



**HAL**  
open science

# Approches fondées sur des modèles énergétiques pour l'analyse formelle et la commande des systèmes non linéaires hybrides

Pierre-Yves Richard

► **To cite this version:**

Pierre-Yves Richard. Approches fondées sur des modèles énergétiques pour l'analyse formelle et la commande des systèmes non linéaires hybrides. Automatique / Robotique. Université Rennes 1, 2008. tel-00354180

**HAL Id: tel-00354180**

**<https://theses.hal.science/tel-00354180>**

Submitted on 19 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



À Maryse, et à nos enfants : Antoine, Xavier, Jean-Emmanuel et Anne-Cécile

## **PREAMBULE**

Ma recherche a débuté en 1994 dans le cadre d'une thèse CIFRE financée par le groupe automobile PSA Peugeot-Citroën, avec pour domaine d'application la mécatronique, et plus précisément le contrôle des vibrations. Le sujet de ma thèse était en effet centré sur l'étude de supports de moteur. Très applicatif au premier abord, il comportait à la fois un volet de modélisation et un volet de commande. Le volet de modélisation avait pour objet une classe spécifique de supports de moteur, complexes en raison de leur structure hétérogène qui combinait des effets à la fois mécaniques et hydrauliques. Le but du travail qui m'était proposé était d'en construire un modèle dynamique, dont la simulation numérique puisse se substituer au prototypage dans la phase de conception. Le volet de commande avait de son côté pour objectif la conception de nouveaux supports actifs à partir des structures passives existantes, en introduisant un mode d'actionnement et une commande électronique associée, ceci afin d'améliorer leurs performances antivibratoires. La contribution théorique de mon travail a, en réalité, essentiellement concerné les aspects de modélisation, que j'ai traités en m'inscrivant dans le contexte formel et conceptuel du bond graph. Mon apport personnel majeur a résidé dans une étude approfondie de la dualité entre localisation et répartition spatiale des phénomènes énergétiques, avec à la clé la définition de méthodologies génériques pour modéliser des milieux continus déformables (solides ou liquides) dans un environnement à paramètres localisés. La problématique de la commande a ensuite été envisagée d'un point de vue plus pratique, dans la perspective d'un développement technologique à court terme. Les travaux correspondants se sont concrétisés à la fin de ma thèse par la mise au point d'un prototype de support actif répondant de manière satisfaisante aux exigences techniques de son cahier des charges. Toutefois, sans grande originalité conceptuelle, ils ont davantage participé de l'ingénierie que de la recherche à proprement parler, illustrant une dichotomie entre aspects théoriques et applicatifs fréquente dans les thèses effectuées en entreprise. Globalement, outre l'expérience industrielle qu'elle m'a permis d'acquérir, ma thèse m'a avant tout fourni l'opportunité de développer une expertise de la modélisation par bond graph de systèmes complexes, qui a durablement influencé les orientations ultérieures de ma recherche. À l'issue de mes travaux doctoraux, désireux de poursuivre une carrière académique plutôt qu'industrielle, j'ai quitté PSA pour rejoindre mon laboratoire d'accueil à SUPELEC, et y occuper à partir de fin 1997 un poste d'enseignant-chercheur permanent. En 1998, la structure de l'école a changé sur les campus de province, les anciens services (dont celui d'automatique auquel j'appartenais) disparaissant au profit d'équipes de recherche. J'ai alors pour ma part intégré l'équipe ASCH (Automatique des Systèmes Continus et Hybrides) dirigée par le Professeur Jean Buisson, qui avait participé à l'encadrement de ma thèse. L'activité dominante de cette équipe, dont les autres membres partageaient avec moi une même culture d'origine, à savoir celle du génie électrique, était à cette époque la modélisation de connaissance par bond graph, avec pour champ d'application essentiel l'électronique de puissance. Toutefois, de manière un peu marginale par rapport au reste de l'équipe, mes activités de recherche dans le domaine de la mécatronique se sont poursuivies plusieurs années en collaboration avec mon précédent employeur, dans le cadre d'une relation contractuelle prolongée. À cette période, les objets de mes travaux se sont cependant diversifiés, tout en conservant une composante mécanique prépondérante. J'ai ainsi entrepris la modélisation d'autres dispositifs antivibratoires pour l'automobile tels que des batteurs actifs exploitant l'effet de balourd, mais également celle de systèmes de liaison au sol. Cette diversification s'est également traduite sur le plan théorique, avec l'émergence de problématiques nouvelles plus liées aux aspects non linéaires. Mais en parallèle avec cet ensemble de travaux, j'ai aussi progressivement investi la thématique fédératrice de l'équipe,

centrée autour de la modélisation par bond graph de systèmes à commutations, avec comme fondement essentiel le concept d'interrupteur idéal (à changement d'état instantané). Les contributions que j'y ai apportées, en collaboration plus étroite avec mes collègues, ont surtout concerné l'analyse formelle des modèles de tels systèmes. L'évolution de mes travaux a été plus marquée encore à partir de 2001, lorsqu'est intervenue une nouvelle réorganisation du campus, traduite par la fusion de l'équipe ASCH dont je faisais partie avec l'équipe SED (Systèmes à Événements discrets) dirigée par le Professeur Hervé Guéguen, pour constituer l'équipe ASH (Automatique des Systèmes hybrides). Cet événement a entraîné le rapprochement entre des chercheurs qui, bien que tous automaticiens, avaient jusqu'alors œuvré au sein de deux communautés différentes, l'une de culture continue et l'autre de culture discrète. Afin de rendre ce rapprochement effectif dans les travaux de recherche, un axe commun a été défini : celui des systèmes dynamiques hybrides, avec la mise en exergue d'un enjeu de contrôle-commande. Dans le prolongement des travaux relatifs à la modélisation des systèmes à commutations, j'ai alors abordé l'étude de leur commande, avec pour objectif méthodologique de définir des approches spécifiquement adaptées à leur caractère hybride. Ainsi, poussé par un intérêt personnel pour le non linéaire (en cohérence avec mes activités d'enseignement) et m'éloignant pour une fois du contexte bond graph, je me suis intéressé à la théorie du mode glissant. Mes travaux sur ce thème se sont concrétisés par le développement de stratégies originales de commande applicables de manière générique aux systèmes à entrées logiques. Ils ont été initiés dans le cadre d'une thèse que j'ai co-encadrée avec Jean Buisson et Hervé Cormerais, et je les ai ensuite poursuivis personnellement afin de rendre plus efficaces les approches proposées. Leurs résultats ont été appliqués à la commande des convertisseurs statiques de l'électronique de puissance, dont ils ont permis d'améliorer les performances, grâce à un pilotage direct des interrupteurs sans modulation de largeur d'impulsion. Tout en m'investissant de la sorte dans le domaine hybride, j'ai en partie conservé mes spécificités personnelles, et notamment une prédilection pour les systèmes à composante mécanique et pour les aspects non linéaires. Ceci m'a récemment conduit à m'intéresser au problème des non linéarités dures (causes de discontinuités comportementales) les plus couramment rencontrées en mécanique (frottements secs, jeux, etc.). M'inspirant des méthodologies de modélisation et d'analyse hybrides déjà développées dans l'équipe pour les systèmes à commutations du domaine électrique, je me suis attaché à les étendre au domaine mécanique. Enfin, parallèlement à ce volet d'activité consacré aux systèmes hybrides, je me suis engagé depuis 2004 dans une nouvelle voie de recherche à travers l'encadrement d'une thèse sur la modélisation du système cardiovasculaire, en cotutelle avec une équipe du LTSI (unité mixte de recherche INSERM 642). En effet, ayant déjà pu expérimenter la généralité de l'approche bond graph et son aptitude à la pluridisciplinarité dans le cadre de systèmes artificiels, il m'a semblé naturel de chercher à exploiter ces potentialités dans les domaines du vivant et de la santé, qui m'intéressaient par ailleurs à titre personnel. L'idée sous-jacente au sujet de cette thèse, qui s'est inscrite dans le contexte de la physiologie intégrative (modélisation de grands systèmes physiologiques par agrégation de connaissance, à des fins d'analyse clinique), était ainsi d'étendre au monde du vivant les techniques de modélisation issues de l'ingénierie classique. L'approche retenue a combiné plusieurs formalismes de représentation différents, parmi lesquels le bond graph a de nouveau occupé une place centrale, puisqu'il a permis à la fois la modélisation de la circulation sanguine (en localisant assez grossièrement les paramètres du réseau vasculaire), et celle du muscle cardiaque lui-même dans son activité mécanique (en tenant compte des interactions de type fluide-structure rencontrées au sein des ventricules, et avec le souci de traduire leurs déformations élastiques à un niveau local). La problématique de cette modélisation s'est finalement révélée assez proche de celle qui avait fait l'objet de ma propre thèse. Par voie de

conséquence, les résultats théoriques établis alors et les méthodologies de modélisation qui en avaient été déduites ont pu trouver un nouveau domaine d'application, moyennant quelques adaptations et développements spécifiques. Depuis 2007, je m'efforce de pérenniser l'axe biomédical ouvert par ces premiers travaux et de lui conférer un statut fédérateur pour une partie de l'équipe, en animant une réflexion autour de nouveaux projets centrés sur la santé et le vivant, dont je suis l'initiateur. D'ores et déjà, ce thème est affiché dans le projet scientifique de l'équipe, dont il représente l'une des perspectives prometteuses pour les années à venir. Il s'appuie sur les compétences de l'équipe en modélisation et commande de systèmes complexes, mais également sur des collaborations extérieures, notamment avec des médecins qui apportent leur expertise physiologique et clinique. Son enjeu sociétal est considérable, puisqu'il vise soit à améliorer la compréhension de mécanismes pathologiques à l'aide de modèles de connaissance (physiologie dite intégrative), soit à proposer de nouvelles thérapies à partir des concepts de contrôle-commande.

Outre les activités de recherche résumées plus haut, sur lesquelles le présent document se concentre comme il se doit en priorité, mon métier d'enseignant-chercheur comporte aussi bien évidemment une part importante d'enseignement, qui à SUPELEC présente la particularité de requérir une certaine polyvalence. Dans mon cas personnel, les diverses tâches d'enseignement correspondent peu ou prou à la moitié de mon volume d'activité. Par ailleurs, j'ai longtemps assumé des responsabilités en termes de représentation du personnel, aussi bien au niveau local du campus de Rennes qu'à celui de SUPELEC dans sa globalité. Ainsi, entre 2001 et 2006, ces activités d'intérêt général ont occupé entre 15 et 20% de mon temps.

Ce document est structuré de la manière suivante : après la présentation d'un curriculum vitae synthétique, un premier chapitre décrit mon parcours professionnel sous la forme d'un bilan essentiellement quantitatif de mes activités rubrique par rubrique (recherche, enseignement, responsabilités d'intérêt général). Puis un deuxième chapitre s'intéresse de façon plus détaillée à mes activités de recherche, caractérisées dans leurs objets et domaines d'application par une relative variété, mais dont la logique générale tient à une unité d'approche que ce chapitre s'efforce de mettre en évidence. Je m'attache d'une part à y dégager les grandes articulations de mes travaux, et d'autre part à les resituer dans le contexte de la communauté scientifique. Ce deuxième chapitre revient en conclusion sur les perspectives envisagées pour la poursuite de mes travaux. Enfin, j'ai joint en annexe trois articles dont je suis l'auteur principal. L'un d'entre eux a fait l'objet d'une présentation dans une conférence IFAC mondiale, tandis que les deux autres ont été publiés dans la revue *Nonlinear Analysis*. Ces publications ont été choisies dans la mesure où les travaux dont elles font état comptent parmi mes contributions les plus personnelles. Le lecteur pourra au besoin s'y reporter pour les détails techniques des méthodologies décrites dans le reste du document, qui le sont sur un mode plus général, au niveau des principes.



## **Curriculum Vitae**

### **1. Présentation du candidat**

Nom : RICHARD  
Prénom : Pierre-Yves  
Date de naissance : 31 juillet 1968  
Situation familiale : marié, 4 enfants  
Fonction : Professeur Adjoint à SUPELEC  
Établissement : SUPELEC – Campus de Rennes  
Équipe : ASH (Automatique des Systèmes Hybrides), groupe Automatique & Communication de l’IETR, UMR CNRS 6164

### **2. Formation**

1994-1997 Thèse de Doctorat à l’Université de Rennes 1, mention traitement du signal et communication, soutenue le 19 septembre 1997  
1989-1992 Diplôme d’ingénieur de SUPELEC, obtenu en juin 1992  
1986-1989 Classes Préparatoires (Math Sup, Math Spé option P’) au Lycée Chateaubriand (Rennes)  
1986 Baccalauréat Série C (mention TB)

### **3. Évolution professionnelle**

Depuis le 01/01/2004 Professeur adjoint à SUPELEC  
Du 01/12/1997 au 31/12/2003 Professeur assistant à SUPELEC  
Du 01/11/1994 au 31/10/1997 Ingénieur de recherche chez PSA Peugeot-Citroën  
Du 01/01/1994 au 31/10/1994 Ingénieur-Enseignant à SUPELEC  
Du 01/09/1993 au 31/12/1993 Maître auxiliaire dans l’enseignement secondaire  
Du 01/08/1992 au 31/07/1993 Scientifique du Contingent à l’ESEAT

### **4. Bilan de la production scientifique**

- 1 chapitre d’ouvrage
- 10 articles de revues internationales avec comité de lecture + 1 en cours d’évaluation
- 2 articles de revues nationales avec comité de lecture
- 1 dépôt de brevet + 1 dépôt de logiciel
- 27 communications dans des congrès internationaux avec comité de lecture et actes
- 4 communications dans des conférences nationales

### **5. Bilan des activités de recherche**

- 10 coopérations industrielles (PSA, Sagem, Michelin, Sogitec, Sercel, CF Gomma, Schneider)
- 3 co-encadrements de thèses, dont 2 soutenues
- Participation à 1 jury de thèse
- 2 encadrements de stages de master

- Évaluation d'articles pour 2 revues internationales et 1 congrès IFAC
- Participation au Comité d'organisation de la conférence ADHS 2003, parrainée par l'IFAC.
- Participation à l'AS 192 (Systèmes Dynamiques Hybrides et Convertisseurs Statiques)
- Participation au Réseau Européen d'Excellence HyCon

**6. Bilan des activités d'enseignement** (en heures vraies)

**Tronc commun (1<sup>ère</sup> et 2<sup>nde</sup> années) à SUPELEC**

- Cours magistral (18h/an)
- Travaux dirigés (30h/an)
- Travaux de laboratoire (81h/an)
- Projets (30h/an)

**Spécialisation (3<sup>ème</sup> année) à SUPELEC**

- Cours magistral (12h/an)
- Travaux dirigés (7,5h/an)
- Travaux de laboratoire (45h/an)
- Études (entre 20 et 40h/an)

**7. Responsabilités d'intérêt général**

- Secrétaire du Comité d'Établissement de SUPELEC de 2001 à 2006 (environ 220h/an)

## **CHAPITRE 1 : PRESENTATION DETAILLEE DE MON PARCOURS PROFESSIONNEL**

### ***1. État civil***

Nom : RICHARD  
Prénom : Pierre-Yves  
Date et lieu de naissance : 31 juillet 1968, à Guérande (44)  
Nationalité : Française  
Situation familiale : marié, 4 enfants  
Fonction : Professeur Adjoint à SUPELEC  
Discipline : Automatique  
Établissement : SUPELEC – Campus de Rennes  
Équipe : ASH (Automatique des Systèmes Hybrides), groupe Automatique & Communication de l'IETR, UMR CNRS 6164

### ***2. Formation***

1994-1997 Thèse de Doctorat à l'Université de Rennes 1, mention traitement du signal et communication, soutenue le 19 septembre 1997  
Titre : Application des bond graphs au calcul du modèle dynamique et au pilotage des supports de moteur hydro-élastiques  
Directeur de thèse : Yves Quéneec'hdu  
Composition du jury : G. Dauphin-Tangy (Pr, EC Lille, rapporteur), S. Scavarda (Pr, INSA Lyon, rapporteur), Y. Quéneec'hdu (Pr, SUPELEC Rennes), A. Rault (PSA), G. Vezzosi (Pr, Univ. Rennes 1, Président), M. Corraza (Pr, ENSSAT).  
Mention : Très honorable

1989-1992 Diplôme d'ingénieur de SUPELEC, obtenu en juin 1992

1986-1989 Classes Préparatoires (Math Sup, Math Spé option P') au Lycée Chateaubriand (Rennes)

1986 Baccalauréat Série C (mention TB)

### **3. *Évolution professionnelle***

- Depuis le 01/01/2004            Professeur adjoint à SUPELEC
- Du 01/12/1997 au 31/12/2003   Professeur assistant à SUPELEC
- Du 01/11/1994 au 31/10/1997   Ingénieur de recherche à la DMEI (Direction des Méthodes et Équipements Industriels) du groupe PSA Peugeot-Citroën
- Du 01/01/1994 au 31/10/1994   Ingénieur-Enseignant à SUPELEC
- Du 01/09/1993 au 31/12/1993   Maître auxiliaire dans l'enseignement secondaire, chargé de cours de mathématiques
- Du 01/08/1992 au 31/07/1993   Scientifique du Contingent, chargé de cours magistraux à l'ESEAT (École Supérieure d'Électronique de l'Armée de Terre)

### **4. *Production scientifique***

#### **4.1. *Chapitres d'ouvrages***

- [O1]    P.Y. RICHARD, « Application du C.E.S. à la commande d'une soufflerie d'air chaud », Chapitre 6 de l'ouvrage *Contrôle d'état standard*, (P. de Larminat, Editions Hermès), pp. 73-101, 2000.

#### **4.2. *Articles de revues internationales avec comité de lecture***

Dix articles de revues internationales avec comité de lecture, dont cinq publiés et cinq acceptés en attente de publication (plus un article soumis en 2006, en cours de relecture, pour le *Journal of the Franklin Institute*) :

- [RI1]    V. LE ROLLE, A. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, P. PIBAROT, L.G. DURAND, G. CARRAULT, « A tissue-level electromechanical model of the left ventricle: application to the analysis of intraventricular pressure », *Acta Biotheoretica* (accepté pour publication).
- [RI2]    P.Y. RICHARD, M. MORARESCU, J. BUISSON, « Bond graph modelling of hard nonlinearities in mechanics: a hybrid approach », *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* (2008), doi.org/10.1016/j.nahs.2008.03.002.
- [RI3]    V. LE ROLLE, A. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, G. CARRAULT, « An autonomic nervous system model applied to the analysis of orthostatic tests », *Modelling and Simulation in Engineering* (accepté pour publication).
- [RI4]    H. CORMERAIS, J. BUISSON, P.Y. RICHARD, C. MORVAN, « Modeling and passivity based control of switched systems from bond graph formalism: application to

multicellular converters », *Journal of the Franklin Institute* (accepté pour publication).

- [RI5] V. LE ROLLE, A. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, E. DONAL, G. CARRAULT, « Model-based analysis of myocardial strain data acquired by Tissue Doppler Imaging », *Artificial Intelligence in Medicine* (accepté pour publication).
- [RI6] P.Y. RICHARD, H. CORMERAIS, J. BUISSON, « A generic design methodology for Boolean sliding mode control of affine switched systems in the multivariable case », *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 65, pp. 1751-1772, 2006.
- [RI7] V. LE ROLLE, A. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, J. BUISSON, G. CARRAULT, « A bond graph model of the cardiovascular system for the analysis of the autonomic nervous system activity », *Acta Biotheoretica* , vol. 53, pp. 295-312, 2005.
- [RI8] J. BUISSON, H. CORMERAIS, P.Y. RICHARD. « Analysis of the bond graph model of hybrid physical systems with ideal switches », *Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 216, pp. 47-72, 2002.
- [RI9] J. BUISSON, H. CORMERAIS, P.Y. RICHARD, « Using Trees to Build Non Singular Bond Graphs from Electric Circuit Graphs », *Journal of the Franklin Institute*, vol. 337, N° 5, pp. 543-554, 2000.
- [RI10] P.Y. RICHARD, J. BUISSON, Y. QUENEC'H DU, « Modelling and simulation of engine suspension units », *Systems Analysis Modelling and Simulation*, vol. 29, pp. 219-236, 1997.

#### **4.3. Articles de revues internationales en cours d'expertise**

- [EC1] V. LE ROLLE, P.Y. RICHARD, A. HERNANDEZ, J. BUISSON, G. CARRAULT, « Bond graph model of mechano-hydraulic systems: application to the left ventricle », *Journal of the Franklin Institute* (soumis en 2006).

#### **4.4. Articles de revues nationales avec comité de lecture**

- [RN1] V. LE ROLLE, A.I. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, J. BUISSON, G. CARRAULT, « Modélisation du système cardiovasculaire à base de bond graph », *Ingénierie et recherche biomédicales (ITBM-RBM)*, vol. 26, N°4, pp. 243-246, 2005.
- [RN2] V. LE ROLLE, A.I. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, J. BUISSON, G. CARRAULT, « Modélisation bond graph du système cardiovasculaire pour l'étude du système nerveux autonome », *Ingénierie et recherche biomédicales (ITBM-RBM)*, vol. 26, N°5-6, pp. 333-343, 2005.

#### **4.5. Dépôt de brevet**

Un dépôt de brevet dans le cadre de la thèse de Frédéric Mangonneaux :

- [B1] demande de brevet N° 0853443, 2008

#### 4.6. *Dépôt de logiciel*

Un dépôt de logiciel dans le cadre de la thèse de Virginie Le Rolle :

- [L1] logiciel CARDIA, 2007  
n°IDDN : IDDN.FR.001.060010.000.S.P.2007.000.20900.

#### 4.7. *Conférences internationales avec comité de lecture et actes*

- [CI1] P.Y. RICHARD, M. MORARESCU, J. BUISSON, « Approche bond graph hybride pour la modélisation de non linéarités dures en mécanique », *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'08, Bucarest, Roumanie, 3-5 septembre 2008)*.
- [CI2] V. LE ROLLE, A.I. HERNÁNDEZ, P.Y. RICHARD, G. CARRAULT, « A tissue-level electromechanical model of the left ventricle: Application to the analysis of intraventricular pressure », *Computers in Cardiology* (Durham, North Carolina, October 2007, pp. 669-672).
- [CI3] V. LE ROLLE, A.I. HERNÁNDEZ, P.Y. RICHARD, E. DONAL, G. CARRAULT, « A tissue-level model of the left ventricle for the analysis of regional myocardial function », *29th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, (EMBS'07, Lyon, France, August 2007, Proceedings on DVD-ROM, 4 pages)*.
- [CI4] V. LE ROLLE, , P.Y. RICHARD, A.I. HERNANDEZ, G. CARRAULT, J. BUISSON, « A Model of the ventricular activity using bond graphs », *6<sup>th</sup> IFAC Symposium on Modelling and Control in Biomedical Systems, (SMCBS'05, Reims, France, September 2006, pp. 525-530)*.
- [CI5] P.Y. RICHARD, H. CORMERAIS, C. MORVAN, J. BUISSON, « Boolean Sliding Mode Control of Multilevel Power Converters », *16th IFAC World Congress* (Prague, July 2005, Proceedings on DVD-ROM, 6 pages).
- [CI6] V. LE ROLLE, P.Y. RICHARD, A. HERNANDEZ, G. CARRAULT, J. BUISSON, « A Model of the cardiovascular system using bond graphs », *16th IFAC World Congress*, (Prague, July 2005, Proceedings on DVD-ROM, 6 pages).
- [CI7] H. CORMERAIS, , P.Y. RICHARD, C. MORVAN, J. BUISSON, « A Generic Passivity Based Control for Multicellular Serial Converters », *16th IFAC World Congress* (Prague, July 2005, Proceedings on DVD-ROM, 6 pages).
- [CI8] J. BUISSON, P.Y. RICHARD, H. CORMERAIS, « On the Stabilisation of Switching Electrical Power Converters », *8<sup>th</sup> International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC'05, M. Morari and L. Thiele Eds., 2005, pp.184-198)*.
- [CI9] P.Y. RICHARD, , C. MORVAN, H. CORMERAIS, J. BUISSON, « Continuous versus discrete approaches in sliding mode control of switching systems with boolean Inputs modeled in bond graph », *International Conference on Integrated Modeling &*

- Analysis in Applied Control & Automation (IMAACA'04, Genoa, Italy, October 2004, pp. 13-20).*
- [CI10] H. CORMERAIS, P.Y. RICHARD, C. MORVAN, J. BUISSON, « Notion of commutation cells for the modelling of hybrid systems using ideal switch representation », *International Conference on Integrated Modeling & Analysis in Applied Control & Automation (IMAACA'04, Genoa, Italy, October 2004, pp. 21-28).*
- [CI11] C. MORVAN, H. CORMERAIS, P.Y. RICHARD, J. BUISSON, « Sliding mode control of switching systems with boolean inputs », *6th IFAC symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'04, Stuttgart, Germany, September 2004, pp. 747-752).*
- [CI12] C. MORVAN, , H. CORMERAIS, P.Y. RICHARD, J. BUISSON, « Extending passivity based control to DAE systems with boolean inputs », *6th IFAC symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'04, Stuttgart, Germany, September 2004, pp. 375-380).*
- [CI13] P.Y. RICHARD, C. MORVAN, J. BUISSON, H. CORMERAIS, « Sliding Mode Control of Hybrid Systems Modeled using Bond Graph with Ideal Switches », *6<sup>th</sup> International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'03, Orlando, Florida, January 2003, vol. 35, N°2, pp. 175-181).*
- [CI14] C. MORVAN, H. CORMERAIS, J. BUISSON, P.Y. RICHARD, « Bond Graph formalism and Linear Complementarity Problem for hybrid systems with ideal diodes », *IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'03, Saint Malo, France, April 2003, pp. 247-252).*
- [CI15] C. MORVAN, H. CORMERAIS, J. BUISSON, P.Y. RICHARD, « Deriving Asymptotic Stability of Linear Switching Physical Systems from Analysis of Bond-Graph Observability », *IMACS Multiconference in Computational Engineering in Systems Applications (CESA'03, Lille, France, 2003, Proceedings on CD-ROM, 6 pages).*
- [CI16] P.Y. RICHARD, H. CORMERAIS, J. BUISSON, « Analysis of Flatness using Bond Graphs and Bicausality », *15<sup>th</sup> IFAC World Congress on Automatic Control (Barcelona, Spain, July 2002, Proceedings on CD-ROM 6 pages).*
- [CI17] H. CORMERAIS, J. BUISSON, P.Y. RICHARD, Y. PICHON, « Optimal Torque Control of a Synchronous Machine », *15<sup>th</sup> IFAC World Congress on Automatic Control (Barcelona, Spain, July 2002, Proceedings on CD-ROM 6 pages).*
- [CI18] H. CORMERAIS, J. BUISSON, P.Y. RICHARD, S. LEYRENS, « Calcul symbolique de l'ensemble des équations d'état pour les bond graphs en commutation », *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'02, Nantes, France, July 2002, pp. 382-387).*
- [CI19] J. BUISSON, P.Y. RICHARD, H. CORMERAIS, « Formally Computing the State Equations for Available Configurations of Bond Graphs with Switches », *5<sup>th</sup> International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'01, vol. 33, N°1, Phoenix, January 2001, pp. 211-216).*

- [CI20] J. BUISSON, H. CORMERAIS, P.Y. RICHARD, « Bond Graph Modeling of Power Converters with Switches Commutating by Pairs », *5<sup>th</sup> International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'01)*, Phoenix, January 2001, pp. 179-184).
- [CI21] P.Y. RICHARD, C. RAMUS-SERMENT, J. BUISSON, X. MOREAU, M. LE FOL, « Generalized analysis method of engine suspensions based on bond graph modeling and feedback control theory », *2<sup>nd</sup> International Conference on Mathematics and Computers in Mechanical Engineering (MCME'2000)*, Vouliagmeni, July 2000, pp. 355-362).
- [CI22] C. RAMUS-SERMENT, X. MOREAU, M. LE FOL, P.Y. RICHARD, M. NOUILLANT, « Méthodes d'analyse et de synthèse d'un support hydro-élastique pour la suspension des groupes motopropulseurs », *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'2000)*, Lille, July 2000, pp. 299-305).
- [CI23] P.Y. RICHARD, J. BUISSON, « Geometrical constraints in hydro-mechanical bond graphs – Illustration with the simulation model of an active engine mount », *1<sup>st</sup> IFAC Conference on Mechatronic Systems* (Darmstadt, September 2000, 7 pages).
- [CI24] J. BUISSON, P.Y. RICHARD, H. CORMERAIS, « Ideal versus non-ideal approaches in bond graph modeling of switching devices: a comparison based on singular perturbation theory », *4th International Conference on Automation of Mixed Processes: hybrid dynamic systems (ADPM'2000)*, Dortmund, September 2000, pp. 257-264).
- [CI25] P.Y. RICHARD, J. BUISSON, « Dealing with geometrical constraints in mechanical bond graphs with elastic connections », *3<sup>rd</sup> IMACS/IEEE Multiconference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC'99)*, Athens, July 1999, 6 pages).
- [CI26] P.Y. RICHARD, J. BUISSON, « Using finite elements principles for bond graph modelling of continuous systems », *3<sup>rd</sup> International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'97)*, Phoenix, January 1997, vol. 29, N° 1, pp. 123-128).
- [CI27] P.Y. RICHARD, J. BORELY, J. BUISSON, Y. QUENEC'HDU, « Modelling of Engine Suspension Units », *CESA'96* (CESA'96, Lille, July 1996, vol. 1, pp. 178-183).

#### **4.8. Conférences nationales**

- [CN1] V. LE ROLLE, A.I. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, G. CARRAULT, « Analyse à base de modèles des déformations régionales du ventricule gauche à partir des mesures par échographie Doppler tissulaire », *28<sup>e</sup> séminaire de la Société Francophone de Biologie Théorique* (Winnipeg, 2007). Prix René Thom.
- [CN2] V. LE ROLLE, P.Y. RICHARD, A.I. HERNANDEZ, J. BUISSON, G. CARRAULT, « Modélisation bond graph du système cardiovasculaire », *JDMACS* (Lyon, 2005, 6 pages).

- [CN3] V. LE ROLLE, A.I. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, J. BUISSON, G. CARRAULT, « Modélisation bond graph du système cardiovasculaire pour l'étude du système nerveux autonome », *26<sup>e</sup> séminaire de la Société Francophone de Biologie Théorique*, (Saint Flour, 2005).
- [CN4] V. LE ROLLE, A.I. HERNANDEZ, P.Y. RICHARD, J. BUISSON, G. CARRAULT, « Modélisation du système cardiovasculaire à base de bond graph », *FRGBM* (Nancy, 2005, pp.114-115). Premier prix poster parmi 92 communications.

#### **4.9. Rapports de contrats industriels**

- [RC1] P.Y. RICHARD, « Etude de l'amélioration d'éléments antivibratoires par modélisation et utilisation de systèmes de pilotage à commandes électriques », *Rapport de contrat CF Gomma N° PEBT0001*, décembre 1998.
- [RC2] P.Y. RICHARD, « Automatisation d'une extrudeuse », *Avenant au rapport de contrat CF Gomma N° PEBT0001*, décembre 1999.
- [RC3] P.Y. RICHARD, « Etude de l'amélioration d'éléments antivibratoires par modélisation et utilisation de systèmes de pilotage à commandes électriques », *Rapport de contrat CF Gomma N° PEBT0001*, mars 2000.
- [RC4] P.Y. RICHARD, « Prédiction du comportement dynamique d'éléments antivibratoires par modélisation et simulation », *Rapport de contrat CF Gomma N° PEBT0001*, juillet 2001.

### **5. Autres activités de recherche**

#### **5.1. Encadrement de thèses**

- Co-encadrement de la thèse de Cécile Morvan, soutenue le 28 septembre 2004 à l'Université de Rennes I (mention très honorable)

Sujet : Analyse et commande des systèmes physiques à commutations en électronique de puissance

Directeur : Jean Buisson 40%

Co-encadrant : Hervé Cormerais 40%

Co-encadrant Pierre-Yves Richard 20%

Composition du Jury : C. Iung (Pr, Univ. Nancy, rapporteur), A. Rahmani (MdC, HdR, EC Lille, rapporteur), G. Faucon (Pr, Univ. Rennes 1, Président), J. Buisson (Pr, SUPELEC, Directeur), H. Cormerais (MdC, SUPELEC, Co-Enc.), J.P. Le Baron (PR, INSA Rennes)

Au-delà d'un l'état de l'art sur l'analyse et la commande des systèmes à commutations, l'apport personnel des travaux de Cécile Morvan a concerné d'une part l'étude de la stabilité de tels systèmes (à partir de critères structurels), et d'autre part leur commande à travers deux types d'approches : la passivation et le mode glissant. Mon taux d'encadrement théorique, dont la faiblesse tient à un investissement à la fois plus tardif et

moins officiel dans la thèse par rapport aux deux encadrants principaux, reflète toutefois insuffisamment l'importance des travaux effectifs réalisés sous ma conduite, qu'attestent une dizaine de publications communes, et qui ont directement fourni l'un des trois chapitres originaux du mémoire de thèse final (relatif à la commande par mode glissant).

- Co-encadrement de la thèse de Virginie Le Rolle, soutenue le 08 décembre 2006 à l'Université de Rennes I (mention très honorable)

Sujet : Modélisation multiformalisme du système cardiovasculaire associant bond graph, équations différentielles et modèles discrets

Directeur : Jean Buisson 15%

Co-directeur : Guy Carrault 15%

Co-encadrant : Pierre-Yves Richard 35%

Co-encadrant : Alfredo Hernandez 35%

Composition du Jury : G. Dauphin-Tangy (Pr, EC Lille, rapporteur), R. Thomas (DR CNRS, rapporteur), J. Demongeot (Pr, Univ. J. Fourier, Grenoble, Président), G. Carrault (Pr, Univ. Rennes 1, Co-Dir), J. Buisson (Pr, Supélec Rennes, Co-Dir.), A. Hernandez (CR, INSERM, Co-Enc.), PY. Richard (MdC, Supélec, Co-Enc.)

Là encore, les pourcentages indiqués doivent être pondérés par une distinction entre direction de thèse et encadrement rapproché. Leur relative dilution tient à la multiplicité des encadrants, qui elle-même s'explique par la nature du sujet traité, à la frontière entre les deux domaines très différents que sont la physiologie et l'automatique. J'ai quant à moi assuré l'encadrement rapproché de Virginie Le Rolle pour la partie automatique, et notamment pour tous les aspects liés à la modélisation par bond graph.

- Co-encadrement de la thèse de Frédéric Mangonneaux, démarrée en décembre 2006 (CIFRE PSA)

Sujet : Architecture d'actionnement et de commande générique d'un ensemble d'ouvrants pilotés pour l'automobile garantissant la sécurité des utilisateurs

Directeur : Hervé Guéguen 50%

Co-encadrant : Pierre-Yves Richard 50%

Cette thèse étant réalisée en milieu industriel sous convention CIFRE, les travaux associés sont assujettis aux contraintes de propriété industrielle, et aux règles de confidentialité d'usage. Les premiers résultats ont fait l'objet d'une rédaction de brevet actuellement en attente de dépôt. Leur diffusion dans la communauté scientifique ne pourra s'envisager qu'ultérieurement. L'encadrement académique s'effectue à l'occasion de semaines bloquées que Frédéric Mangonneaux vient passer au laboratoire à raison d'une fois tous les deux mois environ. S'y ajoutent des points d'avancement formels d'une journée en présence de son encadrement industriel, avec la même périodicité.

## 5.2. *Autres encadrements*

Deux encadrements de stagiaires (DEA/Master) :

- Encadrement du stage de DEA d'Abdelkarim Kartit, sur la commande par mode glissant de systèmes à commutations, de mars à juillet 2004

- Encadrement du stage de master de Mihai Morarescu, sur la modélisation par bond graphs hybrides des non-linéarités dures en mécanique de mars à juillet 2007

### **5.3. *Évaluation d'articles pour des revues et conférences internationales***

- Journal of the Franklin Institute
- Revue internationale de Génie électrique
- IFAC world congress, 2008
- CIFA 2008 (conférence internationale francophone d'automatique)

### **5.4. *Activités nationales***

- Collaboration avec le LAPS, dans le cadre de la thèse de Caroline Ramus-Serment, soutenue le 10 Juillet 2001 à Bordeaux

Sujet : Synthèse d'un isolateur vibratoire d'ordre non entier fondée sur une architecture arborescente d'éléments viscoélastiques quasi-identiques

Composition du Jury :

G. Dauphin-Tangy (Pr, EC Lille, rapporteur et Président), L. Jezequel (Pr, EC Lyon, rapporteur), D. Camon (Ing., DRIA PSA), V. Abadie (Dr et Ing., DRIA PSA), A. Oustaloup (Pr, ENSEIRB, Co-Dir.), M. Nouillant (Pr, Univ. Bordeaux 1, Co-Dir. ), X. Moreau (MdC, Univ. Bordeaux 1, Co-Enc. )

Travaux en commun concrétisés par la rédaction de deux articles, en 2000.

- Participation au Comité d'organisation de la conférence *Analysis and Design of Hybrid Systems* (ADHS 2003, Saint-Malo) parrainée par l'IFAC.
- Participation à l'AS 192 en 2003-2004 : Systèmes Dynamiques Hybrides et Convertisseurs Statiques.
- Participation à un jury de thèse co-encadrée

Soutenance de Virginie Le Rolle, le 08 décembre 2006

Composition du Jury :

G. Dauphin-Tangy (Pr, EC Lille, rapporteur), R. Thomas (DR CNRS, rapporteur), J. Demongeot (Pr, Univ. J. Fourier, Grenoble, Président), G. Carrault (Pr, Univ. Rennes 1, Co-Dir), J. Buisson (Pr, Supélec Rennes, Co-Dir.), A. Hernandez (CR, INSERM, Co-Enc.), PY. Richard (MdC, Supélec, Co-Enc.).

### **5.5. *Activités internationales***

- Contribution à des travaux en lien avec le Réseau Européen d'Excellence HyCon :
  - WordPackage WP4a on Energy Management : travaux sur la commande d'un convertisseur multiniveaux en 2006
  - WordPackage WP4c on Automotive Control : travaux en lien avec l'ETH Zürich (Thomas Besselmann) dans le cadre d'un benchmark sur la commande d'un entraînement mécanique avec jeu en 2007

## 6. Activités d'enseignement

Les volumes horaires annuels sont exprimés en heures vraies.

