



HAL
open science

Transfert de temps de haute performance : le Lien Micro-Onde de la mission ACES

Loïc Duchayne

► **To cite this version:**

Loïc Duchayne. Transfert de temps de haute performance : le Lien Micro-Onde de la mission ACES. Physique mathématique [math-ph]. Observatoire de Paris, 2008. Français. NNT : . tel-00349882

HAL Id: tel-00349882

<https://theses.hal.science/tel-00349882>

Submitted on 5 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS
ÉCOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D' ÎLE-DE-FRANCE
SYSTÈMES
DE RÉFÉRENCE TEMPS-ESPACE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
spécialité : physique

présentée par
Loïc DUCHAYNE

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Observatoire de Paris

Sujet :

TRANSFERT DE TEMPS DE HAUTE PERFORMANCE :
LE LIEN MICRO-ONDE DE LA MISSION ACES

Soutenue le 23 octobre 2008 devant le jury composé de :

M.	François	MIGNARD	Président du jury
Mme.	Pascale	DEFRAIGNE	Rapporteur
M.	Serge	REYNAUD	Rapporteur
M.	Gérard	PETIT	Examineur
M.	Christophe	SALOMON	Examineur
M.	Noël	DIMARCQ	Directeur de thèse
M.	Peter	WOLF	Directeur de thèse
M.	Luigi	CACCIAPUOTI	Membre invité
Mme.	Sylvie	LEON-HIRTZ	Membre invitée

À Edouard et Renée
À la mémoire d'André et Juliette

Remerciements

Je tiens à commencer en remerciant profondément les membres de mon jury de thèse qui ont accepté de lire cet épais manuscrit dépassant les trois cents pages. Je suis reconnaissant à François Mignard d'avoir accepté de présider le jury ainsi qu'à Pascale Defraigne et Serge Reynaud d'avoir endossé la charge de rapporteur et d'avoir lu en détail l'ensemble du manuscrit. Je remercie aussi Christophe Salomon et Gérard Petit pour leur intérêt et leurs questions pertinentes concernant mon travail. Enfin, un grand merci à Sylvie Léon-Hirtz et Luigi Cacciapuoti pour leur gentillesse et qui, à travers eux, symbolisèrent la présence du CNES et de l'ESA - les deux grands piliers du projet ACES - à ma soutenance de thèse. Enfin, je profite de cette partie pour remercier les financeurs de mon travail de thèse : le CNES, l'ESA, le LNE, EADS-Astrium et l'Observatoire de Paris.

J'ai débuté mon travail de thèse au mois d'octobre 2005, année hautement symbolique pour mon sujet de recherche puisqu'il s'agissait du centenaire de la publication des articles mythiques d'Albert Einstein. La majeure partie de mon travail de thèse s'est déroulée au laboratoire des Systèmes de Référence Temps-Espace du Laboratoire National de métrologie et d'Essais, le LNE-SYRTE, et fut supervisée par mes deux directeurs de thèse.

Le premier d'entre eux se nomme Noël Dimarcq : bien qu'il se soit principalement chargé de mon recrutement et de la partie administrative de ma thèse, il a su garder un œil sur mon travail et me poser des questions pertinentes. Je le remercie vivement pour sa gentillesse et sa bonne humeur. Peter Wolf a, quant à lui, hérité de la partie la plus difficile, à savoir diriger mes recherches et composer avec mon caractère. La partie n'était pas gagnée d'avance puisqu'on aurait pu y voir le derby entre toulousains et biarrots. Effectivement, en ces temps-là, les petites piques fusaient car Biarritz occupait la première place du classement. J'ai pris ma revanche en 2008, année de la fin de ma thèse, lorsque les rouges et noirs sortent vainqueurs, symbolisation fortuite de l'élève qui a égalé le maître. Trêve de galéjades, je tiens sincèrement à remercier Peter aux côtés duquel j'ai beaucoup appris au niveau pédagogique et scientifique. Doté d'un humour caustique, il a su me donner la liberté dont j'avais besoin dans mes recherches. Notre

équipe s'est penchée sur de nombreux problèmes et a réussi, en autres, à résoudre le mystère du *menu malin*. Je lui souhaite de poursuivre ses recherches avec le même optimisme et la même passion.

Dès mon arrivée à l'Observatoire de Paris, je fut intégré, tel un vilain petit canard issu du *temps*, à la section *fréquence* du SYRTE. Peter Rosenbusch et Jean-Yves Richard ont été mes premiers cobureaux et je les remercie pour leur gentil accueil. Non loin de mon bureau, la machine à café, lieu où émerge un certain nombre d'idées géniales, était l'endroit de rencontre et de discussion favori des permanents. Parmi eux, je remercie tout d'abord Philippe Laurent pour avoir eu le courage de relire ma thèse ainsi que pour sa gentillesse et sa disponibilité. Puis l'ensemble des chercheurs qui m'ont accordés de leur temps pour les répétitions de ma soutenance : le maître de la phase André Clairon, Pierre Ulrich et sa vision politique exacerbée, Pierre "ironman" Lemonde et ses participations aux pots de thèse, Giorgio Santarelli et sa peur irréfreinée des freestylers, Christophe Le Poncin-Lafitte et ses sages conseils.

Hors du cadre exclusif de ma rédaction de thèse, de nombreux permanents ont pimenté mon quotidien de leur discussion et de leurs remarques. Je remercie donc d'un trait toutes ces personnes : Pierre Teyssandier, Arnaud Landragin, Michel Lours, Sébastien Bize, Marie-Christine Angonin, David Valat, Franck Pereira Dos Santos, Roland Barillet, Sébastien Merlet, Philip Tuckey, Michel Abgrall, Ouali Acef, Emeric De Clercq, Annie Gérard, Stéphane Guérandel, Jocelyne Guéna, Yann Le Coq et Giovanni-Daniele Rovera.

J'ai une pensée toute particulière pour David Holleville, que je remercie sincèrement pour m'avoir transmis sa passion des profondeurs marines et s'être démené pour faciliter mon adhésion à l'association. Nos plongées dans l'océan pacifique resteront parmi mes plus belles.

Je termine cette partie sur les permanents de l'observatoire en remerciant toute l'équipe administration en commençant par celles qui sont récemment parties, Catherine Laurent, Yertha Baïdomti et Katia Vadet, puis celles la composant actuellement, Marine Pailler, Veronique Benayoun, Pascale Boudoin, Pascale Michel et Thérèse Ecolasse. Cependant je n'oublie pas l'équipe chargée du parc informatique du SYRTE menée par Pascal Blondé, un temps assisté par David Cathelineau puis par Emmanuel Delor. Enfin, je remercie Danielle Michoud, responsable de la scolarité de l'Observatoire de Paris pour sa gentillesse et son aide lors de mes démarches administratives.

En réalité, durant ma première année de thèse, j'eus l'opportunité de venir travaillé au sein du Bureau International des Poids et Mesures, aux abords de la Capitale, afin de rester proche de Peter. J'en profite donc pour remercier les personnes qui m'ont gentiment accueilli en leurs murs et plus particulièrement l'en-

semble du personnel de la section *temps*, menée par Félicitas Arias, ma marraine de thèse.

Pendant ce travail de thèse, j'ai aussi eu l'occasion de collaborer avec plusieurs chercheurs et industriels. En effet, dans le cadre de la mission ACES proprement dite, j'ai fait la rencontre de Wolfgang Schaeffer dirigeant de TimeTech et de Marc-Peter Hess travaillant chez EADS-Astrium. *Ich danke Ihnen für ihre Hilfe, ihre Nettigkeit und ihre Verfügbarkeit.* De plus, l'entraide étant nécessaire dans le domaine de la Recherche, plusieurs chercheurs étudiant des sujets connexes ont appuyé mon travail de thèse en partageant leur savoir. Je pense en particulier à Flavien Mercier du CNES ainsi qu'à Brahim Lamine et Marc-Thierry Jaekel : je les remercie tous profondément. Enfin, un grand merci à l'équipe Géodésie du CNES de Toulouse, et plus particulièrement à Richard Biancale, Jean-Charles Marty, Sylvain Loyer et Félix Perosanz qui m'ont gentiment accueilli dans le cadre d'une étude réalisée sur GINS.

Durant mes trois années à l'Observatoire de Paris, de nombreux doctorants se sont succédés. C'est avec certains d'autres eux que j'ai passé la majorité de mes déjeuners et nombreuses de mes soirées. Les deux complices Benjamin Canuel et Alexandre Gauguet sont les premiers doctorants à m'avoir intégré au sein de leur équipe. J'ai apprécié leur vision exacerbée de la société et de la recherche en particulier, et j'ai appris, à leurs cotés et à mes dépends, le vrai sens du mot *Ballack*. Je les remercie pour leur aide et leur conseils et leur souhaite plein de bonnes choses dans leur carrière scientifique italienne ou anglaise.

Présent dès mes premières heures à l'Observatoire, Frédéric Chapelet est le premier des étudiants à m'avoir accosté sous les conseils avisés d'un maître fruitier. Sous ses airs timides, il a su faire apparaître son caractère d'insoumis. Je remercie ce compagnon fidèle pour - il s'en souvient - m'avoir probablement sauvé la vie. Dans le bureau en face du mien résidait Xavier Baillard. Véritable rat de laboratoire, c'est à travers les épreuves (pour tenter de devenir chefs à la place de la chef) qu'il s'est révélé être un ami de confiance, fidèle et branchouille. Il a su toutefois faire passer avec discrétion son goût pour la mode suisse et les appareils électroniques mêlant technologie, design et classe. Notre trio s'est penché sur de nombreuses questions avec comme *impact* la résolution de nombreux mystères.

Bien que surveillant constamment sa manip' de peur qu'elle ne brûle, Julien Legouet et moi-même avons partagé bon nombre d'activités en tout genre : escalade, cyclisme, jardinage, etc... Ses paroles politiques se s'accordant pas avec ses actes consuméristes, il a décidé de quitter sa patrie pour les Amériques. Je lui souhaite bon courage dans sa recherche future de poste et regretterai son humour fin et délicat. Dans la même veine : Jacques Millot. Bien qu'il soit arrivé bien avant moi au laboratoire, je ne fit réellement sa connaissance que très tardivement. Notre travail en équipe nous permit, à travers conseils et remarques interposés, à gagner

chacun de notre côté les Class Awards 2008. Ses qualités lui laissent encore le choix entre recherche et cinéma. Le dernier membre de ce groupe se nomme Rodolph Le Targat. Je peux à présent avouer que je n'ai jamais vraiment su s'il faisait partie des chefs ou des doctorants. Cependant, d'une gentillesse inégalée, il a su par exemple nous intégrer dans sa famille le temps d'un weekend. Je le remercie pour tout et lui souhaite bonne chance dans son avenir.

Deux étudiants ont successivement été cohabitants de mon bureau et voisins durant la période de rédaction : il s'agit de Friedemann Reinhardt et de Clément Lacroûte. Repérant immédiatement leur talent musical, je les ai intégré dans mon groupe de musique, les *Jazzalobs*, qui connut son heure de gloire. Ce succès est irrémédiablement lié à l'arrivée de Scott Crane et de Rodolph Boudot. Doté d'une grande ouverture d'esprit, l'américain a su extraire les qualités de chacun et nous inculquer le sens de la rigueur. Quant au fougueux Rodolph, je dirais seulement que j'ai appris à vraiment le connaître au cours d'une semaine classe à Toulouse, il comprendra. Malheureusement, l'annonce de mon départ du laboratoire a, tel un séisme, ébréché l'esprit du groupe en manque de *leader*. Je leur souhaite à tous de réussir leurs projets, qu'ils soient scientifiques ou musicaux.

Partageant son bureau avec Rodolph, le mystérieux François-Xavier Esnault a su être un agréable compagnon de galère aux quatre coins du globe. Bien que nous ayons longtemps regretté notre (*once-in-a-lifetime*) expérience ratée, nous avons su rebondir et mettre sur papier des applications futuristes basées sur les nanorobots. Je lui souhaite bon courage dans la fin de sa rédaction et dans sa recherche de Post-Doc.

Arrivée durant ma dernière année de thèse, la pétillante Amandine Proia a su rapidement se faire intégrer dans une équipe fortement masculine malgré de légers problèmes d'agressivité. Pour elle commence les premières années insouciantes de thèse : je lui souhaite bonne chance pour ces trois années de travail et la remercie, entre autres, d'avoir pris les commandes de l'organisation de ma soutenance de thèse. Le jeune Thomas Lévêque s'est publiquement révélé durant les Jeux Olympiques de Pékin en exprimant sa passion inconsidérée pour la lutte gréco-romaine et sa position préférentielle. Métrologue exceptionnel lors des soirées, je lui souhaite de montrer les mêmes qualités dans son travail et de réussir ses projets.

Je finis cette partie sur les étudiants du laboratoire en remerciant en bloc Thomas Zanon, Céline Vian, François Impens, Laurine Brondeau, Stéphanie Perrin, Olga Kozlova, Quentin Bodart, Arnaud Lecallier, Jérôme Lodewyck, Fernando Ramirez-Martinez et Philippe Merck pour ses paquets de nature exotique. Je n'oublierai pas Philip Westergaard et Michael Peterson, dignes héritiers de la "Danish Connection" disparus prématurément à Toulouse lâchement abattus par un canard, ainsi que François Narbonne qui, par son talent organisationnel et son

sens de la fête, a largement participé aux activités externes du labo.

Bien qu'extérieurs au laboratoire, de nombreuses personnes ont, sans le savoir peut être, pesé très lourd dans ce travail de recherche. Tout d'abord, je remercie mes compagnons de promotion que j'ai eu l'occasion de voir régulièrement sur Paris, Benoît, Cédric, Charles-Christophe, Max, Jérôme, Ludovic, Vincent, Lionel, Raphaël et Daniel. Je n'oublie pas Sébastien que je remercie pour nos discussions et son amitié, mon cher "filliot" Kiki, ainsi que Mélanie pour son amour des makichounets.

Ensuite, je pense au groupe des esseciens constitué de Célia, Caroline et Anne-Emmanuelle. De ces trois jeunes filles émerge ma copine préférée de Claire (elle se reconnaîtra) que je remercie profondément pour son amitié, ainsi que Laurent, seul mâle, dont j'ai apprécié l'art de vivre. De plus, j'ai une pensée pour le groupe des toulousains expatriés (pour la plupart sur Paris) qui ont joué - il est sûr - un grand rôle dans mon orientation professionnelle. Je remercie donc en bloc Axel, Julien, Nicolas, Mary, Magali, Nicolas et Yacine.

Enfin, je remercie mes amis de lycée, restés pour la plupart aux abords de la Ville Rose, Mathieu, Sarah, Agnès et Benoît : leur soutien fut précieux dans les moments difficiles. Je termine en remerciant toutes les personnes qui ont montré un intérêt pour la notion relativiste du temps et/ou qui ont fait le déplacement pour ma soutenance de thèse, Annie, Nicolas Defont, Eva, Géraldine, Gawel, Maud, Boris puis Aris, Colette, Jacques et Françoise, Geneviève, Pierre et Annie, Pierre, Marie-Thérèse et Gégé. J'adresse aussi un merci particulier à Bertrand et Anne qui sont venus de loin. Puis, je termine en saluant l'ensemble des *catsitters* - Fred, tata Mandine et Anne-Emma - qui m'ont ainsi permis de travailler dans de bonnes conditions.

Les dernières lignes de ces remerciements vont aller aux personnes qui ont activement pris une part dans ma thèse en relisant mon manuscrit de thèse. Tout d'abord, mes parents qui m'ont soutenu durant toute ma scolarité à travers les fiches de lecture ou les cours improvisés de Physique-Chimie et qui m'ont permis de passer trois années sur Paris dans des conditions exceptionnelles. Ensuite, mon frère Gwénaél pour ses cours de prépa, nos révisions de mathématique la veille des interros la nuit tombée ainsi que sa femme, le docteur Solveig, pour ses conseils d'ancienne doctorante et son invitation à son mariage. Je conclurai cette partie en remerciant de tout mon cœur ma petite puce Claire pour m'avoir accompagné dans cette enrichissante épreuve qu'est la thèse, et plus particulièrement, pour m'avoir soutenu dans la phase de rédaction en prenant en charge les "à-cotés" et en me préparant ses délicieuses tomates farcies.

Table des matières

Introduction	1
1 Le Temps	5
1.1 Temps et relativité	5
1.1.1 La conception du Temps	5
1.1.2 Les quantités propres, les quantités coordonnées	9
1.1.3 Le principe d'équivalence	9
1.1.4 La métrique	10
1.1.5 La métrique Post Newtonienne Paramétrisée	13
1.1.6 La simultanéité	17
1.2 Méthodes de comparaisons d'horloges	18
1.2.1 Comparaisons d'horloges locales	18
1.2.2 Comparaisons d'horloges distantes	20
1.3 Tester la Physique Fondamentale	28
1.3.1 Les tests du principe d'équivalence	28
1.3.2 Test du formalisme Post Newtonien Paramétrisé	34
1.3.3 Les ondes gravitationnelles	36
2 Le Lien Micro-Onde	39
2.1 La mission ACES	40
2.1.1 Description	40
2.1.2 Instruments et sous-systèmes	41
2.1.3 Performances	43
2.1.4 Objectifs de la mission	44
2.2 La propagation des signaux	51
2.2.1 L'atmosphère terrestre	52
2.2.2 Le retard Shapiro	63
2.2.3 Les délais internes	65
2.2.4 Le multi-trajet	66
2.2.5 Tableau récapitulatif	67
2.3 Modélisation du Lien Micro-Onde	68

2.3.1	Description	68
2.3.2	Mesures du MWL	70
2.3.3	Expression des observables	71
2.3.4	Calcul des temps de propagation	73
2.4	Les produits scientifiques	77
2.4.1	La désynchronisation	77
2.4.2	Le Contenu Total en Électrons (TEC)	84
2.4.3	La distance instantanée et le délai troposphérique	86
3	Besoins de la mission	91
3.1	Étude préliminaire	91
3.1.1	Le modèle	91
3.1.2	Le transfert de temps	95
3.1.3	Pour plusieurs passages	104
3.1.4	Le déplacement fréquentiel gravitationnel	106
3.2	Étude complète	108
3.2.1	Le modèle	108
3.2.2	Le transfert de temps	110
3.2.3	Le déplacement fréquentiel gravitationnel	114
3.3	Études complémentaires	120
3.3.1	Une calibration des délais internes par effet Doppler	120
3.3.2	Convergence de l'orbitographie par les mesures du MWL	121
3.3.3	Les applications de l'annulation intervenant dans le déplacement fréquentiel relativiste	123
4	L'analyse des données du Lien Micro-Onde	127
4.1	Le traitement de données de la mission	127
4.1.1	Le principe	127
4.1.2	L'algorithme de traitement de données	128
4.1.3	La simulation des observables	129
4.2	Le développement simultané des logiciels	131
4.2.1	Premiers pas	131
4.2.2	Une routine d'interpolation	135
4.2.3	Amélioration du modèle	140
4.2.4	Prétraitement des données	151
4.2.5	Amélioration de la simulation	155
4.2.6	Conclusions	163
4.3	Les tests des programmes	164
4.3.1	Les perturbations	164
4.3.2	Une série de tests	164
4.3.3	Les applications	170

5	Résolution des ambiguïtés de phase	177
5.1	Une problématique	177
5.1.1	Le contexte	177
5.1.2	La mission ACES	177
5.1.3	L'implémentation	179
5.2	Des méthodes de résolution	182
5.2.1	Bruit des mesures	182
5.2.2	Résolution par suppositions	185
5.2.3	Remarques	190
5.2.4	Minimisation par méthode des moindres carrés	191
5.2.5	Conclusion	196
5.3	Un modèle réaliste	196
5.3.1	Des passages incomplets	197
5.3.2	Du bruit Flicker en $1/f$	197
5.3.3	Du bruit fonction du S/N et de l'élévation	200
5.3.4	Les statistiques de résolution	202
5.3.5	Les effets sur le résultat	209
6	Transfert de temps du futur et mission SAGAS	213
6.1	La mission SAGAS	213
6.1.1	Description	213
6.1.2	Instruments	213
6.1.3	Objectifs	215
6.2	Les mesures	219
6.2.1	Définitions	219
6.2.2	Bruits de la mission	222
6.2.3	Combinaisons primordiales	226
6.3	La combinaison d'observables	231
6.3.1	Mesure de la gravité des objets massiques	231
6.3.2	Test du modèle PPN ou mesurer le délai Shapiro	233
6.3.3	Sensibilité au fond cosmologique d'ondes gravitationnelles	242
	Conclusion	251
A	La variance d'Allan et ses dérivées	255
A.1	Contexte	255
A.2	Modélisation d'un signal et définitions	255
A.3	Caractérisation du bruit	257
A.3.1	La densité spectrale	257
A.3.2	La variance	258
A.4	Bruits affectant les oscillateurs	259

A.5	La variance d'Allan	261
A.5.1	Définition	261
A.5.2	Procédure de calcul	262
A.5.3	Convergence	262
A.5.4	Propriétés	265
A.6	Dérivées de la variance d'Allan	267
A.6.1	La variance d'Allan modifiée	267
A.6.2	La variance d'Allan temporelle	269
A.6.3	Intérêt de ces variances	269
B	Autres calculs	273
B.1	Expression des observables	273
B.2	Expression de la désynchronisation	276
B.2.1	Termes en $\frac{1}{c}$	277
B.2.2	Termes en $\frac{1}{c^2}$	278
B.2.3	Termes en $\frac{1}{c^3}$	279
B.2.4	Expression Finale	280
B.2.5	Expression en fonction de l'intervalle T_{14}	280
B.3	Expression du Contenu Total en Électrons (TEC)	282
B.4	Expression de la distance instantanée et du délai troposphérique	283
B.4.1	En fonction de T_{23}	283
B.4.2	En fonction de T_{14}	285
B.5	Expressions utilisées dans le programme	286
B.5.1	Décalage des observables	286
B.5.2	Désynchronisation théorique	287
	Bibliographie	289

Introduction

En moins d'un siècle, le génie d'Einstein a profondément transformé notre vision du Temps et de l'Espace à travers sa théorie de la relativité [1]. Cependant, du fait d'un manque de confrontation entre théories et expériences, cette théorie a eu beaucoup de mal à s'imposer face à la théorie de la Gravitation proposée par Newton [2]. Pourtant, deux tests expérimentaux ont fait sa renommée. En effet, la théorie de la Relativité Générale permet d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure, phénomène longtemps inexpliqué, et de prédire la déviation de la lumière par le Soleil.

Depuis une trentaine d'année, la situation a changé et la gravitation expérimentale est devenue un domaine de la Physique à part entière. Les sensibilités atteintes par les expériences obligent les scientifiques à tenir compte des effets perturbateurs relativistes. Mais, d'un autre côté, ces techniques de haute précision se révèlent être d'autant de nouveaux tests de la Gravitation. On peut, par exemple, citer les progrès réalisés dans le domaine de la manipulation des atomes par laser [3, 4, 5] qui conduisirent au développement d'horloges atomiques ultra-stables.

De nos jours, les précisions nécessaires aux tests de la Gravitation impliquent des projets de grande envergure. De plus, afin d'étudier les lois gravitationnelles dans des conditions différentes de la Terre, l'Espace se présente comme un laboratoire unique pour réaliser de telles expériences. C'est dans ce cadre que se place la mission ACES [6], sujet central de cette thèse. Cette mission vise la spatialisation d'une horloge atomique à bord de la Station Spatiale Internationale et l'étude des effets relativistes sur la fréquence de l'horloge dans l'Espace.

Après une brève introduction philosophico-physique, le premier chapitre de ce manuscrit de thèse rappelle les principes fondamentaux de la Relativité Générale et définit plusieurs concepts et notations indispensables à la suite. Il présente ensuite une description détaillée de l'ensemble des méthodes de comparaison d'horloges distantes en se focalisant principalement sur les méthodes satellitaires. En-

fin, ce chapitre initial donne un état des lieux des tests passés, présents et futurs sur différents points de la Théorie de la Gravitation et compare leur précision.

Le deuxième chapitre se concentre sur la mission spatiale ACES et en précise les caractéristiques et les objectifs. Du fait des performances visées et des caractéristiques du lien de communication, il est nécessaire d'approfondir en détails la physique liée à la propagation des signaux permettant les comparaisons avec l'horloge spatiale. A partir de ce travail théorique, ce chapitre propose une modélisation de la méthode utilisée pour le transfert de temps et de fréquence (le Lien Micro-Onde) et des mesures associées. Ce modèle développé spécifiquement pour la mission atteint une précision inférieure au dixième de picosecondes, précision qui peut être comparée avec celle des analyses de mesures GPS (*Global Positioning System*) atteignant quelques picosecondes. A partir des mesures, la mission vise l'extraction de variables physiques - ou produits scientifiques - rendue possible par les expressions données dans cette dernière partie.

Ces expressions sont, entre autres, dépendantes de l'orbitographie des stations et des délais instrumentaux. Les performances de la mission restent donc liées à la précision de ces paramètres, dont la détermination des besoins occupe le Chapitre 3. A l'aide d'un modèle simple, ces derniers sont examinés en terme de biais et de bruit afin d'atteindre les spécifications de la mission en stabilité et en exactitude pour un passage simple de la station spatiale, puis pour plusieurs passages. Pour réduire l'impact de l'erreur de ces paramètres sur les objectifs de la mission, une combinaison optimale des signaux montant et descendants est trouvée : elle permet ainsi de relâcher considérablement les contraintes sur la précision nécessaire sur l'orbitographie et les calibrations temporelles. Un travail identique mais basé sur les éphémérides de la station spatiale ainsi que sur un modèle réaliste d'erreurs conduit à une évaluation plus pragmatique de ces besoins. L'investigation de ces besoins pour des temps supérieurs au passage permet de découvrir une annulation intéressante conduisant à des niveaux moins contraignants que ce que l'on attendait naïvement [7]. La fin de ce chapitre s'attarde sur l'étude de trois problèmes connexes au transfert temporel et fréquentiel.

Ensuite, le quatrième chapitre s'attaque au traitement des mesures issues du Lien Micro-Onde. Cette analyse de données a pour but d'extraire les produits scientifiques de la mission selon le modèle détaillé au Chapitre 2. Cependant, du fait que la mission ACES demeure toujours en phase de préparation, il est nécessaire de simuler des mesures proches de la réalité. Par conséquent, deux programmes sont développés parallèlement, l'un permettant la simulation des données du Lien Micro-Onde, l'autre réalisant l'extraction des produits scientifiques à partir de ces données, tout en essayant de les conserver aussi indépendants que

possible. Ce dernier servira au traitement de données durant la mission alors que la simulation des mesures contribue seulement à la phase de tests. En effet, l'algorithme d'analyse de données est éprouvé à travers l'addition de bruit d'horloge, de mesure, ou d'orbitographie, d'ambiguïtés de phase ou de temps morts sur les mesures simulées. La prise en compte de simulations de plus en plus proches de la réalité permet de vérifier la précision et la robustesse de l'algorithme final.

Le cinquième chapitre se place sous le signe de la physique statistique et des fonctions stochastiques. En effet, il se base sur la résolution des ambiguïtés de phase du Lien Micro-Onde dont la résolution des ambiguïtés a un énorme impact sur les performances ultimes de la mission en terme de stabilité temporelle et d'exactitude. L'étude statistique des erreurs sur ces ambiguïtés permet d'estimer les probabilités de saut de cycle. De ce travail ressortent des méthodes permettant de réduire grandement ces probabilités. La considération des niveaux de bruit mesurés sur le modèle d'ingénierie du Lien Micro-Onde et d'un modèle d'évolution de ces bruits en fonction de l'élévation conduit à une estimation du taux de résolutions réussies. Ce travail poussé à des passages incomplets établit la proportion minimale du passage nécessaire à la détermination statistiquement probable de l'ensemble des ambiguïtés de phase des signaux.

Le sixième et dernier chapitre de cette thèse s'ouvre sur le projet futur SA-GAS, *Search for Anomalous Gravitation using Atomic Sensors* [8]. Tout d'abord, il explicite la constitution et les caractéristiques du projet ainsi que ces ambitions entre exploration spatiale et physique fondamentale. L'étude du concept avancé de son lien optique extra-système solaire conduit à la modélisation du transfert de fréquence et des mesures correspondantes. Ensuite, plusieurs objectifs scientifiques de la mission sont approfondis afin de déterminer la combinaison optimale des mesures brutes permettant d'atteindre une précision maximale. Par exemple, cette stratégie de combinaison est appliquée à la mesure de paramètres PPN [9] à travers le délai Shapiro [10] ou pour évaluer la sensibilité de la mission au fond stochastique d'ondes gravitationnelles [11].

Chapitre 1

Le Temps

1.1 Temps et relativité

1.1.1 La conception du Temps

Dans le Temps

Le Temps est un concept développé par l'Homme pour préciser les changements du monde qui l'entoure. En effet, les éléments qui composent l'Univers ne sont pas fixes et figés, mais ils bougent, changent, évoluent. Ainsi, l'observateur humain tend à classer ces états en trois catégories : passé, présent et futur. Cette classification repose sur une idée et un concept intuitifs d'échelle de temps et exige de les préciser.

Cette conceptualisation a évolué au cours de l'Histoire et selon les peuples, et s'est adaptée aux évolutions profondes, qu'elles soient idéologiques, scientifiques ou religieuses. De fait, la mesure du temps a parallèlement évolué. Les retombés de cette évolution ne s'arrêtent pas au gain en précision de l'estimation d'une durée : la pensée et l'idée que se faisaient les hommes de ce concept physique s'en sont trouvées transformées.

La notion de Temps est liée à celle de la génération du mouvement. Le changement se fait dans le temps et la durée. Si le temps se fige, alors le mouvement s'arrête immédiatement. A l'inverse, si le mouvement disparaît, l'idée du temps semble ne plus avoir de sens puisqu'il repose sur la variation. La Physique approfondit la relation étroite entre ces deux notions. Dans un référentiel prédéfini, elle donne à chaque objet une quantité de mouvement définie comme le produit de sa masse par sa vitesse¹. Cette dernière s'exprime par une mesure d'espace divisée

¹En Physique Classique, un objet de masse m animé d'une vitesse \vec{v} a une quantité de mouvement $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Cette variable a un rôle prépondérant en Physique puisque, tout comme l'énergie,

par une mesure dite de "temps". Le Temps ne semble pas être une donnée aussi immédiate que l'espace mais plus un produit de notre activité cérébrale. Cependant, elle est nécessaire pour définir correctement la caractéristique première du mouvement : la vitesse.

La prise de conscience du cours du temps entraîne l'apparition de deux notions essentielles : la simultanéité et la succession. La simultanéité, ou synchronie, exprime l'idée que des événements se produisent au même moment. Si deux actions ne sont pas simultanées, alors l'une d'entre elles s'est produite avant l'autre. Ainsi de la notion de simultanéité découlent celles d'antériorité et de postériorité. L'écoulement du temps se définit comme une suite infinie d'événements simultanés. Le temps, si difficile à définir de prime abord, semble pouvoir se résumer en trois états issus d'une observation personnelle : l'avant, l'après et l'en même temps. Cependant, les simples définitions de succession ou de simultanéité ne permettent pas de définir des durées.

Jusqu'à présent nous n'avons relevé que l'aspect linéaire de l'écoulement du temps en évoquant les changements et les transformations irréversibles, que le Temps s'écoule inexorablement, se suffisant à lui-même. Il est le témoin des premières heures de la création de l'Univers, aux premiers pas de la vie, et sera, sans aucun doute présent lors des derniers souffles de l'Humanité. Et c'est probablement pour faire disparaître la crainte de cet ennemi invisible et oublier qu'il est son esclave que l'Homme a désiré feindre de le contrôler. Pour cela, il s'est tout d'abord basé sur le second aspect de son écoulement, son évolution cyclique, apparaissant dans le cycle des jour, des saisons ou de la Vie. La régularité de certains événements a permis l'élaboration d'une référence de durée (calendrier, horloge,...) et ainsi de quantifier le temps.

Mais, pour effectuer une mesure du Temps, il est nécessaire de définir une unité temporelle : la seconde. Au fil des siècles, l'homme a utilisé les moyens techniques à sa disposition pour définir cette unité. Elle a tout d'abord reposé sur des observations de phénomènes astronomiques. Mais la physique moderne a démontré que la durée de la rotation de la Terre autour d'elle-même ou la période de révolution de la Terre autour du Soleil n'étaient pas de bons candidats pour la définition de la seconde. En effet, la réalisation de la seconde à partir de ces phénomènes est limitée par leur accessibilité et leur lente variation.

C'est pourquoi, depuis 1967, la seconde du Système International est "la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133" [12, 13].

elle est conservée lors d'interactions entre éléments du même système.

Elle est réalisée à l'aide d'horloges atomiques atteignant une précision et une stabilité de mesure inférieures à quelques 10^{-16} [14]. Des réalisations secondaires de la seconde basées sur des atomes différents sont obtenues par des horloges atomiques atteignant des précisions inférieures à $2 \cdot 10^{-17}$ [15, 16, 17]. Pour une description précise du fonctionnement des horloges et des fontaines atomiques, le lecteur intéressé se dirigera vers la référence [18].

Ainsi, la précision des méthodes utilisées pour la réalisation de la seconde fut étroitement liée aux connaissances scientifiques de l'époque, passant de mesures rudimentaires (gnomon, clepsydre ou sablier) pour en finir, de nos jours, à une définition basée sur l'atome. Elle est à présent l'unité du Système International connue avec la plus grande précision relative. Par conséquent, la mesure de nombreuses autres quantités - telles que longueurs, résistances et puissances électriques - s'appuie sur les mesures de temps ou de fréquences [13].

Dans l'Espace

"Il semblerait qu'on pourrait écarter les difficultés concernant la définition du "temps" si l'on substituait à ce dernier terme l'expression "position de la petite aiguille de ma montre". Une telle définition suffit en effet si elle concerne uniquement le lieu où se trouve l'horloge." Albert Einstein (1905)[1].

Cette citation provient de la première page de l'article d'Einstein introduisant la Relativité Restreinte. Elle souligne la différence de concept évident entre la théorie de la Relativité et la théorie de la mécanique, dite "classique", élaborée par Newton. En effet, dans un cadre relativiste, le temps est défini de façon purement locale, et n'a de signification physique que dans le voisinage infinitésimal autour de l'horloge : on parle de temps propre. Une mesure temporelle effectuée par un observateur à l'aide d'une horloge est une mesure de temps propre en ce point de l'espace. Contrairement à la théorie de Newton qui définissait un temps "absolu", la théorie d'Einstein donne au concept du temps une signification physique uniquement locale. Une mesure temporelle n'a de valeur physique qu'à l'endroit où elle est réalisée : comparer deux mesures faites à des endroits différents n'a donc aucun sens concret.

L'étude d'un système physique étendu nécessite le choix d'un référentiel. Un système de coordonnées spatio-temporelles est donné par l'association d'un repère spatial et d'un axe temporel. Dans la théorie Newtonienne, il existe des référentiels pour lesquels le temps et l'espace correspondent aux mesures à n'importe quel endroit puisque ces mesures ont une signification physique globale dans le référentiel. En relativité Générale, cela n'est plus vrai, et pour décrire un système

physique au-delà du voisinage immédiat de l'observateur, il est nécessaire de définir un système de coordonnées spatio-temporel.

Un système de référence permet la formulation des lois de la physique en fonction de quatre paramètres spatio-temporels. Ces paramètres sont notés par x^γ (l'indice grec va de 0 à 3) où $x^0 = ct$ correspond à l'axe temporel et les trois autres indices aux coordonnées spatiales. L'unité de longueur propre de ce système, le mètre, est définie à partir de la définition précédente de la seconde. En choisissant la vitesse de la lumière dans le vide c constante ($c = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$ exactement), le mètre est déterminé comme la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299792458$ de seconde. Un système de coordonnées spatio-temporel peut être choisi librement en fonction du problème à traiter, de la manière la plus arrangeante possible. Cependant, il est impératif de spécifier ce choix de façon non ambiguë lors de l'échange de données d'observation ou de résultats de calculs théoriques.

Pour passer d'une mesure effectuée à une position spatio-temporelle à l'équivalent dans ce système de coordonnées, il faut appliquer une transformation (découlant de la métrique qui sera introduite plus loin). Cela permet de passer de quantités dites *propres* à des quantités dites *coordonnées*, car ces dernières sont associées au système de coordonnées choisi. Il est important de préciser que les coordonnées choisies ainsi que les quantités définies à l'aide de celles-ci n'ont pas nécessairement de signification physique.

La prise en compte de la Relativité est devenue indispensable pour la plupart des techniques spatiales. En effet, en astrométrie de haute précision, les mesures temporelles sont basées sur des datations temporelles précises (donc sur des horloges de haute précision) ainsi que des comparaisons de ces horloges sur des grandes distances. On peut citer, par exemple, l'interférométrie à très longue base (VLBI, Very Long Baseline Interferometry²), le positionnement par satellite (IGS, International GNSS Service³), la mesure des distances à la lune, aux satellites artificiels (l'orbitographie), et interplanétaires par radar ou laser (ILRS, International Laser Ranging Service⁴), ou les programmes d'observation de la terre par satellite (altimétrie radar). Ces méthodes ont atteint une précision telle qu'il est devenu nécessaire de placer la métrologie du temps dans un cadre relativiste. A titre d'exemple, si on considérait seulement la théorie Newtonienne dans la modélisation du système de positionnement GPS, cela induirait des erreurs de l'ordre d'une centaine de mètres pour une période d'un jour.

²<http://ivscc.gsfc.nasa.gov/>

³<http://igsb.jpl.nasa.gov/>

⁴<http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>

Ainsi la définition et la réalisation de Temps sont, de nos jours, basées sur les deux piliers de la Physique Moderne, la Mécanique Quantique et la Relativité Générale.

1.1.2 Les quantités propres, les quantités coordonnée

Nous avons énoncé deux types de quantités, dont nous allons, à présent, donner une définition plus précise.

Les quantités propres correspondent aux quantités indépendantes de tout choix de convention, tel que le choix d'un système de coordonnées spatio-temporel. Elles ont une signification physique réelle puisqu'elles correspondent aux mesures effectuées par un observateur à l'aide d'un appareil, d'une horloge pour un intervalle de temps ou d'une règle pour une distance. Par exemple, le temps propre d'une particule est le temps qui serait mesuré par horloge virtuelle au repos par rapport à cette particule et en co-location avec cette particule.

A l'opposé des quantités propres, les quantités coordonnée sont définies, comme leur nom l'indique, dans un système de coordonnées et par un ensemble de conventions. Par exemple, la différence en temps coordonnée entre deux événements (la différence des coordonnées temps de ces deux événements), ou la fréquence coordonnée d'une horloge (sa fréquence par rapport à la coordonnée temps d'un système de coordonnées spatio-temporel), dépendent toutes les deux du système de coordonnées choisi. Comme exemple concret en métrologie du temps, on peut citer l'UTC (Temps Universel Coordonné) qui est défini dans le référentiel géocentrique non-tournant sur le géoïde et réalisé par le BIPM⁵ (Bureau International des Poids et Mesures) en comparant environ 350 horloges réparties autour du Globe.

Sauf dans des cas particuliers, il est impossible de trouver un système de coordonnées spatio-temporel tel que la relation entre les quantités propres et coordonnée soit constante au cours du temps. En général, il s'agit d'une fonction de la position spatio-temporelle de l'observateur, de la trajectoire de cet observateur dans le système de coordonnées choisi. Cette relation est donnée par la métrique (voir le paragraphe 1.1.4).

1.1.3 Le principe d'équivalence

Il est difficile de parler de la théorie de la gravitation sans parler du principe d'Équivalence, tellement son rôle a été important dans l'histoire du développement d'une théorie de la gravité. En effet, Newton lui consacre le premier para-

⁵<http://www.bipm.org>

graphe de son *Principia* [2] et Einstein s'en sert comme base pour la construction de sa théorie de la Relativité Générale.

En termes généraux, le principe d'Équivalence assure qu'il est impossible pour un observateur de déterminer, par des mesures locales, s'il est en chute libre dans un champ gravitationnel ou en l'absence d'un tel champ de pesanteur. Cela signifie aussi que les effets d'un champ gravitationnel sont identiques aux effets d'une accélération du référentiel de l'observateur.

Dans chaque situation, il est possible de définir un système de coordonnées local, le référentiel de chute libre, dans lequel la gravitation n'intervient pas et où les lois de la Relativité Restreinte sont respectées.

Si le principe d'équivalence d'Einstein est valable, la gravitation doit être un phénomène dû à la courbure de l'espace-temps. En d'autres mots, les effets de la gravité sont équivalents au fait de vivre dans un espace-temps courbé.

Considérons deux corps massiques tels que la masse du premier corps soit beaucoup plus importante que celle de l'autre corps considéré, comme par exemple, la Terre en rotation autour du Soleil. En Mécanique Classique, le corps en mouvement est soumis à une force centrale gravitationnelle : sa trajectoire est plane et conique⁶. En fonction de ces paramètres orbitaux, le corps peut avoir, tout comme la Terre autour du Soleil, une trajectoire elliptique autour du Soleil. Si le Principe d'Équivalence est vérifié, cette situation est analogue à un corps soumis à aucune force mais en mouvement dans un Espace courbé. Le potentiel gravitationnel du premier corps courberait l'Espace tel un tissu au milieu duquel se trouve un poids (cf. figure 1.1), et le mouvement du second corps ressemblerait à celui d'une balle dans un évier mais pour lesquels les frottements sont négligeables. En fait, sa trajectoire est le chemin le plus direct dans un espace-temps courbe comme une conséquence du principe de moindre action.

1.1.4 La métrique

Pour décrire la courbure de l'espace-temps, il existe un concept mathématique : la métrique. La métrique, élément central de cette description, détermine les relations géométriques entre les événements. Les seules théories de la gravitation qui réalisent le principe d'équivalence d'Einstein sont celles qui satisfont aux

⁶Dans un système de coordonnées polaires (r, φ) centré sur la premier corps de masse M , la formule de Binet donne, en considérant $u = 1/r$:

$$u'' + u = \frac{GM}{K^2},$$

où K dépend des paramètres orbitaux. La solution de cette équation fait partie de la famille des coniques.

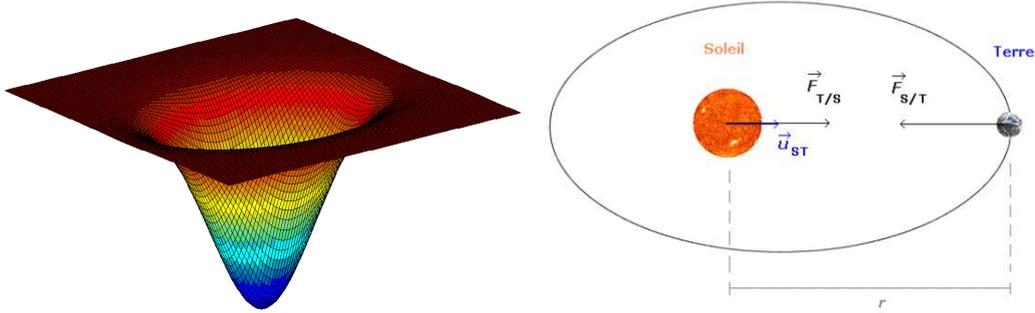


FIG. 1.1 : Interprétations possibles de la Gravitation : sur la figure de gauche, la masse du Soleil déforme l'Espace-Temps ; sur la figure de droite, la considération des forces gravitationnelles explique la rotation de la planète. Les deux figures ci-dessus sont équivalentes.

postulats des *théories métriques de la gravitation*.

Ainsi, en Relativité Générale, on définit un système de coordonnées spatio-temporel à l'aide de sa métrique $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ qui symbolise la géométrie de l'Espace-Temps considéré. En effet, un élément de longueur ds étant invariant par changement de systèmes de coordonnées, la métrique dépend forcément des coordonnées du point considéré. Dans cet espace à quatre dimensions, l'élément de longueur ds est défini par :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.1)$$

où dx^γ est un intervalle infinitésimal de distance coordonnée selon la coordonnée x^γ .

En Relativité Restreinte, l'Espace-Temps est plat puisque l'on ne considère pas la Gravitation. Les composantes du tenseur métrique η_{ij} décrivant cet espace sont données par :

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= -1, \\ \eta_{0i} &= \eta_{i0} = 0, \\ \eta_{ij} &= \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kröneckner qui est égal à 1 si i et j sont égaux et qui est nul sinon.

L'élément ds est lié aux quantités propres du point dont la trajectoire est considérée. En effet, le temps propre $d\tau$ le long d'une trajectoire correspond au temps mesure par une horloge idéale sur cette trajectoire. Pour un objet physique de

masse non-nulle, il est lié à la variable ds selon le tenseur métrique correspondant donné par l'équation (1.2), ce qui donne :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1.3)$$

Ainsi le temps propre de cet objet est relié à l'intégrale de la métrique suivant les coordonnées le long de sa trajectoire. Puisque les composantes de $g_{\alpha\beta}$ ne sont pas constantes dans le temps et dans l'espace, la relation entre quantités propres et coordonnées dépend du chemin du point considéré dans le référentiel spatio-temporel.

En effet, pour deux trajets spatio-temporels différents A et B liant deux événements identiques, les deux intervalles de temps propres $\Delta\tau^A = \frac{1}{c} \int_A \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$ et $\Delta\tau^B = \frac{1}{c} \int_B \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$ séparant ces deux faits sont, en général, différents (cf. figure 1.2).

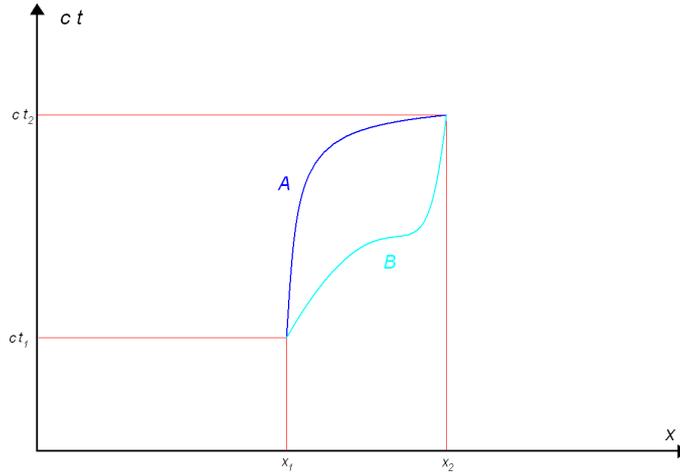


FIG. 1.2 : Deux trajets spatio-temporels A et B entre les événements (t_1, x_1) et (t_2, x_2) .

Le tenseur métrique est obtenu pour une solution particulière des équations d'Einstein pour une distribution de masse-énergie donnée dans le système de coordonnées choisi. De nombreuses solutions existent avec autant de tenseurs métriques correspondants. Entre autres, nous pouvons citer la métrique de Scharzschild qui correspond à la solution exacte des équations d'Einstein pour le cas d'un Univers contenant un seul corps à symétrie sphérique sans rotation. Elle est donnée par :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi), \quad (1.4)$$

où G est la constante universelle de gravitation ($G \equiv 6.673 \cdot 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$) et M la masse totale du corps.

Cette solution tient une place historique importante car il est possible d'en dériver l'existence et l'expression de nombreux effets relativistes tel que l'avance du périastre de la planète Mercure ou la déviation de la lumière. Cependant, elle ne s'avère en pratique que peu utile car elle ne prend pas en compte le cas de plusieurs corps gravitationnels (tel que le système solaire) ou le cas de corps non-sphériques (tel que le Terre).

1.1.5 La métrique Post Newtonienne Paramétrisée

Le formalisme PPN (Post Newtonien Paramétrisé) est une solution approchée des équations d'Einstein valable dans la limite des champs et des vitesses faibles ($\frac{U}{c^2} \ll 1$ et $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$) pour un ensemble de corps non-nécessairement sphériques et en rotation. Cette métrique est recommandée par l'Union Astronomique Internationale (UAI) [19] et peut être généralisée aux autres théories métriques de la gravitation, c'est-à-dire les théories respectant le Principe d'Équivalence d'Einstein. Avec les notations utilisées dans [20], la métrique PPN s'écrit :

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2w(t, \vec{x})}{c^2} - \frac{2\beta w^2(t, \vec{x})}{c^4}, \\ g_{0i} &= -\frac{2(1+\gamma)w^i(t, \vec{x})}{c^3}, \\ g_{ij} &= \delta_{ij}\left(1 + \frac{2\gamma w(t, \vec{x})}{c^2}\right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où β et γ sont des paramètres de la métrique sans dimension, $w(t, \vec{x})$ et $w^i(t, \vec{x})$ sont des potentiels scalaire et vecteur (dont les expressions seront données dans deux cas précis dans la suite) et avec des coordonnées spatiales non tournantes par rapport à des étoiles distantes, et leur origine au barycentre masique de l'ensemble des corps considérés. Le formalisme PPN inclut la Relativité Générale d'Einstein lorsque les paramètres β et γ sont unitaires.

Dans la plupart des applications, on considère soit le système barycentrique (BCRS, *Barycentric Celestial Reference System* [20]), soit le système géocentrique (GCRS, *Geocentric Celestial Reference System* [20]) en fonction du système physique que l'on considère. Ces deux systèmes de référence spatio-temporels seront considérés dans cette thèse de doctorat lorsque la technique de transfert de temps sera terrestre (cf. Chapitre 2) ou inter-planétaire (cf. Chapitre 6).

1. Système barycentrique (BCRS)

Dans ce système de référence spatio-temporel, l'origine des coordonnées spatiales est au centre de masse du système solaire et les axes sont non-tournants par rapport à des objets extra-galactiques. Pour la plupart des applications, les potentiels scalaire et vecteur introduits dans l'équation (1.5) peuvent s'exprimer selon :

$$\begin{aligned} w(t, \vec{x}) &= \sum_A \frac{GM_A}{r_A}, \\ w^i(t, \vec{x}) &= \sum_A \frac{GM_A v_A^i}{r_A}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La sommation porte sur l'ensemble des corps du système solaire de position x_A^i et de vitesse v_A^i , et on note r_A la distance entre le point d'étude considéré et le centre du corps massique A⁷.

Pour des applications nécessitant la prise en compte du spin ou de la non-sphéricité des planètes, des expressions peuvent être dérivées et trouvées dans les références [20, 21].

2. Système géocentrique (GCRS)

Dans le système de coordonnées géocentrique GCRS, les coordonnées spatiales ont leur origine au centre de masse de la Terre et sont non tournantes par rapport à des objets distants extra-galactiques. Si l'on considère les besoins en précision des applications présentes ou réalisées dans un futur proche, alors on peut considérer les potentiels scalaire et vecteur suivants :

$$\begin{aligned} w(t, \vec{x}) &= W_E(t, \vec{x}) + W_T(t, \vec{x}), \\ w^i(t, \vec{x}) &= -G \frac{(\vec{x} \times \vec{S})^i}{2R^3}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où R est la distance du point considéré à l'origine du référentiel, \vec{S} ⁸ est le moment cinétique de la Terre, et où W_E et W_T sont les potentiels gravitationnels Newtoniens respectivement dus à la Terre (E pour *Earth*) et aux corps externes,

⁷on a alors : $r_A = \sqrt{\sum_i (x^i - x_A^i)^2}$

⁸ $\|\vec{S}\| \simeq 5.8 \cdot 10^{33} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{kg}$ [22].

appelés aussi potentiel de marées (T pour *Tides*). Les expressions analytiques des termes W_E et W_T sont données selon leur développement en série dans [23].

3. Transformation temps propre / temps coordonnée

La formulation mathématique de la transformation entre temps propre et temps coordonnée pour le formalisme PPN s'obtient en considérant les équations (1.5). En insérant ces expressions dans l'équation (1.3), on obtient pour les paramètres β et γ unitaires :

$$-c^2 d\tau^2 = \left(-1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4}\right)c^2 dt^2 - \frac{4}{c^3} w^i dX^i c dt + \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) d\vec{X}^2. \quad (1.8)$$

En divisant les deux côtés de l'équation précédente par $(cdt)^2$, on obtient une expression du carré de la dérivée du temps propre par rapport au temps coordonnée :

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right) + \frac{4}{c^4} \vec{w} \cdot \vec{v} - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) \frac{v^2}{c^2}, \quad (1.9)$$

où $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$ est la vitesse de point considéré dans le référentiel considéré, et où \vec{w} est le vecteur constitué des composantes du potentiel vecteur w^i introduit initialement dans l'équation (1.5).

D'après les précisions atteintes par les horloges atomiques actuelles et les prévisions sur leurs incertitudes futures, on ne conserve seulement que les termes d'ordre en $1/c$ strictement supérieurs à 4. Les termes négligés correspondent à des variations relatives de fréquence inférieures à $5 \cdot 10^{-19}$ [23] pour une mission terrestre (Chapitre 2) et à $1 \cdot 10^{-16}$ pour une mission interplanétaire (Chapitre 6). Dans ce dernier cas, la prise en compte des termes d'ordres supérieurs est nécessaire au développement d'un modèle précis de transfert de temps pour les missions interplanétaires mais n'est pas critique pour les calculs réalisés dans le dernier chapitre de cette thèse.

On part de l'approximation PPN :

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{2w}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + O(c^{-4}), \quad (1.10)$$

soit, si l'on néglige les termes en c^{-4} , la variation du temps propre en fonction du temps coordonnée est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d\tau}{dt} \approx 1 - \frac{w(t, \vec{x})}{c^2} - \frac{v^2(t)}{2c^2} + O(c^{-4}). \quad (1.11)$$

Le terme proportionnel au potentiel gravitationnel est appelé le décalage fréquentiel gravitationnel. Si l'on considère, par exemple, deux horloges situées l'une au niveau de la mer, l'autre au sommet d'une montagne, la différence de fréquence des deux horloges sera proportionnelle à la différence des potentiels gravitationnels des deux endroits considérés. Le dernier terme de l'équation (1.11) correspond à un effet Doppler du second ordre. Cet effet fut auparavant identifié dans le cadre de la Relativité Restreinte.

L'équation (1.11) nous permet d'introduire deux notations nécessaires à l'allègement et à la compacité des équations de la suite de la thèse. Elles nous aideront à exprimer les passages d'une échelle de temps à une autre, et en particulier les transformations de temps propre en temps coordonnée. On note tout d'abord $[\cdot]^A$ l'application linéaire $X \mapsto [X]^A$ transformant un intervalle de temps coordonnée en intervalle de temps propre d'un point A . Ainsi l'intervalle de temps propre pour une horloge située en A correspondant à l'intervalle de temps coordonnée $T_{12} = t_2 - t_1$ s'écoulant entre t_1 et t_2 est donné par l'intégrale du terme de droite de l'équation (1.11) le long de la trajectoire du point A , soit :

$$[T_{12}]^A = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{w(t, \vec{x}_A)}{c^2} - \frac{v_A^2(t)}{2c^2}\right) dt. \quad (1.12)$$

L'équation (1.12) permet ainsi d'exprimer et de calculer mathématiquement un intervalle de temps coordonnée transformé en temps propre de A .

De façon similaire, on peut définir l'application qui transforme un intervalle de temps propre d'un point A en intervalle de temps coordonnée. Ainsi la correspondance de l'intervalle de temps propre $\Delta\tau_{12}^A = \tau_2^A - \tau_1^A$ mesuré par une horloge située le long de la trajectoire de A avec l'intervalle équivalent en temps coordonnée est donnée par l'équation suivante :

$$[\Delta\tau_{12}^A]^t = \int_{\tau_1^A}^{\tau_2^A} \left(1 + \frac{w(t, \vec{x}_A)}{c^2} + \frac{v_A^2(t)}{2c^2}\right) d\tau^A. \quad (1.13)$$

Le terme de droite de l'équation (1.13) fait intervenir des fonctions du temps coordonnée t . A la précision recherchée, le paramètre t peut être remplacé par la variable τ^A lors du calcul de l'intégrale.

Ces deux applications linéaires définies ci-dessus sont des applications inverses à l'ordre c^{-4} . En effet si l'on combine les deux relations (1.12) et (1.13), on obtient :

$$[[.]^A]^t = Id + O(c^{-4}) = [[.]^t]^A, \quad (1.14)$$

où Id est l'application identité de l'espace considéré.

1.1.6 La simultanéité

La définition de simultanéité d'événements donnée dans la partie 1.1.1 semble être rendue obsolète compte tenu de la définition du temps. En effet, il semble impossible de définir ou de donner un sens à une simultanéité d'événements en Relativité Générale puisque le temps est défini comme une quantité physique uniquement locale. Comme le précise Albert Einstein dans [1], "*il ne faut attribuer à la notion de simultanéité une signification absolue*". Elle repose sur un choix conventionnel, de même que le choix du système de coordonnées spatio-temporelles.

De ce fait, une convention de simultanéité d'événements distants doit nécessairement être définie en Relativité Générale. Elle dépend d'un choix d'une convention, de même que pour le choix du système de coordonnées spatio-temporel.

Il existe plusieurs conventions de synchronisation entre deux horloges. On pourra citer par exemple la convention d'Einstein ou celle par transport lent d'horloge. Mais pour des raisons de non-transitivité, elles posent des problèmes lors de l'établissement du temps international. Effectivement, si l'on considère les horloges de trois pays A , B et C , il se peut que A et B soient synchronisées avec C mais qu'elles ne le soient pas entre elles.

Pour éviter ce genre de problèmes, on prend la convention de simultanéité coordonnée :

dans un système de coordonnées défini, deux événements (t_1, x_1) et (t_2, x_2) sont dits simultanés, si et seulement si, $t_1 = t_2$.

Cette convention assure la transitivité de la propriété mais nécessite de préciser le référentiel spatio-temporel de convention, et donc sa métrique. Mais cela implique que deux événements synchronisés dans un système de coordonnées ne le seront probablement pas dans un autre. Cette convention est utilisée pour établir le Temps Atomique International ainsi que pour la synchronisation des satellites GPS en considérant le système de coordonnées géocentrique décrit ci-dessus.

Dans la suite, lorsqu'on étudiera la synchronisation de deux échelles de temps propre τ^A et τ^B , on s'intéressera à la différence de ces temps propres au même temps coordonnée, soit à $\tau^A(t) - \tau^B(t)$, appelée la désynchronisation entre les horloges A et B . Si cette différence est nulle, on dira que les horloges sont synchronisées à t dans le référentiel considéré.

1.2 Méthodes de comparaisons d'horloges

En comparant deux horloges, on cherche à déterminer leur écart en temps et/ou leur écart en fréquence. Dans le premier cas, on parle d'un "transfert de temps", et de "transfert de fréquence" dans le second. Le transfert de temps - ou synchronisation - revient à synchroniser les deux horloges, ou encore à déterminer l'écart en phase entre les deux signaux fournis. De la même manière, on appelle le transfert de fréquence aussi la "syntonisation" des horloges c'est-à-dire la détermination de la différence en fréquence entre les deux signaux. Quand les deux horloges sont placées l'une à côté de l'autre la comparaison ne pose pas de problème conceptuel particulier car il s'agit de comparer deux mesures de la même quantité locale (le temps local). Mais lorsque les deux horloges à comparer sont éloignées il faut prendre en compte les effets de la Relativité Générale et s'appuyer sur une convention de simultanéité.

Concernant la description des différentes méthodes de comparaison de cette partie, nous considérons dans un premier temps que les horloges sont parfaites, donc non bruitées, et qu'elles délivrent un pulse par seconde, c'est-à-dire un signal très court se répétant toutes les secondes.

De plus, les quantités coordonnées seront définies dans le système de coordonnées GCRS, et la métrique utilisée sera une solution approchée des équations d'Einstein, la métrique PPN (cf. 1.1.5). Les temps coordonnés seront notés par t_i et un intervalle de temps coordonné par $T_{ij} = t_j - t_i$ contrairement aux temps propres définis dans une région spatiale restreinte autour d'un point A qui seront caractérisés par la lettre grecque τ_i avec $\Delta\tau_{ij}^A = \tau_j^A - \tau_i^A$. Les deux horloges considérées seront donc nommées *horloge A* et *horloge B* et produiront leur propre échelle de temps nommée respectivement τ^A et τ^B .

1.2.1 Comparaisons d'horloges locales

Ce premier exemple va permettre de comprendre les bases et le raisonnement mis en jeu dans la comparaison d'horloges. Les deux horloges A et B sont situées à proximité l'une de l'autre. Le terme "proximité" signifie ici que les horloges sont suffisamment proches pour que les effets relativistes soient négligeables face aux incertitudes des horloges.

Cette comparaison d'horloges se déroule en plusieurs étapes (cf. figure 1.3) :

- émission d'un signal référencé par rapport à l'horloge A au temps coordonné t_1 ,
- propagation vers le comparateur qui reçoit le signal au temps t_2 ,

- émission vers le comparateur d'un signal référencé par rapport à l'horloge B au temps coordonné t_3 ,
- arrivée au comparateur du signal au temps coordonné t_4 .



FIG. 1.3 : Schéma de la comparaison locale.

La mesure $\Delta\tau^C$ faite par le système de comparaison de phase correspond à une mesure de temps propre dans l'échelle temporelle locale du comparateur notée τ^C . Elle s'apparente à la transformée en temps propre τ^C de l'intervalle de temps coordonné $T_{24} = t_4 - t_2$. Elle s'exprime en fonction de la notation définie en (1.12) par $\Delta\tau^C = [T_{24}]^C$.

La quantité qui caractérise la désynchronisation - ou l'écart de phase - entre les horloges au temps coordonné t_1 est :

$$\tau^A(t_1) - \tau^B(t_1) = \tau^A(t_1) - \tau^B(t_3) + \tau^B(t_3) - \tau^B(t_1) = [T_{13}]^B, \quad (1.15)$$

la dernière égalité ($\tau^A(t_1) = \tau^B(t_3)$) provenant du fait que l'on compare le même pulse des deux horloges. L'intervalle de temps coordonné T_{13} s'exprime en fonction de la mesure réalisée au comparateur et des "temps de propagation" des signaux des horloges jusqu'au comparateur (T_{34} et T_{12}) :

$$T_{13} = t_3 - t_4 + t_4 - t_2 + t_2 - t_1 = T_{24} - (T_{34} - T_{12}) = [\Delta\tau^C]^t - (T_{34} - T_{12}).$$

Dans le cas où le potentiel gravitationnel et la vitesse exprimée dans le référentiel géocentrique peuvent être considérés comme constants dans l'espace considéré, alors la désynchronisation des horloges s'écrit :

$$\tau^A(t_1) - \tau^B(t_1) = \Delta\tau^C + \tau_{12} - \tau_{34}, \quad (1.16)$$

où τ_{12} et τ_{34} sont les délais des câbles exprimés en temps propre de l'endroit où se trouve le câble. La comparaison d'horloges locales ne dépend que de mesures de temps propres (donc de mesures locales) : cela confirme que pour ce type de comparaison, un traitement relativiste du transfert de temps n'est pas obligatoire puisque les effets dus à la variation du potentiel et de la vitesse sur la taille de l'expérience sont négligeables en face des incertitudes expérimentales.

1.2.2 Comparaisons d'horloges distantes

La comparaison par satellite est, de nos jours, la technique de transfert de temps et de comparaison d'horloges la plus couramment utilisée du fait de son exactitude et de sa fiabilité. Née dans les années 80 avec le lancement des premiers satellites, elle est devenue communément employée puisqu'elle intervient dans les processus de positionnement satellitaire.

Ce transfert met généralement en jeu deux horloges que l'on tente de synchroniser à l'aide d'un signal (optique ou micro-onde) via un satellite jouant soit le rôle d'un relais, soit possédant à son bord une horloge. Pour cela, on cherche à déterminer leur écart en temps et/ou en fréquence.

Les principes de base de ces transferts seront décrits et accompagnés d'exemples afin d'étudier la relation entre la désynchronisation et les mesures physiques brutes, et d'en faire ressortir les avantages de chacun d'entre eux.

Le *One-Way*

Principe

Le principe de ce transfert se traduit en différentes étapes selon la figure 1.4 :

- émission par le modem MA d'un signal référencé par rapport à l'horloge A (constitué soit d'une porteuse sinusoïdale et d'un code pseudo aléatoire, soit d'un pulse enveloppe) au temps coordonné t_1 ,
- propagation vers l'antenne d'émission pour être émis au temps coordonné t_2 ,
- réception au temps coordonné t_3 sur l'antenne,
- arrivée du signal au temps t_4 , au modem MB,
- création du même signal par le modem MB référencé à l'horloge B au temps t_5 .



FIG. 1.4 : Schéma du transfert de temps à une voie.

L'observable brute mesurée va donc être l'intervalle de temps propre de l'horloge B, $\Delta\tau_{45}^B$ (ici noté $\Delta\tau^B$), écart entre les temps d'arrivée des signaux créés par les horloges A et B au modem MB. Les intervalles de temps propre $\Delta\tau_{T1}^A$ et $\Delta\tau_{R2}^B$ sont les retards de propagation dans les systèmes internes respectivement pour la

transmission et la réception du signal émis par l'horloge A qui sont étalonnés au départ de l'étude.

La désynchronisation des horloges est donnée par :

$$\tau^B(t_5) - \tau^A(t_5) = -[T_{15}]^A, \quad (1.17)$$

où $T_{15} = [\Delta_{T_1}^A]^t + T_{23} + [\Delta_{R_2}^B]^t + [\Delta\tau^B]^t$, et où T_{23} correspond à l'intervalle de temps coordonnée entre l'émission et la réception du signal par les antennes, au temps de propagation calculé du signal dans l'atmosphère.

L'expression (1.17) ci-dessus fait intervenir des transformations *temps propre / temps coordonnée* dépendant de potentiels et de vitesses de valeurs variables et donc nécessite un traitement relativiste afin d'évaluer précisément les termes présents.

Exemples

Les solutions de transfert par satellites *one-way* comprennent plusieurs systèmes d'origine et de technologies différentes. Le plus connu est le système GPS américain mais il existe d'autres systèmes tels que Glonass ou Galiléo. En général, on utilise deux porteuses de fréquences différentes dans le but de s'affranchir de l'effet perturbateur de l'ionosphère contenu dans le terme T_{12} (un modèle de la ionosphère étant bien moins précis). Le segment utilisateur est quant à lui uniquement descendant ce qui fait du GPS et de ses analogues des systèmes de transfert *one-way* bifréquence.

1. GPS

Le système GPS (*Global Positioning System*) est issu d'un programme militaire Américain datant de 1958 (un an après le lancement du premier satellite). Ce programme visait à obtenir la position d'un mobile terrestre à partir d'émissions radio en provenance d'un satellite. Dans les années 1970, le Département de la Défense des États-Unis met en place ce qui deviendra le système GPS. Il devient opérationnel en 1990 mais reste, dans un premier temps, réservé aux militaires qui en cryptent les émissions. Celui-ci sera, quelques années après, ouvert à une utilisation civile sous la pression du marché (plusieurs milliards de dollars par an). L'ouverture au marché civil peut s'accompagner toutefois d'une dégradation des performances introduite par les militaires. Nommé *Selective Availability*, ce système peut dégrader, en fonction des tensions géopolitiques, la précision du GPS à 100 m dans 95 % des mesures.

Le système GPS se base sur une constellation de 27 satellites de type NAVSTAR regroupés sur six plans orbitaux quasi-circulaires à 20 000 km d'altitude inclinés de 59° . Il est ainsi possible de voir entre 4 et 10 satellites de n'importe quel point du globe. Ces satellites émettent continuellement un flux d'information comportant des données (concernant leur orbite et des informations temporelles) datées avec une extrême précision à l'aide de deux horloges atomiques (l'une servant d'horloge de secours) dans chaque satellite. Ces transferts sont réalisés sur deux porteuses polarisées circulairement de fréquences 1575.42 MHz et de 1222.76 MHz et modulées par deux codes de fréquence 10.23 MHz et 1.023 MHz. Le segment de contrôle est constitué de cinq stations réparties dans le monde et recevant en permanence les signaux radiofréquences émis par les satellites. Après traitement des données reçues, les satellites sont mis à jour quant à leurs informations de navigation.

2. GLONASS

Le *GLOBAL NAVIGATION SATELLITE SYSTEM* est un système d'origine russe concurrent au système GPS. Il est actuellement constitué de neuf satellites opérationnels. Cependant le système russe n'est pas limité par une dégradation volontaire des signaux. Certains récepteurs intègrent les systèmes GLONASS et GPS de manière à présenter une meilleure précision par obtention d'une valeur moyenne entre les deux systèmes. Un complément européen nommé EGNOS (*European Geostationary Navigation Overlay Service*) aux deux systèmes militaires précédents fut mis en orbite à la fin des années 90 afin d'éviter aux autorités civiles en charge de la navigation aérienne des trous de couverture de l'ensemble des satellites.

3. GALILEO

Ce système européen (nommé Galileo) se décrit comme une alternative au GPS. Au début des années 2000, l'Union Européenne lance le projet Galileo pour différentes raisons. D'une part pour des raisons d'indépendance, puisque l'accès au système GPS peut être interrompu en temps de guerre, et ainsi poser des problèmes pour la gestion du trafic maritime, automobile ou aérien. D'autre part pour des raisons plus pragmatiques : le nombre d'utilisateurs pour ces services de navigation pourrait atteindre 1.8 milliards en 2010 et 3.6 milliards en 2020 : rien qu'en Europe, cela représenterait un marché de plus de 250 milliards d'euros. L'implantation dans le ciel a débuté le 28 décembre 2005 par l'envoi, sur une orbite à 25 000 kilomètres, du satellite Giove-A, puis a été poursuivie par le décollage de Giove-B lancé le 27 avril 2008.

Le nombre de satellites de navigation visibles va croître et ainsi, permettre, par l'utilisation de récepteur multi-systèmes, la compatibilité des différentes technologies de transfert de temps et une meilleure précision des mesures.

Le *Two-Way*

Principe

Cette méthode de transfert de temps se base sur la combinaison simple de deux transferts "une voie" afin d'obtenir l'annulation de certains termes ou la réjection de certains effets du fait de la corrélation des mesures aller et retour (à condition que les deux horloges soient, au préalable, approximativement synchronisées).

Elle se décompose en plusieurs étapes (voir figure 1.5) :

- émission par le modem MA d'un signal référencé par l'horloge A au temps coordonnée t_1 ,
- propagation vers l'antenne A d'émission pour être émis au temps coordonnée t_2 ,
- réception au temps coordonnée t_3 sur l'antenne B ,
- arrivée du signal au temps t_4 au modem MB,
- création du même signal par le modem MB référencé à l'horloge B au temps t_5 ,
- propagation du signal vers l'antenne B puis son émission au temps t_6 ,
- réception du signal sur l'antenne A au temps t_7 ,
- arrivée au modem MA du signal au temps t_8 .

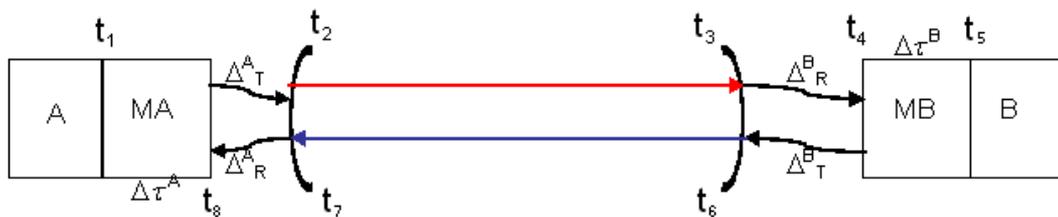


FIG. 1.5 : Schéma du transfert de temps à deux voies.

Les intervalles de temps propre $\Delta\tau_T^A$ et $\Delta\tau_T^B$ sont les retards de transmission dans les systèmes internes respectivement pour A et B . Les intervalles de temps propres $\Delta\tau_R^A$ et $\Delta\tau_R^B$ sont les délais internes de réception pour les systèmes A et B . Tous ces retards internes sont préalablement étalonnés. On dispose, dans le cas du *two-way*, de deux observables, $\Delta\tau^B = \Delta\tau_{45}^B = [t_5 - t_4]^B$ et $\Delta\tau^A = \Delta\tau_{18}^A = [t_1 - t_8]^A$, qui

vont nous permettre d'exprimer de deux manières différentes l'intervalle de temps coordonnée T_{15} et donc la désynchronisation entre les horloges.

$$T_{15} = [\Delta_T^A]^t + T_{23} + [\Delta_R^B]^t + [\Delta\tau^B]^t, \quad (1.18)$$

$$T_{15} = -[\Delta_T^B]^t - T_{67} - [\Delta_R^A]^t - [\Delta\tau^A]^t, \quad (1.19)$$

où T_{23} et T_{67} sont les temps de propagation aller et retour dans l'atmosphère qui sont estimés par des calculs précis.

La désynchronisation des horloges pour un système *two-way* est donnée par l'équation (1.17) où l'intervalle temporel T_{15} est évalué en moyennant les équations (1.18) et (1.19) :

$$\begin{aligned} \tau^B(t_5) - \tau^A(t_5) = & -\frac{1}{2} \left[[\Delta\tau^B - \Delta\tau^A]^t + [\Delta_T^A - \Delta_R^A]^t \right. \\ & \left. + [\Delta_R^B - \Delta_T^B]^t + (T_{23} - T_{67}) \right]^A. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Cette méthode permet de ne plus nécessiter la connaissance de l'ensemble des termes de propagation ou de retard interne intervenants dans l'expression (1.20), mais seulement d'en maîtriser les différences.

Exemples

1. Le TWSTFT ou *Two-Way Satellite Time and Frequency Transfer*

Dans ce système de transfert, un satellite géostationnaire sert de relais pour l'échange de deux signaux émis par deux horloges au sol. Ces signaux sont en général constitués d'une porteuse de fréquence comprise entre 11 *GHz* et 14 *GHz* sur laquelle est superposé un code PRN permettant une mesure non-ambiguë de la désynchronisation. Ce fut la première méthode deux voies utilisée en 1962 pour effectuer une comparaison d'horloges atomiques avec une haute précision. Ainsi, dans la formule (1.20) énoncée pour le calcul de la désynchronisation entre les deux horloges, il faut remarquer tout d'abord que T_{23} et T_{67} correspondent aux temps écoulés pour effectuer le trajets *station sol 1/satellite/station sol 2*, puis qu'il est nécessaire d'ajouter un terme correspondant à la différence des retards aller et retour dans le répéteur du satellite géostationnaire.

2. La méthode PRARE

Le système PRARE (*Precise Range And Range-Rate Equipment*) est un système compact de télémétrie hyperfréquence à deux voies, deux fréquences. Le segment espace a été développé, entre autres, par deux entreprises, TimeTech et Kayser-Threde, qui sont à présent en charge du lien micro-onde (MWL) sur la Station Spatiale Internationale (ISS). Après d'intensifs essais au sol et de calibration, le système de PRARE fut la première fois opérationnel à bord du satellite météorologique russe Meteor-3 de janvier 1994 à octobre 1995. A présent, le satellite accueillant le système PRARE est le satellite ERS-2 lancé en avril 1995 et, depuis le début de l'année 1996, PRARE réalise quotidiennement 50 000 mesures par seconde. Il utilise des porteuses de fréquences 2248 et 8489 MHz sur lesquelles sont superposés des codes pseudo-aléatoires. De plus, le système PRARE se compose d'un réseau d'une vingtaine de petites stations mobiles de poursuite au sol équipées d'antenne de 60 cm de diamètre. Cette méthode peut atteindre une exactitude et une stabilité de l'ordre du centimètre dans la mesure de la distance du satellite au sol après une période de 300 s d'intégration.

3. T2L2

Le système T2L2 (*Time Transfer by Laser Light*) est une méthode optique reposant sur l'envoi de pulses laser véhiculant l'information temporelle. Les pulses - d'une durée temporelle de l'ordre de 20 ps - sont envoyés du sol par une station laser, réfléchis sur le satellite et reçus au sol par un télescope, ce qui en fait un système deux voies mono-fréquentiel. Les dates de départ et d'arrivée de l'impulsion sont mesurées par l'horloge au sol et la réflexion du pulse par le satellite est datée par rapport à l'horloge embarquée. Après réunification des mesures enregistrées par le satellite et au sol, il est possible de calculer, à l'aide de ces trois dates, l'écart entre l'horloge au sol et l'horloge spatiale, et ainsi de déterminer la désynchronisation entre les deux horloges.

Le but de T2L2 est la réalisation d'un transfert de temps avec une stabilité de 100 ps à une seconde et 1 ps sur mille secondes avec une exactitude inférieure à 200 ps [24]. Bien que les méthodes de transfert de temps les plus couramment utilisées sont actuellement de type radiofréquentiel (GPS, TWSTFT), l'exactitude de ces techniques atteint quelques nanosecondes et sont donc relativement loin de celles du système T2L2. Cependant, l'un des inconvénients majeurs de ce transfert de temps par lien optique réside dans le fait que son utilisation et ses performances sont fortement liées aux conditions météorologiques.

4. L'expérience Vessot

L'expérience menée en 1976 par Vessot et Levine a permis une mesure du

décalage relativiste des fréquences (voir partie 1.3.1) avec une incertitude relative de l'ordre de $7.5 \cdot 10^{-5}$ [25]. Elle consistait à comparer les fréquences de deux horloges (des masers à hydrogène) - la première au sol, la seconde dans la fusée GPA (Gravity Probe A) lancée verticalement à 10 000 km d'altitude - à l'aide d'une méthode deux voies auxquelles on ajoute une fréquence additionnelle descendante. Les fréquences utilisées se trouvaient dans le domaine micro-onde avec des valeurs de 2117.70, 2203.08 et 2299.75 MHz choisies pour réaliser en temps réel l'annulation du terme Doppler du premier ordre du fait du manque, à l'époque, de base numérique et de traitement postérieur à l'expérience. La méthode de calcul fréquentiel se basait sur la multiplication des signaux reçus et sur l'étude des battements. On peut considérer ce protocole comme étant l'ancêtre de la mission ACES.

Autres méthodes

Tirant partie des récents travaux effectués sur le sujet, des chercheurs ont utilisé des fibres optiques de télécommunication pour comparer des horloges distantes. Cette méthode s'est montrée plus performante que les méthodes satellitaires sur des distances relativement courtes et atteint des stabilités en fréquence relative de 10^{-16} à une seconde et de 10^{-19} après dix milles secondes d'intégration. Bien que peu prometteuses sur des comparaisons à longue distance, elles pourraient jouer un rôle vérificateur en joignant deux stations sol reliées par un satellite [26]. Un projet visant ces objectifs est actuellement en discussion entre la France et l'Allemagne.

Tableau récapitulatif

Le tableau suivant (tableau 1.1) compare les performances des actuelles méthodes de transfert de temps. Cette comparaison se porte sur leur stabilité temporelle (à 1000 secondes et 24 heures) et sur leurs exactitudes temporelle et fréquentielle au bout de 24 heures d'intégration.

TAB. 1.1 : Comparaison des méthodes actuelles de transfert de temps [24, 27, 28].

Méthode de transfert de temps	Stabilité temporelle après		Inexactitude	
	1000 secondes	24 heures	temporelle	fréquentielle
GPS Code	5 ns	1 ns	1 – 5 ns	$2 \cdot 10^{-14}$
GPS Carrier Phase	20 ps	0.1 ns	1 – 3 ns	$5 \cdot 10^{-16}$
TWSTFT	0.1 ns	0.1 – 0.2 ns	1 ns	$5 \cdot 10^{-16}$
T2L2	1 ps	8 ps	200 ps	$1.5 \cdot 10^{-16}$

Applications du transfert de temps

Les applications de la métrologie du temps, et en particulier du transfert temporel et fréquentiel, sont nombreuses aussi bien en recherche scientifique que dans la vie courante.

Le positionnement par satellite est sans doute, une des applications du transfert de temps et de la métrologie du temps (du fait des horloges atomiques embarquées) les plus largement utilisées. Il nécessite l'observation simultanée de quatre satellites, l'un pour la synchronisation de l'horloge du récepteur avec l'échelle de temps du système satellitaire, les trois autres pour trianguler la position du récepteur en réalisant des mesures de distances. Ce positionnement par satellites atteint quelques mètres en temps réel et trouve de nombreuses applications dans le domaine civil et militaire.

La comparaison régulière d'environ 350 horloges réparties à la surface du Globe permet l'établissement du TAI (Temps Atomique International) et le Temps Universel Coordonné (UTC). L'UTC est la base du temps légal dans tous les pays et sert de base pour la datation des transactions, pour les horaires officiels ou pour la diffusion des signaux horaires tels que France Inter ou l'horloge parlante.

La synchronisation d'horloges distantes commence à jouer un rôle de plus en plus important dans certains domaines industriels, notamment les télécommunications. En effet, l'échange de grandes quantités de données et l'optimisation des moyens en place (en termes de débit) pose des contraintes de plus en plus sévères sur la synchronisation et syntonisation des divers sous-systèmes qui transmettent ces données.

Concernant le domaine de la recherche, la métrologie du temps et la synchronisation d'horloges distantes interviennent en astronomie observationnelle. Des événements astronomiques peuvent être observés à différents endroits, mais pour être comparés, il doivent être datés dans la même échelle de temps. Cela suppose que les observatoires se synchronisent, et cela avec une bonne incertitude pour des applications telles que la datation des pulsars millisecondes. De plus, des techniques d'observation interférométriques, telle que le VLBI⁹ (Very Long Baseline radio Interferometry) nécessitent des échelles de temps d'une grande stabilité de fréquence pour l'enregistrement des séries temporelles des données.

Enfin, la recherche en Physique Fondamentale est un des domaines qui profitent le plus de l'essor de ces technologies. Les performances grandissantes des horloges atomiques et des méthodes de transfert temps/fréquence permettent de tester ce domaine, et en particulier la théorie de la Gravitation. La section sui-

⁹<http://www.evlbi.org/>

vante sera consacrée à la liste exhaustive des différents tests effectués en Physique Fondamentale.

1.3 Tester la Physique Fondamentale

Les systèmes actuels de transfert de temps utilisent des horloges stables situées aux stations sol mais aussi à bord des satellites afin de fournir des informations fiables et utilisables. L'impact des effets relativistes sur ces systèmes est important de telle manière que si on ne les prenait pas en compte, on observerait une erreur en positionnement GPS d'une centaine de mètres.

Cette partie a pour but de survoler les différentes parties de la Relativité Générale pouvant être testées à l'aide de transferts de temps et de faire une description succincte des différents tests possibles. Pour chaque section, nous détaillerons les dernières mesures effectuées ainsi que leurs précisions atteintes sur le paramètre étudié. Nous évoquerons aussi les futures projets ambitionnant une amélioration de ces mesures.

1.3.1 Les tests du principe d'équivalence

Le principe d'équivalence joue un très grand rôle en théorie de la Gravitation. En 1907, Einstein s'en sert comme point de départ par le développement de la Relativité Générale. Il se décompose en trois parties :

- le principe d'équivalence faible (ou WEP, *Weak Equivalence Principle*) qui assure que la trajectoire d'une masse en chute libre n'étant soumis ni à des forces électromagnétiques, ni à des forces de marée, est indépendante de sa structure interne et de sa composition,
- l'invariance locale de Lorentz (ou LLI, *Local Lorentz Invariance*) qui prétend que le résultat de n'importe quelle expérience non-gravitationnelle est indépendant de la vitesse du référentiel localement inertiel dans lequel elle est effectuée.
- et l'invariance locale de position (appelée *Local Position Invariance*, LPI) : le résultat d'une expérience non-gravitationnelle est indépendant du moment et de l'endroit dans l'univers où elle est réalisée pour un observateur en chute libre et sans rotation.

Si le Principe d'Équivalence d'Einstein est violé, cela signifie que la gravitation ne peut pas être correctement décrite par une théorie métrique. Si le formalisme PPN est violé cela signifie que la théorie de la Relativité Générale n'est pas la bonne théorie de la gravitation. En effet, la théorie d'Einstein est une théorie métrique de la gravitation mais elle n'est pas la seule. Par exemple, la théorie de

Brans et Dicke est aussi une théorie métrique de la gravitation (pour plus d'informations se reporter à [29]).

Le principe d'équivalence faible

La légende dit que, lorsqu'en 1599 Galilée lâche, du haut de le Tour de Pise des balles de plomb, de bois, de papier et découvre que tous ces corps sont animés du même mouvement et cela, quelle que soit leur masse, il réalise le premier test du Principe d'Équivalence faible¹⁰. De nos jours, la façon la plus simple de tester ce principe consiste à étudier la chute de deux objets de composition différente dans un champs de gravitation et de comparer leur accélération. La déviation au principe est mesuré en utilisant le rapport d'Eötvös μ défini par :

$$\mu = 2 \frac{\|\vec{a}_1 - \vec{a}_2\|}{\|\vec{a}_1 + \vec{a}_2\|},$$

où \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont les accélérations des deux objets considérés.

La mesure de ce paramètre μ a connu une grande évolution dans sa précision (cf. figure 1.6). Actuellement la plus précise a été réalisée en utilisant la balance de torsion du groupe de E. Adelberger de l'Université de Washington et a atteint récemment une incertitude de $1.8 \cdot 10^{-13}$ [30]. L'étude de la dynamique du système Terre-Lune - constitué de deux astres de composition différente en chute libre dans le champ gravitationnel du Soleil - permet d'atteindre, à l'aide de la télémétrie laser (LLR, *Lunar Laser Ranging*¹¹), une précision équivalente sur ce test grâce à l'accumulation de données depuis plus de 35 années¹².

Plusieurs expériences spatiales visent à réduire l'imprécision sur le paramètre d'Eötvös. Tout d'abord l'expérience Microscope¹³ (Micro-Satellite à Trainée Compensée pour l'Observation du Principe d'Équivalence) utilise deux accéléromètres différentiels pour une précision visée de $\mu \approx 10^{-15}$. Ensuite on peut citer le projet STEP¹⁴ (*Satellite Test of the Equivalence Principle*) qui est une version améliorée et cryogénique de Microscope et dont le but est d'atteindre une incertitude de 10^{-18} sur μ . Enfin la mission Galileo Galilei¹⁵ concerne un accéléromètre diffé-

¹⁰Il s'agit de la question au sujet de l'égalité entre masse inerte et masse pesante. La loi de la dynamique pour un objet de masse inertiel m_i et de masse gravitationnel m_g dans un champs de gravitation $\vec{g}(\vec{x}, t)$ est donnée par $m_i \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m_g \vec{g}(\vec{x}, t)$.

¹¹<http://www.iers.org>

¹²Ce test par télémétrie laser n'est pas un test du principe d'Équivalence faible à strictement parler, mais plutôt un test du principe d'Équivalence fort qui, à partir de résultats extérieurs, conduit à contraindre le principe d'Équivalence faible [9].

¹³<http://smcs.cnes.fr/MICROSCOPE>

¹⁴<http://einstein.stanford.edu/STEP>

¹⁵<http://eotvos.dm.unipi.it>

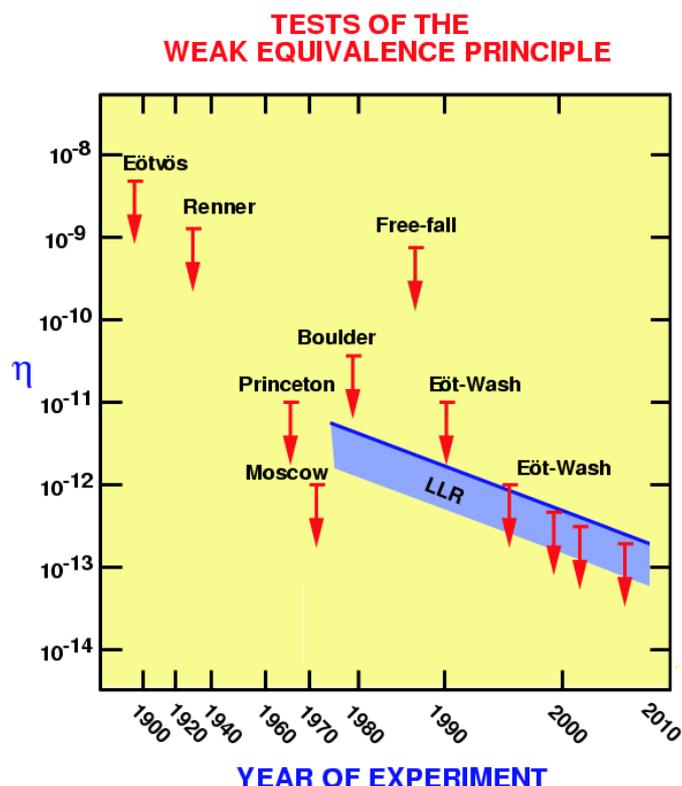


FIG. 1.6 : Évolution de la précision atteinte sur le Principe d'Équivalence faible selon le paramètre μ .

rentiel en rotation rapide pour atteindre une précision de 10^{-15} dans l'Espace.

L'Invariance Locale de Lorentz (ILL)

Ce principe indique qu'un observateur réalisant une expérience non gravitationnelle, c'est-à-dire une expérience ne mettant en jeu que les autres interactions, ne peut détecter ni son orientation spatiale ni son mouvement. Cela signifie aussi que les résultats de son expérience ne peuvent révéler une direction particulière de l'Espace-Temps.

Le cadre théorique le plus simple pour rechercher une violation de ce principe est le formalisme c^2 . Il propose de chercher une différence entre la célérité c d'une onde électromagnétique et la vitesse limite d'une particule massive c_0 . La recherche d'une telle différence revient à l'existence d'un référentiel privilégié dans lequel $c = c_0$, ce qui n'est plus vrai pour des référentiels en mouvement constant par rapport à celui-ci. Pour quantifier l'écart à ce principe, on définit le paramètre δ selon $\delta = |(\frac{c_0}{c})^2 - 1|$. Cependant, pour poser une limite inférieure à ce para-

mètre, il faut déterminer ce rapport pour l'ensemble des directions de l'Espace. Il est souvent supposé que le référentiel préférentiel est celui où le rayonnement à $3K$ est isotrope [31] et qu'une violation de l'ILL doit être liée à notre mouvement par rapport à celui-ci.

Les expériences testant l'Invariance Locale de Lorentz sont nombreuses et de natures très diverses, augmentant ainsi la pertinence des résultats (cf. figure 1.7). Par exemple, une violation du ILL entraînerait un léger décalage des niveaux d'énergie d'une particule, qui dépend, entre autres, de l'orientation de l'axe de quantification. Ce type d'expérience constitue les mesures "d'anisotropie d'horloge" [32]. D'autres tests de ce principe sont effectués par des expériences du type Michelson-Morley [33] ou par des comparaisons des fréquences de cavités électromagnétiques [34, 35].

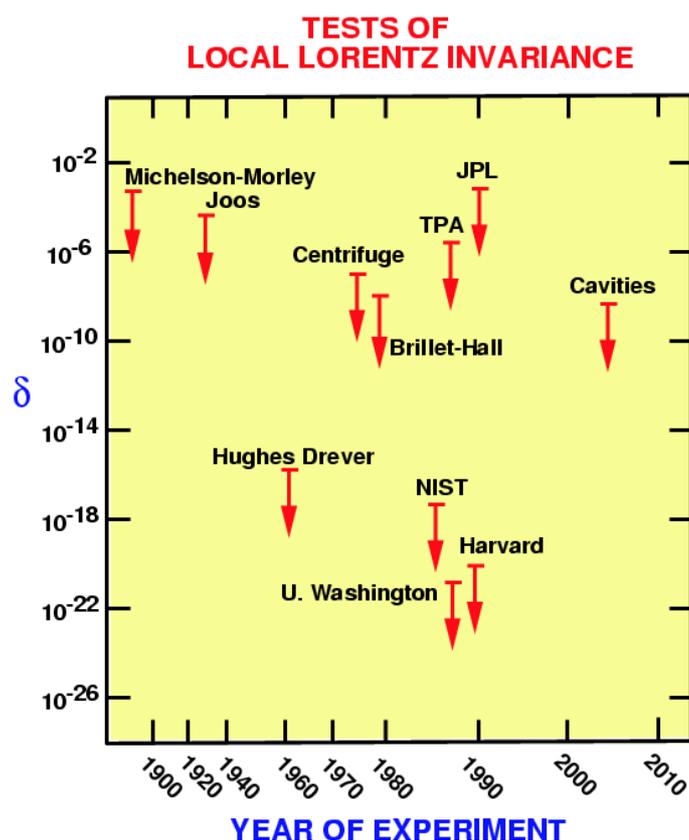


FIG. 1.7 : Évolution de la précision atteinte sur l'Invariance Locale de Lorentz selon le paramètre δ .

Le Principe d'Invariance Locale de Lorentz est la base de la Relativité Restreinte. S'il existait un "référentiel universel de repos" Σ uniquement dans lequel les postulats de la Relativité Restreinte sont vérifiés, cela impliquerait une violation de cette théorie. En effet, en Relativité Restreinte, ces postulats sont valides dans n'importe quel référentiel inertiel S se déplaçant à une vitesse constante par rapport à Σ . Or, l'existence d'un référentiel privilégié implique, par exemple, que le trajet de la lumière entre deux points ne dépend pas de la direction de propagation dans S , contrairement à Σ .

Pour des expériences visant à mesurer des temps de propagation entre deux horloges synchronisées par la convention d'Einstein, on quantifie simplement le rapport $\frac{\delta c}{c}$. Le terme δc correspond à la déviation de la vitesse de la lumière dans S et dans une direction privilégiée, c'est-à-dire que la vitesse de la lumière est, dans ce référentiel, le long de l'axe privilégié, $c + \delta c$ dans un sens et $c - \delta c$ dans le sens contraire. Ces expériences recherchent donc une variation δc dans toutes les directions de l'Espace en mesurant les temps de transmission entre des horloges distantes [36] ou en étudiant les variations d'effet Doppler [37, 38, 39]. La mesure la plus précise se base sur des expériences de spectrométrie laser de particule rapide et atteint une incertitude de $5.5 \cdot 10^{-10}$.

