d_e(x) = 0$ ,  $x$  est appelé *puits*.

si  $d_i(x) = 0$ ,  $x$  est appelé *source*.

On appelle *hiérarchie* un graphe orienté sans circuit.

### I-10. Théorème 1 de représentation

Soient  $\mathcal{X}$  un ensemble de données et  $\mathcal{C}$  un énoncé.

Si  $G$  désigne le graphe associé à une démonstration minimale  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{X}$ , alors les propositions suivantes sont vraies :

- i)  $G$  est connexe.
- ii)  $G$  est une hiérarchie.
- iii)  $G$  possède un seul puits.

*Preuve :*

$G = (X, A)$ , on notera  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  l'ensemble des énoncés de  $\mathcal{D}$ , et  $\phi$  la bijection de  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  sur  $X$  définie au § I-7.

ii) Supposons que  $G$  contienne un circuit. Soit  $x_{i_1} \dots x_{i_k}$  la file obtenue en énumérant les sommets en parcourant le circuit à partir de  $x_{i_1}$  dans le sens indiqué par l'orientation des arcs. En particulier il y a un arc de  $x_{i_k}$  vers  $x_{i_1}$ . On a par construction du graphe  $G$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, k-1\}$   $\phi^{-1}(x_{i_j})$  est antécédent de  $\phi^{-1}(x_{i_{j+1}})$  dans  $\mathcal{D}$ , donc d'après la définition de la bijection  $\phi : i_j < i_{j+1}$ . Par conséquent :  $i_1 < i_k$  et  $\phi^{-1}(x_{i_1})$  antécédent de  $\phi^{-1}(x_{i_k})$ , ce qui est contraire à l'existence d'un arc de  $x_{i_k}$  vers  $x_{i_1}$ .

Donc  $G$  ne contient pas de circuit, ce graphe est une hiérarchie.

iii) L'énoncé  $\mathcal{C}$  n'est l'antécédent d'aucun autre énoncé de la démonstration  $\mathcal{D}$ , donc par construction de  $G$  on a  $d_e(\phi(\mathcal{C})) = 0$ .

Soit un autre sommet  $x \in X$ , tel que  $d_e(x) = 0$ . Alors  $\phi^{-1}(x)$  est un énoncé inutile, or  $\mathcal{D}$  est minimale.

$\phi(\mathcal{C})$  est l'unique puits de  $G$ .

i) Soit  $c$  le nombre de composantes connexes de  $G$ . Chaque composante est une hiérarchie puisque  $G$  en est une. Il y a alors au moins autant de puits que de composantes.  $G$  a un seul puits donc  $c = 1$  c'est-à-dire  $G$  est connexe.

## II - R-DEMONSTRATION : DEFINITION ET REPRESENTATION

Revenons à la distinction de S. C. KLEENE entre les règles dérivées qu'il appelle "règles directes" et celles qu'il appelle "règles de déduction subsidiaire".<sup>(1)</sup> Citons ce qu'il écrit pour ces dernières ([30] p 60) :

"[Elles] nous autorisent, à partir de l'existence d'une ou de deux 'déductions données' ou 'déductions subsidiaires', à inférer l'existence d'une autre déduction (la 'déduction résultante')".

Nous appelons *preuve directe* la démonstration d'un énoncé  $\mathcal{C}$  à partir d'un ensemble de données  $\mathcal{X}$ . Nous pouvons reprendre en d'autres termes le texte de KLEENE en disant que les règles de déductions subsidiaires énoncent en fait des procédures de preuve qui permettent de substituer à une preuve directe, une ou plusieurs autres preuves directes éventuellement plus simples. Par exemple le remplacement d'une preuve directe de  $A \supset B$  à partir de  $\mathcal{X}$  par une preuve directe de  $B$  à partir de  $\mathcal{X}_\cup \{A\}$  ; ou encore le remplacement d'une preuve directe de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{X}_\cup \{A \cup B\}$  par une preuve directe de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{X}_\cup \{A\}$  et une autre à partir de  $\mathcal{X}_\cup \{B\}$ .

(1) Nous donnons en annexe la liste des règles dérivées retenues de S. C. KLEENE.

## II-1. Notation

Si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux files d'énoncés, nous notons  $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$  la file obtenue en les concaténant.

Si  $\mathcal{D}_1$  est une file d'énoncés et  $\mathcal{C}$  un énoncé, nous notons  $\mathcal{D}_1 \mathcal{C}$  la file obtenue en ajoutant  $\mathcal{C}$  à la droite de la file  $\mathcal{D}_1$ .

## II-2 Preuve minimale

Cas 1 :

Soit  $\mathcal{D}_1 : A_1 \dots A_n$  une preuve directe de l'énoncé  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}_2$  une autre preuve directe de  $\mathcal{C}$ , on appelle *preuve minimale* de  $\mathcal{C}$  associée à  $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$  la file  $\mathcal{D}'$  d'énoncés obtenue en renumérotant de gauche à droite à partir de  $A_1$  les énoncés de  $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$  (avec  $\mathcal{D}'_1 : A_1 \dots A_{n-1}$ ) et en supprimant les redondances (§ I-6.2) et les énoncés inutiles (§ I-6.3).

Cas 2 :

Soit  $\mathcal{D}_1$  une preuve directe et  $\mathcal{C}$  un énoncé, on appelle *preuve minimale* associée à  $\mathcal{D}_1 \mathcal{C}$  la file  $\mathcal{D}'$  d'énoncés obtenue en considérant que l'énoncé  $\mathcal{C}$  dérive du dernier énoncé de  $\mathcal{D}_1$  et en supprimant les redondances et les énoncés inutiles.

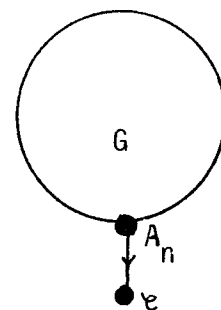
## II-3. Représentation d'une preuve minimale, cas 2.

Nous devons distinguer, pour la représentation de la preuve minimale  $\mathcal{D}'$  associée à  $\mathcal{D}_1 \mathcal{C}$ , deux cas :

a)  $\mathcal{C}$  figure dans la file  $\mathcal{D}_1$ , alors  $\mathcal{D}'$  est en fait une preuve directe de  $\mathcal{C}$ , et nous savons lui associer un graphe qui est une hiérarchie connexe à un seul puits.

b)  $\mathcal{C}$  ne figure pas dans la file  $\mathcal{D}_1$ , alors  $\mathcal{D}'$  est exactement  $\mathcal{D}_1 \mathcal{C}$ , car  $\mathcal{D}_1$  est une preuve directe donc minimale.

Soit  $G$  le graphe que nous savons associer à  $\mathcal{D}_1$ , nous associons à  $\mathcal{D}'$  le graphe  $G'$  obtenu en ajoutant à  $G$  un sommet qui sera l'image de  $\mathcal{C}$  et un arc de son unique puits vers ce nouveau sommet (fig. 1). Il est clair que le graphe obtenu est encore une hiérarchie connexe à un seul puits.



- fig 1 -

Résumons : dans tous les cas nous savons représenter  $\mathcal{D}'$  par un graphe qui est une hiérarchie connexe à un seul puits.

Les procédures de preuve que nous allons énumérer ne sont pas obligatoirement de façon immédiate la traduction de règles dérivées, par exemple pour la procédure de preuve par l'absurde. Dans cette énumération  $A, B, C, \dots$  désignerons des énoncés et  $\mathcal{K}$  un ensemble de données.

#### II-4. Procédure de preuve $\rightarrow i$

Soit  $\mathcal{D}$  une preuve directe de  $B$  à partir de  $\mathcal{K}_y\{A\}$ , alors la preuve minimale  $\mathcal{D}'$  associée à  $\mathcal{D}(A \supset B)$  est une preuve  $\rightarrow i$  de  $A \supset B$  à partir de  $\mathcal{K}$ .

#### II-5. Procédure de preuve par l'absurde

Soit  $\mathcal{D}$  une preuve directe de  $A \ \& \ \neg A$  à partir de  $\mathcal{K}_y\{\neg B\}$ , alors la preuve minimale  $\mathcal{D}'$  associée à  $\mathcal{D}B$  est une preuve par l'absurde de  $B$  à partir de  $\mathcal{K}$ .

#### II-6. Procédure de preuve $\forall i$

Soit  $\mathcal{D}$  une preuve directe de  $A(x)$  à partir de  $\mathcal{K}$ , si  $x$  ne figure libre dans aucun énoncé de  $\mathcal{K}$  alors la preuve minimale  $\mathcal{D}'$  associée à  $\mathcal{D}(\forall x A(x))$  est une preuve  $\forall i$  de  $\forall x A(x)$  à partir de  $\mathcal{K}$ .

## II-7. Remarque (généralisation)

Nous préférons en général la dénomination "procédure de généralisation" à "procédure de preuve  $\forall i$ ", car il s'agit bien d'une généralisation de  $A(x)$  pourvu que sa preuve à partir de  $\mathcal{X}$  satisfasse la condition énoncée.

## II-8. Représentation

Nous pouvons associer à une preuve  $\rightarrow i$ , par l'absurde, ou preuve  $\forall i$  un graphe qui est une hiérarchie connexe à un seul puits.

Ceci est une conséquence directe de la définition de ces preuves et des résultats du § II.3.

## II-9. Remarque (hypothèse)

Jusqu'ici les graphes de preuve (directe) d'un énoncé  $C$  à partir de  $\mathcal{X}$  avaient pour seules sources les images des éléments de  $\mathcal{X}$  (données) ou les images de  $S$ -axiomes. Nous pouvons maintenant avoir une autre origine à ces sommets, par exemple pour le graphe représentant la preuve  $\rightarrow i$  :  $A$  n'est pas en général un élément de  $\mathcal{X}$ , ni un  $S$ -axiome, cependant son image dans le graphe est une source ; nous dirons que  $A$  est une *hypothèse*.

## II-10. Procédure de preuve par cas

### II-10.1. Définition.

Soient  $\mathcal{D}_1$  une preuve directe de  $C$  à partir de  $\mathcal{X}_U\{A\}$ , et  $\mathcal{D}_2$  une preuve directe de  $C$  à partir de  $\mathcal{X}_U\{B\}$ , alors la preuve minimale  $\mathcal{D}'$  associée à  $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$  est une preuve par cas de  $C$  à partir de  $\mathcal{X}_U\{A \vee B\}$ .

### II-10.2. Représentation.

Nous reprenons ici les notations de § II-2.

Nous allons montrer que  $\mathcal{D}'$  a les propriétés d'une preuve directe, en effet  $\mathcal{D}'_1 \mathcal{D}'_2$  est une démonstration de C à partir de  $\mathcal{K}_U\{A, B\}$  :

- Le dernier énoncé de  $\mathcal{D}'_1 \mathcal{D}'_2$  est C car  $\mathcal{D}'_2$  est une preuve directe de C à partir de  $\mathcal{K}_U\{B\}$ .

- Soit E un énoncé de  $\mathcal{D}'_1 \mathcal{D}'_2$ , en particulier c'est un énoncé de  $\mathcal{D}'_1$  (ou  $\mathcal{D}'_2$ ) qui est une preuve directe, donc c'est soit un S-axiome, soit un élément de  $\mathcal{K}_U\{A\}$  (ou  $\mathcal{K}_U\{B\}$ ) donc de  $\mathcal{K}_U\{A, B\}$ , soit il est obtenu par l'application d'une règle de dérivation à une famille d'énoncés qui le précède dans  $\mathcal{D}'_1$  (ou  $\mathcal{D}'_2$ ) donc dans  $\mathcal{D}'$ .

$\mathcal{D}'$  est donc en fait la démonstration minimale de C à partir de  $\mathcal{K}_U\{A, B\}$  construite à partir de la démonstration  $\mathcal{D}'_1 \mathcal{D}'_2$ .

On sait lui associer un graphe qui sera la représentation de la preuve par cas et qui est une hiérarchie connexe à un seul puits.

## II-11. Procédure de preuve- $\exists$ e

### II-11.1. Définition.

Soit  $\mathcal{D}$  une preuve directe de C à partir de  $\mathcal{K}_U\{A(x)\}$ , si x ne figure libre dans aucun énoncé de  $\mathcal{K}_U\{c\}$  alors  $\mathcal{D}$  est une preuve- $\exists$ e de C à partir de  $\mathcal{K}_U\{\exists x A(x)\}$ .

### II-11.2. Représentation.

$\mathcal{D}$  est d'abord une preuve directe de C à partir de  $\mathcal{K}_U\{A(x)\}$ , nous savons donc lui associer un graphe qui est une hiérarchie connexe à un seul puits.

## II-12. R-démonstration : définition

Nous désignons ici par  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$  des files d'énoncés et par  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  l'ensemble des énoncés d'une file  $\mathcal{D}$ .  $A_1, \dots, A_n$  sont des énoncés alors :

On appellera *R-démonstration* de l'énoncé  $\mathcal{C}$  à partir de l'ensemble de données  $\mathcal{X}$ , soit :

i) une file d'énoncés  $\mathcal{S}_1 A_1 \dots \mathcal{S}_n A_n$  telle que :

o. - pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{S}_i A_i$  est une preuve directe, par l'absurde, par cas, une preuve  $\rightarrow i$ , une preuve  $\forall i$  ou une preuve  $\exists e$  de  $A_i$  à partir de  $\mathcal{X}_U \{A_k / k < i\}$ .

1. - pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si un énoncé n'est ni un S-axiome, ni une donnée, ni une hypothèse de  $\mathcal{S}_i A_i$  alors, s'il apparaît dans  $\mathcal{S}_k A_k$  avec  $k < i$  il ne peut en être qu'une hypothèse.

2. - pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , il existe  $j \in \{i+1, \dots, n\}$  tel que  $A_i$  soit un énoncé de  $\mathcal{S}_j$ .

3. -  $A_n$  est identique à  $\mathcal{C}$ .

ii) une file d'énoncés ayant une des formes suivantes :

1. -  $\mathcal{S}(A \supset B)$  si  $\mathcal{C}$  est l'énoncé  $A \supset B$ , et  $\mathcal{S}$  est une R-démonstration de B à partir de  $\mathcal{X}_U \{A\}$ .

2. -  $\mathcal{S}\mathcal{C}$  si  $\mathcal{S}$  est une R-démonstration de  $A \& \neg A$  à partir de  $\mathcal{X}_U \{\mathcal{C}\}$

3. -  $\mathcal{S}\mathcal{C}$  si  $\mathcal{C}$  est l'énoncé  $\forall x A(x)$ , si  $x$  ne figure libre dans aucun énoncé de  $\mathcal{X}$ , et  $\mathcal{S}$  est une R-démonstration de  $A(x)$  à partir de  $\mathcal{X}$ .

4. -  $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{C}$  si  $\mathcal{X} = \mathcal{X}'_U \{A \vee B\}$  et,  $\mathcal{S}_1 \mathcal{C}$  est une R-démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{X}'_U \{A\}$ , et,  $\mathcal{S}_2 \mathcal{C}$  une R-démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{X}'_U \{B\}$ .

5. -  $\mathcal{S}\mathcal{C}$  si  $\mathcal{X} = \mathcal{X}'_U \{\exists x A(x)\}$  et  $x$  ne figure libre dans aucun énoncé de  $\mathcal{X}'_U \{\mathcal{C}\}$ , et  $\mathcal{S}\mathcal{C}$  est une R-démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{X}'_U \{A(x)\}$ .

iii) une file d'énoncés  $\mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$  telle que :

o. - pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{D}_i A_i$  est une R-démonstration de  $A_i$  à partir de  $\mathcal{K}_U \{A_j / j < i\}$ .

1. - elle possède les trois propriétés i-1, i-2, i-3.

### II-12.1. Remarque.

Nous avons donné le nom de R-démonstration à l'objet que nous venons de définir car il nous servira effectivement de référence pour étudier les résolutions proposées par les élèves.

### II-12-2. Commentaires sur la définition.

Le paragraphe ii) de la définition est une généralisation des notions de procédure de preuve  $\rightarrow i$ , par l'absurde, généralisation par cas et  $\exists e$ .

Une R-démonstration apparaît comme une file d'énoncés  $\mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$ , où chaque  $\mathcal{D}_i A_i$  est la R-démonstration d'un résultat intermédiaire :  $A_i$ . Les règles o permettent d'établir un résultat intermédiaire en utilisant ceux déjà démontrés. La règle i-1 interdit de redémontrer un énoncé E. Cependant la règle o suffit pour affirmer que l'on ne démontre pas une donnée (propriété 1) ou un S-axiome, E peut seulement avoir été utilisé comme hypothèse (voir aussi la remarque § II-9.). Enfin la règle i-2 garantit qu'il n'y a pas de résultats intermédiaires inutiles, et la règle i-3 que  $\mathcal{D}$  est bien une R-démonstration de  $\mathcal{C}$ .

### II-12.3. Niveau d'une R-démonstration.

La définition d'une R-démonstration est récursive et nous nommerons *R-démonstration élémentaire* une file  $\mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$  répondant exactement à la partie i) de cette définition. Nous appellerons *expansion* d'une R-démonstration non élémentaire le remplacement simultané de toutes les R-démonstrations non élémentaires qui la composent par les files qui les définissent.



Le niveau d'une R-démonstration est le nombre minimum d'expansions nécessaires pour qu'elle ne comporte que des R-démonstrations élémentaires.

#### II-12.4. Propriété 1.

Soit  $\mathcal{D}$  une R-démonstration de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{A}$ , aucun énoncé de  $\mathcal{D}$  n'est antécédent d'un élément de  $\mathcal{A}$ .

Preuve :

Il est bien clair que cette propriété est vérifiée par les démonstrations (§ I-3) donc par les démonstrations minimales (§ I-6.4.), ou encore les preuves directes, donc aussi par toutes les preuves définies aux paragraphes II-4. à II-11. Nous allons démontrer, par récurrence sur leur niveau que c'est aussi une propriété des R-démonstrations.

Soit  $\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$  de niveau 1.

Soit  $F$  un énoncé d'antécédent  $E$ . Il existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $E$  et  $F$  soient des énoncés de  $\mathcal{D}_k A_k$ , or  $\mathcal{D}_k A_k$  est une preuve de  $A_k$  à partir de  $\mathcal{A}_U(A_i, i < k)$  donc  $F$  n'appartient pas à cet ensemble, et en particulier  $F \notin \mathcal{A}$ .

Supposons la propriété vérifiée pour toute R-démonstration de niveau au plus  $p-1$  alors :

Soit  $\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$  de niveau  $p$ .

Soit à nouveau un énoncé  $F$  d'antécédent  $E$ . Il existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $E$  et  $F$  soient des énoncés de  $\mathcal{D}_k$ , or  $\mathcal{D}_k$  est une R-démonstration de niveau au plus égal à  $p-1$  donc  $F$  n'appartient pas à son ensemble de données ou encore :  $F \notin \mathcal{A}_U(A_i, i < k)$ , et en particulier  $F \notin \mathcal{A}$ .

La propriété est donc vérifiée par toute R-démonstration.

### II-12.5. Propriété 2.

Soit une R-démonstration  $\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$ , pour tout énoncé E de  $\mathcal{D}$  différent de  $A_n$  il existe k tel que E apparaisse dans  $\mathcal{D}_k$  et y soit l'antécédent d'un énoncé qui, s'il apparaît dans  $\mathcal{D}_p$ ,  $p < k$ , n'y soit qu'une hypothèse.

*Preuve :*

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence sur le niveau de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{A}$  désigne l'ensemble des données de  $\mathcal{D}$ .

$\mathcal{D}$  est de niveau 1 :

Soit E un énoncé de  $\mathcal{D}$  différent de  $A_n$ , il existe k tel que E soit un énoncé de  $\mathcal{D}_k$ ,  $\mathcal{D}_k$  est une preuve minimale donc il existe un énoncé F dont E est l'antécédent et d'après i-1 de la définition d'une R-démonstration si F apparaît dans  $\mathcal{D}_p$ ,  $p < k$ , il n'en est qu'une hypothèse.

Supposons la propriété vérifiée par toute R-démonstration de niveau au plus q-1.

Soit  $\mathcal{D}$  de niveau q, et E un énoncé de  $\mathcal{D}$  différent de  $A_n$  alors il existe k tel que E soit un énoncé de  $\mathcal{D}_k$  - (si E est un  $A_i$  il existe  $k > i$  tel que E soit un énoncé de  $\mathcal{D}_k$ , i-2 de la définition).

$\mathcal{D}_k : \mathcal{D}_1^k A_1^k \dots \mathcal{D}_m^k A_m^k$  et  $\mathcal{D}_k$  est de niveau au plus q-1 ; donc il existe q tel que E apparaisse dans  $\mathcal{D}_k^q$  et y soit l'antécédent d'un énoncé F. Donc en fait E est l'antécédent d'un énoncé F de  $\mathcal{D}_k$  qui d'après iii-1 (i-2) s'il apparaît dans  $\mathcal{D}_p$ ,  $p < k$ , n'y est qu'une hypothèse.

La propriété est donc vérifiée par toute R-démonstration.

### II-12.6. Exemple de R-démonstration.

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des ensembles, pour montrer  $(A \cap B = A) \sim (A \subset B)$ , ou encore en revenant à la définition de l'égalité et de l'inclusion de deux ensembles :  $\forall x (x \in A \cap B \sim x \in A) \sim \forall x (x \in A \supset x \in B)$ .

Pour plus de clarté nous donnons, lorsqu'il y a plusieurs pas de calcul, les R-démonstrations en colonne avec à droite des numéros qui repèrent les énoncés et à gauche la justification du pas de calcul correspondant.

Soit  $\mathcal{D}_1$  le calcul :

1	$x \in A$	Hypothèse
2	$\forall x (x \in A \wedge B \sim x \in A)$	Hypothèse
3	$x \in A \wedge B \sim x \in A$	$\forall e, 2$
4	$x \in A \supset x \in A \wedge B$	$\sim e, 3$
5	$x \in A \wedge B$	$\supset e, 4-1$
6	$\forall x (x \in A \wedge B \sim (x \in A \& x \in B))$	S-axiome
7	$x \in A \wedge B \sim (x \in A \& x \in B)$	$\forall e, 6$
8	$x \in A \wedge B \supset (x \in A \& x \in B)$	$\sim e, 7$
9	$x \in A \& x \in B$	$\supset e, 8-5$
10	$x \in B$	$\& e, 9$

$\mathcal{D}_2 : \mathcal{D}_1 (x \in A \supset x \in B)$  est une preuve  $\rightarrow i$  de  $(x \in A \supset x \in B)$  à partir de  $\forall x (x \in A \wedge B \sim x \in A)$  [et :  $\mathcal{D}_2 (\forall x (x \in A \supset x \in B))$  est une R-démonstration de  $\forall x (x \in A \supset x \in B)$  à partir de  $\forall x (x \in A \wedge B \sim x \in A)$  [ii, 3].

Soit  $\mathcal{D}_3$  la file :

$$(\forall x (x \in A \wedge B \sim x \in A)) \mathcal{D}_2 (\forall x (x \in A \supset x \in B))$$

alors la file :

$$\mathcal{D}_3 [ \forall x (x \in A \wedge B \sim x \in A) \supset \forall x (x \in A \supset x \in B) ]$$

est une R-démonstration de son dernier énoncé [ii, 1] que nous désignons par  $A_3$ .

Soit  $\mathcal{D}'_1$  la file d'énoncés donnée ci-dessous en colonne :

1	$x \in A \wedge B$	Hypothèse
2	$\forall x (x \in A \wedge B \sim (x \in A \& x \in B))$	S-axiome
3	$x \in A \wedge B \sim (x \in A \& x \in B)$	$\forall e, 2$
4	$x \in A \wedge B \supset (x \in A \& x \in B)$	$\sim e, 3$
5	$x \in A \& x \in B$	$\supset e, 1-4$
6	$x \in A$	$\& e, 5$

et la file  $\mathcal{D}'_1 (x \in A \wedge B \supset x \in A)$  est une preuve  $\rightarrow i$  de  $x \in A \wedge B \supset x \in A$ .

Soit  $\mathcal{D}'_2$  la file d'énoncés :

1	$x \in A$	Hypothèse
2	$\forall x (x \in A \supset x \in B)$	Hypothèse
3	$x \in A \supset x \in B$	$\forall e, 2$
4	$x \in B$	$\supset e, 1-3$
5	$\forall x (x \in A \cap B \sim (x \in A \& x \in B))$	S-axiome
6	$x \in A \cap B \sim (x \in A \& x \in B)$	$\forall e, 5$
7	$(x \in A \& x \in B) \supset x \in A \cap B$	$\sim e, 6$
8	$x \in A \& x \in B$	$\& i, 1-4$
9	$x \in A \cap B$	$\supset e, 8-7$

alors  $\mathcal{D}'_2 (x \in A \supset x \in A \cap B)$  est une preuve- $\rightarrow i$  de  $(x \in A \supset x \in A \cap B)$  à partir de  $\forall x (x \in A \supset x \in B)$

et la file :

$\mathcal{D}_4 : \mathcal{D}'_1(x \in A \cap B \supset x \in A) \mathcal{D}'_2(x \in A \supset x \in A \cap B) (x \in A \cap B \sim x \in A)$  est une R-démonstration de son dernier énoncé à partir de  $\forall x(x \in A \supset x \in B)$ . [iii].

De même, d'après [ii-3] :

$\mathcal{D}_4 (\forall x (x \in A \cap B \sim x \in A))$

Soit :

$\mathcal{D}_5 : (\forall x (x \in A \supset x \in B)) \mathcal{D}_4(\forall x(x \in A \cap B \sim x \in A))$  alors d'après [ii-1] la file suivante :

$\mathcal{D}_5 (\forall x (x \in A \supset x \in B) \supset \forall x (x \in A \cap B \sim x \in A))$

est une R-démonstration de son dernier énoncé, que nous désignons par  $A_5$ .

Enfin d'après [ii] la file suivante est la R-démonstration annoncée :

$\mathcal{D}_3 A_3 \mathcal{D}_5 A_5 (\forall x (x \in A \cap B \sim x \in A) \sim \forall x (x \in A \supset x \in B))$ .

## II-13. R-démonstration : représentation

### II-13.1. Remarque et vocabulaire.

Il y a quatre sortes d'énoncés dans une R-démonstration : les énoncés obtenus par une déduction, les données, les S-axiomes et enfin les hypothèses. Dans une même file un énoncé peut apparaître comme une hypothèse, puis comme un énoncé déduit.

C'est le cas, par exemple, pour établir une équivalence en utilisant deux fois la procédure de preuve  $\rightarrow i$ . Un tel énoncé tient aussi deux rôles intrinséquement différents, aussi nous allons modifier la définition de  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  - jusqu'ici ensemble des énoncés de  $\mathcal{D}$  - pour pouvoir en tenir compte au niveau de la représentation.

Soit  $H_1 \dots H_q$  la file obtenue en ôtant de  $\mathcal{D}$  tout énoncé qui n'est pas une hypothèse, nous donnons à chaque énoncé  $H_i$  un nom différent et nous appelons  $\mathcal{H}$  l'ensemble de ces noms. Si  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des énoncés de  $\mathcal{D}$  qui ne sont pas des hypothèses nous notons  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  l'ensemble  $\mathcal{E} \cup \mathcal{H}$ .

Remarquons que si la R-démonstration ne recourt pas à des hypothèses alors  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  est exactement l'ensemble de ses énoncés.

Si  $G = (X, A)$  représente la R-démonstration  $\mathcal{D}$  et si  $\phi$  désigne la bijection liée à cette représentation, pour tout sommet  $x$  de  $G$ ,  $\phi^{-1}(x)$  est soit un énoncé de  $\mathcal{D}$ , soit le nom d'une hypothèse.

### II-13.2. Lemme.

Soit une R-démonstration  $\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$ , si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  il existe un graphe  $G_i = (X_i, \Gamma_i)$  qui est une hiérarchie connexe à un seul puits qui représente  $\mathcal{D}_i A_i$ , alors on peut associer à  $\mathcal{D}$  une hiérarchie connexe à un seul puits qui la représente.

Preuve :

Rappelons que " $G_i$  représente  $\mathcal{D}_i A_i$ " signifie qu'il existe une bijection  $\phi_i$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_i A_i}$  sur  $X_i = \{x_1^i, \dots, x_{p_i}^i\}$  et qu'il y a un arc de  $x_\alpha^i$  vers  $x_\beta^i$  si et seulement si  $\phi_i^{-1}(x_\alpha^i)$  est un antécédent, ou le nom d'un antécédent, de  $\phi_i^{-1}(x_\beta^i)$  dans  $\mathcal{D}_i A_i$ .

Dans la suite nous noterons  $\mathcal{E}_i$  l'ensemble des énoncés de  $\mathcal{D}_i A_i$  qui ne sont pas des hypothèses, et  $\mathcal{H}_i$  l'ensemble des noms d'hypothèses de  $\mathcal{D}_i A_i$ .

Nous nous assurons que si  $i \neq j$  alors  $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j = \emptyset$  - ceci est toujours réalisable -

La relation binaire  $R$  définie sur  $Y = \bigcup_{i=1}^n X_i$  par :

$x_\alpha^i R x_\beta^j$  si et seulement si  $\phi_i^{-1}(x_\alpha^i)$  est identique à  $\phi_j^{-1}(x_\beta^j)$  est une relation d'équivalence. Il est bien clair que si  $\phi_i^{-1}(x_\alpha^i)$  est une hypothèse alors il y a un seul élément dans la classe de  $x_\alpha^i$ .

Pour chaque classe d'équivalence  $C$  nous prendrons comme représentant  $x_\alpha^i$  tel que : si  $x_\beta^j \in C$  alors  $j \geq i$ .

Soit  $X$  l'ensemble des représentants de  $Y/R$  et  $\psi$  l'application canonique de  $Y$  sur  $X$  :

L'application  $\phi : \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \rightarrow X$  définie par :

pour  $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}_i A_i}$  :  $\phi(E) = \psi \circ \phi_i(E)$

est une bijection.

$\phi$  est injective, en effet si  $\phi(E) = \phi(E')$  avec  $\phi(E) = \psi \circ \phi_i(E)$  et  $\phi(E') = \psi \circ \phi_j(E')$  cela signifie que  $\phi_i(E)$  et  $\phi_j(E')$  sont dans la même classe d'équivalence modulo  $R$ , et donc que  $E = E'$

$\phi$  est surjective, en effet soit  $x_\alpha^i \in X$  on a :

$$\phi(\phi_i^{-1}(x_\alpha^i)) = x_\alpha^i$$

Nous associons à  $\mathcal{S}$  le graphe  $G = (X, \Gamma)$  défini de la façon suivante :

$G^{(1)}$  est le graphe  $G_1$  de  $\mathcal{S}_1 A_1$

$G^{(i+1)} = (X^{(i+1)}, \Gamma^{(i+1)})$  est obtenu à partir de  $G^{(i)} = (X^{(i)}, \Gamma^{(i)})$  :

-  $X^{(i+1)} = X^{(i)} \cup \phi(\mathcal{E}_{\mathcal{S}_{i+1}} A_{i+1})$

- il y a un arc de  $x_\alpha^k$  vers  $x_\beta^i$  quand

(1)  $k < i + 1, j < i + 1$  et  $x_\alpha^k x_\beta^j$  est un arc de  $\Gamma^{(i)}$

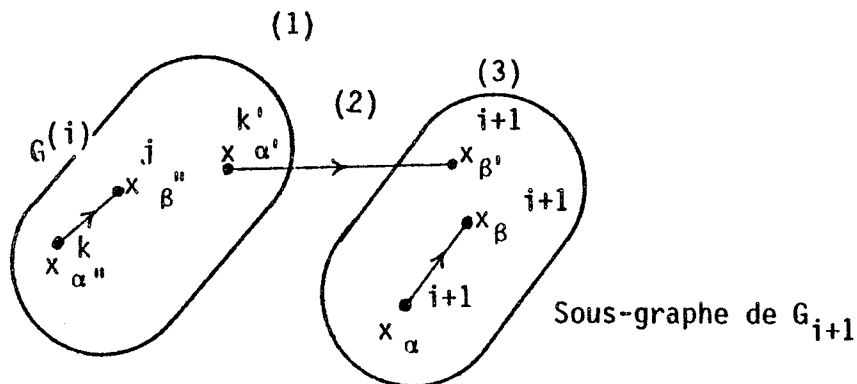
(2)  $k < i + 1, j = i + 1$  et il existe  $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}_{i+1}} A_{i+1}$ ,  $E$  identique à  $\phi^{-1}(x_\alpha^k)$  et  $\phi_{i+1}(E) x_\beta^j$  est un arc de  $\Gamma_{i+1}$

(3)  $k = i + 1, j = i + 1$  et  $x_\alpha^{i+1} x_\beta^{i+1}$  est un arc de  $\Gamma_{i+1}$

Si  $G^{(i)}$  est une hiérarchie alors  
 $G^{(i+1)}$  est une hiérarchie.

Il suffit de montrer que la construction n'ajoute pas de circuit. Pour cela remarquons que les nouveaux arcs ajoutés le sont entre un sommet de  $G^{(i)}$  et un nouveau sommet, et toujours orientés vers le nouveau sommet (règle (2)), et d'autre part le sous graphe dont les sommets sont de la forme  $x_\alpha^{i+1}$  n'a pas non plus de circuit car  $G_{i+1}$  n'en a pas.

Le dessin ci-dessous illustre la construction de  $G^{(i+1)}$  à partir de  $G^{(i)}$ .



Conséquence :

$G^{(1)}$  est une hiérarchie donc le graphe  $G^{(n)}$ , c'est à dire  $G$ , est une hiérarchie.

$G^{(n)}$  a au moins un puits qui est le sommet  $\phi(\mathcal{C})$ . Montrons que s'il existe  $x_\alpha^i$  tel que  $d_e(x_\alpha^i) = 0$  alors  $\phi^{-1}(x_\alpha^i)$  est identique à  $\mathcal{C}$ .

En effet supposons  $\phi^{-1}(x_\alpha^i)$  non identique à  $A_n$ , alors d'après la propriété 2 il existe  $k$  tel que  $\phi^{-1}(x_\alpha^i)$  soit l'antécédent, ou le nom de l'antécédent, d'un énoncé  $F$  de  $\mathcal{S}_k$ . Si  $F$  apparaît dans  $\mathcal{S}_p$ ,  $p < k$ , il n'en est donc qu'une hypothèse, d'où  $\phi(F) = x_\beta^k$ .

Par ailleurs, par construction de  $X$ ,  $i \leq k$  donc quand on est passé de  $G^{(k-1)}$  à  $G^{(k)}$  on a ajouté l'arc  $x_\alpha^i x_\beta^k$ , grâce à la règle 2 de construction si  $i < k$ , et la règle 3 si  $i = k$ .

donc  $\phi^{-1}(x_\alpha^i)$  est identique à  $A_n$ , ou encore à  $\mathcal{C}$ ; et :

$\phi(\mathcal{C})$  est l'unique puits de  $G$ .

Chaque composante connexe de  $G$  est une hiérarchie, donc  $G$  a au moins autant de puits que de composantes connexes.

$G$  a un seul puits donc :

$G$  est un graphe connexe.

Montrons enfin que ce graphe  $G$  qui est une hiérarchie connexe à un seul puits représente bien  $\mathcal{S}$ :

Il existe bien une bijection  $\phi$  de  $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$  sur  $X$  :

Supposons que  $x_\alpha^i x_\beta^j$  soit un arc de  $\Gamma$  alors par construction du graphe :  $\phi^{-1}(x_\alpha^i)$  est antécédent de  $\phi^{-1}(x_\beta^j)$ .

Réciproquement soient deux énoncés  $E$  et  $F$  de  $\mathcal{S}$  tels que  $E$  soit antécédent de  $F$ ; alors il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $E$  et  $F$  soient des énoncés de  $\mathcal{S}_i A_i$ .



D'après la propriété 2 si  $F$  apparaît dans  $\mathcal{D}$  p,  $p < i$  alors il ne peut en être qu'une hypothèse d'où :  $\phi(F) = x_\alpha^i$ .

Si  $E$  est une hypothèse de  $\mathcal{D}$  ;  $A_i$  soit  $N_E$  son nom et  $\phi(N_E) = x_\beta^i$ , sinon  $\phi(E) = x_\beta^j$  avec  $j \leq i$  ; dans tous les cas nous avons construit un arc  $x_\beta^j x_\alpha^i$ , ou  $x_\beta^i x_\alpha^i$ , soit grâce à la règle 2, soit grâce à la règle 3, en passant de  $G^{(i-1)}$  à  $G^{(i)}$ .

### II-13.3. Théorème 2 de représentation.

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de données et  $\mathcal{C}$  un énoncé. On pourra représenter une R-démonstration  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{X}$  par un graphe qui est une hiérarchie connexe à un seul puits.

*Preuve :*

Nous allons donner une démonstration de ce théorème à l'aide d'une récurrence sur le niveau de  $\mathcal{D}$ . Nous noterons dans la suite :

$\mathcal{X}_k$  l'ensemble  $\mathcal{X}_U \{A_i / i < k\}$ .

$\mathcal{D}$  est de niveau 1 :

$\mathcal{D} : \mathcal{D}_1 A_1 \dots \mathcal{D}_n A_n$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$   $\mathcal{D}_i A_i$  est une preuve de  $A_i$  à partir de  $\mathcal{X}_i$  à laquelle on sait associer une hiérarchie connexe à un seul puits (§ I-7, II-3 à 11) donc en appliquant le lemme nous pouvons représenter  $\mathcal{D}$  par une hiérarchie connexe à un seul puits.

Supposons la propriété vérifiée par toute R-démonstration de niveau au plus  $p-1$ , soit  $\mathcal{D}$  une R-démonstration de niveau  $p$ .

Nous allons distinguer plusieurs cas :

$\mathcal{D}$  satisfait aux paragraphes ii-1, ii-2 ou ii-3 de la définition. C'est-à-dire est de la forme  $\mathcal{D}'\mathcal{C}$ , où  $\mathcal{D}'$  est une R-démonstration de niveau au plus  $p-1$ . D'après l'hypothèse de récurrence on sait représenter  $\mathcal{D}'$  par un graphe  $G' = (X', A')$  qui est une hiérarchie connexe à un seul puits  $x'$ .

On représentera  $\mathcal{S}$  par la hiérarchie connexe à un seul puits obtenue à partir de  $G'$  en lui ajoutant un sommet marqué  $y$  tel que  $y \notin X'$  et  $y$  soit l'image de  $\mathcal{C}$ , et un arc de  $x'$  vers  $y$ .

$\mathcal{S}$  satisfait au paragraphe ii-4 de la définition.

C'est-à-dire  $\mathcal{S}$  est de la forme  $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{S}_1 \mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}_2 \mathcal{C}$  sont des R-démonstrations de  $\mathcal{C}$  de niveau au plus  $p-1$  donc représentables par des hiérarchies connexes à un seul puits.

soit :  $G_1 = (X_1, A_1)$ ,  $G_2 = (X_2, A_2)$  et,  $x_1$  et  $x_2$  les puits respectifs.

On suppose  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , ce qui est toujours possible puisque les graphes sont marqués.

Soit  $X = X_1 \cup \{x_1\} \cup X_2$ , en notant  $xy$  un arc de  $x$  vers  $y$  :

$$A = A_1 \cup \{yx_1 \mid y \in X_1\} \cup A_2 \cup \{yx_2 \mid yx_1 \in A_1\}$$

alors  $G = (X, A)$  est une représentation de  $\mathcal{S}$ , et c'est une hiérarchie connexe à un seul puits : l'image de  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{S}$  satisfait au paragraphe iii de la définition.

$\mathcal{S}$  :  $\mathcal{S}_1 A_1 \dots \mathcal{S}_n A_n$ , et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{S}_i A_i$  est une R-démonstration de niveau au plus égal à  $p-1$  et d'après l'hypothèse de récurrence on sait la représenter par une hiérarchie connexe à un seul puits. Donc d'après le lemme, on peut représenter  $\mathcal{S}$  par une hiérarchie connexe à un seul puits.

Si  $\mathcal{S}$  satisfait au paragraphe ii-5 de la définition, c'est en fait une R-démonstration qui a une des formes précisées aux autres paragraphes de la définition, et donc rentre dans l'un des cas précédents.

Conclusion :

Toutes les R-démonstrations ont la propriété annoncée.

### II-13.4. Exemple de représentation.

Nous allons construire le graphe de représentation de la R-démonstration du paragraphe II-12.6.

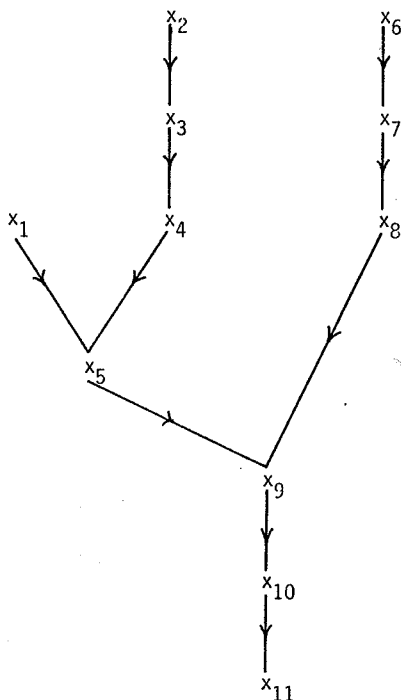
Pour cela nous commençons par construire les graphes associés aux R-démonstrations de niveau le plus bas, c'est-à-dire  $\mathcal{D}'_1(x \in A \supset x \in B)$ ,  $\mathcal{D}'_1(x \in A \wedge B \supset x \in A)$ , et  $\mathcal{D}'_2(x \in A \supset x \in A \wedge B)$ . Nous désignons par  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}'_1$  et  $\mathcal{E}'_2$  leur ensemble d'énoncés respectifs.

Nous donnons dans la colonne de gauche la liste des éléments de  $\mathcal{E}_1$  ; les deux premiers sont des noms d'hypothèses, respectivement  $(x \in A)$  et  $\forall x (x \in A \wedge B \sim x \in A)$ .

Dans la colonne de droite nous donnons pour chaque élément de  $\mathcal{E}_1$ , le nom du sommet associé dans la représentation :

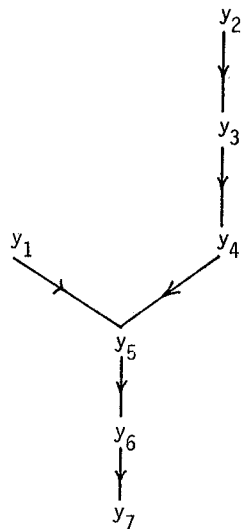
$H_1$	$x_1$
$H_2$	$x_2$
$x \in A \wedge B \sim x \in A$	$x_3$
$x \in A \supset x \in A \wedge B$	$x_4$
$x \in A \wedge B$	$x_5$
$\forall x (x \in A \wedge B \sim (x \in A \& x \in B))$	$x_6$
$x \in A \wedge B \sim (x \in A \& x \in B)$	$x_7$
$x \in A \wedge B \supset (x \in A \& x \in B)$	$x_8$
$x \in A \& x \in B$	$x_9$
$x \in B$	$x_{10}$
$x \in A \supset x \in B$	$x_{11}$

Nous appellerons  $\phi_1$  la bijection correspondante. Nous donnons ci-dessous le dessin du graphe  $G_1$  de représentation de  $\mathcal{D}'_1(x \in A \supset x \in B)$ .