### 6.1. Tronc commun (1<sup>ère</sup> et 2<sup>nde</sup> années) à SUPELEC

#### Cours magistral

- Principes et méthodes de commande des entraînements électriques à vitesse variable (18h/an)

Contribution à la création, et responsabilité sur le campus de Rennes depuis 2003, de ce cours de tronc commun inédit de deuxième année, qui associe plusieurs disciplines techniques (automatique, mécanique, électronique de puissance) autour d'une application d'intérêt industriel : la variation de vitesse. Le cours est complété par des travaux de laboratoire, dont les maquettes pédagogiques ont également été conçues et développées sous ma responsabilité. Je viens de surcroît d'être nommé titulaire de ce même cours, sous une forme pédagogique spécifique, pour la toute nouvelle filière de formation par l'apprentissage ouverte à SUPELEC, sur le campus de Gif-sur-Yvette, à la rentrée de septembre 2008 (33h/an).

#### Travaux dirigés

- Statistiques pour l'ingénieur (6h/an) depuis 1998
- Électronique analogique (6h/an) depuis 1998
- Méthodes numériques et optimisation (6h/an) depuis 2003
- Représentation aléatoire des signaux (6h/an) depuis 2005
- Entraînements électriques à vitesse variable (6h/an) depuis 2003

#### Travaux de laboratoire

- Électrotechnique et électronique de puissance (27h/an) depuis 2007
- Automatique (36h/an) depuis 1998
- Entraînements électriques à vitesse variable (18h/an) depuis 2003

#### Projets

- Encadrement de 3 ou 4 binômes ou trinômes d'élèves chaque année pour des projets de conception sur des sujets divers, dont voici à titre d'exemple une liste non exhaustive :
  - Poursuite de cible mobile par caméra
  - Commande d'un convertisseur « Boost »
  - Émulation de décodeur sous SIMULINK pour la mesure de position
  - Commande floue d'un pendule inverse
  - Guidage d'un robot manipulateur
  - Pilotage d'une grue
  - Conception et mise en œuvre d'une chaîne de contrôle-commande numérique

## **6.2. Spécialisation (3<sup>ème</sup> année) à SUPELEC**

### Cours magistral

- Analyse et commande des systèmes non linéaires (12h/an)

Responsabilité depuis 2000 de ce cours de spécialisation (option de troisième année Ingénierie des Systèmes Automatisés).

### Travaux dirigés

Ces travaux dirigés s'adressent aux élèves de l'option ISA du campus de Rennes pour les premiers, à ceux de l'option ACS (Automatique et Conception de Systèmes) du campus de Gif-sur-Yvette pour le dernier.

- Systèmes non linéaires (6h/an) depuis 2000
- Modélisation (1,5h/an) depuis 2006

### Travaux de laboratoire

- Commande multivariable et asservissements à relais (45h/an)

### Études

- Encadrement d'une étude soit interne soit sous convention industrielle chaque année

Les études industrielles seront décrites dans la rubrique suivante, consacrée à la recherche contractuelle. De manière assez similaire, les études internes sont réalisées par un binôme ou un trinôme d'élèves sur une durée de trois mois, mais sans impliquer de partenariat industriel. Parmi celles dont j'ai assuré la responsabilité, je citerai à titre d'exemple :

- Automatisation des manœuvres d'un attelage automobile
- Commande sécurisée d'un pont roulant
- Guidage automatique d'un véhicule sans direction
- Traitement du diabète en boucle fermée

## **7. Activités de recherche contractuelles et relations industrielles**

Sont ici répertoriées mes missions en relation avec l'industrie, et de façon plus détaillée mes actions de recherche menées dans un cadre contractuel avec des partenaires industriels. :

- Correspondant de SUPELEC dans le pôle de compétitivité « Automobile haut de gamme » depuis 2005
- Réalisation et/ou encadrement de diverses études contractuelles

Le bilan chiffré de ces actions fait ressortir dix coopérations industrielles. Je me suis moi-même chargé du travail de recherche pour certaines d'entre elles, notamment les plus anciennes (entre 1997 et 2000). Je me suis investi dans les autres en tant qu'encadrant d'étudiants, dans le contexte de conventions d'étude industrielle. Ces conventions sont une formule propre à SUPELEC, à travers laquelle un groupe d'élèves ingénieurs (entre 3 et 4) en fin de cursus traite un problème de recherche proposé par un partenaire industriel, sous la responsabilité d'un enseignant-chercheur de l'école. Le travail dure en général trois mois.

**Convention d'Etude Industrielle PSA**

« Étude du modèle de commande d'une vitre électrique avec détection d'obstacle » (2005-2006, 3 mois)

**Convention d'Etude Industrielle Sagem**

« Modélisation par bond graph d'un capteur vibrant et de son électronique de proximité » (2004-2005, 3 mois)

**Convention d'Etude Industrielle Michelin**

« Régulation de pression sur lignes d'extrusion » (2003-2004, 3 mois)

**Convention d'Etude Industrielle Sogitec**

« Optimisation de la commande d'un moteur pas à pas » (2002-2003, 3 mois)

**Convention d'Etude Industrielle Sercel**

« Commande de camion vibreur » (2001-2002, 3 mois)

**Convention d'Etude Industrielle CF GOMMA**

« Automatisation d'une extrudeuse » (1999-2000, 3 mois)

**Convention d'Etude Industrielle Schneider**

« Identification en ligne des paramètres d'un moteur » (1997-1998, 3 mois)

**Contrats industriels CF GOMMA (1997-2000)**

- Suspension de moteurs (12 hommes\*mois)
- Liaison au sol (4 hommes\*mois)
- Extrusion (1 homme\*mois)

**8. Activités d'intérêt général**

- Secrétaire du Comité d'Établissement du campus de Rennes de SUPELEC d'avril 2001 à avril 2007 (représentant du campus au Comité de Direction de l'École et aux réunions de négociations annuelles obligatoires).
- Secrétaire de la Commission chargée de suivre le contrat de Prévoyance pour l'ensemble de SUPELEC de 2002 à 2007.
- Participation annuelle aux jurys de passage de deuxième en troisième année
- Participation aux jurys d'admission sur titres en première et deuxième années
- Participation à l'encadrement des épreuves du concours Centrale-Supelec

## **CHAPITRE 2 : APPROCHES FONDEES SUR DES MODELES ENERGETIQUES POUR L'ANALYSE FORMELLE ET LA COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES HYBRIDES**

### ***1. Introduction***

Depuis 14 ans environ, mes activités de recherche ont concerné la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Ma conception personnelle du modèle comme un instrument non seulement de prédiction mais aussi et surtout d'explication des comportements réels m'a conduit à privilégier les formes de représentation dites de connaissance, capables de rendre compte explicitement des lois physiques qui régissent les systèmes. Par ailleurs, ma recherche a constamment été animée par un souci de généralité dans les approches méthodologiques, bien qu'elle se soit également caractérisée par une grande diversité d'objets. C'est pourquoi ma pratique de la modélisation s'est appuyée sur le choix du bond graph. Cet outil fournit en effet une solution au problème de la modélisation des systèmes pluritechnologiques à travers une approche unifiée basée sur le point de vue de l'énergie. Il se caractérise par un formalisme unique qui représente graphiquement les phénomènes énergétiques élémentaires mis en jeu au sein des systèmes dynamiques, à savoir la production, l'échange, le stockage et la dissipation d'énergie, indépendamment de leurs domaines d'appartenance physique [38], [39]. Ainsi, il permet de décrire le comportement de systèmes physiquement hétérogènes à l'aide de modèles formellement homogènes, et conservant une intelligibilité physique. Guidé à l'origine par des considérations d'ordre utilitaire (les qualités intrinsèques mentionnées plus haut rendant cet outil particulièrement adapté à la problématique de mon sujet de thèse), le choix du bond graph s'est révélé fondamental à l'égard des orientations ultérieures de ma recherche. Dès mes travaux de thèse, j'ai pu mesurer l'étendue de ses potentialités et entrevoir les nombreuses perspectives qu'il pouvait m'ouvrir. En effet, bien plus qu'un simple mode de représentation d'équations différentielles parmi tant d'autres (dont certains bénéficient sans doute d'une lisibilité plus immédiate), j'y ai immédiatement vu un véritable cadre méthodologique non seulement pour la modélisation mais aussi pour l'analyse de la dynamique des systèmes physiques. L'expertise spécifique que j'ai peu à peu développée autour de ce que j'appellerais l'approche bond graph au sens large a tout d'abord profondément structuré ma façon d'aborder les problèmes de modélisation. Ainsi, j'ai pu expérimenter la puissance des analogies interdisciplinaires et l'exploiter en diversifiant les champs d'application de ma recherche tout en conservant une unité dans l'approche méthodologique. Les domaines que j'ai abordés sont variés puisqu'ils vont de la mécanique au vivant en passant par l'électronique de puissance. Au travers de mes contributions dans ces domaines, je me suis essentiellement efforcé d'élargir le champ de validité de l'approche bond graph à de nouvelles classes de systèmes complexes. Les principales formes de complexité auxquelles je me suis intéressé, en m'attachant à développer des démarches de modélisation génériques adaptées à chacune d'entre elles, partagent pour la plupart un caractère hybride, ce qualificatif étant compris dans une acception large qui recouvre trois aspects différents : le couplage entre plusieurs domaines de la physique (pluridisciplinarité), entre des paramètres localisés et répartis, entre des dynamiques continues et des événements discrets (notion de commutation).

En complément de ce premier volet d'activités dédié à la synthèse de modèles énergétiques, et dans son prolongement logique, j'ai orienté une partie importante de mes travaux vers l'analyse formelle de tels modèles. Pour ce faire, je me suis à nouveau appuyé sur l'approche

bond graph, en tirant cette fois profit de son aptitude à permettre l'analyse des modèles à travers l'application de démarches systématiques. Mes activités dans ce domaine ont à la fois consisté à étendre certaines méthodologies d'analyse existantes applicables aux modèles en bond graph, et à en développer de nouvelles. Les méthodologies auxquelles je me suis intéressé peuvent se ranger en deux catégories, en fonction de la nature de leur objectif. Les premières visent à générer, à partir de modèles en bond graph, d'autres types de représentations dynamiques telles que des formes d'état dans le domaine temporel ou des fonctions de transfert dans le domaine symbolique. L'un des enjeux, dans ce contexte, est notamment d'explicitier des modèles initialement implicites, pour faciliter leur simulation et rendre possible l'utilisation de solveurs standards. Par contraste, l'autre catégorie de méthodes d'analyse vise moins à transformer les modèles en bond graph qu'à les exploiter directement afin de mettre en évidence certaines propriétés structurelles des systèmes dynamiques qu'ils représentent. Dans l'un et l'autre cas, les développements ont été réalisés avec un souci constant de généralité (afin que les méthodes puissent être appliquées à une large classe d'objets) et de systématisme (garante de leur possible automatisation au travers d'un outil logiciel). À l'intérieur de ce volet consacré à l'analyse formelle, une place centrale a été accordée aux modèles de systèmes à commutations. Cette thématique particulière inscrit en effet les travaux correspondants dans l'axe des systèmes dynamiques hybrides propre à l'équipe, et sur lequel s'est construite sa reconnaissance académique (le qualificatif d'hybride étant ici pris dans un sens plus restrictif qui fait référence à la seule dualité entre dynamiques à temps continu et événementielles).

Le troisième et dernier grand volet de mes activités de recherche est consacré à la commande. Il vient ainsi à son tour en complément naturel des deux précédents. Cependant, à la différence de ces derniers, il a fait l'objet de développements théoriques décorrélés du bond graph. En effet, j'ai choisi de l'aborder essentiellement à travers une approche fondée sur le concept de mode glissant, issu du non linéaire, en raison du caractère hybride intrinsèque de cette notion. Bien qu'à base de modèle, une telle approche ne s'appuie explicitement sur aucune propriété spécifique des représentations de type bond graph, même si, dans de nombreux cas d'application concrets, les modèles requis pour la synthèse effective des lois de commande ont pu être initialement établis à l'aide de ce formalisme. Elle suppose simplement le cadre très général d'une représentation d'état. L'originalité de ma démarche a consisté à envisager la commande par mode glissant, principe bien connu et largement mis en œuvre dans de nombreuses applications, dans le contexte spécifique des systèmes à entrées logiques (dont les systèmes à commutations sont un cas particulier). Les stratégies courantes de commande par mode glissant conduisant à des lois continues par morceaux, j'ai entrepris d'en développer de nouvelles qui fournissent des lois binaires, de telle sorte que ces lois puissent être directement appliquées aux systèmes à entrées logiques, au lieu d'être approchées en moyenne par le biais d'une modulation de largeur d'impulsion (MLI) comme le sont nécessairement des lois continues par morceaux.

Les trois grands axes thématiques complémentaires mentionnés précédemment, autour desquels ma recherche s'est articulée, sont de surcroît traversés par une problématique récurrente : le non linéaire. Cette problématique est intervenue avec une intensité croissante au fil de mes activités. Au départ, je l'ai abordée de manière un peu contingente dans le cadre de la modélisation, me trouvant de fait confronté à des systèmes qui impliquaient des phénomènes non linéaires (déjà pendant ma thèse, puis surtout dans les travaux qui l'ont prolongée). Plus tard, je m'y suis intéressé de manière plus spécifique et délibérée, à un moment où mes travaux se sont davantage orientés vers les aspects d'analyse, puis de commande. Il n'est du reste pas anodin de noter que l'évolution de ma recherche dans ce sens

s'est opérée en cohérence avec un investissement personnel dans l'enseignement. Ainsi, j'ai repris en 2000 la responsabilité d'un cours d'automatique non linéaire (analyse et commande) jusqu'alors dispensé par mon ancien Directeur de thèse Yves Quénechdu. Cette convergence de mes activités de recherche et d'enseignement autour des problèmes de non linéarités a favorisé leur fertilisation mutuelle. Mes contributions dans le domaine non linéaire peuvent se répartir en deux catégories. L'une d'elles concerne l'analyse de propriétés structurelles des systèmes non linéaires, comme la platitude différentielle, abordées sous l'angle du bond graph. Chaque fois que cela s'est révélé possible, je me suis efforcé de développer des démarches méthodologiques pour une telle analyse en exploitant les potentialités de ce formalisme. L'autre catégorie de travaux relatifs au non linéaire concerne la commande. Deux méthodologies de commande non linéaire ont ainsi été proposées, dans la perspective de leur application aux systèmes à commutations. La première, déjà mentionnée plus haut, est fondée sur le principe du mode glissant. J'en ai personnellement été l'initiateur. Mais à titre secondaire, j'ai également contribué, en collaboration avec Hervé Cormerais, à l'étude d'une deuxième approche basée sur la notion physique de passivité [RI4].

Dans la suite du chapitre, les trois axes directeurs de mes travaux mentionnés précédemment sont décrits plus en détail, avec les différentes sous-thématiques qu'ils incluent. Enfin, une dernière partie est consacrée aux orientations que je compte donner à ma recherche dans les années à venir.

## ***2. Synthèse de modèles énergétiques de systèmes complexes***

L'objectif général de cet axe est de définir des méthodologies permettant la construction de modèles énergétiques de type bond graph, sans préjuger de leur destination ultérieure (simulation numérique, analyse de propriétés, commande, ...). De telles méthodologies ont bien sûr déjà été proposées dans les cas simples, et ceci dès l'apparition du bond graph. Quelques ouvrages de référence en présentent la description, [20], [38], [39], [40]. Elles se déclinent en plusieurs variantes selon le domaine de la physique considéré (électricité, mécanique, etc.). Cependant, à l'intérieur de chaque domaine, leur champ d'application est le plus souvent restreint aux systèmes dont la modélisation pourrait être effectuée sans difficulté à l'aide d'un formalisme de représentation plus conventionnel lié au domaine. Je me suis quant à moi plus spécifiquement intéressé à des classes de systèmes dont la modélisation pose en soi des difficultés théoriques (indépendamment même du formalisme de représentation retenu). Mes travaux se sont ainsi concentrés sur la prise en compte de formes particulières de complexité auxquelles les méthodes usuelles de modélisation ne fournissaient pas de solution.

### ***2.1. Couplage entre phénomènes à localisation discrète et à répartition continue dans l'espace***

Dans la modélisation dynamique des phénomènes physiques, on peut distinguer les approches à paramètres répartis (ou distribués), traduites mathématiquement par des équations aux dérivées partielles, et les approches à paramètres localisés, traduites plus simplement par des équations différentielles ordinaires. Les premières s'intéressent aux lois locales qui régissent les phénomènes considérés (on peut par exemple penser aux équations de Maxwell en électromagnétisme), et les grandeurs qu'elles manipulent sont des champs de variables, qui évoluent à la fois avec le temps et l'espace. Les secondes s'intéressent en revanche à des lois plus globales, généralement obtenues par intégration spatiale des précédentes dans des conditions et sous des hypothèses spécifiques (lois de Kirchoff en électricité, pour prolonger l'exemple), et les grandeurs qu'elles manipulent se réduisent à des variables standards dont

l'évolution ne dépend que du temps. Le mode de passage des lois locales aux lois globales montre que les approches à paramètres localisés correspondent à un degré d'abstraction supérieur en termes de modélisation. Toutefois, le choix de l'une ou l'autre forme d'approche n'est pas seulement affaire de degré d'abstraction. Il dépend également de la nature des systèmes à modéliser. Ainsi, si de nombreux systèmes relevant de l'électricité, de la mécanique ou de l'hydraulique se prêtent légitimement à une modélisation fondée sur la localisation de leurs paramètres, il n'en va pas de même des milieux continus déformables rencontrés aussi bien en mécanique des structures qu'en mécanique des fluides. En effet, le comportement de tels systèmes peut présenter des singularités locales dont seul un modèle à paramètres répartis est capable de rendre compte.

Les divers outils et formalismes de modélisation existants sont en général plutôt adaptés à l'une ou l'autre de ces deux approches. Ainsi le bond graph, sur lequel se sont fondés tous mes travaux de modélisation, est par nature même un formalisme de description de modèles à paramètres localisés, puisque les représentations graphiques qu'il fournit ne sont en mesure de traduire que des équations différentielles ordinaires. Il ne convient donc a priori pas directement à la modélisation dynamique des milieux continus, pour laquelle il existe par ailleurs des approches spécifiques telles que la méthode des éléments finis, basée sur une discrétisation spatiale du continuum (connue sous le nom de maillage). Le choix d'un mode de représentation devient cependant délicat en présence de systèmes complexes qui combinent dans leur structure même des parties constituées de milieux continus déformables, dont l'analyse régionale nécessite a priori un modèle à paramètres répartis, et d'autres parties naturellement organisées en composants bien identifiés, ou simplement observées avec une échelle spatiale plus macroscopique, pour lesquelles un tel degré de complexité est en revanche inutile. Cette difficulté s'est manifestée à diverses reprises dans les systèmes à dominante mécanique ou hydraulique auxquels mes recherches m'ont confronté. Leur dynamique faisant interagir certaines grandeurs dont les variations spatiales sont notables avec certaines autres dont les variations spatiales sont négligeables, de tels systèmes peuvent être qualifiés d'hybrides au sens spatial du terme. Leur modélisation pose alors le problème théorique général de la prise en compte de milieux continus dans un environnement à paramètres localisés (et plus spécifiquement dans le cadre méthodologique du bond graph).

J'ai personnellement choisi deux voies différentes pour traiter cette problématique. La première s'est directement intéressée à la modélisation des dynamiques de milieux continus déformables au moyen du formalisme bond graph. Cette voie, qui vise à étendre le champ d'application naturel du bond graph, a déjà été explorée à travers un certain nombre de travaux passés. Son enjeu est de permettre la description comportementale d'un continuum avec une précision suffisante, c'est-à-dire en rendant compte d'évolutions locales distinctes, tout en maîtrisant la taille du modèle (et donc sa complexité). Parmi les principales approches disponibles dans la littérature, on peut citer celle des modes finis, issue notamment des travaux de D. Margolis [48]. Basée sur une analyse modale des lois du milieu continu à modéliser, elle fournit des représentations en bond graph de structure générique, faciles à coupler avec d'autres modèles grâce à une interface clairement définie, et dont la complexité est en outre aisément modulable par troncature fréquentielle. Toutefois, son application est réservée aux seuls systèmes linéaires. Une autre approche possible, inspirée de divers travaux dont ceux de J. Granda [31], se base sur une discrétisation spatiale des lois continues du milieu par la méthode des différences finies. Cette méthode concurrente s'avère moins restrictive que la précédente quant à son champ d'application, puisqu'elle reste valide en présence de non linéarités. Elle conduit de surcroît à des modèles dont l'interprétation physique est plus intuitive. Toutefois, la procédure de construction du bond graph perd son

caractère systématique et la généricité structurelle des modèles obtenus disparaît également, rendant au total la démarche de modélisation plus complexe, en particulier lorsque la dimension du problème augmente. Devant les limitations des méthodes existantes ainsi mises en évidence, et étant moi-même confronté à des problèmes à la fois multidimensionnels et non linéaires, j'ai été amené à développer une nouvelle approche, permettant le passage systématique d'un modèle classique de continuum obtenu par la méthode des éléments finis à un modèle bond graph. Pour ce faire, je me suis situé dans le prolongement des travaux de Pelegay, Doblare et Buil [13], [58], que j'ai approfondis sur un certain nombre de points. La démarche que j'ai proposée est centrée autour de la définition d'un sous-modèle bond graph élémentaire traduisant de manière générique la dynamique d'un élément de découpage du milieu continu à modéliser, au moyen de multiports inertiels, capacitifs et résistifs. Un tel sous-modèle est représenté sur la figure 1.

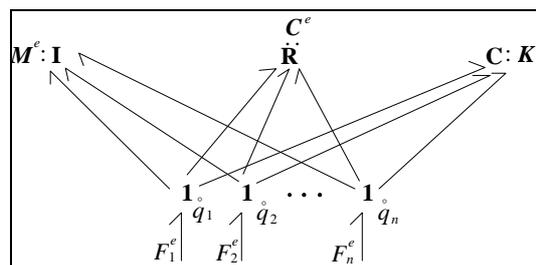


Fig. 1 : Sous-modèle bond graph générique d'un élément fini du continuum

Sans trop entrer dans les détails, le champ inertiels traduit la matrice de masse de l'élément modélisé, le champ capacitif sa matrice de raideur et le champ résistif sa matrice d'amortissement (ces notions propres à la mécanique étant directement transposables dans le domaine des fluides). Les jonctions de type 1 qui constituent l'interface du modèle élémentaire sont associées aux composantes de vitesse des nœuds de l'élément, sur lesquels des actions extérieures peuvent s'exercer. À partir de cette représentation générique, je me suis spécifiquement intéressé au problème de la construction d'un modèle complet de continuum. Ce problème n'est pas trivial, bien que sa résolution s'appuie essentiellement sur l'assemblage de modèles élémentaires en vertu de la modularité intrinsèque du formalisme bond graph. En effet, une telle opération d'assemblage fait surgir un problème de cohérence globale dans la mesure où les matrices de masse, de raideur et d'amortissement qui caractérisent un élément individuel sont en général calculées par rapport à un système de coordonnées locales. Les jonctions de type 1 de la figure 1 représentent ainsi les vitesses nodales dans les coordonnées locales propres à l'élément modélisé (différentes de celles des éléments voisins). La solution que j'ai proposée pour modéliser une structure continue déformable dans son intégralité repose sur l'introduction de jonctions de type 1 supplémentaires, qualifiées de jonctions d'interface, qui représentent chaque composante de vitesse nodale au sein de la structure continue de manière unique en coordonnées globales. Naturellement, chacune de ces jonctions d'interface doit être connectée à toutes les jonctions associées au même nœud matériel dans les différents sous-modèles élémentaires. Une telle connexion est réalisable par l'intermédiaire de transformateurs modulés traduisant les changements de base entre coordonnées globales et locales. Ainsi, toute action physique exercée localement sur la structure (contrainte sur un ou plusieurs nœuds) peut être directement traduite sur le modèle bond graph en contraignant la ou les jonctions d'interface associées (à l'exclusion de toute autre modification du modèle). Par ailleurs, j'ai démontré que les éléments à ports multiples utilisés pour décrire sous une forme compacte le comportement dynamique du continuum au niveau élémentaire pouvaient, sous certaines conditions techniques, être développés moyennant l'introduction de transformateurs,

fournissant ainsi des représentations en bond graph de forme plus standard, à base d'éléments terminaux à port de puissance unique. Testée sur des exemples simples (géométries très régulières ne nécessitant pas de découpage spatial trop fin, analyses en dimension réduite), la démarche de modélisation précédente a prouvé son efficacité. À degré de discrétisation spatiale identique, j'ai montré qu'elle offrait notamment une précision de résultats très comparable à celle des méthodes concurrentes mentionnées plus haut [CI26]. Dans des cas plus complexes, dès lors qu'une précision suffisante est recherchée, la finesse de maillage requise conduit toutefois rapidement à des modèles d'ordre très élevé. En pratique, il devient alors nécessaire d'utiliser comme préalable à la modélisation bond graph un code de calcul par éléments finis, qui fournisse un accès explicite aux matrices caractéristiques (inertie, raideur et amortissement) de chaque élément de découpage. De surcroît, un problème de taille se pose face au modèle global issu de l'assemblage, mais il existe des solutions pour le traiter. Ainsi, le recours aux techniques de réduction de modèle par approche modale, inspirées à nouveau des travaux de D. Margolis [46], peut être proposé comme l'un des moyens de rendre ce modèle véritablement exploitable. Finalement, la supériorité de mon approche réside surtout dans une insensibilité de son principe à la dimensionnalité des problèmes, la prise en compte de plusieurs dimensions d'espace ne modifiant en rien la démarche méthodologique à appliquer.

La seconde voie examinée en vue de rapprocher les deux points de vue de modélisation cités plus haut a été l'étude d'un couplage direct entre le bond graph et la méthode des éléments finis (plutôt qu'une traduction d'un formalisme à l'autre). Cette nouvelle solution repose sur l'idée de modéliser séparément chacune des sous-parties d'un système comportant à la fois des aspects continus et discrets (au sens spatial) au moyen de l'outil le mieux adapté à sa nature propre : le bond graph pour la sous-partie à paramètres localisés, régie par des lois différentielles ordinaires, et la méthode des éléments finis pour la sous-partie à paramètres distribués, régie par des équations aux dérivées partielles. On obtient alors un modèle global à caractère hybride (au sens où il est composé de sous-modèles basés sur des formalismes différents), dont la viabilité est conditionnée par l'aptitude des deux types de représentations utilisées à communiquer entre elles de manière cohérente. C'est pourquoi mes efforts ont principalement porté sur la définition d'un protocole de communication ad hoc. Celui auquel ils ont finalement abouti se fonde sur la transmission mutuelle des variables d'effort et de flux qui caractérisent les échanges de puissance à l'interface entre les deux sous-modèles de natures différentes. La notion de causalité opératoire, concept fondamental pour l'analyse en bond graph, a été exploitée pour spécifier les variables d'entrée et de sortie propres à chaque sous-modèle au niveau de leur interface commune. Concrètement, la solution retenue a été l'utilisation conjointe d'une source modulée par l'une des variables de puissance et d'un capteur de la variable de puissance duale, au niveau de chaque échange de puissance identifié entre un port du sous modèle bond graph et le groupe de nœuds du modèle par éléments finis avec lequel il se trouve en interaction directe, conformément au schéma de principe de la figure 2, où deux situations sont possibles en fonction de l'orientation causale.

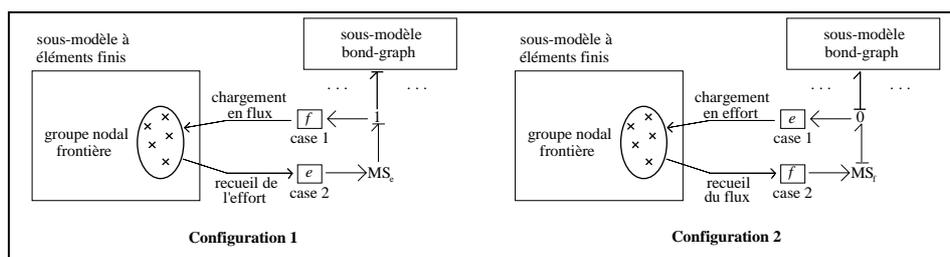


Fig. 2 : Principe du couplage entre bond graph et éléments finis

La mise en œuvre de cette approche sur des exemples concrets suppose bien entendu l'utilisation d'outils adaptés, en particulier un environnement commun au sein duquel des modules respectifs de modélisation par bond graph et de maillage par éléments finis puissent coexister. Elle exige de surcroît que le code de calcul par éléments finis travaille réellement en dynamique, autrement dit qu'il opère une intégration temporelle des lois du comportement plutôt qu'une simple analyse modale (comme c'est le cas pour un certain nombre de logiciels du marché). En l'absence d'outil de modélisation existant qui satisfasse à ces critères à l'époque où l'approche a été formalisée, seuls des développements spécifiques auraient pu fournir une solution pratique à sa mise en œuvre. Toutefois, n'ayant pas eu le loisir d'entreprendre de tels développements compte tenu des orientations ultérieures de mes activités de recherche, je me suis limité à définir cette approche dans son principe. C'est néanmoins à ce niveau de principe que réside l'intérêt majeur de cette deuxième approche, dans la mesure où elle constitue avant tout une ouverture sur la notion de multiformalisme.

Les méthodologies de modélisation ainsi étudiées sur le plan théorique ont trouvé des champs d'application très différents à travers la mécatronique d'une part et la physiologie intégrative d'autre part. En effet, leur utilisation a d'abord été envisagée pour traiter le cas des supports de moteur hydro-élastiques dans le cadre de ma thèse. Ces dispositifs antivibratoires, dont la structure hétérogène est schématisée sur la figure 3, relèvent à la fois de la mécanique et de l'hydraulique. Leur complexité comportementale tient essentiellement aux déformations tridimensionnelles de leur corps en matériau élastomère, régies par une loi d'élasticité non linéaire, ainsi qu'à l'écoulement de fluide également non linéaire qui en résulte entre les deux chambres que le corps renferme.

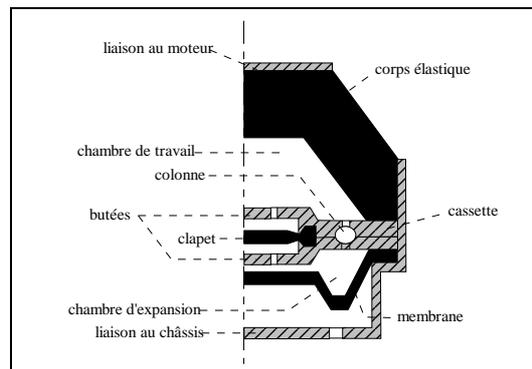


Fig. 3 : Schéma en demi-coupe d'un support hydro-élastique passif

Les deux approches décrites précédemment, que l'on peut qualifier de structurelles dans la mesure où elles cherchent à rendre compte de la structure des milieux continus, ont fait l'objet d'une étude de faisabilité approfondie sur le corps élastique de ces supports de moteur. Cette étude a mis en évidence la nécessité cruciale d'outils logiciels adéquats pour leur mise en œuvre effective, laquelle est restée inachevée faute de tels outils à disposition. Toutefois, malgré l'inaboutissement de leur mise en œuvre, ces deux approches, qui ont constitué la contribution la plus originale de ma thèse sur le plan théorique, ont montré leur intérêt pour la synthèse de modèles de simulation susceptibles de rendre compte de comportements dynamiques avec des particularités locales, notamment dans les cas multidimensionnels. Elles peuvent s'avérer particulièrement utiles lorsqu'une analyse par région est requise. En revanche, indépendamment même de l'existence d'outils logiciels qui les implémentent, elles se sont révélées au terme de l'étude peu adaptées à la détermination de modèles de commande, qui requièrent une plus grande simplicité formelle, et donc un degré d'abstraction supérieur des phénomènes modélisés. Devant ce constat, un certain réalisme à l'égard de l'objectif de commande de mon sujet de thèse m'a amené à abandonner la perspective de

modélisation initiale pour finalement mettre en œuvre une stratégie purement fonctionnelle, qui réduit les composantes à paramètres distribués du système (en l'occurrence le corps des supports hydro-élastiques et le volume de fluide qu'il renferme) à la fonction macroscopique qu'elles assurent vis-à-vis de leur environnement (raideur amortie dans le cas du corps, par exemple). De la sorte, tous les phénomènes dynamiques mis en jeu dans le système à modéliser sont d'emblée globalisés et localisés spatialement. Inutile de préciser que la représentation obtenue est également plus approximative, et en tous cas qu'elle n'autorise pas le même niveau de détail dans l'analyse. Dans une telle perspective, la construction du modèle bond graph passe par une démarche classique qui n'appelle pas de commentaire particulier, si ce n'est que l'identification de certains de ses paramètres – ceux qui caractérisent macroscopiquement le comportement des sous-parties assimilables à des milieux continus – nécessite le recours au calcul par éléments finis en régime statique (la stationnarité desdits paramètres étant admise). Ainsi, les caractéristiques géométriques du système sont-elles tout de même implicitement prises en compte dans le modèle, quoique sous une forme très globale.

Cependant, les idées développées dans le cadre des deux premières approches théoriques ont été reprises et exploitées quelques années plus tard, à l'occasion d'une thèse que j'ai co-encadrée sur la modélisation du système cardiovasculaire [43]. Ce passage de la mécatronique au vivant, s'il a impliqué un changement complet de contexte applicatif et l'abord d'une culture nouvelle, a néanmoins obéi à une logique de continuité sur le plan de la problématique scientifique. En effet, dans un système physiologique tel que le système cardiovasculaire, des phénomènes essentiellement mécaniques et hydrauliques sont identifiables au niveau organique. De plus, le cœur, qui assume au sein de ce système une fonction essentielle, présente dans sa structure même une analogie évidente avec les suspensions de moteurs objets de ma thèse, puisque ses ventricules sont constitués de tissus musculaires élastiques, qui délimitent des cavités déformables remplies de sang. Sa modélisation dans l'environnement du réseau vasculaire fait donc ressurgir à l'identique la question du couplage entre représentations à paramètres répartis et localisés dans les domaines de la mécanique et de l'hydraulique. L'originalité de la thèse effectuée par Virginie Le Rolle entre 2003 et 2006 a été de développer un modèle global du système cardiovasculaire incluant à la fois l'activité cardiaque dans ses dimensions électro-chimique, mécanique et hémodynamique, la circulation sanguine et les régulations assurées par le système nerveux autonome, comme l'illustre la figure 4, alors que les travaux antérieurs, bien que fort nombreux dans ce domaine, s'étaient pour la plupart focalisés sur un aspect particulier du système cardiovasculaire sans en rechercher une véritable vision d'ensemble.

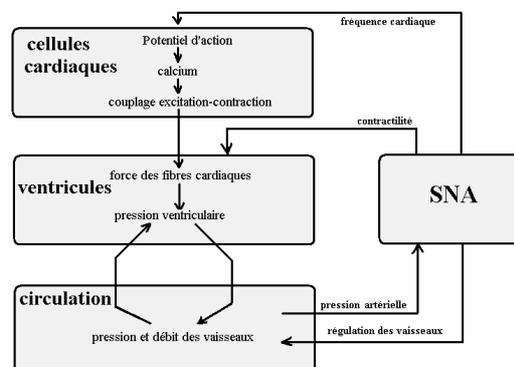


Fig. 4 : structure globale du modèle de système cardiovasculaire

La réalisation de ce projet a nécessité le recours à des formalismes de modélisation multiples, certains continus et d'autres discrets, dans la mesure où les divers sous-systèmes physiologiques intégrés au modèle ont été définis à des échelles spatio-temporelles différentes suivant les besoins en termes d'analyse. L'objectif général des travaux était en effet de construire à travers ce modèle un outil modulable d'aide au diagnostic clinique par l'interprétation de signaux physiologiques tels que la fréquence cardiaque ou la pression artérielle, dont on espérait pouvoir caractériser en simulation la sensibilité à certaines pathologies. De manière assez naturelle, le formalisme bond graph a été retenu pour la modélisation de la circulation sanguine et de l'activité ventriculaire du cœur, en association avec des automates cellulaires pour la description de l'activité électrique des cellules cardiaques et de sa propagation, ainsi qu'avec des modèles fréquentiels (fonctions de transfert) destinées à traduire l'action régulatrice du système nerveux autonome. Ainsi, l'idée de multiformalisme que j'avais initialement explorée dans le cadre restrictif du bond graph et de la méthode des éléments finis a été revisitée et élargie, pour devenir l'une des idées maîtresses de la thèse de Virginie Le Rolle. Concernant les aspects bond graph, la modélisation de la circulation sanguine a été proposée à différents degrés de résolution, dont certains très globaux et d'autres reposant sur une distinction entre les zones corporelles (parties hautes, médianes et basses par exemple), mais dans tous les cas, l'hypothèse de localisation des paramètres a pu être adoptée, aucune véritable analyse locale de l'écoulement sanguin n'étant requise. En revanche, l'activité des ventricules a dû être modélisée avec un degré de résolution bien supérieur, puisque l'une des attentes cliniques à l'égard du modèle était la possibilité de caractériser l'influence de pathologies telles que l'ischémie, affectant la contractilité de certaines zones circonscrites du muscle cardiaque. Il était donc nécessaire que le modèle soit en mesure de traduire les déformations géométriques du myocarde pour permettre leur analyse par régions, sans pour autant que sa complexité rende les temps de simulation prohibitifs. Compte tenu de ces contraintes, une voie médiane entre les approches structurelles basées sur les éléments finis (à travers soit leur transposition en bond graph, soit leur interfaçage avec un modèle bond graph selon le cas) et l'approche fonctionnelle finalement mise en œuvre dans ma thèse a ici été retenue. Elle repose sur un découpage du continuum au même titre que la méthode des éléments finis, mais ce découpage reste assez grossier (de manière à limiter la taille du modèle) et surtout est réalisé non pas en aveugle par un procédé de maillage automatique, mais avec le souci de générer un modèle intelligible sur le plan clinique. Ainsi, le partitionnement choisi pour chacun des ventricules coïncide avec celui qu'opèrent virtuellement les cliniciens lorsqu'ils analysent qualitativement les déformations du muscle cardiaque. Le résultat est illustré sur la figure 5, qui suppose pour simplifier une géométrie régulière du ventricule (ellipsoïde de révolution).

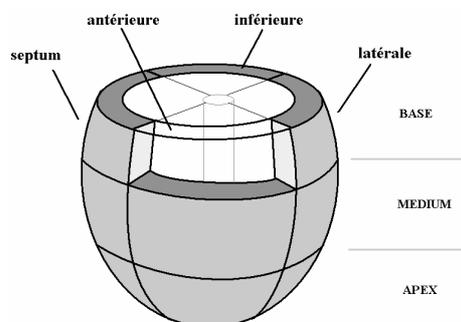


Fig. 5 : segmentation d'un ventricule gauche

Conformément aux hypothèses usuelles de la littérature, le matériau constitutif de la paroi musculaire est supposé incompressible et isotrope transverse, et caractérisé par une loi de

comportement hyperélastique [26]. Cette loi, purement passive, est cependant complétée par un terme actif traduisant les effets électro-chimiques à l'origine des contractions périodiques du myocarde [35], [54]. Elle se traduit alors localement par une relation non linéaire entre contrainte et déformation qui, intégrée spatialement sur le volume des différents éléments de découpage, fournit pour chacun d'entre eux une relation entre effort et déplacement radial, directement interprétable en bond graph à l'aide d'éléments capacitifs. La dynamique continue des déformations du myocarde est ainsi discrétisée par segments. La modélisation du couplage entre fluide et structure repose de son côté sur un découpage du volume sanguin interne au ventricule cohérent avec le découpage de sa paroi musculaire, chaque segment musculaire étant supposé agir sur le segment fluide en regard, comme le montre la figure 6.