Un immense effort est apporté pour tester ce point du Principe d'Équivalence d'Einstein. En effet, les théories quantiques de la gravitation, telle que la théorie des cordes, prédisent la violation de cette invariance pour les hautes énergies.

L'Invariance Locale de Position (ILP)

Selon l'Invariance Locale de Position, les résultats d'une expérience non-gravitationnelle ne dépendent ni du moment ni de l'endroit dans l'Univers où elle est réalisée. Ainsi cela veut dire que les charges et les masses des particules sont universelles et qu'un expérimentateur menant une expérience qui ne dépend pas de la gravitation ne peut pas savoir ni quand ni où il se trouve.

La troisième partie du Principe d'Équivalence d'Einstein peut être testée à travers des expériences de décalage gravitationnel (*gravitational redshift*). Ce type d'expérience vise une mesure du décalage fréquences, noté $Z = \Delta\nu/\nu$, entre deux mêmes standards de fréquence placés à différentes hauteurs dans un champs de gravitation statique. Cette différence de fréquence est reliée à la différence de potentiel gravitationnel ΔU entre les deux horloges selon $Z = \Delta U/c^2$ (cf. partie 1.1.5). Pour quantifier l'écart à ce postulat du PEE, on utilise le paramètre α dépendant de la nature de l'élément chimique sur lequel se base l'horloge dont le décalage fréquentiel est mesuré. Ce paramètre est introduit selon :

$$Z = (1 + \alpha)\Delta U/c^2. \quad (1.21)$$

En effet, si la fréquence d'une horloge en chute libre dans un référentiel localement inertiel est indépendante de la position et de la vitesse de ce référentiel, alors la comparaison d'horloges au repos à deux endroits éloignés revient à comparer les vitesses de deux référentiels locaux, l'un où la première horloge est au repos au moment de l'émission du signal, l'autre où la seconde horloge est au repos lors de la réception du signal. Ainsi le déplacement fréquentiel peut s'apparenter à l'effet Doppler entre les deux référentiels [40].

De nombreuses expériences - dont des mesures de déplacement en fréquence de rayons *gamma* [41] ou des lignes spectrales du Soleil [42]- ont été menées afin de donner une limite sur le paramètre α et dont les résultats sont résumés sur la figure 1.8. La mesure la plus précise provient cependant de l'expérience de Vessot et Levine menée en 1976 [25], expérience décrite au paragraphe 1.2.2. Basée sur la stabilité d'un maser à hydrogène embarqué dans une fusée et d'une acquisition rusée des mesures, l'expérience posa une limite sur le paramètre α de $2 \cdot 10^{-4}$. La mission ACES [6] (qui sera étudiée en détail dans le Chapitre 2), conduite par le CNES et l'ESA, vise à installer à bord de la Station Spatiale Internationale un ensemble d'horloges ultrastables. Elle permettra d'obtenir une précision sur ce paramètre inférieure à $3 \cdot 10^{-6}$. De même, le projet SAGAS [8] vise une incertitude de l'ordre de $1 \cdot 10^{-9}$, soit un gain supérieur à cinq ordres de grandeur.

On peut aussi noter que des tests à décalage nul (*Null Redshift tests*) sont réalisés depuis 1978. Ils consistent à comparer le décalage gravitationnel en fréquence pour des horloges de types différents. La limite inférieure a été atteinte grâce aux performances des horloges et des fontaines atomiques actuelles en terme de stabilité. La limite présente réalisée en comparant une fontaine atomique à césium et un maser à hydrogène est $|\alpha^H - \alpha^{cs}| < 2.1 \cdot 10^{-5}$ [43]. De même, les deux expériences spatiales citées précédemment permettront d'augmenter la précision sur cette mesure.

L'ILP se réfère aussi à une invariance temporelle. Si ce principe est vérifié, alors les constantes physiques non gravitationnelles devraient rester constantes dans le temps. L'exemple le plus probant de ce type de test consiste à considérer des horloges atomiques ultra-stables de différents types et à étudier la variation de leur fréquence en fonction du temps. En effet, la fréquence théorique des horloges dépend différemment de constantes physiques (telles que la constante de structure fine α , le rapport de masse entre l'électron et le proton m_e/m_p ou encore le rapport gyromagnétique du proton g_p) selon la nature de l'atome sur lequel est basé l'oscillateur. Par conséquent, l'observation d'une dérive de ces fréquences prouverait la dérive d'une ou plusieurs de ces constantes. Concernant la constante de structure fine α , des mesures expérimentales basées sur cette méthode limitent sa

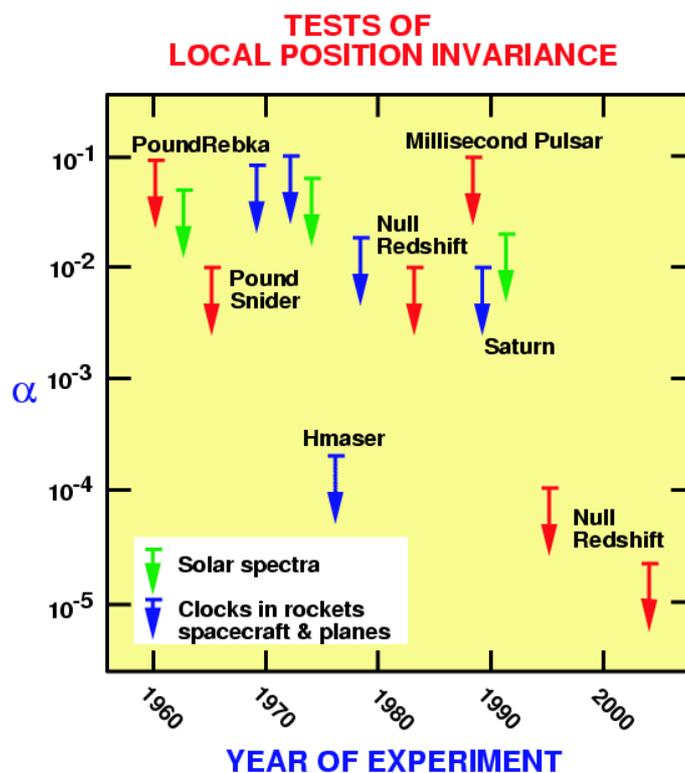


FIG. 1.8 : Évolution de la précision atteinte sur l'Invariance Locale de Position selon le paramètre α .

variation relative à moins de $2.3 \cdot 10^{-17}$ par an [17].

1.3.2 Test du formalisme Post Newtonien Paramétrisé

Le formalisme PPN (voir 1.1.5) utilise un ensemble de dix paramètres, dont les deux plus célèbres sont les paramètres d'Eddington β et γ . Ces deux paramètres sont égaux à 1 dans la théorie de la Relativité Générale. Les paramètres de la métrique PPN, donnés par l'équation (1.5), peuvent être testés et mesurés en comparant les observations et les mesures réalisées dans le système solaire avec la théorie prédite par cette métriques.

- Le paramètre γ

Le paramètre γ caractérise la quantité de courbure par unité de masse et intervient dans les termes g_{ij} et g_{0i} de la métrique. De nos jours, les limites les plus contraignantes proviennent de la mesure de ses effets sur la propa-

gation des signaux. En effet, ce paramètre est responsable de la déviation de la lumière et de l'effet Shapiro [10], délai dans la propagation de signaux dû à la présence d'une masse.

Lorsqu'Eddington observa la déviation de la lumière et confirma la prédiction d'Einstein, la théorie de la Relativité connut un franc succès. A l'heure actuelle, les mesures de déviation de la lumière les plus précises sont effectuées à l'aide du VLBI. La mesure la plus précise du paramètre γ correspond à une étude du temps de propagation de signaux émis par la sonde Cassini¹⁶ et du retard Shapiro associé. Le délai du signal émis par la sonde rasant le Soleil fut provoqué par la masse de celui-ci et permit une mesure du paramètre avec une incertitude de $2 \cdot 10^{-5}$ [44].

Un grand nombre de missions spatiales proposent des mesures performantes et des estimations précises des paramètres du formalisme PPN. Concernant le paramètre γ , la mission GAIA¹⁷ est un projet de l'ESA qui vise à mettre en orbite un télescope de haute précision. Son lancement est prévu lors de l'année 2011. L'observation de centaines de milliers d'astres durant cinq ans pourrait lui permettre d'atteindre la précision de $2 \cdot 10^{-7}$ sur ce paramètre [45]. De même, la mission LATOR [46] (*Laser Astrometric Test of Relativity*) menée par la NASA¹⁸ comportera deux microsatellites en orbite autour du Soleil. A l'aide d'un système de télémétrie laser, la précision sur γ devrait atteindre 10^{-8} [47]. Enfin, la mission SAGAS réalisera des mesures semblables à celles effectuées lors de la mission Cassini lors de conjonctions solaires. Elle vise une précision de l'ordre de $2 \cdot 10^{-7}$ sur ce paramètre du formalisme PPN (l'obtention de cette précision sera détaillée dans le Chapitre 6). Les sensibilités des trois missions énoncées précédemment sont d'une importance considérable puisque selon certains modèles cosmologiques, la limite des faibles énergies de la théorie des cordes conduirait à des déviations de γ de sa valeur unitaire de l'ordre de 10^{-7} à 10^{-4} [48, 49].

– Le paramètre β

D'après les équations (1.5), le paramètre β apparaît seulement dans le terme g_{00} , et ne joue un rôle que dans l'équation du mouvement de corps. Son action dans l'avance du périhélie de Mercure fit, par son observation, l'autre grand succès de la théorie de la Relativité Générale d'Einstein. En effet, lorsque Le Verrier étudia en 1859 les effets perturbateurs de l'ensemble des

¹⁶www.nasa.gov/cassini

¹⁷<http://gaia.esa.int/>

¹⁸La *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) est l'agence spatiale étasunienne.

planètes sur l'orbite de Mercure, il trouve une avance de périhélie de la planète de 38 secondes d'arc par siècle, anomalie qu'il n'explique pas¹⁹. Après de nombreuses tentatives d'explications, les travaux d'Einstein résolvent cette énigme de façon naturelle.

A présent, l'étude du moment dipolaire J_2 du Soleil a permis d'améliorer la limite sur le paramètre β , telle que $|\beta - 1| < 10^{-5}$ [50]. La mission BepiColombo²⁰ menée par l'ESA et dont le lancement est prévue pour 2012 étudiera la planète Mercure et mesurera l'avance du périhélie et ce paramètre avec une précision de $3 \cdot 10^{-4}$.

- Les autres paramètres du formalisme PPN

L'ensemble des paramètres du formalisme PPN a été apprécié et comparé à leurs valeurs données par la Relativité Générale. Les méthodes utilisées sont de natures différentes : télémétrie laser pour étudier les effets d'orbite, étude de la période de pulsars binaires ou de précessions de spins, gravimétrie pour l'étude des marées terrestres, etc ... [30, 51].

1.3.3 Les ondes gravitationnelles

L'existence d'ondes gravitationnelles (OGs) est prédite par la théorie de la Relativité Générale. De même que les ondes électromagnétiques correspondent à des oscillations des champs électrique et magnétique, les ondes gravitationnelles se réfèrent à des oscillations de l'Espace-Temps se propageant à la vitesse c . Ainsi engagent-elles des perturbations locales de la métrique.

Les OGs n'interagissent que très faiblement avec la matière ce qui les rend extrêmement difficiles à détecter directement. En effet, une des raisons pour lesquelles aucune onde gravitationnelle n'a été observée directement provient de leur faible intensité. Cependant, l'étude d'un pulsar binaire a permis à R. Hulse et J. H. Taylor de prouver de manière indirecte l'existence de telles ondes [52]. En effet, ce système composé de deux étoiles à neutrons perdait de l'énergie conformément aux prédictions de la théorie d'Einstein, sous forme d'ondes gravitationnelles. Cette découverte valut aux deux chercheurs américains le prix Nobel de physique en 1993. Les dernières mesures de cette perte d'énergie coïncident avec la théorie avec une précision de $3.5 \cdot 10^{-3}$ [53].

Les sources possibles d'ondes gravitationnelles sont nombreuses et variées [54]. En effet, elles peuvent être produites par des binaires d'objets compacts (tel

¹⁹Quelques années plus tard, cette anomalie est de nouveau estimée à 43 secondes d'arc par siècle à partir d'évaluations plus précises des masses gravitationnelles en présence.

²⁰www.rssd.esa.int/BepiColombo/

que le pulsar binaire cité ci-dessus [52]) ou lors de l'effondrement d'une supernovae. Si elles existent, la superposition des OGs créées par l'ensemble des sources possibles produit ce qu'on appelle le fond stochastique cosmologique d'ondes gravitationnelles dû au Big Bang. Celui-ci sera étudié dans le Chapitre 6 à travers la mission Sagas.

De nombreux détecteurs existent sur terre et tentent de mesurer un déplacement relatif minime de deux objets provoqué par le passage d'une OG. On en distingue deux types : les interféromètres à laser, tel que VIRGO²¹, LIGO²² ou TAMA²³, et les détecteurs à masses résonantes comme Allegro²⁴ et Nautilus²⁵. Ces détecteurs sont en partie limités par le bruit de fond terrestre et, bien qu'ils n'ont pas encore détecté d'OG, ont donné des résultats intéressants puisqu'ils ont posé des limites sur l'amplitude attendue de ces ondes et donc mis de côté quelques unes des théories de la Gravitation.

Un moyen de s'affranchir de ce bruit limitant est de réaliser la détection dans l'Espace. C'est l'objectif ambitieux de la mission LISA²⁶, menée par l'ESA, qui devrait voir le jour d'ici à 2018. Ce projet est constituée d'un interféromètre spatial formé de trois satellites éloignés d'une distance de cinq millions de kilomètres.

Conclusion

Ce premier chapitre s'est, tout d'abord, attaché à expliciter le concept temporel. Il a donné la définition de plusieurs notions permettant son appréhension, et a décrit le formalisme mathématique nécessaire à sa description dans un cadre relativiste.

Ensuite, les méthodes permettant la comparaison d'horloges distantes ont été précisément décrites et étudiées. De nombreux exemples provenant principalement des méthodes satellitaires sont venus agrémente l'étude de ces méthodes.

Enfin, la fin de ce chapitre a été consacrée à la description des tests de la Physique Fondamentale. Différents aspects de la Gravitation peuvent être éprouvés à travers diverses expériences, présentes et futures, qui ont, de ce fait, étaient décrites dans cette partie.

Cette partie introductive permet de tracer le décor de la mission ACES qui sera étudiée dans les chapitres suivants. Il permet de comparer les instruments de

²¹<http://www.virgo.infn.it/>

²²<http://www.ligo.caltech.edu/>

²³<http://tamago.mtk.nao.ac.jp/>

²⁴<http://sam.phys.lsu.edu/>

²⁵<http://www.lnf.infn.it/esperimenti/rog/>

²⁶<http://sci.esa.int/lisa/>

la mission et leurs performances à l'*état de l'art* ainsi que de cadrer les objectifs de cette mission tournée principalement vers la Physique Fondamentale.

Chapitre 2

Le Lien Micro-Onde

Le domaine de la manipulation des atomes a connu un considérable essor au début des années 80. L'attribution du prix Nobel à S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W. Phillips en 1997 pour leurs travaux réalisés sur le refroidissement et le piégeage d'atomes par laser [3, 4, 5] est un bel exemple de l'intérêt et des perspectives de ce domaine. De nombreuses technologies - telles que des lasers à atomes ou des condensats de Bose-Einstein (travail récompensé par un Prix Nobel en 2001 [55, 56]) ont découlé de ces recherches. Elles permirent le développement de nombreux instruments et technologies (horloges atomiques, interféromètres à ondes de matière...).

Dans le domaine des atomes froids et de ses applications, l'Espace apporte deux ingrédients majeurs. Tout d'abord, l'apesanteur permet un contrôle efficace des atomes. En effet, sur la Terre, la gravité est l'une des perturbations majeures intervenant lors du déplacement des atomes puisqu'elle limite, d'une part, le choix du temps d'observation des atomes et donc la précision de la mesure, et induit, d'autre part, des effets perturbateurs du fait de la vitesse des atomes [57].

Ensuite, l'Espace est un laboratoire unique pour tester les lois fondamentales de la Physique. Contrairement à la Terre pesante et saturée d'ondes électromagnétiques, l'environnement spatial permet de réduire considérablement le bruit des mesures et d'atteindre des précisions jamais atteintes auparavant. Ces mesures de hautes précisions peuvent servir, entre autres, à tester les bases ou les prédictions de Relativité Générale ou d'autres théories de Physique moderne. Par exemple, le Principe d'Équivalence Faible (voir section 1.3.1) sera éprouvé à travers l'expérience Microscope et permettra de gagner au moins deux ordres de grandeur sur des expériences identiques menées sur Terre. De façon similaire, l'Invariance Locale en Position (voir partie 1.3.1) sera testée par la mission ACES à travers l'étude du décalage fréquentiel gravitationnel sur des horloges atomiques.

2.1 La mission ACES

2.1.1 Description

Menée conjointement par le CNES¹ (Centre National d'Études Spatiales) et l'ESA² (*European Space Agency*), le projet ACES est une mission de Physique Fondamentale qui s'appuie sur les performances des horloges atomiques en micro-gravité [58]. Il vise à installer deux horloges ultra-stables à bord de la Station Spatiale Internationale ISS, sur le module Columbus, d'ici 2013. De ce fait, la charge utile n'occupera qu'un mètre cube et sera constituée d'éléments à la pointe de la technologie.

Le cœur du projet repose sur une horloge à atomes froids, PHARAO (acronyme de *Projet d'Horloge Atomique par Refroidissement d'Atomes en Orbite*). Développée par le CNES, elle permettra de combiner d'excellentes performances de stabilité sur le long terme avec les caractéristiques à court terme d'un maser à hydrogène, le SHM (*Space Hydrogen Maser*), développé par Spectratime³. La comparaison des horloges et la distribution du signal réalisées à bord de la station spatiale seront assurées par le FCDP dont le développement est pris en charge par deux industriels, EADS-Astrium⁴ et TimeTech⁵.

Enfin, le transfert de temps-fréquence sera effectué par une méthode deux voies, trois fréquences, le Lien Micro-Onde (MWL pour *Micro-Wave Link*). Il a un rôle clé puisqu'il doit permettre la réalisation de comparaisons temporelles et fréquentielles et la distribution de l'échelle de temps créée à bord sans dégrader les performances des horloges en terme de stabilité et d'exactitude.

La mission est planifiée sur au moins dix-huit mois, dont les six premiers seront consacrés à tester et à évaluer les performances issues de la combinaison des horloges embarquées, SHM et PHARAO. Durant la période restante, on pourra comparer des horloges situées sur Terre avec les horloges embarquées de la mission ACES. En effet, outre la charge de vol utile, le projet vise à équiper de récepteurs terrestres adaptés au MWL un grand nombre de laboratoires, principalement ceux possédant des horloges performantes. L'ensemble des éléments qui constituent la mission provient de technologies de pointe (voir partie 2.1.2) et permettra de réaliser l'intégralité des objectifs de la mission (voir partie 2.1.4).

¹<http://www.cnes.fr/>

²<http://www.esa.int/>

³<http://www.spectratime.com/>

⁴<http://www.astrium.eads.net/>

⁵<http://www.timetech.de/>

2.1.2 Instruments et sous-systèmes

PHARAO

PHARAO [59] est une horloge à atomes froids de césium (donc un standard primaire de fréquence) développée par le LNE-SYRTE, le LKB (Laboratoire Kastler Brossel) et le CNES (cf. figure 2.1). Son principe de fonctionnement est similaire à celui des fontaines atomiques classiques sauf qu'elle a été spécialement élaborée pour fonctionner en apesanteur. En effet, la gravité impose aux horloges terrestres une limite sur le temps d'interaction de l'ordre d'une seconde et, dans ces conditions, gagner un ordre de grandeur sur le temps d'interaction imposerait des contraintes techniques irréalistes. Par contre, en microgravité, l'utilisation de temps d'interaction plus longs a été envisagée et réalisée [60].

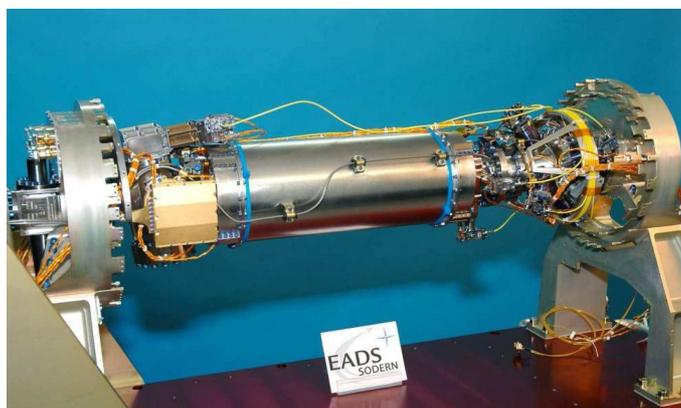


FIG. 2.1 : Modèle d'ingénierie du tube à Césium de l'horloge PHARAO dont les deux blindages magnétiques ont été retirés.

SHM

SHM [61] est un maser (*Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) actif basé sur l'atome d'hydrogène (voir figure 2.2). Les masers à hydrogène sont des horloges atomiques extrêmement stables à moyen terme dont le principe de fonctionnement est proche de celui du Laser. Cependant la radiation émise est une radiation micro-onde et non pas optique. Du fait de leur simplicité de fonctionnement et de leur fiabilité, ils possèdent de nombreux domaines d'application tels que la radioastronomie ou la géodésie (ils servent, par exemple, comme base de temps pour l'enregistrement et la corrélation des observations des radio-télescopes du VLBI). Dans le futur, les masers à hydrogène, qu'ils soient actifs ou passifs, pourraient servir aux systèmes de positionnement par satellites ou dans des missions spatiales lointaines.

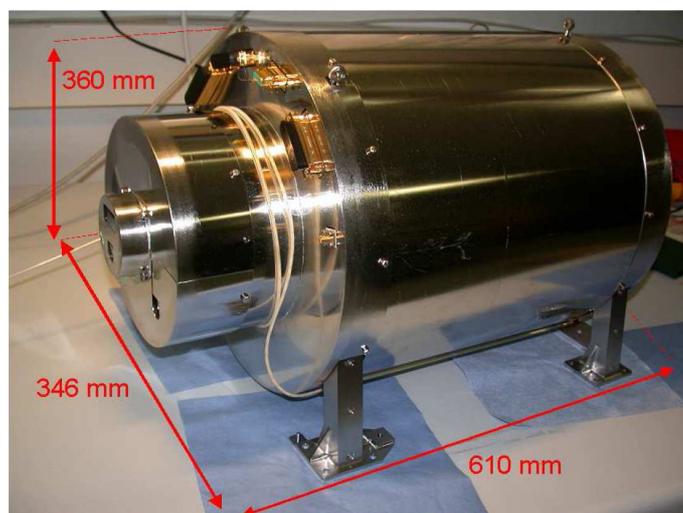


FIG. 2.2 : Modèle d'ingénierie du SHM.

FCDP

Développé par EADS-Astrium et TimeTech, le FCDP (*Frequency Comparison and Distribution Package*) est le pont reliant les deux horloges embarquées (cf. figure 2.3). Il permet de comparer les signaux délivrés par les horloges puis d'optimiser, en fonction des performances des horloges, leur combinaison. Il fournit ainsi un signal qui combine la bonne stabilité court terme du SHM avec la stabilité long terme et l'exactitude de PHARAO.



FIG. 2.3 : Modèle d'ingénierie du FCDP.

MWL

Le signal ainsi produit sera délivré au Lien Micro-Onde (MWL) [62] pour être transféré vers la Terre. Pour l'instant, aucune technique de transfert de temps micro-onde n'atteint les performances visées par la mission ACES. Afin de préserver les propriétés des horloges du projet, le bruit intrinsèque du Lien Micro-Onde doit rester inférieur aux bruits des horloges.

Contrairement aux systèmes GPS ou Galileo où les satellites n'ont qu'un rôle émetteur, cette technique de comparaison utilise des signaux ascendant et descendant entre la station spatiale et les stations terrestres. Cela permet d'annuler l'effet Doppler du premier ordre ainsi que le délai troposphérique (cf. Chapitre 1 partie 1.2.2). Mais pour éviter des effets d'interférence, les signaux montant et descendant possèdent des fréquences différentes. Les effets de l'ionosphère sur leur propagation ne sont donc pas identiques car ils dépendent de l'inverse du carré de la fréquence du signal. Afin d'estimer et de corriger précisément cet effet, il est nécessaire d'ajouter une troisième fréquence.

Par conséquent, le Lien Micro-onde est une méthode de transfert de temps et de fréquence deux voies, trois fréquences : il s'agit d'une version améliorée de la technique de l'expérience GP-A (voir section 1.2.2). Les fréquences du signal montant et des deux signaux descendants correspondent respectivement à 13.5, 14.7 et 2.25 GHz. Chaque fréquence porteuse est modulée par un code dit pseudo-aléatoire. La fréquence d'échantillonnage de ce code est, respectivement pour les trois signaux, de 100, 100 et 1 MHz. De plus, la station spatiale possède quatre canaux, ce qui permet à quatre stations terrestres de se comparer aux horloges spatiales simultanément.

2.1.3 Performances

Les performances de la mission sont exprimées en terme de stabilité et d'exactitude. On suppose que l'erreur sur une mesure se décompose en un terme de biais constant et un terme de bruit de moyenne nulle. La stabilité caractérise la propriété de la moyenne d'un bruit sur une certaine durée. Par exemple, si l'on considère une mesure dont le bruit est blanc, alors "intégrer" cette mesure sur une période T permet de réduire l'écart type de l'erreur d'un facteur racine de T . Par contre, l'exactitude correspond au biais maximal entre la mesure et sa valeur vraie, et ne se moyenne donc pas avec le temps. Cependant une étude des effets systématiques permet d'évaluer ce biais et de le prendre en compte dans l'estimation finale du résultat.

L'ensemble des horloges en orbite à bord de l'ISS présentera une stabilité en fréquence meilleure que 10^{-13} à la seconde, que $3 \cdot 10^{-16}$ après une jour d'inté-

gration et que 10^{-16} après dix jours. Son inexactitude sera inférieure à 10^{-16} en fréquence relative. Ces caractéristiques en fréquence correspondent à des stabilités en temps de 0.3 ps après un passage de l'ISS (soit environ 300 secondes) et de 7 ps à un jour.

Les stabilités visées de la mission sont données en terme de variance d'Allan (cf. annexe A) et s'expriment en secondes. Pour un passage de la station spatiale au-dessus d'une des stations terrestres, c'est-à-dire pour des temps d'intégration inférieurs à 300 s , la stabilité de la mission est dominée par le bruit blanc de mesure des observables du MWL :

$$\sigma_x(\tau) = 5.2 \cdot 10^{-12} \cdot \tau^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

Pour des temps d'intégration plus longs, c'est le bruit de l'horloge PHARAO qui prend le dessus. Ce bruit correspond à du bruit blanc de fréquence - c'est-à-dire à du bruit de marche aléatoire en phase (processus de Wiener) - dont l'écart type augmente comme la racine carré du temps d'intégration :

$$\sigma_x(\tau) = 2.4 \cdot 10^{-14} \cdot \tau^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

La figure 2.4 donne les variances d'Allan temporelles des instruments de la mission ACES. La correspondance de ces spécifications dans le domaine fréquentiel s'exprime à l'aide de la variance d'Allan modifiée $Mod\sigma_y(\tau)$ (explicitée dans l'annexe A) par :

$$Mod\sigma_y(\tau) = \frac{\sqrt{3} \sigma_x(\tau)}{\tau}. \quad (2.3)$$

2.1.4 Objectifs de la mission

Les objectifs de la mission ACES sont nombreux et touchent différents domaines de la physique moderne. On peut toutefois les classer selon trois grandes catégories :

1. Des horloges atomiques spatiales ultra-stables

Un des objectifs principaux de la mission est la réalisation d'horloges atomiques de nouvelle génération et l'évaluation de leurs performances en environnement spatial.

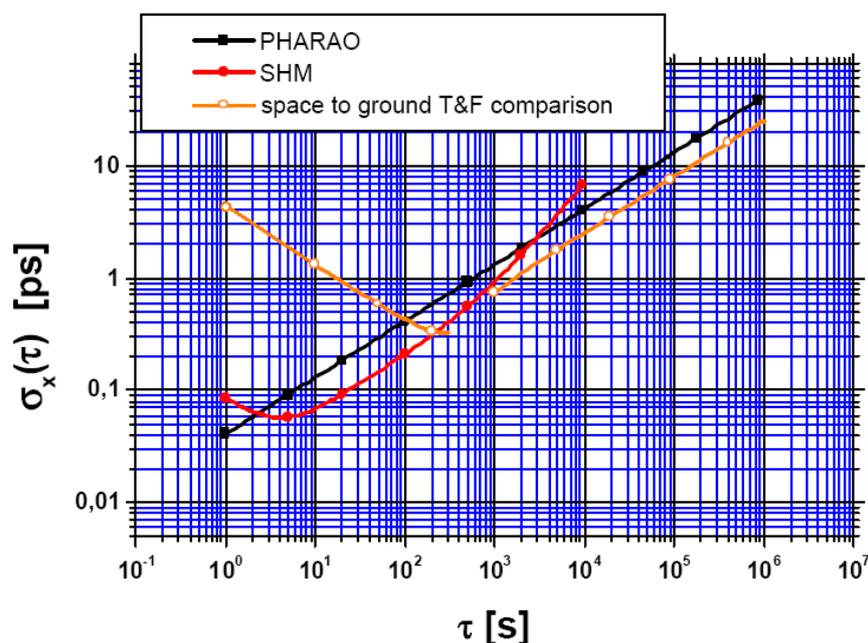


FIG. 2.4 : Spécifications de la mission ACES pour le SHM, PHARAO et le MWL. Les spécifications finales de la mission sont limitées par celles du MWL à court terme et par celles de PHARAO à long terme, conformément aux équations (2.1) et (2.2).

Physique des atomes froids en microgravité : pour la première fois, la mission va permettre d'étudier le refroidissement et la manipulation d'atomes à l'aide de faisceaux de lumière en micropesanteur. Elle va aussi mettre en évidence le potentiel et l'intérêt des atomes froids dans l'Espace pour la précision des mesures et ainsi contribuer à la préparation de futures missions (voir Chapitre 6).

Une étude préliminaire des différentes étapes permettra d'optimiser les performances de l'horloge PHARAO aussi bien en terme de stabilité qu'au niveau de l'exactitude. En effet, du fait de la méconnaissance de son comportement en environnement de microgravité, il sera crucial d'approfondir certains effets, tels que le cycle de refroidissement ou les erreurs systématiques : cette caractérisation permettra de souligner les facteurs limitants. De plus, les résultats qui en découleront joueront un rôle crucial dans la réalisation et l'optimisation de futurs senseurs utilisant les atomes froids. Le refroidissement d'atomes en-dessous du microkelvin et les longs temps d'interaction rendus possibles par la faible gravité ouvrent la voie à une multitude d'instruments de mesure de pointe. Outre la fréquence ou le temps, cette technologie peut s'appliquer à des mesures d'accélération, de rota-

tions ou de forces [63, 64]. Plusieurs projets de senseurs dits de "deuxième génération" - tels qu'une horloge optique, un interféromètre atomique ou une proposition sur les condensats de Bose-Einstein - ont déjà été soumis au comité scientifique de l'ESA [8].

Stabilité et exactitude de PHARAO : la démonstration des propriétés de l'horloge à atomes froids PHARAO est évidemment l'un des enjeux majeurs de la mission. Pour avoir un point de comparaison, il faut confronter l'exactitude et la stabilité de PHARAO avec les horloges embarquées dans les systèmes de positionnement tels que GPS ou Galileo. En effet, les meilleures horloges embarquées montrent une stabilité à une seconde de $7 \cdot 10^{-13}$ en fréquence relative, et une limite de stabilité à 10^{-14} [65]. L'utilisation combinée des deux horloges spatiales (SHM et PHARAO) présentera une stabilité cent fois supérieure avec, en plus, une inexactitude en fréquence relative inférieure à 10^{-16} . Cet objectif est d'autant plus essentiel que de nombreuses applications de la mission - telles que les tests de physique fondamentale - découlent de cette propriété.

Stabilité à court terme du SHM : de même que pour l'horloge PHARAO, l'évaluation des caractéristiques du maser a un rôle clé dans la mission. Par comparaison aux masers passifs utilisés dans le projet Galileo, le SHM aura une instabilité d'un ordre de grandeur plus faible et permettra de fournir immédiatement une référence à l'horloge à atomes froids. Sa fiabilité est d'une importance cruciale pour la mission puisqu'elle servira à évaluer les effets systématiques qui affectent PHARAO tels que le déplacement collisionnel⁶. De plus, l'étude de sa stabilité sur des temps d'intégration supérieurs à quelques milliers de secondes permettra d'étudier sa dérive de fréquence sur le long terme et conduira à sa qualification pour d'éventuelles missions spatiales futures. Enfin, le maser est responsable d'une des applications de Physique Fondamentale de la mission, puisqu'il rendra possible un test performant de l'Invariance Locale de Lorentz (voir au Chapitre 1 partie 1.3.1).

2. Un transfert de temps-fréquence de haute performance

⁶Le déplacement collisionnel est un déplacement de la fréquence des horloges dû aux interactions entre les atomes. L'étude de ce déplacement a, d'une part, un intérêt pratique lié à l'amélioration des horloges et, d'autre part, un intérêt fondamental lié à la compréhension des interactions entre atomes froids.

Un transfert de temps sub-picoseconde : la réalisation du Lien Micro-Onde de la mission ACES est un immense pas en avant dans le domaine du transfert de temps. Le Lien Micro-Onde vise à surpasser les performances des méthodes de transfert de temps actuelles (TWTFT, GPS CP, GPS P3) d'au moins un facteur 50 [27, 28]. Les performances de cette méthode de transfert de temps sont rendues possible par la combinaison d'un signal ascendant et de deux signaux descendants. Elle permet d'annuler, au premier ordre, certains effets limitants tels que les délais géométriques et troposphériques, et d'atteindre des spécificités exceptionnelles au niveau de son exactitude et de sa stabilité. Outre son rôle clé dans la mission ACES, la fiabilité des comparaisons d'horloges à distance ainsi que les applications en Physique Fondamentale et en géodésie dépendent de sa grande stabilité puisque ses performances ne doivent pas dégrader celles des horloges.

Comparaison d'horloges en vue commune : l'avantage de ce mode de comparaison réside dans l'annulation de l'erreur provenant des horloges spatiales. Dans ce cas, l'instabilité de la méthode provient uniquement du MWL : si la différence des délais internes entre deux canaux reste stable à un bon niveau, la mission ACES sera capable de réaliser des comparaisons avec une résolution temporelle meilleure qu'une picoseconde et une erreur en fréquence relative inférieure à 10^{-17} après un jour d'intégration [66]. Cela représente un gain de deux ordres de grandeur par rapport à la technique GPS. L'orbite de la Station Spatiale Internationale étant basse (environ 400 km), la comparaison d'horloges en vue commune ne sera possible que pour des distances continentales.

Comparaison d'horloges en vue non-commune : cependant, du fait de l'excellente échelle de temps réalisée par la combinaison de PHARAO et du SHM, la comparaison d'horloges en vue non-commune donnera tout de même de très bons résultats. Pour des passages de la station spatiale séparés de mille et de dix mille secondes, les résolutions attendues sont respectivement de 3 et de 10 picosecondes accompagnées d'une résolution maximale en fréquence atteignant 10^{-17} [66].

Observation terrestre : la propagation des signaux du MWL est perturbée lors de leur passage à travers la troposphère et l'ionosphère. Des combinaisons de mesures du MWL permettent de remonter aux effets de ces couches de l'atmosphère, d'estimer les délais ionosphériques avec une imprecision inférieure à quelques picosecondes, et d'atteindre une incertitude d'une dizaine de nanosecondes pour les délais troposphériques. Ces me-

sures conduiront à une modélisation plus précise de ces couches de l'atmosphère et de leur évolution dans le temps.

De plus, l'ISS a une trajectoire intéressante pour l'observation de la Terre : du fait de sa faible altitude, la station circule en plein milieu de l'ionosphère et a donc un accès privilégié à la partie inférieure de l'ionosphère. Les mesures obtenues par le MWL combinées aux mesures provenant des autres méthodes de transfert de temps (GPS, TWSTFT, Galileo ...) mèneront à des observations à épaisseurs de couche ionosphérique différentes, et donc à un profil vertical de l'ionosphère.

3. Tests de physique fondamentale

La mission ACES vise la réalisation de tests de Physique Fondamentale. Ces mesures concernent aussi bien la Relativité Restreinte que la Relativité Générale.

Déplacement relativiste de fréquence et Géodésie : conformément à l'explication de la partie 1.3.1, il s'agit d'une conséquence directe de l'Invariance Locale de Position. Une source de radiation dans un champ de gravitation voit sa fréquence déplacée. Dans le cas d'ACES, la différence de fréquence des horloges terrestre et spatiale $\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt}$ est donnée selon l'équation (1.11) par :

$$\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt} = \frac{1}{c^2} \cdot \left(U(t, \vec{x}_s) - U(t, \vec{x}_g) + \frac{v_s^2(t)}{2} - \frac{v_g^2(t)}{2} \right) + O(c^{-4}), \quad (2.4)$$

où $U(t, \vec{x})$ est le potentiel gravitationnel à la position \vec{x} et au temps coordonnée t , et où v_s et v_g sont respectivement les vitesses des stations spatiale et terrestre exprimées dans le référentiel géocentrique tournant. La première partie du terme de droite correspond au déplacement gravitationnel en fréquence (il dépend du potentiel gravitationnel aux points de l'espace considérés), la seconde au terme Doppler du deuxième ordre.

Le terme de gauche de l'équation (2.4) est obtenu à partir des mesures du MWL. En effet, il correspond à la dérivée de la désynchronisation des horloges par rapport au temps coordonnée. Pour avoir un ordre d'idée, on évalue les termes de l'équation (2.4) en prenant $R_g = 6400 \text{ km}$, $v_g = 460 \text{ m.s}^{-1}$, $R_s = 6800 \text{ km}$, $v_s = 7700 \text{ m.s}^{-1}$. De plus, on considère seulement le terme dominant du potentiel gravitationnel terrestre $U(r) = \frac{GM_T}{r}$ où $M_T \equiv 5.97 \cdot$

10^{24} kg est la masse de la Terre, et où r est la distance entre le centre de la Terre et le point considéré. On obtient alors :

$$\frac{U(t, \vec{x}_s)}{c^2} \sim 6.5 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{U(t, \vec{x}_g)}{c^2} \sim 6.9 \cdot 10^{-10},$$

$$\frac{v_s^2}{2c^2} \sim 3.3 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{v_g^2}{2c^2} \sim 1.2 \cdot 10^{-12},$$

soit un décalage de fréquence entre les horloges de l'ordre de $3.0 \cdot 10^{-10}$.

La mission vise la mesure de ce déplacement fréquentiel gravitationnel avec une incertitude relative de $3 \cdot 10^{-6}$, ce qui correspond à un gain d'un facteur 35 par rapport au meilleur test effectué auparavant [25].

De plus, si on suppose que la théorie de la Relativité Générale est vérifiée, alors une mesure de ce type peut aussi permettre une évaluation du potentiel gravitationnel. Dans le cas d'ACES, une mesure du *Redshift* gravitationnel avec une incertitude relative en fréquence de 10^{-16} permettrait une évaluation du potentiel gravitationnel au sol à un mètre près en connaissant le potentiel à la station spatiale. La vue commune d'horloges atteignant des incertitudes relatives de l'ordre de 10^{-17} , elle reviendrait à une mesure d'une différence de potentiel gravitationnel au décimètre près.

Cependant, dans les cas énoncés précédemment, il est nécessaire d'évaluer l'ensemble des termes additionnels avec une précision inférieure à celle espérée sur le *Redshift* ou le potentiel gravitationnel. Cette étude sera menée dans le Chapitre 3.

La possible dérive des constantes fondamentales : la recherche d'une éventuelle dérive des constantes fondamentales (cf. partie 1.3.1 dans le Chapitre 1) est l'un des objectifs de la mission ACES. Les performances des horloges atteintes aujourd'hui offrent la possibilité de réaliser de tels tests dans lesquels le Lien Micro-Onde apportera une contribution essentielle lors de comparaisons fréquentielles.

Ces mesures impliqueront des horloges basées sur des fréquences de transition d'atomes de natures différentes : leurs fréquences seront étudiées en fonction du temps afin de tester le principe d'Équivalence d'Einstein (cf. la section 1.3.1). Afin de réaliser ce test de manière convaincante, il est nécessaire d'impliquer dans ces comparaisons de fréquence un nombre important d'horloges. De nombreux laboratoires possédant des horloges de grande stabilité participeront au projet. Par conséquent, cela permettra la comparaison d'horloges de types différents telles que des horloges à césium (LNE-

SYRTE⁷, NIST⁸, NRLM⁹, LTF¹⁰, PTB¹¹, NPL¹², INRIM¹³, Yale University¹⁴, USNO¹⁵ ...), à rubidium (LNE-SYRTE, Penn State University¹⁶, PTB, NPL), basées sur l'ion mercure Hg⁺ (NIST, JPL), sur l'ion d'ytterbium Yb⁺ (PTB, CSIRO¹⁷), sur l'ion aluminium Al⁺ (NIST), l'ion calcium Ca⁺ (University of Innsbruck¹⁸ et l'Université de Provence,¹⁹) ou des horloges optiques à atomes neutres tels que le strontium Sr (LNE-SYRTE, JILA²⁰) ou le mercure Hg (LNE-SYRTE).

La mission ACES se propose de contribuer à une mesure de l'éventuelle dérive de la constante de structure fine α par la comparaison de toutes ces horloges, avec une précision sur $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$ inférieure à 10^{-17} par an [67]. La résolution de cette mesure atteindra $3 \cdot 10^{-18}$ après trois années de mesures. De plus, en combinant les résultats obtenus par comparaison d'horloges, il sera possible de déduire des limites non seulement sur α mais aussi sur les constantes des interactions faibles et fortes.

Anisotropie de la vitesse de la lumière : le dernier test de Physique Fondamentale réalisé par ACES concerne la Relativité Restreinte. Les fondations de cette théorie se basent sur le principe d'Invariance Locale de Lorentz (cf. partie 1.3.1). L'existence d'un "référentiel Universel de repos" entraîne l'existence d'une direction privilégiée de l'Espace et donc d'une anisotropie du milieu pour la propagation des ondes électromagnétiques.

La différence entre les trajets aller et retour d'un signal est sensible à une valeur non-nulle de $\frac{\delta c}{c}$ le long de cette direction préférentielle :

$$T_{up} - T_{down} = \Delta_m + \Delta_u + 2T \frac{\delta c}{c} \cos(\theta),$$

où T est la moitié du temps aller-retour, Δ_m les corrections dues à l'asymétrie des trajets, et Δ_u la désynchronisation entre les horloges définie dans

⁷LNE-SYRTE, Paris, France : <http://lne-syrte.obspm.fr/>

⁸NIST, Boulder, Colorado, USA : <http://www.nist.gov/>

⁹NRLM, Tsukuba, Japon : <http://www.aist.go.jp/NRLM/english/>

¹⁰LTF, Neuchâtel, Suisse : <http://www2.unine.ch>

¹¹PTB, Braunschweig, Allemagne : <http://www.ptb.de/>

¹²NPL, Teddington, Angleterre : <http://www.npl.co.uk/>

¹³INRIM, Turin, Italie : <http://www.inrim.it/>

¹⁴Yale University, New Haven, Connecticut, USA : <http://www.yale.edu/>

¹⁵USNO, Washington, DC, USA : <http://www.usno.navy.mil/>

¹⁶Penn State University, State College, Pennsylvanie, USA : <http://www.psu.edu/>

¹⁷CSIRO, Clayton South, Australie : <http://www.csiro.au/>

¹⁸University of Innsbruck, Innsbruck, Autriche : <http://www.uibk.ac.at/>

¹⁹Université de Provence, Marseille, France : www.univ-provence.fr/

²⁰JILA, Boulder, Colorado, USA : <http://jilawww.colorado.edu/>

la convention d'Einstein (voir partie 1.3.1) et θ correspond à l'angle entre la direction de propagation et la direction préférentielle de l'Espace. Les corrections Δ_m peuvent être calculées à partir de l'orbitographie contrairement à la désynchronisation des horloges qui reste inconnue mais constante quand l'angle θ varie.

La sensibilité de l'expérience à cette mesure est déterminée par les instabilités des observables sur la durée du passage, donc principalement par les erreurs du MWL et du SHM. L'incertitude relative attendue sur $\frac{\delta c}{c}$ est inférieure²¹ à $6 \cdot 10^{-11}$, ce qui est équivalent à un test du paramètre α de la Théorie de Robertson-Mansouri-Sexl [9] avec une incertitude relative inférieure à $2 \cdot 10^{-8}$.

Dans le tableau 2.1 sont comparées les précisions atteintes sur cette anisotropie par comparaison d'horloges [36] et par spectrométrie laser [68] à celles visées par la mission ACES. Ces comparaisons seront effectuées à travers le rapport $\frac{\delta c}{c}$ et le paramètre α de la Théorie de Robertson-Mansouri-Sexl.

TAB. 2.1 : Comparaisons de la précision des tests de l'anisotropie de la vitesse de la lumière pour différentes méthodes à travers le rapport $\frac{\delta c}{c}$ et le paramètre α .

	Comparaison d'horloges	Spectrométrie laser	Mission ACES
$\frac{\delta c}{c}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-11}$
α	$1 \cdot 10^{-6}$	$8.4 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$

La mission ACES permet donc le gain d'un ordre de grandeur sur le test le plus performant de l'anisotropie de la vitesse de la lumière.

2.2 La propagation des signaux

De nombreux effets physiques interviennent sur la propagation des signaux. Le but de cette partie est de développer un modèle théorique du transfert de temps permettant de relier les mesures brutes de la mission aux "produits scientifiques" que l'on veut extraire. La précision de ce modèle doit permettre d'atteindre la limite basse des spécifications de la mission, c'est-à-dire une stabilité temporelle de trois dixièmes de picoseconde au bout de 300 secondes d'intégration. Dans cette perspective, on tiendra compte de tout terme d'amplitude supérieure à 0.1 ps ,

²¹Lors d'un passage d'environ 600 s, la mesure de la différence $T_{up} - T_{down}$ est entachée d'un bruit blanc d'écart type $4 \cdot 10^{-12} \text{ s}$. L'étude de cette différence en fonction de l'angle θ conduit à une précision de $6 \cdot 10^{-11}$ sur le rapport $\frac{\delta c}{c}$.

puis on vérifiera, a posteriori, qu'il n'existe aucun terme dont la variance d'Allan temporelle dépasse les spécifications de la mission données par les équations (2.1) et (2.2).

Les modèles de transfert de temps développés jusqu'alors ne sont pas applicables dans le cas d'ACES, soit parce qu'ils ne sont pas assez précis au vue des performances recherchées (les modèles utilisés pour le GPS atteignent des précisions millimétriques, ce qui correspond à des modèles temporels d'une précision de 3 ps), soit parce qu'ils ne prennent pas en compte les caractéristiques uniques du MWL telles que les fréquences élevées ou la polarisation des signaux ainsi que la possibilité de combinaisons "libres" des mesures.

Afin d'évaluer les ordres de grandeur mis en jeu et de modéliser ces effets à la précision recherchée, la physique de l'atmosphère terrestre, et plus particulièrement son influence sur la propagation des signaux, sera étudiée dans cette partie.

2.2.1 L'atmosphère terrestre

Quelle que soit la méthode de comparaison temporelle et fréquentielle utilisée (cf. Chapitre 1, section 1.2), les signaux émis doivent traverser l'atmosphère pour atteindre le récepteur. L'atmosphère terrestre est une fine couche de gaz et de poussières autour de la Terre qui affecte la propagation d'un signal la traversant du fait de son interaction avec ses éléments constitutifs. Cet effet va être séparé en deux parties en fonction de la charge électronique portée par les particules qui interagissent.

La partie ionisée de l'atmosphère : l'ionosphère

Pour comprendre l'effet de l'ionosphère sur la propagation des signaux, on étudie tout d'abord un modèle simple de cette couche de l'atmosphère. On considère un plasma à faible densité où les électrons élastiquement liés n'interagissent pas entre eux. L'équation du mouvement d'un électron libre en présence d'un champ électrique \vec{E} créé par un onde de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est donnée par :

$$m_e \left(\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} \right) = -e \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (2.5)$$

où m_e et e sont la masse et la charge d'un électron, γ le coefficient d'une force de freinage (en s^{-1}) et où ω_0 correspond à la pulsation liée à une force de rappel élastique (en s^{-1}).

Le moment dipolaire électrique induit, donné par $\vec{p} = -e \vec{x}$, est relié au champ électrique \vec{E} par :

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (2.6)$$

où ε_0 est la permittivité du vide ($\varepsilon_0 = 8.854187 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$) et où la susceptibilité électrique χ est un nombre complexe sans dimension.

De plus, l'indice de réfraction n s'écrit, d'après les équations de Maxwell, en fonction de la susceptibilité électrique χ par la relation :

$$n = \sqrt{1 + \text{Re}(\chi)}, \quad (2.7)$$

où $\text{Re}(\chi)$ désigne la partie réelle de la susceptibilité électrique χ .

Si l'on considère des ondes électromagnétiques de haute fréquence (c'est-à-dire supérieure aux autres constantes temporelles du problème, ω_0 et γ), l'indice de réfraction n peut s'écrire en fonction de la pulsation propre du milieu ω_p :

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (2.8)$$

avec $\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{\varepsilon_0 m_e}$ où N_e est la densité d'électrons par unité de volume.

Le délai ionosphérique pour la phase correspond à l'intégrale du terme $\frac{n-1}{c}$ sur la trajectoire du signal, soit en considérant l'équation (2.8) :

$$\Delta_{phase}^{iono} = -\frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e c f^2} \int N_e dL = -\frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e c f^2} \cdot C_e, \quad (2.9)$$

où les intégrales sont réalisées sur le trajet du signal et où $C_e = \int N_e dL$ est défini comme le Contenu Total en Électrons (TEC) sur la trajectoire du signal.

Le délai subi par un signal traversant l'ionosphère dépend de l'inverse de sa fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ au carré. Il est aussi lié à la densité d'électrons N_e : plus elle est importante, plus le retard ionosphérique sera important.

De plus, l'indice n du milieu donné par l'équation (2.8) dépend de la fréquence : ce milieu dispersif a donc un effet différent sur le code et la phase d'un signal le traversant. En effet, l'indice n_ϕ associé à la propagation de la phase porteuse de l'onde est n ($n_\phi = n$) tandis que l'indice n_c correspondant à la vitesse de groupe du milieu est donné par :

$$n_c = \frac{\partial}{\partial f}(fn_\phi) = n_\phi + f \frac{\partial n_\phi}{\partial f} = 2 - n. \quad (2.10)$$

Dans ce modèle, le code du signal est ralenti par l'ionosphère du même délai que la phase est accélérée puisque le rapport $\frac{n-1}{c}$ est l'opposé de $\frac{n_c-1}{c}$.

En général, la densité d'électrons dans l'atmosphère est comprise entre 10^{10} et 10^{12} électrons par mètre cube, ce qui donne des fréquences propres de l'ionosphère ω_p comprises entre 1 et 10 MHz. Cependant, cette densité d'électrons peut varier pour différentes raisons.

La modélisation et variation de l'ionosphère

L'ionosphère est une région de l'atmosphère située entre les altitudes 60 km et 800 km, et constituée de gaz fortement ionisés. Elle se décompose successivement en trois parties, les couches *D*, *E* et *F*, dont les frontières résident respectivement à 90 km et 120 km d'altitude. La couche *F* est la partie ionosphérique qui présente le plus haut taux d'ionisation et se divise en deux sous-couches, *F1* et *F2*, durant la journée du fait de l'activité solaire.

La densité électronique de l'ionosphère connaît de grandes variations dans le temps et dans l'espace du fait de la variation de l'intensité solaire. Ces variations sont fonction de l'altitude, de la latitude géomagnétique, de la longitude géomagnétique (ou de l'heure de la journée), de la saison, du cycle solaire, ou d'autres facteurs plus irréguliers tels que les ondes gravito-acoustiques, les scintillations ionosphériques ou les orages ionosphériques (ou géomagnétiques).

Le premier de ces événements ponctuels est la perturbation ionosphérique itinérante (*Travelling Ionospheric Disturbances* TIDs). Il s'agit d'ondes de densité électronique qui se propagent dans l'ionosphère et impliquent des variations de N_e de quelques pourcents. De nature gravito-acoustique, ces ondes sont classées habituellement en deux catégories caractérisées en fonction de leur longueur d'onde, de leur période et de leur vitesse de propagation [69]. Les TIDs sont observées lors d'événements astronomiques (tels que les éclipses de soleil ou de planètes) en sondant les couches de l'ionosphère à l'aide de signaux modulés en fréquence et en analysant les données par des techniques issues du traitement des signaux [69]. Leur période est comprise entre 10 minutes et 3 heures, si bien que, dans le cas de la mission ACES, les TIDs n'auront aucune influence sur la propagation des signaux du MWL puisque une combinaison des mesures ayant eu approximativement la même trajectoire dans l'atmosphère permet de résoudre cette difficulté.

Les scintillations ionosphériques sont des perturbations ionosphériques de faible longueur d'onde qui produisent de rapides (de l'ordre d'une quinzaine de secondes) changements d'amplitude et de phase sur les signaux [70]. Bien qu'elles soient assez rares aux latitudes moyennes, les scintillations ionosphériques peuvent être fréquentes et d'amplitude importante dans les régions équatoriales, spéciale-

ment à l'aube. Ces scintillations constituent un problème pour le GPS en perturbant les performances des récepteurs lorsqu'ils mesurent la phase de la porteuse. Dans le cas de la mission ACES, les variations de phase induites par cet effet peuvent être annihilées en combinant des signaux de trajectoires proches.

Enfin, les orages ionosphériques sont issus du vent solaire. En effet, le Soleil éjecte continûment un flux de particules de haute énergie, connu sous le nom de vent solaire. Ce flux particulaire interagit avec le champ magnétique terrestre par un effet de compression. Il arrive que ce vent solaire devienne important du fait d'une éruption solaire et influence énormément le champ magnétique de la Terre : cet effet est appelé orage magnétique. Si cet effet est important, la densité en électrons peut rapidement évoluer du fait de cet orage ionosphérique. Même si ce genre de situation est assez rare (leur occurrence dépend fortement du cycle solaire et ils apparaissent préférentiellement dans les régions aurorales), ces orages ionosphériques peuvent se propager vers des latitudes plus basses et dégrader les performances des moyens de communication.

Au vue de l'exemple précédent, il semble naturel de penser que le champ magnétique terrestre va avoir une action sur la densité électronique mais aussi sur le délai ionosphérique par interaction avec le signal. L'influence du champ magnétique sur la propagation des signaux a été longuement étudiée dans le cadre du GPS [71, 72, 73, 74].

Cependant les trois signaux du MWL sont polarisés circulaire gauche alors que l'ensemble des signaux GPS sont polarisés circulaire droite. Le modèle utilisé pour l'étude du transfert de temps du système GPS n'est donc pas applicable à la mission ACES. Il est nécessaire de revenir à une description précise de l'ionosphère et de son effet sur les signaux.

Pour prendre en compte l'effet du champ magnétique, on remplace la force de freinage introduite dans l'équation (2.5) par une force de Laplace. Avec les mêmes notations, l'équation (2.5) devient :

$$m \left(\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} - \frac{e}{c} \vec{B} \times \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} \right) = -e \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (2.11)$$

où \vec{B} est le champ magnétique et \times l'opérateur produit vectoriel.

A l'aide des équations (2.7) et (2.6), on peut déterminer l'indice de réfraction n de l'ionosphère en considérant la formule d'Appleton-Hartree [75] :

$$n^2 = 1 - \frac{2X(1-X)}{2(X-1) - Y_T^2 + \eta \sqrt{Y_T^4 + 4(1-X)^2 Y_L^2}}, \quad (2.12)$$

avec :

$X = (\frac{\omega_p}{\omega})^2$ où $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m}}$ est la pulsation propre du plasma,

$Y_T = Y \sin(\theta_B)$, $Y_L = Y \cos(\theta_B)$ et $Y = \frac{\omega_g}{\omega}$ où $\omega_g = \frac{\mu_0 |e| B}{m}$ est la pulsation gyro-magnétique et où θ_B est l'angle entre la direction de propagation du signal et la direction du champ magnétique \vec{B} .

La valeur du paramètre η devant la racine du dénominateur discrimine l'état de polarisation de l'onde. Lorsque sa polarisation est circulaire gauche, $\eta = +1$ alors que pour une onde polarisée circulairement droite, le paramètre η vaut -1 . Le champ magnétique introduit une brisure de symétrie de l'espace qui a pour conséquence un phénomène de biréfringence : les ondes avec une polarisation circulaire différente se propagent différemment. Contrairement au GPS dont les signaux sont polarisés circulaire droite, les ondes du MWL sont polarisées en sens opposé : par la suite, on considérera la valeur négative du paramètre η .

Dans ce cas, et après un développement limité de l'équation (2.12) à l'ordre quatre en f , l'indice de réfraction pour la phase porteuse d'un signal est donné par :

$$n_\phi = 1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}XY_L - \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{4}X \cdot \left(\frac{1}{2}X + Y^2 + Y_L^2 \right) + O\left(\frac{1}{f^5}\right). \quad (2.13)$$

L'indice n_c associé à la propagation du code dans l'ionosphère se déduit à partir de l'équation (2.13) par dérivation selon l'équation (2.10) :

$$n_c = 1 + \frac{1}{2}X + XY_L + \frac{3}{8}X^2 + \frac{3}{4}X \cdot \left(\frac{1}{2}X + Y^2 + Y_L^2 \right) + O\left(\frac{1}{f^5}\right). \quad (2.14)$$

Les deux équations précédentes (2.13) et (2.14) vont permettre de déterminer une expression analytique du délai ionosphérique et d'estimer ses différents termes pour le code et la phase d'un signal. On peut remarquer par exemple que le terme principal du délai ionosphérique ($\frac{1}{2}X$) est proportionnel à l'inverse de la fréquence au carré et que l'on retrouve la même dépendance dans l'équation (2.8). De plus, les termes principaux de la propagation du code et de la phase sont égaux en valeur absolue mais de signes opposés.

Les délais ionosphériques pour le code Δ_{code}^{iono} et la phase porteuse Δ_{phase}^{iono} sont donnés par²² :

²²Les coefficients $X = \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \frac{N_e}{f^2}$ et $Y = \frac{\mu_0 |e| B}{2\pi m f}$ sont évalués en considérant les valeurs suivantes des paramètres : $e \sim 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $\epsilon_0 \sim 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, $m \sim 9.1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$. On obtient alors $X \sim 40.308 \cdot \frac{2N_e}{f^2}$ et $Y \sim 35176 \cdot \frac{B}{f}$.

$$\Delta_{code}^{iono} = \frac{40.308}{cf^2} \int N_e dL + \frac{7527}{cf^3} \int N_e (\vec{B} \cdot \vec{k}) dL + \frac{1}{cf^4} \cdot \left(2437 \int N_e^2 dL + 4.74 \cdot 10^{22} \int N_e (\vec{B}^2 + (\vec{B} \cdot \vec{k})^2) dL \right), \quad (2.15)$$

$$\Delta_{phase}^{iono} = -\frac{40.308}{cf^2} \int N_e dL - \frac{1}{2} \frac{7527}{cf^3} \int N_e (\vec{B} \cdot \vec{k}) dL - \frac{1}{3} \frac{1}{cf^4} \cdot \left(2437 \int N_e^2 dL + 4.74 \cdot 10^{22} \int N_e (\vec{B}^2 + (\vec{B} \cdot \vec{k})^2) dL \right), \quad (2.16)$$

où \vec{k} est le vecteur unitaire de la direction de propagation du signal.

Afin de prendre en compte l'ensemble des termes qui joueront un rôle dans le cadre de la mission ACES, il est nécessaire d'avoir une estimation de l'amplitude des termes des équations (2.15) et (2.16).

L'ionosphère est souvent modélisée à l'aide du modèle de Chapman [76] qui est né de l'étude de la production d'électrons par photonisation et de leur disparition par recombinaison. Le taux de production d'électrons est une fonction de la hauteur par rapport au niveau moyen de la mer h et de l'angle zénithal χ_s entre le rayon provenant du soleil et le zénith. La formule suivante décrit la distribution de densité électronique d'une couche de l'ionosphère :

$$N_e = N_{max} \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\left(1 - z - \frac{e^{-z}}{\cos \chi_s}\right)\right), \quad (2.17)$$

où N_{max} est la valeur maximale de la densité électronique à une altitude h_{max} , où $z = \frac{h-h_{max}}{H_s}$ et où H_s est un paramètre de la couche exprimé en mètres.

Pour une estimation précise des délais ionosphériques, on utilise une description de l'ionosphère selon trois couches, suivant chacune la loi de Chapman (2.17) mais avec des paramètres N_{max} , h_{max} et H_s différents choisis en concordance avec la référence [74]. La densité électronique de l'ionosphère est alors fonction de l'altitude z tel que le montre la figure 2.5.

L'estimation des termes ionosphériques nécessite aussi une modélisation du champ magnétique de la Terre. Le champ magnétique terrestre peut être comparé, en première approximation, à celui d'un dipôle magnétique. Dans notre travail d'évaluation des termes, les produits scalaires faisant intervenir le champ magnétique terrestre seront maximisés ($\theta_B = 0$) et la norme prise à sa valeur moyenne sur le Globe ($\|\vec{B}\| = 3.12 \cdot 10^{-5} T$).

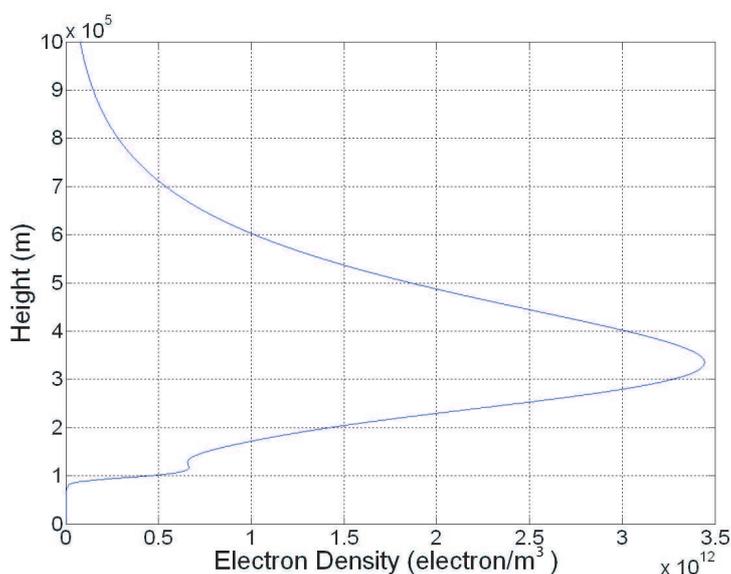


FIG. 2.5 : Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude selon [74].

A partir de ces hypothèses, on donne une estimation de l'ensemble des termes intervenant dans les équations (2.15) et (2.16) afin de rechercher ceux qui doivent être pris en compte pour atteindre la précision convoitée. La valeur maximale atteinte par les termes doit être comparée au dixième de picoseconde puisque c'est à cette précision que l'on désire modéliser le transfert de temps.

Sur les figures 2.6 et 2.7 sont représentés les termes ionosphériques du code des signaux des bandes Ku (f_1 et f_2) et S (f_3) respectivement proportionnels à f^{-2} et f^{-3} en fonction de l'élévation de la station. Ces deux termes atteignent des amplitudes supérieures à 0.1 ps pour les signaux de fréquence f_1 et f_3 : il faut donc les inclure dans le modèle du transfert de temps du MWL.

La figure 2.8 représente l'estimation du terme $\frac{2437}{cf^4} \cdot \int N_e^2 dL$ qui apparaît dans l'équation (2.15) en fonction de l'élévation de la station spatiale. Il reste en-dessous de $2.5 \cdot 10^{-15}$ s pour le signal de la bande Ku : ce terme peut donc être négligé pour la fréquence f_1 . Pour le signal de fréquence f_3 , il dépasse la picoseconde. Cependant, l'observable de fréquence f_3 intervient dans l'équation donnant la désynchronisation par un coefficient de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$: ce terme n'affecte en aucun cas le résultat final et peut donc être écarté.

Le dernier terme de l'équation (2.15) est estimé en fonction de l'élévation sur la figure 2.9. Il atteint des amplitudes qui peuvent être négligées au vue des

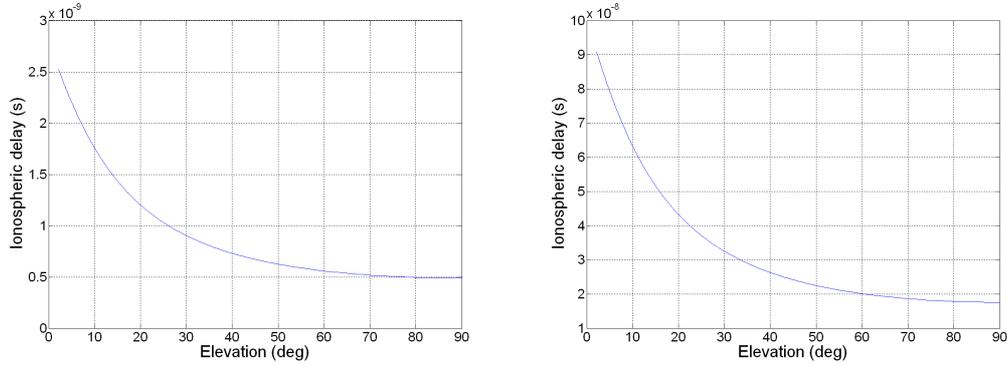


FIG. 2.6 : Évolution du terme ionosphérique du code proportionnel à f^{-2} de l'équation (2.15) pour des signaux dont les fréquences sont 13.5 GHz (figure de gauche) et 2.25 GHz (figure de droite).

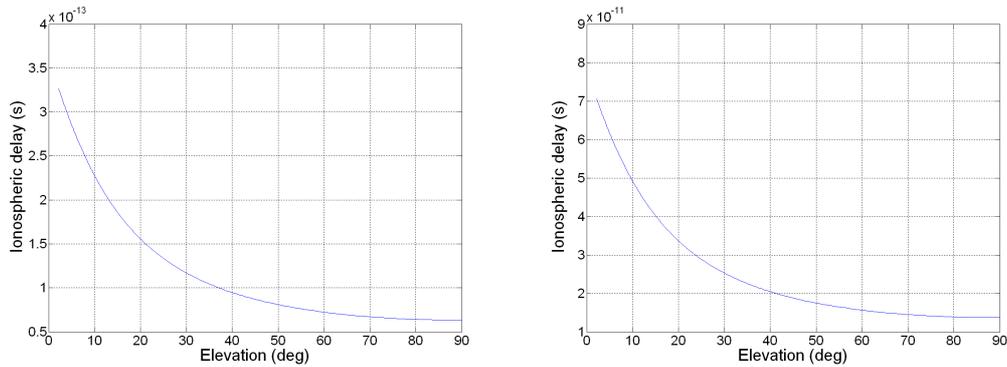


FIG. 2.7 : Évolution du terme ionosphérique du code proportionnel à f^{-3} de l'équation (2.15) pour des signaux dont les fréquences sont 13.5 GHz (figure de gauche) et 2.25 GHz (figure de droite).

objectifs recherchés. Le terme $\frac{4.74 \cdot 10^{22}}{cf^4} \cdot \int N_e (\vec{B}^2 + (\vec{B} \cdot \vec{k})^2) dL$ ne sera donc plus considéré dans la suite.

Du fait du terme quadratique, l'intégrale du terme $\frac{2437}{cf^4} \cdot \int N_e^2 dL$ est difficile à évaluer en fonction du TEC, produit scientifique que l'on recherche. Cependant on peut approcher ce terme par l'expression suivante [77] :

$$\frac{2437}{cf^4} \cdot \int N_e^2 dL \simeq \frac{2437 \cdot \kappa N_{max}}{cf^4} \cdot \int N_e dL \simeq \frac{2437 \cdot \kappa N_{max}}{cf^4} \cdot C_e, \quad (2.18)$$

où N_{max} est la densité électronique maximale de l'ionosphère et κ un facteur constant tel que $\kappa = 0.66$ [77]. De cette façon, l'ensemble des termes intervenant

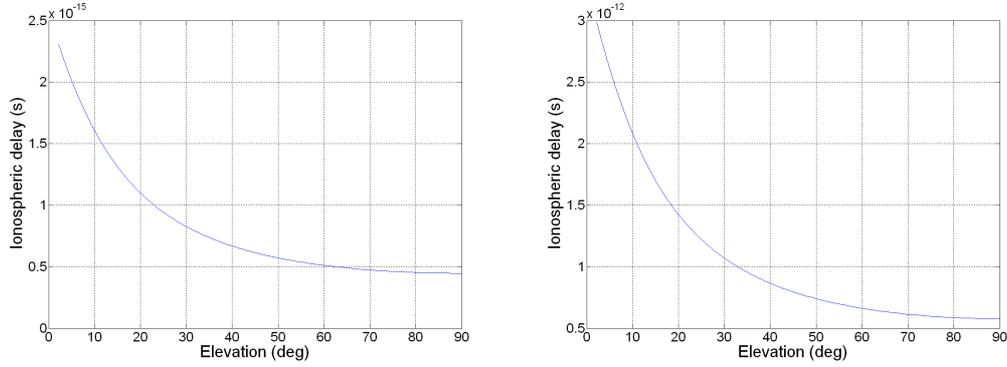


FIG. 2.8 : Évolution du terme ionosphérique du code $\frac{2437}{c^2 f^4} \cdot \int N_e^2 dL$ de l'équation (2.15) pour des signaux dont les fréquences sont 13.5 GHz (figure de gauche) et 2.25 GHz (figure de droite).

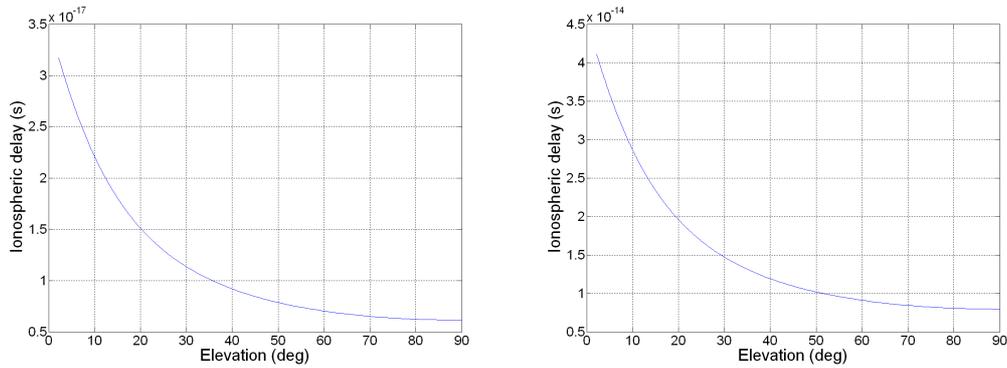


FIG. 2.9 : Évolution du dernier terme du délai ionosphérique du code donné par l'équation (2.15) pour des signaux dont les fréquences sont 13.5 GHz (figure de gauche) et 2.25 GHz (figure de droite).

dans l'expression du délai ionosphérique peut être donné en fonction du TEC.

Remarque

Lors de l'estimation des termes ionosphériques, il faut évaluer avec précaution leur expression analytique à partir des équations (2.13) et (2.14). Par exemple, le terme en $1/f^2$ intervenant dans la propagation ionosphérique pour le code et la phase est donné, en valeur absolue, par :

$$\int \frac{X}{2} dL = \int \frac{1}{2} \frac{e^2 N_e}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e} dL. \quad (2.19)$$

Avec la charge électronique $e = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, la masse de l'électron $m_e = 9.10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, et la permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, on obtient :

$$\frac{40.308}{cf^2} \int N_e dL, \quad (2.20)$$

alors que dans la littérature, on trouve régulièrement l'expression :

$$\frac{40.3}{cf^2} \int N_e dL. \quad (2.21)$$

Cette différence de décimales va jouer un rôle non négligeable dans la constitution d'un modèle de transfert de temps précis au dixième de picoseconde près. En effet, à basse élévation, elle peut conduire à des erreurs atteignant les 0.3 ps pour les signaux de la bande Ku et la dizaine de picosecondes pour la fréquence f_3 .

Ainsi, de nombreux effets peuvent intervenir sur la ionosphère et changer les délais de propagation des signaux. Cependant, compte tenu des caractéristiques de ces variations, aucune d'entre elles n'aura réellement d'effet sur les performances du Lien Micro-Onde. En effet, on peut supposer que la combinaison des signaux sera insensible à l'évolution temporelle de ces effets et que ceux-ci seront mesurés à l'aide des deux dernières fréquences.

La partie neutre de l'atmosphère : la troposphère

Cette partie de l'atmosphère s'étend de la surface de la Terre jusqu'à une altitude d'environ 80 km . Elle est essentiellement constituée d'un mélange de gaz neutres. La propagation d'ondes radiométriques dans ce milieu est dépendante de ses caractéristiques et de ses propriétés (pression, température, humidité, etc ...) fortement liées à la météorologie.

Le délai troposphérique Δ^{tropo} se décompose généralement en deux termes : un terme humide D_w et un terme sec D_h . Les références [78, 79] proposent différents modèles analytiques permettant de calculer les termes du délai troposphérique en fonction de la température, de la pression de l'atmosphère et de l'humidité. La plupart d'entre eux donne la valeur de D_w^z et de D_h^z pour une propagation zénithale. Pour obtenir une évaluation du délai troposphérique lors d'un passage pour n'importe quel angle zénithal χ entre le satellite et la station terrestre, on définit des fonctions de nivellement $M_h(\chi)$ et $M_w(\chi)$ telles que le délai troposphérique pour un angle zénithal χ s'exprime selon :

$$\Delta^{tropo}(\chi) = M_h(\chi) \cdot D_h^z + M_w(\chi) \cdot D_w^z. \quad (2.22)$$

Un certain nombre de modèles décrivent ces fonctions de nivellement M_h et M_w et résultent de travaux théoriques ou expérimentaux [80, 81, 82, 83].

Certains modèles troposphériques donnent directement la somme des termes humide et sec zenithaux du délai troposphérique, tel que le modèle de Saastamoinen :

$$\Delta_z^{tropo} = \frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{c} \left(p + e \cdot \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) \right), \quad (2.23)$$

où p est la pression atmosphérique en millibars, e est la pression partielle de vapeur d'eau en millibars et T est la température atmosphérique en Kelvins.

En appliquant la fonction de nivellement adéquate [84], le délai troposphérique est donné par :

$$\Delta^{tropo} = \frac{1}{c} \left(\frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{\cos(\chi)} \left(p + e \cdot \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) - \tan(\chi)^2 \right) \right). \quad (2.24)$$

Avec $p \simeq 1 \text{ bar}$, $T \simeq 298 \text{ K}$, $e \simeq 0.5 \text{ bar}$, et $\chi < 75^\circ$, le délai troposphérique n'excède pas la centaine de nanosecondes (cf. figure 2.10).

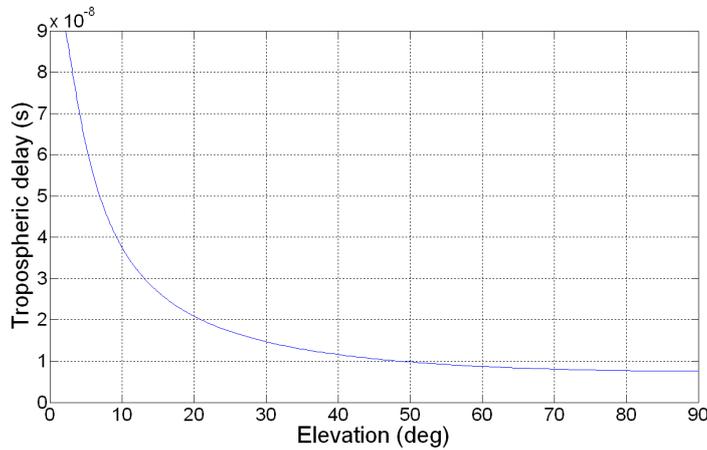


FIG. 2.10 : Évolution du délai troposphérique en fonction de l'élévation.

Contrairement à l'ionosphère, cette couche atmosphérique n'est pas dispersive (pour des fréquences de signaux inférieures à 15 GHz en tout cas) puisque son retard ne dépend pas de la fréquence du signal qui la traverse d'après l'équation (2.24). Par conséquent, son effet sur les trois fréquences du Lien Micro-Onde sera

approximativement identique. De plus, cette indépendance face à la fréquence implique que la troposphère a un effet similaire sur la propagation du code et de la phase porteuse.

Cependant, des travaux récents [85] indiquent que la troposphère est un milieu légèrement dispersif. Ces résultats provisoires donneraient lieu à des corrections de l'ordre de la picoseconde pour la différence des délais troposphériques de deux fréquences différentes du MWL du fait d'une transition électronique d'un des composants de la troposphère. Si ces conclusions sont confirmées, il sera possible d'en tenir compte et de corriger l'erreur correspondante.

2.2.2 Le retard Shapiro

L'effet Shapiro [10] correspond au rallongement du parcours de la lumière par une masse gravitationnelle. On cherche, dans cette partie, à déterminer le temps de propagation coordonnée T_p mis par un signal émis de A pour arriver en B .

En relativité, les photons se propagent suivant une géodésique le long de laquelle $ds = 0$. Ainsi, l'équation (1.3) du chapitre précédent donne, en considérant le système de coordonnées GCRS (cf. équations (1.7)) et en ne gardant que le terme principal du potentiel gravitationnel :

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right) \|d\vec{r}\|, \quad (2.25)$$

où \vec{r} est la position du point considéré exprimée dans un référentiel géocentrique non-tournant. On introduit la variable \vec{R} permettant de décrire la trajectoire du signal telle que :

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_A, \quad (2.26)$$

où $\vec{r}_A = \vec{r}(A)$ est la position à l'émission (cf. figure 2.11).

La distance coordonnée entre la position du photon considéré et le centre de la Terre est donnée par :

$$r = (R^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_A + r_A^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

En l'absence de toute masse gravitationnelle, la trajectoire du signal entre les points A et B serait rectiligne. Dans le cas présent, le champ gravitationnel terrestre va perturber sa propagation rectiligne à l'ordre $1/c^2$. Le vecteur $\vec{n}_{AB} = \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|}$ diffère de la tangente \vec{n}_A au point d'émission A par un terme d'ordre $1/c^2$ qui peut être négligé [86].

Ainsi quand \vec{r} varie, on obtient :

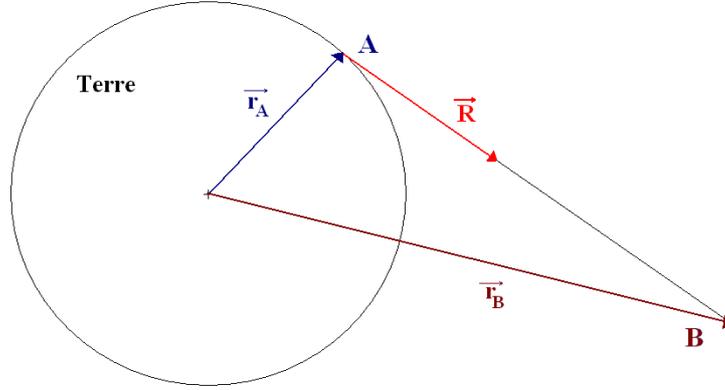


FIG. 2.11 : Schéma et notations utilisés pour l'évaluation du délai Shapiro.

$$\|d\vec{r}\| = \|d\vec{R}\| + O(c^{-2}) = dR + O(c^{-2}),$$

ce qui conduit à l'équation :

$$dt = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right) \frac{\|d\vec{R}\|}{c}. \quad (2.28)$$

Le temps coordonnée de propagation du signal entre les points A et B éloignés d'une distance géométrique R_{AB} est donné par l'intégrale suivante :

$$T = \int_0^{R_{AB}} \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right) \frac{dR}{c} = \frac{R_{AB}}{c} + \frac{2GM_E}{c^3} \int_0^{R_{AB}} \frac{dR}{\sqrt{R^2 + 2R\vec{n}_{AB} \cdot \vec{r}_A + r_A^2}}. \quad (2.29)$$

Le premier terme du membre de droite $\frac{R_{AB}}{c}$ est le délai géométrique classique dans un espace plat. Le second terme de l'équation (2.29) est la correction à ce délai géométrique du fait de la courbure de l'Espace. Il correspond à l'effet de la gravitation sur la propagation du signal, l'effet Shapiro, et s'écrit²³ :

$$T = \frac{R_{AB}}{c} + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{2\vec{n}_{AB} \cdot \vec{r}_A + 2R_{AB} + 2\sqrt{R_{AB}^2 + 2R_{AB}\vec{n}_{AB} \cdot \vec{r}_A + r_A^2}}{2\vec{n}_{AB} \cdot \vec{r}_A + 2r_A} \right). \quad (2.30)$$

²³Cette intégrale est évaluée à partir de la formule suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + ax + b}} = \left[\ln(a + 2x + 2\sqrt{x^2 + ax + b}) \right]_{\alpha}^{\beta}.$$

L'utilisation de la formule trigonométrique d'Al-Kashi permet d'obtenir une formule simplifiée qui sera considérée dans la suite :

$$T_p = \frac{R_{AB}}{c} + \frac{2GM_E}{c^3} \ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right). \quad (2.31)$$

Dans le cadre de la mission ACES, on désire évaluer l'effet Shapiro. Sur la figure 2.12 est représentée l'évolution de cet effet relativiste au cours d'un passage, c'est-à-dire uniquement le terme logarithmique de l'équation (2.31). Les positions A et B décrites précédemment correspondent aux deux stations, l'ordre n'ayant aucune importance puisque ce délai relativiste est indépendant du caractère ascendant ou descendant du signal. L'effet Shapiro reste supérieur à la picoseconde pour toutes les élévations et est donc largement dominé par les effets atmosphériques.

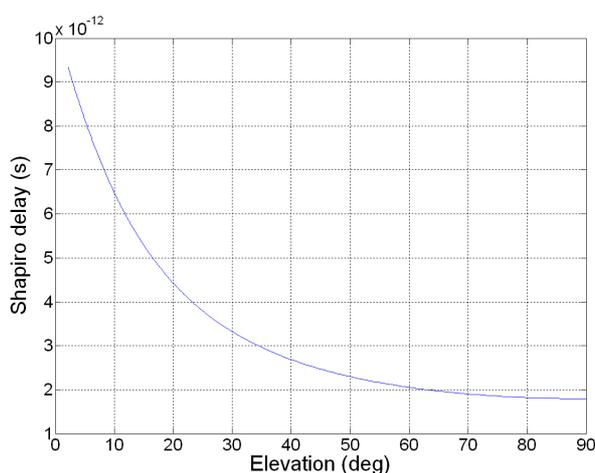


FIG. 2.12 : Évolution du délai Shapiro en fonction de l'élévation.

Dans l'équation (2.25), seul le terme principal du potentiel gravitationnel a été considéré. L'ordre suivant du développement en harmoniques sphériques apporte une correction à l'équation (2.31) inférieure à la dizaine de femtosecondes.

2.2.3 Les délais internes

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la détermination par satellite de la désynchronisation de deux horloges distantes dépend, entre autres, des retards instrumentaux à la transmission et à la réception. Ces retards sont composés des délais des signaux dans les antennes, les amplificateurs, les câbles, liant les antennes aux modems (récepteurs), et les retards dans les modems eux-mêmes.

En plus, ces délais sont, en général, inégaux pour les différentes fréquences, ainsi que pour les différents canaux des récepteurs. Par conséquent, dans le cas de la mission ACES, les quatre canaux de la station spatiale auront des délais instrumentaux distincts.

Par la suite, ces délais internes seront notés sous la forme $\Delta_{X_i}^A$. L'expression d'un délai interne $\Delta_{X_i}^A$ dépend de trois paramètres : le paramètre X correspond à la nature du délai qu'il soit en transmission (T) ou en réception (R), l'entier $i = 1, 2$ ou 3 est à rapprocher de l'indice de la fréquence étudiée, et enfin du paramètre A qui indique si le délai interne est une mesure de temps propre dans l'échelle de temps terrestre (g) ou spatiale (s).

Par exemple, le terme $\Delta_{T_2}^s$ est un intervalle de temps propre de l'échelle spatiale et correspond au délai interne de transmission du signal de fréquence f_2 de l'horloge spatiale à l'antenne. De même, le délai interne $\Delta_{R_3}^s$, exprimé dans l'échelle locale de temps terrestre, est lié à la réception du signal de fréquence f_3 .

La calibration des délais internes reste un problème limitant dans les comparaisons temporelles et fréquentielles actuelles. Ces délais internes varient avec, entre autres, le temps et la température du satellite. Il existe deux méthodes de détermination de ces délais, appelées étalonnage absolu et étalonnage relatif. Concernant la mission ACES, les délais internes de la station spatiale seront étalonnés par un étalonnage absolu. Lorsqu'un canal ne sera pas utilisé, un signal identique à celui envoyé par le satellite vers le sol sera émis jusqu'à l'antenne puis redirigé vers l'horloge afin de mesurer la somme des délais instrumentaux pour la réception et l'émission d'une fréquence. Pendant une période de comparaison, les délais internes seront estimés à partir des mesures réalisées avant et après cet événement.

La résolution des calibrations absolues de délais internes dans le cadre du GPS atteint des exactitudes inférieures à 0.5 ns [87]. Les objectifs de la mission ACES visent des comparaisons temporelles dont l'exactitude ne dépasse pas 100 ps , soit un gain d'un facteur cinq sur les calibrations actuelles. Cependant, il est aussi nécessaire que leur stabilité reste inférieure aux spécifications données par l'équation (2.1).

2.2.4 Le multi-trajet

Le dernier effet qu'on mentionne ici est l'effet du multi-trajet. Il s'agit de réflexions parasites du signal sur des surfaces proches de l'antenne qui peuvent donc créer de faux signaux. Ces erreurs dépendent de la distance entre l'objet réfléchissant et l'antenne, ainsi que du type de mesure (phase de la porteuse ou code PRN), et de la fréquence porteuse.

Cet effet dépend fortement de l'environnement de l'antenne et du type d'antenne utilisé. Pour minimiser ces effets, il est donc essentiel de bien choisir l'emplacement de l'antenne (loin de toute surface réfléchissante) et d'utiliser une an-

tenne qui minimise le multi-trajet comme, par exemple, une antenne directionnelle quand cela est possible ou une antenne omnidirectionnelle avec des anneaux absorbants (*choke rings*) contre les multi-trajets. Pour le GPS, les effets du multi-trajet sur un site relativement encombré peuvent atteindre une dizaine de nanosecondes (mesures code PRN), et une dizaine de picosecondes (mesures de la phase de la porteuse).

Dans le cas de la mission ACES, les immenses panneaux solaires de la Station Spatiale Internationale sont susceptibles de générer ce type de désagrément. Par conséquent, le choix du type et du positionnement des antennes du MWL a été réalisé de manière à réduire considérablement l'apparition de multi-trajet. Toutefois, si jamais certaines données étaient affectées significativement par cet effet, celles-ci seraient identifiées par le MWL - en détectant un bruit et une variation de puissance anormale sur les mesures - puis rejetées.

2.2.5 Tableau récapitulatif

L'ensemble des effets intervenant dans la propagation des signaux du Lien Micro-Onde a été abordé. Les amplitudes maximale et minimale de chaque terme sont reportées dans le tableau 2.2.

TAB. 2.2 : Valeurs minimale et maximale des effets intervenant lors de la propagation des signaux du MWL pour des fréquences dans la bande Ku et S pour un passage de l'ISS de l'horizon au zénith et une densité électronique $N_e = 200 \cdot 10^{10}$.

Délais	Bande Ku		Bande S	
	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
Géométrique (<i>ms</i>)	1.3	6.9	1.3	6.9
Ionosphérique (<i>ns</i>)	0.5	2.5	17	90
Troposphérique (<i>ns</i>)	7.6	90	7.6	90
Shapiro (<i>ps</i>)	1.8	9.3	1.8	9.3

D'après le tableau 2.2, les temps de propagation des signaux sont largement dominés par leur délai géométrique. Le retard ionosphérique affectant les signaux de la bande Ku est environ 50 fois plus faible que celui agissant sur la propagation du signal de fréquence f_3 . Au contraire, les délais géométrique, troposphérique et Shapiro restent indépendants de la fréquence des signaux (en première approximation) et seront, de ce fait, difficilement dissociables si on désire les évaluer.

2.3 Modélisation du Lien Micro-Onde

2.3.1 Description

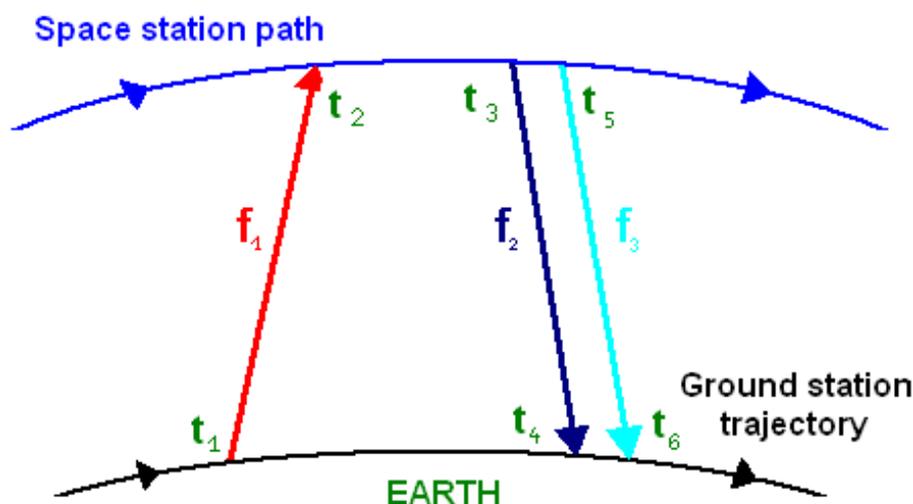


FIG. 2.13 : Principe du Lien Micro-Onde.

Afin de décrire les mesures du Lien Micro-Onde, chaque événement d'émission et de réception d'un des trois signaux au centre de phase de l'antenne est associé à un nombre entier i et à un temps coordonné t_i (cf. figure 2.13). De même, la prise en compte des délais instrumentaux nécessite la définition de temps coordonné d'émission et de réception au modem notés par t_i^o . Pour les trois signaux, l'ensemble des temps coordonné caractéristiques d'un événement du MWL est défini de la manière suivante :

- Le signal de fréquence f_1 est daté par l'horloge sol au temps coordonné t_1^o , émis par la station terrestre à t_1 , réceptionné à l'antenne de la station spatiale à t_2 et comparé au signal local daté au temps coordonné t_2^o .
- Le signal de fréquence f_2 est daté par l'horloge bord au temps coordonné t_3^o , émis par la station spatiale à t_3 , réceptionné à l'antenne de la station terrestre à t_4 et comparé au signal local daté au temps coordonné t_4^o .
- Le signal de fréquence f_3 est daté par l'horloge bord au temps coordonné t_5^o , émis par la station spatiale à t_5 , réceptionné à l'antenne de la station terrestre à t_6 et comparé au signal local daté au temps coordonné t_6^o .

Comme annoncé dans le Chapitre 1, les quantités coordonné seront définies dans le système de coordonnées GCRS (les coordonnées spatiales du référentiel

ont leur origine au géocentre et sont non tournantes), et la métrique utilisée sera une solution approchée des équations d'Einstein, la métrique PPN (Post Newtonienne Paramétrisée) décrite selon les équations (1.7). On définit les intervalles de temps coordonnée T_{ij} par $T_{ij} = t_j - t_i$. Ainsi l'intervalle T_{12} correspond au temps coordonnée écoulé entre l'émission et la réception du signal de fréquence f_1 , soit son temps coordonnée de propagation. L'intervalle T_{23} se réfère, quant à lui, à l'intervalle de temps entre la réception du signal f_1 et l'émission du signal f_2 à la station spatiale.

Le lien Micro-Onde est caractérisé par son émission continue. Il mesure l'intervalle de temps entre le signal reçu et le signal généré localement. Il fournit trois mesures (ou observables) par comparaison du code (une à bord de l'ISS, les deux autres à la station terrestre) ainsi que trois mesures de phase de la fréquence porteuse (cf. figure 2.14). Ces six observables sont fournies par le système à un taux d'échantillonnage d'un Hertz.

