



Expérimentation d'algorithmes de préconditionnement de grands systèmes creux pour un problème de puits de pétrole

Denis Trystram

► To cite this version:

Denis Trystram. Expérimentation d'algorithmes de préconditionnement de grands systèmes creux pour un problème de puits de pétrole. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1984. Français. NNT: . tel-00311918

HAL Id: tel-00311918

<https://theses.hal.science/tel-00311918>

Submitted on 22 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR INGENIEUR
«mathématiques appliquées»
option: analyse numérique.

par

Denis TRYSTRAM



**EXPERIMENTATION D'ALGORITHMES DE PRECONDITIONNEMENT
DE GRANDS SYSTEMES CREUX
POUR UN PROBLEME DE Puits DE PETROLE.**



Thèse soutenue le 9 mai 1984 devant la commission d'examen.

G. VEILLON	Président
J. DUMONT	Examineurs
G. MEURANT	
F. ROBERT	
P. WITOMSKI	

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : D. BLOCH

**Vice-Président : René CARRE
Hervé CHERADAME
Marcel IVANES**

PROFESSEURS DES UNIVERSITES :

ANCEAU François	E.N.S.I.M.A.G.
BARRAUD Alain	E.N.S.I.E.G.
BAUDELET Bernard	E.N.S.I.E.G.
BESSON Jean	E.N.S.E.E.G.
BLIMAN Samuel	E.N.S.E.R.G.
BLOCH Daniel	E.N.S.I.E.G.
BOIS Philippe	E.N.S.H.G.
BONNETAIN Lucien	E.N.S.E.E.G.
BONNIER Etienne	E.N.S.E.E.G.
BOUVARD Maurice	E.N.S.H.G.
BRISSENEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
BUYLE BODIN Maurice	E.N.S.E.R.G.
CAVAIGNAC Jean-François	E.N.S.I.E.G.
CHARTIER Germain	E.N.S.I.E.G.
CHENEVIER Pierre	E.N.S.E.R.G.
CHERADAME Hervé	U.E.R.M.C.P.P.
CHERUY Arlette	E.N.S.I.E.G.
CHIAVERINA Jean	U.E.R.M.C.P.P.
COHEN Joseph	E.N.S.E.R.G.
COUMES André	E.N.S.E.R.G.
DURAND Francis	E.N.S.E.E.G.
DURAND Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
FELICI Noël	E.N.S.I.E.G.
FOULARD Claude	E.N.S.I.E.G.
GENTIL Pierre	E.N.S.E.R.G.
GUERIN Bernard	E.N.S.E.R.G.
GUYOT Pierre	E.N.S.E.E.G.
IVANES Marcel	E.N.S.I.E.G.
JAUSSAUD Pierre	E.N.S.I.E.G.
JOUBERT Jean-Claude	E.N.S.I.E.G.
JOURDAIN Geneviève	E.N.S.I.E.G.
LACÔUME Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
LATOMBE Jean-Claude	E.N.S.I.M.A.G.

.../...

LESSIEUR Marcel
 LESPINARD Georges
 LONGEQUEUE Jean-Pierre
 MAZARE Guy
 MOREAU René
 MORET Roger
 MOSSIERE Jacques
 PARIAUD Jean-Charles
 PAUTHENET René
 PERRET René
 PERRET Robert
 PIAU Jean-Michel
 POLOUJADOFF Michel
 POUPOT Christian
 RAMEAU Jean-Jacques
 RENAUD Maurice
 ROBERT André
 ROBERT François
 SABONNADIÈRE Jean-Claude
 SAUCIER Gabrielle
 SCHLENKER Claire
 SCHLENKER Michel
 SERMET Pierre
 SILVY Jacques
 SOHM Jean-Claude
 SOUQUET Jean-Louis
 VEILLON Gérard
 ZADWORNÝ François

E.N.S.H.G.
 E.N.S.H.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.I.M.A.G.
 E.N.S.H.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.I.M.A.G.
 E.N.S.E.E.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.H.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.E.R.G.
 E.N.S.E.E.G.
 U.E.R.M.C.P.P.
 U.E.R.M.C.P.P.
 E.N.S.I.M.A.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.I.M.A.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.I.E.G.
 E.N.S.E.R.G.
 U.E.R.M.C.P.P.
 E.N.S.E.E.G.
 E.N.S.E.E.G.
 E.N.S.I.M.A.G.
 E.N.S.E.R.G.

PROFESSEURS ASSOCIES

BASTIN Georges
 BERRIL John
 CARREAU Pierre
 GANDINI Alessandro
 HAYASHI Hirashi

E.N.S.H.G.
 E.N.S.H.G.
 E.N.S.H.G.
 U.E.R.M.C.P.P.
 E.N.S.I.E.G.

PROFESSEURS UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES (Grenoble II)

BOLLIET Louis
 Chatelin Françoise

PROFESSEURS E.N.S. Mines de Saint-Etienne

RIEU Jean
 SOUSTELLE Michel

CHERCHEURS DU C.N.R.S.

FRUCHART Robert
 VACHAUD Georges

Directeur de Recherche
 Directeur de Recherche

.../...

ALLIBERT Michel	Maître de Recherche
ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
ARMAND Michel	Maître de Recherche
BINDER Gilbert	
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DEPORTES Jacques	
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
GIGNOUX Damien	
GIVORD Dominique	
GUELIN Pierre	
HOPFINGER Emil	Maître de Recherche
JOUD Jean-Charles	Maître de Recherche
KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Dore	Maître de Recherche
LASJAUNIAS J.C.	
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche
PIAU Monique	
PORTESEIL Jean-Louis	
THOLENCE Jean-Louis	
VERDILLON André	

CHERCHEURS du MINISTERE de la RECHERCHE et de la TECHNOLOGIE (Directeurs et Maîtres de Recherches, ENS Mines de St. Etienne)

LESBATS Pierre	Directeur de Recherche
BISCONDI Michel	Maître de Recherche
KOBYLANSKI André	Maître de Recherche
LE COZE Jean	Maître de Recherche
LALAUZE René	Maître de Recherche
LANCELOT Francis	Maître de Recherche
THEVENOT François	Maître de Recherche
TRAN MINH Canh	Maître de Recherche

PERSONNALITES HABILITEES à DIRIGER des TRAVAUX de RECHERCHE (Décision du Conseil Scientifique)

ALLIBERT Colette	E.N.S.E.E.G.
BERNARD Claude	E.N.S.E.E.G.
BONNET Rolland	E.N.S.E.E.G.
CAILLET Marcel	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Catherine	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Christian	E.N.S.E.E.G.
COULON Michel	E.N.S.E.E.G.
DIARD Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
EUSTAPOPOULOS Nicolas	E.N.S.E.E.G.
FOSTER Panayotis	E.N.S.E.E.G.

.../...

GALERIE Alain	E.N.S.E.E.G.
HAMMOU Abdelkader	E.N.S.E.E.G.
MALMEJAC Yves	E.N.S.E.E.G. (CENG)
MARTIN GARIN Régina	E.N.S.E.E.G.
NGUYEN TRUONG Bernadette	E.N.S.E.E.G.
RAVAINE Denis	E.N.S.E.E.G.
SAINFORT	E.N.S.E.E.G. (CENG)
SARRAZIN Pierre	E.N.S.E.E.G.
SIMON Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
TOUZAIN Philippe	E.N.S.E.E.G.
URBAIN Georges	E.N.S.E.E.G. (Laboratoire des ultra-réfractaires ODEILLON)
GUILHOT Bernard	E.N.S. Mines Saint Etienne
THOMAS Gérard	E.N.S. Mines Saint Etienne
DRIVER Julien	E.N.S. Mines Saint Etienne
BARIBAUD Michel	E.N.S.E.R.G.
BOREL Joseph	E.N.S.E.R.G.
CHOVET Alain	E.N.S.E.R.G.
CHEHIKIAN Alain	E.N.S.E.R.G.
DOLMAZON Jean-Marc	E.N.S.E.R.G.
HERAULT Jeanny	E.N.S.E.R.G.
MONLLOR Christian	E.N.S.E.R.G.
BORNARD Guy	E.N.S.I.E.G.
DESCHIZEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
GLANGEAUD François	E.N.S.I.E.G.
KOFMAN Walter	E.N.S.I.E.G.
LEJEUNE Gérard	E.N.S.I.E.G.
MAZUER Jean	E.N.S.I.E.G.
PERARD Jacques	E.N.S.I.E.G.
REINISCH Raymond	E.N.S.I.E.G.
ALEMANY Antoine	E.N.S.H.G.
BOIS Daniel	E.N.S.H.G.
DARVE Félix	E.N.S.H.G.
MICHEL Jean-Marie	E.N.S.H.G.
OBLED Charles	E.N.S.H.G.
ROWE Alain	E.N.S.H.G.
VAUCLIN Michel	E.N.S.H.G.
WACK Bernard	E.N.S.H.G.
BERT Didier	E.N.S.I.M.A.G.
CALMET Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTIN Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTOIS Bernard	E.N.S.I.M.A.G.
DELLA DORA Jean	E.N.S.I.M.A.G.
FONLUPT Jean	E.N.S.I.M.A.G.
SIFAKIS Joseph	E.N.S.I.M.A.G.
CHARUÉC Robert	U.E.R.M.C.P.P.
CADET Jean	C.E.N.G.
COEURE Philippe	C.E.N.G. (LETI)

.../...

DELHAYE Jean-Marc
DUPUY Michel
JOUVE Hubert
NICOLAU Yvan
NIFENECKER Hervé
PERROUD Paul
PEUZIN Jean-Claude
TAIEB Maurice
VINCENDON Marc

C.E.N.G. (STT)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G.
C.E.N.G.
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G.
C.E.N.G.

LABORATOIRES EXTERIEURS

DEMOULIN Eric
DEVINE
GERBER Roland
MERCKEL Gérard
PAULEAU Yves
GAUBERT C.

C.N.E.T.
C.N.E.T. (R.A.B.)
C.N.E.T.
C.N.E.T.
C.N.E.T.
I.N.S.A. Lyon

Expérimentation d'algorithmes de préconditionnement
de grands systèmes ceux pour un problème de puits
de pétrole

Ainsi, à l'épaisseur des choses ne s'oppose
qu'une exigence d'esprit, qui chaque jour
rend les paroles plus contenues et plus
urgent leur besoin.

Francis PONGE

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur François ROBERT, qui a dirigé cette thèse, pour m'avoir initié à la recherche et accueilli si chaleureusement au sein de son équipe. Ses encouragements constants et ses nombreux conseils m'ont permis de mener à terme ce travail.

J'adresse mes remerciements les plus sincères aux membres du jury :

Monsieur Gérard VEILLON, directeur de l'ENSIMAG, pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury

Monsieur Jacques DUMONT, du laboratoire "Fluides & Ciments" de la CFD qui m'a proposé le sujet de cette thèse, pour la confiance qu'il a toujours placée dans mon travail

Monsieur Gérard MEURANT qui a bien voulu faire le déplacement depuis PARIS

Monsieur Patrick WITOMSKI pour les discussions toujours enrichissantes que j'ai eues avec lui

Je voudrais également remercier Messieurs Jacques LEMORDANT & Youssef SAAD pour le temps et l'aide précieuse qu'ils ont bien voulu me consacrer tout au long de ce travail

Je souhaite enfin témoigner de l'amitié qui me lie aux membres du groupe de travail "comportements d'itérations" et plus particulièrement à Michel COSNARD, Eric GOLES, Yves ROBERT et Maurice TCHUENTE.

Que soient également remerciés tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail.

1 - INTRODUCTION

- 1.1 - L'étude
- 1.2 - Le support physique

2 - MODELISATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

- 2.1 - Les équations
- 2.2 - Un mot sur la résolution théorique
- 2.3 - Approximation par des Eléments Finis de révolution
- 2.4 - Obtention du système linéaire
- Bibliographie

3 - MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES GRANDS SYSTÈMES LINÉAIRES CREUX

- 3.1 - Les méthodes par blocs
- 3.2 - Factorisations incomplètes
- 3.3 - Gradient conjugué préconditionné
- Bibliographie

4 - RESULTATS NUMÉRIQUES

- 4.1 - Les tests
- 4.2 - Interprétation

5 - CONCLUSION

ANNEXES

- AN.1 : Modélisation mathématique du problème des contraintes dans un annulaire de ciment
- AN.2 : Description et propriétés des méthodes numériques de résolution du système discrétisé
- AN.3 : Programme de calcul des contraintes.
Description et manuel d'utilisation

1 - INTRODUCTION

1.1 - L'étude

Dans le secteur pétrolier, le développement récent de techniques sophistiquées (comme l'introduction sur le terrain de micro-ordinateurs, la création de nouveaux outils de forage ou d'instruments de mesures vraiment efficaces, l'invention de fluides aux comportements rhéologiques mieux adaptés etc..) a conduit à réduire de plus en plus l'intervention humaine sur chantier de forage.

Paradoxalement, la cimentation d'un puits de pétrole se traite toujours aussi grossièrement, sans contrôle vraiment rigoureux. Même si l'expérience des foreurs suffit en général à éviter le pire, il n'est plus acceptable aujourd'hui que cette opération soit réalisée de manière aussi empirique.

C'est pourquoi le laboratoire "FLUIDES & CIMENT" de la C.F.P. nous a confié l'étude des contraintes qui s'exercent sur les ciments au cours d'un forage pétrolier avec l'idée de déterminer a priori si le puits risque de s'effondrer ou non (compte tenu des conditions de terrain et de la qualité du ciment utilisé) et permettre ainsi de guider plus précisément la cimentation.

Ce logiciel devra être disponible directement sur chantier, donc implanter sur un micro-ordinateur.

Partant de ce dernier problème réel, nous l'avons modélisé à partir des équations générales de l'élasticité linéaire tridimensionnelle ; les résultats obtenus montrent une bonne concordance du modèle avec les essais de laboratoire.

Après avoir rapidement étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème théorique, nous avons approximé le système d'équations aux dérivées partielles par la méthode des Eléments Finis de révolution en se servant de la symétrie axiale du domaine.

La discrétisation conduit à un grand système linéaire creux où la matrice est symétrique définie positive. L'objet de ce travail est la recherche de méthodes numériques de résolution de ce grand système creux.

Pour cela nous avons développé et testé des méthodes numériques basées sur les grandes classes de méthodes suivantes : les méthodes par blocs, les factorisations incomplètes, le gradient conjugué avec préconditionnement et des méthodes mixtes dérivées à la fois des unes et des autres.

Nous avons expérimenté ces différentes méthodes dans la dernière partie de ce rapport. Le problème physique initial nous fournit une base réaliste intéressante pour la comparaison des méthodes entre elles.

1.2 - Le support physique du problème

Quelques généralités sur le forage pétrolier

Le forage d'un puits de pétrole est réalisé à l'aide d'un outil (boule d'acier incrustée de pics en diamant) qui pénètre en rotation sous pression dans la roche et la broie. Les débris de roche sont évacués au fur et à mesure par un fluide approprié.

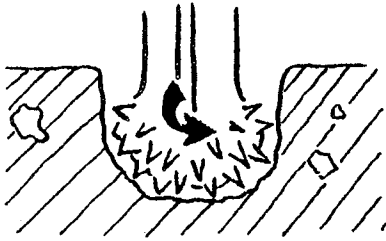
On procède en plusieurs étapes pour éviter l'éboulement de la formation, en réduisant à chaque fois le diamètre du trou. La profondeur de chaque phase est déterminée principalement en fonction de la nature des terrains traversés.

Pour consolider le puits et pour que le pétrole ne puisse s'échapper au cours de sa remontée, on retire l'outil et on introduit une série de tubes en acier vissés les uns aux autres (appelés "casing") que l'on fixe dans le trou par du ciment.

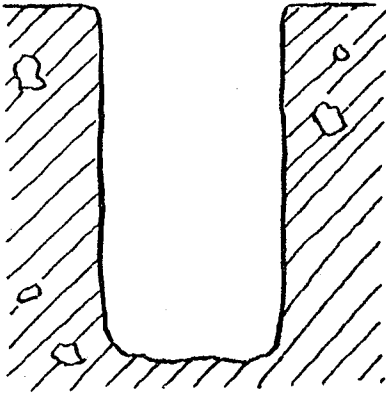
Une fois la formation consolidée, on réitère l'opération avec un outil plus petit afin d'obtenir un trou de diamètre plus faible ; puis on y introduit un nouveau casing que l'on fixe au précédent de la même manière par un ciment mieux adapté à la profondeur.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on atteigne la nappe de pétrole.

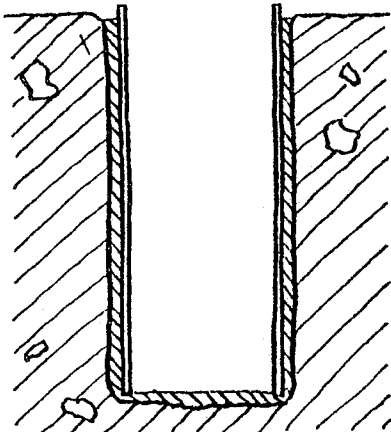
La mise en production du puits peut alors commencer. Le forage d'un puits de pétrole est schématisé par la série de figures ci-contre.



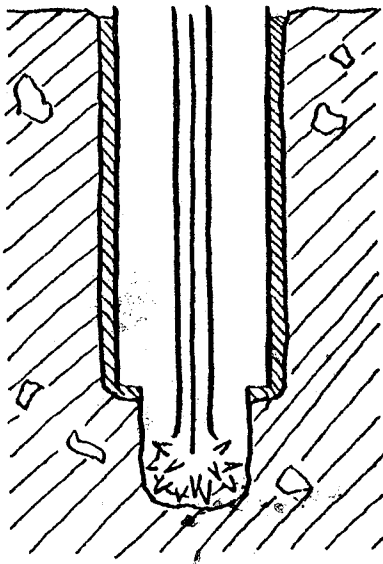
① On creuse...



② ... jusqu'à une certaine profondeur. On retire l'outil ...



③ ... On introduit un "casing" dans le trou et on le fixe par du ciment ...



④ ... puis on réitère l'opération avec un outil de diamètre plus faible ...
... jusqu'à ce que l'on atteigne la nappe de pétrole ...

... l'exploitation du puits peut commencer.

2 - MODELISATION MATHÉMATIQUE

Nous présentons ici la démarche générale de la modélisation du problème des contraintes dans un annulaire de ciment en soulignant les étapes importantes. L'annexe 1 reprend ces résultats en les détaillant.

2.1 - Les équations

Théorie de l'élasticité

Les notations sont standards :

σ_{ij} désigne le tenseur des contraintes, ε_{ij} celui des déformations et u le vecteur des déplacements (3 composantes qui dépendent chacune de 3 variables d'espace x_1, x_2, x_3).

δ_{ij} est le symbole de Kroneker et g l'accélération de la pesanteur.

On note λ et μ les coefficients de Lamé du ciment et α son coefficient de dilatation thermique linéique.

La loi de comportement d'un solide linéaire élastique s'écrit dans le cas isotrope :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u)$$

Si de plus on tient compte d'une variation de température T , l'équation précédente devient :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) - 3\alpha(3\lambda + 2\mu)T \delta_{ij}$$

avec $\varepsilon_{ij}(u) = 1/2 (\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$

soit $\sigma_{ij}(u) = \lambda \sum_{k=1}^3 \partial u_k / \partial x_k \delta_{ij} + \mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) - 3\alpha(3\lambda + 2\mu)T \delta_{ij}$

On remplace alors dans l'équation d'équilibre

On obtient

$$-\sum_{j=1}^3 \partial \sigma_{ij}(u) / \partial x_j = -(\lambda + \mu)(\text{grad. div } u)_i - \mu(\Delta u)_i + 3\alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial x_i} = g_i$$

On pose alors $f_i = -3\alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial x_i} + g_i \quad i = 1, 2, 3$

le système d'équations s'écrit :

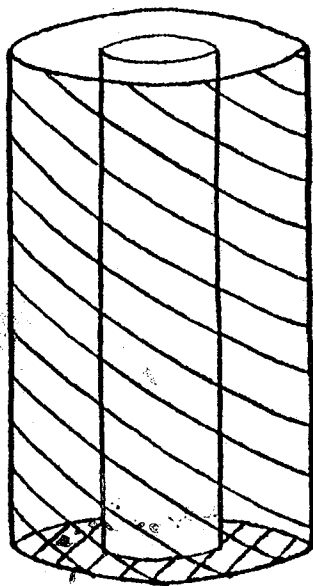
$$-(\lambda + \mu) \text{grad. div}(u) - \mu \Delta u = f$$

qui est le système des équations de Navier de l'élasticité linéaire.

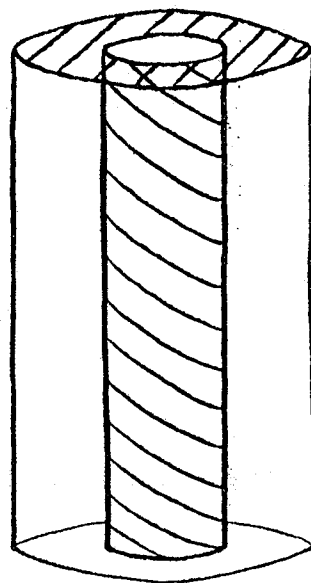
Application au problème des contraintes

Un annulaire de ciment soumis à des contraintes de charge et de température a un comportement linéaire élastique. Le modèle précédent s'applique à notre problème avec une bonne concordance.