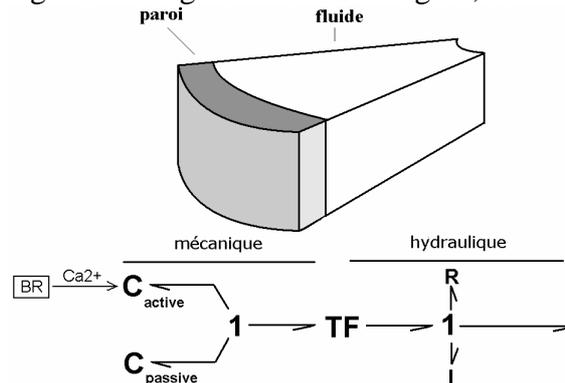


Figure 6 : Modèle d'un segment ventriculaire et du fluide en contact

Enfin, l'assemblage du modèle complet est réalisé en assurant la continuité du débit sanguin, par une interconnexion des parties hydrauliques des sous-modèles élémentaires. Contrairement aux approches par éléments finis décrites précédemment, que l'on peut qualifier de nodales au sens où elles ramènent un problème continu local à un problème discret équivalent aux nœuds du maillage, l'approche alternative retenue pour modéliser les ventricules génère un problème discret au centre de gravité des mailles. Son inconvénient majeur est qu'elle ne garantit pas la continuité géométrique de la paroi musculaire en cours de déformation, chaque segment évoluant indépendamment de ses voisins (avec toutefois une cohérence assurée au niveau hydraulique). En revanche, l'avantage de cette approche réside dans la taille réduite des modèles qu'elle génère, avec la prise en compte d'un déplacement unique par segment au lieu de 8 déplacements nodaux pour une maille parallélépipédique. La concordance entre les résultats obtenus en simulation à partir de ces hypothèses de modélisation et les mesures expérimentales effectuées en parallèle, diversement illustrée par les relevés temporels des trois figures suivantes (7-9), a permis de confirmer le réalisme du modèle en termes de prédiction comportementale, en dépit de la limitation signalée plus haut.

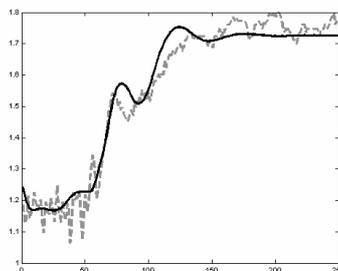


Fig. 7 : Comparaison de fréquences cardiaques humaines simulée et mesurée (exprimées en nombre de battements/seconde)

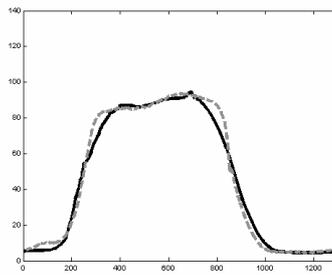


Fig. 8 : Comparaison de pressions ventriculaires porcines simulée et mesurée (exprimées en mmHg)

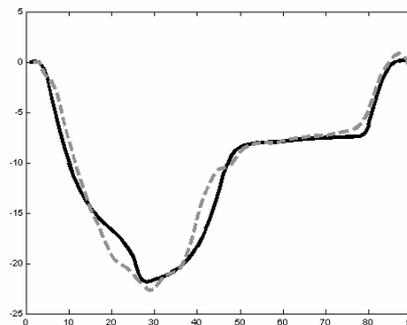


Fig. 9 : Comparaison des déformations locales du myocarde (couche basale de la paroi inférieure) simulées et mesurées (exprimées en pourcentage)

## 2.2. *Couplage entre dynamiques à événements discrets et à évolution continue dans le temps*

La deuxième problématique inscrite dans mon axe de recherche centré sur la modélisation peut être vue comme duale de la précédente. Elle s'intéresse en effet également à une forme de caractère hybride des systèmes, c'est-à-dire au couplage entre des aspects continus et discrets, mais cette fois dans le domaine temporel plutôt que spatial. Concrètement, les systèmes dont elle vise l'étude combinent des dynamiques à temps continu et des dynamiques à événements discrets en étroite interaction. Cette problématique est intervenue dès mes travaux de thèse, bien qu'à titre très secondaire dans un premier temps. Elle y a été suscitée par la présence optionnelle d'un clapet entre les deux chambres des supports de moteurs, et plus précisément par l'existence de butées qui limitaient alors son débattement. Il m'a fallu développer un modèle spécifique de choc pour traduire ce dispositif. Pour des raisons de simplicité, l'hypothèse d'élasticité a été retenue pour son implémentation effective, mais une étude plus générale a été conduite au préalable, à l'occasion de laquelle les divers types de chocs mécaniques (élastique, mou, intermédiaire) ont été envisagés. Les modèles correspondants faisaient intervenir deux dynamiques distinctes à temps continu, avec entre elles un mécanisme de transition accompagné de fonctions de saut pour la réinitialisation des variables d'état. Bien que la construction de ces modèles ait été réalisée alors en dehors de tout cadre méthodologique formalisé, elle a été pour moi l'occasion d'une première réflexion sur les phénomènes discontinus, laquelle m'a permis, ultérieurement, de rallier mes activités de recherche à la thématique centrale de l'équipe, à savoir la formalisation de méthodes de modélisation, d'analyse et de commande dédiées aux systèmes dynamiques hybrides (au sens temporel), et plus précisément pour ce qui me concerne aux systèmes physiques à commutations. Dans ce contexte, je me suis il est vrai davantage consacré à des problèmes d'analyse que de modélisation au sens strict. Toutefois, j'ai démarré à partir de 2007 l'étude

d'une nouvelle thématique centrée sur les non linéarités dites dures en mécanique, avec la perspective d'étendre le champ d'application des méthodologies dédiées aux systèmes à commutations (essentiellement restreint jusqu'alors aux convertisseurs statiques de l'électronique de puissance). Ces travaux, dont j'ai confié la réalisation à Mihai Morarescu dans le cadre de son stage de Master, et auxquels Jean Buisson s'est également associé, ont comporté une dimension importante de modélisation, que nous avons abordée sous l'angle du bond graph. Les systèmes physiques à commutations forment une classe particulière de systèmes dynamiques hybrides, dans lesquels la coexistence de dynamiques continues très disparates conduit à considérer comme instantanées les plus rapides d'entre elles, afin notamment d'éviter de trop fortes contraintes sur les pas de calcul en simulation numérique. Une telle abstraction des dynamiques rapides modifie en profondeur la nature des modèles puisqu'elle les rend continus par morceaux. Leur évolution dynamique fait alors intervenir des transitions entre différents modes de fonctionnement, potentiellement assorties de discontinuités des variables d'état [50]. On parle de modèles hybrides dans la mesure où ils traduisent des dynamiques à temps continu et des dynamiques à événements discrets en étroite interaction [51], [52]. L'étude des systèmes à commutations, encore appelés systèmes non réguliers, constitue une problématique importante en automatique, qui intéresse toute une communauté au-delà de l'équipe ASH [49], [RI8]. Dans ce domaine, la littérature fait état de plusieurs types d'approches, avec des degrés de généralité variables. L'approche adoptée dans les travaux de l'équipe, que j'ai reprise à mon compte pour l'étude des non linéarités dures en mécanique, trouve certainement l'une de ses alternatives les plus génériques dans le formalisme LCP (linear complementarity problem) [33]. Toutefois, le principal inconvénient de ce formalisme réside dans la nature implicite des modèles générés, dont la simulation exige par suite des solveurs spécifiques, et dont aucune méthodologie connue ne permet en outre la commande. Une autre approche possible pour modéliser un système à commutations est celle des automates hybrides, plus récemment issue de la théorie des systèmes hybrides. Cette approche utilise un automate d'état fini pour modéliser les transitions discrètes entre les divers modes de fonctionnement du système, la dynamique continue de chacun de ces modes étant elle-même décrite par une représentation d'état spécifique [34], [37]. Ainsi, le comportement global discontinu se réduit à un ensemble fini de comportements continus décrits séparément par des jeux d'équations différentielles, et associés à un mécanisme de commutation. Nous inscrivant plutôt dans la lignée de cette dernière approche, nous en avons collectivement proposé une alternative basée sur l'utilisation du bond graph, et qui bénéficie de ce fait d'une intelligibilité physique supérieure. Dans ce que j'intitulerai l'approche bond graph hybride, l'ensemble de toutes les dynamiques continues d'un système à commutations est représenté sous la forme unique d'un modèle bond graph incluant des éléments spécifiques appelés interrupteurs idéaux, dont les changements d'état modifient instantanément la structure du modèle de façon à traduire ses différents modes de fonctionnement. On obtient ainsi un bond graph à causalité variable, dont le principe a déjà été proposé par de précédents auteurs [17], [69]. En complément de ce modèle bond graph, et au même titre que dans l'approche des automates hybrides, un automate d'état fini (ou la composition de plusieurs automates) est utilisé pour décrire la logique des changements de mode au sein du système. Mais au lieu d'être directement associée à un jeu spécifique d'équations d'état continues, chaque situation (ou état discret) de l'automate définit sous la forme d'un ensemble de valeurs binaires l'état courant des interrupteurs idéaux du modèle bond graph. Ces interrupteurs idéaux constituent en réalité une extension du formalisme bond graph, à l'origine destiné à décrire du point de vue énergétique la dynamique de systèmes exclusivement continus [29], [39]. L'intérêt d'utiliser le bond graph pour modéliser la partie continue des systèmes à commutations réside à la fois dans sa modularité intrinsèque, qui permet la construction de modèles complexes par

simple composition de modèles élémentaires, et dans l'existence de procédures systématiques pour déduire de modèles construits graphiquement des schémas de calcul explicites en vue de leur simulation. De telles procédures, bien connues dans le cas de modèles bond graph standards, ont été généralisées aux modèles incluant des interrupteurs idéaux [RI8], [15]. Ces éléments, qui selon la terminologie propre au bond graph alternent des comportements en source d'effort et en source de flux en fonction de leur état binaire, ont initialement été introduits pour modéliser les interrupteurs physiques rencontrés dans les circuits électriques (notamment les dispositifs à semi-conducteurs). Historiquement, le domaine d'application privilégié des méthodologies de modélisation dédiées aux systèmes à commutations est en effet celui des convertisseurs statiques en électronique de puissance. C'est pourquoi les interrupteurs idéaux sont le plus souvent considérés comme potentiellement dissipatifs aux seuls instants de commutation (ils se comportent comme des sources nulles dans leurs deux états possibles). Mais ils peuvent tout aussi bien représenter sous les mêmes hypothèses d'autres dispositifs physiques tels que des valves en hydraulique ou des embrayages en mécanique. Nous avons montré à travers les travaux de Mihai Morarescu que l'approche bond graph hybride pouvait aussi être appliquée à la modélisation des non linéarités dites dures qui affectent le comportement de nombreux systèmes mécaniques, en mettant l'accent sur trois d'entre elles parmi les plus fréquentes, à savoir les frottements secs, les jeux et les transmissions irréversibles. En effet, les non linéarités dures se distinguent des non linéarités douces par la discontinuité de leur caractéristique, rangeant ainsi les systèmes où elles interviennent dans la catégorie des systèmes à commutations. Cette propriété rend impossible leur linéarisation locale lorsque le point de fonctionnement est choisi proche de la discontinuité. Dès lors, il est nécessaire de prendre explicitement en compte leur dimension hybride dans la modélisation. Diverses études antérieures ont déjà fourni un certain nombre de modèles spécifiques à telle ou telle non linéarité. Ainsi trouve-t-on par exemple dans [55] un tour d'horizon complet des travaux de modélisation et de commande relatifs au phénomène de jeu mécanique. À travers l'approche bond graph hybride, nous avons de notre côté proposé un cadre méthodologique général qui permet la modélisation des différents types de non linéarités dures rencontrées en mécanique sous la forme la plus élémentaire possible. L'idée de base est de construire une bibliothèque de sous-modèles qui saisissent chaque type de non linéarité dans son principe le plus fondamental à l'exclusion de tout autre effet annexe, et qui soient de surcroît immédiatement réutilisables pour la modélisation de systèmes mécaniques complets. Cette démarche passe par une extension du concept d'interrupteur idéal, utilisé désormais comme abstraction de phénomènes à caractère discontinu non nécessairement identifiables au comportement de composants physiques précis. En pratique, des modèles élémentaires ont été établis dans le cadre de l'approche bond graph hybride pour traduire les trois phénomènes non linéaires cités plus haut. Leur structure est indiquée sur les figures 10, 11 et 12. Il faut préciser que le modèle de frottement sec de la figure 10 utilise un interrupteur généralisé qui, tout en restant idéal dans la mesure où ses changements d'état s'opèrent toujours instantanément, ne respecte pas l'hypothèse de non dissipativité en régime établi associée à ce type d'élément dans sa version standard. Cet interrupteur généralisé délivre en effet un effort non nul en mode de glissement, pour exprimer la loi de frottement de Coulomb. Il est possible de s'affranchir de l'introduction d'un tel interrupteur atypique en lui substituant une jonction de type 1 connectée à la fois à un interrupteur idéal standard (source nulle quel que soit son état) et à une source d'effort modulée par le flux de cette jonction, qui génère en permanence l'effort de Coulomb [RI2]. Toutefois, la représentation bond graph résultante est formellement moins compacte. En complément des sous-modèles élémentaires mentionnés plus haut, une méthodologie générique a été développée pour analyser formellement des modèles globaux les incluant et en extraire des schémas de calcul explicites. L'intérêt

méthodologique de ces sous-modèles élémentaires pour la prise en compte des non linéarités dans les modèles mécaniques a été démontré à partir de l'exemple d'un système à non linéarités comportementales multiples, dans un article récemment accepté par la revue *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. Malgré une certaine complexité structurelle, ce système a pu bénéficier d'une démarche de modélisation très simple par agrégation de sous-modèles. De surcroît, le réalisme des résultats de simulation obtenus a permis de confirmer la validité des sous-modèles utilisés, en dépit de la vision idéalisée des phénomènes non linéaires sur laquelle ils reposent.

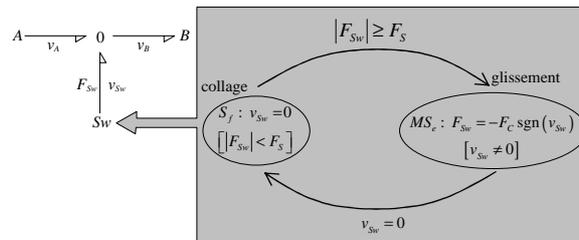


Figure 10 : Modèle de frottement sec

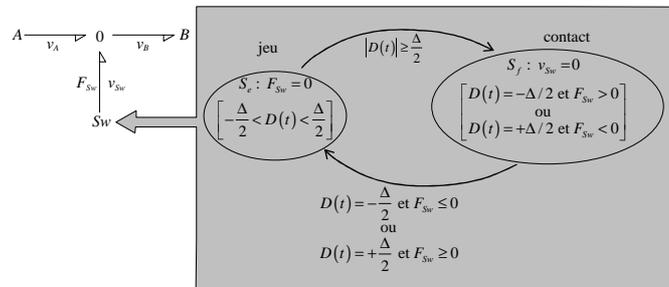


Figure 11 : Modèle de jeu mécanique

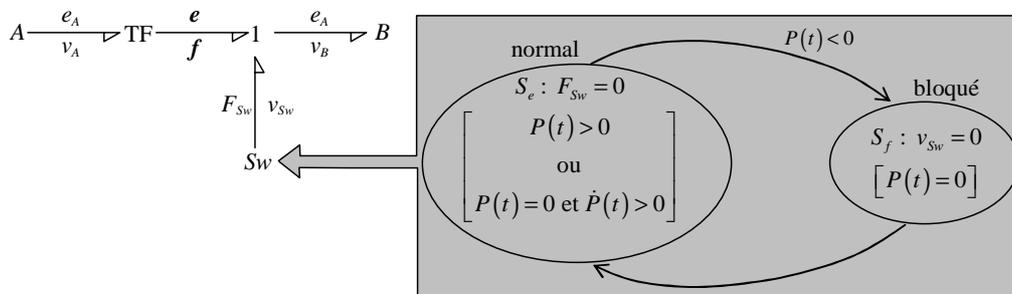


Figure 12 : Modèle de transmission irréversible

Les modèles élémentaires précédents sont présentés sous une forme acausale qui seule est générique, puisque toute forme causale est associée à une configuration spécifique de l'interrupteur (donc à un mode de fonctionnement particulier). C'est sous une telle forme qu'ils peuvent être assemblés entre eux ou intégrés au sein de modèles plus larges. L'affectation de la causalité opératoire n'intervient qu'ultérieurement, sur le modèle global résultant de l'assemblage. De surcroît, elle n'est en réalité requise que pour une seule configuration des divers interrupteurs inclus dans ce modèle, appelée configuration de référence, et qui sera définie plus loin, au paragraphe 3.2.2. Les schémas causaux de toutes les autres configurations s'en déduisent. Cette affectation causale dans la configuration de référence est en effet la première étape d'une démarche formelle décrite dans [RI8] et [RI2], qui permet de systématiser l'analyse de modèles globaux incluant des sous-modèles élémentaires à caractère hybride, en vue d'obtenir des schémas de calcul explicites, puis l'implantation de ces schémas dans un environnement de calcul standard (Matlab-Simulink)

sous une forme générique. Précisons que la méthodologie développée permet de gérer les différentes situations causales (y compris la présence éventuelle de causalités dérivées), ainsi que les discontinuités potentielles aux changements de mode.

### 2.3. *Modélisation de systèmes mécaniques articulés*

Dans le prolongement immédiat de ma propre thèse, la poursuite à titre personnel de collaborations industrielles dans le domaine automobile pendant environ trois ans m'a rapidement conduit à élargir le champ d'application de mes activités de modélisation, et notamment à aborder de nouvelles classes de problèmes, tout en restant dans un contexte essentiellement mécanique. Ainsi, laissant de côté pour un temps les systèmes relevant de la mécanique des structures (milieux continus déformables) pour ne reprendre leur étude qu'à l'occasion de la thèse de Virginie Le Rolle précédemment citée, je me suis orienté vers des systèmes relevant davantage de la mécanique des solides. Les systèmes considérés étant de surcroît le plus souvent composés de plusieurs solides mutuellement couplés du point de vue cinématique, ceci a fait surgir une nouvelle problématique en termes de modélisation, à savoir celle des systèmes mécaniques articulés. Compte tenu de leur nature, la complexité de tels systèmes est essentiellement liée à leur multi-dimensionnalité (dynamiques 2D voire 3D) ainsi qu'à la combinaison de mouvements de natures différentes (rotations, translations) rendant leurs modèles intrinsèquement non linéaires. Au travers de travaux effectués dans un contexte contractuel sous des contraintes de confidentialité (et ayant par suite fait l'objet de peu de communications dans la communauté scientifique), mes contributions ont essentiellement consisté à développer, en m'inspirant de résultats relatifs à la modélisation « multicorps » en bond graph [9], [39], une démarche de modélisation générique pour les systèmes mécaniques articulés, puis à la mettre en œuvre sur des exemples industriels variés. À travers cette démarche, que j'ai formalisée en détail dans le cas des systèmes animés de mouvements plans, chaque composant indéformable d'un système articulé fait d'abord l'objet d'une caractérisation inertielle complète (aussi bien à l'égard de la translation que de la rotation) en son centre de gravité. Concrètement, le plan du mouvement étant muni d'une base orthonormée, chacune des deux composantes de sa vitesse de translation instantanée en ce point spécifique est associée à une jonction bond graph de type 1, sur laquelle vient se connecter un élément inertiel identique de valeur la masse du solide. En complément, sa vitesse de rotation instantanée (indépendante du point considéré en vertu du torseur cinématique) est associée à une troisième jonction bond graph de type 1, sur laquelle vient se connecter un nouvel élément inertiel de valeur le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire au plan du mouvement. Puis ses liaisons cinématiques avec le reste du système sont prises en compte à partir des relations de torseur qui existent entre les vitesses respectives de ses différents points de liaison et de son centre de gravité. Par projection sur les axes de coordonnées, ces relations vectorielles deviennent alors aisément traductibles en bond graph, le plus souvent à l'aide de transformateurs modulés, et définissent ainsi la structure de jonction du modèle global, qui inclut naturellement les trois jonctions de type 1 introduites au préalable. La figure 13 illustre la démarche précédente sur l'exemple très simple d'un cylindre homogène mis en rotation autour d'un axe excentré par un couple moteur  $\Gamma$ . Le cylindre est supposé de masse  $M$  et de moment d'inertie propre  $J$ . On note  $G$  son centre de gravité et  $e$  son excentricité, distance entre son axe de symétrie principal et son axe de rotation effectif, parallèle au précédent, et dont le point d'intersection avec la section droite passant par  $G$  est noté  $O$ . L'espace est muni d'une base orthonormée  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  fixe, dont la troisième direction est axiale. En notant  $\Omega$  la

vitesse de rotation du cylindre et  $\theta$  l'angle  $(\vec{u}_x, \vec{OG})$ , les vitesses respectives des points G et O sont liées par la relation de torseur :  $\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{OG} = \Omega e(-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y)$ , dont l'interprétation en bond graph composante par composante permet de compléter la structure de jonction du modèle.

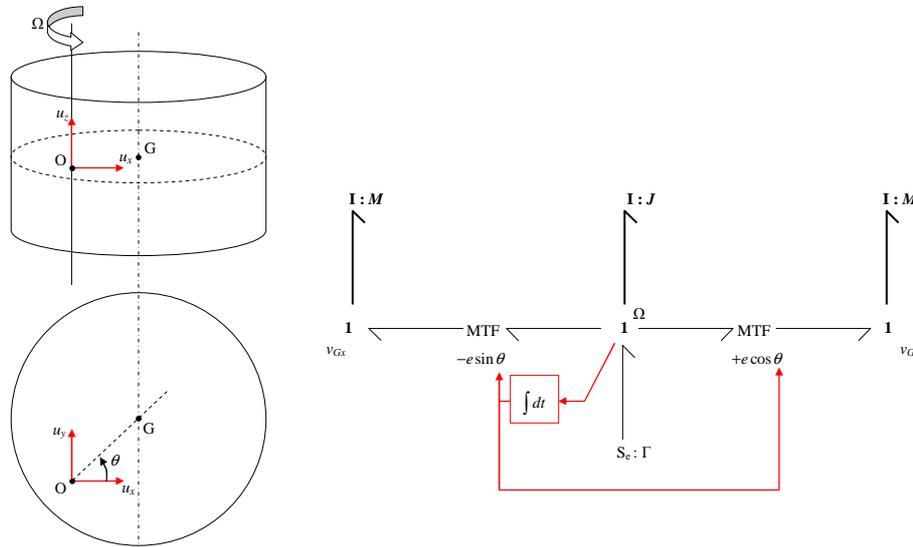


Figure 13 : Modèle bond graph d'un cylindre rotatif excentré

Cette méthodologie a été appliquée à des objets assez divers, les études correspondantes ayant en commun d'avoir été suscitées par des besoins industriels. En effet, les premiers travaux postdoctoraux que j'ai entrepris ont concerné le contrôle actif des vibrations sans que la dimension de commande devienne prépondérante pour autant, l'esprit de ces travaux étant avant tout d'utiliser la modélisation physique comme outil de conception et de dimensionnement de la partie opérative de dispositifs antivibratoires actifs. Ainsi, j'ai commencé par revisiter de manière plus approfondie l'idée de pilotage des supports de moteurs objets de ma thèse. La solution proposée à l'origine, dont le but était de réduire le niveau des vibrations transmises au châssis des véhicules par le groupe motopropulseur, consistait à actionner le clapet interne en synchronisme avec ces vibrations, autrement dit à générer mécaniquement des vibrations compensatoires à l'intérieur même des cales hydro-élastiques, grâce à un pilotage électronique basé sur une boucle à verrouillage de phase. Seule sa partie passive avait été modélisée en détail dans le cadre de la thèse. Sans remettre en cause cette solution du point de vue de la loi de commande, je me suis attaché à modéliser sa partie opérative de manière plus complète, en y incluant l'actionneur et sa chaîne de transmission, qui comportait notamment un système de bielle. Le modèle résultant, validé à partir de mesures réalisées sur un prototype de cale hydro-élastique pilotée, a fourni un véritable support méthodologique au dimensionnement de ce type de système antivibratoire [RC1]. Puis je me suis tourné vers d'autres solutions pour le contrôle actif des vibrations. J'ai notamment entrepris la conception d'un batteur actif autonome (indépendant des supports de moteur), basé sur l'effet mécanique de balourd, dont le modèle a permis de valider l'efficacité antivibratoire. Ce batteur a été décliné en plusieurs versions, certaines rigidement liées au châssis et d'autres suspendues spécifiquement [RC3]. Ensuite, j'ai étendu mon champ d'investigation à d'autres systèmes mécatroniques issus de l'automobile tels que les dispositifs de liaison au sol, en conservant la même approche méthodologique [RC4]. Par la suite, au-delà de ces applications concrètes, j'ai abordé l'extension de cette approche au cas

de mouvements tridimensionnels, mais sans atteindre au même degré de généralité. À titre secondaire, l'étude des systèmes mécaniques articulés m'a également conduit à poser un problème de modélisation plus spécifique concernant la prise en compte des contraintes géométriques dans les modèles en bond graph [CI25]. En effet, j'ai mis en évidence une faiblesse du formalisme à cet égard, n'ayant jusqu'alors fait l'objet d'aucune communication à ma connaissance. Cette faiblesse se manifeste essentiellement dans le domaine mécanique, où les systèmes à modéliser comportent fréquemment des contraintes géométriques, c'est-à-dire des relations algébriques entre déplacements. Mais on peut aussi en rencontrer dans le domaine hydraulique. De telles contraintes ne sont pas explicitement vérifiées par les modèles en bond graph, qui par nature ne traduisent que les contraintes cinématiques correspondantes, à savoir les dérivées temporelles des précédentes. Les contraintes géométriques elles-mêmes ne sont donc satisfaites qu'à une constante près. Un risque d'incohérence des modèles (ou plus exactement du choix de leurs conditions initiales) en résulte lorsque ces contraintes impliquent des variables d'état. Ceci se produit dès que les déplacements algébriquement liés entre eux sont associés à des éléments capacitifs (représentatifs, en mécanique, d'effets élastiques) pourvus d'une causalité intégrale. En effet, malgré leur statut théorique de variables d'état, ces déplacements ne peuvent alors, sous peine d'incohérence physique, se voir assigner des valeurs initiales indépendantes les unes des autres. Dans le domaine mécanique comme du reste dans les domaines hydraulique et électrique, une telle situation où un couplage algébrique existe entre plusieurs éléments capacitifs d'un modèle bond graph peut être créée artificiellement – et souvent involontairement – lorsque ce modèle a été obtenu par assemblage de sous-modèles élémentaires, en vertu de la modularité intrinsèque du formalisme. Les conséquences en sont inévitablement fâcheuses aussi bien du point de vue de la simulation numérique que de la commande, même si un choix judicieux des conditions initiales a préalablement garanti la satisfaction des contraintes statiques entre déplacements. En effet, la dynamique du modèle se révèle d'ordre non minimal, la présence de certaines variables d'état étant superflue. J'ai montré de surcroît, en m'appuyant sur les travaux de G. Dauphin-Tanguy et C. Sueur relatifs aux propriétés structurelles de modèles bond graphs [70], qu'un problème de non commandabilité l'affectait systématiquement. Pour faire face à ce double écueil, j'ai proposé une méthode générale visant à transformer les modèles bond graphs de systèmes sujets à des contraintes dites géométriques (au sens large, c'est-à-dire pas seulement en mécanique), en y faisant explicitement figurer lesdites contraintes. Cette méthode consiste à passer en revue les éléments capacitifs des modèles incriminés en examinant du point de vue physique l'indépendance de la variable de déplacement qui leur est associée. À l'issue de cette étape d'analyse, chaque élément dont le déplacement s'est révélé contraint (algébriquement lié à un autre) est éliminé du modèle et remplacé par une source d'effort modulée, dont la loi traduit la contrainte relative au déplacement. Ainsi se trouve minimisé le nombre d'intégrations numériques distinctes nécessaires dans le schéma de calcul du modèle, dont le conditionnement à l'égard de la commande est du même coup amélioré.

#### ***2.4. Modélisation non singulière de circuits électriques***

De manière plus ponctuelle, une contribution dans le domaine des circuits électriques vient également se ranger dans cet axe consacré à la synthèse de modèles en bond graph [RI9]. J'y ai travaillé en étroite collaboration avec Jean Buisson et Hervé Cormerais, ces travaux s'inscrivant dans le prolongement de la thèse de ce dernier. Notre apport sur ce point est une alternative à la méthode de construction usuelle d'un modèle bond graph de circuit électrique. Rappelons que cette dernière consiste à attribuer une jonction de type 0 à chaque potentiel indépendant d'un circuit, c'est-à-dire du point de vue topologique à chacun de ses nœuds,

puis à insérer entre ces jonctions les éléments des différentes branches du circuit à l'aide de jonctions intercalaires de type 1, et enfin à éliminer de façon arbitraire une jonction de type 0 par partie isolée du circuit. Simple dans son principe, cette méthode, qu'il faut compléter par une procédure d'affectation de la causalité telle que SCAP [39], présente toutefois dans certains cas l'inconvénient de conduire à des représentations dites singulières, où apparaissent des boucles causales de gain unitaire. Il a été établi que le modèle se révèle alors insoluble en termes de schéma de calcul entrées-sorties [42], [64]. On rencontre notamment cet écueil dans l'exemple bien connu du pont de Wheatstone. Pour y faire face, des procédures essentiellement curatives ont été proposées dans la littérature. Elles permettent de transformer les modèles pathologiques en éliminant leurs boucles causales de gain unitaire après les avoir isolées [41]. Nous avons de notre côté privilégié les approches préventives, qui évitent l'apparition de telles boucles. Une première procédure de ce type a été développée antérieurement dans l'équipe, mais elle n'autorise pas de dissociation entre la construction du modèle bond graph et l'affectation de sa causalité (la notion de modèle acausal disparaît, avec l'intérêt qu'elle présente à l'égard de la composition de modèles) [16]. Dans les travaux évoqués ici, une nouvelle procédure est proposée. Elle permet la construction systématique d'un modèle bond graph acausal de circuit électrique, auquel l'application ultérieure d'une variante de SCAP (décrite plus loin, dans la section 3 du présent document) confère une structure causale garantie sans boucle de gain unitaire. Cette procédure reste en outre applicable dans le contexte d'un assemblage de sous-modèles. Son principe repose sur le choix d'un arbre qui relie entre eux tous les nœuds du circuit électrique à modéliser. Ce choix n'est pas arbitraire mais dépend de la nature des éléments insérés dans le circuit. Ainsi, l'arbre doit inclure toutes les branches du circuit qui contiennent une source de tension, et dans la mesure du possible celles qui contiennent des capacités. À chaque branche du circuit incluse dans l'arbre est alors associée une jonction de type 0, tandis qu'une jonction de type 1 est au contraire associée à chaque branche du circuit exclue de l'arbre. Les jonctions de type 0 ne représentent donc plus les différents potentiels nodaux, mais un jeu de différences de potentiels entre nœuds adjacentes indépendantes dans leur ensemble. Le reste de la structure de jonction, à savoir les liens entre les jonctions introduites, se déduit simplement des lois de Kirchoff, indifféremment formulées en courant ou en tension. Cette méthode de construction spécifique assure l'absence de toute boucle algébrique une fois la causalité affectée.

### ***3. Analyse formelle des modèles bond graphs***

L'objectif général de ce second axe, très complémentaire du premier, est de définir des méthodologies permettant l'analyse de modèles de type bond graph à travers les démarches les plus systématiques possibles. Deux formes d'analyses différentes sont ici considérées. La première consiste à générer formellement, à partir de modèles en bond graph, d'autres modes de caractérisation dynamique plus conventionnels tels que des représentations d'état ou des fonctions de transfert. D'une certaine manière, cette première forme d'analyse relève encore du domaine de la modélisation, puisqu'elle se résume à des transformations de modèles. S'il s'agit bien d'analyse à l'égard du modèle bond graph lui-même, c'est plutôt de la modélisation à l'égard du système qu'il représente. La deuxième forme d'analyse, en revanche, quitte le terrain de la modélisation pour effectivement s'intéresser aux propriétés des systèmes. Elle cherche à exploiter les modèles en bond graph et le cadre méthodologique associé à ce formalisme pour mettre en évidence de telles propriétés, en conservant un caractère formel. Certaines des méthodologies développées s'appliquent aux modèles en bond graph dans leur plus grande généralité. D'autres concernent plus spécifiquement les modèles de systèmes à commutations.

### 3.1. *Analyse de modèles bond graph standards*

#### 3.1.1. **Analyse harmonique**

La première forme d'analyse sur laquelle je me suis penché concerne la détermination formelle de fonctions de transfert à partir d'un modèle bond graph. À l'origine, ces travaux ont été suscités pendant ma thèse par le souci de rendre plus directement accessibles les indicateurs de performance classiquement utilisés dans l'industrie automobile pour caractériser les supports de moteur, à savoir leurs profils fréquentiels de raideur et d'amortissement, ce qui m'a conduit à envisager un autre mode d'exploitation du modèle que sa simple simulation temporelle, seule solution offerte alors par les modélisateurs bond graph tels que CAMAS (prédécesseur de l'actuel 20-SIM) [12]. J'ai alors entrepris d'en établir une forme dégradée adaptée à une analyse harmonique. Le modèle harmonique que j'ai proposé dans cette perspective (et dont le principe est immédiatement généralisable à d'autres applications) se révèle formellement identique au bond graph original, à ceci près que les lois constitutives de tous ses éléments ont été linéarisées autour d'un point de fonctionnement. Mais la véritable spécificité de ce nouveau modèle tient à l'interprétation de ses variables de puissance comme les grandeurs symboliques ou complexes (fonctions soit de la variable  $s$  de Laplace, soit de la variable complexe  $j\omega$ ) associées aux grandeurs temporelles d'origine. Dès lors, son analyse harmonique devient possible à travers une démarche en trois étapes que j'ai définie. La première consiste à affecter globalement la causalité au bond graph (par une procédure standard telle que SCAP), la deuxième à écrire explicitement toutes les relations causales entre variables de puissance qui en résultent (localement au niveau de chaque jonction, de chaque transformateur ou gyrateur et de chaque élément terminal). Au cours de cette étape, les lois constitutives causalement orientées des éléments de stockage d'énergie sont exprimées non pas sous la forme intégral-différentielle habituelle (réservée au domaine temporel), mais sous une forme algébrique utilisant l'opérateur  $s$  (variable de Laplace propre au domaine symbolique). Dans une troisième et dernière étape, une réduction formelle du système d'équations algébriques ainsi obtenu est opérée, compte tenu du choix d'un couple entrée-sortie, par application de la règle de Mason issue de la théorie des graphes de fluence [42]. De la sorte, toute fonction de transfert scalaire entre deux variables de puissance du modèle bond graph linéarisé est directement calculable, et ceci de manière formelle en fonction des paramètres du modèle. Afin de faciliter la mise en œuvre de cette démarche, je l'ai de surcroît automatisée en faisant coopérer deux logiciels distincts. Le premier d'entre eux était le modélisateur bond graph CAMAS, développé par l'université de Twente, grâce auquel pouvaient être générées sous une forme littérale et algébrique les équations dynamiques issues d'une analyse causale des modèles bond graphs une fois ces derniers saisis à l'aide d'un éditeur graphique. Le second était le logiciel SIRENA, outil d'aide à la conception en automatique développé conjointement à l'école Centrale de Nantes et à SUPELEC, notamment par Jean Buisson, et qui implémentait entre autres l'algorithme de Mason. Pour l'anecdote, la communication entre ces deux logiciels a nécessité le développement d'une interface spécifique assurant la traduction automatique du code textuel généré par CAMAS en code interprétable par SIRENA. L'intérêt pratique de la méthodologie formelle ainsi établie pour l'analyse harmonique d'un modèle bond graph de système linéaire (ou linéarisé) s'est à nouveau manifesté ultérieurement, à l'occasion de travaux complémentaires sur les suspensions de moteur que j'ai réalisés en collaboration avec le LAPS de Bordeaux, dans le cadre de la thèse de Caroline Ramus-Serment. Au cours de cette coopération qui a réuni la doctorante, l'un de ses encadrants Xavier Moreau et moi, nous avons repris l'étude des supports de moteur passifs, mais en adoptant un point de vue différent

de celui de ma thèse. Nos travaux communs ont porté sur la formalisation du problème très général de la suspension des moteurs comme un problème de régulation au sens de l'automatique. L'idée de départ, proposée par mes collègues du LAPS, consistait à remarquer que le modèle le plus basique de système suspendu, à savoir la paire masse-ressort, possède un comportement dynamique identique à celui d'un système en boucle fermée dans lequel la masse représente la partie opérative et le ressort le correcteur. Ma contribution personnelle a résidé dans une généralisation de cette approche aux cas où le modèle de suspension est plus complexe qu'une simple raideur, incluant notamment ses propres effets inertiels. Dans de tels cas, la notion de raideur usuellement utilisée pour caractériser la suspension devient ambiguë, voire inadéquate, dans la mesure où cette dernière n'est plus réductible à un système monovarié résonnant à une sollicitation en déplacement (compression ou étirement global) par un effort unique identiquement exercé de part et d'autre. Néanmoins, j'ai montré à partir d'une modélisation par bond graph qu'il était encore possible d'interpréter la suspension en elle-même comme un régulateur dynamique à l'égard de la masse suspendue. Mais ce régulateur est alors caractérisé – dans le cas linéaire – par une fonction de transfert bien spécifique que j'ai qualifiée de pseudo-raideur, car elle a effectivement la dimension d'une raideur, sans pour autant toujours correspondre à cette grandeur telle qu'elle peut être définie intuitivement ou mesurée expérimentalement [CI21]. Dans ces travaux, l'apport spécifique de la modélisation par bond graph, associée à la méthodologie d'analyse harmonique développée pendant ma thèse, a été de permettre un calcul formel de la pseudo-raideur précédente dans les cas complexes. L'approche proposée, assimilant une suspension à un régulateur en boucle fermée, a ainsi pu être validée à partir de l'exemple des cales hydro-élastiques. Son intérêt principal est l'éclairage qu'elle apporte pour analyser les performances d'une suspension passive et guider sa conception : dès lors que la suspension est interprétée comme un régulateur, le réglage de ce régulateur devient possible à partir des méthodes de synthèse usuelles, et permet d'optimiser le dimensionnement de la suspension pour améliorer notamment la robustesse de son action antivibratoire.