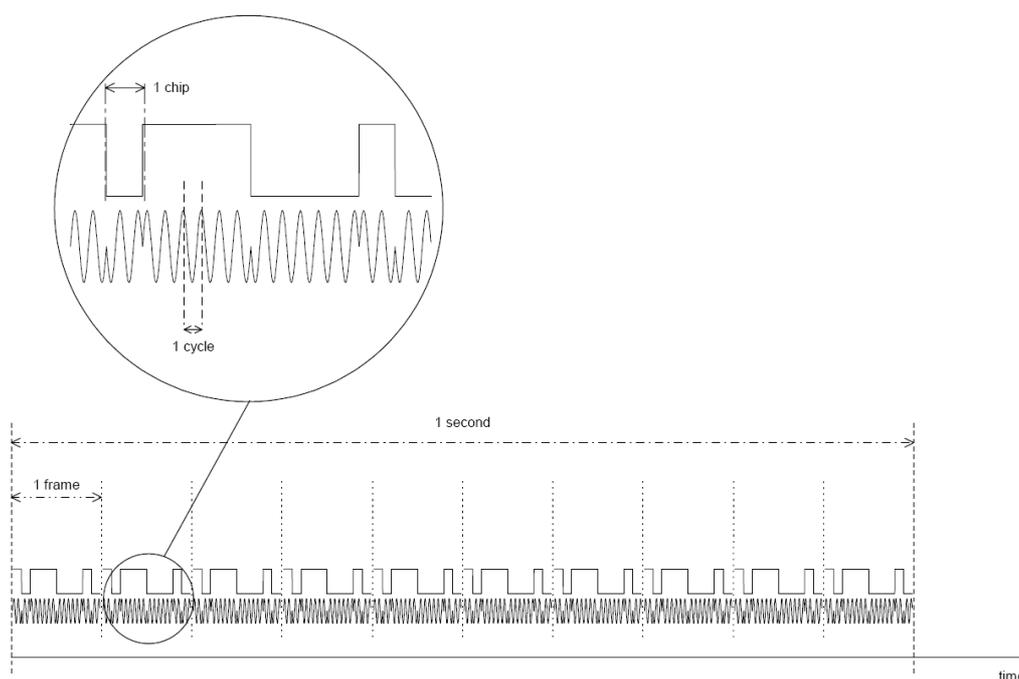


FIG. 2.14 : *Forme des signaux émis : la porteuse est modulée par l'addition d'un code pseudo-aléatoire PRN se répétant toutes les 0.5 ms pour les signaux de fréquences f_1 et f_2 ou toutes les 10 ms pour la fréquence f_3 .*

2.3.2 Mesures du MWL

Pour comprendre la nature d'une mesure du MWL, on considère un morceau du code qui est produit par l'horloge terrestre à τ_p^g et reçu à l'horloge spatiale à τ_a^s . Le même bout de code est produit à l'horloge spatiale à τ_p^s . Une mesure du MWL correspond à la différence entre la production et l'arrivée du morceau de code considéré dans l'échelle de temps locale de la mesure. Soit :

$$\Delta\tau^s(\tau_a^s) = \tau_p^s - \tau_a^s.$$

Du fait que les deux horloges fabriquent le même code, on a $\tau_p^s = \tau_p^g$. Ainsi l'observable mesurée à τ_p^s peut s'exprimer selon :

$$\Delta\tau^s(\tau_a^s) = \tau_p^g - \tau_a^s.$$

Ainsi on peut relier les temps propres τ_p^g et τ_a^s aux temps coordonnée caractéristiques du MWL (voir figure 2.15). Par exemple pour le signal de fréquence f_1 , on obtient :

$$\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) = \tau^g(t_1^o) - \tau^s(t_2^o). \quad (2.32)$$

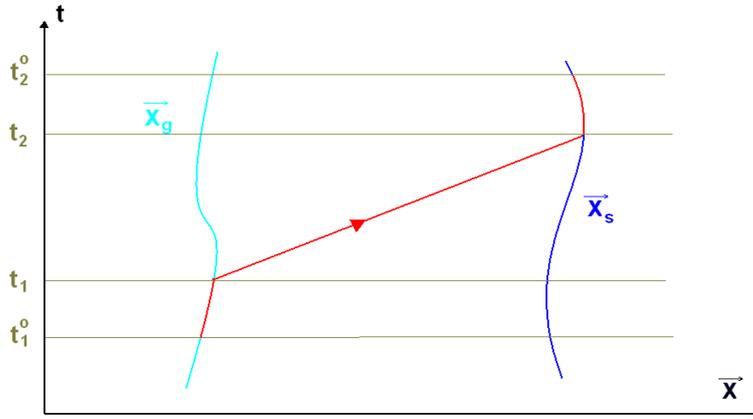


FIG. 2.15 : Rappel des temps caractéristiques liés au signal de fréquence f_1 .

En introduisant de manière artificielle les autres temps caractéristiques de la propagation du signal - tels que son temps d'émission à l'antenne terrestre t_1 ou son temps de réception à l'antenne spatiale t_2 (cf. figure 2.15) -, on exprime l'observable de code du signal de fréquence f_1 en fonction des délais internes et du temps de propagation entre les deux stations²⁴ :

²⁴L'expression suivante fait intervenir les applications $[\cdot]^t$, $[\cdot]^g$ et $[\cdot]^s$ définies selon les équations (1.12) et (1.13).

$$\begin{aligned}
\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) &= \tau^g(t_1^o) - \tau^g(t_1) + \tau^g(t_1) - \tau^g(t_2) \\
&\quad + \tau^g(t_2) - \tau^g(t_2^o) + \tau^g(t_2^o) - \tau^s(t_2^o), \\
\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) &= -\Delta_{T1}^g - [T_{12}(t_2)]^g - \left[[\Delta_{R1}^s]^t \right]^g + \tau^g(t_2^o) - \tau^s(t_2^o),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

où Δ_{T1}^g correspond au délai instrumental entre la production du code considéré par l'horloge sol au temps coordonnée t_1^o et son émission à l'antenne au temps t_1 et est mesuré dans l'échelle de temps locale de la station terrestre, soit $\Delta_{T1}^g = \tau^g(t_1) - \tau^g(t_1^o)$. Le terme $[T_{12}(t_2)]^g$ désigne la transformation en temps propre de l'échelle temporelle terrestre du temps de propagation d'un signal de fréquence f_1 reçu au temps coordonnée t_2 à la station spatiale. Le terme $\left[[\Delta_{R1}^s]^t \right]^g$ intervenant dans l'équation (2.33) s'identifie à une double transformation d'échelle de temps : il s'agit de la transformée en temps propre de l'échelle de temps terrestre de la transformée en temps coordonnée du retard interne Δ_{R1}^s en réception du signal de fréquence f_1 . Le dernier terme de l'équation (2.33) correspond à la désynchronisation entre les horloges au temps coordonnée t_2^o .

Des considérations identiques pour les deux autres signaux donnent des expressions pour les observables respectives :

$$\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) = Des(t_2^o) - \left[[\Delta_{T1}^g]^t + T_{12} + [\Delta_{R1}^s]^t \right]^g, \tag{2.34}$$

$$\Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) = -Des(t_4^o) - \left[[\Delta_{T2}^s]^t + T_{34} + [\Delta_{R2}^g]^t \right]^s, \tag{2.35}$$

$$\Delta\tau^g(\tau^g(t_6^o)) = -Des(t_6^o) - \left[[\Delta_{T3}^s]^t + T_{56} + [\Delta_{R3}^g]^t \right]^s, \tag{2.36}$$

où $Des(t) = \tau^g(t) - \tau^s(t)$ est la différence entre le temps propre de l'horloge terrestre τ^g et celui de l'horloge spatiale τ^s à un temps coordonnée t , nommée désynchronisation (se reporter à la convention de synchronisation définie en section 1.1.6).

2.3.3 Expression des observables

On pose $\vec{R}_{12} = \vec{x}_s(t_2) - \vec{x}_g(t_1)$, $\vec{R}_{34} = \vec{x}_s(t_3) - \vec{x}_g(t_4)$ et $\vec{R}_{56} = \vec{x}_s(t_5) - \vec{x}_g(t_6)$ les vecteurs des chemins effectifs parcourus par la lumière. On définit aussi le vecteur $\vec{D}(t)$ défini par $\vec{D}(t) = \vec{x}_s(t) - \vec{x}_g(t)$ et sa norme $D(t) = \|\vec{D}(t)\|$. Cette

dernière correspond à la distance coordonnée instantanée entre les deux stations, appelée couramment le *range*.

D'après les parties précédentes, les temps de propagation - T_{12} , T_{34} et T_{56} - des trois signaux qui interviennent dans les équations (2.34), (2.35) et (2.36) s'écrivent respectivement :

$$T_{12} = \frac{R_{12}}{c} + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_1) + x_s(t_2) + R_{12}}{x_g(t_1) + x_s(t_2) - R_{12}} \right) + \Delta_{12}^{tropo} + \Delta_{12}^{iono} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (2.37)$$

$$T_{34} = \frac{R_{34}}{c} + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_4) + x_s(t_3) + R_{34}}{x_g(t_4) + x_s(t_3) - R_{34}} \right) + \Delta_{34}^{tropo} + \Delta_{34}^{iono} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (2.38)$$

$$T_{56} = \frac{R_{56}}{c} + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_6) + x_s(t_5) + R_{56}}{x_g(t_6) + x_s(t_5) - R_{56}} \right) + \Delta_{56}^{tropo} + \Delta_{56}^{iono} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (2.39)$$

où Δ_{ij}^{tropo} et Δ_{ij}^{iono} sont respectivement les délais troposphérique et ionosphérique pour le signal émis à l'antenne au temps coordonné t_i , reçus au temps t_j et définis dans la section 2.2.1.

Les termes des trois équations précédentes font intervenir les positions des stations à des temps coordonné différents. Lors de la combinaison des observables, certains termes devront être évalués à partir des données orbitographiques des stations. On cherche à ce que ces termes s'expriment en fonction de la position, de la vitesse et de l'accélération des stations terrestre et spatiale à un temps coordonné t_i choisi.

L'orbitographie des stations donne la position \vec{x} , la vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} en fonction d'un temps coordonné t , UTC par exemple. Seule une des deux horloges sera synchronisée avec t (la relation $\tau(t)$ sera connue pour seulement une des horloges), le but étant justement de synchroniser la seconde.

On suppose dans cette partie que l'horloge terrestre est synchronisée avec UTC. De cette façon, l'orbitographie des stations spatiale et terrestre peut s'exprimer dans l'échelle de temps propre terrestre τ^g . La même étude a été menée en considérant que c'est l'horloge spatiale qui est synchronisée avec UTC : les calculs correspondants peuvent être trouvés en annexe de cette thèse (cf. l'annexe B).

On désire, par conséquent, exprimer tous les termes intervenant dans les expressions des observables en fonction d'un temps coordonnée lié avec un événement se produisant à la station terrestre, t_1^o , t_4^o ou t_6^o , ou alors, si l'on connaît les délais internes de la station sol en fonction de t_1 , t_4 ou t_6 .

On va donc chercher par la suite à exprimer les temps de propagation des signaux donnés par les équations (2.37), (2.38) et (2.39) seulement en fonction des données en t_i , c'est-à-dire en fonction du vecteur $\vec{D}(t_i) = \vec{x}_s(t_i) - \vec{x}_g(t_i)$, des accélérations et des vitesses au temps coordonnée t_i de la station sol ($\vec{v}_g(t_i)$ et $\vec{a}_g(t_i)$) et de la station spatiale ($\vec{v}_s(t_i)$ et $\vec{a}_s(t_i)$) où i est respectivement égal à 1, 4 et 6.

2.3.4 Calcul des temps de propagation

Le développement limité au deuxième ordre de la position de la station spatiale $\vec{x}_s(t_2)$ en t_1 donne :

$$\vec{x}_s(t_2) = \vec{x}_s(t_1) + \vec{v}_s(t_1) \cdot [t_2 - t_1] + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_1) \cdot [t_2 - t_1]^2 + O([t_2 - t_1]^3). \quad (2.40)$$

En soustrayant la position de la station terrestre $\vec{x}_g(t_1)$ en t_1 de chaque coté de l'équation (2.40), on obtient²⁵ :

$$\vec{R}_{12} = \vec{D}(t_1) + \vec{v}_s(t_1) \cdot T_{12} + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_1) \cdot T_{12}^2 + O(T_{12}^3). \quad (2.41)$$

La norme de \vec{R}_{12} correspond à la distance géométrique parcourue par le signal de fréquence f_1 . Elle est obtenue en calculant le produit scalaire $\vec{R}_{12} \cdot \vec{R}_{12}$ puis en évaluant sa racine carré :

$$R_{12} = D(t_1) \cdot \left(1 + \frac{2\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)^2} T_{12} + \frac{v_s^2(t_1) + \vec{D}(t_1) \cdot \vec{a}_s(t_1)}{D(t_1)^2} T_{12}^2 + O(T_{12}^3) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

En ne gardant que les termes du deuxième ordre, la distance R_{12} s'écrit :

²⁵On rappelle que l'évaluation des termes intervenant dans les équations de cette partie peut être réalisée en prenant $D \sim 10^6$ m, $v_s \sim 7.7 \cdot 10^3$ m.s⁻¹, $v_g \sim 4.6 \cdot 10^2$ m.s⁻¹, $a_s \sim 8.6$ m.s⁻², $a_g \sim 9.8$ m.s⁻² et $T_{12} \sim 1$ ms

$$\begin{aligned}
R_{12} = & D(t_1) + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)} T_{12} \\
& + \frac{v_s^2(t_1) + \vec{a}_s(t_1) \cdot \vec{D}(t_1) - \left(\frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)}\right)^2}{2D(t_1)} T_{12}^2 + O(T_{12}^3).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

En insérant le résultat précédent dans l'équation (2.37), on obtient :

$$\begin{aligned}
T_{12} = & \frac{1}{c} \left(D(t_1) + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)} T_{12} \right. \\
& \left. + \frac{v_s^2(t_1) + \vec{a}_s(t_1) \cdot \vec{D}(t_1) - \left(\frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)}\right)^2}{2D(t_1)} T_{12}^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_1) + x_s(t_2) + R_{12}}{x_g(t_1) + x_s(t_2) - R_{12}} \right) + \Delta_{12}^{tropo} + \Delta_{12}^{iono} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

On remarque que l'équation (2.44) du temps de propagation T_{12} fait intervenir des termes fonctions de ce temps T_{12} . Ces termes restent faibles par rapport au terme principal D/c puisque le rapport $\frac{v_s}{c}$ est de l'ordre de $2.6 \cdot 10^{-5}$. Ils sont à relier au fait que, pendant la propagation géométrique du signal, la station spatiale s'est déplacée et le temps de propagation est modifié : ces effets sont appelés effets de courbure (*bending effects*) ou effets Sagnac [88] (car liés au mouvement de l'émetteur et du récepteur pendant la transmission du signal, en analogie à l'expérience de Sagnac [89]).

En considérant les valeurs des termes données dans le tableau 2.2, on remplace l'expression du paramètre T_{12} donné par l'équation (2.44) dans cette même équation en ne gardant que les termes supérieurs à 0.1 ps .

$$\begin{aligned}
T_{12} = & \frac{D(t_1)}{c} \\
& + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1) \cdot c} \left(\frac{D(t_1)}{c} + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1) \cdot c} T_{12} + \Delta_{12}^{tropo} + \Delta_{12}^{iono} \right) \\
& + \frac{v_s^2(t_1) + \vec{a}_s(t_1) \cdot \vec{D}(t_1) - \left(\frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)}\right)^2}{2D(t_1) \cdot c} \left(\frac{D(t_1)}{c}\right)^2 \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_1) + x_s(t_1) + D(t_1)}{x_g(t_1) + x_s(t_1) - D(t_1)} \right) + \Delta_{12}^{tropo} + \Delta_{12}^{iono} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

En rangeant les termes par ordre de développement, on obtient :

$$\begin{aligned}
T_{12} = & \frac{D(t_1)}{c} + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{c^2} + \frac{D(t_1)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_1)\|^2 \right. \\
& \left. + \vec{D}(t_1) \cdot \vec{a}_s(t_1) + \left(\frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_1) + x_s(t_1) + D(t_1)}{x_g(t_1) + x_s(t_1) - D(t_1)} \right) \\
& + \Delta_{12}^{tropo} \cdot \left(1 + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1) \cdot c} \right) + \Delta_{12}^{iono} \cdot \left(1 + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1) \cdot c} \right) + O(c^{-4}).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Dans l'équation (2.46), les termes atmosphériques sont aussi affectés par des corrections de type Sagnac. En effet, durant le délai provoqué par l'atmosphère, les stations se sont déplacées et le temps de propagation du signal a, par conséquent, évolué.

De la même façon, on cherche à exprimer T_{34} en fonction des paramètres exprimés en t_4 . Le développement limité de la position de la station spatiale au temps t_3 est donné à l'ordre convenu par :

$$\begin{aligned}
\vec{x}_s(t_3) &= \vec{x}_s(t_4) + \vec{v}_s(t_4) \cdot [t_3 - t_4] + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_4) \cdot [t_3 - t_4]^2 + O([t_3 - t_4]^3), \\
\vec{x}_s(t_3) &= \vec{x}_s(t_4) - \vec{v}_s(t_4) \cdot T_{34} + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_4) \cdot T_{34}^2 + O(T_{34}^3).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Le vecteur reliant la position de la station spatiale à l'émission du signal de fréquence f_2 et celle de la station terrestre à la réception de ce même signal s'exprime selon :

$$\vec{R}_{34} = \vec{D}(t_4) - \vec{v}_s(t_4) \cdot T_{34} + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_4) \cdot T_{34}^2 + O(T_{34}^3), \tag{2.48}$$

et sa norme selon :

$$\begin{aligned}
R_{34} = & D(t_4) - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4)} T_{34} \\
& + \frac{v_s^2(t_4) + \vec{a}_s(t_4) \cdot \vec{D}(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4)} \right)^2}{2D(t_4)} T_{34}^2 + O(T_{34}^3).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Selon le même principe utilisé précédemment, on insère l'expression de R_{34} donnée par l'équation précédente dans l'équation (2.38). Puis on remplace les termes d'ordre supérieur qui sont fonctions de T_{34} en utilisant l'expression (2.49) et en ne gardant que les termes supérieurs au dixième de picoseconde. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
T_{34} = & \frac{D(t_4)}{c} - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{c^2} \\
& + \frac{D(t_4)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_4)\|^2 + \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) + \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_4) + x_s(t_4) + D(t_4)}{x_g(t_4) + x_s(t_4) - D(t_4)} \right) \\
& + \Delta_{34}^{tropo} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c} \right) + \Delta_{34}^{iono} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c} \right) + O(c^{-4}).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Il est intéressant de remarquer la différence de signe devant le deuxième terme des expressions (2.46) et (2.50). Elle provient du fait que l'on exprime les délais de propagation en t_1 ou t_4 (temps coordonnée liés à des événements de réception ou d'émission d'un signal à la station terrestre) et que durant ces temps de propagation, la station spatiale s'est déplacée. Cependant, selon le cas, la position de la station spatiale est soit antérieure soit postérieure à sa position au temps coordonnée étudié, ce qui explique le changement de signe.

De la même façon, on peut calculer une expression équivalente pour le temps de propagation T_{56} . A l'aide d'un développement limité, on obtient :

$$\begin{aligned}
T_{56} = & \frac{D(t_6)}{c} - \frac{\vec{D}(t_6) \cdot \vec{v}_s(t_6)}{c^2} \\
& + \frac{D(t_6)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_6)\|^2 + \vec{D}(t_6) \cdot \vec{a}_s(t_6) + \left(\frac{\vec{D}(t_6) \cdot \vec{v}_s(t_6)}{D(t_6)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_6) + x_s(t_6) + D(t_6)}{x_g(t_6) + x_s(t_6) - D(t_6)} \right) + \Delta_{56}^{iono} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_6) \cdot \vec{v}_s(t_6)}{D(t_6) \cdot c} \right) \\
& + \Delta_{56}^{tropo} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_6) \cdot \vec{v}_s(t_6)}{D(t_6) \cdot c} \right) + O(c^{-4}).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

2.4 Les produits scientifiques

Maintenant que les observables ont été reliées au modèle du transfert de temps, on désire obtenir l'expression des produits scientifiques de la mission en fonction des mesures du MWL. Les trois signaux du Lien Micro-Onde permettent différentes combinaisons de mesures et conduisent à l'évaluation de plusieurs paramètres physiques. En effet, les équations (2.46), (2.50) et (2.51) combinées aux expressions des observables de code (2.34), (2.35) et (2.36) montrent, par exemple, que la différence des observables provenant des signaux de fréquence f_1 et f_2 permet d'estimer la désynchronisation entre les horloges à un même temps coordonnée t_a^o . De même, la différence des observables des signaux f_2 et f_3 conduit à l'estimation précise du Contenu Total Électronique. Enfin, la distance coordonnée entre les deux stations et le délai troposphérique peuvent être évalués à partir de la somme des mesures de f_1 et f_2 .

2.4.1 La désynchronisation

Si l'on veut déterminer la désynchronisation des deux échelles de temps en combinant les mesures effectuées au sol et à bord de la station, il nous faut considérer un temps moyen d'aller-retour pour les signaux combinés. En effet, durant le trajet des signaux montant et descendant que l'on cherche à combiner (qui est de l'ordre de quelques millisecondes), la vitesse ainsi que le potentiel gravitationnel des stations restent constants, et les variations des bruits de mesure et des horloges sont négligeables : les relations (1.12) et (1.13) reliant les temps propres aux temps coordonnée peuvent donc se linéariser. On en déduit facilement que, si on définit un temps moyen t_a tel que $t_a = \frac{t_2^o + t_4^o}{2}$ alors :

$$\begin{aligned} \tau^s(t_a^o) &= \tau^s\left(\frac{t_2^o + t_4^o}{2}\right) = \frac{1}{2} (\tau^s(t_2^o) + \tau^s(t_4^o)), \\ &\text{et} \\ \tau^g(t_a^o) &= \tau^g\left(\frac{t_2^o + t_4^o}{2}\right) = \frac{1}{2} (\tau^g(t_2^o) + \tau^g(t_4^o)). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ainsi en soustrayant l'équation (2.35) à l'équation (2.34), leur différence s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau^g(t_a) - \tau^s(t_a) &= \frac{1}{2} \left(\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) + [T_{12}]^g - [T_{34}]^s \right. \\ &\quad \left. + (\Delta_{T1}^g - [[\Delta_{R2}^g]^f]^s) - (\Delta_{T2}^s - [[\Delta_{R1}^s]^f]^g) \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\text{où } t_a = \frac{t_2^o + t_4^o}{2}.$$

Se débarrasser des transformations de temps propre à temps coordonnée de l'équation (2.53) implique de faire intervenir des intégrales de correction (équations (1.11) et (1.12)). Ces corrections sont négligeables pour les délais internes mais elles doivent être prises en compte pour les temps de propagation T_{12} et T_{34} qui donnent des termes de l'ordre de la picoseconde. L'expression utilisée par la suite est donnée par :

$$\begin{aligned} \tau^g(t_a) - \tau^s(t_a) = & \frac{1}{2} \left(\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) + T_{12} - T_{34} \right. \\ & + \Delta_{T1}^g - \Delta_{R2}^g + \Delta_{R1}^s - \Delta_{T2}^s \\ & \left. - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{U(t, \vec{x}_g)}{c^2} + \frac{v_g^2(t)}{2c^2} \right) dt + \int_{t_3}^{t_4} \left(\frac{U(t, \vec{x}_s)}{c^2} + \frac{v_s^2(t)}{2c^2} \right) dt \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Le terme $T_{12} - T_{34}$ a besoin d'être estimé à l'aide de l'orbitographie des stations. Il faut donc en déterminer une expression analytique en fonction d'un temps coordonnée caractéristique t_i raccordable à UTC (donc, dans le cas considéré, un temps coordonnée d'un événement se produisant à la station terrestre). On choisit le temps coordonnée t_4 parce qu'il est associé à un temps de réception (donc plus facilement associable avec les observables qui sont datées en fonction du temps local d'arrivée) et qu'il est relié à l'une des deux fréquence hautes.

On peut déterminer de la même façon une expression du Contenu Total en Électrons (TEC) de l'ionosphère - en combinant les observables des fréquences f_2 et f_3 données par les équations (2.35) et (2.36) - et une expression liant le délai troposphérique, la distance instantanée entre les stations (range) et la somme des observables de f_1 et f_2 . Les mesures du range et du délai troposphérique sont indissociables du fait que les produits scientifiques recherchés sont indépendants de la fréquence des signaux. Pour estimer l'un, il faut connaître l'autre, soit par un modèle, soit par des mesures indépendantes.

Calcul de $T_{12} - T_{34}$

On note Φ , Σ et Δ respectivement les termes du premier, du deuxième et du troisième ordre en $\frac{1}{c}$ tels que :

$$\begin{aligned}
T_{12} - T_{34} = & \Phi + \Sigma + \Delta + (\Delta_{12}^{iono} + \Delta_{12}^{tropo}) \left(1 + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1) \cdot c}\right) \\
& - (\Delta_{34}^{iono} + \Delta_{34}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right),
\end{aligned} \tag{2.55}$$

où l'on définit :

$$\Phi = \frac{D(t_1)}{c} - \frac{D(t_4)}{c}, \tag{2.56}$$

$$\Sigma = \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{c^2}, \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
\Theta = & \frac{D(t_1)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_1)\|^2 + \vec{D}(t_1) \cdot \vec{a}_s(t_1) + \left(\frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)}\right)^2 \right) \\
& - \frac{D(t_4)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_4)\|^2 + \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) + \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4)}\right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_s(t_1) + x_g(t_1) + D(t_1)}{x_g(t_1) + x_s(t_1) - D(t_1)} \right) \\
& - \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_4) + x_s(t_4) + D(t_4)}{x_g(t_4) + x_s(t_4) - D(t_4)} \right).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

On va supposer par la suite que l'intervalle de temps coordonnée T_{14} est de l'ordre de D/c . Par conséquent, puisque $T_{14} = T_{12} + T_{23} + T_{34}$, l'intervalle T_{23} est aussi de l'ordre D/c . Cette hypothèse sera évidemment vérifiée par la suite.

Termes en $\frac{1}{c}$

Le terme $\Phi = \frac{D(t_1)}{c} - \frac{D(t_4)}{c}$ doit être exprimé en fonction des paramètres orbitographiques en t_4 . Il faut donc exprimer la distance instantanée $D(t_1)$ entre les stations à t_1 en fonction de la distance instantanée en t_4 . On cherche donc à exprimer les positions des stations en t_1 en fonction de leur position en t_4 à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre en c^{-3} :

$$\vec{x}_s(t_1) = \vec{x}_s(t_4) + \vec{v}_s(t_4) \cdot (t_1 - t_4) + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_4) \cdot (t_1 - t_4)^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{2.59}$$

soit

$$\vec{x}_s(t_1) = \vec{x}_s(t_4) - \vec{v}_s(t_4) \cdot T_{14} + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_4) \cdot T_{14}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (2.60)$$

De même, on obtient :

$$\vec{x}_g(t_1) = \vec{x}_g(t_4) - \vec{v}_g(t_4) \cdot T_{14} + \frac{1}{2} \vec{a}_g(t_4) \cdot T_{14}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (2.61)$$

La différence de ces deux dernières équations donne :

$$\vec{D}(t_1) = \vec{D}(t_4) + \Delta \vec{v}(t_4) \cdot T_{14} - \frac{1}{2} \Delta \vec{a}(t_4) \cdot T_{14}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (2.62)$$

en posant $\Delta \vec{v}(t_4) = \vec{v}_g(t_4) - \vec{v}_s(t_4)$ et $\Delta \vec{a}(t_4) = \vec{a}_g(t_4) - \vec{a}_s(t_4)$.

A partir de l'équation précédente, on calcule la norme $D(t_1)$ du vecteur $\vec{D}(t_1)$ par $D(t_1) = \|\vec{D}(t_1)\|^{\frac{1}{2}}$ en fonction de la distance instantanée $D(t_4)$ entre les stations à t_4 :

$$\begin{aligned} D(t_1) = & D(t_4) + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)} T_{14} \\ & + \frac{\|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 - \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)}\right)^2}{2D(t_4)} T_{14}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

A l'aide de l'équation (2.63), on estime le paramètre Φ selon :

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{14} + \frac{T_{14}^2}{2c \cdot D(t_4)} \left(\|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 \right. \\ & \left. - \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)}\right)^2 \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

A présent, le terme Φ n'est constitué que de terme d'ordre $1/c^2$ et $1/c^3$, ce qui illustre tout l'avantage de la méthode *two-way* (cf. partie 1.2.2)

Termes en $\frac{1}{c^2}$

On cherche à exprimer $\Sigma = \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{c^2}$ en fonction de $\vec{D}(t_4)$, $\vec{v}_s(t_4)$ et $\vec{a}_s(t_4)$. Il faut donc exprimer son premier terme en fonction des paramètres exprimés en t_4 . Les équations :

$$\vec{D}(t_1) = \vec{D}(t_4) + \Delta \vec{v}(t_4) \cdot T_{14} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad (2.65)$$

et

$$\vec{v}_s(t_1) = \vec{v}_s(t_4) - \vec{a}_s(t_4) \cdot T_{14} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad (2.66)$$

conduisent à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{c^2} &= \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{c^2} \\ &+ \frac{T_{14}}{c^2} \left(\Delta \vec{v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Finalement, l'équation précédente donne :

$$\Sigma = 2 \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{c^2} + \frac{T_{14}}{c^2} \left(\Delta \vec{v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (2.68)$$

L'étude analytique des temps de propagation fait apparaître un terme de type Sagnac [89] dans l'expression du terme Σ .

Termes en $\frac{1}{c^3}$

Le terme Θ regroupe l'ensemble des termes du troisième ordre des expressions (2.37) et (2.38).

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{D(t_1)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_1)\|^2 + \vec{D}_{12} \cdot \vec{a}_s(t_1) + \left(\frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)} \right)^2 \right) \\ &- \frac{D(t_4)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_4)\|^2 + \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) + \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_s(t_1) + x_s(t_1) + D(t_1)}{x_g(t_1) + x_s(t_1) - D(t_1)} \right) \\ &- \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_4) + x_s(t_4) + D(t_4)}{x_g(t_4) + x_s(t_4) - D(t_4)} \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

D'après l'équation (2.63), on a $D(t_1) = D(t_4) + O\left(\frac{1}{c}\right)$, donc aussi :

$$\frac{D(t_1)}{2c^3} = \frac{D(t_4)}{2c^3} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

De même, on a $v_s(t_1) = v_s(t_4) + O\left(\frac{1}{c}\right)$ ainsi que $a_s(t_1) = a_s(t_4) + O\left(\frac{1}{c}\right)$, soit finalement :

$$\Theta = 0 + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (2.70)$$

Les termes en $\frac{1}{c^3}$ s'annulent parfaitement. Il ne sera donc pas nécessaire de faire intervenir une estimation du délai Shapiro lors de l'évaluation de la différence des temps de propagation $T_{12} - T_{34}$ intervenant dans l'équation (2.54).

Expression Finale

L'insertion des résultats donnés par les équations (2.64), (2.68) et (2.70) dans l'équation (2.55) permet d'obtenir une expression de la différence des temps de propagation $T_{12} - T_{34}$ en fonction des paramètres orbitographiques exprimés au temps coordonné t_4 :

$$\begin{aligned} T_{12} - T_{34} = & \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{14} + 2 \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{c^2} \\ & + \frac{T_{14}}{c^2} \left(\Delta \vec{v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) \right) \\ & + \frac{T_{14}^2}{2c \cdot D(t_4)} \left(\|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 - \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \\ & + (\Delta_{12}^{iono} + \Delta_{12}^{tropo}) \left(1 + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1) \cdot c} \right) \\ & - (\Delta_{34}^{iono} + \Delta_{34}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c} \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

L'équation (2.71) fait aussi intervenir le paramètre T_{14} qui correspond à l'intervalle de temps coordonné entre l'émission du signal f_1 et la réception du signal f_2 à l'antenne de la station terrestre. Cette expression dépend évidemment des temps de référence des observables que l'on combine : deux observables mesurées approximativement au même temps coordonné auront eu des temps de propagation entre les deux stations relativement identiques, ce qui peut ne pas être le cas si l'on associe deux observables de temps de mesure complètement différents. L'intervalle temporel T_{14}^o étant connu pour le morceau de code considéré, la connaissance du paramètre T_{14} repose sur la mesure des délais internes sol.

Par symétrie du système des deux fréquences f_1 et f_2 , il existe une alternative en exprimant la différence $T_{12} - T_{34}$ en fonction de l'intervalle de temps coordonné T_{23} . Cette expression dépend alors des retards internes au satellite et permet

de vérifier la consistance de l'ensemble des paramètres utilisés, retards internes bord, délais internes sol et orbitographie des stations.

Expression en fonction de T_{23}

Au lieu de dépendre du paramètre T_{14} , l'équation (2.71) peut être exprimée en fonction de l'intervalle de temps coordonnée T_{23} . Pour cela, il faut exprimer l'intervalle T_{14} en fonction de T_{23} en s'arrêtant à l'ordre en c^{-2} puisque le temps T_{14} est déjà en facteur de c^{-1} dans la formule (2.71). On obtient alors :

$$\begin{aligned} T_{14} &= T_{12} + T_{23} + T_{34} = \frac{R_{12}}{c} + T_{23} + \frac{R_{34}}{c} + O(c^{-3}) \\ T_{14} &= \left(\frac{D(t_1)}{c} + \frac{\overrightarrow{D}(t_1) \cdot \overrightarrow{v}_g(t_1)}{c^2} \right) + T_{23} + \left(\frac{D(t_4)}{c} - \frac{\overrightarrow{D}(t_4) \cdot \overrightarrow{v}_g(t_4)}{c^2} \right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \end{aligned} \quad (2.72)$$

soit :

$$\begin{aligned} T_{14} &= T_{23} + 2\frac{D(t_4)}{c} + \frac{\overrightarrow{D}(t_4) \cdot \overrightarrow{\Delta v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{14} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \left(\overrightarrow{D}(t_1) \cdot \overrightarrow{v}_g(t_1) - \overrightarrow{D}(t_4) \cdot \overrightarrow{v}_g(t_4) \right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \end{aligned} \quad (2.73)$$

d'après l'équation (2.63).

Le dernier terme de l'équation disparaît à l'ordre considéré (car $\overrightarrow{v}(t_1) = \overrightarrow{v}(t_4) + 0(1/c)$) et celle-ci donne donc :

$$T_{14} = T_{23} + 2\frac{D(t_4)}{c} + \frac{\overrightarrow{D}(t_4) \cdot \overrightarrow{\Delta v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{14} + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (2.74)$$

En réinjectant l'expression de T_{14} dans son terme de droite, on arrive à l'équation escomptée :

$$T_{14} = T_{23} + 2\frac{D(t_4)}{c} + 2\frac{\overrightarrow{D}(t_4) \cdot \overrightarrow{\Delta v}(t_4)}{c^2} + \frac{\overrightarrow{D}(t_4) \cdot \overrightarrow{\Delta v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{23} + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (2.75)$$

Ainsi, en utilisant l'équation précédente, l'équation (2.71) devient :

$$\begin{aligned}
T_{12} - T_{34} = & 2 \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_g(t_4)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{\Delta v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{23} \\
& + 2 \frac{D(t_4)}{c^3} \cdot \left(\vec{\Delta v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_g(t_4) + \|\vec{\Delta v}(t_4)\|^2 \right) \\
& + \frac{T_{23}}{c^2} \cdot \left(\vec{\Delta v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) + 2 \|\vec{\Delta v}(t_4)\|^2 \right. \\
& \left. - 2 \vec{D}(t_4) \cdot \vec{\Delta a}(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{\Delta v}(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \tag{2.76} \\
& + \frac{T_{23}^2}{2cD(t_4)} \left(\|\vec{\Delta v}(t_4)\|^2 - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{\Delta a}(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{\Delta v}(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \\
& + (\Delta_{12}^{iono} + \Delta_{12}^{tropo}) \left(1 + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1) \cdot c} \right) \\
& - (\Delta_{34}^{iono} + \Delta_{34}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c} \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned}$$

2.4.2 Le Contenu Total en Électrons (TEC)

Dans l'équation (2.76) intervient le Contenu Total en Électrons C_e qu'il est nécessaire d'évaluer avec précision afin d'atteindre les objectifs de la mission. Ce paramètre atmosphérique est déterminé à partir de la combinaison des observables des signaux de fréquence f_2 et f_3 .

La différence des équations (2.38) et (2.39) permet d'obtenir l'expression de la différence des temps de propagation $T_{34} - T_{56}$ des signaux de fréquence f_2 et f_3 en fonction des observables de ces signaux :

$$T_{34} - T_{56} = \Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) - \Delta \tau^g(\tau^g(t_6^o)) + \Delta_{T2}^s - \Delta_{T3}^s + \Delta_{R2}^g - \Delta_{R3}^g + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{2.77}$$

où les intégrales liées aux transformations *temps propre / temps coordonnée* ainsi que la variation de la désynchronisation entre les horloges ont été négligées car la différence $T_{34} - T_{56}$ reste inférieure à la centaine de nanosecondes.

Les fréquences f_2 et f_3 étant différentes d'approximativement un ordre de grandeur, l'effet de la ionosphère sera plus intense sur la troisième fréquence que sur f_2 . Par conséquent, la combinaison des deux observables permettra d'avoir accès à une estimation précise de C_e dans l'équation (2.76).

Selon la même méthode utilisée pour évaluer avec la précision recherchée la différence $T_{12} - T_{34}$ en fonction des paramètres au temps coordonnée t_4 , on cherche à exprimer la différence des temps de propagation des signaux de fréquence f_2 et f_3 .

Par développement en série de Taylor, la différence des délais de propagation pour les signaux de fréquence f_2 et f_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}
T_{34} - T_{56} = & \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)} \frac{T_{46}}{c} \\
& - \frac{\|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 - \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)}\right)^2}{2D(t_4)} \frac{T_{46}^2}{c} \\
& + \frac{T_{46}}{c^2} \cdot (\vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) - \Delta \vec{v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)) \\
& + \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_3^2}\right) \frac{40.308}{c} C_e \left(1 - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c}\right) \\
& - \left(\frac{1}{f_2^3} - \frac{1}{f_3^3}\right) \frac{7527 \cdot \vec{B}_0 \cdot \vec{D}(t_4)}{D(t_4)} C_e + O\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

La différence des effets ionosphériques du premier ordre pour les fréquences f_2 et f_3 est proportionnelle au Contenu Total en Électron (TEC) dans l'ionosphère et s'écrit, en combinant les équations (2.78) et (2.77), selon :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_2^2}\right) \frac{40.308}{c} C_e = & - \frac{1}{1 - \frac{f_2^3 - f_3^3}{(f_2^2 - f_3^2) f_2 f_3} \frac{7527 \cdot c}{40.308} \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{D}(t_4)}{D(t_4)}} \left[\Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) \right. \\
& - \Delta \tau^g(\tau^g(t_6^o)) + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)} \frac{T_{46}}{c} \\
& + \frac{T_{46}}{c^2} \cdot \left(\vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) - \Delta \vec{v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) \right) \\
& - \frac{\|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 - \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)} \right)^2}{2D(t_4)} \frac{T_{46}^2}{c} \\
& \left. + \Delta_{T2}^s - \Delta_{T3}^s + \Delta_{R2}^g - \Delta_{R3}^g \right] / \left(1 - \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c} \right) \\
& + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Dans le cas où les mesures de code et de phase sont effectuées au même instant à la station terrestre, on peut déduire la relation suivante : $T_{46} = \Delta_{R2}^g - \Delta_{R3}^g$.

Certains termes dans l'équation (2.79) sont négligeables vis-à-vis du bruit de mesure sur les observables des fréquences f_2 et f_3 du fait de la valeur de T_{46} . Une équation semblable à (2.79) peut être écrite en fonction des quantités orbitographiques exprimées en t_2 : elle permettra de déterminer le Contenu ionosphérique Total en Électrons dans le cas où l'on suppose que c'est l'horloge spatiale qui est synchronisée avec UTC (cf. annexe).

2.4.3 La distance instantanée et le délai troposphérique

La différence des observables des signaux de fréquence f_1 et f_2 permet de mesurer la désynchronisation entre les horloges, alors que la somme de ces observables va conduire à une estimation de la distance instantanée et du délai troposphérique. En effet, les équations (2.34) et (2.35) donnent :

$$\begin{aligned}
\Delta \tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) = & Des(t_2^o) - Des(t_4^o) - [T_{12}]^g - [T_{34}]^s \\
& - \left[[\Delta_{T1}^g]^t + [\Delta_{R1}^s]^t \right]^g - \left[[\Delta_{T2}^s]^t + [\Delta_{R2}^g]^t \right]^s. \tag{2.80}
\end{aligned}$$

Si on néglige les transformations *temps propre / temps coordonnée* affectant les retards internes de l'équation (2.80) (puisque ceux-ci sont courts), la somme des observables provenant des signaux de fréquence f_1 et f_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta\tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) &= Des(t_2^o) - Des(t_4^o) - T_{12} - T_{34} \\
&\quad - [\Delta_{T1}^g + \Delta_{R1}^s + \Delta_{T2}^s + \Delta_{R2}^g]^t \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{U(t, \vec{x}_g)}{c^2} + \frac{v_g^2(t)}{2c^2} \right) dt \\
&\quad + \int_{t_3}^{t_4} \left(\frac{U(t, \vec{x}_s)}{c^2} + \frac{v_s^2(t)}{2c^2} \right) dt.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Si l'horloge terrestre est, par exemple, supposée synchronisée avec le Temps Universel Coordonné, alors on cherche à exprimer la somme $T_{12} + T_{34}$ en fonction de l'orbitographie des stations spatiale et terrestre en t_4 . Par des développements limités largement explicités dans cette même partie, cette somme s'écrit :

$$\begin{aligned}
T_{12} + T_{34} &= 2 \frac{D(t_4)}{c} + 2 \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{23} \\
&\quad + \frac{T_{23}}{c^2} \left(2 \|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 - 2 \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) + \Delta \vec{v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) \right. \\
&\quad \left. - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \\
&\quad + \frac{T_{23}^2}{2c \cdot D(t_4)} \left(\|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 - \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{v}(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) \frac{40.308}{c} C_e + 2\Delta_{34}^{tropo} \left(1 + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4) \cdot c} \right) \\
&\quad + \frac{2D(t_4)}{c^3} \left(\|\Delta \vec{v}(t_4)\|^2 - \vec{D}(t_4) \cdot \Delta \vec{a}(t_4) \right. \\
&\quad \left. + \Delta \vec{v}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4) - \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) \right) \\
&\quad + \frac{D(t_4)}{c^3} \left(\|\vec{v}_s(t_4)\|^2 + \vec{D}(t_4) \cdot \vec{a}_s(t_4) + \left(\frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_s(t_4)}{D(t_4)} \right)^2 \right) \\
&\quad + 2 \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_4) + x_s(t_4) + D(t_4)}{x_g(t_4) + x_s(t_4) - D(t_4)} \right) + O(c^{-4}).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Conclusion

Ce deuxième chapitre s'est focalisé sur la mission ACES, thème central de cette thèse. Il en a décrit les caractéristiques et les objectifs. Ensuite, la propagation des signaux permettant la comparaison des horloges a été approfondie en étudiant chaque effet perturbateur indépendamment. A l'aide de ce travail théorique, un modèle du transfert temporel et fréquentiel du Lien Micro-Onde a été développé et permet d'atteindre une précision inférieure au dixième de picoseconde. Cette modélisation est nécessaire à la mission puisqu'elle servira de base à l'extraction des variables physiques.

Cette dernière partie centrée sur les produits scientifiques a permis d'en déduire leur expression en fonction des observables du Lien Micro-Onde. Par conséquent, une étude des termes en présence montre que la mesure de la désynchronisation des horloges est a priori limitée par le bruit de mesure des observables atteignant quelques picosecondes. Le Contenu Total en Électrons est évalué à travers le paramètre $(\frac{1}{f_3} - \frac{1}{f_2})\frac{40.308}{c}C_e$ (différence des délais ionosphériques principaux des deux signaux descendants f_2 et f_3) selon l'équation (2.79). Cette mesure sera, a priori, dominée par le bruit sur la mesure provenant du signal de fréquence f_3 puisque les erreurs de mesure sur les signaux de la troisième fréquence seront sensiblement supérieures à celles dégradant les mesures du signal de fréquence f_2 . Enfin, la distance instantanée, le délai troposphérique et le retard Shapiro sont potentiellement mesurables à l'aide de la même combinaison d'observables (la somme des mesures des signaux f_1 et f_2) : leurs mesures sont indissociables. Par conséquent, il est nécessaire d'ajouter des informations extérieures au MWL, telles que la connaissance de l'orbitographie des stations ou d'un modèle du délai troposphérique.

Cependant, si l'on considère une erreur orbitographique de l'ordre de la dizaine de mètres et un modèle troposphérique d'une précision de quelques centimètres, on comprend que le retard Shapiro ne peut être mesuré du fait de sa faible amplitude. Par contre, il reste possible d'estimer la distance instantanée et le délai troposphérique en réalisant une hypothèse sur l'un ou l'autre : si l'on veut mesurer le terme troposphérique, alors il faut connaître l'orbitographie des deux stations, et si l'on veut la distance entre les deux horloges alors il faut utiliser un modèle pour la troposphère.

L'estimation de l'un de ces deux produits scientifiques va être limitée par le second produit et par sa modélisation. Par conséquent, on néglige, pour chacun des deux paramètres, les termes de l'équation (2.82) d'une amplitude inférieure à l'erreur provoquée de l'autre paramètre. Cela correspond à une précision de l'ordre du millimètre pour D et de l'ordre de la nanoseconde pour le délai troposphérique.

Voici, pour les deux cas énoncés ci-dessus, les formules permettant d'avoir

accès à l'un ou à l'autre des produits scientifiques :

$$D(t_4) = -\frac{c}{2} [\Delta\tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) + \Delta_{T1}^g + \Delta_{T2}^s + \Delta_{R1}^s + \Delta_{R2}^g \\ + (\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}) \frac{40.308}{c} C_e + 2\Delta_{34}^{tropo} + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta\vec{v}(t_4)}{c} (\frac{2}{c} + \frac{T_{23}}{D(t_4)})], \quad (2.83)$$

$$\Delta_{34}^{tropo} = -\frac{1}{2} [\Delta\tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) + \Delta_{T1}^g + \Delta_{T2}^s + \Delta_{R1}^s + \Delta_{R2}^g \\ + (\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}) \frac{40.308}{c} C_e + 2\frac{D(t_4)}{c} + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \Delta\vec{v}(t_4)}{c} (\frac{2}{c} + \frac{T_{23}}{D(t_4)})]. \quad (2.84)$$

Dans ces deux équations, les termes ionosphériques sont évalués à l'aide de la combinaison des signaux f_2 et f_3 qui fournissent ainsi une mesure indépendante selon l'équation (2.79).

Chapitre 3

Besoins de la mission

Introduction

La mission ACES vise des comparaisons temporelles dont les stabilités atteindraient 0.3 ps après un passage et 7 ps après un jour. Les spécifications de la mission sont déterminées par le bruit de mesure des observables lors d'un passage, et par le bruit des horloges pour des temps d'intégration plus longs. Ces deux limitations sont respectivement données par les équations (2.1) et (2.2). Dans ces deux cas, il faut que le bruit émanant des autres sources d'erreurs reste inférieur aux spécifications de la mission.

Ce chapitre vise la détermination des besoins en orbitographie et en calibration temporelle des retards internes de la mission. On cherche à estimer l'amplitude maximale des bruits de ces paramètres afin de respecter les spécifications de la mission en termes de stabilité et d'exactitude. Cette étude se penche sur les besoins à court terme (inférieur à un passage de l'ISS) et à long terme à travers la méthode de transfert de temps et de la mesure du déplacement fréquentiel gravitationnel.

3.1 Étude préliminaire

3.1.1 Le modèle

Définitions

L'estimation des besoins de la mission nécessite la modélisation de la trajectoire des stations. La prise en compte d'un modèle relativement simple va nous permettre d'obtenir une estimation grossière des besoins orbitographiques et temporels de la mission, mais surtout de cerner les difficultés de ce problème et d'en déduire des outils adaptés.

Nous commençons donc par étudier deux stations (l'une terrestre, l'autre spatiale) dont la trajectoire est dans le plan équatorial. Cela permet de considérer, dans un premier temps, un modèle en deux dimensions du mouvement des stations et de placer notre étude dans le plan équatorial du référentiel géocentrique non-tournant. On suppose aussi que le mouvement des stations terrestre et spatiale est circulaire respectivement de vitesse radiale Ω_g et Ω_s , et de rayon R_g (rayon de la Terre) et R_s (rayon de l'orbite supposée circulaire de la station spatiale).

De même que dans le chapitre précédent, on pose $\vec{x}_g(t)$ et $\vec{v}_g(t)$ la position et la vitesse de la station terrestre (G) au temps coordonnée t , et on définit la position $\vec{x}_s(t)$ et la vitesse $\vec{v}_s(t)$ de la station spatiale (S). Ces paramètres sont exprimés dans le référentiel géocentrique, repère non-tournant dont l'origine est placée au centre de la Terre E . On définit $D(t)$ la distance séparant les stations spatiale et terrestre, et $\theta(t)$ l'angle entre la verticale au sol et le satellite (cf. figure 3.1).

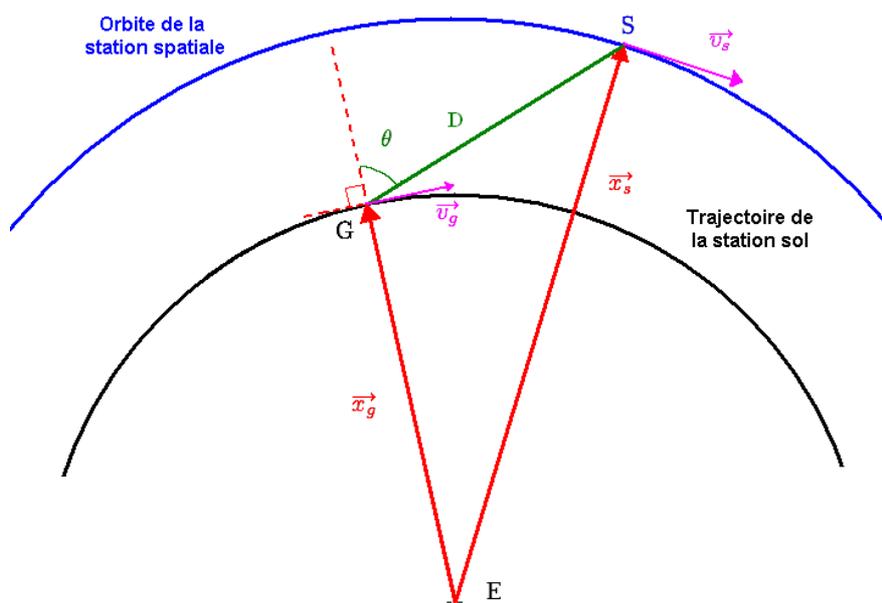


FIG. 3.1 : Schéma des paramètres utilisés.

Afin de calculer la variance d'Allan de l'erreur réalisée sur la désynchronisation, il faut tout d'abord déterminer la variation des paramètres $D(t)$ et $\theta(t)$ avec le temps. Pour calculer aisément l'évolution temporelle des paramètres cités, on se place dans le référentiel tournant avec la Terre ($E, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi$), \vec{u}_r étant le vecteur normé de direction \vec{EG} , et \vec{u}_ϕ un vecteur perpendiculaire (cf. figure 3.1).

On a alors :

$$\vec{x}_g = \vec{EG} = R_g \vec{u}_r = R_g [1, 0],$$

$$\text{et } \vec{x}_s = \vec{ES} = R_s \cdot [\cos(\Delta\Omega \cdot t), \sin(\Delta\Omega \cdot t)],$$

de telle façon que la station spatiale soit au zénith à $t = 0$ et avec $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_g$.

L'angle θ est défini par $\theta(t) = (\vec{u}_r, \vec{N}_{GS})$ (voir figure 3.1) où $\vec{N}_{GS} = \frac{\vec{GS}}{\|\vec{GS}\|}$. Il s'exprime selon :

$$\theta(t) = \arctan \left(\frac{\sin(\Delta\Omega \cdot t)}{\cos(\Delta\Omega \cdot t) - \frac{R_g}{R_s}} \right). \quad (3.1)$$

Pour les applications numériques, on considère :

$R_g = 6400 \text{ km}$, $v_g = 465 \text{ m.s}^{-1}$, soit $\Omega_g = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$,
 et $R_s = 6800 \text{ km}$, $v_s = 7700 \text{ m.s}^{-1}$, soit $\Omega_s = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$,
 ce qui correspond à des valeurs moyennes proches de la réalité.

L'angle θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Avec les valeurs numériques choisies, l'intervalle de temps de visibilité des deux stations dure 600 secondes, soit, puisque l'on a choisi que la condition initiale $\theta(0) = 0$, s'étend de -300 à $+300 \text{ s}$.

De la même manière, on peut exprimer l'évolution de la distance $D(t)$ entre la station sol et la station spatiale en fonction du temps. L'expression de $D(t)$ se calcule aisément en fonction de l'angle θ (équation (3.1)) et est donnée par :

$$D(t) = \sqrt{R_g^2 \cdot \cos^2(\theta) + (R_s - R_g) \cdot (R_s + R_g) - R_g \cdot \cos(\theta)}. \quad (3.2)$$

L'évolution temporelle de l'angle θ et de la distance entre les deux stations $D(t)$ est représentée sur la figure 3.2. Durant un passage, les stations sont évidemment séparées de 400 km ($= R_s - R_g$) au zénith mais cette distance peut atteindre 2000 km à basse élévation.

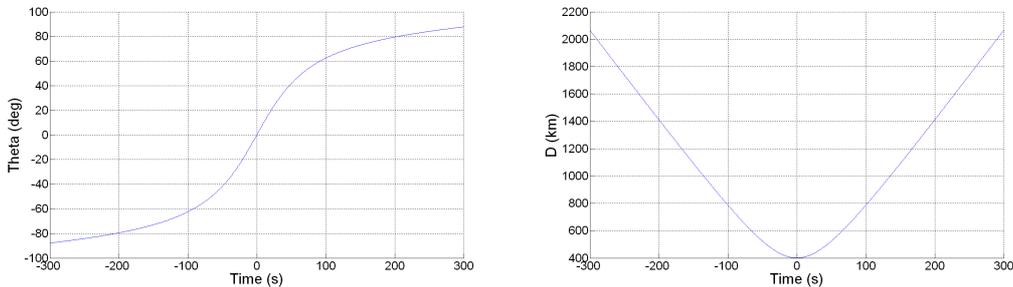


FIG. 3.2 : Évolution de l'angle θ (figure de gauche) et de la distance D (figure de droite) avec le temps.

Principe de calcul

Le but de ce travail est de chercher quels peuvent être les niveaux d'erreur acceptables sur les différents paramètres qui nous permettraient de ne pas dégrader le transfert de temps et de fréquence, et de réaliser les tests de physique fondamentale. Autrement dit, on recherche les valeurs permises des erreurs sur les paramètres permettant de respecter les objectifs de la mission ACES.

C'est pourquoi il est nécessaire que l'écart type dû à ces incertitudes reste en-dessous du bruit intrinsèque du lien donné par l'équation (2.1) pour des temps d'intégration τ inférieurs à la durée d'un passage de la station spatiale, et en-dessous du bruit des horloges donné par l'équation (2.2) pour des durées supérieures.

D'une part, les imprécisions des paramètres vont intervenir à travers l'équation de désynchronisation (2.54). En effet, celle-ci dépend des mesures brutes, des délais internes et du terme $T_{12} - T_{34}$. L'évaluation de la différence des temps de propagation $T_{12} - T_{34}$ à l'aide de l'équation (2.76) est réalisée à partir des données orbitographiques des stations. Elle est aussi reliée au terme T_{23} , intervalle temporel entre la réception et l'émission des signaux à la station spatiale, donc à la manière de combiner les observables provenant des fréquences f_1 et f_2 . Son erreur va donc être dépendante des bruits sur les temps de propagation des signaux entre les antennes et les horloges, i. e. les délais internes.

D'autre part, lors de la comparaison de la différence de fréquence des horloges à sa valeur théorique donnée par la Relativité Générale (voir équation (2.4)), il est nécessaire de connaître la position et la vitesse des horloges. En effet, l'expression de la fréquence propre de l'horloge dans une échelle de temps coordonnée fait intervenir le potentiel gravitationnel à la position de l'horloge ainsi que sa vitesse dans le système de coordonnées choisi. Par conséquent, les erreurs orbitographiques pourraient entraîner un bruit supérieur à celui des spécifications de la mission.

Hypothèses

Dans une première approche, on suppose que les incertitudes relatives sur les coordonnées x , y et z sont identiques et que celles-ci sont égales aux incertitudes relatives sur les composantes de la vitesse v_x , v_y et v_z car leur détermination est réalisée à l'aide de mesures identiques issues des systèmes GNSS, soit :

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta y}{y} = \frac{\delta z}{z} = \frac{\delta v_x}{v_x} = \frac{\delta v_y}{v_y} = \frac{\delta v_z}{v_z}.$$

Si r est la coordonnée radiale du point considéré dans le référentiel géocentrique définie par $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, alors :

$$r\delta r = x\delta x + y\delta y + z\delta z = x^2 \frac{\delta x}{x} + y^2 \frac{\delta y}{y} + z^2 \frac{\delta z}{z} = r^2 \frac{\delta x}{x},$$

$$\text{soit } \frac{\delta r}{r} = \frac{\delta x}{x}.$$

A l'aide du même raisonnement pour la norme v de la vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, on obtient :

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\delta r}{r}.$$

On détermine l'expression de l'incertitude sur la distance D en fonction de l'incertitude relative $\frac{\delta r}{r}$ en différenciant l'expression de $D = \sqrt{(\vec{r}_s - \vec{r}_g)^2}$. L'erreur δD sur D s'exprime en fonction des erreurs sur les positions des stations $\delta \vec{r}_s$ et $\delta \vec{r}_g$ selon :

$$D\delta D = (\vec{r}_s - \vec{r}_g) \cdot (\delta \vec{r}_s - \delta \vec{r}_g),$$

d'où :

$$\delta D \leq \delta r_s + \delta r_g. \quad (3.3)$$

L'erreur de position des stations terrestres est typiquement de l'ordre du millimètre alors que l'incertitude sur la trajectoire de la Station Spatiale Internationale est supérieure au mètre. Par conséquent, l'erreur sur la distance D va être dominée par l'imprécision en position de l'ISS soit $\delta D \simeq \delta r_s$.

On peut aussi exprimer l'incertitude sur θ en fonction de celle sur D en maximisant cette erreur par :

$$\delta \theta = \frac{\delta D}{D}. \quad (3.4)$$

3.1.2 Le transfert de temps

Dans cette partie, les besoins en orbitographie et en calibration des délais internes sont étudiés pour la comparaison temporelle effectuée entre les deux horloges. Après avoir défini un principe d'étude, on examine successivement les cas de biais et de bruit dans les paramètres pour un unique passage. Par la suite, les conséquences des erreurs pour une succession de passages sont considérées, toujours dans le cadre du transfert de temps.

Calcul de la variance

Pour le transfert de temps, l'équation (2.54) va donner les limites sur les erreurs des paramètres. Tout d'abord, il est essentiel que les mesures des signaux f_1 et f_2 vérifient une stabilité en-dessous des spécifications du Lien Micro-Onde. Ensuite, il apparaît que l'équation (2.54) impose un contrôle des différences des délais internes entre la réception et l'émission des deux signaux aux deux stations considérées, c'est-à-dire $\Delta_{T1}^g - \Delta_{R2}^g$ et $\Delta_{R1}^s - \Delta_{T2}^s$. Ces différences de délais instrumentaux doivent, elles aussi, démontrer une stabilité temporelle inférieure aux équations (2.1) et (2.2). Enfin, les termes intégrales n'ayant que peu d'influence sur la stabilité et l'exactitude de la désynchronisation des horloges, il reste le terme $T_{12} - T_{34}$, exprimant la différence de temps de propagation dans l'atmosphère pour les signaux montant et descendant. Celui-ci va dépendre de l'orbitographie des stations spatiale et terrestre, et des délais internes (à travers le paramètre T_{23}). On va donc, par la suite, étudier les contraintes imposées par ce terme sur les erreurs orbitographiques et les délais instrumentaux.

La désynchronisation contient le terme $(T_{12} - T_{34})/2$ d'après l'équation (2.54). L'expression de la différence des temps de propagation $T_{12} - T_{34}$ provient du Chapitre 2 par l'équation (2.76). Le calcul de sa variance va être dominé par les termes de l'ordre de $1/c^2$. Ainsi, dans cette partie d'estimation des besoins de la mission, l'expression de $T_{12} - T_{34}$ sera réduite à :

$$T_{12} - T_{34} = 2 \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{v}_g(t_4)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_4) \cdot \vec{\Delta v}(t_4)}{c \cdot D(t_4)} T_{23}, \quad (3.5)$$

puisque l'on a supposé, lors de la détermination de l'expression (2.76), que T_{23} est de l'ordre de D/c .

On peut cependant remarquer que l'équation (2.76) fait intervenir l'observable provenant du troisième signal à travers l'équation (2.79). Cette mesure joue un rôle essentiel dans la détermination des retards ionosphériques. Elle intervient dans la détermination de la désynchronisation avec le facteur multiplicatif :

$$\frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2 f_1^2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} \sim 5 \cdot 10^{-3}.$$

Cela relâche de deux ordres de grandeur les contraintes en stabilité et en exactitude des mesures de fréquence f_3 . Cependant, les observables de la troisième fréquence joueront un rôle primordial dans la résolution des ambiguïtés de phase, comme nous le verrons dans le Chapitre 5.

Dans notre modèle simplifié, l'équation (3.5) s'exprime en fonction des paramètres $D(t)$ et $\theta(t)$ par :

$$T_{12} - T_{34} = \frac{2D}{c^2} v_g \cdot \sin(\theta) + T_{23} \frac{v_g \cdot \sin(\theta) - v_s \cdot \sin(\theta - \Delta\Omega \cdot t)}{c}, \quad (3.6)$$

où le temps t correspond ici au temps de réception du signal descendant provenant de la station spatiale, soit au temps coordonnée t_4 .

L'erreur sur ce terme est obtenue en différenciant son expression :

$$\begin{aligned} \delta(T_{12} - T_{34}) = & \frac{2}{c^2} \left(\delta D \cdot v_g \cdot \sin(\theta) + \delta v_g \cdot D \cdot \sin(\theta) \right. \\ & \left. + \delta\theta \cdot D \cdot v_g \cdot \cos(\theta) \right) \\ & + \frac{\delta T_{23}}{c} \cdot \left(v_g \cdot \sin(\theta) - v_s \cdot \sin(\theta - \Delta\Omega \cdot t) \right) \\ & + \frac{T_{23}}{c} \cdot \left(\delta v_g \cdot \sin(\theta) - \delta v_s \cdot \sin(\theta - \Delta\Omega \cdot t) \right) \\ & + \frac{\delta\theta \cdot T_{23}}{c} \cdot \left(v_g \cdot \cos(\theta) - v_s \cdot \cos(\theta - \Delta\Omega \cdot t) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'imprécision sur la désynchronisation dépend donc de quatre paramètres :

- l'incertitude relative sur la position du satellite $\frac{\delta x_s}{x_s}$ (à travers D , θ ou δv_s),
- l'incertitude relative sur la position de la station sol $\frac{\delta x_g}{x_g}$ (à travers l'erreur δv_g en vitesse de la station terrestre),
- l'intervalle de temps T_{23} séparant la réception du signal montant et l'émission du signal descendant,
- et l'incertitude sur cet intervalle δT_{23} .

Le paramètre T_{23} est associé à des événements se produisant à l'antenne alors que les échelles de temps accessibles sont liées aux horloges. Contrôler ce paramètre signifie maîtriser les intervalles de temps entre l'antenne et l'horloge locale, c'est-à-dire les délais internes de transmission et de réception. En effet, le paramètre T_{23} peut s'exprimer en fonction des temps coordonnée liés à un événement se produisant à l'antenne. Il dépend alors de la somme des délais internes Δ_{R1}^s et Δ_{T2}^s , contrairement à l'équation de désynchronisation (2.54) où c'est la différence de ces délais qui intervient.

On peut remarquer que les équations (2.76) et (2.79) n'imposent aucune restriction fondamentale sur les valeurs de t_2 , t_4 et t_6 : on a simplement supposé que les paramètres T_{23} et T_{14} (intervalles de temps coordonnée séparant l'émission et la réception des signaux combinés respectivement à la station spatiale et terrestre) n'étaient pas trop importants lors de la recherche des expressions des produits scientifiques dans la partie 2.4. Le choix nous est donc laissé d'associer les mesures de décalage de code et de phase librement. Cette méthode nous permet de maîtriser les termes T_{23} ou T_{14} à notre guise afin de réaliser la combinaison des données qui nous est la plus favorable.

La différenciation de l'expression (3.5) va permettre de déterminer la précision nécessaire sur les paramètres de la mission en comparant l'erreur sur la détermination de la désynchronisation avec les spécifications de la mission. En effet, afin que le bruit du lien ne réduise pas ses performances, il faut que son écart type d'Allan temporel reste inférieur à l'écart type du bruit intrinsèque du lien donné par l'équation (2.1) ou à celui du bruit des horloges donné par (2.2).

Principe d'étude

Dans cette étude, on suppose que les incertitudes sur les positions des stations (δx_g et δx_s) restent constantes durant un passage d'ISS, ainsi que les incertitudes (δT_{23}) sur les intervalles de temps coordonnée mesurés à bord (T_{23}). Après avoir maximisé la variance recherchée par le choix du signe positif ou négatif des erreurs intervenant dans l'équation (3.7), on fait varier un seul des paramètres en fixant les autres. Par exemple, la figure 3.3 montre les écarts types d'Allan temporels calculés pour la désynchronisation pour $\delta T_{23} = 70, 80, 90$ et 100 nano-secondes en fixant les autres paramètres et comparés à l'écart type du bruit intrinsèque du lien. La figure présente un pic dont le maximum est atteint vers 150 secondes du fait du comportement périodique des données lors d'un passage (cf. Annexe A).

La valeur retenue comme erreur maximale permise correspond à la valeur de δT_{23} pour laquelle l'écart type reste juste en-dessous des spécifications de la mission (droite noire sur la figure 3.3). Cela nous permet de tracer une courbe reliant les imprécisions de deux des paramètres en fixant ceux restants. Cette courbe délimite les possibilités des incertitudes maximales qui nous sont permises de celles qui nous sont interdites. En effet, sur la figure 3.3 est aussi tracée la courbe déduite du calcul de variance précédent.

Ainsi, pour une valeur de T_{23} nulle et de $\frac{\delta x_g}{x_g}$ égale à 10^{-7} , le couple ($\delta T_{23} =$

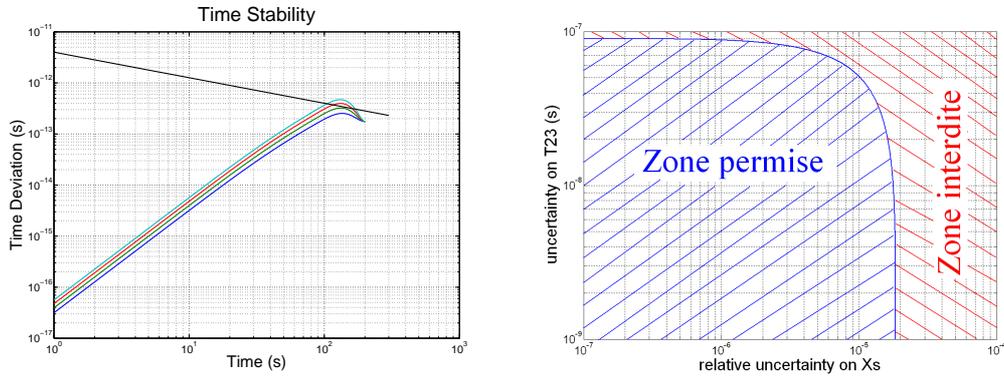


FIG. 3.3 : Figure de gauche : écarts types d'Allan temporels de la désynchronisation pour $\delta T_{23} = [7; 8; 9; 10] \cdot 10^{-8} \text{ s}$ (courbes croissantes) en fixant T_{23} nul, $\frac{\delta x_s}{x_s}$ à $3 \cdot 10^{-6}$ et $\frac{\delta x_g}{x_g}$ à 10^{-7} comparés aux spécifications de la mission (droite noire) / Figure de droite : plan des incertitudes $(\delta T_{23}, \frac{\delta x_s}{x_s})$ pour T_{23} nul et $\frac{\delta x_g}{x_g} = 10^{-7}$.

$7 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, $\frac{\delta x_s}{x_s} = 10^{-5}$) nous est interdit afin de ne pas dégrader les performances des horloges puisque cette combinaison donnera une variance d'Allan temporelle supérieure aux spécifications. Au contraire, le couple de valeurs $(\delta T_{23} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, $\frac{\delta x_s}{x_s} = 2 \cdot 10^{-6}$) permet à la variance de l'erreur sur la désynchronisation de rester inférieure à celle du bruit intrinsèque du lien.

La figure 3.3 permet de mettre en évidence deux valeurs asymptotiques qu'on ne peut dépasser si l'on désire respecter les objectifs du MWL. Ces valeurs correspondent aux valeurs maximales permises lorsque l'autre erreur considérée est nulle. Cependant, il faut remarquer que si les erreurs des deux paramètres sont égales aux valeurs asymptotiques déduites, alors la variance résultante sera au-dessus des spécifications de la mission.

Préliminaires

Les plans d'incertitudes dont le principe a été décrit dans le paragraphe précédent vont servir d'outil majeur dans la déduction des besoins de la mission.

Tout d'abord, on remarque que, si l'on ne considère pas pour l'instant les effets de l'imprécision sur T_{23} (i. e. $\delta T_{23} = 0$), la valeur de l'incertitude sur la position de la station sol pour laquelle les termes associés jouent un rôle dans le calcul de la variance est très élevée par rapport à celle que l'on a habituellement en géodésie (qui est de l'ordre du millimètre). En effet, d'après la figure 3.4, on observe que pour une valeur de T_{23} nulle, l'asymptote horizontale donne $\frac{\delta x_g}{x_g} \approx 3 \cdot 10^{-3}$.

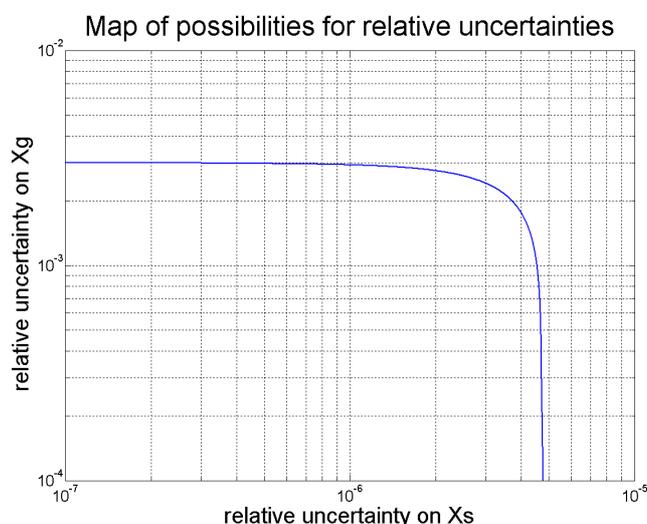


FIG. 3.4 : Plan des incertitudes $(\frac{\delta x_g}{x_g}, \frac{\delta x_s}{x_s})$ pour T_{23} nul et $\delta T_{23} = 0$ s.

Cette valeur correspond à la valeur maximale permise afin que la variance reste en-dessous des spécifications lorsque les incertitudes des autres paramètres sont nulles. Par la suite, on prendra donc pour $\frac{\delta x_g}{x_g}$ une valeur correspondant au minimum de précision que l'on pourrait avoir sur cette mesure, soit $\frac{\delta x_g}{x_g} \approx 10^{-7}$.

Recherche d'un temps caractéristique pour T_{23}

Du fait du nombre élevé de paramètres intervenants, on cherche tout d'abord à fixer une valeur pour T_{23} . Cette valeur va déterminer la façon dont on combine les observables des signaux f_1 et f_2 . La station spatiale se déplaçant plus rapidement que la station terrestre dans le référentiel géocentrique non-tournant, la première intuition est de combiner la mesure du signal montant avec l'observable du signal f_2 émise légèrement avant la réception du premier. Cela apparaît comme la manière la plus adaptée de réduire l'asymétrie des délais de propagation.

Cependant, au lieu de regarder l'effet de la valeur de l'intervalle de temps T_{23} sur l'amplitude de l'erreur sur la désynchronisation $\delta(T_{12} - T_{34})$, on étudie son effet sur la contrainte orbitographique. Dans cette optique, on se place tout d'abord à $\delta T_{23} = 0$ en conservant toujours $\frac{\delta x_g}{x_g} = 10^{-7}$, puis on trace le plan $(T_{23}, \frac{\delta x_s}{x_s})$ apparaissant sur la figure 3.5.

On peut en déduire que plus T_{23} est faible, plus l'incertitude permise sur la po-

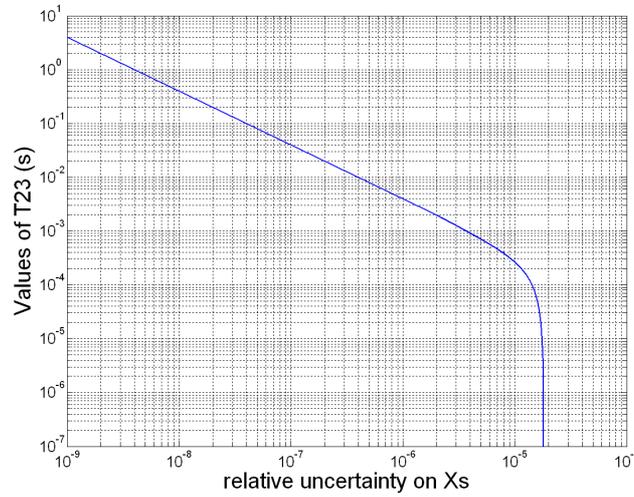


FIG. 3.5 : Plan des incertitudes $(T_{23}, \frac{\delta x_s}{x_s})$ pour $\delta T_{23} = 0$ s et $\frac{\delta x_g}{x_g} = 10^{-7}$.

sition du satellite devient importante. Il est donc préférable de choisir l'intervalle de temps T_{23} le plus faible possible, et plus particulièrement inférieur à 10^{-5} s (valeur qui correspond au début de l'asymptote verticale). De cette façon, on déduit la manière la plus habile pour combiner les signaux ascendant et descendants : il faut que la réception à l'antenne du signal de fréquence f_1 coïncide avec l'émission du signal de fréquence f_2 . Cette façon de combiner les signaux est nommée configuration Λ (cf. figure 3.6).

Cette façon de combiner les signaux découle logiquement de la maximisation de la variance de l'erreur sur la désynchronisation. En effet, les paramètres étant indépendants, le choix du signe positif ou négatif des erreurs intervenant dans l'équation (3.7) vise cette maximisation.

Dans cette configuration (cf. figure 3.6), on étudie les incertitudes sur l'orbitographie de la station spatiale et sur la calibration des délais internes. Il est nécessaire que ces erreurs restent inférieures aux valeurs asymptotiques de la figure 3.6, à savoir une incertitude relative de $1.8 \cdot 10^{-5}$ pour la position du satellite (ce qui correspond à une orbitographie de 120 m au minimum) et une incertitude δT_{23} inférieure à $9 \cdot 10^{-8}$ s. On vérifie tout de même que la valeur nulle de T_{23} permet de diminuer la contrainte sur les besoins de la mission en traçant les plans $(\delta T_{23}, \frac{\delta x_s}{x_s})$ pour différentes valeurs de T_{23} .

Considération de bruit

Pour l'instant, nous n'avons considéré que des erreurs constantes sur les paramètres. C'est pourquoi nous étudions à présent l'influence du bruit blanc sur

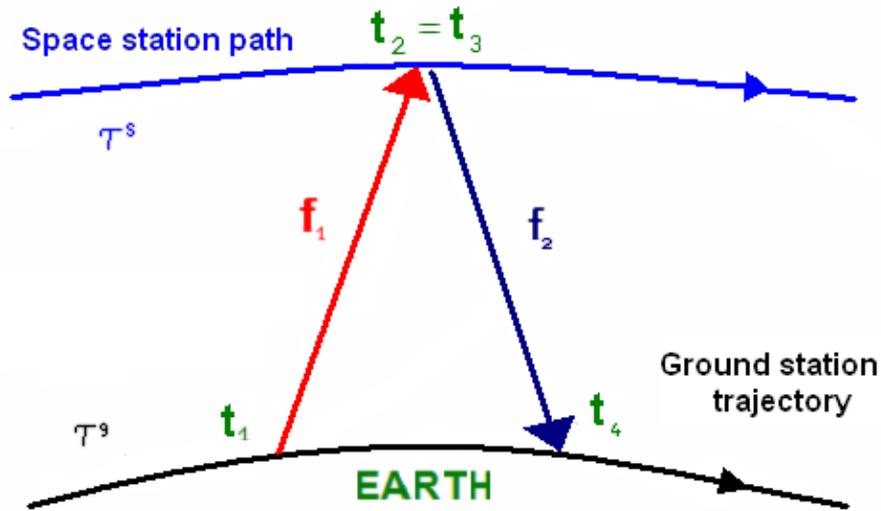


FIG. 3.6 : La " configuration Λ " est la combinaison des signaux ascendant et descendants qui autorise l'erreur maximale sur l'orbitographie de la station spatiale.

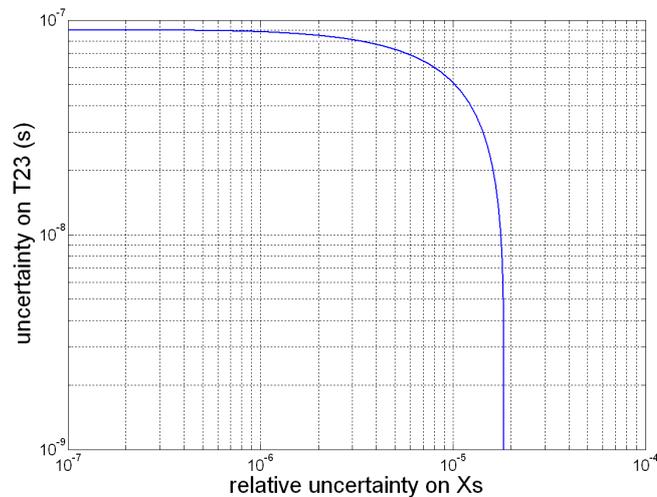


FIG. 3.7 : Plan des incertitudes $(\delta T_{23}, \frac{\delta x_s}{x_s})$ pour $T_{23} = 10^{-6}$ s et $\frac{\delta x_g}{x_g} = 10^{-7}$.

l'erreur globale du transfert de temps.

L'erreur sur chaque paramètre est désormais constituée d'un terme de bruit blanc (caractérisé par son écart type) et d'un biais constant durant le passage. Par exemple, si l'on considère l'erreur relative sur la position de la station spatiale $(\frac{\delta x_s}{x_s})$, alors celle-ci se compose de deux termes : un terme de bruit blanc noté $(\frac{\delta x_s}{x_s})_N$ et un terme de biais constant noté $(\frac{\delta x_s}{x_s})_B$.

On cherche les niveaux de bruit maximaux permis sur les paramètres afin de respecter les spécifications du MWL. Mais, au contraire des études précédentes, l'introduction de fonctions stochastiques implique le calcul de barres d'incertitudes. Les barres de confiance à 95 % sont évaluées à l'aide de simulations de type Monte-Carlo pour une variance d'un bruit donnée. En effet, pour une amplitude de biais et une variance du bruit fixées, on estime pour un grand nombre de cas la variance d'Allan temporelle de l'erreur sur la désynchronisation. On détermine alors l'écart type à 95 % de confiance de ces calculs pour le temps d'intégration désiré.

Deux exemples d'écart types d'Allan temporels évalués à travers cette méthode sont représentés sur la figure 3.8 : à niveau de bruit égal sur l'incertitude en position de la station spatiale, la figure de gauche a un biais plus important que celle de droite, tous autres bruits étant nuls par ailleurs.

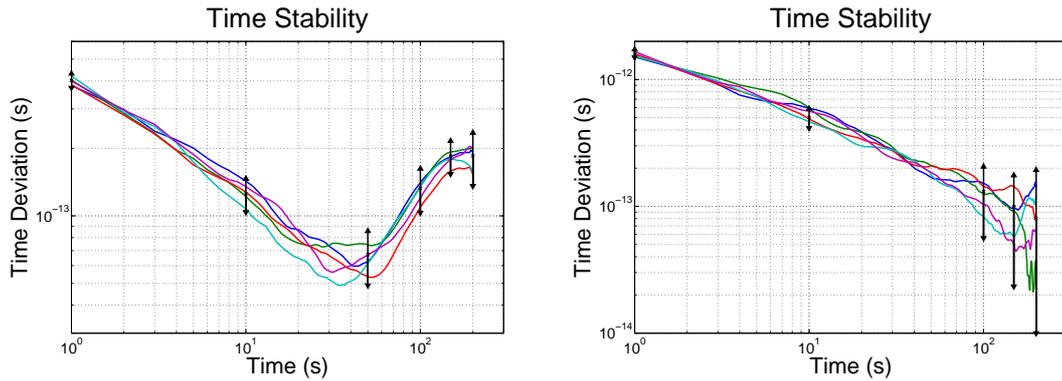


FIG. 3.8 : Écart types d'Allan temporels de l'erreur sur la désynchronisation pour $(\frac{\delta x_s}{x_s})_N = 4 \cdot 10^{-5}$ et $(\frac{\delta x_s}{x_s})_B = 1.2 \cdot 10^{-5}$ sur la figure de gauche et pour $(\frac{\delta x_s}{x_s})_N = 4 \cdot 10^{-5}$ et $(\frac{\delta x_s}{x_s})_B = 8 \cdot 10^{-7}$ sur la figure de droite, les amplitudes des autres erreurs étant nulles. Les courbes correspondent à cinq cas dont les fonctions stochastiques sont différentes.

Lorsque le biais constant est faible et que le bruit blanc domine, l'écart type obtenu montre une pente d'amplitude $-\frac{1}{2}$, caractéristique du bruit blanc (cf. Annexe A). Dans l'autre cas, l'écart type d'Allan temporel (figure 3.8) est caractérisé par un comportement de bruit blanc aux temps courts puis montre un pic du fait du biais constant et de l'aspect périodique de l'erreur sur $T_{12} - T_{34}$.

Pour les paramètres d'erreur de positionnement de la station spatiale $\frac{\delta x_s}{x_s}$ et de calibration des délais internes δT_{23} , on recherche les valeurs asymptotiques res-

sortant des plans d'incertitudes en terme de bruit et de biais. Ces valeurs asymptotiques sont caractérisées par le fait qu'à cette valeur de bruit, plus de 95 % des cas restent en-dessous des spécifications. Ces valeurs sont retranscrites dans le tableau 3.1 suivant :

TAB. 3.1 : Valeurs asymptotiques de bruit et de biais sur l'orbitographie spatiale et la calibration temporelle afin de respecter les spécifications de la mission.

Variable	Biais asymptotique	Bruit Asymptotique
$\frac{\delta x_s}{x_s}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
δT_{23}	$9 \cdot 10^{-8} \text{ s}$	$5.8 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

On retrouve bien évidemment les valeurs asymptotiques de biais pour les deux paramètres. Concernant les niveaux de bruit, ils sont presque d'un ordre de grandeur supérieurs aux valeurs asymptotiques de biais. En effet, les besoins orbitographiques sont de 120 m en terme de biais et supérieurs au kilomètre en terme de bruit. Ces quatre niveaux ne devraient pas poser de problème étant donné les performances obtenues dans les systèmes actuels.

3.1.3 Pour plusieurs passages

Dans cette partie, on cherche à connaître quelles sont les conditions sur les incertitudes à respecter pour rester en-dessous des spécifications à long terme des horloges données par l'équation (2.2). Chaque passage de l'ISS au-dessus de l'une des stations terrestres participant à la mission conduira à une mesure moyennée de temps ou de fréquence.

On note Δx la valeur de l'incertitude maximale sur la désynchronisation après un passage individuel. On fait l'hypothèse que, pour chaque passage, cette incertitude est identique. Deux passages à la même station sont au moins séparés de 90 minutes : afin de maximiser la variance obtenue, les passages sont supposés équidistants de cette période (maximum de corrélation). On cherche alors la fonction qui détermine le signe de Δx pour chaque passage de façon à maximiser la variance d'Allan temporelle. La fonction qui permet cette maximisation pour le temps $\tau = m \cdot \tau_0$ avec τ_0 égal à 90 minutes est la suivante :

$$f_m(i) = (-1)^{E(\frac{i}{m})}. \quad (3.8)$$

où $E()$ est une fonction retournant la partie entière d'un réel.

Ainsi pour chaque temps d'intégration τ , il existe une fonction qui maximise la variance d'Allan. Sur la figure 3.9 sont représentées les fonctions données par l'équation (3.8) pour les deux cas, $m = 1$ et $m = 3$.

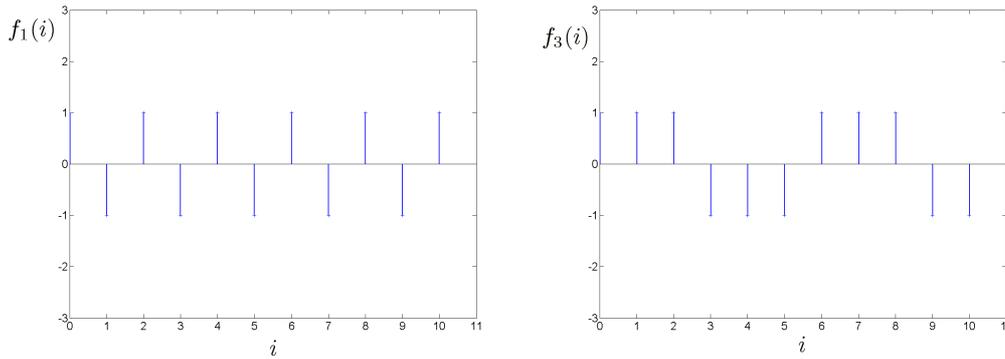


FIG. 3.9 : Fonction $f_m(i)$ pour $m = 1$ et $m = 3$.

Si l'on considère ces fonctions, l'écart type d'Allan résultant est une droite de pente -1 dans un graphique logarithmique d'équation :

$$\sigma_y(\tau) = 2\sqrt{2} \cdot \Delta x \cdot \tau^{-1}. \quad (3.9)$$

L'écart type d'Allan maximal donné par l'équation (3.9) correspond à des mesures équidistantes affectées par une incertitude temporelle de Δx mais avec des signes différents. L'écart type d'Allan modifié étant borné par l'écart type d'Allan, l'écart type d'Allan temporel TVAR de ces fonctions combinées s'écrit :

$$\sigma_x(\tau) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \Delta x. \quad (3.10)$$

A partir de cette formule qui maximise la statistique des mesures, on cherche à déterminer les contraintes sur les paramètres afin que l'amplitude Δx ne donne pas un écart type dépassant les spécifications données par l'équation (2.2).

Les besoins en orbitographie et en calibrations temporelles sont étudiés : même la situation la plus contraignante donne des valeurs asymptotiques supérieures à celles déterminées pour un passage simple (cf. figure 3.10). Par conséquent, il suffit d'étudier les besoins de la mission pour un passage car, si ces derniers sont vérifiés, alors les spécifications pour plusieurs passages seront d'office respectées.

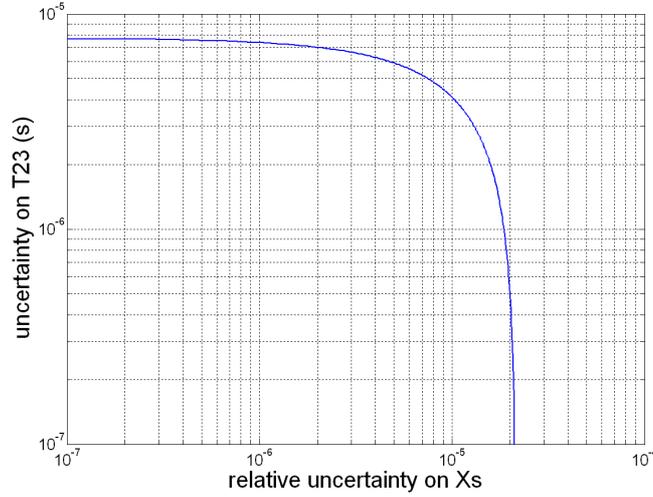


FIG. 3.10 : Plan des incertitudes $(\delta T_{23}, \frac{\delta x_s}{x_s})$ pour $T_{23} = 10^{-6}$ s et $\frac{\delta x_g}{x_g} = 10^{-7}$ lorsqu'une suite de passage est considérée.

3.1.4 Le déplacement fréquentiel gravitationnel

D'après l'équation (1.11), la fréquence d'une horloge idéale par rapport au temps coordonné t est proportionnelle à un terme U_G lié au potentiel gravitationnel $U(t, \vec{x})$ (pris positif par convention) et à un terme Doppler du second ordre U_V selon :

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - U_G - U_V + O(c^{-4}), \quad (3.11)$$

avec $U_G = \frac{U(t, \vec{x})}{c^2}$ et $U_V = \frac{v^2(t)}{2c^2}$ où $v(t)$ est la vitesse de l'horloge dans le référentiel considéré.

Afin d'évaluer les besoins en orbitographie de la mission ISS pour l'observation du *Redshift* avec la précision recherchée, il nous faut comparer l'incertitude du déplacement gravitationnel en fréquence donnée par l'équation (3.11) au bruit escompté du MWL.

On considère seulement le premier terme du potentiel gravitationnel qui domine l'incertitude sur ce dernier. Soit on peut prendre :

$$U_G \approx \frac{G \cdot M_E}{c^2 \cdot r},$$

avec $r = \|\vec{r}\|$ la distance entre l'horloge considérée et le centre du référentiel utilisé.

Pour avoir une idée des ordres de grandeur mis en jeu, on évalue les deux termes intervenant dans l'équation (3.11) :

$$|U_G| = \frac{G \cdot M_E}{c^2 \cdot r} \approx \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.9736 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 6.8 \cdot 10^6} \approx 6.5 \cdot 10^{-10},$$

$$|U_V| = \frac{v^2}{2c^2} \approx \frac{7700^2}{2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2} \approx 3.3 \cdot 10^{-10}.$$

Les incertitudes sur les deux termes de l'équation (3.11) sont données par :

$$\delta U_G = -\frac{G \cdot M_E}{c^2} \frac{\delta r}{r^2},$$

$$\delta U_V = \frac{\vec{v} \cdot \delta \vec{v}}{c^2},$$
(3.12)

où δr est l'erreur sur la distance de l'horloge à l'origine du référentiel GRCS et $\delta \vec{v}$ l'erreur sur la vitesse de l'horloge dans ce même référentiel.

Tout d'abord, on considère que l'erreur en positionnement de la station spatiale se comporte comme du bruit blanc. Pour du bruit blanc de fréquence d'écart type σ , l'écart type d'Allan est donné par $\sigma_y(\tau) = \sigma \cdot \tau^{-1/2}$: celui-ci doit être comparé aux spécifications long terme de la mission données par l'équation (2.2) à l'aide de l'équation (2.3). Cette variance d'Allan reste en-dessous des objectifs d'ACES si l'écart type du bruit à 1 s sur la position reste inférieur à 410 mètres et celui du bruit blanc en vitesse est en-dessous de 0.5 m.s^{-1} . Ces deux valeurs asymptotiques de bruit seront aisément respectées.

Par contre, si l'on considère une erreur constante sur la position ou la vitesse, la variance d'Allan résultante est nulle puisque, dans le modèle utilisé, le rayon et la vitesse de l'ISS restent constants dans le temps. Par contre, une erreur constante en fréquence peut dégrader les objectifs d'exactitude des horloges. Il est nécessaire que l'erreur en fréquence relative reste en-dessous de 10^{-16} . Les équations (3.12) impliquent que le biais radial δr doit rester inférieur à 1.05 mètres et que le biais en vitesse $\delta \vec{v}$ doit être en-dessous de $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$.

Il faut donc que cette précision d'un mètre soit respectée, ce qui semble très difficile pour l'ISS. En effet, du fait de son altitude basse et de ses panneaux solaires, sa trajectoire reste difficilement restituable avec une telle précision. Une

étude plus complète des besoins prenant en compte un modèle d'orbite plus réaliste est donc nécessaire.

3.2 Étude complète

3.2.1 Le modèle

Afin d'étudier avec précision le transfert de temps-fréquence réalisé par le Lien Micro-Onde pour ACES et d'en déduire les besoins pour l'orbitographie ou la calibration temporelle, il est intéressant de disposer des trajectoires des stations terrestres et de la Station Spatiale Internationale. En effet, contrairement aux hypothèses énoncées dans les travaux précédents, les erreurs de restitution d'orbite ne sont pas constantes à l'échelle d'un passage : elles sont fortement structurées et corrélées dans le temps.

On considère, dans cette partie, un exemple d'une restitution d'éphémérides fournie par le CNES. Ces données datent du 20 mai 2005 et sont échantillonnées toutes les soixante secondes pour une durée totale dépassant les neuf heures. L'orbitographie du centre de masse de la station spatiale est donnée dans un référentiel géocentrique tournant avec la Terre et datée en UTC. Elle correspond à une trajectoire elliptique dans un plan incliné à 51.6° par rapport à l'équateur (cf. figure 3.11).

On étudie le possible transfert de temps entre la station spatiale et la station terrestre de Toulouse puisque celle-ci a été choisie comme centre névralgique de la mission ACES.

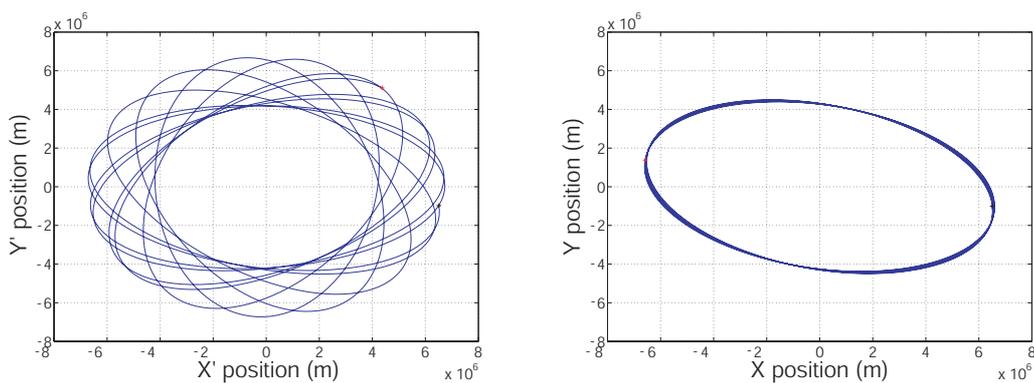


FIG. 3.11 : *A gauche : trajectoire de la station spatiale dans le repère géocentrique tournant projetée sur le plan équatorial / A droite : trajectoire de la station spatiale dans le repère géocentrique non-tournant projetée sur le plan équatorial.*

Pour les données orbitographiques étudiées, la station basée à Toulouse ($\varphi = 1'27''$, $\psi = 43'37''$) aperçoit la station spatiale six fois durant cet intervalle. Pour l'étude qui suit, on ne considère que le passage de plus grande élévation, les autres passages donnant des résultats tout aussi contraignants.