Explicitons le domaine de travail : Ω est un annulaire de hauteur H , d'axe Ox_3 compris entre les cylindres de rayons a et b . La frontière se divise en 2 parties correspondant d'une part à une partie fixe (Γ_0) et à une partie où le ciment peut se déplacer (Γ_1), nous avons représenté ci-dessous le domaine et ses frontières :



Γ_0



Γ_1

Les conditions aux limites sont de deux types :

de type Dirichlet sur la partie Γ_0 où le ciment est confiné :

$$u = 0$$

de type Neumann sur le reste de la frontière. On connaît la valeur des forces surfaciques qui s'exercent sur Γ_1

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \gamma_j = F_i \quad i=1,2,3$$

γ est la normale à la surface dirigée vers l'extérieur

On connaît maintenant complètement le système d'équations qui régit le problème des contraintes :

Résoudre le problème des contraintes en terme de déplacements revient à déterminer la fonction inconnue u dans $(H^2(\Omega))^3$

$$(P) \quad \begin{cases} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)) = f_i & \text{sur } \Omega \quad i=1,2,3 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \gamma_j = F_i & \text{sur } \Gamma_1 \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ suffisamment régulière et Γ_0 est de mesure non nulle.

f_i et F_i sont dans $L^2(\Omega)$ pour tout i

2.2 - Un mot sur la résolution théorique

Formulation variationnelle du problème

On note V le sous-espace fermé de $(H^1(\Omega))^3$ des fonctions nulles sur Γ_0 . Le passage du problème (P) à sa formulation variationnelle est classique (voir (3) par exemple), elle utilise la formule de Green donnée en annexe.

On pose
$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx$$

et
$$\ell(v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^3 F_i v_i d\gamma$$

Résoudre le problème (P) revient à trouver u dans V tel que :

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$$

On note (P') ce nouveau problème.

Existence et unicité de la solution

Elle découle directement de l'application du théorème de Lax-Milgram. La vérification des hypothèses est détaillée dans l'annexe 1.

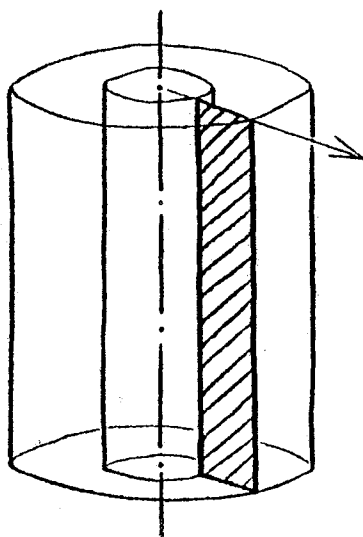
Invariance de la solution par rotation

Notre idée est d'utiliser la symétrie axiale du problème physique. On montre pour cela que la solution du problème variationnel (P') est invariante par rotation (c'est-à-dire que toutes ses composantes restent constantes le long de tous cercles centrés sur l'axe de l'annulaire).

Plus précisément : $u \in (H^1(\Omega))^3$ est invariante par rotation si $\forall i=1,2,3$
 $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad u_i \circ r_{\theta} = u_i$
 (r_{θ} est l'opérateur de rotation d'angle θ autour de l'axe Ox_3).

Nous pouvons donc nous ramener à un domaine élémentaire ω de $\mathbb{R}^2$ à partir duquel il sera facile de reconstituer Ω par simple rotation.

ω est le rectangle suivant :



2.3 - Approximation par des Eléments Finis de révolution

Nous avons choisi de discrétiser le problème par la méthode des Eléments Finis pour pouvoir étudier plus finement certaines zones en raffinant le maillage ; dans le cas d'un puits géothermique par exemple où les contraintes peuvent être très fortes localement. On pourra également étendre plus facilement le modèle au cas d'annulaires non centrés qui nécessitera un pas de discrétisation variable.

Compte tenu de la symétrie axiale du problème des cas, nous cherchons la solution numérique dans un sous-espace fermé V_h de dimension finie de V de fonctions invariantes par rotation.

On résoud le problème numérique suivant :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

Il se pose le problème du choix de V_h .

V_h est construit à partir d'une triangulation classique T_h sur le rectangle ω défini au paragraphe précédent.

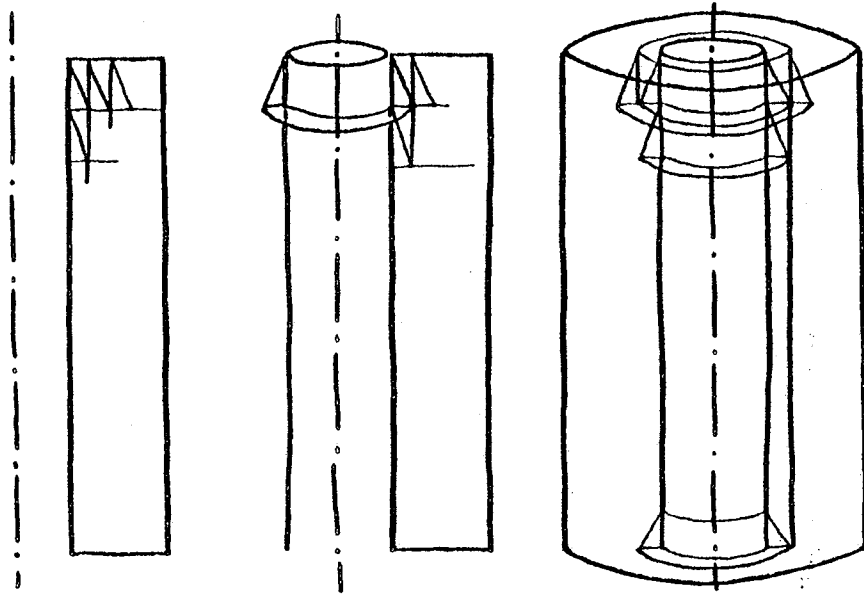
Soit $\mathcal{U}_h$ l'espace des fonctions $u_i \in \mathcal{C}^0(\omega)$ affines sur chaque triangle de T_h et nulles sur Γ_0 .

On note $\{\omega_i\}_{i=1,2,\dots,n_h}$ une base de $\mathcal{U}_h$ ($\omega_i(\text{nœud } j) = \delta_{ij}$)

Il est facile de revenir au domaine initial par l'application suivante : $\mathcal{G} : u_i(x_1, x_2, x_3) \rightarrow u_i(r, z) = u_i(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3)$

V_h est l'espace engendré par les $\mathcal{G}(\omega_i^{\ell}) = S_i^{\ell} \quad \ell = 1, 2, 3$

Nous avons schématisé ci-après le passage de ω à Ω . Ω est l'ensemble des tores K de sections triangulaires engendrés par les Eléments Finis K de T_h .



Passage de ω à Ω

2.4 - Obtention du système linéaire

La solution numérique u_h du problème précédent s'obtient par résolution d'un système linéaire que nous allons expliciter. On prend successivement pour u_h les vecteurs de base de V_h :

$$a(u_h, s_i^l) = l(s_i^l) \quad l=1,2,3$$

puis on décompose u_h sur la base de V_h

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{k=1}^3 \xi_j^k s_j^k$$

On obtient alors le système linéaire suivant de dimension $3n_h \times 3n_h$ aux $3n_h$ inconnues ξ_j^k (valeur de la $k^{\text{ème}}$ composante du déplacement au noeud j).

$$\sum_{j=1}^{n_h} \sum_{k=1}^3 a(s_j^k, s_i^l) \xi_j^k = l(s_i^l)$$

pour $l=1,2,3$ et $i=1,2,\dots,n_h$

Principe de calcul des coefficients de la matrice et du second membre

La démarche est simple. On parcourt classiquement les n_h Eléments Finis K de Ω sur lesquels on calcule les contributions $a(s_j^k, s_i^l)$ en se ramenant sur $\mathbb{R}^2$.

Par exemple pour $a(s_j^1, s_i^1)$

$$a(s_j^1, s_i^1)_K = \int_K (\lambda + \mu) \frac{\partial s_j}{\partial x_1} \frac{\partial s_i}{\partial x_1} dx + \int_K \mu \vec{\nabla} s_j \cdot \vec{\nabla} s_i dx$$

$$\text{On a } \frac{\partial s_i}{\partial x_1} = \frac{\partial(\varphi \omega_i)}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_K \frac{\partial s_j}{\partial x_1} \frac{\partial s_i}{\partial x_1} dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_K \frac{\partial \omega_j}{\partial r} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} r dr dz \\ &= \pi \int_K \frac{\partial \omega_j}{\partial r} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} r dr dz \end{aligned}$$

Puis on se ramène à un triangle de référence $\hat{K}$ pour le calcul de l'intégrale sur K et on intègre classiquement par une formule approchée.

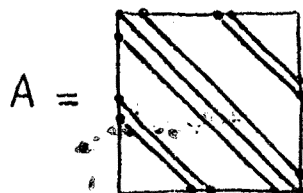
On procède de la même manière avec toutes les intégrales.

On trouve par le calcul que le second membre du système en θ (le vecteur des $\ell(s_i^2)$) est nul, c'est-à-dire que le déplacement orthoradial du ciment est nul (ce qui confirme une constatation physique intuitive).

De plus, résoudre le système en r ($\ell=1$) ou en z ($\ell=3$) est équivalent d'un point de vue structurel (les zéros sont à la même place). Seules changent les valeurs des coefficients de la matrice en entrée.

Quelques propriétés du système

En pratique, on se ramène à un système $Au=b$ de taille $n_h \times n_h$ où la matrice A est symétrique par construction, tridiagonale par blocs (à 7 diagonales non nulles) de grande dimension. On la représentera comme suit :



Les éléments diagonaux de A sont strictement positifs par construction. On vérifie facilement que les éléments hors-diagonaux sont négatifs.

La matrice A est diagonale faiblement dominante

Il faut montrer que

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^n a(s_i^k, s_j^k) \geq 0$$

la démarche est la même pour $k=1$ et $k=3$. Nous mènerons les calculs avec $k=1$.

$$\forall i \quad a(s_i^1, s_j^1) = \pi(\lambda + \mu) \int_{\omega} \frac{\partial \omega_j}{\partial r} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} \omega_j \cdot \vec{\nabla} \omega_i r dr dz$$

i) le noeud i et ses voisins sont intérieurs à la grille
on utilise le fait que $\{\omega_i\}$ est une base, c'est-à-dire :

$$\omega_i(\text{noeud } j) = \delta_{ij}$$

$$\omega_i = 1 - \sum_{j \text{ voisin de } i} \omega_j$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad \int_{\omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} r dr dz &= - \sum_{j \text{ voisin}} \int_{\omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial \omega_j}{\partial r} r dr dz \\ &= - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial \omega_j}{\partial r} r dr dz \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \int_{\omega} \vec{\nabla} \omega_i \cdot \vec{\nabla} \omega_i r dr dz = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{\omega} \vec{\nabla} \omega_i \cdot \vec{\nabla} \omega_j r dr dz$$

$$\text{donc} \quad \sum_{j=1}^n a(s_i^1, s_j^1) = 0$$

ii) le noeud est frontière ou ses voisins directs sont frontière sur Γ_1
Dans ce cas :

$$\omega_i = 1 - \sum_{j \text{ voisin intérieur de } i} \omega_j - \sum_{j \text{ voisin de } i \text{ sur } \Gamma_1} \omega_j$$

il intervient en plus en terme correctif venant des intégrales sur le bord :

On trouve
$$\sum_{j=1}^n a(s_i^1, s_j^1) = \sum_{\substack{j \text{ voisin} \\ \text{sur } \Gamma_1}} \pi(\lambda + \mu) \int_{\omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial \omega_j}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} \omega_i \cdot \vec{\nabla} \omega_j > 0$$

Ce qui prouve que la matrice A est à diagonale faiblement dominante

A est une M-matrice

Toute matrice à diagonale faiblement dominante à éléments diagonaux positifs et éléments hors-diagonaux négatifs est une M-matrice, i.e. une matrice qui vérifie :

$$(\forall x \quad Ax \geq 0) \Rightarrow (x \geq 0)$$

En effet :

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0$$

en particulier pour $i = i_0$, indice pour lequel x_{i_0} est minimum

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j &= \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} (x_j - x_{i_0}) + x_{i_0} \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0 j} (x_j - x_{i_0}) + x_{i_0} \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \end{aligned}$$

si $x_{i_0} < 0$ alors $x_j - x_{i_0} \geq 0 \quad \forall j$

comme $\sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} < 0$ et $\sum_j a_{i_0 j} \geq 0$

$$\text{on en déduit : } \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j < 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse

donc x_{i_0} qui est le minimum des x_i est positif, donc $x \geq 0$

La matrice A est définie positive

Cette propriété vient de la coercivité de la forme bilinéaire a (la démonstration non triviale est en annexe 1). Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et x_h la fonction de V_h combinaison linéaire des (x_i^1, s_i^1)

$$\exists \alpha > 0 \quad x^T A x = a(x, x) \geq \alpha \|x\|_V^2$$

Ce qui prouve que A est définie positive.

La suite est consacrée à la résolution de ce grand système linéaire creux symétrique défini positif.

On se reportera à l'annexe 2 pour le détail des méthodes numériques étudiées.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) AUBIN J.P.,
"Approximation of elliptic boundary-value problems", vol 26 in Pure & applied Mathematics, Wiley-Interscience 1972
- (2) BHATTACHARYYA P.K.,
"V-ellipticity and Finite Element approximation of the camped shallow non circular cylindrical shell problem", rapport IRIA 264 1977
- (3) CIARLET P.,
"The Finite Element methods for elliptic problems", North Holland 1977
- (4) DUMONT J.,
"Evolution des températures dans un puits", rapport CFP 1981
- (5) DUVAUT G. & LIONS J.L.,
"Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod 1972
- (6) GASTINEL N.,
"Méthodes numériques pour la résolution de problèmes aux équations aux dérivées partielles", polycopié ENSIMAG 1980
- (7) GERMAIN P.,
cours de mécanique des milieux continus de l'Ecole Polytechnique 1973
- (8) LIONS J.L.,
voir DUVAUT G. & LIONS J.L.
- (9) NECAS J.,
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson 1967
- (10) PENANG UNIVERSITY,
"Lectures on the Finite Element methods", ed TAN WANG SENG & KOH HOCK LYE 1977
- (11) ROBERT F.,
Cours d'Analyse Numérique de l'ENSIMAG 1980
- (12) TEMAM R.,
"Navier-Stokes equations", North Holland 1976
- (13) TRYSTRAM D.,
"Etudes des contraintes dans un annulaire de ciment", rapport DEA Université de Grenoble 1982
- (14) WITOMSKI P.,
"Modélisation et étude numérique d'une expérience de croissance cristalline", Thèse Université de Grenoble 1977
- (15) ZIENKIEWICK O.C.,
"Finite Elements-The background story", ed WHITEMAN J.R., Academic Press NY 1973

3 - METHODES DE RESOLUTION DU GRAND SYSTEME LINEAIRE CREUX

Nous allons développer dans ce chapitre des méthodes numériques modernes de résolution des grands systèmes creux $Au=b$ où A est symétrique définie positive de taille $n \times n$. Nous étudions plus précisément les méthodes par blocs, les factorisations incomplètes de Cholesky et le Gradient conjugué avec différents jeux de préconditionnements.

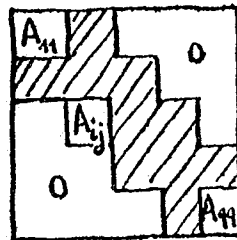
3.1 - Les méthodes par blocs

Toutes les méthodes numériques peuvent s'écrire sous forme "bloc", si on envisage la résolution d'un point de vue plus global. Nous nous intéressons plus particulièrement à la méthode SOR.

La méthode SOR par blocs (BSOR)

A est triangulaire par blocs, soit q le nombre de blocs et p leur taille ($n = p \times q$).

On représentera A de la manière suivante :



Pour éviter les confusions avec le cadre ponctuel, nous noterons toujours $\hat{M}$ la forme bloc de la matrice M .

La relaxation s'écrit matriciellement :

$$u^{k+1} = \left(\frac{1}{\omega} \hat{D} - \hat{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} \hat{D} + \hat{E}^T \right) u^k + \left(\frac{1}{\omega} \hat{D} - \hat{E} \right)^{-1} b$$

Où $\hat{D}$ est la matrice bloc-diagonale de $\hat{A}$ et $\hat{E}$ l'opposée de sa partie bloc-triangulaire inférieure stricte.

ou de manière équivalente sous forme développée pour $i = 1, 2, \dots, q$

$$A_{ii} U_i^{k+1} = \omega \left[- \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} U_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^q A_{ij} U_j^k + B_i \right] + (1-\omega) A_{ii} U_i^k$$

U_i^{k+1} est un vecteur à p composantes. A chaque itération de k , il faudra résoudre q petits systèmes $A_{ii} U_i^{k+1} = Y_i^k$ de tailles $p \times p$ par une méthode directe. A_{ii} est une matrice bande et p n'est plus de grande dimension, il est donc raisonnable d'envisager d'utiliser la méthode de Cholesky à chaque itération pour résoudre ces systèmes intermédiaires.

3.2 Factorisations Incomplètes

Lorsque l'on applique simplement la décomposition de Cholesky à la matrice A (on écrit A comme le produit de LDL^T), on s'aperçoit que la matrice triangulaire inférieure L perd le caractère creux initial de A (la bande creuse se remplit).

Comme A est de grande dimension, on risque un dépassement rapide de la capacité mémoire. L'idée est alors d'imposer avant construction une structure particulière à la matrice L . On décompose incomplètement A .

Factorisation incomplète de Cholesky (IC)

Soit P un ensemble d'indices hors diagonaux. On va imposer aux éléments de L d'être nuls aux indices qui n'appartiennent pas à P .

Bien sûr, en contre partie il faudra accepter un reste $R = LDL^T - A$: la décomposition n'est plus exacte.

Le choix le plus simple est d'imposer à L de conserver le profil initial de A .

Dans ce cas $P = \{(i,j) / i \neq j \text{ et } a_{ij} \neq 0\}$

Meijerik & Van Der Vorst ont montré que la décomposition incomplète de Cholesky d'une M -matrice existe et est unique pour un ensemble P d'indices quelconques (on peut imaginer toutes les stratégies possibles de choix de P mais nous nous limiterons au P donné précédemment), Manteuffel a étendu le résultat à la classe des H -matrices et enfin Y. Robert a prouvé que toute matrice symétrique définie positive était incomplètement factorisable.

Donc la matrice A est Cholesky incomplètement factorisable.

On obtient les coefficients de D et L par l'algorithme suivant :

$$d_1 = a_{11}$$

$$l_{j1} d_1 = a_{j1} \quad j > 1$$

$$i = 2, \dots, n \quad d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_k$$

$$j > i \quad l_{ji} d_i = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} d_k l_{ik} \quad \begin{matrix} \text{si } (j,i) \in P \\ \text{sinon} \end{matrix}$$

$$= 0$$

La résolution de $Au = b$ est alors très simple.

On le résoud itérativement par la formule :

$$LDL^T u^{k+1} = b + Ru^k$$

En pratique, il est à noter que le calcul du reste R est inutile, on résoud itérativement :

$$LDL^T (\Delta u)^{k+1} = b - Au^k$$

$$\text{où } (\Delta u)^{k+1} = u^{k+1} - u^k$$

en le décomposant en 3 sous-systèmes élémentaires :

pour $k=1, \dots$ faire les 4 étapes suivantes

résoudre $Ly = b - Au^k$ (triangulaire inférieur)

résoudre $Dz = y$ (diagonal)

résoudre $L^T (\Delta u)^{k+1} = z$ (triangulaire supérieur)

$$u^{k+1} = (\Delta u)^{k+1} + u^k$$

3.3 - Gradient Conjugué préconditionné

L'idée de base des méthodes de descente est de considérer la résolution du système $Au = b$ (1) comme le calcul du minimum d'une fonctionnelle quadratique F définie par $F(u) = \frac{1}{2} u^T A u - u^T b$

La méthode du gradient conjugué est une méthode de descente particulière où les directions de descente sont conjuguées deux à deux (c'est-à-dire orthogonales au sens du produit scalaire défini par A).

On part du vecteur u^0 arbitraire
l'itération s'écrit

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k d^k$$

$$\text{où } \alpha_k = r^{k-1T} r^{k-1} / d^{kT} A d^k$$

$$\text{et } d^k = r^k - \beta_{k-1} d^{k-1}$$

(r^k est le résidu $b - Au^k$)

$$\beta_{k-1} = r^{k-1T} r^{k-1} / r^{k-2T} r^{k-2}$$

Il existe une formulation équivalente :

$$u^{k+1} = \rho_{k+1} (\gamma_{k+1} r^k + u^k) + (1 - \rho_{k+1}) u^{k-1}$$

$$\rho_{k+1} = 1 - \beta_{k-1} \alpha_k / \alpha_{k-1}$$

$$\gamma_{k+1} = \alpha_k / \rho_{k+1}$$

Notion de Conditionnement

Bien que la méthode du gradient conjugué soit théoriquement une méthode directe (elle donne la solution exacte en au plus n opérations) on l'utilise pratiquement comme méthode itérative.