### **3.1.2. Dérivation de formes d'état explicites en présence de causalités dérivées**

Une autre forme classique d'analyse d'un modèle bond graph consiste à en extraire des équations d'état, ce mode de représentation étant, il faut le reconnaître, plus universel et permettant par suite une prise en compte plus immédiate par de nombreux outils de simulation. La procédure de passage du bond graph à une forme d'état repose essentiellement sur la notion de causalité opératoire. Dans les cas standards (c'est-à-dire en l'absence de causalité dérivée dans les modèles), ce passage ne pose aucune difficulté. En effet, un jeu cohérent et complet de variables d'état est fourni de manière systématique à travers le choix des moments généralisés associés aux éléments inertiels en causalité intégrale et des déplacements généralisés associés aux éléments capacitifs également en causalité intégrale [20]. L'expression de leurs dérivées respectives s'obtient directement à partir des relations du bond graph orientées conformément à la causalité. Elle est de surcroît naturellement explicite. En revanche, dès que le modèle bond graph comporte des éléments de stockage en causalité dérivée, il hérite d'un caractère implicite. Cela se traduit mathématiquement par des bouclages algébriques qui rendent sa mise en équations plus complexe. Cette situation indésirable se révèle parfois inévitable, même si le principe même d'une procédure telle que SCAP vise à en empêcher l'occurrence (mais seulement dans la mesure du possible, sans garantie de succès). Je l'ai en particulier fréquemment rencontrée dans les modèles de systèmes mécaniques articulés, évoqués plus haut, où elle est physiquement imputable à l'existence d'inerties cinématiquement liées entre elles. Certes, il existe une solution classique pour supprimer cette difficulté. Généralement préconisée par les tenants des approches non

idéales en bond graph, elle repose sur l'introduction de capacités parasites entre les inerties incriminées [47]. Bien que la présence de telles capacités puisse se justifier physiquement a posteriori par l'existence de raideurs initialement non modélisées, leur insertion dans les modèles n'en demeure pas moins une forme d'artifice. On le voit notamment à travers le choix de leurs valeurs, le plus souvent arbitraire. Pour ma part, confronté à la nécessité industrielle que les modèles finaux soient simulables dans des environnements standards tels que MATLAB/SIMULINK, qui ne disposent que de solveurs explicites, mais soucieux de proposer une solution moins artificielle au problème, j'ai développé une démarche générique de construction de schémas de calcul explicites à partir de modèles en bond graph comportant des causalités dérivées. Je l'ai ensuite testée avec succès sur un certain nombre de cas pratiques. Cette démarche, adaptée aux systèmes continus, s'applique à partir d'un modèle bond graph causal et procède par étapes successives, après une phase préliminaire de numérotation de ses liens terminaux. La première étape consiste à exprimer formellement les relations entre les grandeurs de sortie de la structure de jonction et ses grandeurs d'entrée, conformément à la causalité du modèle. Ces relations, dont l'écriture matricielle a été peu après définie sous le nom de forme standard implicite dans les travaux de thèse d'Hervé Cormerais, et s'est ensuite révélée fondamentale pour l'analyse de modèles bond graph à topologie variable, ne font intervenir que les variables de puissance (efforts et flux) associées aux liens numérotés, ainsi que les coefficients des transformateurs et gyrateurs éventuels. Dans une deuxième étape, les relations constitutives des éléments terminaux du bond graph sont écrites. Leur formulation est à nouveau dictée par la causalité en ce qui concerne les sources et les éléments résistifs. En revanche, la formulation des lois constitutives des éléments de stockage d'énergie (inertiels comme capacitifs) obéit à une règle spécifique commune, indépendante de la causalité de ces éléments, qui consiste à exprimer conjointement les deux variables de puissance de leur lien en fonction de l'unique grandeur susceptible de représenter une variable d'état (le moment pour les inerties, le déplacement pour les capacités). La troisième étape de la démarche consiste à substituer les lois constitutives issues de la deuxième étape dans les relations issues de la première. Elle conduit à un nouvel ensemble de relations que l'on peut répartir en trois catégories : des équations d'état (implicites dans le cas général, car faisant intervenir à la fois les dérivées premières de variables d'état effectives mais aussi celles de pseudo-variables d'état, algébriquement liées aux précédentes), des équations d'observation (également implicites en général) et des équations de contrainte, qui définissent les relations algébriques entre pseudo variables d'état et variables d'état au sens strict. Une dérivation temporelle de ces équations de contrainte est opérée en guise de quatrième étape. La substitution des relations résultantes dans les équations d'état implicites comme dans les équations d'observation implicites permet, dans une cinquième étape, d'éliminer toutes les pseudo-variables d'état. Il ne reste plus, dans la sixième et dernière étape, qu'à rendre les équations d'état explicites par simple résolution d'un système linéaire [RC1].

### **3.1.3. Procédure SCAP modifiée**

À la base même de toute mise en équations d'un modèle bond graph, on trouve la notion fondamentale de causalité. En effet, la représentation graphique basée sur les liens de puissance est à elle seule insuffisante pour définir une structure d'entrées-sorties. On rappelle que la procédure SCAP, proposée dès l'origine du bond graph, permet d'affecter une structure causale à un modèle bond graph, c'est-à-dire de définir pour chaque lien du modèle des orientations spécifiques (et inverses l'une de l'autre) pour le transfert des informations que constituent respectivement les variables d'effort et de flux. La procédure assure une cohérence globale de ces orientations causales individuelles, de telle sorte que l'écriture des équations

qui en résultent permette d'exprimer une grandeur de sortie quelconque en fonction des différentes grandeurs d'entrée. Son principe repose sur l'objectif de minimiser (sinon d'éviter complètement) les causalités dites dérivées, qui conduisent à exprimer sous une forme différentielle plutôt qu'intégrale la loi constitutive d'un élément de stockage (inertie ou capacité). Dans le paragraphe de la section précédente relatif à la modélisation des circuits électriques, j'ai souligné l'existence de cas pathologiques où l'application de la procédure SCAP conduit à la génération de boucles causales de gain unitaire, rendant le modèle insoluble. Dans le prolongement de la méthode de construction de modèle établie pour éviter une telle situation (basée, rappelons-le, sur la notion d'arbre), nous avons proposé une variante de SCAP qui, s'appliquant aux modèles issus de ladite méthode, permet de leur affecter la causalité opératoire tout en garantissant l'absence de toute boucle causale (et en particulier de gain unitaire) [16]. Elle procède également par étapes successives. La première d'entre elles, inchangée par rapport à SCAP, consiste à affecter la causalité des sources puis à la propager le cas échéant. Dans la seconde étape, la causalité intégrale préférentielle est affectée aux éléments de stockage, mais avec une priorité inédite accordée aux capacités connectés à une jonction de type 0 (c'est-à-dire incluses dans l'arbre choisi) ainsi qu'aux inerties connectées à une jonction de type 1. Là encore, la propagation est réalisée chaque fois cela s'avère possible. La troisième et dernière étape concerne les éléments résistifs. Une forme de causalité préférentielle leur est appliquée, puisque ceux qui sont connectés à une jonction de type 0 se voient affectée la causalité d'une source d'effort tandis que ceux qui sont connectés à une jonction de type 1 héritent au contraire de la causalité d'une source de flux. À l'issue de ces trois étapes, tous les liens du modèle sont orientés causalement. L'orientation des liens internes de la structure de jonction est en outre telle que la barre de causalité se trouve systématiquement placée du côté de la jonction de type 1. Ainsi, aucune boucle causale, quel que soit son gain, ne peut apparaître.

### ***3.2. Analyse des modèles bond graph de systèmes à commutations***

Cette partie concerne spécifiquement les modèles en bond graph de systèmes à commutations. De tels systèmes comportent des composants à changements d'état brutaux, comme les dispositifs à semi-conducteurs de l'électronique (diodes, thyristors, transistors, etc.), ou bien font intervenir des phénomènes aux dynamiques très rapides tels que les non linéarités dures en mécanique, citées dans la partie 2 de ce document. La spécificité de notre équipe est d'avoir délibérément choisi, pour les représenter, des modèles à topologie variable, basés sur l'utilisation d'éléments interrupteurs idéaux capables de commuter instantanément entre deux états de configurations causales inverses. Cette approche n'est pas la seule possible. Une autre voie concurrente consiste à traduire les changements abrupts de dynamique à l'aide d'éléments résistifs non linéaires, éventuellement associés à des transformateurs modulés [9]. Ceci présente l'avantage de permettre la détermination d'une forme d'état unique à partir du modèle bond graph (dont la mise en équations obéit alors aux règles usuelles), mais cette forme d'état unique est à paramètres variables. Par voie de conséquence, sa simulation engendre des difficultés numériques lors des changements de paramètres, en raison de la sensibilité des pas de calcul aux gradients élevés [9]. Évitant cet écueil numérique, l'approche que nous avons adoptée nécessite en contrepartie que soient développées de nouvelles méthodologies d'analyse de modèles bond graph pour tenir compte de leur nature intrinsèquement hybride. J'ai apporté ma contribution à l'étude de plusieurs d'entre elles.

### 3.2.1. Analyse structurelle par la méthode des perturbations singulières

Parmi les divers travaux entrepris par l'équipe dans le cadre des systèmes à commutations, l'un des premiers où mon apport personnel a été décisif est l'analyse comparative des approches de modélisation à topologie fixe et à topologie variable. Cette analyse, basée sur la théorie des perturbations singulières en ce qui concerne l'approche non idéale (ou à topologie fixe), a eu pour intérêt essentiel d'asseoir la légitimité de l'approche idéale (ou à topologie variable) sur laquelle tous nos développements s'appuient. Dans l'approche bond graph non idéale, comme je l'ai déjà précisé en introduction, chaque phénomène de commutation observé physiquement est en général modélisé sous la forme d'un élément résistif à paramètre variable. Deux valeurs distinctes, l'une très élevée et l'autre très faible, sont attribuées à son paramètre (qui s'interprète comme une résistance ou une conductance suivant la causalité) en fonction de son état courant. Lorsque la valeur la plus faible est choisie nulle, on parle d'approche semi-idéale. Le principal avantage de cette approche est qu'elle conduit à des modèles dont la causalité reste identique quel que soit l'état des commutateurs. En particulier, le nombre d'éléments de stockage en causalité intégrale ne varie pas, garantissant ainsi un vecteur d'état de dimension constante. De plus, les variables d'état qui le constituent sont continues aux instants de commutation, et ne nécessitent donc aucune réinitialisation. Enfin, les tenants de l'approche non idéale mettent en avant son réalisme supérieur, lié à l'utilisation de résistances pour modéliser des phénomènes de commutation qui, du point de vue physique, se révèlent effectivement dissipatifs. Ce réalisme est cependant atténué dans la pratique par le choix des deux valeurs affectées à ces résistances, guidé le plus souvent par des considérations d'ordre numérique plutôt que proprement physique. En effet, ces valeurs sont en règle générale prises respectivement très petite et très grande, de sorte que la dynamique de la commutation puisse toujours être négligée devant les dynamiques continues dominantes du système. Au-delà de cette contrainte, un de leurs critères prioritaires de réglage est de permettre la convergence des algorithmes d'intégration, afin que les modèles soient simulables. Or la variation de paramètres dans des rapports élevés engendre des modèles à échelles de temps multiples, qui posent des difficultés de simulation comme de commande. Un des moyens classiques de résoudre ces difficultés est alors d'appliquer la méthode des perturbations singulières, qui consiste à séparer les dynamiques lentes des plus rapides, jugées non significatives d'un point de vue physique, et de ce fait négligées en remplaçant les équations différentielles correspondantes par des contraintes algébriques [19]. Mais cette simplification peut entraîner la discontinuité de certaines variables d'état (parmi celles dont la dynamique a été négligée), qu'il faut calculer explicitement. L'un des avantages attribués à l'approche non idéale disparaît ainsi dans la pratique. En conséquence, la simulation exige que le nécessaire solveur d'équations différentielles ordinaires soit complété par un automate d'état fini [53]. Dans l'approche dite idéale, chaque phénomène de commutation est modélisé par un élément bond graph non standard appelé interrupteur idéal, qui en fonction de son état se comporte soit comme une source d'effort, soit comme une source de flux (avec le changement de causalité que cela implique). Par voie de conséquence, le nombre d'éléments de stockage pourvus d'une causalité intégrale dans le modèle est susceptible de varier avec la configuration globale des interrupteurs, de même que la dimension du modèle. Il peut ainsi exister jusqu'à  $2^n$  modes continus différents à considérer dans un modèle comportant  $n$  interrupteurs idéaux (si tous sont autorisés). Bien sûr, l'état pouvant varier dans sa structure même aux instants de commutation, la discontinuité potentielle de certaines variables d'état est inhérente à cette approche idéale. Les réinitialisations que cela implique requièrent le calcul explicite de toutes les discontinuités. Nous avons cependant montré que ce calcul peut être conduit de manière symbolique (sans avoir à simuler le modèle). Une telle approche est

intrinsèquement hybride puisqu'elle combine dans son principe des dynamiques continues (majoritaires) et événementielles. N'introduisant pas d'effet parasite lié aux dynamiques rapides, elle offre l'intérêt de réduire la complexité numérique des modèles par rapport aux approches non idéales (tout en augmentant d'une certaine manière leur complexité conceptuelle à travers le caractère hybride) [10]. De plus, la vision idéalisée qu'elle propose du comportement des composants physiques ou des phénomènes à commutations n'est en rien réductrice, dans la mesure où les modèles idéaux peuvent parfaitement être complétés par des éléments tels que des résistances en vue de leur assurer un réalisme supérieur. Une comparaison formelle des approches idéale et semi-idéale ainsi résumées m'a permis de montrer que, sous certaines hypothèses techniques (dont la linéarité des dynamiques continues et la simultanéité de toutes les commutations d'interrupteurs), la première fournissait directement la solution réduite (ou lente) de la deuxième au sens des perturbations singulières [CI24]. En complément, j'ai également établi la stabilité exponentielle de la solution en couche limite (toujours en référence à la terminologie des perturbations singulières) [RI8]. Cette propriété permet d'affirmer, en vertu du théorème de Tikhonov, que la solution lente issue de l'approche idéale constitue une bonne approximation de la solution générale, dans la mesure où cette dernière converge uniformément vers elle [44]. Ceci valide le principe même de notre approche idéale.

### 3.2.2. Calcul formel de représentations d'état explicites

L'un des principaux apports de l'équipe ASH dans le domaine des systèmes à commutations est la formalisation d'un cadre générique pour leur modélisation en bond graph à partir d'interrupteurs idéaux. Le choix de cette approche, qui propose une abstraction idéalisée du phénomène de commutation lui-même, a déjà été justifié au paragraphe précédent. J'ai également insisté sur le fait qu'une topologie variable des modèles en résultait. Dans ce contexte, le modèle énergétique (bond graph acausal) de tout système à commutations peut être présenté sous la forme générique de la figure 14.

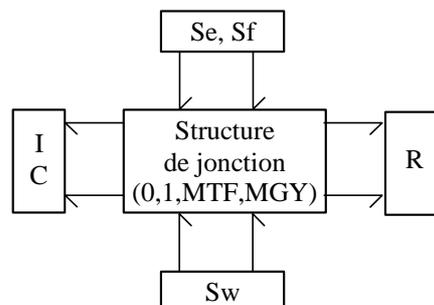


Fig. 14 : Bond graph générique à commutations

Ce modèle distingue une structure de jonction, qui décrit comment la puissance transite de manière globalement conservative au sein du système en se répartissant et en changeant éventuellement de forme (elle traduit la structure interne des échanges énergétiques), et des champs qui représentent en complément les phénomènes énergétiques non conservatifs. Trois d'entre eux participent du formalisme bond graph standard. Ils regroupent respectivement les sources, qui modélisent la fourniture d'énergie au système, les inerties et capacités, qui modélisent les différentes formes de stockage d'énergie au sein du système, et enfin les résistances, qui modélisent la consommation d'énergie par le système. Le dernier champ, non conventionnel, regroupe les interrupteurs idéaux introduits pour modéliser les commutations (dont on rappelle qu'ils agissent comme des sources à causalité inversible). Ces éléments permettent de définir le modèle bond graph d'un système à commutations sous une forme

acausale unique, le caractère variable de sa topologie résultant exclusivement des changements de causalité des interrupteurs (lesquels peuvent naturellement se répercuter dans l'ensemble du modèle). Pour compléter ce cadre de modélisation, une méthodologie formelle d'analyse a été développée. Détaillée en référence [RI8], elle se base sur la notion centrale de forme standard implicite, qui exprime la relation d'entrées-sorties d'une structure de jonction causalement augmentée, et permet d'exploiter le modèle bond graph à commutations selon différents axes. Ainsi, elle fournit des critères pour décider de la validité de telle ou telle configuration des interrupteurs (tous les modes de fonctionnement possibles n'étant pas nécessairement admissibles du point de vue physique). Elle permet en particulier de définir les configurations dites de référence, qui maximisent le nombre d'éléments de stockage en causalité intégrale et bénéficient de ce fait d'un statut spécifique dans la méthode. Elle donne également accès à une représentation d'état implicite unique formellement valable en tout mode, dans laquelle un jeu de paramètres variables (de nature binaire) permet de différencier les modes entre eux. Conceptuellement intéressante en raison de sa compacité, cette représentation est toutefois peu exploitable dans la mesure où son indice de nilpotence est en général strictement supérieur à un, ce qui traduit l'existence de modes impulsions non simulables [11]. Une forme d'exploitation plus utile du modèle, en vue notamment de sa simulation, consiste à déterminer les représentations d'état explicites associées aux dynamiques continues de ses différents modes de fonctionnement. Nous avons montré que la représentation d'état dans un mode quelconque se déduisait analytiquement, sous une forme implicite d'indice de nilpotence unitaire (donc directement simulable par des solveurs tels que DASSL), de la forme standard implicite exprimée dans le même mode, moyennant une substitution des lois constitutives. Nous avons en outre établi que cette représentation d'état pouvait être rendue explicite par un changement de variables défini formellement. Dès lors, la connaissance explicite de toutes les dynamiques continues d'un système à commutations suppose simplement celle des formes standards implicites associées. Bien entendu, il est possible d'obtenir ces dernières individuellement à partir de l'affectation causale spécifique de chaque mode, mais une telle méthode devient vite fastidieuse lorsque le nombre de modes augmente. Aussi en avons-nous proposé une alternative algébrique, qui consiste à déterminer formellement les formes standards implicites (et donc par suite les représentations d'état explicites) de tous les modes à partir d'une seule d'entre elles, associée à une configuration de référence. Je me suis personnellement plus particulièrement attaché à formaliser la démarche correspondante, qui tient compte de tous les changements causaux potentiellement induits par les commutations d'interrupteurs idéaux depuis la configuration de référence vers une autre configuration quelconque. Dans les cas les plus simples, les interrupteurs commutent par paires, sans modifier la causalité des autres champs. Mais des chemins causaux peuvent aussi exister d'une part entre le champ des interrupteurs et celui des résistances, qui connaissent alors également des inversions de causalité au passage d'un mode à l'autre, d'autre part entre le champ des interrupteurs et celui des éléments de stockage, qui en changeant alors de causalité lors des commutations modifient la structure du vecteur d'état et éventuellement l'ordre même du modèle. Tous ces changements causaux se traduisent par des permutations entre les variables de puissance qui, dans la forme standard implicite de référence, représentent respectivement les grandeurs d'entrée et de sortie de la structure de jonction. L'expression de ces permutations à l'aide de matrices appropriées, qu'un algorithme permet de déterminer de façon systématique pour chaque commutation à partir du mode de référence, peut être utilisée à la manière d'un changement de variables dans la forme standard implicite de référence, laquelle reste formellement vraie en tout mode (même si elle ne traduit une relation d'entrées-sorties effective que dans le mode de référence). La relation obtenue peut ensuite être ramenée à une forme standard implicite (celle du nouveau mode résultant de la

commutation considérée) par un produit matriciel spécifique appliqué membre à membre (notion de matrice de passage). Un autre résultat formel important de nos travaux est le calcul explicite des discontinuités subies par les variables d'état du système, ainsi que de l'énergie instantanément dissipée dans les interrupteurs lors des commutations. L'ensemble des résultats qui viennent d'être sommairement décrits partagent, répétons-le, un caractère formel qui a permis leur implantation sous la forme d'un outil d'analyse automatique, programmé sous Mathematica [CI18]. À travers cet outil, une description explicite exhaustive des différentes dynamiques continues d'un système à commutations, ainsi que des réinitialisations de variables d'état au passage des unes aux autres, est directement fournie sous forme symbolique à partir du bond graph causal dans le seul mode de référence. Associées à la connaissance de l'enchaînement temporel des modes de fonctionnement (qui dépend soit d'une commande externe soit de l'évolution interne du système suivant la nature des commutations), ces informations permettent de simuler un système hybride de façon très simple. Une autre de mes contributions personnelles dans ce contexte a spécifiquement concerné les systèmes où les interrupteurs commutent entre eux sans affecter la causalité d'autres types d'éléments terminaux du modèle bond graph. Dans ce cas particulier, j'ai montré que la démarche de passage entre la forme standard implicite du mode choisi comme référence et celle d'un autre mode de fonctionnement quelconque peut être intégralement explicitée de façon analytique. Elle conduit à une expression générique de la forme standard implicite commune à tous les modes, paramétrée par des variables booléennes qui caractérisent le mode courant. De cette forme standard implicite unique, une représentation d'état également unique peut être déduite, elle aussi paramétrée par les mêmes booléens. À la différence de la forme d'état unique mentionnée précédemment, dont l'écriture est possible dans le cas le plus général, elle possède la particularité d'être d'indice de nilpotence égal à un, et peut ainsi servir de base à une simulation numérique. On peut aussi en tirer une équation d'état explicite associée à une équation algébrique de contrainte, par un changement de variable approprié [RI8].

### **3.2.3. Cellules de commutation**

J'ai rappelé dans les paragraphes précédents que les systèmes physiques à commutations dans leur plus grande généralité étaient modélisables en bond graph à l'aide d'interrupteurs idéaux. Ceux d'entre eux dont la dynamique discontinue (c'est-à-dire continue par morceaux) peut de surcroît être exhaustivement traduite sous la forme d'une représentation d'état unique à paramètres booléens et d'indice de nilpotence inférieur ou égal à un en constituent une classe très importante dans la pratique. En effet, la plupart des convertisseurs statiques de l'électronique de puissance, reconnus pour définir l'un des principaux champs applicatifs de la théorie des systèmes dynamiques hybrides, y sont inclus. De plus, la propriété commune qui caractérise leurs modèles d'état les rend particulièrement aptes non seulement à la simulation, mais aussi à la commande, puisqu'elle permet de les considérer comme des systèmes continus à entrées logiques, et de faire ainsi d'une certaine manière abstraction de leur caractère hybride. Dans un tel contexte, le concept de cellule de commutation fournit une alternative intéressante à l'approche du paragraphe 3.2.2 pour la détermination de représentations d'état, dans la mesure où la démarche correspondante bénéficie notamment d'une plus grande simplicité formelle. À l'origine, ce concept a été introduit dans les travaux de Bruno Allard, afin de permettre la construction d'un modèle équivalent à causalité invariante à partir d'un modèle bond graph initial basé sur une représentation idéale des interrupteurs [4]. Nous l'avons de notre côté d'abord envisagé pour des systèmes à commutations où les changements de causalité ne concernent que les interrupteurs, à l'exclusion de tout autre élément terminal du modèle bond graph [CI20]. Dans ce cas

particulier, on peut noter que l'approche du paragraphe 3.2.2, basée sur les matrices de passage, avait déjà permis de mettre en évidence la possibilité d'obtenir une représentation d'état unique simulable, autrement dit l'appartenance des systèmes à la classe considérée. Puis nous avons étendu la notion de cellule de commutation aux cas où des éléments résistifs voient également leur causalité inversée lors des changements de mode [CI10]. Telle que nous l'avons finalement définie, une cellule de commutation est constituée de chemins causaux joignant soit deux interrupteurs, soit un interrupteur et un élément résistif, et connexes dans leur ensemble (c'est-à-dire ayant en commun des liens de puissance). Il en résulte qu'un même modèle bond graph de système à commutations peut parfaitement inclure plusieurs cellules disjointes. Intuitivement, celles-ci regroupent l'ensemble des liens qui changent de causalité à l'occasion des diverses commutations entre modes. Réciproquement, les liens du modèle bond graph situés en dehors de toute cellule de commutation ne sont jamais affectés par aucun changement causal. Dans la mesure où, par hypothèse, les cellules de commutation ne contiennent pas d'élément de stockage d'énergie, les éléments de ce type ne subissent pas d'inversion de causalité. Il en résulte que l'ordre du modèle est conservé dans tous les modes de fonctionnement, ainsi que la composition du vecteur d'état, qui évolue alors continûment. Par ailleurs, puisque les changements structurels induits par les commutations sont circonscrits à l'intérieur des seules cellules de commutation, il est commode de traiter ces dernières isolément comme autant de sous-modèles, conformément au schéma de la figure 15. Leur interface avec le reste du modèle étant constituée de liens de puissance à causalité fixe, leurs grandeurs respectives d'entrée et de sortie restent les mêmes dans tous les modes de fonctionnement. Dès lors, chacune des cellules peut être caractérisée par une relation d'entrées-sorties globale (c'est-à-dire formellement valable quel que soit le mode), paramétrée par des variables booléennes en fonction du mode courant. Compte tenu de la nature des cellules, cette relation est en outre algébrique, ne faisant intervenir que des variables de puissance. Il suffit alors de l'intégrer aux relations causales issues du reste du modèle (quant à lui parfaitement conventionnel au sens où sa topologie demeure invariante) pour obtenir simplement et à coup sûr une forme d'état unique valable dans tous les modes, paramétrée par l'ensemble des booléens associés aux différentes cellules de commutation, et simulable. L'originalité de notre approche a été d'établir, à partir de la définition des cellules de commutation, une démarche formelle pour la détermination de leur relation d'entrées-sorties globale à paramètres booléens. Cette démarche, basée sur les propriétés structurelles du bond graph, s'inspire de la méthodologie décrite par le paragraphe 3.2.2, mais elle s'applique indépendamment à chaque cellule de commutation plutôt qu'au modèle bond graph dans son intégralité, pour lui associer une forme standard implicite valide en tout mode, qui est ensuite rendue explicite.

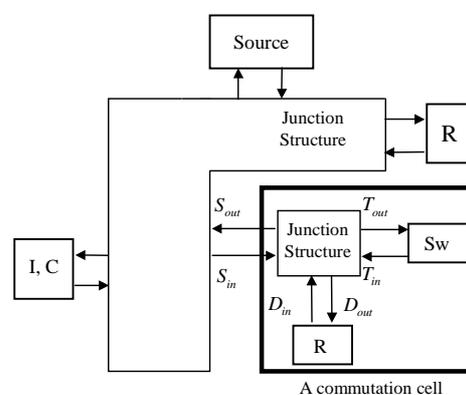


Figure 15 : Principe de la cellule de commutation

L'un des avantages de la représentation d'état unique à laquelle notre démarche aboutit en définitive est qu'elle offre un accès direct à la notion de modèle moyen, très utile pour appliquer aux systèmes à commutations des stratégies de commande conventionnelles (non spécifiquement booléennes), en les approchant par une modulation de largeur d'impulsion. Pour établir ce type de modèle, il suffit en effet de substituer formellement aux paramètres booléens de la forme d'état leurs valeurs moyennes obtenues dans le cadre d'un enchaînement périodique de modes. Dans le cas particulier où les changements de causalité n'affectent que les interrupteurs, notre approche par cellules de commutation révèle encore un autre intérêt, qui lui confère une réelle supériorité sur l'approche par matrices de passage du paragraphe précédent : celui de permettre l'élaboration d'un nouveau modèle bond graph équivalent au modèle d'origine, mais dépourvu d'interrupteurs, et dont la causalité devient de ce fait indépendante du mode de fonctionnement [CI10]. En général, ce modèle de substitution possède de surcroît une topologie plus simple. Il s'obtient à partir d'une interprétation en bond graph des relations globales établies entre les grandeurs d'entrée et de sortie des différentes cellules de commutation. En raison de la nature purement algébrique de ces relations et de leur paramétrage booléen, leur traduction sous forme de bond graph fait intervenir comme seuls éléments variants des transformateurs ou des gyrateurs modulés, dont les coefficients dépendent du mode courant. Ainsi, il peut être simulé à l'aide d'un outil tel que 20-SIM, dont le modèleur bond graph ne comporte pas d'élément dont le comportement corresponde à celui d'un interrupteur idéal. Soulignons enfin que l'approche ici décrite a montré son efficacité sur de multiples exemples de convertisseurs de puissance, des plus simples (tels que le Boost) aux plus complexes (comme les hacheurs multiniveaux).

### ***3.3. Analyse de propriétés à partir de modèles en bond graph***

Dans ce nouveau volet consacré à l'analyse de propriétés structurelles des systèmes dynamiques à partir de leurs modèles en bond graph, en dehors cette fois de tout contexte hybride, je me suis tout spécialement intéressé à la platitude différentielle. Cette propriété, introduite par Fliess, peut être vue comme une généralisation au domaine non linéaire de la notion familière de commandabilité au sens de Kalman. En effet, il est établi que les systèmes plats peuvent toujours être rendus équivalents à des systèmes linéaires commandables par le biais de retours d'état spécifiques qualifiés d'endogènes [23]. Par suite, ces systèmes sont eux-mêmes commandables. De plus, en dépit de leur non linéarité éventuelle, ils bénéficient de stratégies de commande efficaces, aussi bien en boucle ouverte qu'en boucle fermée. La platitude constitue donc une propriété particulièrement utile à l'égard de la commande. Son intérêt pratique est encore accru par le fait qu'elle est partagée par de nombreux systèmes physiques, linéaires ou non. De tels systèmes se prêtant naturellement à une modélisation énergétique, je me suis posé le problème d'une mise en évidence de leur propriété de platitude à partir de représentations en bond graph. Dans ma démarche d'investigation, sachant que cette propriété a trait à l'inversion de modèle, je me suis appuyé sur le concept de bicausalité. Rappelons que le formalisme bond graph décrit explicitement les échanges d'énergie au sein d'un système, et qu'il caractérise chacun d'entre eux au niveau le plus élémentaire par deux variables de puissance, appelées respectivement effort et flux, dont le produit fournit la puissance instantanée échangée. La causalité opératoire est une notion complémentaire, dont j'ai déjà eu l'occasion de souligner l'importance, à travers laquelle les modèles énergétiques, qui fondamentalement ne préjugent pas des relations de cause à effet entre les variables de puissance mises en jeu, peuvent être pourvus d'une structure informationnelle permettant tout à la fois des analyses structurelles et la génération formelle systématique d'équations. La causalité conventionnelle est basée sur une règle selon laquelle l'effort et le flux transitent

nécessairement en sens inverse sur chaque lien de puissance, un effort imposé à l'une de ses extrémités impliquant alors un flux imposé à l'autre extrémité. Cette contrainte permet de conférer à tout modèle bond graph une structure calculatoire cohérente en termes d'entrées-sorties (c'est-à-dire de rendre possible le calcul des grandeurs définies comme des sorties en fonction de celles définies comme des entrées ainsi que des variables d'état internes). La bicausalité, introduite par Gawthrop, est une extension de la causalité conventionnelle, qui relâche la contrainte précédente, donnant ainsi accès à des schémas d'entrées-sorties non standards, utilisables notamment pour la description de dynamiques inverses [28]. Les deux types de causalité disposent au même titre de procédures systématiques pour leur affectation globale à un modèle bond graph. Par ailleurs, l'analyse de la platitude différentielle a déjà été envisagée du point de vue du bond graph à travers un certain nombre de travaux. Parmi les plus pertinents, une approche basée sur l'étude de chemins causaux a été proposée par Gil, Pedraza et Delgado [30], mais elle ne fonctionne que dans le contexte restrictif des systèmes monovariables dont les sorties plates se confondent avec des variables d'état. La notion de degré relatif, familière aux nonlinéaristes, peut aussi être utilisée comme un outil structurel pour vérifier la propriété de platitude, puisque des résultats existent quant à la détermination de ces degrés relatifs à partir d'un modèle bond graph [74]. Toutefois une telle approche ne fournit que des résultats partiels puisqu'elle ne renseigne pas sur l'inversibilité entre état et sorties. J'ai de mon côté cherché à développer une approche plus générale. Partant du constat que la platitude est une propriété en rapport avec l'inversion de modèle, aussi bien entre entrées et sorties qu'entre état et sorties, je me suis penché sur la notion de dynamique inverse. Ceci m'a conduit à proposer le concept de bicausalité comme clé d'analyse de la platitude des systèmes modélisés en bond graph. À partir de l'étude d'un des exemples les plus connus de système plat, à savoir la grue à deux degrés de liberté, j'ai élaboré une démarche méthodologique formelle pour démontrer la platitude d'un système à l'aide de son modèle bond graph et en déduire les lois d'inversion permettant sa commande en boucle ouverte [CI16]. Cette démarche est applicable de manière systématique, dès lors que les sorties plates du système ont été identifiées. Elle repose sur une exploitation judicieuse de la bicausalité, combinée à l'utilisation d'éléments mixtes sources-capteurs pour représenter sur le modèle bond graph les ports d'entrée et de sortie. En fonction de la causalité qui leur est affectée, ces éléments peuvent se comporter soit comme des sources conventionnelles, soit comme de doubles sources (à la fois d'effort et de flux), soit enfin comme de doubles capteurs. Dans le détail de la démarche, le modèle bond graph standard du système, sous sa forme acausale, est d'abord modifié en remplaçant toutes ses sources de puissance (à l'origine des grandeurs d'entrée) par de tels éléments mixtes, tandis que d'autres éléments du même type y sont introduits en tant que capteurs des variables plates présumées. Puis on attribue à ces derniers éléments la causalité de doubles sources, de telle sorte qu'ils imposent comme nouvelles entrées les grandeurs qu'ils étaient a priori supposés mesurer (à savoir les sorties plates, ou plus exactement les variables de puissance dont la connaissance des sorties plates détermine l'évolution), tout en imposant également la nullité des variables de puissance duales (de sorte que la présence de ces éléments additionnels ne modifie pas le système du point de vue énergétique). Après quoi la bicausalité est propagée à partir des règles établies par Gawthrop [28]. Chaque fois que cela s'avère possible, l'information bicausale véhiculée est utilisée pour estimer les paramètres des éventuels éléments modulés du modèle (transformateurs notamment), et la connaissance ainsi acquise est exploitée en vue de poursuivre la propagation. À l'issue de cette démarche, la platitude du système à l'égard des sorties considérées est démontrée pourvu que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

- Chaque lien du modèle dispose de deux demi-barres de causalité.
- Aucun élément de stockage ne se voit attribuer la causalité intégrale.

- La configuration causale des éléments substitués aux sources de puissance originelles est telle que chacune des grandeurs d’entrées du modèle est devenue une sortie de la nouvelle structure de jonction bicausale.

Dans de telles conditions, le modèle inverse est d’ordre zéro, ce qui signifie que toutes les variables qu’il manipule (y compris les variables d’entrée et d’état originelles) peuvent être calculées à partir de ses entrées (qui ne sont autres que les sorties originelles) sans intégration (mais en dérivant ces dernières autant de fois que nécessaire). Les lois d’inversion correspondantes se déduisent systématiquement des relations du bond graph exprimées conformément à l’orientation bicausale. La figure 16 illustre le résultat de la démarche appliquée à l’exemple d’un pont roulant.

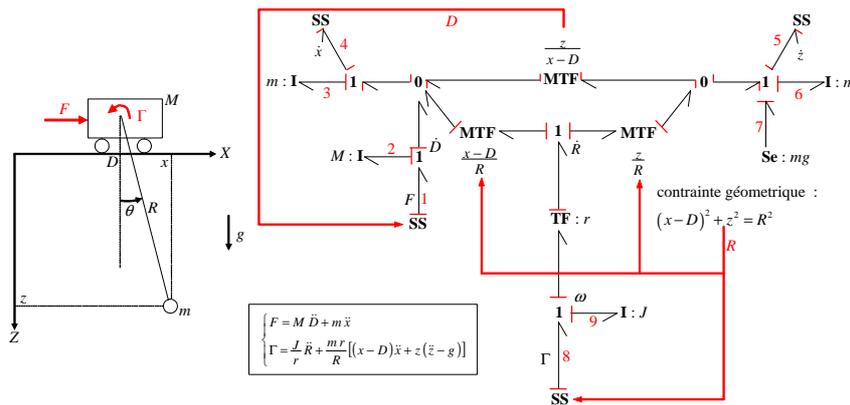


Figure 16 : Modèle inverse d’un pont roulant

Elle montre en particulier que l’évolution temporelle des grandeurs de commande du modèle direct, à savoir la force  $F$  exercée sur le chariot et le couple  $\Gamma$  exercé sur le treuil, se déduit de celle des sorties plates définies par les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $z$  de la charge.

Efficace pour l’analyse de platitude, la méthodologie ainsi décrite n’apporte toutefois pas de réponse au problème préalable de l’identification de sorties plates. Un début de solution apparaît dans les travaux de M. Maligorne, C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy, qui développent dès 2001 une première méthode par approche d’état, basée sur les formes canoniques de commandabilité, pour déterminer les sorties plates de modèles bond graphs dans le cadre d’abord limité d’hypothèses linéaires [45]. Par la suite, en 2005, la thèse d’A. Achir sous la direction de C. Sueur reprend cette problématique pour l’étendre au cas non linéaire. Une nouvelle procédure d’identification de sorties plates valable pour les modèles bond graphs non linéaires y est présentée. Pourvue d’un bon degré de généralité, elle s’applique aux modèles multivariables, avec comme seule restriction l’absence d’éléments en causalité dérivée. Basée sur fondements théoriques d’algèbre différentielle, cette procédure utilise un modèle bond graph tangent qualifié de variationnel, obtenu à partir de l’opérateur différentiel de Kähler [2]. Il est établi que ce type de bond graph non conventionnel revêt une structure algébrique d’anneau non commutatif (graphe dont les coefficients appartiennent à un anneau non commutatif). Dans ce contexte, une règle spécifique établie par Riegler et Lin (extension de la règle de Mason) doit être appliquée pour le calcul de gains. Les sorties plates s’obtiennent alors en intégrant les bases du module associé au modèle bond graph variationnel. Celles-ci s’expriment comme combinaisons linéaires des variables d’état de ce bond graph, avec des coefficients solutions de contraintes algébriques identifiables graphiquement à partir des chemins causaux [3].