Pour des orbites à faible excentricité et proches de la surface de la Terre, les écarts se comportent de façon similaire au modèle de Hill (ou de Clohessy-Wiltshire) [90] qui est une linéarisation des erreurs d'orbite autour d'une orbite circulaire de référence.

Le modèle d'incertitudes prend en compte la corrélation des incertitudes sur les différents paramètres. Ainsi dans le repère orbital local, les incertitudes de la position de la station spatiale suivant les axes radial, tangential et normal (\vec{R} , \vec{T} et \vec{N}) sont données après restitution par :

$$\begin{aligned} \text{axe radial : } \delta R &= \frac{1}{2}A \cdot \cos(\omega t + \varphi_R) + c, \\ \text{axe tangential : } \delta T &= -A \cdot \sin(\omega t + \varphi_R) - \frac{3}{2}\omega \cdot c \cdot t + d, \\ \text{axe normal : } \delta N &= B \cdot \cos(\omega t + \varphi_N), \end{aligned} \quad (3.13)$$

où ω est la pulsation orbitale, φ_R et φ_N les phases des erreurs exprimées en radians, et A , B , c et d des coefficients exprimés en mètres. Il est important de noter la corrélation entre les erreurs radiale et tangentielle. Dans le cadre de notre étude, le terme de biais (d) n'a qu'une faible influence sur les stabilités. De plus, le terme linéaire (c) dépend de la durée de l'observation : plus celle-ci est longue, plus le coefficient c devient petit. Par conséquent, ces deux termes sont négligés dans l'étude de stabilité qui suit.

Ces incertitudes étant données dans le repère orbital local, il faut, à partir de ce modèle d'erreurs, exprimer les incertitudes selon les axes du référentiel géocentrique non-tournant (\vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z}) sur les paramètres de position x , y et z , et de vitesse v_x , v_y et v_z . Les valeurs de ces erreurs seront par la suite injectées dans l'expression de l'incertitude sur la désynchronisation. De cette façon, à l'aide d'un modèle réaliste d'erreurs de position de la station spatiale, on détermine les besoins en orbitographie et en calibration temporelle.

L'attitude (ou la géométrie) de la Station Spatiale Internationale peut être supposée quasiment constante. Dans le référentiel local ayant pour origine le centre de masse de l'ISS, la position des horloges spatiales peut être représentée par un vecteur constant sur lequel se répercutent les erreurs de positionnement de l'ISS données par les équations (3.13).

D'autres perturbations peuvent affecter le positionnement des horloges. En effet, ce vecteur peut être affecté par des erreurs telles que :

- l'attitude de la station : des erreurs peuvent être réalisées sur le comportement de l'ISS en tant que corps rigide. Si l'on considère une erreur de l'ordre de cinq degrés pour une distance de dix mètres, cela conduit à une erreur périodique à la fréquence orbitale d'amplitude 0.87 mètres sur la position des horloges,
- les déformations thermo-élastiques donneront une composante à la période orbitale du fait de l'orientation par rapport au Soleil et d'amplitude inférieure à un mètre,
- et les vibrations : ces perturbations sont supposées se produire à des fréquences supérieures ou égales à la fréquence propre de la Station Spatiale Internationale qui est elle-même supérieure à la fréquence orbitale. Les déplacements correspondants restent inférieurs au mètre.

3.2.2 Le transfert de temps

Pour étudier précisément les besoins en orbitographie du transfert de temps, on note \vec{X}_a la position vraie du centre de phase de l'antenne de la station spatiale et \vec{X}'_a la position de la même antenne obtenue par restitution d'orbite. De cette façon, le vecteur $\overrightarrow{X_a X'_a}$ symbolise l'erreur réalisée sur la position du centre de phase de l'antenne à chaque instant.

La différenciation de l'équation (3.5) permet d'obtenir l'expression de l'erreur du terme $T_{12} - T_{34}$ impliquée dans l'équation (2.54). Comme vu dans la section précédente, elle est dépendante de la connaissance des trajectoires des stations, de la valeur de T_{23} et de l'incertitude sur ce paramètre :

$$\begin{aligned} \delta(T_{12} - T_{34}) = & 2 \frac{\delta \vec{D} \cdot \vec{v}_g + \vec{D} \cdot \delta \vec{v}_g}{c^2} + \frac{\vec{D} \cdot \Delta \vec{v}}{c \cdot D} \delta T_{23} \\ & + \left(\frac{\delta \vec{D} \cdot \Delta \vec{v}}{c \cdot D} + \frac{\vec{D} \cdot \delta \Delta \vec{v}}{c \cdot D} - \frac{\vec{D} \cdot \Delta \vec{v}}{c \cdot D} \frac{\delta D}{D} \right) T_{23}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'incertitude sur la position de la station terrestre est négligeable devant les erreurs de positionnement de l'ISS. Ainsi, on peut supposer que l'erreur sur le vecteur \vec{D} ne dépend que de l'incertitude de position du centre de phase de l'antenne, soit $\delta \vec{D} = \overrightarrow{X_a X'_a}$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \delta(T_{12} - T_{34}) = & 2 \frac{\overrightarrow{X_a X'_a} \cdot \overrightarrow{v_g}}{c^2} + \frac{\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{\Delta v}}{c \cdot D} \delta T_{23} \\ & + \left(\frac{\overrightarrow{X_a X'_a} \cdot \overrightarrow{\Delta v}}{c \cdot D} - \frac{\overrightarrow{D}}{c \cdot D} \cdot \frac{d\overrightarrow{X_a X'_a}}{dt} - \frac{\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{\Delta v} \|\overrightarrow{X_a X'_a}\|}{c \cdot D \cdot D} \right) T_{23}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A partir de ces considérations, on peut déduire de nouvelles asymptotes sur les paramètres orbitographiques et temporels en comparant les variances obtenues avec les spécifications du Lien Micro-Onde. Les erreurs sur la position de la station spatiale sont exprimées dans le référentiel local par l'équation (3.13) : il est donc nécessaire de les exprimer dans le référentiel GCRS.

Les paramètres utilisés - A , B , T_{23} et δT_{23} - sont indépendants. Comme effectué dans la section précédente, les signes des erreurs de l'équation (3.15) sont choisis de façon à maximiser la variance d'Allan temporelle résultante.

Tout d'abord, on suppose qu'il n'existe aucune erreur sur T_{23} (i. e. $\delta T_{23} = 0$) et on recherche pour toute valeur de A (ou de B) de l'équation (3.13), la valeur maximale de T_{23} qui permet de rester en-dessous des spécifications (équation (2.1)) pour l'ensemble du plan des phases (φ_R , φ_N). Cette étude conduit à la figure 3.12, le plan des contraintes entre le paramètre T_{23} et le facteur A (le facteur B donnant des résultats légèrement moins contraignants).

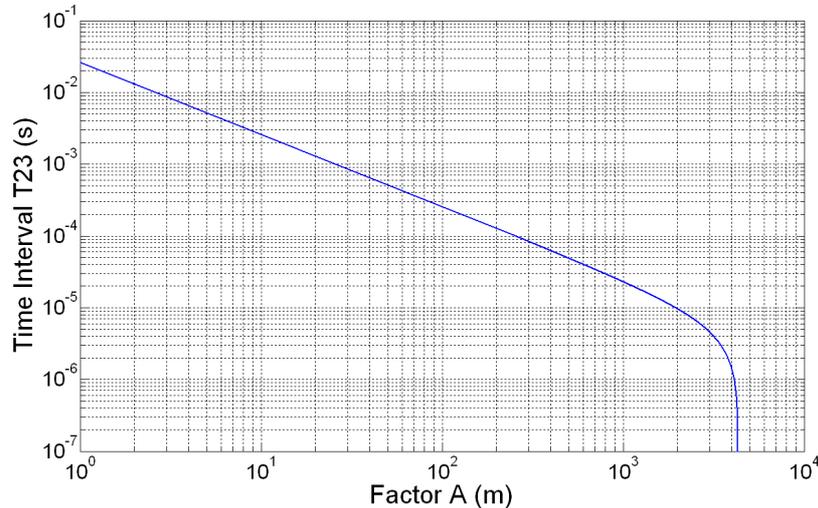


FIG. 3.12 : Valeur maximale permise de T_{23} en fonction du paramètre A (équation (3.13)) afin de suivre les spécifications de la mission en supposant que $\delta T_{23} = 0$.

La figure 3.12 conforte le résultat obtenu dans la partie précédente au sujet de

la configuration Λ . Celle-ci permet de relâcher au maximum les contraintes sur l'orbitographie de la station spatiale.

A partir de cette méthode pour combiner les observables des signaux de fréquence f_1 et f_2 ($T_{23} = 0$), il faut faire un compromis entre l'incertitude sur l'orbitographie de la station spatiale et la calibration des délais internes (cf. figure 3.13) du fait de la maximisation de la variance.

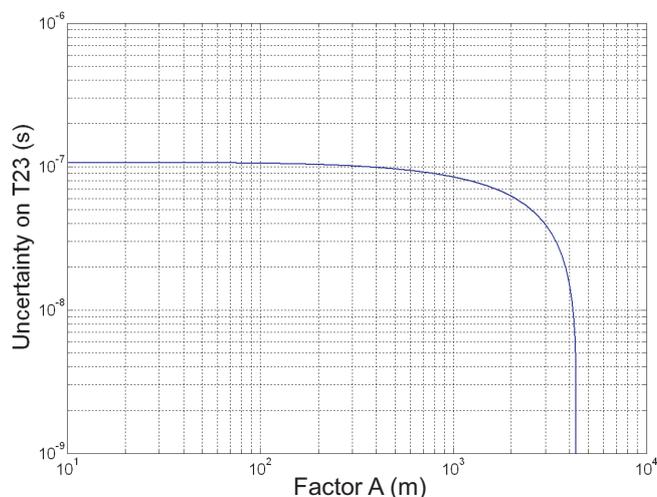


FIG. 3.13 : Valeur maximale permise de δT_{23} en fonction du facteur d'échelle A (équation (3.13)) afin de suivre les spécifications de la mission en supposant que $T_{23} = 0$.

Ainsi, on recherche précisément la valeur maximale du paramètre A qui permet à l'incertitude du lien de rester en-dessous des spécifications pour l'ensemble du plan des phases (φ_R , φ_N) lorsque l'erreur sur l'intervalle T_{23} est nulle. La valeur asymptotique orbitographique est obtenue pour $A = 2150$ (cf. figure 3.14). Cette valeur correspond à une erreur de 4.2 km sur l'axe normal et tangentiel et à une erreur radiale d'environ deux kilomètres.

De la même façon, on détermine la valeur limite pour la calibration temporelle dont le calcul est indépendant des phases φ_R et φ_N . On peut donc tracer l'écart type d'Allan temporel pour différentes valeurs de δT_{23} (cf. figure 3.15). On trouve alors que l'erreur sur la calibration temporelle doit rester inférieure à $105 \cdot 10^{-9}$ s.

L'étude du transfert de temps à l'aide des éphémérides de la Station Spatiale Internationale a permis d'identifier deux nouvelles valeurs asymptotiques pour l'orbitographie et les délais internes. Ces limites sont moins contraignantes que

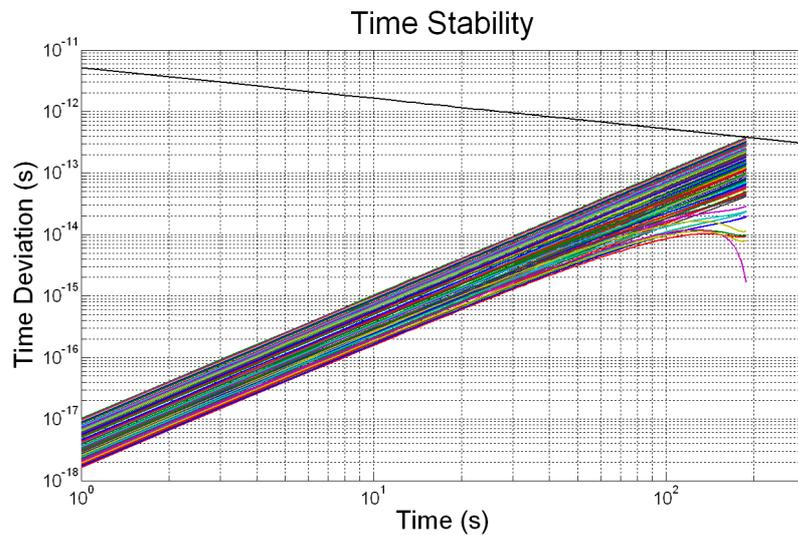


FIG. 3.14 : Écart types d'Allan temporels de l'erreur la désynchronisation avec $A = B = 4300 \text{ m}$ pour l'ensemble de l'espace des phases φ_R et φ_N et comparés aux spécifications de la mission.

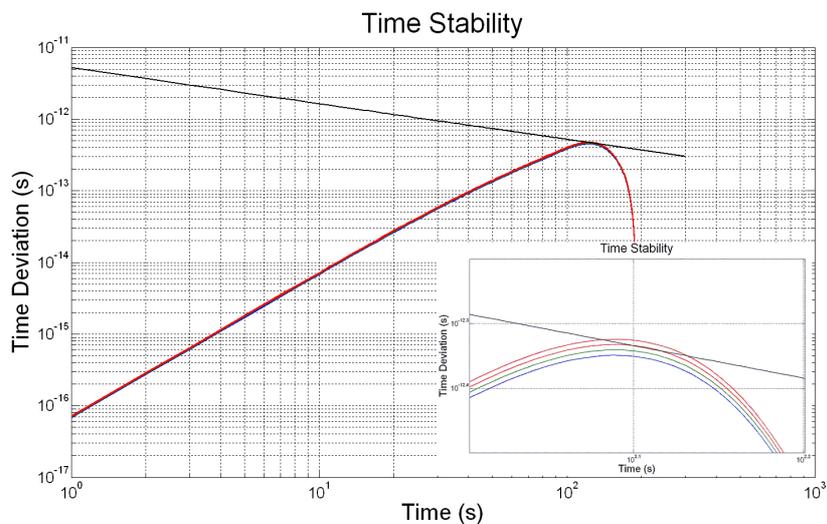


FIG. 3.15 : Écart types d'Allan temporels pour $A = 0 \text{ m}$, $T_{23} = 0 \text{ s}$ et pour $\delta T_{23} = [104, 105, 106, 107] \text{ ns}$ et comparés aux spécifications de la mission.

celles calculées auparavant à travers le modèle simple. En effet, cette différence s'explique par la considération des corrélations entre vitesse et position qui, par conséquent, relâche considérablement les contraintes sur l'orbitographie de la station spatiale.

Enfin, les besoins pour des temps d'intégration supérieurs au simple passage

ont été étudiés. Conformément à l'étude précédente du modèle simple (cf. section 3.1.3), on retrouve que les contraintes sont plus fortes pour un passage que pour plusieurs. Soit, si les spécifications sont respectées pour un seul passage alors elles le sont pour une multitude.

Il est possible qu'il existe une autre manière moins contraignante de combiner les signaux. L'expression de $T_{12} - T_{34}$ peut s'écrire en fonction de T_{14} au lieu de T_{23} (voir, au chapitre précédent, l'équation (2.71)). Cela peut avoir un avantage puisque T_{14} correspond à l'intervalle de temps s'écoulant entre l'émission du signal montant et la réception du signal descendant que l'on désire combiner ensemble. Il est donc proportionnel à la somme des délais internes $\Delta_{T_1}^g$ et $\Delta_{R_2}^g$. Il est, en pratique, plus aisé de déterminer cet intervalle de temps avec précision puisque les événements correspondant à t_1 et t_4 se produisent à la station sol.

Une étude identique à celle menée précédemment mais basée sur l'équation (2.71) pourrait être réalisée. Cependant, du fait de la maximisation de la variance finale et de la constante du paramètre temporel T_{14} durant l'ensemble du passage, cette étude conduirait à des résultats inexacts.

Cependant, les intervalles T_{23} et T_{14} sont reliés par une relation avec les temps de propagation des signaux de fréquence f_1 et f_2 :

$$T_{23} = T_{14} - T_{12} - T_{34}. \quad (3.16)$$

Par conséquent, il est possible de contrôler l'intervalle T_{23} à travers le paramètre T_{14} . Par exemple, en prenant T_{14} de l'ordre de $2 \cdot D/c$, on peut envisager de combiner les signaux selon la configuration Λ .

La configuration restant inchangée, les besoins orbitographiques ne varient pas. Par contre, il reste à déterminer les contraintes sur la calibration des délais internes terrestres que cette méthode impose. Celles-ci découlent de l'erreur réalisée sur la valeur de T_{14} lors de la combinaison des signaux avec $T_{14} \sim 2 \cdot D/c$. Une erreur de cinq mètres (précision atteignable raisonnablement) sur la distance D donne une imprécision temporelle inférieure à la centaine de nanosecondes, valeur asymptotique de δT_{23} . Par conséquent, la contrainte sur δT_{14} est identique à celle sur δT_{23} , soit :

$$\delta T_{14} < 105 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$$

3.2.3 Le déplacement fréquentiel gravitationnel

L'analyse de la correction relativiste des horloges nécessite d'exprimer cette erreur de fréquence au point de référence, c'est-à-dire à la position de l'horloge.

Pour cela, on considère la vraie position et la vraie vitesse de l'horloge, \vec{X}_c et \vec{V}_c , ainsi que la position et la vitesse obtenues par restitution d'orbite, \vec{X}'_c et \vec{V}'_c , qui sont donc entachées d'erreurs.

Le potentiel gravitationnel peut être évalué sur une trajectoire donnée avec suffisamment de précision à l'aide de modèles de champs (par exemple *GRIM5* ou *EGM96*) [23]. Par conséquent, l'erreur sur le déplacement fréquentiel à une position de l'horloge donnée s'exprime selon :

$$\delta\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}_c} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}_c} - \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}'_c} = -\frac{1}{c^2} \left(U(t, \vec{X}_c) - U(t, \vec{X}'_c) + \frac{V_c^2 - V_c'^2}{2} \right). \quad (3.17)$$

La différence de fréquence entre la position du point de référence \vec{X} (de vitesse \vec{V}) et la position du centre de masse \vec{X}_o (de vitesse \vec{V}_o) est donnée par :

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}} - \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}_o} = -\frac{1}{c^2} \left(U(t, \vec{X}) - U(t, \vec{X}_o) + \frac{V^2 - V_o^2}{2} \right). \quad (3.18)$$

La trajectoire de \vec{X}_o est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\vec{X}_o}{dt^2} = \vec{\Gamma}_P + \vec{\Gamma}_S, \quad (3.19)$$

où $\vec{\Gamma}_P$ est l'accélération Newtonienne due au potentiel gravitationnel et $\vec{\Gamma}_S$ l'accélération due aux effets non-gravitationnels tels que la traînée de l'air ou la pression de radiation.

En utilisant le fait que la force gravitationnelle dérive d'un potentiel :

$$\vec{\Gamma}_P = \overrightarrow{\text{Grad}}(U), \quad (3.20)$$

et qu'au premier ordre, on a :

$$U(t, \vec{X}) = U(t, \vec{X}_o) + \overrightarrow{\text{Grad}}(U)_{\vec{X}_o} \cdot \overrightarrow{X_o X}, \quad (3.21)$$

alors on obtient :

$$U(t, \vec{X}) = U(t, \vec{X}_o) + \vec{\Gamma}_P(\vec{X}_o) \cdot \overrightarrow{X_o X}. \quad (3.22)$$

En multipliant alors l'équation (3.19) par le vecteur $\overrightarrow{X_o X}$, on peut substituer la différence de potentiel gravitationnel intervenant dans l'équation (3.18) par :

$$U(t, \vec{X}) - U(t, \vec{X}_o) = \vec{\Gamma}_P(\vec{X}_o) \cdot \overrightarrow{X_o X}, \quad (3.23)$$

soit :

$$U(t, \vec{X}) - U(t, \vec{X}_o) = \frac{d^2 \vec{X}_o}{dt^2} \cdot \vec{X}_o \vec{X} - \vec{\Gamma}_S \cdot \vec{X}_o \vec{X}. \quad (3.24)$$

Dès lors, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}} - \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}_o} = & -\frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{V}_o}{dt} \cdot \vec{X}_o \vec{X} + \vec{V}_o \cdot \frac{d\vec{X}_o \vec{X}}{dt} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{X}_o \vec{X}}{dt} \right)^2 - \vec{\Gamma}_S \cdot \vec{X}_o \vec{X} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) peut se simplifier sous la forme suivante :

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}} - \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\vec{X}_o} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{V}_o \cdot \vec{X}_o \vec{X} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{X}_o \vec{X}}{dt} \right)^2 - \vec{\Gamma}_S \cdot \vec{X}_o \vec{X} \right), \quad (3.26)$$

puisqu'elle présente les deux termes d'une dérivée.

Dans cette expression, le terme $\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{X}_o \vec{X}}{dt} \right)^2 - \vec{\Gamma}_S \cdot \vec{X}_o \vec{X}$ peut être vu comme la correction relativiste de l'horloge exprimée dans le référentiel local de la station spatiale. En effet, pour un observateur se trouvant dans le référentiel lié à l'ISS, l'accélération non-gravitationnelle $\vec{\Gamma}_S$ produit une accélération qui peut être perçue par cet observateur comme provenant d'un "potentiel gravitationnel" $-\vec{\Gamma}_S \cdot \vec{X}_o \vec{X}$. Le terme $\frac{d}{dt} \left(\vec{V}_o \cdot \vec{X}_o \vec{X} \right)$ correspond à l'erreur de position projetée sur la direction de la vitesse de la station.

En combinant l'équation (3.26) écrite pour \vec{X}_c avec cette même équation mais exprimée pour \vec{X}'_c , on obtient l'expression de l'erreur de fréquence $\delta \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\vec{X}_c} = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\vec{X}_c} - \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\vec{X}'_c}$, pour une horloge située en \vec{X}_c :

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\vec{X}_c} = & \frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{V}_o \cdot \vec{X}_c \vec{X}'_c \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{X}_o \vec{X}_c}{dt} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{X}_o \vec{X}'_c}{dt} \right)^2 - \vec{\Gamma}_S \cdot \vec{X}_c \vec{X}'_c \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Afin d'étudier l'impact du terme des forces non-gravitationnelles $\frac{\vec{\Gamma}_S \cdot \vec{X}_c \vec{X}'_c}{c^2}$, la force de trainée de la station a été modélisée en considérant une orbite de référé-

rence. Une période de grande activité solaire a été choisie afin d'évaluer cet impact dans le pire des cas possibles et dont l'évolution temporelle est représentée sur la figure 3.16.

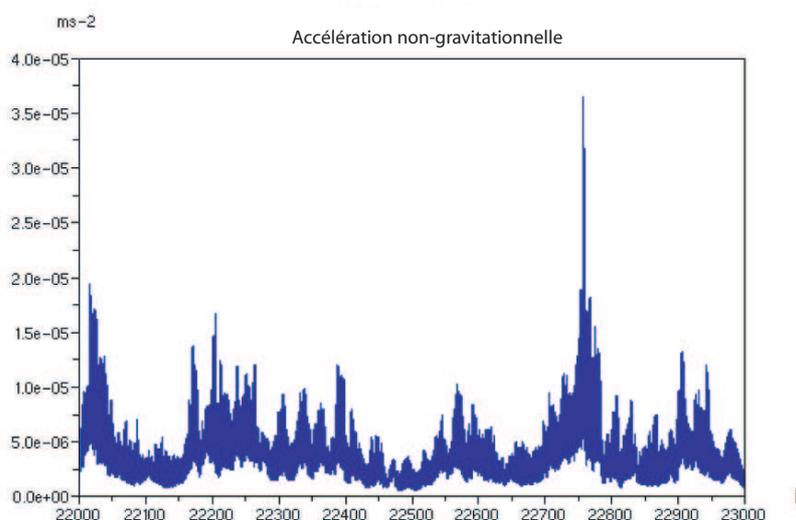


FIG. 3.16 : Estimation de l'accélération non-gravitationnelle en fonction du temps (exprimé en jours Julien).

Pour évaluer son effet sur la formule (3.27), l'accélération non-gravitationnelle a été multipliée par un biais de 10 mètres et par une fonction sinusoïdale d'amplitude 10 mètres et de période orbitale, ce qui correspond à des erreurs probables de l'ISS. Dans ces deux cas, l'écart type d'Allan résultant reste en-dessous de 10^{-21} ce qui implique que ce terme est complètement négligeable. De plus, ce terme n'a aucun effet sur l'exactitude en fréquence de l'horloge du fait de son amplitude et de son moyennage nul après une révolution de la station spatiale.

Ensuite, on étudie le terme résiduel du déplacement Doppler du deuxième ordre $\frac{1}{2c^2} \left(\left(\frac{d\vec{X}_o \vec{X}_c}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dX_o X'_c}{dt} \right)^2 \right)$.

Pour une erreur de positionnement de l'horloge par rapport au centre de masse de l'ISS de l'ordre de dix mètres, l'écart type d'Allan résultant est borné par $10^{-16} \cdot \tau^{-1}$. Cet effet peut donc être considéré comme négligeable puisque l'écart type correspondant se trouve plus que deux ordres de grandeur en-dessous des spécifications. Cependant, du fait de la fonction périodique au carré, ce terme n'est pas de moyenne nulle et a donc une influence sur l'exactitude de la mesure. Ce biais de fréquence est quand même négligeable puisqu'il est évalué à $1.7 \cdot 10^{-21}$.

Le seul terme important pour l'évaluation des performances est donc le terme $\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (\vec{V}_o \cdot \overrightarrow{X_c X'_c})$. Dans ce cas, on a :

$$\delta \left(\frac{d\tau}{dt} \right)_{\vec{X}_c} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{d}{dt} (\vec{V}_o \cdot \overrightarrow{X_c X'_c}) \right]. \quad (3.28)$$

Par conséquent, seule la composante de l'erreur sur la position de l'horloge parallèle à la vitesse de la station spatiale joue un rôle. Cela peut être compris en considérant, par exemple, une erreur positive purement radiale : dans ce cas, le potentiel gravitationnel est sous-estimé mais le terme de vitesse est surestimé, et les deux erreurs s'annulent. En effet, pour une erreur purement radiale, on a :

$$\delta U(t, \vec{x}_s) \approx -\delta \left(\frac{v_s^2(t)}{2} \right), \quad (3.29)$$

ce qui est facile à vérifier pour une orbite Képlérienne à l'aide du théorème du Viriel.

A partir de l'équation (3.28), on évalue la valeur maximale des paramètres A et B afin que la variance d'Allan des erreurs reste en-dessous des objectifs de la mission. Pour des temps d'intégration supérieurs au millier de secondes, les variances calculées deviennent indépendantes des phases φ_R et φ_N .

La figure 3.17 montre que, si le paramètre A est égal à 16 mètres, alors les spécifications de la mission sont respectées. Cela correspond à une erreur de 8 mètres sur l'axe radial et à des erreurs de 16 mètres sur l'axe tangentiel. Du fait de la projection de l'erreur de positionnement le long de la vitesse du centre de masse de l'ISS, les besoins orbitographiques concernant l'axe normal sont de plusieurs ordres de grandeur moins contraignants, limités du coup dès lors par les contraintes du transfert de temps (cf. figure 3.13).

Concernant les objectifs d'exactitude, la mission ACES atteindra 10^{-16} en fréquence relative après 10 jours d'intégration. L'intégrale de l'équation (3.28) implique que l'erreur $\overrightarrow{X_c X'_c}$ en position de l'horloge spatiale cumulée sur dix jours doit rester en-dessous d'un kilomètre (ceci incluant le terme tangentiel linéaire en temps des équations (3.13)). Si l'on compare ce besoin avec les erreurs typiques de positionnement de la station spatiale de l'ordre de la dizaine de mètres, l'objectif d'exactitude devrait être atteint sans trop de difficulté.

Conclusion

Au final, l'étude du transfert de temps et de la mesure du déplacement fréquentiel gravitationnel impose des limites sur l'orbitographie et les calibrations

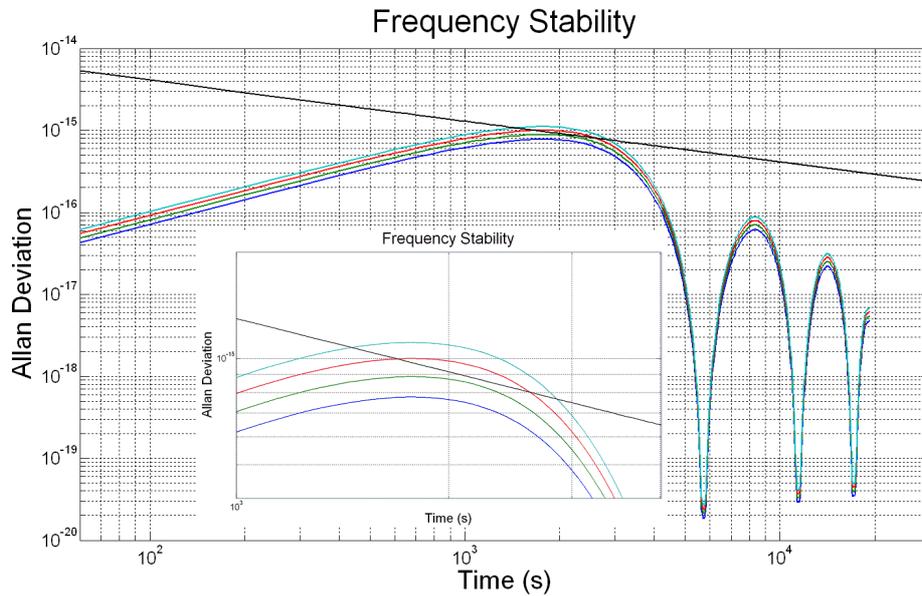


FIG. 3.17 : Écarts types d'Allan de l'erreur sur le déplacement gravitationnel en fréquence pour A égal à 14, 16, 18 et 20 m et comparés aux spécifications de la mission.

des délais internes. On rappelle que la contrainte sur le paramètre B provient du transfert de temps. Les conclusions sont reportées dans le tableau 3.2 suivant :

TAB. 3.2 : Besoins de la mission (voir équations (3.13) et (3.15)).

A (m)	B (m)	δT_{23} (ns)
16	4300	105

Comparativement à l'étude initiale d'un modèle simple, les contraintes apparaissant dans le tableau 3.2 sont moins fortes du fait de la prise en compte des corrélations entre les erreurs.

Une étude menée par le Centre National d'Études Spatiales a montré des positionnements de l'ISS d'une précision supérieure à celle exigée ici pour le transfert de temps et l'étude du déplacement relativiste de fréquence. En effet, la présence d'un GPS russe sur la station spatiale permet d'atteindre une résolution des paramètres A et B inférieure à la dizaine de mètres.

3.3 Études complémentaires

Outre les besoins de la mission au niveau de l'orbitographie et des calibrations temporelles, trois études ont été menées sur différents points. Elles restent en rapport avec le transfert de temps-fréquence du Lien Micro-Onde et apportent quelques précisions sur des questions que l'on pourrait se poser.

3.3.1 Une calibration des délais internes par effet Doppler

Du fait du mouvement des stations, le signal arrivant à l'une des antennes est entaché d'un déplacement de fréquence du fait de l'effet Doppler. Afin de comparer le signal créé localement avec celui reçu, ce décalage fréquentiel est mesuré puis retiré avant la mesure de différence de phase. La question que l'on se pose ici est de savoir si ces mesures d'effet Doppler peuvent être utilisées afin de combiner convenablement les signaux et de se débarrasser d'un étalonnage des délais instrumentaux. En effet, la différence d'effet Doppler pour les signaux ascendant et descendant peut fournir l'information recherchée sur T_{23} . La valeur de ce décalage fréquentiel est une signature de la vitesse des stations, et donc elle peut être rapprochée de l'échelle de temps coordonnée grâce à l'orbitographie.

Si l'on reprend le modèle développé dans le chapitre 2, l'expression du décalage Doppler pour un signal est donnée, en valeur absolue, par :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{c} \left(\vec{N}_{GS} \cdot \vec{v}_s - \vec{N}_{GS} \cdot \vec{v}_g \right) = \frac{1}{c} \left(v_s \sin(\theta - \Delta\Omega \cdot t) - v_s \sin(\theta) \right), \quad (3.30)$$

$$\text{où } \vec{N}_{GS} = \frac{\vec{GS}}{\|\vec{GS}\|}.$$

Afin de calculer la précision sur la mesure fréquence $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ nécessaire à la détermination de l'intervalle de temps coordonnée T_{23} avec l'incertitude demandée, on trace sur la figure 3.18 la variation de l'effet Doppler agissant sur les signaux durant un passage, ainsi que sa dérivée en fonction du temps.

La dérivée atteint un maximum d'environ $4 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. C'est pourquoi, dans le meilleur des cas, si l'on veut déterminer T_{23} ou T_{14} par cette méthode, il est nécessaire que la variation de fréquence associée à l'effet Doppler durant cet intervalle temporel soit mesurable par l'horloge. D'où, il faut impérativement que la mesure du décalage fréquentiel se fasse à :

$$\delta\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right) < 4 \cdot 10^{-7} \cdot 10.5 \cdot 10^{-8} = 4.2 \cdot 10^{-14}.$$

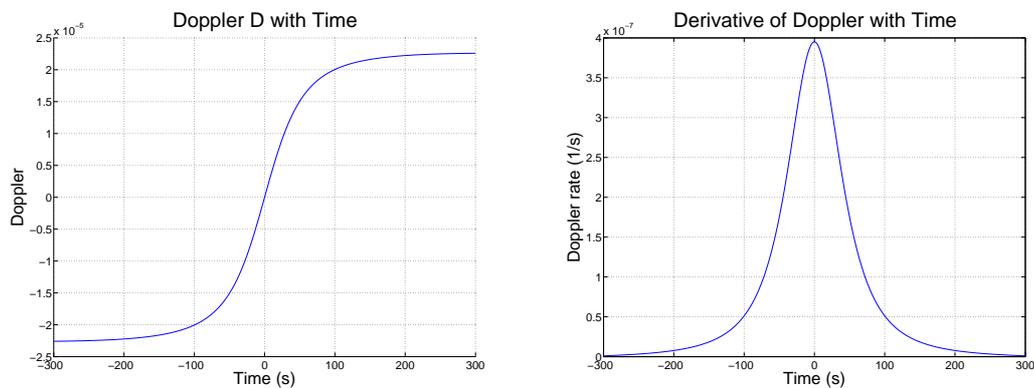


FIG. 3.18 : *Figure de gauche : variations de l'effet Doppler en fréquence relative en fonction du temps / Figure de droite : dérivée de l'effet Doppler en fréquence relative avec le temps.*

On peut en déduire que la détermination des intervalles temporels par effet Doppler est difficile à réaliser puisque les horloges de la mission distingueront difficilement cette variation pour une seconde d'intégration et que cette résolution est maximale durant le passage.

3.3.2 Convergence de l'orbitographie par les mesures du MWL

Le logiciel GINS est un logiciel permettant la détermination précise d'orbite de satellite et de positionnement terrestre. Il est développé conjointement par le CNES et le GRGS¹. Il permet la simulation et le traitement de données par diverses méthodes de transfert de temps-fréquence et de nombreux satellites. A partir de mesures brutes, ce logiciel se base sur un principe de minimisation des erreurs par moindre carré et restitue les paramètres de la comparaison après de nombreuses itérations.

Dans le cadre de la mission ACES, une étude sur la possibilité de restitution de l'orbitographie d'ISS a été réalisée à l'aide du logiciel GINS. En considérant la précision des mesures du Lien Micro-Onde, les seules observables brutes du MWL pourraient permettre de restituer l'orbitographie à un niveau suffisant.

En effet, comme on l'a vu au Chapitre 2, l'un des objectifs de la mission ACES est de permettre une étude précise de la navigation de la Station Spatiale Internationale. En effet, les mesures du Lien Micro-Onde permettront une estimation de la distance instantanée et donc de remonter à l'orbitographie de la station à poste-

¹Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale : <http://www.oca.eu/heberges/grgs/labo/index.html>

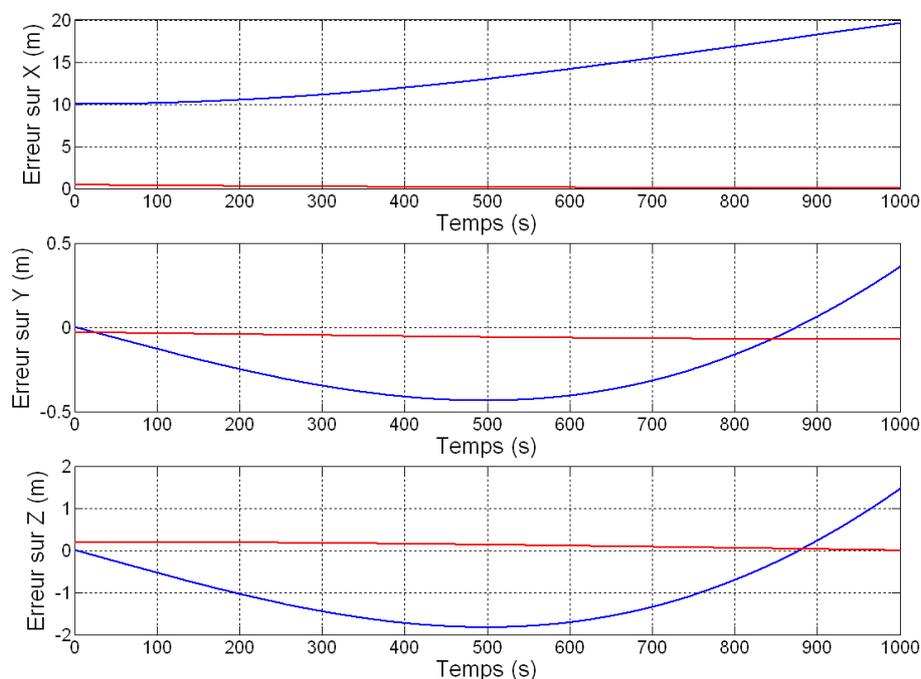


FIG. 3.19 : Restitution d'orbitographie par GINS : la courbe bleue correspond à la première itération du logiciel, la courbe rouge à la dernière.

riori. Cette mesure peut donc être utilisée pour régler d'éventuels problèmes liés aux erreurs orbitographiques.

Pour cette étude, on considère des mesures de distance instantanée à la précision décimétrique échantillonnées à 1 Hz . En supposant une période de grande activité solaire, on considère une erreur de la dizaine de mètres sur l'un des axes du référentiel (des erreurs plus grandes donnant des résultats similaires) et une visibilité d'une durée de 600 secondes de la station spatiale. La figure 3.19 donne la restitution de l'orbite de l'ISS à la première et dernière itération du logiciel GINS selon les trois axes du référentiel GRCS en fonction du temps (en sachant que la station est visible des temps 200 à 800 s).

La restitution de l'orbite converge vers des erreurs décimétriques selon les trois axes : ces résultats montrent l'autosuffisance du transfert de temps. En effet, les objectifs du transfert de temps n'ont pas besoin d'orbitographie de la station spatiale puisque les mesures permettent à elles seules d'éliminer leur dépendance face aux erreurs orbitographiques. Cependant cette restitution d'orbite ne peut se faire que durant les périodes de visibilité, et les objectifs de physique fondamen-

tale nécessitent de connaître l'évolution de la trajectoire de l'horloge précisément à chaque instant, même lors de périodes où l'ISS n'est visible par aucune station terrestre.

3.3.3 Les applications de l'annulation intervenant dans le déplacement fréquentiel relativiste

La mission vise la réalisation de comparaisons fréquentielles avec une incertitude relative inférieure à 10^{-16} après dix jours d'intégration. Du fait de l'annulation entre le terme gravitationnel et le terme Doppler du deuxième ordre décrite dans la partie 3.2.3, cet objectif peut être réalisé avec des besoins modestes sur l'orbitographie.

Le but de cette partie est de déterminer si cette annulation intervient sur les autres objectifs de la mission, en particulier sur :

- l'application en géodésie qui vise à déterminer le potentiel gravitationnel à la position de l'horloge (cf. 2.1.4),
- l'application en physique fondamentale, le test de l'Invariance Locale de Position par la mesure du déplacement fréquentiel gravitationnel (voir section 1.3), indépendamment de l'effet Doppler du deuxième ordre.

En ce qui concerne la première des applications, la mesure du potentiel gravitationnel de l'horloge terrestre est donnée par l'équation (2.4) selon :

$$U(t, \vec{x}_g) = -c^2 \cdot \left[\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt} \right] + U(t, \vec{x}_s) + \frac{v_s^2(t)}{2} - \frac{v_g^2(t)}{2}, \quad (3.31)$$

où $[\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt}]$ est la mesure qui découle de la dérivation de la désynchronisation.

L'erreur sur le potentiel gravitationnel $U(t, \vec{x}_g)$ à la position de l'horloge est donnée par :

$$\delta U(t, \vec{x}_g) = -c^2 \cdot \delta \left[\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt} \right] + \delta U(t, \vec{x}_s) + \delta \left(\frac{v_s^2(t)}{2} \right) - \delta \left(\frac{v_g^2(t)}{2} \right), \quad (3.32)$$

où $\delta[\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt}]$ est l'erreur sur la mesure, qui est supposée inférieure aux spécifications de la mission (équation (2.2)).

Si l'on suppose que la position et la vitesse de la station terrestre sont connues avec une précision suffisante (ce qui est le cas), il reste deux termes : les erreurs sur

le potentiel gravitationnel et sur l'énergie cinétique de la station spatiale. D'après le résultat obtenu précédemment par l'équation (3.28), ces deux erreurs s'annulent en partie, ce qui permet de déterminer le potentiel gravitationnel à la station terrestre avec une orbitographie modeste.

En ce qui concerne l'application en physique fondamentale, on considère l'approche phénoménologique introduite par C. Will [9] (voir section 1.3) qui introduit le paramètre α à travers la relation (1.21). Une mesure de ce paramètre est réalisée selon :

$$(1 + \alpha) \frac{1}{c^2} \cdot \left(U(t, \vec{x}_s) - U(t, \vec{x}_g) \right) = \left[\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt} \right] - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{v_s^2(t)}{2} - \frac{v_g^2(t)}{2} \right). \quad (3.33)$$

Dans ce cas, l'erreur sur l'estimation de α est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta \alpha \frac{1}{c^2} \cdot (U(t, \vec{x}_s) - U(t, \vec{x}_g)) &= \delta \left[\frac{d\tau^g}{dt} - \frac{d\tau^s}{dt} \right] - \delta \left(\frac{v_s^2(t)}{2c^2} \right) + \delta \left(\frac{v_g^2(t)}{2c^2} \right) \\ &\quad - \frac{(1 + \alpha)}{c^2} \cdot (\delta U(t, \vec{x}_s) - \delta U(t, \vec{x}_g)), \end{aligned} \quad (3.34)$$

où $(1 + \alpha) \approx 1$.

On suppose que, comme dans l'application géodésique, la position et la vitesse de la station terrestre peuvent être déterminées avec une précision suffisante. On remarque que la même annulation décrite ci-dessus se produit entre le déplacement gravitationnel en fréquence et le terme Doppler du deuxième ordre $v^2/(2c^2)$ de la station spatiale puisque le paramètre α est proche de zéro. Par conséquent, en supposant que le potentiel gravitationnel et la vitesse de la station spatiale peuvent être évalués avec une précision suffisante, il est possible de réaliser ce test du Principe d'Équivalence d'Einstein avec des contraintes modestes sur l'orbitographie de la station spatiale.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la détermination des besoins de la mission ACES concernant l'orbitographie des stations ainsi que l'étalonnage des délais temporels. Une étude préliminaire basée sur un modèle simple a permis de souligner les difficultés de ce travail, d'élaborer des méthodes permettant leur résolution et d'en déduire une combinaison des signaux permettant de réduire grandement les contraintes sur les paramètres.

Ensuite, une étude réaliste a été conduite et a permis la détermination des erreurs maximales admises pour le respect des objectifs de la mission. Plus précisément, les spécifications de la mission impliquent des erreurs radiales de positionnement de la Station Spatiale Internationale inférieures à huit mètres et des erreurs tangentielles et normales inférieures à seize mètres. Les besoins orbitographiques ainsi évalués sont beaucoup moins contraignants que ceux naïvement estimés au mètre, du fait de l'intervention d'une annulation significative.

Compte tenu de la précision des restitutions d'orbites de l'ISS fournies par le CNES, ces besoins orbitographiques devraient être facilement respectés. De plus, les besoins sur l'étalonnage des délais internes ont été déterminés : les erreurs associées doivent être inférieures à la centaine de nanosecondes. Ce chapitre se termine sur l'étude de trois questionnements relatifs au transfert de temps et de fréquence de la mission ACES et leur apporte des réponses précises.

Chapitre 4

L'analyse des données du Lien Micro-Onde

4.1 Le traitement de données de la mission

4.1.1 Le principe

Pour préparer l'analyse de données de la future mission ACES, il faut développer un algorithme permettant d'extraire des mesures brutes du Lien Micro-Onde les informations que l'on recherche. Cependant, la mission n'étant pas encore lancée, aucune donnée expérimentale n'est accessible. Par conséquent, il est nécessaire de développer une simulation des mesures brutes de la mission ACES en tenant compte de l'ensemble des effets perturbateurs pouvant agir sur ces mesures. De cette façon, les mesures simulées du Lien Micro-Onde pourront être traitées par le programme de traitement de données ce qui permettra de vérifier que les produits de l'analyse des données correspondent aux fonctions choisies dans la simulation des observables brutes.

Les deux programmes doivent être développés en essayant de les garder aussi indépendants que possible. Dans ce but, on utilise des langages de programmation différents afin d'éviter des problèmes inhérents à un langage tels que la lecture et l'écriture de données dans des fichiers ou le codage des paramètres. De plus, on essaiera tant que possible, d'utiliser des algorithmes de calcul différents. Cependant, leur conformité est inévitable, tout au moins initialement, pour des questions de vérification du modèle développé.

4.1.2 L'algorithme de traitement de données

Le but premier de l'algorithme de traitement de données est de déterminer précisément un ensemble de variables physiques, les produits scientifiques de la mission, à partir des mesures brutes de la mission (cf. figure 4.1). En effet, on espère pouvoir estimer :

- le Contenu Total en Électrons, variable connue sous le nom de TEC, et notée C_e dans cette thèse,
- la distance instantanée coordonnée entre les deux stations $D(t)$,
- le délai troposphérique Δ^{tropo} ,
- la désynchronisation des horloges $\tau^g - \tau^s$ à un temps coordonné t désiré.

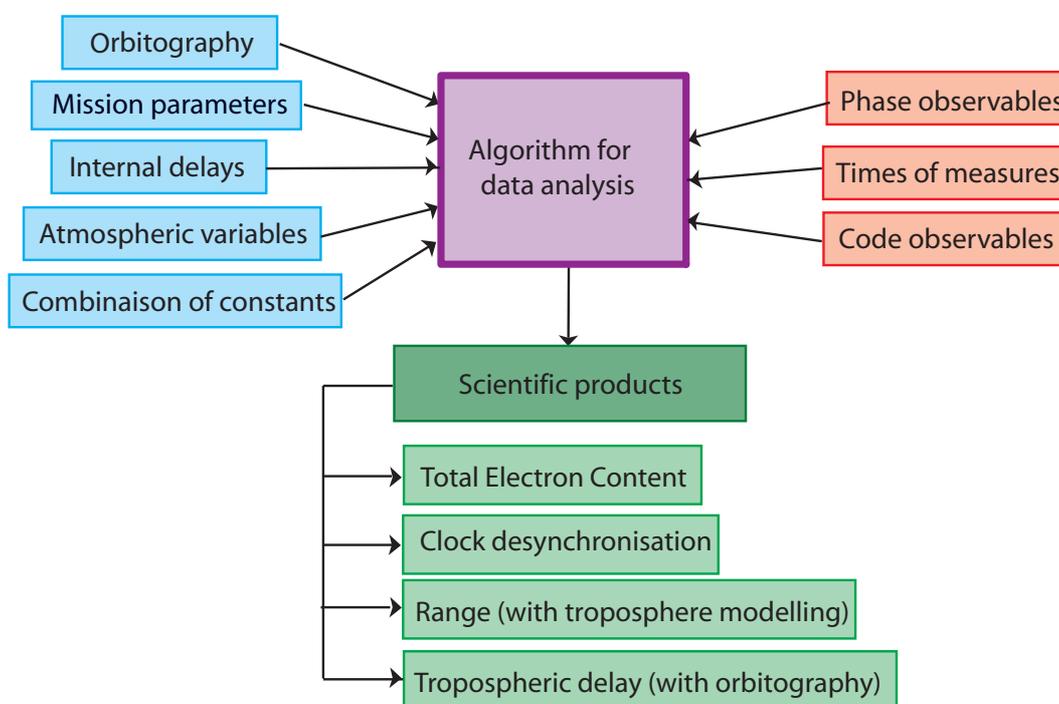


FIG. 4.1 : Principe du programme de traitement de données.

La calcul de ces quatre produits scientifiques est basé sur la combinaison des observables décrites respectivement par les équations (2.54), (2.77) et (2.81). Il nécessite les mesures brutes de code et de phase réalisées pour chaque fréquence. Ces observables sont associées à des temps de mesure donnés dans l'échelle de temps propre locale.

Ces trois équations impliquent des termes que l'on estime à l'aide de l'orbitographie des stations (voir respectivement les équations (2.76), (2.78) et (2.82)).

Ces données orbitographiques sont fournies dans le référentiel géocentrique tournant et en fonction du temps coordonné t (possiblement le Temps Universel Coordonné, UTC). L'une des horloges étant synchronisée avec cette échelle de temps, il est possible de relier l'orbitographie avec les temps de mesure des observables.

De plus, les équations (2.54), (2.77) et (2.81) font intervenir des délais instrumentaux. Leur introduction dans le calcul des produits scientifiques devient nécessaire pour atteindre les performances visées du fait qu'ils ajoutent des biais et du bruit dans les observables.

Enfin, l'algorithme a besoin de différents paramètres tels que certaines constantes du problème (fréquences des signaux, célérité de la lumière, etc ...), certains paramètres atmosphériques ou inhérents à la mission et dépendants de la complexité du modèle de transfert de temps considéré.

L'estimation des termes intervenant dans les équations (2.53), (2.77) et (2.81) dépend de la situation dans laquelle se déroule la mission. Par exemple, l'une des horloges, terrestre ou spatiale, doit être synchronisée avec le temps coordonné t : les deux situations ont donc été étudiées. L'algorithme de calcul doit permettre la restitution des paramètres recherchés pour n'importe quelle situation imaginable. L'utilisateur du logiciel devra tout de même indiquer, par plusieurs questions, la configuration étudiée.

Ensuite, l'algorithme de traitement de données doit aussi faire face à l'ensemble des éléments perturbateurs qui pourraient apparaître durant la mission. Par exemple, les procédures de calcul doivent être stables face à l'ajout de bruit sur les paramètres, ou permettre d'identifier et de traiter automatiquement des mesures inutilisables.

L'algorithme de traitement de données est écrit en *Fortran 90*, un langage assembleur. Il se décompose en plusieurs sous-programmes, appelés sous-routines. Il s'agit en fait d'opérations réalisées un grand nombre de fois durant l'analyse mais dont le code n'est écrit qu'une seule fois dans l'architecture du code : on peut, par exemple, citer un calcul de norme ou de produit scalaire, des opérations d'écriture et de lecture de données, ou d'identification dimensionnelle de fichiers.

4.1.3 La simulation des observables

Cette simulation doit permettre de simuler les mesures brutes du Lien Micro-Onde pour le code et la phase porteuse, et ceci pour les trois fréquences, soit un total de six observables.

Dans ce but, il sera nécessaire de fournir à la simulation un certain nombre de paramètres :

- l'orbitographie de la station sol et spatiale en terme de position, de vitesse et d'accélération projetée sur les trois axes du référentiel tournant et donnée dans une échelle de temps coordonnée indépendante,
- les matrices de rotation permettant le passage des coordonnées du référentiel tournant au repère inertiel non-tournant,
- les relations entre les échelles de temps propres considérées, τ^s et τ^g , et le temps coordonnée t ,
- les valeurs des délais internes en réception et en transmission pour les trois fréquences,
- les valeurs des potentiels gravitationnels pour les stations terrestre et spatiale, $U_g(t, \vec{x})$ et $U_s(t, \vec{x})$,
- la projection du champ magnétique \vec{B} suivant les trois axes du repère non-tournant,
- les paramètres thermodynamiques de l'atmosphère ainsi que les constantes nécessaires pour déterminer le délai troposphérique suivant la formule de Saastamoinen (2.24),
- les constantes telles que les fréquences f_i ou la célérité de la lumière c .

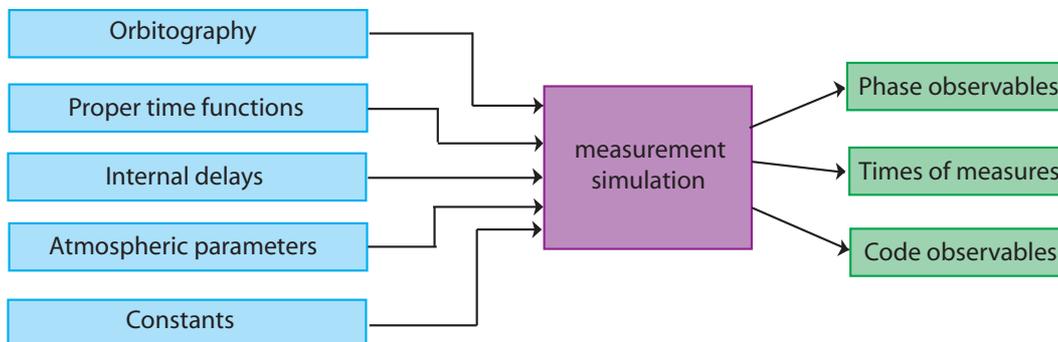


FIG. 4.2 : Principe de la simulation des mesures brutes.

L'évaluation des observables se base sur le modèle de transfert de temps développé au Chapitre 2. Par conséquent, on évalue les trois observables de code selon les formules (2.34), (2.35) et (2.36) ainsi que les trois observables de phase selon des expressions analogues. Une fois que les valeurs théoriques auront été calculées, des perturbations pourront être ajoutées.

Le langage de programmation utilisé pour l'écriture de la simulation des mesures brutes de la mission est un mélange de codages orientés objet, *Matlab* et

C++. La simulation fait appel à plusieurs sous-programmes faisant partie de l'arsenal des outils proposés par le logiciel *Matlab*.

4.2 Le développement simultané des logiciels

Il n'est pas raisonnable de commencer les programmes de traitement de données et de simulation des mesures en considérant tout de suite le modèle complet du transfert de temps, un modèle prenant en compte tous les effets physiques (tels que la gravitation, les effets de la troposphère ou de la ionosphère, ...) et tous les paramètres intervenants dans le problème.

On décide donc de démarrer du cas le plus simple et de compliquer le modèle au fur et à mesure de l'avancée de la simulation, par exemple, en considérant la gravitation, les différents effets atmosphériques et terrestres ou les délais internes. Initialement, on part sur le principe de simuler au minimum les trois observables de code, $\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o))$, $\Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o))$ et $\Delta\tau^g(\tau^g(t_6^o))$, ainsi que les temps coordonnée associés à ces mesures, $\tau^s(t_2^o)$, $\tau^g(t_4^o)$ et $\tau^g(t_6^o)$ à partir de l'orbitographie des stations. L'algorithme d'analyse des données a pour but initial d'extraire la désynchronisation des horloges $\tau^g(t) - \tau^s(t)$ au cours du temps coordonnée t . La complexité de la simulation des mesures brutes du MWL dépendra du réalisme du modèle de transfert de temps considéré et changera lors de la prise en compte de l'ensemble des effets.

4.2.1 Premiers pas

Modèle de départ

La première étape du développement du programme de traitement de données consiste à vérifier les formules, s'il n'y a pas d'inversion de signes ou de coquilles lors de l'écriture des formules et des produits scalaires.

Dans un premier temps, on essaie de se placer dans le cas le plus simple possible. On considère deux stations ayant une orbite circulaire équatoriale et on se place ainsi dans le cas bidimensionnel développé dans le Chapitre 3 afin de simplifier au maximum la première approche. Les positions des stations spatiale et terrestre dans un référentiel géocentrique non-tournant au temps coordonnée t , respectivement $\vec{x}_s(t)$ et $\vec{x}_g(t)$, sont données par :

$$\vec{x}_s(t) = \begin{pmatrix} R_s \cos(\Omega_s \cdot t) \\ R_s \sin(\Omega_s \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\vec{x}_g(t) = \begin{pmatrix} R_g \cos(\Omega_g \cdot t) \\ R_g \sin(\Omega_g \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

avec Ω_s , Ω_g respectivement les vitesses angulaires des stations spatiale et terrestre, R_s et R_g les rayons des trajectoires des stations spatiale et terrestre, et t la variable de temps utilisée.

De plus, on ne considère pour l'instant ni les effets relativistes - il ne faut donc pas prendre en compte les termes correctifs de l'équation (2.54) puisqu'il s'agit de résidus des transformations *temps propre / temps coordonnée* - ni les retards de transmission et de réception des signaux entre l'antenne et l'horloge locale, ni des délais troposphériques. La désynchronisation entre les deux horloges va donc rester nulle durant le passage et s'exprime selon :

$$\tau^g(t_a) - \tau^s(t_a) = \frac{1}{2} \left(\Delta\tau^s(\tau^s(t_2)) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) + T_{12} - T_{34} \right). \quad (4.3)$$

Pour un passage, la variable de temps coordonnée t est identifiée à une suite de nombres entiers naturels successifs de la forme $t = [-N, N]$ où $N = 300$ (cf. Chapitre 3). Puisque pour l'instant on ne prend pas en compte les effets de décalage gravitationnel des horloges, on peut prendre $\tau^s = \tau^g = t$. Ainsi, à chaque seconde du temps coordonnée t , on calcule les trois observables de code - $\Delta\tau^s(t_2)$, $\Delta\tau^g(t_4)$ et $\Delta\tau^g(t_6)$ - des signaux f_1 , f_2 et f_3 au temps de réception des signaux t_2 , t_4 et t_6 . De même, l'orbitographie des deux stations en fonction du temps coordonnée t permet de simplifier le principe de calcul. Pour le calcul des délais ionosphérique, le Contenu Total en Électrons C_e est choisi de valeur assez faible et on suppose que les trois signaux traversent la même densité d'électrons (C_e est identique pour l'ensemble des trois fréquences).

Ainsi dans cette première simulation, les observables s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\tau^s(\tau^s(t_2)) &= -T_{12}(t_2), \\ \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) &= -T_{34}(t_4), \\ \Delta\tau^g(\tau^g(t_6)) &= -T_{56}(t_6), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où les temps de propagation T_{12} , T_{34} et T_{56} sont respectivement donnés par les équations (2.46), (2.50) et (2.51) avec les simplifications précisées ci-dessus.

Le TEC doit être déterminé par la combinaison des signaux de fréquence f_2 et f_3 . Les deux observables que l'on combine sont mesurées au même temps coordonnée par l'équation (2.79) où $T_{46} = t_6 - t_4$ est alors égal à zéro.

La mesure de la désynchronisation des horloges passe par l'évaluation du terme $T_{12} - T_{34}$ donné par l'équation (2.76) mais pour laquelle, selon les simplifications réalisées, le champ magnétique et les délais troposphériques sont mis à valeur nulle. De même que pour l'intervalle de temps coordonnée T_{46} , la valeur du paramètre T_{23} intervenant dans l'équation (2.76) est fixée par le fait que l'on combine des mesure effectuées au même temps coordonnée ($t = t_2 = t_4 = t_6$). L'intervalle de temps coordonnée T_{23} s'exprime selon :

$$T_{23} = t_3 - t_2 = t_3 - t_4 + t_4 - t_2 = -T_{34} = \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)). \quad (4.5)$$

Une fois les observables simulées, l'algorithme les analyse pour en sortir la désynchronisation des horloges. Le résultat de ce calcul est tracé sur la figure 4.3.

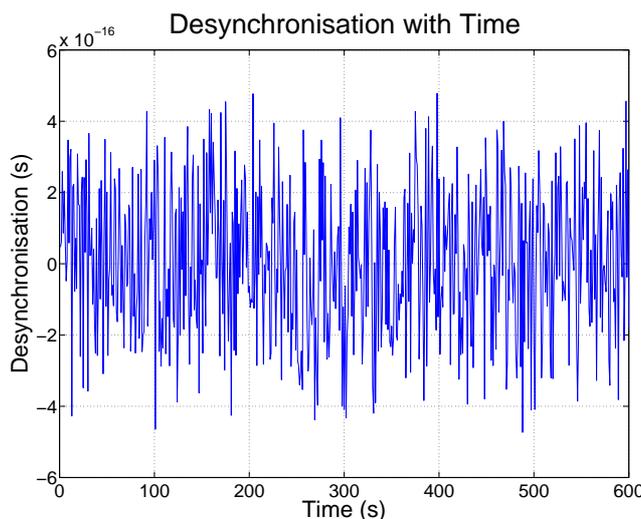


FIG. 4.3 : Incertitude numérique agissant sur la désynchronisation.

Il s'agit de bruit blanc de phase d'amplitude $5 \cdot 10^{-16}$ (dont la variance d'Allan montre effectivement la pente correspondante) provenant de l'incertitude numérique du compilateur. En effet, le codage numérique des paramètres limite leur précision relative à quelques 10^{-16} . L'amplitude de bruit est négligeable comparativement aux spécifications de la mission. De plus, le résultat obtenu correspond bien aux attentes puisqu'en absence d'effets relativistes, la désynchronisation reste nulle. L'utilisation de variables à précision quadruple permettrait de diminuer grandement cette limite fixée arbitrairement à 10^{-16} s.

Une désynchronisation constante

On rajoute à présent une désynchronisation constante x entre les horloges. D'après les équations (2.34), (2.35) et (2.36), les expressions des observables des trois signaux deviennent donc :

$$\begin{aligned}\Delta\tau^s(\tau^s(t_2)) &= Des - T_{12}(t_2), \\ \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) &= -Des - T_{34}(t_4), \\ \Delta\tau^g(\tau^g(t_6)) &= -Des - T_{56}(t_6),\end{aligned}\tag{4.6}$$

avec $\tau_s = t - Des$ et $\tau_g = t$.

Si, par exemple, on essaie avec une désynchronisation entre les horloges $Des = 10^{-7}$ s, on retrouve effectivement la valeur attendue mais on ne connaît pas l'incertitude sur ce calcul.

C'est pourquoi, on considère une nouvelle variable correspondant à la désynchronisation théorique "à trouver", valeur que l'on a indiquée initialement à la simulation d'observables. On étudiera, à partir de maintenant, les "résidus" des produits scientifiques, c'est-à-dire les valeurs calculées par le programme auxquelles on soustrait leur valeur théorique. Dans le cas précédent, le résidu sur la désynchronisation des horloges atteint le bruit numérique tel que celui montré sur la figure 4.3.

Les autres cas

La formule de $T_{12} - T_{34}$ donnée par l'équation (2.76) a été développée en fonction du paramètre T_{23} . Mais elle peut aussi s'exprimer en fonction de la variable T_{14} au lieu de la variable T_{23} selon l'équation (2.71). On développe donc un calcul de la désynchronisation dans le cas où l'on décide d'imposer la valeur du paramètre T_{14} . Cela permettra, à partir de mêmes mesures, de calculer de deux manières différentes les produits scientifiques de la mission, et surtout de réaliser des vérifications croisées concernant les délais internes. En effet, la maîtrise de l'intervalle T_{23} s'appuie sur la connaissance des délais internes de réception et d'émission des signaux à la station spatiale, alors que le paramètre T_{14} concerne les délais instrumentaux à la station sol. Les deux mesures de désynchronisation menant théoriquement au même résultat, il est ainsi possible de vérifier la calibration des délais internes par comparaison croisée.

Dans le cas présent, les égalités $\tau^s = t = \tau^g$ continuent à être vérifiées. Ainsi la valeur du temps coordonnée t_1 est reliée au temps t_4 par :

$$T_{14} = t_4 - t_1 = t_2 - t_1 = T_{12}. \quad (4.7)$$

Les deux cas étudiés précédemment présupposent la synchronisation de l'horloge terrestre avec l'échelle de temps coordonnée t . Dans le cas où les horloges spatiales sont synchronisées avec le temps coordonnée, il faut que les termes orbitographiques apparaissant dans l'expression de $T_{12} - T_{34}$ soient exprimés à un temps lié à un événement de réception à la station spatiale : t_2 , le temps coordonnée de réception du signal de fréquence f_1 . L'expression correspondante de cette différence de temps de propagation est déterminée dans l'annexe B en fonction de l'intervalle temporel T_{23} ou du paramètre T_{14} .

Par conséquent, il existe quatre options, selon que l'on choisisse de contrôler la combinaison des observables selon T_{23} ou T_{14} , et selon l'horloge supposée synchronisée à le temps coordonnée. On développe les quatre simulations d'observables pour chacun des cas énoncés ainsi que les quatre routines réalisant le traitement de données. Lors de l'utilisation de l'algorithme, l'utilisateur doit préciser dans quelle situation les données qu'il analyse se placent.

L'ensemble des procédures est testé et montre des erreurs sur la désynchronisation limitées par la précision numérique. Cependant les formules de $T_{12} - T_{34}$ n'ont été éprouvées que pour une seule valeur de T_{23} ou de T_{14} .

4.2.2 Une routine d'interpolation

Les mesures brutes du Lien Micro-Onde seront réalisées toutes les secondes pour les trois fréquences. Or, on désire choisir l'intervalle de temps s'écoulant entre la réception des signaux de fréquence f_1 et f_2 , ce qui revient à contrôler l'intervalle de temps coordonnée T_{23} (ou T_{14}) et à "décaler" la valeur de l'une observable par rapport à l'autre. A travers le Chapitre 3, il a été démontré que le choix d'une valeur nulle¹ pour le paramètre T_{23} permettait de réduire les contraintes sur les erreurs orbitographiques. Ce contrôle nécessite la programmation d'une subroutine d'interpolation afin d'avoir la possibilité de calculer la valeur d'une variable à un temps donné et plus particulièrement de "décaler" temporellement une observable.

Principe

La routine d'interpolation utilisée dans le programme se base sur une décomposition des fonctions sur la base des polynômes de Lagrange. Si l'on choisit d'utiliser une interpolation d'ordre n , alors le calcul de la valeur de la fonction f

¹En réalité, la région asymptotique est atteinte pour $T_{23} < 10^{-6}$ s (cf. Chapitre 3).

en x peut s'exprimer à l'aide d'un ensemble de valeurs $f(\{x_i\})$ de cette fonction en $\{x_i\}$ [91]. En effet, l'expression des polynômes de Lagrange, donnée par :

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (4.8)$$

permet d'exprimer la valeur de f en x selon :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot L_i(x). \quad (4.9)$$

Test de la routine d'interpolation

Mais à quel ordre n faut-il développer ces polynômes de Lagrange dans le cadre de la mission ACES ?

Pour déterminer ce degré polynômial, on étudie l'amplitude de l'erreur réalisée par l'interpolation. Cette erreur peut être approximée par le terme négligé lors d'un développement en série. Par exemple, si on considère une interpolation d'ordre 2, alors on néglige un terme proportionnel à la dérivée seconde de la fonction considérée.

Le développement en série de la fonction f en $x + \Delta T$ est donné par :

$$f(x + \Delta T) = \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \Delta T^i. \quad (4.10)$$

L'étude de la variation du temps de propagation géométrique entre les stations (terme dominant des observables) et de ses dérivées permet d'évaluer l'amplitude maximale atteinte lors d'un passage par les différents ordres du développement en série. Le cas le plus difficile consiste à décaler l'observable d'une demi-seconde entre deux mesures ($\Delta T = 0.5$ s). Les résultats correspondants et reportés dans le tableau 4.1 indiquent que pour que tout terme résiduel provenant de l'interpolation soit négligeable devant les quelques dixièmes de picosecondes imposées par les spécifications, il faut que le degré de l'interpolation soit supérieur ou égal à cinq.

TAB. 4.1 : Amplitudes maximales atteintes lors d'un passage des termes du développement en série des observables du MWL.

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{f^{(n)}}{n!} \Delta T^n$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$7.5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{-17}$

L'ordre d'interpolation est choisi à sept, d'une part pour éviter des termes résiduels dans cette phase de création et de débogage de l'algorithme et, d'autre part,

pour des raisons de symétrie autour du point le plus proche de la valeur convoitée. On vérifie l'exactitude de la routine d'interpolation programmée en calculant des observables à $t = t_o + \Delta T$ que l'on compare à l'interpolation de la même observable calculée à t_o et décalée de ΔT . Les résultats sont très satisfaisants puisque l'on atteint l'erreur numérique de l'ordre de quelques 10^{-16} . On interpole par exemple les données afin d'obtenir $T_{23} = 0$ avec le cas où $\tau_g = \tau_s = t$ ou dans le cas $\tau_s = t - 0.25$ et $\tau_g = t - 0.1$. On regarde aussi pour différentes valeurs de ΔT (choisies inférieures ou égales à 1 s), et dans tous ces cas, l'interpolation donne des résultats non-biaisés.

Les résultats du tableau 4.1 ont permis d'étudier l'exactitude de l'interpolation en fonction de son degré polynômial. Mais il ne faut pas oublier que les observables sont bruitées et que cette erreur ne doit pas dépasser les spécifications de la mission données par les équations (2.1) et (2.2). La résistance de la procédure d'interpolation au bruit est testée pour différents degrés du polynôme interpolateur. Pour cela, on considère un bruit blanc d'écart type $5.2 \cdot 10^{-12}$ s sur l'une des observables (erreur de l'ordre du bruit de mesure attendu sur les signaux de fréquence f_1 et f_2). Après interpolation, on compare la valeur de l'observable obtenue par interpolation avec sa valeur théorique au temps considéré. En réalisant ce processus un grand nombre de fois, on étudie la variance de l'erreur sur l'interpolation en fonction du degré du polynôme interpolateur utilisé.

Si on suppose que les horloges sont préalablement synchronisées à mieux que 0.5 ms (période de répétition du code sur les signaux de la bande Ku), alors l'écart type de l'erreur résultante ne connaît qu'une variation infime en fonction du degré de l'interpolation. Par conséquent, l'interpolation des observables bruitées du Lien Micro-Onde à l'aide des polynômes de Lagrange ne devrait pas induire de termes supérieurs aux spécifications de la mission.

Ajout au programme

Ajoutée au programme de traitement de données, l'interpolation permet de combiner les signaux selon notre volonté. Imposer par exemple la condition $t_2 = t_3$ peut être réalisé de deux manières : soit en interpolant la valeur de l'observable de f_1 tel que son temps d'arrivée corresponde à t_3 , soit en déplaçant l'observable de f_2 de telle manière que son temps coordonné d'émission soit égal à t_2 (voir figure 4.4). La première méthode semble beaucoup plus aisée que la seconde puisqu'elle nécessite uniquement une interpolation simple. L'autre au contraire, a besoin de décaler le temps d'émission de l'observable alors que seul le temps de mesure est directement accessible.

Le décalage des mesures du Lien Micro-Onde n'est pas limité à la condition

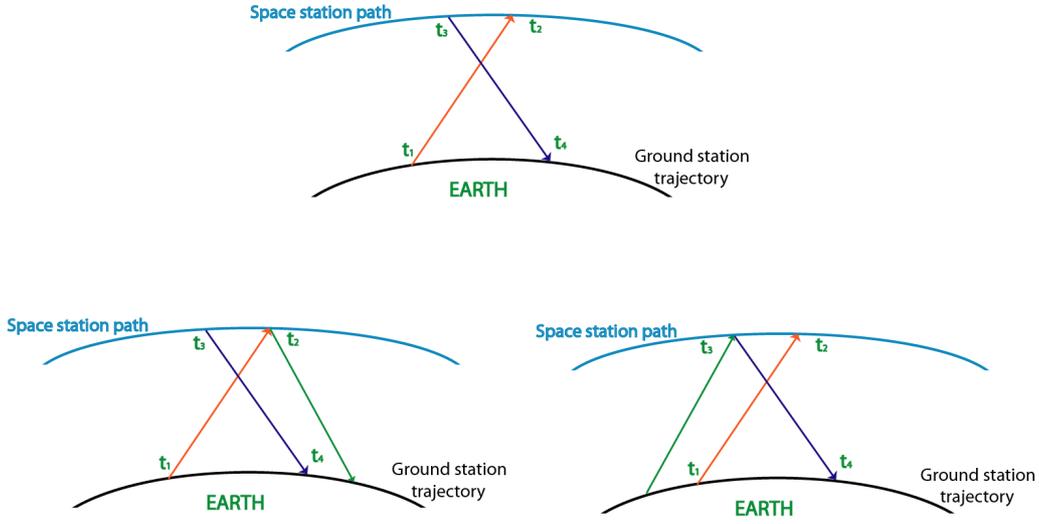


FIG. 4.4 : Pour parvenir à combiner les signaux de fréquence f_1 et f_2 tel que $T_{23} = 0$ s, il existe deux solutions.

$t_2 = t_3$ mais peut être réalisé pour n'importe quelle valeur de T_{23} . Le décalage de l'observable provenant de la fréquence f_1 nécessite le calcul préliminaire des nouveaux temps propres de l'échelle spatiale $\tau^s(t_2)$ pour lesquels on calculera les valeurs de l'observable. La valeur du temps propre $\tau^s(t_2)$ doit être donnée en fonction du temps propre $\tau^g(t_4)$ avec lequel on le combine, ainsi que de la valeur de l'observable de la fréquence f_2 mesurée en $\tau^g(t_4)$:

$$\tau^s(t_2) = \tau^s(t_2) - \tau^s(t_3) + \tau^s(t_3) - \tau^s(t_4) + \tau^s(t_4) - \tau^g(t_4) + \tau^g(t_4), \quad (4.11)$$

soit, en combinant les temps propres par paires :

$$\tau^s(t_2) = -[T_{23}]^s - [T_{34}]^s - Des(t_4) + \tau^g(t_4). \quad (4.12)$$

Pour une valeur de T_{23} donnée, les temps propres auxquels il faut calculer la nouvelle valeur de mesure brute de f_1 vérifient :

$$\tau^s(t_2) = \tau^g(t_4) + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) - [T_{23}]^s. \quad (4.13)$$

Pour l'autre méthode de contrôle proposée ci-dessus, l'observable de fréquence f_2 a besoin d'être connue aux temps $\tau^g(t_4)$ vérifiant :

$$\tau^g(t_4) = \tau^s(t_2) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) + [T_{23}]^s. \quad (4.14)$$

L'intuition de difficulté de la seconde méthode intervient à travers l'équation (4.14) : le temps propre auquel il faut interpoler l'observable dépend de la valeur de l'observable à ce même temps propre. Pour contourner cette difficulté, on procède par itération : le temps $\tau^g(t_4)$ associé à l'observable de fréquence f_2 est déterminé à l'aide de l'observable brute $\Delta\tau^g(\tau^g(t_4))$. A l'aide de ce nouveau temps $\tau^g(t_4)$, on interpole les données afin d'évaluer la valeur de l'observable de fréquence f_2 à ce temps propre suivant l'équation :

$$\tau^g(t_4)_{i+1} = \tau^s(t_2) + [T_{23}]^s - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)_i). \quad (4.15)$$

Par convergence de l'équation (4.15), on obtient le temps de mesure $\tau^g(t_4)$ et l'observable associée $\Delta\tau^g(\tau^g(t_4))$. La combinaison de ces deux méthodes permettra de vérifier si on obtient le même résultat quelle que soit la mesure brute que l'on décale.

De nombreux tests sont conduits avec différentes valeurs de T_{23} et montrent des résultats atteignant l'incertitude de calcul de l'ordinateur (équivalent au résultat de la figure 4.3). Cependant, il faut garder à l'esprit le fait que le calcul de $T_{12} - T_{34}$ est développé pour des valeurs de T_{23} faibles puisque l'on a fait l'hypothèse $T_{23} < 10^{-3}$ s lors de l'écriture de l'équation (2.76). C'est pourquoi l'annulation ne sera pas parfaite si l'on considère des valeurs de T_{23} trop grandes et le résidu sur la valeur de la désynchronisation deviendra alors non nul.

De plus, l'interpolation est aussi implémentée dans le cas où l'on combine les signaux en choisissant la valeur de T_{14} ou lorsque l'horloge spatiale est supposée synchronisée avec l'UTC. L'étude de ces cas conduisent à des désynchronisations ne présentant aucun terme résiduel sur le passage considéré.

Point sur l'analyse de données

En résumé, l'algorithme de traitement de données offre plusieurs possibilités à l'utilisateur. Tout d'abord, ce programme permet le calcul des produits scientifiques lorsque l'horloge terrestre ou l'horloge spatiale est supposée synchronisée avec le temps coordonnée. Ensuite, elle offre la possibilité de maîtriser la combinaison des observables selon l'un des deux paramètres temporels T_{23} ou T_{14} . Enfin, pour une situation choisie, elle conduit à l'évaluation des produits scientifiques de deux manières distinctes (en décalant l'observable du signal ascendant ou du signal descendant). Ces trois options conduisent, au final, à huit possibilités, et par conséquent, à huit routines de calcul distinctes basées sur des équations différentes. La cohérence des résultats permettra de tester, entre autres, la fiabilité des calibrations des délais internes à la station terrestre et à la station spatiale.

Ces premiers tests montrent des résultats encourageants et permettent de vérifier qu'aucun terme n'a été oublié lors de développements limités ni dans des expressions des temps de propagation (équations (2.46), (2.50) et (2.51)) ni dans leurs différences, nécessaires à l'estimation des produits scientifiques et données par les équations (2.76) et (2.78).

4.2.3 Amélioration du modèle

La gravitation

Prendre en compte les effets de la gravitation implique deux changements importants dans la simulation des mesures brutes et l'algorithme de traitement de données.

D'une part, on considère dorénavant le retard Shapiro [10] donné par l'équation (2.31) dans les expressions des délais de propagation des trois signaux (formules (2.46), (2.50) et (2.51)). Celui-ci intervient lors de la simulation des observables brutes du Lien Micro-Onde et s'annule pour le calcul des différences $T_{12} - T_{34}$ et $T_{34} - T_{56}$ selon les équations (2.76) et (2.78) lors de l'analyse des données. Le retard Shapiro ne fait pas partie des produits scientifiques de la mission de fait de sa faible amplitude. En effet, son estimation reste indissociable de celle de la distance instantanée et du délai troposphérique, et la précision des modèles orbitographique et troposphérique n'autorise pas son extraction.

D'autre part, le déplacement relativiste des horloges rentre, à présent, en ligne de compte. Les échelles de temps propre τ^s et τ^g se décalent à présent de l'échelle de temps coordonnée t . Puisque les trajectoires de stations sont supposées circulaires, leur vitesse et leur potentiel gravitationnel restent constants. D'après l'équation (1.11), elles évoluent, au premier ordre, linéairement par rapport au temps coordonnée et s'expriment donc selon :

$$\begin{aligned} \tau_s &= FactorS \cdot t \\ \text{et} & \\ \tau_g &= FactorG \cdot t. \end{aligned} \tag{4.16}$$

où les deux coefficients $FactorS$ et $FactorG$ sont constants et donnés par :

$$\begin{aligned}
 FactorG &= 1 - \left(\frac{U(t, \vec{x}_g)}{c^2} + \frac{v_g^2(t)}{2c^2} \right) \\
 \text{et} & \\
 FactorS &= 1 - \left(\frac{U(t, \vec{x}_s)}{c^2} + \frac{v_s^2(t)}{2c^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Dans ce cas, il faut rajouter les transformations *temps propre / temps coordonnée* (les applications $[\cdot]^g$ et $[\cdot]^s$ données les équations (1.12) et (1.13)). Dans ce cas, les expressions des observables de code des trois signaux deviennent :

$$\begin{aligned}
 \Delta\tau^s(\tau^s(t_2)) &= Des(t_2) - [T_{12}(t_2)]^g, \\
 \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) &= -Des(t_4) - [T_{34}(t_4)]^s, \\
 \Delta\tau^g(\tau^g(t_6)) &= -Des(t_6) - [T_{56}(t_6)]^s.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ces observables sont simulées avec un taux d'échantillonnage de 1 Hz dans les échelles locales de temps propre.

Avec ces hypothèses, on cherche à évaluer la désynchronisation des horloges selon l'équation (2.54) tout en interpolant les données pour obtenir $T_{23} = 0$. Le résultat obtenu montre un résidu non-nul sur la désynchronisation, c'est-à-dire une différence entre la désynchronisation calculée par l'algorithme et la désynchronisation théorique. De plus, on remarque que cette erreur sur la désynchronisation correspond exactement aux termes intégrales de l'équation (2.54).

En effet, du fait que l'égalité $\tau^s = \tau^g$ n'est plus vérifiée pour tout temps coordonnée, la valeur de la désynchronisation théorique à laquelle on compare les résultats finals doit être précisément calculée en $t_a = \frac{t_2+t_4}{2}$. Ici on doit considérer $t_a = t_4 - \frac{T_{34}}{2}$. En calculant la désynchronisation théorique en t_4 , on négligeait un terme de l'ordre de $(FactorG - FactorS) \cdot \frac{T_{34}}{2}$ ce qui s'apparente aux corrections relativistes de l'équation (2.54). Ce problème n'apparaissait pas dans les études précédentes puisqu'on ne considérait que des désynchronisations nulles ou constantes.

Il faut donc faire attention au temps auquel doivent être calculées les valeurs théoriques des produits scientifiques. Dans le cas général, le temps moyen t_a peut être estimé par les équations :

$$t_a = t_4 + \frac{1}{2} \cdot (-T_{23} - T_{34}), \quad (4.19)$$

$$t_a = t_2 + \frac{1}{2} \cdot (T_{23} + T_{34}), \quad (4.20)$$

selon le fait que l'on décale l'observable provenant du signal de fréquence f_1 ou f_2 .

En effet, lorsqu'on décale l'observable de fréquence f_1 , la valeur du temps coordonnée t_2 est changée contrairement à la variable t_4 : dans ce cas, on utilisera la formule (4.19). Lorsqu'on interpole la valeur de l'observable f_2 , on déterminera la désynchronisation théorique à l'aide de l'équation (4.20).

L'atmosphère

Deux changements importants concernant les délais atmosphériques sont effectués dans la simulation des mesures brutes et dans l'algorithme de traitement de données, l'un concernant le délai ionosphérique, l'autre le délai troposphérique.

Pour le retard ionosphérique, on change la modélisation de l'ionosphère afin d'avoir des valeurs du TEC qui varient avec le temps. On suppose que l'ionosphère possède une densité d'électrons N_e constante entre 50 km et la station spatiale. Ce modèle ionosphérique permet de simplifier grandement sa simulation en remplaçant le modèle en couches de Chapman (équation (2.17)), évitant ainsi de lourdes procédures de calcul et donnant des délais ionosphériques du même ordre de grandeur. La valeur de N_e peut être choisie de manière à obtenir les mêmes ordres de grandeurs que ceux obtenus dans la partie 2.2.1 (cf. figure 2.6).

Concernant le délai troposphérique, le modèle de Saastamoinen donné par l'équation (2.24) permet d'évaluer ce retard atmosphérique. Ce modèle de délai troposphérique nécessite la considération de l'élévation χ de la station spatiale qui varie durant son passage.

Cependant, l'introduction de ces modèles dans la simulation induit un résidu non nul sur la désynchronisation des horloges (voir figure 4.5). De manière identique, lorsque la valeur de la densité électronique N_e est importante, la désynchronisation obtenue par l'algorithme ne correspond pas parfaitement à sa valeur théorique (cf. figure 4.5).

L'erreur découlant du délai troposphérique provient d'une des hypothèses initiales. Celle-ci supposait que le délai troposphérique restait constant et que l'on

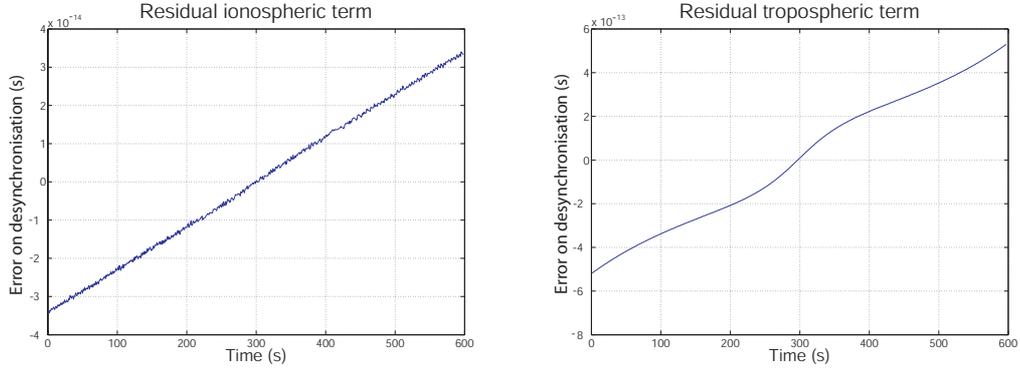


FIG. 4.5 : Termes supplémentaires des délais ionosphérique (figure de gauche) et troposphérique (figure de droite) provenant respectivement des équations (4.24) et (4.22).

avait $\Delta^{tropo}(t_2) = \Delta^{tropo}(t_4)$. En réalité, ces deux retards sont plutôt reliés par l'équation :

$$\Delta^{tropo}(t_2) = \Delta^{tropo}(t_4) - \frac{d\Delta^{tropo}}{dt}(t_4) \cdot T_{24}, \quad (4.21)$$

ce qui produit une erreur δDet sur la valeur de la désynchronisation donnée par :

$$\delta Det = -\frac{1}{2} \frac{d\Delta^{tropo}}{dt}(t_4) \cdot T_{24}. \quad (4.22)$$

De même, quand la valeur de N_e est assez grande, un terme perturbateur apparaît sur la désynchronisation. Il provient d'une hypothèse réalisée pour le calcul de $T_{12} - T_{34}$ assurant que les signaux de fréquence f_1 et f_2 traversaient la même couche ionosphérique. En fait, les densités électroniques $C_e(t_2)$ et $C_e(t_4)$ traversées par les signaux de fréquence f_1 et f_2 sont liées par l'équation suivante :

$$C_e(t_2) = C_e(t_4) - \frac{dC_e}{dt}(t_4) \cdot T_{24}, \quad (4.23)$$

ce qui donne un terme supplémentaire sur la désynchronisation :

$$\delta Det = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_1^2} \frac{dC_e}{dt}(t_4) \cdot T_{24} \cdot \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} \simeq 3 \cdot 10^{-14} \text{ s}. \quad (4.24)$$

On comprend, à présent, pourquoi ce terme n'intervenait pas quand le Contenu Total en Électrons était supposé constant ou quand la densité électronique N_e était choisie trop faible.

Si on calcule les variances de ces résidus troposphérique ou ionosphérique, elles restent un ordre de grandeur en dessous des spécifications (voir figure 4.6). On peut aussi remarquer qu'elles débutent à $5 \cdot 10^{-16}$ s à $\tau = 1$ car, aux petits temps d'intégration, elles sont dirigées par le bruit blanc de phase d'écart type $5 \cdot 10^{-16}$ s provenant de l'erreur numérique.

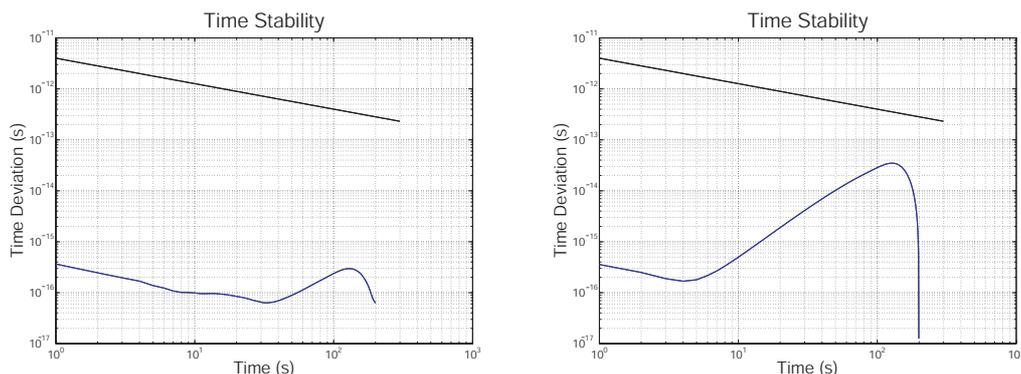


FIG. 4.6 : Écarts types d'Allan des termes supplémentaires provenant des délais ionosphérique (figure de gauche) et troposphérique (figure de droite) comparés aux spécifications du MWL.

On profite de la mise en évidence de cet effet pour augmenter le nombre de produits scientifiques extraits de l'algorithme. Le Contenu Total en Électrons C_e est, à présent, déterminé à partir des observables de code et comparé à sa valeur théorique datée à la réception du signal de fréquence f_2 , i. e. au temps coordonné t_4 . La somme du délai troposphérique et de la distance instantanée (divisée par la célérité de la lumière) sont aussi évalués au temps coordonné t_4 à l'aide de la somme des observables des signaux de fréquence f_1 et f_2 . A partir de l'orbitographie des stations ou d'un modèle atmosphérique, on estime l'un des deux produits scientifiques en supposant l'autre connu selon les équations (2.83) et (2.84).

Les délais internes

On rajoute les délais internes dans les expressions des observables ainsi que dans la procédure du calcul algorithmique. Tous les délais internes sont pris positifs, dépendants du temps et à un temps d'échantillonnage de 1 Hz.

L'expression d'un délai interne $\Delta_{X_i}^A$ dépend de trois paramètres (cf. 2.2.3) :

- le paramètre X correspond à la nature du délai qu'il soit en transmission (T) ou en réception (R),
- l'entier $i = 1, 2$ ou 3 est à rapprocher de l'indice de la fréquence étudiée,
- et enfin le paramètre A qui indique si le délai interne est une mesure de temps propre dans l'échelle de temps terrestre (g) ou spatiale (s).

Les délais internes peuvent être rapprochés des temps coordonnée caractéristiques du Lien Micro-Onde définis dans la partie 2.3.1 et schématisés sur la figure 4.7.

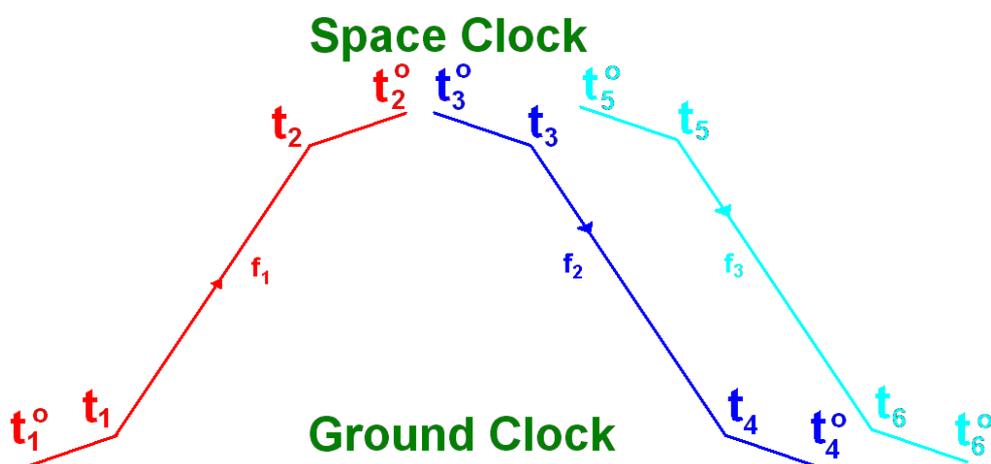


FIG. 4.7 : Schéma rappelant les définitions des temps coordonnée caractéristiques du Lien Micro-Onde.

En effet, on peut définir les délais internes en fonction d'intervalles de temps coordonnée et des transformations définies précédemment selon les équations (1.12) et (1.13). Par exemple, le délai interne en transmission du signal f_1 s'écrit $\Delta_{T1}^g = [t_1 - t_1^o]^g$, et le délai en réception du même signal est donné par $\Delta_{R1}^s = [t_2^o - t_2]^s$.

L'introduction des délais internes nous oblige à changer quelques détails dans le calcul des observables ou dans le principe de résolution du programme de traitement de données. Par exemple, la différence de temps d'arrivée des signaux de fréquences f_2 et f_3 que l'on va obtenir va être T_{46}^o , et non plus T_{46} . Les interpolations des observables ne se font plus par rapport au temps de réception ou de transmission aux antennes, mais par rapport à ceux liés aux horloges.