La convergence du gradient conjugué en tant que méthode itérative dépend du conditionnement de la matrice du système à résoudre (c'est-à-dire, dans le cadre symétrique, du rapport en module des 2 valeurs propres extrêmes).

On note C_A le conditionnement de la matrice A .

Influence du conditionnement sur la convergence

On note ε^k le vecteur erreur au pas k .

La formulation "3 termes" précédente de l'itération du gradient conjugué s'écrit aussi :

$$u^{k+1} = \rho_{k+1} (\gamma_{k+1} (I-A) u^k + b) + (1 - \rho_{k+1}) u^{k-1}$$

sous cette forme, on montre qu'il existe une matrice polynomiale de degré k en $I-A$ (notée $Q_k(I-A)$) telle que l'erreur peut s'exprimer sous la forme :

$$\varepsilon^k = \varepsilon^0 Q_k(I-A)$$

Parmi les méthodes de descente, le gradient conjugué est celle qui minimise la A -norme de l'erreur.

$$\text{En particulier : } \|\varepsilon^k\|_A^2 \leq \|\tilde{\varepsilon}^k\|_A^2$$

Où $\tilde{\varepsilon}^k$ est le vecteur erreur associé à l'accélération de Chebyshev dont on connaît une majoration :

$$\|\tilde{\varepsilon}^k\|_A^2 \leq 4 \left(\frac{\sqrt{C_A}-1}{\sqrt{C_A}+1} \right)^{2k} \|\varepsilon^0\|_A^2$$

Donc, la convergence de la méthode dépend du conditionnement de la matrice.

On peut trouver une majoration plus fine (voir annexe 2) qui montre l'influence de la répartition du spectre des valeurs propres. On aura intérêt à travailler sur une matrice ayant un bon conditionnement (pas trop loin de 1) et une répartition régulière de ses valeurs propres.

La méthode du gradient conjugué généralisé

Nous venons de voir que le conditionnement de la matrice A intervient sur la vitesse de convergence de la méthode du gradient conjugué. Pour améliorer ce conditionnement, on peut multiplier le système initial (1) par une matrice M^{-1} de telle sorte que la nouvelle matrice $M^{-1}A$ ait un meilleur conditionnement que A et appliquer la méthode de résolution au nouveau système $M^{-1}Au = M^{-1}b$ (2) lorsque cela est possible.

On dit alors que l'on "préconditionne" le système.

Il faudra qu'en un certain sens $M^{-1}A$ soit "le plus proche possible" de l'identité (en d'autres termes que M approxime A).

Si l'on utilise cette technique pour accélérer la convergence du gradient conjugué, on obtient l'algorithme généralisé de Concus & Golub suivant :

$$u^0 \text{ donné}$$

$$r^0 = Au^0 - b$$

pour $k=1, 2, \dots$, faire

$$\text{résoudre le système } Mz^{k-1} = r^{k-1}$$

$$\rho_{k-1} = r^{k-1T} z^{k-1}$$

$$\beta_{k-1} = \rho_{k-1} / \rho_{k-2}$$

$$d^k = \begin{cases} -z^0 & k=1 \\ -z^{k-1} + \beta_{k-1} d^{k-1} & k > 1 \end{cases}$$

$$v^k = Ad^k$$

$$\alpha_k = \rho_{k-1} / d^{kT} v^k$$

$$u^k = u^{k-1} + \alpha_k d^k$$

$$r^k = r^{k-1} + \alpha_k v^k$$

jusqu'à ce que $\rho_{k-1} = 0$

Nous allons examiner les problèmes que posent le choix d'un bon préconditionnement.

A chaque itération, il nous faut résoudre un système supplémentaire $Mz^{k-1} = r^{k-1}$.

Une "bonne" matrice de préconditionnement devra d'une part approximer A le mieux possible et d'autre part donner une solution rapide et peu coûteuse en terme d'encombrement mémoire du système intermédiaire qui pénalise l'accélération. Pratiquement il s'agit de trouver le meilleur compromis entre ces deux critères.

Nous allons étudier différents choix possibles de matrices de préconditionnement.

Le préconditionnement diagonal (DCG)

C'est le choix le plus simple possible de la matrice de préconditionnement ; on approxime grossièrement A par sa diagonale.

L'intérêt est d'obtenir directement le vecteur z^{k-1} (composante par composante par $z_i^{k-1} = r_i^{k-1} / a_{ii}$) sans résolution de système ni stockage de matrice.

Le préconditionnement SSOR (SSORCG)

Axelsson a proposé d'approximer A par la matrice $\omega/(2-\omega)(D/2 - E)D^{-1}(D/2 - E^T)$ qui correspond au splitting classique de la méthode SSOR.

On obtient à chaque itération le vecteur z^{k-1} par résolution de trois systèmes élémentaires $(D/2 - E)y = r^{k-1}$ triangulaire inférieur, $\frac{\omega}{2-\omega}D^{-1}z = y$ diagonal et $(D/2 - E^T)z^{k-1} = z$ triangulaire supérieur, sans avoir besoin de stocker quoique ce soit.

En pratique, on montre que l'influence de ω est négligeable, nous prendrons donc $\omega = 1$.

Le préconditionnement basé sur la décomposition incomplète de Cholesky (ICCG)

On prend comme matrice de préconditionnement du système, la matrice produit $L D L^T$ issue de la factorisation incomplète de Cholesky de A.

s'obtient alors, comme pour SSORCG, par résolution de trois systèmes élémentaires à cette différence que l'on est obligé ici de calculer les coefficients des matrices D et L et de les conserver en mémoire.

Le préconditionnement IC modifié (DKRCG)

On choisit comme précédemment de préconditionner le système par une matrice M sous la forme LL^T avec la contrainte supplémentaire de se fixer, outre le profil de L, la structure algébrique du reste R.

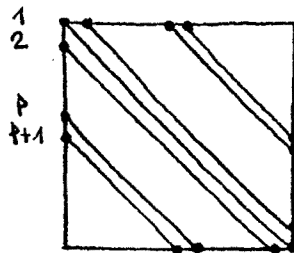
Dans la factorisation incomplète de Cholesky, le reste est construit de manière unique avec les éléments parasites qui apparaissent dans la décomposition classique de Cholesky.

Ici, on se fixe un degré de liberté supplémentaire en introduisant la diagonale de R. On peut par exemple modifier la factorisation incomplète de Cholesky de façon à rendre nulle la somme des éléments de chaque ligne de R : $\forall i \sum_j r_{ij} = 0$. Soit $\bar{R}$ ce choix particulier du reste.

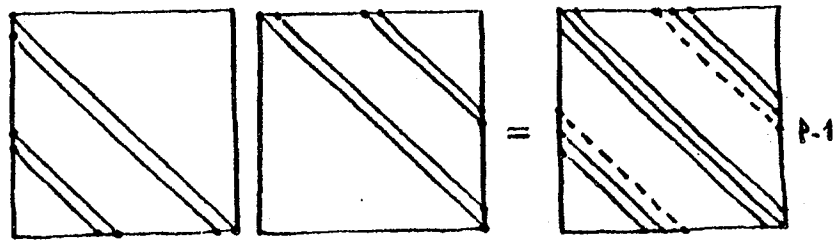
Dupont Kendall & Rachford préconisent de prendre un reste égal à $\bar{R} + \delta D$. D est la diagonale de A et δ un paramètre réel à choisir. Dans certains cas simples on peut déterminer δ en fonction des données du problème mais après expérimentation, il apparaît que l'influence de δ sur le temps d'exécution est négligeable.

pratiquement nous prendrons $\delta = 0$. On retombe sur le préconditionnement IC modifié de Axelsson & Gustaffson.

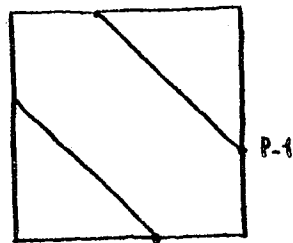
la matrice A à traiter possède 7 diagonales réparties comme suit :



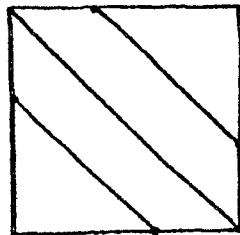
Si l'on écrit la décomposition incomplète classique de Cholesky (pour L ayant la même structure creuse que A), on s'aperçoit que le calcul du produit LL^T fait apparaître deux hors-diagonales supplémentaires à A.



R a donc le profil suivant :



Si on décide d'imposer en plus une structure algébrique particulière au reste, il faut rajouter un degré de liberté obtenu en introduisant la diagonale de A dans R. Autrement dit :



On calcule facilement les valeurs des éléments de M par identification, ce qui nous donne un algorithme constructif des éléments l_{ij} de L.

pour $i=1, \dots, n$ calculer les 4 valeurs suivantes

$$l_{ii}^2 = a_{ii}(1+\delta) - l_{ii-p}l_{i-p+ii-p} - l_{i+p-ii-1}l_{ii-1} - l_{ii-1}^2 - l_{ii-p}^2 - l_{ii-p-1}^2$$

$$l_{i+ii} = (a_{i+ii} - l_{i+ii-p}l_{ii-p}) / l_{ii}$$

$$l_{i+pi} = (a_{i+pi} - l_{i+pi-1}l_{ii-1}) / l_{ii}$$

$$l_{i+p+ii} = a_{i+p+ii} / l_{ii}$$

fin pour

On stocke les éléments de L en mémoire, il reste à résoudre à chaque itération 2 systèmes triangulaires élémentaires pour déterminer z^{k-1} .

Préconditionnement par blocs

Nous avons jusqu'à maintenant préconditionné le système en utilisant les propriétés de A (symétrie, caractère creux, grande taille, définie positivité) hormis la structure bloc.

Ce paragraphe est consacré au préconditionnement basé sur la décomposition incomplète de Cholesky par blocs.

Cholesky par blocs

On décompose la matrice A de grande dimension en blocs de taille $p \times p$ et on applique Cholesky sur les blocs diagonaux.

$\hat{E}$ représente la partie triangulaire inférieure stricte de $\hat{A}$

Soit $\hat{\Sigma}$ la matrice bloc-diagonale définie par

$$\Sigma_{11} = A_{11}$$

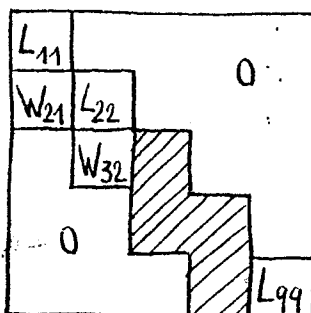
$$\Sigma_{ii} = A_{ii} - A_{ii-1} \Sigma_{i-1,i-1}^{-1} A_{ii-1}^T \quad i=2, \dots, q$$

Alors, la matrice $\hat{A}$ se décompose par blocs en le produit suivant :

$$\hat{A} = (\hat{\Sigma} - \hat{E}) \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\Sigma} - \hat{E}^T)$$

ou de manière équivalente :

$$\hat{A} = \hat{L} \hat{L}^T$$

avec $\hat{L} =$ 

en posant $W_{ii-1} = A_{ii-1} (L_{i-1,i-1}^T)^{-1}$

Le principe d'obtention de $\hat{L}$ est simple :

On décompose le premier bloc A_{11} en $L_{11}L_{11}^T$ par Cholesky, puis on inverse L_{11}^T et on en déduit $W_{21} = A_{21}(L_{11}^T)^{-1}$. On peut alors calculer le nouveau bloc $\Sigma_{22} = A_{22} - W_{21}W_{21}^T$ que l'on décompose par Cholesky en $L_{22}L_{22}^T$. On inverse L_{22}^T , on en déduit W_{32} et ainsi de suite.

Conditions d'existence de la décomposition

La factorisation de Cholesky par points existe. Tous les mineurs fondamentaux de A sont non nuls et donc la décomposition de Cholesky par blocs existe quelle que soit la taille des blocs.

Cholesky Incomplet par blocs

Dans la décomposition de Cholesky par blocs :

$$\hat{A} = (\hat{\Sigma} - \hat{E}) \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\Sigma} - \hat{E}^T)$$

On s'aperçoit que les blocs Σ_{ii} et Σ_{ii}^{-1} se remplissent à partir de $i=2$ (les blocs initiaux A_{ii} étaient creux).

Si l'on désire préserver le caractère creux de A , il faut remplacer les $\Sigma_{i-1,i-1}^{-1}$ dans l'expression des Σ_{ii} par une approximation creuse (c'est-à-dire qui conserve les zéros des blocs diagonaux de A). On note $\Lambda_{i-1,i-1}$ l'approximation creuse de $\Sigma_{i-1,i-1}^{-1}$.

On pose alors : $\Delta_{11} = A_{11}$

$$\Delta_{ii} = A_{ii} - A_{i,i-1} \Lambda_{i-1,i-1} A_{i,i-1}^T \quad i \geq 2$$

On obtient une nouvelle factorisation à partir de $\hat{\Delta}$ qui n'est plus exacte :

$$(\hat{\Delta} - \hat{E}) \hat{\Delta}^{-1} (\hat{\Delta} - \hat{E}^T) \quad \text{que l'on pose égale à } \hat{M}$$

$\hat{A} = \hat{M} - \hat{R}$ où $\hat{R}$ est une matrice "reste" bloc-diagonale dont les blocs R_{ii} ont trivialement les expressions suivantes :

$$R_{11} = 0$$

$$R_{ii} = \Delta_{ii} - A_{ii} + A_{i,i-1} \Delta_{i-1,i-1}^{-1} A_{i,i-1}^T$$

$\hat{M}$ s'écrit aussi $\hat{L}\hat{L}^T$ comme précédemment.

Cette dernière forme est meilleure à programmer.

Application au Gradient Conjugué

R. Underwood a montré dans (34) que le calcul explicite de la matrice de préconditionnement $\hat{M}$ est inutile. On peut représenter $\hat{M} = \hat{L}\hat{L}^T$ conceptuellement sans avoir besoin de stocker les blocs $W_{i,i-1}$ en utilisant directement la factorisation $A_{i,i-1} (L_{i-1,i-1}^T)^{-1}$.

La résolution du système intermédiaire $\hat{M} z^{k-1} = r^{k-1}$ dans BICCG s'effectue en deux étapes élémentaires :

(1) résoudre le système $\hat{L} y = r^{k-1}$ par l'algorithme :

$$\text{résoudre } L_{11} y_1 = r_1^{k-1}$$

pour $j = 2, \dots, q$ faire

$$\text{résoudre } L_{j-1,j-1}^T x_j = y_j$$

$$\text{résoudre } L_{jj} y_j = r_j^{k-1} - A_{jj-1} x_j$$

fin pour

(2) résoudre $\hat{L}^T z^{k-1} = y$ de la même manière

La résolution des petits systèmes $p \times p$: $L_{jj} x = y$ et $L_{jj}^T y = v$ est obtenue par des procédures de simple élimination.

Pour la détermination des L_{ii} , on ne calcule que les 2 diagonales principales des blocs intermédiaires $\Delta_{i-1,i-1}$.

Nous n'avons expérimenté que l'approximation de l'inverse de $\sum_{i=1}^q \Delta_{i-1,i-1}$ qui consiste à garder la structure initiale globale. Il existe des stratégies plus larges du choix (voir (5)).

BIBLIOGRAPHIE

- (1) AXELSSON O.,
"A generalized SSOR method", BIT Vol 13 pp 443-452 1972
- (2) AXELSSON O. & GUSTAFSSON I.,
"Iterative methods for the solution of the Navier equations of elasticity", Comp. Meth. in Appl. Meca. & Eng. vol 15 pp 241-258 1978
- (3) BONNET M. & MEURANT G.,
"Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du Gradient Conjugué avec préconditionnement", Note CEA-N-2159 1980
- (4) CONCUS P., GOLUB G.H. & O'LEARY D.P.,
"A generalized Conjugate Gradient method for the numerical solution of elliptic partial differential equations", in Sparse matrix computations, ed. Bunch and Rose Academic Press 1976
- (5) CONCUS P., GOLUB G.H. & MEURANT G.,
"Block preconditioning for the Conjugate Gradient method", RR L. Berkeley laboratory, University of California 1982
- (6) DANIEL J.W.,
"The Conjugate Gradient method for linear and nonlinear operator equations", SIAM J. Numer. Anal. vol 4 pp 10-26 1967
- (7) DUPONT T., KENDALL R.P. & RACHFORD H.H.,
"An approximate factorization procedure for solving self adjoint elliptic difference equations", SIAM J. Num. Anal. vol 5 pp 559-573 1968
- (8) EVANS D.J.,
"The use of preconditionning in iterative methods for solving linear equations with SPD matrices", J. Inst. of Math. Appl. pp 295-314 1972
- (9) GASTINEL N.,
"Analyse numérique linéaire", Hermann 1966
- (10) GOLUB G.H. and MEURANT G.,
"Résolution numérique des grands systèmes linéaires", CEA-EDF, INRIA ed. Eyrolles 1981

voir CONCUS P., GOLUB G.H. & O'LEARY D.P.

voir aussi CONCUS P., GOLUB G.H. & MEURANT G.
- (11) GREENBAUM A.,
"Comparison of splittings used with the Conjugate Gradient algorithm" Num. Math. vol 33 pp 181-194 1979
- (12) GUSTAFSSON I.,
"On modified incomplete Cholesky factorisation methods for the solution of problems with discontinuous material coefficients", Int. J. for Num. Meth. in Eng. vol 14 1979

voir AXELSSON O. & GUSTAFSSON I.

- (13) HAGEMAN L.A., LUK F.T. & YOUNG D.M.
"On the equivalence of certain iterative acceleration methods", SIAM J. Numer. Anal. vol 17 pp 852-873 1980
- (14) HAGEMAN L.A. & YOUNG D.M.,
"Applied iterative methods", Academic Press NY 1981
- (15) HESTENES M. & STIEFEL E.,
"Methods of Conjugate Gradient for solving linear systems", J. Res Nat. Bur Stan B 49, pp 409-436 1952
- (16) JEA K.C. and YOUNG D.M.,
"On the simplification of generalized Conjugate-Gradient methods for nonsymmetrizable linear systems", Linear Algebra and its Applications 52/53 pp 399-417 1983
- (17) JOLY P.,
"Résolution de systèmes linéaires non symétriques par des méthodes de Gradient Conjugué", R.R. Université Pierre et Marie Curie CNRS 1982
- (18) KENDALL R.P.,
voir DUPONT T., KENDALL R.P. & RACHFORD H.H.
- (19) KERSHAW D.S.,
"The incomplete Cholesky Conjugate Gradient method for the iterative solution of systems of linear equations", J of Comp. Physics vol 26 pp 43-65 1978
- (20) LUK F.T.,
voir HAGEMAN L.A., LUK F.T. & YOUNG D.M.
- (21) MANTEUFFEL T.A.,
"An Incomplete Factorization technique for positive definite systems", Math. Comp. vol 34 pp 473-497 1980
- (22) MEIJERINK J.A. & VAN DER VORTS H.A.,
"An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix", J of Comp. Physics vol 31 pp 148-162 1977
- (23) MEURANT G.,
voir BONNET M. & MEURANT G.

voir GOLUB G.H. P. & MEURANT G.

voir aussi CONCUS P., GOLUB G.H. & MEURANT G.
- (24) MESSAOUDI A.,
"Sur la décomposition incomplète de certaines classes de matrices; algorithmes itératifs associés", thèse Université de Besancon 1983
- (25) O'LEARY D.P.,
"The block Conjugate Gradient algorithm and related methods", Linear algebra and its applications 29, pp 293-322 1980

voir CONCUS P., GOLUB G.H. & O'LEARY D.P.

- (26) RACHFORD H.H.
voir DUPONT T., KENDALL R.P. & RACHFORD H.H.
- (27) RAVIART P.A.,
Cours d'Analyse Numérique de l'Ecole Polytechnique, 1978
- (28) REID J.K.,
"On the method of Conjugate Gradients for the solution of large sparse systems of linear equations", in Large sparse sets of linear equations, ed. REID J.K., Academic Press NY 1971
- (29) ROBERT F.,
"Matrices non négatives et normes vectorielles", polycopié ENSIMAG 1972
- (30) ROBERT Y.,
"Regular Incomplete Factorisations of real positive definite matrices", Linear Algebra & Its Applications 1982
- (31) SAAD Y.,
"Methodes numériques pour la résolution de problèmes matriciels de grandes dimensions", thèse d'état Université de Grenoble 1983
- (32) STEWART G.W.,
"Conjugate Direction methods for solving systems of linear equations", Num. Math. vol 21 pp 285-297 1973
- (33) STIEFEL E.,
voir HESTENES M.R. & STIEFEL E.
- (34) UNDERWOOD R.R.,
"An approximate factorization procedure based on the block Cholesky decomposition and its use with the Conjugate Gradient method", General Electric Soc. Nedo 11386 1977
- (35) VARGA R.S.,
"Matrix iterative analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ 1962
- (36) YOUNG D.M.,
"Iterative solution of large linear systems", Academic Press NY 1971

voir HAGEMAN L.A., LUK F.T. & YOUNG D.M.

voir aussi HAGEMAN L.A. & YOUNG D.M.