## **4. Commande de systèmes à commutations**

Le troisième grand volet de mes activités de recherche se greffe sur les précédents, puisqu'il concerne la commande des systèmes dynamiques. Cette thématique très vaste a cependant été envisagée sous un angle applicatif bien spécifique, qui est celui des systèmes à commutations. L'idée sous-jacente est en effet d'exploiter les modèles idéaux établis à travers les approches que nous avons développées pour cette classe de systèmes, ainsi que les propriétés structurelle qui peuvent en être déduites, pour synthétiser des lois de commande adaptées à leur nature particulière. Les principales stratégies de commande auxquelles je me suis personnellement intéressé dans cette perspective sont respectivement la commande par mode glissant et la commande par passivation. J'aurai également l'occasion de mentionner la commande stabilisante, proposée par Jean Buisson, que j'ai eu l'occasion de confronter à la commande par mode glissant dont elle peut être vue comme une forme de cas particulier. En réalité, les deux premiers principes de commande cités, sur lesquels mes travaux se sont concentrés, ne sont pas en soi réservés aux systèmes hybrides. Au contraire, ils peuvent parfaitement s'appliquer à des systèmes continus et c'est même dans ce cadre plus conventionnel qu'ils ont été développés à l'origine. Intrinsèquement, il s'agit avant tout de commandes non linéaires. L'originalité de nos travaux est d'avoir mis l'accent sur leurs modalités particulières de mise en œuvre dans le cas de systèmes à commutations, dont la commande consiste à piloter l'état binaire d'une série d'interrupteurs. Même si les approches proposées font l'objet d'une formalisation indépendante du bond graph, précisons que la méthodologie de modélisation des systèmes à commutations décrite dans la section précédente et basée sur ce formalisme conserve une importance capitale dans ce contexte de commande, dans la mesure où les représentations d'état explicitement utilisées comme point de départ de la synthèse des correcteurs en sont déduites.

### **4.1. Commande par mode glissant**

La commande par mode glissant trouve son origine véritable dans les années 1950, avec notamment les travaux pionniers de Hamel et Cypkin [32], [18], mais sa popularité est essentiellement attribuable à l'article fondateur d'Utkin en 1977 [72]. Elle se range dans la catégorie des commandes en boucle fermée à structure variable, et possède à ce titre un caractère non linéaire. À l'intérieur de cette famille, elle présente en outre des qualités de robustesse particulières liées à son principe (insensibilité aux incertitudes qui ne remettent pas en cause l'attractivité du lieu de glissement). De manière générale, une commande à structure variable se compose d'un ensemble de lois de commande associé à une règle de décision qui permet de sélectionner à chaque instant la loi courante en fonction de l'état du système. La conception d'une commande par mode glissant comporte le plus souvent deux étapes. La première est la détermination d'une fonction de commutation, fonction éventuellement non stationnaire du vecteur d'état dont l'annulation définit l'équation d'un lieu de glissement [22]. Celui-ci est une variété de l'espace d'état, éventuellement variable au cours du temps, au voisinage immédiat de laquelle la commande doit astreindre le système à évoluer, et qui fixe par conséquent la dynamique du système commandé. Le choix de cette fonction de commutation est dicté par le cahier des charges, en fonction des performances attendues. Son caractère stationnaire ou non dépend de l'objectif de commande : régulation ou suivi de trajectoire. La deuxième étape dans la conception d'une commande par mode glissant est la synthèse d'une loi de commande proprement dite, dont le but n'est pas d'assurer les performances dynamiques spécifiées, mais seulement de rendre le lieu de glissement invariant

(au moins localement) pour l'état du système [59]. A cet effet, la loi de commande doit être discontinue au niveau de ce lieu, et telle que les trajectoires d'état soient toutes dirigées vers lui à son voisinage immédiat. Lorsque le système considéré admet plusieurs entrées de commande scalaires, chacune d'entre elles doit être discontinue sur le lieu de glissement. Toutefois, ces différentes commandes peuvent parfaitement posséder leur propre fonction de commutation, qui les rend discontinues sur une hypersurface spécifique (variété de dimension égale à l'ordre du système diminué d'une unité). Le lieu de glissement correspond alors à l'intersection des différentes hypersurfaces. Depuis sa popularisation dans les années 1970, la commande par mode glissant a surtout été utilisée pour le pilotage de systèmes à dynamiques non linéaires mais continues, en particulier dans le domaine de l'aéronautique [24]. Pourtant, sa description de principe met en évidence son caractère intrinsèquement hybride. En effet, elle fournit des correcteurs à sortie discontinue, qui peuvent ainsi eux-mêmes être considérés comme des systèmes à commutations. Il semble donc naturel de l'envisager également comme un mode de commande privilégié des systèmes hybrides, et plus précisément des systèmes à commutations. Intuitivement, l'idée consiste à faire coïncider les commutations d'un tel système avec celles d'un correcteur par mode glissant, de sorte que chaque dynamique continue du système soit associée à une loi de commande spécifique. En pratique, cette coïncidence de commutations entre le système à commander et son correcteur suppose que ce dernier agisse directement sur l'état des interrupteurs du système, ce qui exige en retour que ces derniers soient complètement commandables, comme le sont par exemple des transistors par opposition à des diodes ou même des thyristors dans le domaine de l'électronique. Les systèmes à commutations qui vérifient cette propriété peuvent être considérés comme des systèmes continus à entrées de commande logiques, dès lors qu'une représentation d'état unique paramétrée par des booléens peut leur être associée (conformément aux développements méthodologiques de la section précédente). De tels systèmes se rencontrent essentiellement en électronique de puissance, dans la famille des convertisseurs statiques. Leur commande par mode glissant a déjà été abordée par un certain nombre de travaux antérieurs, mais le plus souvent sans cadre méthodologique vraiment général [60], ou avec des hypothèses restrictives telles que l'unicité de l'entrée [65]. Ces travaux peuvent être répartis en deux catégories, selon le type d'approche utilisée. La plus conventionnelle d'entre elles est une approche continue par morceaux, qui repose sur la notion de modèle moyen. Les commandes en résultant ne peuvent être appliquées qu'indirectement aux interrupteurs, par le biais d'une commande rapprochée à modulation de largeur d'impulsion (MLI). L'autre approche rencontrée peut être qualifiée de booléenne, dans la mesure où, visant à piloter directement l'état des interrupteurs, elle conduit à des lois de commande binaires. Un état de l'art complet de la commande des systèmes à entrées logiques est disponible dans la thèse de Vincent Abadie [1], qui propose notamment la commande par mode glissant comme l'une des voies possibles, parmi un certain nombre d'autres stratégies directes (c'est-à-dire booléennes). Il en généralise la formalisation au cas multivariable, mais dans le cadre encore limitatif des systèmes bilinéaires (en la commande et en l'état). J'ai pour ma part également orienté mes recherches vers la commande par mode glissant des systèmes à entrées logiques, en explorant les deux approches citées plus haut, mais en privilégiant toutefois l'approche directe. De plus, je me suis engagé dans cette voie avec le souci de définir une méthodologie de synthèse qui soit la plus générale possible. Les travaux correspondants ont débuté avec la thèse de Cécile Morvan, et ont d'abord conduit à une première forme de méthodologie, spécifiquement booléenne et inscrite dans le même contexte des systèmes bilinéaires multivariables [CI11]. Visant explicitement un objectif de régulation, cette méthodologie présente la particularité d'inverser la démarche de synthèse classique. En effet, elle commence par poser a priori une expression de la loi de commande,

dont la nature est binaire, et que paramètre une matrice dont les coefficients inconnus sont destinés à définir un jeu d'hyperplans de commutation sécants sur le lieu de glissement associé à l'objectif. Dans un deuxième temps, les conditions bien connues d'atteignabilité [36], qui expriment l'attractivité des hyperplans de commutation à l'égard des trajectoires d'état, sont traduites sous la forme d'un jeu d'inégalités matricielles linéaires portant sur la matrice précédente. Puis de nouvelles conditions dites de croisement sont introduites, à nouveau sous la forme d'inégalités matricielles linéaires. Leur rôle est de garantir que les hyperplans de commutation seront toujours intersectés par les trajectoires d'état en temps fini, malgré l'existence de points d'équilibre ou de directions asymptotiques dans les différents modes de fonctionnement possibles. Enfin, la résolution du système global d'inégalités matricielles linéaires ainsi établi fournit – de manière non unique – la matrice recherchée (et, partant, la fonction de commutation globale). L'efficacité des lois de commande issues de cette première approche a été vérifiée sur plusieurs exemples de convertisseurs statiques. L'approche elle-même a par la suite fait l'objet d'améliorations à l'occasion du stage de master d'Abdelkarim Kartit, à qui j'ai confié la tâche d'optimiser le choix de la matrice de réglage sur la base de critères temporels (minimisation du temps de réponse). Toutefois, il n'a pas été possible de s'affranchir de son handicap majeur, à savoir l'explosion combinatoire qui résulte de l'augmentation du nombre d'interrupteurs dans le modèle. En effet, pour un modèle à  $m$  interrupteurs, la mise en équations du problème de synthèse fournit à la fois  $m$  systèmes découplés de  $2^m$  inégalités matricielles linéaires (conditions d'atteignabilité), et une alternative entre  $m^{2^m}$  autres systèmes de  $2^m$  inégalités matricielles linéaires (conditions de croisement). Devant cette difficulté, j'ai finalement choisi d'aborder le problème d'une manière différente. Ma nouvelle approche reprend l'ordre conventionnel des opérations en synthèse de commande par mode glissant, dans la mesure où elle admet comme point de départ le choix arbitraire d'une fonction de commutation bien définie (ce choix, indépendant de la démarche elle-même, étant en général guidé par le cahier des charges de la commande). Ainsi, elle évite l'écueil de la première approche envisagée, dont l'explosion combinatoire était liée à la recherche d'une fonction de commutation parmi une multitude de possibilités. Par ailleurs, elle élargit son champ d'application par rapport à l'approche précédente, en s'appuyant sur une formalisation générique du principe des modes glissants pour la classe des systèmes affines en la commande dans son intégralité (incluant des systèmes à caractère multivariable, non linéaire et même non stationnaire). Dans le cadre très général ainsi défini, le concept de commande équivalente permet d'analyser la dynamique de glissement et accessoirement de caractériser la famille des perturbations auxquelles la commande par mode glissant rend les systèmes insensibles. Sur la base de cette formalisation préliminaire, j'ai développé une démarche méthodologique permettant de systématiser la synthèse de correcteurs par mode glissant. Son aboutissement est la formulation explicite de lois de commande génériques immédiatement applicables à l'ensemble des systèmes affines en la commande, sans autre hypothèse [RI6]. Cette démarche tire son principe d'une expression spécifique des conditions d'atteignabilité, adaptée à cette classe de systèmes et obtenue à partir d'une pseudo-fonction de Lyapunov (au sens où celle-ci n'est pas définie comme telle dans l'espace d'état mais dans son image par la fonction de commutation). L'originalité d'une telle approche réside en partie dans son degré élevé de généralité, la synthèse de correcteurs par mode glissant étant ici traitée pour une classe entière de systèmes, plutôt qu'au cas par cas à l'instar de nombreux travaux antérieurs. Mais elle provient également, et c'est probablement son intérêt majeur, de la possibilité offerte au concepteur de choisir à son gré des lois de commande continues par morceaux (pour les plus conventionnelles) ou discrètes (notamment booléennes). Ainsi, cette approche offre une solution explicite à la commande directe des systèmes à commutations. Sa mise en œuvre est immédiate dès lors qu'un modèle d'état du

système est disponible, et le réglage des lois de commande relativement simple en pratique dans la mesure où chacune d'entre elles est paramétrée par une matrice de pondération unique (même si des critères de réglages restent à étudier). De surcroît, aucun problème de stabilité des correcteurs ne se pose puisque les lois de commande prennent la forme de retours d'état statiques. L'efficacité de cette méthodologie de conception et les performances des lois de commande auxquelles elle conduit ont été testées en simulation sur des exemples complexes de convertisseurs statiques (hacheur à 3 niveaux en particulier), dans le cadre de la régulation. En complément, des travaux de validation expérimentale sont actuellement en cours sur un banc d'essai multiniveaux. Sur le plan théorique, les stratégies booléennes par mode glissant ont été comparées à une autre forme de commande directe des systèmes à commutations également développée dans l'équipe, à savoir la commande stabilisante [CI8], [5], [6]. Bien que formellement très proche des précédentes dans l'expression de lois de commande, cette dernière s'en distingue par un champ d'application plus restrictif, à savoir celui des systèmes port-Hamiltoniens (systèmes physiques à caractère dissipatif) dont les phénomènes de stockage d'énergie sont caractérisés par des lois constitutives linéaires, et dont l'équation d'état reste bien entendu affine en les grandeurs de commande booléennes. En contrepartie, compte tenu des propriétés structurelles des systèmes considérés, la commande stabilisante assure une convergence vers l'objectif de régulation depuis tout l'espace d'état, ce qui n'est pas nécessairement le cas de l'approche par mode glissant, dans laquelle le domaine d'attractivité du lieu de glissement peut être borné. Malgré cette limitation, l'intérêt de l'approche booléenne par mode glissant tient à sa généralité, déjà soulignée plus haut, qui rend par exemple les lois de commande résultantes applicables à la plupart des convertisseurs de puissance, mais également à une formulation directement explicite de ces lois de commande, qui simplifie leur implantation, et enfin à la possibilité de les généraliser de manière simple aux problèmes de suivi de trajectoire. De nouveaux travaux sont du reste en cours sur ce point précis. Pour terminer, il convient toutefois de mentionner une faiblesse persistante de cette approche, bien connue et liée au principe même du mode glissant : il s'agit des commutations à haute fréquence qu'elle impose en pratique à la commande, sources d'usure des composants et potentiellement d'instabilité. L'une des voies les plus prometteuses pour résoudre ce problème est le recours aux modes glissants d'ordre supérieur [25], [59]. Une généralisation de notre approche méthodologique à ce nouveau concept est en cours d'étude. Elle vise notamment à étendre son champ d'application aux cas où l'une au moins des composantes de la fonction de commutation qui définit le lieu de glissement conformément à l'objectif de commande possède un degré relatif supérieur à un (la formulation proposée initialement perdant alors sa validité).

#### **4.2. Commande par passivation**

La commande par passivation est une autre forme de commande non linéaire, qui à la différence de la précédente ne présente en soi aucun caractère hybride. Développée notamment par les travaux de Romeo Ortega [57], et basée comme son nom l'indique sur la notion de passivité (qui renvoie au caractère dissipatif), elle bénéficie de critères de réglage relativement intuitifs, et se révèle en outre très généraliste. Son champ d'application s'étend en effet à l'ensemble des systèmes physiques, qui inclut notamment les convertisseurs de l'électronique de puissance, pour la commande desquels elle a déjà été largement utilisée [66]. Je m'y suis moi-même intéressé dans le cadre de la thèse de Cécile Morvan, en collaboration avec Hervé Cormerais, comme à une alternative au mode glissant pour commander les systèmes physiques à commutations. Toutefois, cette approche est intrinsèquement plus conforme à la nature physique de tels systèmes qu'à leur nature hybride. En effet, sa mise en

œuvre dans ce contexte particulier nécessite le recours à une MLI (modulation de largeur d'impulsion) dans la mesure où les lois de commande par passivation sont continues par nature et ne peuvent donc être réalisées qu'en moyenne par des entrées logiques (discrètes). En ce sens, il s'agit à l'égard des systèmes à commutations de stratégies de commande indirectes, qui reposent sur le concept de modèle moyen (à l'instar des stratégies continues par morceaux en mode glissant). Avant d'introduire la commande par passivation en elle-même, il convient de préciser la notion de passivité sur laquelle elle repose, et qui est une propriété des systèmes physiques fondée sur des considérations énergétiques. Ainsi, un système est qualifié de passif (ou encore de dissipatif) dès lors que la puissance qu'il reçoit de l'extérieur excède toujours celle qu'il emmagasine intérieurement. En termes de dynamique, cette notion est étroitement liée à la stabilité. L'expérience usuelle montre que la plupart des systèmes physiques que l'on peut rencontrer sont asymptotiquement stables. Cette propriété dynamique peut être interprétée comme une conséquence de leur passivité sur le plan énergétique. De ce constat est né le principe de la commande par passivation, qui consiste à appliquer un retour d'état (dynamique en général) au système à réguler, avec pour objectif spécifique de rendre la boucle fermée passive. Ceci nécessite l'introduction artificielle d'amortissement dans la dynamique de l'erreur d'asservissement afin d'en assurer la stabilité asymptotique à un degré satisfaisant. La dimension énergétique de cette approche la rend particulièrement adaptée à la commande de systèmes modélisés en bond graph, et c'est un des critères qui nous a conduits à la retenir. Cependant, alors que la démarche la plus classique de synthèse d'une commande basée sur la passivité (PBC) s'appuie sur une description lagrangienne des dynamiques à réguler, nous avons de notre côté privilégié une représentation hamiltonienne, dans la mesure où celle-ci se déduit très directement des modèles en bond graph. Dans ce cadre, nous avons proposé et formalisé de manière générique une démarche de synthèse de commande par passivation des systèmes physiques à commutations pour lesquels une représentation d'état unique à paramètres booléens et d'indice de nilpotence au plus égal à un peut être obtenue [RI4]. Dans un tel cas, l'expression port-hamiltonienne du modèle est en effet accessible de manière systématique à partir de la forme explicite associée. Il faut souligner que la nature dynamique des correcteurs fournis par cette approche dans le cas général exige l'étude a posteriori de leur stabilité (qui n'est pas garantie). Par ailleurs, l'expression des lois de commande étant le plus souvent obtenue sous forme implicite, une phase complémentaire d'explicitation s'avère nécessaire pour leur implantation effective. Enfin, la nature logique des entrées de commande impose un critère spécifique de réglage de l'amortissement dans la synthèse des correcteurs, dont les sorties théoriques doivent voir leurs évolutions restreintes entre les bornes 0 et 1 sous peine de ne pas être reproductibles en moyenne par une MLI.

## ***5. Perspectives : modélisation dynamique et commande de systèmes physiologiques.***

Un nouvel axe biomédical, dont je suis personnellement le porteur, est en cours d'émergence dans l'équipe. Prolongeant les travaux de thèse de Virginie Le Rolle, il concerne la prise en compte de systèmes physiologiques en termes de modélisation dynamique et de commande, et s'appuie sur l'idée d'étendre au monde du vivant les approches « système » inspirées de l'ingénierie. Cet axe comporte explicitement un enjeu clinique, puisqu'il vise soit à améliorer la compréhension de mécanismes pathologiques à l'aide de modèles de connaissance (physiologie dite intégrative), soit à proposer de nouvelles thérapies à partir des concepts de contrôle-commande. Une telle particularité nous impose une recherche partenariale avec des experts en physiologie clinique, dans laquelle nous apportons nos compétences d'automaticiens. Après la modélisation globale du système cardio-vasculaire, effectuée en

étroite collaboration avec le Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image (unité mixte INSERM/ Université de Rennes 1), nous engageons un projet de recherche relatif au traitement du diabète de type 1 (ou insulino-dépendant) en boucle fermée, en partenariat avec le Service d'endocrinologie du CHU de Rennes. L'objectif visé par nos travaux, à savoir la régulation artificielle de la glycémie, ne connaît à l'heure actuelle aucune solution concrète disponible pour les patients diabétiques. Son enjeu clinique est de taille puisqu'il vise non seulement à améliorer l'état physiologique de ces patients, et ainsi à amoindrir les risques de complications à long terme, mais aussi à les décharger de la gestion de leur maladie au quotidien, en leur évitant notamment des sujétions telles que la stricte mesure des quantités de glucides ingérées à chaque repas (le traitement étant désormais censé s'adapter de lui-même aux variations). La recherche sur ce thème est active, mais essentiellement captée par l'industrie, avec quelques grands laboratoires pharmaceutiques tels que Medtronic [68], qui développent les solutions technologiques (pompes et capteurs de glucose). Au niveau académique en revanche, peu d'acteurs français se sont investis dans cette recherche, malgré l'enjeu qu'elle représente en termes de santé publique. La principale équipe qui s'intéresse explicitement à la régulation de la glycémie en boucle fermée par des voies artificielles est celle du Professeur Eric Renard, au CHU de Montpellier. Cette équipe travaille depuis plusieurs années sur un projet de pancréas artificiel, qui consiste à reproduire l'action d'un pancréas sain à l'aide d'une pompe à insuline implantée sous l'abdomen, et d'un capteur de glucose en continu implanté dans la veine cave supérieure [61]. La mise en œuvre d'une telle solution, souvent qualifiée d'intrapéritonéale-intraveineuse, nécessite une intervention chirurgicale. Ce caractère fortement invasif, qui représente son inconvénient majeur, limite considérablement ses perspectives de diffusion chez les patients. Au niveau international, davantage de travaux sont disponibles, mais beaucoup d'entre eux se basent sur une approche privilégiant également la voie intraveineuse. La recherche que nous proposons de mener dans le domaine s'en distingue dans la mesure où elle s'intéresse résolument à une approche de la régulation glycémique par voie sous-cutanée. Une telle alternative consiste à contrôler par le biais d'un algorithme adéquat le débit instantané d'insuline délivré en sous-cutané par une pompe externe reliée au patient via un fin cathéter, ceci à partir de la mesure de glucose fournie en continu par un capteur également implanté sous la peau. Ce type d'approche reste jusqu'à présent le moins exploré, bien que l'état d'avancement de la technologie permette d'envisager sa mise en œuvre dans un avenir proche, puisqu'on dispose déjà à la fois de pompes à insuline et de capteurs de glucose agissant et mesurant respectivement en sous-cutané. Il est même prévu qu'un protocole de communication par infrarouge entre capteur et pompe soit opérationnel courant 2008 (mais sans que la boucle soit fermée pour autant, les informations issues du capteur n'étant encore transmises à la pompe que pour consultation via l'écran de cette dernière). Comparée au pancréas artificiel cité plus haut, avec lequel elle vise un objectif de régulation commun, la solution sous-cutanée présente l'intérêt majeur d'être non invasive. Elle est de ce fait beaucoup plus légère à mettre en œuvre, ne nécessitant qu'un appareillage externe guère plus contraignant pour le patient que les actuelles pompes à fonctionnement en boucle ouverte. À l'exception de la partie commande qui reste à concevoir, cet appareillage est de surcroît déjà disponible (ou le sera bientôt en ce qui concerne la communication directe entre capteur et pompe) au CHU de Rennes, où le suivi régulier de 250 patients diabétiques sous pompe est assuré. Ainsi, des expérimentations cliniques pourront être conduites localement, permettant à terme une maîtrise complète du projet depuis sa synthèse théorique jusqu'à sa mise en application. Le choix d'un mode d'action externe (sous-cutané) plutôt qu'interne, s'il assouplit notablement la mise en œuvre de l'insulinothérapie automatisée, n'est toutefois anodin ni en termes de modélisation ni en termes de commande. Il introduit au contraire des difficultés spécifiques. En effet,

l'expérience clinique montre qu'une mesure de glycémie réalisée en sous-cutané fournit une information décalée dans le temps par rapport à la même mesure réalisée en intraveineux (tantôt en retard, tantôt en avance selon les conditions). De même, le temps de réaction de la glycémie à l'insuline dépend du site d'injection de cette dernière. Là encore, des retards variables interviennent, qui tirent leur origine physique de phénomènes de propagation, modélisables par des équations aux dérivées partielles [7], [71]. Le modèle du système à commander se trouve donc clairement modifié (dans le sens d'une complexité accrue) par un tel choix, et la loi de commande elle-même devra naturellement en tenir compte. En termes d'approche, notre projet se positionne également différemment d'un certain nombre de travaux disponibles dans le domaine, qui cherchent à reproduire à l'aide d'un modèle mathématique le processus dynamique de production d'insuline par les cellules  $\beta$  du pancréas, lesquelles assurent naturellement la régulation de la glycémie dans un organisme sain [67]. L'idée est dans pareil cas de synthétiser un correcteur artificiel non pas à partir de l'analyse du système que ce correcteur est appelé à réguler, mais en s'inspirant d'un correcteur déjà existant issu du vivant. Nous chercherons de notre côté à modéliser le vivant (en l'occurrence le métabolisme humain du glucose) comme s'il s'agissait d'un système artificiel à commander, pour ensuite lui appliquer des méthodologies de commande déjà éprouvées en ingénierie. Une telle approche réserve *a priori* davantage de degrés de liberté en termes de stratégie de commande. Ce sujet nouveau ouvre à l'évidence des perspectives de recherches très vastes. En dépit de la bifurcation thématique assez nette qu'il implique aussi bien pour moi que pour les autres membres de l'équipe qui s'y investissent à ma suite, nous pensons être en mesure de contribuer efficacement à le faire progresser grâce à notre expertise en modélisation des systèmes dynamiques complexes ainsi qu'en commande non linéaire. En effet, la première phase du projet tel que nous l'envisageons consistera à établir des modèles mathématiques capables de mieux expliquer les mécanismes endocriniens concernés par le diabète, lesquels se révèlent fortement non linéaires au vu des travaux antérieurs. Sur le plan méthodologique, nous nous placerons dans le contexte de la physiologie intégrative, avec le parti pris délibéré de construire un modèle de connaissance du système à commander, à savoir la dynamique qui régit l'évolution de la glycémie sanguine sous l'action des divers facteurs influents (en particulier les apports d'insuline). Compte tenu de la nature des grandeurs mises en jeu dans ce système (concentrations des principaux agents actifs, à savoir notamment le glucose et l'insuline), nous nous orienterons *a priori* vers des modèles pharmacocinétiques de type compartimental, avec le souci d'assurer un compromis entre un caractère suffisamment prédictif et une complexité raisonnable (c'est-à-dire limitée). Bien entendu, de tels modèles ont déjà été proposés dans la littérature sous des formes variées. La plupart d'entre eux s'intéressent toutefois essentiellement aux interactions entre glucose et insuline au niveau sanguin. C'est notamment le cas du modèle de Bergman [8], pourtant très souvent cité comme l'un des plus pertinents [27]. En raison de cette limitation, ces modèles majoritaires ne conviennent pas immédiatement à notre contexte de traitement par voie sous-cutanée. De manière indépendante, mais finalement assez complémentaire, d'autres modèles ont également été établis pour décrire spécifiquement les phénomènes d'absorption d'insuline par les tissus à la suite d'une injection sous-cutanée [56]. Ils revêtent là encore des formes diverses (séparation des dynamiques à l'aide de compartiments multiples, introduction de retards purs, utilisation d'équations aux dérivées partielles). À partir de ces éléments de modélisation partiels et souvent disparates, notre objectif est de construire un modèle global cohérent des interactions entre glucose et insuline sous la double hypothèse d'une mesure de glycémie et d'apports d'insuline réalisés par la même voie sous-cutanée. Pour y parvenir, et à des fins d'identification, nous comptons également nous baser sur l'analyse de données expérimentales, résultats d'essais cliniques. Par ailleurs, il existe eu égard à la modélisation

un autre aspect du problème qui, bien que source de complexité supplémentaire, accroît en même temps sa cohérence avec notre acquis méthodologique passé : il s'agit d'une forme de caractère hybride du métabolisme du glucose, suggéré par le constat d'évolutions dynamiques sensiblement différentes en période post-prandiale et en période de jeûne. Ce caractère hybride, largement ignoré par les divers modèles disponibles dans la littérature, se confirme du reste dans les modes de traitement actuels par pompe en boucle ouverte, qui combinent une perfusion d'insuline en continu à faible débit avec des injections ponctuelles plus massives (notion de bolus). La seconde phase des travaux concernera justement le traitement lui-même, mais en boucle fermée cette fois, à travers l'étude d'algorithmes de commande permettant à la glycémie d'un patient diabétique d'atteindre son niveau d'équilibre normal (celui d'un sujet sain), et de s'y maintenir en dépit des perturbations générées par la vie courante (repas, effort physique, stress, etc.). J'ai déjà souligné plus haut que le système à commander était complexe à divers égards, son comportement étant à la fois non linéaire, retardé et hybride au sens où il fait intervenir plusieurs modes opératoires (distinction entre les périodes postprandiales et de jeûne notamment). Il est de surcroît sujet à de fortes perturbations qui lui confèrent un caractère incertain. Pour faire face à de telles spécificités, les compétences de l'équipe en matière de commande devront certainement être renforcées sur certains points. Nous entrevoyons ainsi des besoins du côté des techniques d'optimisation en général, et de commande prédictive en particulier. En effet, ce type de stratégie a démontré son efficacité pour la commande de systèmes complexes dans lesquels des contraintes doivent impérativement être respectées, ce qui est le cas dans le traitement du diabète de type 1 (on peut par exemple citer les contraintes technologiques liées au matériel utilisé, telles que le débit borné des pompes). Des travaux antérieurs l'ont du reste déjà envisagée pour réguler la glycémie, mais dans un contexte de mesure intraveineuse et d'injection d'insuline intrapéritonéale [21]. Les méthodes spécifiques de commande des systèmes à retard constitueront également un axe à examiner de près [62]. Toutefois, l'arsenal méthodologique à la disposition immédiate de l'équipe comporte également un certain nombre d'outils et de stratégies de contrôle envisageables pour mener à bien ce projet, bien qu'ils aient jusqu'à présent été mis en œuvre dans des contextes applicatifs très différents, relevant de l'ingénierie. Ainsi, la commande par passivation fournit un moyen intéressant de prendre en compte les non linéarités du système à commander. Si elle ne permet pas l'intégration de contraintes dans la démarche de synthèse au même titre que la commande prédictive, elle offre cependant des critères de réglage assez intuitifs pour en favoriser le respect. De surcroît, les lois de commande auxquelles elle conduit possèdent l'avantage d'une expression explicite. Leur implémentation est donc très simple, et dépourvue d'optimisation en ligne. Enfin, on a vu plus haut que cette technique s'accommodait parfaitement de problématiques hybrides. Dans le même ordre d'idée, la commande par mode glissant peut se révéler utile en raison de son aptitude à traiter les systèmes aussi bien incertains que retardés [59]. Pour finir, nous n'excluons pas les techniques basées sur la logique floue, particulièrement séduisantes dans le contexte du diabète dans la mesure où elles ouvrent la voie à une synthèse de commande qui transpose très directement le mode de raisonnement habituel des diabétologues (sous forme de règles qualitatives en fonction des tendances observées). Ces techniques constituent en outre un recours possible en cas d'échec de la modélisation de connaissance. Depuis plusieurs années, l'équipe ASH a développé des compétences relatives à ces outils, en explorant tout spécialement leur mise en œuvre dans un contexte hybride. Elles pourront à nouveau être mises à profit pour agir sur le vivant. Soulignons en guise de conclusion que le projet décrit plus haut, malgré son ampleur, n'épuise pas le champ des possibilités que nous entrevoyons dans le domaine biomédical. Au-delà, l'étude d'autres grands systèmes physiologiques pourraient être abordée avec des approches similaires (le système respiratoire par exemple).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. ABADIE, « Commande des systèmes continus à entrées binaires. Application aux machines électriques », *thèse de doctorat*, 1994.
- [2] A. ACHIR, C. SUEUR, G. DAUPHIN-TANGUY, « Bond graph and flatness-based control of a salient permanent magnetic synchronous motor », *Journal of Systems and Control Engineering*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 219, part I, N° 16, pp. 461-476, 2005.
- [3] ACHIR A., « Contribution à l'étude de la propriété de platitude sur des modèles bond graphs non linéaires », Thesis, Ecole Centrale de Lille, 2005.
- [4] ALLARD B., MOREL H., LAUTIER P., RETIF J.M., « Bond-graphs for average modeling of power electronic converters », *ICBGM'97*, pp 201-206, Phoenix, 1997.
- [5] M. BÂJA, D. PATINO, H. CORMERAIS, P. RIEDINGER, AND J. BUISSON, « Hybrid control of a three-level three-cell dc-dc converter » *2007 American Control Conference*, 2007.
- [6] A. G. BECCUTI, G. PAPAFOTIU, M. MORARI, S. ALMER, H. FUJIOKA, U. T. JONSSON, C.-Y. KAO, A. WERNRUD, A. RANTZER, M. BÂJA, H. CORMERAIS, AND J. BUISSON, « Hybrid Control Techniques Applied to the Step-up DC-DC Converter » *2007 American Control Conference*, 2007.
- [7] B.W. BEQUETTE, « A critical assessment of algorithms and challenges in the development of a closed-loop artificial pancreas », *Diabetes Technology & Therapeutics*, vol. 7, N°1, pp. 28-47, 2005.
- [8] R.N. BERGMAN, « Towards physiological understanding of glucose tolerance. Minimal model approach », *Diabetes*, vol. 38, pp. 1512-1527, 1989.
- [9] W. BORUTZKY, G. DAUPHIN-TANGUY, J.U. THOMA, « Advances in bond graph modelling: theory, software, applications » *Mathematics and Computer in Simulation*, Vol. 39, pp 465-475, 1995.
- [10] BREEDVELD, P., « The context-dependent trade-off between conceptual and computational complexity illustrated by the modeling and simulation of colliding objects », *CESA'96*, Lille, 1996.
- [11] BRENAN, K.E., CAMPBELL, S.L., PETZOLD, L.R., « Numerical Solution of Initial-value Problems in differential-algebraic equations », North-Holland, 1989.
- [12] J. F. BROENINK, P. C. BREEDVELD, « CAMAS, A Bond Graph Simulation Environment for Engineering Systems », *Proceedings IMACS 12th World Congress on Scientific Computation*, Paris, Vol.1, pp.47-49, 1988.
- [13] F.G. BUIL, J.L. PELEGAY, « bond graph modelling of continuous dynamic systems and the systematic computation of their corresponding mass and stiffness matrices », pp.59-64, 1991.
- [14] J. BUISSON, « Elements de base des bond graphs », *Cours polycopié n° 3927*, ESE, 1992.
- [15] J. BUISSON, « Analysis of switching devices with bond-graphs » - *Journal of the Franklin Institute* Vol. 330, N° 6, pp. 1165-1175, 1993.

- [16] J. BUISSON, H. CORMERAIS, « Avoiding Singular Bond Graphs in the Field of Electricity », *Computer Engineering in Systems Applications*, Nabeul-Hammamet, 1998.
- [17] F.E. CELLIER, M. OTTER, H. ELMQVIST, « Bond graph modeling of variable structure systems », *ICBGM'95*, pp. 49-55, 1995.
- [18] Y.Z. CYPKIN, « Theory of control relay systems », Moscow: Gostekhizdat, 1955.
- [19] DAUPHIN-TANGUY, G., BORNE, P., « Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method », *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, N°1/2, pp.157-171, 1985.
- [20] G. DAUPHIN-TANGUY, *Les bond graphs*, Hermès, 2000.
- [21] P. DUA, E. N. PISTIKOPOULOS, « Model-based control of blood glucose for type 1 diabetes », *Multi-Parametric Model-Based Control* (E.N. Pistikopoulos, M.C. Georgiadis, V. Dua), vol. N°2: Theory and Applications, Wiley ed., 2007, pp. 173-196.
- [22] C. EDWARDS, S.K. SPURGEON, « Sliding Mode Control, theory and applications » *Taylor & Francis Systems and Control Book Series*, 1998
- [23] FLIESS, M., LEVINE, J., MARTIN, P., ROUCHON, P., « Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples ». *International Journal of Control*, Vol. 61, No. 6, pp.1327-1361, 1995.
- [24] A.J. FOSSARD, « Commande à structure variable: poursuite approchée du modèle. Application à l'hélicoptère », *Rapport technique DERA 167/91*, 1991.
- [25] L. FRIDMAN, A. LEVANT, « Sliding modes of higher order as a naturel phenomenon in control theory », *Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 217, Springer Verlag, pp. 107-133, 1996.
- [26] FUNG Y.C., « Biomechanics: Mechanical Properties of living tissues », New-York Springer-Verlag, 1993.
- [27] A. DE GAETANO, « Modélisation mathématique du système glucose-insuline », *PhD. Thesis*, 1995.
- [28] GAWTHROP, P.J., « Bicausal Bond Graphs », *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'95)*, Las Vegas, pp. 83-88, 1995.
- [29] GAWTHROP P., GERAINT B., « Bond Graph Modeling », *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 27, 2007.
- [30] GIL, J.C., PEDRAZA A., DELGADO, M., « Flatness and Passivity from a Bond Graph », *IEEE*, 1997.
- [31] J. GRANDA, N. KONG, « Time dependent computational relations between finite elements and bond graph modeling », *Proceedings of the International Conference on Bong Graph Modeling and Simulation*, January 1989.
- [32] B. HAMEL, « Contribution à l'étude mathématique des systèmes de réglage par tout ou rien », 1949.

- [33] HEEMELS, W.P.M.H., BROGLIATO, B., « The Complementarity Class of Hybrid Dynamical Systems », *European Journal of Control* 9, N°. 2-3, pp. 322-360, 2003.
- [34] HENZINGER T., « The Theory of Hybrid Automata », *Proceedings of the 11th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 278-292, 1996.
- [35] HUNTER, P.J., MCCULLOCH A.D. AND TER KEURS H.E.D.J., « Modeling the mechanical properties of cardiac muscle », *Progress in Biophysics & Molecular Biology*, Vol. 69, pp. 289-331, 1998.
- [36] U. ITKIS, « Control systems of variable structure », Wiley, 1976.
- [37] JOHANSSON K.H., Lecture 2: *Hybrid Automata and Executions*, Lecture given in EECS291E Hybrid Systems at UC Berkeley, 2000.
- [38] D. C. KARNOPP, R. C. ROSENBERG, « Introduction to physical system dynamics », McGraw-Hill, New-York, 1983.
- [39] D.C. KARNOPP, D.L. MARGOLIS, R.C. ROSENBERG, « System dynamics: a unified approach », Wiley Interscience, second edition, 1990.
- [40] KARNOPP D.C., MARGOLIS D.L., ROSENBERG R.C. *System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Wiley Interscience, fourth edition, 2006.
- [41] J.D. LAMB, D.R. WOODALL, AND G.M. ASHER, « Singular Bond Graphs », *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, San Diego, 1993.
- [42] J.D. LAMB, D.R. WOODALL, AND G.M. ASHER, « Causal Loop and Mason's Rule for Bond Graphs », *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, San Diego, 1993.
- [43] V. LE ROLLE, « Modélisation multiformalisme du système cardiovasculaire associant bond graph, équations différentielles et modèles discrets », *Ph.D. Thesis of Rennes 1 University*, December 2006.
- [44] LEVINE, W.S., *The control Handbook* (1996).
- [45] M. MALIGORNE, C. SUEUR, AND G. DAUPHIN-TANGUY, « Determination of flat output of linear bond graph model », *13<sup>th</sup> European Simulation Symposium (ESS01, Marseille)*, pp. 740-744, 2001.
- [46] D.L. MARGOLIS, G.E. YOUNG, « Reduction of models of large scale lumped structures using normal modes and bond graphs », *Journal of Franklin Institute*, Vol. 304, N° 1, pp. 65-79, 1977.
- [47] D.L. MARGOLIS, « Bond graphs for distributed system models admitting mixed causal inputs », *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 102, N°2, pp. 125-135, 1980.
- [48] D. L. MARGOLIS, W. C. YANG, « Bond graph models for fluid networks using modal approximation », *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 107, September 1985, pp. 169-175.
- [49] MAZO M., « State of the Art on Hybrid Systems Identification », *Centre for Complex Dynamic Systems and Control Internal Report*, 2005.
- [50] MOSTERMAN P., BISWAS G., « A Theory of Discontinuities in Physical System Models », *Journal of the Franklin Institute*, 1996.