Il est nécessaire de calculer les valeurs des nouveaux paramètres temporels du modèle en fonction des anciens. Dans ce but, on définit l'intervalle de temps T_{ij}^o par : $T_{ij}^o = t_j^o - t_i^o$. On obtient alors :

$$T_{23} = t_3 - t_2 = t_3 - t_3^o + t_3^o - t_2^o + t_2^o - t_2 = [\Delta_{T2}^s]^t + T_{23}^o + [\Delta_{R1}^s]^t,$$

$$T_{14} = t_4 - t_1 = t_4 - t_4^o + t_4^o - t_1^o + t_1^o - t_1 = -[\Delta_{R2}^g]^t + T_{14}^o - [\Delta_{T1}^g]^t, \quad (4.25)$$

$$T_{46} = t_6 - t_4 = t_6 - t_6^o + t_6^o - t_4^o + t_4^o - t_4 = -[\Delta_{R3}^g]^t + T_{46}^o + [\Delta_{R2}^g]^t.$$

Les observables des trois signaux s'expriment conformément aux équations (2.34), (2.35) et (2.36). Les observables sont datées en $\tau_s = FactorS \cdot t + \Delta_{R1}$ et $\tau_g = FactorG \cdot t + \Delta_{R2}$.

Dans le cas où l'observable provenant de la fréquence f_1 est décalée, son temps de mesure $\tau^s(t_2^o)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \tau^s(t_2^o) = & \tau^s(t_2^o) - \tau^s(t_3^o) + \tau^s(t_3^o) - \tau^s(t_3) + \tau^s(t_3) - \tau^s(t_4) + \tau^s(t_4) \\ & - \tau^s(t_4^o) + \tau^s(t_4^o) - \tau^s(t_4^o) + \tau^s(t_4^o), \end{aligned} \quad (4.26)$$

soit :

$$\tau^s(t_2^o) = -[T_{23}^o]^s - \Delta_{T2}^s - [T_{34}]^s - [[\Delta_{R2}^g]^t]^s - Des(t_4^o) + \tau^g(t_4^o). \quad (4.27)$$

Par conséquent, l'équation (4.13) devient :

$$\tau^s(t_2^o) = \tau^g(t_4^o) + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) - [T_{23}^o]^s. \quad (4.28)$$

L'ajustement de l'observable de fréquence f_2 par itérations successives est réalisé à travers l'équation suivante :

$$\tau^g(t_4^o)_{i+1} = \tau^s(t_2^o) + [T_{23}^o]^s - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)_i). \quad (4.29)$$

De même, la désynchronisation théorique - qui doit être calculée en $t_a = \frac{t_2^o + t_4^o}{2}$ - s'exprime en fonction des délais internes. L'équation (4.19) devient :

$$t_a = t_4^o + \frac{1}{2} \cdot \left(-T_{23} - T_{34} + [\Delta_{R1}^s - \Delta_{R2}^g]^t \right) \approx t_4^o + \frac{1}{2} \cdot \left(-T_{23}^o + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) \right), \quad (4.30)$$

et, de manière similaire, l'équation (4.20) se transforme en :

$$t_a = t_2^o + \frac{1}{2} \cdot \left(T_{23} + T_{34} - [\Delta_{R1}^s - \Delta_{R2}^g]^t \right) \approx t_2^o + \frac{1}{2} \cdot \left(T_{23}^o - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) \right). \quad (4.31)$$

Les approximations réalisées dans les équations (4.31) et (4.30) correspondent à négliger un terme inférieur à $5 \cdot 10^{-19}$ en fréquence relative, soit aux termes en $(\frac{U}{c})^2$ négligés en section 1.1.5.

L'orbitographie

On essaie de se débarrasser du modèle bidimensionnel donné selon les équations (4.1) et (4.2) en considérant les éphémérides de la Station Spatiale Internationale déjà utilisées lors de la détermination des besoins de la mission dans le Chapitre 3. Ces données orbitographiques de la station spatiale sont données avec un pas d'échantillonnage d'une minute. On interpole ces données à un point par seconde à l'aide d'une routine de *Matlab*. Les observables sont alors simulées à partir des équations (2.34), (2.35) et (2.36) puis analysées par le programme de traitement de données.

Cependant, quelle que soit la valeur de T_{23} que l'on choisit pour la combinaison des observables, on obtient des oscillations comme résidu. Si l'on impose une densité électrique N_e très faible et un effet atmosphérique nul, il reste alors un terme périodique à une minute et d'amplitude $6 \cdot 10^{-14}$ s. Sur la figure 4.8 sont représentés les résidus sur la désynchronisation dans le cas théorique où la troposphère n'a aucun effet sur la propagation du signal et dans le cas où elle intervient.

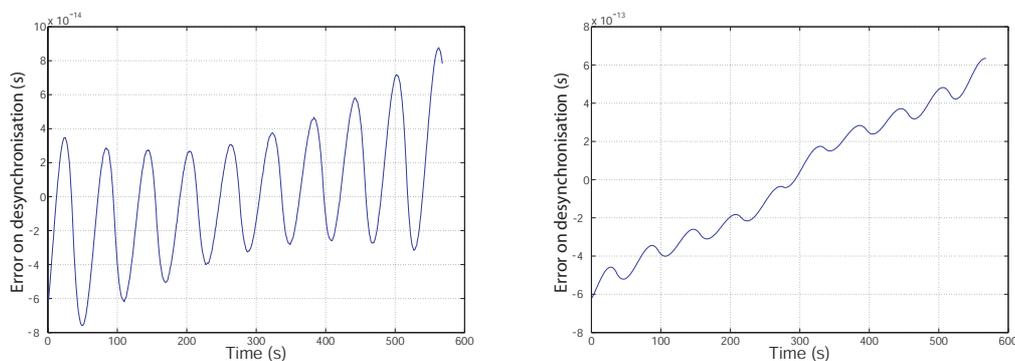


FIG. 4.8 : Oscillations apparaissant lors de l'interpolation $T_{23} = 0$ s et en considérant uniquement le délai ionosphérique (figure de gauche) ou les délais ionosphérique et troposphérique simultanément (figure de droite) avec $N_e = 200 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$

Si l'on considère l'ensemble des effets atmosphériques, alors le résidu de la désynchronisation correspond à la somme des termes cités précédemment et des oscillations. Ce terme périodique reste tout de même largement dominé par la dérivée du terme troposphérique (équation (4.22)). Ce terme résiduel a une stabilité

temporelle d'Allan calculée sur la figure 4.9. La première bosse correspond aux oscillations que l'on observe lors de l'interpolation (maximum vers la trentaine de secondes). La seconde bosse est due au terme troposphérique, fonction paire par rapport à l'atteinte du zénith par la station spatiale et qui donne un terme périodique à la demi-durée du passage. Cependant même si la variance reste en-dessous des spécifications du lien, on veut connaître la provenance d'un tel effet et savoir comment il peut être limité.

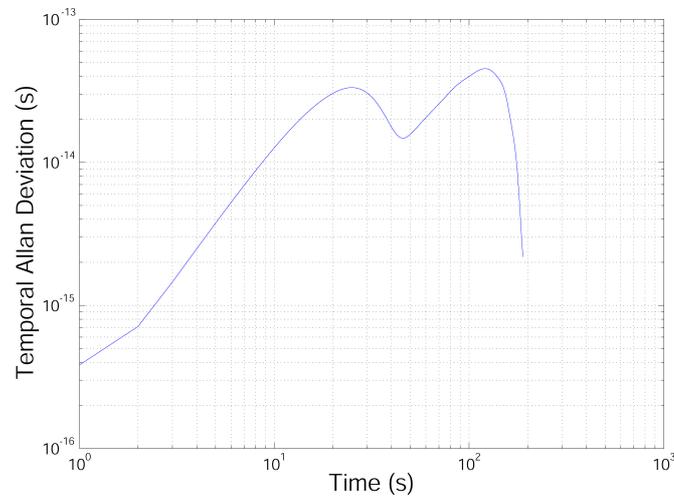


FIG. 4.9 : Écart-type d'Allan dans le cas de l'interpolation des éphémérides de la Station Spatiale Internationale.

Les oscillations découlent-elles du fait que l'on utilise ces données GPS de l'ISS ? Ou proviennent-elles du fait que l'on considère pour la première fois des données tridimensionnelles ?

Afin de résoudre ce problème et de chercher la cause de ces oscillations, on essaie d'isoler les différentes sources d'erreur. On modélise les trajectoires tridimensionnelles des stations spatiale et terrestre de manière analytique. La trajectoire d'une orbite circulaire penchée à 45° par rapport à l'équateur passant au-dessus d'une station placée sur l'équateur dans un référentiel non-tournant est donnée par :

$$\vec{x}_s(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_S \cdot t + \varphi) \\ \sin(\Omega_S \cdot t + \varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_S \cdot t + \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$\vec{x}_g(t) = \begin{pmatrix} R_E \cos(\lambda) \cos(\Omega_E \cdot t + \phi) \\ R_E \cos(\lambda) \sin(\Omega_E \cdot t + \phi) \\ R_E \sin(\lambda) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

où Ω_E et Ω_S sont respectivement les vitesses angulaires des stations terrestre et spatiale, où λ est la latitude de la station terrestre, et où l'on prend $\varphi = \pi/2 = \phi$.

En considérant ces expressions analytiques, on simule les observables de code des trois fréquences. Le résultat de leur traitement ne montre aucune oscillation. Les oscillations observées précédemment ne proviennent pas de l'utilisation de données orbitographiques sur les trois axes du repère.

Les données orbitographiques des éphémérides sont de nouveau considérées : on élimine un point sur deux, ce qui conduit à une orbitographie à un point toutes les 120 secondes. A partir de cette orbitographie, les points manquants sont déterminés par interpolation de façon à obtenir des données orbitographiques à un taux d'échantillonnage de 1 Hz. Ensuite, les observables sont simulées selon les équations utilisées précédemment. En traitant ces données, on obtient des oscillations d'une période de deux minutes et de $3 \cdot 10^{-13}$ s d'amplitude (cf. figure 4.10).

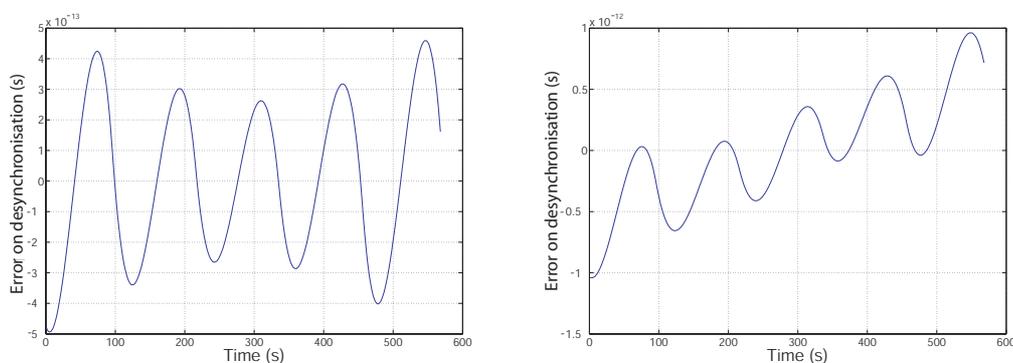


FIG. 4.10 : Oscillations de période égale à deux minutes obtenues à partir des éphémérides de la station spatiale si on néglige le délai troposphérique (figure de gauche) ou non (figure de droite).

Par contre, si à partir de l'orbitographie analytique, on prend seulement un point par minute, que l'on détermine les données manquantes par interpolation et que l'on crée les observables à partir de ces données orbitographiques, alors en exploitant ces données par l'algorithme d'analyse, on obtient des oscillations à la période d'une minute et d'amplitude $5 \cdot 10^{-14}$ s (voir figure 4.11).

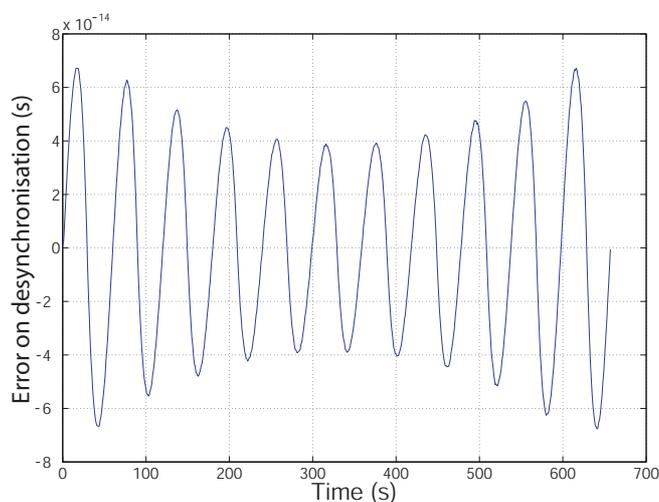


FIG. 4.11 : Oscillations périodiques à une minute obtenues à partir des données orbitographiques simulées.

Par conséquent, le problème d'oscillations ne vient pas des éphémérides de l'ISS mais du fait que l'on interpole les données manquantes. En effet, à l'aide des équations orbitographiques analytiques, les observables sont simulées à un point par seconde. Ensuite, on construit l'orbitographie qui va être utilisée par le programme d'analyse de données en prenant seulement un point par minute de l'orbitographie analytique créée (équations (4.32) et (4.33)) puis en interpolant les manquants. Le résultat obtenu ne montre aucune oscillation.

Il y avait donc des corrélations entre les erreurs d'interpolations de l'orbitographie et celles sur les observables construites à partir de ces données orbitographiques interpolées. C'est donc un problème d'ordre numérique dans la simulation des observables brutes qui n'interviendra pas lors du traitement des données provenant de la mission.

Pour dernière étude de ce phénomène oscillatoire, on programme une interpolation de Lagrange d'ordre sept (cf. équations (4.8) et (4.9)), remplaçant ainsi le sous-programme *Matlab* qui se révèle être du quatrième ordre. A partir de l'orbitographie de la station spatiale échantillonnée à une minute, on réalise des données orbitographiques à un point par seconde. On construit les observables que l'on traite par la suite : on obtient le bruit de l'erreur numérique si l'on néglige les effets atmosphériques.

4.2.4 Prétraitement des données

Les mesures de la mission ACES ne seront évidemment pas parfaites : les mesures ne seront pas continues, certaines seront inexploitable. Pour parer à ces éventualités, il faut réaliser une analyse rapide des données avant de lancer les lourds calculs liés à la détermination de produits scientifiques.

Le prétraitement des données aura donc pour but de détecter s'il existe des trous dans les données d'observables (trous qui seraient dus au passage d'un des panneaux solaires devant l'antenne réceptrice ou à un dysfonctionnement de l'acquisition) et si les origines des échelles de temps propres sont différentes (début d'acquisition des signaux non simultanés). On suppose que les mesures sont annotées avec une valeur entière de l'échelle de temps locale de telle façon que les temps propres d'acquisition s'expriment sous la forme $\tau = [N, N']$ avec N et N' entiers naturels.

Cette partie explique de manière rapide cette phase d'analyse initiale des données en essayant d'aborder ses idées principales.

Détection des trous

Tout d'abord, la première étape consiste à chercher les temps propres pour lesquels il se produit des sauts d'amplitude dans les observables. En effet, lorsque l'un des canaux du MWL n'acquerra pas de mesure, celui-ci effectuera des étalonnages de ces délais internes entre l'horloge et l'antenne. L'observable considérée passera donc d'une amplitude supérieure à la milliseconde à un terme inférieur à la dizaine de microsecondes. On peut donc effectivement étudier la variation d'amplitude de deux mesures consécutives, mais à priori les mesures vraies seront automatiquement détectées et annotées.

Quelle que soit la méthode utilisée, on relève une suite d'indices correspondant aux changements de nature de la mesure. Cette séquence d'entiers est associée à l'échelle de temps propre de mesure de l'observable considérée.

Détermination des intervalles à combiner

La comparaison des temps de mesures "utilisables" va permettre de déterminer quelles observables doivent être associées. Elle se base sur l'hypothèse que les horloges sont présynchronisées avec une précision inférieure à 0.5 ms.

Le but de cette étape est de construire une échelle de temps des mesures vraies en la comparant à chaque séquence de temps propre issue de la phase de détection des irrégularités. Cela revient à comparer les intervalles des indices correspondants à de vraies mesures et d'en déduire les intersections. Il existe plusieurs

configurations qui, au final, se décomposent en deux classes. Soit les intervalles sont disjoints : aucune des mesures des deux intervalles ne peut être combinée. Soit les intervalles se croisent : dans ce cas, quelle que soit la configuration de l'intersection, l'intervalle de mesure à combiner va de la plus grande des bornes inférieures des deux intervalles à la plus petite des bornes supérieures. En comparant de nouveau les origines temporelles des deux échelles de temps, on détermine quels sont les indices des données brutes des deux signaux à combiner ensemble. Puis on évalue l'intersection des deux échelles de temps correspondant aux mesures "utilisables", ceci étant rendu possible par le fait que les horloges sont préalablement synchronisées. On détermine ainsi quelles mesures des observables doivent être associées.

Pour illustrer ce processus, prenons un exemple concret. Supposons que les observables provenant des signaux de fréquence f_1 et f_2 soient données en fonction de leur temps propre τ_1 ou τ_2 selon la figure 4.12.

Puisque les horloges sont synchronisées, l'échelle de temps pour laquelle il existe des mesures vraies sur l'ensemble des fréquences peut être déterminée par comparaison des échelles de temps propre. La construction de cette nouvelle échelle de temps permet de revenir aux indices qu'il faudra combiner. Par exemple, l'exemple étudié selon la figure 4.12 indique que les données provenant de la première fréquence et indicées entre 201 et 300 devront être respectivement combinées avec les observables de f_2 dont l'indice se trouve entre 191 et 290.

Le choix du cas étudié

L'utilisateur de l'algorithme d'analyse de données doit forcément préciser dans quelle configuration se place l'étude qu'il mène. En effet, ces précisions sont fondamentales pour l'évaluation des produits scientifiques, et des informations erronées conduiraient à de fausses conclusions. L'utilisateur doit répondre successivement à deux questions.

Le premier choix consiste à définir quelle horloge, spatiale ou terrestre, est synchronisée avec le temps coordonné. En effet, la connaissance de cette synchronisation est nécessaire afin d'avoir une relation entre l'une des horloges et le temps coordonné, afin d'avoir une relation entre l'orbitographie des stations et les temps de mesure des observables.

Le second choix correspond à préciser selon quel paramètre est réalisé la combinaison des observables des signaux de fréquence f_1 et f_2 , soit à choisir un ajustement en fonction de T_{23} ou de T_{14} . La détermination des besoins de la mission menée au Chapitre 3 a montré qu'une valeur nulle de T_{23} permettait de relâcher au

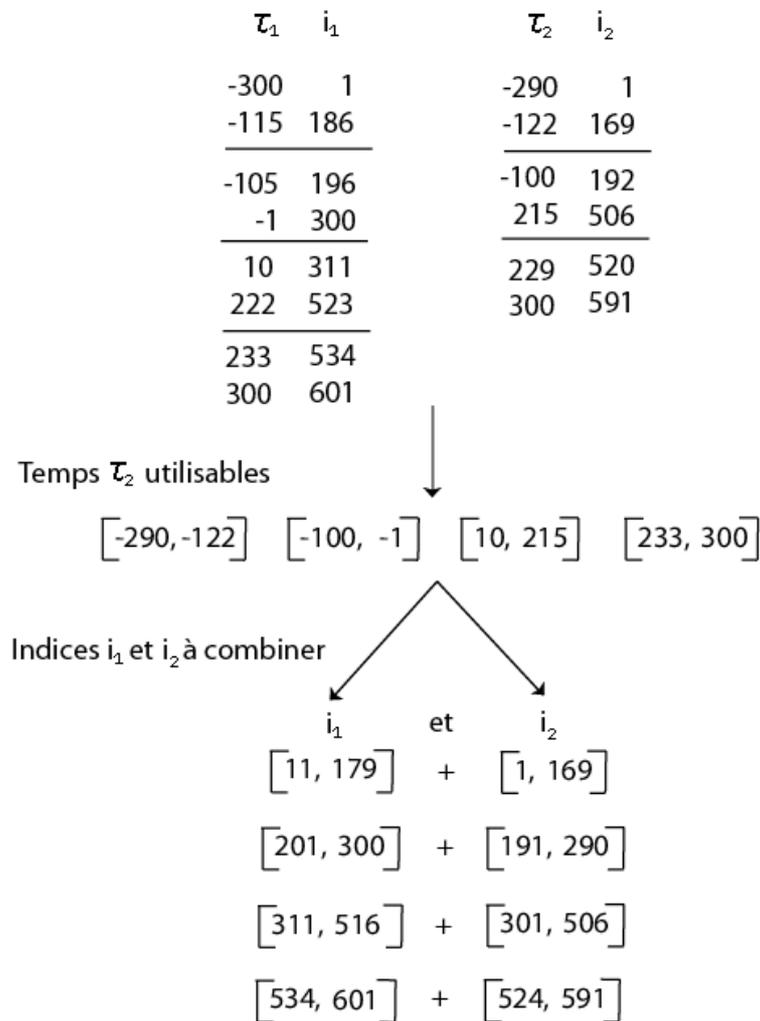


FIG. 4.12 : Exemple de la phase de prétraitement.

maximum la contrainte sur la précision de l'orbitographie. Cependant, le choix de ces intervalles de temps n'est pas limité à la valeur nulle mais à n'importe quelle fonction du temps. Il peut se révéler plus intéressant puisque l'étalonnage des délais internes des instruments de la station terrestre est plus aisé : la maîtrise de T_{14} peut donc avoir son importance (cf. Chapitre 3).

Quelle que soit la configuration choisie par l'utilisateur, l'algorithme de traitement de données évalue une première fois la désynchronisation des horloges en interpolant l'observable du signal de fréquence f_1 selon la combinaison choisie, puis détermine une seconde fois cette variable en décalant l'observable de f_2 selon la même configuration. Par conséquent, l'utilisateur obtient deux estimations

de la désynchronisation des horloges mais à des temps coordonnée distincts.

Calcul de l'orbitographie

L'orbitographie des stations est déduite à partir d'observations et donnée dans un référentiel géocentrique tournant (un point de la Terre est fixe dans ce référentiel) et en fonction du temps coordonnée t . Il faut donc évaluer l'orbitographie des deux stations, d'une part au temps voulu et d'autre part, dans le référentiel d'étude, le GCRS (cf. partie 1.1.5).

Concernant le changement de référentiel, les amplitudes des effets intervenants dans la rotation terrestre sont de l'ordre de grandeur les besoins orbitographiques de la mission ACES déterminés au Chapitre 3. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces effets lors du changement de référentiel. Pour cela, on se réfère à une routine développée par le SYRTE [92] permettant de passer du référentiel géocentrique tournant au référentiel géocentrique non-tournant. Ce programme fournit la matrice M de changement de repère en position au temps coordonnée t définie telle que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

L'évaluation des vitesses et des accélérations des stations nécessite les matrices dérivées première et deuxième. En effet, la dérivation de la formule (4.34) conduit à :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} + M' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Celles-ci sont approximées par dérivation numérique en considérant la matrice M en trois temps distincts : au temps coordonnée considéré, une seconde avant et une seconde après. La matrice dérivée M' est alors calculée selon :

$$M'(t) = \frac{M(t+1) - M(t-1)}{2}. \quad (4.36)$$

Une formule équivalente pour la dérivée deuxième de M peut être écrite en fonction de M ou de M' .

Selon le choix fait par l'utilisateur, il faut déterminer l'orbitographie au temps coordonnée t_2 ou t_4 . Connaissant la relation univoque entre l'échelle de temps propre de l'horloge considérée et l'échelle de temps coordonnée, il est possible

d'interpoler la position, la vitesse et l'accélération des stations aux temps liés aux observables. Pour cela, on compare les échelles de mesure des observables et de l'orbitographie.

Les fichiers de sortie

Dans le cas où il y aurait des temps morts dans les données, il est nécessaire d'associer aux produits scientifiques leur temps propre de mesure. Dans ce contexte, les temps propres associés aux calculs des produits scientifiques sont stockés puis écrits dans un fichier de sortie. L'étude de l'évolution temporelle des produits scientifiques ainsi que de leur erreur est dorénavant faite en fonction de cette variable.

4.2.5 Amélioration de la simulation

L'algorithme de calcul des produits scientifiques semble marcher convenablement quelle que soit la situation de synchronisation que l'on évoque. Cependant, les deux programmes ayant été développés parallèlement, il existe une forte probabilité pour qu'il existe des erreurs communes entre les deux codes.

Procédure itérative

Jusqu'à présent, les temps de propagation des observables étaient évalués à partir des formules (2.46), (2.50) et (2.51). Le principe de simulation est changé : on calcule les temps de propagation des signaux par itérations successives.

On estime successivement deux variables : d'une part, le temps de propagation entre les stations, d'autre part, la position de la station émettrice. Cependant, à l'émission du signal, la station spatiale n'était pas à la position $\vec{x}_s(t_4)$, mais à la position $\vec{x}_s(t_4 - T_{34})$. La distance entre les deux stations a changé, de même que l'angle zénithal, angle que fait la station spatiale avec la verticale au sol.

Par conséquent, le temps de propagation de la fréquence f_2 est déterminé par itérations successives de la manière suivante :

- au rang $n = 0$, on prend $[T_{34}]_0 = 0$,
- puis au rang $n \geq 1$, on évalue la position de la station spatiale au moment où le signal considéré a été émis par l'antenne par interpolation des données orbitographiques :

$$[\vec{x}_s(t_3)]_n = \vec{x}_s(t_4 - [T_{34}]_{n-1}), \quad (4.37)$$

- puis on détermine alors la valeur du temps de propagation entre les deux stations à l'ordre n par :

$$[T_{34}]_n = \frac{\|\vec{x}_g(t_4) - [\vec{x}_s(t_3)]_n\|}{c} + \Delta^{tropo}(\vec{x}_g(t_4), [\vec{x}_s(t_3)]_n) + \Delta^{iono}(\vec{x}_g(t_4), [\vec{x}_s(t_3)]_n) + \Delta^{shap}(\vec{x}_g(t_4), [\vec{x}_s(t_3)]_n), \quad (4.38)$$

où $\Delta^{tropo}(\vec{x}_g(t_4), \vec{x}_s(t_3))$, $\Delta^{iono}(\vec{x}_g(t_4), \vec{x}_s(t_3))$ et $\Delta^{shap}(\vec{x}_g(t_4), \vec{x}_s(t_3))$ est respectivement les délais troposphérique, ionosphérique et Shapiro agissant sur la propagation d'un signal entre $\vec{x}_s(t_3)$ et $\vec{x}_g(t_4)$.

La récurrence ne prend fin que lorsque $|[T_{34}]_n - [T_{34}]_{n-1}| < \varepsilon$, ε étant un paramètre que l'on choisit égal à 10^{-16} s. Le temps de propagation T_{56} intervenant dans l'expression de l'observable de la troisième fréquence est simulé de manière similaire en considérant le retard ionosphérique associé à cette fréquence.

Dans le cas du signal ascendant de fréquence f_1 , on calcule non plus la position de la station spatiale par itération, mais celle de la station terrestre. En effet, l'observable de fréquence f_1 est liée au temps de réception à la station spatiale. C'est pourquoi le principe récursif se décompose selon les étapes suivantes :

- au rang $n = 0$, on prend $[T_{12}]_0 = 0$,
- au rang $n \geq 1$, on détermine la position de la station terrestre au moment de l'émission du signal à l'aide d'une interpolation :

$$[\vec{x}_g(t_1)]_n = \vec{x}_g(t_2 - [T_{12}]_{n-1}), \quad (4.39)$$

- puis on calcule le temps de propagation entre les deux stations par

$$[T_{12}]_n = \frac{\|\vec{x}_s(t_2) - [\vec{x}_g(t_1)]_n\|}{c} + \Delta^{tropo}(\vec{x}_s(t_2), [\vec{x}_g(t_1)]_n) + \Delta^{iono}(\vec{x}_s(t_2), [\vec{x}_g(t_1)]_n) + \Delta^{shap}(\vec{x}_s(t_2), [\vec{x}_g(t_1)]_n), \quad (4.40)$$

où $\Delta^{tropo}(\vec{x}_g(t_1), \vec{x}_s(t_2))$, $\Delta^{iono}(\vec{x}_g(t_1), \vec{x}_s(t_2))$ et $\Delta^{shap}(\vec{x}_g(t_1), \vec{x}_s(t_2))$ est respectivement les délais troposphérique, ionosphérique et Shapiro agissant sur la propagation d'un signal entre $\vec{x}_g(t_1)$ et $\vec{x}_s(t_2)$.

L'itération des délais de propagation T_{12} , T_{34} et T_{56} est réalisée à travers les équations (4.37), (4.38), (4.39) et (4.40). Elles permettent d'éviter l'utilisation des formules (2.46), (2.50) et (2.51) et augmentent ainsi l'indépendance du calcul des différences $T_{12} - T_{34}$ et $T_{34} - T_{56}$.

De plus, cette méthode de calcul des temps de propagation entre les antennes permet d'obtenir des estimations des délais atmosphériques plus réelles comparativement aux méthodes utilisées jusqu'alors. En effet, les délais ionosphériques et troposphériques sont calculés sur le parcours véritable du signal c'est-à-dire sur $\vec{R}(t)$ et non plus sur $\vec{D}(t)^2$.

Fonctions temps propre-temps coordonnée quelconques

Enfin, désireux de se détacher le plus possible des simplifications réalisées pour la simulation, le principe de création des observables est changé avec comme objectifs de permettre, d'une part, n'importe quelle relation entre les temps propres et le temps coordonnée, et d'autre part, la possibilité d'utiliser toutes données orbitographiques. De plus, on se base sur le principe de séparer la création des fichiers de variables selon que l'on choisit leur valeur explicitement (telles que la relation reliant les temps propres des horloges et le temps coordonnée, les paramètres atmosphériques, ...), et la simulation des observables (les valeurs des observables, les valeurs théoriques,...).

Les relations *temps propre / temps coordonnée* sont définies à l'aide des fonctions F_g et F_s respectivement pour le temps propre de l'horloge terrestre et spatiale. Ces fonctions relient les temps propres, τ^g et τ^s , et le temps coordonnée t par :

$$\tau^g(t) = F_g(t), \quad (4.41)$$

et

$$\tau^s(t) = F_s(t). \quad (4.42)$$

Celles-ci peuvent dépendre de la position, la vitesse, l'accélération des stations ou de n'importe quel autre paramètre. On calcule ainsi les valeurs des temps propres τ^g et τ^s pour chaque valeur de t . Les fonctions F_g et F_s ne sont pas forcément analytiques : il est également possible de fournir des fichiers correspondant aux relations entre les temps propres et le temps coordonnée.

Pour la simulation des observables, on choisit les valeurs des paramètres intervenant dans le calcul des observables (tel que les fréquences des signaux, la

²On rappelle que $\|\vec{R}(t)\|$ correspond à la distance géométrique parcourue par le signal entre son émission et sa réception alors que $\|\vec{D}(t)\|$ coïncide avec la distance instantanée coordonnée entre les deux stations à un temps coordonnée t .

concentration électronique de l'ionosphère N_e , ...) ainsi que les effets physiques (on peut, par exemple, décider d'éliminer l'effet du champ magnétique ou de retirer le retard troposphérique).

La simulation des observables débute par l'interpolation des données orbitographiques à un point par seconde si celles-ci sont données à un pas d'échantillonnage supérieur. On détermine ensuite quel intervalle de temps correspond à un passage de la station spatiale au dessus de la station terrestre - c'est-à-dire lorsqu'elles se voient l'une l'autre - en examinant la valeur de l'angle zénithal. On peut ainsi évaluer l'intervalle temporel correspondant.

Lorsque cette première étape est terminée, la simulation des observables peut être lancée. Elle se base grandement sur des routines d'interpolation des données par polynômes de Lagrange (équations (4.8) et (4.9)). Par exemple, la construction de l'observable du signal de fréquence f_2 se décompose en plusieurs étapes selon la figure 4.13 :

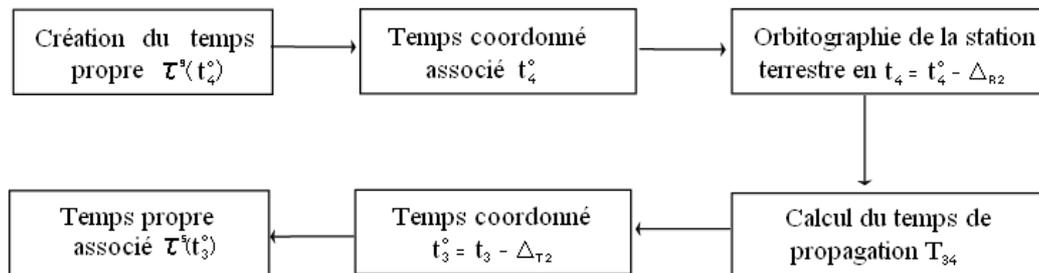


FIG. 4.13 : Principe de simulation des observables de code et de phase du Lien Micro-Onde.

- On modélise une horloge dont les battements vont coïncider avec les mesures effectuées localement. L'intervalle entre deux mesures consécutives est d'une seconde dans l'échelle de temps locale. Le temps propre de l'horloge τ est donc matérialisé par un intervalle du type $\tau = [N, N']$, constitué d'indices entiers. On considère alors l'un de ces temps $\tau^s(t_4^o)$ comme associé à un temps propre de mesure de l'observable de fréquence f_2 .
- Le temps coordonné t_4 de réception du signal considéré à l'antenne de la station terrestre est déterminé selon $t_4 = t_4^o - \Delta_{R2}$ où t_4^o est évalué par interpolation à l'aide de la fonction F_g (formule (4.41)).
- On interpole ensuite les données de position, de vitesse et d'accélération des deux stations en t_4 déterminées auparavant.

- Le temps de propagation T_{34} du signal de fréquence f_2 entre les antennes des deux stations est évalué par itération à l'aide des équations (4.37) et (4.38).
- Son évaluation permet d'obtenir le temps coordonné t_3 lié à l'émission du signal de fréquence f_2 à l'antenne de la station spatiale selon $t_3 = t_4 - T_{34}$. Le temps coordonné d'émission t_3^o du signal considéré par l'horloge est alors obtenu par $t_3^o = t_4^o - \Delta T_2$.
- Pour finir, en connaissant la relation entre le temps propre de l'horloge spatiale et le temps coordonné, on détermine le temps propre $\tau^s(t_3^o)$.

L'observable mesurée correspond à la différence de temps propre entre la production τ_p et l'arrivée τ_a du morceau de code étudié, $\tau_p - \tau_a$. Dans le cas de la mesure brute de code émanant de la fréquence f_2 , on obtient :

$$\Delta\tau^s(\tau^s(t_4^o)) = \tau^s(t_3^o) - \tau^s(t_4^o) = F_s(t_3^o) - F_g(t_4^o). \quad (4.43)$$

De manière similaire, on effectue la même procédure pour déterminer les observables provenant des signaux de fréquence f_1 et f_3 . Les deux mesures brutes suivantes s'expriment selon les fonctions F_g et F_s par :

$$\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) = F_g(t_1^o) - F_s(t_2^o), \quad (4.44)$$

$$\Delta\tau^g(\tau^g(t_6^o)) = F_s(t_5^o) - F_g(t_6^o). \quad (4.45)$$

Les trois observables sont simulées par la méthode explicitée sur la figure 4.13 et décrite ci-dessus. On considère des temps propres de mesure du signal $\tau^s(t_2^o) = \tau^g(t_4^o) = \tau^g(t_6^o) = [-300, 300]$. Les résultats de l'analyse de données sont représentés sur la figure 4.14 : on observe une erreur atteignant le dixième de picoseconde. On remarque que pour les temps propres de zéro, l'erreur diminue : en fait, c'est l'erreur relative sur la désynchronisation des horloges qui reste constante.

Cette erreur s'identifie comme une erreur numérique - concernant la précision des variables - du fait de la quantification des valeurs atteintes. En effet, la valeur des temps propres étant de l'ordre de 300, la précision numérique sur cette variable est de l'ordre de quelques 10^{-16} , ce qui donne une incertitude de 0.1 picoseconde.

Pour résoudre ce problème, on fait l'hypothèse que l'on peut écrire les valeurs des temps propres sous la forme $\tau = F(t) = t + f(t)$, f étant une fonction quelconque de t dont les valeurs sont très petites devant l'unité. Cette hypothèse est confirmée par les expériences testant cette partie de la Gravitation (cf. partie 1.3.1). On définit alors :

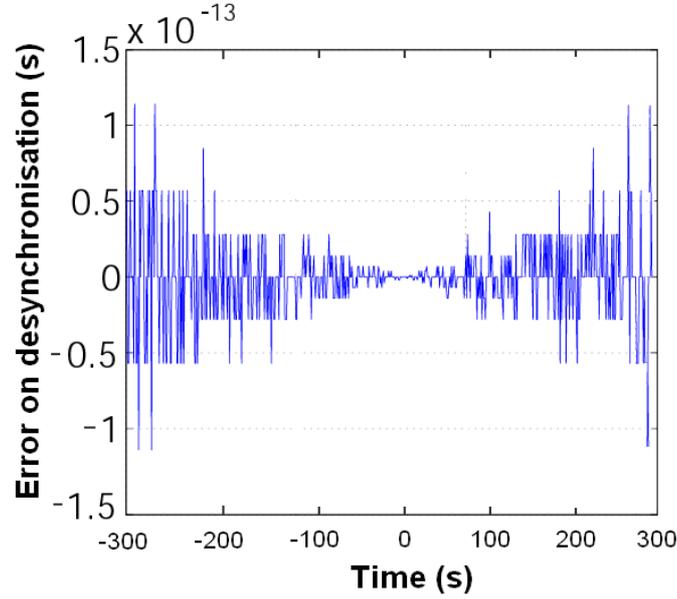


FIG. 4.14 : Erreur sur la désynchronisation lors de l'utilisation des fonctions F_s et F_g .

$$\tau^g(t) = F_g(t) = t + f_g(t), \quad (4.46)$$

$$\tau^s(t) = F_s(t) = t + f_s(t). \quad (4.47)$$

Dans le cas où le potentiel gravitationnel et la vitesse des stations restent constants, on pourra prendre par exemple $f(t) = -\frac{1}{c^2}(U + \frac{v^2}{2}) \cdot t$ de telle façon que l'on retrouve le résultat découlant de la Relativité Générale (cf. équation (1.12)).

Par conséquent, après l'obtention des temps coordonnée d'émission et de réception du signal, la simulation de l'observable de f_2 nécessite l'interpolation des fonctions f_s et f_g afin d'obtenir respectivement leur valeur en t_3^o et en t_4^o . On peut alors exprimer l'observable issue du signal de fréquence f_2 par :

$$\Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) = t_3^o + f_s(t_3^o) - \left(t_4^o + f_g(t_4^o) \right) = f_s(t_3^o) - f_g(t_4^o) - \Delta_{T2} - T_{34} - \Delta_{R2}, \quad (4.48)$$

puisque $t_3^o = t_4^o - \Delta_{T2} - T_{34} - \Delta_{R2}$.

Sur le même principe, les observables des signaux de fréquence f_1 et f_3 sont déterminées selon les équations suivantes :

$$\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) = t_1^o + f_g(t_1^o) - \left(t_2^o + f_s(t_2^o)\right) = f_g(t_1^o) - f_s(t_2^o) - \Delta_{T1} - T_{12} - \Delta_{R1}, \quad (4.49)$$

$$\Delta\tau^g(\tau^g(t_6^o)) = t_5^o + f_s(t_5^o) - \left(t_6^o + f_g(t_6^o)\right) = f_s(t_5^o) - f_g(t_6^o) - \Delta_{T3} - T_{56} - \Delta_{R3}. \quad (4.50)$$

En conclusion, cette formulation des observables permet d'éviter un problème lié à l'incertitude numérique des logiciels et montré sur la figure 4.14. En effet, il est à présent possible de considérer des temps coordonnée quelconques sans faire intervenir, lors de la simulation des observables, une différence de temps propres supérieurs à la seconde

Mesures de phase

Les mesures de phase de la porteuse de Lien Micro-Onde vont jouer un rôle clé dans les performances de la mission ACES. En effet, les mesures de code sont exactes mais bruitées, contrairement aux mesures de phase qui sont moins bruitées mais peuvent être biaisées.

Les observables de phase sont données par :

$$\Delta\tau_{\Phi}^s(\tau^s(t_2^o)) = Des(t_2^o) - \left[[\Delta_{T1}^g]^t + T_{12} + [\Delta_{R1}^s]^t \right]^g + \frac{N_1}{f_1}, \quad (4.51)$$

$$\Delta\tau_{\Phi}^g(\tau^g(t_4^o)) = -Des(t_4^o) - \left[[\Delta_{T2}^s]^t + T_{34} + [\Delta_{R2}^g]^t \right]^s + \frac{N_2}{f_2}, \quad (4.52)$$

$$\Delta\tau_{\Phi}^g(\tau^g(t_6^o)) = -Des(t_6^o) - \left[[\Delta_{T3}^s]^t + T_{56} + [\Delta_{R3}^g]^t \right]^s + \frac{N_3}{f_3}, \quad (4.53)$$

où les paramètres entiers N_1 , N_2 et N_3 correspondent à l'ambiguïté que l'on introduit dans les mesures de phase et qu'il faudra extraire par la suite.

L'ambiguïté de phase provient du fait que la mesure est une comparaison de phase entre le signal reçu et le signal produit localement. Cette mesure de phase est réalisée à 2π près. Convertie en temps, cette mesure est donc entachée d'un nombre entier de période. Ce type de problème n'intervient pas dans la mesure du code puisque celui-ci est unique et permet d'obtenir une mesure non-biaisée.

De plus, l'atmosphère a un effet différent sur la propagation du code et de la phase d'un même signal : leur terme ionosphérique est opposé (cf. partie 2.2.1). En effet, l'ionosphère donne un délai à la propagation du code, et a donc tendance à ralentir sa propagation. A l'opposé, elle accélère la propagation de la phase entre les stations. Dans la simulation des observables, les termes ionosphérique du code et de la phase sont estimés à partir d'un modèle de l'ionosphère et sont donnés par les équations (2.15) et (2.16).

En connaissant l'expression du retard ionosphérique pour la phase du signal, on construit les trois observables de phase de manière analogue à celle utilisée pour la simulation des observables de code. Cependant, on rajoute à chaque observable un terme du type $\frac{N_i}{f_i}$ qui correspond à une ambiguïté de phase.

Le principe de détermination des ambiguïtés de phase se base sur la différence des deux mesures de code et de phase mesurées au même instant. Cependant l'introduction de processus stochastiques dans les paramètres et les variables de la mission dégrade fortement cette résolution. L'étude de la détermination des ambiguïtés de phase et de leur statistique de réussite sera approfondie en détails dans le chapitre suivant, le Chapitre 5.

Résultats

Les observables de phase et de code sont construites en considérant les améliorations décrites dans cette partie. Leur traitement conduit à la figure 4.15 qui représente les résidus sur la Concentration Électronique de l'Ionosphère et sur la distance instantanée.

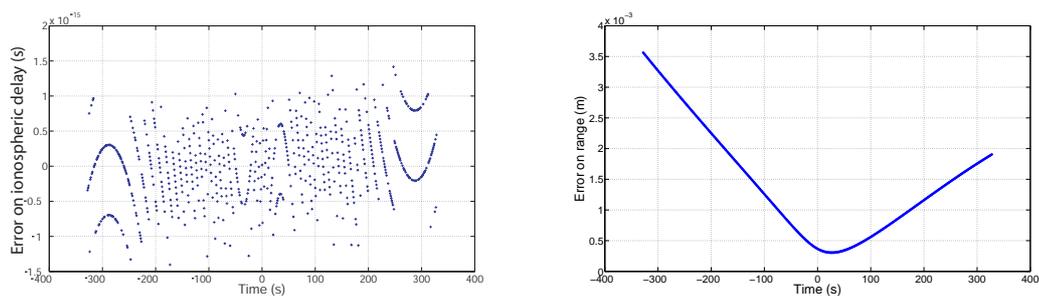


FIG. 4.15 : Erreurs sur le délai ionosphérique (à gauche) et sur la distance instantanée (à droite) durant un passage.

Le résidu sur le terme ionosphérique correspond en fait à la comparaison de $(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_3^2}) \frac{40.308}{c} C_e$ à sa valeur théorique de façon à pouvoir comparer cette erreur au bruit de mesure sur les observables de f_2 et f_3 . La figure 4.15 montre que l'on

a atteint la résolution numérique des programmes pour le résidu sur la variable ionosphérique (qui montre des formes géométriques caractéristiques de cette situation). La mesure de la distance instantanée entre les deux stations montre un terme résiduel atteignant quelques millimètres. En effet, lors de l'établissement de l'équation (2.83), on a supposé que la modélisation du délai troposphérique limiterait cette mesure et qu'il n'était donc pas nécessaire d'évaluer la totalité des termes.

Sur la figure 4.16 sont tracés les résidus sur la désynchronisation lorsqu'on décale l'observable f_1 (figure de gauche) ou la mesure brute de f_2 (figure de droite) pour permettre $T_{23} = 0$.

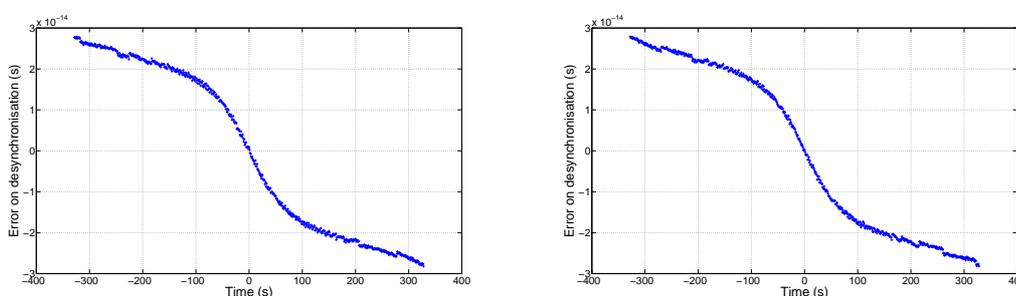


FIG. 4.16 : Désynchronisation pour les deux décalages d'observables

Les résidus sur la désynchronisation sont identiques pour les deux méthodes utilisées et correspondent aux termes résiduels de la différence de délais troposphérique et ionosphérique (équations (4.22) et (4.24)). Cependant, ces termes sont, à présent, estimés selon le vecteur \vec{R} et non plus selon le vecteur \vec{D} par la simulation des observables, alors qu'ils sont toujours supposés identiques entre l'aller et le retour lors de l'analyse des données. La configuration T_{23} nul conduit à une annulation supplémentaire puisque l'on passe d'un terme d'amplitude $5 \cdot 10^{-13}$ s à $3 \cdot 10^{-14}$ s (cf. figure 4.5) : la combinaison Λ permet aux signaux d'avoir des parcours dans l'atmosphère terrestre relativement proches.

4.2.6 Conclusions

Dorénavant, la programme de traitement des mesures brutes fournit dix fichiers de produits scientifiques : la désynchronisation (calculée de deux manières différentes - selon la figure 4.4 - à deux temps coordonnée différents), le Contenu Électronique ionosphérique, la distance instantanée entre les stations et le délai troposphérique obtenus, d'une part, à partir des mesures de code, et d'autre part, à partir des mesures de phase. Les deux mesures du même produit scientifique à partir des mesures de code ou de phase doivent être identiques en théorie : cette si-

multitude sera d'ailleurs exploitée lors de la détermination des ambiguïtés de phase (voir Chapitre 5).

4.3 Les tests des programmes

4.3.1 Les perturbations

Une fois les deux programmes vérifiés, on peut tester leur utilisation avec des effets perturbateurs. Dans presque la totalité des cas, leur ajout sera réalisé après la simulation de leur valeur théorique. Par exemple, si l'on considère du bruit de mesure sur les observables, on déterminera leur valeur selon le principe de la figure 4.13 puis on lui additionnera une fonction de bruit dont on pourra choisir les caractéristiques.

Cependant, dans le cas où les perturbations considérées ne sont plus additives, on ne pourra appliquer cette méthode. En effet, si l'on désire réaliser des tests sur la modélisation du transfert de temps (changement de la formule du délai ionosphérique par exemple) ou sur les lois de la gravitation, il est nécessaire d'effectuer des changements dans la simulation des observables et de changer les résultats théoriques.

4.3.2 Une série de tests

Bruit de mesure

Comme annoncé précédemment, le rajout de bruit de mesure sur les observables nécessite l'évaluation préalable de leur valeur théorique déterminée par itération selon les équations (4.37) et (4.38). Puisque les observables simulées sont échantillonnées à 1 Hz, il faut que le bruit que l'on veut rajouter ait la même caractéristique. Ce dernier est soit simulé à partir de fonctions aléatoires et de processus stochastiques dont on peut alors contrôler les propriétés, soit assimilé à des mesures expérimentales réalisées sur l'un des modèles du MWL et que l'on ajoute alors au programme de simulation des observables.

Dans le cas étudié ici, on simule des fonctions de bruit blanc de phase dont la variance correspond à la variance d'Allan temporelle des spécifications de la mission (cf. équation (2.1)). Ces processus stochastiques sont ajoutés aux observables de code de fréquence f_1 et f_2 . Concernant la troisième fréquence, le bruit blanc de phase additionné est multiplié par le ratio f_1/f_3 ce qui donne un bruit d'amplitude sept fois plus grande. Pour les observables de phase, on considère des bruits dont la variance est d'un ordre de grandeur inférieur à celle des bruits sur le code.

A partir des observables fournies, le programme de traitement de données sort les valeurs des produits scientifiques à partir des observables de code et de phase. L'évolution temporelle de l'erreur sur le TEC est donnée par la figure 4.17.

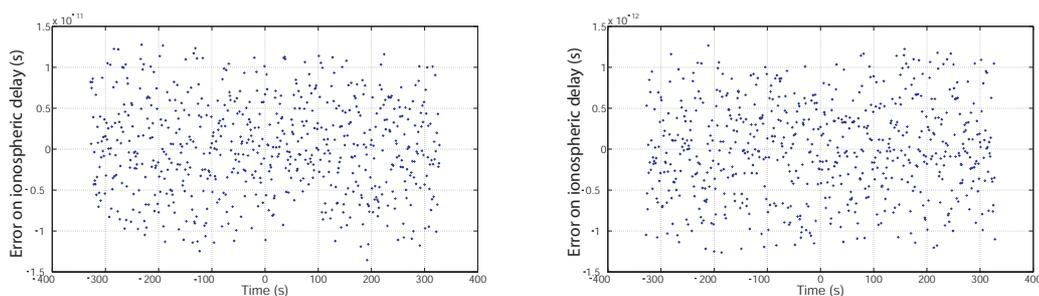


FIG. 4.17 : Erreur sur la différence des retards ionosphériques des signaux de fréquences f_2 et f_3 à partir de mesures de code (figure de gauche) et de phase (figure de droite) bruitées.

Qu'elle soit réalisée à partir des mesures de code ou de phase porteuse, sa détermination est largement dominée par le bruit provenant des observables de fréquence f_3 . En effet, celui-ci est d'au moins un facteur 7 supérieur au bruit sur les observables de fréquence f_1 et f_2 . Ce facteur multiplicatif provient du rapport des fréquences f_1/f_3 .

La détermination de la distance instantanée (cf. figure 4.18) montre une précision de quelques millimètres et un terme non-nul provenant des termes négligés dans l'équation (2.83).

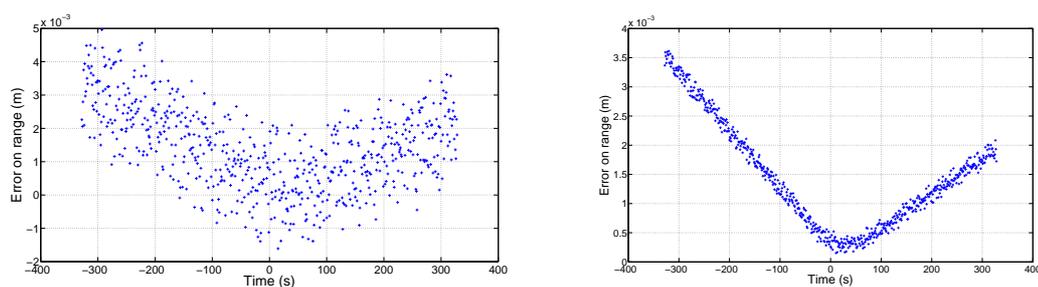


FIG. 4.18 : Erreur sur la valeur de la distance instantanée $D(t)$ à partir de mesures de code (figure de gauche) et de phase (figure de droite) bruitées.

Enfin, la figure 4.19 représente l'erreur réalisée sur la désynchronisation $\tau^g(t) - \tau^s(t)$ entre les horloges lorsque les observables de code ou de phase sont considérées.

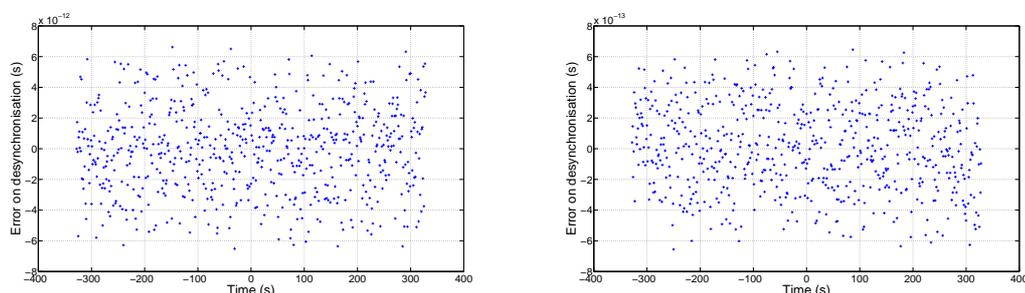


FIG. 4.19 : Erreur sur la valeur de la désynchronisation pour un décalage de l'observable de fréquence f_1 à partir de mesures de code (figure de gauche) et de phase (figure de droite) bruitées.

On remarque que l'écart type du bruit final sur la désynchronisation correspond à l'écart type du bruit imposé sur les observables f_1 et f_2 divisé par un facteur $\sqrt{2}$. En effet, puisque les bruits sur les deux fréquences sont décorrélés et possèdent une variance identique de bruit, la demie-somme de ces deux bruits décorrélés possède une variance égale à la moitié de la variance des deux bruits considérés.

Par conséquent, l'écart type d'Allan de l'erreur sur la désynchronisation va se trouver diminuée d'un facteur $\sqrt{2}$ par rapport aux spécifications du Lien Micro-Onde. Celui-ci est représenté sur la figure 4.20.

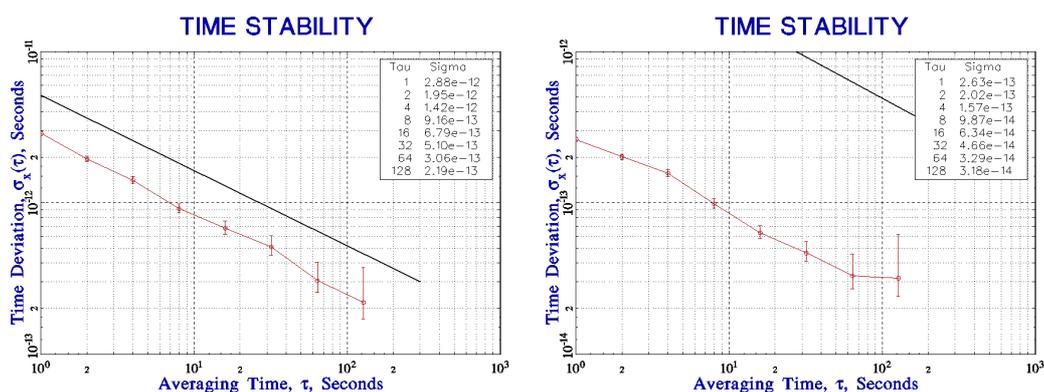


FIG. 4.20 : Écarts types d'Allan temporels de l'erreur sur la désynchronisation pour du bruit blanc de mesure déterminée à partir des mesures de code (figure de gauche) ou de phase (figure de droite). La droite noire correspond aux spécifications de la mission.

Bruit des horloges

A présent on désire tester un bruit blanc de fréquence sur les horloges dont l'amplitude correspond aux spécifications de PHARAO (voir équation (2.2)). Ce type de perturbation ne peut être directement rajouté aux valeurs théoriques des observables et de leur échelle de temps. La datation des observables va toujours correspondre à des secondes entières dans l'échelle de temps réalisée par l'horloge locale. L'erreur des horloges va intervenir dans la correspondance *temps propre / temps coordonnée*, c'est-à-dire dans le passage de la première à la deuxième case de la figure 4.13 ainsi que dans le passage de l'avant-dernière à la dernière case de la même figure. Par conséquent, les bruits des deux horloges vont successivement intervenir, respectivement l'horloge terrestre puis l'horloge spatiale pour la simulation de l'observable de fréquence f_2 .

Dans le cas étudié ici, on ne considère que du bruit sur l'horloge spatiale. Sur la figure 4.21 sont représentées les erreurs sur le délai ionosphérique et sur la distance instantanée.

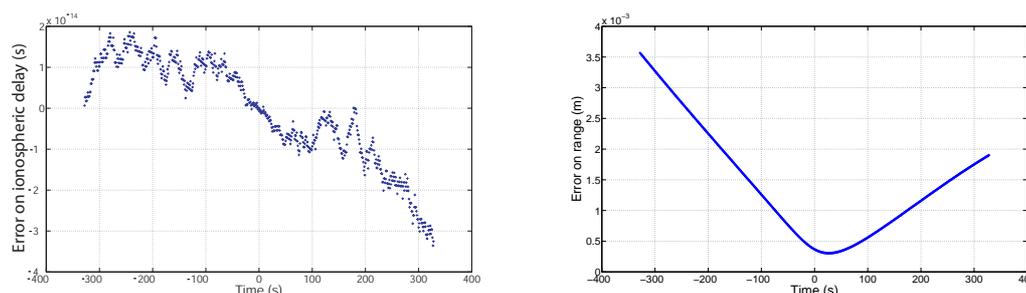


FIG. 4.21 : Erreur sur la différence des retards ionosphériques des signaux descendants (figure de gauche) et sur la distance instantanée (figure de droite) en fonction du temps lorsqu'on considère du bruit d'horloge.

La figure 4.22 montre l'erreur réalisée sur la désynchronisation des horloges dans les cas où l'on décale les observables de fréquence f_1 ou f_2 pour obtenir $T_{23} = 0$ (les deux méthodes donnant des résultats identiques). Elle est constituée de l'erreur provenant des délais ionosphérique et troposphérique sur laquelle vient se rajouter un bruit blanc de fréquence.

A partir des éphémérides de la station

Les observables sont, ici, non plus construites à partir d'une orbitographie simulée, mais à partir de la restitution de l'orbitographie de la Station Spatiale Internationale. Les effets de l'ionosphère et de la troposphère sont réduits à néant afin d'étudier rigoureusement l'effet de cette orbitographie sur la restitution des produits scientifiques.

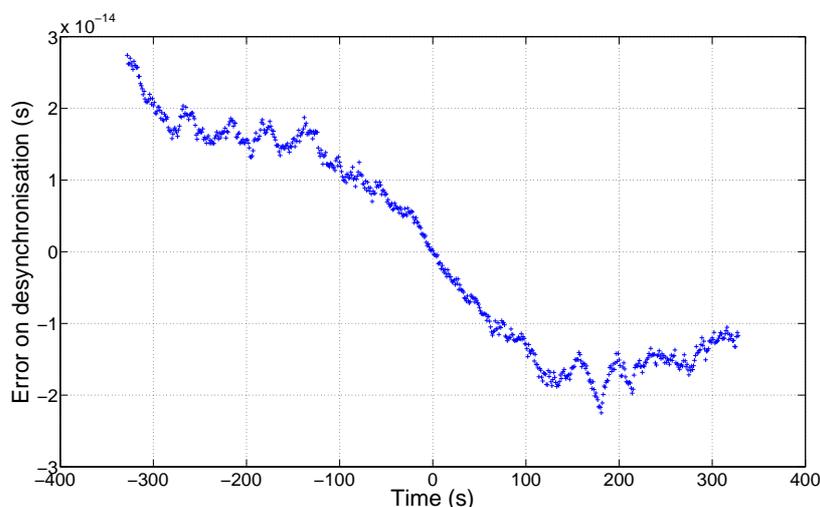


FIG. 4.22 : Erreur sur la désynchronisation à partir des mesures de code dans la situation où les horloges sont bruitées.

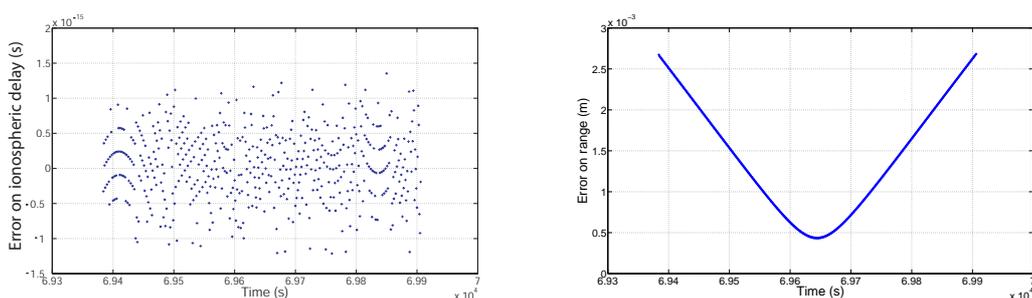


FIG. 4.23 : Résidus sur la différence des retards ionosphériques des signaux descendants (figure de gauche) et sur la distance instantanée (figure de droite) en fonction du temps lorsqu'on considère les éphémérides de la station.

L'évaluation du terme ionosphérique atteint la limite de précision de calcul et montre un résidu de forme non-aléatoire de nature numérique (cf. figure 4.23). L'évaluation de la distance instantanée entre les stations est limitée par les termes négligés de l'équation (2.83) puisque, durant la mission, l'estimation de la distance instantanée sera limitée par le modèle de la troposphère utilisé.

Quant à la figure 4.24, elle montre les erreurs sur la désynchronisation obtenues pour les deux décalages des observables de code.

Pour cette étude, les délais ionosphérique et troposphérique ont été mis de côté. L'utilisation des éphémérides de la station spatiale implique une ellipticité non-nulle de sa trajectoire et donc une variation du potentiel gravitationnel et de sa vitesse. Les erreurs observées sur la figure 4.24 proviennent de l'intégration

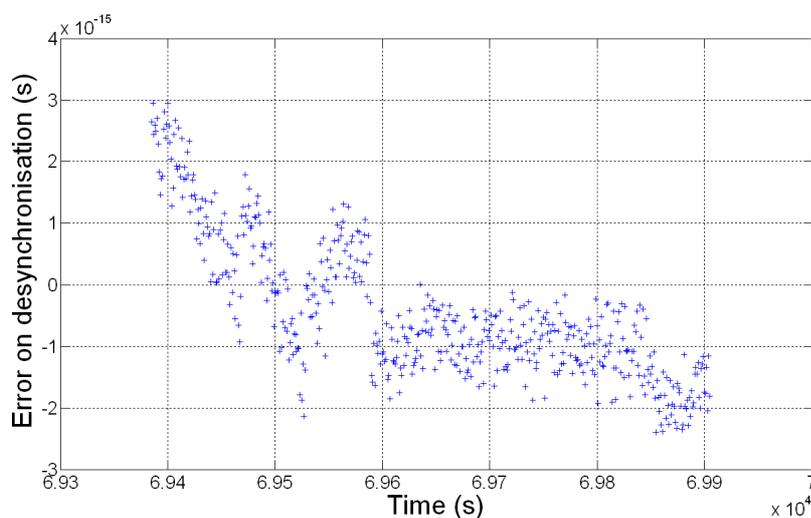


FIG. 4.24 : Erreur sur la désynchronisation obtenue à partir des mesures de code et des éphémérides de la station.

de l'équation (1.11) pour l'obtention des relations *temps propre / temps coordonnée*. La variance d'Allan temporelle de cette erreur reste au moins trois ordres de grandeur en-dessous des spécifications de la mission.

Temps morts

On considère à présent des observables dans lesquelles se trouvent des temps morts de mesure. Les observables provenant du signal de fréquence f_1 ont rencontré des problèmes sur les intervalles de temps propres :

$$[100, 130] \text{ et } [200, 220].$$

Quant aux observables de fréquence f_2 , elles possèdent des trous sur les intervalles :

$$[120, 150] \text{ et } [205, 215].$$

La phase de prétraitement permet d'identifier l'existence de temps morts dans les observables et d'en déduire les intervalles temporels de mesures communes. Sur ces intervalles, on évalue les produits scientifiques de la mission.

Les figures 4.25 et 4.26 fournissent les résultats de l'analyse de données de cette situation. On observe que les produits scientifiques donnent des erreurs identiques au cas basique des figures 4.15 et 4.16 et possèdent des trous correspondant aux intervalles

$$[100, 150] \text{ et } [200, 220].$$

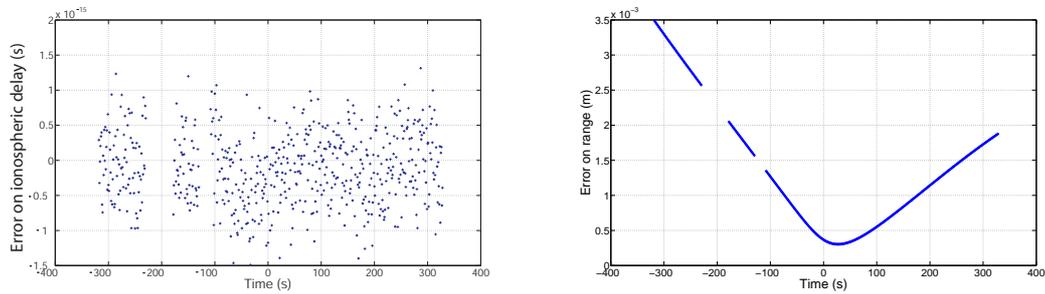


FIG. 4.25 : Erreurs sur la différence des retards ionosphériques des signaux descendants (figure de gauche) et sur la distance instantanée (figure de droite) en fonction du temps à partir des mesures de code lors de temps morts dans les données.

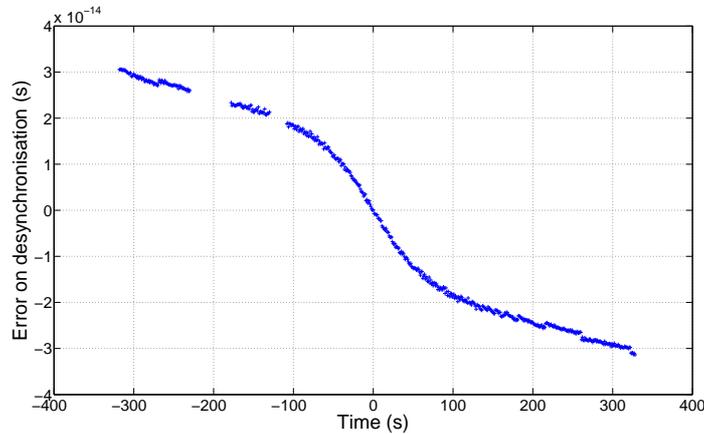


FIG. 4.26 : Erreur sur la désynchronisation obtenue à partir des mesures de code lors de temps morts dans les données.

Du fait de la présence de temps morts dans les mesures (et par conséquent dans les produits scientifiques), le calcul de variances d'Allan temporelles nécessite la prise en compte de ces "trous temporels" selon les méthodes explicitées dans la référence [93]. La variance de l'erreur sur la désynchronisation reste de quelques ordres de grandeur en dessous des spécifications à court terme de la mission (cf. figure 4.27).

4.3.3 Les applications

Le binôme que constitue la simulation des observables et l'algorithme de traitement de données offre la possibilité de déterminer l'effet de chaque paramètre sur le transfert de temps-fréquence.

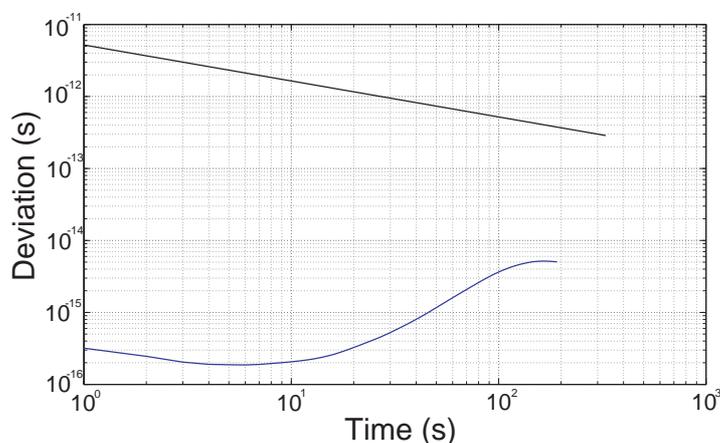


FIG. 4.27 : Écart type d'Allan temporelle de l'erreur sur la désynchronisation à partir des mesures de code et des trous dans les données.

Une erreur orbitographique

Le premier exemple considéré ici résonne vis-à-vis du Chapitre 3 : on étudie l'influence d'erreurs orbitographiques sur la performance des comparaisons temporelles. Pour cela, on évalue les valeurs théoriques des observables en considérant la vraie orbitographie des stations puis on modifie les données orbitographiques fournies à l'algorithme de traitement de données. En fait, on ajoute à l'orbitographie utilisée lors de la simulation des observables un terme d'erreur sur les trois axes donné selon l'équation (3.13). De cette façon, on se place dans un cas réaliste où l'orbitographie de la station spatiale est restituée avec des erreurs mais où les mesures brutes de la mission sont simulées compte tenu de la "vraie" trajectoire des stations.

Les erreurs sur le délai ionosphérique et sur la désynchronisation des horloges sont tracées sur la figure 4.28 dans le cas où les paramètres A et B de l'équation (3.13) sont égaux à mille mètres. Cela correspond à une erreur radiale de cinq cents mètres et des erreurs normale et tangentielle d'un kilomètre.

Par conséquent, il est aussi possible d'étudier les contraintes orbitographiques de la mission comme précédemment réalisé au Chapitre 3. Pour différentes valeurs des paramètres A et B , l'effet de ces erreurs orbitographiques sur la désynchronisation est étudié à travers le calcul de la variance d'Allan temporelle correspondante. Les écarts types d'Allan évalués sont donnés sur la figure 4.29 et comparés aux spécifications de la mission données par l'équation (2.1).

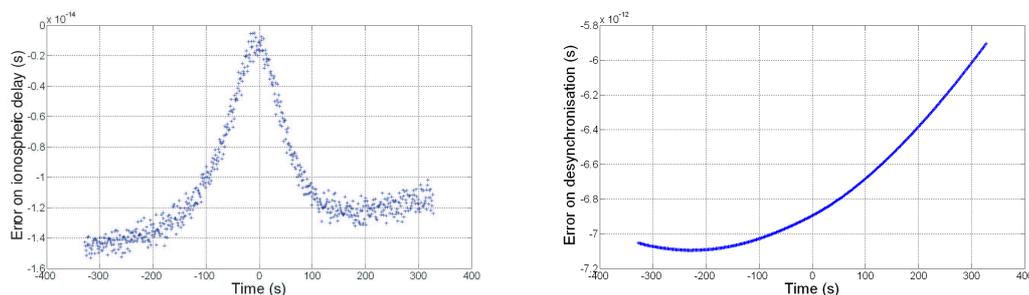


FIG. 4.28 : Erreurs sur la différence des retards ionosphériques des signaux descendants (figure de gauche) et sur la désynchronisation (figure de droite) lorsque les paramètres A et B de l'équation (3.13) sont égaux à mille mètres.

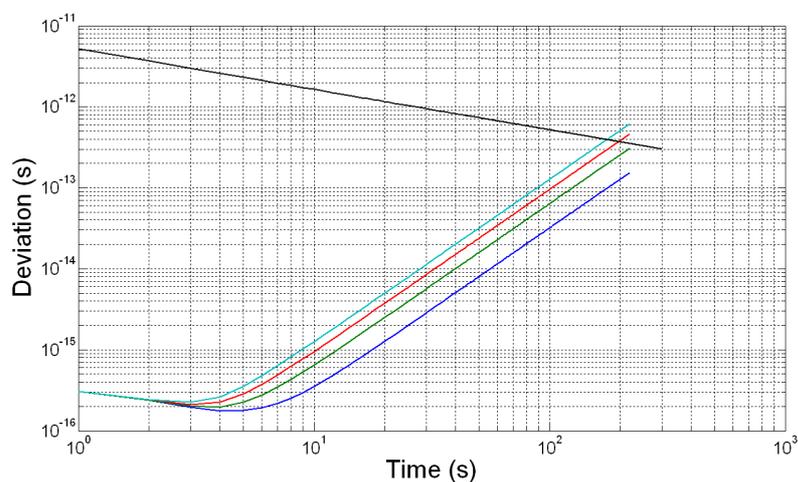


FIG. 4.29 : Écart types d'Allan temporels pour les paramètres A et B égaux à 1000, 2000, 3000 et 4000 mètres (courbes respectives de bas en haut) comparés aux spécifications de la mission.

Cette utilisation combinée des deux programmes donne des résultats équivalents aux conclusions du Chapitre 3. En effet, la figure 4.29 indique que la contrainte limite sur les paramètres A et B se trouve entre deux milles et trois milles mètres. L'étude sur les erreurs orbitographiques maximales autorisées dans le transfert de temps menée dans la partie 3.2.2 donne une valeur limite de 2150 mètres.

Une violation de la Relativité Générale

Le second exemple consiste à étudier l'effet d'une violation de la Relativité Générale sur les résultats de l'algorithme. Le programme de simulation des ob-

servables offre le choix des relations reliant les temps propres et le temps coordonné, d'une part, celles dont dérivent les mesures brutes du MWL, et d'autre part, celles permettant l'évaluation de la désynchronisation théorique, ou d'une autre théorie de la Gravitation. Par conséquent, cette opportunité permet de simuler une situation de violation des lois de la Physique et de comparer une mesure de désynchronisation "réelle" provenant des observables du Lien Micro-Onde, avec un résultat "attendu" déduit de la Relativité Générale.

Les fonctions f_s et f_g introduites précédemment par les équations (4.46) et (4.47) peuvent être choisies de manière quelconque. Cependant, il paraît intéressant de conformer ce choix aux récents travaux en Gravitation. Conformément aux travaux tentant de tester l'Invariance Locale de Position de la partie 1.3, on introduit le paramètre α . On considère alors les fonctions $f(t)$ donnant le temps propre τ en fonction du temps coordonné t telles que :

$$f(t) = - \int_{t_0}^t \left((1 + \alpha) \frac{U(t', \vec{x}')}{c^2} + \frac{v^2(t')}{2c^2} \right) dt', \quad (4.54)$$

où $\vec{x}'(t)$ et $v(t)$ sont la position et la vitesse de l'horloge considérée au temps coordonné t , et où t_0 correspond au temps coordonné t tel que $f(t_0) = 0$.

Les courbes de la figure 4.30 correspondent à la différence entre la désynchronisation des horloges déterminée à partir des observables et la désynchronisation théorique (en Relativité Générale, $\alpha = 0$), en sachant que les mesures brutes ont été simulées avec le paramètre α égal à 10^{-5} et 10^{-6} . Dans un premier temps, aucune perturbation n'est rajoutée sur les mesures.

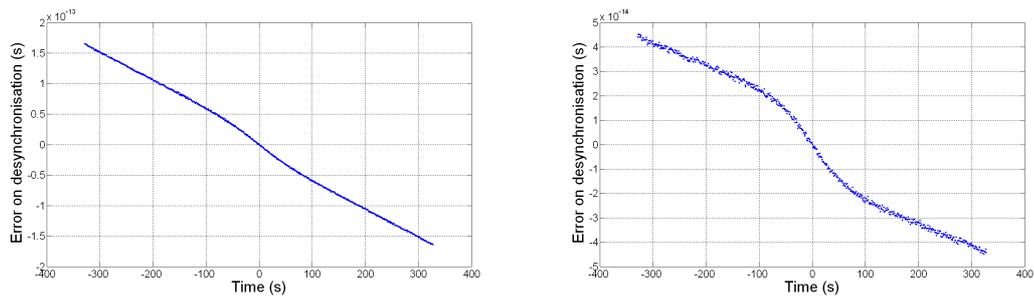


FIG. 4.30 : Erreur de la désynchronisation des horloges où le paramètre α de l'équation (4.54) est égal à 10^{-5} (figure de gauche) et 10^{-6} (figure de droite).

Les valeurs du paramètre α de 10^{-5} et 10^{-6} considérées ici conduisent à un biais en fréquence relative respectivement de l'ordre de $4.1 \cdot 10^{-16}$ et de $4.1 \cdot 10^{-17}$. L'effet de la violation du principe d'Équivalence est distinguable pour α

égal à 10^{-5} : comparativement à la figure 4.16 où intervient le résidu de l'asymétrie des délais troposphériques, la comparaison temporelle de la figure 4.30 montre une dérive linéaire en temps (c'est-à-dire un biais de fréquence) dépassant le dixième de picoseconde après 300 secondes.

Cependant le bruit de mesure et des horloges vont grandement dégrader cette mesure de physique fondamentale : il n'y a aucun espoir de mesurer cet effet sur un passage. Sur la figure 4.31 sont présentées les erreurs sur la désynchronisation des horloges au temps initial (on suppose le décalage des horloges nul à ce moment) et au bout de cinq jours pour $\alpha = 10^{-6}$. Les bruits de mesure et des horloges sont pris en compte et leurs niveaux sont donnés par les spécifications de la mission (équations (2.1) et (2.2)).

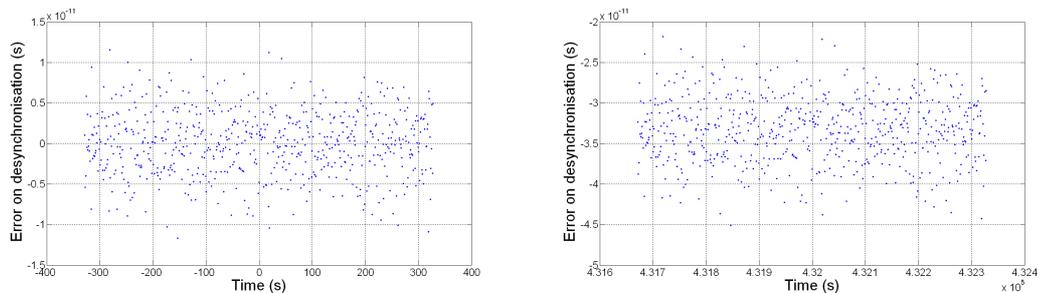


FIG. 4.31 : Exemples de violation de l'Invariance Locale de Position : erreurs sur la désynchronisation de deux comparaisons séparées de cinq jours pour $\alpha = 10^{-6}$.

L'effet de ces violations du Principe d'Équivalence est faible et presque imperceptible à l'échelle d'un passage. Cependant, un biais de fréquence induit une erreur temporelle grandissant avec le temps (cf. figure 4.31) et devient donc décelable après plusieurs jours de mesures.

En effet, l'erreur des horloges croît comme la racine carrée de l'intervalle temporel d'étude tandis que le décalage fréquentiel considéré provoque une augmentation linéaire de l'erreur sur la désynchronisation. Cette dernière surpasse donc l'erreur des horloges au bout d'une certaine période d'intégration.

Conclusion

A travers ce chapitre, l'analyse des données du Lien Micro-Onde a été décrite. En effet, le traitement de données du Lien Micro-Onde se base sur deux programmes : une simulation des mesures brutes du MWL et un algorithme de traitement de données qui permet d'extraire les produits scientifiques. Ces deux

programmes ont été développés en parallèle tout en complexifiant le modèle de transfert de temps-fréquence utilisé.

L'algorithme de traitement de données répond aux diverses situations que peut rencontrer l'utilisateur. Pour chaque configuration, il évalue plusieurs produits scientifiques - tels que la désynchronisation des horloges - par différentes méthodes afin de réaliser des vérifications croisées. Cette particularité permet ainsi de tester diverses parties de l'algorithme de calcul.

Une série de tests a permis de vérifier les performances de l'algorithme ainsi que sa robustesse à différents types de perturbations. En supposant cette étape correctement réalisée, il est possible d'étudier l'impact de n'importe quel paramètre sur la restitution des produits scientifiques.

Chapitre 5

Résolution des ambiguïtés de phase

5.1 Une problématique

5.1.1 Le contexte

La question de la détermination des ambiguïtés de phase est fondamentale pour l'ensemble des transferts de temps-fréquence. En effet, pour toutes ces techniques, les observables de phase possèdent une bien meilleure précision que les mesures de code, ce qui les rend indispensables pour atteindre les performances ultimes de la comparaison. Mais ces mesures de phase sont entachées d'un nombre entier de périodes du signal considéré que l'on nomme *ambiguïtés de phase*. C'est pourquoi la considération et l'implémentation des observables de phase dans les techniques de transfert de temps-fréquence nécessitent la résolution de ces ambiguïtés. Celle-ci a été étudiée en détails pour l'ensemble des méthodes mais plus particulièrement pour le GPS [94, 95].

5.1.2 La mission ACES

Il existe des différences entre la méthode de comparaison par GPS et le Lien Micro-Onde. Ces divergences ont d'énormes répercussions sur la résolution des ambiguïtés de phase puisqu'elles caractérisent la nature de ces comparaisons.

D'une part, le MWL est une méthode de transfert de temps deux voies qui utilise trois fréquences (cf. section 1.2). La combinaison des mesures provenant des trois signaux permet d'éliminer les effets contraignants tout en permettant l'étude du comportement des horloges. Dans le cas du GPS, les signaux sont uniquement émis des satellites vers les stations terrestres (transfert une voie) et n'offrent donc pas les mêmes possibilités de combinaison que le MWL (cf. partie 1.2).

D'autre part, exceptée la troisième fréquence qui est nécessaire à l'évaluation du Contenu Total Électronique de l'ionosphère, les fréquences des signaux utili-

sées pour le MWL sont plus élevées que celles exploitées par le système GPS. En effet, pour le transfert de temps de la mission ACES, il y a presque un ordre de grandeur entre la plus faible et la plus haute des fréquences. Cette différence permet une plus grande précision sur les mesures mais induit des délais ionosphériques d'ordres de grandeur différents (le délai ionosphérique est inversement proportionnel au carré de la fréquence).

Ces différences fondamentales impliquent que l'identification des ambiguïtés de phase doit être considérée dans le cas particulier de la mission ACES.

Pour des raisons de clarté, les délais internes sont omis intentionnellement dans l'étude des ambiguïtés de phase. Des explications concernant cette absence seront néanmoins fournies aux moments critiques. Les expressions des observables de code, $\Delta\tau^s(\tau^s(t_2))$, $\Delta\tau^g(\tau^g(t_4))$ et $\Delta\tau^g(\tau^g(t_6))$, et de phase, $\Delta\tau_\phi^s(\tau^s(t_2))$, $\Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_4))$ et $\Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_6))$, sont données respectivement par les équations (2.34), (2.35), (2.36), (4.51), (4.52) et (4.53). Les trois dernières introduisent les ambiguïtés de phase N_1 , N_2 et N_3 pour les signaux de fréquence f_1 , f_2 et f_3 . De façon similaire à l'équation (2.54), la désynchronisation des horloges spatiale et terrestre peut s'exprimer en fonction des observables de phase et des ambiguïtés de phase par :

$$\begin{aligned} \tau^g(t_a) - \tau^s(t_a) = & \frac{1}{2} \left(\Delta\tau_\phi^s(\tau^s(t_2)) - \Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_4)) - \frac{N_1}{f_1} \right. \\ & + \frac{N_2}{f_2} + \Delta - \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right) \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} \times \\ & \left. \left(\Delta\tau_\phi^s(\tau^s(t_4)) - \Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_6)) - \frac{N_2}{f_2} + \frac{N_3}{f_3} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

où le dernier terme est la correction de l'effet de l'ionosphère, et où Δ inclut l'ensemble des termes provenant de l'asymétrie des trajets des signaux, des délais troposphériques, des corrections relativistes ou des termes ionosphériques d'ordres plus élevés. Bien que les termes contenus dans le paramètre Δ donnent des effets supérieurs aux spécifications de la mission et doivent, de ce fait, être pris en compte lors de l'évaluation de la désynchronisation, ils ne sont pas pertinents pour la résolution des ambiguïtés de phase, et seront donc mis de côté dans la suite.

Selon l'équation (5.1), la détection des sauts de cycle lors de la résolution des ambiguïtés est fondamentale pour les trois fréquences. En effet, une erreur d'un

cycle sur f_1 , f_2 et f_3 (c'est-à-dire une erreur d'une unité dans la détermination des entiers N_1 , N_2 et N_3) conduit respectivement à une erreur de $3.7 \cdot 10^{-11}$ s, $3.4 \cdot 10^{-11}$ s et $1.0 \cdot 10^{-12}$ s. Ces erreurs potentielles d'un cycle donnent des biais qui surpassent la limite de 0.3 ps imposée initialement.

5.1.3 L'implémentation

Jusqu'à présent, nous n'avons que très peu évoqué - de manière intentionnelle - les mesures de la phase porteuse et la résolution des ambiguïtés des phases par l'algorithme de traitement.

Cette étape est réalisée après la détermination des produits scientifiques à partir des observables de code. De par la nature de la mesure de phase, les ambiguïtés de phase sont des nombres entiers. Cette information nous permet, une fois l'estimation N'_i de N_i réalisée (N'_i est un réel évalué à l'aide d'une combinaison des mesures bruitées, N_i est un entier naturel défini précédemment), de fixer ce paramètre à l'entier le plus proche selon la figure 5.1. Par exemple, si l'évaluation de N'_i est égale 0.49, alors l'ambiguïté de phase N_i est fixée à 0. Par contre, si $N'_i = 0.51$, alors on prend $N_i = 1$. En effet, on considère que pour tout réel inclus dans l'intervalle $[N_i - 1/2, N_i + 1/2]$, l'ambiguïté de phase correspondante est fixée à l'entier N_i .

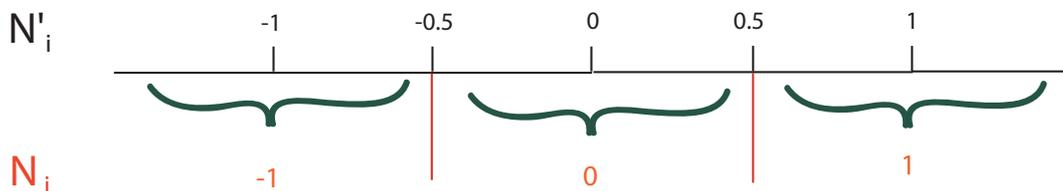


FIG. 5.1 : Sélection de l'entier le plus proche lors de la détermination des ambiguïtés de phase.

Lorsque cette ambiguïté est finalement levée, on réalise, de la même façon que pour les observables de code, une détermination de l'ensemble des produits scientifiques. Cependant, les effets de l'ionosphère sur la propagation du code et de la phase diffèrent. Cette dissimilitude provient du fait que l'ionosphère a tendance à ralentir le code et à accélérer la phase porteuse (équations (2.15) et (2.16)).

Pour avoir accès aux ambiguïtés de phase, l'idée intuitive est de faire la différence entre les mesures de code et de phase porteuse réalisées au même temps

pour annuler les termes dominants de propagation. De cette manière, les temps de propagation des signaux s'annulent à un très bon niveau et les retards ionosphériques - qui sont différents pour le code et la phase - persistent.

Par exemple pour le signal de fréquence f_1 , son ambiguïté de phase est donnée par :

$$\frac{N_1}{f_1} = \Delta\tau_\phi^s(\tau^s(t_2)) - \Delta\tau^s(\tau^s(t_2)) + \Delta_{phase}^{iono} - \Delta_{code}^{iono}. \quad (5.2)$$

L'évaluation de la différence $\Delta_{phase}^{iono} - \Delta_{code}^{iono}$ nécessite l'estimation des termes à prendre en compte lors du calcul des ambiguïtés de phase. Les amplitudes des termes ionosphériques sont retranscrites dans le tableau 5.1 et exprimées en nombre de cycles de la fréquence considérée afin d'obtenir une estimation de leur effet sur le résultat final.

TAB. 5.1 : Amplitudes des différents termes en f^{-k} de l'effet ionosphérique pour les fréquences f_1 et f_3 exprimées en nombre de périodes du signal considéré.

Termes en f^{-k}	f^{-2}	f^{-3}	f^{-4}
Fréquence f_1	23.9	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
Fréquence f_3	143.9	0.11	$4.4 \cdot 10^{-3}$

Ainsi, pour la fréquence f_1 , seul le terme dominant¹ doit nécessairement être pris en compte, bien que les termes d'ordres supérieurs peuvent être estimés afin d'augmenter la précision du calcul. L'équation (5.2) permettant l'estimation de l'ambiguïté sur la première fréquence s'écrit à présent :

$$\frac{N_1}{f_1} = \Delta\tau_\phi^s(\tau^s(t_2)) - \Delta\tau^s(\tau^s(t_2)) - 2 \cdot \frac{40.308}{cf_1^2} C_e, \quad (5.3)$$

où le contenu électronique de l'ionosphère est déterminé à partir des observables de code des fréquences f_2 et f_3 et de l'équation (2.79).

Pour la deuxième fréquence, une équation équivalente à (5.3) est aussi déduite par la soustraction des mesures de code et de phase de la même fréquence et au même temps coordonné. Dans cette expression, le paramètre ionosphérique C_e sera aussi évalué à partir de l'équation (2.79). On obtient alors :

¹Pour la fréquence f_1 , le terme inversement proportionnel à f^2 atteint des amplitudes supérieures à 0.5 cycle alors que les autres restent négligeables par rapport au demi-cycle.

$$\frac{N_2}{f_2} = \Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_4)) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) - 2 \cdot \frac{40.308}{cf_2^2} C_e. \quad (5.4)$$

Cependant, pour la troisième fréquence, les valeurs du tableau 5.1 indiquent qu'il est préférable de considérer le terme ionosphérique en f^{-3} . L'expression permettant d'évaluer l'ambiguïté de phase sur f_3 s'écrit :

$$\frac{N_3}{f_3} = \Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_6)) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_6)) - 2 \cdot \frac{40.308}{cf_3^2} C_e - \frac{3 \ 7527}{2 \ cf_3^3} (\vec{B} \cdot \vec{k}) C_e. \quad (5.5)$$

Les équations (5.3), (5.4) et (5.5) nécessitent la détermination du paramètre ionosphérique C_e : on pourrait alors penser à utiliser les mesures du Contenu Total Électronique fournies par l'IGS² et obtenues à partir des systèmes de positionnement (GPS, GLONASS,...). Celles-ci présentent des erreurs sur C_e inférieures à $8 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-2}$ et conduiraient à des erreurs importantes³ sur la détermination des ambiguïtés de phase N_i . Par conséquent, l'évaluation du Contenu Total en Électrons doit être réalisée à l'aide des mesures du Lien Micro-Onde afin d'espérer parvenir à la précision nécessaire à la résolution des ambiguïtés.

Ces méthodes de détermination des ambiguïtés de phase données par les équations (5.3), (5.4) et (5.5) sont implémentées dans l'algorithme de traitement de données décrit au Chapitre 4. Si l'on ajoute ni bruit ni erreur dans la création des observables brutes, les résolutions des ambiguïtés de phase démontrent des résultats impeccables quelles que soient les valeurs des paramètres N_1 , N_2 et N_3 . Cependant, l'addition de perturbations lors de la simulation des mesures brutes va dégrader la réussite de la détermination des N_i .

Dans la suite de ce chapitre, la statistique de résolution des ambiguïtés de phase sera étudiée. En considérant les niveaux de bruit mesurés sur le modèle d'ingénierie du Lien Micro-Onde, des méthodes seront recherchées afin d'augmenter les probabilités de réussite de l'opération.

Cependant, les mesures considérées correspondent à des conditions extrêmement favorables pour le transfert de temps. Il sera donc nécessaire de considérer, par la suite, des situations réalistes et de prendre en compte l'ensemble des perturbations agissant sur la résolution des ambiguïtés de phase telles que des passages incomplets ou la dépendance du bruit du signal reçu avec l'élévation de la station spatiale.

²International GNSS Service : <http://www.igs.org/>

³En effet, d'après les équations (5.3), (5.4) et (5.5), la distinction d'un demi-cycle nécessite une précision de l'ordre de $2.5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-2}$ et $2.8 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-2}$ pour f_1 et f_2 respectivement, mais surtout des incertitudes inférieures à $0.4 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-2}$ pour la troisième fréquence.

5.2 Des méthodes de résolution

5.2.1 Bruit des mesures

Bien que ces méthodes aient montré des résultats fructueux sans perturbation, l'ajout de bruit sur les observables peut considérablement dégrader les performances de la détection des ambiguïtés de phase. Il est donc nécessaire d'étudier le taux de réussite de la résolution des ambiguïtés de phase en fonction des bruits affectant l'ensemble des mesures de code et de phase pour les trois fréquences.

Pour la suite, on note δC_i l'erreur sur la mesure de code de la fréquence f_i au temps considéré et $\delta \Phi_i$ l'erreur correspondante sur la mesure de phase. On essaie ici d'estimer l'erreur δN_i faite sur l'ambiguïté de phase N_i en fonction des bruits sur les observables de la mission.

Par exemple pour le signal de fréquence f_1 , l'erreur sur l'estimation de l'ambiguïté de phase est donnée à partir de l'équation (5.3) par :

$$\frac{\delta N_1}{f_1} = \delta \Phi_1 - \delta C_1 - 2 \frac{40.308}{c f_1^2} \delta C_e, \quad (5.6)$$

où δC_e est l'erreur sur le contenu électronique ionosphérique .

L'expression de l'erreur δC_e sur la concentration électronique ionosphérique découle de la différenciation de l'équation (2.79) :

$$\frac{40.308}{c} \delta C_e = \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} \left(\delta C_2 - \delta C_3 \right), \quad (5.7)$$

puisqu'à la vue des erreurs orbitographiques typiques, les autres sources d'erreurs sont négligeables.