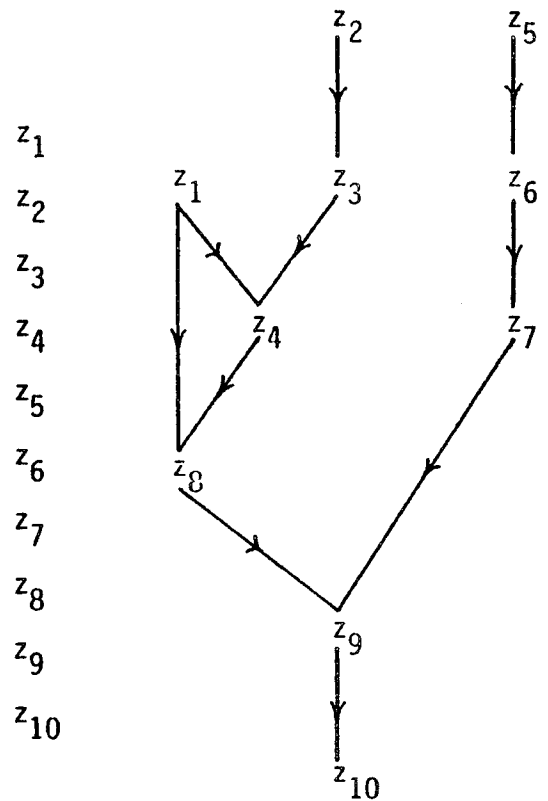
De la même façon nous donnons ci-dessous  $\mathcal{E}'_1$  et le graphe  $G'_1$  de la représentation de  $\mathcal{D}'_1(x \in A \cap B \supset x \in A)$ , puis  $\mathcal{E}'_2$  et le graphe  $G'_2$  de la représentation de  $\mathcal{D}'_2(x \in A \supset x \in A \cap B)$ .

$H'_1$	$y_1$
$\forall x(x \in A \cap B \sim (x \in A \ \& \ x \in B))$	$y_2$
$x \in A \cap B \sim (x \in A \ \& \ x \in B)$	$y_3$
$x \in A \cap B \supset (x \in A \ \& \ x \in B)$	$y_4$
$x \in A \ \& \ x \in B$	$y_5$
$x \in A$	$y_6$
$x \in A \cap B \supset x \in A$	$y_7$



$H'_1$  est le nom d'hypothèse  $x \in A \cap B$ . Nous appelons  $\phi_2$  la bijection de  $\mathcal{E}'_1$  sur les sommets de  $G'_1$ .

$H'_2$   
 $H'_3$   
 $x \in A \supset x \in B$   
 $x \in B$   
 $\forall x(x \in A \cap B \sim (x \in A \& x \in B))$   
 $x \in A \cap B \sim (x \in A \& x \in B)$   
 $(x \in A \& x \in B) \supset x \in A \cap B$   
 $x \in A \& x \in B$   
 $x \in A \cap B$   
 $x \in A \supset x \in A \cap B$



$H'_2$  et  $H'_3$  sont respectivement les noms des hypothèses  $x \in A$  et  $\forall x(x \in A \supset x \in B)$ .

Nous appelons  $\phi_3$  la bijection de  $\mathcal{E}'_2$  sur les sommets de  $G'_2$ .

Pour représenter :

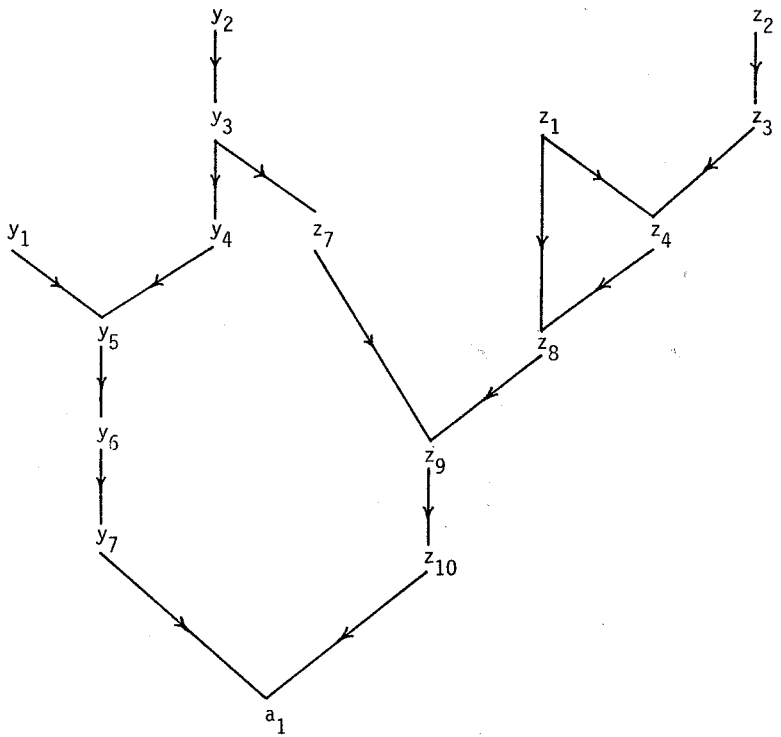
$$\mathcal{S}_4 : \mathcal{S}'_1(x \in A \cap B \supset x \in A) \mathcal{S}'_2(x \in A \supset x \in A \cap B) (x \in A \cap B \sim x \in A).$$

Nous n'allons pas reprendre dans le détail la construction indiquée dans le lemme, nous pouvons dire de façon plus imagée que l'on rapproche  $G'_1$  et  $G'_2$  en fusionnant les sommets qui représentent des énoncés identiques, ici :

$$\phi_3^{-1}(z_5) = \phi_2^{-1}(y_2) \text{ et } \phi_3^{-1}(z_6) = \phi_2^{-1}(y_3).$$

Nous désignons par  $a_1$  le sommet associé à  $x \in A \cap B \sim x \in A$  qui est déduit de  $\phi_2^{-1}(y_7)$  et  $\phi_3^{-1}(z_{10})$  en appliquant la règle dérivée- $\sim$ .

$\mathcal{S}_4$  est alors représentée par le graphe ci-dessous. Il suffit ensuite de suivre la construction indiquée dans la preuve du théorème 2 de représentation pour obtenir successivement les graphes de représentation de  $\mathcal{S}_5 A_5$  et  $\mathcal{S}_3 A_3$ .

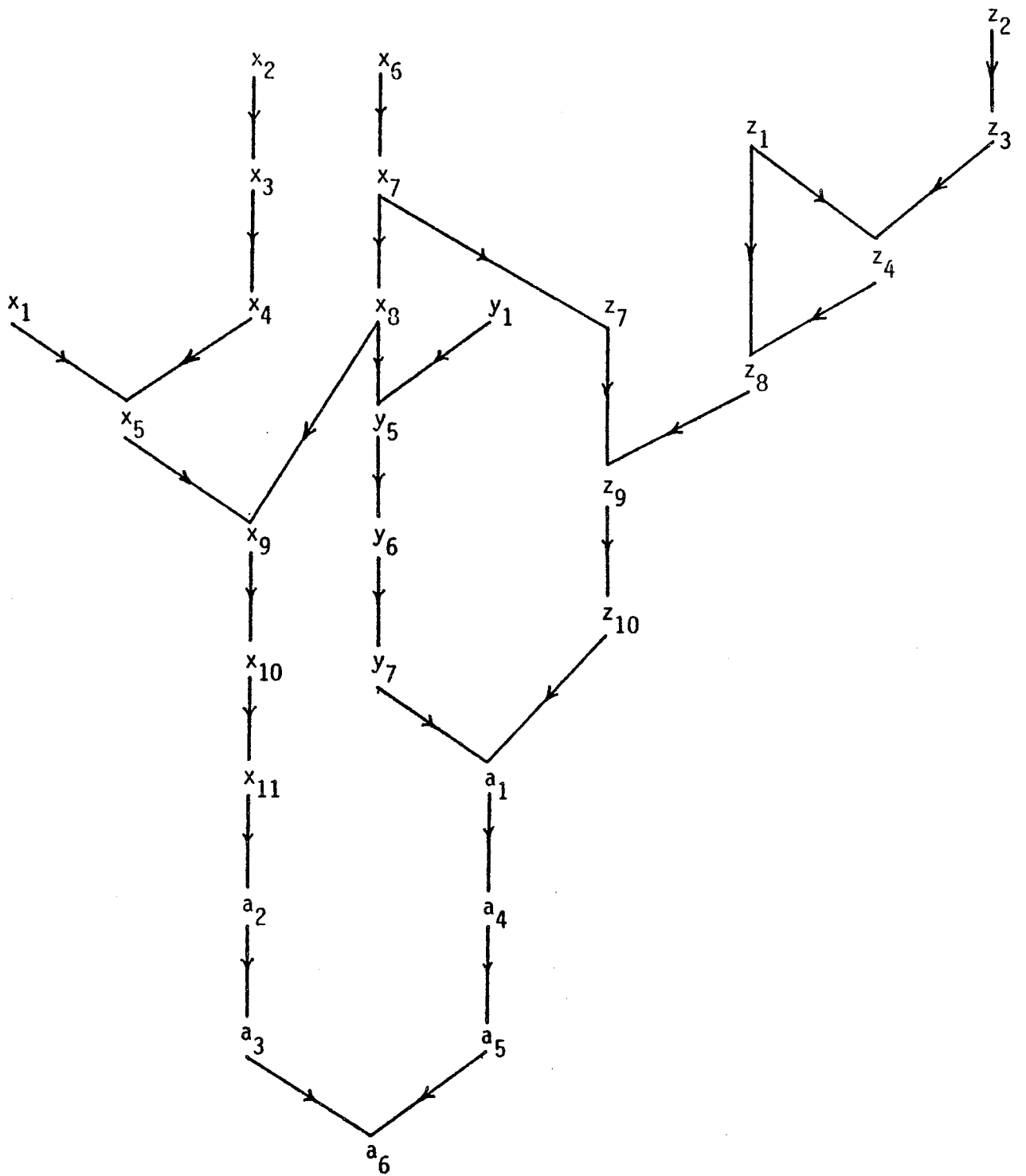


On obtient enfin le graphe de représentation de  $\mathcal{S}_3 \wedge_3 \mathcal{S}_5 \wedge_5 A_5$  en rapprochant les graphes ainsi obtenus. Notons la fusion des sommets  $x_6, x_7, x_8$  avec respectivement  $y_2, y_3, y_4$  puisque :

$$\phi_1^{-1}(x_6) = \phi_2^{-1}(y_2) ; \phi_1^{-1}(x_7) = \phi_2^{-1}(y_3) \text{ et } \phi_1^{-1}(x_8) = \phi_2^{-1}(y_4).$$

Nous donnons ci-dessous les derniers noms de sommets et les énoncés qu'ils représentent.

- $\forall x(x \in A \supset x \in B)$   $a_2$
- $\forall x(x \in A \wedge B \sim x \in A) \supset \forall x(x \in A \supset x \in B)$   $a_3$
- $\forall x(x \in A \wedge B \sim x \in A)$   $a_4$
- $\forall x(x \in A \supset x \in B) \supset \forall x(x \in A \wedge B \sim x \in A)$   $a_5$
- $\forall x(x \in A \supset x \in B) \sim \forall x(x \in A \wedge B \sim x \in A)$   $a_6$



Remarque : Dans la suite, pour que les graphes soient plus aisés à déchiffrer, nous marquerons les sommets directement par les énoncés.

**PARTIE B**

**DE LA REDACTION**

**AU GRAPHE DE REPRESENTATION**





Nous avons signalé (introduction § IV-1.1) qu'un énoncé mathématique pouvait apparaître dans le discours exprimant un raisonnement sous différents aspects allant du formalisme mathématique à la langue courante, en passant par des mélanges de ces langages utilisant tous les dosages possibles. Nous avons gardé sous silence la présence éventuelle dans ces discours d'énoncés non-mathématiques, mais qui sont des réflexions de l'auteur sur sa propre activité ou sur son discours. Nous dirons de ces énoncés, qui ne font pas partie du raisonnement mais souvent expriment un propos sur ce raisonnement, qu'ils sont méta-mathématiques. Prenons l'exemple suivant extrait d'une copie d'un élève de quatrième année d'université. (l'énoncé du problème importe peu, il s'agit de théorie des langages).

1 "Montrer que  $A'$  est bien un automate fini déterministe  
 2  $A' = (V_T, Q/R, [q_1], F', \mu')$   
 3 où  $F' = \{[q], q \in F\}$   
 4 et  $\mu'$  est définie par  $\mu'(X, [q]) = [\mu(x, q)]$  ;  
 5 d'abord notons que  $Q/R$  est bien fini car on aura  
 6 au plus autant de classes que d'états de  $Q$ , et  $Q$   
 7 est fini ; même chose pour  $F'$ .  
 8 Maintenant il faut montrer que  $\mu'$  est bien définie.  
 9 On montrera alors que quel que soit le représentant  
 10  $q'$  que l'on prend dans la classe de  $q$  on a :  
 11  $\mu'(x, [q]) = [\mu(x, q')]$   
 12 On sait que  $\mu'(x, [q]) = [\mu(x, q)]$  , mais  $q' \in [q]$   
 13 donc  $q R_F q'$  et  $\mu(x, q) R \mu(x, q')$ .  
 14  $\implies [\mu(x, q)] = [\mu(x, q')]$   
 15  $\implies \mu'(x, [q]) = [\mu(x, q')]$  . "

Les énoncés des lignes 8 - 9 - 10 - 11 sont des énoncés méta-mathématiques qui annoncent le but de la démonstration et la stratégie utilisée ; de même les énoncés des lignes 1 à 4, qui sont un rappel de l'énoncé. Les lignes 5 à 7 expriment un raisonnement dans la langue courante, alors que les lignes 12 à 15 décrivent un raisonnement en utilisant pour les énoncés le formalisme mathématique.

La structure du raisonnement est indiquée par des mots :

"On sait que " (ligne 12), "mais" (ligne 12), "donc" (ligne 13) ;  
ou par des signes : " $\implies$ " (ligne 14) ; d'autres mots indiquent des énoncés  
méta-mathématiques comme "On montrera que ..." (ligne 9).

Nous appellerons *avertisseurs* les mots du discours utilisés pour  
signifier au lecteur :

- qu'un énoncé est méta-mathématique.
- la relation entre des énoncés mathématiques.

Parmi ces derniers nous distinguerons :

- les *avertisseurs d'inférence*
  - a) *ascendant*
  - b) *descendant*
- les *avertisseurs de traduction*
- les *avertisseurs de construction*
- les *avertisseurs de rattachement*.

Analyser une copie consistera donc à discerner les avertisseurs,  
repérer les énoncés.

### 0.1 Remarque.

Nous ne ferons pas ici une étude de l'utilisation des avertisseurs  
du point de vue linguistique, ceci est fait dans d'autres travaux.  
Nous énumérerons quelques-uns d'entre eux, qui nous semblent les plus courants.  
Les pages qui suivent ne constituent pas une étude exhaustive, mais fixent les  
idées sur la façon dont nous avons procédé pour passer d'une rédaction à sa  
représentation par un graphe. Elles permettent de faire face aux situations  
les plus courantes, mais les libertés de rédaction des élèves sont telles qu'il  
peut se présenter des situations que nous n'avons pas envisagées. Dans ce cas  
nous essayons simplement de comprendre ce que le texte tente d'explicitier.  
Nous ne définirons donc pas à l'issue de ces pages un automate permettant de  
passer du texte à sa représentation. (Lire à ce sujet le paragraphe IV).

## I - LES AVERTISSEURS

### I-1. Les avertisseurs d'inférence

Les avertisseurs d'inférence ont pour fonction d'indiquer une relation de dépendance entre deux listes d'énoncés, soit en stipulant les antécédents (ou pères), soit en stipulant les conséquents (ou fils). Nous dirons de l'avertisseur d'inférence qu'il est ascendant dans le premier cas, et qu'il est descendant dans le second cas. Soient  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  les deux listes d'énoncés, le schéma d'utilisation des avertisseurs est :

$$\mathcal{N}_1 < \text{avertisseur d'inférence} > \mathcal{N}_2.$$

Pour énumérer les avertisseurs que nous avons relevés nous considérons des listes réduites à un énoncé, nous envisagerons le cas général ensuite.

#### I-1.1. Les avertisseurs d'inférence ascendants.

Ce sont les mots ou groupes de mots synonymes de "Car", nous conserverons ce mot pour les désigner.  $A_1$  et  $A_2$  étant deux énoncés  $A_1$  car  $A_2$  signifie que  $A_2$  est le père de  $A_1$ , ce que nous traduisons par le graphe ci-contre. Nous avons relevé dans les rédactions les synonymes suivants :

... en effet ...  
 ... puisque ...  
 ... d'après ...  
 ... par ...



Prenons comme exemple la démonstration du théorème de Gauss : Si un nombre  $a$  divise le produit  $bc$  et s'il est premier avec  $b$ , alors il divise  $c$  :

- 1     Puisque  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux
- 2     d'après le théorème de Bezout il existe deux entiers relatifs
- 3      $x$  et  $y$  tels que
- 4      $ax + by = 1$

- 5 Multiplions par  $c$  les deux membres de cette égalité :
- 6  $acx + bcy = c$
- 7 Or,  $a$  divise  $ac$  et, par hypothèse,  $a$  divise  $bc$
- 8 donc  $a$  divise  $acx$  et  $bcy$ , donc leur somme
- 9  $acx + bcy$ , donc  $a$  divise  $c$ .

Le mot "*par*", ligne 7, est utilisé pour renvoyer à l'hypothèse, soulignons qu'on le rencontre aussi souvent pour renvoyer à une définition :

"... *par définition de* ..."

par exemple :

La somme de deux fonctions paires,  $f$  et  $g$ , est paire :

- 1  $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x)$  par définition de  $f + g$
- 2  $f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$  ( $f$  et  $g$  sont paires)
- 3  $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$  par définition de  $f + g$
- 4 donc  $(f + g)(-x) = (f + g)(x)$

On rencontre assez souvent dans les rédactions, comme à la ligne 2 de ce dernier exemple, un renvoi à un énoncé en le mettant simplement en marge du calcul et entre des parenthèses :

$A_1$  ( $A_2$ )

cela correspond au désir de rappeler l'énoncé antécédent sans vouloir insister trop, c'est un premier exemple où l'inférence est stipulée sans utiliser des mots de la langue courante.

### I-1.2. Les avertisseurs d'inférence descendants.

Ce sont les mots, ou groupes de mots, synonymes de "*donec*", nous utiliserons ce mot pour les désigner.  $A_1$  et  $A_2$  étant deux énoncés,  $A_1$  donc  $A_2$  signifie que  $A_1$  est le père de  $A_2$ , ce que nous traduisons par le graphe ci-contre.



Nous avons relevé dans les rédactions les synonymes suivants :

... on en déduit ...	... par conséquent ...
... donne ...	... puis ...
... devient ...	... alors ...

Prenons par exemple la démonstration de la régularité dans un groupe  $(G, *)$ ,  $e$  désigne l'élément neutre :

1 Soit l'égalité :  $b * a = c * a$ ,  
 2 multiplions les deux membres par l'inverse  $a^{-1}$  de  $a$  :  
 3  $(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$   
 4 La loi  $*$  est associative donc  $b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$   
 5  $a * a^{-1} = e$  par définition de l'inverse, d'où l'égalité précédente devient :  $b * e = c * e$ , par définition de  
 6 l'élément neutre :  $b = c$ .

L'inférence descendante n'est pas toujours stipulée par des mots, on utilise souvent des signes d'origine mathématique :

$\Rightarrow$  ou  $\rightarrow$

ou même la ponctuation, par exemple ligne 7 ; parfois la ponctuation est associée à des mots, par exemple :

... en conclusion : ...  
 ... enfin:...

Dans certaines rédactions l'inférence est implicite, seul un retour à la ligne permet de la saisir, nous reviendrons plus loin sur cet avertisseur qui présente quelques singularités. (§ I-1.7)

$A_1$  et  $A_2$  désignant des énoncés il y a encore les assemblages :

... si  $A_1$  on a  $A_2$  ...  
 ... si  $A_1$  alors  $A_2$  ...

Nous y reviendrons, car ils présentent quelques ambiguïtés (§ I-1.8).

### I-1.3. Remarque.

Notons que le choix de l'utilisation d'un avertisseur d'inférence ascendant ou descendant est essentiellement lié au style du rédacteur. Les plus souvent utilisés sont "donec", "car", et les signes " $\Rightarrow$ " ou " $\rightarrow$ ", les autres apparaissent en général lorsque le rédacteur a le souci d'une démonstration plus agréable à lire.

### I-1.4. Avertisseur d'inférence liant plusieurs énoncés.

En général l'avertisseur d'inférence se trouve entre deux listes d'énoncés, dont une au moins est réduite à un seul énoncé, par exemple :

$x \rightarrow \frac{1}{x}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R} - \{0\}$   
 et  $x \rightarrow \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et, la fonction  
 composée de deux fonctions continues est continue  
 donc  $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

ou encore :

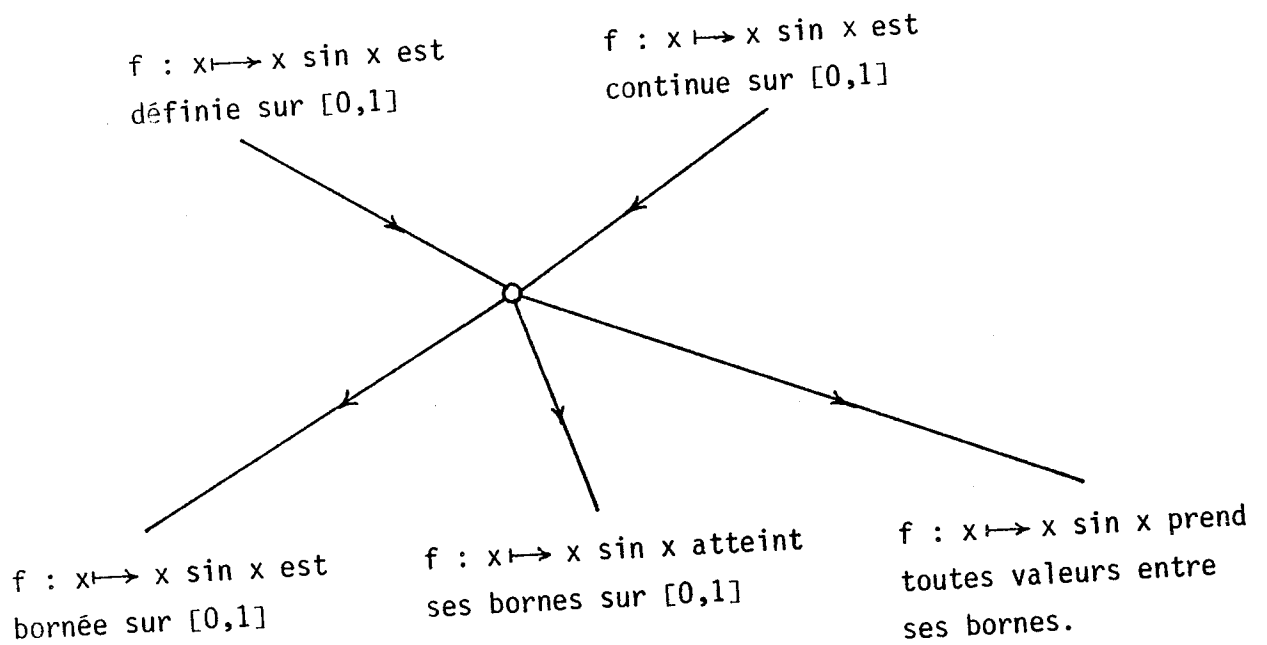
La relation "... est parallèle à ..." sur l'ensemble des droites du plan est une relation d'équivalence car une droite est parallèle à elle-même, si une droite D est parallèle à une droite D' alors D' est parallèle à D, et deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

Une énumération d'énoncés est donc une file d'énoncés séparés par ", " ou "; " ou le mot "et" ou un avertisseur de rattachement (voir § I-2.).

Si  $\mathcal{A}_1$  est une énumération des énoncés  $A_1, \dots, A_n$  ; et  $\mathcal{A}_2$  une énumération des énoncés  $A'_1, \dots, A'_p$  nous représenterons  $\mathcal{A}_1$  donc  $\mathcal{A}_2$ , et de même  $\mathcal{A}_2$  car  $\mathcal{A}_1$ , par une étoile à  $n + p$  branches :  $n$  entrées et  $p$  sorties, dont les entrées sont adjacentes aux sommets marqués  $A_1, \dots, A_n$  et les sorties sont adjacentes aux sommets marqués  $A'_1, \dots, A'_p$ .

Donnons enfin un exemple où ni  $\mathcal{K}_1$ , ni  $\mathcal{K}_2$  ne sont réduites à un seul énoncé.

La fonction  $f : x \mapsto x \sin x$  est définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  et elle y est continue donc elle est bornée, elle atteint ses bornes et elle prend toutes valeurs entre ses bornes.





I-1.5. Problèmes liés aux relations transitives.

I-1.5.1. Cas général.

Les deux textes qui suivent sont les rédactions proposées par deux élèves de première année de faculté, pour montrer qu'un ensemble non vide sur lequel est définie une loi de composition interne associative pour laquelle les équations en  $x$  :  $ax = b$  et  $xa = b$  ont toujours une solution, possède pour cette loi un élément neutre à droite. (Partie C § 0.2)

- 1A Nous savons que pour tout  $a \in G$  et pour tout  $b \in G$ , il existe  $x \in G$  tel que  $ax = b$   
 2A nous pouvons donc supposer  $a = b$ , nous avons alors  $ax = a$   
 3A  $ax = a \Leftrightarrow bax = ba \Leftrightarrow baxx = bax$  or  $ax = a$  donc  $baxx = ba$   
 4A nous avons  $baxx = ba$  et  
 5A  $ba(xx) = ba$  donc  $xx = x$  donc  $x = xx$  est élément neutre à droite

(Deug A 11)

- 1B  $a e = a \quad e \in G$   
 2B  $b = x' a \Rightarrow b e = x' a e = x' a = b$   
 3B donc  $e$  est l'élément neutre à droite

(Deug A 3)

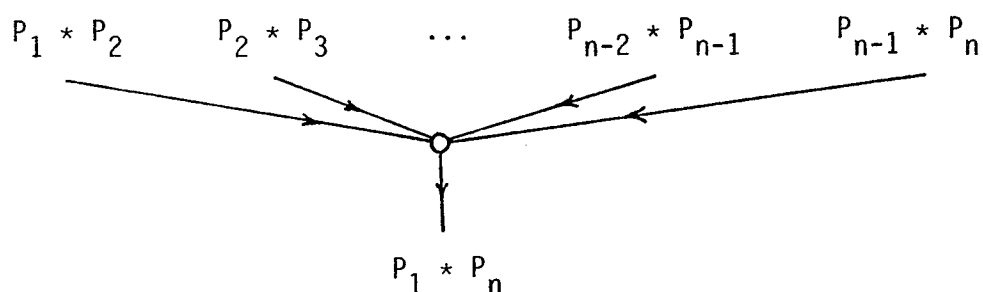
Nous ne ferons pas de commentaires approfondis sur ces solutions ; dans l'exemple 1 l'étudiant utilise à tort une propriété de régularité et semble ignorer la définition d'un élément neutre ; dans l'exemple 2 il manque certaines précisions (en particulier les quantificateurs), cependant le lecteur averti y reconnaît le squelette d'une solution correcte.

Si nous citons ici ces exemples c'est pour en retenir les lignes 3A et 2B. Ces phrases ne sont pas correctes du point de vue de la syntaxe des mathématiques ; cependant elles sont courantes dans les rédactions des élèves à la place d'une suite d'énoncés  $p * q$  lorsque  $*$  est le symbole d'une relation transitive.

Nous ne considérerons pas la chaîne  $P_1 * P_2 * \dots * P_n$  comme un seul énoncé, nous l'interpréterons de la façon suivante :

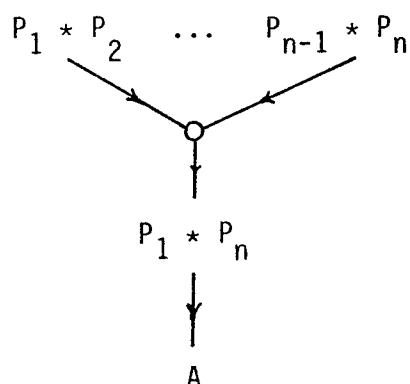
$$P_1 * P_2, P_2 * P_3, \dots, P_{n-2} * P_{n-1} * P_n \text{ donc } p_1 * P_n$$

Ou encore nous représenterons cette chaîne par le graphe :



On en déduit que la phrase  $P_1 * \dots * P_n$  donc A, est interprétée comme :

$P_1 * P_2, \dots, P_{n-2} * P_{n-1}$  et  $P_{n-1} * P_n$  donc  $P_1 * P_n$  donc A  
ou encore le graphe :



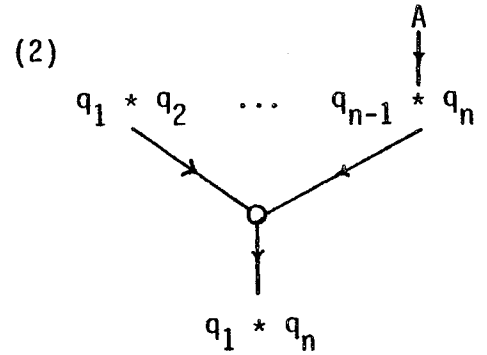
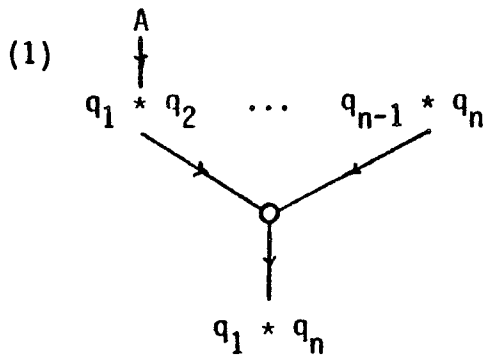
On interprêtera de la même façon la phrase A car  $P_1 * \dots * P_n$

On rencontre encore les phrases suivantes :

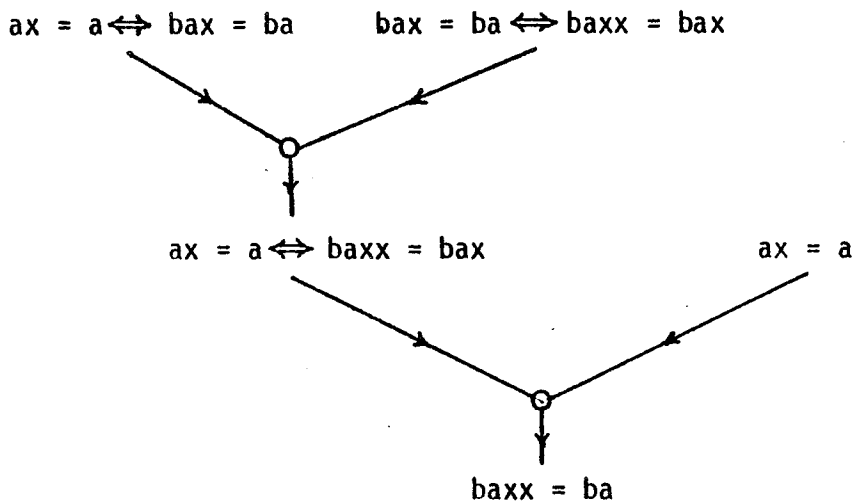
$$A \text{ donc } q_1 * q_2 \dots * q_n \quad (1)$$

$$q_1 * q_2 * \dots * q_n \text{ car } A \quad (2)$$

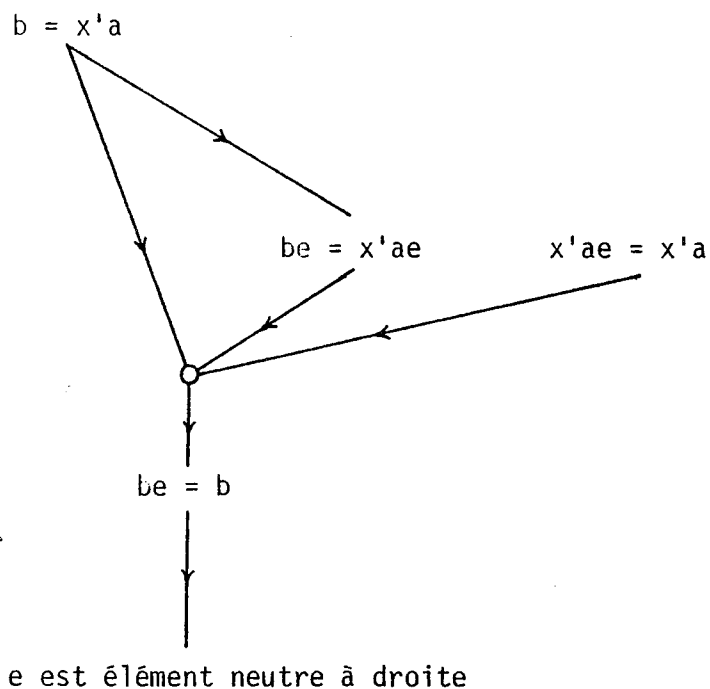
Nous conviendrons de traduire ces phrases par les graphes suivants :



Ainsi la ligne 3A sera traduite par le graphe suivant (le mot or indique un rattachement, la règle de représentation qui s'y attache est précisée au § 1-2).



Les lignes 2B et 3B sont représentées par le graphe suivant :



### I-1.5.2. Cas de l'égalité.

Donnons un nouvel exemple pris dans le même échantillon que le précédent :

- 1 "Supposons le cas où il existe  $x \in G$  tel que  $ax = b$  ①
- 2 on pose  $a = b$  d'où ① devient  $\begin{cases} ax = b \\ bx = a \end{cases}$
- 3 considérons  $a = bx = (ax)x = a$  car  $b = ax$
- 4 comme la loi est interne on aura  $(ax)x = a \iff a(xx) = a$
- 5 donc on trouve 1 élément  $y$  tel que  $ay = a \dots$ "

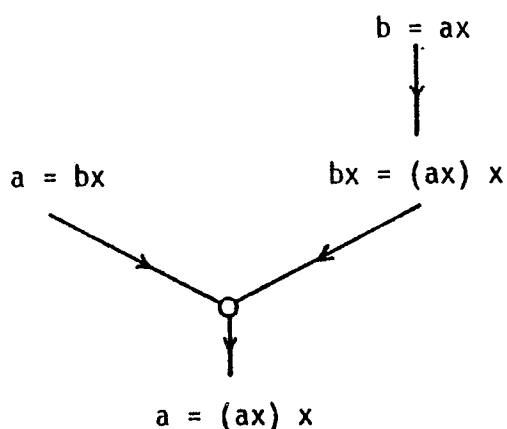
Si nous appliquons les règles énoncées au paragraphe précédent le premier énoncé de la ligne 3 est interprété comme :

$$a = bx, bx = (ax)x \text{ et } (ax)x = a \text{ donc } a = a$$

Il est bien évident que ceci est très différent de ce que le rédacteur a voulu indiquer, il ne s'attache qu'à la dernière égalité pour la suite de son calcul. Cette situation est assez fréquente pour que nous fixions la traduction par une règle.

La chaîne  $p_1 = \dots = p_n$ , si  $p_1$  et  $p_n$  sont identiques est lue comme  $p_1 = \dots = p_{n-1}$ .

Nous obtenons pour la ligne 3 la traduction suivante :



Nous généralisons cette règle au cas d'une chaîne  $p_1 * \dots * p_n$ , où  $*$  est le symbole d'une relation d'équivalence classique ( $\Leftrightarrow$ , //—... est parallèle à —...,  $\equiv$ —... est congru à —..., etc...) ou encore le symbole d'une relation dont l'élève a établi explicitement que c'est une relation d'équivalence ; pour ces relations là :

Si  $A_1$  est identique à  $A_n$ , alors  $A_1 * \dots * A_n$  est interprété comme  $A_1 * \dots * A_{n-1}$

### I-1.5.3. Quelques autres situations et leur règlement.

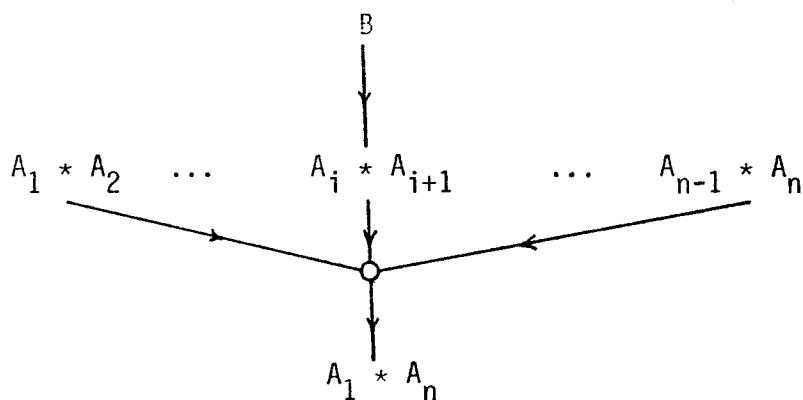
Lorsque nous affirmons que le discours qui décrit un raisonnement est une file d'énoncés, nous énonçons une proposition qui est souvent fautive pour les documents écrits par les élèves ; ils utilisent souvent les deux dimensions de la page, en particulier pour justifier certains pas de calcul dans une chaîne  $A_1 * A_2 \dots * A_n$ . Les moyens utilisés sont très divers mais toujours explicites, sur le modèle :

$$\begin{array}{c}
 A_1 * \dots * A_i * A_{i+1} * \dots * A_n \\
 \uparrow \\
 B
 \end{array}$$

que nous traduirons comme :

$$A_1 * A_2, \dots, A_i * A_{i+1} \text{ car } B, \dots \text{ et } A_{n-1} * A_n \text{ donc } A_1 * A_n$$

et par le graphe :



Nous donnons ci-dessous deux exemples et les graphes qui les traduisent, ces exemples sont issus du même corpus que les précédents (solutions du problème utilisé dans la partie C) et nous ne citons que les phrases qui sont utiles pour illustrer ce paragraphe.

---


$$\text{on en déduit } a = (ax)x \stackrel{\text{car}}{=} a(xx) = a$$

↑  
car la loi est associative

---

(Deug A 9)

$$ax = b \Leftrightarrow (by)x = b \Leftrightarrow b(yx) = b$$

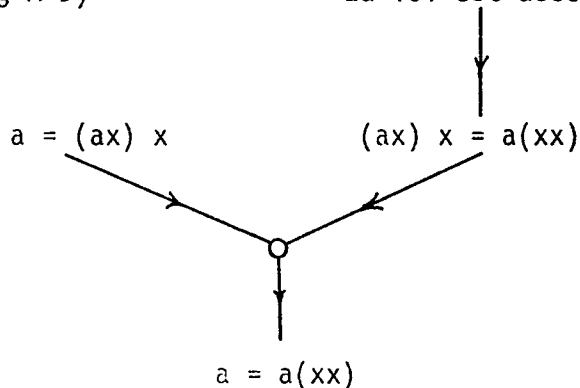
car associative

---

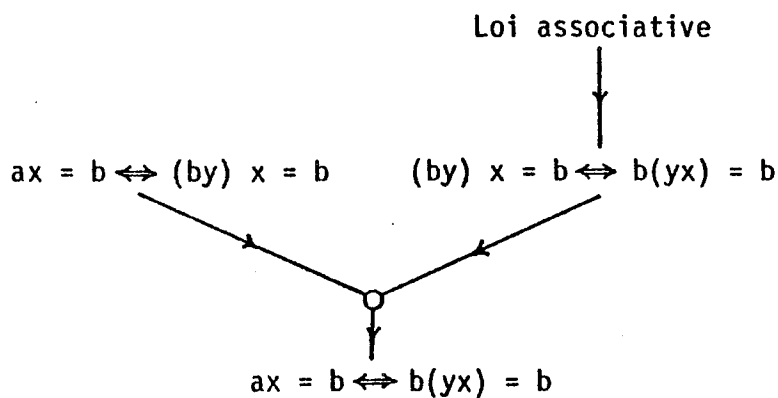
(Licence 26)

(Deug A 9)

La loi est associative



(Licence 26)



### I-1.6. Donc, premier mot d'une rédaction.

Nous pourrions, dans ce cas, qualifier "Donc" d'avertisseur d'inférence flou ; cette liberté est prise à cause du consensus existant entre le rédacteur et le lecteur, et on trouve cette licence essentiellement dans les rédactions scolaires. L'élève indique ainsi que l'antécédent est une donnée du problème mais il ne l'explique pas.

Ce cas de figure est fréquent et nous décidons d'adopter l'attitude suivante :

L'interprétation est faite en complétant la phrase de façon à obtenir une inférence correcte s'il n'y a pas d'ambiguïté, c'est-à-dire si il n'existe pas deux données susceptibles de convenir. Dans les autres cas, on traduit comme si le mot "Donc" ne figurait pas.

### I-1.7. Le retour à la ligne.

Dans le texte suivant  $e$  désigne l'élément neutre à droite d'un monoïde, ce texte est issu d'une solution au problème du § I-1.5.1.

---

Montrons que  $e$  est unique  
 Supposons qu'il y ait  $e'$  tel que  $a \cdot e' = a \cdot e = a$ .

$$(a \cdot e') \cdot e' = (a \cdot e) \cdot e'$$

$$a \cdot (e' \cdot e') = a \cdot (e \cdot e')$$

$$e'^2 = e \cdot e' \quad e = e'$$

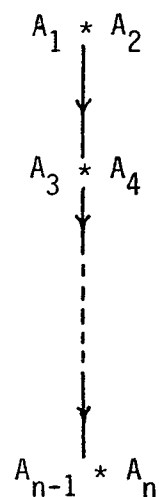
Pour le lecteur mathématicien il n'y a aucune ambiguïté sur la signification de ce texte, le retour à la ligne tient lieu d'avertisseur d'inférence descendant. Les lignes 3, 4 et 5 peuvent être traduites par :

- 3' "donc  $(ae')$   $e' = (ae)$   $e'$   
 4' donc  $a(e'e')$   $= a(ee')$   
 5' donc  $e'^2 = ee'$  "

Plus généralement,  $*$  étant un symbole de relation, si il n'y a pas d'ambiguïté sur la signification de la succession de lignes :

$$\begin{array}{l} A_1 * A_2 \\ A_3 * A_4 \\ \vdots \\ A_{n-1} * A_n \end{array}$$

Nous l'interprétons par le graphe :



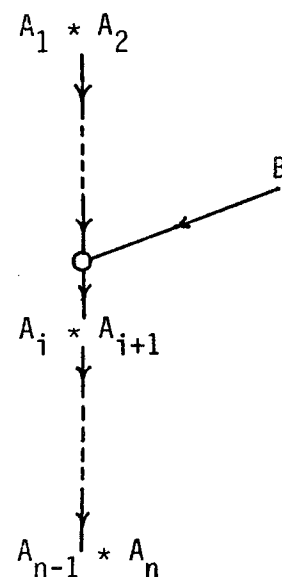
Cette situation se présente souvent dans la rédaction de calculs algébriques ( $*$  est  $=$ , ou  $<$ , ou  $\leq$  et  $A_i$  est une expression arithmétique).