- [51] MOSTERMAN P., BISWAS G., « Formal Specifications for Hybrid Dynamical Systems », in *Proceedings of the Fifteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 568-573, Nagoya, Japan, 1997.
- [52] MOSTERMAN P.J., « Hybrid Dynamic Systems: a Hybrid Bond Graph Modeling Paradigm and its Application in Diagnosis », Thesis, 1997.
- [53] MOSTERMAN, P.J., BISWAS, G., « Building Hybrid Automata of Complex Physical Systems for Real-time Applications », *CDC'99*, Phoenix (1999).
- [54] NASH, M., « Mechanics and Material Properties of the Heart using an Anatomically Accurate Mathematical Model », PhD thesis, University of Auckland, 1998.
- [55] M. NORDIN, P.O. GUTMAN, « Controlling mechanical systems with backlash – a survey », *Automatica*, vol. 38, N°10, pp. 1633-1649, 2002.
- [56] G. NUCCI, C. COBELLI, « Models of subcutaneous insulin kinetics. A critical review », *Computer methods and Programs in Biomedicine*, vol. 62, N°3, pp. 249-257, 2000.
- [57] R. ORTEGA, A. VAN DER SCHAFT, B. MASCHKE, G. ESCOBAR, « Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Port-Controlled Hamiltonian Systems », *Automatica*, Vol. 38, N°4, 2002.
- [58] J.L. PELEGAY, M. DOBLARE, F.G. BUIL, « Towards an efficient integration of bond graph and finite element systematizations in the simulation of continuous dynamic systems ». *1993 Western Simulation Multiconference*. pp.35-40, 1993.
- [59] W. PERRUQUETTI, J.P. BARBOT, « Sliding Mode Control in Engineering » *Control Engineering Series*.
- [60] PINON, D., FADEL, M., MEYNARD, T., « Commande par mode de glissement d'un hacheur à deux cellules », *Revue internationale de génie électrique*, Volume 5/1, 2002.
- [61] RENARD E., COSTALAT G., CHEVASSUS H., BRINGER J., « Artificial beta-cell: clinical experience toward an implantable closed-loop insulin delivery system », *Diabetes Metab*, vol.32, pp. 497-502, 2006.
- [62] J.P. RICHARD, « Some trends and tools for the study of time-delay systems », Plenary lecture, *2<sup>nd</sup> IEEE-IMACS Conference on Computational Engineering in Systems Applications*, vol. P, pp. 27-43, 1998.
- [63] D.E. RIEGLE, P.M. LIN, « Matrix signal flow graphs and optimum topological method for evaluating their gains », *IEEE Transactions on circuits and systems*, Vol. 19, N°5, pp. 427-437, 1972.
- [64] R.C. ROSENBERG AND A.N. ANDRY, « Solvability of Bond Graph Junction Structures with Loops », *IEEE Transactions on circuits and systems*, Vol. 26, n°2, 1979.
- [65] H. SIRA-RAMIREZ, « Sliding motions in bilinear switched networks », *IEEE Transactions on circuits and systems*, Vol. 34, N°8, pp. 919-933, 1987.
- [66] H. SIRA-RAMIREZ, R.A. PEREZ-MORENO, R. ORTEGA, M. GARCIA-ESTEBAN, « Passivity-Based Controllers for the Stabilization of DC-to-DC Power Converters », *Automatica*, Vol. 33, N°4, pp. 499-513, 1997.

- [67] G.M. STEIL, A.E. PANTALEON, K. REBRIN, « Closed-loop insulin delivery – the path to physiological glucose control », *Advanced drug delivery reviews*, vol. 56, pp.125-144, 2004.
- [68] G. M. STEIL, M. F. SAAD, « Automated insulin delivery for type1 diabetes », *Curr Opin Endocrinol Diabetes*, vol. 13, pp. 205-211, 2006.
- [69] STRÖMBERG J.E., TOP J., SÖDERMANN U., « Variable causality in bond graphs caused by discrete effects », *ICBGM'93*, 1993.
- [70] C. SUEUR, G. DAUPHIN-TANGUY, « Structural Controllability/ Observability of Linear Systems Represented by Bond Graphs », *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 326, N°6, pp. 869-883, 1989.
- [71] Z. TRAJANOSKI, P. WACH, P. KOTANKO, A. OTT, F. SKRABA « Pharmacokinetic model for the absorption of subcutaneously injected insulin and monomeric insulin analogues », *Biomedizinische Technik*, vol. 38, pp. 224-231, 1993.
- [72] UTKIN, V.I. « Variable structure systems with sliding modes », *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, p.212-222, 1977.
- [73] J. VAN DIJK AND P.C. BREEDVELD, « Simulation of System Models Containing Zero-order Causal Paths- I. Classification of zero-order causal path », *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, n°5/6, 1991.
- [74] WU, S.T., YOUCEF-TOUMI, K., « On Relative Degrees and Zero Dynamics from System Configuration », *Proceedings of the American Control Conference*, San Fransisco, pp. 1025-1029, 1993.

## ANNEXES

- 1. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems (2008),  
doi.org/10.1016/j.nahs.2008.03.002***

# **Bond graph modelling of hard nonlinearities in mechanics: a hybrid approach**

P.Y. Richard, M. Morarescu, J. Buisson

*SUPELEC / IETR*

CS 47601, F-35576 CESSON-SEVIGNE Cedex

*France*

Fax : (+33) 299 844599

[Pierre-Yves.Richard@supelec.fr](mailto:Pierre-Yves.Richard@supelec.fr), <http://www.supelec.fr/>

Abstract – This paper addresses the issue of hard nonlinearities encountered in the field of mechanics. It focuses on three typical examples of them, namely dry friction, backlash and irreversible motion transmission. Such phenomena are widespread in mechanical devices, the overall dynamics of which may be deeply affected in some conditions. Since hard nonlinearities differ from smooth ones in that the resulting dynamics generally cannot be linearized around setpoints, it is necessary to explicitly take them into account in the modelling process, especially when a control objective is considered. A hybrid approach mixing bond graph with ideal switches and finite state automata is proposed in order to abstract the previous nonlinear dynamics in elementary models that may be further integrated in whole representations of mechanical systems. After a detailed description of each model, the efficiency of the approach is illustrated on the example of a mechanical system combining all the nonlinear phenomena of interest.

Keywords: hard nonlinearities, mechanics, hybrid model, switched bond graph

## **1. Introduction**

Although most real physical systems intrinsically reveal a time continuous dynamics, the latter may be either modelled from a continuous or from a discrete point of view, depending on their overall rate of evolution with respect to their observation time scale. However, there exist many physical systems in which some components evolve with a much faster dynamics than the others, or in which some phenomena occur at much smaller time scales than the rate at which the system needs to be analyzed. When trying to simulate such systems, steep gradients often lead to numerical problems that lower the integrity of the data obtained. For that reason, their dynamics is usually simplified by using the abstraction of a piecewise continuous description. But such a modelling approach introduces discontinuous changes in their dynamic evolution when transition is made from one continuous model to another [1]. Individual components which thus exhibit discontinuous behaviours can be found in a large variety of physical systems, including clutches in mechanical systems, valves in hydraulic systems, diodes in electric systems, etc. More generally, fast nonlinear phenomena involved in slower overall dynamics naturally lead to discontinuous models. Since the latter cannot be linearized around setpoints without a dramatic loss of relevance, such nonlinearities are described as hard (or non smooth). Some of the most widespread examples of hard nonlinearities in mechanics are dry friction, backlash and irreversible motion transmission. The latter will be specifically studied in the present paper. Taking them into account leads to the so-called hybrid models, where continuous and discrete event dynamics are mixed [2], [3]. More precisely, mechanical systems with hard nonlinearities belong to the class of *switching*

*systems*, where a continuous evolution is interleaved with discrete changes in the dynamics. Such systems, also called non regular ones, exhibit a piecewise continuous dynamic evolution. Their study has recently become a major research issue [4], [5]. Several modelling approaches can be found in the literature, with various degrees of genericity. The use of *linear complementarity problem* (LCP) formalism is probably the most generic alternative to the approach proposed in the present paper [6]. Its main drawback lies in the implicit nature of the models it provides, which requires dedicated solvers to be used for their simulation. There still exists a variety of other models which are more specific to a given switching problem, for instance the backlash phenomenon, about the modelling and control of which a thorough survey is available in [7]. Referring to the general *hybrid systems* theory, switching systems can also be modelled using the *hybrid automaton* approach, which allows each partial continuous dynamics to be described by a specific state model (differential equations), whereas the discrete transitions between the different resulting state models are represented by means of a finite state automaton [8], [9]. Thus, hard nonlinear phenomena are reduced to a finite set of continuous behaviours described by separate differential equations, associated with a switching mechanism. More specifically, the approach proposed in this paper, which can be applied to any switching system whatever its physical field may be, uses the bond graph to represent the various continuous dynamics, with switching elements that describe the discrete passages between different continuous modes. Bond graph is a modelling methodology which, in its early version, is devoted to the modelling of physical systems continuous dynamics from an energy point of view, the resulting models naturally meeting the energy balance [10], [11]. The first benefit expected from using this modelling tool is its intrinsic modularity which allows complex models to be built by composition of elementary ones. The second benefit is the existence of systematic procedures leading from bond graph models built graphically to explicit computation schemes (which allows the use of standard solvers for simulation purpose). Moreover, bond graph formalism has been enriched with extra elements called *switches*, which can be used either to model physical elements such as diodes or valves or, in a more abstract sense, to model shifting phenomena [5], [12], [26], [27]. In this paper, the switch is a transitional element used to generate new modes of operation, so it should not necessarily be regarded as a physical component but rather as a control concept. This element is ideal insofar as it is characterized by an instantaneous commutation time. Its behaviour is similar to that of a bond graph *source* element, except that it can operate in two states, denoted by  $E$  and  $F$ . In  $E$  state, the switch behaves like an effort source, while it behaves like a flow source in  $F$  state. In most cases (especially when modelling electrical circuits), the switch is either used as a zero effort or as a zero flow source, meaning that it exchanges no energy with the junction structure (lossless element). Yet, this property does not always hold for mechanical shifting systems, and it can therefore be convenient to extend the notion of ideal switch to non-zero sources (which still commute instantaneously between  $E$  and  $F$  states). Of course, the switching mechanism implemented by the finite state automaton needs to be in correlation with the physical laws governing the system. According to this so-called *hybrid bond graph* approach, any commutation between two modes is represented by a change in the configuration of the bond graph switches. Alternatively, each set of individual states for the various switches of a model defines a specific mode, corresponding to a specific continuous dynamics of the considered system.

This paper focuses on the study of bond graph with ideal switches as a modelling tool for hard nonlinearities in the mechanical field. The proposed approach consists of finding the continuous modes that each of the above phenomena exhibits, and to use the *hybrid bond graph* formalism to give a general model that best describes their overall dynamics. The paper is organized as follows. Sections 2, 3 and 4 successively show the results of the above-

mentioned modelling approach applied to the three elementary nonlinear mechanical phenomena of interest, namely dry friction in section 2, backlash (or mechanical freeplay) in section 3 and lastly irreversible motion transmission in section 4. Illustrative simulation curves are displayed in each case. Next the hybrid modelling methodology based on switched bond graph and finite state automata is explained in section 5. Lastly, section 6 applies it to a more complex mechanical system the dynamics of which exhibits all the previous nonlinear phenomena together.

## 2. Dry friction modelling

The term *friction* refers to a resistive force that appears when a relative motion exists between two bodies in contact. Generally, it is used to describe any speed or force dependent energy dissipation in a system. *Dry friction* specifically refers to friction in the case of solid to solid contact. It is a complex nonlinear phenomenon, present in almost every mechanical system, which depends on many factors, such as surface topography and materials, relative motion, presence and type of lubrication.

### 2.1. General Models for Dry Friction Phenomenon

Early friction laws (known as Coulomb's law) state that the friction force is given by the normal component of the contact force multiplied by a so-called frictional coefficient depending on the materials [13]. Afterwards, a great variety of friction models have been reported in the literature, relating to different properties of the contact surface with respect to both microscopic and macroscopic levels. Roughly speaking, it can be distinguished between dynamic models, which implement a so-called frictional memory, and static ones, which just assume a static relation between the friction force and the relative velocity. Dynamic models account for various complex phenomena such as presliding displacement, frictional lag, varying breakaway force and stick-slip motion. They include *Bristle* model, *Dahl* model, *LuGre* model and *Leuven* model [13]. In this paper however, the study is restricted to static models for simplicity. The simplest static representation of friction is the basic Coulomb model, where the friction force is independent of the area of contact, opposed to the relative motion and proportional to the absolute value of the normal contact force. It does not depend on the magnitude of the relative velocity between the bodies in contact, but only on its sign. A general relation for this model is given in (1), where  $\mu$  represents the frictional coefficient,  $F_N$  the normal contact force and  $v$  the relative velocity.

$$F = \underbrace{\mu |F_N|}_{F_C} \operatorname{sgn}(v) \quad (1)$$

It should be noted that  $F$ , which according to (1) has the same sign as relative velocity  $v$ , actually does not stand for the friction force itself but rather for the external force required to counterbalance it. By another way, Coulomb model unequivocally only defines the friction force for nonzero relative velocities, also called *kinetic friction*. On the other hand, when both bodies in contact are in a state of relative rest, the friction force cannot be given by (1), since it is experimentally observed that it can take a higher magnitude than the kinetic force  $F_C$  [14]. Indeed, the external force applied at rest needs to exceed a so-called *static friction* (or *stiction*) value  $F_S$  which is greater than  $F_C$  in order to generate a relative motion. As a consequence, an oscillatory behaviour known as *stick-slip* motion can appear in some conditions. The friction force at rest can be defined by (2).

$$F_{stick} = \begin{cases} F_{ext} & \text{if } v=0 \text{ and } |F_{ext}| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(F_{ext}) & \text{if } v=0 \text{ and } |F_{ext}| \geq F_S \end{cases} \quad (2)$$

It depends on the external force applied to the system, and its magnitude is limited by  $F_S$ , which gives the upper and lower limits of the external force between which the system remains in a state of relative rest. Any external force greater than  $F_S$  in absolute value automatically results in relative motion. A friction model that implements both Coulomb and static friction forces is represented in Fig. 1. Another well-known static model, which suppresses the discontinuity between the stiction force and the kinetic friction one, is obtained by taking into account the Stribeck effect [14], [13], [15]. The latter, observed for low relative velocities (in the vicinity of zero), is the tendency of the friction force to decrease while the relative velocity increases, due to boundary lubrication. However, it does not resolve the problem with the discontinuity at zero relative velocity. Actually, all the models derived from the basic Coulomb model exhibit this unwanted property. A solution to overcome it would be to approximate the discontinuous model by a curve with a steep but finite slope [14], but other problems emerge when choosing this type of solution. First of all, a very steep slope around zero velocity results in very short integration time steps, in the case of a simulation. Furthermore, this model allows relative motion to appear even though the external forces over the bodies do not overcome the maximum stiction force  $F_S$ , so it actually does not provide true stiction behaviour.

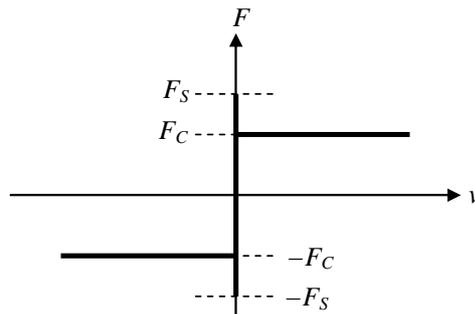


Fig. 1. Coulomb and static friction model

## 2.2. Hybrid Bond Graph Model for Dry Friction Phenomenon

According to the general models mentioned above, a comprehensive representation of the dry friction phenomenon must distinguish between two operating modes. The *Stick* mode is characterized by a zero relative velocity (either angular, or linear, depending on the nature of the relative motion) of the bodies in contact with respect to one another. So it corresponds to a state of relative rest. The validity of this first mode only depends on the magnitude of the external effort (either torque or force) imposed over the system, or equivalently to the magnitude of the friction effort, since the latter exactly compensates the former in the considered mode (which is known as the stiction phenomenon). The *Slip* mode, in return, is characterized by a constant value of the friction effort (disregarding the potential additional viscous friction), and its validity only depends on the relative velocity, which must remain nonzero. Thus for both operating modes, a duality can be observed between the friction (either static or kinetic) effort and the relative velocity (or sliding velocity). Now, disregarding sign issues, these two variables are those which define the power exchange between both bodies in contact. It is then possible to abstract the dry friction phenomenon by means of an elementary bond graph model where the contact between two solid bodies  $A$  and

$B$  is expressed by a power link (a bond) connected to a so-called generalized switch which, according to the current mode, either behaves like a zero flow source, or like a constant effort source (more precisely like a modulated source in the latter case, since the sign of the effort it imposes depends on that of the flow on its bond). This leads to the (acausal) bond graph elementary model of dry friction shown in Fig. 2.

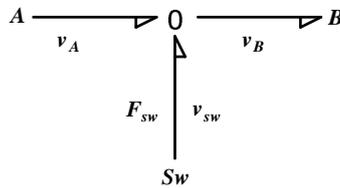


Fig. 2. Elementary bond graph representation of the dry friction phenomenon

Alternatively, it would also have been possible to replace the generalized ideal switch by a *one* junction connected to both a standard ideal switch (zero source in either mode) and an effort source modulated by the flow of this *one* junction, providing the force defined by equation 1. The resulting atomic bond graph would have been equivalent to that of Fig. 2, but with a less concise form. Flow variables  $v_A$  and  $v_B$  from Fig. 2 respectively denote the velocities of solid bodies  $A$  and  $B$  with respect to a fixed frame at their point of contact (actually the components of these velocities in the common tangential plane to  $A$  and  $B$ , which is that of the relative motion). The effort variable  $F_{Sw}$  on the switch bond is the tangential contact force exerted by  $A$  over  $B$  (the friction force imposed on  $B$ ), and the flow variable  $v_{Sw}$  on the same bond is the relative velocity of  $B$  with respect to  $A$ . The state of the switch – and consequently its causality – changes according to the current operating mode. In *Slip* mode, when solid bodies  $A$  and  $B$  are in motion with respect to one another, the switch is in  $E$  state, behaving like an effort source. Then it imposes over its adjacent *zero* junction a force equal to the kinetic friction, given by the Coulomb model. In *Stick* mode, when both bodies are in a state of relative rest, the switch is in  $F$  state, behaving like a flow source. Then it imposes a zero velocity over the *zero* junction, which results in the equality of both velocities  $v_A$  and  $v_B$ . Overall, the state of the switch is governed by the state automaton shown in Fig. 3.

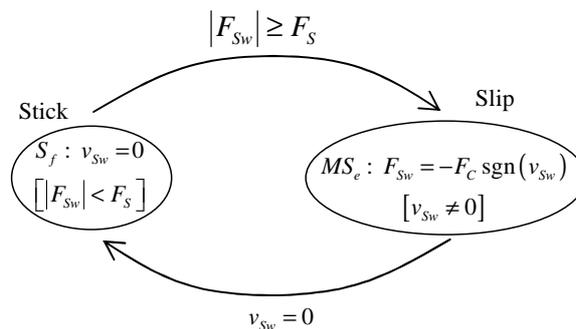


Fig. 3. Dry Friction automaton model

Referring to the hybrid automaton formalism, the invariant of the *Stick* mode is defined by the constraint  $|F_{Sw}| < F_S$ , while that of the *Slip* mode is defined by  $v_{Sw} \neq 0$ . The transition from *Slip* to *Stick* is done whenever the value of the relative velocity becomes zero (hit crossing). The inverse transition from *Stick* to *Slip* is done when the magnitude of the force imposed to

the switch exceeds the threshold value for static friction ( $F_s$ ). Now, as long as the *Stick* mode prevails, the causality of the elementary model displayed in Fig. 2 is such that the previous force is imposed by the junction structure to which this model is connected. In practice, it would be set by the magnitude of external forces acting on the system. It shows that the model also accounts for the *stiction* phenomenon (the magnitude of the friction force at zero relative velocity is set by that of external forces). The above model, consisting of both the bond graph representation of Fig. 2 and the hybrid automaton of Fig. 3, is absolutely general. It is intended to capture the dry friction phenomenon itself and give an idealized description of its dynamics in the most elementary way possible. This is why it excludes any viscous friction. If present, such an effect, which corresponds to a linear phenomenon, can be simply added to the model by using a standard resistive element imposing a force dependent on the relative velocity. More generally, this bond graph elementary model, together with the automaton which manages the state of its switch, can be inserted in any bond graph model of the whole mechanical system. Indeed, one of the great advantages of the bond graph methodology is its intrinsic modularity which allows the straightforward association of a given submodel with any additional element to build the model of a more complex system. This ability will be illustrated in the next paragraph.

### 2.3. Simulation of a Two-Body System with Dry Friction

In order to test the dry friction model described above, let us consider a system made up of two bodies in contact, each driven by a specific force. Its schematic representation is shown in Fig. 4.

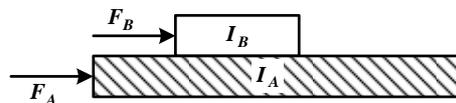


Fig. 4. Frictional system of two bodies in contact

For the sake of consistency with the bond graph notation, the masses of bodies have been denoted by  $I$  (inertia). External forces  $F_A$  and  $F_B$  acting over the bodies in contact are taken as the input variables. The corresponding bond graph model is depicted in Fig. 5. Of course, the diamond property could be used to simplify it by merging both of its *zero* junctions. Yet, such an operation has deliberately been omitted, in order that the whole model explicitly display the frictional submodel of Fig. 2, illustrating the modularity of the modelling process. The model of Fig. 5 remains to be completed by the automaton of Fig. 3. For simulation purpose, the latter can be straightforwardly implemented by a SIMULINK\Stateflow block, while the former needs the analysis procedure reported in [5] to be performed so that explicit computational schemes could be defined for both modes, and implemented using SIMULINK blocks.

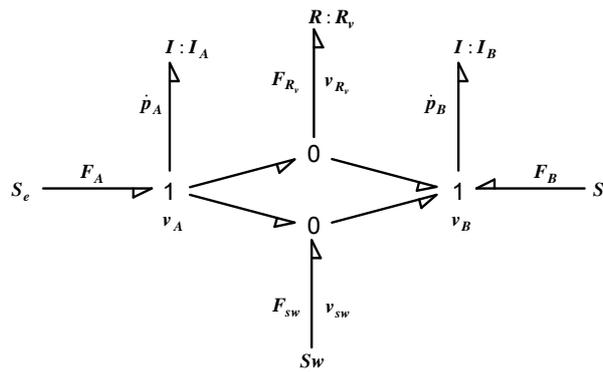


Fig. 5. Acausal bond graph representation of a two-body system with friction

Using the resulting implementation, a simulation was performed with the following values for the systems parameters:  $I_A$  and  $I_B$  were both assigned a value of 10. The magnitude of the kinetic friction and of the threshold for static friction were chosen 11 and 14 respectively. The magnitude of the viscous friction coefficient ( $R_v$ ) was chosen as 1. The input signals of the system, represented by both external forces, are given in Fig. 6. The resulting evolution of the state variables ( $p_A$  and  $p_B$  momenta) is depicted in Fig. 7.

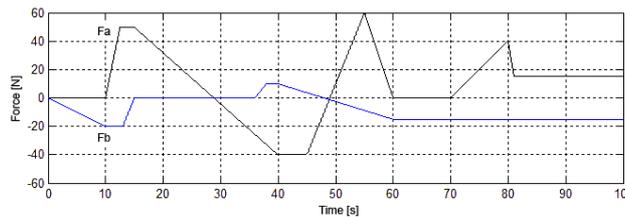


Fig. 6. The natural entries ( $F_A$ ,  $F_B$ ) for the two-body system with dry friction

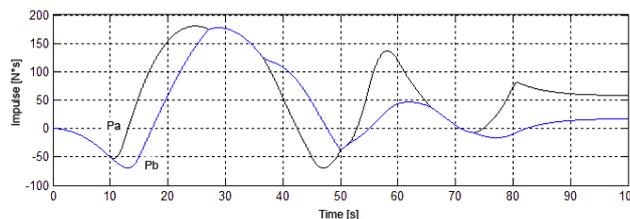


Fig. 7. The evolution of the state variables ( $p_A$  and  $p_B$ ) for the two-body system

In Fig. 7, the sections where both state variables are equal correspond to the *Stick* mode. As a consequence of the bodies having the same mass and because they are at a relative state of rest (equal velocities), their momenta are identical. The portions where the state variables have a different evolution are a result of the system dynamic evolution in *Slip* mode. The evolution of the friction force is given in Fig. 8. Since the viscous friction coefficient has a magnitude of 1, the viscous friction value is given by that of the relative velocity ( $F_{R_v} = R_v v_{R_v}$ ).

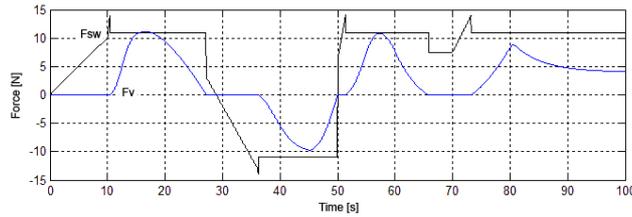


Fig. 8. The evolution of the Coulomb friction force ( $F_{sw}$ ) and of the viscous friction component

The general simulation model given for dry friction can be easily extended to include other observed properties of the friction phenomenon. Its modularity makes it easier to implement features such as Stribeck effect (by inserting a time variable function to compute the value of the kinetic friction, when in *Slip* mode, instead of using a constant value).

### 3. Backlash modelling

*Backlash* generally refers to the *freelap* between adjacent movable components within a mechanical system. In engineering terms, backlash translates into a hysteresis type of behaviour for the components characteristics. The nonlinearity associated with backlash comes from the so-called deadband effect. Most models that describe backlash are based on this aspect. More complex models also take into account the impact dynamics when the components which suffer from backlash collide [16]. This paper focuses on the deadband effect of backlash and uses a nonelastic (plastic) hypothesis over the impact dynamics, which implies that two bodies remain in contact after they have collided, and the momentum conservation law holds.

#### 3.1. The Deadband Model for Backlash

The deadband is a region of input motion in a mechanism which results in no appreciable output motion [15]. This can be described by the graph in Fig. 9, which represents the output displacement with respect to the input one. When the actuator (driving component) and the receiver (driven one) move together, the relation between their displacements is represented by one of both oblique parallel lines, depending on the motion orientation: a positive velocity describes an upward motion, while a negative one describes a downward motion. Each horizontal path describes a loss of contact between the actuator and the receiver, meaning that their respective motions become independent from one another.

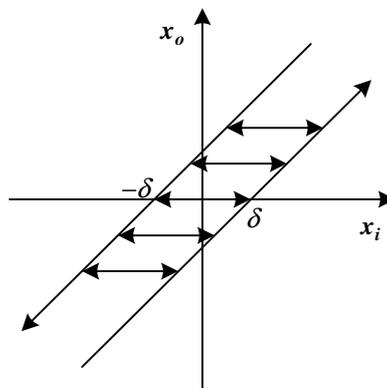


Fig. 9. Graphical representation of backlash model

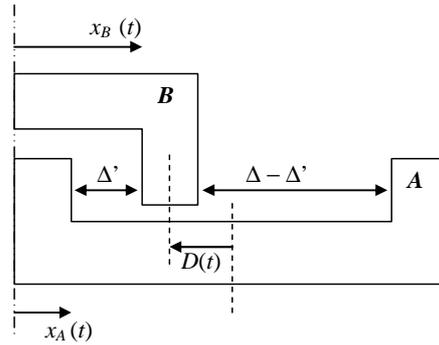


Fig. 10. Backlash between two mechanical components

In the general case of Fig. 10, where component  $B$  drives component  $A$ , let  $D(t)$  denote the current position in the backlash. By convention, this variable measures the relative displacement of actuator  $B$  with respect to receiver  $A$ , which is bounded. To ensure that its domain of variation is symmetric, which implies that  $D(t) = 0$  at the center of the deadzone, it can be defined as  $D(t) = x_B(t) - x_A(t) - \frac{\Delta}{2} \text{sgn}(x_B - x_A)$ , where  $\Delta$  is the total deadzone length, while  $x_A$  and  $x_b$  denote the absolute positions of two specific surfaces respectively belonging to solid bodies  $A$  and  $B$  and possibly coming into contact (either left or right contact for  $A$  and  $B$ ). It should be noted that the sign of  $x_B - x_A$  can never change once the pair of contacting surfaces has been chosen among both possible ones (the choice of Fig. 10 is left contact, with  $x_B \geq x_A$  always holding, and therefore  $\text{sgn}(x_B - x_A) = +1$ ). Based on both the schematic representation of Fig. 10 and the previous definition of  $D(t)$ , a mathematical description of backlash known as the hysteresis model can be proposed [17]. It is given by (3).

$$\dot{x}_A(t) = \begin{cases} \dot{x}_B(t) & \text{if } \dot{x}_B > 0 \text{ and } D(t) = +\Delta/2 \\ & \text{or } \dot{x}_B < 0 \text{ and } D(t) = -\Delta/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

According to this model, if actuator  $B$  starts a positive motion (to the right) from within the deadzone, receiver  $A$  remains at rest until the right-side gap becomes null. Once in contact, both components keep moving together until  $B$  changes to a reverse motion. Then, because of its inertia,  $A$  continues its previous motion autonomously, and quickly stops if the friction level is high enough, while the actuator proceeds with the negative motion. Once the actuator has covered the left-side gap, the components come into contact again and continue the motion together until the actuator motion reverses again, and so on.

### 3.2. Hybrid Bond Graph Model for Backlash Phenomenon

Based on the deadband effect described earlier, the elementary bond graph of Fig. 11 (actually the same as in the case of dry friction) can be proposed to model the backlash. It uses an ideal switch again, which makes the model commutate between two operating modes, namely the *Contact* mode, where the driving component dictates the motion to the driven component which moves with the same velocity, and the *Backlash* mode, where both components move freely under the action of different external forces.

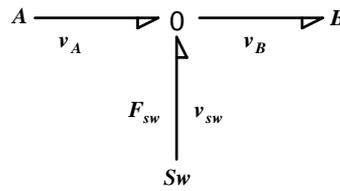


Fig. 11. Acausal bond graph model for Backlash

In Fig. 11,  $A$  and  $B$  denote the couple of components that suffer from backlash. In *Backlash* mode, when the components move inside the deadzone, there is no energy transfer between them. The components act freely under the action of forces applied to each of them. This can be modeled by the switch imposing a null effort ( $F_{sw} = 0$ ) over the connecting *zero* junction. In order to describe the *Contact* mode, where both components move together in a *driving-driven* manner, the switch passes to  $F$  state and imposes a null flow over the junction. This ensures that the velocities of both components are identical. In this case, the effort over the switch element can be viewed as a normal contact force (*action-reaction* type) between  $A$  and  $B$ . The sign of this force is given by the orientation of the action from  $A$  to  $B$ . As in the case of the dry friction model, the causal configuration of the switch determines two different dynamic behaviours. Looking back to the general representation of a system with backlash in Fig. 10, it can be seen that contact between both components can either happen on the right-side or on the left-side of the backlash. Now the current position in the backlash can be expressed as a function of time:

$$D(t) = D_0 + \int_0^t (\dot{x}_B(\tau) - \dot{x}_A(\tau)) d\tau \quad (4)$$

In (4),  $D_0$  denotes its value at  $t=0$ , while  $\dot{x}_B - \dot{x}_A$  gives the relative velocity between both components. The variations of  $D(t)$  are restricted to  $[-\Delta/2, +\Delta/2]$  interval. Formally, *Contact* mode can be defined by a relative displacement  $D(t_{cl}) = -\Delta/2$  and a positive contact force (from  $A$  to  $B$ ) or by a relative displacement  $D(t_{cr}) = +\Delta/2$  and a negative contact force (from  $A$  to  $B$ ). The first situation corresponds to a contact on the left-side of the backlash while the latter corresponds to contact on the right-side of the backlash.

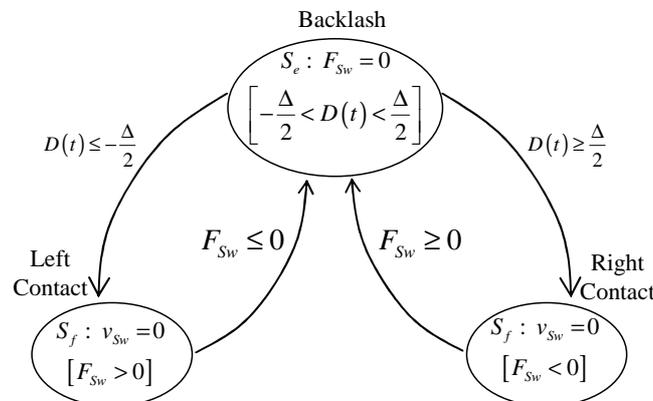


Fig. 12. Three-state automaton associated with the hybrid model for Backlash

In order to model this behaviour, an automaton with three locations (one for *Backlash* mode and two for *Contact* on the left and on the right side respectively) can be implemented as

shown in Fig. 12. The *invariants* for the locations are as follows: for *Backlash* mode (where  $F_{sw} = 0$ ) the position in backlash has to remain within the lower and upper bounds of the deadzone determined by  $-\Delta/2$  and  $\Delta/2$  respectively; for *Right Contact* mode ( $v_{sw} = 0$ ) the contact force  $F_{sw}$  has to remain negative; for *Left Contact* mode ( $v_{sw} = 0$ ) the contact force  $F_{sw}$  has to stay positive. The transitions are executed when the invariant conditions no longer hold. Transition from *Backlash* to *Right* or *Left Contact* is executed when  $D(t)$ , which is a function of  $v_{sw}$ , reaches one of the deadzone bounds. Transition from *Left Contact* to *Backlash* is made when contact force ( $F_{sw}$ ) tends to become negative (decreases to zero from an initial positive value). On the other hand, the transition from *Right Contact* to *Backlash* is made when the contact force ( $F_{sw}$ ) tends to become positive (increases to zero from an initial negative value). Merging both locations associated with *Left Contact* and *Right Contact* allows a new automaton with only two locations to be obtained, which is similar to the one used for the dry friction model. Fig. 13 describes this generalized version of the automaton, in which the invariants for both locations have been encapsulated into a single relationship. The locations of the automaton in Fig. 12 associated with the  $F$  state of the bond graph switch were encapsulated in a more general *Contact* location. The invariant condition for the new location is composed by adding the invariant conditions of both previous locations. This means that for remaining in *Contact* mode, if both components touched on the left side ( $D = -\Delta/2$ ), then the contact force has to stay positive ( $F_{sw} > 0$ ) and if they touched on the right side, the contact force has to remain negative ( $F_{sw} < 0$ ). A transition from *Contact* to *Backlash* is made when the aforementioned invariant condition does not hold any longer. Inverse transition from *Backlash* to *Contact* is performed when relative displacement reaches one of the deadzone bounds.

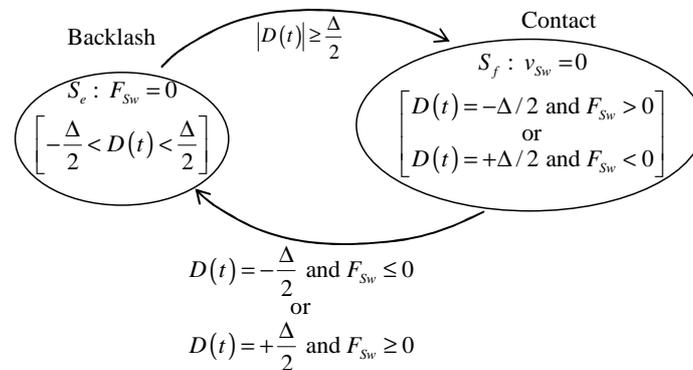


Fig. 13. Generalized two-state automaton for the Backlash model

### 3.3. Simulation Model for a System with Backlash

A simulation is done for a system composed of two mechanical parts with inertias  $I_A$  and  $I_B$  under the action of separate external forces, and suffering from backlash, the deadzone size being given by  $\Delta$ . The whole system is depicted in Fig. 14. Unlike previously, the relative displacement  $D(t)$  of  $B$  with respect to  $A$  is defined as evolving in  $[0, \Delta]$ . Its initial value is zero, corresponding to left side contact. Mechanical impact between the components is still considered plastic. The generic bond graph model consists of two inertial elements associated with the masses of both components, of two effort sources describing the external forces that

act over the mechanical system, and of the elementary model describing the backlash, as shown in Fig. 15.