La combinaison des équations (5.6) et (5.7) mène à l'expression suivante :

$$\frac{\delta N_1}{f_1} = \delta \Phi_1 - \delta C_1 - \frac{2}{f_1^2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} (\delta C_2 - \delta C_3), \quad (5.8)$$

qui, d'après les valeurs des fréquences du Lien Micro-Onde, se réécrit en :

$$\frac{\delta N_1}{f_1} = \delta \Phi_1 - \delta C_1 - 5.7 \cdot 10^{-2} (\delta C_2 - \delta C_3). \quad (5.9)$$

De manière similaire, l'expression de l'erreur sur N_2 provient de la combinaison des équations (5.4) et (5.7) :

$$\frac{\delta N_2}{f_2} = \delta\Phi_2 - \delta C_2 - \frac{2}{f_2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} (\delta C_2 - \delta C_3), \quad (5.10)$$

soit :

$$\frac{\delta N_2}{f_2} = \delta\Phi_2 - \delta C_2 - 4.8 \cdot 10^{-2} (\delta C_2 - \delta C_3). \quad (5.11)$$

Concernant la dernière fréquence f_3 , même si le deuxième ordre du retard ionosphérique intervient dans la détermination des ambiguïtés de phase (cf. équation (5.5)), l'erreur de ce terme a un rôle négligeable dans l'expression de l'incertitude δN_3 sur l'entier N_3 en fonction des erreurs des observables de code et de phase du Lien Micro-Onde. On a alors :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - \delta C_3 - \frac{2}{f_3} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} (\delta C_2 - \delta C_3), \quad (5.12)$$

qui se réécrit selon :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - \delta C_3 - 2.04 \cdot (\delta C_2 - \delta C_3). \quad (5.13)$$

Dans la dernière équation (5.13), deux termes font intervenir le bruit δC_3 de l'observable de code de la fréquence f_3 : ils sont parfaitement corrélés et s'annulent donc en partie. L'équation (5.13) s'exprime en fait selon :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - 2.04 \cdot \delta C_2 + 1.04 \cdot \delta C_3. \quad (5.14)$$

La figure 5.2 montre les écarts types d'Allan temporels de mesures de code et de phase réalisées sur un modèle du MWL fin novembre 2007 par TimeTech. Ces mesures expérimentales ont été effectuées sur un signal de fréquence f_1 pour une puissance de -95 dBm correspondant à une position zénithale de la station spatiale.

Le bruit affectant ces mesures expérimentales présente un écart type égal à la picoseconde pour les données de code et égal à $2.7 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ pour les données de phase.

Des résultats analogues sont attendus pour la deuxième fréquence puisque les deux fréquences f_1 et f_2 sont relativement proches. Par contre, concernant les mesures provenant de la troisième fréquence f_3 , on suppose que le rapport des bruits (écarts types) sur les fréquences f_3 et sur f_1 correspond au rapport des *chip-rates* (de l'ordre de 100) pour les mesures de code, et au rapport des fréquences (de l'ordre de 7) pour les mesures de phase porteuse.

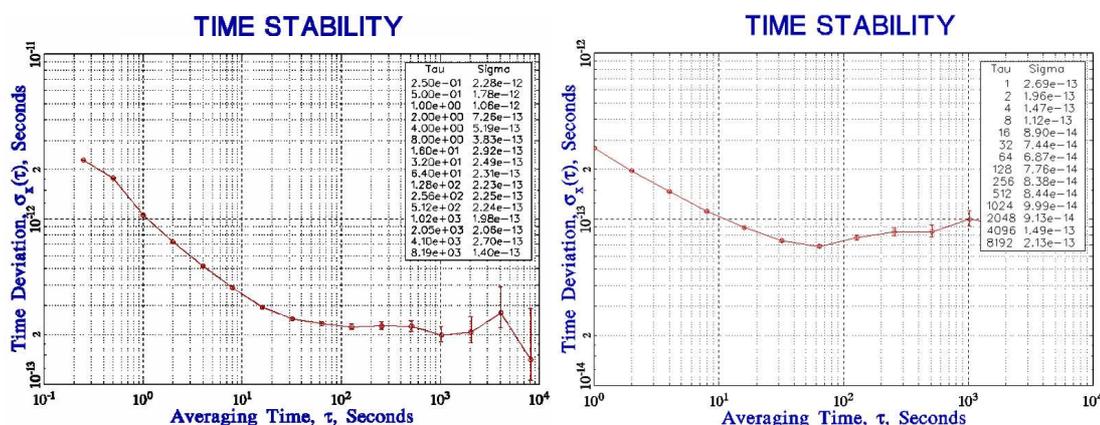


FIG. 5.2 : Écarts types d'Allan temporels pour les mesures de code (figure de gauche) et de phase (figure de droite) réalisées sur le modèle d'Ingénierie du MWL à -95 dBm.

Dans le tableau 5.2 sont retranscrits les intervalles de confiance à 95 %⁴ à 1 s des bruits intervenant dans la détermination des nombres entiers de cycles à partir des équations (5.9), (5.11) et (5.13). Concernant la troisième fréquence, le facteur 2 apparaissant pour l'erreur du terme ionosphérique permet de souligner son annulation partielle avec le bruit sur le code (voir équation (5.14)).

TAB. 5.2 : Incertitudes à 2σ des termes intervenant dans les équations (5.9), (5.11) et (5.13) exprimées en nombre de cycles de la fréquence considérée.

Incertitudes à 2σ	f_1	f_2	f_3
Bruit du code	0.027	0.029	0.45
Bruit sur la phase porteuse	0.002	0.003	0.003
Erreur ionosphérique provenant du bruit sur le code en f_3	0.154	0.141	2×0.45
Bruit sur N_i (équations (5.9), (5.11) et (5.13))	0.156	0.144	0.45

Les niveaux de bruits apparaissant dans la résolution des ambiguïtés de phase (cf. tableau 5.2) montrent que les termes faisant intervenir le bruit du code de la troisième fréquence sont largement prédominants sur les autres sources d'erreurs. En effet, la mesure de code sur la troisième fréquence nécessaire à l'estimation

⁴L'intervalle de confiance à 95 % désigne l'incertitude statistique comprenant 95 % des cas médians. Si le problème étudié comporte un nombre infini de degré de liberté, alors cette incertitude est égale à $1.96 \cdot \sigma$, où σ correspond à l'écart type classique.

du délai ionosphérique est entachée d'une erreur supérieure d'un facteur cent au bruit sur les deux autres fréquences du fait du rapport des *chip-rates* (taux d'échantillonnage des codes).

On remarque aussi que l'identification de ces ambiguïtés a beaucoup plus de probabilités d'être fructueuse pour les signaux de la bande Ku (f_1 et f_2) que pour la troisième fréquence. En effet, le tableau 5.2 indique que l'écart type de l'erreur sur la détermination de N_3 est trois fois plus important que sur l'évaluation de N_1 ou N_2 .

5.2.2 Résolution par suppositions

Pour réduire les statistiques de saut de cycles sur la troisième fréquence, il est nécessaire de faire des combinaisons d'observables en éliminant ou - tout du moins - en réduisant l'impact du bruit de code du signal f_3 . Cette observable de code intervient, d'une part, dans l'ensemble des équations à travers l'évaluation de la variable ionosphérique C_e (équation (5.7)) et, d'autre part, lors de la résolution du nombre entier N_3 , par la différence de mesures de code et de phase (équation (5.5)).

Afin de résoudre ce problème, on peut supposer que les ambiguïtés de phase des deux premiers signaux ont été correctement déterminées et chercher une nouvelle combinaison d'observables permettant d'avoir accès au paramètre N_3 avec un niveau de bruit convenable.

Dans ce but, on adopte un certain nombre d'hypothèses. Tout d'abord, on suppose que les trajets effectués par les signaux de code et de phase associés au même temps coordonnée et à la même fréquence sont identiques. Cela revient à négliger la variation de délai géométrique de propagation du fait de l'effet ionosphérique opposé sur le code et la phase.

Ensuite, on fait l'hypothèse que les signaux émis par la station spatiale et reçus au même temps coordonnée par la station terrestre ont la même trajectoire dans l'atmosphère. L'effet ionosphérique associé aux mouvements des stations (appelé effet Sagnac ou de *bending*) entre les fréquences f_2 et f_3 est ainsi négligé.

Enfin, on suppose que les couches traversées par les signaux montant et descendants sont équivalentes pour les observables que l'on combine (c'est-à-dire pour des signaux réceptionnés à quelques millisecondes d'intervalle). Ce type d'hypothèse a été implicitement utilisé lors de l'écriture de l'équation de désynchronisation (2.54), de l'expression de la différence de temps de propagation $T_{12} - T_{34}$ (2.76) ou de l'expression du Contenu Total en Électrons (2.79). En effet, sur des temps caractéristiques de l'ordre de la milliseconde, le Contenu Électronique Total C_e est supposé constant et les couches traversées par les signaux identiques (cf. figure 4.5).

La combinaison des observables de phase des signaux de fréquence f_2 et f_3 donne une expression de C_e analogue à (5.7) mais qui fait intervenir les ambiguïtés de phase N_2 et N_3 . Le renversement de cette équation conduit à une nouvelle expression de N_3 qui ne dépend pas de la mesure de code sur la troisième fréquence :

$$\frac{N_3}{f_3} = \Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_6)) - \Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_4)) + \frac{N_2}{f_2} + \frac{f_2^2 - f_3^2}{f_2^2 f_3^2} \frac{40.308}{c} C_e. \quad (5.15)$$

Dans l'équation précédente, on estime le Contenu Total en Électrons C_e par la combinaison de la mesure de code et de phase du signal de fréquence f_2 :

$$\frac{40.308}{c} C_e = \frac{f_2^2}{2} \left(\Delta\tau_\phi^g(\tau^g(t_4)) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4)) - \frac{N_2}{f_2} \right). \quad (5.16)$$

L'équation (5.16) permet d'évaluer d'une nouvelle manière le paramètre ionosphérique C_e dont les erreurs dépendent seulement de δC_2 et de $\delta\Phi_2$. Elle remplace donc l'équation (5.7) et ne dépend pas de l'erreur δC_3 sur l'observable de code du troisième signal.

Le paramètre C_e aurait pu être déduit de la différence des observables de code de f_1 et f_2 , mais, bien que le bruit de mesure soit plus faible, la différence de fréquences de ces deux signaux est trop faible et rend cette mesure du Contenu Total Électronique imprécise.

En insérant l'équation (5.16) dans (5.15), l'erreur δN_3 sur l'ambiguïté de phase N_3 s'écrit selon :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - \delta\Phi_2 \cdot \left(\frac{f_2^2 - f_3^2}{2f_3^2} + 1 \right) + \delta C_2 \cdot \frac{f_2^2 - f_3^2}{2f_3^2} + \frac{\delta N_2}{f_2} \cdot \left(\frac{f_2^2 - f_3^2}{2f_3^2} + 1 \right), \quad (5.17)$$

soit :

$$\boxed{\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - 22.72 \cdot \delta\Phi_2 + 21.72 \cdot \delta C_2 + 22.72 \cdot \frac{\delta N_2}{f_2}.} \quad (5.18)$$

On obtient donc une détermination de l'ambiguïté N_3 indépendante de l'erreur δC_3 sur le code du signal de fréquence f_3 , mais au prix d'une dépendance forte sur l'erreur δC_2 et de la connaissance de l'ambiguïté N_2 .

Une autre méthode est obtenue en considérant l'équation (5.5) et en séparant en deux parties le terme ionosphérique, dont la première est évaluée grâce à l'équation (2.79), la seconde par la combinaison (5.16). On obtient alors :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - \delta C_3 - \frac{2}{f_3^2} \frac{40.3}{c} \delta C_e = \delta\Phi_3 - \delta C_3 - \frac{1}{f_3^2} \frac{40.3}{c} \delta C_e - \frac{1}{f_3^2} \frac{40.3}{c} \delta C_e. \quad (5.19)$$

En combinant l'équation (5.7) et la différenciation de la formule (5.16) à travers l'équation (5.19), on obtient :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - \delta C_3 - \frac{1}{f_3^2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2 - f_3^2} (\delta C_2 - \delta C_3) - \frac{1}{2} \frac{f_2^2}{f_3^2} (\delta\Phi_2 - \frac{N_2}{f_2} - \delta C_2). \quad (5.20)$$

Du fait de la corrélation entre les termes, l'impact de l'erreur sur la mesure de code de f_3 diminue grandement. L'expression de l'erreur sur N_3 est alors donnée par :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 + \delta C_3 \cdot \left(\frac{f_2^2}{f_2^2 - f_3^2} - 1 \right) - \delta\Phi_2 \cdot \frac{f_2^2}{2f_3^2} + \delta C_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{f_2^2}{f_3^2} - \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_3^2} \right) + \frac{\delta N_2}{f_2} \cdot \frac{f_2^2}{2f_3^2}, \quad (5.21)$$

soit, si on considère les valeurs des fréquences du Lien Micro-Onde, l'équation précédente s'écrit selon :

$$\boxed{\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 + 2.3 \cdot 10^{-2} \cdot \delta C_3 - 22.22 \cdot \delta\Phi_2 + 21.20 \cdot \delta C_2 + 22.22 \cdot \frac{\delta N_2}{f_2}.} \quad (5.22)$$

De même que précédemment, l'équation (5.22) réduit considérablement l'impact de l'erreur δC_3 mais implique l'erreur sur les mesures de code et de phase de f_2 ainsi que sur la détermination de N_2 .

Enfin, une dernière solution consiste à utiliser seulement les mesures de phase des signaux de fréquence f_1 , f_2 et f_3 en supposant que les ambiguïtés de phase des deux premiers ont été correctement identifiées. Le terme ionosphérique de l'équation (5.15) est évalué en réalisant la différence des observables de phase de f_1 et f_2 . Par contre, il ne faut pas oublier que les distances géométriques parcourues par les signaux ascendants et descendants ne sont pas identiques et qu'il va falloir tenir compte de cette différence. L'erreur sur l'ambiguïté N_3 est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_3}{f_3} = & \delta\Phi_3 - \left(\delta\Phi_1 - \frac{\delta N_1}{f_1}\right) \cdot \frac{f_1^2(f_3^2 - f_2^2)}{f_3^2(f_1^2 - f_2^2)} + \left(\delta\Phi_2 - \frac{\delta N_2}{f_2}\right) \cdot \frac{f_2^2(f_3^2 - f_1^2)}{f_3^2(f_1^2 - f_2^2)} \\ & - \delta(\Delta_1 - \Delta_2) \cdot \frac{f_1^2(f_3^2 - f_2^2)}{f_3^2(f_1^2 - f_2^2)}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

où $\Delta_1 - \Delta_2$ correspond à la différence des trajets des signaux de fréquence f_1 et f_2 allégés de leur retard ionosphérique, et $\delta(\Delta_1 - \Delta_2)$ l'erreur sur ce terme.

Si l'erreur sur la différence des trajets géométriques des signaux f_1 et f_2 est négligeable (voir résultats du Chapitre 3), alors l'erreur δN_3 s'exprime selon :

$$\frac{\delta N_3}{f_3} = \delta\Phi_3 - 224.50 \cdot \left(\delta\Phi_1 - \frac{\delta N_1}{f_1}\right) + 223.50 \cdot \left(\delta\Phi_2 - \frac{\delta N_2}{f_2}\right). \quad (5.24)$$

Cette détermination de l'ambiguïté sur le troisième signal implique des coefficients extrêmement forts devant les erreurs de phase des deux premières fréquences. Cette dépendance s'explique par l'utilisation des signaux f_1 et f_2 pour l'évaluation du Contenu Total en Électrons, alors que leurs fréquences sont relativement proches.

De plus, l'équation (5.24) repose sur une hypothèse fondamentale : on a négligé les effets des horloges. Les bruits fournis par le modèle du MWL étant plus faibles que les spécifications initiales de la mission, il est donc légitime de se poser la question de l'effet du bruit des horloges sur la résolution des ambiguïtés de phase.

En fait, on a principalement considéré le bruit de mesure des observables car les combinaisons d'observables initiales (équations (5.3), (5.4) et (5.5)) ne correspondaient qu'à des différences d'observables de code et de phase à la même fréquence et au même temps de mesure. Dans cette configuration, le bruit des horloges disparaissait. En effet, on peut considérer que les erreurs d'horloges sont identiques sur les mesures de phase et de code associées au même temps de mesure. De plus, on fait l'hypothèse qu'au premier ordre, les erreurs des horloges sont égales pour les fréquences f_2 et f_3 mais de signe opposé à celles sur la première fréquence.

Un problème équivalent se pose pour la valeur de la désynchronisation entre les deux horloges. Le déplacement fréquentiel relativiste pourrait de manière similaire induire des erreurs supérieures à la période des fréquences du MWL.

Les trois méthodes développées précédemment (équations (5.18), (5.22) et (5.24)) ainsi que leurs déductions sont étudiées en détails. Les deux premières montrent une annulation de ces effets du fait des combinaisons réalisées. Cependant, l'utilisation de l'équation (5.24) pour la résolution de l'ambiguïté de phase sur la troisième fréquence impliquerait des sauts d'au moins un cycle⁵ du fait du bruit des horloges. par conséquent, cette dernière méthode conduit à des résultats inexacts et ne sera donc plus considérée par la suite.

Les délais internes interviennent dans la résolution des ambiguïtés de phase. Par conséquent, il est nécessaire que la différence des délais internes associés aux fréquences des signaux descendants, f_2 et f_3 , et au même temps coordonnée induise un bruit et un biais négligeable devant la période $1/f_3$ ⁶.

Le tableau 5.3 donne les incertitudes à $2 \cdot \sigma$ des bruits intervenant dans la résolution des ambiguïtés de phase exprimés en nombre de cycles de la fréquence considérée. Il se base, comme le tableau 5.2, sur les variances expérimentales de la figure 5.2. Il indique que les combinaisons d'observables données par les équations (5.18) et (5.22) permettent de réduire d'un facteur cinq l'écart type du bruit affectant la détermination de N_3 .

TAB. 5.3 : Intervalles de confiance à 95 % à 1 s des résolutions des ambiguïtés de phase N_i pour différentes méthodes (exprimés en nombre de cycles).

	Combinaison d'observables utilisée	Intervalle de confiance à 95 % de l'erreur
Résolution de N_1	équation (5.9)	0.156
Résolution de N_2	équation (5.11)	0.144
Résolution de N_3	équation (5.13)	0.450
	équation (5.18)	0.098
	équation (5.22)	0.096

⁵En effet, d'après le bruit de fréquence des horloges donné par l'équation (2.2), l'intégration de ce bruit sur 600 s conduirait à une erreur dont l'écart type serait supérieur à un cycle. Les déplacements relativistes de fréquence entraîneraient sur plusieurs jours des sauts de cycles beaucoup plus importants.

⁶Cette condition est largement vérifiée si les spécifications du Lien sont respectées, car la mesure de la désynchronisation des horloges implique des contraintes plus importantes sur les délais instrumentaux.

5.2.3 Remarques

La première remarque est liée au fait que les observables provenant du signal montant n'ont pas été utilisées dans la résolution de l'ambiguïté sur la troisième fréquence. Si on suppose que le paramètre ionosphérique C_e n'a pas changé entre les deux signaux de la bande Ku, alors les mesures de f_1 peuvent servir à estimer le délai ionosphérique de manière similaire à l'équation (5.16) :

$$\frac{40.308}{c}C_e = \frac{f_1^2}{2} \left(\Delta\tau_\phi^s(\tau^s(t_2)) - \Delta\tau^s(\tau^s(t_2)) - \frac{N_1}{f_1} \right). \quad (5.25)$$

dans ce cas, on peut déterminer le Contenu Total Électronique en réalisant la demi-somme des équations (5.25) et (5.16) menant à :

$$\frac{40.308}{c}\delta C_e = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f_1^2}{2}(\delta\Phi_1 - \delta C_1 - \frac{\delta N_1}{f_1}) + \frac{f_2^2}{2}(\delta\Phi_2 - \delta C_2 - \frac{\delta N_2}{f_2}) \right). \quad (5.26)$$

Cette combinaison permet de gagner un facteur $\sqrt{2}$ sur la variance des bruits dominants des équations (5.18) et (5.22) puisque les bruits sur f_1 et f_2 sont décorrélés.

La seconde remarque se rapporte à la résolution des ambiguïtés sur f_1 et f_2 . D'après les équations (5.9) et (5.11), l'erreur sur l'ambiguïté du signal f_2 est légèrement moins dépendante du bruit de code de la troisième fréquence que la détection d'un saut de cycle sur f_1 (un coefficient $4.8 \cdot 10^{-2} \cdot f_2$ au lieu de $5.7 \cdot 10^{-2} \cdot f_1$). Bien que la résolution des ambiguïtés de phase sur l'une des deux premières fréquences dépende du même bruit de code sur f_3 , et donc des mêmes fluctuations, on peut diminuer légèrement la statistique de sauts de cycles sur f_1 en supposant que le paramètre N_2 a été correctement identifié. Le délai ionosphérique est alors évalué à partir des données de code et de phase de la seconde fréquence selon l'équation (5.16).

L'erreur δN_1 sur l'ambiguïté de phase du signal de fréquence f_1 est alors donnée par :

$$\frac{\delta N_1}{f_1} = \delta\Phi_1 - \delta C_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2}(\delta\Phi_2 - \delta C_2 - \frac{\delta N_2}{f_2}). \quad (5.27)$$

Si les bruits sur les observables de code et de phase des fréquences f_1 et f_2 peuvent être négligés (cf. tableau 5.2), alors l'erreur δN_1 sur la détermination du nombre entier de sauts de cycles N_1 est égale à :

$$\delta N_1 = \frac{f_2}{f_1} \delta N_2 = 1.09 \cdot \delta N_2, \quad (5.28)$$

ce qui donne $\delta N_1 = \delta N_2$ après avoir fixé N_1 à l'entier le plus proche. Par conséquent, l'erreur d'un cycle sur la fréquence f_2 implique une erreur d'un nombre identique de périodes sur f_1 .

Cela a deux conséquences :

- d'une part, cela permet de diminuer la probabilité d'un saut de cycle sur la fréquence f_1 ,
- et, d'autre part, de réduire l'influence d'un saut de cycle sur la désynchronisation.

En effet, cette méthode permet de fixer l'erreur sur l'ambiguïté de phase de f_1 sur celle de f_2 et ainsi de s'assurer que l'on a $\delta N_1 = \delta N_2$. Elle a donc un effet fondamental sur le calcul de la désynchronisation puisqu'elle permet de réduire d'un ordre de grandeur l'effet d'un saut de cycle sur les signaux de la bande Ku. En fait, les erreurs étant corrélées, une erreur de cycle donne $\frac{1}{2f_1} - \frac{1}{2f_2} \approx 3.1 \cdot 10^{-12}$ s (voir équation (5.1)) ce qui reste intolérable à la vue des spécifications de la mission.

Cependant d'après les équations (5.18) et (5.22), une erreur d'un cycle sur N_2 (soit $\delta N_2 = 1$) entraîne nécessairement une erreur sur la résolution des ambiguïtés de phase de la troisième fréquence de $\delta N_3 \approx 22.5 \cdot \frac{f_3}{f_2} \cdot \delta N_2 \approx 3.4$. Cette valeur étant relativement proche de la frontière entre les entiers correspondant à 3 et 4 cycles, une erreur initiale d'un cycle sur l'ambiguïté de phase du signal de fréquence f_2 conduirait à une erreur sur la désynchronisation (cf. équation (5.1)) :

- de -5.8 ps si δN_3 est égale à trois cycles,
- ou de -6.8 ps si δN_3 est égale à quatre cycles.

5.2.4 Minimisation par méthode des moindres carrés

Mais quelle combinaison d'observables faut-il utiliser au final ?

En fait, le nombre de méthodes n'est pas limité. En effet, l'ambiguïté sur la troisième fréquence peut être exprimée par combinaison linéaire des équations (5.18) et (5.22).

Les méthodes utilisées pour essayer de réduire le bruit sur la résolution de l'ambiguïté N_3 ont été déterminées par combinaison linéaire des définitions des observables. Elles ont été déduites par raisonnement et par étapes avec le but d'éliminer le terme du code de la troisième fréquence. Cependant, il apparaît vraisemblable qu'il existe une solution qui, considérant les rapport des différents bruits, permet d'obtenir une variance finale optimale sur les différentes inconnues du

problème dont fait partie l'ambiguïté N_3 .

Un ajustement par moindres carrés va permettre de minimiser l'erreur sur les paramètres étudiés ou, peut-être même, d'apporter une solution à laquelle on n'aurait pas pensé. Le principe de minimisation par moindres carrés est largement utilisé en physique : il permet de comparer des données expérimentales entachées d'erreurs à une série de fonctions et de sélectionner celle qui reproduit au mieux ces données.

Pour le problème considéré, les mesures de code et de phase des trois fréquences doivent être exprimées en fonction des termes induisant les erreurs principales. Après analyse, on décompose les observables selon la base suivante :

- le délai de propagation Δ_{\uparrow} des signaux montants dans lequel n'est pas pris en compte l'effet de l'ionosphère,
- le délai de propagation Δ_{\downarrow} des signaux descendants sans prendre en compte l'effet de l'ionosphère,
- le terme ionosphérique I dominant $\frac{40.308}{c}C_e$,
- l'ambiguïté de phase N_1 sur le signal de fréquence f_1 ,
- l'ambiguïté de phase N_2 sur le signal de fréquence f_2 ,
- et l'ambiguïté de phase N_3 sur le signal de fréquence f_3 .

De cette façon, les expressions des mesures de code - C_1 , C_2 et C_3 - et de phase - Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 - s'expriment selon :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -T_1^2 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -T_2^2 & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 1 & -T_3^2 & 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow} \\ \Delta_{\downarrow} \\ I \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

où on utilise $T_i = 1/f_i$ pour des soucis de clarté.

L'écriture de ce système permet de reprendre l'étude de la résolution des ambiguïtés du début, i. e. avant la résolution par suppositions. Les expressions des observables font intervenir une matrice carrée inversible (cf. équation (5.29)). La méthode de résolution par moindres carrés n'a aucun intérêt ici puisque la résolution de ce système d'équations fournit une solution unique. Cette solution - alors indépendante des variances des bruits sur les observables - est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow} \\ \Delta_{\downarrow} \\ I \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T_1^2}{T_2^2-T_3^2} & \frac{T_1^2}{T_2^2-T_3^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T_3^2}{T_2^2-T_3^2} & \frac{T_2^2}{T_2^2-T_3^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_2^2-T_3^2} & -\frac{1}{T_2^2-T_3^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_1} & \frac{2T_1}{T_2^2-T_3^2} & -\frac{2T_1}{T_2^2-T_3^2} & \frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_2} \frac{T_2^2+T_3^2}{T_2^2-T_3^2} & -\frac{2T_2}{T_2^2-T_3^2} & 0 & \frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{2T_3}{T_2^2-T_3^2} & -\frac{1}{T_3} \frac{T_2^2+T_3^2}{T_2^2-T_3^2} & 0 & 0 & \frac{1}{T_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

En réécrivant le système précédent en fonction des fréquences, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow} \\ \Delta_{\downarrow} \\ I \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{f_1^2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & -\frac{1}{f_1^2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_3^2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & -\frac{1}{f_3^2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & 0 & 0 & 0 \\ -f_1 & -\frac{2}{f_1} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & \frac{2}{f_1} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & -f_2 \frac{f_2^2+f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & \frac{2}{f_2} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & 0 & f_2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{f_3} \frac{f_2^2 f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & f_3 \frac{f_2^2+f_3^2}{f_2^2-f_3^2} & 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

La troisième ligne de la matrice de l'équation (5.31) indique que le délai ionosphérique est évalué uniquement à partir des mesures de code des fréquences f_2 et f_3 . De plus, la résolution de l'ambiguïté de phase N_1 est réalisée en combinant cette évaluation du paramètre ionosphérique dans la différence des mesures de code et de phase issues de la fréquence f_1 . En fait, cette solution unique correspond exactement aux équations (5.9), (5.11) et (5.13).

Pour la seconde partie, on considère que les ambiguïtés de phase sur N_1 et N_2 ont été correctement résolues. De cette façon, les combinaisons données par les équations (5.18) et (5.22) pourront être comparées aux résultats provenant d'un ajustement par moindres carrés. Les équations alors mises en jeu sont :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & T_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & T_3^2 & 0 \\ 1 & 0 & -T_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & -T_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & -T_3^2 & T_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow} \\ \Delta_{\downarrow} \\ I \\ N_3 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

La matrice n'est plus carrée : c'est dans ce cas que la minimisation par moindres carrés va intervenir. Par conséquent, on note σ_{C1} , σ_{C2} et σ_{C3} les écarts-types des bruits sur les mesures de code des signaux respectivement de fréquences f_1 , f_2 et f_3 , ainsi que, de la même façon, $\sigma_{\Phi1}$, $\sigma_{\Phi2}$ et $\sigma_{\Phi3}$ les écarts types du bruit des mesures de phase correspondantes.

Analytiquement, la solution pour N_3 est donnée par :

$$N_3 = A^T \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

où la matrice A s'écrit :

$$A = \frac{f_3}{D} \left(\begin{array}{l} \frac{2}{f_1^2} \left(\sigma_{C2}^2 \sigma_{C3}^2 \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_2} \right) + \sigma_{C3}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \left(\frac{1}{f_3^2} + \frac{1}{f_2} \right) + \frac{2}{f_3^2} \sigma_{C2}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \right) \\ -2 \left(\sigma_{C1}^2 \sigma_{C3}^2 \left(\frac{1}{f_2^4} - \frac{1}{f_2^2 f_3^2} \right) + \sigma_{C3}^2 \sigma_{\Phi 1}^2 \left(\frac{1}{f_2^4} - \frac{1}{f_2^2 f_3^2} \right) + \frac{2}{f_1^4} \sigma_{C3}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 + \sigma_{C1}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \left(\frac{1}{f_3^4} - \frac{1}{f_2^2 f_3^2} \right) + \sigma_{\Phi 1}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \left(\frac{1}{f_3^4} - \frac{1}{f_2^2 f_3^2} \right) \right) \\ \sigma_{C1}^2 \sigma_{C2}^2 \left(\frac{1}{f_3^4} - \frac{1}{f_2^4} \right) + \sigma_{C2}^2 \sigma_{\Phi 1}^2 \left(\frac{1}{f_3^4} - \frac{1}{f_2^4} \right) - \frac{4}{f_1^4} \sigma_{C2}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 + \sigma_{C1}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \left(\frac{1}{f_3^4} - \frac{1}{f_2^4} \right) + \sigma_{\Phi 1}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \left(\frac{1}{f_3^4} - \frac{1}{f_2^4} \right) \\ - \frac{2}{f_1^2} \left(\sigma_{C2}^2 \sigma_{C3}^2 \left(\frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_2} \right) + \sigma_{C3}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \left(\frac{1}{f_3^2} + \frac{1}{f_2} \right) + \frac{2}{f_3^2} \sigma_{C2}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \right) \\ -2 \left(\frac{2}{f_1^4} \sigma_{C2}^2 \sigma_{C3}^2 + \sigma_{C1}^2 \sigma_{C3}^2 \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_2^2 f_3^2} \right) + \sigma_{C1}^2 \sigma_{C2}^2 \left(\frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_2} \right) + \sigma_{C3}^2 \sigma_{\Phi 1}^2 \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_2^2 f_3^2} \right) + \sigma_{C2}^2 \sigma_{\Phi 1}^2 \left(\frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_2^2 f_3^2} \right) \right) \end{array} \right) \quad (5.34)$$

où le dénominateur D s'exprime par :

$$D = \left(\sigma_{C1}^2 \sigma_{C2}^2 + \sigma_{C2}^2 \sigma_{\Phi 1}^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_2^2} \right)^2 + \left(\sigma_{C1}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 + \sigma_{\Phi 1}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{f_3} - \frac{1}{f_2} \right)^2 \\ + 4 \frac{1}{f_1^2} \cdot \left(\sigma_{C2}^2 \sigma_{\Phi 2}^2 + \sigma_{C2}^2 \sigma_{C3}^2 + \sigma_{\Phi 2}^2 \sigma_{C3}^2 \right) + 4 \frac{1}{f_2^2} \cdot \left(\sigma_{C1}^2 \sigma_{C3}^2 + \sigma_{C3}^2 \sigma_{\Phi 1}^2 \right). \quad (5.35)$$

5.2.5 Conclusion

La résolution par moindres carrés donnée par les équations (5.34) et (5.35) offre la solution optimale à la résolution de l'ambiguïté de phase sur la troisième fréquence. Cette combinaison dépend des incertitudes sur les mesures de code et de phase et devra donc être adaptée dans le cadre de la mission réelle.

Le tableau 5.4 rappelle les intervalles de confiance à 95 % des différentes méthodes de résolution des ambiguïtés de phase si l'on considère les variances des bruits mesurés sur le modèle d'ingénierie.

TAB. 5.4 : Intervalles de confiance à 95 % à 1 s des résolutions des ambiguïtés de phase N_i pour différentes méthodes exprimés en nombre de cycles.

	Combinaison d'observables utilisée	Intervalle de confiance à 95 % de l'erreur
Résolution de N_1	équation (5.9)	0.144
Résolution de N_2	équation (5.11)	0.144
Résolution de N_3	équation (5.13)	0.45
	équation (5.18)	0.098
	équation (5.22)	0.096
	équations (5.34) et (5.35)	0.060

Dans ce cas, l'ajustement par moindres carrés permet de gagner un facteur 1.6 sur l'écart type de l'erreur de δN_3 . Cependant, sa dépendance vis-à-vis du bruit mesuré rend son utilisation lourde et complexe.

D'après le tableau 5.4, la résolution de l'ensemble des trois ambiguïtés de phase échoue dans moins d'un cas sur cent milliards. Cependant, les niveaux de bruit considérés correspondent à des bruits idéaux mesurés pour une position zénithale de la station spatiale. Bien que les niveaux de bruit soient du coup assez faibles, un large arsenal de méthodes a été développé pour résoudre de manière efficace les ambiguïtés de phase N_i . Il prendra néanmoins tout son sens dans la partie suivante lorsqu'un modèle réaliste des conditions de la mission et des mesures sera considéré.

5.3 Un modèle réaliste

Dans cette partie, on étudie les statistiques de résolution des ambiguïtés de phase dans des situations proches de la réalité de la mission. En effet, lors d'un

passage de la station spatiale au-dessus de la station terrestre, la résolution des ambiguïtés de phase va être dégradée par plusieurs effets :

- les temps morts dans les mesures (cf. Chapitre 4),
- l'impureté du bruit de mesure (bruit non idéalement blanc),
- et la dégradation de ce bruit en fonction de la puissance du signal reçu.

5.3.1 Des passages incomplets

L'ambiguïté de phase N_i sur l'observable de phase de fréquence f_i est évaluée à l'aide de la combinaison des mesures de phase et de code associées au même temps coordonné puis en fixant son estimation à l'entier naturel le plus proche. Ce nombre entier de périodes qui s'ajoute aux mesures de phase reste constant pour des mesures réalisées continûment dans le temps, c'est-à-dire tant que l'acquisition du signal est conservée. Si un problème se produit durant la mesure (tel que le passage d'un panneau solaire d'ISS devant l'antenne de réception), cela conduira à deux jeux de données pour lesquels les ambiguïtés de phase ne seront pas identiques (voir partie 4.3.2).

La conservation de ces nombres de périodes signifie que, durant un passage, plusieurs évaluations du même nombre N_i sont réalisées, et que, par conséquent, il est possible de moyennner le bruit obtenu sur leur calcul afin d'obtenir une valeur de meilleure précision.

Par exemple, si on considère que le bruit de mesure correspond à du bruit blanc de phase dont la variance d'Allan à 1 s coïncide avec celles de la figure 5.2, l'écart type de l'erreur résultante de la moyenne diminue avec le nombre de mesures et décroît comme \sqrt{t} , où t , exprimé en secondes, est la longueur temporelle de l'intervalle de mesures considéré. Les intervalles de confiance à 95 % de l'erreur δN_i obtenus par les combinaisons (5.9), (5.11), (5.13) et (5.22) sont tracés sur la figure 5.3.

Ainsi, la résolution des ambiguïtés de phase va pouvoir être réduite en moyennnant sur des ensembles de mesures continues. Cependant, l'efficacité de ce moyennnage va dépendre énormément du bruit existant sur les observables, de son type et de son amplitude.

5.3.2 Du bruit Flicker en 1/f

En réalité, le bruit apparaissant sur les mesures du MWL n'est pas parfaitement blanc, comme le montre la figure 5.2. En effet, pour un passage de l'ISS au-dessus d'une station terrestre - c'est-à-dire pour une durée inférieure à 600 s -, le bruit mesuré sur le modèle d'ingénierie peut être quantifié simplement par

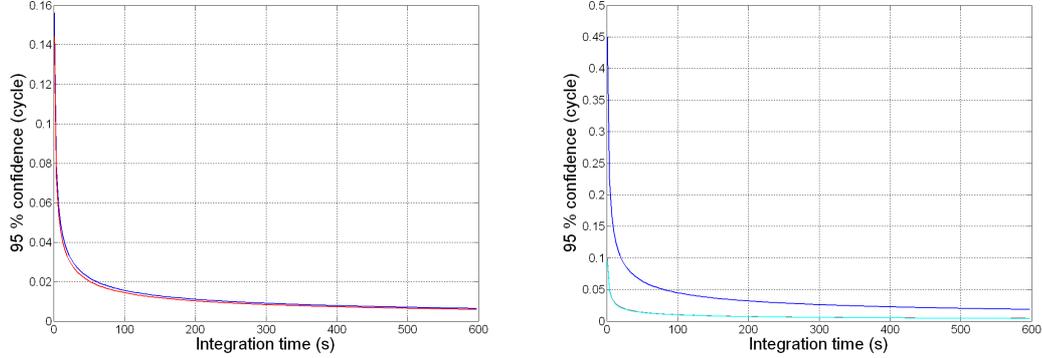


FIG. 5.3 : Décroissance de l'intervalle de confiance à 95 % du bruit (exprimé en nombre de cycles) sur N_1 - courbe bleue - et N_2 - courbe rouge - (figure de gauche) selon les équations (5.9) et (5.11), ainsi que sur N_3 (figure de droite) selon les équations (5.13) - courbe bleue - et (5.22) - courbe verte.

sa variance d'Allan temporelle. Pour un ratio signal sur bruit (S/N) à -95 dBm, les variances d'Allan mesurées sur les observables de code et de phase porteuse, respectivement $(\sigma_x^c(\tau))^2$ et $(\sigma_x^\phi(\tau))^2$, peuvent être approximées par :

$$(\sigma_x^c(\tau))^2 = (1 \cdot 10^{-12} \tau^{-\frac{1}{2}})^2 + (2 \cdot 10^{-13})^2 s, \quad (5.36)$$

$$(\sigma_x^\phi(\tau))^2 = (2.7 \cdot 10^{-13} \tau^{-\frac{1}{2}})^2 + (8 \cdot 10^{-14})^2 s, \quad (5.37)$$

où τ est le temps d'intégration [62].

Le bruit mesuré se compose de bruit blanc de phase et de bruit Flicker (bruit de scintillement de phase). Lors de la résolution des ambiguïtés, le premier va rapidement se moyennner comme la racine carré du temps pour laisser place au bruit Flicker qui ne se moyenne pas et limite l'efficacité du moyennage des données continues.

On compare, sur la figure 5.4, le moyennage du bruit mesuré sur le code du modèle d'Ingénierie à -95 dBm avec celui d'un bruit blanc pur avec le même écart type à 1 s ($\sigma = 1 \cdot 10^{-12}$ s).

On rappelle que le bruit de mesure de code et de phase pour les fréquences f_2 et f_3 est estimé en considérant le rapport des taux d'échantillonnage du code (*chip-rates*) et du rapport des fréquences. On suppose, de façon pessimiste, que les deux types de bruit (blanc et Flicker) sont affectés de manière similaire par la puissance reçue pour les observables de code et de phase⁷. Avec ces hypothèses,

⁷En réalité, Les premiers résultats expérimentaux montrent que le niveau de bruit blanc varie avec la puissance du signal reçue (cf. paragraphe 5.3.3) alors que ce n'est que très peu le cas pour

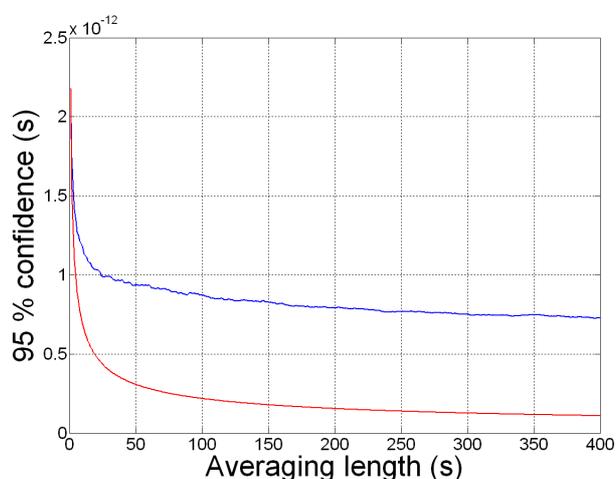


FIG. 5.4 : Comparaison de l'effet d'un moyennage sur l'intervalle de confiance à 95 % pour le bruit mesuré sur le modèle d'ingénierie pour une fréquence de la bande Ku (courbe bleue) et pour un bruit blanc dont la variance classique coïncide avec celle du bruit mesuré (courbe rouge) en fonction du temps.

les variances du bruit des mesures de code et de phase des signaux de fréquence f_1 et f_2 sont approximativement identiques. Concernant la troisième fréquence, le bruit sur les mesures est multiplié par un facteur 7 pour la phase et par un facteur 100 pour le code par rapport aux mesures de la figure 5.2. Les écarts types d'Allan temporels correspondants sont tracés sur la figure 5.5.

La figure 5.5 indique que la mesure sur le code de la fréquence f_3 reste limitante dans la résolution des ambiguïtés de phase. Il est donc nécessaire de faire appel aux équations (5.18) et (5.22). Lors de l'évaluation des entiers N_i , l'intégration de mesures continues est plafonnée par le bruit de scintillement de phase dont la variance n'évolue pas avec le temps (cf. figure 5.4).

Le tableau 5.5 fournit les incertitudes à $2 \cdot \sigma$ de l'erreur sur N_i , exprimées en nombre de cycles de la fréquence concernée, pour les différentes méthodes de résolution et obtenues après 400 s d'intégration.

On constate que, dans le cas étudié, la résolution des ambiguïtés de phase ne pose aucun problème au regard des intervalles de confiance inscrits dans le tableau 5.5. Cependant, encore une fois, les bruits considérés ne correspondent pas à la réalité puisqu'ils sont relatifs à une position zénithale de la station spatiale (qui conduit à un rapport signal sur bruit (S/N) maximal) et à des passages relativement longs.

le bruit de scintillement de phase.

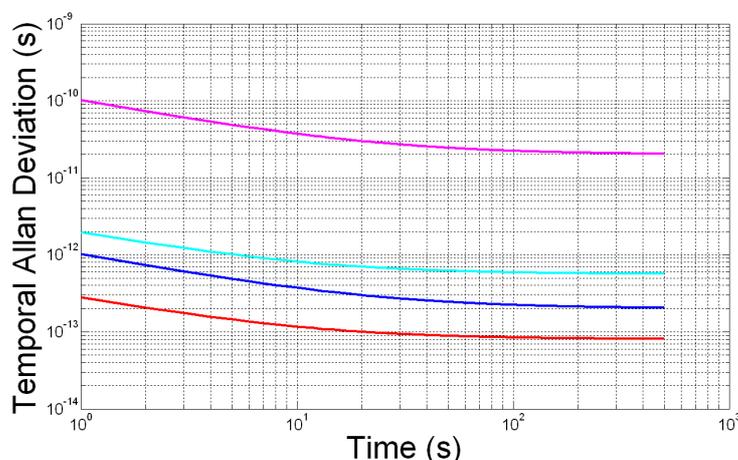


FIG. 5.5 : Écarts type d'Allan temporels du bruit existant sur les mesures de code et de phase des différentes fréquences : les bruits des mesures de code et de phase de la bande Ku sont respectivement en bleu et rouge, tandis que ceux de la troisième fréquence sont respectivement en rose et cyan.

TAB. 5.5 : Incertitudes statistiques à 2σ des résolutions des ambiguïtés de phase N_i pour différentes méthodes après 400 s d'intégration et exprimées en nombre de cycles.

	Combinaison d'observables utilisée	Incertitude statistique à 2σ de l'erreur
Résolution de N_1	équation (5.9)	0.059
Résolution de N_2	équation (5.11)	0.054
Résolution de N_3	équation (5.13)	0.169
	équation (5.18)	0.040
	équation (5.22)	0.039

5.3.3 Du bruit fonction du S/N et de l'élévation

Durant un passage de la Station Spatiale Internationale, le rapport signal sur bruit connaît de grandes variations. La puissance du signal reçu peut ainsi diminuer de plus de 20 dBm. En fait, ce rapport dépend de la distance entre les deux stations, de l'élévation de l'ISS et de paramètres autres tels que l'orientation de l'antenne ou les conditions météorologiques.

Des mesures effectuées sur le modèle d'Ingénierie par TimeTech permettent d'estimer la dépendance du bruit de mesure avec la puissance du signal (cf. figure 5.6).

Pour une station spatiale à 10° d'élévation, le rapport signal sur bruit atteint

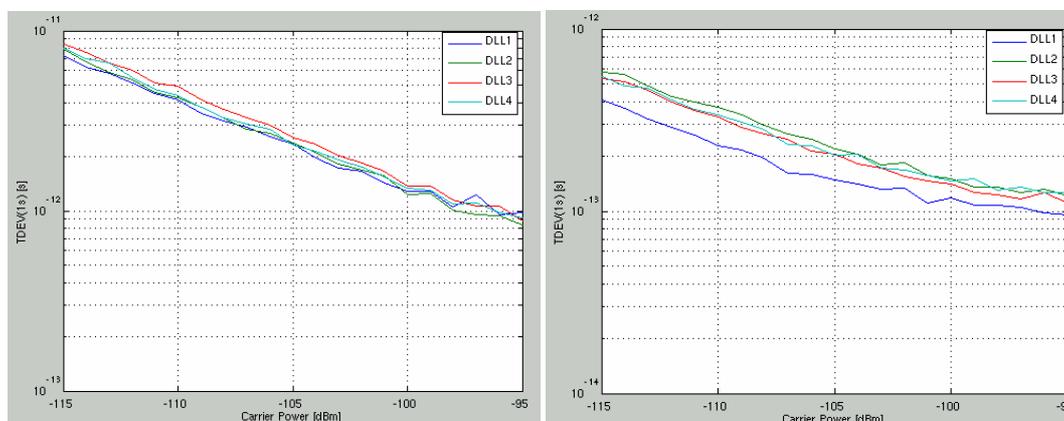


FIG. 5.6 : Dépendance de l'écart type d'Allan temporel à 1 s de bruits mesurés sur le modèle d'Ingénierie pour le code (figure de gauche) et la phase (figure de droite) avec la puissance du signal reçu. Les quatre courbes de couleurs différentes correspondent aux quatre canaux du Lien Micro-Onde (source : TimeTech).

–115 dBm. Ce rapport implique un écart type à 1 s huit fois supérieur pour le code. Par conséquent, le bruit de mesure de code atteint 16 ps d'incertitude statistique à 2σ dans ces conditions. Concernant les mesures de phase porteuse, l'écart type à –115 dBm est le quadruple de celui mesuré à –95 dBm. D'après l'hypothèse pessimiste énoncée auparavant, les niveaux de bruit Flicker sont aussi affectés du même rapport et leurs implications sur la détection des ambiguïtés de phase sont reportées dans le tableau 5.6.

TAB. 5.6 : Intervalles de confiance à 95 % des résolutions des ambiguïtés de phase N_i pour différentes méthodes après 400 s d'intégration et un rapport signal sur bruit à –115 dBm exprimés en nombre de cycles.

	Combinaison d'observables utilisée	Intervalle de confiance à 95 % de l'erreur
Résolution de N_1	équation (5.9)	0.469
Résolution de N_2	équation (5.11)	0.430
Résolution de N_3	équation (5.13)	1.350
	équation (5.18)	0.300
	équation (5.22)	0.295

La résolution de l'ambiguïté sur la troisième fréquence par la combinaison donnée par (5.13) possède une incertitude statistique à 2σ supérieure au cycle, ce qui implique une erreur sur N_3 très probable un rapport signal sur bruit à –115 dBm. Cependant ce rapport ne reste pas constant durant un passage.

Un modèle fourni par EADS-Astrium permet d'estimer l'évolution de la puissance reçue par les stations en fonction des différents paramètres. Il nous permet de dériver la relation du niveau de bruit avec la distance et l'élévation des stations, c'est-à-dire l'évolution temporelle du bruit pendant un passage à l'aide de la figure 5.6.

Lors de la mission, le niveau de puissance du signal reçu à l'antenne sera mesuré. Cette information peut servir à réduire l'impact de la modulation du bruit en fonction de l'élévation et de la distance à l'aide d'une pondération des mesures. En effet, les étalonnages des appareils de mesure permettront d'obtenir la dépendance du bruit de mesure avec la puissance du signal reçue.

Le principe de la moyenne pondérée est de donner à une mesure y_i un poids proportionnel au carré de son écart type de son erreur σ_i . Pour N mesures distinctes, la moyenne est obtenue par l'expression suivante :

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (5.38)$$

À l'aide de résultats expérimentaux similaires à ceux de la figure 5.6, il est possible pour chaque mesure y_i de déterminer la propriété statistique de son erreur σ_i et donc son poids dans la moyenne pondérée à partir d'une mesure de la puissance effective reçue à l'antenne.

Sur la figure 5.7 est représenté un exemple de mesures effectuées durant un passage zénithal de la Station Spatiale Internationale. Le bruit de ces mesures est modulé en amplitude en fonction de la distance et de l'élévation de la station spatiale. Les moyennes classique et pondérée sont comparées dans le cadre de cet exemple.

Les effets de la moyenne pondérée n'apparaissent qu'après une centaine de secondes d'intégration et permettent d'atteindre approximativement le palier du bruit de scintillement de phase dès son passage au maximum d'élévation. Comparativement à la moyenne arithmétique, la pondération conduit à un gain d'un facteur quatre sur l'écart type de l'erreur finale.

5.3.4 Les statistiques de résolution

Les trois perturbations majeures agissant sur la résolution des ambiguïtés de phase ont été énoncées et étudiées afin d'acquérir une idée de leurs impacts. À présent, l'étude de la détermination des ambiguïtés N_i peut être élargie à des cas réalistes. La station spatiale ne passera pas forcément au zénith de la station sol (passage atteignant alors une élévation de 90°) : son passage sera caractérisé par l'élévation maximale atteinte par l'ISS durant le passage considéré.

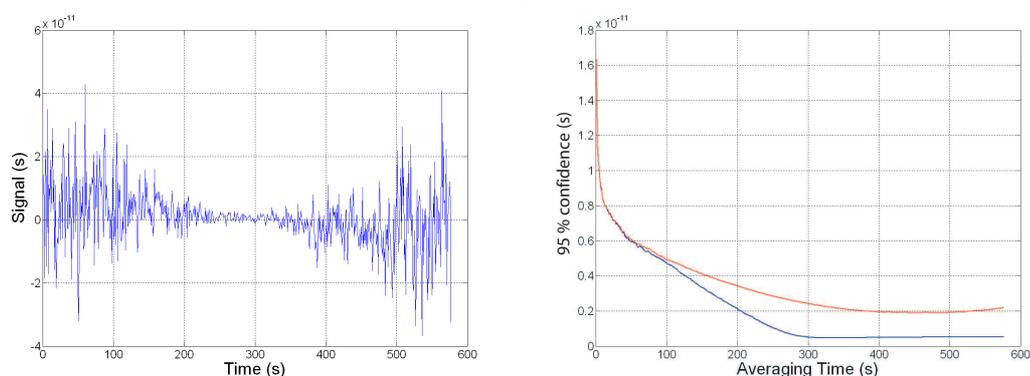


FIG. 5.7 : Exemple de passage zénithal dont le rapport signal sur bruit est modulé en amplitude pour une mesure du code sur un signal de la bande Ku : à gauche, évolution du signal en fonction du temps, à droite, évolution de l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne du signal lorsqu'on considère une moyenne classique (en bleu) ou pondérée (en rouge).

Afin d'estimer la statistique de résolution des ambiguïtés de phase, on réalise des simulations de Monte-Carlo. On simule des bruits de code et de phase avec les mêmes propriétés que ceux mesurés sur le modèle d'ingénierie (équations (5.36) et (5.37)). Une fois ces fonctions stochastiques simulées, elle sont multipliées par un rapport dépendant de l'observable étudiée. Ensuite, l'amplitude du bruit est modulée selon la puissance du signal reçue à la station réceptrice. Le bruit sur les six observables est ainsi construit : on peut alors étudier l'erreur résultante sur la détermination des ambiguïtés de phase N_i selon les équations (5.9), (5.11), (5.13), (5.18) ou (5.22).

En répétant un grand nombre de fois cette opération, on estime la statistique de l'erreur finale sur les ambiguïtés de phase et, par conséquent, la probabilité de saut de cycles sur l'ensemble des trois fréquences. On s'attache à estimer une des propriétés statistiques du bruit : l'intervalle de confiance à 95 %. Celui-ci est déterminé en simulant un grand nombre de cas, et en évaluant, une fois les amplitudes résultantes obtenues, les bornes de l'ensemble de 95 % des résultats médians.

Dans la suite de ce travail, on étudie le transfert de temps entre la Station Spatiale Internationale et une station terrestre basée à Toulouse. Afin de simuler des niveaux de bruit réalistes, un passage de la station spatiale au-dessus de la station terrestre est choisi à partir d'éphémérides de l'ISS datant du 20 mai 2005. Néanmoins, pour simuler des passages avec des élévations différentes, on décalera légèrement l'origine temporelle de la trajectoire de la station toulousaine. De

cette façon, il est possible d'obtenir de nombreux passages caractérisés par leur élévation maximale atteinte. Pour des passages d'élévation supérieure à 4° , leur durée s'échelonne entre 350 et 600 s.

La figure 5.8 montre les incertitudes (à 95 % de confiance) sur δN_1 et δN_2 en fonction de l'élévation maximale atteinte par la station spatiale durant des passages complets. Ces erreurs sont déterminées dans le cas d'une moyenne classique arithmétique et dans le cas d'un moyennage pondéré pour des passages complets (sans interruption d'acquisition).

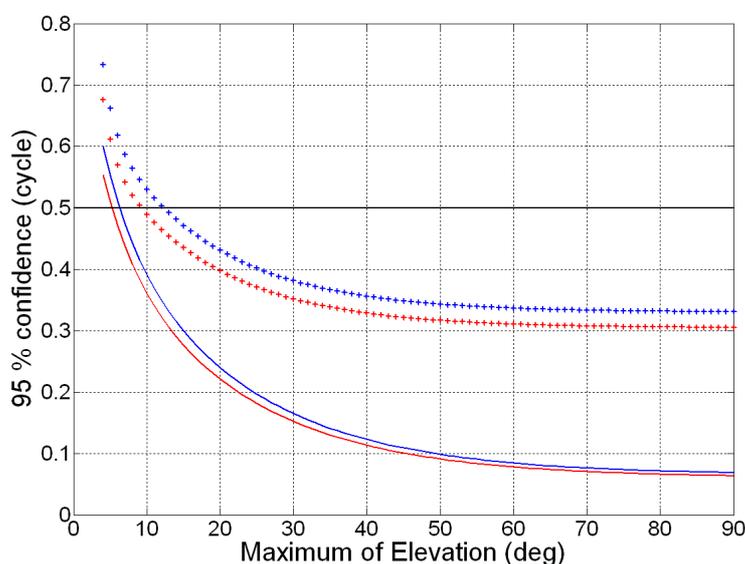


FIG. 5.8 : Erreur (intervalle de confiance à 95 %) sur la résolution des ambiguïtés de phase en fonction de l'élévation maximale d'un passage exprimé en nombre de cycles. Les quatre courbes montrent la dépendance en fonction de l'élévation pour les signaux de fréquence f_1 (en bleu) et f_2 (en rouge) lorsque l'on considère une moyenne arithmétique (courbes en pointillés) ou pondérée (courbes continues) selon les combinaisons d'observables des équations (5.9) et (5.11).

Cette figure permet de visualiser l'effet de la pondération sur la détermination de N_1 et N_2 . En effet, la moyenne pondérée permet d'augmenter sensiblement le taux de succès de la détermination des ambiguïtés de phase, et particulièrement à hautes élévations : pour un passage dont l'élévation atteint les 90° , les statistiques sont pratiquement divisées par un facteur six entre les deux méthodes de moyennage. Par contre, à basse élévation, la pondération devient inefficace puisque le niveau de bruit des observables ne varie pas énormément et conserve une ampli-

tude élevée. On peut noter que pour des passages dont l'élévation maximale est supérieure à 6° , les ambiguïtés de phase N_1 et N_2 sont correctement résolues dans plus de 95 % des cas.

Enfin, l'impact des méthodes de moyennage (classique ou pondéré) ou de combinaison d'observables (en accord avec les équations (5.13), (5.18) ou (5.22)) est étudié dans le cadre de la résolution de l'ambiguïté de phase sur f_3 . Pour le bruit considéré dans cette partie (équations (5.36) et (5.37)), les méthodes d'estimation de N_3 données par les équations (5.18) et (5.22) fournissent approximativement des résultats identiques : l'une et l'autre des combinaisons sont donc similairement considérées dans la suite.

La figure 5.9 présente les statistiques sur l'erreur δN_3 en fonction de l'élévation maximale atteinte lors du passage pour des méthodes énoncées dans ce chapitre.

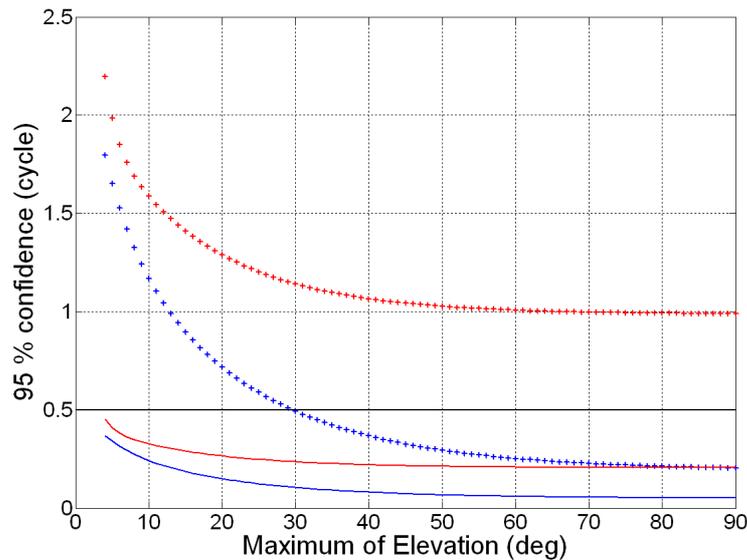


FIG. 5.9 : Erreurs (intervalle de confiance à 95 %) sur la résolution de l'ambiguïté de phase de la troisième fréquence f_3 en fonction de l'élévation maximale d'un passage exprimées en nombre de cycles. Les quatre courbes montrent son évolution lorsqu'on réalise une moyenne arithmétique (en rouge) ou pondérée (en bleu) et quand on considère la méthode initiale (5.13) (en pointillés) ou les méthodes proposées selon l'équation (5.18) ou (5.22) (courbes continues).

Si on tente de résoudre le problème sur l'ambiguïté de phase N_3 naïvement, il y a peu de chance de réussir la détection correctement puisque l'incertitude statis-

tique à 2σ reste au-dessus d'une erreur d'un cycle pour l'ensemble des élévations (voir la courbe supérieure de la figure 5.9). Lorsque la pondération des mesures en fonction de la puissance du signal reçue est utilisée, elle permet de gagner jusqu'à un facteur cinq : dans ce cas, la résolution des ambiguïtés de phase réussit dans 95 % des cas pour des élévations supérieures à 30° .

Contrairement à la pondération, les combinaisons d'observables proposées par les équations (5.18) ou (5.22) améliorent les taux de résolution d'un facteur cinq pour l'ensemble des élévations (voir les deux courbes les plus basses de la figure 5.9). Ces méthodes proposées sont essentielles dans la détection des sauts de cycles sur la fréquence f_3 .

Cependant, les méthodes (5.18) et (5.22) de résolution de l'ambiguïté sur la troisième fréquence apparaissant sur la figure 5.9 nécessitent l'identification correcte des ambiguïtés de phase des signaux de la bande Ku (f_1 et f_2). Par conséquent, une estimation non biaisée des produits scientifiques n'est plus limitée par l'estimation du nombre de cycles N_3 mais par la résolution du problème des ambiguïtés de phase pour les deux premières fréquences f_1 et f_2 .

L'étude simultanée des figures 5.8 et 5.9 nous indique que pour des passages complets atteignant une élévation supérieure à 4° , plus de 94 % des détections de saut de cycles sont couvertes de succès pour les trois fréquences. Cette statistique de résolution est fortement dominée par les ambiguïtés des signaux de la bande Ku (cf. figure 5.8) puisque l'estimation de N_3 repose sur l'hypothèse d'une résolution fructueuse des ambiguïtés N_1 et N_2 . Le pourcentage augmente selon l'élévation tel que pour des passages d'élévation maximale supérieure à 15° , moins d'une résolution sur mille échoue.

Jusqu'à présent, seuls les passages complets ont été étudiés. Des passages incomplets ou ponctués de temps morts de mesure ne vont pas répondre aux statistiques présentées sur les figures 5.8 et 5.9. Pour rendre compte de cette imperfection, on évalue, pour une élévation maximale atteinte, le pourcentage de mesure nécessaire à la résolution de l'ambiguïté de phase N_i dans 95 % des cas. Pour cela, on réalise un moyennage pondéré des mesures en commençant par une élévation nulle jusqu'à ce que l'incertitude statistique à 2σ de l'erreur sur N_i atteigne 0.5. Le pourcentage minimum nécessaire à la résolution de l'ambiguïté dans ces conditions est ainsi évalué.

La figure 5.10 décrit les résultats issus de l'étude définie ci-dessus pour les fréquences f_1 et f_2 .

Selon la figure 5.10, la résolution des ambiguïtés de phase pour les signaux de la bande Ku pour les passages à basse élévation nécessite plus de deux tiers de l'ensemble des données du passage complet afin qu'elle soit fructueuse dans la

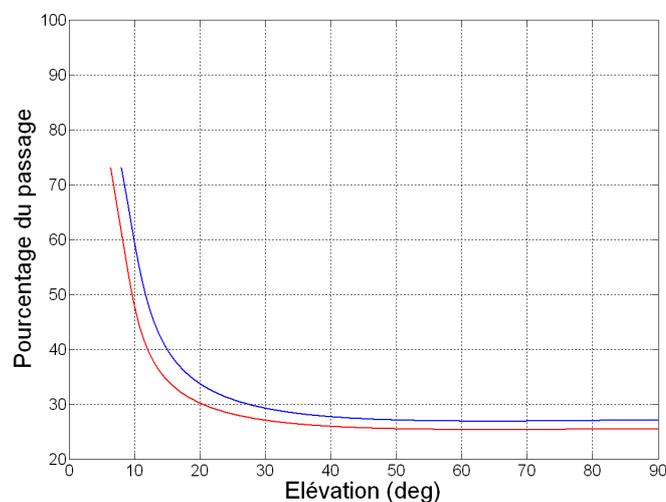


FIG. 5.10 : Pourcentages des données du passage nécessaires à la réussite de la résolution des ambiguïtés de phase dans 95 % des situations pour les signaux f_1 (en bleu) et f_2 (en rouge).

majorité des cas. Cependant ce pourcentage diminue rapidement puisque que pour des passages dont l'élévation dépasse 15° , seul le tiers de l'ensemble des mesures est nécessaire.

Concernant la troisième fréquence, on considère les combinaisons d'observables décrites par les équations (5.13) et (5.22) et on estime la proportion de mesures du passage indispensable à l'évaluation correcte de N_3 dans 95 % des cas. Dans ce but, on réalise une pondération des mesures selon la puissance du signal à l'antenne réceptrice. Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 5.11.

La résolution de N_3 dans 95 % des cas par la combinaison (5.13) n'est seulement possible que pour des passages dont l'élévation dépasse trente degrés, ce qui reste cohérent avec la figure 5.9. Du fait du bruit Flicker qui limite la décroissance de l'écart type de l'erreur avec le nombre de mesures, le pourcentage des mesures nécessaire à l'évaluation correcte de l'ambiguïté de la fréquence f_3 atteint un seuil vers 43 %. La résolution de N_3 issue de l'équation (5.22) est moins gourmande en mesures puisque pour des passages atteignant dix degrés d'élévation, seul un cinquième de l'ensemble des données du passage est indispensable.

Dans le tableau 5.7 est retranscrit le taux d'échec de la résolution correcte des trois ambiguïtés de phase du Lien Micro-Onde pour quelques exemples de situations. Par exemple, pour un passage atteignant 10° d'élévation et complet à

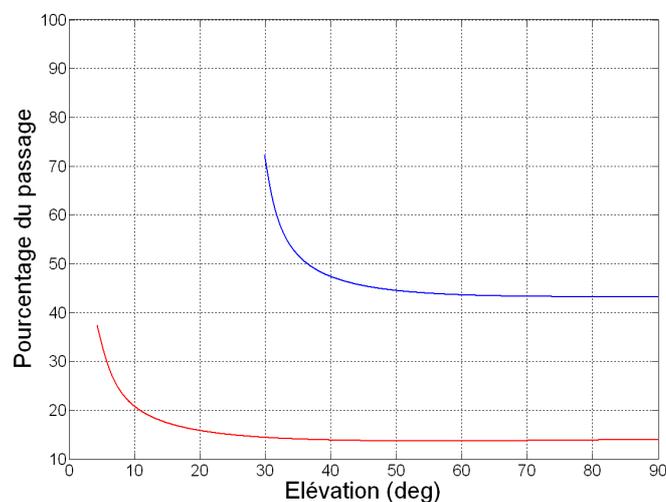


FIG. 5.11 : Pourcentages des données du passage nécessaires à la réussite de la résolution des ambiguïtés de phase dans 95 % des situations pour la fréquence f_3 selon les équations (5.13) (courbe bleue) et (5.22) (courbe rouge).

30 %, la détermination des trois ambiguïtés de phase est correcte dans un tiers des cas si l'on considère l'équation (5.13) pour l'évaluation de N_3 .

TAB. 5.7 : Probabilité d'échec de la résolution des trois ambiguïtés de phase du Lien Micro-Onde pour différentes situations définies par l'élévation maximale atteinte durant le passage (en degrés), la proportion de mesures consécutives du passage (en %) et de la méthode utilisée pour la résolution de N_3 .

Élévation maximale	Proportion du passage	Résolution de l'ambiguïté N_3	Proportion d'échec
10°	30%	équation (5.13)	0.666
		équation (5.22)	0.628
	50%	(5.13)	0.527
		(5.22)	0.041
30°	30%	(5.13)	0.497
		(5.22)	0.028
	50%	(5.13)	0.104
		(5.22)	$3.8 \cdot 10^{-7}$

Il est possible d'extrapoler les résultats du tableau 5.7 pour d'autres situations. En effet, les figures 5.8 et 5.9 montrent qu'à proportion du passage fixé, plus l'élévation atteinte par l'ISS est grande, plus il est aisé de résoudre les ambiguïtés. De même, l'accroissement du nombre de mesure continues entraîne l'augmentation

de la statistique de résolution (cf. figures 5.10 et 5.11). Par conséquent, pour un passage à 60° d'élévation et complet à 60 %, la considération de l'équation (5.22) lors de l'évaluation de N_3 conduit des erreurs sur la détermination de l'une des trois fréquences dans moins d'un cas sur 2 500 000.

5.3.5 Les effets sur le résultat

La résolution des ambiguïtés de phase est nécessaire dans l'estimation précise des produits scientifiques du Lien Micro-Onde. En effet, les objectifs de la mission qui se basent seulement sur les mesures d'un passage (étude de l'atmosphère, navigation, ...) exigent des mesures de phase non-ambiguës. Au contraire, l'utilisation des mesures sur le long terme supporte probablement une certaine probabilité non-nulle de sauts de cycles.

On cherche à déterminer l'impact de sauts de cycles sur la mesure du déplacement relativiste de fréquence. Les figures 5.8 et 5.9 ont montré que la probabilité d'une mauvaise détermination était dépendante de l'élévation maximale atteinte par la station spatiale.

Les caractéristiques d'un passage de la station spatiale sont supposées équiprobables : il y a autant de chances d'avoir un passage à dix degrés d'élévation qu'à 80° . Ainsi, la probabilité d'un saut de cycles pour un passage complet d'élévation supérieure à 4° correspond à la moyenne arithmétique des statistiques correspondantes, et atteint l'incertitude statistique à $2 \cdot \sigma$ de 0.15 cycle pour les fréquences de la bande Ku (cf. figure 5.8) : cela correspond à un taux d'échec de la résolution des trois ambiguïtés dans un cas sur seize milliards.

Afin d'évaluer l'impact d'une résolution erronée des ambiguïtés de phase sur la désynchronisation des horloges, des simulations de ces sauts de cycles sont réalisées et les variances d'Allan temporelles correspondantes calculées. En effet, l'erreur due aux ambiguïtés de phase est particulière du fait de la quantification des nombres N_i et ne peut pas être déterminée analytiquement.

Des simulations numériques sont donc réalisées afin d'évaluer les conséquences de sauts de cycles sur les performances à longs termes du Lien Micro-Onde. Elles concernent une série de mesures de la désynchronisation des horloges correspondantes chacune à un passage et séparées de 90 minutes (période de la Station Spatiale Internationale). On note σ l'écart type de l'erreur sur les ambiguïtés de phase des signaux de la bande fréquentielle Ku pour un passage. A partir de cette série de mesures, on évalue la variance d'Allan temporelle associée que l'on compare aux spécifications de la mission ACES.

Les écarts types d'Allan temporels ainsi estimés montrent une pente de $-1/2$ (cf. figure 5.12). De plus, la figure 5.12 présente l'évolution de l'écart type d'Allan

temporel à une seconde en fonction de l'écart type de l'erreur sur les ambiguïtés des signaux f_1 et f_2 . Lorsque cette probabilité est faible, il est impossible de réaliser une telle simulation du fait du grand nombre de points demandé. Dans ce but, cette dépendance est extrapolée pour les erreurs statistiques les plus faibles par une droite d'équation :

$$\sigma_x(5400 \text{ s}) = 6.9 \cdot 10^{-12} \cdot \sigma, \quad (5.39)$$

où $\sigma_x(5400 \text{ s})$ est l'écart type d'Allan temporel de l'erreur sur la désynchronisation et σ l'écart type de l'erreur sur les ambiguïtés de phase des signaux de la bande fréquentielle Ku (exprimé en nombre de cycles de la fréquence considérée).

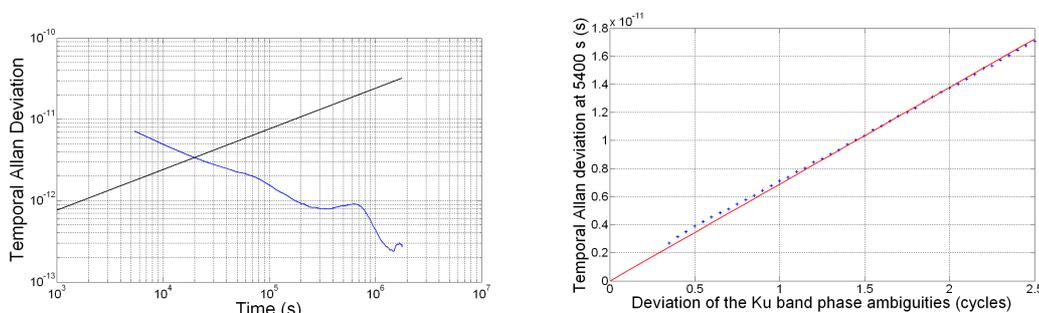


FIG. 5.12 : Figure de gauche : écart type d'Allan temporel de l'erreur sur la désynchronisation des horloges pour une erreur sur les ambiguïtés de phase de la bande Ku d'écart type $\sigma = 1$ et comparé aux spécifications de la mission données par (2.2) / Figure de droite : dépendance de l'écart type d'Allan temporel de l'erreur sur la désynchronisation à une seconde en fonction de l'écart type de l'erreur sur les ambiguïtés des signaux f_1 et f_2 (exprimé en nombre de cycles) et comparée à la droite d'équation (5.39).

Cet impact sur la stabilité des mesures doit être comparé aux spécifications de la mission. L'équation (2.2) indique que l'erreur sur la désynchronisation des horloges ne doit pas dépasser $1.76 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ après 5400 secondes d'intégration. D'après l'équation (5.39), cela correspond à une statistique de saut de cycle dont l'écart type σ est inférieur à 0.255. La comparaison de cette valeur à l'écart type de la probabilité de la détermination réussie des trois ambiguïtés de phase donnée en fin de partie précédente⁸ montre que cette condition est aisément satisfaite afin que les spécifications soient respectées pour des temps supérieurs à la période orbitale.

⁸Pour des passages complets d'élévation supérieure à 4° , la statistique de résolution commune des trois ambiguïtés de phase atteint l'incertitude statistique à $2 \cdot \sigma$ de 0.15 cycle pour les signaux de la bande Ku.

Conclusion

Le Chapitre 5 clôt l'étude du Lien Micro-Onde de la mission ACES en étudiant la résolution des ambiguïtés de phase. La détermination des ambiguïtés de phase des mesures correspondantes est nécessaire pour atteindre les performances ultimes du transfert de temps. Dans un premier temps, les statistiques de résolution réussie par des méthodes classiques n'étant pas satisfaisantes, de nouvelles combinaisons d'observables permettant de résoudre les ambiguïtés de phases des trois fréquences ont été déterminées. En effet, l'éjection totale ou partielle du bruit de code de la troisième fréquence permet de réduire grandement le taux d'échec de la résolution. Ensuite, en considérant les niveaux de bruit mesurés sur le modèle d'Ingénierie du Lien Micro-Onde et un modèle d'évolution de ces bruits en fonction de l'élévation, il est possible d'estimer la probabilité d'une résolution fructueuse sur les trois fréquences. Ainsi, pour des passages complets, les performances de la résolution des ambiguïtés de phase permettent de respecter les spécifications de la mission pour des temps supérieurs à la période orbitale. Enfin, l'étude de ces statistiques pour des passages incomplets a permis de mettre en l'évidence l'importance de la complétude des passages afin d'obtenir les résultats précédents.

Chapitre 6

Transfert de temps du futur et mission SAGAS

6.1 La mission SAGAS

6.1.1 Description

SAGAS (*Search for Anomalous Gravitation using Atomic Sensors*) est un projet spatial soumis à l'Agence Spatiale Européenne en juin 2007 dans le cadre de l'appel à propositions *Cosmic Vision 2015-2025* [8]. Il vise à envoyer au fin fond de notre système solaire un ensemble de senseurs ultra-précis à partir de l'année 2020 afin d'explorer qualitativement l'Espace et de réaliser des tests de Physique Fondamentale. La combinaison des instruments embarqués et d'un transfert de temps par lien laser permet des mesures d'une précision jamais atteinte auparavant.

L'envoi d'une sonde spatiale à des distances atteignant 53 *UA* (unités astronomiques) implique de grands changements concernant la gravité. Ces variations, combinées à un ensemble d'appareils de mesure à la pointe de la technologie, font du projet SAGAS un compromis unique entre exploration spatiale et science. C'est pourquoi le projet rassemble autour de lui des communautés de scientifiques habituellement distantes puisqu'il concerne des domaines allant de la physique atomique aux sciences du système solaire, en passant par la gravitation expérimentale et la planétologie.

6.1.2 Instruments

La charge utile du projet SAGAS est composée :

- d'un accéléromètre absolu basé sur l'interférométrie atomique,
- d'une horloge atomique optimisée pour des performances à long terme, et

- d'un lien laser pour la comparaison fréquentielle, la communication et la navigation.

Ces instruments à la pointe de la technologie permettent, une fois combinés, de réaliser des mesures d'une extrême précision sur la totalité des aspects de la Gravitation. Ces mesures de différentes natures se basent sur les effets gravitationnels agissant sur les horloges, la propagation de la lumière ou la chute libre des objets. Au final, elles fournissent une carte des aspects gravitationnels de notre Système Solaire tout en testant les théories de la Physique Fondamentale.

Accéléromètre à atomes froids

L'accéléromètre considéré repose sur une technologie basée sur l'atome de Césium et dérive, en quelques sortes, de l'horloge PHARAO développée dans le cadre de la mission ACES (cf. Chapitre 2). Cette connexité tire parti des développements de l'horloge à atomes froids en ce qui concerne les régions de refroidissement et de piégeage des atomes. Elle permet, par conséquent, de réduire significativement la masse et les besoins énergétiques de l'instrument.

Le projet SAGAS propose un accéléromètre dont la stabilité (voir annexe A) atteint $9 \cdot 10^{-10} \cdot \tau^{-1/2} m.s^{-2}$ (où τ est le temps d'intégration) et dont l'exactitude des mesures reste inférieure à $5 \cdot 10^{-12} m.s^{-2}$. L'objectif concernant l'inexactitude de l'accéléromètre est déterminant pour la réalisation de la plupart des objectifs scientifiques.

Horloge à ions piégés dans le domaine optique

L'horloge du projet SAGAS est une horloge optique basée sur le piégeage et le refroidissement laser d'un ion de strontium. Plusieurs laboratoires autour du Monde utilisent et développent cette technologie. Les plus performantes horloges de cette nature montrent dès à présent des stabilités légèrement meilleures que $3 \cdot 10^{-15} \cdot \tau^{-1/2}$ - où τ est le temps d'intégration - et une inexactitude de l'ordre de $2 \cdot 10^{-17}$ en fréquence relative [15, 16, 17].

Les objectifs visés concernant les performances de l'horloge embarquée sont d'atteindre une stabilité de $1 \cdot 10^{-14} \cdot \tau^{-1/2}$ (soit légèrement moins stable que les horloges actuelles) et une inexactitude de $1 \cdot 10^{-17}$ en fréquence relative. Par conséquent, le défi auquel le projet SAGAS prétend ne réside pas dans les performances requises, mais plutôt dans le développement d'une horloge fiable et embarquable dans l'Espace.

Lien optique pour l'espace profond

La méthode de comparaison est basée sur un lien laser, tel que le lien T2L2 (cf. partie 1.2). Mais le lien optique du projet SAGAS vise à réaliser des mesures de fréquence, tandis que T2L2 compare les temps d'arrivée de pulses et conduit ainsi à des mesures temporelles (comme le MWL du projet ACES décrit au Chapitre 2).

En effet, le projet SAGAS utilise un laser de grande puissance (1 W) dont la fréquence est fixée sur la transition étroite et stable de l'horloge optique. Il permet de réaliser la comparaison fréquentielle de l'horloge spatiale avec celles se trouvant sur Terre, et ainsi de conduire à des mesures d'une grande sensibilité pour les objectifs scientifiques et la navigation. De plus, la modulation en phase et en fréquence de la porteuse sert à la transmission de données.

Son utilisation se base sur une antenne spatiale de 40 cm de diamètre (de conception identique à celles de la mission LISA) ainsi que sur des télescopes terrestres de 1.5 m de diamètre tels que ceux utilisés pour le LLR. Ce lien optique est émis de façon continue à la fréquence $f_o = 444 THz$ (fréquence de l'horloge à Strontium) dans les deux sens, l'un est émis par la sonde spatiale, l'autre par l'une des stations terrestres : cette méthode de comparaison est donc à deux voies mono-fréquentielle. Le principal challenge lié à cet instrument concerne ses performances de pointage à quelques dixièmes de seconde d'arc près, ainsi que la réalisation de sources lasers à 1 W à la fréquence choisie.

De plus, l'ajout d'un système de télécommunications supplémentaire est prévu. Il s'agit d'un lien dans le domaine radiométrique servant au pistage télémétrique de la sonde. Il permet aussi les manœuvres d'orbite durant les phases critiques et sert de secours en cas d'inopérabilité du lien laser.

6.1.3 Objectifs

1 - Tests des lois de la Gravitation

Test de l'invariance de Lorentz

Le premier des tests de Physique Fondamentale qu'offre le projet SAGAS consiste à une mesure du déplacement relativiste de fréquence (cf. Chapitre 1, section 1.3.1). Conformément l'objectif scientifique de la mission ACES décrite au Chapitre 2, ce test se base sur la comparaison de deux horloges à des positions différentes à l'aide d'un signal électromagnétique. Jusqu'à présent, la meilleure mesure de l'Invariance Locale de Position atteint une incertitude relative de $7 \cdot 10^{-5}$. La trajectoire de l'horloge spatiale de SAGAS est caractérisée par un changement

important du potentiel gravitationnel, et la précision de ce test atteint $1 \cdot 10^{-9}$ en incertitude relative, soit un gain de presque cinq ordres de grandeur.

Enfin, l'étude de la variation des constantes fondamentales (voir partie 1.3.1) est proposée par le projet. Elle se base sur la comparaison des fréquences de transition atomique des horloges. La recherche de cette variation peut être réalisée soit en fonction du temps, soit en fonction du potentiel gravitationnel ambiant. Du fait des changements importants du champ de gravité, l'horloge atomique du projet SAGAS permet l'amélioration par un facteur 250 de la meilleure mesure réalisée jusqu'à présent.

Mesure des paramètres du modèle PPN

Un test des paramètres du formalisme Post-Newtonien Paramétrisé (cf. 1.1.5) est réalisé par SAGAS. Les caractéristiques du projet ne permettent pas une mesure compétitive du paramètre β . Par contre, une mesure précise du paramètre γ est rendue possible par le projet et dépasse de plusieurs ordres de grandeur le résultat obtenu par la sonde Cassini¹ en juin 2002 [44]. Contrairement aux transmissions radiométriques de la mission Cassini, la fréquence optique du lien minimise grandement les effets de la couronne solaire et de l'atmosphère terrestre. Ce test permis par le projet SAGAS est étudié plus en détails dans la partie 6.3.2 afin d'en déduire, de façon rigoureuse, une estimation de la mesure du paramètre γ .

Gravitation à grande échelle

Les tests sur la gravitation montrent des résultats en concordance avec la théorie de la Relativité Générale pour des échelles allant du millimètre jusqu'à la taille des orbites planétaires. Cependant de nombreux modèles théoriques visant à réconcilier la Relativité Générale avec la Mécanique Quantique prédisent des modifications notables de la loi de la gravitation au-delà de ce spectre des distances.

Lorsque la NASA envoie, en 1972 et 1973, les deux sondes Pioneer 10 et Pioneer 11² dans l'Espace, elle n'imagine pas l'effervescence de la communauté scientifique que créera, quelques dizaines années plus tard, l'analyse de leurs résultats [96]. En effet, le lien de communication avec les sondes permit un traçage de leur trajectoire par effet Doppler et révéla, à des distances entre 20 et 70 unités astronomiques du Soleil, une accélération inattendue de l'ordre de 1 nm.s^{-2} dans la direction du Soleil.

Dans la mesure où le comportement des sondes - appelé *Anomalie Pioneer* - ne put être expliqué à l'aide de la physique moderne [96, 97, 98, 99, 100], de nombreuses théories et suppositions émergèrent à propos de son origine, et leurs

¹www.nasa.gov/cassini

²http://www.nasa.gov/mission_pages/pioneer/

discussions sont toujours en cours. C'est pourquoi la résolution de ce dilemme motive l'envoi du module SAGAS après l'orbite de Saturne - distance à laquelle l'anomalie fut observée pour la première fois - afin d'étudier la gravitation à l'aide de techniques modernes.

Détection du fond cosmologique d'ondes gravitationnelles

La détection de sources ponctuelles d'Ondes Gravitationnelles (voir partie 1.3.3) risque d'être improbable du fait de leur faible amplitude (de l'ordre de 10^{-19} , voire peut être moins) et de la sensibilité des composants de SAGAS, d'un ordre de grandeur trop faible. Cependant, SAGAS permet de fixer une limite d'amplitude sur le fond rémanent d'ondes créées lors du Big Bang.

Lors de la mission Cassini, une mesure de l'effet Doppler des signaux fournit la limite supérieure d'amplitude actuelle sur le fond d'ondes gravitationnelles (cf. section 1.3.3) dans la gamme des 10^{-3} - 10^{-5} Hz [101, 102] ainsi que pour des fréquences inférieures au micro-Hertz avec une sensibilité moindre [102, 103]. La contribution de SAGAS à cette mesure sera étudiée dans la partie 6.3.3, mais on peut néanmoins annoncer que le projet SAGAS améliore la limite actuelle pour des fréquences entre 10^{-6} et 10^{-3} Hz de quatre ordres de grandeur.

2 - Exploration du système solaire

Les performances de SAGAS en terme de mesure de la gravité offrent l'opportunité d'étudier en détails des sources lointaines de champ gravitationnel du système solaire. Par exemple, les objets de la ceinture de Kuiper éveillent un immense intérêt depuis les vingt dernières années, et font donc partie de ces sources à explorer [104].

La ceinture de Kuiper est le résidu du disque solaire où les planètes géantes de notre système solaire se sont formées quelques 4.6 milliards d'années en arrière. Son observation depuis la Terre est rendue difficile par la taille relativement faible des masses la constituant, ainsi que par la distance la séparant de notre planète. De ce fait, les informations concernant leur masse et leur distribution spatiale sont imprécises. Le projet SAGAS contribue grandement à l'étude des objets de la ceinture de Kuiper, et ainsi à étendre notre connaissance du système solaire et des mécanismes intervenus lors de sa formation.

Résoudre le déficit massique de la ceinture de Kuiper

Les informations acquises jusqu'à présent sur la ceinture de Kuiper révèlent des incohérences lorsqu'elles sont comparées aux modèles de formation du système solaire [104]. Depuis 1992, plus d'un millier d'objets appartenant à cette

région de l'Espace ont été découverts. Les estimations de la masse totale de la ceinture de Kuiper (basée sur l'extrapolation de la distribution massique des objets connus) se situent entre 0.01 et 0.1 masse terrestre, alors que la formation de plus grands de ces objets nécessite un disque de matière de masse totale comprise entre 10 et 30 masses terrestres. Plusieurs théories et hypothèses tentent d'expliquer rationnellement cette différence massique, mais les mesures correspondantes restent néanmoins entachées d'incertitudes qui empêchent la sélection d'un modèle correct avec certitude. Par conséquent, seules des observations précises permettraient de trouver une réponse aux questions concernant ces objets récemment découverts.

Distribution massique de la ceinture de Kuiper

Le passage de la sonde dans la ceinture de Kuiper est une occasion d'étudier son agencement spatial et la statistique de ses constituants en fonction de la distance au Soleil. De nombreux modèles fournissent une possible distribution massique de la ceinture dont les plus intéressants sont référencés dans [105, 106].

Des mesures effectuées durant toute la traversée permettent d'avoir accès à cette distribution mais aussi d'évaluer la quantité totale de matière comprise dans la ceinture de Kuiper. Les sensibilités atteintes par SAGAS conduisent à la discrimination des modèles de distribution [105, 106] par comparaison aux mesures effectuées.

Découvrir des objets appartenant à cette ceinture

L'ensemble des objets constituant la ceinture de Kuiper fut repéré à partir d'observations terrestres ou du télescope spatial Hubble [107], mais du fait de mesures imprécises, des conversions luminescence-taille et des hypothèses réalisées, de grandes incertitudes résident quant à leur masse et leur distribution volumique. Mis à part l'occultation nécessaire à la réalisation du test sur le paramètre γ du modèle PPN (cf. partie 6.1.3), rien ne contraint la trajectoire de la sonde dédiée au projet SAGAS. Il est donc possible de choisir un parcours spécifique menant la sonde à côtoyer un ou plusieurs objets connus de la ceinture. De plus, la possibilité de découvrir d'autres objets massiques n'est pas à écarter, et sa trajectoire peut être déterminée de façon à maximiser la probabilité de telles découvertes.

Préciser la gravitation planétaire

L'attraction gravitationnelle induite par les planètes et les autres corps imposants du système solaire crée des effets systématiques sur les mesures de SAGAS car une mesure est influencée par la somme des effets de l'ensemble des corps

gravitationnels. Plus la sonde est proche de ces corps, plus les effets correspondants sont importants. Ces biais peuvent être corrigés par des mesures antérieures relatives à ces sources gravitationnelles. Cependant, il existe une distance caractéristique pour laquelle les incertitudes sur ces corrections atteignent la sensibilité des mesures de SAGAS. Pour des distances inférieures à cette distance caractéristique, les objectifs scientifiques ne sont plus assurés. En contrepartie, les instruments peuvent s'attacher à évaluer leur gravité et leur masse de ces objet. Par exemple, une telle étude pour la planète Jupiter vise un gain de précision d'un facteur cent sur notre estimation actuelle.

6.2 Les mesures

Le projet SAGAS fournit trois observables fondamentales : la mesure issue de l'accéléromètre embarqué et les deux différences de fréquence - l'une réalisée à bord de la sonde, l'autre sur Terre - entre le signal laser reçu et l'horloge optique locale. Ces observables sont associées à la date d'arrivée du signal à la station.

6.2.1 Définitions

La modélisation de la comparaison de deux horloges, la première située dans une sonde envoyée dans l'Espace, la seconde basée dans une station terrestre, nécessite un cadre relativiste. Le référentiel d'étude est le référentiel barycentrique. On note \mathbf{x}_s et \mathbf{x}_g respectivement la position de la sonde spatiale et de la station terrestre, et \mathbf{v}_s et \mathbf{v}_g la vitesse des stations spatiale et terrestre. L'ensemble de ces variables est défini dans le référentiel d'étude barycentrique.

Ces deux horloges sont comparées à l'aide de deux liens lasers. Dans le repère spatio-temporel considéré, le premier est émis de la station terrestre à (t_1, \mathbf{x}_1) et reçu par la sonde spatiale à (t_2, \mathbf{x}_2) . Le second lien est émis depuis l'Espace à (t_3, \mathbf{x}_3) puis réceptionné par la station terrestre à (t_4, \mathbf{x}_4) (voir figure 6.1). En fait, les deux signaux sont émis de façon continue et indépendante. Par conséquent, il est possible de choisir de quelle manière ces signaux sont combinés en jouant sur les différences temporelles $T_{23} = t_3 - t_2$ et $T_{14} = t_4 - t_1$ (qui peuvent atteindre n'importe quelle valeur, positive, négative ou nulle). La possibilité de choisir la configuration des signaux est impossible pour la méthode de transfert de temps T2L2 du fait de la présence d'un rétro réflecteur (cf. partie 1.2.2) ou pour le traçage radiométriques par effet Doppler des sondes Cassini ou Pioneer.

Les mesures locales d'accélération sont réalisées toutes les trois secondes pour un axe. Par conséquent, une mesure du vecteur d'accélération - soit une mesure

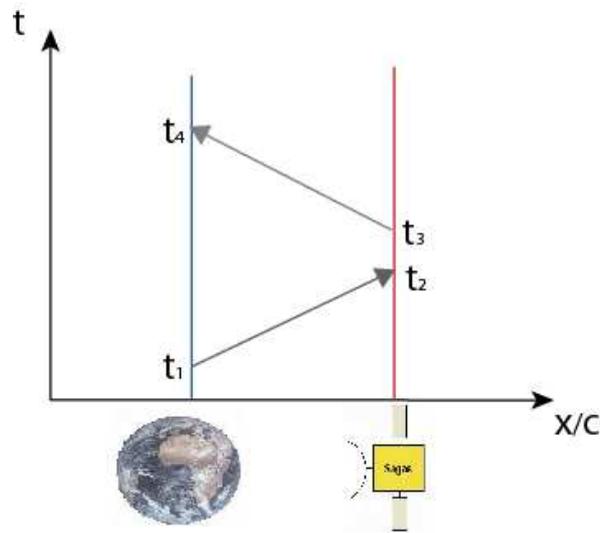


FIG. 6.1 : Principe du lien optique entre la Terre et la sonde spatiale dédiée à SAGAS.

des trois composantes - est effectuée toutes les neuf secondes.

Les mesures fréquentielles de la mission SAGAS correspondent à la différence de fréquence entre le laser produit localement (par l'horloge optique) et le signal réceptionné. Deux observables sont ainsi mesurées, l'une à bord du satellite (lien ascendant), l'autre au sol (lien descendant) à une fréquence d'échantillonnage de 0.01 Hz .

On cherche à exprimer les observables - notées y_u et y_d - en fonction des termes dont le bruit joue un rôle significatif. Une évaluation rapide des termes intervenant dans la comparaison fréquentielle montre que, outre le déplacement relativiste de fréquence nécessaires aux tests de Physique Fondamentale, les perturbations prédominantes des mesures proviennent de l'effet Doppler et du retard troposphérique.

L'expression des observables peut être déduite d'un raisonnement physique - en n'oubliant pas qu'il s'agit de mesures locales de fréquence - ou par la théorie développée dans l'article [86] (mais dans lequel les délais atmosphériques n'interviennent pas). Dans tous les cas, les observables y_u et y_d s'écrivent :

$$\begin{aligned}
y_u(t_2) &= \frac{f_s(t_2) - f_g(t_1)}{f_0} + \mathbf{N}_u \cdot \frac{\mathbf{v}_s(t_2) - \mathbf{v}_g(t_1)}{c} + \Delta y_{\text{tropo}}(t_1), \\
y_d(t_4) &= \frac{f_g(t_4) - f_s(t_3)}{f_0} + \mathbf{N}_d \cdot \frac{\mathbf{v}_s(t_3) - \mathbf{v}_g(t_4)}{c} + \Delta y_{\text{tropo}}(t_4),
\end{aligned} \tag{6.1}$$

où f_s et f_g sont respectivement les fréquences du laser spatial et terrestre, et où les vecteurs \mathbf{N}_u et \mathbf{N}_d sont définis selon :

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_u &= \frac{\mathbf{x}_s(t_2) - \mathbf{x}_g(t_1)}{\|\mathbf{x}_s(t_2) - \mathbf{x}_g(t_1)\|}, \\
\mathbf{N}_d &= \frac{\mathbf{x}_s(t_3) - \mathbf{x}_g(t_4)}{\|\mathbf{x}_s(t_3) - \mathbf{x}_g(t_4)\|},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

et où $\Delta y_{\text{tropo}}(t)$ correspond au changement de fréquence associé à la troposphère terrestre d'un signal reçu ou émis par la station terrestre à t .