4 - RESULTATS NUMERIQUES

4.1 - Les tests

Nous avons testé les méthodes précédentes sur 2 jeux de données : un premier jeu d'essais (E1) issu d'expériences de laboratoire sur une éprouvette (petit cylindre de ciment) qui nous a permis avant tout de tester la validité de nos programmes et un deuxième jeu d'essais (E2) en vraie grandeur à partir de données recueillies sur un puits de pétrole en exploitation.

Pour chaque test, nous avons pris 2 tailles de triangulation différentes (E1T1 et E1T2). Soit 4 essais au total.

Pour tester les méthodes numériques, on compare l'encombrement mémoire et le temps de calcul. Il s'agit de trouver le meilleur compromis possible entre la rapidité d'exécution de l'algorithme et la place mémoire occupée.

Le temps d'exécution ne tient pas compte du programme d'Eléments Finis ni des procédures annexes. Seules les méthodes numériques sont testées (itérations, calcul de la matrice de préconditionnement et procédures mathématiques nécessaires à l'algorithme).

De même pour l'encombrement mémoire : on ne tient compte que du stockage des variables utiles dans l'algorithme considéré et éventuellement du stockage de la matrice de préconditionnement.

La méthode de Cholesky sert de référence pour le temps d'exécution et la place mémoire des méthodes numériques testées. Elle permet également de vérifier la validité des résultats obtenus pour chaque méthode.

Pour chaque méthode, le test d'arrêt s'effectue à 10^{-7} près. Il a été "normalisé" pour toutes les méthodes.

Le vecteur initial u^0 a été pris égal à 0 pour toutes les méthodes itératives.

Choix des triangulations

Les caractéristiques des 4 jeux d'essais donnés précédemment sont repris dans le tableau ci-dessous :

		Pavage du domaine	Dimension du système
Problème 1	E1T1	$p = 5$ $q = 10$	50 x 50
	E1T2	$p = 10$ $q = 15$	150 x 150
Problème 2	E2T1	$p = 10$ $q = 50$	500 x 500
	E2T2	$p = 20$ $q = 100$	2000 x 2000

où p est la discrétisation en r du domaine (donc la taille des blocs) et q la discrétisation en z (nombre de blocs).

Les codes des méthodes testées sont les suivants :

CHOL : pour la méthode de référence Cholesky

GS : pour Gauss-Seidel

SOR : pour GS surrelaxé. On indiquera la valeur du ω optimal

BSOR : SOR par blocs

IC : Cholesky incomplet

CG : Gradient conjugué

et pour les méthodes de CG préconditionné :

DCG : préconditionnement diagonal

SSORCG : préconditionnement par SSOR

ICCG : par Cholesky incomplet

DKRCG : par Cholesky incomplet modifié

BICCG : par IC par blocs

Pour chaque jeu d'essai, les résultats sont consignés méthodes par méthodes dans les deux tableaux suivants.

Encombrement mémoire en KOctets

	E1T1	E1T2	E2T1	E2T2
nombre d'inconnues	50	150	1000	2000
CHOL	5.688	48.088	265.288	***
GS	2.858	8.402	56.658	118.002
SOR	2.866	8.466	56.666	118.066
IC	4.506	13.308	85.908	178.108
BSOR	3.474	9.994	72.194	132.954
CG	3.258	9.658	72.458	134.092
DCG	4.112	12.112	80.112	164.112
SSORCG	4.508	13.308	84.908	173.908
ICCG	6.558	19.356	124.956	250.558
DKRCG	6.192	18.192	114.192	230.192
BICCG	4.784	13.796	88.058	179.866

*** signifie un trop grand dépassement de la capacité mémoire de la machine.

Temps d'exécution en secondes

	E1T1	E1T2	E2T1	E2T2
nombre d'inconnues	50	150	1000	2000
CHOL	14.585	2'47	11'58	***
GS	.912	3.51	3'18	***
SOR	.762	2.904	2'05	13'23
IC	11.76	2'13	8'47	***
BSOR	2.36	24.415	3'12	18'02
CG	2.58	9.75	2'12	14'44
DCG	.64	1.96	1'33	8'17
SSORCG	2.95	10.9	20.14	2'43
ICCG	4.38	30.34	1'01	6'32
DKRCG	2.6	7.21	19.24	2'35
BICCG	4.07	16.45	43.22	4'06

Nous avons limité le temps à 20 minutes

*** correspond à un dépassement de cette limite

4.2 - Interprétation des résultats

Commençons par énoncer quelques remarques :

A partir du tableau comparatif des temps d'exécution, on constate que les écarts entre les méthodes sont de plus en plus élevés lorsque la taille du système augmente. Cette tendance normale est exacerbée par le fait que la matrice A issue des tests E2Ti est moins "idéale" (mal conditionnée avec des grandes différences entre certains coefficients venant de la mauvaise répartition des conditions aux limites de Neumann ...) que celle provenant de l'essai en laboratoire sur un cas simple de cylindre sous un piston.

On ne note pas d'écarts notables sur les petits systèmes entre le CG simple et le CG préconditionné. Le cas où le préconditionnement fournit un temps de calcul plus grand peut être expliqué par le coût de mise en route des procédures d'accélération (calcul des éléments de la matrice de préconditionnement et résolution des systèmes intermédiaires). Il y a une certaine "inertie" de mise en route.

Le paramètre ω optimal de SOR a été pris égal à 1.17 pour le problème E1 et à 1.31 pour E2.

Au sujet des méthodes où intervient un découpage de A par blocs, on peut se poser le problème du rapport optimal de la taille des blocs sur la dimension du système. Pour chaque essai, notre choix a été motivé simplement par la condition liant p et q issue de la convergence de la méthode d'Eléments Finis associée.

Une recherche plus poussée serait intéressante à envisager.

Les tableaux précédents montrent la nécessité d'utiliser des méthodes modernes pour résoudre des problèmes physiques complexes. Dès que la taille des problèmes grandit, les méthodes classiques s'effondrent tant par leur lenteur que par leur trop grand encombrement.

L'encombrement mémoire des méthodes testées ne tient pas compte de la partie du programme préliminaire aux méthodes numériques (programme d'Eléments Finis et obtention du système discrétisé). Pour notre problème, il ne faut pas perdre de vue le stockage de cette partie constante.

Il n'y a pas d'amélioration dans le passage de SOR ponctuel à sa forme bloc. Devant la difficulté de détermination de ω optimal, nous avons pris $\omega = 1$. Il faudrait envisager une méthode comme celle que décrit Young dans (36) au détriment du gain de place.

Comparaison des différents préconditionnements

Les résultats précédents nous montrent la nécessité de préconditionner le système.

Le préconditionnement DCG par la diagonale est trop grossier pour être efficace. Le conditionnement n'est pas amélioré de manière assez conséquente malgré les fortes différences entre les coefficients de la matrice A introduites dans le problème réel E2 par les conditions de Neumann. Il est vrai que ces discontinuités ne concernent qu'un petit nombre de coefficients.

On remarque également que le préconditionnement par Cholesky incomplet seul est insuffisant et beaucoup trop coûteux à implanter sur un micro. D'autres stratégies de choix du profil de L sont possibles, elles donneraient certainement de meilleurs résultats.

Le préconditionnement IC par blocs est décevant. Comme pour IC ponctuel, on pourrait envisager de se rapprocher des facteurs de Cholesky $\hat{L}$ et $\hat{L}^T$ exacts. Le problème est de ne pas perdre sa structure actuelle programmable à partir d'une place mémoire très réduite.

On obtient le meilleur temps en modifiant IC ponctuel par DKR, mais la méthode n'est pas implantable avec le reste du programme car trop encombrante.

Le préconditionnement SSOR semble être le meilleur compromis entre la rapidité du calcul et la place mémoire.

Retour au problème physique

Il nous reste à interpréter les résultats précédents d'un point de vue physique.

Dans le premier jeu d'essai (l'éprouvette de ciment de petite dimension) il a été possible de tester la résistance du ciment jusqu'à la rupture. Nous n'avons pu que constater un déplacement trop important qui explique la rupture sans la prévoir. La difficulté de trouver un critère de rupture utilisable pratiquement demeure toujours. Il a été laissé à l'appréciation des utilisateurs à partir de leur expérience sur chantier.

Le second jeu d'essai (la première phase d'un forage de puits de pétrole en vraie grandeur) nous a fourni des données réelles non triviales indispensables pour tester la validité de nos méthodes numériques.

La cimentation a été testée sur un puits qui ne posait aucun problème particulier. Les résultats obtenus sont en accord avec la réalité dans le sens où l'on vérifie qu'elle s'est bien passée. Il faudrait pouvoir étendre ces tests à des puits où il y a eu des problèmes de cimentation pour déterminer expérimentalement un critère de rupture. Le logiciel pourra alors être intégré dans le vaste projet de contrôle informatique des plate-formes de forage.

Ce travail plus pratique est laissé au laboratoire "Fluides et Ciments" de la CFP.

5 - CONCLUSION

La difficulté du problème initial nous a fourni une base réaliste intéressante pour tester entre elles différentes méthodes modernes de résolution des grands systèmes linéaires creux d'un point de vue plus réaliste que le problème modèle du Laplacien sur le carré unité avec des conditions de Dirichlet au bord.

Au-delà de l'aspect proprement modélisation du problème physique, les résultats numériques précédents nous ont montré la nécessité d'employer des techniques mathématiques modernes pour résoudre le système ; plus particulièrement l'étude de l'algorithme du Gradient Conjugué avec préconditionnements.

Le bon comportement de ces algorithmes nous permet d'implanter le programme sur micro-ordinateur. Il devrait être prochainement disponible sur chantier pour guider les foreurs au cours de l'opération délicate de cimentation du puits.

Il délivrera des indications sur la cimentation suivant un critère de rupture défini en laboratoire d'après les conditions du forage.

Certes, le logiciel est encore quelque peu "idéal", mais les résultats obtenus sont en bonne concordance avec les données recueillies sur le puits en exploitation. D'autre part, la souplesse du programme permet toutes les extensions possibles suivant les besoins de l'endroit.

ANNEXE 1

Modélisation mathématique du problème des contraintes

Résumé. Nous présentons dans ce rapport un programme de résolution du problème physique des contraintes dans un annulaire de ciment. L'analyse mathématique de ce problème (c'est à dire la modélisation suivie de la discrétisation par éléments finis de révolution) conduit à un système linéaire creux de grande dimension où la matrice est une M-matrice, symétrique définie positive.

Le plan de ce chapitre est le suivant :

1. Le problème physique

- Qu'est-ce qu'un forage pétrolier ?
- L'étude

2. Modélisation mathématique

- Théorie de l'élasticité, équations générales
- Application au problème des contraintes
- Conditions aux limites

3. Résolution du problème théorique

- Formulation variationnelle
- Existence et unicité de la solution

4. Approximation du problème

- Invariance de la solution par rotation
- Approximation par des éléments finis de révolution
- Obtention du système discrétisé

1. Problème Physique

Qu'est-ce qu'un forage pétrolier?

Le forage d'un puits de pétrole est réalisé à l'aide d'un outil en rotation qui pénètre sous pression dans la roche. Il s'agit d'une pièce métallique diamantée qui broye la roche; les débris sont évacués au fur et à mesure par un fluide spécial.

Pour des raisons évidentes de sécurité, on arrête de creuser dès que l'on atteint une certaine profondeur (qui dépend essentiellement de la nature des terrains traversés). Pour consolider le trou et éviter la pénétration dans la formation des couches traversées et pour que le pétrole ne s'échappe pas au cours de son extraction, on retire l'outil et on introduit un "casing" (série de tubes en acier vissés les uns aux autres) que l'on fixe dans le trou par du ciment.

Une fois la formation consolidée, on réitère l'opération avec un outil plus petit afin d'obtenir un trou de diamètre plus faible puis on y introduit un nouveau casing que l'on fixe au précédent par du ciment et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on atteigne la nappe de pétrole.

L'étude :

Compte tenu des grandes profondeurs auxquelles on fore (on peut aller jusqu'à 5000 mètres et plus), les ciments de forage sont soumis à de fortes contraintes (en pression et en température), il est primordial de connaître à priori ces contraintes pour éviter l'éboulement d'une part et pour pouvoir choisir la profondeur des trous de manière optimale d'autre part. C'est pourquoi le laboratoire "Fluides et Ciments" de la C.F.P. nous a confié l'étude des contraintes dans un annulaire de ciment.

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un vaste projet de simulation mathématique d'un puits de pétrole avec l'"évolution des températures dans un puits" de J. DUMONT qui donne à tout instant le profil thermique du puits et le "projet-cimentation" qui simule l'opération de cimentation en cours d'injection que j'ai dirigé avec F. ROBERT dans le cadre d'un projet d'ingénieur de 3^{ème} année de l'ENSIMAG.

Nous espérons ainsi dans l'avenir modéliser tous les phénomènes physiques intervenant au cours d'un forage pétrolier.

2. Modélisation Mathématique

Théorie de l'élasticité, équations générales

Un milieu est dit élastique s'il existe un état privilégié (appelé état naturel), dans lequel le tenseur des contraintes est nul et si le tenseur des contraintes dans un état quelconque est fonction biunivoque du tenseur des déformations.

Si de plus on suppose que chaque point de matière ne peut subir que des petites déformations à partir de l'état naturel, l'élasticité est dite linéaire.

σ_{ij} désigne le tenseur des contraintes, ϵ_{ij} celui des déformations, u désigne le vecteur des déplacements. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ le point courant de $\mathbb{R}^3$

La loi de comportement d'un solide linéaire élastique se traduit par le système suivant :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u)$$

Dans le cas isotrope, on connaît explicitement les coefficients d'élasticité du milieu a_{ijkl} en fonction des coefficients de Lamé λ et μ ($\lambda > 0$ et $\mu > 0$) :

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\text{Ainsi, } \sigma_{ij}(u) = \lambda \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(u) \quad (2.1)$$

De plus, une variation de température T exerce une contrainte :

$$\sigma_{ij} = -3\alpha(3\lambda + 2\mu)T\delta_{ij}$$

où α représente le coefficient de dilatation linéique et 3α le coefficient de dilatation volumique du milieu.

Pour tenir compte de l'influence de la température, on applique le théorème de superposition des états linéaires;

ainsi (2.1) devient :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) - 3\alpha(3\lambda + 2\mu)T \delta_{ij} \quad (2.2)$$

Les déformations sont liées aux déplacements par les relations :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

On remplace alors dans les équations (2.2), on obtient :

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 3\alpha(3\lambda + 2\mu)T \delta_{ij} \quad (2.3)$$

Reste à expliciter l'équation d'équilibre, on note g_i les composantes de la densité volumique des efforts extérieurs, l'équation d'équilibre en statique s'écrit d'une manière générale :

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

Application au problème des contraintes, équations de NAVIER

Propriété : Un annulaire de ciment soumis à des contraintes de charge et de température a un comportement linéaire élastique (et isotrope).

On peut donc appliquer le modèle précédent au problème des contraintes; la densité des efforts extérieurs se limite au poids (qui n'a qu'une composante sur Ox_3), l'équation d'équilibre s'écrit :

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = g_i \quad \text{avec } g_1 = g_2 = 0 \quad \text{et } g_3 = g$$

Il nous reste à calculer les $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ à partir des relations (2.3), et à remplacer dans le système des équations d'équilibre. On trouve :

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)) = -(\lambda + \mu)(\text{grad. div } u)_i - \mu(\Delta u_i) + 3\alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$\text{On pose } f_i = -3\alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial x_i} + g_i$$

On obtient alors le système classique des équations de NAVIER de l'élasticité linéaire :

$$-(\lambda + \mu) \text{grad.div}(u) - \mu \Delta(u) = f$$

La modélisation mathématique sera terminée lorsque les conditions aux limites auront été explicitées. En général, on ne pourra résoudre les équations de Navier que dans des cas simples de conditions aux limites particulières (u fixé sur une partie de la frontière etc...); il est donc nécessaire de les décrire le mieux possible.

Conditions aux limites

Tout d'abord il nous faut préciser le domaine.

Ω est un annulaire de ciment de hauteur H , d'axe Ox_3 , compris entre les cylindres de rayons a et b de frontière Γ qui comprend :

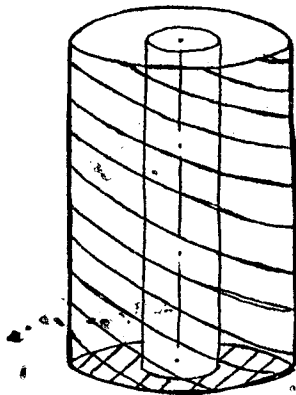
$\Gamma_{z=0}$ qui est l'anneau supérieur de largeur $b-a$, à la cote $z=0$,

$\Gamma_{z=H}$ l'anneau inférieur à la profondeur H ,

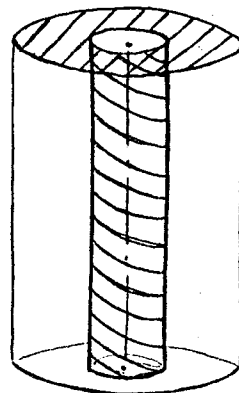
$\Gamma_{r=a}$ l'enveloppe du cylindre intérieur de rayon a et enfin

$\Gamma_{r=b}$ celle du cylindre extérieur de rayon b .

On notera plus simplement Γ_0 , la partie fixe de la frontière (i.e. $\Gamma_{r=b}$ et $\Gamma_{z=H}$) et Γ_1 le reste ($\Gamma_{r=a}$ et $\Gamma_{z=0}$).



Γ_0



Γ_1

Les conditions aux limites sont de deux types :

- i) de type Dirichlet sur la partie fixe de la frontière : Γ_0 .
- ii) de type Neumann sur le reste de la frontière : Γ_1 .

i) On impose un déplacement nul sur la partie de la frontière en contact avec la roche c'est à dire sur Γ_0 .

(pour l'instant, on suppose que la couche géologique traversée est de la même nature sur toute sa hauteur; il sera facile le cas échéant si la roche devient plus "tendre" de l'inclure dans les conditions de Neumann).

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_0$$

ii) Sur le reste de la frontière (Γ_1), on connaît la valeur des forces surfaciques exercées. La condition à vérifier est sur le champ des contraintes :

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) v_j = F_i$$

où v_j désigne la normale à la surface dirigée vers l'extérieur

$F = 0$ sur la partie libre de la frontière ($\Gamma_{z=0}$)

= Pression du fluide de forage sur $\Gamma_{r=a}$.

On peut écrire complètement le problème (P) qui modélise le comportement des contraintes dans un annulaire de ciment :

$$\left\{ \begin{array}{ll} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)) = f_i & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) v_j = F_i & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

pour $i = 1, 2, 3$

3. Résolution du Problème Théorique

Le contexte fonctionnel du problème et les notations utilisées sont classiques, on pourra se reporter à (1),(3),(5) ou (8) pour plus de précisions.

Il faut écrire la formule de Green adaptée au problème :

$u, v \in (H^1(\Omega))^3$ alors :

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \gamma_0(u_i) \gamma_0(v_i) v_j d\gamma$$

si de plus $v = 0$ sur Γ_0

$$= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^3 \gamma_0(u_i) \gamma_0(v_i) v_j d\gamma$$

pour $u \in (H^2(\Omega))^3$, $\sigma_{ij}(u) \in (H^1(\Omega))^3$ donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\ = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_0(\sigma_{ij}(u)) \gamma_0(v_i) v_j d\gamma \end{aligned}$$

on obtient la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i,j=1}^3 \gamma_0 \sigma_{ij}(u) \gamma_0 v_i v_j d\gamma$$

Formulation variationnelle du problème (P)

Le problème (P) à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{1j}(u)) = f_1 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{1j}(u) v_j = F_1 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ suffisamment régulière et Γ_0 de mesure strictement positive.

$u \in (H^2(\Omega))^3$ et $f_1, F_1 \in L^2(\Omega)$.

Le passage du problème (P) à sa formulation variationnelle est classique voir (3), elle utilise la formule de Green donnée précédemment.

On note $V = \{v \in (H^1(\Omega))^3 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ (Au sens du th. des traces) V est un sous espace fermé de $(H^1(\Omega))^3$ (l'application "trace" γ est continue) qui contient $(H^1_0(\Omega))^3$ (l'espace des fonctions nulles au bord). Ce sera notre espace de travail.

$$\text{On pose } a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx$$

$$\text{et } l(v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^3 \gamma_0(F_i) \gamma_0(v_i) \, d\gamma$$

Résoudre le problème (P) revient à résoudre le nouveau problème :

(P') Trouver u dans V tel que $a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$

A partir de maintenant, nous allons travailler sur (P')

Existence et unicité de la solution de (P') :

l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel, découlent directement de l'application du théorème de Lax-Milgram.