Il peut se greffer sur une telle succession de lignes d'autres énoncés, mais seulement par des avertisseurs d'inférence ascendants. Et :

$$\begin{array}{l} A_1 * A_2 \\ \vdots \\ A_i * A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{n-1} * A_n \end{array}$$

car B

est traduit par le graphe:





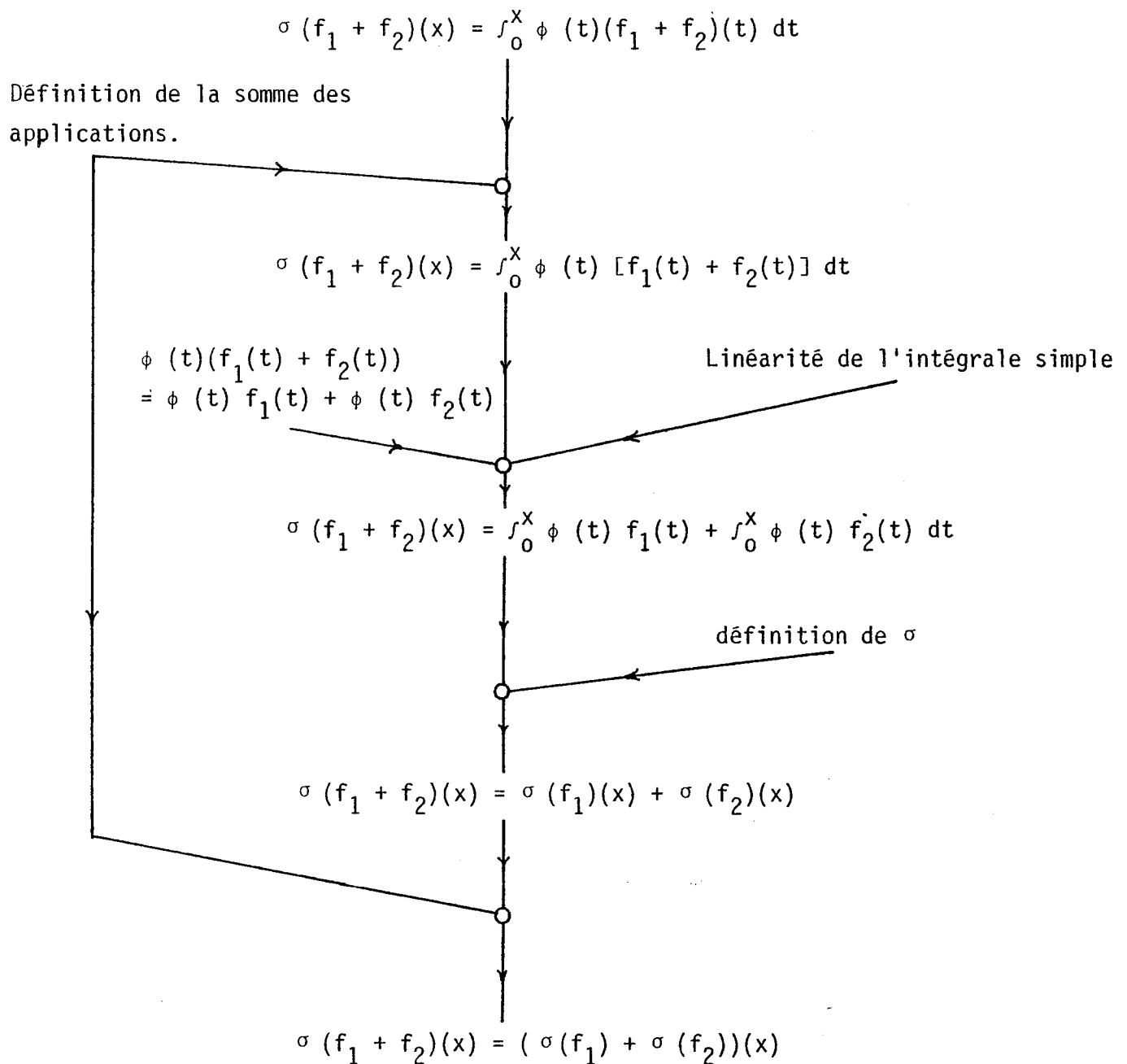
Donnons l'exemple de la représentation du calcul suivant, où

$$\sigma(f)(x) = \int_0^x \phi(t) f(t) dt \text{ avec } \phi \text{ et } f \text{ éléments de } \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) :$$

$$\begin{aligned} \sigma(f_1 + f_2)(x) &= \int_0^x \phi(t)(f_1 + f_2)(t) dt \\ &= \int_0^x \phi(t) [f_1(t) + f_2(t)] dt && \text{par définition} \\ &&& \text{de la somme des applications.} \\ &= \int_0^x \phi(t) f_1(t) dt + \int_0^x \phi(t) f_2(t) dt && \text{car} \\ &&& \phi(t)(f_1(t) + f_2(t)) = \phi(t) f_1(t) + \phi(t) f_2(t) \\ &&& \text{et grâce à la linéarité de l'intégrale simple.} \\ &= \sigma(f_1)(x) + \sigma(f_2)(x) && \text{(définition de } \sigma \text{)} \\ &= (\sigma(f_1) + \sigma(f_2))(x) && \text{par définition de la somme des} \\ &&& \text{applications.} \end{aligned}$$

[[c] p 24)

La partie gauche de chaque égalité est à compléter par  $\sigma(f_1 + f_2)(x)$  dont le rédacteur a fait l'économie de la répétition ; on obtient le graphe suivant :



I-1.8. Si ... on a ..., Si ... alors ...

Supposons que  $e$  existe, on a alors,  $\Lambda e = A$

(Deug A 9)

Si  $e$ , l'élément neutre existait, alors  $ae = a$ .

(Deug A 9)

D'après la deuxième propriété de la loi interne.

$ax = b$  si nous posons  $a = b$ , nous obtenons.

$x = e_1$  qui est l'élément neutre à droite pour la loi interne, car  ~~$a \cdot x \cdot y = b \cdot y \rightarrow x$~~

(Deug A 7)

Si l'on prend le couple  $(a, a) \in G$

Par définition: il existe  $xe$  tel que  $axe = a$

Donc:  $\forall a \in G$  il existe donc  $e$  tel que  
 $ae = a$

(Deug A 18)

Nous constatons que l'expression "si... alors..." peut correspondre à des comportements complètement différents, qui peuvent être hypothético-déductifs (c'est le cas des exemples 1 et 2), ou déductifs (c'est le cas des exemples 3 et 4). Il faut essayer au niveau de la représentation de conserver cette distinction. L'expression "si A alors B" lorsqu'elle traduit un comportement hypothético-déductif sera représentée comme :

$A(?)$  donc B ; où (?) concaténé à l'énoncé A marque son caractère hypothétique.

L'expression "si A alors B" est utilisée pour indiquer que l'on se place dans un cas particulier, elle se présente dans la rédaction sur le modèle

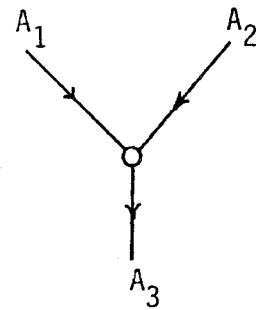
$A_1$ , si  $A_2$  alors  $A_3$

où:

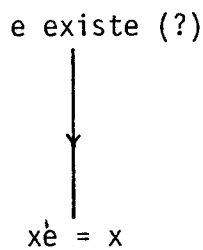
- soit  $A_1$  indique une affectation (un choix arbitraire) et  $A_3$  est obtenu en appliquant à  $A_2$  les transformations indiquées par  $A_1$ .

- Soit  $A_1$  indique un changement de variable, et  $A_3$  est une instance de  $A_2$ .

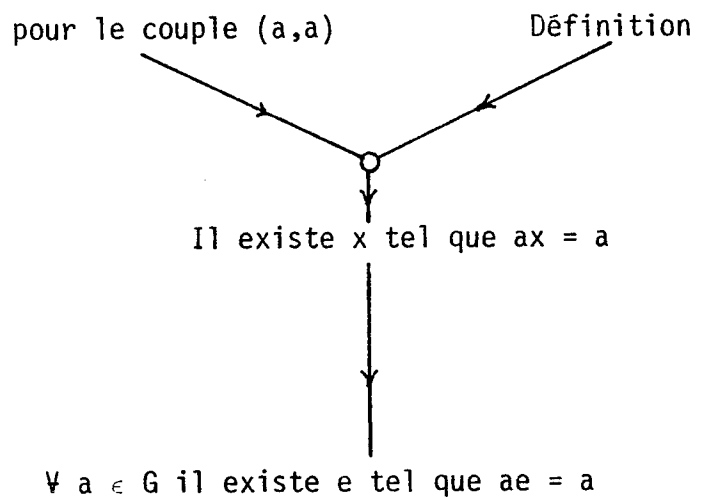
Et nous donnons de cette situation la représentation ci-contre.



Exemple 2 :



Exemple 4 :



### I-1.9. Si ... alors ... sinon

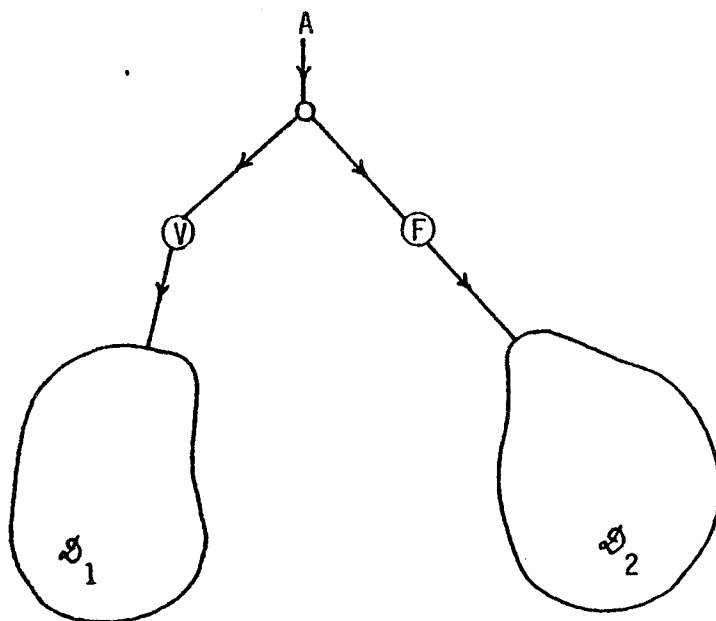
L'utilisation de "*si... alors... sinon...*" correspond à une étude par cas, et en général "*alors*" et "*sinon*" introduisent non pas un seul énoncé mais la rédaction d'une démonstration. En fait nous pourrions remplacer cette expression par :

... A, si A est vrai alors  $\mathcal{D}_1$  sinon  $\mathcal{D}_2$  ...

A désignant l'énoncé sur la vérité duquel porte l'alternative,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  les rédactions de deux démonstrations.

De par la syntaxe du français "*A est vrai*" (resp. "*A est faux*") infère le premier énoncé de  $\mathcal{D}_1$  (resp.  $\mathcal{D}_2$ ), à moins d'un effet de style, mais on sait sans ambiguïté rétablir l'ordre dans ce cas.

Nous adopterons la représentation suivante où  $\textcircled{V}$  et  $\textcircled{F}$  sont des symboles réservés, et où les "*patates*" représentent les démonstrations  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  :



Appliquons cette règle de représentation à l'exemple suivant.

On étudie la suite de terme général  $u_n = \frac{1 - a^n}{1 + a^n}$  avec  $a > 0$ .

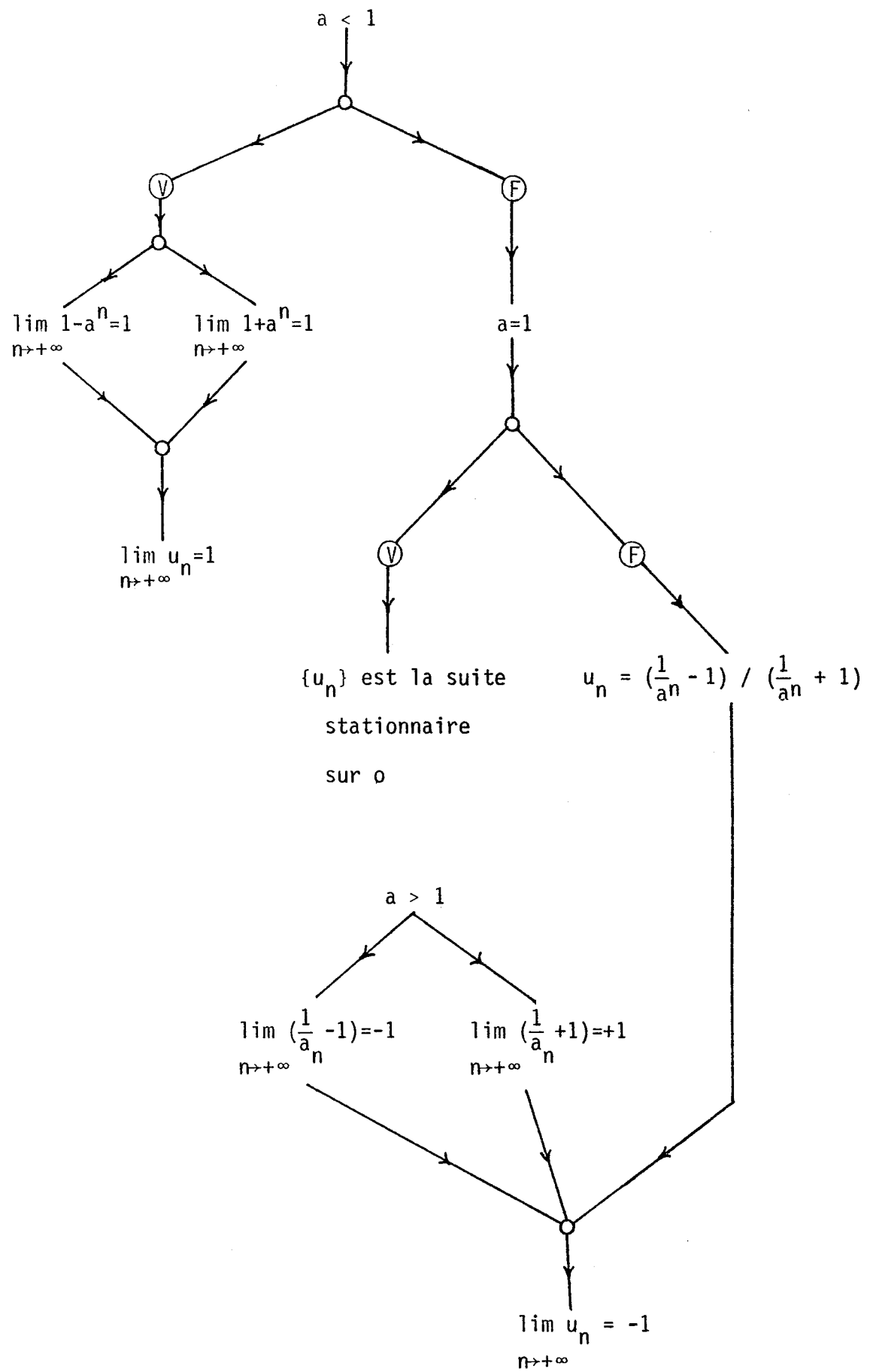
Si  $a < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - a^n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + a^n = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ ,  
 sinon si  $a = 1$  alors  $\{u_n\}$  est la suite stationnaire sur 0

sinon on définit  $u_n$  par :  $u_n = \frac{1/a^n - 1}{1/a^n + 1}$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/a^n - 1) = -1$  car  $a > 1$ , pour la même raison

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/a^n + 1) = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$

Démonstration à laquelle nous associons le graphe suivant :



## I-2. Les avertisseurs de rattachement

Nous regroupons dans cette catégorie des mots ou des expressions comme les suivants :

... mais ...      ... or ...      ... comme ...  
 ... nous savons par ailleurs que ...  
 ... nous savons que ...

En fait toutes les expressions construites autour du verbe "*savoir*" ont pour fonction d'indiquer un rattachement ; nous n'en faisons pas une liste exhaustive. Nous en avons déjà rencontré dans des exemples cités ici (§ 0 ligne 12, § I-1.1 ligne 7 du premier exemple).

Par l'indicateur de rattachement le rédacteur signifie que l'énoncé qui suit est issu :

- soit des informations fournies par l'énoncé du problème ou des informations construites au cours de la résolution du problème. (c'est souvent le cas des rattachements indiqués par ... or ...)

- soit de connaissances extérieures à l'énoncé du problème et à sa résolution, c'est à dire en général apportées par l'apprentissage des mathématiques. (c'est souvent le cas des rattachements indiqués par des expressions construites autour du verbe savoir).

En fait ces indicateurs, au niveau de la structure de la rédaction jouent le même rôle que "*et*" ou ",", dans une énumération d'énoncés, la différence tient à leur fort contenu sémantique : ils insistent sur le rattachement ou mettent en évidence un énoncé d'une liste ; ainsi la phrase suivante :

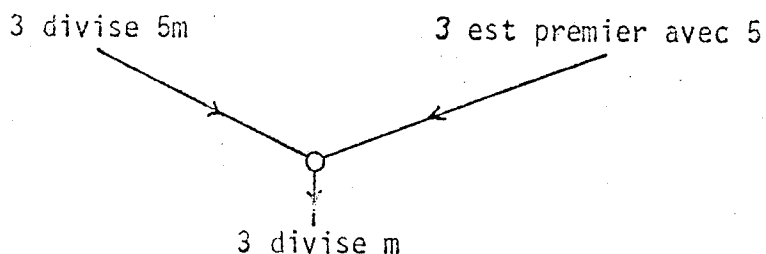
(1)      3 divise 5m or 3 est premier avec 5 donc 3 divise m

à la même structure logique, mais est entendue de façon différente de la phrase :

3 divise 5m et 3 est premier avec 5 donc 3 divise m.

Nous conviendrons de traduire ces indications par "*Et*" en nous ramenant ainsi à la représentation des listes d'énoncés.

Et l'exemple précédent se traduit par le graphe :



### I-3. Les avertisseurs de traduction

Ce sont des mots ou groupes de mots du type suivant :

... ou encore ...      ... en d'autres termes ...      ... c'est à dire ...  
 ... ce qui signifie ...      ... ce qui s'écrit ...

par exemple :

$\exists e \in G$  tel que  $\forall x \in G : xe = x$ , c'est à dire  $e$  est  
 élément neutre de  $G$ .

Ces avertisseurs présentent l'intérêt particulier de pouvoir indiquer un changement de champ de résolution, par exemple le passage de la géométrie classique à la géométrie analytique.

$C$  est le cercle de centre  $o$  et de rayon  $5$ , ou encore dans un repère orthonormé d'origine  $o$  :

$$C = \{M(x, y) / x^2 + y^2 = 25\}$$

Dans le cas où les deux énoncés  $A$  et  $B$ , d'une expression du type "...  $A$  ou encore  $B$  ...", ne sont pas synonymes relativement au calcul des prédicats du premier ordre nous traduisons cette phrase par le graphe ci-contre. Sinon les deux énoncés seront représentés par le même sommet du graphe associé à la rédaction.





#### I-4. Les avertisseurs de construction

Nous rangeons dans cette catégorie les mots tels que :

... soit ...	... en remplaçant ... par ...	... supposons ...
... pour ...	... considérons ...	
... on prend ...	... on pose ...	

et les avertisseurs de désignation [ \* ] :

appeler ...	écrire ...	noter ...
désigne ...	représenter ...	
lire ...	nommer ...	

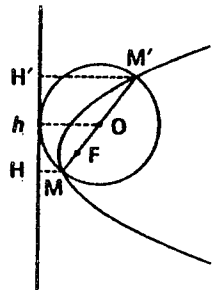
Donnons l'exemple de la résolution du petit exercice de géométrie analytique suivant :

On donne une parabole de foyer F et de directrice D. Une droite variable passant par F coupe la parabole en M et M'. Démontrer que le cercle de diamètre MM' est tangent à la directrice.

"Soit le cercle de diamètre MM'. Si nous désignons par O le centre de C, donc le milieu de MM', par H, H', h les projections de M, M', O sur la directrice, alors h est le milieu de HH', et :

$$\begin{aligned}
 Oh &= \frac{MH + M'H'}{2} \\
 &= \frac{MF + M'F}{2} && \text{car } MF = MH, M'F = M'H' \\
 &&& \text{(propriétés d'une parabole)} \\
 &= \frac{MM'}{2} \\
 &= OM
 \end{aligned}$$

ou encore oh est égal au rayon de C, donc le cercle de C est tangent à la directrice".



([c] p 243)

Un exemple de désignation :

R\* désigne l'ensemble des réels privés de 0.

---

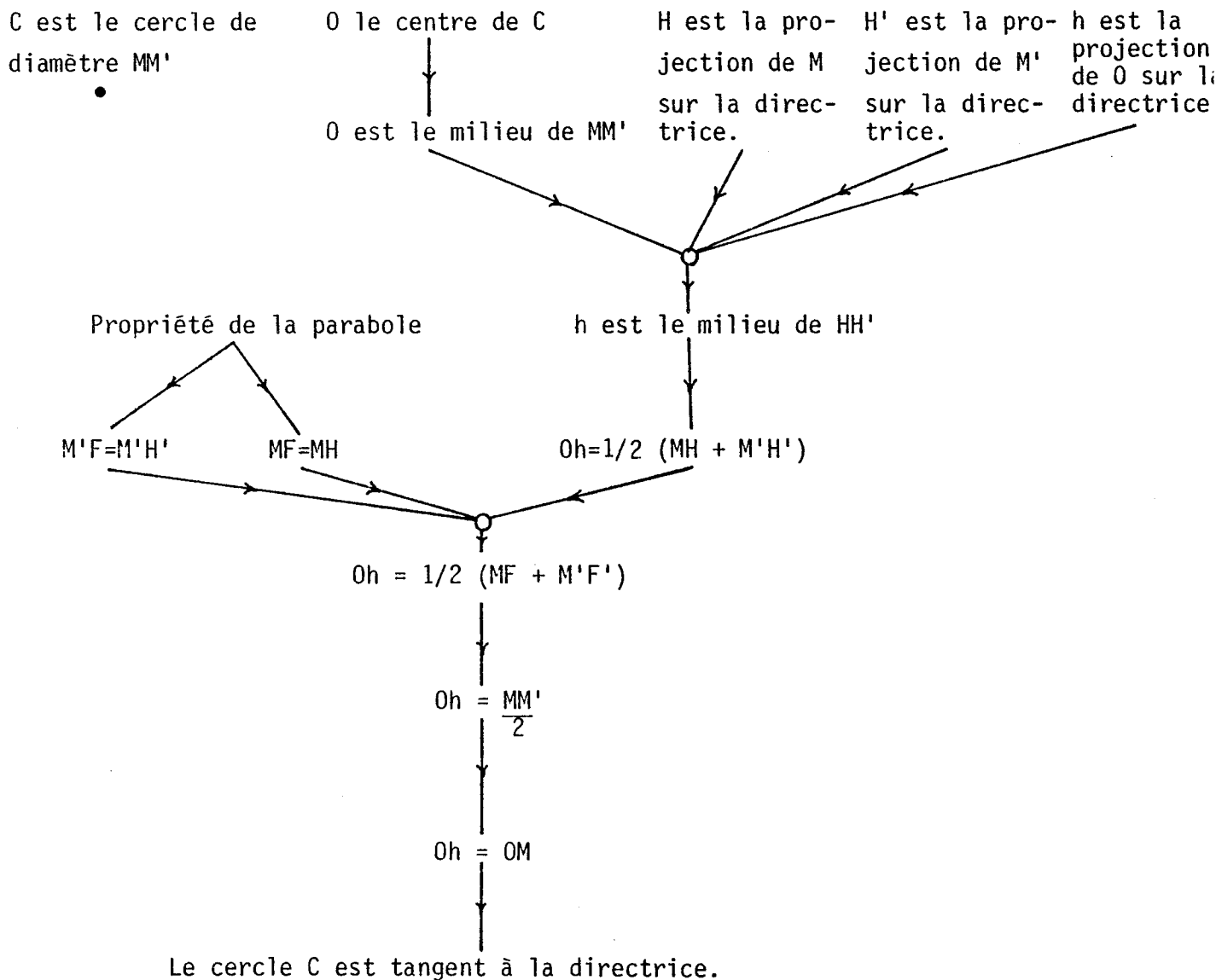
\* C. LABORDE les avertisseurs de désignation, document non publié  
GRENOBLE U.S.M.G.

Ces avertisseurs introduisent dans la rédaction des énoncés qui n'ont pas d'antécédents logiques, ou encore qui marquent des sommets sources du graphe de représentation. L'avertisseur nous permet de distinguer parmi les énoncés sans antécédents logiques ceux qui correspondent à une construction, ou à une désignation de ceux qui sont des S-axiomes, des données ou des hypothèses. Si nous n'avons pas autrement séparé les avertisseurs de désignation des avertisseurs de construction, c'est que souvent les deux fonctions sont étroitement mêlées. C'est ainsi que dans la phrase :

Soit  $D$  la droite perpendiculaire au plan  $\pi$  passant par le point  $M$  de  $\pi$ .

Il y a à la fois la construction d'un nouvel élément et une désignation : celle du nouvel objet introduit.

Donnons le graphe représentant la démonstration ci-dessus :



En fait lorsqu'un énoncé, qui a été introduit par une désignation, reste sans descendance on convient de ne pas le faire figurer dans le graphe, mais de le conserver comme élément d'un dictionnaire pour comprendre les autres énoncés ; puisque c'est bien cette fonction que le rédacteur lui assigne.

#### I-4. Enchâssement d'un avertisseur

Il est fréquent, lorsque la rédaction est faite en utilisant essentiellement la langue française, que l'avertisseur ne se trouve pas avant l'énoncé qu'il introduit, mais en apposition au verbe autour duquel s'articule la phrase.

Par exemple :

3 divise 5m et 3 est premier avec 5, 3 divise donc m

ou encore :

pour tout  $x \in G$  on a  $x e = x$ , e est *par conséquent*  
élément neutre à droite de G

On rétablit la forme standard en rejetant l'avertisseur en tête de l'énoncé, ainsi le dernier exemple devient :

pour tout  $x \in G$  on a  $x e = x$ , *par conséquent* e est élément  
neutre à droite de G

## II - LES ENONCES

Il y a lieu de distinguer parmi les énoncés que l'on rencontre dans une rédaction, les énoncés mathématiques et les énoncés méta-mathématiques. Nous allons essayer dans cette partie de distinguer différents types parmi ces derniers, et d'aborder le problème de la traduction dans le langage du CPl, des premiers.

## II-1. Les énoncés méta-mathématiques

Il s'agit de mots, d'expressions, de phrases par lesquels le rédacteur exprime un commentaire

- soit sur sa rédaction,
- soit sur son attitude vis à vis de la résolution du problème, du problème lui-même, ou de ce qu'il propose comme rédaction,
- soit enfin sur un sujet complètement étranger au problème et sa résolution.

Il est difficile de cerner le caractère méta-mathématique d'un énoncé autrement que par sa sémantique, cependant lorsque le propos tenu est assez près de la rédaction, il y a parfois la possibilité de décider sur la forme.

### II-1.1. Les indicateurs de démonstration.

Nous appelons indicateur de démonstration une expression construite sur les verbes "démontrer", "montrer", ou un de leurs synonymes. Les phrases introduites par ces indicateurs contiennent un texte mathématique, qui est le groupe complément du verbe sur lequel est construit l'indicateur, et par ailleurs des énoncés méta-mathématiques. Donnons quelques exemples :

Maintenant il faut montrer que  $\mu'$  est bien définie.

(§ 0 ligne 8)

Montrons que  $e$  est unique.

(§ I-1.7 ligne 1)

Ces phrases peuvent comme dans l'exemple ci-dessus annoncer une démonstration, en indiquant l'énoncé qui va être établi. Elles peuvent aussi présenter le principe d'une démonstration :

"Nous allons montrer par récurrence sur l'ordre de la substitution que toute substitution est un produit de transpositions".

(Extrait d'un cours sur les  
substitutions).

Ces phrases peuvent aller plus loin et anticiper en donnant une déduction d'un énoncé à partir de prémisses qui ne seront établies qu'ensuite :

Il s'agit d'établir la continuité d'une fonction  $f$  obtenue comme limite d'une suite de fonctions  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

"Nous allons montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue et que la suite converge uniformément vers  $f$ , on aura donc que  $f$  est continue"

(un élève de maîtrise de mathématique)

Ces phrases peuvent toutes se ramener à l'une des formes :

- (1) "Nous allons démontrer que  $\mathcal{E}$ "
- (2) "Nous allons démontrer que  $\mathcal{E}$  on aura  $\mathcal{D}$ "

où  $\mathcal{E}$  est un énoncé, ou une énumération d'énoncés, et  $\mathcal{D}$  est une déduction de prémisses  $\mathcal{E}$ . Nous transformons le texte de la façon suivante : on enlève cette phrase et si elle était effectivement suivie par la démonstration de  $\mathcal{E}$  :

Cas (1) : Si  $\mathcal{E}$  -ou un synonyme- ne figure pas à la fin de la démonstration on la conclut par "donc  $\mathcal{E}$ "

Cas (2) : Si  $\mathcal{E}$  -ou un synonyme- ne figure pas à la fin de la démonstration on la conclut par "donc  $\mathcal{E}, \mathcal{D}$ ". Si  $\mathcal{E}$  -ou un synonyme figure à la fin de la démonstration, mais pas  $\mathcal{D}$ , on la conclut par " $\mathcal{D}$ ".

Par exemple le texte des lignes 8 à 15 de l'exemple du § 0 devient :

- 8' On sait que  $\mu'(x, [q]) = [\mu(x, q)]$ , mais  $q' \in [q]$
- 9' donc  $q R q'$  et  $\mu(x, q) R \mu(x, q')$
- 10'  $\Rightarrow [\mu(x, q)] = [\mu(x, q')]$
- 11'  $\Rightarrow \mu'(x, [q]) = [\mu(x, q')]$
- 12' donc  $\forall q' \in [q] \mu'(x, [q]) = [\mu(x, q')]$
- 13' donc  $\mu'$  est bien définie

## II-1.2. Les arguments de procédure.

Les arguments de procédure sont utilisés chaque fois que le rédacteur ne désire pas donner le texte explicite d'une démonstration. On en rencontre de deux types :

### II-1.2.1. Ceux qui évacuent la démonstration.

Ce sont les arguments de procédure du type : "*trivial !*" ou "*il est évident que ...*". L'auteur ne fournit pas de démonstration en estimant que le lecteur la trouvera, lui aussi, évidente. Nous pensons, qu'en général, dans le cadre scolaire, il peut être délicat d'accepter ce type d'arguments. Aussi nous les considérerons comme strictement méta-mathématiques. C'est à dire que lors de la traduction de la démonstration ils disparaîtront, et les énoncés qu'ils introduisent apparaîtront ainsi sans filiation explicite.

### III-1.2.2. Ceux qui rappellent une procédure.

Les arguments qui renvoient effectivement à une procédure explicitée ailleurs sont de deux types que l'on peut illustrer par les expressions :

- (a) "... on démontre de la même façon que ..."
- (b) "... on fait exactement la même démonstration en remplaçant ... par ..."

a) ce premier argument de procédure ne renvoie pas au texte d'une démonstration tel qu'il peut apparaître dans la rédaction, mais au principe, à la stratégie sous-jacente à cette démonstration. Il peut y avoir entre la démonstration qui n'est pas explicitée et celle à laquelle on renvoie toutes les nuances de parenté : de l'identité, au nom des objets près, à l'analogie. Aussi décidons nous d'avoir dans ce cas la même attitude qu'au paragraphe précédent. Dans le graphe de représentation l'énoncé ainsi introduit apparaîtra sans filiation.

b) dans ce second cas la situation est tout à fait comparable à celle que l'on rencontre lors des appels de procédure dans un langage de programmation.

En effet cet argument exprime que la procédure qui n'est pas explicitée ne diffère de celle à laquelle on renvoie que par le nom des objets manipulés. Au niveau de la représentation si E est l'énoncé effectivement établi et F celui introduit par l'argument de procédure nous aurons :



Remarque :

Les expressions (a) et (b) illustrent les deux types d'arguments de procédure mais elles ne les caractérisent pas. Il peut se faire en effet que dans certains contextes "... on démontre de même que ..." signifie "... on fait exactement la même démonstration en remplaçant ... par ...".

En effet supposons que l'on ait dans une rédaction la situation suivante :

$$\begin{array}{l} \vdots \\ E(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p) \\ \text{On démontre de même que } F(y_1, \dots, y_n, b_1, \dots, b_p) \\ \vdots \end{array}$$

Où  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  (resp.  $\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$ ) est l'ensemble des variables de E (resp F) et  $\{a_i\}_{i=1, \dots, p}$  (resp.  $\{b_i\}_{i=1, \dots, p}$ ) est l'ensemble des constantes de E (resp. F) et il existe deux bijections  $\phi : \{x_i\} \rightarrow \{y_i\}$  et  $\psi : \{a_i\} \rightarrow \{b_i\}$  telles que  $E(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n), \psi(a_1), \dots, \psi(a_p))$  soit identique à  $F(y_1, \dots, y_n, b_1, \dots, b_p)$ .

Alors dans ce cas l'expression "on démontre de même que ..." doit être reconnue comme un argument de procédure du type (b).

### II-1.3. Les énoncés introduits par un verbe indiquant une action.

Il s'agit de verbes utilisés soit avec l'auteur comme sujet, soit sous une forme impersonnelle, soit sous une forme passive, et qui expriment une action sur des objets mathématiques.

Par exemple :

"Soit l'égalité :  $b * a = c * a$ ,

multiplions les deux membres par l'inverse  $a^{-1}$  de  $a$  :

$$(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1} "$$

(§ I-1.2. Lignes 1 à 3 de l'exemple)

### II-1.4. Expressions conditionnelles.

Il s'agit d'expressions, d'énoncés de caractère essentiellement hypothétique et qui ne peuvent se ranger parmi les expressions si ... alors ... des paragraphes I-1.8 et I-1.9. Comme par exemple la dernière phrase de l'exemple suivant :

---

l'élément neutre à droite pour cette loi  
vérifie :

$$\forall a \in G, a \cdot e = a.$$

et si on a  $\forall a, b \in G$  :

$$ax = b$$

C'est vrai si on prend  $a = b$

ce qui donne  $ax = a$ .

si  $x = e$  l'existence de cet élément est  
sûr. ↓  
neutre



### II-1.5. Les phrases interrogatives.

Ces phrases seront considérées comme des énoncés méta-mathématiques ; pour certaines d'entre elles nous adopterons un traitement particulier. Ces phrases sont utilisées par le rédacteur pour se poser "à haute voix" des questions qui nous permettent de comprendre sa démarche. Elles sont rares dans les rédactions émanant d'élèves, cependant on en rencontre :

---

La propriété ① dit :  $\forall a \in G, \forall b \in G, \exists x \in G \text{ tq } ax = b$   
 ceci est donc valable pour le cas où  $a = b$   
 on obtient alors  $ax = a$   $x$  sera noté  $e$ .  
 c'est la définition de l'élément neutre à droite. Mais ce neutre à droite  
 est-il le même pour tout élément de  $G$ ? est-il unique?

---

(Deug A 8)

Nous traiterons d'une façon spéciale les phrases interrogatives qui portent sur un énoncé mathématique et qui correspondent au schéma de rédaction suivant :

est-ce que E ? oui, car ...

que nous rétablirons sous la forme affirmative :

E car ...

De même le schéma de rédaction :

est-ce que E ? non, car ...

sera remplacé par la forme affirmative :

$\neg E$  car ...

Par exemple :

$$\det M(a,b) = a^2 + 3ab + 5b^2$$

Supposons  $b$  fixé, existe-t'il alors  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\det M(a,b) = 0$  ?

non, car  $b^2(9 - 20) < 0$  donc l'équation n'a pas de racine réelle. Par conséquent la matrice  $M(a,b)$  est inversible.

ce texte devient :

$$\det M(a,b) = a^2 + 3ab + 5b^2$$

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :  $\det M(a,b) \neq 0$  car  $b^2(9 - 20) < 0$  donc l'équation n'a pas de racine réelle.

Par conséquent la matrice  $M(a,b)$  est inversible.

## II-1.6. Quelques remarques supplémentaires.

### II-1.6.1. Présence de mots méta-mathématiques dans un énoncé mathématique.

A l'intérieur même d'un énoncé mathématique lorsqu'il est exprimé dans la langue française, on rencontre parfois des mots dont la fonction est étrangère au contenu mathématique. Un de ces mots est souvent utilisé : "Bien", que l'on trouve en apposition au verbe qui est au centre de l'énoncé.

Il permet de souligner cet énoncé pour le lecteur, ou d'exprimer à cet endroit la conviction du rédacteur :

Dans un livre d'exercices corrigés à la fin d'une démonstration pour établir qu'un endomorphisme d'espace vectoriel est une transformation orthogonale :

"... Donc  $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\|$ , donc  $f$  conserve bien la norme"

([C] p 107)

### II-1.6.2. Indications pour la lecture, et confidences.

Signalons, pour finir, la présence éventuelle dans une rédaction d'énoncés méta-mathématiques dont la fonction est de faciliter la lecture de la rédaction. Comme par exemple cette indication sur la mise en page :

La figure se trouve sur une feuille séparée

ou

Les justifications des résultats numériques se trouvent en dernière page.

Parfois ces énoncés méta-mathématiques sont une confiance du rédacteur au lecteur sur son comportement au cours de la résolution du problème, ou son opinion sur cette résolution. Ce dernier cas peut se rencontrer dans des rédactions à des fins pédagogiques, on en trouvera de nombreux exemples dans POLYA ("*Solutions des exercices*" in [8] et [9]). On en rencontre beaucoup moins dans les rédactions d'origine scolaire, où parfois le discours sur un raisonnement se réduit au seul énoncé méta-mathématique :

Je ne sais pas faire

## II-2. Les énoncés mathématiques

Nous l'avons déjà souligné dans l'introduction (§ IV 1.1.), parce que les élèves mêlent la langue courante et le formalisme mathématique, un même énoncé peut se présenter sous des formes différentes et cependant avoir le même contenu mathématique. Pour cela nous traduirons tous les énoncés dans un même langage : celui du calcul des prédicats. Ainsi deux énoncés seront considérés comme synonymes s'ils ont la même traduction dans le langage du CPl.

Nous construirons notre dictionnaire de thème à partir de celui proposé par S.C. KLEENE dans [30].

§ 14 Applications au langage usuel : analyse d'arguments.

§ 27 Applications au langage usuel : compléments sur la traduction des mots par des symboles.

Nous n'en retiendrons que les formes susceptibles d'apparaître dans la rédaction d'un texte mathématique.

### II-2.1. Traduction des phrases contenant les connecteurs ET, OU.

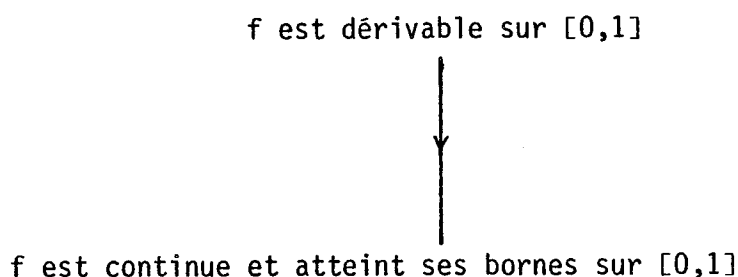
Nous ne considérerons, dans une rédaction, que les connecteurs ET et OU sont les connecteurs logiques, que lorsque par un moyen quelconque l'auteur signifie que l'énoncé qui les contient est bien un seul énoncé. Dans les autres cas nous les considérerons par leur fonction grammaticale.

Pour signifier qu'il s'agit d'un seul énoncé l'auteur utilise des séparateurs : saut à la ligne, ":" , ";" , "." , qui le délimitent:

Par exemple :

f est dérivable sur  $[0,1]$  donc : f est continue et atteint ses bornes sur  $[0,1]$

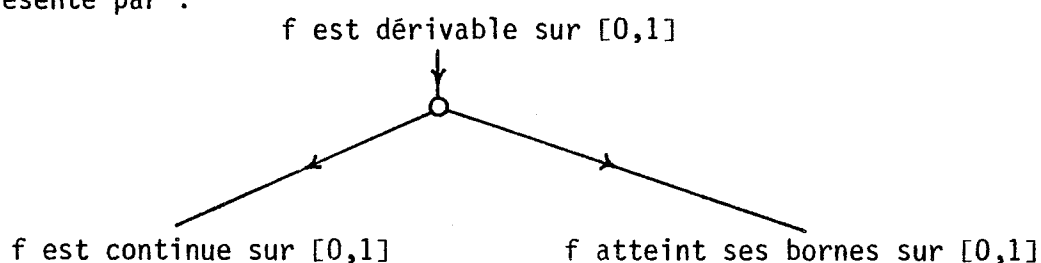
sera traduit par le graphe :



Par contre :

f est dérivable sur  $[0,1]$  donc elle est continue et atteint ses bornes sur  $[0,1]$ .

est représenté par :



### II-2.2. L'avertisseur d'inférence descendant et l'implication logique.

Nous adopterons la même attitude qu'au paragraphe précédent.

Une phrase contenant un avertisseur d'inférence descendant ne sera considérée comme une implication, c'est à dire un énoncé du type  $A \supset B$ , que si l'auteur signifie par un moyen quelconque (en général un séparateur) qu'il s'agit d'un seul énoncé. Cette règle de conduite est indispensable étant donné l'ambiguïté qu'il y a sur le rôle du symbole " $\Rightarrow$ ".

De même nous considérerons que l'expression "Si ... alors ..." traduit une implication si elle est délimitée comme un énoncé unique.

### III-2.3. Le symbole $\Leftrightarrow$ .

La traduction d'énoncés contenant ce symbole se heurte aux mêmes difficultés que celles rencontrées pour traduire les énoncés ou figurent Et, Ou,  $\Rightarrow$ . En effet le symbole  $\Leftrightarrow$  peut être interprété comme un symbole relationnel ou comme un élément du méta-langage qui marque à la fois une inférence et sa réciproque.

Nous avons pu constater deux cas :

- soit le rédacteur développe une chaîne d'équivalence pour parvenir à un résultat qui s'exprime lui aussi comme l'équivalence de deux énoncés, comme dans la phrase suivante :

$$\begin{aligned} "d(\vec{v}, \vec{v}') = 0 \Leftrightarrow n(\vec{v} - \vec{v}') = 0 \Leftrightarrow \vec{v} - \vec{v}' = 0 \text{ (d'après } N_1) \\ \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{v}' \text{ donc } D_1 \text{ est vérifiée}" \end{aligned}$$

(Analyse, Terminales CDE [a])

(où  $n$  désigne une norme sur un espace vectoriel,  $d$  est définie par  $d(\vec{v}, \vec{v}') = n(\vec{v} - \vec{v}')$ ,  $N_1$  et  $D_1$  sont les propriétés de séparation respectivement d'une norme et d'une distance).

- soit à la suite d'une équivalence ou d'une chaîne d'équivalences, le rédacteur ne retient qu'une des inférences sous-jacentes, alors la deuxième interprétation fait apparaître des voies inutiles qui proviennent du fait que l'équivalence est trop riche et non du fait que ces voies aient été suivies par le rédacteur.

Il semble donc raisonnable de retenir la première interprétation, ainsi l'exemple précédent a pour traduction :

$$d(\vec{v}, \vec{v}') = 0 \iff n(\vec{v} - \vec{v}') = 0, \quad n(\vec{v} - \vec{v}') = 0 \iff \vec{v} - \vec{v}' = \vec{0}$$

$$\text{d'après } N_1, \text{ et } \vec{v} - \vec{v}' = 0 \iff \vec{v} = \vec{v}' \text{ donc}$$

$$d(\vec{v}, \vec{v}') = 0 \iff \vec{v} = \vec{v}' \text{ d'où } D_1 \text{ est vérifiée.}$$

#### II-2.4. La traduction des mots par des symboles.

Le dictionnaire de thème que nous donnons ici est établi à partir de celui proposé par S.C. KLEENE. A droite figurent les écritures symboliques à gauche des traductions possibles dans la langue courante.

A si et seulement si B      A ssi B [abréviation]  
A si B, et B si A      A est équivalent à B

Si A alors B et réciproquement

A est condition nécessaire et suffisante de B

Pour que A il faut et il suffit que B

Si A alors B      B si A      A seulement si B

A donc B      B lorsque A      A seulement lorsque B

A est condition suffisante de B

B est condition nécessaire de A

A implique B      A entraîne B

A et B

A ou B, ou les deux      A ou B      soit A, soit B

A ou B mais pas les deux

ni A, ni B

Non A [ce que l'on obtient en transformant A en un énoncé négatif].