Une similitude de configuration entre la mission ACES et le projet SAGAS implique un rapprochement de l'expression de leurs observables. En effet, si on considère que les signaux de fréquence f_1 et f_2 du Lien Micro-Onde (cf. Chapitre 2) correspondent aux voies ascendante et descendante du lien laser de SAGAS, alors les mesures y_u et y_d s'expriment selon :

$$\begin{aligned}
y_u(t_2) &= -\frac{d\left(\Delta\tau^s(\tau^s(t_2))\right)}{dt}, \\
y_d(t_4) &= -\frac{d\left(\Delta\tau^g(\tau^g(t_4))\right)}{dt},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

où les observables $\Delta\tau^s(\tau^s(t_2))$ et $\Delta\tau^g(\tau^g(t_4))$ de la mission ACES sont données par les équations (2.34) et (2.35). Ces expressions permettent de déterminer l'ensemble des effets (retard atmosphérique, retard Shapiro, ...) sur les observables y_u et y_d à partir du travail détaillé dans le Chapitre 2.

De plus, comme pour le MWL de la mission ACES, il est possible de combiner les mesures des signaux montant et descendant à notre guise, à travers le choix

de la valeur de l'intervalle temporelle T_{23} ou T_{14} . Les missions spatiales citées dans la partie 6.1.3 - la mission Cassini ou les sondes Pioneer 10 et Pioneer 11 - n'offraient pas cette possibilité (présence d'un transpondeur à bord).

Les deux observables fréquentielles définies par l'équation (6.1) conduisent principalement à deux informations essentielles à la mission : d'une part, la différence des observables y_u et y_d permet de comparer la fréquence des horloges ; d'autre part, la somme mène à une estimation de la vitesse relative des stations, et par conséquent, à la trajectoire de la station spatiale. Cependant, seule la trajectoire purement gravitationnelle nous intéresse pour l'étude des forces attractives des corps massiques : celle-ci est obtenue en soustrayant les accélérations non-gravitationnelles mesurées par l'accéléromètre embarqué.

6.2.2 Bruits de la mission

Certaines des erreurs affectant les mesures du projet SAGAS ont été caractérisées par leur variance d'Allan $\sigma_y(\tau)$, où τ est le temps d'intégration. Elles peuvent être, de façon équivalente, décrites par leur densité spectrale de puissance (DSP) S_y en fonction de la fréquence f . Par exemple, si l'on considère un bruit blanc de fréquence (terme proportionnel à h_0) et un bruit de scintillement de fréquence (terme en h_1), la référence [108] donne l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} S_y(f) &= (h_0 \cdot f^0 + h_{-1} \cdot f^{-1}) / \text{Hz}, \\ \sigma_y^2(\tau) &= \frac{h_0}{2\tau} + 2 \ln(2h_{-1}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

D'après les équations (6.1), les termes d'erreur prédominants affectant les observables y_u et y_d proviennent des horloges, du terme d'estimation des vitesses à travers l'effet Doppler et de la troposphère. Dans le cas de la station spatiale, sa vitesse est supposée déterminée à l'aide de l'accéléromètre embarqué. La relation entre les densités spectrales de puissance $S_v(f)$ du bruit sur la vitesse et $S_a(f)$ de l'erreur sur l'accélération d'une station est issue de l'une des propriétés de la transformée de Fourier :

$$S_a(f) = (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot S_v(f). \quad (6.5)$$

L'horloge spatiale

La stabilité en fréquence relative de l'horloge spatiale est affectée d'un bruit blanc de fréquence de stabilité $\sigma_y(\tau) = 1 \cdot 10^{-14} \cdot \tau^{-1/2}$. Son exactitude est bornée à 10^{-17} , ce qui se traduit par un bruit de scintillement de fréquence d'écart type

d'Allan $\sigma_y(\tau) = 1 \cdot 10^{-17}$ au maximum (même si cette amplitude devrait être plus faible pour l'exactitude visée).

Par conséquent, sa variance d'Allan est maximisée par :

$$\sigma_{y_s}^2(\tau) = (1 \cdot 10^{-14} \cdot \tau^{-1/2})^2 + (1 \cdot 10^{-17})^2. \quad (6.6)$$

Sa densité spectrale de puissance est évaluée en faisant un parallèle avec l'équation (6.4). Dans ces conditions, la DSP $S_{y_s}(f)$ de l'erreur provenant de l'horloge spatiale s'exprime selon :

$$S_{y_s}(f) = (2 \cdot 10^{-28} + 7.2 \cdot 10^{-35} \cdot f^{-1})/\text{Hz}. \quad (6.7)$$

L'horloge terrestre

Les performances des horloges terrestres sont considérées comme significativement meilleures que celles de l'horloge embarquée au moment de la mission. Les étalons de fréquence optique les plus stables atteignent, dès à présent, des stabilités de l'ordre de $\sigma_y(\tau) = 3 \cdot 10^{-15} \cdot \tau^{-1/2}$ et des exactitudes en-dessous des $2 \cdot 10^{-17}$ [15, 16, 17] en fréquence relative. Durant les prochaines années, des améliorations de ces performances sont à prévoir et on peut supposer que celles-ci atteindront, d'ici au lancement du projet SAGAS, des stabilités de $\sigma_y(\tau) = 5 \cdot 10^{-16} \cdot \tau^{-1/2}$ limitées par une composante Flicker à $3 \cdot 10^{-18}$. Par conséquent, sa DSP s'écrirait selon :

$$S_{y_g}(f) = (5 \cdot 10^{-31} + 6.5 \cdot 10^{-36} \cdot f^{-1})/\text{Hz}. \quad (6.8)$$

L'accéléromètre spatial

Le bruit sur la restitution de la vitesse du satellite dédié au projet SAGAS est lié à l'intégration du bruit de l'accéléromètre embarqué. L'accéléromètre à atomes froids décrit dans la partie 6.1.2 démontre une stabilité de $\sigma_a(\tau) = 9 \cdot 10^{-10} \cdot \tau^{-1/2} \text{ m.s}^{-2}$ par axe pour une mesure tridimensionnelle de l'accélération. Un facteur $\sqrt{3}$ peut être gagné en mesurant l'accélération seulement suivant une direction, la direction d'émission par exemple, lors d'applications pour lesquelles on ne s'intéresse qu'à une seule direction (voir parties 6.3.2 et 6.3.3).

Bien que la modélisation de la trajectoire réduirait considérablement le bruit à faible fréquence, on considère les stabilités données ci-dessus pour la suite de la thèse. L'exactitude absolue visée de $5 \cdot 10^{-12} \text{ m.s}^{-2}$ prend encore une fois la place de limite inférieure sous la forme d'un bruit Flicker, et ainsi la densité spectrale correspondante s'écrit selon :

$$S_{v_s/c}(f) = (1.5 \cdot 10^{-37} \cdot f^{-2} + 5.1 \cdot 10^{-42} \cdot f^{-3})/\text{Hz}. \quad (6.9)$$

L'accéléromètre terrestre

La mesure la plus précise de la vitesse des stations terrestres résulte de la combinaison de mesures d'accélération gravitationnelle locale et de positionnement satellitaire. En effet, à hautes fréquences, le mouvement des stations est corrigé par des mesures de gravité locale à l'aide de gravimètres à supraconducteurs. Ces instruments montrent des stabilités de l'ordre de $1.4 \cdot 10^{-9} \cdot \tau^{-1/2} \text{ m.s}^{-2}$ [109]. Ensuite, l'utilisation combinée de plusieurs systèmes de positionnement (GNSS, SLR ou VLBI) permet d'atteindre des erreurs inférieures au centimètre [110]. En effet, les meilleures restitutions de position offertes par les systèmes de navigation par satellites montrent un bruit de scintillement en position sur l'ensemble de la gamme des fréquences. La densité spectrale correspondante est donnée par [111, 112, 113] :

$$S_x(f) = 1 \cdot 10^{-6} \cdot f^{-1} \text{ m}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}. \quad (6.10)$$

Par conséquent, le bruit minimal sur la vitesse des stations terrestres correspond au bruit des gravimètres à haute fréquence, et au bruit du positionnement GNSS pour les basses fréquences. Il se traduit par les DSP suivantes :

$$\begin{aligned} S_{v_g/c}(f) &= 1.1 \cdot 10^{-36} \cdot f^{-2} / \text{Hz} && \text{pour } f > 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}, \\ S_{v_g/c}(f) &= 4.4 \cdot 10^{-22} \cdot f / \text{Hz} && \text{pour } f \leq 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

La troposphère

Les modèles troposphériques dispensent typiquement une précision millimétrique pour les fréquences optiques [114]. Les fonctions de nivellement (cf. Chapitre 2, partie 2.2.1) adéquates ont été vérifiées au niveau du millimètre à partir de mesures provenant du SLR [84]. En supposant que les erreurs de ces modèles sont du bruit blanc de phase millimétrique pour un échantillonnage de 10 Hz , la densité spectrale de puissance résultante s'écrit :

$$S_{y_{tropo}}(f) = 8.7 \cdot 10^{-23} \cdot f^2 / \text{Hz}. \quad (6.12)$$

Bruit des mesures

Sur la figure 6.2 sont représentées les sources dominantes de bruit à travers leur densité spectrale de puissance. Cette figure permet de comparer l'impact de chacune des sources de bruits sur les observables : à basses fréquences, les mesures y_u et y_d sont dominées par le bruit provenant de l'accéléromètre embarqué tandis qu'à hautes fréquences, les erreurs issues de l'horloge spatiale prédominent.

Afin d'exprimer le bruit sur les deux observables y_u et y_d , on définit :

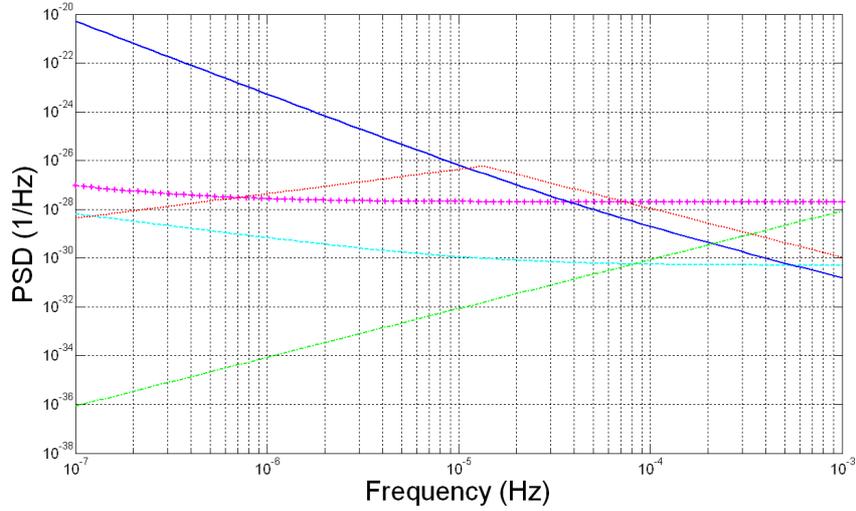


FIG. 6.2 : Densité spectrale de puissance des sources dominantes de bruit : S_{y_s} (en magenta), S_{y_g} (en cyan), $S_{v_s/c}$ (courbe bleue), $S_{v_g/c}$ (en rouge) et $S_{y_{tropo}}$ (courbe verte).

- $n_{y_s}(t)$ le bruit en fréquence relative de l'horloge spatiale au temps coordonnée t dont la DSP est donnée par (6.7),
- $n_{y_g}(t)$ l'erreur en fréquence relative de l'horloge terrestre au temps coordonnée t dont la densité spectrale de puissance s'exprime selon l'équation (6.8),
- $n_{v_s/c}(t)$ l'erreur réalisée sur la restitution de la vitesse de la sonde au temps t , projetée suivant la direction du sol vers le satellite et divisée par la célérité de la lumière dans le vide (la densité spectrale de puissance correspondante est l'équation (6.9)),
- $n_{v_g/c}(t)$ le bruit sur le terme v_g/c au temps coordonnée t , projetée suivant la direction du sol vers le satellite et de densité spectrale de puissance $S_{v_g/c}(f)$ donnée par (6.11),
- et $n_{tropo}(t)$ l'erreur en fréquence provenant du délai troposphérique à t dont la DSP est donnée par l'équation (6.12).

Par conséquent, les erreurs n_{y_u} et n_{y_d} sur les observables y_u et y_d s'écrivent, d'après l'équation (6.1) selon :

$$\begin{aligned} n_{y_u} &= n_{y_s}(t_2) - n_{y_g}(t_1) + n_{v_s/c}(t_2) - n_{v_g/c}(t_1) + n_{tropo}(t_1), \\ n_{y_d} &= n_{y_g}(t_4) - n_{y_s}(t_3) + n_{v_s/c}(t_3) - n_{v_g/c}(t_4) + n_{tropo}(t_4). \end{aligned} \quad (6.13)$$

6.2.3 Combinaisons primordiales

Du fait que les vecteurs \mathbf{N}_u et \mathbf{N}_d définis selon l'équation (6.2) sont, au premier ordre, de même direction mais de sens opposés, la combinaison des observables y_u et y_d données par l'équation (6.1) peut conduire à l'extraction de variables scientifiques utiles à la réalisation des objectifs scientifiques tout en éliminant certains termes d'erreur prédominants. En effet, la demi-somme et la demi-différence des observables permettent respectivement de faire ressortir la différence de fréquence relative entre les horloges et l'effet Doppler. Ce dernier donne accès à la vitesse relative des deux stations. En corrigeant les effets des forces non-gravitationnelles sur la trajectoire de la sonde par les mesures de l'accéléromètre, on peut obtenir la trajectoire purement gravitationnelle de la sonde.

Les deux nouvelles combinaisons obtenues y_r et y_t ³ s'expriment selon :

$$\begin{aligned} y_r(t_2, t_4) &= \frac{y_u(t_2) - y_d(t_4)}{2}, \\ y_t(t_2, t_4) &= \frac{y_u(t_2) + y_d(t_4)}{2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Les perturbations dominantes induisent des erreurs sur les deux nouvelles variables y_r et y_t définies par l'équation (6.14). L'expression des erreurs les affectant sont déduites de la différence ou de l'addition des équations (6.13). Ainsi le bruit n_{y_t} sur la variable y_t s'écrit selon :

$$\begin{aligned} n_{y_t}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(n_{y_g}(t_1) - n_{y_g}(t_4) + n_{y_s}(t_2) - n_{y_s}(t_3) \right. \\ &\quad \left. + n_{v_s/c}(t_2) + n_{v_s/c}(t_3) + n_{v_g/c}(t_1) + n_{v_g/c}(t_4) \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

et l'erreur n_{y_r} sur y_r s'exprime par :

$$\begin{aligned} n_{y_r}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(n_{y_g}(t_1) - n_{y_g}(t_4) + n_{y_s}(t_2) - n_{y_s}(t_3) \right. \\ &\quad \left. + n_{v_s/c}(t_2) + n_{v_s/c}(t_3) + n_{v_g/c}(t_1) + n_{v_g/c}(t_4) \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Les erreurs présentes sur les deux variables définies par l'équation (6.14) dépendent, d'après les équations (6.15) et (6.16), de bruits provenant de la même

³Les indices r et t des variables font références aux termes *ranging* et *timing* en relation avec la nature de leur conversion temporelle.

source mais à des temps potentiellement différents. La liberté de la combinaison des signaux rend possible l'annulation d'un ou plusieurs termes. Par exemple, dans le cas de la variable y_r , la configuration $T_{14} = 0^4$ permet d'annihiler le bruit de l'horloge terrestre tandis que $T_{23} = 0$ conduit à l'annulation de l'erreur de l'horloge spatiale (se référer à l'équation (6.16)).

La somme ou la différence de bruits corrélés a une incidence particulière sur les propriétés statistiques du signal résultant. En effet, si on considère la somme d'une fonction stochastique $n(t)$ de densité spectrale $S_n(f)$, et de la même fonction $n(t + \Delta T)$ mais décalée dans le temps de la quantité ΔT , alors sa densité spectrale de puissance n'est pas égale à $2 \cdot S_n(f)$ mais possède des caractéristiques particulières du fait de la corrélation. En effet, elle se calcule à partir de sa fonction d'auto-corrélation par :

$$S_{n+}^{\Delta T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(n(t) + n(t + \Delta T) \right) \cdot \left(n(t + \tau) + n(t + \Delta T + \tau) \right) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau. \quad (6.17)$$

Le développement de l'équation (6.17) conduit à quatre termes :

$$\begin{aligned} S_{n+}^{\Delta T}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t) \cdot n(t + \tau) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t + \Delta T) \cdot n(t + \Delta T + \tau) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t) \cdot n(t + \Delta T + \tau) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t + \Delta T) \cdot n(t + \tau) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Par changements de variable adaptés ($\tau' = \tau \pm \Delta T$), ces quatre termes s'écrivent :

⁴Comme dans le Chapitre 2, les intervalles de temps coordonnée sont définis par $T_{ij} = t_j - t_i$.

$$\begin{aligned}
S_{n+}^{\Delta T}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t) \cdot n(t + \tau) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t + \Delta T) \cdot n(t + \Delta T + \tau) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t) \cdot n(t + \tau') \right) e^{-2\pi f \tau'} e^{2\pi f \Delta T} d\tau' \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(n(t) \cdot n(t + \tau') \right) e^{-2\pi f \tau'} e^{-2\pi f \Delta T} d\tau',
\end{aligned} \tag{6.19}$$

et conduisent à l'expression finale de $S_{n+}^{\Delta T}(f)$:

$$S_{n+}^{\Delta T}(f) = S_n(f) \cdot \left(2 + e^{2\pi f \Delta T} + e^{-2\pi f \Delta T} \right) = 2S_n(f) \cdot \left(1 + \cos(2\pi f \Delta T) \right). \tag{6.20}$$

L'équation (6.20) fait apparaître une fonction périodique reliant la densité spectrale du bruit initial $S_n(f)$ à la DSP de l'addition des deux fonctions stochastiques $S_{n+}^{\Delta T}(f)$. La figure 6.3 montre les deux densités spectrales de puissance lorsque l'erreur $n(t)$ correspond à du bruit blanc.

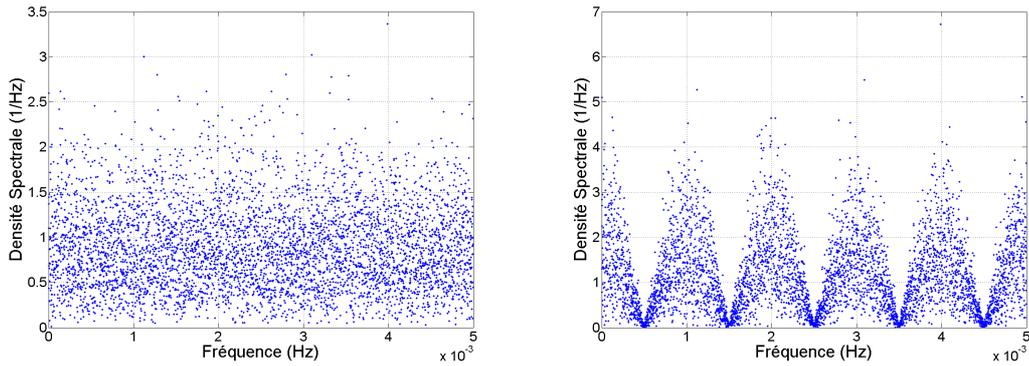


FIG. 6.3 : Densité spectrale de puissance d'un bruit blanc échantillonné à 1 Hz (figure de gauche). Densité spectrale de puissance du même bruit blanc auquel a été rajouté ce même bruit mais décalé de 1000 s (figure de droite).

L'équation (6.20) concerne l'addition de deux bruits identiques mais décalés dans le temps. Un calcul similaire peut être mené pour une différence de deux

bruits identiques mais décalés temporellement. Dans ce cas, la DSP de la fonction $S_{n-}^{\Delta T}(f)$ résultante s'exprime selon :

$$S_{n-}^{\Delta T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(n(t) - n(t + \Delta T) \right) \cdot \left(n(t + \tau) - n(t + \Delta T + \tau) \right) \right) e^{-2\pi f \tau} d\tau, \quad (6.21)$$

et des considérations identiques conduisent à :

$$S_{n-}^{\Delta T}(f) = 2S_n(f) \cdot \left(1 - \cos(2\pi f \Delta T) \right). \quad (6.22)$$

Comme annoncé précédemment, l'expression de l'erreur sur l'observable y_r donnée par l'équation (6.16) fait intervenir des erreurs d'une même source mais associées à des temps coordonnée différents. En appliquant les relations (6.20) et (6.22), la densité spectrale de puissance $S_{y_r}(f)$ est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} S_{y_r}(f) = & \frac{1}{2} \cdot \left(S_{y_g}(f) \cdot \left(1 - \cos(2\pi f T_{14}) \right) + S_{y_s}(f) \cdot \left(1 - \cos(2\pi f T_{23}) \right) \right. \\ & + S_{v_s/c}(f) \cdot \left(1 + \cos(2\pi f T_{23}) \right) + S_{v_g/c}(f) \cdot \left(1 + \cos(2\pi f T_{14}) \right) \\ & \left. + S_{y_{tropical}}(f) \cdot \left(1 + \cos(2\pi f T_{14}) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

De la même manière, l'utilisation des équations (6.20) et (6.22) à travers l'expression (6.15) conduit à l'obtention de la DSP $S_{y_t}(f)$ sur la variable y_t :

$$\begin{aligned} S_{y_t}(f) = & \frac{1}{2} \cdot \left(S_{y_g}(f) \cdot \left(1 + \cos(2\pi f T_{14}) \right) + S_{y_s}(f) \cdot \left(1 + \cos(2\pi f T_{23}) \right) \right. \\ & + S_{v_s/c}(f) \cdot \left(1 - \cos(2\pi f T_{23}) \right) + S_{v_g/c}(f) \cdot \left(1 - \cos(2\pi f T_{14}) \right) \\ & \left. + S_{y_{tropical}}(f) \cdot \left(1 - \cos(2\pi f T_{14}) \right) \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

La figure 6.4 rapporte les densités spectrales de puissance des bruits des observables y_t et y_r pour deux situations particulières, la coïncidence des deux signaux à la sonde spatiale ($T_{23} = 0$) ou à la station terrestre ($T_{14} = 0$).

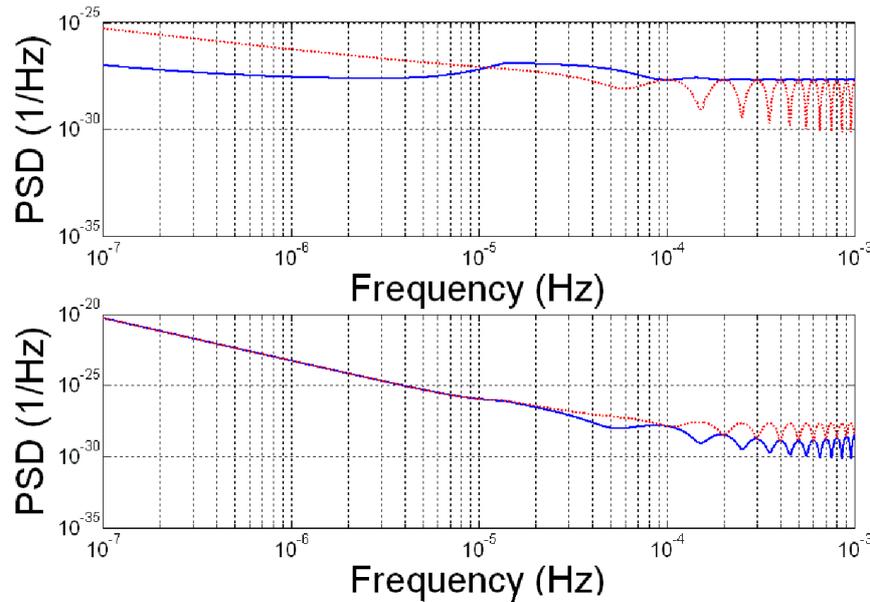


FIG. 6.4 : DSP des bruits affectant les observables y_t (figure supérieure) et y_r (figure inférieure) lorsque la sonde se trouve à 10 UA de la Terre et pour les configurations $T_{23} = 0$ (courbe bleue continue) et $T_{14} = 0$ (courbe rouge en pointillés).

Concernant l'observable y_t , la figure 6.4 illustre particulièrement bien le gain potentiel à basses fréquences promis par l'utilisation de la condition $T_{23} = 0$. En effet, cela permet d'annihiler le bruit de l'accéléromètre embarqué dominant dans ce domaine de fréquence.

Plus généralement, les équations (6.23) et (6.24) permettent d'obtenir le spectre de bruit sur les deux observables pour des valeurs arbitraires de T_{23} et de T_{14} . Cependant, il ne faut pas oublier que ces deux variables ne sont pas indépendantes (en effet, leur différence est égale à la somme des trajets aller et retour).

Cette possibilité de choisir librement la valeur de T_{23} (ou de T_{14}) en post-traitement est spécifique des méthodes de transfert de temps dites "asynchrones" pour lesquelles le signal montant est indépendant du signal descendant, telles que le Lien Micro-Onde de la mission ACES ou le lien optique de SAGAS. Cette potentialité permet l'optimisation du rapport signal sur bruit (S/N) pour un objectif scientifique donné, comme on le verra dans les parties 6.3.2 et 6.3.3.

6.3 La combinaison d'observables

Dans cette partie sont étudiés certains des objectifs de la future mission. La combinaison de l'ensemble des observables peut, de manière inattendue, enrichir les performances d'une mesure pour atteindre une précision ultime sur ces objectifs. Trois exemples concernant l'exploration spatiale ou la Physique Fondamentale permettent de mettre en évidence les avantages d'une alliance *rusée* des mesures de SAGAS.

6.3.1 Mesure de la gravité des objets massiques

La présence d'un accéléromètre à bord de la sonde permet la mesure des trois composantes de l'accélération non-gravitationnelle locale toutes les neuf secondes. La combinaison de ces mesures avec la trajectoire du satellite obtenue par mesures Doppler conduit à la trajectoire gravitationnelle de la sonde mais limite son estimation. Cet instrument permet ainsi la mesure des forces gravitationnelles ambiantes avec une exactitude de $5 \cdot 10^{-12} \text{ m.s}^{-2}$ après quelques heures d'intégration. La connexité de la nature de l'appareil à la gravité pousse à penser que cet instrument aura le monopole de la mesure gravitationnelle.

Le déplacement relativiste des horloges (se référer à la section 1.3.1) est proportionnel au potentiel gravitationnel à l'endroit des horloges. Par conséquent, une mesure de cette différence fréquentielle des horloges peut conduire à une estimation du potentiel gravitationnel - et de ce fait, à une évaluation de la gravité - en fonction de la position de la sonde spatiale.

La différence fondamentale entre les deux méthodes réside dans la dépendance de leur incertitude relative en fonction de la distance r de la sonde au centre de l'objet massique. En effet, une mesure fréquentielle offre une dépendance en $1/r$ contrairement à la trajectoire de la sonde qui est sensible aux forces, et dépend, au premier ordre, de l'inverse du carré de la distance r entre la sonde et l'objet massique⁵.

L'observable fréquentielle adaptée à l'estimation de la gravité est la combinaison y_t puisqu'elle fournit une mesure de $f_s - f_g$ (cf. équation (6.14)). D'après la figure 6.2, l'incertitude de cette mesure est dominée par l'erreur de fréquence engendrée par la vitesse de la station spatiale. Pour l'éliminer, il faut réaliser l'association des signaux montant et descendant telle que $t_2 = t_3$, i. e. choisir l'intervalle T_{23} nul. De cette façon, l'intégration des mesures y_t sur plusieurs jours permet d'atteindre l'exactitude de l'horloge spatiale de 10^{-17} en fréquence relative.

⁵Le terme dominant de la force gravitationnelle exercée par une masse M est $-\frac{GM}{r^2}$, où G est la constante gravitationnelle et r la distance entre le centre de masse et le point d'application de cette force.

Dans cette situation, la précision obtenue sur la masse d'un objet en fonction de la distance est étudiée sur la figure 6.5 dans le cas de l'ancienne planète Pluton pour les deux méthodes de mesure.

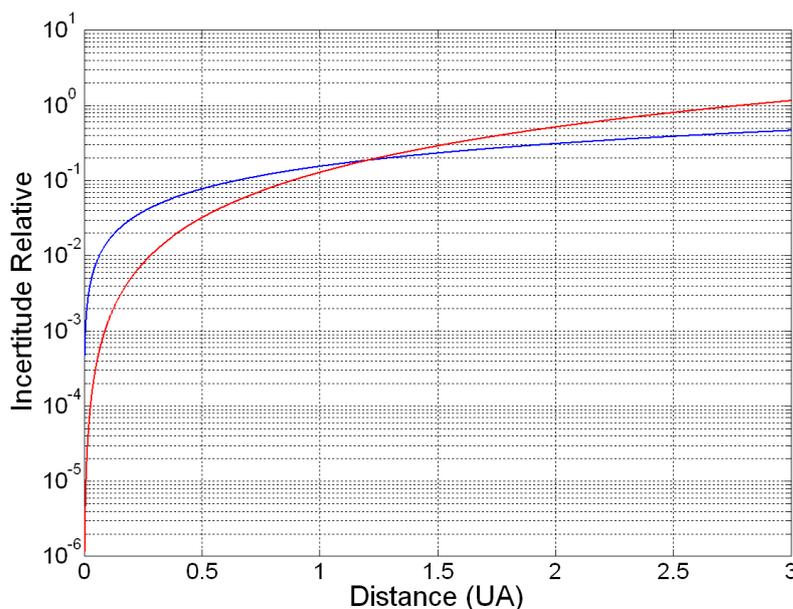


FIG. 6.5 : Incertitude relative sur la mesure de la masse d'un objet en fonction de la distance du centre de masse à partir des mesures d'accélération (courbe rouge) ou de déplacement fréquentiel (courbe bleue).

Les incertitudes provenant des deux mesures se croisent pour une distance proche de 1.2 UA. En-dessous de cette distance, la mesure d'accélération (limitée par les mesures des forces non-gravitationnelles issues de l'accéléromètre atomique embarqué) est plus sensible que la mesure du déplacement gravitationnel de fréquence. Cette distance caractéristique (de 1.2 UA) évaluée à l'aide de la figure 6.5 est indépendante de l'astre et de sa masse, puisque les termes dominants de l'accélération et du potentiel gravitationnels dépendent de manière similaire de la masse de l'objet.

L'objectif scientifique de SAGAS concernant l'évaluation de la distribution massique de la ceinture de Kuiper (cf. partie 6.1.3) est tout aussi concerné par cette mesure de potentiel gravitationnel. En effet, les différents modèles de distribution massique ne sont pas séparables par une mesure d'accélération, tandis qu'une mesure du déplacement relativiste de fréquence permet de différencier la concordance des modèles avec les résultats (cf. figure 6.6).

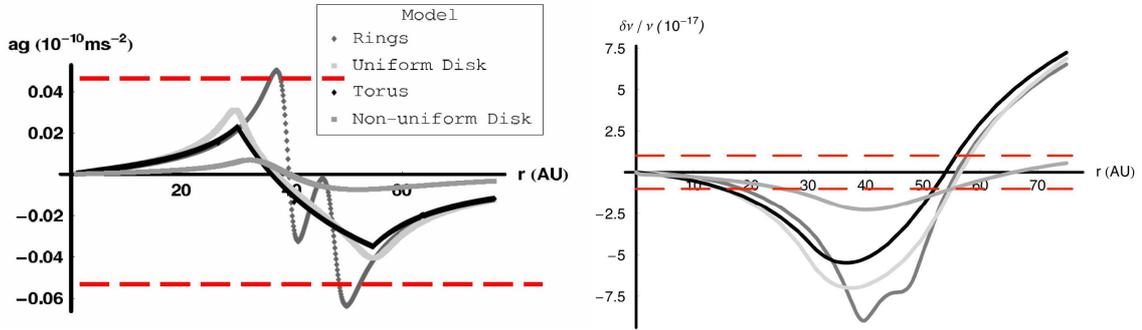


FIG. 6.6 : Profils d'accélération (figure de gauche) et de déplacement gravitationnel de fréquence (figure de droite) en fonction de la distance héliocentrique pour différents modèles de distribution massique de la ceinture de Kuiper [105, 106] (de masse totale égale à 0.3 masse terrestre). Les pointillés rouges indiquent la sensibilité des instruments de SAGAS.

6.3.2 Test du modèle PPN ou mesurer le délai Shapiro

Le projet SAGAS vise une mesure du paramètre γ de la métrique PPN (équation (1.5)). Cette mesure est réalisée en évaluant le retard Shapiro (partie 2.2.2) induit par la masse du Soleil. L'effet n'est important que pour des signaux dont la trajectoire passe relativement proche d'une masse gravitationnelle. Par conséquent, une estimation précise de γ est effectuée lors de l'occultation de la sonde par le Soleil, telle que la mesure [44] réalisée durant la mission Cassini.

L'occultation de la sonde spatiale par le Soleil conduit à deux mesures (l'une avant, l'autre après) et augmente l'incertitude obtenue pour une mesure par un facteur $\sqrt{2}$. De même, si la trajectoire de SAGAS conduit à N occultations solaires, alors l'erreur de la mesure de γ diminue d'un facteur $\sqrt{2N}$, en supposant que les erreurs sur chaque mesure sont décorréliées.

Une mesure du Doppler pour une sonde proche du Soleil doit tenir compte de l'effet de la couronne solaire. De par sa nature dispersive, elle induit un retard de propagation proportionnel à l'inverse de la fréquence du signal au carré (conformément à l'ionosphère terrestre dont l'étude détaillée se trouve dans le Chapitre 2). Pour la mesure issue de la mission Cassini, cet effet avait été évalué à partir de mesures de différentes fréquences. Le résidu de cette mesure était de quatre ordres de grandeur en-dessous de l'effet mesuré, atteignant ainsi les 10^{-14} en fréquence relative [44]. A la fréquence optique du lien de SAGAS, le retard engendré par la couronne solaire est huit ordres de grandeur plus petit. De plus, il peut être mesuré à partir d'une combinaison des mesures des fréquences optiques et du lien de communication radiométrique (bande X). Il est donc justifié de penser que cet

effet n'a aucune incidence sur la performance de la mesure de γ .

Dans les équations (6.1), seuls les termes dont l'erreur a un impact prédominant sur les observables ont été considérés. Cependant, l'effet Shapiro explicité dans la partie 2.2.2 a une influence sur la propagation et la fréquence des signaux. Son influence sur les observables y_u et y_d peut être déduite simplement à partir des égalités (6.3) et (2.31). Le déplacement fréquentiel Shapiro correspond à la dérivée du retard temporel correspondant :

$$(\delta y)_{Shap} = \frac{d}{dt} \left((1 + \gamma) \frac{GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{|\mathbf{x}_g| + |\mathbf{x}_s| + |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_g|}{|\mathbf{x}_g| + |\mathbf{x}_s| - |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_g|} \right) \right) \approx -2(1 + \gamma) \frac{GM}{c^3 b} \frac{db}{dt}, \quad (6.25)$$

où b est le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance d'approche la plus petite du signal laser. Pour une incidence rasante au Soleil ($b \approx 7 \cdot 10^8$ m), l'équation (6.25) indique que la variation relative de fréquence sur les mesures y_u et y_d atteint $8 \cdot 10^{-10}$.

La somme des effets Shapiro affectant les deux signaux déteint sur l'observable y_r (cf. équation (6.14)). Au maximum, l'observable y_r ressent deux fois l'effet du retard Shapiro lorsque les signaux se croisent au voisinage du Soleil. Par contre, l'autre observable y_t est proportionnelle à la différence de cet effet sur les signaux montant et descendant. Bien que l'amplitude de ce terme soit plus faible, il est possible que l'erreur associée à cette mesure la contrebalance, si les signaux combinés approchent le Soleil à des distances suffisamment différentes.

La mesure du paramètre γ est dépendante du bruit de l'observable considérée, de la distance de la sonde au moment de l'occultation et de la façon dont sont combinés les deux signaux. Dans l'une de ces configurations, les mesures sont simulées puis analysées à l'aide d'un filtre adaptatif (*Matched Filter*) [115] afin d'en déduire la précision ultime.

Le rapport signal sur bruit (S/N) résultant - alors maximal - est donné par :

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{max}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(f)|^2}{S(f)} df, \quad (6.26)$$

où $F(f)$ est la transformée de Fourier du signal étudié et $S(f)$ la densité spectrale du bruit l'affectant.

Dans la suite de cette partie, on s'attache à rechercher la combinaison des signaux permettant la mesure la plus précise de l'effet Shapiro. La précision de cette mesure est liée à l'erreur sur l'estimation du paramètre γ par un facteur deux dépréciatif d'après l'équation (6.25).

Afin d'estimer cette précision maximale, on considère une de mesures consécutives sur une dizaine de jours et effectuées à un taux échantillonnage de 0.01 Hz , la première mesure correspondant au premier des deux signal qui passe au voisinage du Soleil.

Tout d'abord, on étudiera l'influence de la combinaison des observables en considérant uniquement un bruit blanc sur les observables y_r et y_t . Ensuite, on considérera les bruits réalistes des observables pour en déduire la potentialité de SAGAS sur ce test.

Un modèle simplifié

Afin de comprendre les phénomènes mis en jeu, on considère, dans un premier temps, que les observables ne sont affectées que par un bruit blanc d'horloges (correspondant au premier terme de l'équation (6.7)). Il s'agit d'un cas purement théorique mais important pour comprendre l'influence de la combinaison des observables sur le résultat final. Les densité spectrales de puissance $S_{y_r}(f)$ et $S_{y_t}(f)$ ne sont plus soumises aux effets corrélatifs des bruits des signaux montant et descendant (équations (6.23) et (6.24)) mais sont données par :

$$S_{y_r}(f) = S_{y_t}(f) = 2 \cdot 10^{-28} / \text{Hz}. \quad (6.27)$$

Dans ces conditions, on étudie l'impact de la combinaison des observables. Pour cela, la précision sur la mesure du paramètre γ est estimée pour différentes valeurs de l'intervalle T_{23} . Intuitivement, il est raisonnable de penser que pour l'observable y_r , l'intervalle optimal correspondra à celui qui permet aux deux signaux de se croiser à l'endroit le plus proche du Soleil afin de maximiser l'effet relativiste.

Selon la figure 6.7, l'amplitude maximale de l'effet Shapiro sur la variable y_r est effectivement atteinte lorsque les signaux se croisent au voisinage de l'astre solaire, soit pour $T_{23} \approx -2 \cdot \frac{6UA}{c}$. Lorsque $T_{23} = 0$, la durée s'écoulant entre le passage des deux signaux que l'on combine au voisinage du Soleil correspond à $2 \cdot \frac{6UA}{c}$: l'effet relativiste sur cette combinaison est, par conséquent, plus faible. Comparativement à la *configuration* Λ où $T_{23} = 0$ (cf. Chapitre 3), la première combinaison d'observables permet de gagner pratiquement un facteur deux sur l'effet à mesurer (cf. figure 6.7).

La figure 6.8 présente la précision sur l'effet Shapiro calculée suivant (6.26) à partir de l'observable y_r en fonction de la distance de la sonde pour les deux combinaisons de signaux évoquées ci-dessus.

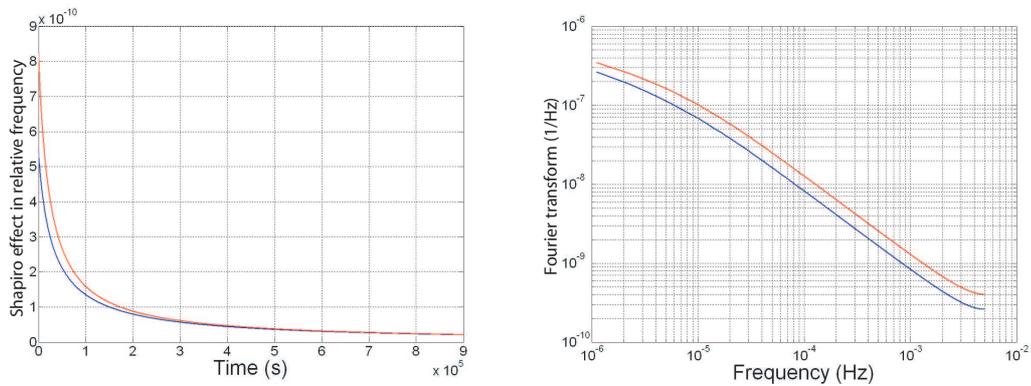


FIG. 6.7 : Retard Shapiro sur l'observable y_r en fonction du temps (figure de gauche) et transformée de Fourier correspondante en valeur absolue en fonction de la partie positive du spectre des fréquences (figure de droite) pour des signaux se croisant au voisinage du Soleil (courbe rouge) ou à la station spatiale (courbe bleue). Ces courbes sont tracées pour une distance héliocentrique de la sonde de 6 UA.

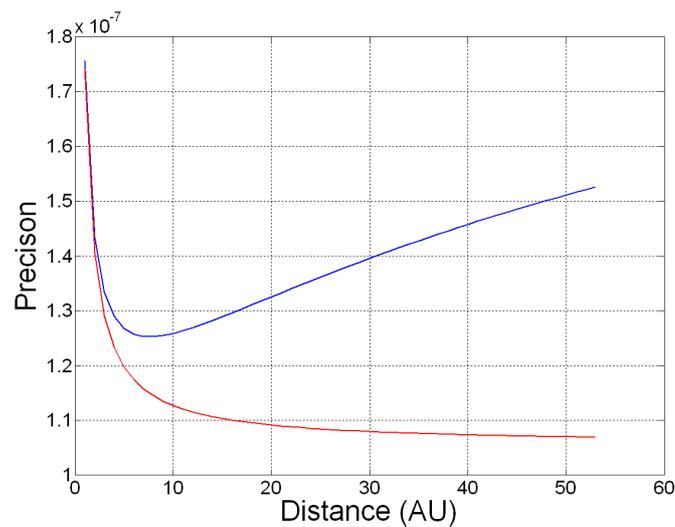


FIG. 6.8 : Précision sur l'effet Shapiro obtenue à partir de l'observable y_r en fonction de la distance de la sonde pour des signaux se croisant au voisinage du Soleil (courbe rouge) ou à la station spatiale (courbe bleue).

Le bruit sur l'observable y_r étant blanc (cf. équation (6.27)), seule le carré de la transformée de Fourier de l'effet étudié intervient dans la détermination de la précision ultime (cf. équation (6.26)), ce qui explique les contraintes plus importantes issues de la combinaison au voisinage du Soleil et apparaissant sur la figure 6.8. Dans cette situation, la précision de la mesure augmente avec la distance de

la sonde. En effet, l'amplitude du retard Shapiro croît lorsque l'une des stations s'éloigne du centre de la masse gravitationnelle considérée.

L'existence d'un minimum de précision obtenu pour la combinaison des signaux à la station spatiale (i. e. $T_{23} = 0$) s'explique par un compromis entre l'augmentation de l'amplitude de l'effet Shapiro avec la distance de la sonde et l'accroissement de l'intervalle séparant le passage des signaux au voisinage du Soleil avec cette distance (ce qui entraîne une diminution de l'effet ressenti par l'observable y_r pour T_{23} nul). Pour une distance de la sonde de 53 UA, la combinaison qui maximise l'amplitude de l'effet Shapiro sur le signal permet un gain de $5 \cdot 10^{-8}$ sur la précision de la mesure de γ par rapport à la configuration Λ .

L'observable y_t est proportionnelle à la différence de l'effet Shapiro entre le signal aller et le signal retour. Si les deux signaux se croisent au voisinage du Soleil, les deux effets sont identiques et s'annulent donc en totalité. En revanche, si la façon de combiner les signaux est différente, alors cette différence n'est pas nulle. De plus, plus l'écart entre les temps associés à la réception des signaux est important, plus l'amplitude de l'effet sur l'observable y_t est grande.

La figure 6.9 présente la variation de l'impact de l'effet Shapiro sur l'observable y_t pour une sonde se trouvant à 6 UA et pour le paramètre T_{23} nul. En considérant cette observable, on analyse les mesures affectées du bruit de l'équation (6.27) afin d'en déduire la précision finale du calcul. La précision ainsi calculée est reportée sur la figure 6.9 en fonction de la distance de la sonde.

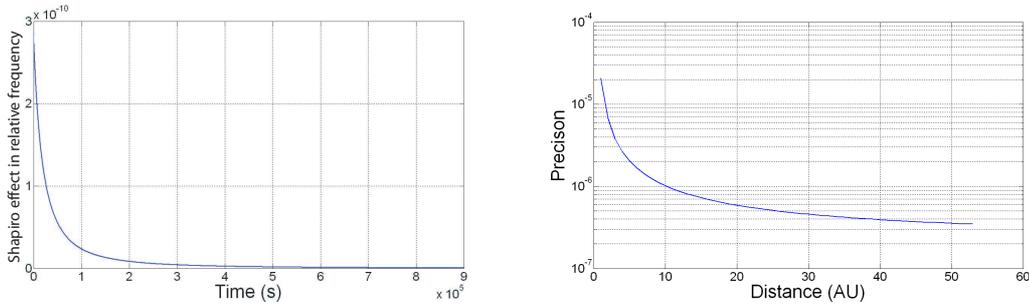


FIG. 6.9 : Effet Shapiro sur l'observable y_t avec la condition $T_{23} = 0$ et à une distance héliocentrique de la sonde de 6 UA en fonction du temps (figure de gauche) et précision sur cet effet Shapiro en fonction de la distance de la sonde (figure de droite) calculée selon l'équation (6.26).

Les précisions atteintes grâce à l'observable y_t sont approximativement d'un facteur deux supérieures à celles issues de l'observable y_r (voir figure 6.8) dans des conditions de combinaison identiques.

Par conséquent, si l'on considère du bruit blanc sur les observables y_r et y_t , la mesure la plus précise est obtenue en combinant des signaux se croisant au voisinage du Soleil dans l'observable y_r et atteint une erreur relative sur le paramètre γ inférieure à $2.2 \cdot 10^{-7}$ pour des distances de la sonde supérieures à une quinzaine d'unités astronomiques.

La sensibilité de SAGAS

L'étude précédente a concerné l'impact de la combinaison des signaux sur la précision de la mesure dans le cas d'un bruit fréquentiel de mesure constant. Or, en réalité, le bruit des observables y_r et y_t dépend du paramètre T_{23} selon les équations (6.23) et (6.24). Ces dépendances ont déjà été évoquées auparavant et tracées sur la figure 6.4. Un changement de T_{23} ne paramètre pas seulement la relation entre les deux temps de réception des signaux (et donc le signal effectif à mesurer), mais influe aussi sur la densité spectrale de puissance $S(f)$ de l'observable. Par conséquent, il faut comparer l'impact de ces deux effets afin de déterminer la sensibilité de SAGAS sur le paramètre γ .

Tout d'abord, il est nécessaire de déterminer, pour chaque distance héliocentrique de la sonde, la valeur de T_{23} qui optimise cette sensibilité. On trace sur la figure 6.10 cette détermination pour l'observable y_r pour trois positions de la sonde (6 UA, 20 UA et 53 UA).

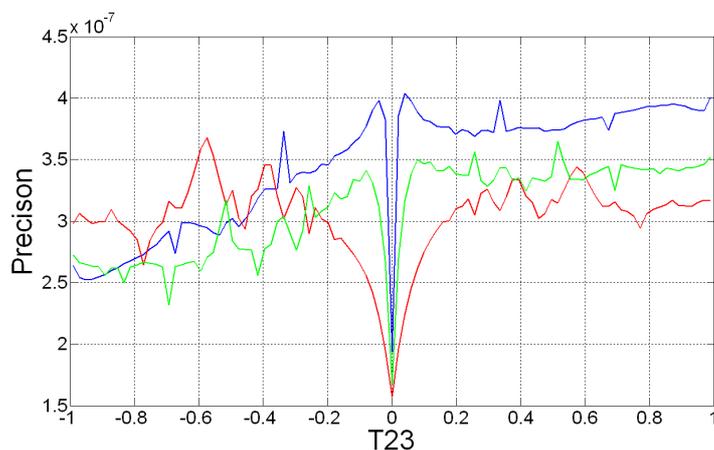


FIG. 6.10 : Précision sur l'effet Shapiro obtenue à partir de l'observable y_r en fonction de T_{23} pour des distances de 6 UA (courbe rouge), 20 UA (courbe verte) et 53 UA (courbe bleue). Les valeurs de T_{23} varient entre les valeurs négative et positive du trajet aller-retour et sont exprimées en terme de rapport à ce temps caractéristique.

Pour toute distance, la configuration Λ - c'est-à-dire la situation où $t_2 = t_3$ -

minimise l'erreur de la mesure. En effet, cette combinaison permet d'éliminer le bruit provenant de l'horloge spatiale.

Dans cette configuration, la sensibilité de SAGAS à l'effet Shapiro est tracée sur la figure 6.11 en fonction de la distance atteinte par la sonde spatiale. Elle montre un minimum de précision relative de $1.6 \cdot 10^{-7}$ pour une distance approchant huit unités astronomiques.

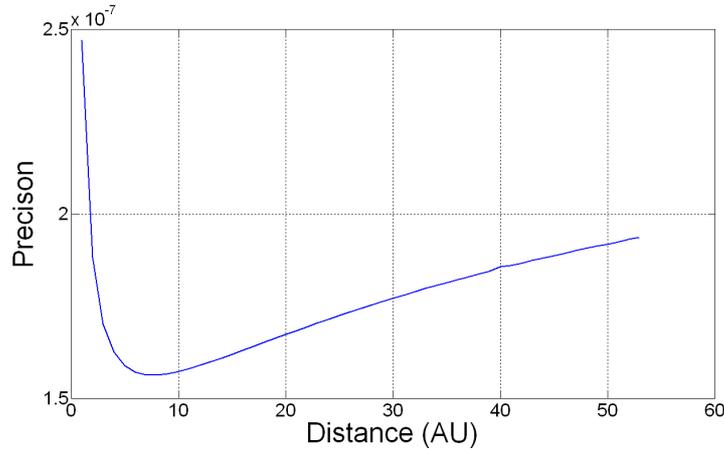


FIG. 6.11 : Précision sur l'effet Shapiro obtenue à partir de l'observable y_r en fonction de la distance héliocentrique de la sonde pour $T_{23} = 0$.

Une étude identique est conduite pour l'observable y_t . On cherche tout d'abord la façon optimale de combiner les signaux montant et descendant. La figure 6.12 présente l'évolution de la précision sur l'effet Shapiro en fonction de la valeur du paramètre T_{23} pour différentes distances de la sonde.

Même dans le cas de bruits réels, la précision de la mesure issue de l'observable y_t décroît avec T_{23} : elle atteint son maximum quand l'intervalle T_{23} tend vers l'infini. Cette configuration annihile toute corrélation entre les bruits des mesures y_u et y_d , et implique un impact de l'effet gravitationnel égal à celui affectant l'un des deux signaux. Par conséquent, la précision optimale offerte par l'observable y_t est atteinte par l'une des deux mesures initiales, y_u ou y_d .

La figure 6.13 présente l'évolution de la précision sur l'effet Shapiro fréquentiel en fonction de la distance de la sonde lorsque l'on considère l'observable y_u ou y_d . Pour 53 UA, elle atteint une précision relative de $4.3 \cdot 10^{-7}$ sur l'effet Shapiro. L'observable y_r est donc la plus adaptée pour une mesure du paramètre γ puisqu'elle atteint une précision sur l'effet Shapiro inférieure à $1.6 \cdot 10^{-7}$ à une

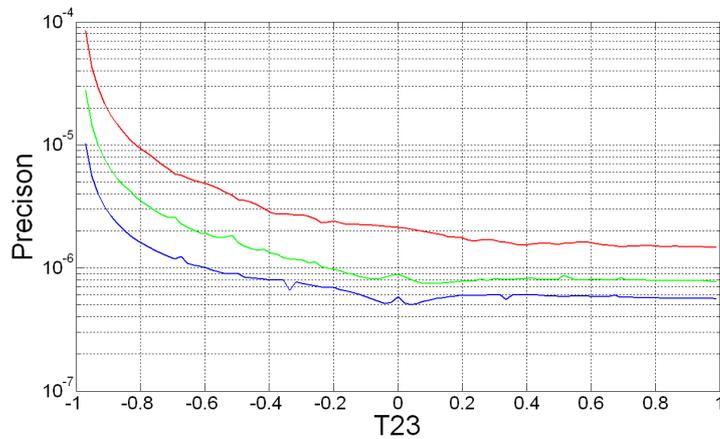


FIG. 6.12 : Précision sur l'effet Shapiro obtenue à partir de l'observable y_t en fonction de T_{23} pour des distances de 6 UA (courbe rouge), 20 UA (courbe verte) et 53 UA (courbe bleue). Les valeurs de T_{23} varient entre les valeurs négative et positive du trajet aller-retour et sont exprimées en terme de rapport à ce temps caractéristique.

distance de 8 UA (cf. figure 6.11) et dépasse approximativement d'un facteur trois la précision optimale obtenue par y_t (voir figure 6.13).

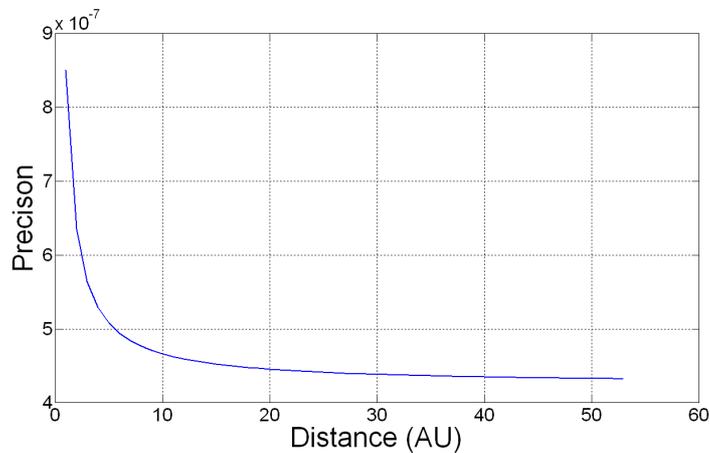


FIG. 6.13 : Précision sur l'effet Shapiro obtenue à partir de l'observable y_u (ou identiquement y_d) en fonction de la distance héliocentrique de la sonde.

Conclusion

Une estimation rigoureuse de la précision potentiellement atteignable sur l'effet Shapiro (et par conséquent sur le paramètre γ) a été obtenue en filtrant de

façon optimale le bruit sur la mesure. Cependant, on a supposé que les accélérations non-gravitationnelles sont seulement mesurées alors qu'elles pourraient être évaluées et corrigées. Il est raisonnable de penser que ces forces peuvent être modélisées sur de grands intervalles temporels avec une meilleure précision relative que celle obtenue par l'accéléromètre.

Dans le cas où l'accéléromètre embarqué présenterait un bruit inférieur à l'accéléromètre basé sur Terre, alors la précision relative de la mesure atteindrait les $5 \cdot 10^{-8}$ (cf. figure 6.14). Dans ces conditions, la configuration $T_{23} = 0$ maximise la précision du test puisqu'elle permet d'annuler le bruit de l'horloge spatiale.

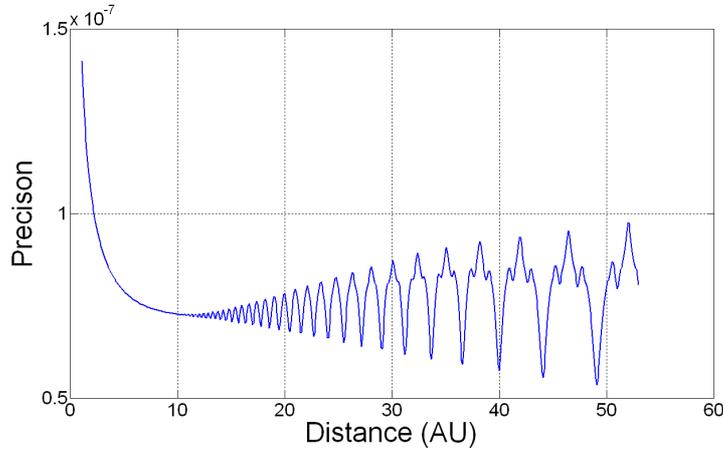


FIG. 6.14 : Précision sur l'effet Shapiro obtenue à partir de l'observable y_r en fonction de la distance héliocentrique de la sonde pour $T_{23} = 0$ dans le cas où le bruit de l'accéléromètre spatial est négligeable.

La considération des niveaux de bruit de la partie 6.2.2 a permis de déterminer la combinaison optimale des observables pour la mesure de l'effet Shapiro. Cette optimisation est obtenue pour l'observable y_r lorsque les signaux ascendant et descendant se croisent à la station spatiale et que la sonde est à une distance de huit unités astronomiques. Dans ces conditions, la précision sur le paramètre γ atteint $2.2 \cdot 10^{-7}$ pour une des observations de l'occultation, la seconde partie de l'occultation permettant de réduire ce chiffre d'un facteur $\sqrt{2}$. Cette incertitude peut être améliorée en considérant un niveau de bruit optimiste pour l'accéléromètre embarqué (cf. figure 6.14) ce qui permettrait d'atteindre une précision de $5 \cdot 10^{-8}$ sur l'effet Shapiro, soit $1 \cdot 10^{-7}$ sur γ . Enfin, il s'avère que le modèle troposphérique considéré est très pessimiste sur le court terme [8] : la considération d'une densité spectrale de puissance $S_{y_{tropo}}(f)$ de l'ordre de $1.8 \cdot 10^{-23}$ permettrait de réduire grandement l'incertitude sur cette mesure.

6.3.3 Sensibilité au fond cosmologique d'ondes gravitationnelles

La limite actuelle sur les ondes gravitationnelles de fréquence comprise entre 10^{-6} et 10^{-3} Hz provient de l'étude de la densité spectrale de puissance des résidus du suivi par effet Doppler de sondes spatiales lointaines (Pioneer 10, Pioneer 11, Cassini, etc ...) [102, 103, 116]. La recherche d'une signature connue de ces oscillations de l'Espace-Temps [101] conduisit à une limite minimale sur l'amplitude des ondes de $1.5 \cdot 10^{-14}$ - limitée par l'erreur en vitesse des sondes.

Les contraintes les plus limitantes à l'heure actuelle découlent de l'étude [103, 116] des effets des ondes gravitationnelles sur le pistage de la sonde Cassini par effet Doppler (équivalent à l'observable y_r avec $T_{23} = 0$). De façon identique, les pulsars et leurs signaux *one-way* ont permis de dériver des contraintes exceptionnelles sur leur amplitude [117, 118] mais à des fréquences beaucoup plus basses (10^{-9} - 10^{-8} Hz). Cependant, la comparaison d'horloges distantes proposée par SAGAS offre de nouvelles possibilités et combinaisons jusqu'à présent jamais étudiées.

Afin de déterminer les potentielles performances de la mission SAGAS concernant cet objectif, la variation de temps de propagation des signaux provoquée par le fond stochastique d'ondes gravitationnelles doit être comparée aux sources de bruit affectant les mesures. Dans ce but, on suppose le cas d'un fond stationnaire, isotropique et non-polarisé. De plus, on fait l'hypothèse que le déplacement relatif des deux stations durant la propagation des signaux a un effet négligeable, c'est-à-dire que les stations sont considérées comme immobiles durant le temps de propagation des signaux.

Les potentielles performances du projet SAGAS sur le fond cosmologique sont déduites de la comparaison de l'effet des ondes gravitationnelles sur les signaux échangés avec le bruit affectant les mesures. Les fluctuations en fréquence relative liées aux ondes gravitationnelles sur une observable y sont caractérisées par le spectre $S_y[\omega]$ (où $\omega = 2\pi f$) [119]. L'égalité des deux fournit la limite atteignable de la densité spectrale S_{GW} :

$$S_y[\omega] = \frac{5}{8} b[\omega] S_{GW}[\omega], \quad (6.28)$$

où $S_{GW}[\omega]$ est la densité spectrale du fond stochastique d'ondes gravitationnelles et $b[\omega]$ la fonction de sensibilité de la méthode considérée aux ondes gravitationnelles.

Ces fonctions de sensibilité sont obtenues en moyennant l'effet des ondes pour l'ensemble des directions de leur vecteur d'onde. Par exemple, les références

[120, 121] donnent l'expression de cette fonction b pour un lien *one-way*, c'est-à-dire, dans notre étude, les sensibilités b_u et b_d des observables y_u et y_d (équations (6.1)) :

$$b[\omega] = b_u[\omega] = b_d[\omega] = 2 \left(\frac{4}{3} + \frac{\sin(2\omega T) - 2\omega T}{(\omega T)^3} \right), \quad (6.29)$$

où T est le temps de propagation des signaux entre les deux stations.

Pour des raisons de symétrie, les sensibilités des signaux montant et descendant sont identiques. Dans le cas général, les fonctions de sensibilité associées aux observables y_r et y_t sont données dans [11] en fonction de l'intervalle temporel T_{23} par :

$$\begin{aligned} b_r[\omega] &= \frac{b}{2} - 2\gamma[\omega] \cos(\omega T_{23} + \omega T), \\ b_t[\omega] &= \frac{b}{2} + 2\gamma[\omega] \cos(\omega T_{23} + \omega T), \end{aligned} \quad (6.30)$$

où $\gamma[\omega]$ s'exprime selon :

$$\gamma[\omega] = \frac{\cos(\omega T)}{3} + \frac{\cos(\omega T)}{(\omega T)^2} - \frac{\sin(\omega T)}{(\omega T)^3}. \quad (6.31)$$

Lorsque la réception du signal montant coïncide avec l'émission du signal descendant ($T_{23} = 0$), alors les deux fonctions de sensibilité b_r et b_t sont données par :

$$\begin{aligned} b_r[\omega, T_{23} = 0] &= \frac{3 - \cos(2\omega T)}{3} - \frac{3 + \cos(2\omega T)}{(\omega T)^2} + \frac{2 \sin(2\omega T)}{(\omega T)^3}, \\ b_t[\omega, T_{23} = 0] &= \frac{5 + \cos(2\omega T)}{3} - \frac{1 - \cos(2\omega T)}{(\omega T)^2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Dans ce cas, la sensibilité $b_r[\omega, T_{23} = 0]$ correspond à celle du lien reliant la Terre et la sonde Cassini et servira de comparaison par la suite.

Sur la figure 6.15 sont représentées les fonctions de sensibilité b_r et b_t pour la combinaison $T_{23} = 0$ (équation (6.32)) en fonction du paramètre $x = \omega T / \pi$.

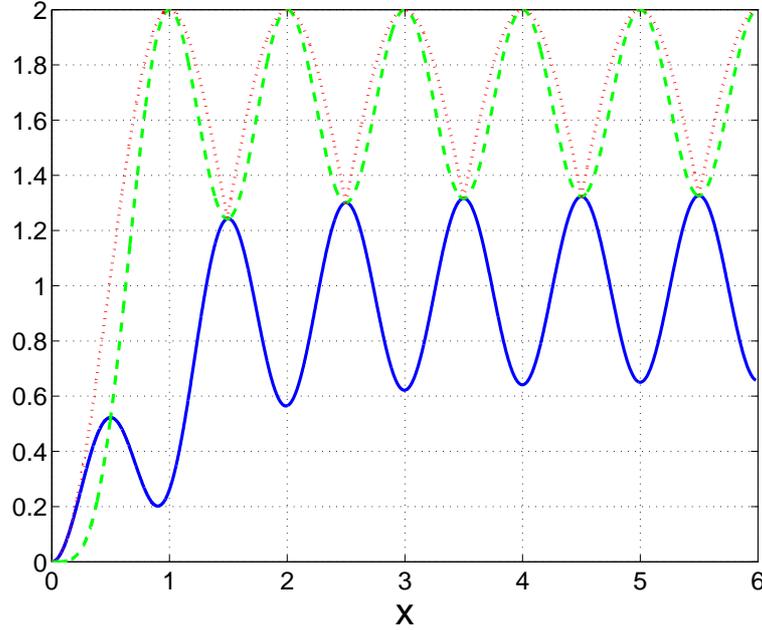


FIG. 6.15 : Fonctions de sensibilité b_r (courbe bleue continue), b_t (tirets verts) et b_{opt} (courbe rouge en pointillés) en fonction du paramètre $x = \omega T / \pi$.

Pour des faibles fréquences, les ondes gravitationnelles affectent essentiellement l'observable b_r . En effet, à la limite $\omega T \ll 1$, l'observable b_r se comporte comme $8(\omega T)^2/15$ et domine dans cette gamme de fréquence b_t qui peut alors s'approcher par $2(\omega T)^4/15$. Mais cela n'est plus vrai dans le reste du spectre des fréquences. Pour des fréquences $\omega T > \frac{\pi}{2}$, la sensibilité de l'observable y_t surpasse celle de l'observable y_r . Pour les hautes fréquences, les deux sensibilités adoptent un comportement oscillatoire : pour $\omega T \gg 1$, b_r est équivalent à $1 - \cos(2\omega T)/3$ et b_t à $5/3 + \cos(2\omega T)/3$.

Enfin, les équations générales (6.30) donnent la possibilité de choisir, pour chaque fréquence, la valeur du paramètre T_{23} qui maximise la sensibilité des mesures. Cependant, cette sensibilité doit, par la suite, être optimisée en fonction du bruit présent sur les observables et de la distance des stations. La figure 6.15 présente cette fonction optimale b_{opt} qui confond indubitablement les sensibilités b_t et b_r .

Pour comparer aux contraintes connues [122], la limite obtenue est exprimée en terme de densité réduite d'énergie gravitationnelle Ω_{GW} couramment employée au sujet des fonds cosmiques :

$$\Omega_{\text{GW}}[\omega] = \frac{10\pi^2 f^3}{3H_0^2} S_{\text{GW}}[\omega], \quad (6.33)$$

où $H_0 \simeq 71 \text{ km.s}^{-1} . \text{Mpc}^{-1} \simeq 2.3 \cdot 10^{-18} \text{ Hz}$ est la constante de Hubble.

L'expression de la limite atteignable Ω_{GW} en fonction de la fonction de sensibilité $b[\omega]$ et de la densité spectrale de puissance de bruit $S_y[\omega]$ se déduit des équations (6.28) et (6.33) :

$$\Omega_{\text{GW}}[\omega] = \frac{16\pi^2 f^3}{3H_0^2} \frac{S_y[\omega]}{b[\omega]}. \quad (6.34)$$

L'équation (6.34) permet d'évaluer les contraintes potentiellement atteignables par le projet SAGAS et de les comparer aux limites existantes. Pour chaque combinaison d'observables y_r ou y_t , il est possible de déterminer la contrainte sur Ω_{GW} associée en considérant la fonction de sensibilité adéquate (équations (6.32)) et la densité spectrale du bruit appropriée (équation (6.23) ou (6.24)). Dans ces deux études, la manière de combiner les signaux montant et descendant - i. e. une variation du paramètre T_{23} - influe à la fois sur les fonctions de sensibilité et sur les densités spectrales de bruit. Une optimisation peut donc être réalisée afin d'atteindre une contrainte maximale pour chaque fréquence.

Un cas simplifié

Afin d'illustrer la possibilité d'optimisation des mesures présentée auparavant, on considère tout d'abord un cas théorique où seuls les bruits provenant de l'horloge spatiale, de l'horloge terrestre et de l'accéléromètre spatial jouent un rôle. De plus, on ne prend en compte que la composante de bruit blanc dans les équations (6.7), (6.8) et (6.9).

L'étude des limites Ω_{GW} pour le spectre des fréquences est réalisée pour une distance de six unités astronomiques - distance à laquelle se trouvait la sonde Cassini quand la contrainte des ondes gravitationnelles a été déterminée [103] - et pour la distance maximale envisagée pour la mission SAGAS (53 UA) [8]. On s'intéresse, pour chacun des deux cas, à trois limites sur les ondes gravitationnelles dont :

- Ω_r obtenue à partir de la mesure Doppler "classique" donnée par l'équation (6.14) avec la configuration $t_2 = t_3$ (il s'agit de la seule mesure disponible pour une sonde équipée uniquement d'un transpondeur),
- Ω_t découlant de l'observable y_t et avec la condition $T_{23} = 0$,

- et Ω_{opt} calculée en ajustant le paramètre temporel T_{23} dans (6.23), (6.24) et (6.30) de façon à minimiser la valeur limite de Ω_{GW} obtenue pour chaque fréquence.

Une telle étude montre que les deux combinaisons d'observables conduisent à des limites optimisées identiques. En fait, la propriété périodique des équations (6.32), (6.23) et (6.24) implique que, pour toutes fréquences, il est possible de trouver deux valeurs de T_{23} pour lesquelles les observables y_r et y_t conduisent à la même contrainte sur le paramètre Ω_{GW} de l'équation (6.34). Cependant, du fait de l'hypothèse réalisée sur la similarité des trajets aller et retour, les valeurs permises pour T_{23} sont limitées. Dans la détermination de Ω_{opt} , on restreint le paramètre T_{23} de telle façon que les temps de propagation des signaux ascendant et descendant ne diffèrent pas de plus d'un pour cent. En considérant que la vitesse maximale relative des deux stations peut atteindre 50 km.s^{-1} (c'est le cas pour SAGAS), l'optimisation Ω_{opt} de la contrainte sur les ondes gravitationnelles est évaluée en choisissant pour chaque fréquence, la limite minimale obtenue à partir des observables y_r et y_t , et pour la gamme de variation de T_{23} permise.

Les trois limites - Ω_r , Ω_t et Ω_{opt} - définies auparavant sont tracées sur la figure 6.16 pour des distances de 6 UA et de 53 UA.

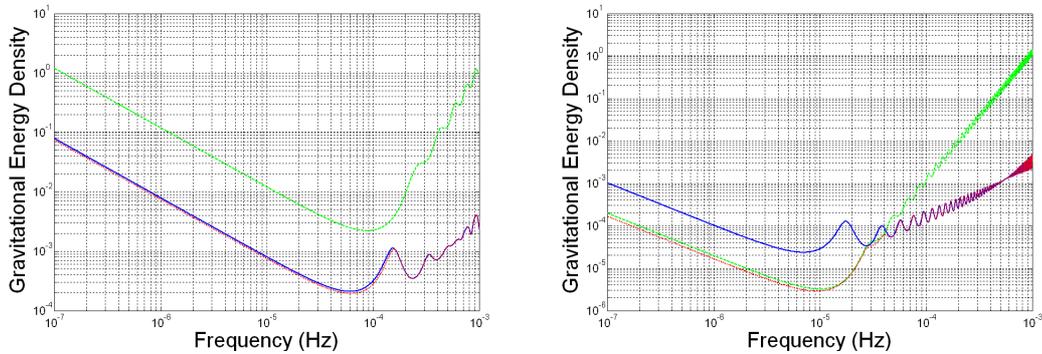


FIG. 6.16 : Contraintes sur Ω_{GW} en fonction de la fréquence f pour une sonde se trouvant à 6 UA (graphe de gauche) et à 53 UA (figure de droite) de la Terre. Les trois courbes correspondent aux limites Ω_r (courbe bleue continue), Ω_t (tirets verts) et Ω_{opt} (pointillés rouges).

Il paraît intéressant de comprendre qualitativement les résultats obtenus et leur comportement asymptotique. A basses fréquences, l'erreur sur y_t est dominée par le bruit sur la vitesse de la sonde spatiale (proportionnelle à ω^{-2}). Cette erreur s'annule complètement dans la configuration $T_{23} = 0$. Dans ces conditions, le bruit $S_{y_t}(f)$ est indépendant de la pulsation ω à basses fréquences, puisqu'elle

est couverte par le bruit de l'horloge embarquée. Du fait des dépendances fréquentielles des fonctions de sensibilité b_r et b_t , les limites Ω_r et Ω_t dépendent identiquement de la fréquence de l'onde et sont, à basses fréquences, inversement proportionnelles à la pulsation ω . Ces dépendances apparaissent clairement sur la figure 6.16.

Cependant, on remarque que, dans ce domaine de fréquences, Ω_r atteint des contraintes d'au moins un ordre de grandeur meilleures que Ω_t pour une distance de 6 UA , tandis qu'à 53 UA , cette tendance s'inverse. Cela s'explique par le compromis existant entre la fonction de sensibilité et les sources de bruits liées à l'observable considérée. En effet, le rapport des termes dominants des deux limites s'exprime, à basses fréquences, par :

$$\lim_{\omega T \ll 1} \frac{\Omega_r}{\Omega_t} = \frac{1}{4} (\omega T)^2 \frac{S_{v_s}}{S_{y_s}}, \quad (6.35)$$

où S_{v_s} et S_{y_s} sont les premiers termes intervenant dans les équations (6.7) et (6.9), et dont le rapport $S_{v_s}/S_{y_s} \simeq 3 \cdot 10^{-8} \omega^{-2}$. La transition s'opère pour une distance de l'ordre de 20 UA : au-dessus de cette distance, l'asymptote de Ω_t pour les faibles fréquences est plus basse que celle de Ω_r .

Concernant les limites Ω_r et Ω_t à hautes fréquences, l'analyse de leur comportement asymptotique se révèle plus aisée. En effet, les fonctions de sensibilité correspondantes montrent des conduites oscillatoires seulement différenciées par leur écart de valeur moyenne égale à 2/3 (cf. figure 6.15). La différence de comportement apparaissant sur la figure 6.16 provient des densités spectrales de bruit sur les observables. Le bruit dominant sur y_t provient de l'horloge spatiale, alors que ce bruit s'annule pour y_r dans la configuration $T_{23} = 0$ (cf. équation (6.16)). Ainsi la densité spectrale de puissance y_r résulte, à hautes fréquences, de la combinaison des bruits sur la détermination de la vitesse de la sonde spatiale et de l'horloge basée sur Terre. Par conséquent, l'amplitude de Ω_r vis-à-vis de Ω_t à hautes fréquences (observable sur la figure 6.16) s'explique par l'amplitude du bruit de l'horloge spatiale comparée aux autres erreurs. La différence de pente des asymptotes se justifie par le comportement à hautes fréquences des DSP des bruits intervenant ($S_{y_s} \propto f^0$, $S_{v_s/c} \propto f^{-2}$).

Les contraintes les plus fortes sont obtenues pour des fréquences telles que $\omega T \simeq 1$. Lorsque la distance entre les deux stations s'allonge, l'analyse des observables y_r atteint des limites de plus en plus contraignantes. En effet, pour deux mesures à des distances différentes, la contrainte maximale sur Ω_r s'améliore approximativement du rapport des distances (voir figure 6.16). Cependant, l'envoi d'une sonde équipée d'une horloge et d'un lien de communication deux voies

offre une seconde observable et le gain d'un ordre de grandeur sur la contrainte du fond cosmologique d'ondes gravitationnelles (cf. courbe bleue et verte sur la figure droite 6.16).

Cette seconde observable n'est pas le seul avantage d'une telle mission : elle donne aussi la possibilité d'ajuster la configuration de combinaison des signaux afin d'optimiser la mesure pour n'importe quelle fréquence. Sur la figure 6.16, la limite Ω_{opt} ainsi obtenue est bien évidemment au-dessous de Ω_r et de Ω_t pour l'ensemble des fréquences. Par exemple, à la distance de $53 UA$, elle suit Ω_t à basses fréquences et Ω_r à hautes fréquences. La liberté offerte sur le paramètre T_{23} entraîne de légères améliorations pour les fréquences les plus faibles, car elle permet de réaliser un compromis entre les sources de bruits dominantes.

Les contraintes de SAGAS

L'étude d'un cas de bruits simplifiés a permis de mettre en relief les avantages offerts par l'envoi d'une horloge et d'un lien deux voies dans l'Espace. En effet, il permet d'optimiser la recherche d'ondes gravitationnelles en fonction du bruit affectant les mesures. Dans l'exemple considéré, la sensibilité au fond cosmologique gagne, pour de grandes distances ($53 UA$), un ordre de grandeur comparativement à la mesure de Cassini, c'est-à-dire à la considération unique de la mesure y_r .

De manière similaire à l'étude précédente, on estime les contraintes maximales Ω_{opt} lorsque l'ensemble des bruits (équations (6.7), (6.8), (6.9), (6.11) et (6.12)) est pris en compte. Ces limites sont estimées pour plusieurs distances et comparées à la limite Ω_{BBN} issue de nucléosynthèse du Big Bang (BBN) et constante pour toutes fréquences ($\Omega_{BBN} \sim 1.5 \cdot 10^{-5}$). Les résultats correspondants sont tracés sur la figure 6.17.

Il n'est pas surprenant de constater que la sensibilité au fond cosmologique d'ondes gravitationnelles augmente avec la distance à la Terre et que le minimum est atteint dans la région fréquentielle $f \cdot T \sim 1$. Dans le cas du projet SAGAS dont la distance maximale vise les $53 UA$, la limite inférieure parvient à $\Omega_{GW} \leq 7 \cdot 10^{-6}$ pour une fréquence de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5} Hz$. Cela correspond à un gain de trois ordres de grandeur par rapport à la meilleure limite issue des mesures de la sonde Cassini [103] et à un facteur deux en-dessous de la contrainte BBN.

La comparaison des bruits sur les deux observables représentée sur la figure 6.4 montre la possibilité offerte par la considération de l'observable optimale. En effet, à basses fréquences, l'observable y_t dispense un bruit de plusieurs ordres

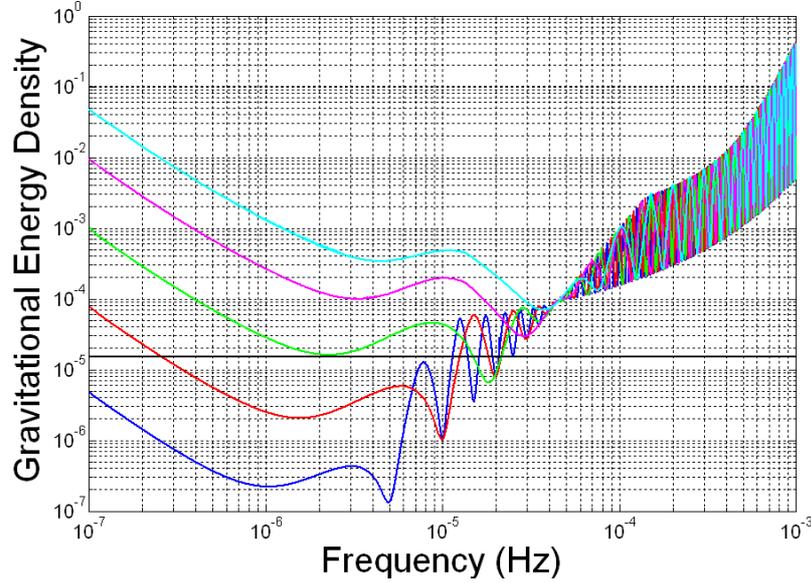


FIG. 6.17 : La contrainte Ω_{opt} en fonction de la fréquence f , pour différentes distances de la sonde. Les distances les plus faibles correspondent aux courbes le plus hautes : 20 UA (en bleu clair), 30 UA (magenta), 53 UA (courbe verte), 100 UA (rouge) et 200 UA (en bleu foncé). La ligne horizontale noire fait référence à la limite Ω_{BBN} .

de grandeur plus faible que celui présent sur l'observable y_r , mesure caractéristique de la mission Cassini. Cependant, cet effet avantageux doit être comparé aux fonctions de sensibilité b_r et b_t aux ondes gravitationnelles afin de déterminer la mesure optimale.

Comparativement à l'étude issue des mesures des sondes Pioneer, l'analyse rendue possible par le projet SAGAS permet une sensibilité de $1 \cdot 10^{-14} \text{ Hz}^{-1/2}$ pour des sources stochastiques et pour des fréquences entre $6 \cdot 10^{-5}$ et 10^{-3} Hz . Une amélioration pourrait être apportée à basses fréquences car le bruit de l'accéléromètre pourrait potentiellement être amélioré par la modélisation des accélérations non-gravitationnelles.

Conclusion

Ce dernier chapitre était consacré au projet SAGAS [8]. La description de ces caractéristiques et de ces instruments a permis de révéler le caractère audacieux de ces objectifs. En se basant fortement sur le travail réalisé pour le Lien Micro-Onde de la mission ACES, un modèle du transfert de temps a été déduit, ce qui

a permis de souligner les principales sources d'erreurs affectant les mesures de fréquence.

L'approfondissement des performances atteintes par le projet SAGAS sur différents objectifs a révélé l'importance de la stratégie de combinaison des mesures. En effet, la qualité des instruments embarqués ainsi qu'une combinaison "rusée" des mesures issues des horloges et des accéléromètres permettent de gagner plusieurs ordres de grandeur sur des tests de Physique Fondamentale. Seuls deux des objectifs du projet ont été étudiés en détails, mais cette étude pourrait être élargie aux restants. Plus important, ce chapitre a, avant tout, permis de démontrer que le travail réalisé dans le cadre de la mission ACES et de l'étude du MWL pouvait être appliqué à d'autres missions spatiales et aux autres méthodes de transfert de temps.

Conclusion

Cette thèse avait pour but d'étudier le transfert de temps réalisé par le Lien Micro-Onde (MWL) de la mission ACES [6]. Cette mission menée par le CNES et l'ESA vise à mettre en orbite, à bord de la Station Spatiale Internationale, plusieurs horloges ultra stables [59, 61] afin de tester les lois fondamentales de la Physique. Elle permettra la réalisation de comparaisons d'horloges avec une stabilité temporelle de 0.3 ps pour un passage de l'ISS et de 7 ps à un jour, ainsi qu'une exactitude en fréquence relative de 10^{-16} .

Au vu des performances recherchées, l'étude du transfert de temps relatif au MWL a requis une modélisation précise des comparaisons d'horloges. Par conséquent, un modèle théorique considérant tout effet perturbateur (délais atmosphériques, délais instrumentaux, relativité ...) supérieur au dixième de picoseconde a été développé. Cette précision peut être comparée avec celle des modèles utilisés pour le GPS (*Global Positioning System*) atteignant une incertitude de 3 ps .

Ce modèle a permis d'exprimer les mesures brutes de la mission (les observables) en fonction des effets agissant sur la propagation des signaux entre les deux horloges, et de déterminer les produits scientifiques accessibles par la mission : la désynchronisation entre les horloges, le Contenu Total Électronique de l'ionosphère, la distance instantanée coordonnée entre les deux stations et le délai troposphérique. Le modèle théorique du transfert de temps a fait la jonction entre les mesures brutes du MWL et les produits scientifiques que l'on cherche à déterminer à travers cette mission.

Les objectifs de la mission nécessitent la connaissance de l'orbitographie des stations terrestre et spatiale, et des délais instrumentaux à une précision suffisante. La connaissance de l'orbitographie constitue l'un des points critiques de la mission. En effet, du fait du déplacement relativiste gravitationnel de fréquence, une erreur radiale d'un mètre sur la position des horloges embarquées sur la Station Spatiale Internationale conduirait à une erreur de 10^{-16} sur la fréquence relative des horloges, ce qui correspond aux objectifs de la mission. Il a donc été nécessaire d'étudier précisément cette difficulté.

Tout d'abord, les besoins en précision sur l'orbitographie des stations ainsi que sur la calibration des délais internes ont été déterminés afin d'atteindre les spécifications de la mission pour un passage simple de la station spatiale. Afin de réduire l'impact de l'erreur de ces paramètres sur les objectifs de la mission, une combinaison optimale des signaux montant et descendants a été trouvée : elle permet de relâcher considérablement les contraintes sur la précision nécessaire pour l'orbitographie et les calibrations temporelles.

De même, l'investigation de ces besoins pour des temps supérieurs au passage a permis de révéler une annulation intéressante conduisant à des niveaux moins contraignants que ce que l'on attendait initialement [7]. Cette annulation intervient dans les objectifs de la comparaison fréquentielle des horloges ainsi que dans les applications en Physique Fondamentale (test de l'Invariance Locale en Position) et en Géodésie. Elle peut également se généraliser à toute horloge spatialisée.

Au final, les contraintes concernant l'orbitographie de la station spatiale atteignent des erreurs radiales de huit mètres et des imprécisions tangentielle inférieures à seize mètres. En outre, les calibrations temporelles doivent être réalisées avec une incertitude inférieure à cent nanosecondes. Enfin, les objectifs d'exactitude fréquentielle sont aisément respectés puisque le terme d'erreur linéaire selon l'axe tangentiel ne doit pas dépasser un kilomètre sur dix jours de restitution d'orbite.

Ensuite, la travail s'est porté sur le traitement de données du Lien Micro-Onde. A partir du modèle théorique du transfert de temps, un algorithme d'analyse de données a été développé. Il permet d'extraire les produits scientifiques des mesures brutes de la mission. Mais, puisqu'aucune mesure n'est présentement disponible, il a été nécessaire de réaliser un programme de simulation des observables du MWL. Contrairement à l'algorithme de traitement de données qui servira durant la mission, la simulation d'observables n'est utile que pour la phase obligatoire de tests. Cette simulation permet de considérer différents types de perturbations et autorise l'addition de bruit d'horloge, de bruit de mesure, de bruit d'orbitographie, d'ambiguïtés de phase, ou encore, de temps mort entre les mesures.

Ces deux programmes ont été développés parallèlement tout en essayant de les garder aussi indépendants que possible. En effet, ils reposent sur des langages de programmation différents, des procédures de calcul distincts (analytique ou numérique), etc ... La prise en compte de simulations de plus en plus proches de la réalité a permis de vérifier la précision et la robustesse finales de l'algorithme. De plus, cette combinaison de programmes a prouvé sa capacité à évaluer l'influence de chaque paramètre de la mission sur les performances et les résultats de la mission.

La résolution des ambiguïtés de phase des mesures a un énorme impact sur les performances ultimes du MWL en terme de stabilité temporelle et d'exactitude. L'étude statistique des erreurs sur ces ambiguïtés a mené à l'estimation des probabilités de saut de cycle et a mis en évidence des combinaisons d'observables propres au Lien Micro-Onde permettant de réduire grandement ces probabilités.

La considération des niveaux de bruit mesurés sur le modèle d'ingénierie du MWL [62] et d'un modèle d'évolution de ces bruits en fonction de l'élévation a ensuite conduit à une évaluation réaliste du taux de réussite de la résolution des ambiguïtés. De plus, cette étude a été étendue à des passages incomplets afin d'estimer l'influence de la proportion de mesures accessibles d'un passage sur la résolution des ambiguïtés. En effet, pour des passages d'élévation de 10° , la résolution des ambiguïtés de phase échoue dans moins de deux cas sur trois pour des passages complets à 30 %, mais réussit dans 96 % des cas pour des passages à moitié complets. La détermination fructueuse des ambiguïtés voit sa probabilité augmenter avec l'élévation du passage puisqu'elle atteint un taux d'échec inférieur à 3 % pour des passages d'élévation à 30° et complets à 30 %. Enfin, l'influence de ces statistiques a été évaluée et comparée aux spécifications de la mission. Pour des temps supérieurs à la période orbitale, les effets induits restent en-dessous des spécifications de la mission.

Le dernier chapitre de ce manuscrit s'attache au projet futur SAGAS (*Search for Anomalous Gravitation using Atomic Sensors*) [8] soumis à l'ESA en 2007 dans le cadre du programme *Cosmic Vision*, et préfigure d'ouverture de cette thèse. Contrairement au Lien Micro-Onde, le transfert de temps est réalisé par un lien optique à travers le système solaire. L'étude du concept avancé de lien de comparaison s'est orientée vers la modélisation du transfert de temps et de ses mesures ce qui a conduit à une forte analogie avec la mission ACES.

Ensuite, l'étude s'est penchée sur la recherche de combinaisons d'observables avantageuses afin d'atteindre une précision maximale pour quelques-uns des objectifs scientifiques de la mission. Cette stratégie de combinaisons d'observables a été appliquée pour des mesures liées à l'exploration spatiale et pour des tests de Physique Fondamentale. En effet, il a été établi que le projet SAGAS permettrait le gain de deux ordres de grandeur sur l'estimation présente du paramètre PPN γ [44]. De même, l'évaluation de la sensibilité de la mission au fond stochastique d'ondes gravitationnelles permet d'espérer le gain de trois ordres de grandeur sur les contraintes actuelles dans la bande de fréquence $6 \cdot 10^{-5} - 10^{-3} \text{ Hz}$ [103].

En conclusion, cette thèse a conduit au développement de l'algorithme de traitement de données du Lien Micro-Onde basé sur un modèle théorique de transfert de temps. Elle a ensuite tenté de répondre et d'apporter des réponses précises à un certain nombre de problèmes relatifs à cette méthode de comparaison d'horloges

tels que les besoins orbitographiques ou la résolution des ambiguïtés de phase. Les résultats découlant de ce travail montrent que les spécifications de la mission ACES seront tenues, dans la limite des hypothèses réalisées (bruit du modèle d'ingénierie du MWL, performances du positionnement orbitographique, contrôle des délais internes, etc...).

Le Lien Micro-Onde offre de bien meilleures performances comparées à celles proposées par les autres méthodes du même domaine fréquentiel. Seuls les liens optiques approchent ces caractéristiques mais restent cependant conditionnés par les conditions météorologiques. Par conséquent, il est raisonnable de penser que, dans un futur proche, le MWL tiendra une place importante dans le domaine des méthodes de transfert de temps, non seulement dans le cadre du projet ACES, mais plus généralement à travers son embarquement sur de futurs satellites en orbite terrestre.

Annexe A

La variance d'Allan et ses dérivées

A.1 Contexte

En science expérimentale, la réalisation d'une mesure est fréquemment entachée d'un bruit. Il est alors intéressant de connaître la nature de la modulation du bruit l'affectant pour en identifier la source. Afin de discriminer la nature de ces fluctuations stochastiques, de nombreux outils mathématiques ont été développés. Habituellement, le bruit est caractérisé par sa variance dans le domaine temporel et par sa densité spectrale dans le domaine fréquentiel. Cependant, en métrologie, la variance d'Allan reste la méthode retenue pour caractériser le bruit des oscillateurs.

Cette annexe concerne la variance d'Allan et de ses dérivées. Elle décrit la formulation mathématique de ces outils statistiques ainsi que leurs conséquences pour chaque type de modulation de bruit. Cette description permet de présenter les différentes raisons qui ont permis à ces méthodes de s'imposer au cours des années dans le domaine de la métrologie temps-fréquence. Cette partie est inspirée des références [123, 124, 125, 126].

A.2 Modélisation d'un signal et définitions

Un oscillateur idéal délivre un signal temporel d'amplitude s_0 et de fréquence f_0 de la forme :

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t). \quad (\text{A.1})$$

Cependant, un signal réel est perturbé en amplitude et en phase. Ce signal s'écrit alors sous la forme :

$$s(t) = s_0 \cdot (1 + \varepsilon(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)), \quad (\text{A.2})$$

où $\varepsilon(t)$ est la perturbation temporelle en amplitude et $\phi(t)$ la perturbation en phase. Cette dernière peut être vue comme une erreur sur la fréquence du signal. En général, la contribution de $\varepsilon(t)$ sur la détermination de la fréquence du signal peut être négligée.

Par conséquent, on ne considère, par la suite, que le modèle suivant :

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)). \quad (\text{A.3})$$

On définit, pour une date t donnée, l'écart de temps instantané $x(t)$ en fonction de l'écart entre le signal nominal et le signal perturbé par :

$$x(t) = \frac{\phi(t)}{2\pi f_0}. \quad (\text{A.4})$$

De plus, on définit la fréquence instantanée $\nu(t)$ par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi \nu_0 t + \phi(t)) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (\text{A.5})$$

et enfin l'écart de fréquence normé et instantané $y(t)$ par :

$$y(t) = \frac{f(t) - f_0}{f_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (\text{A.6})$$

Si on désire évaluer la moyenne de $y(t)$ sur un intervalle de temps de durée τ à partir de la date t_k , alors la moyenne $\bar{y}(t_k)$:

$$\bar{y}(t_k) = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(u) du. \quad (\text{A.7})$$

L'expression (A.7) peut se réécrire à l'aide de l'équation (A.6) par :

$$\bar{y}(t_k) = \frac{x(t_k + \tau) - x(t_k)}{\tau}. \quad (\text{A.8})$$

La moyenne de l'écart de fréquence normé entre deux instants dépend de la durée de l'intervalle considéré. Pour des raisons de clarté des notations, on notera \bar{y}_k pour $\bar{y}(t_k)$, et x_k pour $x(t_k)$.

A.3 Caractérisation du bruit

Dans le domaine fréquentiel, le bruit se caractérise par sa densité spectrale, alors qu'il est défini par sa variance dans le domaine temporel. Dans cette partie, on ne considère que la partie aléatoire de la perturbation de phase $\phi(t)$ de l'équation (A.3).

A.3.1 La densité spectrale

La stabilité des oscillateurs peut être évaluée en fonction de leur densité spectrale. Pour des processus $p(t)$ aléatoires stationnaires, la densité spectrale se définit à partir de la fonction d'autocorrélation $R_p(\tau)$ donnée par :

$$R_p(\tau) = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{+\Omega} p(t+\tau)p(t)dt \right]. \quad (\text{A.9})$$

En effet, la densité spectrale bilatérale $S_p(f)$ se calcule par une transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation définie par (A.9), c'est-à-dire :

$$\Gamma_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(u) \cdot e^{-2i\pi fu} du. \quad (\text{A.10})$$

La densité spectrale peut s'interpréter comme la répartition de l'énergie du signal dans l'espace des fréquences. Par exemple, pour un signal $y(t)$ sinusoïdale de fréquence f_0 de la forme $y(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, alors la totalité de son énergie sera répartie entre les fréquences f_0 et $-f_0$.