Avant de vérifier les hypothèses de ce théorème, il nous faut établir un résultat important d'équivalence de normes.

THEOREME 3.1 :

$$\text{Sur } V \text{ la norme } \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(\cdot))^2 dx \right)^{1/2} \text{ est équivalente à } \|\cdot\|_V$$

$$\text{où } \|v\|_V^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)$$

preuve : Il nous faut trouver deux constantes c_1 et $c_2 > 0$, indépendantes de v telles que:

$$c_1 \|v\|_V^2 < \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx < c_2 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

i) la seconde inégalité est immédiate:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(v))^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \\ &< \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc, } \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx < \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) = \|v\|_V^2$$

l'inégalité est démontrée avec $c_2 = 1$.

ii) la démonstration de la première inégalité repose sur :

l'inégalité de Korn :

Soit Ω un ouvert de frontière régulière, il existe une constante $c > 0$

$$\text{telle que : } \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (v_i)^2 dx > c \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

ou ce qui est équivalent :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx > c \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \quad \forall v \in V$$

et sur l'inégalité de Friedrich :

Soit Γ de mesure strictement positive, il existe une constante $c' > 0$

$$\text{telle que : } \|v\|_{1,\Omega}^2 < c' \left(\int_{\Gamma} v^2 d\gamma + \int_{\Omega} (\partial v)^2 dx \right)$$

Comme Γ_0 est de mesure strictement positive et $v \in V$, on peut appliquer cette inégalité à v_1 dans $H^1(\Omega)$, ($v_1 = 0$ sur Γ_0)

$$\text{donc, } \exists c' > 0 \text{ telle que } \|v_1\|_{1,\Omega}^2 < c' \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

$$\text{car } \int_{\Gamma_0} \gamma_0(v_1)^2 d\gamma = 0 \quad \text{si } v_1 \in H_0^1(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \text{donc, } \|v\|_V^2 &= \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 < c' \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \\ &< c'' \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Korn

ce qui démontre la première inégalité.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

Continuité de $a(.,.)$

Il faut trouver $M > 0$ tel que : $\forall u, v \in V \quad a(u, v) < M \|u\|_V \|v\|_V$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(u) \varepsilon_{ii}(v) dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx \end{aligned}$$

$$a(u,v) = K \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ii}(u) \epsilon_{ii}(v) dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) dx \right)$$

en posant $K = \sup(\lambda, \mu) \quad (K > 0)$

Comme u et $v \in V \subset (H^1(\Omega))^3$, $\epsilon_{ij}(u)$ et $\epsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$ on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} a(u,v) &= K \left(\left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (\epsilon_{ii}(u))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(v))^2 dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(u))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(v))^2 dx \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (\epsilon_{ii}(\cdot))^2 dx < 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(\cdot))^2 dx$$

$$\text{Donc, } a(u,v) < K' \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(u))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(v))^2 dx \right)^{1/2}$$

De plus on sait que la norme $\left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(\cdot))^2 dx \right)^{1/2}$ est équivalente à $\|\cdot\|_V$ (théorème 3.1)

donc il existe $M = K' > 0$ tel que $a(u,v) < M \|u\|_V \|v\|_V$
ce qui prouve que $a(\cdot, \cdot)$ est continue

Continuité de $l(\cdot)$

Elle dérive de la même manière de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Coercivité de $a(\cdot, \cdot)$

Il faut trouver une constante $\alpha > 0$, indépendante de v telle que :
 $\forall v \in V \quad a(v,v) > \alpha \|v\|_V^2$

$$\begin{aligned} 1) \quad a(v,v) &= \lambda \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 (\epsilon_{ii}(v))^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(v))^2 dx \\ &> 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(v))^2 dx \end{aligned}$$

ii) Puis on applique le théorème 3.1

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 (\varepsilon_{ij}(v))^2 dx > \|v\|_V^2$$

Donc il existe $\alpha > 0$ ($\alpha = 2\mu$) tel que $a(v,v) > \alpha \|v\|_V^2$

La forme bilinéaire a est coercive

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, le problème variationnel (P') a une solution unique. C'est la solution du problème (P) de départ.

Il nous faut maintenant la calculer.

4. Approximation du Problème

Invariance de la solution par rotation

Il est nécessaire d'introduire ce paragraphe par quelques définitions et propriétés (8), (13).

On note r_{θ} l'opérateur de rotation d'angle θ autour de l'axe Ox_3

Définition : $\phi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ est dite invariante par rotation

$$\text{si } \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \phi \circ r_{-\theta} = \phi_{\theta} = \phi$$

Pour alléger l'écriture, on pose $\mathcal{Y}_{\theta}\phi = \phi \circ r_{-\theta}$. On vérifie facilement que $\mathcal{Y}_{\theta}$ est une isométrie de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ dans lui-même pour la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ dans $H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \text{En effet } \|\mathcal{Y}_{\theta}\phi\|_{1,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} (\phi \circ r_{-\theta}(x))^2 dx + \int_{\Omega} (\partial(\phi \circ r_{-\theta}(x)))^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (\phi(y))^2 dy + \int_{\Omega} (\partial\phi(y))^2 dy \quad (\text{en posant } y = r_{-\theta}(x)) \\ &= \|\phi\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{C}^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, la définition s'étend naturellement à $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} u \in H^1(\Omega) \text{ est invariante par rotation} \\ \text{si } \forall \theta \in \mathbb{R} \quad u \circ r_{-\theta} = u_{\theta} = u \end{aligned}$$

On dit enfin que $u \in (H^1(\Omega))^3$ est invariante par rotation si chacune de ses composantes l'est.

On peut maintenant donner le résultat suivant :

Théorème 4.1

La solution du problème variationnel (P') est invariante par rotation

Avant de prouver le théorème, il nous faut établir quelques propriétés élémentaires :

$$(4.2) \quad i) \quad \int_{\Omega} u_{-\theta} v dx = \int_{\Omega} u v_{-\theta} dx$$

$$ii) \quad \int_{\Gamma_1} \gamma_0(u_{-\theta}) \gamma_0(v) d\gamma = \int_{\Gamma_1} \gamma_0(u) \gamma_0(v_{-\theta}) d\gamma$$

$$iii) \quad \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(u_{-\theta}) \varepsilon_{ii}(v) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(u) \varepsilon_{ii}(v_{-\theta}) dx$$

$$iv) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(u_{-\theta}) \varepsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v_{-\theta}) dx$$

La démonstration de ces propriétés est simple, elle repose sur le changement de variables de x en $r_{-\theta}(x)$ pour i) et ii) et sur la formule classique de dérivation composée pour iii) et iv).

Nous pouvons maintenant établir la preuve du théorème 4.1 :

La solution u du problème (P') vérifie : $\forall v \in V \quad a(u, v) = l(v)$

Pour $v \in V$, $v_{-\theta} \in V$. On calcule $a(u, \cdot) - l(\cdot)$ au point $v_{-\theta}$:

$$\begin{aligned} a(u, v_{-\theta}) - l(v_{-\theta}) &= \lambda \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(u) \varepsilon_{ii}(v_{-\theta}) dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v_{-\theta}) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f v_{-\theta} dx - \int_{\Gamma_1} \gamma_0(F) \gamma_0(v_{-\theta}) d\gamma \\ &= \lambda \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(u_{-\theta}) \varepsilon_{ii}(v) dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(u_{-\theta}) \varepsilon_{ij}(v) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_1} \gamma_0(F_{-\theta}) \gamma_0(v) d\gamma \end{aligned}$$

D'après les propriétés (4.2.)

De plus, $\int_{\Omega} f_{\theta} v dx = \int_{\Omega} f v dx$ et $\int_{\Gamma_1} \gamma_0(F_{\theta}) \gamma_0(v) d\gamma = \int_{\Gamma_1} \gamma_0(F) \gamma_0(v) d\gamma$
 Donc $a(u, v_{-\theta}) - l(v_{-\theta}) = a(u_{\theta}, v) - l(v) \quad \forall v \in V$

comme u est solution de (P') , on en déduit : $a(u_{\theta}, v) = l(v) \quad \forall v \in V$
 i.e. u_{θ} est solution de (P') . Par unicité, $u_{\theta} = u \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

Donc la solution de (P') est invariante par rotation.

Approximation du problème par des éléments finis de révolution

Sous sa forme actuelle, le problème continu (P') est impossible à résoudre. Nous allons devoir l'approximer par un problème discret.

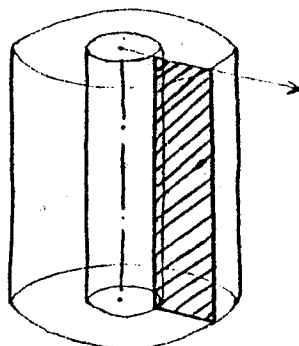
On remplace le problème (P') par le nouveau problème :

$$(P')_h \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Où V_h est un sous espace fermé de dimension finie de V .

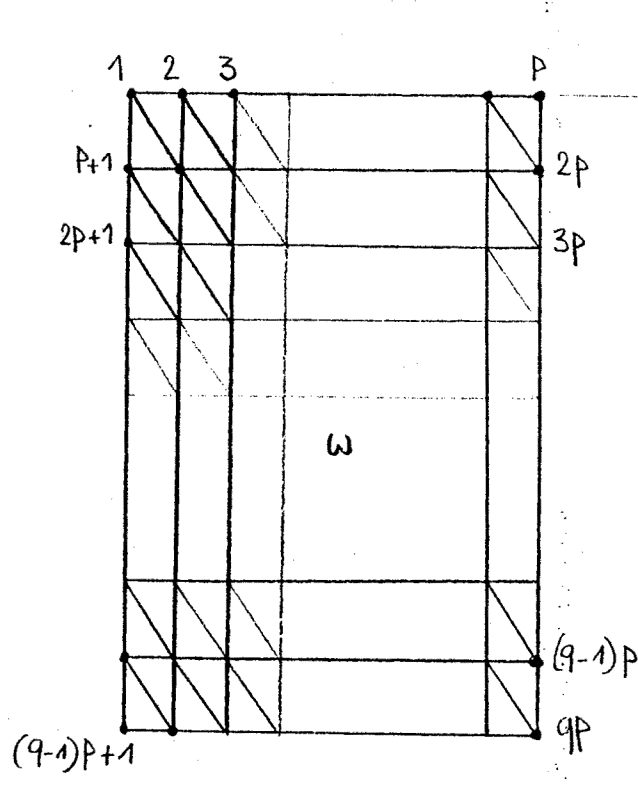
Il est évident que $(P')_h$ possède une solution unique. En effet, $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $V_h \times V_h$ et $l(.)$ une forme linéaire continue sur V_h . Donc le théorème de Lax-Milgram s'applique.

Le problème est de choisir V_h de manière satisfaisante. On cherche naturellement (vu la symétrie de révolution du problème) à se ramener en dimension 2. L'idée première consiste à traiter le problème comme une coque mince (la largeur de l'annulaire étant petite devant la profondeur). Mais pour obtenir une meilleure précision au fond, on peut-être amené à ne considérer que le dernier tube du casing ou à découper le puits en sections de profondeurs relativement petites dans le cas d'un puits géothermique par exemple où les contraintes seront très fortes localement, il est donc préférable d'abandonner l'idée des coques minces et de se ramener à un domaine élémentaire de $\mathbb{R}^2$ (que l'on note ω) à partir duquel il sera facile de reconstituer Ω dans $\mathbb{R}^3$ par rotation. ω est le rectangle suivant :



On définit alors une triangulation T_h de ω de manière classique cf. (15) comme une subdivision de $\bar{\omega}$ telle que :

- i) $\bar{\omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$
- ii) K est un triangle (appelé "Elément Fini")
- iii) si K_1 et $K_2 \in T_h$ alors $K_1 \cap K_2$ est — Soit $\emptyset$
— Soit réduite à un seul coté
- iv) chaque face de $K \in T_h$ est — Soit une partie de Γ
— Soit une face d'un autre triangle



On note N_1 les noeuds du maillage (i.e. les intersections des sommets des triangles). La grille est parcourue comme l'indique la figure ci-dessus, de gauche à droite et de haut en bas.

A la triangulation T_h de $\omega \subset \mathbb{R}^2$, on associe l'espace :

$$\mathcal{V}_h = \{ u_f \in C^0(\omega) / u_f \text{ est un polynôme de degré 1 en } r \text{ et } z \text{ sur chaque triangle } K \text{ de } T_h \}$$

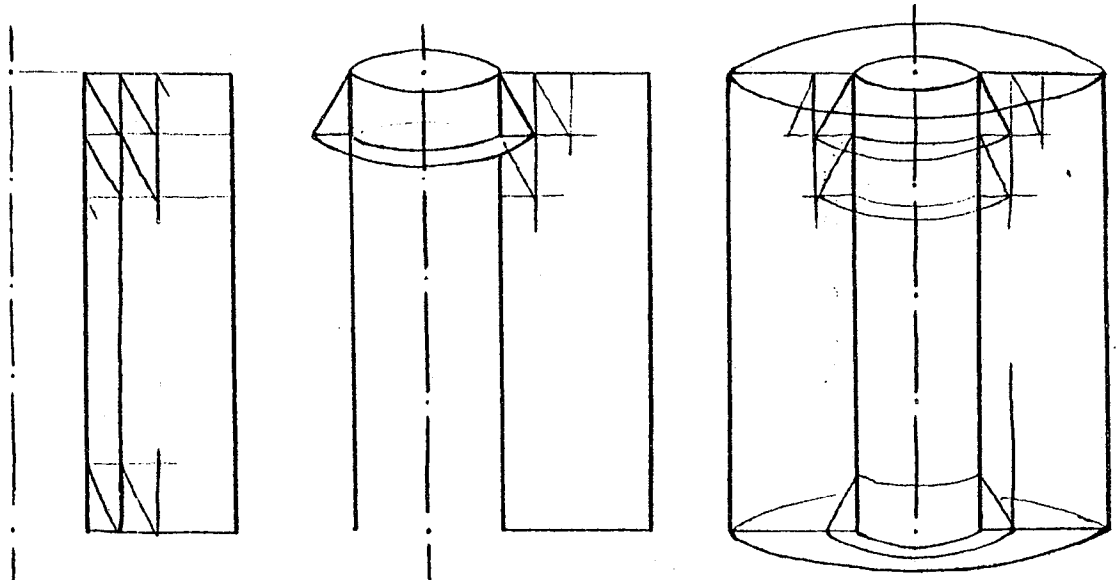
Soit $\{w_i\}$ pour i tel que $N_i \in \bar{\omega} \setminus \Gamma_0$ une base de $\mathcal{V}_h$

On repasse au domaine initial Ω de $\mathbb{R}^3$ par l'application suivante :

$$\mathcal{J}: \mathcal{C}(\bar{\omega}) \longrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega})$$

$$u(x_1, x_2, x_3) \rightarrow u(r, z) = u(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, z)$$

Ω est l'ensemble des tores de sections triangulaires engendrés par les Eléments Finis K de T_h .



- passage de ω à Ω -

On note w_1^k le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont la $k^{\text{ième}}$ composante est égale à w_1 .

V_h sera l'espace engendré par les $\mathcal{U}(w_1^k) = s_1^k$.

Evidemment, $\dim(V_h) = 3\dim(\mathcal{U}_h) = 3n(h)$

Obtention du système discrétisé

Nous avons montré précédemment que le problème (P') pouvait s'approximer par $(P')_h$:

Trouver u_h dans V_h tel que $a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v \in V_h$

La solution u_h de $(P')_h$ s'obtient par résolution d'un système linéaire que nous allons expliciter.

On prend successivement pour v_h les s_1^1 :

$$a(u_h, s_1^1) = l(s_1^1) \quad \text{pour } l=1,2,3$$

Puis on décompose u_h sur la base de V_h

$$u_h = \sum_{j=1}^{n(h)} \sum_{k=1}^3 \xi_j^k s_j^k$$

On obtient alors le système linéaire suivant de dimension $3n(h) \times 3n(h)$ aux $3n(h)$ inconnues ξ_j^k (valeur de la composante k du déplacement au noeud j)

$$\sum_{j=1}^{n(h)} \sum_{k=1}^3 a(s_j^k, s_i^1) \xi_j^k = l(s_i^1)$$

pour $l=1,2,3$ et $i=1,2,\dots,n(h)$

On note A la matrice du système et b le second membre; il nous faut les calculer explicitement :

la matrice A est constituée de blocs 3×3 qui se calculent à partir des expressions $a(s_j^k, s_i^1)$. La matrice A est symétrique par construction.

Le passage de Ω à ω pose quelques problèmes théoriques; en effet, la formulation variationnelle sur ω fait intervenir un "poids" (fonction de r et z) qui peut remettre en cause l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel en dimension 2. Une analyse identique à celle développée en 3D est possible en faisant intervenir des poids. On pourra se reporter à (8) pour plus de précisions.

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx \\ &= (\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} dx + \mu \int_{\Omega} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) dx \end{aligned}$$

Pour $k = 1$:

$$a(s_j^k, s_i^1) = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial s_j^1}{\partial x_1} \frac{\partial s_i^1}{\partial x_k} dx$$

On repasse alors dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant les relations du type :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathcal{J}_{w_1}) = \frac{\partial w_1}{\partial r} \cos \theta \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{J}_{w_1}) = -\frac{\partial w_1}{\partial r} \sin \theta \\ \frac{\partial s_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3} (\mathcal{J}_{w_1}) = \frac{\partial w_1}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(s_j^1, s_1^2) &= \mu \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_2} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx \\
&= \mu \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(s_j^1, s_1^3) &= \mu \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial z} r dr dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(s_j^2, s_1^3) &= \mu \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial z} r dr dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, $a(s_j^k, s_1^1) = 0$ pour $k=1$ chaque bloc de la matrice est diagonal (il n'y a pas de couplage suivant les différentes directions). Nous allons pouvoir traiter indépendamment trois systèmes correspondants à r, θ et z .

Pour $k = 1 = 1$ ou 2 :

$$\begin{aligned}
a(s_j^k, s_1^k) &= (\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_k} \frac{\partial s_1}{\partial x_k} dx + \mu \int_{\Omega} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^3 \frac{\partial s_j}{\partial x_m} \frac{\partial s_1}{\partial x_m} dx \\
&= (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_k} \frac{\partial s_1}{\partial x_k} dx + \mu \int_{\Omega} \vec{\nabla} s_j \cdot \vec{\nabla} s_1 dx
\end{aligned}$$

On se ramène à $\mathbb{R}^2$ comme précédemment :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \vec{\nabla} s_j \cdot \vec{\nabla} s_1 dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_1} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_2} \frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_3} \frac{\partial s_1}{\partial x_3} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} r dr dz
\end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + 2\pi \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} r dr dz$$

$$= 2\pi \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_1 r dr dz$$

(produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ en r et z).

$$a(s_j^1, s_1^1) = (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_1} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx + \mu \int_{\Omega} \vec{\nabla} s_j \cdot \vec{\nabla} s_1 dx$$

$$= (\lambda + \mu) \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + 2\pi \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_1 r dr dz$$

$$= \pi(\lambda + \mu) \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_1 r dr dz$$

$$a(s_j^2, s_1^2) = (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_2} \frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx + \mu \int_{\Omega} \vec{\nabla} s_j \cdot \vec{\nabla} s_1 dx$$

$$= (\lambda + \mu) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_1 r dr dz$$

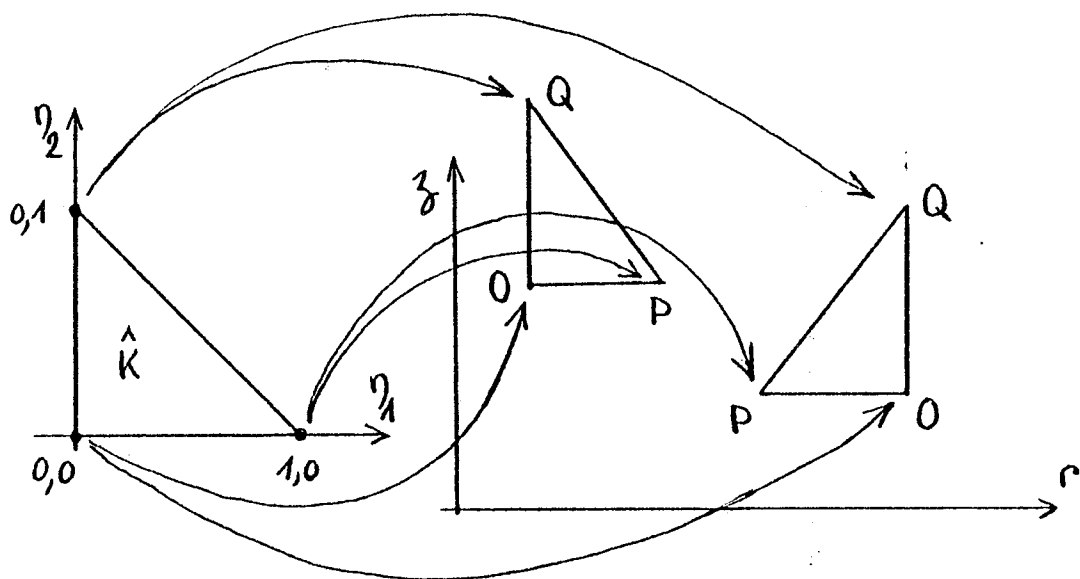
$$= \pi(\lambda + \mu) \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_1 r dr dz$$

Donc, pour $k = 1$ ou 2 :

$$a(s_j^k, s_1^k) = \pi(\lambda + \mu) \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_1 r dr dz$$

$$a(s_j^k, s_1^k) = \sum_{K \in T_h} (\pi(\lambda + \mu) \int_K \frac{\partial w_j}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_K \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_1 r dr dz)$$

Il ne reste plus qu'à calculer les intégrales sur chaque triangle K de T_h . Pour cela, on se ramène à un triangle de référence $\hat{K}$ sur lequel les calculs seront simples :



- passage du triangle de base $\hat{K}$ à un triangle
quelconque K de T_h par l'application F -

Il faut préciser l'application F qui permet de déduire un triangle K de T_h à partir du triangle élémentaire $\hat{K}$.