A ~ B

A > B

A & B

A ∨ B

A ∨ B & ¬(A & B)

{ ¬(A ∨ B)  
¬A & ¬B

¬A

Pour tout $x$ , $A(x)$	Pour chaque $x$ , $A(x)$		
Pour un $x$ arbitraire $A(x)$	Pour un $x$ quelconque, $A(x)$		$\forall x A(x)$
Quel que soit $x$ , $A(x)$	On a toujours $A(x)$		
Pour quelques $x$ , $A(x)$	Pour un $x$ approprié $A(x)$		
Il existe un $x$ tel que $A(x)$	Il y a un $x$ tel que $A(x)$		$\exists x A(x)$
	Il y a des $x$ tels que $A(x)$		
Non pour tout $x$ , $A(x)$	$A(x)$ n'est pas toujours vrai		$\neg \forall x A(x)$
$A(x)$ n'est pas vrai pour tout $x$			
Pour tout $x$ , non $A(x)$	$A(x)$ est toujours faux		$\forall x \neg A(x)$
Il n'existe pas de $x$ tel que $A(x)$			
Il n'existe pas un $x$ tel que $A(x)$		$\neg \exists x A(x)$	
Il n'existe aucun $x$ tel que $A(x)$			
Pour quelque $x$ , non $A(x)$		$\exists x \neg A(x)$	
Si $S(x)$ pour un $x$ , alors $P$		$\exists x S(x) \supset P$	
Si $S$ , alors pour tout $x$ , $P(x)$		$S \supset \forall x P(x)$	

### III - DE LA REDACTION A SA REPRESENTATION PAR UN GRAPHE

Le passage du discours exprimant la résolution d'un problème au graphe qui le représente se fera en trois étapes que nous allons détailler : la suppression des énoncés méta-mathématiques, la traduction des énoncés mathématiques dans le langage du CPl, et enfin la construction du graphe de représentation.

#### III-1. La suppression des énoncés méta-mathématiques

Nous ne pouvons énoncer de règles syntaxiques qui permettent de déterminer si un énoncé est mathématique ou méta-mathématique.

Nous les reconnaissons à leur signification lors de la lecture de la démonstration. Si, par nature même, un énoncé méta-mathématique ne fait pas partie de la démonstration, il peut cependant être indispensable à la compréhension. C'est le cas des indicateurs de démonstration (§ II-1.1), de certains arguments de procédure (§ II-1.2.2.) et de certaines phrases de tournure interrogative (§ II-1.5). Aussi notre conduite ne sera pas la même pour tous les énoncés méta-mathématiques. Nous transformerons le texte de la façon indiquée dans les paragraphes correspondants, pour les indicateurs de démonstration et les phrases interrogatives.

Après cette opération nous enlèverons du texte les mots, les phrases, les expressions méta-mathématiques à l'exclusion des arguments de procédure qui n'évacuent pas une démonstration.

Le texte est alors un ensemble structuré (ou non) d'avertisseurs, d'arguments de procédure et d'énoncés mathématiques.

### III-2. La traduction dans le langage du calcul des prédicats

#### III-2.1. La traduction des énoncés.

Lorsqu'un énoncé mathématique est rédigé en respectant les règles d'écriture du formalisme mathématique, nous le conservons tel qu'il se présente.

Lorsqu'il est rédigé dans la langue courante nous le traduisons dans le langage du CP1, en exprimant les prédicats eux mêmes dans le formalisme mathématique. Ainsi le théorème suivant d'algèbre :

Pour que deux vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$  soient parallèles, il faut et il suffit qu'il existe au moins un système de nombres  $\lambda, \lambda'$ , non simultanément nuls et réalisant l'égalité  $\lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V}' = \vec{0}$

devient :

$$\forall \vec{V} \forall \vec{V}' (\vec{V}/\vec{V}' \sim \exists \lambda \exists \lambda' (\neg(\lambda = 0 \ \& \ \lambda' = 0) \ \& \ (\lambda\vec{V} + \lambda'\vec{V}' = \vec{0})))$$



Pour certains prédicats il n'existe pas de symbole classique pour les exprimer dans le formalisme mathématique. Dans ce cas nous utilisons des noms de prédicats, il convient alors de tenir à jour un dictionnaire que l'on adjoint à celui du paragraphe II-2.3.

Ainsi pour l'énoncé de géométrie :

Une application  $f$  de  $\pi$  dans  $\pi$  est une homothétie de centre  $o$  si, et seulement si : 1°  $f(o) = o$  ; 2° Pour toute droite  $D$ ,  $f(D)$  est une droite parallèle à  $D$ .

On désigne par HOM le prédicat :

HOM  $(x,y)$  :  $x$  est une homothétie de centre  $y$ .

l'énoncé devient :

HOM  $(f,o) \sim (f(o) = o \ \& \ (\forall D \ f(D) // D))$

### III-2.2. Portée des quantificateurs et des désignations.

#### III-2.2.1. Comment la question se pose.

Nous allons donner, pour illustrer ce paragraphe et les suivants, une démonstration de la propriété ci-dessous.

Soit  $G$  un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne partout définie et associative telle que :

$$\exists e \ \forall x \quad x.e = x$$

$$\forall x \ \exists x' \quad x.x' = e$$

alors  $(G, .)$  est un groupe.

Si cette démonstration ne paraît pas très naturelle, cela tient à ce que nous avons voulu y rassembler divers types d'expressions que l'on rencontre dans les rédactions.

Sa structure est un peu sophistiquée, mais cela nous sera utile pour illustrer les paragraphes suivants. Pour fixer les idées :

Les lignes 1 à 11 sont la démonstration de  $(\forall x \ e x = e \Rightarrow x = e)$

Les lignes 13 à 23 établissent l'existence d'un même inverse à gauche et à droite (et utilisent le résultat précédent)

La ligne 24 est la preuve que  $e$  est élément neutre.

Ces résultats préliminaires étant établis, les lignes 25, 26 et 27 démontrent que  $(G, .)$  est un groupe.

- 1 Soit  $x$  tel que  $e.x = e$ ,
- 2  $\exists x'$  tel que  $x.x' = e$  donc :
- 3  $(e.x).x' = e.x'$
- 4  $e.(x.x') = e.x'$  (associativité)
- 5  $e.e = e.x'$
- 6  $e = e.x'$
- 7 d'où  $x.(e.x') = x.e$
- 8  $(x.e).x' = x.e$  (associativité)
- 9  $x.x' = x$  ( $e$  est neutre à droite)
- 10  $e = x$
- 11 donc  $\forall x \ e.x = e \Rightarrow x = e$  (1)
- 12
- 13 Soit  $x \in G \exists x' : x.x' = e$  et,  $\exists x'' : x'.x'' = e$
- 14 et nous pouvons écrire :
- 15  $e.(x''.x') = (x.x').(x''.x') = (x.(x'.x'')).x' = (x.e).x'$
- 16  $= x.x' = e$
- 17 donc d'après (1) :  $x''.x' = e$
- 18 On en déduit :  $x''.x' = x.x'$
- 19  $(x''.x').x'' = (x.x').x''$
- 20  $x''.(x'.x'') = x.(x'.x'')$
- 21  $x''.e = x.e$
- 22  $x'' = x$

23 donc  $\forall x \exists x' x.x' = x'.x = e$  (2)

24 et d'autre part :  $x = x.e = x.(x'.x) = (x.x').x = e.x$  (3)

25 (3) et (2) expriment que  $e$  est élément neutre et que

26 tout élément  $a$  a un inverse, donc :

27  $G$  est un groupe pour la loi.

Dans cette rédaction, à part dans les lignes 25, 26 et 27, les énoncés sont écrits en utilisant le formalisme mathématique, et même le langage du CP1 (ligne 11). Ces énoncés sont des assemblages de lettres et de symboles. Les lettres servent à nommer les individus pour pouvoir les manipuler, les symboles expriment des relations entre individus ou des quantifications. Ainsi à plusieurs endroits de ce texte on rencontre des individus s'appelant  $e$ ,  $x$ ,  $x'$  etc.. Un même individu peut se trouver quantifié à un endroit du texte (tel  $x'$  à la ligne 2) et ne pas l'être à un autre endroit (le même  $x'$  à la ligne 3), et être quantifié à nouveau plus loin ( $x'$  à la ligne 13).

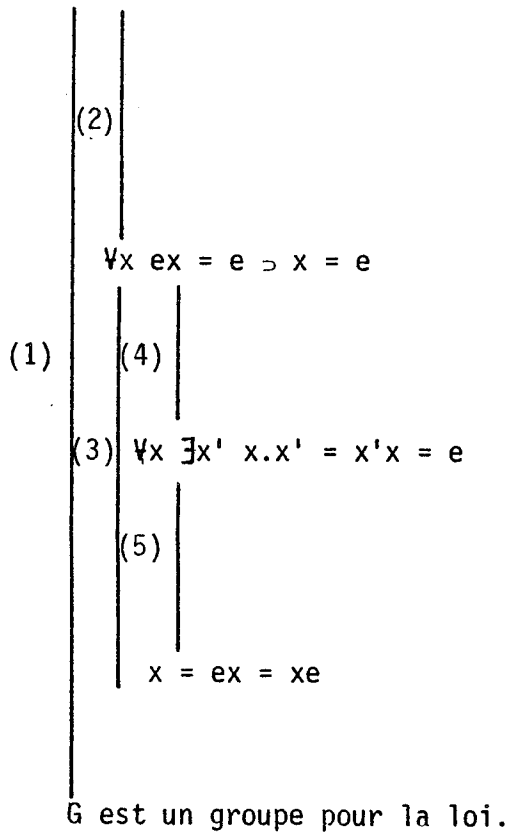
Les questions que nous nous posons sont celles de savoir : si un même nom ( $x'$ ) à des endroits différents (ligne 2, 6, 15, 23) désigne un même individu ou des individus différents ? Quelle est, dans le texte, la portée d'un quantificateur ?

### III-2.2.2. Structure de la rédaction.

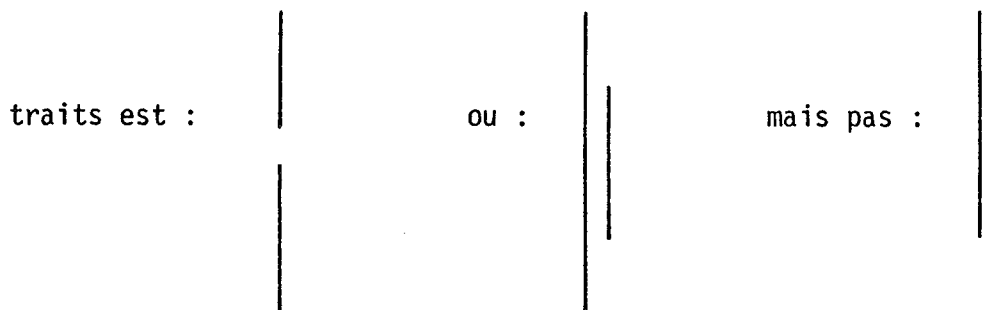
Avant de répondre à ces questions il nous faut préciser la structure de la rédaction d'une démonstration.

- A la lecture de copies d'élèves, ou d'ouvrages de mathématique, nous constatons que la rédaction ne déroule pas, en général, une suite continue d'inférences des données vers la conclusion. Elle est en fait un assemblage de morceaux dont l'origine est essentiellement, dans le cadre scolaire, le découpage de l'énoncé en questions ; plus généralement, la nécessité d'établir des résultats intermédiaires ou complémentaires. Nous allons, dans ce paragraphe, préciser comment de ce point de vue est structurée la rédaction d'une démonstration.

Auparavant, examinons l'exemple précédent, nous pouvons représenter sa structure par le schéma suivant. Le trait de gauche remplace la liste des inférences d'une démonstration :



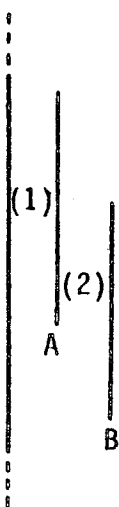
Nous remarquons sur ce schéma que la position relative de deux



Dans notre description nous faisons un emprunt au vocabulaire informatique en appelant *bloc* la démonstration d'un énoncé A, ainsi un bloc est représenté par la figure ci-contre. Et la remarque précédente peut se traduire par : deux blocs sont adjacents ((2) - (3) ou (4) - (5)) ; ou emboîtés ((1) - (2), (3) - (4), etc ...), mais pas enchevêtrés.

A

En fait aucune rédaction de démonstration ne peut se présenter comme un couple de blocs enchevêtrés, en effet supposons que l'on ait la situation suivante :



Elle ne peut correspondre au découpage du texte, car le découpage d'un texte ne peut se faire qu'en paragraphes adjacents ou emboîtés. Si on l'interprète au niveau de la structure logique, elle signifie que les premiers énoncés de (2) sont identiques aux derniers de (1), et que A et B sont des énoncés qu'il est nécessaire d'établir.

pour la suite, la représentation adéquate (et la rédaction correcte) est :



Et nous conclurons en énonçant :

Pour toute rédaction d'une démonstration on peut mettre en évidence une structure de bloc telle que :

- chaque bloc est lui-même une démonstration
- deux blocs ne peuvent être qu'adjacents ou emboîtés, mais jamais enchevêtrés.

Nous appellerons *bloc élémentaire*, un bloc qui ne peut être décomposé en blocs adjacents ou emboîtés, et par extension nous dirons qu'une (rédaction de) démonstration est élémentaire si le bloc associé est élémentaire.

### III-2.2.3. Remarque sur le repérage des blocs.

Nous avons déjà rencontré, sans la nommer, la notion de bloc au paragraphe I-1.9, l'expression "*si ... alors ... sinon ...*" provoquant éventuellement la création de deux blocs adjacents. D'autres expressions, méta-mathématiques, permettent de repérer dans une démonstration la création d'un bloc : les indicateurs de démonstration (§ II-1.1), les phrases de tournure interrogative (§ II-1.5) (parfois) ; et enfin tous les mots, tournures ou procédés de mise en page qui servent ordinairement à mettre en évidence des paragraphes dans la rédaction d'un texte.

### III-2.2.4. Réponse à la question.

La désignation joue sensiblement le même rôle dans la rédaction d'une démonstration que la déclaration de variable dans l'écriture d'un programme dans un langage de programmation.

Une désignation est valable pour toutes les lignes d'un bloc, à partir de la ligne où elle a été faite, et dans les blocs qui y sont emboîtés. Dans le cas d'un conflit, le règlement se fait au profit de la dernière désignation. Pour illustrer ces règles voici quelques cas de figure :

```

      ⋮
1     | x
      | ⋮
2     | soit x ∈ E
      |
3     |   | x
      |   | ⋮
4     |   | soit x ∈ F
      |   | ⋮
5     |   | x
      |
6     | x
      |
      | ⋮
  
```

Dans l'exemple ci-contre, à la ligne 6  $x$  est l'élément de  $E$  désigné à la ligne 2. Par contre  $x$  à la ligne 1 n'est pas cet élément car il se trouve avant la désignation dans ce bloc. A la ligne 3,  $x$  est encore l'élément désigné à la ligne 2 bien qu'il se trouve dans un bloc emboîté, par contre à la ligne 5 ce n'est plus le même élément mais celui qui est désigné à la ligne 4 dans le même bloc.

1 2 3 4 :	:   Soit $x \in E$         x   :   :   soit $x \in E$   :   :   x   :	Dans la situation ci-contre, $x$ à la ligne 2 ne peut renvoyer qu'à une désignation dans le bloc englobant, ou plus haut dans le bloc courant mais pas à celle de la ligne 1 qui se trouve dans un bloc adjacent. A la ligne 4 $x$ est le nom d'un élément de $E$ déterminé à la ligne 3, il s'agit donc d'un élément différent de celui nommé $x$ à la ligne 2, de ceux nommés $x$ dans le bloc englobant et aussi, bien sûr, dans le bloc adjacent.
-----------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Dans la rédaction d'une démonstration, désignation et quantification sont implicitement liées ; par exemple :

"Soit  $x$  un élément de  $E$ ..." c'est à la fois prendre un élément quelconque de l'ensemble  $E$  et le désigner du nom " $x$ ".

" $\exists x'$  tel que  $x.x' = e$  donc ..." (ligne 2 de l'exemple), en fait  $\exists$  est utilisé ici comme un signe de sténographie pour "il existe", il y a en même temps la désignation d'un élément par le nom " $x$ " et la marque du quantificateur existentiel.

Il y a une exception, nous n'avons jamais constaté que le symbole de quantification  $\forall$  soit accompagné implicitement d'une désignation <sup>(1)</sup>.

Avant d'énoncer une règle sur la portée des quantificateurs examinons la réécriture suivante des lignes 7 à 10 de l'exemple :

- 7' d'où  $e.(e.x') = x.e$
- 8'  $(x.e).x' = x.e$  ( $\forall x \forall x' \forall x'' (x.x').x'' = x.(x'.x'')$ )
- 9'  $x.x' = x$  ( $\forall x x.e = x$ )
- 10'  $e = x$

---

(1) Ceci est assez aisément compréhensible, en écrivant  $\forall x P(x)$  le rédacteur n'envisage pas un élément mais une classe d'éléments tels que  $P(x)$ . S'il désire continuer son raisonnement sur un élément de cette classe il le désignera explicitement "soit  $x$  tel que  $P(x)$ ..."

Y-a-t'il un conflit de désignation ou de quantification dû aux individus introduits dans l'expression entre parenthèses de la ligne 8', ou de la ligne 9' ? Une question analogue se poserait si la ligne 13 était rédigée de la façon suivante :

13' Soit  $x \in G \exists x' : x.x' = e$  et,  $\exists x'' : x'x'' = e$  car  $\forall x \exists x' x.x' = e$

La réponse est qu'il n'y a pas de conflit parce que les quantificateurs dans les énoncés en question ne sont pas associés à une désignation, autrement dit nous pouvons donner n'importe quels noms aux variables qui y apparaissent liées par un quantificateur. Ainsi les lignes 8', 9' et 13' peuvent être respectivement remplacées par les lignes 8'', 9'' et 13'' sans que la démonstration soit modifiée du point de vue logique.

8''  $(x.e). x' = x.e$   $(\forall a \forall b \forall c (a.b).c = a.(b.c))$

9''  $x.x' = x$   $(\forall a a.e = a)$

13'' Soit  $x \in G \exists x' : x.x' = e$  et,  $\exists x'' : x'x'' = e$  car  $\forall a \exists a' a.a' = e$

Et nous énoncerons la règle suivante sur la portée des quantificateurs :

Un quantificateur n'a une portée supérieure à l'énoncé où il apparaît que s'il y est associé à une désignation. Dans ce cas il a une portée identique à celle de la désignation à laquelle il est lié.

### III-2.3. La traduction de la démonstration.

#### III-2.3.1. Phase 1 : traduction des énoncés et règlement des conflits de désignation.

La première phase de cette traduction consiste à traduire tous les énoncés dans le langage du CP1. Ensuite il faut régler tous les conflits de désignation, pour cela on modifie les désignations de telle façon qu'un même nom ne provienne pas de deux désignations distinctes. Enfin on met en évidence la portée des quantificateurs et des désignations ; et comme il n'y a plus de risque de conflit de désignation seuls les quantificateurs sont explicités.



Ceci étant, il ne reste plus dans le texte que des énoncés mathématiques, des symboles logiques, des arguments de procédure et des avertisseurs que nous limiterons aux deux mots "donc" et "car" pour les inférences, "or" pour les rattachements, "ou encore" pour les traductions.

Nous donnons à la page suivante la traduction de l'exemple.

$GR(x,y)$  est le prédicat :  $x$  est un groupe pour la loi  $y$ .

Les traits pleins sont utilisés pour marquer les blocs et la portée des quantificateurs, les traits discontinus sont utilisés pour marquer dans un bloc la portée d'un quantificateur. Les quantificateurs et le nom des variables qu'ils règlent sont notés sur la gauche des traits qui leur correspondent.

$\forall x$	$e.x = e$	$\exists x'$	$x.x' = e$ donc $(e.x).x' = e.x'$ $e.(x.x') = e.x'$ car $\forall a \forall b \forall c (a.b).c = a.(b.c)$ $e.e = e.x'$ $e = e.x'$ donc $x.(e.x') = x.e$ $(x.e).x' = x.e$ car $\forall a \forall b \forall c (a.b).c = a.(b.c)$ $x.x' = x$ car $\forall a a.e = a$ $e = x$
-------------	-----------	--------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\forall x e.x = e \supset x = e$$

$\forall u$	$\exists u'$	$u.u' = e$	$\exists u''$	$u'.u'' = e$ $e.(u''.u') = (u.u').(u''.u') = (u.(u'.u'')).u'$ $= (u.e).u' = u.u' = e$ donc $u''.u' = e$ car $\forall a e.a = e \supset a = e$ donc $u''.u' = u.u'$ $(u''.u').u'' = (u.u').u''$ $u''.(u'.u'') = u.(u'.u'')$ $u''.e = u.e$ $u'' = u$
		$\forall x$	$\exists x'$	$x.x' = x'.x = e$
				(*) $u = u.e = u.(u'.u) = (u.u').u = e.u$
				[ $\forall x e.x = x.e = x$ ]

$$\forall x \exists x' x.x' = x'.x = e$$

$$\text{et } \forall x e.x = x.e = x$$

$$\text{donc}$$

$$\text{GR}(G, .)$$

Faisons quelques remarques sur cette traduction :

Nous avons remplacé le rattachement de la ligne 17 par une inférence ascendante en explicitant l'énoncé  $\forall x \exists e. x = e \supset x = e$

De même pour les renvois de la ligne 25, par ailleurs les énoncés  $\forall x \exists x'. x.x' = x'.x = e$  et  $\forall x x.e = e.x = x$  sont synonymes respectivement de "*tout élément a un symétrique*" et "*e est élément neutre*" donc les avertisseurs de traduction et les énoncés qu'ils introduisent disparaissent (§ I-3)

Le bloc que nous notons (\*) est explicitement ouvert par "*d'autre part...*" ligne 24 qui introduit un nouveau paragraphe. Le prédicat qui le conclut est noté entre des crochets car il n'est pas explicite dans la rédaction, mais seulement indiqué par la référence (3) et à la ligne 26 son explicitation par l'énoncé "*tout élément a un inverse*".

### III-2.3.2. Phase 2 : suppression de certains quantificateurs.

La première phase étant achevée, nous allons en développer une autre dont le but est de nous affranchir dans toute la mesure du possible des quantificateurs. Pour cela nous normalisons l'écriture de la démonstration en adoptant une convention analogue à l'écriture de Skolem pour une formule préfixe. C'est à dire que si E est la formule  $\forall x \exists y \forall z \exists u A(x,y,z,u)$ , où A est une formule sans variables liées dont les seules variables sont les variables distinctes x, y, z, u. Soit D un domaine d'interprétation de E, il existe  $\alpha : D \rightarrow D$  et  $\beta : D \times D \rightarrow D$  telles que si E est valide alors  $\forall x \forall y A(x, \alpha(x), y, \beta(x, y))$  est aussi valide et réciproquement.

Pour limiter le parenthésage, parfois un peu lourd, nous noterons  $\alpha_x, \beta_{x,y}$  au lieu de  $\alpha(x), \beta(x,y)$ . Et si  $\gamma$  est le nom d'une fonction de Skolem à zéro place d'argument (fonction constante sur D) nous la notons  $\gamma_0$ .

En utilisant ainsi les fonctions de Skolem, il ne reste plus dans le texte de la démonstration que les quantificateurs universels. Mais dans la mesure où il n'y a aucune variable libre dans la démonstration et où tous les conflits de désignations ont été réglés dans la phase précédente de traduction, nous pouvons abandonner les quantificateurs universels.

Voici ce que nous obtenons dans le cas de l'exemple :

Nous notons  $e_0$  la fonction de Skolem pour le prédicat  $\exists e \forall x x.e = x$   
 et  $d_x$  celle pour le prédicat  $\forall x \exists x' x.x' = e$ .

$$\begin{array}{l}
 e_0.x = e_0 \text{ or} \\
 x.d_x = e_0 \text{ donc} \\
 (e_0.x).d_x = e_0.d_x \\
 e_0.(x.d_x) = e_0.d_x \quad \text{car } (a.b).c = a.(b.c) \\
 e_0.e_0 = e_0.d_x \\
 e_0 = e_0.d_x \\
 \text{donc } x.(e_0.d_x) = x.e_0 \\
 (x.e_0).d_x = x.e_0 \quad \text{car } (a.b).c = a.(b.c) \\
 x.d_x = x \quad \text{car } a.e = a \\
 e_0 = x \\
 e_0.x = e_0 \supset x = e_0 \\
 u.d_u = e_0 \\
 \quad d_u.d_{d_u} = e_0 \\
 \quad e_0.(d_{d_u}.d_u) = (u.d_u).(d_{d_u}.d_u) = (u.(d_u.d_{d_u})).d_u \\
 \quad = (u.e_0).d_u = u.d_u = e_0 \\
 \quad \text{donc } d_{d_u}.d_u = e_0 \text{ car } e_0.a = e_0 \supset a = e_0 \\
 \quad \text{donc } d_{d_u}.d_u = u.d_u \\
 \quad (d_{d_u}.d_u).d_{d_u} = (u.d_u).d_{d_u} \\
 \quad d_{d_u}.(d_u.d_{d_u}) = u.(d_u.d_{d_u}) \\
 \quad d_{d_u}.e_0 = u.e_0 \\
 \quad d_{d_u} = u \\
 u.d_u = d_u.u = e_0 \\
 \quad u = u.e_0 = u.(d_u.u) = (u.d_u).u = e_0.u \\
 [ue_0 = e_0u = u] \\
 x.d_x = d_x.x = e_0 \\
 \text{et } e_0.x = x.e_0 = e_0 \\
 \text{donc}
 \end{array}$$

S'il y a des variables libres nous devons conserver les quantificateurs, et même les expliciter pour chaque énoncé en vue de la représentation de la démonstration par un graphe.

### III-3. Association d'un graphe à une rédaction

Rappelons que deux énoncés sont synonymes si leurs traductions dans le langage du CP1 sont identiques au nom des variables près. Notons par ailleurs que les énoncés  $E(?)$  et  $E$  ne sont pas synonymes (§ I-1.8). Il est alors bien clair que sur un ensemble d'énoncés non vide la relation binaire définie par le lien verbal "... est synonyme de ..." est une relation d'équivalence.

Pour la rédaction  $\mathcal{D}$  d'une démonstration nous noterons  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  l'ensemble constitué d'un système complet et exact de représentants du quotient de l'ensemble des énoncés de  $\mathcal{D}$  qui ne sont pas des hypothèses, et des noms d'hypothèses.

On associe alors à  $\mathcal{D}$  un graphe de noeuds et d'étoiles tel qu'il est défini au paragraphe IV-2.3 de l'introduction. C'est-à-dire que ce graphe a pour ordre le cardinal de  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$  et, qu'une étoile  $a$  en entrée les noeuds  $x_1, \dots, x_p$  et en sortie les noeuds  $y_1, \dots, y_k$  si et seulement si les énoncés que représentent  $y_1, \dots, y_n$  sont, dans  $\mathcal{D}$ , déduits directement des énoncés que représentent  $x_1, \dots, x_p$ .

Les filiations et les paternités sont établies suivant les règles d'interprétation que nous avons énoncées aux paragraphes I et II-1.2.

On trouvera à la page suivante, pour notre exemple, l'ensemble  $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ , avec pour chaque élément ses filiations et paternités. Pour plus de facilité, chaque énoncé est repéré par un numéro. L'énoncé numéro 2 est en fait une hypothèse, comme il n'y a pas d'ambiguïté nous le désignons par lui-même.

N°	ENONCE	FILS	PERE
1	$a.e = a$	30	
2	$e_o.x = e_o$	4	
3	$x.d_x = e_o$	4 - 19	
4	$(e_o.x).d_x = e_o.d_x$	6	
5	$(a.b).c = a.(b.c)$		
6	$e_o.(x.d_x) = e_o.d_x$	7	5
7	$e_o.e_o = e_o.d_x$	8	
8	$e_o = e_o.d_x$	9	
9	$x.e_o = x.(e_o.d_x)$	10	
10	$(x.e_o).d_x = x.e_o$	11	5
11	$x.d_x = x$	12	1
12	$e_o = x$	13	
13	$e_o.x = e_o \supset x = e_o$		
14	$d_u.d_{d_u} = e_o$		
15	$e_o.(d_{d_u}.d_u) = (u.d_u).(d_{d_u}.d_u)$	19	
16	$(u.d_u).(d_{d_u}.d_u) = (u.(d_u.d_{d_u})).d_u$	19	
17	$(u.(d_u.d_{d_u})).d_u = (u.e_o).d_u$	19	
18	$(u.e_o).d_u = u.d_u$	19	
19	$e_o.(d_{d_u}.d_u) = e_o$	20	
20	$d_{d_u}.d_u = e_o$	21	13
21	$d_{d_u}.d_u = u.d_u$	22	
22	$(d_{d_u}.d_u).d_{d_u} = (u.d_u).d_{d_u}$	23	
23	$d_{d_u}.(d_u.d_{d_u}) = u.(d_u.d_{d_u})$	24	
24	$d_{d_u}.e_o = u.e_o$	25	
25	$d_{d_u} = u$	26	
26	$u.d_u = e_o$ et $d_u.u = e_o$	32	
27	$u.e_o = u.(d_u.u)$	30	
28	$u.(d_u.u) = (u.d_u).u$	30	
29	$(u.d_u).u = e_o.u$	30	
30	$u = e_o.u$	31	
31	$u.e_o \neq u$ et $e_o.u = u$	33	
32	AR/G \		

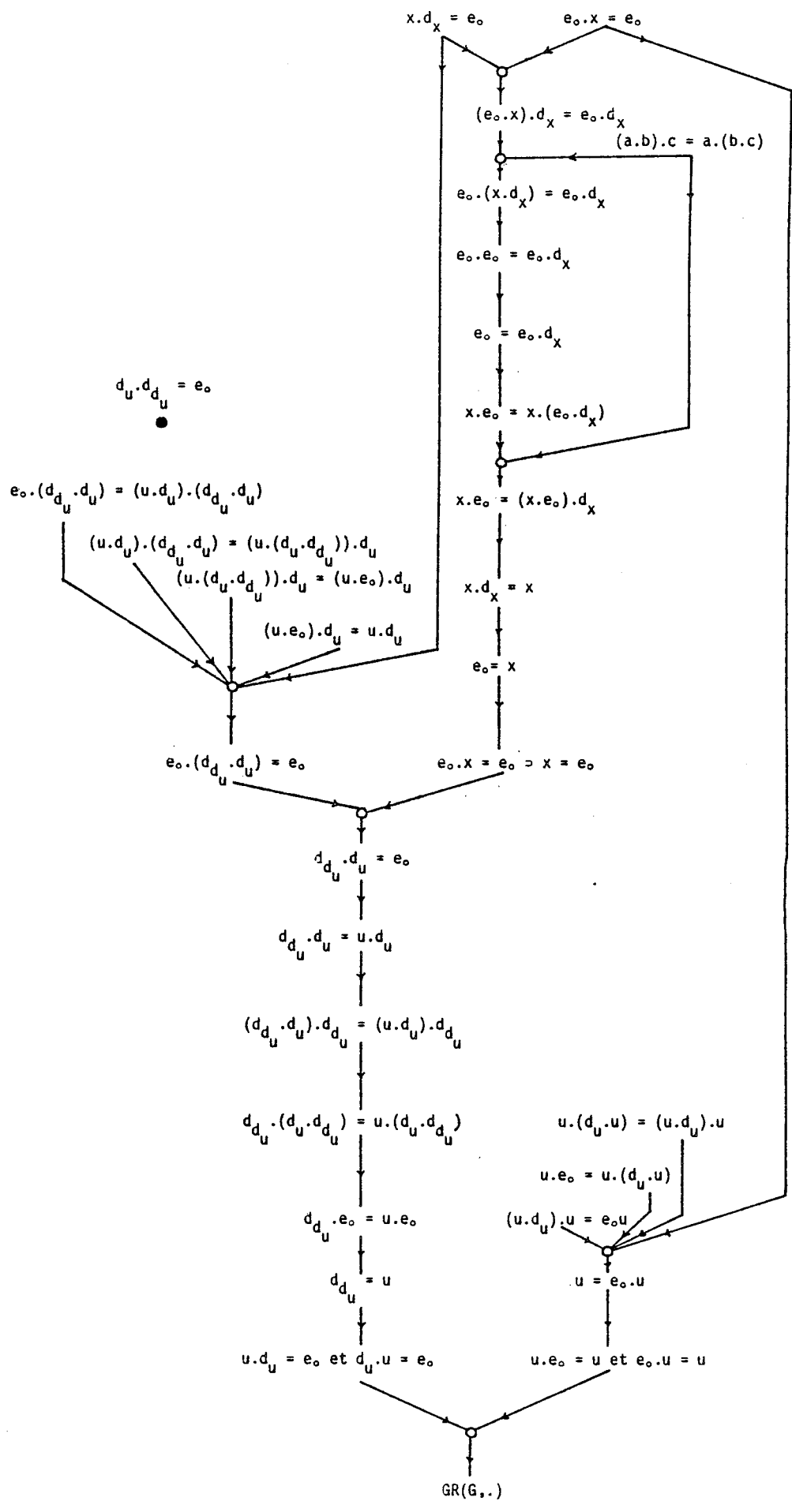
*Commentaires sur l'exemple :*

Les énoncés 15 à 18 sont obtenus par décomposition de la chaîne d'égalités de la ligne 15 de la rédaction, en appliquant la règle énoncée au paragraphe I-1.5.1., qui fournit par ailleurs l'énoncé 19.

De même les énoncés 27 à 30 sont issus de la chaîne d'égalités de la ligne 24 de la rédaction.

Par contre en accord avec les usages de l'enseignement de l'algèbre nous traduisons la chaîne d'égalités  $u.d_u = d_u.u = e_o$  par  $u.d_u = e_o$  et  $d_u u = e_o$ , car elle provient d'un écart de langage (mathématique) dans l'énoncé de la définition du symétrique d'un élément d'un groupe. De même  $u.e_o = e_o.u = u$  est traduit par  $u.e_o = u$  et  $e_o.u = u$ .

Le dessin qui suit est celui du graphe de noeuds et d'étoiles représentant la rédaction prise en exemple.





#### IV - DISCUSSION SUR L'EVENTUALITE D'UN TRAITEMENT AUTOMATIQUE

Il est tentant après avoir énuméré toutes ces règles pour passer de la rédaction d'une démonstration au graphe qui la représente, d'envisager d'automatiser cette transformation. D'emblée, on peut affirmer qu'il n'est pas envisageable de traiter la rédaction lorsqu'elle comprend encore des énoncés méta-mathématiques. Le texte étant écrit dans un langage mélangeant largement la langue courante et le formalisme mathématique il n'y a pas de moyens syntaxiques de les discerner. C'est donc une lecture intelligente qui est nécessaire, c'est à dire une lecture qui permet de s'attacher non seulement à la forme d'un énoncé mais aussi, et surtout à son contenu. Les transformations que nous faisons subir à certains énoncés méta-mathématiques ne se font pas sur un critère syntaxique mais sur un critère sémantique ; c'est moins ce qui est écrit qui conditionne l'application d'une règle de transformation que ce que cela signifie. Certes nous avons essayé de donner des tournures liées de façon caractéristique à certains contenus, mais ces mêmes tournures dans un contexte particulier peuvent se trouver recouvrir un autre contenu (par exemple c'est le contexte qui permet de classer "... de même on démontre que ..." au § II-1.2.2) ; et si ce sont elles que l'on rencontre le plus souvent dans les rédactions, elles peuvent fort bien y être remplacées par une tournure synonyme ou une périphrase que nous traduirons dans la mesure où nous saurons la comprendre, l'interpréter. Pour résumer, les énoncés méta-mathématiques sont rédigés dans la langue courante et leur forme dépend du style du rédacteur. Pour un même contenu, comme l'a montré R. QUENEAU, la forme de l'énoncé peut varier de façon quasiment arbitraire.

Si maintenant on envisage une rédaction dépourvue d'énoncés méta-mathématiques ? Nous pensons, qu'étant donnée l'allure des rédactions que les élèves proposent, on ne peut toujours pas envisager un traitement automatique. La rédaction n'est plus composée que d'énoncés mathématiques et d'expressions qui expriment les inférences. Mais le langage naïf qui est utilisé est un mélange de langue naturelle et de formalisme mathématique. Ce qui nous oblige encore à appliquer les règles énoncées aux paragraphes I et II-2. sur des critères sémantiques et non absolument syntaxiques.

Par exemple nous avons énoncé une règle pour décider de considérer ET comme le connecteur logique, ou comme la conjonction de coordination, cette règle a pour fondement le fait que le rédacteur signifie explicitement ou non que ce qu'il énonce forme un tout.

Il n'existe pas de règle syntaxique pour réaliser ceci, tout au plus des usages et la décision sera prise sur notre compréhension du texte. Nous avons montré plus haut, de façon assez évidente que l'application des règles ne se fait pas sur des critères syntaxiques aveugles du contenu, quant au § III-3.2 dans le traitement de l'exemple nous avons traduit " $x.e = ex = x$ " par " $xe = x$  et  $ex = x$ " et non par " $xe = ex$  et  $ex = x$  donc  $xe = x$ " comme l'indique la règle énoncée au § I-1.5, car cette écriture est consacrée par l'usage.

Enfin, même dans une rédaction (c'est à dire un document destiné à d'autres personnes que l'auteur), on trouve, ajouté au mélange de la langue naturelle et du formalisme mathématique l'utilisation de la page comme une surface qui a effectivement deux dimensions. Nous en donnons ci-dessous un exemple tiré d'un ouvrage d'exercices corrigés ([c] p 17)

"... Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  quatre réels tels que :

$$\alpha (1, \vec{0}) + \beta (0, \vec{i}) + \gamma (0, \vec{j}) + \delta (0, \vec{k}) = \vec{0}_E$$

$$(\alpha, \vec{0}) + (0, \beta \vec{i}) + (0, \gamma \vec{j}) + (0, \delta \vec{k}) \quad \text{vecteur nul de } E$$

$$(\alpha, \beta \vec{i} + \gamma \vec{j} + \delta \vec{k}) \quad (0, \vec{0})$$

$$\text{alors } (\alpha, \beta \vec{i} + \gamma \vec{j} + \delta \vec{k}) = (0, \vec{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \vec{i} + \gamma \vec{j} + \delta \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \gamma = \delta = 0 \end{cases} \quad (\text{car } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3)$$

Si on adopte ces écritures toutes les combinaisons sont possibles et on ne peut envisager un traitement automatique de la rédaction.

Peut-on trouver un moyen qui permettrait un traitement automatique de la rédaction ? Il existe des tentatives pour fournir des langages adéquats à l'expression de démonstrations mathématiques. On en trouvera un exemple dans [3].

Il nous semble que ce type de langage ne peut pas être appris par des mathématiciens débutants, et de toutes façons on ne pourrait l'utiliser pour l'étude de raisonnements qu'après s'être assuré que le langage est assimilé de façon à ne pas être une source principale de difficultés. Il peut être intéressant de faire une expérience dans cette direction, par exemple avec des étudiants en mathématiques.

Pour conclure nous ne regretterons pas que l'élève puisse s'exprimer dans un langage naïf, car il peut trouver dans la souplesse de ce langage le moyen de mieux exprimer sa pensée. Nous préférons pour l'instant qu'il y ait des difficultés de lecture du côté de l'observateur, plutôt que des contraintes de syntaxe du côté de l'observé, qui seraient liées non pas à l'objet étudié mais aux moyens de son étude.

**PARTIE C**

**APPLICATION A L'ETUDE**

**D'UN PROBLEME D'ALGEBRE**



### 0-1 Avertissement

Ce qui va suivre constitue moins une étude des comportements heuristiques qu'une illustration de l'approche que nous proposons.

Dans cette illustration nous utilisons des copies, c'est à dire le résultat final du raisonnement de l'étudiant. Nous sommes bien conscients qu'une bonne part de la démarche n'y est pas explicitée et qu'il y a par là même une limitation à notre observation. Cependant il nous a semblé suffisant pour un exemple de nous limiter à ce type de discours, la méthode employée étant la même pour des corpus plus élaborés.

Cela ne signifie pas que cette observation soit sans intérêt pour notre étude des comportements, elle en constitue au contraire le point de départ comme nous le verrons en conclusion de ce travail.

### 0-2 Le problème

Nous avons choisi un problème d'algèbre, qui est effectivement un problème à démontrer. Il est classique et demande peu de connaissances mathématiques, tout au plus de vocabulaire. Nous avons choisi une formulation qui est celle ordinairement rencontrée par les étudiants :

*"Soit  $G$  un ensemble non vide sur lequel on définit une loi de composition interne notée multiplicativement, qui a les propriétés suivantes :*

- *c'est une loi associative*
- *Quels que soient  $a \in G$  et  $b \in G$  il existe  $x \in G$  tel que  $ax = b$  et il existe  $x'$  tel que  $x'a = b$ .*

*Démontrer que  $G$  possède pour cette loi un élément neutre à droite".*

### 0-3 L'échantillon

L'échantillon est constitué d'une part d'étudiants de première année à l'université scientifique et médicale de Grenoble (DEUG A) et d'étudiants mathématiciens de troisième année (Licence de Mathématique).

Nous désignerons, dans toute la suite, ces deux échantillons respectivement par DEUG et LICENCE. L'épreuve a eu lieu à la fin du premier trimestre de l'année scolaire. Il nous a été rendu trois copies blanches pour les premiers et une pour les seconds ; l'observation porte respectivement sur 37 et 38 copies sur lesquelles un texte est effectivement rédigé.

#### 0-4 Les conditions de l'observation

Les étudiants ont eu à résoudre ce problème en temps limité (une demi-heure) dans leur cadre scolaire habituel, sans consignes particulières, et c'est leur enseignant habituel qui leur a fait subir cette épreuve, il était autorisé à leur en révéler le but.

#### 0-5 Le traitement des observations

A chaque rédaction est substitué un graphe qui la représente. Le traitement des données ainsi constituées est fait par des moyens informatiques que nous explicitons dans l'annexe 2.

#### 0-6 Les principaux paragraphes de cette étude

L'analyse qui suit est décomposée en trois parties :

*Le réel* : Etude des démonstrations proposées par les étudiants.

*Le structurellement possible* : Les solutions de ce problème par le calcul des prédicats du premier ordre.

*Le matériellement possible* : dans cette partie nous étudierons les rapports du réel au structurellement possible ; c'est dans cette direction que nous pensons rencontrer le matériellement possible, c'est à dire ce qui est effectivement à la portée de l'étudiant, consciemment ou non.

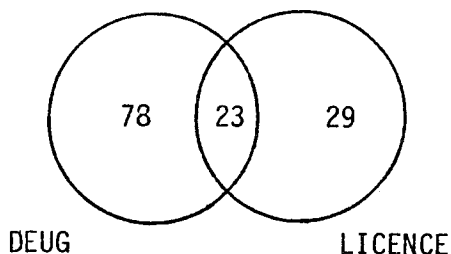
## I - LE REEL

### I-1. Traduction des rédactions, le champ de résolution

Nous avons traité chaque rédaction ainsi que nous l'avons indiqué plus haut en la mettant sous une forme directement traduisible par un graphe ; c'est à dire une liste d'énoncés accompagnés de leurs filiations et paternités.

Les indicateurs de démonstration sont pratiquement les seuls énoncés méta-mathématiques que nous ayons rencontrés ; les seuls énoncés exprimant une opinion sur la solution proposée sont ceux que nous avons cités aux paragraphes I-1.4 et I-1.5 de la partie précédente.