Dans les cas qui nous intéressent, la fonction d'autocorrélation $R_p(\tau)$ est réelle, ce qui implique que la densité spectrale bilatérale est paire. Il est donc possible de replier le spectre des fréquences et de ne considérer que les fréquences positives du spectre. La densité spectrale unilatérale est alors définie par :

$$S_p(f) = 2 \cdot \Gamma_p(f) \quad (\text{A.11})$$

pour $f \geq 0$, et nulle sinon.

Par la suite, on considérera cette densité spectrale unilatérale $S_p(f)$ définie par :

$$S_p(f) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} R_p(u) \cdot \exp^{-2i\pi fu} du. \quad (\text{A.12})$$

De cette façon, la densité spectrale unilatérale d'un signal sinusoïdale de fréquence f_0 concentre l'énergie du signal à la fréquence f_0 .

A.3.2 La variance

Si on fait l'hypothèse que les bruits considérés sont gaussiens, alors ils peuvent être définis par seulement deux grandeurs : la tendance centrale caractérisée par la moyenne, et la dispersion caractérisée par la variance.

Pour une série infinie d'échantillons, la variance classique se définit comme la moyenne du carré des écarts à la moyenne :

$$\sigma^2(\tau) = \langle (\bar{y}_k - \bar{y})^2 \rangle, \quad (\text{A.13})$$

où \bar{y}_k est la moyenne sur un intervalle de durée τ entre les instants t_k et $t_k + \tau$ définie selon l'équation (A.7), où \bar{y} est la moyenne des échantillons \bar{y}_k considérés et où $\langle . \rangle$ correspond à la moyenne sur les d'échantillons.

De plus, la variance peut aussi s'exprimer en fonction de la densité spectrale $S_y(f)$ par [115] :

$$\sigma^2(\tau) = \int_0^{+\infty} S_y(f) \cdot |H_\tau(f)|^2 df, \quad (\text{A.14})$$

où $H_\tau(f)$ est la fonction de transfert de l'opérateur variance.

Cette fonction $H_\tau(f)$ peut être déterminée en considérant l'expression mathématique de la variance donnée par l'équation (A.13) dans le cas d'échantillons à moyenne nulle. Dans ce cas, la variance classique s'écrit :

$$\sigma^2(\tau) = \langle (\bar{y}_k)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(u) du \right)^2 \right\rangle \quad (\text{A.15})$$

qui se réécrit sous la forme :

$$\sigma^2(\tau) = \left\langle \left(\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} y(u) \cdot h_\tau(\tau - u) du \right)^2 \right\rangle, \quad (\text{A.16})$$

où $h_\tau(t)$ est la séquence de calcul cherchée, ou Réponse impulsionnelle [115]. La transformée de Fourier de cette réponse impulsionnelle correspond à la fonction de transfert $H_\tau(f)$ de l'opérateur variance apparaissant dans l'équation (A.14).

Par conséquent, la réponse impulsionnelle $h_\tau(t)$ associée au calcul de la variance classique est une fonction *en créneau* :

$$\begin{aligned} h_\tau(t) &= 0 \text{ pour } t < 0, \\ h_\tau(t) &= 1/\tau \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau, \\ h_\tau(t) &= 0 \text{ pour } t > \tau. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Cette fonction est représentée sur la figure A.1.

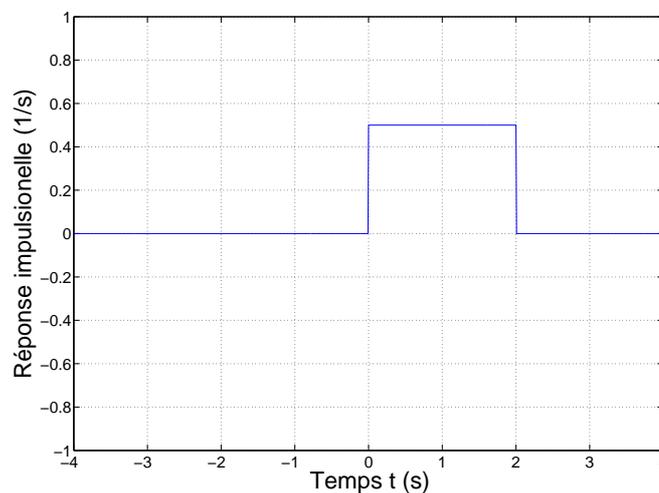


FIG. A.1 : Réponse impulsionnelle $h_\tau(t)$ associée au calcul de la variance classique et tracée en fonction du temps pour $\tau = 2$.

La fonction de transfert $H_\tau(f)$ correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h_\tau(t)$. Elle est représentée sur la figure A.2 et s'exprime selon :

$$H_\tau(f) = \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} = \text{sinc}_c(\pi\tau f). \quad (\text{A.18})$$

A.4 Bruits affectant les oscillateurs

Le domaine de la métrologie considère habituellement la densité spectrale $S_y(f)$ de l'écart de fréquence normé $y(t)$ pour étudier l'instabilité d'un oscillateur. Or, l'expérience montre que les bruits affectant cet oscillateur peuvent être modélisés par des densités spectrales en lois de puissance telles que :

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_\alpha f^\alpha. \quad (\text{A.19})$$

où les h_α sont des coefficients indépendants de la fréquence.

Chaque terme de la somme de l'équation (A.19) correspond à une modulation de bruit précise :

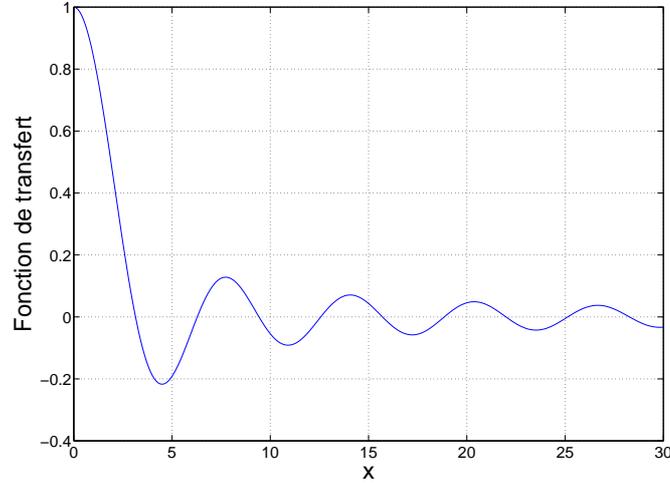


FIG. A.2 : Fonction de transfert $H_{\tau}(f)$ de l'opérateur variance et tracée en fonction du paramètre $x = \pi \tau f$.

- $\alpha = -2$ correspond à du bruit de marche aléatoire de fréquence,
- $\alpha = -1$ correspond à du bruit de scintillement de fréquence (ou Flicker de fréquence),
- $\alpha = 0$ correspond à du bruit blanc de fréquence ou, de manière équivalente, à du bruit de marche aléatoire de phase,
- $\alpha = 1$ correspond à du bruit de scintillement de phase (ou Flicker de phase),
- $\alpha = 2$ correspond à du bruit blanc de phase.

Par conséquent, le calcul de la variance d'un bruit dont la densité spectrale est donnée par (A.19) s'écrit :

$$\sigma^2(\tau) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_{\alpha} \int_0^{+\infty} f^{\alpha} \left(\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right)^2 df. \quad (\text{A.20})$$

Cependant, pour certaines valeurs du paramètre α , les intégrales considérées ne convergent pas car les fonctions ne sont pas intégrables. Par exemple, dans le cas de bruit de marche aléatoire de fréquence (dont la densité spectrale est proportionnelle à f^{-2}), lorsque f tend vers 0, la fonction se comporte comme $1/f^2$ et son intégrale ne converge donc pas [91]. De même, ce calcul identique ne converge pas pour une modulation type Flicker de fréquence.

Autrement dit, pour certains types de bruit présents dans les oscillateurs, la variance classique ne peut être calculée. Il est donc nécessaire de définir une autre

fonction permettant d'étudier la dispersion de l'erreur de cet oscillateur. Une des solutions réside dans la variance d'Allan.

A.5 La variance d'Allan

A.5.1 Définition

Le calcul d'une variance permet d'évaluer la corrélation du bruit de l'erreur en fonction du temps. La variation de l'intervalle de temps τ sur lequel est évalué la variance (ou temps d'intégration) permet de tracer une courbe directement dépendante de la nature du bruit. L'avantage d'un calcul de variance plutôt que d'étudier la densité spectrale réside dans le fait que les courbes déduites sont déterministes alors que la détermination d'une densité spectrale présente un caractère purement aléatoire.

La variance d'Allan consiste à évaluer le carré de l'écart à la moyenne pour des données fréquentielles plus ou moins séparées dans le temps, et s'écrit selon :

$$\sigma_y^2(\tau) = \left\langle (\bar{y}_k - \bar{y})^2 \right\rangle. \quad (\text{A.21})$$

Il constitue un estimateur non biaisé de la variance vraie pour le bruit blanc de fréquence. Dans un souci d'uniformité et afin de limiter la sensibilité de l'estimateur aux basses fréquences, il est recommandé d'utiliser la variance à deux échantillons adjacents, dite variance d'Allan, définie par :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \right\rangle \quad (\text{A.22})$$

où \bar{y}_k et \bar{y}_{k+1} sont des moyennes successives d'écarts de fréquence normée calculées sur une durée τ . Au lieu de calculer l'écart à la moyenne \bar{y} comme pour la variance classique, on évalue ici l'écart entre deux échantillons successifs adjacents.

En utilisant l'équation (A.8), la variance d'Allan peut s'exprimer en fonction des échantillons temporels sous la forme :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left\langle (x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1})^2 \right\rangle. \quad (\text{A.23})$$

A.5.2 Procédure de calcul

En pratique, la variance d'Allan est évaluée en utilisant une procédure par recouvrement. De cette façon, on augmente artificiellement le nombre de mesures d'écart de fréquence. Cela permet de réduire considérablement les intervalles de confiance. Bien que les échantillons considérés ne soient plus indépendants, il a été démontré que cette procédure n'introduisait pas de biais dans le calcul [127].

Supposons pour cela que l'on dispose d'une suite d'échantillons de phase x_k (mesurés à partir d'un compteur d'intervalle de temps) espacés d'un pas d'échantillonnage constant τ_0 . Dans ce cas, l'expression mathématique de la variance d'Allan avec recouvrement est donnée par :

$$\sigma_y^2(\tau = m \cdot \tau_0) = \frac{1}{2 \cdot (N - 2m)} \sum_{i=1}^{N-2m} (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i)^2, \quad (\text{A.24})$$

en remarquant que l'on ne dispose que de $N - 1$ valeurs de y_k .

En remplaçant par les mesures temporelles, le calcul de la variance d'Allan est réalisé selon :

$$\sigma_y^2(\tau = m \cdot \tau_0) = \frac{1}{2 \cdot (N - 2m) \cdot \tau^2} \sum_{i=1}^{N-2m} (x_{i+2m} - 2x_{i+m} + x_i)^2. \quad (\text{A.25})$$

On remarque que le temps maximal τ pour lequel la variance d'Allan avec recouvrement pourra être évaluée est $m = (N - 1)/2$, soit un peu moins de la moitié de la durée initiale des mesures.

A.5.3 Convergence

D'après la partie A.4, le calcul de la variance classique ne convergent pas pour certains types de bruit. Afin de comprendre l'intérêt de la variance d'Allan, son comportement face aux différents sources de bruit doit être étudié. Pour ce faire, on caractérise la variance d'Allan à l'aide d'une réflexion identique à celle menée pour la variance classique.

En considérant l'équation (A.24), on déduit que la réponse impulsionnelle $h_\tau(t)$ associée à cette procédure de calcul est donné par :

$$\begin{aligned} h_\tau(t) &= -1/2\tau \text{ pour } -\tau < t < 0, \\ h_\tau(t) &= 1/2\tau \text{ pour } 0 < t < \tau, \\ h_\tau(t) &= 0 \text{ pour tout autre } t. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Cette fonction $h_\tau(t)$ est représentée sur la figure A.3.

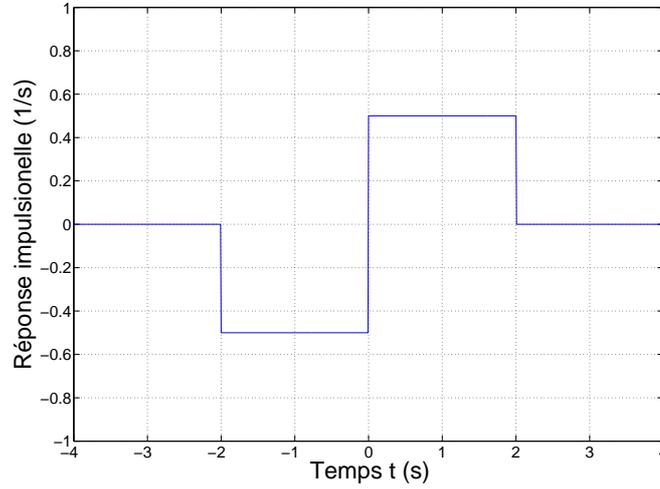


FIG. A.3 : Réponse impulsionnelle $h_\tau(t)$ associée au calcul de la variance d'Allan et tracée en fonction du temps pour $\tau = 2$.

La fonction de transfert $H_\tau(f)$ associée à cette réponse impulsionnelle s'écrit :

$$H_\tau(f) = 2 \cdot \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2}. \quad (\text{A.27})$$

et est représentée sur la figure A.4.

Cette fois, lorsque f tend vers 0, $H_\tau(f)$ tend aussi vers la valeur nulle. Or, ce n'était pas le cas pour la fonction de transfert associée au calcul de la variance classique qui tendait vers la valeur unité à basse fréquence (cf. figure A.4).

La variance d'Allan peut donc se calculer à partir de la densité spectrale de bruit selon :

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \cdot \int_0^\infty S_y(f) \cdot \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} \cdot df. \quad (\text{A.28})$$

Si on considère les bruits présents dans les oscillateurs, alors la variance d'Allan s'écrit :

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \cdot \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_\alpha \cdot \int_0^\infty f^\alpha \cdot \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} \cdot df. \quad (\text{A.29})$$

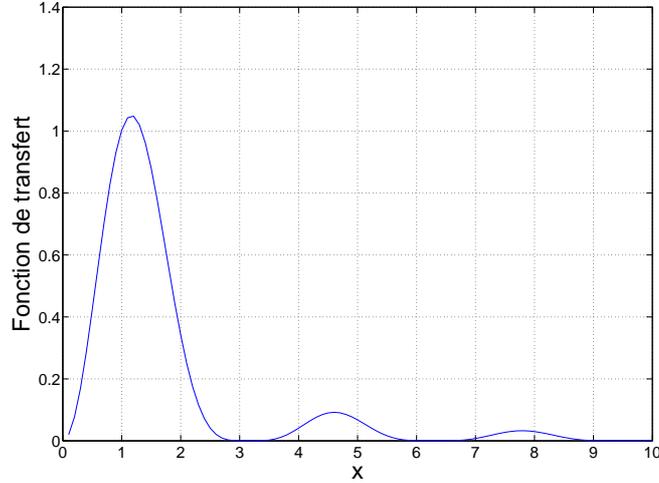


FIG. A.4 : Fonction de transfert $H_\tau(f)$ de l'opérateur variance d'Allan et tracée en fonction du paramètre $x = \pi\tau f$.

Pour les cinq modulations de bruits considérées, le calcul de la variance d'Allan converge. La variance d'Allan est donc un outil bien adapté au calcul de la dispersion de mesures issues d'un oscillateur. De plus, les modulations montrent des dépendances différentes en fonction du temps d'intégration τ . Par exemple, si on suppose que le calcul de la variance d'Allan selon l'équation (A.29) conduit à une équation du type :

$$\sigma_y^2(\tau) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_\alpha \cdot C_\alpha \cdot \tau^{\mu(\alpha)}, \quad (\text{A.30})$$

où les coefficients C_α découlent de l'intégration de l'équation (A.29), alors les dépendances au temps d'intégration τ en terme de la puissance μ sont reportées dans le tableau A.1.

TAB. A.1 : Dépendance en terme de puissance du temps d'intégration τ de la variance d'Allan pour les cinq types de bruit.

Nature du bruit	$\alpha \left(S_y(f) \right)$	$\mu \left(\sigma_y^2(\tau) \right)$
Bruit de marche aléatoire de fréquence	-2	1
Bruit de scintillation de fréquence	-1	0
Bruit blanc de fréquence	0	-1
Bruit de scintillation de phase	1	-2
Bruit blanc de phase	2	-2

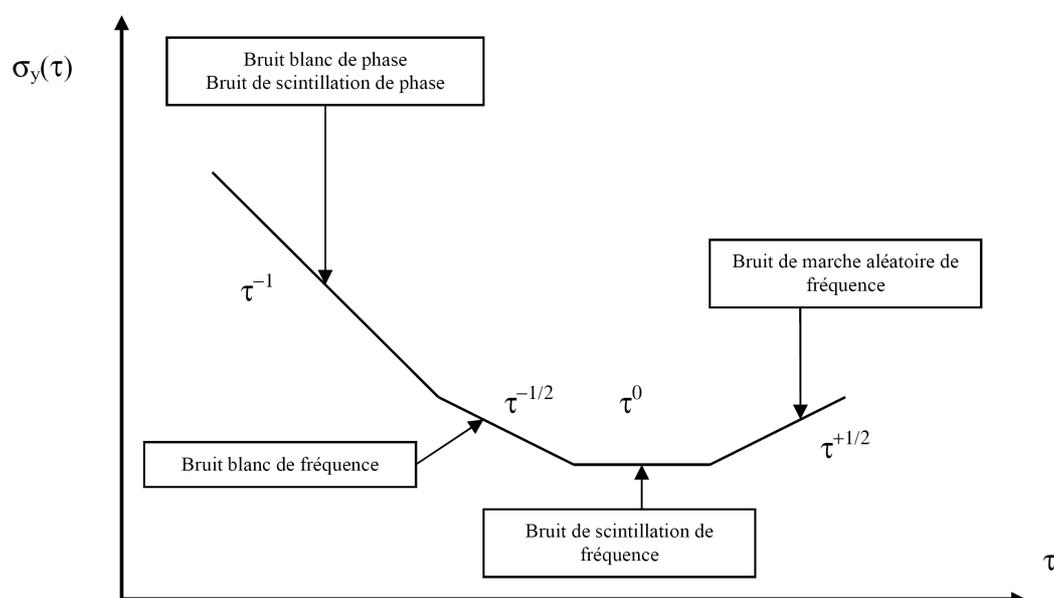


FIG. A.5 : Dépendances de la variance d'Allan pour les cinq bruits considérés en fonction du temps d'intégration τ [124].

Sur la figure A.5 sont décrites les dépendances de la variance d'Allan pour les cinq bruits considérés en fonction du temps d'intégration τ dans une représentation bi-logarithmique.

A.5.4 Propriétés

On n'a considéré pour l'instant que des signaux aléatoires. L'évaluation de la variance d'Allan peut conduire à détecter des signaux déterministes dans les données. En effet, certains de ces signaux ont une signature caractéristique pour la variance d'Allan.

Détection d'une dérive linéaire de fréquence

La variance d'Allan permet de détecter de manière simple un signal déterministe tel qu'une dérive linéaire de fréquence. En générale, les oscillateurs présentent ce défaut de dérive à long terme. Ainsi, si on considère $y(t)$ la fréquence instantanée de l'oscillateur présentant une dérive linéaire de fréquence, alors $y(t)$ s'écrit sous la forme :

$$y(t) = a \cdot t + y_0, \quad (\text{A.31})$$

où a est la dérive de fréquence et y_0 est l'écart de fréquence à l'origine.

On a donc en remplaçant :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt = y_0 + \frac{a \cdot \tau}{2} + a \cdot t_k. \quad (\text{A.32})$$

D'après la formule (A.22), la variance d'Allan se calcule comme la moyenne infinie du carré de l'écart entre deux \bar{y}_k consécutifs, soit :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \left\langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \right\rangle = \frac{a^2}{2} \cdot \tau^2. \quad (\text{A.33})$$

On obtient dans la représentation bi-logarithmique :

$$\log(\sigma_y^2(\tau)) = \log\left(\frac{a^2}{2}\right) + 2 \cdot \log \tau. \quad (\text{A.34})$$

Le bruit de dérive de fréquence se caractérise par une pente +2 sur la courbe de variance d'Allan, et se différencie donc des autres types de bruits présents dans les oscillateurs. Par conséquent, un comportement de la variance suivant une loi en τ^2 est la signature d'une dérive linéaire de fréquence.

Détection d'un signal périodique perturbateur

Le signal périodique est l'autre type de signaux déterministes souvent présent dans les données à analyser. Il possède également dans les calcul de la variance d'Allan une signature bien particulière. Considérons un ensemble d'échantillons d'écarts de fréquence instantanées $y(t)$ affectées d'un signal périodique de fréquence f_0 (et de période $T_0 = 1/f_0$).

$$y(t) = a \cdot \sin(2\pi f_0 t). \quad (\text{A.35})$$

La densité spectrale de ce signal s'écrit :

$$S_y(f) = \frac{a^2}{2} \cdot \delta(f - f_0). \quad (\text{A.36})$$

D'après le formule (A.28), on peut exprimer la variance d'Allan comme suit :

$$\sigma_y^2(\tau) = a^2 \cdot \int_0^\infty \delta(f - f_0) \cdot \frac{\sin^4(\pi \tau f)}{(\pi \tau f)^2} \cdot df, \quad (\text{A.37})$$

soit :

$$\sigma_y^2(\tau) = a^2 \cdot \frac{\sin^4(\pi \tau f_0)}{(\pi \tau f_0)^2}. \quad (\text{A.38})$$

La variance obtenue est dominée par une droite proportionnelle à τ^{-2} d'équation $a^2/(\pi\tau f_0)^2$. Par ailleurs, cette variance s'annule pour tout temps d'intégration τ donné par :

$$\tau = \frac{k}{f_0} = k \cdot T_0, \quad (\text{A.39})$$

et qui atteint ses maxima pour des temps d'intégration τ donnés par :

$$\tau = \frac{2k+1}{2f_0} = \frac{2k+1}{2} \cdot T_0. \quad (\text{A.40})$$

Le premier maxima est atteint pour $\tau = \frac{T_0}{2}$ (la demie-période) et vaut :

$$\sigma_y^2\left(\frac{T_0}{2}\right) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2. \quad (\text{A.41})$$

A.6 Dérivées de la variance d'Allan

D'après le tableau A.1 ou la figure A.5, on remarque que les modulations de bruit blanc de phase et de bruit de scintillation de phase sont caractérisées par pentes identiques sur un tracé bi-logarithmique de la variance d'Allan. Par conséquent, cet outil statistique ne permet pas de différencier ces deux types de bruit. De plus, la variance d'Allan est un estimateur sans biais seulement pour un bruit blanc de fréquence. Ces raisons ont conduit au développement de nouvelles variances.

A.6.1 La variance d'Allan modifiée

Si l'on considère un ensemble x_k de mesures échantillonnées à la période τ_0 , alors la variance d'Allan modifiée est donnée par :

$$\text{Mod}\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2m^2} \left\langle \left(\sum_{i=1}^m (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i) \right)^2 \right\rangle, \quad (\text{A.42})$$

où m est donné par $\tau = m \cdot \tau_0$ et les moyennes \bar{y}_i s'écrivent :

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{k=i}^{i+m-1} y_k = \frac{x_{i+m} - x_i}{m \cdot \tau_0}. \quad (\text{A.43})$$

En combinant les deux expressions précédentes (A.42) et (A.43), la formulation mathématique de la variance d'Allan modifiée est donnée selon :

$$\text{Mod}\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2m^2\tau^2 \cdot (N - 3m + 1)} \sum_{j=1}^{N-3m+1} \left(\sum_{i=j}^{j+m-1} (x_{i+2m} - 2x_{i+m} + x_i) \right)^2. \quad (\text{A.44})$$

On remarque alors que la variance d'Allan modifiée ne peut pas être calculée pour des temps d'intégration supérieurs au tiers de la durée de l'intervalle initiale des données.

Par le même raisonnement considéré pour la variance classique et la variance d'Allan (cf. équations (A.14) et (A.16)), la convergence des différentes modulations de bruit est étudiée en déterminant la réponse impulsionnelle associée. La transformée de Fourier $H_\tau(f)$ de cette réponse impulsionnelle est donnée par :

$$H_\tau(f) = 2 \cdot \frac{\sin^6(\pi\tau f)}{m^2 \cdot (\pi\tau f)^2 \cdot \sin^2(\pi\tau_0 f)}, \quad (\text{A.45})$$

où m est défini selon $\tau = m \cdot \tau_0$. Pour $m = 1$, la fonction de transfert associée à la variance d'Allan modifiée correspond à celle de la variance d'Allan. Cette fonction de transfert donnée par l'équation (A.45) est représentée pour $m = 3$ sur la figure A.6.

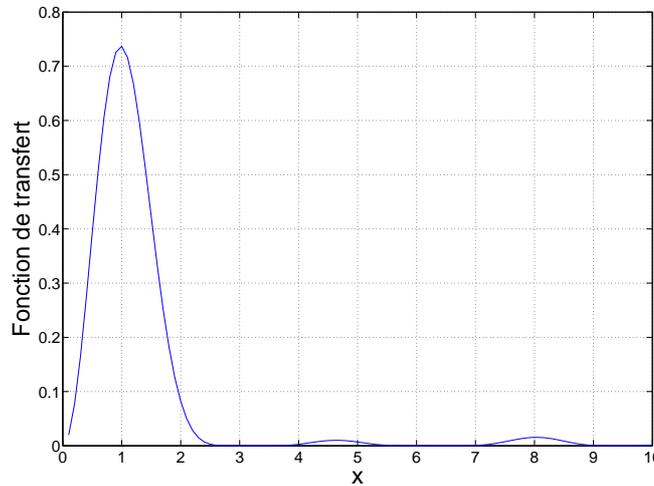


FIG. A.6 : Fonction de transfert $H_\tau(f)$ de l'opérateur variance d'Allan modifiée et tracée en fonction du paramètre $x = \pi\tau f$ pour $m = 3$.

Comme la variance d'Allan, le calcul de la variance d'Allan modifiée converge pour l'ensemble des puissances présentées dans l'équation (A.19) car sa fonction

de transfert $H_\tau(f)$ se comporte comme f^{-2} quand f tend vers zéro. De plus, elle permet aussi d'estimer la variance sans biais lors d'une modulation de bruit blanc de phase.

A.6.2 La variance d'Allan temporelle

Les variances d'Allan classique et modifiée conviennent parfaitement pour des oscillateurs dont la caractéristique principale est la fréquence. Cependant, pour les méthodes de transfert de temps, la variable essentielle est la phase. Aussi introduit-on la variance d'Allan temporelle pour caractériser les instabilités temporelles de ces systèmes.

La variance d'Allan temporelle σ_x^2 s'exprime en fonction de la variance d'Allan modifiée $Mod\sigma_y$ selon :

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{\tau^2}{3} \cdot Mod\sigma_y^2(\tau). \quad (\text{A.46})$$

Le calcul de cette variance converge pour les cinq types de bruits. De plus, elle donne accès à la valeur non biaisée de la variance pour du bruit blanc de phase.

A.6.3 Intérêt de ces variances

Le tableau A.2 donne la valeur des pentes des variances d'Allan classique, modifiée et temporelle pour les cinq types de bruit dans un schéma bi-logarithmique. Il permet de comparer les conséquences d'une modulation de bruit sur les différentes variances. Pour chaque puissance α en terme de densité spectrale, il présente les dépendances en puissance en fonction du temps d'intégration τ pour la variance d'Allan (μ), la variance d'Allan modifiée (μ) et la variance d'Allan temporelle (η).

Les figures A.7 et A.8 montrent les changements de pente pour une représentation bi-logarithmique de la variance d'Allan modifiée et temporelle en fonction du temps d'intégration.

La variance d'Allan modifiée permet la distinction entre le bruit blanc de phase et le bruit de Flicker de phase, ce qui était rendu impossible par la variance d'Allan classique. Bien que les deux fonctions de transfert aient des comportements proches, les répartitions différentes d'énergie dans les lobes secondaires expliquent cette possibilité de discrimination des deux types de bruit.

De même, la variance d'Allan temporelle discrimine l'ensemble des cinq types de modulation considérés. L'équation (A.46) relie les variances d'Allan modifiée et temporelle : les pentes associées aux modulations de bruit et évaluées dans un

TAB. A.2 : Dépendances en terme de puissance du temps d'intégration τ de la variance d'Allan, de la variance d'Allan modifiée et de la variance d'Allan temporelle pour les cinq types de bruit considérés.

Nature du bruit	$\alpha \left(S_y \right)$	$\mu \left(\sigma_y^2 \right)$	$\mu' \left(Mod\sigma_y^2 \right)$	$\eta \left(\sigma_x^2 \right)$
Bruit de marche aléatoire de fréquence	-2	1	1	3
Bruit de scintillation de fréquence	-1	0	0	2
Bruit blanc de fréquence	0	-1	-1	1
Bruit de scintillation de phase	1	-2	-2	0
Bruit blanc de phase	2	-2	-3	-1

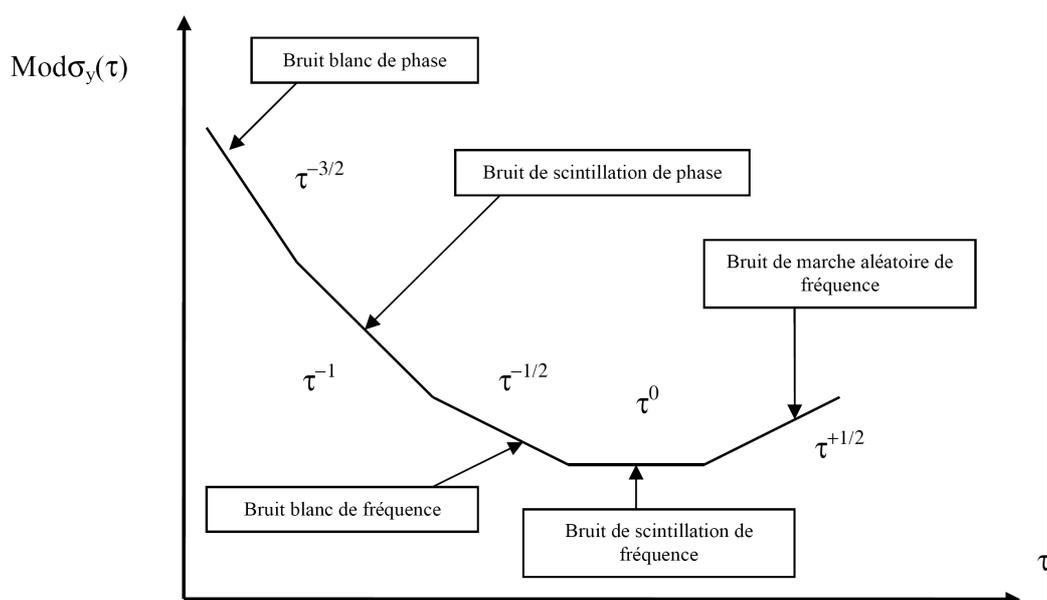


FIG. A.7 : Dépendances de la variance d'Allan modifiée pour les cinq bruits considérés en fonction du temps d'intégration τ [124].

tracé logarithmique varient de 2 de l'une à l'autre. Par contre, la variance temporelle s'adapte particulièrement bien à l'étude des bruits de phase. En effet, il est plus aisé de distinguer les modulations de bruit blanc de phase, de scintillation de phase et de marche aléatoire de phase avec cet outil statistique, car la variation

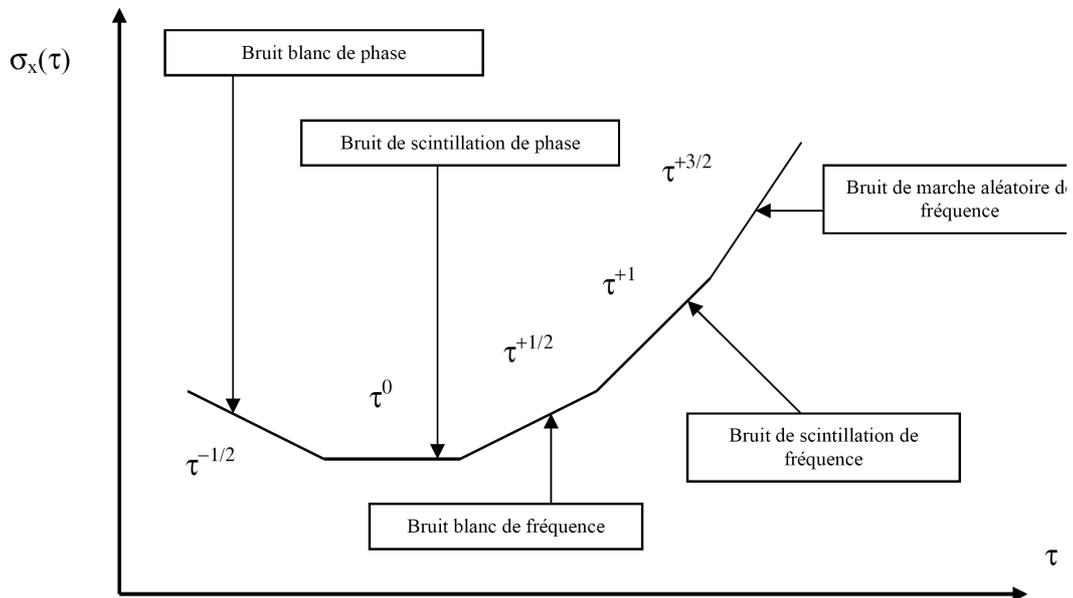


FIG. A.8 : Dépendances de la variance d'Allan temporelle pour les cinq bruits considérés en fonction du temps d'intégration τ [124].

relative des pente est plus grande.

Annexe B

Autres calculs

La détermination des produits scientifiques de la mission ACES dépend de la configuration de la mission. Les calculs effectués à travers le Chapitre 2 supposaient la synchronisation de l'horloge terrestre avec le temps coordonné. Ils permettaient alors d'obtenir l'expression de la désynchronisation des horloges, du Contenu Total en Électrons, de la distance instantanée coordonnée et du délai troposphérique en fonction des observables et de corrections orbitographiques.

Cependant, dans le cas où les horloges spatiales seraient supposées synchronisées avec le temps coordonné, il est nécessaire de calculer les expressions correspondantes. Par conséquent, cette annexe a pour but de présenter les expressions des produits scientifiques dans cette configuration, et fait ainsi opposition à la partie 2.4.

B.1 Expression des observables

Quelle que soit la configuration d'analyse des données, la nature des observables ne change pas. Elle reste donnée par les équations (2.34), (2.35) et (2.36). De même, le temps de propagation ne varie pas. Les intervalles T_{12} , T_{34} et T_{56} sont toujours donnés respectivement par les expressions (2.37), (2.38) et (2.39).

Par contre, les différences de calcul interviennent à partir du moment où l'on désire exprimer ces temps de propagation en fonction des données orbitographiques à un temps coordonné relié à un événement se produisant à la station spatiale. Dans le cas où l'horloge spatiale est supposée synchronisée avec le temps coordonné, on choisit comme temps de référence le temps coordonné de réception du signal de fréquence f_2 puisque les observables sont datées par rapport à leur temps de réception et qu'il s'agit de l'unique événement de réception se déroulant à la station spatiale.

Par conséquent, on désire, à présent, exprimer les termes intervenants seulement en fonction des données en t_2 , c'est-à-dire en fonction du vecteur $\vec{D}(t_2) = \vec{x}_s(t_2) - \vec{x}_g(t_2)$, des accélérations et des vitesses au temps coordonnée t_2 de la station sol ($\vec{v}_g(t_2)$ et $\vec{a}_g(t_2)$) et de la station spatiale ($\vec{v}_s(t_2)$ et $\vec{a}_s(t_2)$).

Tout d'abord, on cherche les expressions des temps de propagation des signaux en fonction des données orbitographiques en t_2 . On part de leurs expressions données par (2.37), (2.38) et (2.39), sauf que l'on n'évalue pas la distance géométrique de la même façon (ni les autres termes aussi d'ailleurs).

Par exemple, l'observable de code issue du signal de fréquence f_1 s'exprime toujours selon :

$$\Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) = Des(t_2^o) - \left[[\Delta_{T1}^g]^t + T_{12} + [\Delta_{R1}^s]^t \right]^g, \quad (\text{B.1})$$

où le temps de propagation T_{12} est donné par l'équation (2.37) mais tend à être exprimé en fonction des données orbitographiques au temps coordonnée t_2 .

Le développement limité au deuxième ordre de la position de la station spatiale $\vec{x}_s(t_1)$ en t_2 donne :

$$\vec{x}_s(t_1) = \vec{x}_s(t_2) + \vec{v}_s(t_2) \cdot [t_1 - t_2] + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_2) \cdot [t_1 - t_2]^2 + O([t_1 - t_2]^3). \quad (\text{B.2})$$

En soustrayant l'équation (B.2) à la position de la station terrestre $\vec{x}_g(t_2)$ en t_2 , le vecteur $\vec{R}_{12} = \vec{x}_s(t_2) - \vec{x}_g(t_1)$ est donné par :

$$\vec{R}_{12} = \vec{D}(t_2) - \vec{v}_s(t_2) \cdot T_{12} + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_2) \cdot T_{12}^2 + O(T_{12}^3). \quad (\text{B.3})$$

La norme de \vec{R}_{12} s'évalue à partir de l'équation précédente. En ne conservant que les termes prédominants, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{12} = & D(t_1) + \frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)} T_{12} \\ & + \frac{v_s^2(t_1) + \vec{a}_s(t_1) \cdot \vec{D}(t_1) - \left(\frac{\vec{D}(t_1) \cdot \vec{v}_s(t_1)}{D(t_1)} \right)^2}{2D(t_1)} T_{12}^2 + O(T_{12}^3). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

L'équation (B.4) dépend du temps de propagation T_{12} . Par itération, on obtient le temps de propagation du signal de fréquence f_1 :

$$\begin{aligned}
T_{12} = & \frac{D(t_2)}{c} + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{c^2} \\
& + \frac{D(t_2)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) + \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_2) + x_s(t_2) + D(t_2)}{x_g(t_2) + x_s(t_2) - D(t_2)} \right) + \Delta_{12}^{iono} \cdot \left(1 + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2) \cdot c} \right) \\
& + \Delta_{12}^{tropo} \cdot \left(1 + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2) \cdot c} \right) + O(c^{-4}), \tag{B.5}
\end{aligned}$$

où Δ_{12}^{tropo} et Δ_{12}^{iono} sont respectivement les retards troposphérique et ionosphérique agissant sur la propagation du signal de fréquence f_1 .

De la même façon, on cherche à exprimer T_{34} en fonction des paramètres exprimés en t_3 , temps coordonnée d'émission du signal de fréquence f_2 de la station spatiale. Le développement limité de la position de la station spatiale au temps t_4 est donné, à l'ordre convenu, par :

$$\begin{aligned}
\vec{x}_s(t_4) &= \vec{x}_s(t_3) + \vec{v}_s(t_3) \cdot [t_4 - t_3] + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_3) \cdot [t_4 - t_3]^2 + O([t_4 - t_3]^3), \\
\vec{x}_s(t_4) &= \vec{x}_s(t_3) + \vec{v}_s(t_3) \cdot T_{34} + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_3) \cdot T_{34}^2 + O(T_{34}^3). \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Le vecteur reliant la position de la station spatiale à l'émission du signal de fréquence f_2 et celle de la station terrestre à la réception de ce même signal est défini par $\vec{R}_{34} = \vec{x}_s(t_3) - \vec{x}_g(t_4)$. La norme de ce vecteur est donnée par :

$$\begin{aligned}
R_{34} = & D(t_3) - \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_s(t_3)}{D(t_3)} T_{34} \\
& + \frac{v_s^2(t_3) + \vec{a}_s(t_3) \cdot \vec{D}(t_3) - \left(\frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_s(t_3)}{D(t_3)} \right)^2}{2D(t_3)} T_{34}^2 + O(T_{34}^3). \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Selon le même principe utilisé précédemment, on insère l'expression de R_{34} donnée par l'équation précédente dans l'équation (2.38). Puis, on remplace les termes d'ordres supérieurs qui sont des fonctions de T_{34} en utilisant l'expression (B.7) et en ne gardant que les termes supérieurs au dixième de picoseconde. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
T_{34} = & \frac{D(t_3)}{c} - \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{c^2} \\
& + \frac{D(t_3)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_3)\|^2 - \vec{D}(t_3) \cdot \vec{a}_g(t_3) + \left(\frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{D(t_3)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_3) + x_s(t_3) + D(t_3)}{x_g(t_3) + x_s(t_3) - D(t_3)} \right) + \Delta_{12}^{iono} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{D(t_3) \cdot c} \right) \\
& + \Delta_{34}^{tropo} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{D(t_3) \cdot c} \right) + O(c^{-4}). \tag{B.8}
\end{aligned}$$

De la même façon, on peut calculer une expression équivalente pour le temps de propagation T_{56} . A l'aide d'un développement limité, on obtient :

$$\begin{aligned}
T_{56} = & \frac{D(t_5)}{c} - \frac{\vec{D}(t_5) \cdot \vec{v}_g(t_5)}{c^2} \\
& + \frac{D(t_5)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_5)\|^2 - \vec{D}(t_5) \cdot \vec{a}_g(t_5) + \left(\frac{\vec{D}(t_5) \cdot \vec{v}_g(t_5)}{D(t_5)} \right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_5) + x_s(t_5) + D(t_5)}{x_g(t_5) + x_s(t_5) - D(t_5)} \right) + \Delta_{56}^{iono} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_5) \cdot \vec{v}_g(t_5)}{D(t_5) \cdot c} \right) \\
& + \Delta_{56}^{tropo} \cdot \left(1 - \frac{\vec{D}(t_5) \cdot \vec{v}_g(t_5)}{D(t_5) \cdot c} \right) + O(c^{-4}). \tag{B.9}
\end{aligned}$$

B.2 Expression de la désynchronisation

De façon analogue au Chapitre 2, la désynchronisation des horloges est déterminée par la différence des observables de fréquence f_1 et f_2 . Ce produit scientifique est évalué au temps coordonnée $t_a = \frac{t_2^o + t_4^o}{2}$ à partir de l'équation (2.54). Dans cette expression, il est nécessaire d'évaluer la différence des temps de propagation $T_{12} - T_{34}$ en fonction de l'orbitographie des stations au temps coordonnée t_2 .

Pour ce calcul, on note Φ , Σ et Θ respectivement les termes du premier, du deuxième et du troisième ordre en $\frac{1}{c}$ tels que :

$$\begin{aligned}
T_{12} - T_{34} = & \Phi + \Sigma + \Delta + (\Delta_{12}^{iono} + \Delta_{12}^{tropo}) \left(1 + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2) \cdot c}\right) \\
& - (\Delta_{34}^{iono} + \Delta_{34}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{D(t_3) \cdot c}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

où l'on définit :

$$\Phi = \frac{D(t_2)}{c} - \frac{D(t_3)}{c}, \tag{B.11}$$

$$\Sigma = \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{c^2}, \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\Theta = & \frac{D(t_2)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) + \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2)}\right)^2 \right) \\
& - \frac{D(t_3)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_3)\|^2 - \vec{D}(t_3) \cdot \vec{a}_g(t_3) + \left(\frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{D(t_3)}\right)^2 \right) \\
& + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_s(t_2) + x_s(t_2) + D(t_2)}{x_g(t_2) + x_s(t_2) - D(t_2)} \right) \\
& - \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_3) + x_s(t_3) + D(t_3)}{x_g(t_3) + x_s(t_3) - D(t_3)} \right).
\end{aligned} \tag{B.13}$$

De façon analogue à la méthode employée dans le Chapitre 2, on suppose que les paramètres T_{23} et T_{14} sont de l'ordre de c^{-1} .

B.2.1 Termes en $\frac{1}{c}$

Le terme Φ est dépendant de la distance entre les deux stations au temps coordonnée t_3 . On cherche donc à exprimer les positions des stations en t_3 en fonction de leur position en t_2 à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre en c^{-3} :

$$\vec{x}_s(t_3) = \vec{x}_s(t_2) + \vec{v}_s(t_2) \cdot (t_3 - t_2) + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_2) \cdot (t_3 - t_2)^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{B.14}$$

soit :

$$\vec{x}_s(t_3) = \vec{x}_s(t_2) + \vec{v}_s(t_2) \cdot T_{23} + \frac{1}{2} \vec{a}_s(t_2) \cdot T_{23}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \tag{B.15}$$

De même, on obtient :

$$\vec{x}_g(t_3) = \vec{x}_g(t_2) + \vec{v}_g(t_2) \cdot T_{23} + \frac{1}{2} \vec{a}_g(t_2) \cdot T_{23}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (\text{B.16})$$

La différence de ces deux dernières équations s'écrit :

$$\vec{D}(t_3) = \vec{D}(t_2) - \Delta \vec{v}(t_2) \cdot T_{23} - \frac{1}{2} \Delta \vec{a}(t_2) \cdot T_{23}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (\text{B.17})$$

lorsqu'on pose $\Delta \vec{v}(t_2) = \vec{v}_g(t_2) - \vec{v}_s(t_2)$ et $\Delta \vec{a}(t_2) = \vec{a}_g(t_2) - \vec{a}_s(t_2)$.

A partir de l'équation précédente, on calcule la norme $D(t_3)$ du vecteur $\vec{D}(t_3)$ en fonction de la distance instantanée $D(t_2)$ entre les stations à t_2 :

$$\begin{aligned} D(t_3) = & D(t_2) - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)} T_{23} \\ & + \frac{\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)}\right)^2}{2D(t_2)} T_{23}^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Par conséquent, à l'aide de l'équation (B.18), on estime le paramètre Φ selon :

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{23} - \frac{T_{23}^2}{2c \cdot D(t_2)} \left(\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 \right. \\ & \left. - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)}\right)^2 \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Le terme dominant de Φ d'annule et il ne reste que des termes de l'ordre de $1/c^2$.

B.2.2 Termes en $\frac{1}{c^2}$

On cherche, à présent, à exprimer le paramètre $\Sigma = \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{c^2}$ en fonction des données orbitographiques des stations au temps coordonnée t_2 . La combinaison des équations :

$$\vec{D}(t_3) = \vec{D}(t_2) - \Delta \vec{v}(t_2) \cdot T_{23} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad (\text{B.20})$$

et

$$\vec{v}_g(t_3) = \vec{v}_g(t_2) + \vec{a}_g(t_2) \cdot T_{23} + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \quad (\text{B.21})$$

conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{c^2} &= \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{c^2} \\ &- \frac{T_{23}}{c^2} \left(\Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) \right) + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Finalement, l'équation précédente donne :

$$\Sigma = 2 \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{c^2} - \frac{T_{23}}{c^2} \left(\Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (\text{B.23})$$

B.2.3 Termes en $\frac{1}{c^3}$

Le terme Θ regroupe l'ensemble des termes du troisième ordre des expressions (B.5) et (B.8), et s'écrit selon :

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{D(t_2)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_2)\|^2 + \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) + \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\ &- \frac{D(t_3)}{2c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_3)\|^2 + \vec{D}(t_3) \cdot \vec{a}_g(t_3) + \left(\frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{D(t_3)} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_1) + x_s(t_2) + D(t_2)}{x_g(t_1) + x_s(t_2) - D(t_2)} \right) \\ &- \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_4) + x_s(t_3) + D(t_3)}{x_g(t_4) + x_s(t_3) - D(t_3)} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

D'après l'équation (B.18), on $D(t_3) = D(t_2) + O\left(\frac{1}{c}\right)$, donc aussi :

$$\frac{D(t_3)}{2c^3} = \frac{D(t_2)}{2c^3} + O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

De même, on a $v_s(t_3) = v_s(t_2) + O\left(\frac{1}{c}\right)$ ainsi que $a_s(t_3) = a_s(t_2) + O\left(\frac{1}{c}\right)$. Finalement, on obtient :

$$\Theta = 0 + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \quad (\text{B.25})$$

Comme dans le cas où l'horloge terrestre était supposée synchronisée avec le temps coordonnée, les termes en c^{-3} s'annulent parfaitement.

B.2.4 Expression Finale

L'insertion des résultats donnés par les équations (B.19), (B.23) et (B.25) dans l'équation (B.10) permet d'obtenir une expression de la différence des temps de propagation $T_{12} - T_{34}$ en fonction des paramètres orbitographiques exprimés au temps coordonnée t_2 :

$$\begin{aligned}
T_{12} - T_{34} = & \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{23} + 2 \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{c^2} \\
& - \frac{T_{23}}{c^2} \left(\Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) \right) \\
& - \frac{T_{23}^2}{2c \cdot D(t_2)} \left(\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\
& + (\Delta_{12}^{iono} + \Delta_{12}^{tropo}) \left(1 + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_s(t_2)}{D(t_2) \cdot c} \right) \\
& - (\Delta_{34}^{iono} + \Delta_{34}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_s(t_2)}{D(t_2) \cdot c} \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned} \tag{B.26}$$

L'équation précédente donne l'expression de la différence $T_{12} - T_{34}$ en fonction des paramètres orbitographiques au temps coordonnée t_2 et fait écho avec l'équation (2.76). De plus, l'équation (B.26) fait aussi intervenir le paramètre T_{23} qui correspond à l'intervalle de temps coordonnée entre la réception du signal f_1 et l'émission du signal f_2 à l'antenne de la station spatiale. En effet, ce paramètre temporel est associé à la manière de combiner les signaux.

B.2.5 Expression en fonction de l'intervalle T_{14}

Au lieu de dépendre du paramètre T_{23} , l'équation (B.26) peut être exprimée en fonction de l'intervalle de temps coordonnée T_{14} . Pour cela, il faut exprimer l'intervalle T_{23} en fonction de T_{14} en s'arrêtant à l'ordre en c^{-2} puisque le temps T_{23} est déjà en facteur de c^{-1} dans la formule (B.38). On obtient alors :

$$\begin{aligned}
T_{14} = T_{12} + T_{23} + T_{34} = & \frac{R_{12}}{c} + T_{23} + \frac{R_{34}}{c} + O(c^{-3}), \\
T_{14} = & \left(\frac{D(t_2)}{c} + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{c^2} \right) + T_{23} + \left(\frac{D(t_3)}{c} - \frac{\vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)}{c^2} \right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right),
\end{aligned} \tag{B.27}$$

soit :

$$T_{14} = T_{23} + 2 \frac{D(t_2)}{c} - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{23} + \frac{1}{c^2} (\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) - \vec{D}(t_3) \cdot \vec{v}_g(t_3)) + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (\text{B.28})$$

d'après l'équation (B.18).

Le dernier terme de l'équation disparaît à l'ordre considéré et celle-ci donne donc :

$$T_{23} = T_{14} - 2 \frac{D(t_2)}{c} + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{23} + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (\text{B.29})$$

En injectant l'expression de T_{23} dans son le terme de droite, on arrive à l'équation escomptée :

$$T_{23} = T_{14} - 2 \frac{D(t_2)}{c} - 2 \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta v}(t_2)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{14} + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \quad (\text{B.30})$$

Ainsi, en utilisant l'équation précédente, l'équation (B.26) devient :

$$\begin{aligned} T_{12} - T_{34} = & 2 \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_s(t_2)}{c^2} + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{14} \\ & - \frac{2D(t_2)}{c^2} \cdot \left(\|\vec{\Delta v}(t_2)\|^2 + \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_s(t_2) - \vec{\Delta v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) \right) \\ & - \frac{T_{14}}{c^2} \cdot \left(\vec{\Delta v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) - 2 \|\vec{\Delta v}(t_2)\|^2 \right. \\ & \left. + 2 \vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta a}(t_2) + \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta v}(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\ & - \frac{T_{14}^2}{2cD(t_2)} \cdot \left(\|\vec{\Delta v}(t_2)\|^2 \right. \\ & \left. - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta a}(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{\Delta v}(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\ & + (\Delta_{12}^{iono} + \Delta_{12}^{tropo}) \left(1 + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_s(t_2)}{D(t_2) \cdot c} \right) \\ & - (\Delta_{34}^{iono} + \Delta_{34}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_s(t_2)}{D(t_2) \cdot c} \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

B.3 Expression du Contenu Total en Électrons (TEC)

Dans cette partie, on étudie la détermination du Contenu Total en Électrons. Cette variable physique est l'un des produits scientifiques de la mission ACES, et reste nécessaire à l'obtention de la désynchronisation des horloges avec la précision recherchée. Elle est obtenue en combinant les mesures brutes issues des signaux f_2 et f_3 . En effet, la différence de ces deux observables fait intervenir la différence des temps de propagation des deux signaux selon :

$$T_{34} - T_{56} = \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) - \Delta\tau^g(\tau^g(t_6^o)) + \Delta T_2^s - \Delta T_3^s + \Delta_{R2}^g - \Delta_{R3}^g + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad (\text{B.32})$$

et, par conséquent, la différence de leur effet ionosphérique.

La différence des équations (B.8) et (B.9) permet d'exprimer la différence des temps de propagation des signaux de fréquence f_2 et f_3 en fonction des données orbitographiques des stations au temps coordonnée t_2 :

$$\begin{aligned} T_{34} - T_{56} = & \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)} \frac{T_{35}}{c} \\ & - \frac{\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)}\right)^2}{2D(t_2)} \frac{T_{35}^2}{c} \\ & + \frac{T_{35}}{c^2} \cdot (\vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) - \Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)) \\ & - \frac{\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)}\right)^2}{D(t_2)} \frac{T_{35} \cdot T_{23}}{c} \quad (\text{B.33}) \\ & + \frac{T_{35}}{c^2} \cdot (\vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) - \Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)) \\ & + (\Delta_{34}^{iono} + \Delta_{34}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_s(t_2)}{D(t_2) \cdot c}\right) \\ & - (\Delta_{56}^{iono} + \Delta_{56}^{tropo}) \left(1 - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_s(t_2)}{D(t_2) \cdot c}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned}$$

Cette différence de temps de propagation est reliée aux observables et aux délais instrumentaux par l'équation (2.77). Par conséquent, la différence des retards ionosphériques des fréquences f_3 et f_2 - qui est proportionnelle au Contenu Total Électronique - s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_2^2}\right) \frac{40.308}{c} C_e = & - \frac{1}{1 - \frac{f_2^3 - f_3^3}{(f_2^2 - f_3^2) f_2 f_3} \frac{7527 \cdot c}{40.308} \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{D}(t_2)}{D(t_2)}} \left[\Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) \right. \\
 & - \Delta \tau^g(\tau^g(t_6^o)) + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)} \frac{T_{35}}{c} \\
 & - \frac{\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)}\right)^2}{2D(t_2)} \times \quad (B.34) \\
 & \frac{T_{35} \cdot (T_{35} + 2T_{23})}{c} + \frac{T_{35}}{c^2} \cdot (\vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) \\
 & - \Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)) + \Delta_{T2}^s - \Delta_{T3}^s + \Delta_{R2}^g \\
 & \left. - \Delta_{R3}^g \right] / \left(1 - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2) \cdot c}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right).
 \end{aligned}$$

Dans le cas où les mesures de code et de phase sont effectuées au même instant à la station terrestre, on peut déduire la relation suivante : $T_{35} = \Delta \tau^g(\tau^g(t_6^o)) - \Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) + \Delta_{T3}^s - \Delta_{T2}^s$.

B.4 Expression de la distance instantanée et du délai troposphérique

Les deux derniers produits scientifiques à la portée de la mission ACES sont la distance instantanée coordonnée entre les deux stations et le délai troposphérique. Ils ne sont pas dissociables du fait qu'ils sont tous les deux indépendants de la fréquence du signal. L'évaluation de leur somme découle de la somme des observables provenant des signaux de fréquence f_1 et f_2 . L'équation (2.81) présente la combinaison correspondante et fait intervenir la somme des temps de propagation des signaux f_1 et f_2 . Cette somme peut être exprimée en fonction des données orbitographiques au temps t_2 . Cependant, cette expression dépend forcément de la manière avec laquelle sont combinés les signaux, c'est-à-dire de l'intervalle de temps coordonnée T_{23} ou T_{14} .

B.4.1 En fonction de T_{23}

Tout d'abord, on exprime la somme des temps de propagation des deux premières fréquences en fonction du paramètre T_{23} :

$$\begin{aligned}
T_{12} + T_{34} = & 2 \frac{D(t_2)}{c} - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{23} \\
& + \frac{T_{23}}{c^2} \left(\Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) \right) \\
& + \frac{T_{23}^2}{2c \cdot D(t_2)} \left(\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) + 2\Delta_{12}^{iono} + 2\Delta_{12}^{tropo} \\
& + \frac{D(t_2)}{c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) + \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\
& + 2 \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_2) + x_s(t_2) + D(t_2)}{x_g(t_2) + x_s(t_2) - D(t_2)} \right) + O(c^{-4}).
\end{aligned} \tag{B.35}$$

L'estimation de l'un de ces deux produits scientifiques va être limitée par le second produit et par sa modélisation. Par conséquent, on néglige, pour chacun des deux paramètres, les termes de l'équation (B.35) d'une amplitude inférieure à l'erreur provoquée de l'autre paramètre. Cela correspond à une précision de l'ordre du millimètre pour D et de l'ordre de la nanoseconde pour le délai troposphérique.

Dans le cas étudié, les deux produits scientifiques recherchés sont évalués à travers :

$$\begin{aligned}
D(t_2) = & -\frac{c}{2} \left[\Delta \tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) + \Delta_{T1}^g + \Delta_{T2}^s + \Delta_{R1}^s + \Delta_{R2}^g \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) \frac{40.308}{c} C_e + 2\Delta_{12}^{tropo} - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)c} T_{23} \right],
\end{aligned} \tag{B.36}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta_{12}^{tropo} = & -\frac{1}{2} \left[\Delta \tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) + \Delta_{T1}^g + \Delta_{T2}^s + \Delta_{R1}^s + \Delta_{R2}^g \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) \frac{40.308}{c} C_e + 2 \frac{D(t_2)}{c} - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)c} T_{23} \right].
\end{aligned} \tag{B.37}$$

L'expression précédente de la distance instantanée $D(t)$ s'écrit en fonction de termes dépendant de cette distance mais à des ordres inférieurs. Ce produit scientifique peut donc être évalué par itérations successives jusqu'à convergence.

B.4.2 En fonction de T_{14}

De la même façon, on exprime la somme des deux temps de propagation en fonction de T_{14} :

$$\begin{aligned}
 T_{12} + T_{34} = & 2\frac{D(t_2)}{c} + 2\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c^2} - \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} T_{14} \\
 & - \frac{T_{14}}{c^2} \left(2\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - 2\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) + \Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) \right. \\
 & \left. - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) + \frac{T_{14}^2}{2c \cdot D(t_2)} \left(\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 \right. \\
 & \left. - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) - \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\
 & + \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) \frac{40,3}{c} C_e + 2\Delta_{34}^{tropo} \left(1 + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c \cdot D(t_2)} \right) \\
 & + \frac{2D(t_2)}{c^3} \left(\|\Delta \vec{v}(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{a}(t_2) \right. \\
 & \left. - \Delta \vec{v}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2) + \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) \right) \\
 & + \frac{D(t_2)}{c^3} \left(\|\vec{v}_g(t_2)\|^2 - \vec{D}(t_2) \cdot \vec{a}_g(t_2) + \left(\frac{\vec{D}(t_2) \cdot \vec{v}_g(t_2)}{D(t_2)} \right)^2 \right) \\
 & + 2\frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{x_g(t_2) + x_s(t_2) + D(t_2)}{x_g(t_2) + x_s(t_2) - D(t_2)} \right) + O(c^{-4}).
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

Dans ce cas là, les deux produits scientifiques sont évalués par :

$$\begin{aligned}
 D(t_2) = & -\frac{c}{2} \left[\Delta \tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta \tau^g(\tau^g(t_4^o)) + \Delta_{T1}^g + \Delta_{T2}^s + \Delta_{R1}^s + \Delta_{R2}^g \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) \frac{40.308}{c} C_e + 2\Delta_{12}^{tropo} + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c} \left(\frac{2}{c} - \frac{T_{14}}{D(t_2)} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{B.39}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^{tropo} = & -\frac{1}{2} \left[\Delta\tau^g(\tau^g(t_2^o)) + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) + \Delta_{T1}^s + \Delta_{T2}^s + \Delta_{R1}^s + \Delta_{R2}^s \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} \right) \frac{40.308}{c} C_e + 2 \frac{D(t_2)}{c} + \frac{\vec{D}(t_2) \cdot \Delta \vec{v}(t_2)}{c} \left(\frac{2}{c} - \frac{T_{14}}{D(t_2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

B.5 Expressions utilisées dans le programme

Dans cette dernière partie, on rappelle et rassemble les équations utilisées dans l'algorithme de traitement de données et dans la simulation des observables du Lien Micro-Onde - ces deux programmes étant décrits dans le Chapitre 4 - pour les différentes configurations offertes à l'utilisateur. Elles concernent les expressions nécessaires au décalage des observables afin d'obtenir la combinaison désirée ainsi qu'à l'évaluation de la désynchronisation théorique. Ces expressions sont identiques quelle que soit l'horloge synchronisée avec le temps coordonné.

B.5.1 Décalage des observables

Le programme d'analyse de données permet de combiner les observables selon la configuration choisie par l'utilisateur. Le choix d'une configuration impose de décaler soit le signal ascendant, soit les signaux descendants. De plus, ce décalage est imposé soit par le paramètre T_{23} , soit par T_{14} .

Décalage en fonction de T_{23}

Lorsque la configuration est contrôlée par l'intervalle de temps coordonné T_{23} séparant l'émission du signal de fréquence f_2 et la réception du signal f_1 , il existe deux solutions pour atteindre une configuration choisie.

La première correspond à décaler le signal ascendant selon l'égalité :

$$\tau^s(t_2^o) = \tau^g(t_4^o) + \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)) - [T_{23}^o]^s. \quad (\text{B.41})$$

La seconde possibilité est basée sur des itérations successives du signal de fréquence f_2 selon l'équation :

$$\tau^s(t_4^o)_{i+1} = \tau^s(t_2^o) + [T_{23}^o]^s - \Delta\tau^g(\tau^g(t_4^o)_i). \quad (\text{B.42})$$

Décalage en fonction de T_{14}

Dans le cas où la configuration des signaux est contrôlée par T_{14} , alors le décalage des observables est réalisé par :

$$\tau^s(t_2^o)_{i+1} = \tau^s(t_4^o) - [T_{14}^o]^g - \Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)_i), \quad (\text{B.43})$$

ou par :

$$\tau^s(t_4^o) = \tau^s(t_2^o) + \Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o)) + [T_{14}^o]^g. \quad (\text{B.44})$$

B.5.2 Désynchronisation théorique

Les résultats extraits de l'algorithme de traitement de données du MWL sont comparés à leur valeur théorique. Cette valeur est évaluée en fonction de la configuration de l'analyse. Elle dépend du paramètre utilisé pour contrôler la combinaison des observables ainsi que de l'observable décalée pour parvenir à la configuration choisie.

En fonction de T_{23}

Lors du décalage de l'observable issue du signal de fréquence f_1 , le temps coordonnée auquel est évaluée la désynchronisation des horloges par l'algorithme de traitement de données s'exprime selon :

$$t_a = t_4^o + \frac{1}{2} \cdot (-T_{23} - T_{34} + [\Delta_{R1}^s - \Delta_{R2}^g]^t) \approx t_4^o + \frac{1}{2} \cdot (-T_{23}^o + \Delta\tau^s(\tau^s(t_4^o))). \quad (\text{B.45})$$

Lorsque les signaux descendants sont décalés, le temps t_a est donné par :

$$t_a = t_2^o + \frac{1}{2} \cdot (T_{23} + T_{34} - [\Delta_{R1}^s - \Delta_{R2}^g]^t) \approx t_2^o + \frac{1}{2} \cdot (T_{23}^o - \Delta\tau^s(\tau^s(t_4^o))). \quad (\text{B.46})$$

En fonction de T_{14}

Quand le paramètre T_{14} est utilisé pour contrôler la configuration des signaux, la désynchronisation théorique est calculée à partir de :

$$t_a = t_4^o - \frac{1}{2} \cdot (T_{14} - T_{12} + [\Delta_{R2}^g - \Delta_{R1}^s]^t) \approx t_4^o - \frac{1}{2} \cdot (T_{14}^o + \Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o))) \quad (\text{B.47})$$

lorsque le signal de fréquence f_1 est décalé, et selon :

$$t_a = t_2^o + \frac{1}{2} \cdot (T_{14} - T_{12} + [\Delta_{R2}^g - \Delta_{R1}^s]^t) \approx t_2^o + \frac{1}{2} \cdot (T_{14}^o + \Delta\tau^s(\tau^s(t_2^o))) \quad (\text{B.48})$$

lorsque la mesure brute issue du signal f_2 est interpolée.

Bibliographie

- [1] A. Einstein. *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement, dans œuvres Choisies*. Tome 2, Seuil, 2008.
- [2] Isaac Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. 1687.
- [3] W. D. Phillips and H. J. Metcalf. Cooling and trapping atoms. *Scientific American*, 7 :36, 1987.
- [4] C. N. Cohen-Tannoudji and W. D. Phillips. New mechanisms for laser cooling. *Physics Today*, page 33, 1990.
- [5] S. Chu. Laser trapping of neutral particles. *Scientific American*, page 71, 1992.
- [6] C. Salomon, N. Dimarcq, M. Abgrall, A. Clairon, P. Laurent, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Urich, L.G. Bernier, G. Busca, A. Jornod, P. Thomann, E. Samain, P. Wolf, F. Gonzalez, P. Guillemot, S. Leon, F. Nouel, C. Sirmain, and S. Sirmain. Cold atoms in space and atomic clocks : ACES. *C.R. Acad. Sci.*, 2 :1313, 2001.
- [7] L. Duchayne, F. Mercier, and P. Wolf. Orbitography for next generation space clocks. *arXiv*, 0708.2387v1 :18, 2007.
- [8] P. Wolf, Ch. J. Bordé, A. Clairon, L. Duchayne, A. Landragin, P. Lemonde, G. Santarelli, W. Ertmer, E. Rasel, F.S. Cataliotti, M. Inguscio, G.M. Tino, P. Gill, H. Klein, S. Reynaud, C. Salomon, E. Peik, O. Bertolami, P. Gil, J. Paramos, C. Jentsch, U. Johann, A. Rathke, P. Bouyer, L. Cacciapuoti, D. Izzo, P. De Natale, B. Christophe, P. Touboul, S.G. Turyshev, J.D. Anderson, M.E. Tobar, F. Schmidt-Kaler, J. Vigué, A. Madej, L. Marmet, M-C. Angonin, P. Delva, P. Turrenc, G. Metris, H. Müller, R. Walsworth, Z.H. Lu, L. Wang, K. Bongs, A. Toncelli, M. Tonelli, H. Dittus, C. Lämmerzahl, G. Galzerano, P. Laporta, J. Laskar, A. Fienga, F. Roques, and K. Sengstock. Quantum physics exploring gravity in the outer solar system : the SAGAS project. *Publié dans Experimental Astronomy (available on ArXiv : arXiv :0711.0304)*.
- [9] C. M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, ISBN 0521439736, 1993.

- [10] I. I. Shapiro. Fourth test of general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 13 :789–791, 1964.
- [11] Serge Reynaud, Brahim Lamine, Loic Duchayne, Peter Wolf, and Marc-Thierry Jaekel. Bounds on gravitational wave backgrounds from large distance clock comparisons. *Phys. Rev. D*, 77 :122003, 2008.
- [12] 13^{ème} Conférence Générale des Poids et Mesures 1967-1968, “Résolution 1 ; CR, 103”, *Metrologia* 4, 43, 1968.
- [13] *Le Système international d’unités*. 7e édition, Disponible sur le site du BIPM, [http : //www.bipm.org](http://www.bipm.org), 1998.
- [14] S. Bize, P. Laurent, M. Abgrall, H. Marion, I. Maksimovic, L. Cacciapuoti, J. Grünert, C. Vian, F. Pereira dos Santos, P. Rosenbusch, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Wolf, A. Clairon, A. Luiten, M. Tobar, and C. Salomon. Cold atom clocks and applications. *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.*, 38 :S449, 2005.
- [15] T. P. Heavner, S. R. Jefferts, E A Donley, J H Shirley, and T E Parker. NIST-F1 : recent improvements and accuracy evaluations. *Metrologia*, 42 :411, 2005.
- [16] W. H. Oskay, S. A. Diddams, E. A. Donley, T. M. Fortier, T. P. Heavner, L. Hollberg, W. M. Itano, S. R. Jefferts, M. J. Delaney, K. Kim, F. Levi, T. E. Parker, and J. C. Bergquist. Single-atom optical clock with high accuracy. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :020801, 2006.
- [17] T. Rosenband, D. B. Hume, P. O. Schmidt, C. W. Chou, A. Brusch, L. Lorini, W. H. Oskay, R. E. Drullinger, T. M. Fortier, J. E. Stalnaker, S. A. Diddams, W. C. Swann, N. R. Newbury, W. M. Itano, D. J. Wineland, and J. C. Bergquist. Frequency ratio of Al^+ and Hg^+ single-ion optical clocks ; metrology at the 17th decimal place. *Science*, 319 :1808–1812, 2008.
- [18] Frédéric Chapelet. *Fontaine atomique double de Cesium et de Rubidium avec une exactitude de quelques 10^{-16} et applications*. Thèse de Doctorat, 2008.
- [19] *IAU Transactions Vol. XXIB*. Proc. 21st Gen. Assembly Buenos Aires, Kluwer Acad. Publ., 1991.
- [20] *Texte des recommandations IAU 2000*. disponible sur [http : //danof.obspm.fr/IAU_resolutions/Resol – UAI.htm](http://danof.obspm.fr/IAU_resolutions/Resol-UAI.htm), 2000.
- [21] M. Soffel, S. A. Klioner, G. Petit, P. Wolf, S. M. Kopeikin, P. Bretagnon, V. A. Brumberg, N. Capitaine, T. Damour, T. Fukushima, B. Guinot, T. Huang, L. Lindgren, C. Ma, K. Nordtvedt, J. Ries, P.K. Seidelmann, D. Vokrouhlicky, C. Will, and Ch. Xu. The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework : Explanatory supplement. *The Astronomical Journal*, 126 :2687, 2003.

- [22] K. R. Lang. *Astrophysical data : Planets and stars*. Springer, New-York, 1992.
- [23] P. Wolf and G. Petit. Relativistic theory for clock syntonization and the realization of geocentric coordinate times. *Astronomy and Astrophysics*, 304 :653, 1995.
- [24] P. Vrancken, E. Samain, P. Exertier, F. Pierron, P. Guillemot, and U. Schreiber. Definite error budget for ground to ground time transfer with T2L2. *Proceedings of the 2008 EFTF Conference*, 2008.
- [25] R.F.C. Vessot, M.W. Levine, E.M. Mattison, E.L. Blomberg, T.E. Hoffman, G.U. Nystrom, B.F. Farrell, R. Decher, P.B. Eby, C.R. Baugher, J.W. Watts, D.L. Teuber, and F.D. Wills. Test of relativistic gravitation with a spaceborne hydrogen maser. *Phys. Rev. Lett.*, 45 :2081–2084, 1980.
- [26] H. Jiang, F. Kéfélian, S. Crane, O. Lopez, M. Lours, J. Millo, D. Holleville, P. Lemonde, Ch. Chardonnet, A. Amy-Klein, and G. Santarelli. Transfer of an optical frequency over an urban fiber link. *arXiv :0807.1882*, 77, 2008.
- [27] T. E. Parker and D. Matsakis. Time and frequency dissemination : Advances in GPS transfer techniques. *GPS World*, 97 :32–38, 2004.
- [28] A. Bauch, J. Achkar, S. Bize, D. Calonico, R. Dach, R. Hlavac, L. Lorini, T Parker, G. Petit, D. Piester, K. Szymaniec, and P. Uhrichand. Comparison between frequency standards in Europe and the USA at the 10^{-15} uncertainty level. *Metrologia*, 43 :109, 2006.
- [29] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, 124 :925, 1961.
- [30] E.G. Adelberger. New tests of Einstein’s Equivalence Principle and Newton’s inverse-square law. *Class. Quantum Grav.*, 18 :2397–2405, 2001.
- [31] J.C. Mather, E. S. Cheng, R. E. Eplee Jr., R. B. Isaacman, S. S. Meyer, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. Boggess, E. Dwek, S. Gulkis, M. G. Hauser, M. Janssen, T. Kelsall, P.M. Lubin, S. H. Moseley Jr., T. L. Murdock, R. F. Silverberg, G. F. Smoot, and D.T. Wilkinson. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite. *The Astrophysical Journal*, 354 :37–40, 1990.
- [32] P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, and A. Clairon. Cold atom clock test of Lorentz invariance in the matter sector. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :060801, 2006.
- [33] A. Brillet and J. L. Hall. Improved laser test of the isotropy of space. *Phys. Rev. Lett.*, 42 :549–552, 1979.

- [34] P. L. Stanwix, M. E. Tobar, P. Wolf, M. Susli, C. R. Locke, E. N. Ivanov, J. Winterflood, and F. Van Kann. Test of Lorentz invariance in electrodynamics using rotating cryogenic sapphire microwave oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :040404, 2005.
- [35] Peter Wolf, Sebastien Bize, Andre Clairon, Andre N. Luiten, Giorgio Santarelli, and Michael E. Tobar. Tests of Lorentz invariance using a microwave resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :060402, 2003.
- [36] Peter Wolf and Gerard Petit. Satellite test of special relativity using the global positioning system. *Phys. Rev. A*, 56 :4405, 1997.
- [37] E. Riis, L.-U. Andersen, N. Bjerre, O. Poulsen, S. A. Lee, and J. L. Hall. Test of the isotropy of the speed of light using fast-beam laser spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 60(2) :81–84, 1988.
- [38] K. C. Turner and H. A. Hill. New experimental limit on velocity-dependent interactions of clocks and distant matter. *Phys. Rev.*, 134(1B) :B252–B256, Apr 1964.
- [39] G. Saathoff, S. Karpuk, U. Eisenbarth, G. Huber, S. Krohn, R. Munoz Horta, S. Reinhardt, D. Schwalm, A. Wolf, and G. Gwinner. Improved test of time dilation in special relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :190403, 2003.
- [40] K. S. Thorne and C. M. Will. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. i. foundations. *Astrophysical Journal*, 163 :595–610, 1971.
- [41] R. V. Pound and J. L. Snider. Effect of gravity on gamma radiation. *Physical Review*, 140 :788–803, 1965.
- [42] J. C. LoPresto, C. Schrader, and A. K. Pierce. Solar gravitational redshift from the infrared oxygen triplet. *Astrophys. J.*, 376 :757–760, 1991.
- [43] A. Bauch and S. Weyers. A new experimental limit on the validity of Local Position Invariance. *Phys. Rev. D*, 65 :081101, 2002.
- [44] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425 :374–376, September 2003.
- [45] A. Vecchiato, M. G. Lattanzi, B. Bucciarelli, M. Crosta, F. de Felice, and M. Gai. Testing general relativity by micro-arcsecond global astronomy. *Astronomy and Astrophysics*, 399 :337–342, 2003.
- [46] S.G. Turyshev, M. Shao, and K. Nordtvedt. Experimental design for the LATOR mission. *Int. J. Mod. Phys. D*, 13 :2035–2063, 2004.
- [47] S.G. Turyshev, M. Shao, and K. Nordtvedt. The laser astrometric test of relativity mission. *Class. Quantum Grav.*, 21 :2773–2799, 2004.
- [48] Thibault Damour, Federico Piazza, and Gabriele Veneziano. Runaway dilatation and equivalence principle violations. *Phys. Rev. Lett.*, 89(8) :081601, 2002.

- [49] M. C. Bento, O. Bertolami, and P. Torres. The electromagnetic coupling and the dark side of the universe. *Physic Letters B*, 648 :14, 2007.
- [50] A. Fienga, H. Manche, J. Laskar, and M. Gastineau. INPOP06 : a new numerical planetary ephemeris. *Astronomy and Astrophysics*, 477 :315–327, 2008.
- [51] C. M. Will. Is momentum conserved? A test in the binary system PSR 1913+16. *Astrophys. J. Lett.*, 393 :L59–L61, 1992.
- [52] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophysical Journal*, 195 :L51–L53, 1975.
- [53] J. M. Weisberg and J. H. Taylor. General relativistic geodetic spin precession in binary pulsar B1913+16 : Mapping the emission beam in two dimensions. *Astrophys. J.*, 576 :942–949, 2002.
- [54] K. S. Thorne and C. Cutler. An overview of gravitational wave sources. *Proceedings of 16th International Conference on General Relativity and Gravitation*, pages 72–112, 2002.
- [55] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269 :198, 1995.
- [56] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, M. J. Van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :39697, 1995.
- [57] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition. *Nature*, 403 :166–170, 2000.
- [58] Ph. Laurent, P. Lemonde, E. Simon, G. Santarelli, A. Clairon, N. Dimarcq, P. Petit, C. Audouin, and C. Salomon. A cold atom clock in absence of gravity. *European Physical Journal D*, 3 :201, 1999.
- [59] Ph. Laurent, M. Abgrall, Ch. Jentsch, P. Lemonde, A. Clairon G. Santarelli, I. Maksimovic, S. Bize, Ch. Salomon, D. Blonde, J. F. Vega, O. Grosjean, F. Picard, M. Saccoccio, M. Chaubet, N. Ladiette, L. Guillet, I. Zenone, Ch. Delaroche, and Ch. Sirmain. Design of the cold atom pharao space clock and initial test results. *Appl. Phys. B*, 84 :16, 2006.
- [60] B. Lounis, J. Reichel, and C. Salomon. Laser cooling of atoms in microgravity. *Comptes Rendus de l'Acadadémie des Sciences*, 316 :739–744, 1993.
- [61] S. Zivanov, H. Schweda, D. Goujon, D. Gritti, and G. Perruchoud. Physics package of the 35 kg space active hydrogen maser for the aces space mission of esa. In *Proceedings of the EFTF Conference*, 2007.

- [62] A. Seidel, M. P. Hess, J. Kehrler, W. Schafer, M. Kufner, M. Siccardi, L. Cacciapuoti, I. A. Sanches, and S. Feltham. The ACES microwave link : instrument design and test results. *Proceedings of the 2008 EFTF conference in Toulouse*, 2008.
- [63] Julien Legouët. *Etude des performances d'un gravimètre absolu à atomes froids : sensibilité limite et exactitude préliminaire*. Thèse de Doctorat, 2008.
- [64] Alexandre Gauguier. *Gyromètre à atomes froids : Etude de la stabilité limite et des effets systématiques liés aux séparatrices lasers*. Thèse de Doctorat, 2008.
- [65] F. X. Esnault, S. Perrin, D. Holleville, S. Guerandel, N. Dimarcq, and J. Delporte. Reaching a few $10^{-13} \cdot \tau^{-1/2}$ stability level with the compact cold atom clock horace. *Proceedings of the 2008 UFFC - IFCS meeting, Honolulu, USA*, 2008.
- [66] Luigi Cacciapuoti and Christophe Salomon. ACES : Mission concept and scientific objectives. *Technical Notice*, 2007.
- [67] C. Salomon and L. Cacciapuoti. ACES : Mission concept and scientific objectives. Technical report, ESA document, 58 pages, 2007.
- [68] Sascha Reinhardt, Guido Saathoff, Henrik Buhr, Lars A. Carlson, Andreas Wolf, Dirk Schwalm, Sergei Karpuk, Christian Novotny, Gerhard Huber, Marcus Zimmermann, Ronald Holzwarth, Thomas Udem, Theodor W. Hansch, and Gerald Gwinner. Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities. *Nat. Phys.*, 3(12) :861–864, 2007.
- [69] P. Sauli, P. Abry, J. Boska, and L. Duchayne. Wavelet characterization of ionospheric and gravity waves occurring during the solar eclipse of august 11th, 1999. *Journal of Atmospheric and solar-terrestrial physics*, 68 :586–598, 2006.
- [70] E. J. Fremouw and A. Ishimaru. Intensity scintillation index and mean apparent radar cross section on monostatic and bistatic paths. *Radio Science*, 27(4) :539–543, 1992.
- [71] A. J. Turner and B. A. Fannin. Analysis of ionospheric contributions to the Doppler shift of CW signals from artificial earth satellites. *Jour. Geophys. Rev.*, 73 :4325–4334, 1968.
- [72] G. O. Ajayi, A. Hedberg, and G. Hamberg. Accurate determination of ionospheric effects on satellite based positioning systems in terms of residual range error. *Radio Science*, 15 :1009–1016, 1980.

- [73] J. R. Clynych and B. A. Renfro. Evaluation of ionospheric residual range error model. *Proceedings of the third International Geodetic Symposium on satellite Doppler positioning*, 1 :113–134, 1982.
- [74] S. Bassiri and G. A. Hajj. Higher-order ionospheric effects on the global positioning system observables and means of modeling them. *Manuscripta Geodaetica*, 181 :280–289, 1993.
- [75] C. H. Papas. *Theory of Electromagnetic wave propagation*. McGraw-Hill, New-York, 1993.
- [76] H. Rishbeth and O. K. Garriott. Introduction to ionospheric physics. *Academic Press, New York, USA*, 1969.
- [77] G. K. Hartmann and R. Leitinger. Range errors due to ionospheric and tropospheric effects for signal frequencies above 100 MHz. *Bulletin Géodésique*, 58 :109–136, 1984.
- [78] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J. Collins. *GPS Theory and Practice, 3rd revised edition*. Springer, 1994.
- [79] V. B. Mendes. Modeling the neutral-atmosphere propagation delay in radiometric space techniques. *Thèse de Doctorat, University of New Brunswick*, 1999.
- [80] J. L. Davis, T. A. Herring, I. I. Shapiro, A. E. E. Rogers, and G. Elgered. Geodesy by radio interferometry : Effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length. *Radio Science*, 20 :1593–1607, 1985.
- [81] I. M. Ifadis. Space to earth techniques : Some considerations on the zenith wet path delay parameters. *Survey Review*, 32 :130–144, 1993.
- [82] T. A. Herring. Modeling atmospheric delays in the analysis of space geodetic data. *Refraction of transatmospheric signals in geodesy*, pages 157–164, 1992.
- [83] A. E. Niell. Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths. *Journal of Geophysical Research (B)*, 101 :3227–3246, 1996.
- [84] V. B. Mendes, E. C. Pavlis, G. Prates, D. E. Pavlis, and R. B. Langley. Improved mapping functions for atmospheric refraction correction in SLR. *Geophysical Research Letters*, 29 :1414, 2002.
- [85] D. Piester, A. Bauch, M. Fujieda, T. Gotoh, M. Aida, H. Maeno, M. Hosokawa, and S. H. Yang. Studies on instabilities in long-baseline two-way satellite time and frequency (TWSTFT) including a troposphere delay model. *Proc. 39th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Systems and Applications Meeting*, 2007.

- [86] Luc Blanchet, Christophe Salomon, Pierre Teyssandier, and Peter Wolf. Relativistic theory for time and frequency transfer to order c^{-3} . *Astronomy and Astrophysics*, 370 :320, 2001.
- [87] G. Cibiel, A. Proia, L. Yaigre, J.-F. Dutrey, A. de Latour, and J. Dantepal. Absolute-calibration of geodetic receivers for time-transfer : Electrical-delay measurements, uncertainties and sensitivities. *Proceedings of the 2008 EFTF Conference*, 2008.
- [88] G. Petit and P. Wolf. Relativistic theory for picosecond time transfer in the vicinity of the earth. *Astronomy and Astrophysics*, 286 :971, 1994.
- [89] Georges Sagnac. L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 157 :708–710, 1913.
- [90] John E. Prussing and Bruce A. Conway. *Orbital Mechanics*. Oxford University Press, 1993.
- [91] Laurent Chabriac. *Cours de Mathématiques en CPGE*. Saliège Press, 2002.
- [92] C. Le Poncin-Lafitte and S. B. Lambert. Transformation between the terrestrial and the celestial coordinate systems (note technique disponible sur <http://callisto.obspm.fr/lambert/trf2crf/>). 2007.
- [93] J. A. Barnes and D. W. Allan. Variances based on data with dead time between the measurements. *NIST Technical Note 1318*, pages 1–40, 1990.
- [94] H.-J. Euler and H. Landau. Fast GPS ambiguity resolution on-the-fly for real-time applications. *Proceedings of the 6th Int. Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, pages 650–659, 1992.
- [95] P. J. de Jonge and C. C. J. M. Tiberius. Integer ambiguity estimation with the LAMBDA method. *LGR-Series, Delft Geodetic Computing Centre*, 12, 1996.
- [96] J. D. Anderson, P. A. Laing, E. L. Lau, A. S. Liu, M. M. Nieto, and S. G. Turyshev. Study of the anomalous acceleration of pioneer 10 and 11. *Phys. Rev. D*, 65(8), 2002.
- [97] S. G. Turyshev, J. D. Anderson, P. A. Laing, E. L. Lau, A. S. Liu, and M. M. Nieto. The apparent anomalous, weak, long-range acceleration of Pioneer 10 and 11. *arXiv :gr-qc/9903024v2*, 1999.
- [98] J. D. Anderson, P. A. Laing, E. L. Lau, A. S. Liu, M. M. Nieto, and S. G. Turyshev. Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses data, of an apparent anomalous, weak, long-range acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 81(14) :2858–2861, 1998.

- [99] S. G. Turyshev, V. T. Toth, L. R. Kellogg, E. L. Lau, and K. J. Lee. The study of the Pioneer anomaly : New data and objectives for new investigation. *Int. J. Mod. Phys.*, D15 :1–56, 2006.
- [100] V.T. Toth and S.G. Turyshev. Pioneer anomaly : Evaluating newly recovered data. *arXiv :0710.2656*, 2004.
- [101] J. W. Armstrong, F. B. Estabrook, and H. D. Wahlquist. Search for sinusoidal gravitational radiation in the period range 30-2000 seconds. *Astrophysical Journal*, 318 :536, 1987.
- [102] J. D. Anderson and B. Mashoon. Pioneer 10 search for gravitational waves - limits on a possible isotropic cosmic background of radiation in the microhertz region. *Astrophysical Journal*, 290 :445–448, 1985.
- [103] J. W. Armstrong, L. Iess, P. Tortora, and B. Bertotti. Stochastic gravitational wave background : Upper limits in the 10^{-6} to 10^{-3} Hz band. *The Astrop. J.*, 599 :806, 2003.
- [104] A. Barucci, H. Boehnhardt, D. Cruikshank, and A. Morbidelli. The Kuiper belt. *Univ. of Arizona Press, in press*, 2007.
- [105] O. Bertolami and P. Vieira. Pioneer anomaly and the Kuiper belt mass distribution. *Classical and Quantum Gravity*, 23 :4625, 2006.
- [106] O. Bertolami and J. Páramos. A mission to test the Pioneer anomaly : estimating the main systematic effects. *Arxiv, gr-qc/0702149*, 2007.
- [107] G. M. Bernstein, D. E. Trilling, R. L. Allen, M. E. Brown, M. Holman, and R. Malhotra. The size distribution of trans-neptunian bodies. *The Astronomical Journal*, 128 :1364, 2004.
- [108] J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler, D. J. Healey, D. B. Leeson, T. E. McGunigal, J. A. Mullen, W. L. Smith, R. L. Sydnor, R. F. C. Vessot, and G. M. R. Winkler. Characterization of frequency stability. *IEEE Trans. Instr. Meas.*, 20 :105–120, 1971.
- [109] M. Van Camp, S. D. P. Williams, and O. Francis. Uncertainty of absolute gravity measurements. *Journal of Geophysical Research*, 110 :B05406, 2005.
- [110] International GNSS Service. <http://igs.cb.jpl.nasa.gov/>.
- [111] Kristine M. Larson, Andria Bilich, and Penina Axelrad. Improving the precision of high-rate GPS. *Journal of Geophysical Research*, 112 :B05422, 2007.
- [112] J. Ray, Z. Altamimi, X. Collilieux, and T. Van Dam. Anomalous harmonics in the spectra of GPS position estimates. *GPS Solutions*, DOI 10.1007/s10291-007- DOI 10.1007/s10291-007- DOI 10.1007/s10291-007-0067-7, 2007.

- [113] Simon D. P. Williams, Yehuda Bock, Peng Fang, Paul Jamason, Rosanne M. Nikolaidis, Linette Prawirodirdjo, Cecil H., Ida M. Green, Meghan Miller, and Daniel J. Johnson. Error analysis of continuous GPS position time series. *Journal of Geophysical Research*, 109 :B03412, 2004.
- [114] V. B. Mendes and E. C. Pavlis. High-accuracy zenith delay prediction at optical wavelengths. *Geoph. Res. Lett.*, 31 :L14602, 2004.
- [115] Athanasios Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill International editions, New York, 1977.
- [116] J. W. Armstrong. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, (disponible sur <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2006-1>), 2006.
- [117] V. M. Kaspi, J. H. Taylor, and M. F. Ryba. High-precision timing of millisecond pulsars. iii. long-term monitoring of PSRs B1855+09 and B1937+21. *Astroph. J.*, 428 :713, 1994.
- [118] I. H. Stairs. Testing general relativity with pulsar timing. *Living Reviews in Relativity*, (disponible sur <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-5>), 2003.
- [119] S. Reynaud and M.-T. Jaekel. Tests of general relativity in the solar system. In *Proceedings Varenna 2007*, volume disponible sur Arxiv :0801.3411, 2007.
- [120] M.-T. Jaekel and S. Reynaud. Gravitational quantum limit for length measurements. *Phys. Lett. A*, 185 :143, 1994.
- [121] M.-T. Jaekel and S. Reynaud. Quantum limits in space-time measurements. *Quantum Semiclass Opt.*, 7 :639, 1995.
- [122] B. Abbott (LIGO Collaboration). Searching for a stochastic background of gravitational waves with ligo. *Astrophys. J.*, 659 :918, 2007.
- [123] D. W. Allan, M. A. Weiss, and J. L. Jespersen. A frequency-domain view of time-domain characterization of clocks and time and frequency distribution systems. *45th Annual Symposium on Frequency Control*, pages 667–678, 1991.
- [124] Pierre Uhrich. Caractérisation de la stabilité en temps/fréquence. Application aux comparaisons d'horloges. *Cours "Relativité et Temps" du Master de Sciences de l'Univers et Technologies Spatiales " de l'Observatoire de Paris*, 2004.
- [125] D. B. Sullivan, D. W. Allan, D. A. Howe, and F. L. Walls. Characterization of clocks and oscillators. *NIST technical note 1337*.
- [126] François Vernotte. *Stabilité temporelle des oscillateurs : nouvelles variances, leurs propriétés, leurs applications*. Thèse de Doctorat, 1991.

-
- [127] D. A. Howe, D. W. Allan, and J. A. Barnes. Properties of signal sources and measurements. *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Frequency Control*, pages TN14–TN60, 1981.

Résumé

Les méthodes de transfert de temps actuelles atteignent des performances telles que leur utilisation permet de tester les lois de la Physique Fondamentale. Dans ce cadre, la mission ACES vise, entre autres, l'étude des effets de la Gravitation sur le battement des horloges à travers un lien de communication performant, le Lien Micro-Onde. Ce manuscrit se focalise sur la comparaison des horloges de cette mission pour en développer un modèle précis au dixième de picoseconde. De ce modèle découle un algorithme de traitement des mesures brutes qui servira lors de la mission. Des tests de programme ont été réalisés à l'aide d'une simulation des mesures de la mission afin d'en évaluer les performances. Par ailleurs, les besoins de la mission en précision de l'orbitographie des stations et des calibrations temporelles de la mission sont approfondis et montrent de limites moins contraignantes que celles naïvement estimées. Enfin, la résolution statistique des ambiguïtés de phase est étudiée à l'aide d'un modèle réaliste de bruit des mesures. Ce travail conduit à des méthodes permettant de réduire considérablement le taux d'échec de cette détermination. Ce travail s'ouvre sur l'étude du projet SAGAS et de son concept avancé de lien optique. Des combinaisons de mesures et leur optimisation permettent d'évaluer les performances du projet sur plusieurs de ses objectifs scientifiques, tels que l'exploration spatiale, les tests des lois de la Gravitation ou les ondes gravitationnelles.

Mots-clés

Transfert de temps, mission ACES, tests de Physique Fondamentale, Lien Micro-Onde, métrologie temps-fréquence, projet SAGAS.

Abstract

Nowadays, time transfer methods reach such high performances that it is actually possible to test fundamental laws of Physics with them. For instance, the ACES mission aims at studying the gravitational effects on clock frequency using a highly stable communication link, the MicroWave Link. Firstly, this thesis investigates time transfer model considering all terms greater than 0.1 ps . This model is necessary to compute the data analysis algorithm which will be used during the actual mission. For testing purposes, a simulation of the raw measurements of the mission is developed and allows to evaluate the performances of the data analysis algorithm. Moreover, we also study the requirements of the mission on orbitography and time calibrations. It leads to less constraining requirements than naively expected. This work also studies the resolution of phase ambiguity of the MicroWave Link and their successful determination statistics, and describes methods and observable combinations which reduce quantitatively these probabilities. Finally, this thesis investigates the SAGAS project and its advanced concept of optical link. The optimisation of observable combinations allows to evaluate the performances of several scientific goals of the project, such as space exploration, testing gravitational laws or constraining gravitational waves.

Key words

Time and frequency transfer, ACES mission, tests of Fundamental Physic, MicroWave Link, time and frequency metrology, SAGAS project.