On associe $(0,0)$ au noeud $O(r_o, z_o)$, $(1,0)$ à $P(r_p, z_p)$ et $(0,1)$ à $Q(r_q, z_q)$;
on en déduit facilement la matrice associée à cette tranformation affine :

$$F : \hat{K} \longrightarrow K$$

$$(\eta_1, \eta_2) \rightarrow B \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_o \\ z_o \end{pmatrix}$$

$$\text{où } B = \begin{pmatrix} r_p - r_o & r_q - r_o \\ z_p - z_o & z_q - z_o \end{pmatrix} \text{ est la matrice Jacobienne de } F$$

de plus, $\det(B) = 2\text{Aire}(K)$

On note $\hat{w}_1$ la fonction définie sur K associée à w_1

$$\text{i.e. } \hat{w}_1(\eta_1, \eta_2) = w_1(F(\eta_1, \eta_2))$$

en particulier : $\hat{w}_{1,0}(\eta_1, \eta_2) = 1 - \eta_1 - \eta_2$ ($\hat{w}_{1,0} = \hat{w}_1$ calculé en 0)

$$\hat{w}_{1,P}(\eta_1, \eta_2) = \eta_1$$

$$\hat{w}_{1,Q}(\eta_1, \eta_2) = \eta_2$$

On peut alors calculer le terme général de la matrice de rigidité associée à l'élément fini K au noeud N :

$$\begin{aligned}
R_{1j,N} &= \pi(\lambda+\mu) \int_K \frac{\partial w_{j,N}}{\partial r} \frac{\partial w_{1,N}}{\partial r} r dr dz + 2\pi\mu \int_K \vec{\nabla} w_{j,N} \cdot \vec{\nabla} w_{1,N} r dr dz \\
&= \pi(\lambda+\mu)1) + 2\pi\mu 2)
\end{aligned}$$

On calcule séparément les 2 intégrales 1) et 2) :

$$1) = \int_K \frac{\partial w_{j,N}(F(\eta_1, \eta_2))}{\partial r} \frac{\partial w_{1,N}(F(\eta_1, \eta_2))}{\partial r} (r_o(1-\eta_1) + r_p \eta_1 + r_q \eta_2) \det(B) d\eta_1 d\eta_2$$

(par changement de variables (r, z) en (η_1, η_2))

$$\begin{aligned}
\text{or, } \frac{\partial w_{j,N}(F(\eta_1, \eta_2))}{\partial r} &= \frac{\partial \hat{w}_{j,N}(\eta_1, \eta_2)}{\partial r} \\
&= \frac{\partial \hat{w}_{j,N}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial r} + \frac{\partial \hat{w}_{j,N}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial r}
\end{aligned}$$

$$= (B^t)_1^{-1} \vec{\nabla} \hat{w}_{j,N}(\eta_1, \eta_2)$$

où $(M)_1$ désigne la première ligne de la matrice M

$$\begin{aligned}
1) &= \int_K (B^t)_1^{-1} \vec{\nabla} \hat{w}_{j,N} (B^t)_1^{-1} \vec{\nabla} \hat{w}_{1,N} (r_o(1-\eta_1) + r_p \eta_1 + r_q \eta_2) \det(B) d\eta_1 d\eta_2 \\
&= (B^t)_1^{-1} \vec{\nabla} w_{j,N} (B^t)_1^{-1} \vec{\nabla} w_{1,N} 2\text{Aire}(K) \int_K (r_o(1-\eta_1) + r_p \eta_1 + r_q \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \\
&= (B^t)_1^{-1} \vec{\nabla} \hat{w}_{j,N} (B^t)_1^{-1} \vec{\nabla} \hat{w}_{1,N} 2\text{Aire}(K) \frac{r_o + r_p + r_q}{6}
\end{aligned}$$

De la même manière :

$$2) = \int_K \vec{\nabla} w_{j,N}(F(\eta_1, \eta_2)) \cdot \vec{\nabla} w_{1,N}(F(\eta_1, \eta_2)) (r_o(1-\eta_1) + r_p \eta_1 + r_q \eta_2) \det(B) d\eta_1 d\eta_2$$

$$\begin{aligned}
\text{or, } \vec{\nabla} w_{j,N}(F(\eta_1, \eta_2)) &= \vec{\nabla} \hat{w}_{j,N}(\eta_1, \eta_2) \\
&= (B^t)^{-1} (\vec{\nabla} \hat{w}_{j,N})(\eta_1, \eta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) &= (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{j,N}) \cdot (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{i,N}) \det(B) \int_K (r_o(1-\eta_1-\eta_2) + r_p\eta_1 + r_q\eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \\
&= (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{j,N}) \cdot (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{i,N}) 2\text{Aire}(K) \frac{r_o + r_p + r_q}{6}
\end{aligned}$$

On assemble ensuite, sur chaque triangle K, les éléments de la matrice de rigidité que nous venons de calculer aux sommets de K et on en déduit l'expression finale de $a(s_j^k, s_i^k)$ pour $k=1$ ou 2 .

La démarche est identique pour obtenir $a(s_j^3, s_i^3)$, brièvement :

$$\begin{aligned}
a(s_j^3, s_i^3) &= (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \frac{\partial s_j}{\partial x_3} \frac{\partial s_i}{\partial x_3} dx + \mu \int_{\Omega} \vec{\nabla} s_j \cdot \vec{\nabla} s_i dx \\
&= (\lambda + \mu) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial z} \frac{\partial w_i}{\partial z} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_i r dr dz \\
&= 2\pi(\lambda + \mu) \int_{\omega} \frac{\partial w_j}{\partial z} \frac{\partial w_i}{\partial z} r dr dz + 2\pi\mu \int_{\omega} \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_i r dr dz \\
&= \sum_{K \in T_h} 2\pi(\lambda + \mu) \int_K \frac{\partial w_j}{\partial z} \frac{\partial w_i}{\partial z} r dr dz + 2\pi\mu \int_K \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_i r dr dz
\end{aligned}$$

Le terme général de la matrice de rigidité associée à K au noeud N est :

$$2\pi(\lambda + \mu) \int_K \frac{\partial w_j}{\partial z} \frac{\partial w_i}{\partial z} r dr dz + 2\pi\mu \int_K \vec{\nabla} w_j \cdot \vec{\nabla} w_i r dr dz = 2\pi(\lambda + \mu)1) + 2\pi\mu 2)$$

Pour plus de détails, on se reportera au calcul précédent de $k=1$ ou 2 .

On trouve :

$$\begin{aligned}
1) &= (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{j,N}) \cdot (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{i,N}) 2\text{Aire}(K) \frac{r_o + r_p + r_q}{6} \\
2) &= (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{j,N}) \cdot (B^t)^{-1}(\vec{\hat{w}}_{i,N}) 2\text{Aire}(K) \frac{r_o + r_p + r_q}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice A est entièrement déterminée. On calcule maintenant le second membre b du système :

Il est constitué de n(h) blocs de 3 éléments (les $l(s_i^1)$).

$$l(v) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 f_k v_k dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{k=1}^3 \gamma_0(F_k) \gamma_0(v_k) d\gamma$$

en particulier :

$$l(s_i^1) = \int_{\Omega} f_1(x) s_i(x) dx + \int_{\Gamma_1} \gamma_0(F_1(x)) \gamma_0(s_i(x)) d\gamma$$

$$\text{avec, } f_1(x) = 3\alpha(3\lambda+2\mu) \frac{\partial T(x)}{\partial x_1}$$

On se ramène à ω sur $\mathbb{R}^2$ par changement de variables :

$$\int_{\Omega} f_1(x) s_i(x) dx = \int_{\Omega} f_1(r \cos \theta, r \sin \theta, z) w_i(r, z) r dr d\theta dz$$

Comme f est invariante par rotation (les influences thermiques orthoradiales se compensent sur le domaine de révolution), on pose :
 $f_1(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = f^1(r, z)$.

De plus, la distribution de température $T(r, z)$ est connue, elle a été calculée dans (12) comme solution de l'équation de la chaleur à une profondeur constante; en première approximation on peut ajouter à la solution un gradient géothermique G pour tenir compte de la profondeur.

Il sera aisé par la suite de traiter le cas général d'une distribution quelconque le long de l'axe de l'annulaire grâce au programme de calcul des températures dans un puits de pétrole (4).

$$\text{i.e. } T(r, z) = (t_b - t_a) \frac{\text{Log}(b/r)}{\text{Log}(b/a)} + Gz$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} &= \frac{(t_b - t_a)}{\text{Log}(b/a)} \left(-\frac{b}{r^2} \right) \left(-\frac{r}{b} \right) \\ &= - \frac{(t_b - t_a)}{\text{Log}(b/a)r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f^1(r,z) w_1(r,z) r dr d\theta dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\omega} f^1(r,z) w_1(r,z) r dr dz \\
&= -2\pi \int_{\omega} 3\alpha(3\lambda+2\mu) \frac{(t_b - t_a)}{\text{Log}(b/a)} w_1 dr dz \\
&= -2\pi 3\alpha(3\lambda+2\mu) \frac{(t_b - t_a)}{\text{Log}(b/a)} \int_{\omega} w_1 dr dz
\end{aligned}$$

On calcule de même $\int_{\Gamma_1} \gamma_0(F_1) \gamma_0(s_1) d\gamma$

$F(x)$ est la pression qui est exercée sur le casing ($r=a$) par le fluide de forage.

La seule composante qui agit est radiale. On note P le gradient de pression du fluide et P_0 la pression à l'injection. $Pz + P_0$ est l'expression de la composante radiale à la profondeur z , les autres étant nulles.

$$\int_{\Gamma_1} \gamma_0(F_1) \gamma_0(s_1) d\gamma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\gamma_1} F^1(r,z) w_1 r ds$$

où γ_1 est la partie de Γ_1 en $r=a$ et ds la mesure superficielle sur γ_1

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^H F^1(a,z) w_1 a dz \\
&= 2\pi P_0 a \int_0^H w_1 dz + 2\pi P a \int_0^H w_1 z dz
\end{aligned}$$

Pour calculer $l(s_1^2)$ on passe de la même manière que pour $l(s_1^1)$ en coordonnées cylindriques;

$$l(s_1^2) = \int_{\Omega} f_2(x) s_1(x) dx + \int_{\Gamma_1} \gamma_0(F_2(x)) \gamma_0(s_1(x)) d\gamma$$

les composantes orthoradiales des deux forces en présence sont nulles.

donc, $l(s_1^2) = 0 \quad \forall i$

C'est à dire que le déplacement orthoradial du ciment est nul.

On retrouve par le calcul une constatation physique intuitive : le domaine étant de révolution il est naturel de penser que les déplacements orthoradiaux se compensent.

Nous sommes ainsi ramenés à un système de taille $2n(h) \times 2n(h)$ aux $2n(h)$ inconnues ξ_1^1 (déplacement radial) et ξ_1^3 (axial).

Il reste à déterminer les $l(s_1^3)$

$$f^3(r, z) = 3\alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial z}(r, z) + \rho g \text{ avec les mêmes notations que précédemment}$$

$$\text{Or, } \frac{\partial T}{\partial z}(r, z) = G$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_{\Omega} f_3(x) s_1(x) dx &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\omega} (3\alpha(3\lambda + 2\mu) + \rho g) G w_1 r dr dz \\ &= 2\pi(3\alpha(3\lambda + 2\mu) + \rho g) G \int_{\omega} w_1 r dr dz \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part : } \int_{\Gamma_1} \gamma_0(F_3(x)) \gamma_0(s_1(x)) d\gamma = 0$$

car la composante F_3 est nulle (le fluide n'exerce aucune pression le long de l'axe Oz).

Nous allons maintenant récapituler les expressions de A et b .

Le système $Ax = b$ à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Les indices 1 et 3 correspondants respectivement aux déplacements radiaux et axiaux.

Sous cette forme, il est clair que la résolution en r ou en z est équivalente d'un point de vue structurel (A_1 et A_3 ont les mêmes zéros), seules les valeurs des coefficients de la matrice en entrée changent.

Explicitons les termes généraux des A_i et b_i

sulvant r :

$(A_1)_{ij}$ (terme général de la matrice A_1 au noeud i)

$$= (k_1 (B^t)^{-1} \hat{v}_{w_j} \cdot (B^t)^{-1} \hat{v}_{w_1} + k_2 (B^t)^{-1} \hat{v}_{w_j} \cdot (B^t)^{-1} \hat{v}_{w_1}) \text{Aire}(K) \frac{r_o + r_p + r_q}{3}$$

$$\text{Où } k_1 = 2\pi\mu \text{ et } k_2 = \pi(\lambda + \mu)$$

$(b_1)_i$ (second membre b_1 au noeud i)

$$= k_3 \int_K w_1 drdz + k_4 \int_0^H w_1 z dz + k_6 \int_0^H w_1 dz$$

$$\text{Où } k_3 = \frac{-2\pi(t_b - t_a)}{\ln(b/a)} (3\alpha(3\lambda + 2\mu))$$

$$k_4 = 2\pi P_0 a$$

$$k_6 = 2\pi P a$$

sulvant z :

$(A_3)_{ij}$

$$= (k_1 ((B^t)^{-1} \hat{v}_{w_j} \cdot (B^t)^{-1} \hat{v}_{w_1} + k_2 (B^t)^{-1} \hat{v}_{w_j} \cdot (B^t)^{-1} \hat{v}_{w_1}) \text{Aire}(K) \frac{r_o + r_p + r_q}{3}$$

$$\text{Où } k_1 = 2\pi\mu \text{ et } k_2 = 2\pi(\lambda + \mu)$$

$$(b_3)_i = k_5 \int_K w_1 r drdz$$

$$\text{Où } k_5 = 2\pi(3\alpha(3\lambda + 2\mu) + \rho g)G$$

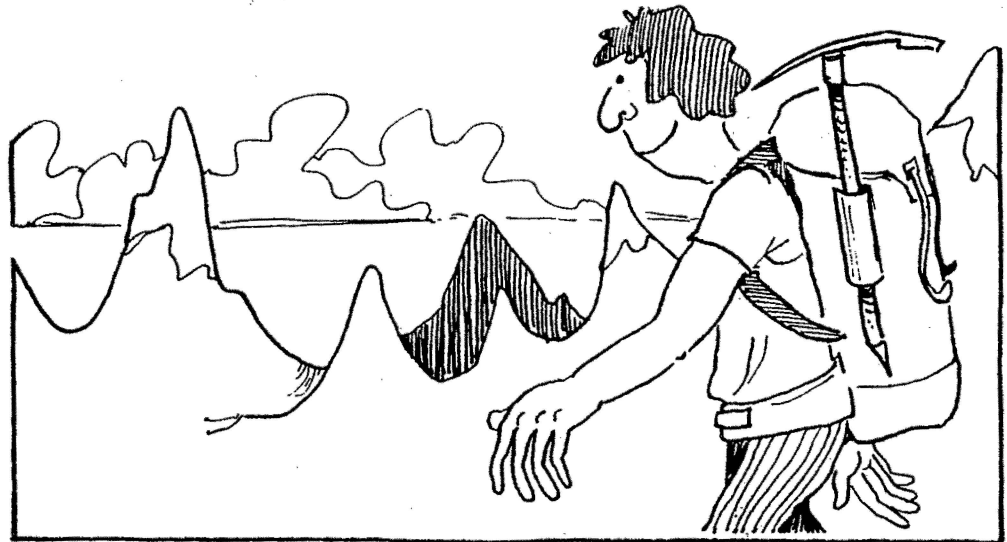
ANNEXE 2

Description et propriétés des méthodes numériques de résolution du système discrétisé

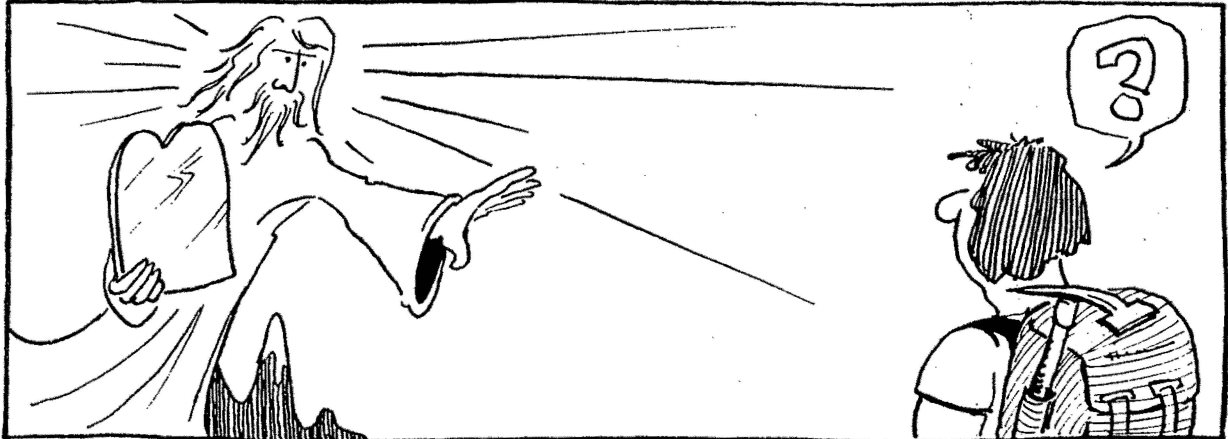
Résumé. La modélisation du problème des contraintes dans un annulaire centré de ciment formulé en termes de déplacements, nous a conduit à une classe de systèmes linéaires $Au = b$ où A est une M -matrice, symétrique définie positive, tridiagonale par blocs, de grande dimension. En reprenant à la base les méthodes numériques de résolution des systèmes linéaires, on précise le pourquoi du choix des méthodes envisagées (essentiellement les méthodes de factorisations incomplètes et du gradient conjugué avec préconditionnement), leurs avantages et inconvénients et on donne les algorithmes correspondants.

Nous envisagerons alors de les tester sur des exemples réels (de laboratoire et en vraie grandeur) dans un chapitre ultérieur.

UN JOUR OÙ JE ME PROMENAI'S EN MONTAGNE...



ARRIVÉ AU SOMMET, J'APERÇUS UNE ÉTRANGE LUEUR...



IL M'APPARUT DANS UN NUAGE : CE FUT LA RÉVÉLATION...



Le plan de ce chapitre est le suivant :

1. Rappels sur les méthodes standards

- La méthode de Gauss-Seidel (GS)
- La méthode de surrelaxation successive (SOR)
- La méthode SOR symétrique (SSOR)
- La méthode de Cholesky (CHOL)
- La méthode du Gradient Conjugué (CG)

2. Les méthodes de Factorisations incomplètes

- La factorisation de Cholesky incomplète (IC)

3. Les méthodes par blocs

- La méthode SOR par blocs (BSOR)

4. La technique du préconditionnement

- Un mot sur le conditionnement des systèmes
- Le Gradient Conjugué préconditionné par la diagonale de la matrice (DCG)
- Le préconditionnement SSOR (SSORCG)
- Le préconditionnement basé sur la factorisation incomplète de Cholesky (ICCG)
- Le préconditionnement IC modifié (MICCG ou DKRCG)
- Le préconditionnement DKR étendu (DKRECG)

5. Préconditionnement du Gradient Conjugué par blocs

- Cholesky par blocs
- Cholesky Incomplet par blocs
- Application au Gradient Conjugué (BICCG)

On cherche à déterminer la solution du système linéaire $Au=b$ (1) où la matrice A est une M-matrice symétrique définie positive.

1. Rappels sur les méthodes standards

Nous avons décidé de consacrer un paragraphe préliminaire aux rappels de résultats classiques largement connus dans un souci d'obtenir une meilleure compréhension des méthodes modernes.

Les méthodes itératives

Résoudre itérativement le système (1) consiste à générer à partir d'un vecteur initial donné arbitrairement une suite infinie de vecteurs u^k qui converge vers la solution u de (1) par une relation de récurrence du type $u^{k+1} = Gu^k + c$ où G est une matrice $n \times n$ (appelée matrice d'itération) et c un vecteur. G et c dépendent de la méthode particulière considérée.