Nous appellerons *champ de démonstration* d'un groupe d'individus l'ensemble des énoncés qu'on rencontre dans leur rédaction. Le champ de démonstration de l'ensemble de nos deux échantillons est très vaste puisqu'il compte 130 énoncés, la contribution de chaque échantillon est très différente, nous l'illustrons dans le diagramme suivant :



L'intersection des deux champs de démonstration contient en particulier les énoncés directement issus de l'énoncé du problème, c'est à dire les données :

$G$  est non vide, la loi est interne, la loi est associative,  
 $\forall a \forall b \exists x ax = b, \forall a \forall b \exists x xa = b$

et la conclusion :  $\exists e \forall a ae = a.$

Devant une telle différence d'importance on peut se demander si les rédactions d'un échantillon ne produisent pas plus d'énoncés que celles de l'autre.



Or il n'en est rien, puisque le nombre moyen d'énoncés par copie pour DEUG est de 6,67 et pour LICENCE de 5,63 (les écarts types sont aussi assez voisins, respectivement 3,24 et 2,53). En fait la raison est à chercher dans une plus grande diversité des énoncés rencontrés dans les rédactions de DEUG, que de ceux rencontrés dans les rédactions de LICENCE. Ceci est confirmé par la fréquence moyenne d'apparition d'un énoncé :

2,44 pour DEUG

4,45 pour LICENCE

Et en effet pour le premier échantillon il y a 79 % des énoncés qui apparaissent dans une seule rédaction, pour le second échantillon ce taux est de 67 %. Nous constatons cependant qu'il reste assez élevé.

## I-2. Première analyse des contenus

### I-2.1. ... notée multiplicativement ...

Nous nous sommes efforcés de proposer aux étudiants un énoncé de problème clair et dépourvu de pièges. Nous avons pris à ce sujet l'avis de quelques collègues enseignants et tous nous étions d'accord sur la formulation proposée. Cependant la phrase "... *on définit une loi de composition interne notée multiplicativement* ..." a conduit quelques étudiants à une interprétation malheureuse : les objets sont des nombres, cette loi est la multiplication. On rencontre cette attitude surtout chez les étudiants de DEUG, 7 cas contre 2 seulement pour LICENCE. C'est vraisemblablement cette confusion qui fait que 11 étudiants de DEUG et 1 de LICENCE utilisent les propriétés de régularité :

$$\forall a \forall b \forall c (a \neq 0 \wedge a.b = a.c) \supset (b = c)$$

$$\forall a \forall b \forall c (a \neq 0 \wedge b.a = c.a) \supset (b = c)$$

Pour la même raison 3 étudiants de DEUG et 1 de LICENCE tentent de montrer que 1 est élément neutre.

Voici deux exemples de ces démonstrations :

$$\left. \begin{array}{l} a \in G \\ b \in G \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x \in G \text{ tq } ax = b$$

$$\exists x' \in G \text{ tq } x'a = b$$

$$ax = b \quad \text{pour } x = x'a^{-1} = b a^{-1}$$

$$ax = b = x'a \Rightarrow \text{pour } x = b a^{-1}$$

$$x = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = b a^{-1}}$$

$$b = x'a \Rightarrow \boxed{x' = b a^{-1}}$$

$$a x = x' a \Rightarrow a (b a^{-1}) = (b a^{-1}) a$$

$$b (a a^{-1}) = b (a^{-1} a)$$

$$b(e) = b(e) \Rightarrow b = b \text{ et } \boxed{e = 1}$$

donc  $x'$  est l'inverse de  $x$

(DEUG A 25)

pour que  $G$  possède pour cette loi un élément neutre à droite noté  $e'$  il faut qu'on ait:

$$\forall a \in G, \exists x \in G; ax = e' \text{ et } \exists x' \in G; x'a = e'$$

la loi de composition interne est notée multiplicativement donc on prend  $e' = 1$ . ( $a \cdot e = a \Rightarrow e = a^{-1}a = 1$ ).

trouvons si  $1$  est élément neutre à droite pour cette loi:

$$\text{soit } a \in G \text{ on a } aa^{-1} = 1 \text{ donc } \forall a \in G, \exists x' = a^{-1}$$

tel que  $a^{-1}a = 1$ .

~~$$\text{d'autre part on a } a^{-1}a = 1 \text{ donc } \exists x' = x = a^{-1};$$~~

~~$$x'a = 1 \text{ donc } 1 \text{ est élément neutre à}$$~~

droite pour cette loi.

### I-2.2. Essai de classification des stratégies.

Pour un ensemble  $G$  non vide et muni d'une loi de composition interne notée  $*$  la définition de l'élément neutre à droite est  $\exists e \forall x \ x * e = x$ , or il semble que dans leur esprit les étudiants substituent à cette définition le moule :

$$\square * \bigcirc = \square$$

Dans les termes de cette représentation on peut dénombrer trois types de stratégies :

I : on fixe le contenu de  $\bigcirc$  et on cherche à montrer que pour un contenu arbitraire de  $\square$  l'égalité est vérifiée.

II : exhiber une expression conforme au moule.

III : ayant mis en évidence deux expressions conformes au moule, montrer que les contenus de  $\bigcirc$  sont égaux.

Si les quantificateurs sont implicitement considérés par ceux qui utilisent la stratégie I, il n'en est pas de même pour les autres stratégies et en particulier II.

A l'intérieur du type II nous distinguerons deux sous-catégories, les démonstrations du type ci-dessous (II-A) et les autres (II-B).

On fait l'hypothèse que :

$$\forall a \in G, b \in G, \exists c \in G / ac = b$$

Pour  $a$  et  $b$  quelconques, on fait l'égalité  $ac = b$

$$\Rightarrow ac = a$$

$\Rightarrow a$  est élément neutre à droite

donc il existe  $e \in G / e = \text{el. neutre à dr.}$

De même on peut distinguer deux catégories à l'intérieur du type III: ceux qui démontrent : si  $ae = a$  et  $ae' = a$  alors  $e = e'$ , et ceux qui démontrent : si  $ae = a$  et  $be' = b$  alors  $e = e'$ . Dans les deux cas ils déduisent l'existence d'un neutre à droite, et dans les deux cas l'accent est mis sur l'unicité ; la quantification universelle n'est implicite que pour les seconds. Nous désignerons par III-A et III-B respectivement ces deux sous-catégories.

Notons enfin que nous n'avons pu classer de cette façon deux rédactions de LICENCE (2 et 36) et une rédaction de DEUG (28), car les calculs très peu avancés ne permettent pas de prendre une décision. De même une rédaction de DEUG échappe à notre classification, il s'agit de Deug A 25 (que nous avons reproduite plus haut).

Dans le tableau qui suit, il n'apparaît que les rédactions classées :

	I	II		III			
		A	B				
DEUG	9	11	10	21	3	2	5
LICENCE	15	16	3	19	1	1	2

soit : 35 rédactions pour DEUG et 36 pour LICENCE.

Les individus de la catégorie II-B sont ceux qui ne s'intéressent pas à la proposition  $\forall a \exists x ax = a$ , et on peut constater que cela constitue 30,5% des effectifs de DEUG (on a rajouté Deug A 25 pour ce calcul !) et seulement 8,3 % des effectifs de LICENCE. Nous donnons dans le tableau suivant les proportions de ceux qui se sont intéressés à cette proposition, dans l'ensemble des rédactions classées.

	I	II-A	III
DEUG	0,25	0,31	0,14
LICENCE	0,41	0,44	0,05

Sachant que les stratégies du type II-A et III sont vouées à l'échec, nous proposons d'interpréter ces résultats comme d'une part un potentiel de réussite plus important pour LICENCE (nous n'avons pas dit que les individus qui optent pour la stratégie I parviennent à résoudre le problème) et d'autre part la concentration des échecs autour d'une cause unique : le manque d'attention portée aux quantificateurs (qui caractérise les résolutions du groupe II-A).

Ce manque d'attention ne signifie pas que l'étudiant ignore la définition correcte d'un élément neutre à droite comme le montre l'exemple suivant :

a-t-on donc :

$$\exists e_d \in G, \forall a \in G. \quad a \cdot e_d = a \quad ?$$

Or :  $\forall (a,b) \in G^2 \quad \exists x \in G / a \cdot x = b$   
 $\exists x' \in G / x' \cdot a = b$

Or, quel que soit le couple  $(a,b)$  de  $G^2$  on a un  $x$  de  $G$  tel que  $a \cdot x = b$ , en particulier pour les couples quelconques de  $G^2$  du type  $(a,a)$  on a  $a$  est un élément quelconque de  $G$ , donc :

$$\forall (a,a) \in G^2, \exists x \in G / a \cdot x = a$$

c'est en définition d'un neutre à droite, appelons le  $e_d$ .

$$\boxed{G \text{ possède un neutre à droite } e_d}$$

(DEUG A 32)

### I-3. Structure des démonstrations : étude des graphes de représentation

Les propriétés de structure d'un graphe sont directement liées à la forme de la démonstration qu'il représente. Certaines sont caractéristiques, d'autres ne le sont pas ; en voici deux exemples :

- Le graphe de représentation n'est pas une hiérarchie si et seulement si dans la démonstration un énoncé fait partie de ses propres antécédents.

- Si le graphe de représentation n'est pas connexe alors dans la rédaction de la démonstration certaines déductions ne sont pas explicites, mais la réciproque est fausse.

- Aux données du problème sont associés des sommets sources du graphe, et à sa conclusion est associé un puits, mais ce ne sont pas les seuls et nous envisagerons les diverses éventualités.

Enfin nous pourrions observer si une démonstration a la structure d'une R-démonstration, c'est à dire si son graphe est une hiérarchie connexe à un seul puits.

### I-3.1. Circuit et cercle vicieux.

#### I-3.1.1. Test de la présence de circuits dans un graphe.

Pour tester la présence de circuits dans un graphe nous utilisons un algorithme classique : la méthode de Rosalind-Marimont dont on trouvera une description dans [13] ; cet algorithme a sa justification dans le théorème suivant :

Soit  $G$  un graphe non vide fini :

- 1) Si  $G$  n'a ni source, ni puits alors il possède un circuit.
- 2) Le sous-graphe de  $G$  obtenu en supprimant une source, ou un puits, a les mêmes circuits que  $G$ .

#### I-3.1.2. Application.

Sans vouloir moraliser nous pouvons affirmer que la présence d'un cercle vicieux dans une démonstration est un fait grave. Dans le cas de notre exemple, tous les graphes de représentation des rédactions de LICENCE sont des hiérarchies. Par contre 5 rédactions de DEUG, soit une proportion de 0,13, ont un graphe de représentation qui contient un circuit. En revenant sur ces textes nous constatons que cela provient dans tous les cas de ce que l'étudiant prend comme hypothèse l'existence de l'élément neutre à droite pour la démontrer.

Nous donnons ci-dessous un exemple typique de cette attitude :

Si  $e$ , l'élément neutre existe, alors  $ae = a \quad \forall a \in G$

Supposons que  $e$  existe, on a alors,  $\wedge e = A$

Posons  $A = ax$ , l'on suppose  $ax = b \quad \forall (a, b, x) \in G^3$ .

$\Rightarrow (ax)e = b$  car  $e$  élément neutre.

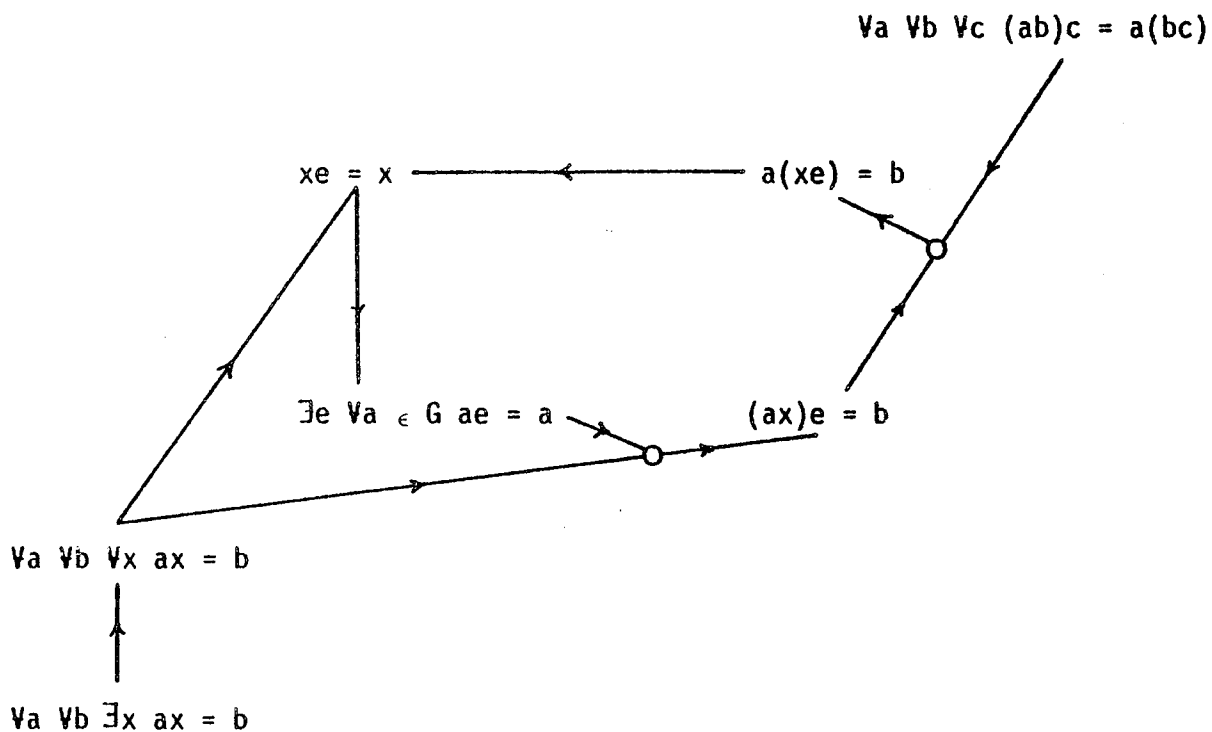
$\Rightarrow a(ax) = b$  car la loi est associative

on a  $ax = b$  d'où  $ax = ax$ .

donc il existe bien un élément neutre à droite pour cette loi.

(Deug A 9)

A cette rédaction nous associons le graphe :



### I-3.1.3. Propriété

La présence d'un circuit dans le graphe associé à une rédaction est caractéristique de la présence d'un cercle vicieux.

### I-3.2. Connexité et déductions explicites.

#### I-3.2.1. Test de la connexité d'un graphe.

Pour tester la connexité d'un graphe nous ne tenons plus compte du fait qu'il est orienté, et dire que  $x$  et  $y$  sont joints signifie qu'il existe l'arc  $xy$  ou l'arc  $yx$  ; ou encore que  $y$  est le fils ou le père de  $x$ .

Nous utilisons l'algorithme suivant :

Début

Choisir un sommet et le marquer ;

Tant qu'il y a un sommet marqué joint à un sommet non marqué faire :  
marquer tous les sommets joints à un sommet marqué ;

Si tous les sommets sont marqués alors  $G$  est un graphe connexe,  
sinon  $G$  n'est pas un graphe connexe ;

Fin.

Notons que dans le cas où  $G$  n'est pas un graphe connexe pour énumérer toutes les composantes il suffit :

- d'énumérer les sommets marqués, qui constituent une composante,
- de supprimer les sommets marqués,
- d'appliquer l'algorithme de test de la connexité sur le nouveau graphe obtenu.

Au bout d'un nombre fini d'applications des trois actions précédentes on parvient à un graphe vide et on a énuméré toutes les composantes connexes du graphe initial.

#### I-3.2.2. Application.

Nous constatons que les rédactions associées à un graphe non connexe sont assez nombreuses, et que leur proportion est sensiblement plus importante dans LICENCE (0,42) que dans DEUG (0,29).



Nous avons pensé qu'il y avait un rapport entre l'ordre d'un graphe et sa connexité ; nous pouvons affirmer qu'il n'en est rien pour l'échantillon DEUG, en effet le coefficient de corrélation très faible entre ces variables :  $\rho = -0,089$  montre qu'elles sont indépendantes. Par contre pour LICENCE de par la petitesse de notre échantillon, le coefficient de corrélation que nous trouvons :  $-0,561$ , ne permet pas de conclure. Il nous conduit cependant à formuler une hypothèse : la tendance à ne pas expliciter des déductions croit, avec le nombre d'énoncés manipulés dans la démonstration.

Si nous regardons de plus près les composantes connexes de ces graphes, nous constatons qu'on ne peut les considérer toutes de la même façon. Il est des composantes dont l'ordre est 1, c'est à dire qu'elles sont l'image d'un énoncé. Il est facile de reconnaître si cet énoncé est une donnée, si ce n'est pas le cas il nous faut retourner à la rédaction car il peut s'agir d'un énoncé inutile ou d'une déduction non explicitée. Lorsque l'ordre d'une composante connexe est supérieur à 1, nous distinguons encore deux types de composantes en fonction de leur origine : des déductions ne sont pas explicitées, un changement de direction dans la résolution du problème (tous les énoncés d'une composante sont alors des énoncés inutiles). Voici la répartition des graphes non connexes suivant ces différents types, pour chacun des échantillons, le nombre d'individus étant assez faible nous donnons directement les effectifs dans ce tableau :

	Nombre total de graphes non connexes	Composante d'ordre 1		Composante d'ordre supérieur ou égal à 1	
		donnée	énoncé inutile	déduction non explicite	changement de direction
DEUG	11	5	3	3	1
LICENCE	15	4	5	8	0

(1)

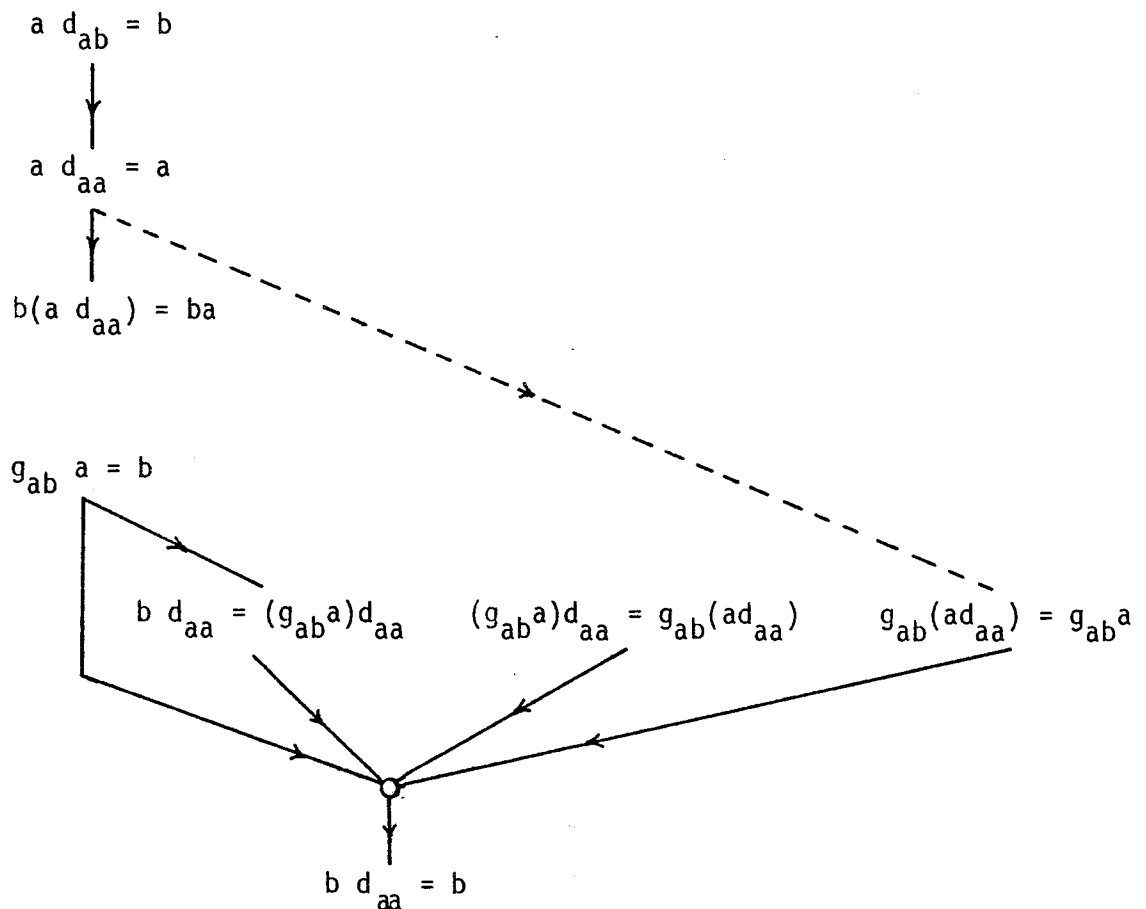
(2)

Une composante connexe réduite à une donnée a été comptée dans la colonne "donnée" seulement dans le cas où elle est aussi un énoncé inutile, sinon elle est comptée dans la colonne (1).

Remarquons que pour DEUG un quart des composantes connexes ont pour origine des déductions non explicitées et que cette proportion est portée à 0,47 pour LICENCE. Ceci semble refléter un caractère plus brouillon des rédactions de DEUG.

Nous donnons ci-dessous deux exemples de graphes de démonstration non connexes. Le premier illustre la colonne (1), le second est celui qui est compté dans la colonne (2), nous le donnons avec la rédaction qu'il représente pour plus de clarté.

Dans la mesure où il n'y a pas de variables libres nous utilisons dans le graphe ci-dessous la forme préfixe de Skolem,  $d$  et  $g$  sont les fonctions à deux places d'arguments respectivement associées à la division à droite et la division à gauche.



(Licence 32)

Nous avons représenté en traits pleins les déductions qui sont explicites dans la rédaction, en trait pointillé la déduction qui permet de retrouver la connexité.

Notons sur cet exemple que le lien omis entre les deux composantes connexes ne figure pas (comme on aurait pu s'y attendre) entre un puits de l'une et une source de l'autre ; ici une composante connexe a pour puits un énoncé inutile, nous pouvons l'associer à un changement de direction dans la résolution. C'est cependant le fait qu'une déduction n'est pas explicitée qui prévaut dans notre classement.

on sait que  $\forall a \in G, \forall b \in G \exists x \text{ tq } ax = b \quad \text{oc } G.$

$$\begin{aligned} \text{on a } & \cancel{a(x^{-1})} = ba \\ & (a^{-1})x = ba \\ & \cancel{(a^{-1})x} = \cancel{(ax)}a \\ & \cancel{(a^{-1})x} = a \cancel{(xa)} \\ & \cancel{(a^{-1})x} = ab. \end{aligned}$$

si  $a = b$ , on a  $ax = x'a = b$   
 $x$  et  $x'$  sont symétriques  
 $xx' = e$   
 donc  $xe = xe.$

(Deug A 30)

$$\forall a \forall b \exists x ax = b$$

↓

$$ax = x'a$$

$$x x' = e$$

↓

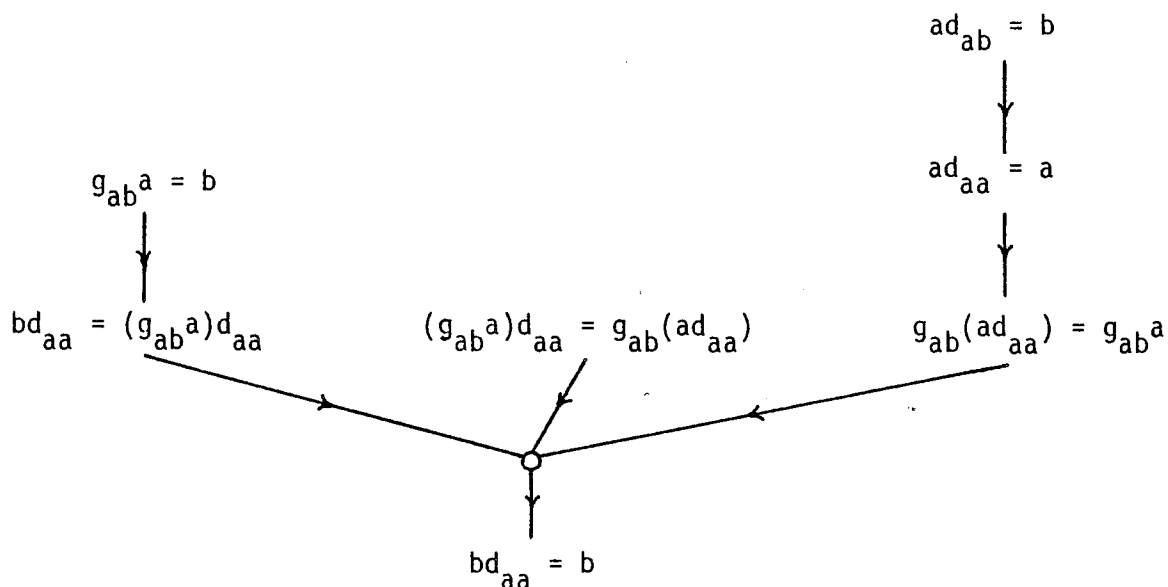
$$xe = x$$

Notons que cet étudiant a (vraisemblablement) trouvé une issue en reconnaissant une convention d'écriture familière aux algébristes : "soit  $a'$  l'inverse de  $a$  ...". D'autre part nous avons interprété " $ax = x'a = b$ " comme " $ax = x'a$ ", énoncé manifestement issu du rapprochement de  $(\forall a \forall b \exists x ax = b)$  et de  $(\forall a \forall b \exists x' x'a = b)$ . Le " $= b$ " dans l'énoncé formulé par l'étudiant étant un résidu de ce rapprochement. L'interprétation :

" $ax = x'a$  et  $x'a = b$  donc  $ax = b$ " nous semble franchement étrangère à ce que peut être la réalité.

I-3.2.3. Propriété.

Nous pouvons énoncer : si le graphe associé à une rédaction n'est pas connexe alors soit cette rédaction contient des énoncés inutiles, soit certaines des déductions ne sont pas explicitées. La réciproque est fautive, en effet un graphe peut être connexe et représenter une rédaction contenant des énoncés inutiles, c'est ce qui se produit si on rétablit dans Licence 32 la déduction " $ad_{aa} = a$  donc  $g_{ab}(ad_{aa}) = g_{ab}a$ ". Ou encore le graphe peut être connexe et représenter une rédaction dans laquelle certaines déductions ne sont pas explicites, nous pouvons en donner un exemple en modifiant un peu Licence 32 :



Ce graphe connexe peut être associé à la rédaction suivante :

$$\forall a \forall b \exists x : ax = b$$

en particulier pour un  $a$  fixé il existe  $x_a$  tel que  $ax_a = a$

Or  $\forall a \forall b \exists x' x'a = b$  donc

$$bx_a = (x'a)x_a = x'(ax_a) = x'a \text{ car } ax_a = a$$

donc  $bx_a = b$  quel que soit  $b$ .

et on peut constater que la déduction " $bx_a = x'a$  et  $x'a = b$  donc  $bx_a = b$ " n'est pas explicite dans la rédaction.

I-3.3. Sources et puits du graphe de représentation.

Il est facile de tester (voir annexe 2) sur la représentation interne si un sommet du graphe est une source ou un puits.

Une source peut être l'image d'une donnée, d'un S-axiome, d'une hypothèse ou d'un énoncé sans justification explicite. Un puits peut être l'image de la conclusion du problème, d'un énoncé inutile ou d'un énoncé dont on n'explique pas les conséquences.

Dans le cas de notre observation nous nous sommes intéressés aux apparitions des données et de l'énoncé solution ; pour ce qui est de l'utilisation des données nous constatons des situations très voisines pour DEUG et pour LICENCE (dont, nous le rappelons, les effectifs sont très voisins, respectivement 37 et 38 individus) ; le tableau

ci-contre donne le résultat brut. Si nous nous attachons aux fréquences d'apparition de chacune des données dont l'étudiant déduit explicitement un énoncé nous obtenons le tableau ci-dessous :

	DEUG	LICENCE
Ne mentionnent qu'une seule donnée	25	25
Utilisent toutes les données	3	2
Ne mentionnent aucune donnée	2	4

	DEUG	LICENCE
G est non vide	0	0
La loi de composition est interne	0,08	0,02
$\forall a \forall b \exists x ax = b$	0,75	0,73
$\forall a \forall b \exists x xa = b$	0,27	0,23
$\forall a \forall b \forall c (ab)c=a(bc)$	0,27	0,23

De ces tableaux nous concluons que seules les données : division à gauche et à droite, et l'associativité sont utilisées largement, et particulièrement  $\forall a \forall b \exists x ax = b$ .

On peut penser que la plupart des étudiants ont "vu" le rôle déterminant de cette donnée pour la mise en évidence de l'élément neutre à droite. Lorsqu'ils ne mentionnent qu'une seule donnée, dans les trois quarts des cas, pour les deux échantillons, c'est celle-ci qui figure.

Par ailleurs les deux dernières lignes du dernier tableau suggèrent un rapport entre les occurrences de deux données, or  $\forall a \forall b \exists x \ x a = b$  est accompagnée de l'associativité (et réciproquement) dans 40 % de ses occurrences pour l'échantillon DEUG, et 44 % de ses occurrences pour l'échantillon LICENCE. Il n'y a donc pas de cause commune à leur apparition simultanée, ou non.

La conclusion du problème est associée à un puits que l'on identifie aisément et dont la fréquence d'apparition est de 0,86 pour DEUG et de 0,79 pour LICENCE. La fréquence pour DEUG est un peu plus forte que celle pour LICENCE, mais nous pouvons mettre en évidence ce phénomène de façon plus significative. En dehors de Licence 18-28-29 qui en sont un sous-graphe, les graphes associés aux stratégies de II-A correspondent au dessin ci-contre, ils ont le sommet associé à la conclusion :  $\exists e \forall a \ a e = a$ , pour unique puits. Nous observons qu'en ne retenant de chaque échantillon que les graphes associés à des résolutions qui ne sont pas du type II-A, la fréquence d'apparition de l'énoncé solution reste très forte pour DEUG : 0,80 et qu'elle baisse sensiblement pour LICENCE : 0,50.

$$\begin{array}{c} ad_{ab} = b \\ \downarrow \\ ad_{aa} = a \\ \downarrow \\ ae_o = a \end{array}$$

#### I-3.4. Rédactions ayant la structure d'une R-démonstration.

Une R-démonstration du problème proposé est représentée par un graphe qui est une hiérarchie connexe à un seul puits. Dans quelle mesure cette structure est-elle celle des démonstrations des étudiants ? Les deux échantillons donnent des résultats assez voisins que nous résumons dans le tableau suivant. Il est remarquable que les rédactions ayant la structure d'une R-démonstration de  $\exists e \forall a \ a e = a$  sont toutes du type II-A pour LICENCE et pour DEUG sont pour les trois quarts de ce type. Une raison essentielle pour laquelle une rédaction n'a pas la structure d'une R-démonstration est que la condition de connexité n'est pas satisfaite.

Hiérarchies connexes			
		A un seul puits	Dont l'unique puits est $\exists c \forall a \text{ ae} = a$
DEUG	21	16	15
LICENCE	22	22	16

(Les effectifs de DEUG et LICENCE sont respectivement 37 et 38)

### I-3.5. Dimensions d'une démonstration.

A partir de son graphe de représentation nous avons pu définir des dimensions d'une démonstration. Si le graphe est une hiérarchie connexe on appellera largeur de la démonstration le nombre maximum d'énoncés sur une couche, et profondeur la plus grande distance\* entre une source et un puits. Ces notions n'ont de sens que pour une hiérarchie connexe, cependant nous pouvons parfois les étendre, en particulier lorsque seule la connexité manque et qu'il est possible de la rétablir de façon assez naturelle, ainsi sur le premier exemple du paragraphe I-3.2.2. il n'y a pas d'ambiguïté sur le lien à rétablir, la profondeur est trois, la largeur est deux.

Nous avons, dans cette illustration, plus particulièrement étudié la profondeur. Les démonstrations sont assez peu profondes, la moyenne est de 3,38 pour DEUG et de 2,18 pour LICENCE et elles s'écartent assez peu de ces moyennes (les écarts types sont respectivement de 1,7 et 1,1). Comme on peut s'y attendre, la profondeur d'une démonstration est fortement corrélée avec l'ordre du graphe qui la représente : les coefficients de corrélation sont positifs et assez forts : 0,884 pour DEUG et 0,860 pour LICENCE.

\* nombre d'étoiles ou d'arcs suivant la représentation retenue.

#### I-4. Ressemblance de deux démonstrations et classement

Les raisons pour lesquelles le graphe associé à une rédaction est non connexe sont très variées ; en particulier les graphes associés à deux rédactions distinctes peuvent comporter un sommet isolé étiqueté de la même façon et que dans un cas il s'agisse d'un énoncé inutile, et que dans l'autre il s'agisse d'une déduction non explicite. Aussi nous paraît-il plus pertinent, pour comparer deux démonstrations, de ne s'intéresser qu'aux déductions explicites, ou encore aux énoncés comme éléments d'un couple ancêtre-conséquent ; ce qui revient à regarder la représentation d'une démonstration du point de vue de son ensemble d'arcs. Nous considérerons que deux démonstrations sont *identiques* lorsque les graphes associés ont même ensemble d'arcs et qu'elles sont *étrangères* lorsque les graphes associés ont des ensembles d'arcs disjoints. Mais entre ces deux extrêmes peuvent se présenter toutes les éventualités, nous allons définir un indice de ressemblance pour évaluer la proximité de deux démonstrations.

##### I-4.1. Indice de ressemblance.

Soient  $(X_1, A_1)$  et  $(X_2, A_2)$  les graphes associés aux rédactions de deux démonstrations  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . Nous appelons *indice de ressemblance* de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  le nombre noté  $R(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$  et défini par :

$$R(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\text{card}(A_1 \cap A_2)}{\text{card}(A_1 \cup A_2)}$$

Nous constatons qu'on a :  $R(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 1$  si et seulement si les démonstrations sont identiques et  $R(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 0$  si et seulement si elles sont étrangères.

Cet indice de ressemblance est un indice de similarité au sens des statisticiens (c.f. [7] p 41 définition 1) ; en effet, plaçons nous dans le champ de démonstration d'un échantillon, les individus étant les rédactions de démonstration, et appelons caractère d'un individu le lien entre deux énoncés.



Soient  $n$  le nombre de caractères communs à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ ,  $n'_1$  (resp  $n'_2$ ) le nombre de caractères de  $\mathcal{D}_1$  (resp  $\mathcal{D}_2$ ) qui ne sont pas des caractères de  $\mathcal{D}_2$  (resp  $\mathcal{D}_1$ ) alors :

$$R(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{n}{n'_1 + n'_2 + n}$$

Et l'on a bien :

- Pour toute paire d'individus  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  :  $R(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = R(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)$

- La fonction  $(n'_1, n'_2, n) \mapsto \frac{n}{n'_1 + n'_2 + n}$  est croissante

par rapport à  $n$ , décroissante par rapport à  $n'_1$  et à  $n'_2$ .

#### I-4.2. Exemple, et homogénéité d'un échantillon.

Pour donner un exemple et éviter des figures supplémentaires, soit  $\mathcal{D}_1$  la démonstration de Licence 32 (au § I-3.2.2) et  $\mathcal{D}_2$  la démonstration donnée en exemple au paragraphe I-3.2.3, nous avons :

$n = 5$ ,  $n'_1 = 2$  et  $n'_2 = 1$  d'où  $R(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 0,625$ . Une telle valeur permet de conjecturer une ressemblance assez nette entre les deux démonstrations. Il est difficile de fixer un seuil a priori, au-delà duquel nous considérons un indice comme significatif d'une ressemblance.

Nous appellerons *indice d'homogénéité* d'une population la moyenne des indices de ressemblance de toutes les rédactions prises deux à deux. Dans le cas de nos échantillons, nous trouvons un indice d'homogénéité très faible pour DEUG : 0,076, et pour LICENCE : 0,165, ce qui est sensiblement plus élevé. Nous pouvons affirmer une très grande diversité des démonstrations, et tout particulièrement pour l'échantillon DEUG. Dans ce contexte l'indice trouvé plus haut pour  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  serait considéré comme significatif d'une ressemblance entre les deux démonstrations.

Pour l'illustrer nous donnons ci-dessous le tableau des indices de ressemblance des démonstrations que nous avons classées comme stratégies de type I au § I-2.2, pour chacun des échantillons. Ces deux tableaux montrent que pour DEUG on peut considérer que chaque étudiant a proposé une démonstration originale, pour LICENCE il y a encore une grande diversité mais les démonstrations peuvent être regroupées en des classes non réduites à un seul élément :

1

13	0						13
14	0	0					14
16	0	0	0				16
22	0	0	0	0			22
24	0	0	0	0	0		24
26	0	0	0	0	0	0	26
27	0	0	0	0	0.09	0	0

DEUG

Homogénéité de cette

sous population :

0,003

3

4	0,33																			4
5	0,28	0,16																		5
9	0	0	0																	9
10	0	0	0	0																10
11	0	0	0	0	0															11
14	0	0	0	0	0,57															14
15	0	0	0	0	0	0														15
19	0	0	0	0	0,66	0														19
22	0,33	0,20	0,22	0	0	0	0													22
25	0	0	0,07	0	0,20	0	0,15													25
30	0,25	0,14	0,18	0	0,22	0	0,27	0,18												30
31	0	0	0	0	0,80	0	0,71	0,10	0,83											31
32	0,22	0,12	0,16	0	0,50	0	0,50	0,07	0,55	0,18										32
34	0,4	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0,28	0	0,22	0	0,2						34

LICENCE

Homogénéité de cette

sous population :

0,14

Par exemple on peut rapprocher les individus 10-14-19-31, l'homogénéité de ce groupe est 0,69. La formation de classes d'individus à partir d'un indice de ressemblance, et en recherchant la meilleure homogénéité, est l'objet de la classification hiérarchique.

I-4.3. Classification des démonstrations.

Nous avons utilisé pour la classification des démonstrations un programme d'analyse hiérarchique : John-Johnson hierarchical clustering program, dont nous donnons les références dans l'index bibliographique.

I-4.3.1. Classification pour l'échantillon DEUG.

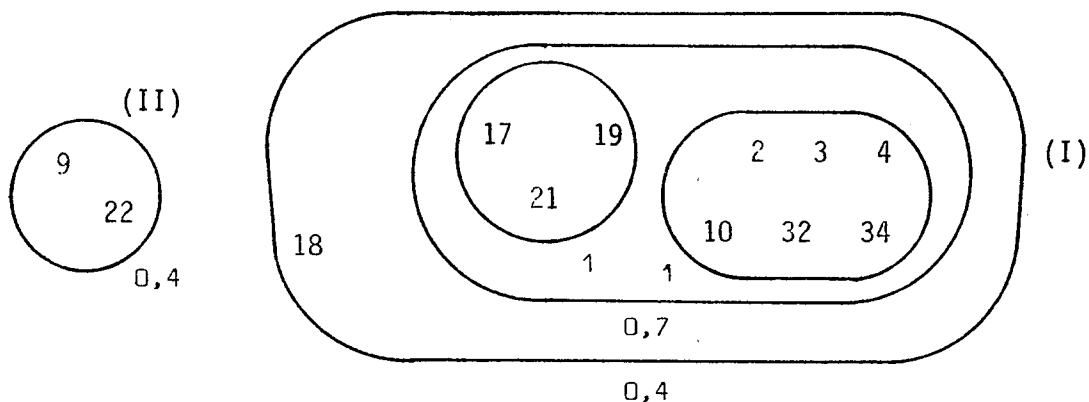
Voici le résultat rendu par le programme d'analyse hiérarchique :

```
DIAMETER METHOD
0 0 1 1 1 1 0 2 2 2 2 0 2 2 2 2 3 3 3 1 1 1 1 2 0 0 0 1 3 3 3 0 1 3 0 3
5 6 2 3 4 6 7 0 4 5 6 9 2 7 8 3 9 0 3 1 5 8 7 9 1 2 3 4 0 2 4 5 8 1 6 1 7

0.10000000E 01   . . . . . XXXXX XXXXXXXXXXXXX . . . . .
0.60999999E 00   . . . . . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX . . . . .
0.30999999E 00   . . . . . XXX . . . . . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX . . . . .
0.10999999E 00   . . . . . XXX . . . . . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX . . . . .
0.90999996E -01  . . . . . XXX . . . XXX . . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXX XXX
0.80999997E -01  . . . . . XXX . . . XXXXX . XXX . . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXX XXX
0.60999993E -01  . . . . . XXX . . . XXXXX . XXXXX . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXXXX XXX
0.50999999E -01  . . . . . XXX . . . XXXXX . XXXXX . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXX
0.49999997E -01  . . . . . XXXXX . . . XXXXX . XXXXX . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX XXX

END OF METHOD
```

Dès le quatrième pas de calcul, l'homogénéité des classes formées n'est plus que de 0,2 ; ce coefficient est assez faible et, on peut vérifier que la parenté des démonstrations rapprochées est peu significative. En retenant une homogénéité supérieure ou égale à 0,4, on obtient la classification suivante :



L'homogénéité de chaque classe est notée près du trait qui la délimite.

La classe d'homogénéité 0,7 correspond aux stratégies du type II-A. Seulement deux individus s'en trouvent écartés :

— Deug A 7 dont la rédaction est :

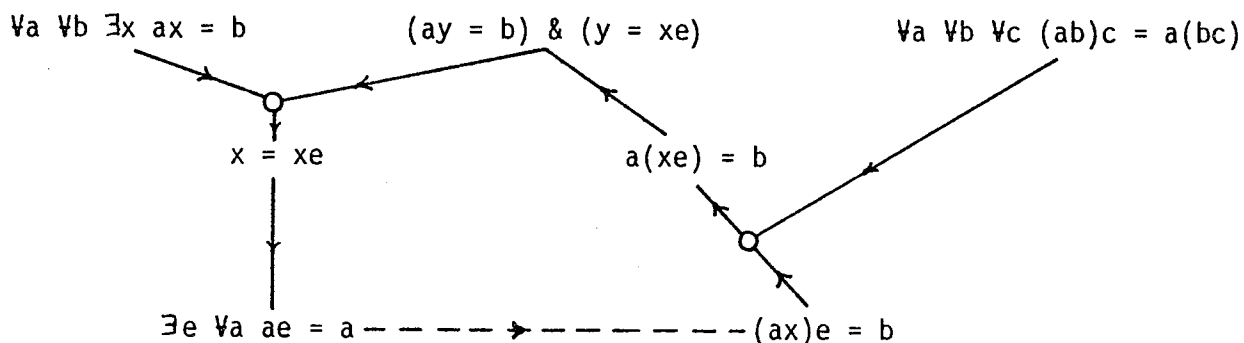
*D'après la deuxième propriété de la loi interne.  
 $ax = b$  si nous posons  $a = b$ , nous obtenons  
 $x = e_1$  qui est l'élément neutre à droite pour la loi  
interne, car  ~~$a \cdot x = y = b \cdot y \Rightarrow x$~~*

Son graphe est étranger au graphe qui caractérise le groupe II-A (c.f. § I-3.3)

— Deug A 18 qui laisse apparaître au niveau de sa rédaction un changement de direction dans la résolution du problème, ce qui a pour effet de baisser son indice de ressemblance avec les autres démonstrations du type II-A.

Donc la classe d'homogénéité 0,4, notée (I) sur le dessin, correspond à un individu près à la stratégie II-A.

Quant à la classe notée II sur le dessin, on y retrouve Deug A 9 dont nous avons donné le graphe de représentation au § I-3.1.2. Pour Deug A 22 nous donnons le graphe ci-dessous :



On retrouve ainsi dans la même classe deux rédactions dont la différence essentielle est qu'une dérivation (notée en trait pointillé sur le dessin ci-dessus) est explicite dans l'une et pas dans l'autre. Si on rétablit ce lien le coefficient de ressemblance devient : 0,50.

Notons enfin que la très grande disparité des solutions proposées par les individus de DEUG, conduit à une classification pertinente du tiers seulement de ces étudiants.

I-4.3.2. Classification pour l'échantillon LICENCE.