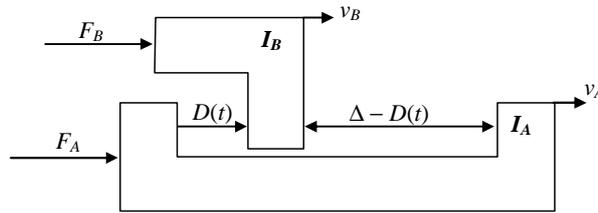


Fig. 14. Schematic representation of a system composed of two mechanical parts with backlash ( $\Delta$  represent the size of the *deadzone*)

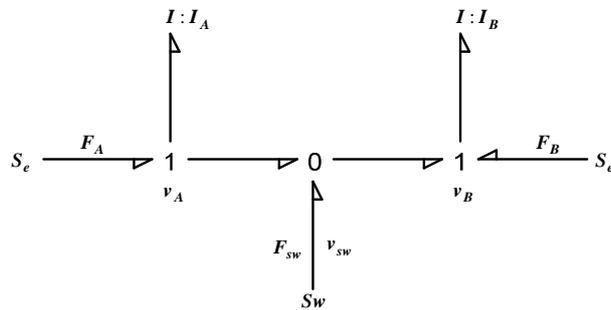


Fig. 15. Acausal bond graph representation of a mechanical system with Backlash

Which component actually drives and which is being driven only depends on the entries  $F_A$  and  $F_B$  of the system and also on the inertias of its mechanical components, but does not affect the model itself, in which  $B$  is arbitrarily considered as the actuator. The causal assignment for the  $E$  state of the switch, associated with the *Backlash* location of the automaton, results in both inertial elements gaining integral causality. By cutting the energy flow between both *one* junctions, the switch allows both components to have separate dynamic evolutions which only depend on the external forces applied to each of them and on their own inertias. In the other mode of operation, the switch is in  $F$  state, imposing a null flow over the junction. Because its adjacent junction is *zero* type, it results in identical velocities at both ends. Both mechanical components remain interlocked as long as the invariant condition holds. With respect to the previous configuration (which is chosen as the reference one), one inertial element loses its integral causality. It results in one end imposing the flow over the other end. This type of behaviour can be explained simply because one component is driving and the other is being driven. The choice of which one between both inertial elements loses its integral causality is arbitrary. In the present case, the choice was made for  $B$  inertial element, but an identical dynamic model would have been obtained otherwise. The decision logic described by the automaton of Fig. 13 has been implemented by a Stateflow block defining a two-location automaton, while the continuous dynamics in both operating modes have been implemented using SIMULINK blocks. In order to test the simulation model, the following values were chosen for the set of parameters:  $I_A$  and  $I_B$  both have a magnitude 10, the size of the dead is  $\Delta = 0.1$ , the initial relative displacement is null, and the input forces are given by Fig. 16. Both signals have the same amplitude, and exhibit  $\pi/2$  phase shift. The evolution of the state variables, which represent the momenta of both components, is given in Fig. 18. The regions where both state variables share the same value correspond to *Contact* mode dynamics. At the beginning of the simulation, because the initial

displacement in null and because the force applied over  $A$  is positive and greater than the force over  $B$  the model initially switches to contact mode. At the beginning, component  $A$  is driving and component  $B$  is being driven. The discontinuities that appear along the evolution of the state variable are associated with the moment where both components enter in contact with each other. This is a consequence of the conservation of momentum law that was integrated into the model of Backlash in order to describe the dynamics of impact. Because both components share the same mass, their common velocity *just after* impact is half the sum of their different velocities *just before* impact. Transitions between states are generated by the evolution of the contact force  $F_{sw}$  (from *Contact* to *Backlash*) and by the evolution of the relative displacement which is a function of the relative velocity  $v_{sw}$  (from *Backlash* to *Contact*). Both are shown in Fig. 17.

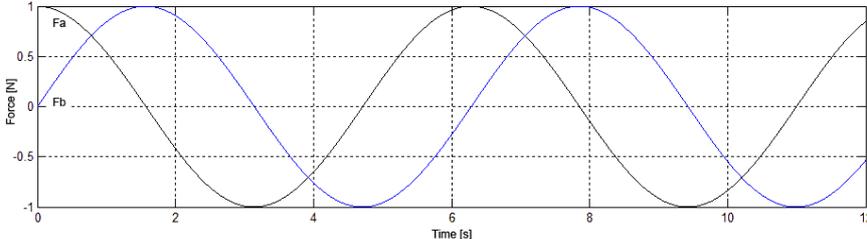


Fig. 16. The input signal for simulation of the Backlash model

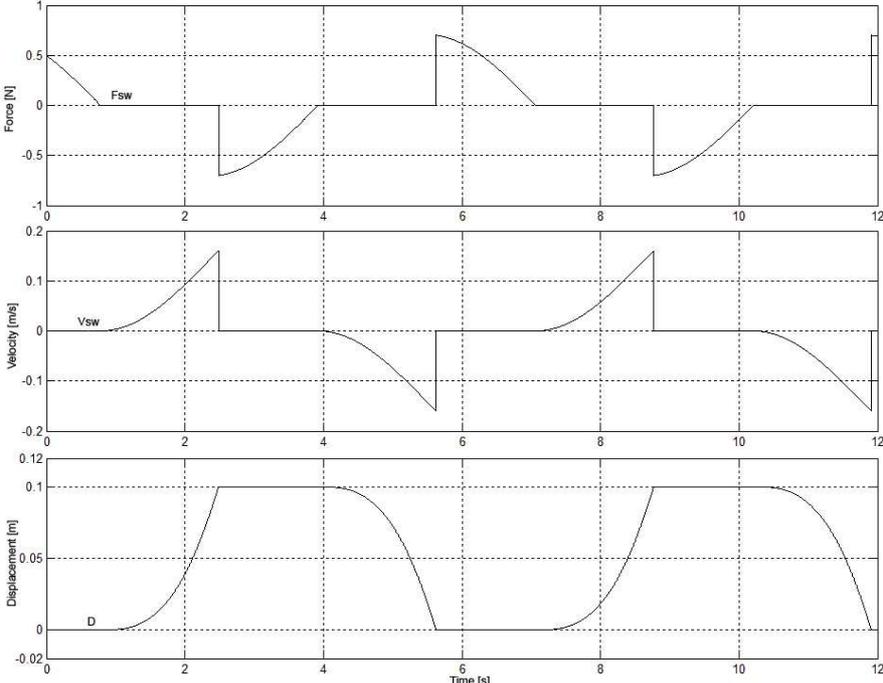


Fig. 17. The evolution of the effort and flow over the switch and the evolution of the relative displacement

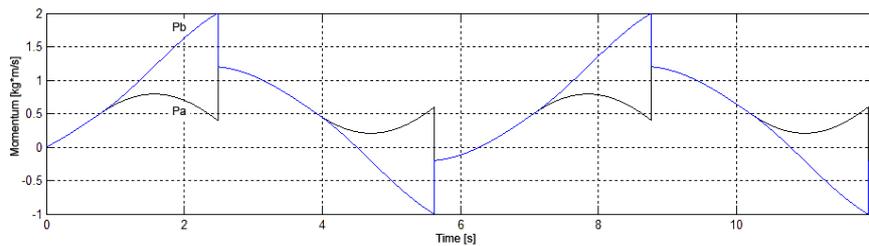


Fig. 18. The evolution of the state variables of the Backlash model

#### 4. Irreversible motion transmission modelling

In mechanics, the term *transmission* refers to a system which provides a speed-power conversion known as *gear reduction*. It generally transforms a motion of a smaller torque at high velocity into a motion at lower velocity but with a higher torque. Also, transmission can refer to the transformation between different mechanical motions, for example the transformation of a rotary motion provided by a motor to a linear motion of an actuator. The property of irreversibility for a transmission system relates to the coupling between the drive member and driven member. The irreversible transmission assures that the driven member can move in any direction (in relation to the degrees of freedom in the system) when under the actuation from the drive member, but the transmission locks from movement, in any direction, under the actuation of the driven member. Such a property both results from geometrical features (e.g. lead angle, pressure angle) and friction level between the drive and driven members of the transmission. Well known examples of irreversible transmissions are *worm gears* and *nut-screw* systems. The latter is specifically studied further.

##### 4.1. Nut-Screw System with Irreversible Motion Transmission

A nut-screw mechanical system operates the conversion of rotary motion into equivalent linear displacement. Typically, a rotary driver (e.g. electric motor) is mechanically connected to a long shaft termed as *screw*. The rotary motion of the motor makes the screw shaft rotate also, the latter having a continuous helical thread machined on its circumference running along the length. The screw is inserted into another mechanical body termed as *nut*. The nut also has a similar helical thread machined on its inside diameter. The interleaving between the helical threads allows the conversion of the rotary motion of the screw shaft into linear displacement of the nut.

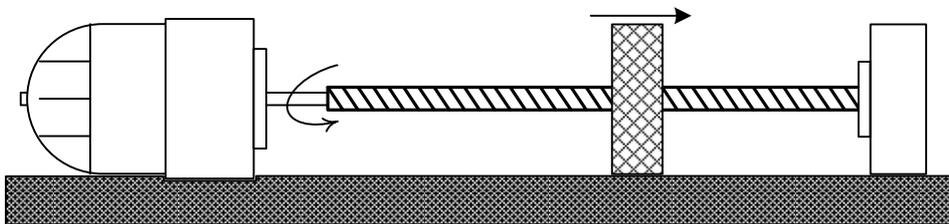


Fig. 19. Schematic representation of a nut-screw system

Because of friction consideration, any force applied on the nut along the axle of rotation of the shaft does not affect the rotation of that shaft. A generic description of the irreversible motion transmission phenomenon can be given as follows: the transmission of power between a point

A (drive) and a point  $B$  (load) is considered to be irreversible if it can be done only from  $A$  to  $B$  (not bidirectional). Because power is transferred in the form of force (or torque) and velocity (or angular velocity), a model for the irreversible motion transmission phenomenon would have to take into consideration these two components. It means that the motion of the load has to be the result of the force applied by the drive component. If the load component tends to set the motion for the drive component, then the model would have to switch to a *locked* and thus follow the behaviour of the real system. The nonlinearity of the irreversible transmission phenomenon comes from this dual type of behaviour; the system works normally when the driving component sets the motion for the load, but it *locks* when the load tends to actuate the driving component. Generally, a transmission is defined by the *gear ratio*, which denotes the speed factor between drive and load components. A general model for an irreversible transmission could be as follows:

$$v_B = \begin{cases} \frac{v_A}{r} & \text{if } A \text{ drives } B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

In (5),  $r$  denotes the speed reduction factor,  $A$  denotes the driving end and  $B$  denotes the load end.

#### 4.2. Hybrid Bond Graph Model for Irreversible Transmission Phenomenon

In order to define a bond graph model for the irreversible transmission phenomenon, the model of a standard transmission given in Fig. 20 is required as a starting point. From a functional point of view, it characterizes the transmission by a speed reduction factor. In general bond graph formalism, this is simply represented by a *transformer* element.

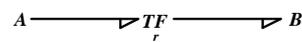


Fig. 20. Standard transmission model in bond graph formalism

For modelling the irreversibility behaviour, a *locking* mechanism which stops the energy flow between  $A$  and  $B$  has to be implemented. This can be done with a bond graph switch element acting over a 1 junction, inserted after the transformer element, as shown in Fig. 21.

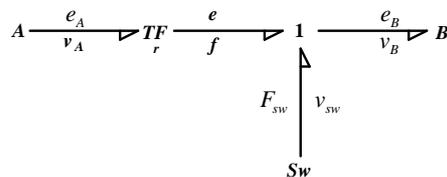


Fig. 21. Acausal bond graph model for the irreversible transmission

When the drive component  $A$  actuates the driven component (or load)  $B$ , which corresponds to the so-called *Normal* mode, the switch has to allow the energy flow between  $A$  and  $B$  without modifying it. In order to ensure this property, it is set in  $E$  state, imposing a null effort  $F_{Sw}$  over the 1 junction it is connected to. Thus power is straightforwardly transferred from  $A$  to  $B$  ( $P = e f = e_A v_A = e_B v_B$ ). In return, when the load tries to impose motion to the drive component, the switch must cut the energy flow between both components. To do this, it goes to  $F$  state, imposing a null flow over the 1 junction. The resulting situation corresponds to the so-called *Blocked* mode. Indeed, the null flow set over the 1 junction

propagates through the junction structure to both drive and load ends, making the corresponding flow variables null ( $v_A = v_B = 0$ ). Although the zero value of all speeds renders the system static, there can still be forces acting inside. The latter are represented by variables  $e_A$  (effort transferred from the drive component) and  $e_B$  (effort transferred from the load). Because of the switch element causality in the *Blocked* mode, these variables are both imposed by the junction structure to which submodel of Fig. 21 is to be connected in the model of an overall system. In order to balance these forces, the effort over the switch is given by  $F_{sw} = -e_A / r + e_B$  (using the sign convention denoted by the orientation of the bonds). With the behaviour described above, it should be noted that the switch element exchanges no power with the junction structure in either working mode. The switching mechanism between both modes has to take into account the actual orientation of the power flow within the system. If power flows from *A* to *B*, then the system is in *Normal* mode, but if the power flow tends to reverse, then the system should go to *Blocked* mode. Now the orientation of the power flow is given by the sign of  $P = e f$  which, referring to the notations displayed in Fig. 21, denotes the algebraic power transferred from *A* to *B*. If  $P$  is positive, then power actually flows from *A* to *B*, while it flows from *B* to *A* if  $P$  is negative. This is why the invariant condition for remaining in *Normal* mode can *a priori* be stated as  $P \geq 0$ . So the guard condition for passing from *Normal* to *Blocked* mode is  $P < 0$ . Once in *Blocked* mode, both drive and driven components have null velocities imposed by the switch, and *de facto* no power is exchanged in the system. Condition  $P = 0$  can be considered as defining the invariant of this mode. Yet, unlike all the invariant conditions met so far (as well in both previous submodels studied as in the *Normal* mode of the present submodel), which brought a transition from their associated mode to another one as soon as they did not hold any longer, the invariant condition for *Blocked* mode is always true while *Blocked* mode is the active one. So the *guard* condition for the transition from *Blocked* mode to *Normal* mode cannot be based on exiting the invariant for *Blocked* mode. Actually, it is not possible to define the guard condition of this particular transition using the state variables of its mode of departure (and the laws governing them), as it is usually done, because the latter do not evolve freely (static initial mode). As a consequence, in order to formalize the return to *Normal* mode from the hybrid automaton point of view, the concept of a *high priority* or *urgent* transition has to be introduced, namely a transition which is immediately jumped as soon as the invariant condition for the mode of arrival holds. But if the transition from *Blocked* mode to *Normal* mode is considered as such an urgent one, then it becomes necessary to slightly modify the definition of the invariant associated with the *Normal* mode, else instantaneous switch back to the *Blocked* mode may occur and generate oscillations between both modes. Since the power flow is identically zero in the *Blocked* mode, a return to the *Normal* mode is equivalent to the evolution of the system from an initial state of rest. Now, at rest, the condition for remaining in *Normal* mode for a nonzero duration (thus preventing oscillations) can be expressed as the time derivative of the power being positive, hence the following new definition for the invariant of the *Normal* mode:  $P > 0$  or  $(P = 0 \text{ and } \dot{P} > 0)$ . Of course, the expressions of  $e$  and  $f$  used to evaluate the power  $P$  involved in the previous definition are those associated with the *Normal* mode. Finally, the automaton of Fig. 22 can be proposed to describe the switching mechanism. Together with the bond graph model of Fig. 21, it defines the elementary model for irreversible motion transmission.

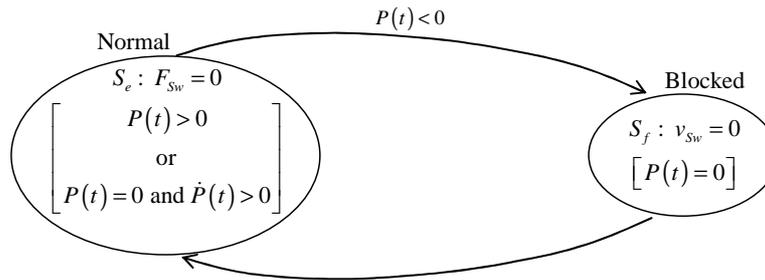


Fig. 22. Automaton for irreversible transmission model

### 4.3. Simulation Model for a Nut–Screw System

The schematic representation for the nut–screw system is given in Fig. 19. The general bond graph model used to describe it is shown in Fig. 23. It takes into account the inertia  $I_m$  of the motor, that of the load (nut)  $I_l$ , the viscous frictions  $R_m$  and  $R_l$  respectively associated with the motor and the load. It also accounts for the irreversible motion transmission phenomenon.  $T_m$  represents the torque provided by the motor while  $F_l$  represents the force acting over the load.  $\Omega_m$  stands for the angular velocity at the motor’s shaft while  $v_l$  is the velocity of the load. In *Normal* mode, one inertial element is in integral causality and the other in derivative causality. This is in agreement with the drive – driven hypothesis. This configuration is chosen as the reference one. The model associated with the *Blocked* mode is purely algebraic (or static), because the corresponding causality assignment ( $F$  state of the switch) sets both storage elements in derivative causality. As a result, the state vector becomes null.

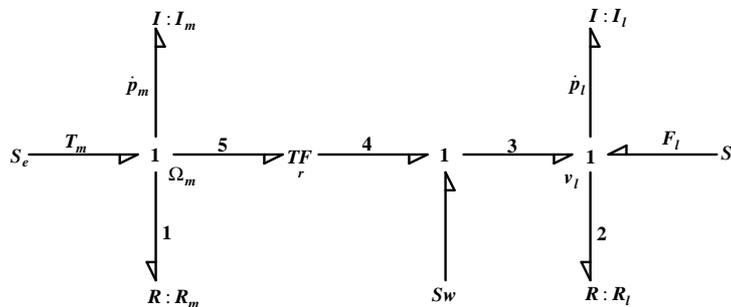


Fig. 23. Acausal bond graph representation of a nut–screw system with irreversible motion transmission

A simulation of the system was run with the following parameters:  $I_m$  was chosen 10 while  $I_l$  was chosen 2; the friction coefficients  $R_m$  and  $R_l$  were both chosen 1; the demultiplication factor  $r$  for the transmission was chosen 1; the natural inputs for the system, composed of the torque  $T_m$  provided by the motor and of the force  $F_l$  applied to the load are given in Fig. 24.

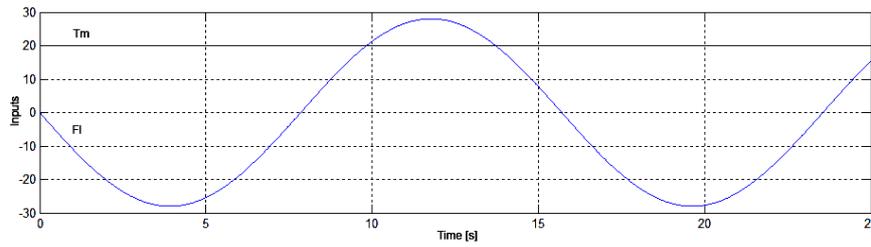


Fig. 24. The inputs for the nut–screw system with irreversible motion transmission

The motor torque  $T_m$  is constant, while the force  $F_l$  applied to the nut has a wave form. The state variables, shown in Fig. 25, are the momenta of both inertial elements:  $p_m$  is the angular momentum of the motor shaft,  $p_l$  the momentum of the load. Because of the unitary gear ratio  $r$ , the velocity of the load has its magnitude equal to that of the motor shaft angular velocity. The difference between the magnitudes of  $p_m$  and  $p_l$  comes from the inertia difference.

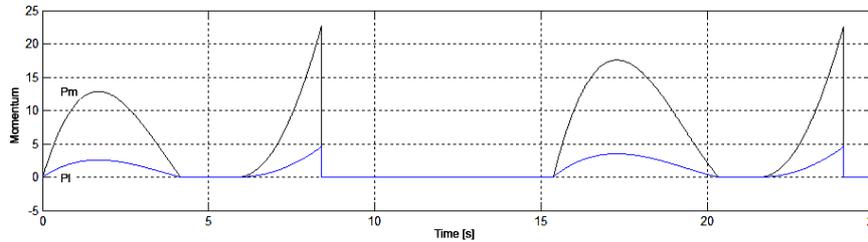


Fig. 25. The evolution of the state variables for the nut – screw system

The regions where both momenta have zero magnitude correspond to the evolution in *Blocked* mode. Initially, since the force over the load is zero while the torque from the motor is constant and positive, the system starts in *Normal* mode and the momenta start to rise from zero. Because the force over the load is negative (opposed to the motion) and increases in magnitude, at a certain time ( $t \approx 2s$ ) the momentum of the motor starts to decrease. Signal  $v_{sw}$  has a similar evolution with the previous momenta. Because of the increasing magnitude of the opposing force, it decreases to zero and tends to become negative, which implies a motion imposed by the force applied over the load. So, because the product of  $v_{sw}$  and  $e_3$  (which gives the power flow) becomes negative, the transition to *Blocked* mode is made. The transition back to *Normal* mode is possible when the force that generates the motion within the system ( $-F_{sw}$ ) becomes positive again (at about  $t \approx 6s$ ). After the transition, the system evolves as it would from an initial state of rest. Because the force applied over the load becomes positive,  $e_3$  signal starts to decrease until it reaches zero and tends to become negative. This triggers a transition to *Blocked* mode (because  $v_{sw}$  is positive) which puts the system in a state of rest, the momenta drop to zero and that is why the discontinuity in the evolution of  $e_3$  appears (at about  $t \approx 8s$ ). The system reenters *Normal* mode when signal  $e_3$  becomes positive again (because  $-F_{sw}$  is positive), this ensuring that the power flow after transition is positive.

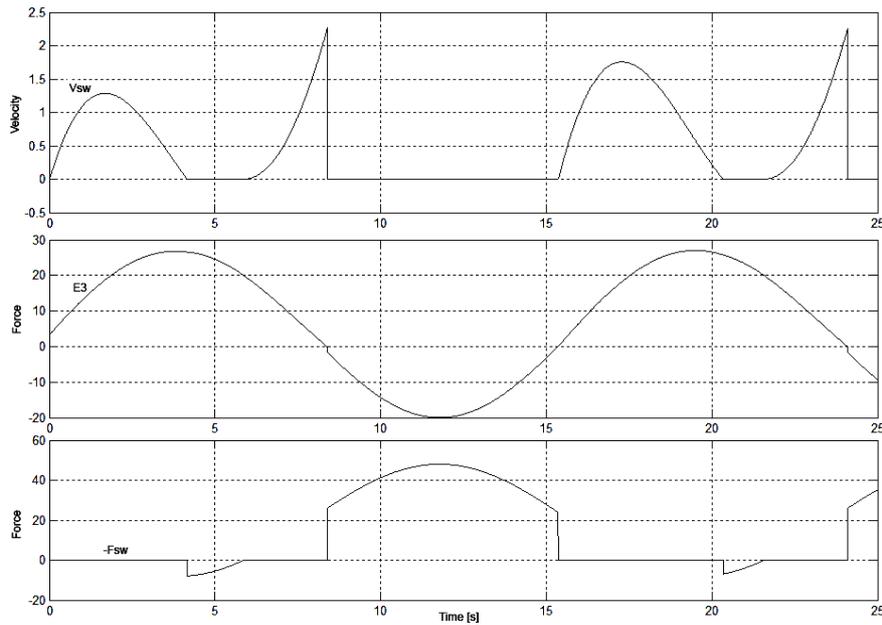


Fig. 26. Evolution of the signals needed to validate the transitions between the modes of operation for a nut– screw system

## 5. General formalization of the hybrid bond graph modelling methodology

In this section, the methodology used to analyse overall models including some of the elementary ones presented before in order to get explicit computational schemes is formalized in a generic way. It should be underlined, besides, that all the computations involved in the present approach can be performed analytically, and therefore automated. A Mathematica-based formal tool has been developed for this purpose [18]. A bond graph model including ideal switches is called a switching bond graph. The analysis of such a model requires a peculiar methodology, since each configuration of the switches defines a specific continuous dynamics with its own computational scheme. This methodology has been exhaustively described in [5]. It allows an explicit description of each continuous dynamics as well as each transition between each other to be generated in a systematic manner, so that standard simulation algorithms could be used. Commutations of switches may be either triggered from outside the system (as in the case of a clutch), or may only depend on the dynamic evolution of the system (e.g. nonlinear phenomena studied in section 4). Anyway, they correspond to discrete events which make the overall dynamics discontinuous. In order to model its discontinuous changes, a finite state automaton is used. In general, the overall configuration of the switches will determine the location of the automaton at any time. Thus every location of the automaton is associated with a different continuous state model of the system and also with a different jump function which defines the discontinuities affecting the state vector when the location of the automaton changes (i.e. when some switches commutate). Of course, only the allowed configurations of switches correspond to a location in the automaton. Indeed, not all the configurations are necessarily possible from a physical point of view, and formal criteria have been defined to decide whether or not a given configuration is valid [19]. The so-called hybrid bond graph approach consists of modelling a switching system by means of a switching bond graph the current configuration of which is managed by such an automaton.

### 5.1. Generic Switching Bond Graph

A canonical form of bond graph model can be defined for any continuous physical system [28]. It consists of three distinctive fields connected with each other through a junction structure which transfers power without loss: the source field is responsible for the production of energy in the system; a part of this energy is dissipated in the  $R$  (resistive) field, while the rest is stored in the  $I$  and  $C$  (inertial and capacitive) field. Based on such a primary canonical form, the generic bond graph model of a switching system is given in Fig. 27. It includes an additional  $Sw$  field, which represents the ideal switching components [5], [20], [21]. The latter behave in the same way as the sources (hence the sign convention for the associated power flow).

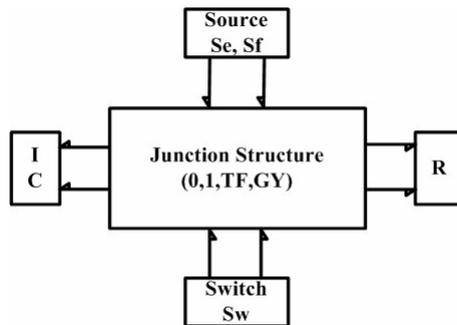


Fig. 27. Generic acausal bond graph of a switching system

In order to extract the equations from the previous bond graph representation, causality has to be assigned. Using a procedure like SCAP (Sequential Causal Assignment Procedure), it can be done in either allowed operating mode of the system, knowing the corresponding compulsory causal configuration of the switches (flow source causality in  $F$  mode, effort source causality in  $E$  mode) (i.e. for any configuration of the switches). Such a procedure allows the number of storage elements in integral causality to be maximized with regard to the physical laws governing the system [11]. Then the relationships between the power variables of the bonds that connect to the junction structure can be viewed from an input/output point of view. Fig. 28 shows the block diagram (or informational graph) deduced from the causal bond graph in one given configuration.

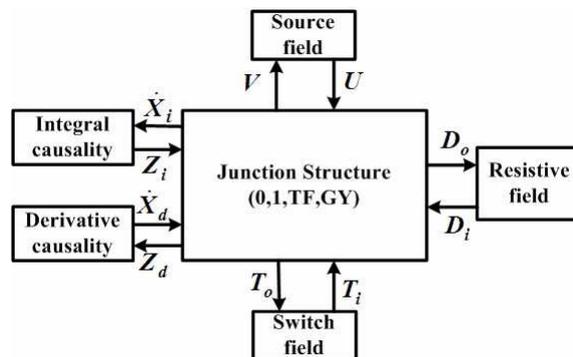


Fig. 28. Informational graph associated with the causal bond graph

The variables used have the following significance:

- $X_i$  is the state vector, composed of the energy variables associated with the storage elements in integral causality ( $p$  for  $I$  elements and  $q$  for  $C$  elements).

- Vector  $Z_i$  is complementary to  $X_i$ ; it is composed of the coenergy variables associated with the same components in integral causality ( $f$  for  $I$  elements and  $e$  for  $C$  elements).
- Vector  $X_d$ , also called the pseudo-state vector, is composed of the energy variables associated with the storage elements in derivative causality ( $p$  for  $I$  elements and  $q$  for  $C$  elements).
- Vector  $Z_d$  is also the complementary for  $X_d$ ; it is composed of coenergy variables in derivative causality ( $f$  for  $I$  elements and  $e$  for  $C$  elements).
- Vectors  $D_i$  and  $D_o$  are composed of the power variables that respectively enter ( $D_i$ ) and exit ( $D_o$ ) the junction structure relatively to the resistive field.
- Vector  $T_i$  is composed of the power variables imposed by the switches over the junction structure in the chosen configuration. Any switch operating in  $E$  state imposes an effort on its bond, any other one operating in  $F$  state imposes a flow instead. In any case, the variable thus imposed to the junction structure has a prescribed value, which is often zero (always for electrical switches), but not necessarily (see the mechanical example of dry friction in slip mode).
- Vector  $T_o$  is composed of the power variables imposed to the switches. If a switch is in  $F$  state, the variable imposed to it is the effort, while it is the flow if it operates in  $E$  state.
- Vector  $U$  is composed of the variables imposed by the sources, and  $V$  is chosen so that  $V^T U$  gives the power provided by the sources.

Any commutation of some switches determines a change in their causality which is propagated to other bonds. As a result of this, some storage elements can change their causality from integral to derivative or from derivative to integral, possibly modifying the state vector dimension. This also affects the structure of the vectors described above (except  $U$  and  $V$ ) which can change from one configuration to another. All the above-mentioned vectors are structured in such a way that the scalar product between the input and output for each field yields the power exchanged with the junction structure.

### 5.2. The Standard Implicit Form

Given the causal representation of the bond graph in one configuration, the outputs of the junction structure ( $\dot{X}_i$ ,  $Z_d$ ,  $D_o$  and  $T_o$ ) can be expressed as linear functions of all the inputs ( $\dot{X}_d$ ,  $Z_i$ ,  $D_i$  and  $T_i$ ) using equation (6), which is called the *standard implicit form* [5].

$$\begin{pmatrix} I & -S_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -S_{24}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{X}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} & 0 & S_{14} & 0 & S_{15} \\ -S_{12}^T & -I & 0 & 0 & S_{24} & 0 & S_{25} \\ -S_{13}^T & 0 & S_{33} & -I & S_{34} & 0 & S_{35} \\ S_{14}^T & 0 & S_{34}^T & 0 & S_{44} & -I & S_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_i \\ Z_d \\ D_i \\ D_o \\ T_i \\ T_o \\ U \end{pmatrix} \quad (6)$$

$I$  and  $0$  denote identity and zero matrixes, respectively. Matrixes  $S_{xy}$  are composed of  $0$ ,  $\pm 1$  and of transformers and gyrators coefficients. Some of them exhibit structural properties (skew symmetry) due to energy balance consideration. In addition to (6), the definition of  $V$  is useful for computing the energy provided by sources. The linear function that defines  $V$  is given by equation (7).

$$V = S_{15}^T Z_i + S_{25}^T \dot{X}_d + S_{35}^T D_i - S_{45}^T T_i + S_{55} U \quad (7)$$

### 5.3. Reference and Allowed Configurations

There exists at least one overall configuration of switches which maximizes the number of storage elements in integral causality. Such a configuration is chosen as the so-called *reference configuration*. The associated standard implicit form is characterized by the nullity of matrix  $S_{24}$ , which expresses the causal connection between storage elements in derivative causality and variables imposed by switches [5]. The above-mentioned reference configuration can be found by considering the switches as free of causality constraints (just like resistive elements) and by applying SCAP. When doing so, some degree of freedom may appear in the choice of the storage elements in derivative causality (if any). Actually, a random set of such elements can be chosen since only their number is an intrinsic property of the model in the reference configuration. These elements will keep their derivative causality in any other configuration of the switches. Once the reference configuration has been selected, every allowed configuration of the system can be defined with respect to it, using a relation such as (8) which expresses the input and output variables of the switch field in the new configuration (denoted by subscript  $j$ ) as functions of the analogous variables in the reference configuration (denoted by subscript  $r$ ).

$$\begin{pmatrix} T_{ij} \\ T_{oj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - \Lambda_j & I \\ I & I - \Lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{ir} \\ T_{or} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$\Lambda_j$  is a square diagonal matrix with the dimension equal to the number of switches in the model. Each of its diagonal elements corresponds to a specific switch. It is assigned a 1 value if this switch has changed its state with respect to the reference configuration, and a 0 value if its state has remained the same.

### 5.4. State Model for any Allowed Configuration

In any allowed configuration, an informational graph such as that of Fig. 28 can be established, with the structure of the vectors that respectively enter and exit the junction structure changing from one configuration to another. As a consequence, a different standard implicit form is associated with each allowed configuration. In order to obtain all the resulting standard implicit forms, a basic approach would consist of applying SCAP for every allowed configuration and to express the output variables ( $\dot{X}_{ij}$ ,  $Z_{dj}$ ,  $D_{oj}$  and  $T_{oj}$ ) as functions of the inputs of the junction structure ( $\dot{X}_{dj}$ ,  $Z_{ij}$ ,  $D_{ij}$  and  $T_{ij}$ ). But alternatively, a systematic procedure developed in a previous work allows the standard implicit form in any configuration to be directly recovered from the one in the reference configuration using symbolic calculation. Indeed, when changing the configuration of switches, the causality of some resistive elements may be affected with respect to reference configuration. This change can be described the same way as it was in (8) for switches. If causality changes for some

resistive elements, it means that some components of  $D_{ir}$  would be replaced with their adjacent counterparts from  $D_{or}$ , and vice versa.

$$\begin{pmatrix} D_{ij} \\ D_{oj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - \Delta_j & I \\ I & I - \Delta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{ir} \\ D_{or} \end{pmatrix} \quad (9)$$

In (9),  $\Delta_j$  is a diagonal matrix similar in structure with  $\Lambda_j$ . Its dimension is given by the number of resistive components in the bond graph model and the value of its diagonal elements is 1 if the corresponding resistances have changed their causality with respect to the reference configuration, 0 otherwise. It is also possible that some storage elements lose their integral causality when changing the configuration (the set of storage elements already in derivative causality in the reference configuration keeping their causality unchanged in any other configuration, as already mentioned). Because of this, vector  $X_{ir}$  in the reference configuration can be considered as re-organized into two parts once the configuration has changed, one composed of the elements that kept their integral causality ( $X_{ij}$ ) and another composed of the elements that lost their integral causality ( $X_{idj}$ ). Then there exist two matrices  $T_{1j}$  and  $T_{2j}$  such that:

$$\begin{pmatrix} X_{ir} \\ X_{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{1j} & T_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ij} \\ X_{idj} \\ X_{dj} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Relations (8), (9) and (10) express the various permutations that occur between the set of input variables and the set of output variables of the junction structure when getting from the reference configuration to another configuration of the switches. By substituting them in the expression of the standard implicit form associated with the reference configuration (which still holds in any other configuration, provided that no value is given to vector  $T_{ir}$ ), one gets an input-output relation for the new configuration resulting from the commutation of the switches. Multiplying this relation by a specific matrix defined in a formal way (see [5] for technical details), one finally recovers a standard implicit form similar to (6), which characterizes the new configuration (for which vector  $T_{ij}$  admits of a prescribed value).

At this stage, it has been recalled how all the standard implicit forms associated with the various configurations of switches allowed in the system can be analytically derived from the single standard implicit form associated with the reference configuration (a formal tool developed by the authors being available to perform this task automatically). Next, in each valid configuration denoted by index  $j$ , it is possible to compute from equation (6) a state equation under an implicit form. For this purpose, the constitutive laws of the resistive, inertial and capacitive fields must be used. Their expressions given by (11) and (12) are linear by assumption, only piecewise affine systems being considered. They involve a positive definite matrix  $L_j$  as well as a symmetric and positive definite matrix  $\mathcal{F}_j$ .

$$D_{ij} = L_j D_{oj} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} Z_{ij} \\ Z_{dj} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{ij} & F_j \\ F_j^T & F_{dj} \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_j} \begin{pmatrix} X_{ij} \\ X_{dj} \end{pmatrix} \quad (12)$$

By another way, the third row of equation (6) written for the current configuration (referred to by index  $j$ ) defines  $D_{oj}$ , which in turn defines  $D_{ij}$  using (11), both being expressed as functions of  $Z_{ij}$ ,  $T_{ij}$  and  $U$ . Substituting their expressions in the standard implicit form of configuration  $j$  and using the expressions of  $Z_{ij}$  and  $Z_{dj}$  given by (12) as well, one gets the following matrix relation:

$$\begin{pmatrix} I & -S_{12j} \\ 0 & 0 \\ 0 & -S_{24j}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_{ij} \\ \dot{X}_{dj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_j F_{ij} & K_j F_j & S_{14j} + S_{13j} H_j S_{34j} & 0 \\ -S_{12j}^T F_{ij} - F_j^T & -S_{12j}^T F_j - F_{dj} & S_{24j} & 0 \\ (S_{14j}^T - S_{34j}^T H_j S_{13j}^T) F_{ij} & (S_{14j}^T - S_{34j}^T H_j S_{13j}^T) F_j & S_{44j} + S_{34j}^T H_j S_{34j} & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ij} \\ X_{dj} \\ T_{ij} \\ T_{oj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{15j} + S_{13j} H_j S_{35j} \\ S_{25j} \\ S_{45j} + S_{34j}^T H_j S_{35j} \end{pmatrix} U \quad (13)$$

where  $H_j = L_j (I - S_{33j} L_j)^{-1}$  and  $K_j = S_{11j} - S_{13j} H_j S_{13j}^T$ .

In the current configuration, relation (13) can still be simplified using the value of vector  $T_{ij}$ , which is known as long as this configuration is the active one (this value, indeed, is imposed by the switches acting like sources). The first two rows of (13) define an *implicit state equation*, the corresponding state vector  $(X_{ij}, X_{dj})$  being composed of both dynamical and purely algebraic modes [22]. This implicit state equation only prevails in the current configuration if it accounts for the specific value of  $T_{ij}$ , but formally holds in any other configuration if  $T_{ij}$  is kept as a variable with no value affected.

The third row of (13) allows vector  $T_{oj}$ , which collects the power variables imposed by the junction structure over the switches in the current configuration, to be expressed as a function of the state and input variables. The latter expression will be considered as the output equation of the state representation associated with the current configuration, since the condition for commutating towards another configuration most often depends upon  $T_{oj}$ .

Let non-singular matrices  $R_j$ ,  $P_j$  and  $Q_j$  be introduced, such as defined by (14), (15) and (16) respectively.

$$R_j = (S_{12j}^T F_{ij} S_{12} + S_{12j}^T F_j + F_j^T S_{12} + F_{dj})^{-1} \quad (14)$$

$$P_j = \begin{pmatrix} I & -K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -R_j \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$Q_j = \begin{pmatrix} I & S_{12j} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) & I \end{pmatrix} \quad (16)$$

The implicit state equation of the current configuration must be pre-multiplied by matrix  $P_j$  before applying a variable change defined by (17), in order to separate its dynamic part from its algebraic part.

$$Q_j \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{ij} \\ X_{dj} \end{pmatrix} \quad (17)$$

The resulting new implicit state equation can be split into two parts, namely an explicit differential equation associated with substate vector  $X_{1j}$  and a purely algebraic equation associated with substate vector  $X_{2j}$ . Those two equations, which involve constant matrices  $A_j$ ,  $B_j$  and  $C_j$  defined by (18), are given by (19).

$$\begin{cases} A_j &= K_j F_{ij} - K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \\ B_j &= S_{15j} + S_{13j} H_j S_{35j} + K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j S_{25j} \\ C_j &= S_{14j} + S_{13j} H_j S_{34j} + K_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j S_{24j} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{1j} &= A_j X_{1j} + B_j U + C_j T_{ij} \\ X_{2j} &= R_j S_{25j} U + R_j S_{24j} T_{ij} \end{cases} \quad (19)$$

### 5.5. Simulation Model for a Single Mode of Operation

Whatever the configuration of the switches may be, the corresponding behaviour of the system can be described by such equations as (19). When combined with the characteristic property of the current configuration, namely the assignment of a prescribed value to vector  $T_{ij}$ , the latter equations define an explicit computational scheme for its continuous dynamics, which makes a simulation possible, provided that the initial value of the effective state vector  $X_{1j}$  be available. Here the initial value is understood as the value of  $X_{1j}$  “just after” the commutation that led the system to its current configuration. In order to determine this value, the explicit state equation included in (19) can be integrated on the duration of the latter commutation. This is possible because (19) formally holds in any configuration, and especially in the one just before the commutation of interest, provided that the prescribed value of  $T_{ij}$  is no longer assumed. Since the commutations are regarded as ideal (by modelling hypothesis), their duration is zero. As a consequence, assuming that the state vector  $X_{1j}$  may be discontinuous at commutation time and referring to its values just before and just after the commutation by superscripts – and + respectively, such an integration yields:

$$X_{1j}^+ - X_{1j}^- = \int_{t_c^-}^{t_c^+} (A_j X_{1j} + B_j U + C_j T_{ij}) dt \quad (20)$$

Where  $t_c$  is the commutation time.