1.1. La méthode de Gauss-Seidel (GS)

On décompose la matrice A de manière classique en $D - E - E^T$ (D est la diagonale de A et E l'opposé de sa partie triangulaire inférieure stricte).

$$A = D - E - E^T$$

On calcule alors le $(k+1)^{ième}$ itéré à partir du $k^{ième}$ par la formule suivante

$$u^{k+1} = (I - D^{-1}E)^{-1} D^{-1}E^T u^k + (I - D^{-1}E)^{-1} D^{-1}b$$

ou de manière équivalente sous forme développée :

$$a_{ii} u_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k + b_i \quad \forall i$$

On peut améliorer cette méthode en introduisant un paramètre réel ω dans l'itération; on obtient alors :

1.2. La méthode de relaxation successive (SOR)

A chaque pas de Gauss-Seidel, nous allons effectuer une correction

supplémentaire qui dépend de ω réel pris dans $]0,2[$. La démarche est la suivante, on calcule $\hat{u}_i^{k+1}$ par Gauss-Seidel :

$$a_{ii} \hat{u}_i^{k+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k + b_i$$

puis, on effectue la correction $u_i^{k+1} = \omega \hat{u}_i^{k+1} + (1-\omega) u_i^k$ et on élimine $\hat{u}_i^{k+1}$, on obtient alors :

$$a_{ii} u_i^{k+1} = \omega \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k + b_i \right] + (1-\omega) a_{ii} u_i^k$$

ce qui conduit à l'expression matricielle suivante :

$$u^{k+1} = (I - \omega D^{-1} E)^{-1} (\omega D^{-1} E^T + (1-\omega) I) u^k + (I - \omega D^{-1} E)^{-1} \omega D^{-1} b$$

Nécessairement, $\omega \in]0,2[$ (on écrit la condition classique de convergence sur le rayon spectral de la matrice d'itération voir (4) par exemple). Pour le choix du ω optimal (pour lequel le rayon spectral est minimum), il existe des procédures de recherche automatique (décrites dans (4) ou (27)) mais la programmation de telles procédures (lorsqu'elle est possible !) est lourde en temps et en encombrement mémoire.

Pratiquement, nous déterminerons le ω optimal par essais successifs.

On peut encore raffiner la méthode SOR par :

1.3. La méthode SOR symétrique (SSOR)

Dans les méthodes de relaxation précédentes, la suite des itérés dépend de l'ordre avec lequel on a numéroté les inconnues au départ (donc de l'ordre arbitraire de parcours de la grille du domaine discrétisé). Pour ne pas privilégier un ordre en particulier, on peut parcourir alternativement les inconnues dans un sens puis dans le sens inverse de la manière suivante :

$$u^{k+1/2} = \left(\frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + E^T \right) u^k + \left(\frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} b$$

qui correspond au parcours des inconnues de 1 à n, puis

$$u^{k+1} = \left(\frac{D}{\omega} - E^T \right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + E \right) u^{k+1/2} + \left(\frac{D}{\omega} - E^T \right)^{-1} b$$

pour le parcours inverse des inconnues de n à 1 .

On obtient la relation de récurrence globale entre u^{k+1} et u^k en éliminant $u^{k+1/2}$ dans les équations précédentes :

$$u^{k+1} = \left(\frac{1}{\omega}D - E^T\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + E\right) \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + E^T\right) u^k + \left(\frac{D}{\omega} - E^T\right)^{-1} \frac{(2-\omega)}{\omega} D \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} b$$

Les méthodes directes.

On peut également obtenir la solution exacte du système en un nombre fini d'opérations. La méthode est alors dite directe.

1.4. La méthode de Cholesky (CHOL)

Elle est basée sur la décomposition de Cholesky $A = LDL^T$ où D est diagonale et L triangulaire inférieure à diagonale unité

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{ij} & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & l_{ji} & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

A étant symétrique définie positive, cette décomposition existe et est unique (on trouvera la démonstration dans (14) par exemple). Les formules explicites de calcul des coefficients des matrices D et L sont obtenues par identification :

$$(1) \quad \begin{aligned} d_1 &= a_{11} \\ l_{j1} d_1 &= a_{j1} \quad j=2, \dots, n \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} i=2, \dots, n \quad d_i &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_k \\ l_{ji} d_i &= a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} d_k l_{ik} \quad j=i+1, \dots, n \end{aligned}$$

La résolution du système (1) se ramène simplement à celle de trois systèmes élémentaires :

$$Ly = b \quad \text{système triangulaire inférieur d'où l'on tire } y$$

$$Dz = y \quad \text{système diagonal d'où l'on tire } z$$

et $L^T u = z$ système triangulaire supérieur qui donne la solution u .

Enfin, il existe une catégorie de méthodes qui donnent théoriquement la solution exacte en un nombre fini d'opérations mais qui pratiquement sont utilisées comme des méthodes itératives (au moins de nos jours).

1.5. La méthode du Gradient Conjugué (CG)

L'idée de base de la méthode est de considérer la résolution du système linéaire (1) $Au = b$ comme le calcul du minimum d'une fonctionnelle quadratique F définie par $F(v) = \frac{1}{2} v^T A v - v^T b$ sur $\mathbb{R}^n$.

En effet, il suffit de remarquer que F s'écrit aussi $F(v) = F(u) - \frac{1}{2} (v-u)^T A (v-u)$ où u est la solution de (1). réciproquement, comme A est symétrique définie positive la résolution du système (1) revient à calculer le minimum de F . On a donc l'équivalence des deux problèmes.

La méthode du gradient conjugué est une méthode particulière de descente où les directions de descente sont conjuguées deux à deux (c'est à dire orthogonales au sens du produit scalaire défini par A).

L'algorithme est le suivant :

$$u^0 \text{ donné}$$

$$r^0 = Au^0 - b$$

au pas k , on calcule

$$\sigma_{k-1} = r^{k-1T} r^{k-1}$$

$$\beta_{k-1} = \sigma_{k-1} / \sigma_{k-2}$$

$$d^k = \begin{cases} -r^0 \\ -r^{k-1} + \beta_{k-1} d^{k-1} \end{cases} \quad \text{si } k > 1$$

$$v^k = A d^k$$

$$\alpha_k = \sigma_{k-1} / d^{kT} v^k$$

$$u^k = u^{k-1} + \alpha_k d^k$$

$$r^k = r^{k-1} + \alpha_k v^k$$

Le test d'arrêt porte sur $\sigma_{k-1} < \varepsilon$

2. Les méthodes de Factorisations Incomplètes

Lorsque l'on applique simplement la décomposition de Cholesky à la matrice A , on s'aperçoit que L perd le caractère creux de A (Meurant a montré dans (3) sur un problème modèle comment la bande creuse se remplit). Comme A est de grande dimension, on risque un dépassement rapide de la capacité mémoire. L'idée est alors d'imposer avant construction une structure particulière à la matrice L qui permettra "d'approximer" A par la nouvelle décomposition LDL^T .

2.1. La factorisation de Cholesky incomplète (IC)

soit P un ensemble d'indices hors diagonaux. On va imposer aux éléments de L d'être nuls aux indices qui n'appartiennent pas à P . Bien sûr, en contre partie il faut accepter un reste $R = LDL^T - A$ (la décomposition n'est plus exacte).

Le choix le plus simple est d'imposer à L de conserver la même structure creuse que A ; dans ce cas $P = \{(i,j) / i \neq j \text{ et } a_{ij} \neq 0\}$.

Mais on peut imaginer toutes les stratégies possible pour le choix de la structure de L par exemple d'ajouter telle ou telle hors-diagonale à la matrice. On obtient alors la classe plus générale de factorisations incomplètes $IC(p)$ où p désigne le nombre de hors-diagonales ajoutées par rapport à celles de A . Pour plus de précisions, on pourra consulter (22) ou (24).

Meijerink & Van Der Vorst ont montré (22) que la décomposition incomplète de Cholesky d'une M -matrice existe et est unique pour un ensemble P d'indices quelconque, Manteuffel a étendu le résultat à la classe des H -matrices (24) et enfin Y. Robert dans (30) a prouvé que toute matrice symétrique définie positive était incomplètement factorisable.

L'algorithme de calcul des coefficients de D et L est :

$$\begin{aligned}
 i=2, \dots, n \quad d_i &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_k \\
 j > i \quad l_{ji} d_i &= a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} d_k l_{ik} \quad \text{si } (j,i) \in P \\
 &= 0 \quad \text{sinon}
 \end{aligned}$$

La résolution du système (1) est alors très simple. On le résout itérativement par la formule :

$$LDL^T u^{k+1} = b + Ru^k$$

En pratique, le calcul de la matrice R est inutile, il suffit d'écrire $LDL^T \Delta u^{k+1} = b - Au^k$ où $\Delta u^{k+1} = u^{k+1} - u^k$ et de résoudre trois systèmes élémentaires :

$$Ly = b - Au^k \quad \text{triangulaire inférieur}$$

$$Dz = y \quad \text{diagonal}$$

$$L^T \Delta u^{k+1} = z \quad \text{triangulaire supérieur}$$

et $u^{k+1} = \Delta u^{k+1} + u^k$

3. Les méthodes par blocs

Il est possible d'envisager les méthodes itératives de résolution du système (1) d'un point de vue plus global en utilisant la structure bloc naturelle de la matrice A . Toutes les méthodes itératives peuvent s'écrire sous forme "bloc", nous allons nous intéresser au cas particulier de l'algorithme SOR.

3.1. La méthode SOR par blocs (BSOR)

La matrice A est tridiagonale par blocs. Notons q le nombre de blocs et p la taille des blocs. On utilise comme dans le cas ponctuel la décomposition naturelle de A sous la forme $\hat{D} - \hat{E} - \hat{E}^T$ où $\hat{D}$ est une matrice bloc-diagonale et $\hat{E}$ l'opposée de la partie bloc-triangulaire inférieur stricte de A . Plus clairement :

The diagram shows the decomposition of a block-tridiagonal matrix A into three components: $\hat{D}$, $\hat{E}$, and $\hat{E}^T$. The first matrix, representing A , has diagonal blocks $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{qq}$ and off-diagonal blocks A_{ij} for $i \neq j$. The second matrix, representing $\hat{D}$, is a block-diagonal matrix with the same diagonal blocks $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{qq}$ and zeros elsewhere. The third matrix, representing $\hat{E}$, is a block-triangular matrix with zeros on the diagonal and blocks A_{ij} for $i > j$ in the lower triangle. The fourth matrix, representing $\hat{E}^T$, is a block-triangular matrix with zeros on the diagonal and blocks A_{ij} for $i < j$ in the upper triangle. The equation is shown as $A = \hat{D} - \hat{E} - \hat{E}^T$.

L'itération s'écrit de la même manière

$$u^{k+1} = \left(\frac{1}{\omega} \hat{D} - \hat{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} \hat{D} + \hat{E}^T \right) u^k + \left(\frac{1}{\omega} \hat{D} - \hat{E} \right)^{-1} b$$

ce qui donne sous forme développée :

$$A_{ii} U_i^{k+1} = \omega \left[- \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} U_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^p A_{ij} U_j^k + B_i \right] + (1-\omega) A_{ii} U_i^k$$

U_i^k est maintenant un vecteur à p composantes. Si on pose γ_i^k égal au second membre de l'équation précédente, à chaque itération il faudra résoudre le système $A_{ii} U_i^{k+1} = \gamma_i^k$ par une méthode directe. A_{ii} est une matrice $p \times p$ bande-symétrique et p n'est plus de grande dimension (il correspond à la discrétisation en r c'est à dire au petit coté du rectangle), nous pouvons donc raisonnablement envisager d'utiliser la méthode de Cholesky à chaque itération pour résoudre ce système intermédiaire.

4. La technique du préconditionnement

Nous allons montrer dans un premier temps comment la convergence de la méthode itérative du gradient conjugué dépend du conditionnement de la matrice du système à résoudre (c'est à dire, dans le cadre symétrique, du rapport des deux valeurs propres extrêmes).

Influence du conditionnement sur la convergence du gradient conjugué

Concus, Golub & O'Leary ont montré dans (4) que la méthode du gradient conjugué généralisé est, dans la classe des méthodes définies par :

$$u^k = u^0 + P_{k-1}(K) z^0$$

celle qui minimise la A -norme de l'erreur $e^k = u - u^k$ à chaque étape k .

(Pour un splitting donné de A en $M-N$, P_{k-1} est un polynôme de degré $k-1$ en $K = I - M^{-1}N$ et $z^0 = K(u - u^0)$).

On obtient alors une expression de l'erreur au pas k en fonction de l'erreur initiale :

$$\begin{aligned} \|e^k\|_A &= \left((I - KP_{k-1}(K)) e^0 \right)^T A (I - KP_{k-1}(K)) e^0 \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - \lambda_i P_{k-1}(\lambda_i))^2 (e_i^0)^2 \end{aligned}$$

expression que l'on peut majorer facilement par :

$$\|e^k\|_A^2 \leq \max_{\lambda_i} (1 - \lambda_i P_{k-1}(\lambda_i))^2 \|e^0\|_A^2$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice K . On peut alors choisir différents polynômes pour P_{k-1} . Daniel préconise dans (6) de prendre $Q_k(\lambda) = 1 - \lambda P_{k-1}(\lambda)$ à partir des polynômes de Tchebychev d'ordre k dans ce cas :

$$\|e^k\|_A^2 \leq 4 \left(\frac{\sqrt{C_K} - 1}{\sqrt{C_K} + 1} \right)^{2k} \|e^0\|_A^2 \quad C_K \text{ est le conditionnement de } K$$

Il s'agit là de la borne la plus utilisée qui montre explicitement comment la vitesse de convergence est influencée par le conditionnement (plus C_K sera proche de 1, plus rapide sera la convergence). Mais, il s'agit là d'une borne grossière. S'il est vrai que le majorant peut être atteint à un pas donné, globalement le résultat est pessimiste. Greenbaum a obtenu une majoration plus fine dans (11), en exprimant les $Q_k(\lambda)$ en fonction de $k+1$ valeurs propres de K pour lesquelles la formule est exacte.

$$\|e^k\|_A^2 \leq \left| \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_{\alpha_i} / (\lambda_{\alpha_i} - \lambda_{\alpha_j}) \right|^{-1} \|e^0\|_A^2$$

Cette majoration (bien qu'inutilisable dans la pratique puisque le polynôme majorant est incalculable) montre l'influence de la répartition des valeurs propres de K sur la convergence de la méthode et en particulier des valeurs propres extrêmes donc du conditionnement.

Ces résultats théoriques, complétés par de nombreuses constatations expérimentales, montrent l'intérêt que l'on a à travailler sur une matrice ayant le meilleur conditionnement possible (le plus petit) et une distribution de valeurs propres des plus régulières.

Le gradient conjugué généralisé

Pour améliorer le conditionnement de la matrice A , on peut multiplier le système initial (1) par une matrice M^{-1} de telle sorte que la nouvelle matrice $M^{-1}A$ ait un meilleur conditionnement que A et appliquer la méthode de résolution au nouveau système $M^{-1}Au = M^{-1}b$ (2) lorsque cela est possible. On dit alors que l'on "préconditionne" le système. Il faudra qu'en un certain sens $M^{-1}A$ soit "le plus proche possible" de l'identité (en d'autres termes que M approxime A).

Nous allons maintenant étudier les problèmes que posent le choix d'un bon préconditionnement.

Si on utilise cette technique pour accélérer la convergence de la méthode du gradient conjugué, on obtient l'algorithme généralisé suivant du à Concus & Golub.

On écrit (1) sous la forme : $M^{-1}Au = M^{-1}b$

et on résout ce nouveau système par le gradient conjugué, l'algorithme s'écrit :

$$\begin{aligned}
 &u^0 \text{ donné} \\
 &\text{pour } k=1, 2, \dots \\
 &\quad \text{résoudre le système } Mz^{k-1} = r^{k-1} \\
 &\quad \rho_{k-1} = r^{k-1T} z^{k-1} \\
 &\quad \beta_{k-1} = \rho_{k-1} / \rho_{k-2} \\
 &\quad d^k = \begin{cases} -z^0 \\ -z^{k-1} + \beta_{k-1} d^{k-1} \end{cases} \quad \text{si } k > 1 \\
 &\quad v^k = Ad^k \\
 &\quad \alpha_k = \rho_{k-1} / d^{kT} v^k \\
 &\quad u^k = u^{k-1} + \alpha_k d^k \\
 &\quad r^k = r^{k-1} + \alpha_k v^k \\
 &\text{fin pour}
 \end{aligned}$$

l'algorithme s'arrête lorsque $\rho_k < \text{précision voulue}$

On remarque que pour $M=I$ on retrouve bien la version du gradient conjugué simple du paragraphe 1.5.

Evidemment, l'algorithme général n'est plus aussi simple; à chaque itération il faut résoudre le système supplémentaire $Mz^{k-1} = r^{k-1}$. un "bon" préconditionnement devra d'une part approximer la matrice A du système (1) et d'autre part donner une solution rapide et peu coûteuse du système intermédiaire qui pénalise l'accélération. Nous allons successivement étudier les principaux choix de matrices de préconditionnement.

4.1. Le Gradient Conjugué préconditionné par la diagonale de A (DCG)

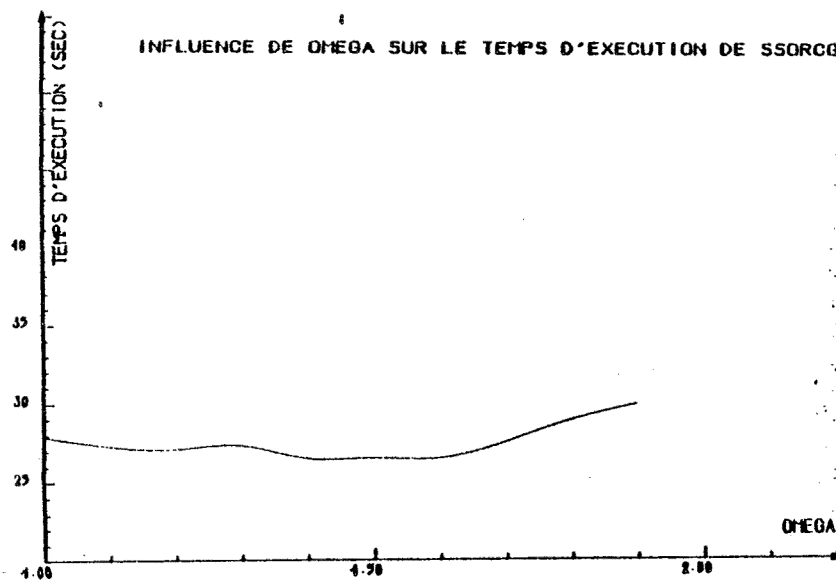
Il s'agit du choix le plus simple de la matrice de préconditionnement; on approxime grossièrement A par sa diagonale. L'intérêt est d'obtenir directement le vecteur z^{k-1} (composante par composante par $z_i^{k-1} = r_i^{k-1} / a_{ii}$) sans résolution de système ni stockage de matrice.

4.2. Le préconditionnement SSOR (SSORCG).

Axelsson propose d'approximer A par la matrice $(D/\omega - E)\omega/(2-\omega)D^{-1}(D/\omega - E^T)$ qui correspond au splitting de la méthode SSOR définie au 1.3.

On obtient à chaque itération le vecteur z^{k-1} par résolution de trois systèmes élémentaires $(\frac{D}{\omega} - E)y = r^{k-1}$ triangulaire inférieur, $\frac{\omega}{2-\omega}D^{-1}z = y$ diagonal et $(\frac{D}{\omega} - E^T)z^{k-1} = z$ triangulaire supérieur, sans avoir besoin de stocker la matrice M.

En pratique, l'influence de ω est négligeable. Nous avons tracé ci-dessous la variation du temps d'exécution en fonction de ω pour un problème type de contraintes.



Nous prendrons donc par la suite $\omega=1$.

Pour certains problèmes (cas particuliers), il est possible d'évaluer le gain du préconditionnement SSOR. Par exemple, Axelsson montre pour un problème modèle aux conditions aux limites particulières qu'on gagne un ordre sur le conditionnement.

4.3. Le préconditionnement basé sur la décomposition incomplète de Cholesky (ICCG)

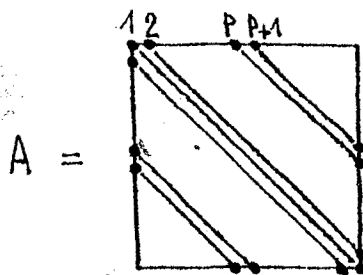
On prend comme préconditionnement du système, la factorisation incomplète de Cholesky de la matrice A définie au paragraphe 2.1. On approxime A par le produit LDL^T où L (matrice triangulaire inférieure à diagonale unité) a les mêmes zéros que A . 3^{k-1} s'obtient comme dans SSORCG par résolution de trois systèmes élémentaires mais on est obligé ici de calculer les coefficients des matrices D et L et de les stocker.