Le programme d'analyse hiérarchique nous donne le résultat suivant :

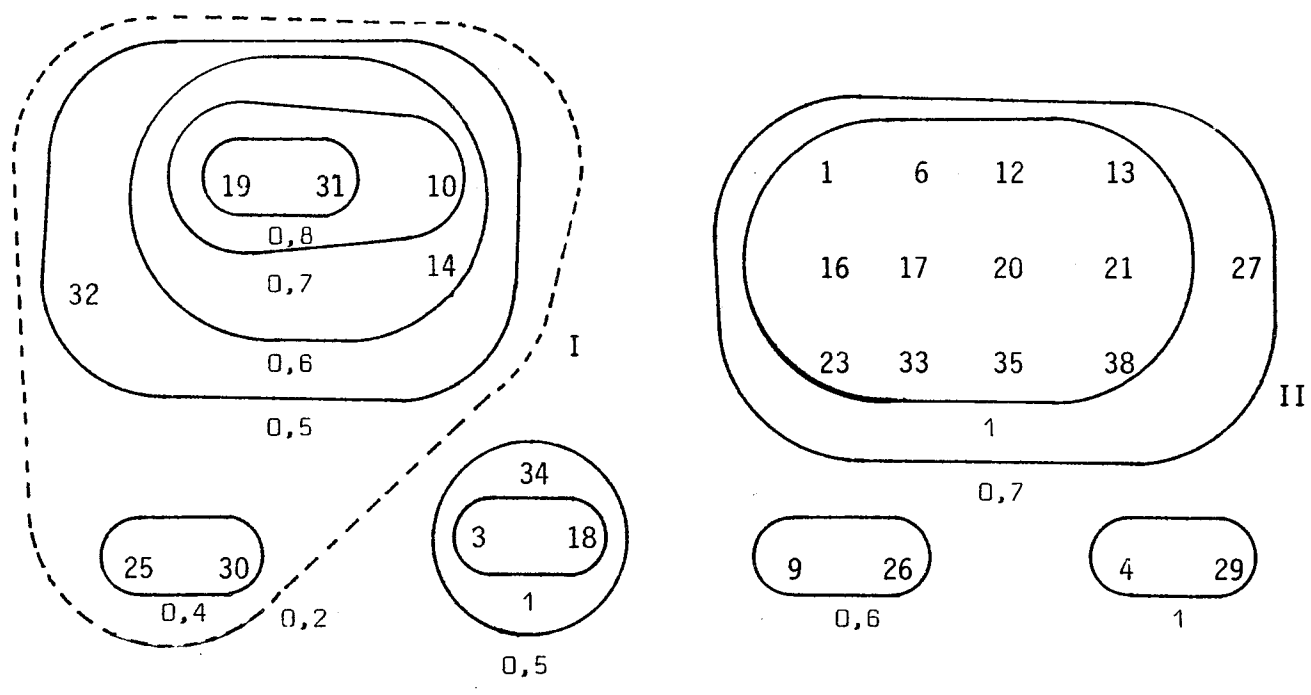
DIAMETER METHOD

0 0 0 1 2 2 1 2 3 1 1 1 3 3 3 0 2 3 0 2 0 1 3 0 2 7 0 0 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3  
2 7 8 1 4 8 5 5 0 4 0 9 1 2 6 9 6 7 5 2 3 3 4 4 9 7 1 6 2 3 6 7 0 1 3 3 5 8

0.1000000E 01 . . . . . XXX . XXX . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.7000000E 01 . . . . . XXX . . . . . XXX . XXX . XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.4000000E 01 . . . . . XXXXX . . . . . XXX . XXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.5000000E 00 . . . . . XXXXXX . . . . . XXX . X XX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.5000000E 00 . . . . . XXXXXXXXXXX . XXX . . . . . XXXXX XX XX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.3000000E 00 . . . . . XXX XXXXXXXXXXX . XXX . . . . . XXXXX XXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.2000000E 00 . . . . . XXX XXXXXXXXXXX . XXX . . . . . XXXXX XXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.1000000E 00 . . . . . XXXXXXXXXXXXXXX . XXX . . . . . XXXXX XXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.99999964E-01 . . . . . XXXXXXXXXXXXXXX . XXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.7000000E-01 . . . . . XXXXXXXXXXXXXXX . XXXXX XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX  
0.0 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

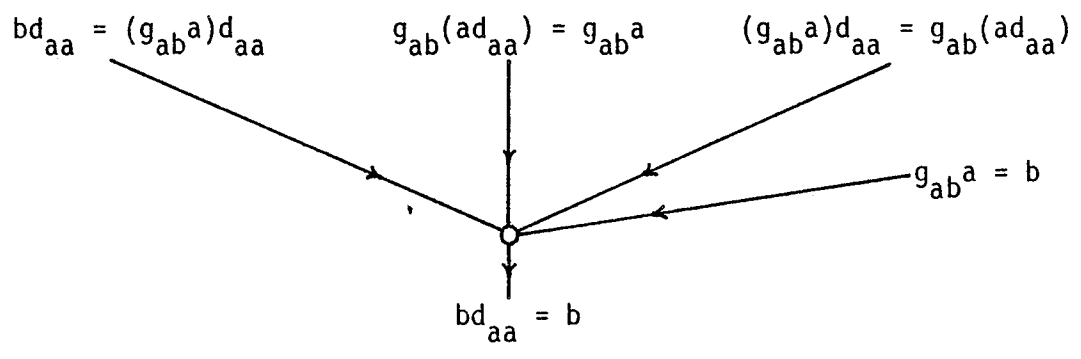
NO OF METHOD

De même que pour DEUG nous nous intéressons aux classes dont l'homogénéité est supérieure ou égale à 0,4. Nous les représentons ci-dessous :



Nous voyons apparaître deux classes importantes, celle que nous marquons II et qui ne regroupe que des stratégies II-A, et celle que nous marquons I sur le schéma. Les démonstrations qui constituent cette classe, sont toutes du type I ; si nous les analysons plus avant, elle font apparaître un noyau commun que représente le graphe suivant. Il correspond dans les rédactions à l'énoncé :

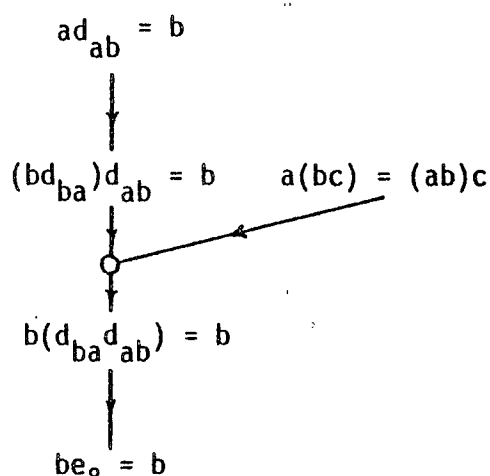
$$bd_{aa} = (g_{ab} a)d_{aa} = g_{ab}(ad_{aa}) = g_{ab} a = b$$



Ces démonstrations diffèrent par la présence ou l'absence de justifications explicites, particulièrement l'associativité ; parfois l'indice de ressemblance est abaissé par la persistance dans la rédaction d'une autre direction de recherche (c'est le cas par exemple de Licence 32).

Les individus regroupés dans cette classe, ont sans nul doute compris la démonstration, et ils se distinguent par la forme synthétique adoptée pour l'exprimer.

Les deux démonstrations de la classe {9,26} ont pour noyau commun la totalité de la démonstration Licence 26, dont nous reproduisons le graphe ci-dessous :

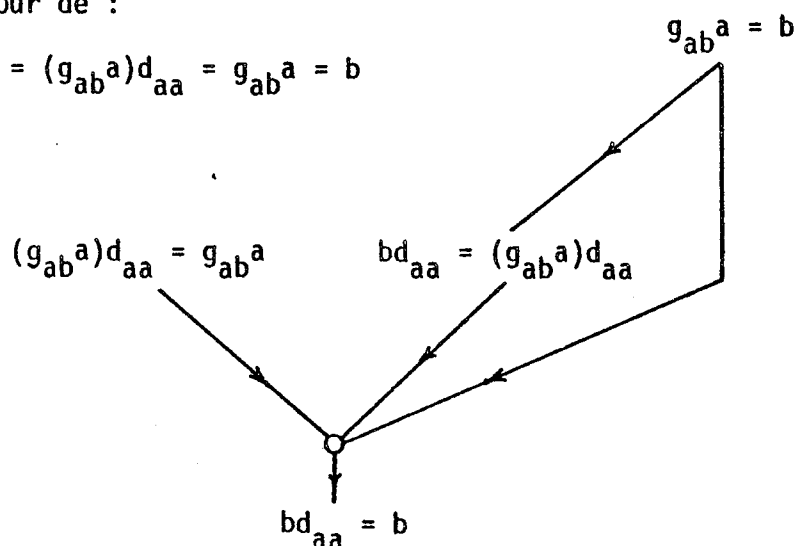


Cette classe correspond exactement au groupe de stratégies II-B.

Les rédactions des classes {3,18,34} et {4,29} ne sont en fait que des ébauches de démonstration que le contexte méta-mathématique nous a fait classer I pour 3,4 et 34, II-A pour 18 et 29.

Enfin la classe {25,30} est constituée de deux rédactions dont nous donnons ci-dessous le graphe du noyau commun. Cette classe est à rapprocher de celle notée I sur le schéma, les noyaux se distinguent essentiellement, par l'absence de l'énoncé  $(g_{ab}a)d_{aa} = g_{ab}(ad_{aa})$  pour la classe {25,30} dont la rédaction s'articule autour de :

$$b = g_{ab}a \text{ donc } bd_{aa} = (g_{ab}a)d_{aa} = g_{ab}a = b$$



Bien que les noyaux soient assez comparables et que l'analyse hiérarchique découpe nettement la classe  $\{25,30\} \cup \{10,14,19,31,32\}$ , nous continuons à distinguer les deux sous classes. Une première raison est l'indice d'homogénéité faible de cette classe, il est égal à 0,2 ; et une autre est la façon dont l'énoncé  $(g_{ab}a)d_{aa} = g_{ab}a$  qui ne figure pas dans les démonstrations de la classe  $\{10,14,19,31,32\}$  est obtenu par Licence 25 et Licence 30 (voir plus loin § III-2.2).

L'analyse hiérarchique nous permet de classer de façon pertinente près de deux tiers des rédactions. Les classes mises en évidence correspondent pour l'essentiel, sauf  $\{3,18,34\}$ , aux groupes de stratégies que nous avons relevés au paragraphe I-2.2.

## II - LE STRUCTURALEMENT POSSIBLE

L'ensemble des démonstrations structurellement possibles, que nous appellerons plus brièvement le "*structurellement possible*" est constitué de démonstrations formelles du problème à résoudre. On considère le prédicat à trois places d'argument  $P(x,y,z)$  qui signifie  $xy = z$ , on utilise d'autre part la forme prénexe de Skölem en introduisant les fonctions  $d_{x,y}$  et  $g_{x,y}$  respectivement pour  $\forall x \forall y \exists z P(x,z,y)$  et  $\forall x \forall y \exists z P(z,x,y)$  qui expriment la division à droite et la division à gauche, et la fonction  $e_0$  à zéro place d'argument pour  $\exists e \forall x P(x,e,x)$ . Comme il ne figure aucune variable libre, nous pouvons sans ambiguïté supprimer les quantificateurs universels, le problème consiste alors à montrer :

$$P(x, d_{xy}, y), P(g_{xy}, x, y), (P(x, y, u) \wedge P(y, z, v)) \supset (P(x, v, w) \sim P(u, z, w))$$

$$\vdash P(x, e_0, x)$$

Il existe de nombreux algorithmes de démonstration automatique, nous avons utilisé, pour nous guider, l'algorithme d'exclusion [ 34 ] qui nécessite que les données soient exprimées sous forme clausale (conjonctions de disjonctions). On adjoint aux données la négation de la conclusion, et on montre que le système obtenu est contradictoire. Ces démonstrations sont intrinsèquement par l'absurde ; mais en fait, de celles qui n'utilisent la contradiction de la conclusion qu'au dernier pas de calcul, on peut extraire les démonstrations directes en considérant tous les pas de calcul, sauf le dernier.



## II-1. Champ de référence

Nous appellerons *champ de référence* l'ensemble des énoncés du structuralement possible.

Contrairement au champ de résolution d'un échantillon quelconque, le champ de référence est fortement structuré par les relations logiques entre ses énoncés. Ces relations sont établies lors de la recherche des démonstrations.

Dans le cas de notre exemple nous ne considérons pas tout le structuralement possible mais seulement sa restriction aux démonstrations directes. Que ce soit dans nos échantillons, ou dans des sondages parmi les enseignants nous n'avons jamais rencontré de démonstrations par l'absurde, nous analysons plus loin (§ II-2.3) les raisons de cette absence. Par ailleurs nous n'allons pas énumérer les démonstrations en laissant les énoncés sous forme clausale, dans la mesure où cela est possible ici, nous les exprimons dans le formalisme mathématique, en conservant les fonctions de Skölem à deux places d'argument  $d$  et  $g$  que nous avons définies plus haut. Les données du problèmes sont :

$$ad_{ab} = b$$

$$g_{ab}a = b$$

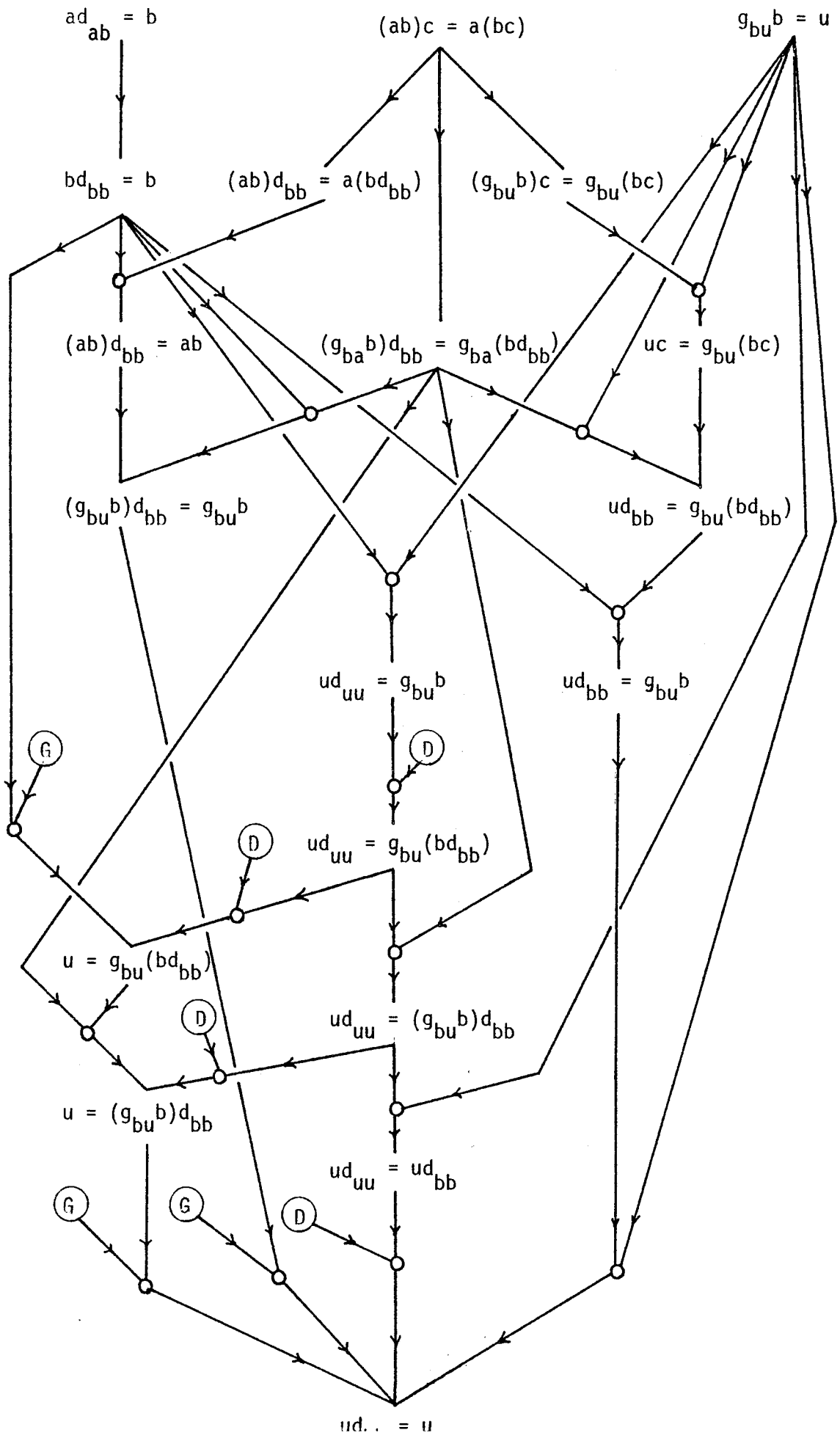
$$(ab)c = a(bc)$$

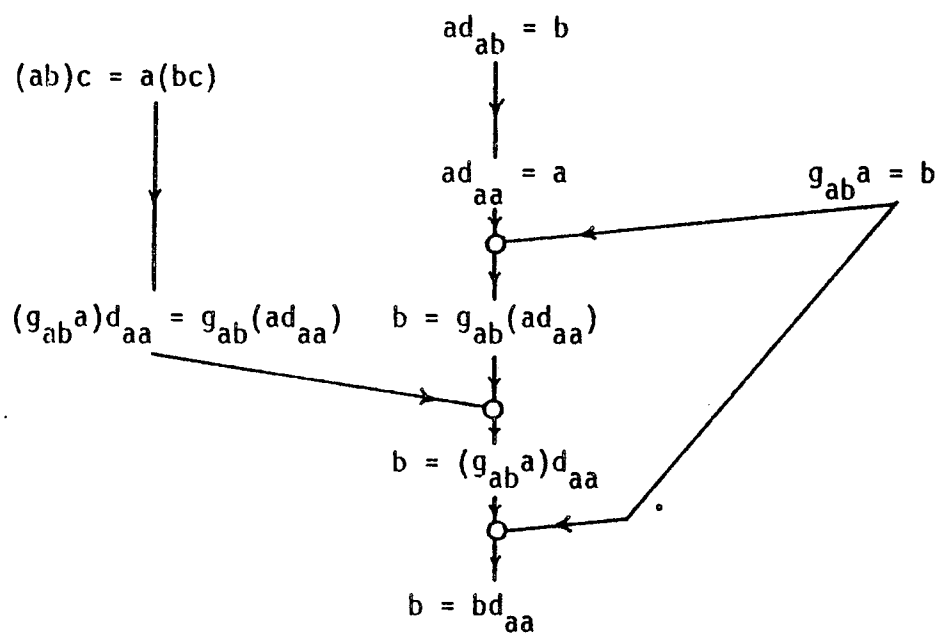
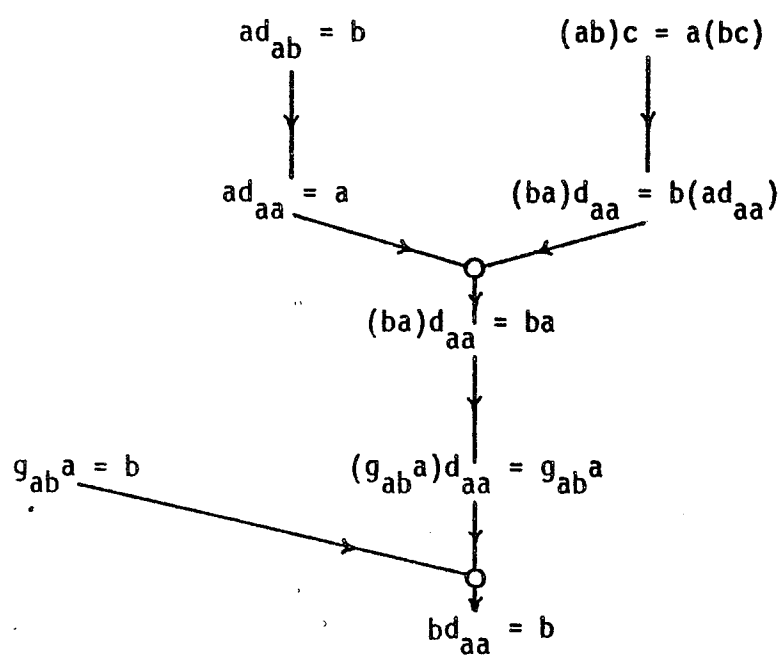
Le graphe de noeuds et d'étoiles qui suit représente le champ de référence avec sa structure. Pour simplifier le dessin nous avons noté  $\leftarrow \textcircled{D}$  un arc ayant  $bd_{bb} = b$  pour première extrémité, et  $\leftarrow \textcircled{G}$  un arc ayant  $g_{bu}b = u$  pour première extrémité.

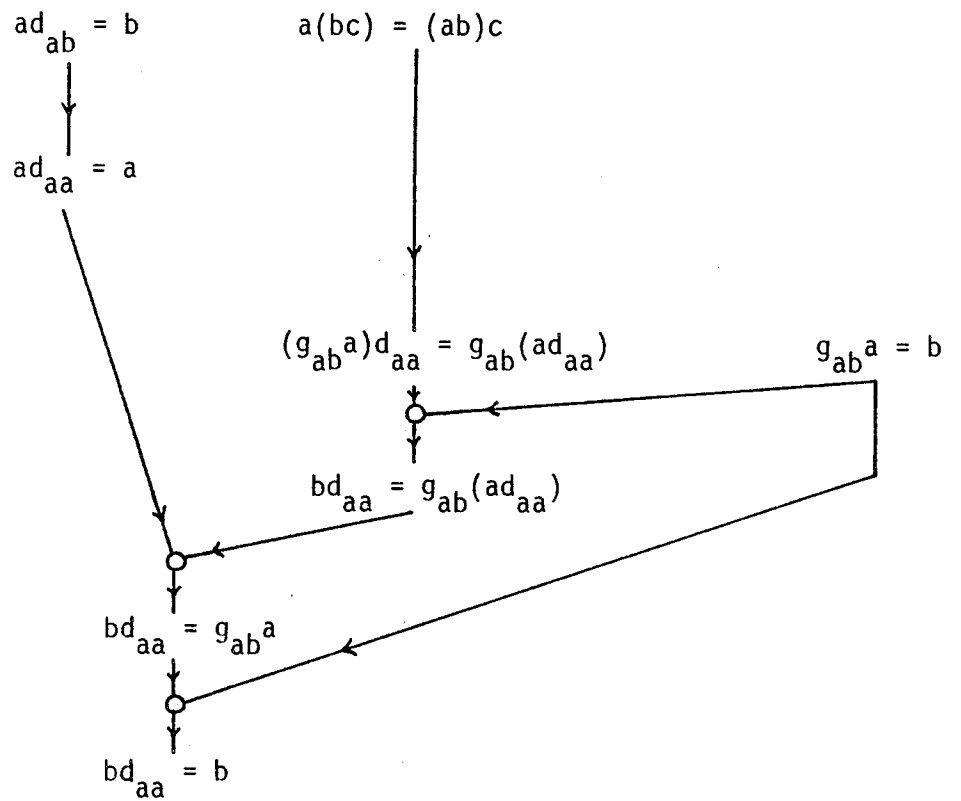
On trouve dans les pages suivantes les huit démonstrations qui constituent, pour notre exemple, le structuralement possible.

Dans la suite nous appelons *graphe de référence* le graphe de représentation d'une démonstration structuralement possible.

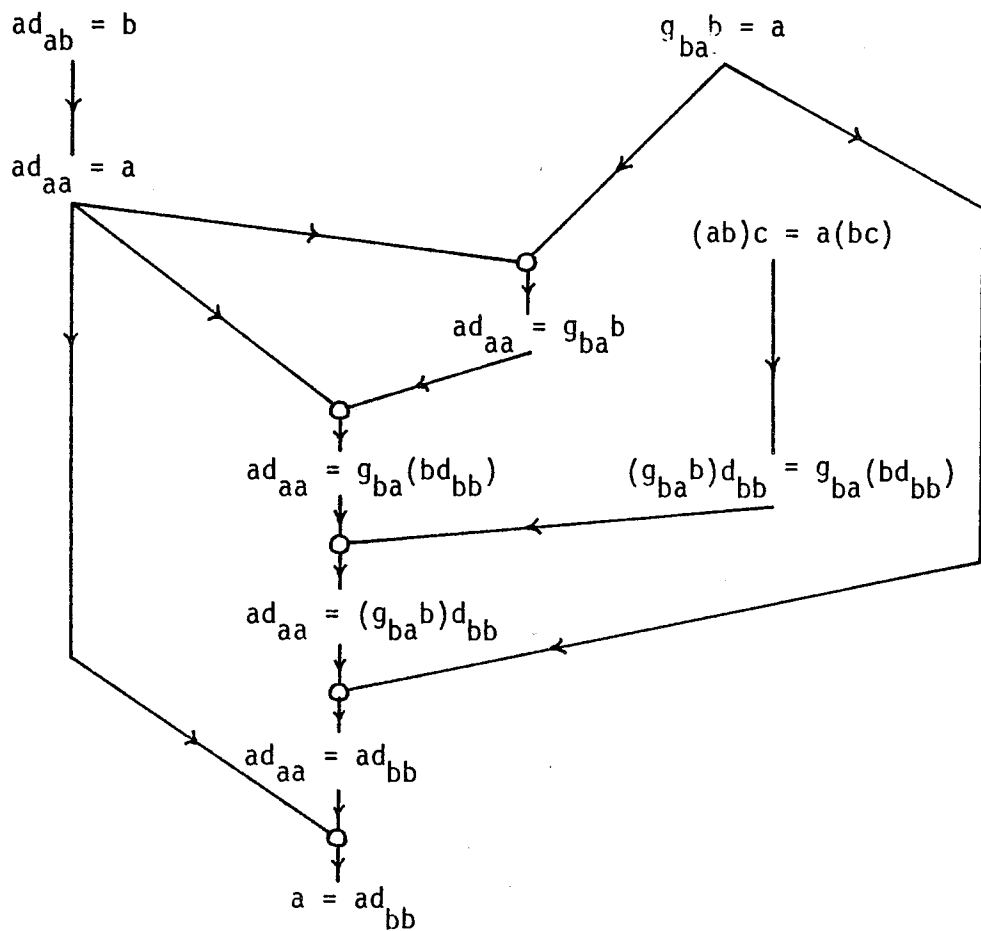
Souvent nous écrirons pour abrégé : R-graphe.

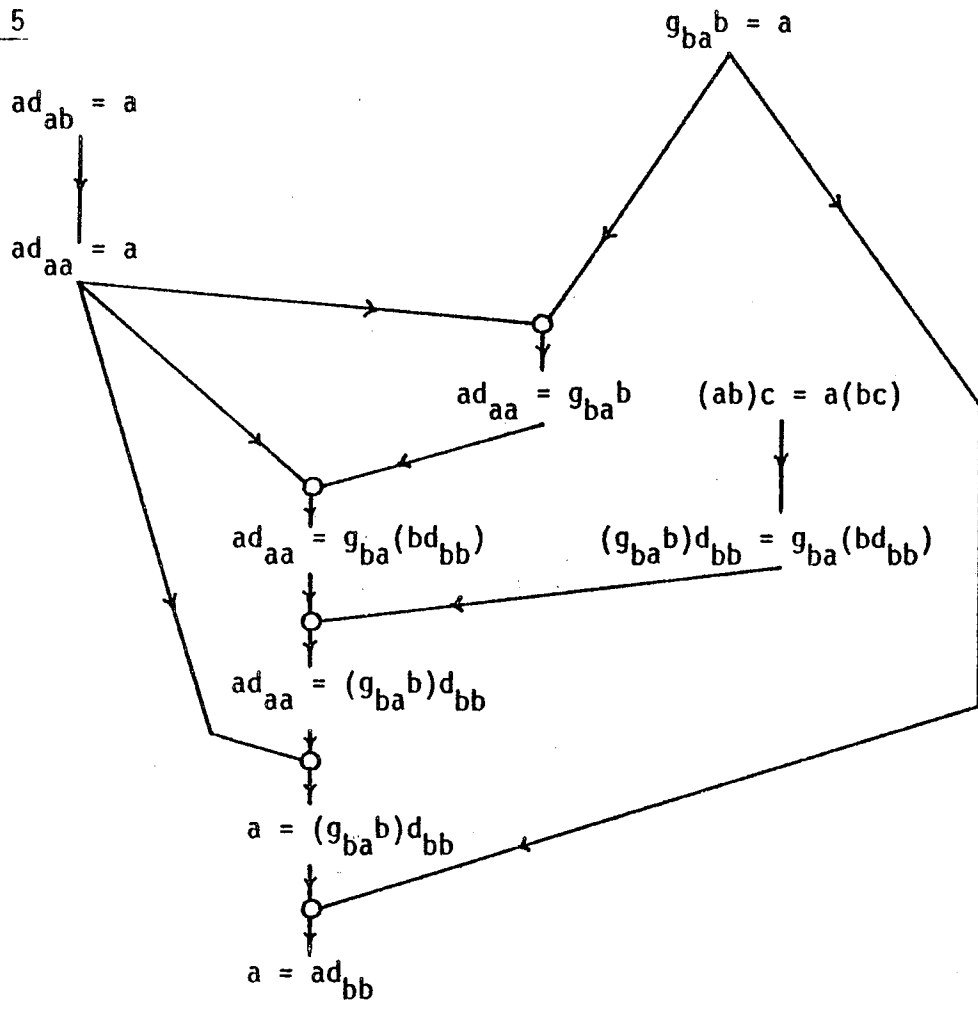


R-graphe 1R-graphe 2

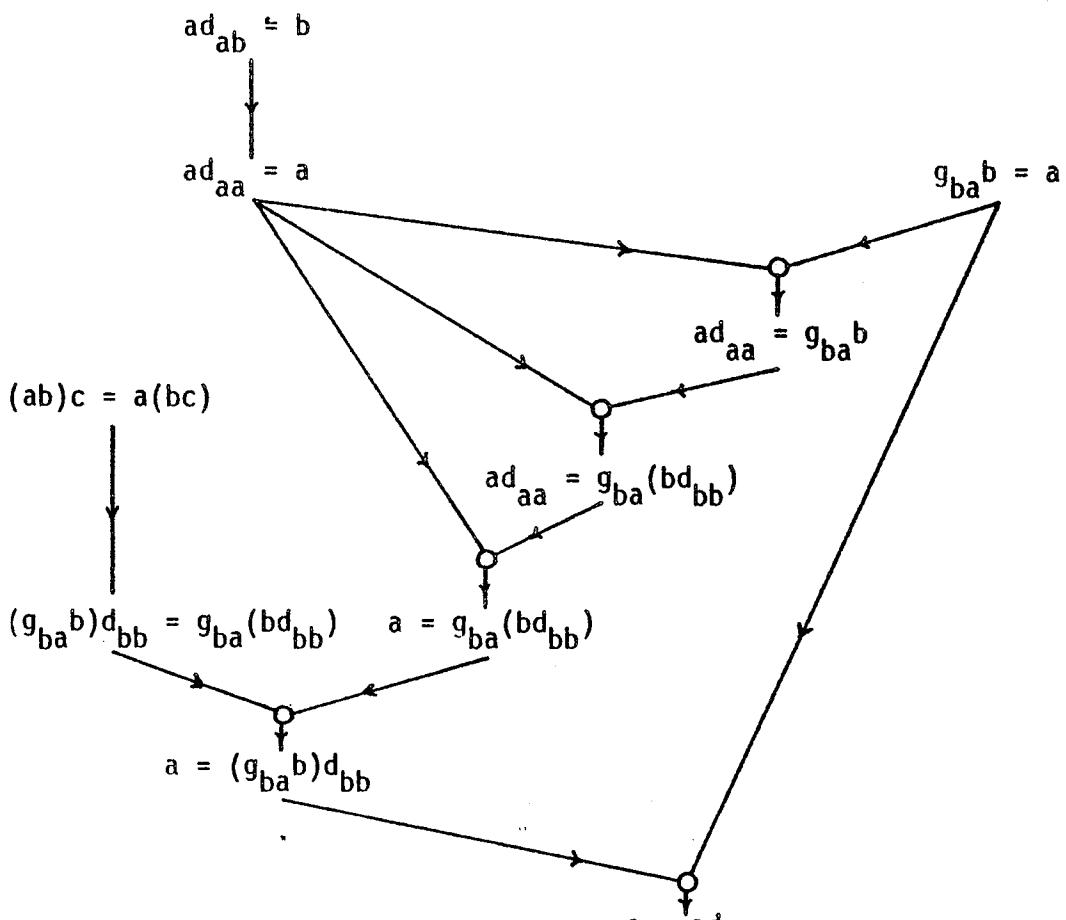


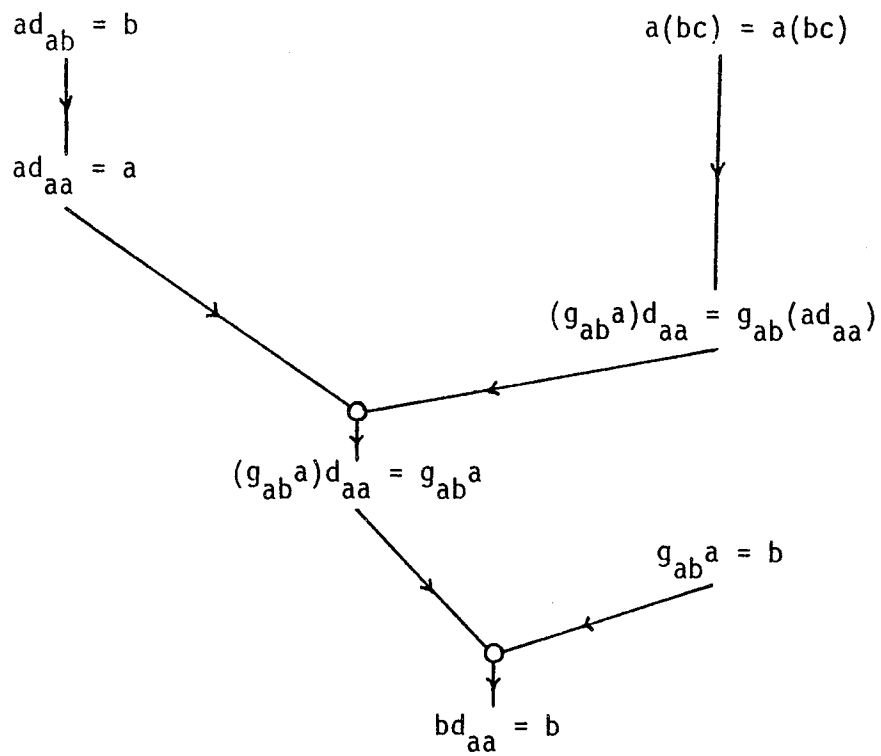
R-graphe 4



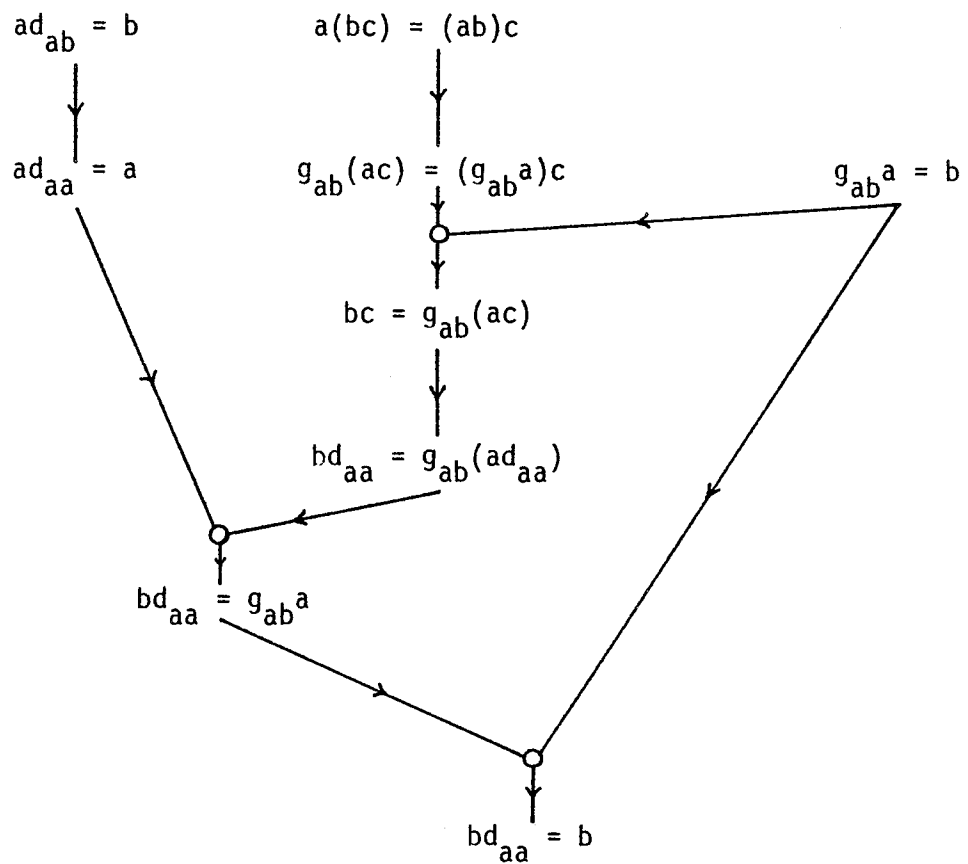


R-graphe 6





R-graphe 8



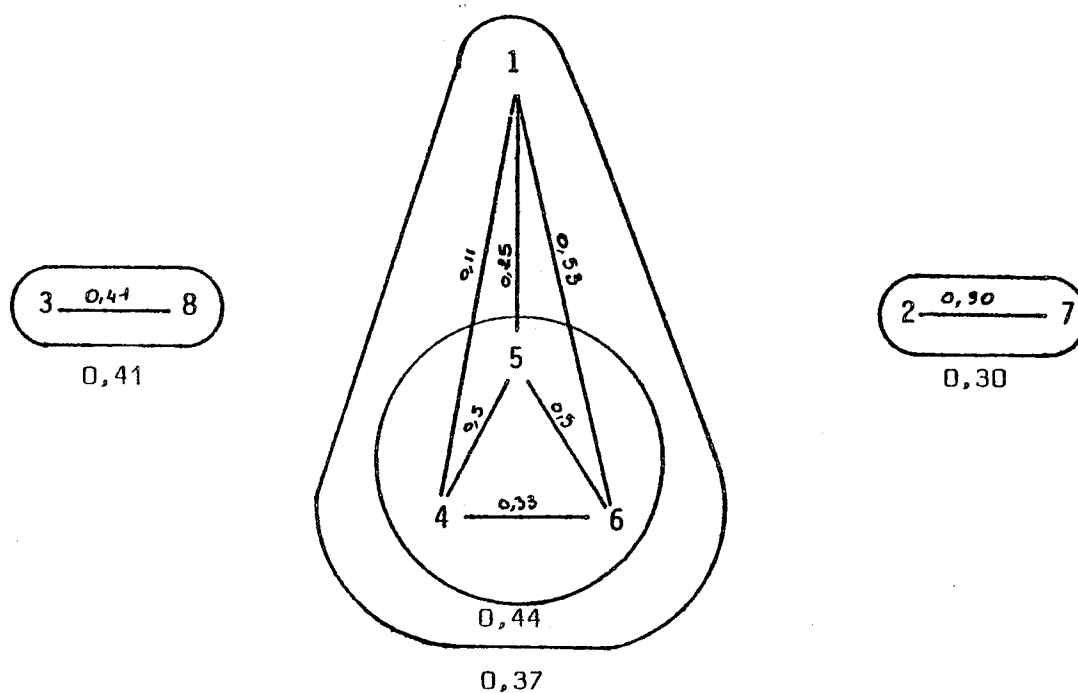
## II-2. Quelques commentaires

Nous savons a priori qu'il n'y a pas dans le structuralement possible deux démonstrations identiques, autrement dit que l'indice de ressemblance de deux démonstrations quelconques est inférieur à 1. Mais il n'y a aucune raison pour qu'elles soient deux à deux étrangères, ainsi l'indice d'homogénéité du structuralement possible pour notre exemple est de 0,21. Il correspond aux indices de ressemblance :

	1							
2	0,15	2						
3	0,23	0,15	3					
4	0,11	0,05	0,11	4				
5	0,25	0,11	0,17	0,5	5			
6	0,53	0,11	0,17	0,33	0,5	6		
7	0,27	0,3	0,27	0,12	0,2	0,2	7	
8	0,13	0,14	0,41	0,05	0,1	0,1	0,15	8

A partir de ce tableau nous pouvons regrouper les démonstrations en classes, en recherchant pour chaque classe l'indice d'homogénéité le plus élevé possible.

Dans le schéma ci-dessous chaque classe est entourée d'un trait le long duquel on a marqué son indice d'homogénéité. A l'intérieur de chaque classe on a relié deux à deux les numéros des R-graphes, par un trait le long duquel est marqué l'indice de ressemblance du couple :



Soit :

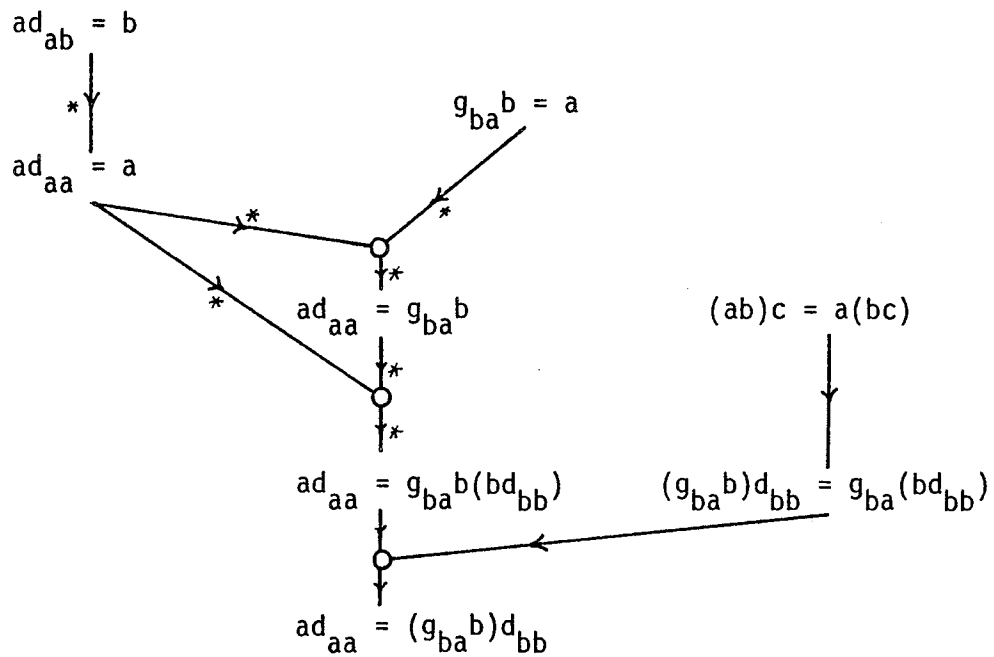
Ref 1 = {R-graphe 1, R-graphe 4, R-graphe 5, R-graphe 6}

Ref 2 = {R-graphe 2, R-graphe 7}

Ref 3 = {R-graphe 3, R-graphe 8}

En revenant aux démonstrations on peut apprécier, autrement que par les indices qui nous y ont conduit, ce qui les rapproche et commenter cette classification. On peut distinguer les démonstrations qui partent du rapprochement de  $ad_{aa} = a$  et  $g_{ba} b = a$ , de celles qui partent de l'associativité.