4.4. Le préconditionnement IC modifié (MICCG ou DKRCG)

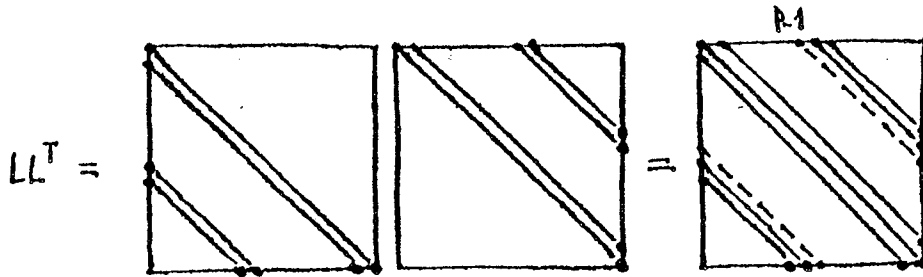
On choisit comme précédemment de préconditionner le système par une matrice M sous la forme LL^T avec la contrainte supplémentaire de se fixer, outre le profil de L , la structure algébrique du reste R . Par exemple, on peut modifier la factorisation incomplète de Cholesky de façon à rendre nulle la somme des éléments de chaque ligne de R ($\sum_j r_{ij} = 0 \quad \forall i$), nous noterons $\bar{R}$ ce choix particulier du reste.

Dupont, Kendall & Rachford préconisent de prendre un reste égal à $\bar{R} + \delta D$. D est la diagonale de A et δ un paramètre réel à choisir. Gustafsson (qui a retrouvé de son côté ce préconditionnement) montre dans (12) comment choisir δ pour un problème modèle aux conditions de type Dirichlet en fonction des conditions aux limites du problème variationnel associé. On gagne un ordre sur le conditionnement de la matrice initiale (on passe de $\sigma(h)$ à $\sigma(h^2)$).

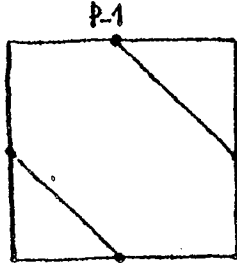
Le préconditionnement DKR a été utilisé par Meurant dans (10) dans le cas de matrices à cinq diagonales issues de la discrétisation du laplacien en dimension 2. Les matrices que l'on obtient à partir du problème des contraintes possèdent sept diagonales réparties comme suit :



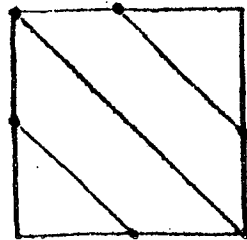
Si on écrit la décomposition incomplète classique de Cholesky (pour ayant la même structure creuse que A), on s'aperçoit que le calcul du produit LL^T rajoute deux hors diagonales supplémentaires à A .



R a donc la structure suivante



Si on décide d'imposer une structure algébrique particulière au reste, il faut un degré de liberté supplémentaire qui peut être obtenu en ajoutant une diagonale à R. Nous prendrons alors :



Il est aisé de calculer l'expression des éléments de M par identification.

$$m_{ii} = l_{ii}^2 + l_{ii-1}^2 + l_{ii-p}^2 + l_{ii-p-1}^2 = a_{ii}(1+\delta) - (\bar{r}_{ii-p+1} + \bar{r}_{ii-p-1})$$

$$m_{ii-1} = l_{ii-1}l_{i-1i-1} + l_{ii-p-1}l_{i-1i-p-1} = a_{ii-1}$$

$$m_{ii-p+1} = l_{ii-p}l_{i-p+1i-p} = \bar{r}_{ii-p+1}$$

$$m_{ii-p} = l_{ii-p}l_{i-pi-p} + l_{ii-p+1}l_{i-pi-p+1} = a_{ii-p}$$

$$m_{ii-p-1} = l_{ii-p-1}l_{i-p-1i-p-1} = a_{ii-p-1}$$

On peut déterminer à partir de ces formules un algorithme constructif des éléments l_{ij} de L (récursivement) colonne par colonne grâce à la relation supplémentaire :

$$\bar{r}_{i+p-1,i} = l_{i+p-1,i} l_{i,i-1}$$

On suppose connus tous les coefficients de L et $\bar{R} + \delta D$ pour toutes colonnes dont l'indice est inférieur à i .

$$\bar{r}_{ii-p+1} = l_{ii-p} l_{i-p+1 i-p}$$

$$\bar{r}_{i+p-1 i} = l_{i+p-1 i-1} l_{ii-1}$$

$$l_{ii} = (a_{ii}(1+\delta) - \bar{r}_{ii-p+1} - \bar{r}_{i+p-1 i} - l_{ii-1}^2 - l_{ii-p}^2 - l_{ii-p-1}^2)^{1/2}$$

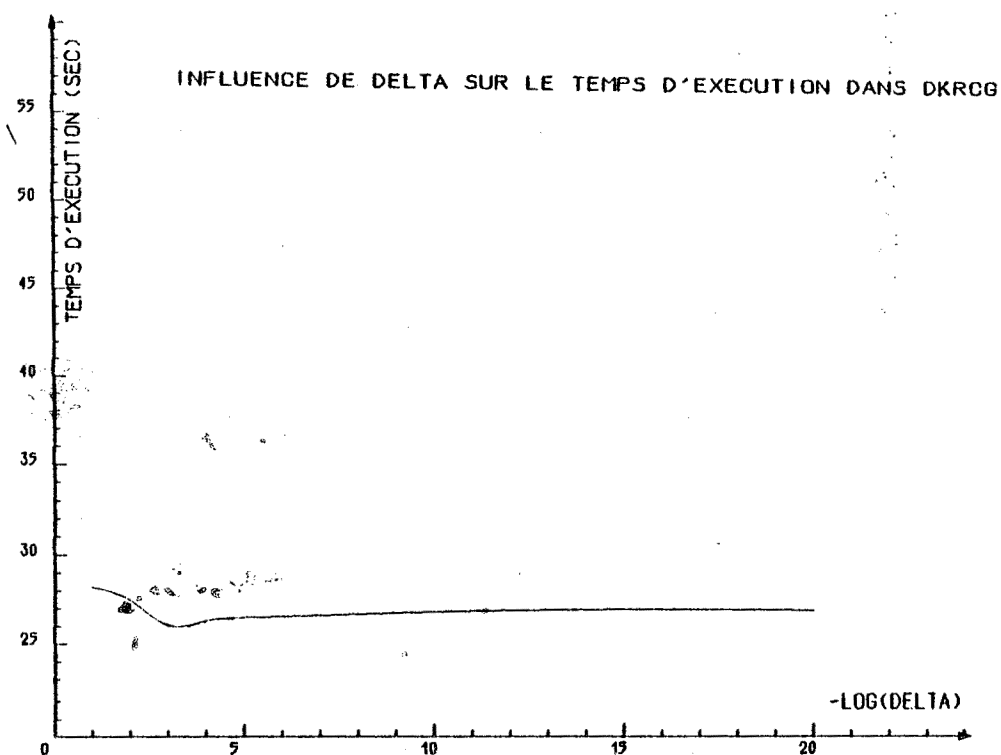
$$l_{i+1 i} = (a_{i+1 i} - l_{i+1 i-p} l_{ii-p}) / l_{ii}$$

$$l_{i+p i} = (a_{i+p i} - l_{i+p i-1} l_{ii-1}) / l_{ii}$$

$$l_{i+p+1 i} = a_{i+p+1 i} / l_{ii}$$

Après avoir stocké L , on résoud à chaque pas deux systèmes triangulaires élémentaires pour déterminer z^{k+1} .

Il se pose le problème du choix du δ optimal; δ est déterminé de manière systématique, la courbe ci-dessous représente la variation du temps d'exécution en fonction du log de δ . Le gain obtenu est trop faible par rapport au coût de la mise en oeuvre de la recherche du δ optimal qui change en fonction des données du problème. Pratiquement, nous prendrons donc $\delta=0$.



4.5. Le préconditionnement DKR étendu

Nous citerons cette méthode par souci d'exhaustivité. L'idée est de reprendre le préconditionnement DKR précédent en choisissant récursivement les éléments diagonaux du reste (r_{ii}) de façon "optimale". Y. ROBERT a développé cet algorithme dans (30). Cependant, ce préconditionnement ne présente pas un grand intérêt pratique pour nous puisque la procédure de détermination des r_{ii} est beaucoup trop coûteuse en terme d'encombrement mémoire pour un faible gain de rapidité.

5. Préconditionnement par blocs

Les préconditionnements précédents n'utilisaient pas la structure bloc naturelle du problème. Nous allons étudier dans ce paragraphe une méthode spécifique basée sur la décomposition incomplète de Cholesky par blocs.

5.1. Cholesky par blocs

Notations : A est une q matrice-bloc, de blocs A_{ij} de taille $p \times p$. On décompose A comme au paragraphe 3 en $\hat{D} - \hat{E} - \hat{E}^T$ où $\hat{D}$ est une matrice bloc-diagonale et $\hat{E}$ l'opposée de la partie bloc-triangulaire stricte inférieure issue de A .

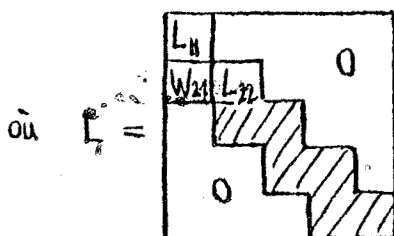
La décomposition de Cholesky par bloc est classique. Soit Σ une matrice bloc-diagonale formée à partir de A de la manière suivante :

$$\Sigma_{11} = A_{11}$$

$$\Sigma_{ii} = A_{ii} - A_{i,i-1} \Sigma_{i-1,i-1}^{-1} A_{i-1,i-1}^T \quad i \geq 2$$

$$\text{Alors, } A = (\Sigma - \hat{E}) \Sigma^{-1} (\Sigma - \hat{E}^T).$$

$$\text{Ce qui s'écrit aussi : } A = \hat{L} \hat{L}^T$$



$$\text{avec } W_{i,i-1} = A_{i,i-1} L_{i-1,i-1}^{-T}$$

5.2. Cholesky incomplet par blocs

Dans la décomposition de Cholesky précédente, on s'aperçoit que les blocs Σ_{ii} et Σ_{ii}^{-1} se remplissent pour $i \geq 2$. Si l'on désire préserver le caractère creux initial de A , il faut remplacer les $\Sigma_{i-1, i-1}^{-1}$ par une approximation creuse (qui conserve les zéros des blocs diagonaux de A) que l'on note $\Lambda_{i-1, i-1}$.

On pose alors : $\Delta_{11} = A_{11}$

$$\Delta_{ii} = A_{ii} - A_{i, i-1} \Lambda_{i-1, i-1} A_{i, i-1}^T \quad i \geq 2$$

On obtient alors une nouvelle factorisation (factorisation incomplète de Cholesky par blocs) à partir de la matrice Δ

$$A = \hat{M} - \hat{R} \quad \text{avec} \quad \hat{M} = (\Delta - \hat{E}) \Delta^{-1} (\Delta - \hat{E}^T)$$

$\hat{R}$ est une matrice bloc-diagonale dont les blocs R_{ii} ont les expressions suivantes :

$$R_{11} = 0$$

$$R_{ii} = \Delta_{ii} - A_{ii} + A_{i, i+1} \Delta_{i-1, i-1}^{-1} A_{i, i+1}^T \quad i \geq 2$$

La démarche pour obtenir les blocs Δ_{ii} est la même qu'au paragraphe 5.1. On obtient pour $\hat{M}$ le produit $\hat{L} \hat{L}^T$:

$$\hat{M} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline L_{11} & & \\ \hline W_{21} & L_{22} & \\ \hline & & \ddots \\ \hline & & & L_{qq} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline L_{11} & W_{21} & \\ \hline & & \ddots \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

Où les $W_{i+1, i} = A_{i+1, i} L_{ii}^{T-1}$ sont triangulaires supérieures.

L'algorithme de calcul de la matrice $\hat{L}$ s'écrit :

- (1) Décomposer A_{11} en $L_{11} L_{11}^T$
inverser L_{11}^T et calculer $W_{21} = A_{21} L_{11}^{T-1}$

- (2) pour $i=2,3,\dots$, faire les quatre étapes suivantes

calculer $\Delta_{ii} = A_{ii} - W_{i-1,i} W_{i-1,i}^T$
 décomposer Δ_{ii} en $L_{ii} L_{ii}^T$
 inverser L_{ii}^T
 en déduire $W_{i+1,i}$

R. UNDERWOOD a montré dans (34) que l'on pouvait représenter $\hat{L}$ comme précédemment sans avoir besoin de stocker les $W_{i+1,i}$ en utilisant directement la factorisation $W_{i+1,i} = A_{i+1,i} L_{ii}^{T-1}$. Donc, on ne calcule que les matrices $W_{i+1,i}$. En particulier, les nouveaux blocs diagonaux L_{ii} n'ont pas besoin d'être explicités complètement, on peut ne conserver d'une itération à l'autre que les deux diagonales principales de $W_{i-1,i}$ et n'utiliser (sans les stocker !) que les deux diagonales principales des blocs A_{ii} pour obtenir le $W_{i+1,i}$ suivant.

Ces remarques conduisent au nouvel algorithme de calcul des

- (1) reste inchangé

- (2) pour $i=2,3,\dots$, faire
 déterminer les 2 diagonales principales de $W_{i-1,i}$
 (soit DIA_{ii} cette matrice triangulaire supérieure)
 soustraire $DIA_{ii} DIA_{ii}^T$ à A_{ii}
 appliquer la décomposition de Cholesky à la matrice
 obtenue au pas précédent.
 On obtient $W_{i+1,i}$

Il nous reste à appliquer la méthode du Gradient Conjugué généralisé au préconditionnement défini par la décomposition de Cholesky incomplète par blocs.

5.3. Application au Gradient Conjugué (BICCG)

La technique est la même que dans le cas ponctuel. A chaque étape il faudra résoudre un système linéaire $\hat{M}_2^{k-1} = r^{k-1}$. Cependant, il est possible d'utiliser une fois de plus le découpage en blocs pour économiser de la place mémoire et gagner en rapidité d'exécution. On résout 2 systèmes triangulaires élémentaires par simples procédures d'élimination.

PROGRAMME DE CALCUL DES CONTRAINTES
DESCRIPTION ET MANUEL D'UTILISATION

ANNEXE 3

PROGRAMME DE CALCUL DES CONTRAINTES
DESCRIPTION ET MANUEL D'UTILISATION

LE PROGRAMME "efanc"

1. LA STRUCTURE DU PROGRAMME

- 1.1. Le langage
- 1.2. Utilisation sur chantier
- 1.3. Implantation sur micro

RESUME. Nous allons tout d'abord
decrire la structure generale du
programme et donner les grandes
options que nous avons choisies
pour resoudre le probleme du calcul
des contraintes le plus simplement
possible. Puis nous donnerons le
manuel d'utilisation du programme.

2. MANUEL D'UTILISATION

- 2.1. Mode d'emploi
- 2.2. Detail des commandes

LE PROGRAMME "efanc"

Le programme "efanc" consiste en un code de calcul des contraintes dans un annulaire de ciment (c'est à dire en un code d'éléments finis suivi d'une méthode numérique de résolution du système linéaire discrétisé); il apporte l'assurance au foreur que la cimentation est possible dans les conditions de travail qu'il fixera, suivant un critère de rupture du ciment défini en laboratoire, dans les zones "bien cimentées" (sans vide de ciment). On peut alors guider l'opération de cimentation sur chantier, en interactif et éviter des erreurs de cimentation catastrophiques.

l'élément en double précision, un pour le numéro de la colonne et un pour le pointeur), ce qui nous permet une économie de place mémoire importante. On peut traiter des problèmes de taille 2300×2300 alors qu'on était limité à des matrices de taille 110×110 pour un rangement classique.

D'autre part, nous avons organisé notre programme en modules indépendants pour permettre plus facilement une extension du modèle (à un annulaire décentré ou à plusieurs anneaux de ciment par exemple) et pour pouvoir charger de manière autonome les différentes phases du programme.

1.2. L'UTILISATION SUR CHANTIER

Le but de cette étude est de guider les foreurs au cours de l'opération de cimentation, trop souvent la cimentation d'un puits est menée au jugé, presque instinctivement, et même si l'expérience des foreurs suffit en général à éviter le pire, on pourrait améliorer considérablement les conditions de sécurité de la cimentation.

La présente étude s'inscrit dans le cadre d'une recherche d'information des plate-formes de forage, pour cela le programme de calcul des contraintes doit être disponible sur chantier donc écrit sur un micro-ordinateur. Son utilisation doit être très simple et rapide. Bien qu'il s'agisse encore d'un modèle un peu trop "idéal", nous espérons une large diffusion auprès des filiales de la CFP.

1. LA STRUCTURE DU PROGRAMME

1.1. LE LANGAGE

Le programme est écrit en PASCAL, langage évolué disponible sur la plupart des micro ordinateurs. Cela nous a permis d'écrire et de tester le programme sur un gros calculateur puis de le traduire sur micro. Le choix du PASCAL nous a été suggéré par la commodité de ses structures, il est en effet inutile (et mauvais) de stocker tous les éléments de la matrice du système discrétisé puisqu'au maximum 7 éléments par ligne sont non nuls. Nous avons donc stocké la matrice sous forme de listes linéaires (dans un type "enregistrement" comprenant pour chaque ligne le numéro de la colonne, la valeur de l'élément et le pointeur de l'adresse de l'élément suivant, soit au total quatre mots mémoire pour chaque enregistrement : deux pour la valeur de

1.3. IMPLANTATION SUR MICRO

Il s'agit d'un micro-ordinateur HP 9836, haut de gamme parmi les micro scientifiques HP. Construit autour du micro processeur 16 bits MOTOROLA MC6800, il comporte deux unités de disquettes 5 pouces 1/4. Il dispose d'une mémoire vive de 576 Ko (64 Ko machine plus 2 cartes RAM de 256 Ko chacune. Le langage PASCAL tient sur 2 disquettes environ 100 Ko) avec une possibilité d'extension à 1 mega grâce à un disque dur Winchester.

Le programme 'efanc' a été testé et mis au point sur un gros ordinateur (du système MULTICS du CICC de GRENOBLE). La traduction sur HP 9836 ne pose aucun problème : le PASCAL HP étant à peu près standard.

2. MANUEL D'UTILISATION

Le programme 'efanc' fonctionne en 'boite-noire', c'est à dire que l'utilisateur n'a pas accès à la partie programme. En effet notre option a été de limiter au maximum les interventions extérieures (manipulations de fichiers ou de données etc...). Il est utilisé en conversationnel, l'utilisateur suit un menu simple et précis où il déterminera lui même son profil de terrain en choisissant la commande par son initiale.

On affichera tous les résultats intermédiaires pour vérifier les éventuelles fautes de frappe.

Le mode d'emploi est le suivant :

MODE D'EMPLOI

efanc)

d)onnées

c)iment_utilise
i)njection
g)radient_geothermique
d)escription_casing
h)auteur_prevue
t)errain
q)uit

r)ésultats

c)imentation
d)agnostic
q)uit

q)uit

2.2. DETAIL DES COMMANDES
Nous allons maintenant préciser les différentes options du mode d'emploi.

L'OPTION d)onnées

Elle permet à l'utilisateur de décrire complètement son problème en examinant tour à tour tous les choix possibles.

c)iment_utilise : On demande les caractéristiques du ciment que l'on prévoit d'utiliser c'est à dire sa densité, son coefficient de dilatation thermique et la valeur des coefficients de Lamé.

i)njection : permet d'enregistrer les conditions d'injection du ciment, température, et pression.

s)radient_geothermique : les contraintes dépendent du lieu de forage, on demande le gradient géothermique. Il existe un programme qui le calcule sur chantier.

d)escription_casing : à chaque phase du puits correspond un nouveau casing. Il nous faut le rayon des cylindres intérieurs et extérieurs.

h)auteur_prevue : il s'agit de la hauteur de la colonne de ciment.

t)errain : il faut préciser la température du sol et le gradient de pression du terrain.

q)uit : on quitte l'option pour revenir au menu initial.

L'OPTION r)ésultats

c)imentation : cette commande permet d'obtenir une réponse sur le type de ciment prévu. Selon un critère de rupture défini dans le programme d'après des tests de laboratoire, on indique si la cimentation est possible ou non.

d)iagnostic : plus précisément, on peut par cette option analyser les causes d'une mauvaise cimentation. Il ne s'agit que d'une indication, l'utilisateur devra toujours revenir à d)onnées pour vérifier la validité de son nouveau choix.

q)uit : revient au menu.

AUTORISATION de SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

VU les rapports de présentation de Messieurs

. F. ROBERT, Professeur

. J. DUMONT, Ingénieur

Monsieur TRYSTRAM Denis

est autorisé à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR-INGENIEUR, spécialité "Mathématiques Appliquées".

Fait à Grenoble, le 12 avril 1984

Le Président de l'I.N.P.-G

D. BLOCH
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président,