Les premières ont en commun les déductions :



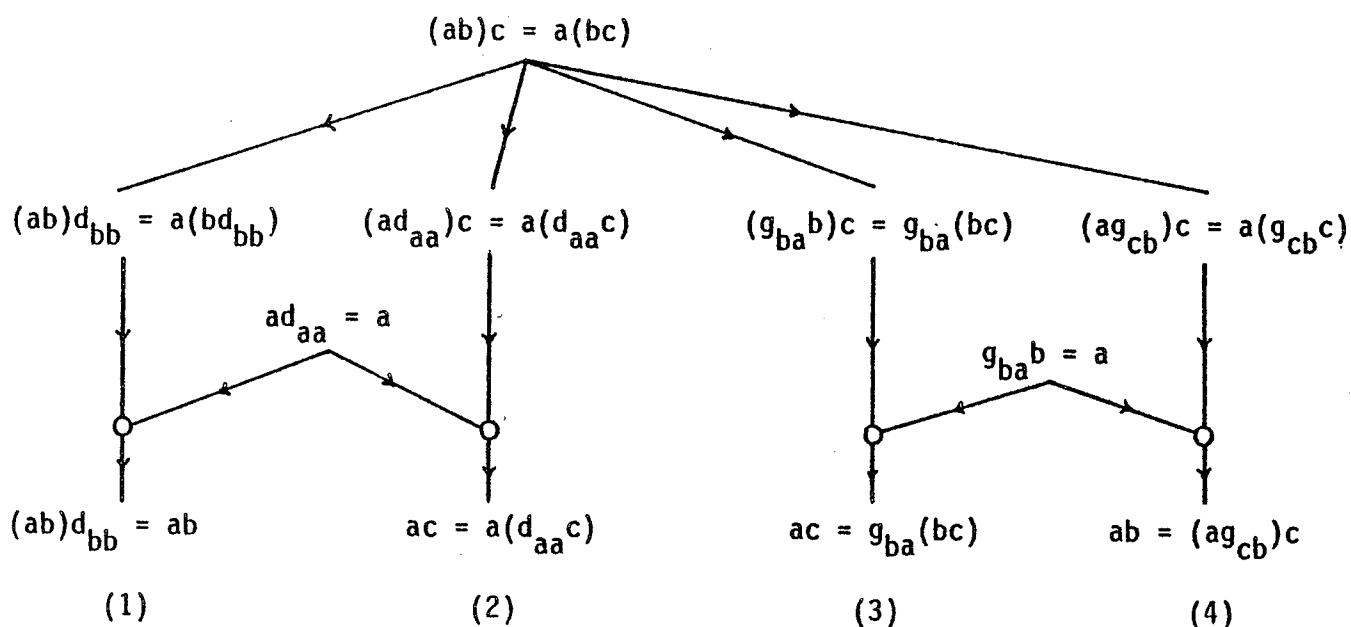
Les démonstrations de graphe R-graphe 4 et R-graphe 5 ont en commun tout ce noyau. Elles diffèrent, lors du passage de  $ad_{aa} = (g_{ba} b) d_{bb}$  à  $ad_{bb} = a$ , par l'ordre du calcul de  $ad_{aa}$  et  $g_{ba} b$ .

La démonstration du graphe R-graphe 6 n'a de ce noyau que les dérivations marquées d'une étoile. Par le calcul de  $ad_{aa}$  elle fait passer de l'énoncé  $ad_{aa} = g_{ba} (bd_{bb})$  à  $a = g_{ba} (bd_{bb})$ , les premières dérivations paraissent alors inutiles, on rejoint ici la démonstration représentée par R-graphe 1 qui déduit des deux énoncés rapprochés non pas  $ad_{aa} = g_{ba} b$  mais  $a = g_{ba} (bd_{bb})$ .



On peut commenter ainsi Ref 1 : ce sont les démonstrations dont le point de départ est le rapprochement des énoncés  $ad_{aa} = a$  et  $g_{ab}a = b$ . On peut considérer que R-graphe 1 est une version plus élégante que R-graphe 6, cependant c'est ce dernier qui a permis de le rattacher à Ref 1.

Les démonstrations qui ont pour point de départ l'associativité, reviennent à s'intéresser en premier lieu à la possibilité de calculer une des expressions entre parenthèses de  $(ab)c = a(bc)$ . Le schéma suivant montre les déductions possibles :

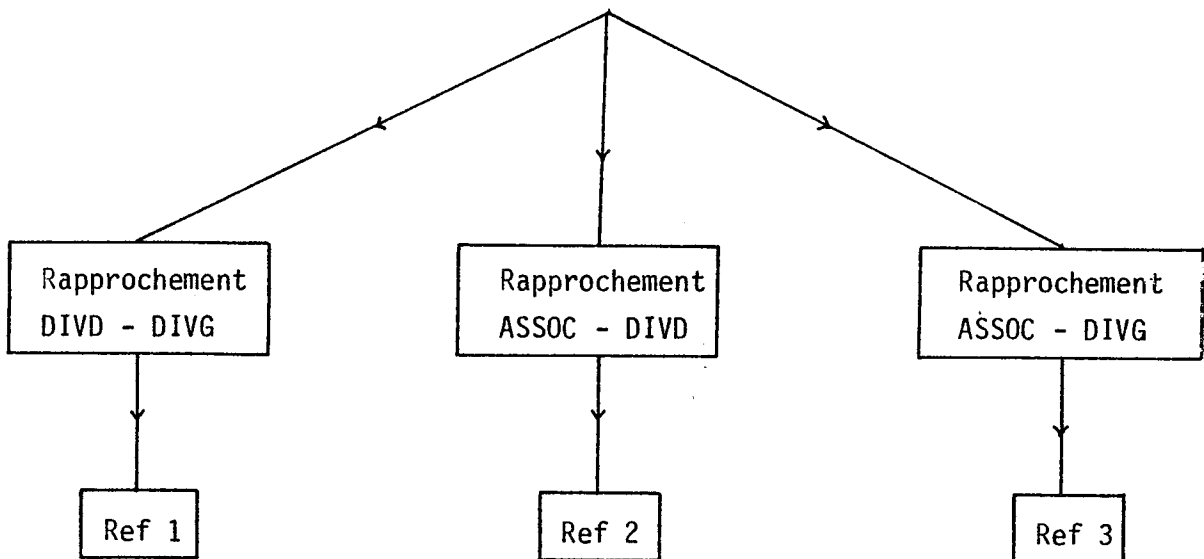


Les énoncés (2) et (4) ne permettent pas d'aller jusqu'à la solution. Pour (2), la seule dérivation encore possible est le calcul de  $d_{aa}c$  qui conduit à l'identité :  $ad_{d_{aa},b} = ad_{d_{aa},b}$

Pour (4) la seule dérivation encore possible est le calcul de  $ag_{cb}$  qui conduit à  $uc = g_{g_{cb}u}b$ , et cet énoncé restera inutilisé car  $b$  apparaît parmi les arguments de la fonction de Skölem  $g$ .

Seules les voies (1) et (3) ne sont pas des culs-de-sac, leur choix caractérise respectivement les démonstrations représentées par les graphes de Ref 2 et Ref 3.

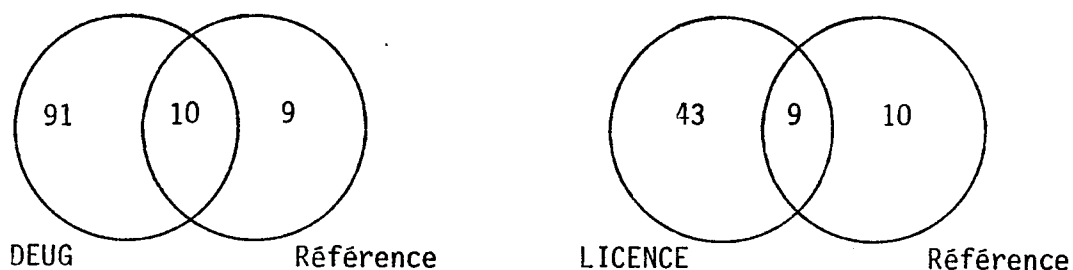
Si nous appelons ASS, DIVD et DIVG respectivement les données  $(ab)c = a(bc)$ ,  $ad_{ab} = b$ ,  $g_{ab}^a = b$ , il est possible d'illustrer par le schéma suivant la classification des démonstrations (directes) structurellement possibles :



### III - LE MATERIELLEMENT POSSIBLE

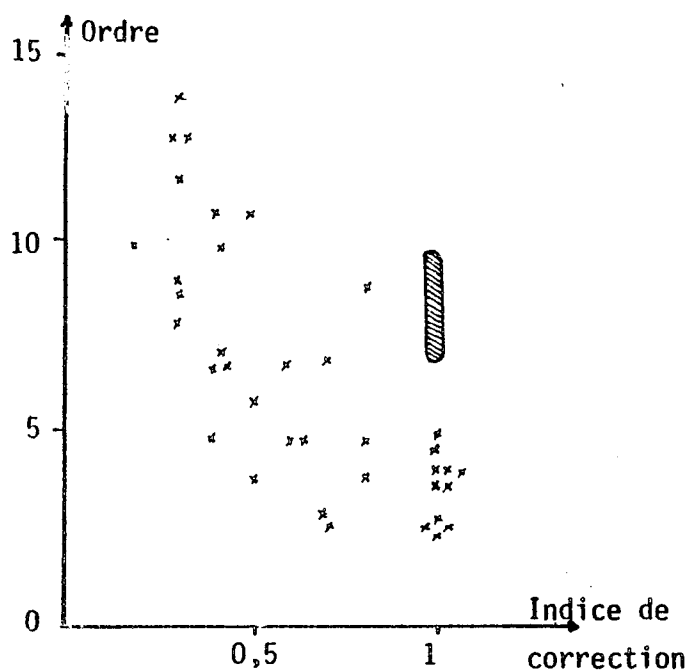
#### III-1. Comparaison des champs de résolution et du champ de référence

Dans une certaine mesure nous nous sommes déjà intéressés à cette comparaison en étudiant au paragraphe I-3.3. les sources et les puits d'un graphe de représentation. Le champ de référence est constitué de 19 énoncés, en dehors des données peu d'entre eux se retrouvent dans les rédactions. Ceci est illustré par le diagramme ci-dessous :

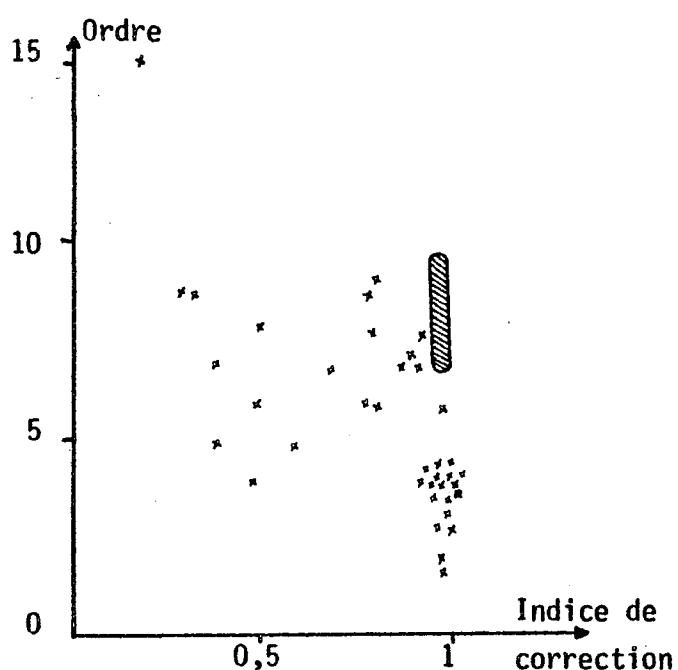


La proportion d'énoncés du champ de référence, en dehors des données ou de la conclusion, dans les champs de résolution est très faible : 0,06 pour DEUG et 0,10 pour LICENCE.

Nous obtenons ainsi une information "toutes démonstrations confondues", et l'image peut ne pas être fidèle car le champ de résolution d'un échantillon peut paraître se distinguer du champ de référence du fait de quelques individus donnant des rédactions longues en dehors de ce champ. Pour rendre compte de la situation au niveau individuel nous avons défini pour une rédaction son *coefficient de correction* : rapport du nombre de ses énoncés qui sont dans le champ de référence au nombre total d'énoncés qu'elle met en oeuvre. Les nuages de points suivants montrent la relation entre l'indice de correction et l'ordre d'une démonstration.



- DEUG -



- LICENCE -

Nous notons que le nuage de LICENCE est plus rond que celui de DEUG, d'autre part on peut s'attendre à ce qu'il se déplace vers la zone hachurée qui correspond au structuralement possible dont les démonstrations ont de 7 à 10 énoncés (et qui ont un coefficient de correction égal à 1 !)

Le rapport entre un champ de démonstration et le champ de référence sera mieux décrit par l'indice de corrélation entre l'indice de correction des démonstrations et le nombre de leurs énoncés : si les démonstrations mettent en jeu essentiellement des énoncés du champ de référence ce coefficient doit être voisin de zéro, sinon on doit trouver une corrélation négative qui vient de ce que les rédactions courtes reprenant en général les données du problème ont un bon indice de correction.

Dans le cas de notre illustration nous trouvons un coefficient fortement négatif pour DEUG : -0,820, et une tendance encore très marquée pour LICENCE : -0,579.

L'étude de la fréquence d'apparition des énoncés du champ de référence dans les rédactions met en évidence de façon spectaculaire un énoncé :  $\forall a \exists x ax = a$ , dont la fréquence est de 0,59 pour DEUG et passe à 0,92 pour LICENCE. Cet énoncé apparaît soit sans antécédents explicites, soit dans la dérivation :  $\forall a \forall b \exists x ax = b$  donc  $\forall a \exists x ax = a$ . (77 % des apparitions en DEUG, 62 % en LICENCE). L'opportunité de cet énoncé dans la résolution de ce problème est donc apparue à la plupart des étudiants de LICENCE, pas nécessairement pour en faire bon usage puisque pas loin de la moitié (0,45) de ces individus constitue la classe II-A.

### III-2. Confrontation du réel et du structurellement possible

La comparaison des champs de résolution et de référence est insuffisante, car les énoncés sont considérés sans leurs liens logiques éventuels. Les démonstrations du structurellement possible étant, comme celles du réel, représentées par des graphes, nous allons utiliser l'indice de ressemblance pour apprécier le rapport du réel au possible en se plaçant du point de vue de leur structure. Nous illustrons cette approche avec l'étude successivement des échantillons DEUG et LICENCE.

#### III-2.1. Echantillon DEUG.

Pour chaque démonstration nous avons déterminé la démonstration formelle avec laquelle elle a le meilleur indice de ressemblance.

Dans le tableau suivant nous donnons pour chaque individu, repéré par son numéro, l'indice de ressemblance et le numéro du R-graphe associé ainsi déterminé. Dans le cas où l'indice est zéro il n'y a bien sûr aucun R-graphe indiqué. Les démonstrations de la classe II-A ne figurent pas dans ce tableau, elles ont pour meilleur indice de ressemblance 0,16 avec R-graphe 4.

Individu N°	Ind. de Ress.	N° du R- graphe
1	0,09	7
5	0,11	4
6	0	-
8	0,10	4
9	0	-
11	0,07	7
12	0	-
13	0	-
14	0	-
15	0,14	7
16	0	-
18	0,14	4
20	0	-

Individu N°	Ind. de Ress.	N° du R- graphe
22	0	-
23	0	-
24	0	-
25	0	-
26	0,12	7
27	0	-
28	0	-
29	0	-
30	0	-
31	0,10	7
33	0	-
35	0,09	7
38	0,08	7

Ces tableaux montrent de façon très explicite que la plupart des démonstrations sont étrangères au structuralement possible, et que celles qui ne le sont pas ont un indice très faible. Cet indice est trop faible pour être significatif d'une ressemblance ; si nous prenons le cas d'une démonstration du groupe II-A son meilleur indice est de 0,16 avec R-graphe 4 et cependant l'intersection est réduite à :  $ad_{ab} = b$  donc  $ad_{aa} = a$  (1)

La contribution d'une seule dérivation à l'indice de ressemblance peut donc être assez importante, du fait que les démonstrations comportent peu de déductions. En particulier la dérivation (1) est très fréquente , aussi nous allons reprendre le calcul de l'indice en l'enlevant des démonstrations, y compris les démonstrations formelles, lorsqu'elle y apparaît. Avec ce nouveau calcul l'indice des individus du groupe II-A est nul, et nous ne donnons dans le tableau suivant que les individus dont les indices sont non nuls :

Individus N°	Indice modifié	R-graphe N°
5	0,11	4
8	0,05	4
18	0,07	4
26	0,14	7

Ce nouvel indice reste très faible, on peut affirmer que les démonstrations proposées par les étudiants de DEUG sont étrangères au structuralement possible. Cependant Deug A 5 et Deug A 26 ayant des coefficients très sensiblement plus forts que les autres individus de l'échantillon, nous reproduisons ici leur rédaction :

- Pour tout  $a \in G$ , il existe  $e_1 \in G$  tel que  $ae_1 = a$ .
- Pour tout  $b \in G$ ,  $b$  étant différent de  $a$  il existe  $e_2 \in G$  tel que  $be_2 = b$ .

Nous savons que  $a$  et  $b$  peuvent être liés par la loi multiplicative de  $G$ .

Quels que soient  $a \in G, b \in G$  il existe  $y \in G$  tel que  $a = yb$ .

Démontrons que  $e_1$  et  $e_2$  sont égaux et donc que  $e_1$  est l'élément neutre à droite de tout élément de  $G$ .

$$ae_1 = a$$

$$\otimes \text{ or } a = by \text{ d'où } ae_1 = yb = (yb)e_2 \text{ car la loi est associative}$$

$$a = yb \text{ on en déduit } e_1 = e_2$$

Conclusion  $G$  possède pour cette loi un élément neutre à droite  $e_1$ .

Cette démonstration est classée dans le groupe de stratégies III. L'étudiant utilise la régularité de la loi par rapport à l'addition, et ne remarque pas à la ligne  $\otimes$  l'égalité  $yb = (yb)e_2$  qui lui permettrait de conclure correctement.

---

$$\begin{aligned} & \forall a \in G, \exists v \in G, av = a \\ & \forall c \in G, \exists b \in G, cb = ba \\ & \text{ou } a cbv = b av = ba = \cancel{b}c \\ & \Rightarrow \forall a \in G, av = a \end{aligned}$$

---

(Deug A 26)

Il semble que l'associativité soit comprise comme : "les parenthèses sont inutiles" ; par ailleurs il y a très peu de dérivations explicitées, et si on peut estimer que l'étudiant a trouvé la solution, c'est grâce à une lecture entre les lignes.

Ces deux derniers exemples ne peuvent empêcher de conclure sans nuances, que les démonstrations de DEUG sont étrangères au structuralement possible.

### III-2.2. Echantillon LICENCE.

Le calcul de l'indice de ressemblance nous conduit aux mêmes constatations que pour l'échantillon DEUG : les indices sont faibles et la contribution d'une dérivation est importante. Nous donnons directement le tableau avec le meilleur indice de ressemblance obtenu en supprimant dans les démonstrations, réelles et possibles, la déduction :  $ad_{ab} = a$  donc  $ad_{aa} = a$ . Cette déduction figure dans plus de la moitié (0,58) des rédactions de LICENCE.

Ce tableau donne la liste des individus dont l'indice modifié est non nul. (rappelons qu'en particulier pour ceux du groupe II-A l'indice est nul).

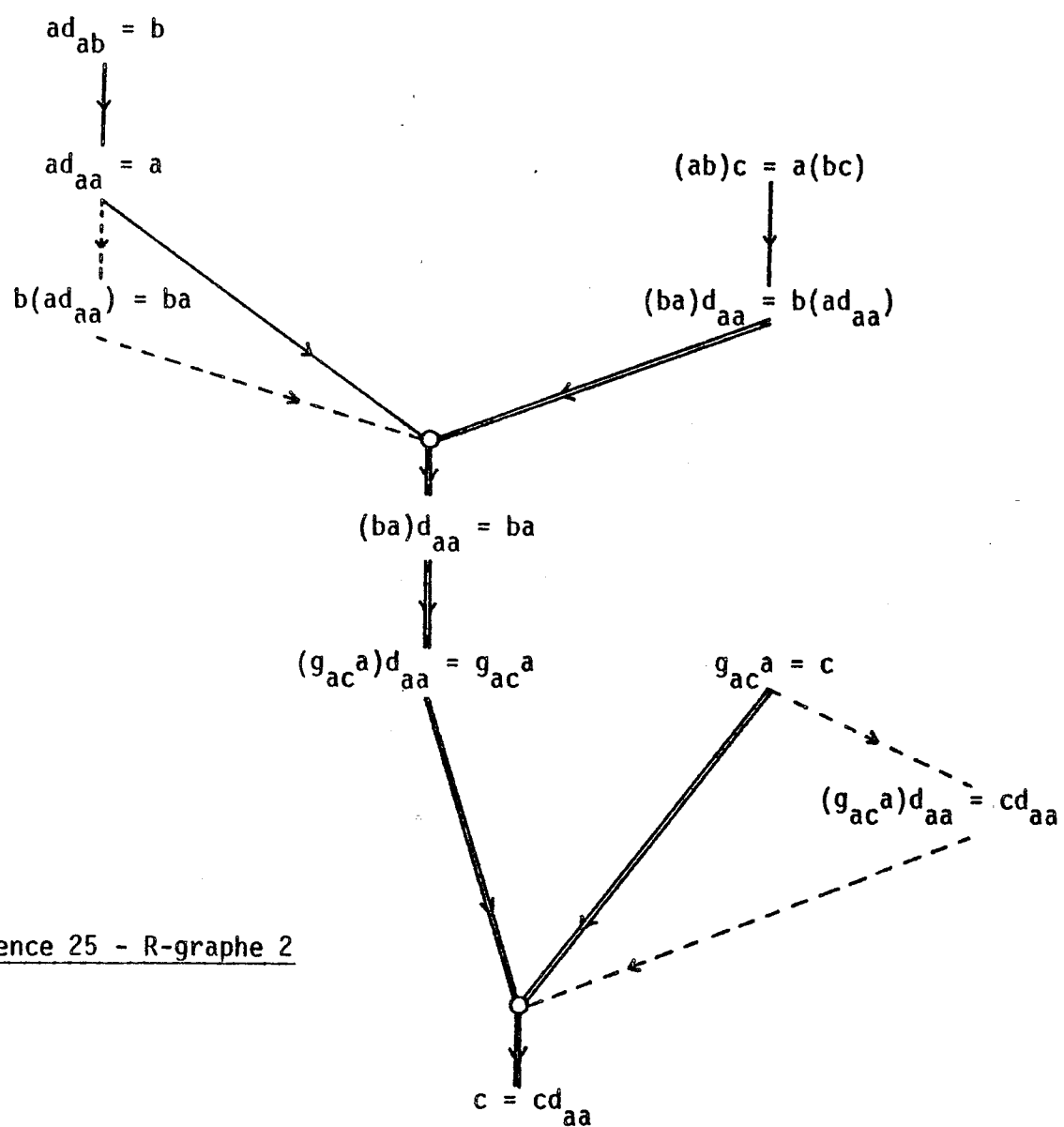
Individu N°	Indice de ressemblance	Indice modifié	R-graphe N°
5	0,33	0,25	2
10	0,11	0,12	7
11	0,10	0,11	1
14	0,18	0,20	7
15	0,20	0,22	7
19	0,09	0,10	7
25	0,36	0,40	2
30	0,30	0,22	7
31	0,10	0,11	7
32	0,16	0,09	7

Nous retrouvons toute la classe {10,14,19,31,32} dont les rapports avec R-graphe 7 ne sont pas significatifs ; la valeur trouvée pour l'indice de ressemblance est, pour l'essentiel, due à la présence dans tous les cas d'un arc de  $g_{ab} a = b$  vers  $bd_{aa} = b$ .

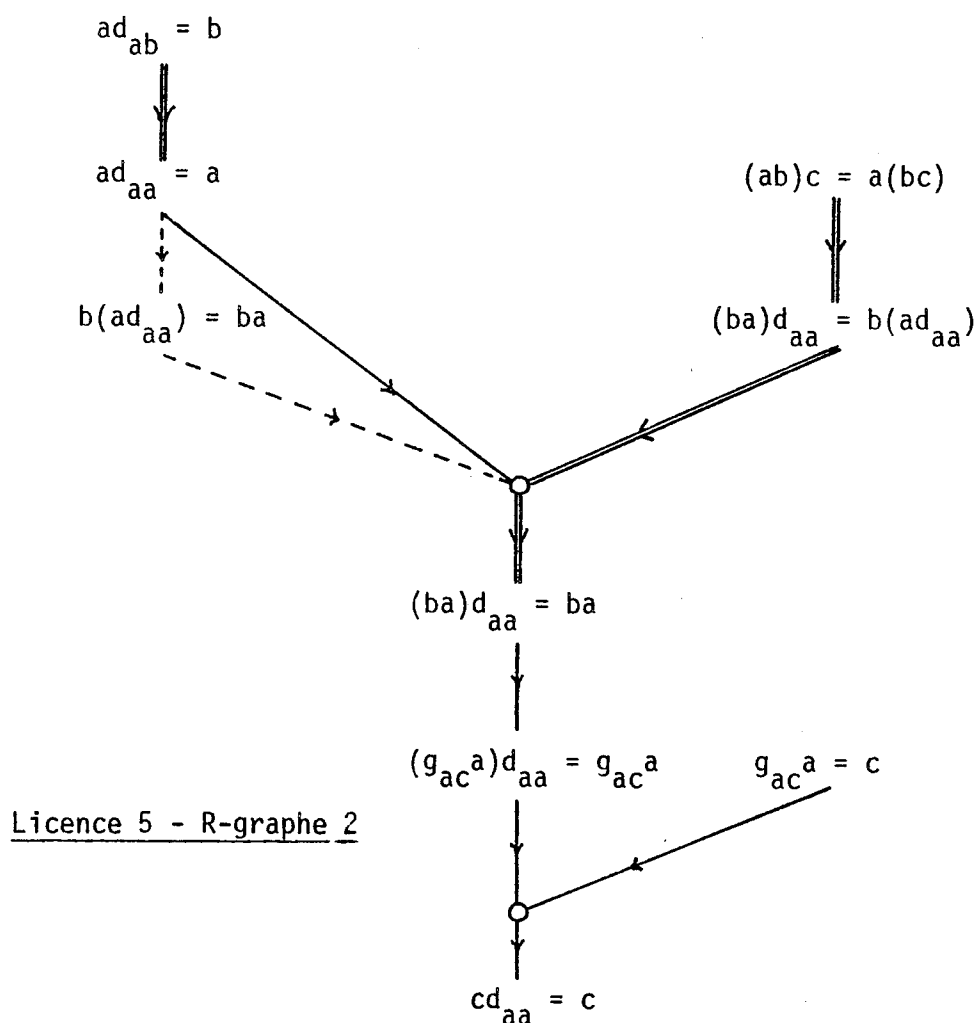
Les indices les plus élevés marquent la ressemblance des démonstrations réelles avec Ref 2 ; les différences peuvent être de détail et nous pourrions considérer R-graphe 2 et R-graphe 7 comme des modèles de ces démonstrations, ou ces différences peuvent être fondamentales et signifier une distance importante entre le réel et le possible. Nous analysons plus en détail les rapports entre ces démonstrations, et nous représentons ci-dessous sur un même dessin le graphe de la démonstration et le R-graphe associé.

Nous convenons de représenter par un trait double les arcs qui se trouvent à la fois dans le graphe de démonstration et le R-graphe, par un trait simple ceux qui ne figurent que dans le R-graphe, par un pointillé ceux qui ne figurent que dans la démonstration réelle.



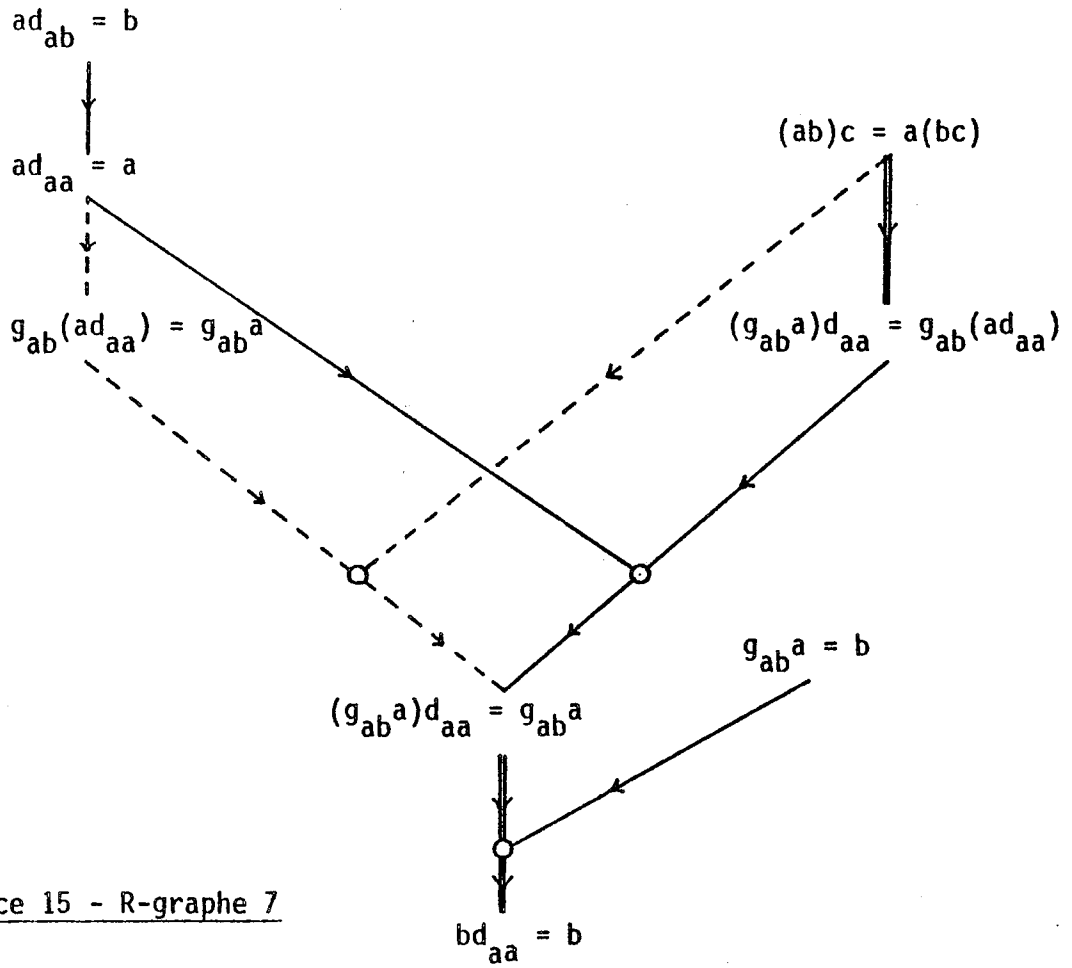


Licence 25 - R-graphe 2

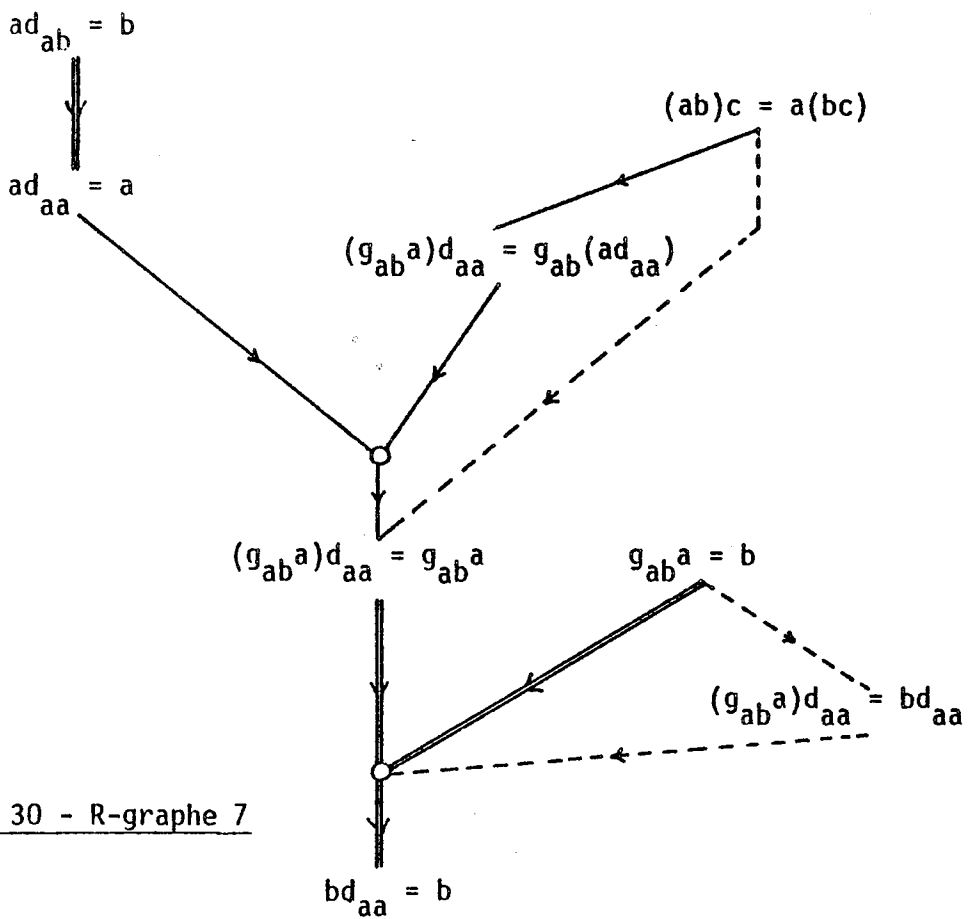


La différence essentielle de démarche entre les démonstrations réelles et possibles réside dans la construction dans les premières de l'énoncé  $b(ad_{aa}) = ba$  obtenu à partir de  $ad_{aa} = a$  en multipliant à gauche chaque membre de l'égalité par  $b$ . Bien que chaque étudiant explicite l'énoncé  $(ba)d_{aa} = b(ad_{aa})$ , il n'effectue pas le calcul de  $ad_{aa}$  mais rapproche cet énoncé de celui obtenu par multiplication pour déduire  $(g_{ab}^a)d_{aa} = g_{ab}^a$ . La même technique est utilisée par Licence 25 pour obtenir  $c = cd_{aa}$ .

Nous retrouvons ceci pour les deux démonstrations rattachées à R-graphe 7 :



Licence 15 - R-graphe 7

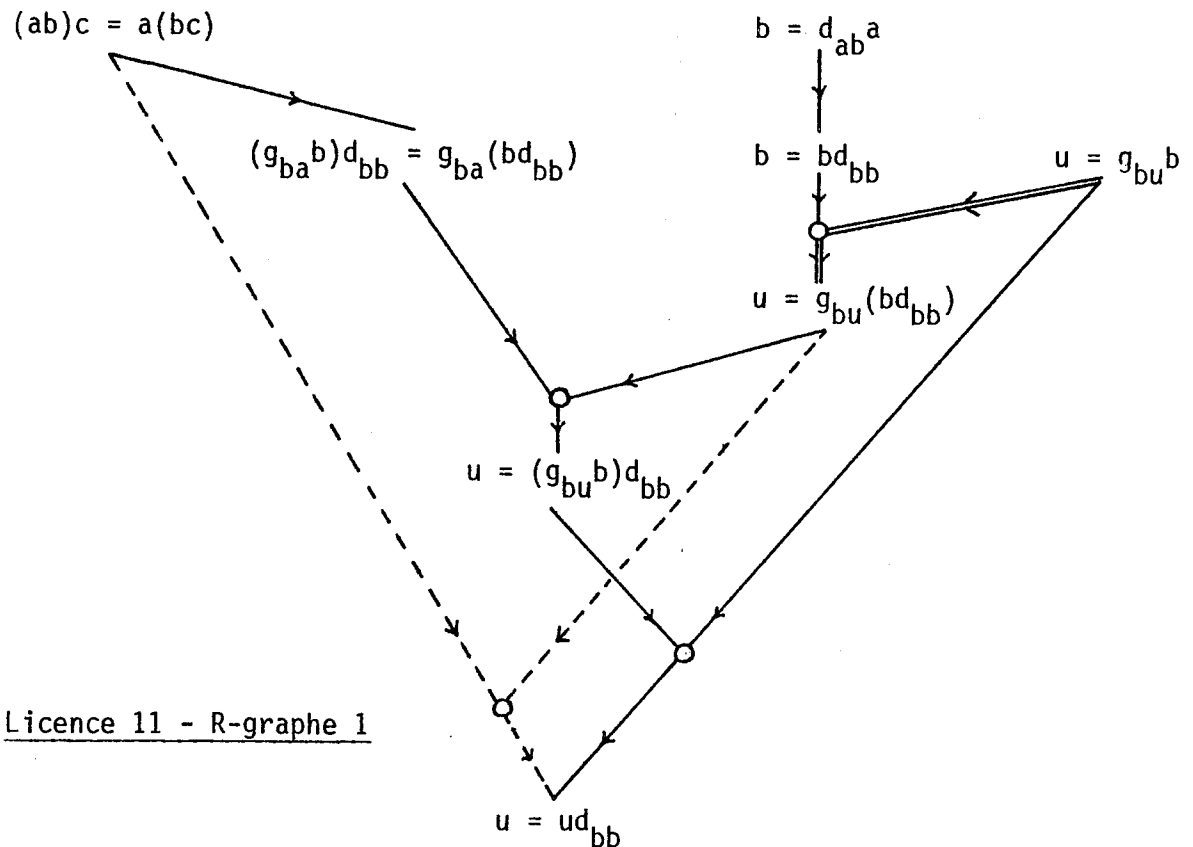


Licence 30 - R-graphe 7

Nous remarquons, pour ces deux derniers graphes, un arc qui va directement de  $(ab)c = a(bc)$  à l'énoncé  $(g_{ab} a)d_{aa} = g_{ab} a$ .

Cela nous conduit à l'hypothèse suivante : l'associativité n'est pas comprise comme une proposition, ainsi que les autres données, mais comme une règle : la règle de déplacement des parenthèses. Cette hypothèse, si elle était vérifiée, permettrait de comprendre la construction d'énoncés par multiplication (à gauche ou à droite) des deux membres d'une égalité.

Il reste, dans le tableau des ressemblances, Licence 11 pour lequel nous donnons ci-dessous la représentation simultanée du graphe de représentation et du R-graphe associé. La faiblesse de l'indice de ressemblance (0,1) est due aux raccourcis importants de Licence 11, mais du point de vue des stratégies employées ces démonstrations sont les mêmes. Il est probable que l'associativité est prise ici comme une règle de déplacement des parenthèses, cependant les raccourcis sont d'une telle importance qu'on ne peut rien affirmer sur ce que la rédaction sous-entend.



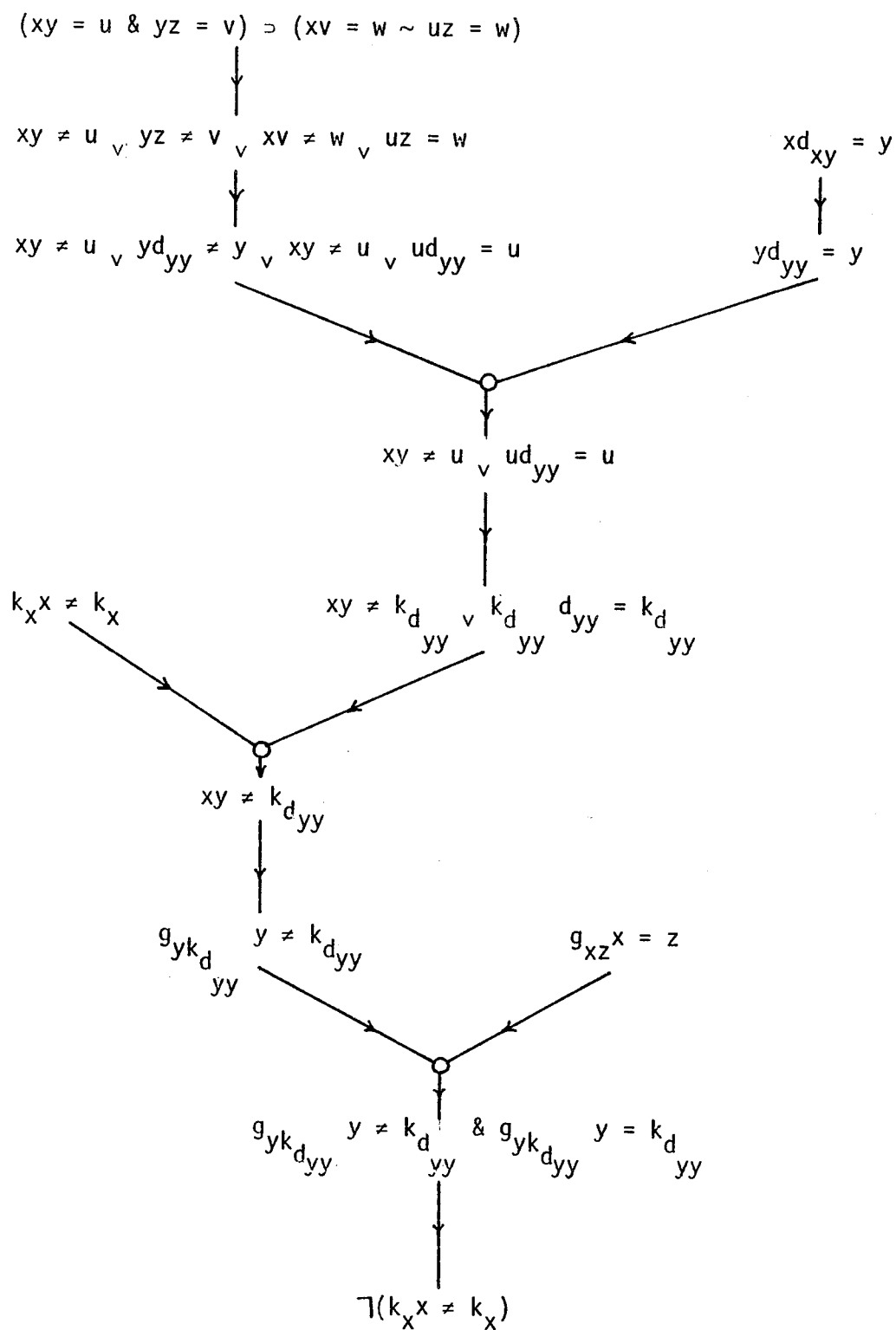
### III-2.3. Les démonstrations par l'absurde.

Le principe est d'ajouter aux données la négation de la conclusion qui est :  $\forall x \exists y xy \neq x$ , nous désignerons par  $k$  la fonction de Skölem à une place d'argument associée à cette proposition qui s'écrit alors :  $xk_x \neq x$ . Il faut alors montrer que l'ensemble de prédicats ainsi construit est contradictoire. Nous distinguons deux types de démonstrations, celles qui conduisent à la contradiction de  $ad_{ab} = b$ , ou  $g_{ab}a = b$ , d'une part et celles qui conduisent à la contradiction de l'associativité d'autre part.

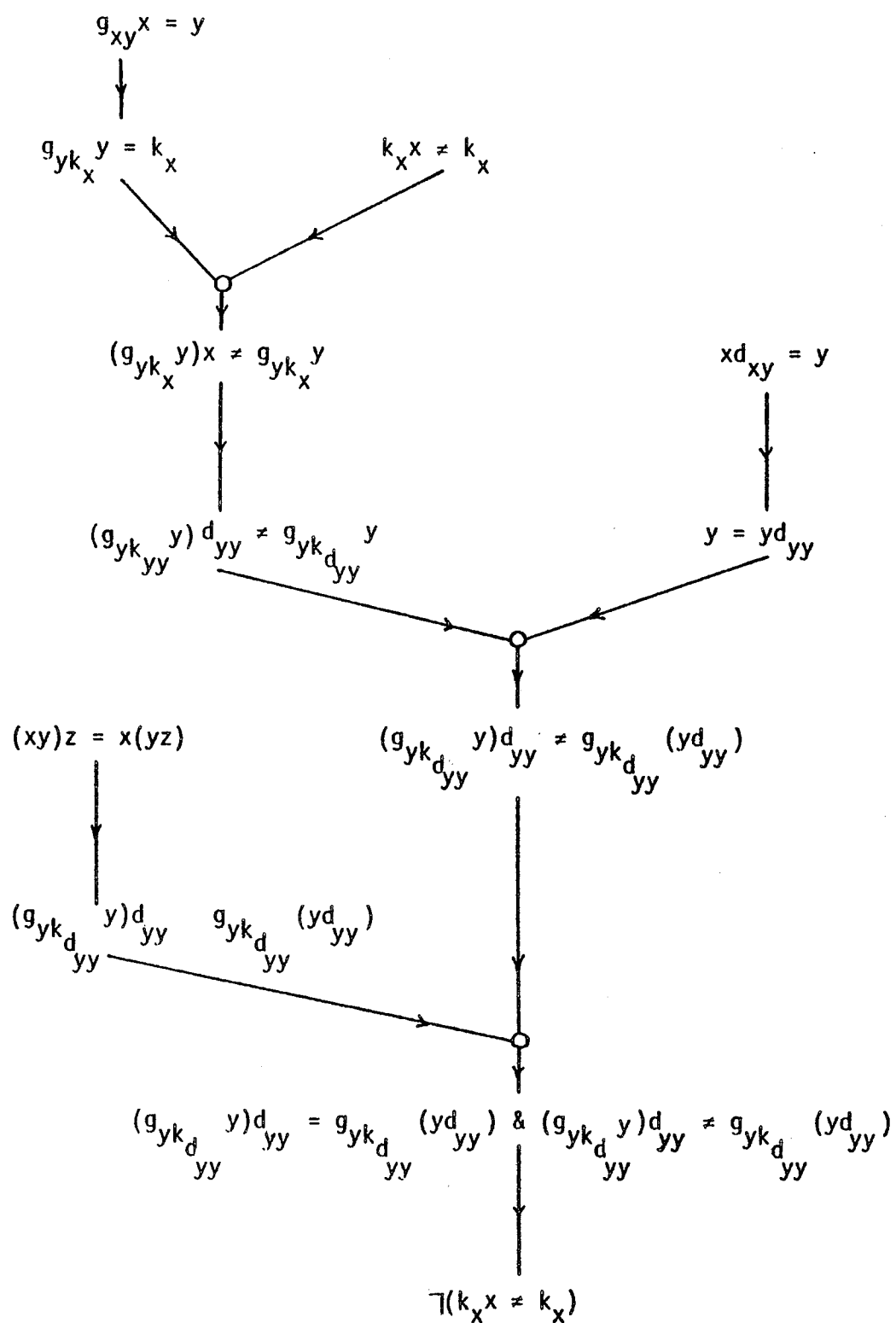
Le premier type oblige à exprimer l'associativité sous une forme qui n'est pas habituelle :

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w (xy = u \ \& \ yz = v) \supset (xv = w \sim uz = w)$$

Il est fortement probable que c'est pour cette raison qu'on ne rencontre jamais ce type de démonstration ; nous en citons une comme exemple, elle conduit à la contradiction de  $g_{ab}a = b$ .



Le second type de démonstration par l'absurde ne nécessite pas une telle expression de l'associativité, et si on ne le rencontre pas parmi les démonstrations proposées c'est vraisemblablement parce qu'il faut comprendre l'associativité comme une proposition et non comme une règle syntaxique. Nous donnons ci-dessous le graphe d'une démonstration de ce type :



#### IV - CONCLUSION

La lecture naïve des rédactions de DEUG -c'est à dire avec les tolérances habituelles du lecteur mathématicien- montre que seuls trois individus (sur les 34) ont donné une solution valable, pour LICENCE nous en trouvons neuf (sur les 38).

Ces deux nombres sont faibles, la plupart des étudiants ne sont pas parvenus à résoudre ce problème.

Notre analyse met en évidence, pour chaque population, un comportement bien différent face à ces difficultés. L'indice d'homogénéité très faible de DEUG et le fait que 32 résolutions parviennent à l'énoncé  $\exists e \forall x xe = x$ , indiquent que les étudiants ont cherché la solution dans des directions très diversifiées. Dans de nombreux cas l'étudiant prend pour hypothèse ce qu'il veut démontrer ou interprète incorrectement l'énoncé ; ceci peut provenir d'une détermination à apporter une réponse, provoquée par les conditions du déroulement de l'épreuve. Ce phénomène disparaît presque totalement dans LICENCE.

L'étude de la connexité des graphes de représentation différencie nettement les deux populations. Les composantes connexes se partagent en deux types : celles qui correspondent à la persistance de voies de résolutions différentes et celles qui proviennent de déductions non explicitées. L'absence de connexité est moins fréquente pour DEUG que pour LICENCE, et les composantes connexes y sont pour la plus grande part du premier type, ce qui souligne un caractère plus brouillon des rédactions de DEUG.

Dans la suite de notre travail nous tenterons d'éclaircir les raisons de l'absence de connexité d'un graphe de résolution. Dans quelle mesure la tendance à ne pas expliciter des déductions est liée au nombre d'énoncés manipulés dans la rédaction ? Comment intervient le niveau du rédacteur ? Quel est la nature des déductions ou même des raisonnements qui ne sont pas explicités ?

A partir de l'indice de ressemblance nous avons réalisé une classification des rédactions. Cette classification ne donne pas de résultats intéressants pour DEUG, car l'homogénéité de cet échantillon est très faible. Pour LICENCE par contre nous parvenons à regrouper près de deux tiers des individus ou des classes dont l'homogénéité (supérieure ou égale à 0,4) est significative d'une ressemblance. Pour juger de la pertinence d'une telle classification nous la rapprochons de celle que nous avons déduite de l'analyse naïve des stratégies.



Les classes constituées les plus importantes correspondent effectivement à des types de stratégies distincts, celles qui se partagent entre deux types correspondent à des graphes d'ordre un ou deux et les résolutions avaient été classées d'après les intentions explicitées par l'élève. Le classement selon l'indice de ressemblance est même ici plus fin puisqu'il nous a conduit à des distinctions à l'intérieur des stratégies du type I.

La confrontation du réel au structurellement possible complète l'image que nous avons du comportement des étudiants de DEUG, en montrant que non seulement les résolutions sont très diverses mais aussi que les cheminements sont très éloignés de ceux déduits de la logique formelle. Mais cette confrontation a pour conséquence bien plus fondamentale la formulation de l'hypothèse suivante :

L'associativité est comprise comme une règle syntaxique et non comme une proposition.

Nous avons pu constater deux acceptations de l'associativité comme règle syntaxique : règle de suppression des parenthèses (c'est le cas des trois solutions valables de DEUG), règle de déplacement des parenthèses. Le rôle joué par les stratégies multiplicatives et l'absence de démonstrations par l'absurde nous font supposer que cette hypothèse devrait être vérifiée, cette étude sera le premier prolongement de notre travail.

## **CONCLUSION**



## CONCLUSION.

L'outil que nous venons de présenter est une extension de l'utilisation des graphes de démonstration. Ils n'étaient jusqu'ici qu'un langage, non fixé, pour exprimer une démonstration. Nous avons développé leur utilisation dans deux directions :

- Permettre une description précise du raisonnement exprimé par un discours. D'une part en traduisant les énoncés mathématiques dans le langage du CP1, à partir de quoi nous caractérisons les énoncés synonymes ; d'autre part en décrivant la structure du discours par un graphe, dans la mesure où la dépendance des énoncés mathématiques est assez explicite. Certaines propriétés du raisonnement sont décelables dans le discours et peuvent être traduites par des propriétés mathématiques du graphe qui le représente. La mise en évidence de ces propriétés est alors le résultat d'un calcul sur le graphe. (recherche de circuits, test de la connexité...)

Cette démarche ne présente d'intérêt que si l'on peut garantir l'objectivité de la description, ou au moins délimiter la part d'interprétation subjective de façon précise. Une partie de notre travail, la partie B, va dans ce sens. Nous y développons un protocole pour le passage d'une démonstration à un graphe qui la représente, il précise des règles de traduction dont nous ne garantissons pas le caractère déterministe. Il reste à les soumettre à l'épreuve de divers traducteurs et de divers contenus. Une telle recherche est indispensable pour le développement de notre outil ; elle présenterait un intérêt dans d'autres domaines, en particulier la docimologie dans laquelle l'interprétation de textes mathématiques émanant d'élèves joue un rôle central.

- Donner, pour l'analyse des comportements heuristiques et des stratégies, le moyen de comparer de façon quantitative deux démonstrations. Ainsi nous avons construit un indice de ressemblance pour deux graphes de démonstration et nous en avons déduit un indice d'homogénéité qui permet d'apprécier globalement une population. A partir de cet indice de ressemblance nous pouvons réaliser une classification des raisonnements, selon leur structure explicite, qui a un sens pourvu que l'homogénéité de l'échantillon ne soit pas trop faible, et que d'autre part le discours exprimant le raisonnement ne soit pas significatif seulement par son contenu méta-mathématique.

A partir de cette analyse nous pourrions, pour un problème particulier, faire ressortir quels types de raisonnements, valables ou non, sont utilisés par les élèves. Est-il possible, pour les démonstrations qui ne sont pas valables, de caractériser les fautes ? Quels types de stratégies sous-tendent les démonstrations correctes ?

En outre, nous proposons une autre façon d'analyser et de classer les démonstrations qui les situe dans l'ensemble des démonstrations structurellement possibles. Dans le cas de notre illustration la démonstration automatique a été efficace pour construire cet ensemble. En fait, on ne peut pas dans tous les cas, actuellement, espérer définir cet ensemble en extension -en particulier pour la plupart des problèmes de géométrie- Les algorithmes de démonstration automatique sont de nature combinatoire, la recherche des solutions est limitée par le nombre des propositions que l'on peut effectivement manipuler en un temps raisonnable. Lorsque cela sera possible nous essaierons de construire une partie du structurellement possible, mais il faudra chercher sur quel critère pertinent elle peut être déterminée (limiter les S-axiomes utilisés, limiter le champ de résolution...)

On peut aussi envisager de lui substituer un ensemble de démonstrations possibles au sens du mathématicien. En particulier on peut considérer les démonstrations proposées par les manuels. Notre analyse peut faire apparaître celles qui présentent des difficultés pour les élèves, ou les types de raisonnements qu'ils retiennent plus volontiers.

Il nous semble avantageux pour l'analyse des comportements heuristiques, de projeter les démonstrations des élèves dans un ensemble de référence. La construction d'un tel ensemble, reste pour nous un problème ouvert.

# ANNEXES



Annexe 1

Nous rappelons ici les règles de déduction dérivées du système logique de KLEENE, pour plus de précision sur ce système, on se reportera à [30] première partie.

$\Gamma$  désigne une liste finie quelconque de zéro (ou plus de zéro) formule(s) et A, B, C des formules quelconques :

<u>Introduction</u>	<u>Elimination</u>
$\supset$ si $\Gamma, A \vdash B$ alors $\Gamma \vdash A \supset B$	$A, A \supset B \vdash B$
$\&$ $A, B \vdash A \& B$	$A \& B \vdash A$
	$A \& B \vdash B$
$\vee$ $A \vdash A \vee B$	si $\Gamma, A \vdash C$ et $\Gamma, B \vdash C$
$B \vdash A \vee B$	alors $\Gamma, A \vee B \vdash C$
$\neg$ si $\Gamma, A \vdash B$ et $\Gamma, A \vdash \neg B$	$\neg \neg A \vdash A$
alors $\Gamma \vdash \neg A$	$A, \neg A \vdash B$
$\sim$ $A \supset B, B \supset A \vdash A \sim B$	$A \sim B \vdash A \supset B$
	$A \sim B \vdash A \supset B$

Soit x une variable quelconque, A(x) une formule quelconque, r une variable quelconque non nécessairement distincte de x, et A(r) le résultat de la substitution de r aux occurrences libres de x dans A(x). Alors les règles suivantes sont logiquement correctes pourvu que :

- (A) pour  $\forall$ -élimination et  $\exists$ -introduction, r soit libre pour x dans A(x)
- (B) pour  $\forall$ -introduction et  $\exists$ -élimination, x ne figure pas libre dans r
- (C) pour  $\exists$ -élimination, x ne figure pas libre dans C.

<u>Introduction</u>	<u>Elimination</u>
$\forall$ si $\Gamma \vdash A(x)$ alors $\Gamma \vdash \forall x A(x)$	$\forall x A(x) \vdash A(r)$
$\exists$ $A(r) \vdash \exists x A(x)$	si $\Gamma, A(x) \vdash C$ alors $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$



## Annexe 2

### Le traitement informatique des graphes de démonstration.

#### I - STRUCTURE DES DONNEES

A chaque rédaction est substitué un graphe qui la représente. La donnée est donc constituée d'une liste de graphes, éventuellement réduite à un seul élément. Un graphe est défini par la liste de ses sommets et pour chaque sommet les listes des pères et fils en indiquant les jumeaux éventuels. Nous repérons les sommets par un numéro, le marquage des sommets par un énoncé est conservé dans une table de correspondance.

Nous précisons complètement la structure de ces données par la grammaire de type Backus suivante :

- les deux premiers termes de la définition de <définition du graphe> viennent de la convention : le nombre des sommets est 0 si le graphe est vide, il est -1 si la rédaction correspondante n'a pas été représentée par un graphe.

- Nous travaillons avec le langage ALGOL W, ce choix n'est pas guidé par un souci d'efficacité (temps-encombrement) mais par le fait qu'il est pour une part un langage de référence et qu'il permet un traitement de listes. Par contre les chaînes de caractères ne sont pas d'une utilisation très souple (leur longueur n'est pas dynamique), aussi nous avons codé les sommets du graphe par des entiers et pour avoir une donnée de type homogène -ce qui facilite la lecture- nous avons utilisé 0 comme séparateur. Ainsi pour <sommet> après son code on trouve la liste de ses pères et celle de ses fils encadrée par 0, 0 ponctue la donnée d'un sommet. Comme on ne descend pas au delà d'une génération ce marquage est suffisant.

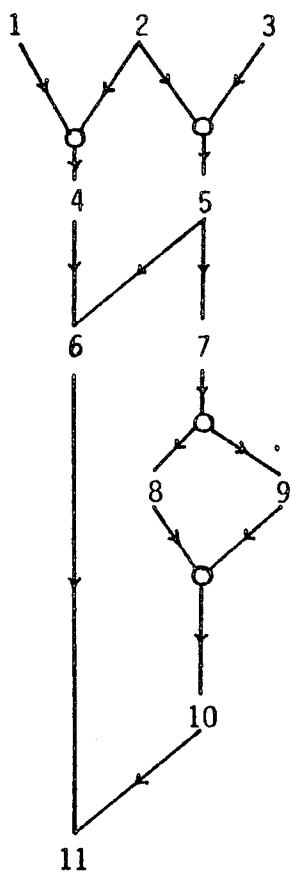
- Le symbole \$ signifie le saut à la ligne.

```

<liste de graphes> ::= " * " | <graphe> | <graphe> $ <liste de graphes>
<graphe> ::= <étiquette> <numéro du graphe> $ <définition du graphe>
<définition du graphe> ::= 0$0 | -1$0 | <nombre de sommets> $
    <liste de sommets> $ 0
<liste de sommets> ::= <sommet> | <sommet> $ <liste de sommets>
<sommet> ::= <numéro de sommet> 0 <liste de fils> 00 <liste de pères> 00
<liste de fils> ::= <liste de pères>
<liste de pères> ::= <numéro de sommet> | 0 <liste de jumeaux> 0 |
    <numéro de sommet> <liste de pères> | 0 <liste de jumeaux> 0
    <liste de pères>
<liste de jumeaux> ::= <numéro de sommet> | <numéro de sommet>
    <liste de jumeaux>
<numéro du graphe> ::= <entier>
<numéro de sommet> ::= <entier>
<étiquette> ::= <constante chaine (au sens du langage Algol W)>
<nombre de sommets> ::= <entier>

```

Ci-dessous nous donnons le dessin d'un graphe de noeuds et d'étoiles (quelconque) à gauche, et la donnée qui lui correspond, à droite.



"QUELCONQUE" 1

```

11
1 0 4 0 0 0 0
2 0 4 5 0 0 0 0
3 0 5 0 0 0 0
4 0 6 0 0 0 1 2 0 0 0
5 0 6 7 0 0 0 2 3 0 0 0
6 0 11 0 0 4 5 0 0
7 0 0 8 9 0 0 0 5 0 0
8 0 10 0 0 7 0 0
9 0 10 0 0 7 0 0
10 0 11 0 0 0 8 9 0 0 0
11 0 0 0 6 10 0 0

```

0

## II - REPRESENTATION INTERNE DES GRAPHES

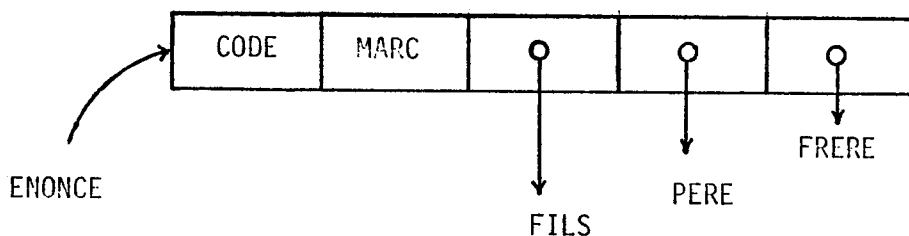
Pour la représentation interne des graphes nous utilisons soit leur matrice d'incidence, soit une structure analogue à celle de la donnée :

Les sommets des graphes sont représentés comme les éléments d'une classe d'enregistrements de nom ENONCE dont les champs sont :

CODE : numéro du sommet représenté.

MARC : champ utilitaire pour divers algorithmes, il est de type ENTIER.

FILS, PERE, FRERE sont des références à des éléments de la classe ENONCE.

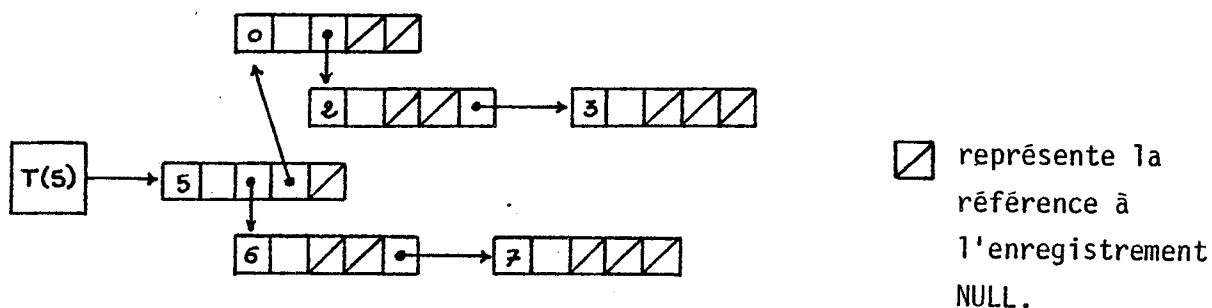


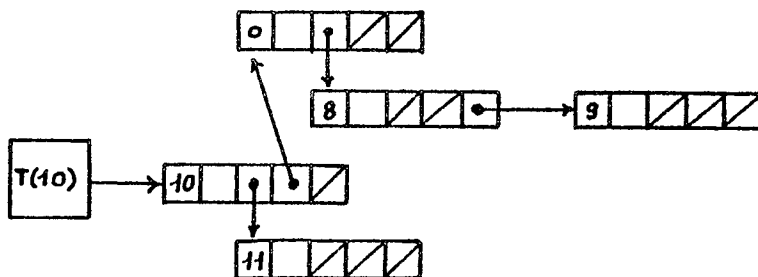
Un graphe sera représenté par un tableau à une dimension dont la taille sera le nombre de sommets du graphe, et les éléments des références à la classe d'enregistrement ENONCE.

On remarquera qu'un élément  $X$  du tableau est un puits si et seulement si  $FILS(X) = NULL$ , c'est une source si et seulement si  $PERE(X) = NULL$ .

On utilise un enregistrement de code nul pour représenter des jumeaux, la liste des jumeaux est représentée comme une liste de frères du fils de cet enregistrement. Les schémas ci-dessous expliquent plus clairement la situation :

Nous reprenons l'exemple de I, le graphe est associé à un tableau  $T$  de dimension un et de taille 11, nous illustrons ce que sont les éléments  $T(5)$  et  $T(10)$ .





Suivant les calculs que nous désirons faire sur les graphes nous utiliserons l'une ou l'autre de ces deux représentations.

### III - QUELQUES PROCEDURES UTILISEES

Pour traiter les graphes de démonstration nous avons écrit quelques procédures Algol W, certaines pour passer des données à leur représentation interne ou d'une représentation interne à une autre, d'autres pour faire des calculs sur les graphes ; nous donnons ici CONNEXE que nous avons utilisée pour tester la connexité, CIRCUIT que nous avons utilisée pour tester la présence de circuits, et TOUTESOL qui énumère les démonstrations du structurellement possible.

#### III-1. Test de la connexité

La procédure utilisée est directement issue de l'algorithme cité au § I-3.2.1 de la partie C, le calcul est réalisé à partir de la matrice d'incidence du graphe.

Marquer un sommet est traduit par remplacer les 1 par des 2 dans sa ligne et sa colonne. Un sommet est non marqué s'il existe des 1 dans sa ligne ou sa colonne. Il a au moins un fils marqué s'il a au moins un 2 dans sa ligne, au moins un père marqué s'il a au moins un 2 dans sa colonne.

```

LOGICAL PROCEDURE CONNEX(INTEGER APRAY T(*,*); INTEGER N);
BEGIN INTEGER I;
      LOGICAL L1;
      INTEGER ARRAY CON(1::N,1::N);

      FOR I:=1 UNTIL N DO
      FOR J:=1 UNTIL N DO
          CON(I,J):=T(I+1,J+1);

      FOR J:=1 UNTIL N DO
      BEGIN IF CON(1,J)=1 THEN CON(1,J):=2;
            IF CON(J,1)=1 THEN CON(J,1):=2;
      END;
      L1:=TRUE;
      WHILE L1 DO
      BEGIN I:=2;
            L1:=FALSE;
            WHILE I<=N DO
            BEGIN
                IF (ILYA(2,N,CON(I,*)) AND ILYA(1,N,CON(I,*)))
                OR (ILYA(2,N,CON(*,1)) AND ILYA(1,N,CON(*,1)))
                OR (ILYA(2,N,CON(I,*)) AND ILYA(1,N,CON(*,1)))
                OR (ILYA(1,N,CON(I,*)) AND ILYA(2,N,CON(*,1))) THEN
                BEGIN L1:=TRUE;
                      FOR J:=1 UNTIL N DO
                      BEGIN IF CON(I,J)=1 THEN CON(I,J):=2;
                            IF CON(J,1)=1 THEN CON(J,1):=2;
                      END;
                END;
                I:=I+1;
            END;
            END;
            L1:=TRUE;
            I:=1;
            WHILE L1 AND (I<=N) DO
            BEGIN L1:=¬ILYA(1,N,CON(I,*))
                  AND (ILYA(2,N,CON(I,*)) OR ILYA(2,N,CON(*,1)));
                  I:=I+1;
            END;
            L1
      END CONNEX;

```

### III-2. Test de la présence de circuits

Nous utilisons la méthode de ROSALIND-MARIMONT (voir [13]), le graphe est représenté par sa matrice d'incidence. Un puits est caractérisé par une ligne qui ne contient que des zéros, pour le marquer on remplace dans sa colonne les 1 par des 2. On traite un sommet dont tous les fils sont marqués comme un puits.

```

LOGICAL PROCEDURE CIRCUIT(INTEGER ARRAY T(*,*); INTEGER N);
BEGIN LOGICAL L;
  INTEGER ARRAY CIR(1:N,1:N);
  INTEGER I;

  FOR I:=1 UNTIL N DO
    FOR J:=1 UNTIL N DO
      CIR(I,J):=T(I+1,J+1);

  FOR I:=1 UNTIL N DO
    IF  $\neg$ ILYA(1,N,CIR(I,*)) THEN
      FOR J:=1 UNTIL N DO
        IF CIR(J,I)=1 THEN CIR(J,I):=2;

  L:=TRUE;
  WHILE L DO
    BEGIN L:=FALSE;
      FOR I:=1 UNTIL N DO
        IF  $\neg$ ILYA(1,N,CIR(I,*)) AND ILYA(1,N,CIR(*,I)) THEN
          BEGIN FOR J:=1 UNTIL N DO
            IF CIR(J,I)=1 THEN CIR(J,I):=2;
            L:=TRUE;
          END;
        END;
      L:=TRUE;
      I:=1;
      WHILE L AND (I<=N) DO
        BEGIN IF ILYA(1,N,CIR(I,*)) THEN L:=FALSE;
          I:=I+1;
        END;
      L
    END CIRCUIT;

```

### III-3. Énumération des démonstrations structurellement possibles

Lors de la construction du structurellement possible on ne fait pas une recherche de chaque démonstration, en fait elles sont toutes conduites parallèlement et on parvient à un graphe du type de celui que l'on trouve au paragraphe II-1 de la partie C. Il reste à en dégager les démonstrations qui nous intéressent, c'est ce que nous obtenons avec la procédure Algol W : TOUTESOL ; on utilise la représentation semi-liste des graphes de démonstration.

L'algorithme utilisé consiste, en partant du sommet image de l'énoncé démontré -donc un puits-, à remonter dans le graphe SRESOL de toutes les solutions. Lorsqu'un sommet a plusieurs antécédents possibles on crée autant de graphe SGRAF qu'il est nécessaire et on les empile. La recherche des solutions contenues dans SRESOL se termine lorsque cette pile est vide.

De façon analogue lorsqu'un sommet a des ascendants jumeaux on les empile dans PILE, lorsque l'on est parvenu à un sommet source et que cette pile est vide on a terminé la construction du graphe SSGRAF courant.

```
PROCEDURE TOUTESOL(REFERENCE(ENONCE)ARRAY SSGRAF(*, *);
                  REFERENCE(ENONCE)ARRAY SRESOL(*); INTEGER N);
BEGIN REFERENCE(ENONCE)PX, AUX;
      REFERENCE(ENONCE)ARRAY PILE(1::N, 1::N);
      LOGICAL TEST;
      INTEGER I, J, K, M, P;
      LOGICAL DRA;
```

```
COMMENT      ETANT DONNE UN ENREGISTREMENT X CETTE
              PROCEDURE FOURNIT UN ENREGISTREMENT Y
              IDENTIQUE;
```

```
REFERENCE(ENONCE)PROCEDURE COPIE(REFERENCE(ENONCE)X);
BEGIN REFERENCE(ENONCE)Y, AUX1, AUX2;
      Y:=ENONCE(CODE(X), 0, NULL, NULL, NULL);
      IF CODE(X)=0 THEN
        BEGIN AUX1:=FILS(X);
              FILS(Y):=ENONCE(CODE(AUX1), 0, NULL, NULL, NULL);
              AUX1:=FRERE(AUX1);
              AUX2:=FILS(Y);
              WHILE AUX1≠NULL DO
                BEGIN FRERE(AUX2):=ENONCE(CODE(AUX1), 0, NULL, NULL, NULL)
                  ;AUX2:=FRERE(AUX2);
                  AUX1:=FRERE(AUX1);
                END;
              END;
      Y
      END COPIE;
```

```
COMMENT      LES GRAPHES CHERCHES SERONT CONSTRUITS
              DANS UN TABLEAU "SSGRAF" DONT CHAQUE
              COLONNE REPRESENTE UN GRAPHE DE
              DEMONSTRATION
              -INITIALISATION DE SSGRAF ET DE PILE ;
```

```
FOR I:=1 UNTIL N DO
  FOR J :=1 UNTIL N DO
    BEGIN
      SSGRAF(I, J):=ENONCE(0, 0, NULL, NULL, NULL);
      PILE(1, J):=ENONCE(0, 0, NULL, NULL, NULL);
    END;
```

COMMENT RECHERCHE DU PUIXS DE SRESOL ET INITIALISATION  
DES VARIABLES  
-PX EST LE SOMMET COURANT  
-M REPERE LE SOMMET DE PILE ;

```
I:=1;
WHILE FILS(SRESOL(I))~=NULL DO I:=I+1;
```

```
PX:=SRESOL(I);
I:=J:=K:=1;
M:=0;
```

COMMENT LA RECHERCHE DES GRAPHES DE DEMONSTRATION SE  
POURSUIT TANT QU' IL Y A ENCORE DES GRAPHES  
EMPILEES (TEST), POUR LE GRAPHE COURANT SA  
CONSTITUTION SE POURSUIT TANT QUE LE SOMMET  
COURANT N'EST PAS UNE SOURCE (PX<sup>~</sup>=NULL) ;

```
TEST:=TRUE;
DRA:=FALSE;
WHILE TEST DO
BEGIN WHILE PX~=NULL DO
```

COMMENT SI PX A DES FRERES ON INITIALISE AUTANT DE  
GRAPHES QUE CELA EST NECESSAIRE ;

```
BEGIN IF FRERE(PX)~=NULL THEN
BEGIN AUX:=FRERE(PX);
WHILE AUX~=NULL DO
BEGIN J:=J+1;
P:=1;
WHILE CODE(SSGRAF(P,I))~=0 DO
BEGIN CODE(SSGRAF(P,J)):=CODE(SSGRAF(P,I));
IF PERE(SSGRAF(P,I))~=NULL THEN
PERE(SSGRAF(P,J)):=COPIE(PERE(SSGRAF(P,I)
)); P:=P+1;
END;
PERE(SSGRAF(P-1,J)):=COPIE(AUX);
IF M~=0 THEN
BEGIN
FOR P:=1 UNTIL M DO PILE(P,J):=COPIE(PILE(P,I))
;MARC(PILE(1,J)):=M;
END;
AUX:=FRERE(AUX);
END;
END;
```

COMMENT SI PX A DES FRERES Jumeaux ON LES MET DANS  
PILE, ET ON L'AJOUTE AU GRAPHE COURANT EN  
DISTINGUANT DEUX CAS: PX EST DEJA DANS LE  
GRAPHE (DRA=TRUE) OU PX N'Y EST PAS ENCORE  
(DRA=FALSE) ;



```

IF CODE(PX)≠0 THEN
  BEGIN
    IF K=1 THEN CODE(SSGRAF(K,1)):=CODE(PX)
    ELSE BEGIN PERE(SSGRAF(K-1,1)):=ENONCE(
      CODE(PX),0,NULL,NULL,NULL);
      IF DEJA(PX,SSGRAF(*,1)) THEN DRA:=TRUE
      ELSE CODE(SSGRAF(K,1)):=CODE(PX);
    END
  END
ELSE
  BEGIN PERE(SSGRAF(K-1,1)):=COPIE(PX);
  PX:=FILS(PX);
  DRA:=DEJA(PX,SSGRAF(*,1));
  WHILE DRA AND (PX≠NULL) DO
    BEGIN
      PX:=FRERE(PX);
      IF PX≠NULL THEN
        DRA:=DEJA(PX,SSGRAF(*,1));
      END;
      IF PX≠NULL THEN CODE(SSGRAF(K,1)):=CODE(PX);
      AUX:=IF PX≠NULL THEN FRERE(PX) ELSE NULL;
      WHILE (AUX≠NULL)AND(DEJA(AUX,SSGRAF(*,1))) DO
        AUX:=FRERE(AUX);
      WHILE(AUX≠NULL) DO
        BEGIN M:=M+1;
          PILE(M,1):=ENONCE(CODE(AUX),0,NULL,NULL,
            NULL);
          AUX:=FRERE(AUX);
          WHILE (AUX≠NULL)AND(DEJA(AUX,SSGRAF(*,1)
            )) DO AUX:=FRERE(AUX);
        END;
      END;
    END;
  END;

```

COMMENT SI PX ETAIT DEJA DANS LE GRAPHE COURANT ON  
 ARRETE LA REMONTEE DANS SRESOL ET ON CHERCHE  
 DANS PILE UN SOMMET QUI N'EST PAS DEJA DANS  
 LE GRAPHE COURANT POUR POURSUIVRE SA CONSTRUCTION;

```

IF DRA THEN
  BEGIN
    P:=1;
    WHILE CODE(SRESOL(P))≠CODE(PX) DO P:=P+1;
    PX:=PERE(SRESOL(P));
    END
  ELSE PX:=NULL;

  WHILE (PX=NULL) AND (M=0) DO
    BEGIN K:=IF DRA THEN K+1 ELSE K;;
      DRA:=DEJA(PILE(M,1),SSGRAF(*,1));
      IF DRA THEN
        BEGIN
          SSGRAF(K,1):=PILE(M,1);
          P:=1;
          WHILE CODE(SRESOL(P))≠CODE(SSGRAF(K,1)) DO
            P:=P+1;
            PX:=PERE(SRESOL(P));
          END;
          M:=M-1;
        END;
      K:=K+1;
      DRA:=FALSE;
    END;
  END;

```

```
I:=I+1;
IF (CODE(SSGRAF(1,I))=0)OR(I>N) THEN
TEST:=FALSE
ELSE BEGIN P:=1;
      WHILE CODE(SSGRAF(P,I))=0 DO P:=P+1;
      PX:=PERE(SSGRAF(P-1,I));
      K:=P;
      M:=IAPC(PILE(1,I));
      MARC(PILE(1,I)):=0;
      END;
      END;
END TOUTESOL;
```



**INDEX**

**ET**

**BIBLIOGRAPHIE**



## I N D E X

Les références donnent la partie et le paragraphe où le mot est défini, entre parenthèses nous indiquons la page.

Antécédent	A I-6.1 (36)	Graphe de référence	C II-1 (147)
Avertisseur	B (63)	Hypothèse	A II-9 (43)
— d'inférence	B I-1 (64)	Inutile	A I-6.1 (36)
Bloc	B III-2.2.2 (104)	Indice	
— élémentaire	B III-2.2.2 (105)	— d'homogénéité	C I-4.2 (139)
Car	B I-1.1 (64)	— de ressemblance	C I-4.1 (138)
Champ		Niveau	A II-12.3 (47)
— de démonstration	C I-1 (122)	Preuve directe	A II (40)
— de référence	C II-1 (147)	Représente	Introd. IV-2.3 (29)
Coefficient de correction	C III-1 (157)	R-démonstration	A II-12 (44)
Démonstration	A I-3 (35)	— élémentaire	A II-12.3 (46)
— s étrangères	C I-4 (138)	Redondant	A I-6.1 (36)
— s identiques	C I-4 (138)	R-graphe	C II-1 (147)
— minimale	A I-6.4 (37)	S-axiome	A I-1 (33)
Donc	B I-1.2 (104)	Sortie	Introd. IV-2.3 (28)
Entrée	Introd. IV-2.3 (28)	Synonyme	Introd. IV-1.1 (18)
Expansion	A II-12.3 (46)		
Explication	Introd. III-1 (8)		



B I B L I O G R A P H I E

- 1      ADDA J.                    L'incompréhension en mathématiques et les malentendus.  
Educational Studies in Mathematics.  
6 (1975) pp 311 - 326
  
- 2                                Difficultés liées à la présentation de questions  
mathématiques.  
Document Didactique n° 6, janvier 1976  
UER de Didactique des disciplines Université Paris 7
  
- 3      ARNOLD A.                Formalisation des démonstrations mathématiques  
Thèse 3e cycle. Math. appli. LILLE 1968.
  
- 4      BALACHEFF N.            Analyse de comportements heuristiques : quelles  
méthodes ?  
Bull. APMEP n° 308 (1977) pp 252 - 258.
  
- 5      BLANCHE R.                Le raisonnement.  
P.U.F. Bibliothèque de philosophie contemporaine  
1973
  
- 6      BOPP                         Un exemple d'observation d'élèves cherchant un problème  
Bull. inter IREM, mars 1975.
  
- 7      BORRIONE D.             A propos des classifications hiérarchiques à partir  
d'un tableau de distance.  
Note de travail n° 124  
1970 S.E.M.A. (Metra-international)
  
- 8      BROUSSEAU G.            Les obstacles épistémologiques et les problèmes en  
mathématiques.  
Colloque de la CIAEM, Louvain mai 1977.
  
- 9      BRUSHLINSKII A.V.        The generalized conception in problem solving.  
Voir [62] pp 45 - 56.



- 10 On the process of searching for an unknown while solving a mental problem.  
Voir [62] pp 205 - 214.
- 11 CELLERIER G. PIAGET Coll. Sup. P.U.F. 1973
- 12 CHURCH Introduction to mathematical logic  
1976 Princeton University Press
- 13 DERNIAME - PAIR Problèmes de cheminement dans les graphes.  
Monographie Informatique AFCET - DUNOD 1971
- 14 DESCARTES Discours de la méthode.
- 15 FRAISSE - PIAGET Traité de psychologie expérimentale  
T.VII L'intelligence  
P.U.F. 1969
- 16 GLAESER G. L'observation clinique des comportements  
heuristiques.  
Bull. Inter IREM, mars 1975
- 17 Cours d' "Heuristique Générale"  
Université L. Pasteur, D.E.A de Didactique  
Strasbourg 1975 - 1976
- 13 Mathématiques pour l'élève professeur  
Hermann 1971
- 19 GOLDBERG - SUPPES Computer assisted instruction in elementary  
logic at the university Level  
Educational Studies in Mathématiques.  
6 (1976) pp 447 - 474
- 20 GRIZE J. B. Logique moderne - fascicule 1 -  
Gauthier Villards - Paris 1969
- 21 GROSSEL Contribution à l'étude des résolutions de  
problèmes sur des exemples d'arithmétique.  
Thèse 3e cycle. Paris 7 1973.

- 22 HADAMARD J. Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.  
Gauthier - Villars 1975
- 23 IREM de Montpellier Heuristique  
Avril 1975
- 24 Heuristique  
Juin 1976
- 25 IREM de Strasbourg Le livre du problème  
Pédagogie de l'exercice et du problème.  
CEDIC 1973
- 26 IREM de TOULOUSE A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle  
Publications de l'APMEP
- 27 JAULIN - MANNONI F. Le pourquoi en mathématique  
Collection Sciences de l'éducation  
Edition ESF 1975
- 28 JOHNSON S.C. Hierarchical clustering schemes  
Psychometrika Vol 32 n° 3 sept 1967
- 29 JOUBERT Un système de résolution de problèmes à tendance naturelle.  
Thèse 3e cycle Aix-Marseille 1974
- 30 KLEENE S.C. Logique mathématique  
Armand Collin - Collection U 1971
- 31 KUNTZMANN J. Apport de l'informatique à l'enseignement des mathématiques.  
CEDIC 1974
- 32 Théorie des réseaux.  
Dunod, Paris 1972

- 33 KRUTETSKII The psychology of mathematical abilities  
in school children.  
The University of Chicago Press 1976
- 34 LABORDE J.M. Un développement algébrique de l'algorithme  
d'exclusion et quelques problèmes géométriques  
en algèbre de boole.  
Thèse Grenoble USMG 1977
- 35 MARTIN R. Logique contemporaine et formalisation  
P.U.F. 1964
- 36 MENDELSON Introduction to mathematical logic  
1965 D. Van Nostrand Company Inc.
- 37 MOLES A. Psychologie de la découverte dans le domaine  
mathématique.  
Bull. inter IREM, mars 1975
- 38 NEWELL - SIMON Human problem-solving  
Printice-hall mc. 1972
- 39 NILSSON J. Problem Solving méthodes in artificial  
intelligence.  
Mc Graw Hill 1971
- 40 PIAGET J. - INHELDER B. De la logique de l'enfant à la logique de  
l'adolescent.  
Bibliothèque de philosophie contemporaine  
P.U.F. 1970
- 41 La genèse des stuctures logiques élémentaires  
Actualités pédagogiques et psychologiques  
Delachaux et Niestlé 1972
- 42 PIAGET J. Essai de logique opératoire  
Dunod 1972 Coll. Sciences du comportement.

- 43 L'équilibration des structures cognitives  
Etudes d'épistémologie génétique Vol XXXIII  
P.U.F. 1975
- 44 \*\*\*\*\*  
Psychologie et épistémologie génétiques  
thèmes piagétiens  
Hommage à Jean PIAGET  
Coll. Sciences du comportement.  
Dunod Paris 1966
- 45 \*\*\*\*\*  
L'explication dans les sciences  
Nlle bibliothèque scientifique - Flammarion 1973
- 46 POINCARÉ  
L'invention mathématique.  
Bull. de l'Institut Général Psychologique,  
8e année, n° 3, mai-juin 1908
- 47 POLYA G.  
Comment poser et résoudre un problème.  
Dunod, Paris 1965
- 48  
La découverte des mathématiques.  
Coll. Sigma  
Dunod, Paris 1967
- 49  
Les mathématiques et le raisonnement "plausible"  
Gauthier-Villars Paris 1958
- 50 ROYOUX  
Hypothèses sur les mécanismes intellectuels  
en action dans un comportement de recherche  
Bull. APMEP n° 307 (1977) pp 138 - 141.
- 51 SHCHEDROVITSKII G. P.  
Toward the analysis of problem solving process.  
Voir [61] pp 111 - 118.
- 52 SHCHEDROVITSKII  
YAKOBSON  
An analysis of the process of solving simple  
arithmetic problems.  
Voir [62] pp 57 - 102.

- 53 SIWEK H. Logique formelle et raisonnement naturel des élèves dans l'enseignement mathématique  
Educational Studies in mathematics  
5 (1973) pp 23 - 37
- 54 TALYSINA N. F. Properties of deductions in solving geometry problems.  
Voir [62] pp 159 - 164.
- 55 TURNAU Graphe de démonstration : son rôle dans l'enseignement des mathématiques.  
Bulletin A.P.M.E.P. n° 283 (1972) pp 305 - 310
- 56 VIDAL F. Problem-solving, méthodologie générale de la créativité.  
Dunod 1971
- 57 VINH-BANG La méthode clinique et la recherche en psychologie de l'enfant in [53] pp 67 - 81
- 58 WICKELGREN How to solve problems  
Freeman & Cie San Francisco 1974
- 59 ZAVALISHINA - PUSHKIN An experimental investigation of problem solving and modeling the thought processes.  
Voir [60] pp 51 - 107.

Soviet studies in Psychology of teaching and learning mathematics  
Editors : J. KILPATRICK - I. WIRSZUP.  
Université de Chicago.

- 60 Volume IV Problem solving in géometry (1970)
- 61 Volume VI Instruction in problem solving (1972)
- 62 Volume XIII Analyses of reasoning processes. (1975)

Dernière page d'une thèse

Grenoble, le 3 mars 1978

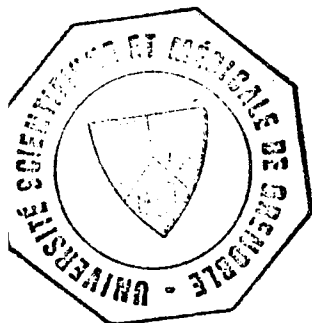
Le Président de la thèse

B. VAUQUOIS

  
Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 1<sup>er</sup> mars 1978

Le Président de l'Université  
Scientifique et Médicale



*Alfred Cau*

## LES MANUELS

- |   |                  |                                                                                             |
|---|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| a | QUEYSANNE-REVUZ  | Mathématique T2 Analyse<br>Terminales CDE<br>Fernand-Nathan 1971                            |
| b | LITERS-TCHIGIQUE | Exercices résolus de mathématiques<br>Analyse - Terminales BCDE<br>Classiques Hachette 1973 |
| c |                  | Exercices résolus de mathématiques<br>Géométrie - Terminales CE<br>Classiques Hachette 1973 |
| d | GALION           | Mathématiques 5e<br>OCDL - Hatier 1972                                                      |
| e |                  | Mathématiques 3e<br>OCDL - Hatier 1972                                                      |
| f | ITARD J.         | Arithmétique et théorie des nombres<br>P.U.F Coll. Que sais-je 1973                         |