The right hand side member of (20) is the time integral on a zero duration of a function expressed as a linear combination of the state vector  $X_{1j}$ , the input vector  $U$  and vector  $T_{ij}$ , which collects the power variables imposed by the switches over the junction structure in the current configuration (i.e. the configuration that immediately results from the commutation of interest). At this stage, a general property of real physical systems must be put forward. It states that neither energy or co-energy variables, nor input variables can be affected by impulses at any time, otherwise the energy provided or stored in the system could reach infinite values. It results that there is never any impulse on  $X_{1j}$  (which is composed of linear combinations of energy variables), nor on  $U$ . By another way, it is postulated that vector  $T_{ij}$  cannot be impulsive either at the commutation that leads to the current configuration  $j$  (whereas some of its components may still be impulsive at commutations leading to other configurations). This assumption, though unproved, can be experimentally verified by the observation of any electrical switching circuit. Thus, in (20) is integrated a non impulsive function on a zero duration, which provides a zero result, hence property (21) which expresses the continuity of  $X_{1j}$  at commutation time.

$$X_{1j}^+ = X_{1j}^- \quad (21)$$

The initial value of vector  $X_{2j}$  once the current configuration has become active is known. It is given by (22).

$$X_{2j}^+ = R_j S_{25j} U^+ + R_j S_{24j} T_{ij}^+ \quad (22)$$

The components of this vector are linear combinations of energy variables some of which could belong to the state vector in the configuration before the commutation, and thus follow their own dynamic evolution not only depending on the input  $U$ . As a result, some components of  $X_{2j}$  may have been discontinuous at commutation time. Referring to the standard implicit form again (more precisely its last row), and given the postulate that  $T_{ij}$  has not been impulsive, it comes that  $T_{oj}$  may have been impulsive. Basically, some switches that do not commute and operate in  $E$  state in both configurations (the effort remaining the same before and after the commutation) may have an impulsive flow, while some switches that do not commute and operate in  $F$  state may have an impulsive effort. On the other hand, some switches commuting to  $E$  state may have an impulsive flow, while some of them commuting to  $F$  state may have an impulsive effort.

Overall, the dynamics of the current configuration is described by the time evolution of variables  $X_{1j}$  and  $X_{2j}$ . The latter is defined by a purely algebraic equation, whereas the former is governed by an explicit ordinary differential equation and is continuous at commutation time. Using (21), the initial condition for  $X_{1j}$  in the current configuration can be computed as its final value in the previous configuration. Now, in any configuration of the system, vector  $(X_{1j}, X_{2j})$  can be formally related to the state vector in the reference configuration by inverting relations (17) and (10).

$$\begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{pmatrix} = Q_j^{-1} \begin{pmatrix} X_{ij} \\ X_{dj} \end{pmatrix} = Q_j^{-1} \begin{pmatrix} T_{1j} & T_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_{ir} \\ X_{dr} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Since the matrix involved in (10), which expresses a permutation, is a unitary one, its inverse is simply obtained by transposition. By another way, the expression of  $Q_j^{-1}$  is easily deduced from that of  $Q_j$  and is given by (24).

$$Q_j^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R_j(S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -S_{12j} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -S_{12j} \\ R_j(S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) & I - R_j(S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) S_{12j} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Then, extracting the first row of (23),  $X_{1j}$  can be expressed as a function of the extended state vector in the reference configuration, referred to by  $X_r$  (which collects the energy variables of the bond graph storage elements both in integral and derivative causality).

$$X_{1j} = \begin{pmatrix} I & -S_{12j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1j}^T & 0 \\ T_{2j}^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} X_{ir} \\ X_{dr} \end{pmatrix}}_{X_r} \quad (25)$$

It should be underlined again that (25) formally holds in any configuration of the switches, and especially just before the commutation. Let matrix  $M_{1j}$  be introduced such as defined by (26). Then the initial value of  $X_{1j}$  is given by (27), where  $X_r^-$  represents the last value of vector  $X_r$  computed by the model just before the commutation, while the structure of  $M_{1j}$  is defined by matrices corresponding to the current mode (just after the commutation).

$$M_{1j} = \begin{pmatrix} I & -S_{12j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1j}^T & 0 \\ T_{2j}^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$X_{1j}^+ = X_{1j}^- = M_{1j} X_r^- \quad (27)$$

Thus, it has been shown that the last computed value of vector  $X_r$  is required when a commutation occurs (whatever the current configuration may be), in order that the initial value of the explicit state vector in the next configuration could be deduced. So it is necessary to compute the time evolution of vector  $X_r$  in any configuration, even if it only corresponds to the (extended) state vector in the reference configuration. Now, in the current configuration,  $X_r$  can be recovered from the explicit state vector  $X_{1j}$  and its algebraic counterpart  $X_{2j}$  using (10) and (17) again.

$$X_r = \begin{pmatrix} T_{1j} & T_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & S_{12j} \\ 0 & I \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ -R_j(S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) & I \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} X_{ij} \\ X_{dj} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{pmatrix} \quad (28)$$

By using the second line of (19) which defines  $X_{2j}$ , (28) can be written as follows:

$$X_r = M_{2j} X_{1j} + M_{3j} U + M_{4j} T_{ij} \quad (29)$$

Where matrices  $M_{2j}$ ,  $M_{3j}$  and  $M_{4j}$  are given by (30).

$$\begin{aligned}
 M_{2j} &= \begin{pmatrix} T_{1j} & T_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - S_{12j} R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \\ -R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \end{pmatrix} \\
 M_{3j} &= \begin{pmatrix} T_{1j} & T_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{12j} \\ I \end{pmatrix} R_j S_{25j} \\
 M_{4j} &= \begin{pmatrix} T_{1j} & T_{2j} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{12j} \\ I \end{pmatrix} R_j S_{24j}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Using the prescribed value of vector  $T_{ij}$  in the current configuration again, relation (29) allows the variables that define the extended state vector  $X_r$  of the reference configuration to be straightforwardly computed at any time as long as the current configuration prevails. Then the initial value of the next explicit state vector can be determined when a commutation happens.

As claimed earlier, whatever the current configuration may be, it is useful to compute the corresponding output vector  $T_{oj}$  as well, since the events that make the system commute towards other configurations generally concern the time evolution of this variable (see the examples of dry friction and backlash described above). Now  $T_{oj}$  is defined by the third row of (13) as a function of  $U$ ,  $T_{ij}$  (the value of which is known in the current configuration),  $X_{ij}$ ,  $X_{dj}$  and its time derivative  $\dot{X}_{dj}$ . It is direct to express  $X_{ij}$  and  $X_{dj}$  as algebraic functions of  $X_{1j}$  and  $X_{2j}$  using the variable change (17). Next  $X_{2j}$  can be eliminated from the resulting expressions using its definition given by (19), together with the known value of  $T_{ij}$  again. This respectively provides expressions of  $X_{ij}$  and  $X_{dj}$  only depending on  $X_{1j}$  and  $U$ . The latter expression can be derived with respect to time using the explicit state equation extracted from (19). By substitution of  $X_{ij}$ ,  $\dot{X}_{dj}$  and  $X_{dj}$ , one finally gets :

$$T_{oj} = \tilde{M}_{1j} X_{1j} + \tilde{M}_{2j} U + \tilde{M}_{3j} T_{ij} + \tilde{M}_{4j} \dot{U} \tag{31}$$

where,

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}_{1j} &= W_j \left( F_{ij} - (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) \right) \\
 \tilde{M}_{2j} &= S_{45j} + S_{34j}^T H_j S_{35j} - S_{24j}^T R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) (S_{15j} + S_{13j} H_j S_{35j}) + W_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j S_{25j} \\
 \tilde{M}_{3j} &= S_{44j} + S_{34j}^T H_j S_{34j} - S_{24j}^T R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) (S_{14j} + S_{13j} H_j S_{34j}) + W_j (F_j + F_{ij} S_{12j}) R_j S_{24j} \\
 \tilde{M}_{4j} &= S_{24j}^T R_j S_{25j}
 \end{aligned} \tag{32}$$

and

$$W_j = S_{14j}^T - S_{34j}^T H_j S_{13j} - S_{24j}^T R_j (S_{12j}^T F_{ij} + F_j^T) K_j \tag{33}$$

Collecting all the previous results, it is possible to build for each allowed configuration of the switches a model such as the one depicted in Fig. 29 (SIMULINK implementation), which can be used to simulate the associated dynamics. Its gain matrixes are respectively defined in



- $L = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$  represents the set of discrete locations, the vertices of the graph.
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$  represents the n-dimensional continuous state-space.
- $\Sigma$  is a finite set of events.
- $W = \mathbb{R}^q$  is the continuous communication space, where the external variables can take values.
- $Inv$  gives the subset of allowed states for each location. If  $l \in L$  then  $Inv(l)$  is the location invariant for  $l$  and  $Inv(l) \subset X$ .
- $Flow$  associates a dynamic behaviour with every location. Usually  $Flow(l)$  refers to the differential equations for  $l$  location ( $F(x, \dot{x}, w) = 0$ , where  $x \in X$  and  $w \in W$ ).
- $E$  is the set of transitions, represented by edges on the graph. It can be defined as a quintuple  $E = \langle l, \sigma, l', Guard_{ll'}, Jump_{ll'} \rangle$ , where  $l$  and  $l'$  are the source and destination locations,  $\sigma \in \Sigma$  is the event associated with the transition,  $Guard_{ll'} \subset X$  is a subset of states for which the transition can occur and  $Jump_{ll'}$  is a function that reassigns values to the state vector when the transition is processed. If  $x$  is the value of the state vector when in location  $l$ , then if  $x \in Guard_{ll'}$  the transition is performed and the initial state for the state model in location  $l'$  is given by  $x' = Jump_{ll'}(x)$ .
- $Init = (l_i, x_i) \in L \times X$  represents the initial location and state vector values for the automaton.

As an example, a general representation of a hybrid automaton is given in Fig. 30. It can easily describe a system with a *switch* element, the two locations of the automaton representing the two states of the switch.

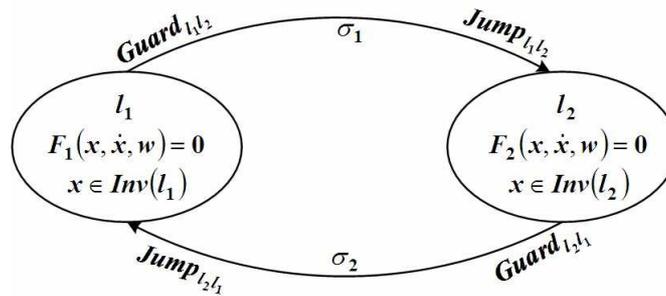


Fig. 30. General graph of a two location hybrid automaton

$l_1$  could represent the system when the switch is in state  $E$  and  $l_2$  could be associated with the system when the switch is in state  $F$ . Both dynamic models can be obtained from the causal bond graph of the system with reference to the state of the switch.

### 5.7. Simulation Model for a System with Multiple Modes

As mentioned before, the overall configuration of switches in the bond graph model determines the current operating mode of the system. Changes in the state of switches

propagate in changes of causality over the bond graph. In order to get a simulation model of the system, the different modes of operation have to be treated separately. Indeed, because the dynamics of each mode is given by a different set of differential equations, each mode will be assigned a different continuous-time state-space model [20], [21].

If a system with  $n$  modes of operation is considered, then each mode will be associated with a different simulation block such as that of Fig. 29, which replicates the dynamics of that particular mode. Of course, only one of the  $n$  resulting blocks can be active at any particular time, namely the block corresponding to the current mode of operation [20]. The outputs of each block are the extended state vector given in the reference form ( $X_r$ ), which allows computing the next initial value of the explicit state in case of commutation, and the energy variables imposed by the junction structure to the switching elements in the current mode ( $T_o$ ), which is necessary for computing the invariants of the system, in order to define the automaton that supervises the transitions between the different modes of operation. The inputs of each block are composed of both the system external power inputs and the initial conditions given under the form of a state vector in reference form.

The overall simulation model for a system with  $n$  modes of operation is obtained by combining the dynamics of all modes. In order to successfully simulate a switching system, a decision block has to be implemented in order to make the selection of the active mode. A SIMULINK representation of such a model is given in Fig. 31.

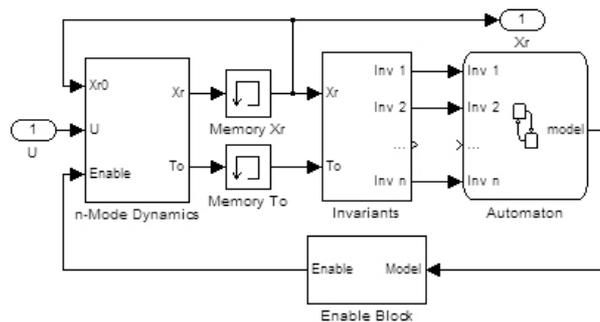
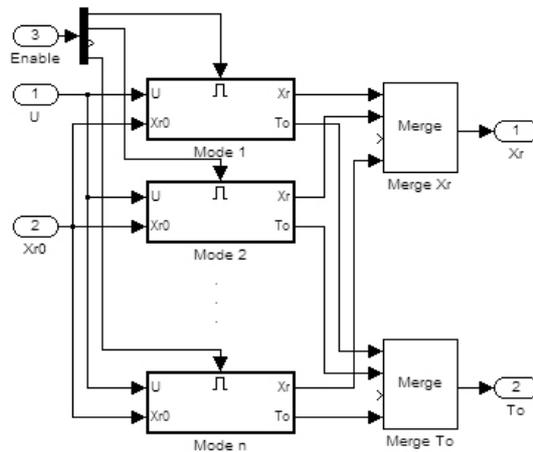


Fig. 31. The Simulink model for a switching system

The model is composed of a *dynamics* block that implements the  $n$  dynamical behaviours, a block that computes the *invariants* of the system (as described in section 5.6) and a SIMULINK/Stateflow block that simulates the *automaton*. The latter sets the active mode by changing its current state. The decision of jumping from one state to another is made by evaluating the *invariant* associated with the current state. The *automaton* outputs the number of the current dynamical mode. The *Enable Block* decodes the signal outputted by *automaton* in such a manner that the active mode receives a 1 value on its *enable* signal, while the others receive a 0 value. This assures that only one dynamic block is active at any time. The *n-Mode Dynamics* is implemented as seen in Fig. 32.


 Fig. 32. The  $n$ -Mode Dynamics block

The *enable* signal is composed of  $n$  components, one for each block. Each *dynamic* block has a structure similar to the one presented in Fig. 29. The *Merge* blocks are used because they assure that values outputted by them are the ones computed by the currently active block. They have the capability of selecting the last modified values from their inputs. The *Memory* block of Fig. 31 associated with  $X_r$  is used in order to break algebraic loop formed because the signal is fed back as an input to the dynamic blocks and at the same time it is used to compute the *invariants* on which the logic of switching modes is based. The *Memory* block associated with  $T_o$  is used to delay the signal, in order to synchronize it with the decision process. This representation ensures certain modularity to the simulation model. The dynamics associated with each configuration of switches are hidden inside each mode block. The changes on the size or the order of the components of the state vector, which can appear as a result of some storage elements losing their integral causality with respect to the reference configuration, are also hidden inside each block. Each time the *automaton* changes the current active mode, a new initial condition is computed for the activated block through a *jump* function encapsulated in the  $M_1$  gain matrix.

The above description shows that our approach to convert the switched bond graph model of a discontinuous system into a set of explicit differential equations monitored by a hybrid automaton treats the entire system in a centralized fashion. Although such a methodological choice actually results in a higher formal complexity, the latter has not to be handled manually by the modeler himself, since all the operations it implies have been automated, as we already mentioned it before. Besides, in spite of its global point of view, the approach does not prevent the original bond graph model to be built in an object-oriented fashion. So its bias in favour of a centralized analysis cannot really be seen as a drawback. In theory, the computational complexity of the final model exponentially increases with the number of discontinuous phenomena it includes, since the presence of  $n$  switches possibly leads to  $2^n$  distinct modes to be dealt with by the compiler. Fortunately, there often exist a number of modes which are not physically feasible, which reduces the actual complexity of the problem in many practical cases.

## 6. Example of a nontrivial mechanical system

In order to illustrate the modularity of the modelling methodology proposed in this paper, and its ability to generate a library of reusable submodels, a mechanical engineering system (yet

not directly inspired from a realistic application) encapsulating all the nonlinear phenomena studied above has been devised. A schematic representation of this system is shown in Fig. 33. It is actuated by an electric motor which drives component  $A$ , the latter being attached to component  $C$  through a serial *spring-damper* device. Component  $C$  itself drives component  $D$  which is supported by surface  $S_2$ . An irreversible motion transmission is present between the drive-motor and component  $A$ . The *spring-damper* system is characterized by a spring constant  $C_B$  (or  $k_B$ ) and a damping constant  $R_B$ . Besides, backlash is present between component  $C$  and component  $D$ . Lastly, a dry friction exists between component  $D$  and surface  $S_2$ .

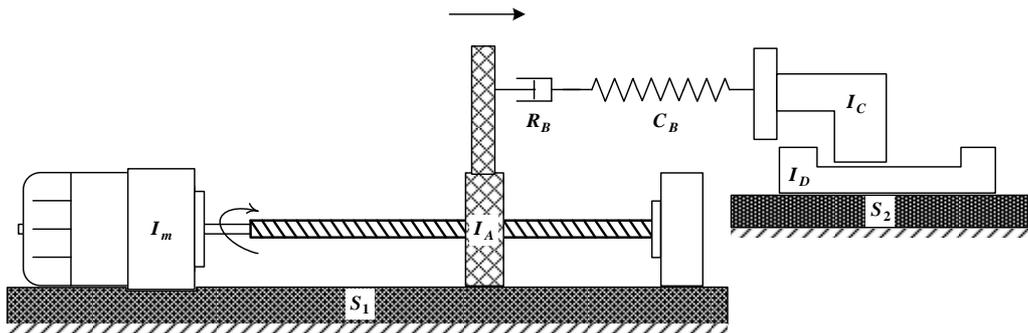


Fig. 33. Schematic representation of a complex mechanical system with irreversible motion transmission, backlash and dry friction phenomena

From a strictly mechanical point of view, such a system is not very complex insofar as it remains one-dimensional. Actually, as far as modelling is concerned, its only difficulty originates in the coexistence of some hard nonlinearities which render its behaviour discontinuous in several respects. This example has been chosen because it is both nontrivial and yet simple enough to allow a manual illustration of the proposed methodology (which, in more complex cases, can be processed in an automated way).

The bond graph model of the system, including the submodels associated with the various nonlinear phenomena present, is shown in Fig. 34. The nut-screw device transmits the mechanical energy from the motor in an irreversible way, locking when the power flow tends to reverse. The current operating mode of this irreversible motion transmission is controlled by the state of the switch element  $Sw_1$ . The latter commutates whenever the orientation of the power flow changes. By another way, the backlash phenomenon between components  $C$  and  $D$  is described by the submodel with the switch element  $Sw_2$ , which still induces two distinct operating modes. The commutation from one mode to the other either depends on the relative displacement between  $C$  and  $D$  (obtained by integrating their relative velocity) or on the contact force between them. Eventually, the dry friction phenomenon is modeled using the switch element  $Sw_3$ . The commutations between its own two operating modes are either based on the external forces applied upon the subsystem composed of component  $D$  and surface  $S_2$ , or on their relative velocity. Since each of the submodels associated with these three nonlinear phenomena exhibits two different operating modes, and since each switch element may commutate independently from the others, as explained above, the overall model can operate in eight distinct modes (meaning that all configurations of switches are allowed and correspond to real physical situations). All of these modes have different dynamic evolutions governed by different state equations. The differential equations corresponding to

each mode can be obtained from the causal representation of the bond graph model associated with the configuration of switches for that mode.

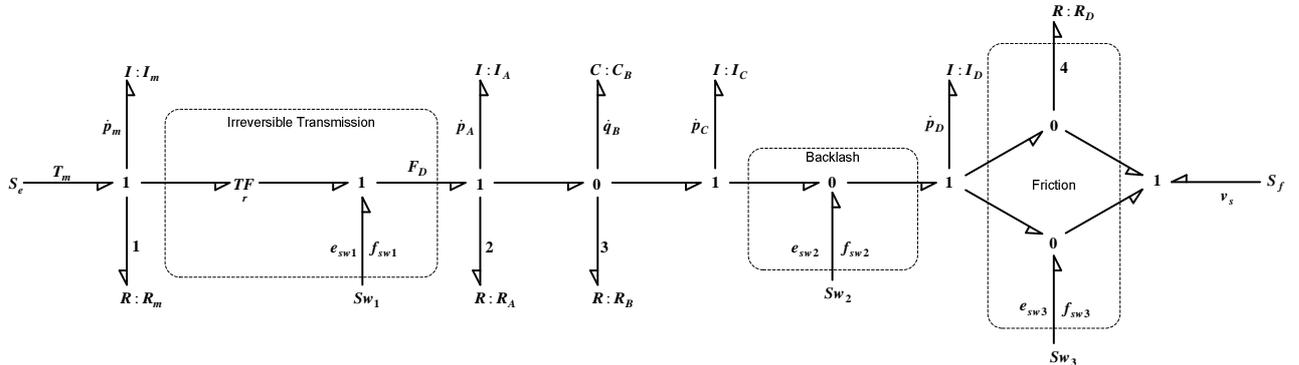


Fig. 34. Acausal bond graph representation of the mechanical system

The decision mechanism for selecting the active mode is composed of the three decision mechanisms associated with each of the three nonlinear phenomena displayed by the mechanical system. Because there is no dependency between the commutations of switches (meaning that, in this particular case, the commutation of one switch does not interfere with the commutation of the others), the decision mechanism is also independent for each switch. The simulation model for the mechanical system is composed of the eight dynamic modes and of the switching mechanism. The inputs for the simulation model are the torque  $T_m$  provided by the driving motor, and the velocity  $v_s$  of surface  $S_2$  (considered as a constant). Of all the possible switches configurations, the one that maximizes the number of storage elements in integral causality corresponds to all the switches working in effort mode. This configuration is chosen as the reference. The structure of the state vector in this reference configuration is:

$$X_r^T = (p_m \quad q_B \quad p_C \quad p_D \quad p_A) \quad (34)$$

### 6.1. Simulation model for one mode: example of E-E-E mode (reference)

Since the process of deriving an explicit state space representation is the same in each mode, the resulting equations will only be given for the reference mode, as an example. In this mode, all the switches are in effort state, meaning that the motor is driving component A, while D is sliding over surface  $S_2$ , C and C being not in contact. Using the corresponding causality assignment of the bond graph model and applying the general results of section 5, the explicit state equation for this mode comes, together with the jump function allowing its initialization as well as the relation for the reference state vector recovery (required for the initialization of the next mode). The latter are respectively given by (35), (36) and (37). The output vector composed of the energy variables imposed to the switches, required to compute the conditions that validate transitions towards other modes, is defined by (38). Eventually, the drive force over A, denoted by  $F_D$ , which along with the velocity over  $Sw_1$  gives the direction of the power flow in the irreversible transmission, is also required by the decision rule for making  $Sw_1$  commutate. It is given by (39), which remains formally true for half of the possible modes (those for which the transmission is not blocked). In all the other modes (those for which the transmission is blocked,  $Sw_1$  being in F state), the drive force  $F_D$  over A would be given, instead, by (40). The simulation submodel associated with this particular mode (as it

will also be the case for all the modes in which  $Sw_3$  behaves like a modulated effort source, meaning that  $D$  is sliding over  $S_2$ ) needs an additional input signal called  $Dir$ , which gives the sign of the relative velocity  $f_{sw_3}$ . The latter, indeed, is necessary to define the orientation of the friction force  $e_{sw_3}$  according to Fig. 8. The structure of this submodel, implemented in SIMULINK environment, is given in Fig. 35.

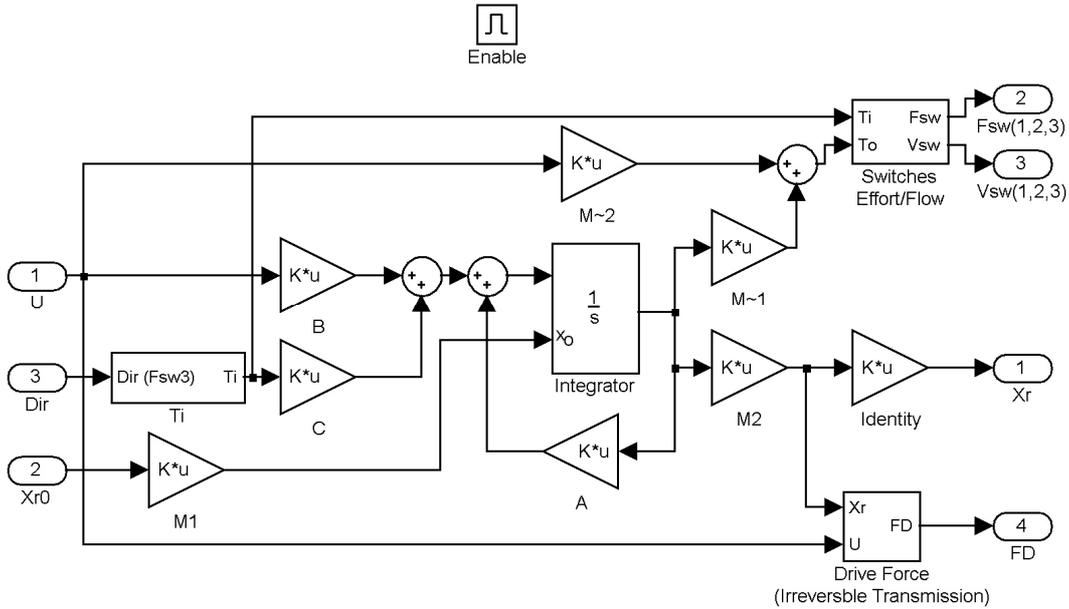


Fig. 35. Simulink model for mode  $EEE$

$$\dot{X}_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R_m + r^2 R_A}{I_m + r^2 I_A} & -r C_B & 0 & 0 \\ \frac{r}{I_m + r^2 I_A} & -\frac{C_B}{R_B} & -\frac{1}{I_C} & 0 \\ 0 & C_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_D}{I_D} \end{pmatrix}}_{A_1} X_{11} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_D \end{pmatrix}}_{B_1} U \quad (35)$$

$$X_{11}^- = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{11}} X_r^- \quad (36)$$

$$X_r = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{I_m}{I_m + r^2 I_A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{r I_A}{I_m + r^2 I_A} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{21}} X_{11} \quad (37)$$

$$T_{o1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{r}{I_m + r^2 I_A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_C} & \frac{1}{I_D} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{I_D} \end{pmatrix}}_{M_{11}} X_{11} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{21}} U \quad (38)$$

$$F_D = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{r(R_A I_m - R_m I_A)}{I_m(I_m + r^2 I_A)} & \frac{I_m C_B}{I_m + r^2 I_A} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{Fd1}} X_R + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{r I_A}{I_m + r^2 I_A} & 0 \end{pmatrix}}_{M_{Fd2}} U \quad (39)$$

$$F_D = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{I_m C_B}{I_m + r^2 I_A} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M'_{Fd1}} X_R + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{r I_A}{I_m + r^2 I_A} & 0 \end{pmatrix}}_{M_{Fd2}} U \quad (40)$$

## 6.2. Commutation mechanism

As mentioned earlier, the commutation mechanism for the overall system is simply obtained by putting together the three automata respectively displayed in Fig. 3 for the dry friction, in Fig. 13 for the backlash, and eventually in Fig. 22 for the irreversible motion transmission. Each one dictates the state of a specific switch element of the bond graph model. Their SIMULINK/Stateflow implementation is shown in Fig. 36. In either state ( $E$  or  $F$ ), switches act like zero sources, except for the case of dry friction phenomenon in *Slip* mode, where  $Sw_3$  behaves like a modulated effort source, imposing over the junction structure a nonzero effort equal to the friction force, the sign of which depends on the relative velocity between both surfaces in contact. By convention, a zero value of signal  $Sw_x$  ( $x=1,2,3$ ) means that the associated switch is in  $E$  state, while a one value means that it is in  $F$  state instead. Transitions are validated for each automaton by computing the corresponding invariants and guard conditions, which depend on variables  $e_{sw_1}$ ,  $f_{sw_1}$  and  $F_D$  for the irreversible transmission,  $e_{sw_2}$  and  $f_{sw_2}$  for the backlash,  $e_{sw_3}$  and  $f_{sw_3}$  for the dry friction.

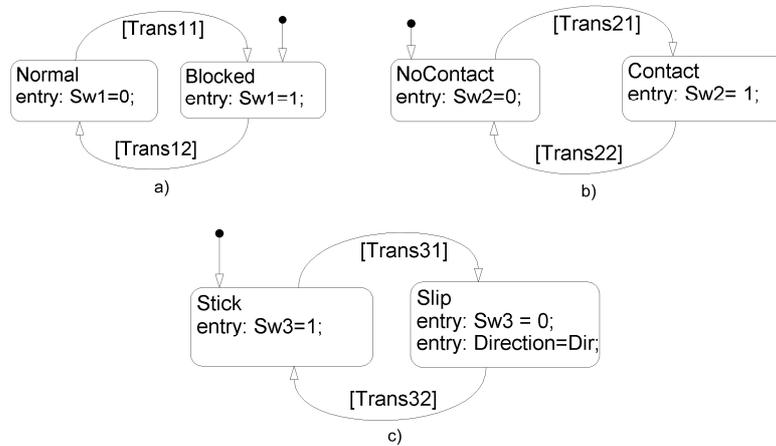


Fig. 36. SIMULINK\Stateflow implementation of the automata representing the switching mechanism:  
 a) irreversible transmission; b) backlash; c) dry friction.

### 6.3. Overall simulation model

The simulation model for the complex mechanical system of interest is composed of both the series of blocks describing the dynamic evolution for the eight possible operating modes (encapsulated in the *Dynamics* block shown in Fig. 37) and the commutation mechanism. As mentioned above, the commutation mechanism is independent for each switch. So the validation of transitions is made separately for each automaton. The *invariant condition* blocks, which decide the validation of transitions, are independent and they are implemented based on the definition of the model for the corresponding nonlinear phenomenon.

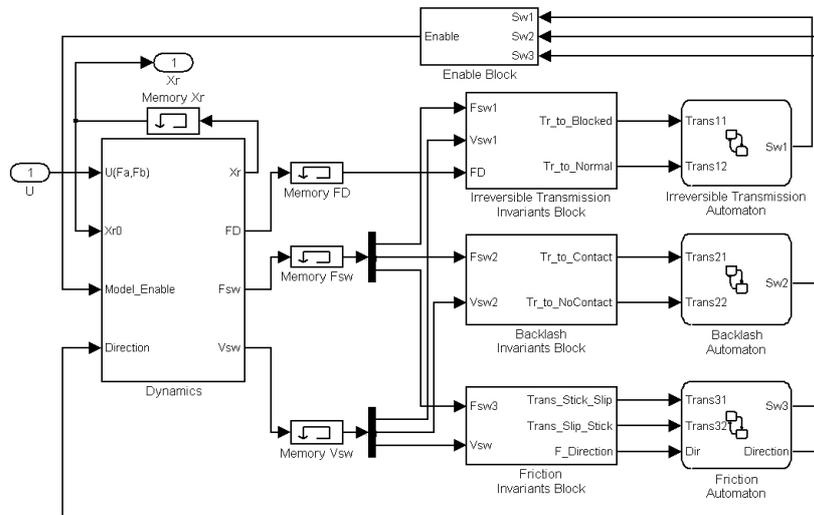


Fig. 37. Simulation model for the switching system of Fig. 33

The active location for each of the three automata gives the current state of the associated switch element, which is viewed from a binary perspective (the state of  $Sw_x$  signal being denoted 0 or 1). The active mode of the system is defined by the overall configuration of switches. It is identified by a unique number given by the combination of the binary numbers associated with the individual states of the three switches. The number of the currently active mode is translated into an *Enable* signal by the *Enable Block*, which allows selecting the appropriate dynamics.

### 6.4. Simulation results

A simulation of the system is performed using the following parameters: the inertia  $I_m$  of the motor has a magnitude 5, the respective inertias  $I_A$  of component *A*,  $I_C$  of component *C* and  $I_D$  of component *D* are all equal to 1, the spring constant  $C_B$  is 0.5, viscous friction coefficients  $R_m$  at the motor and  $R_D$  at contact between *D* and surface  $S_2$  are both 0.1, viscous friction coefficient  $R_A$  at the contact between component *A* and the motor shaft is 0.2, the damping coefficient  $R_B$  is 0.5 and the gear ratio  $r$  for the transmission between motor and *A* is 1. The threshold value for static friction between component *D* and surface  $S_2$  is 11 and the kinetic friction between the two surfaces has a magnitude 10. The width of

the deadzone for the backlash between components  $C$  and  $D$  is 0.5. Components  $C$  and  $D$  start from an initial position where the relative displacement between them is null. The velocity  $v_s$  of the surface  $S_2$  is zero. The time-varying torque provided by the motor is given in Fig. 38.

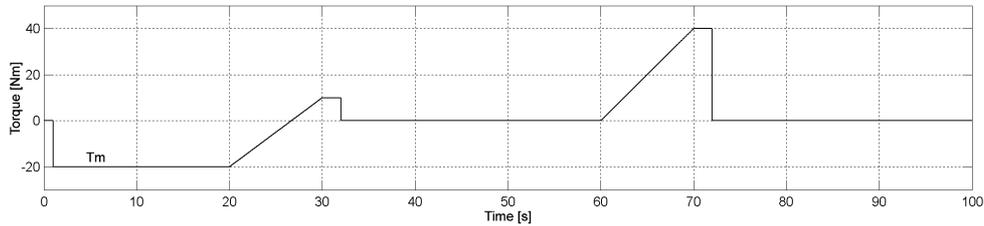


Fig. 38. Evolution of the input signal  $T_m$

The evolution of the signals on which the validation of transitions is based is respectively shown in Fig. 39 for the dry friction automaton, in Fig. 40 for the backlash automaton, and in Fig. 41 for the irreversible motion transmission automaton. The resulting evolution of the state variables (momentum  $p_m$  of the motor, deformation  $q_B$  of the spring, momentum  $p_C$  of component  $C$ , momentum  $p_D$  of component  $D$  and momentum  $p_A$  of component  $A$ ) is displayed in Fig. 42. The system starts from a rest state where the motor torque is zero and the component  $C$  is on the right side of the backlash deadzone, relatively to  $D$ . So its initial operating mode is  $FEF$ . As soon as the motor torque becomes negative, the conditions for unlocking the transmission are valid and the system passes in  $EEF$  mode. The power from the motor is converted in a linear displacement of component  $A$ . Because of the orientation of the motor shaft rotation, component  $A$  starts a right-to-left motion ( $p_A < 0$ ). This motion is transferred through the deformation of the spring to component  $C$  which starts to move also in a right-to-left manner ( $p_C < 0$ ). While component  $C$  passes through the deadzone of the backlash with  $D$ , the system remains in  $EEF$  mode. When it reaches the left side of the backlash, entering in contact with component  $D$ , then the system commutates to  $EFF$  mode, because the force applied over component  $C$  (by the motor via component  $A$  and the spring damper system) is not high enough in magnitude to overcome the static friction threshold value. This is why the velocity of  $C$  drops to zero again. Meanwhile, the motor continues rotating in the negative direction, and thus component  $A$  continues the negative motion also. The motion of  $A$  transforms into the deformation of the spring, thus increasing the force applied over component  $C$ . When the latter reaches the threshold value of static friction between  $D$  and surface  $S_2$  (remembering that components  $C$  and  $D$  are in contact) both components start to move in the negative direction (right-to-left) with the same velocity. This is when the system commutes to  $EFE$  mode. Because the torque from the motor is dropping to zero, and at one point it even reverses direction, the velocity of component  $A$  starts to decrease (meaning that its absolute value goes to zero). Because the torque from the motor goes to zero, the system asymptotically goes to a state of rest. When the force applied over component  $C$  is not sufficient enough to overcome the friction force between  $D$  and  $S_2$ , the velocity of both components drops to zero and the system goes to  $EFF$  mode. When the torque from the motor starts to increase (in the positive direction), component  $A$  starts to move (in the positive direction also) under the actuation of the motor. The motion is transmitted, through the deformation of the spring, to component  $C$  (which, before the torque increased, was still in contact with  $D$ , on the left side of the backlash). The positive motion of  $C$  (from left-to-right) forces the system to commutate to  $EEF$  mode. Thus, the velocity of  $C$

increases until it reaches the right side of the backlash with component  $D$ . Because the force that component  $C$  applies over component  $D$  is not sufficient enough to overcome the static friction, both the velocity of  $C$  and  $D$  drop to zero and the system commutates to  $EFF$  mode. The deformation of the spring (which is the result of component  $A$  positive velocity) results in an increase in the force applied over component  $C$  and  $D$ . This force increases until it overcomes the static friction value, when both components start to move in the positive direction (from right-to-left). When the friction force is overcome, the system passes to  $EFE$  mode. Because the torque from the motor drops to zero, the system tends to go to a state of rest. This translates in the velocities of  $C$  and  $D$  going to zero (at which time the system goes to  $EFF$  mode) and the rest of the components go, asymptotically, to a state of zero velocity.

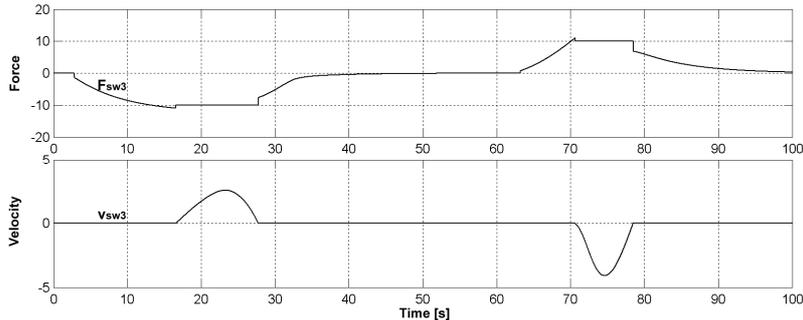


Fig. 39. Signals associated with the validation of transitions for dry friction automaton

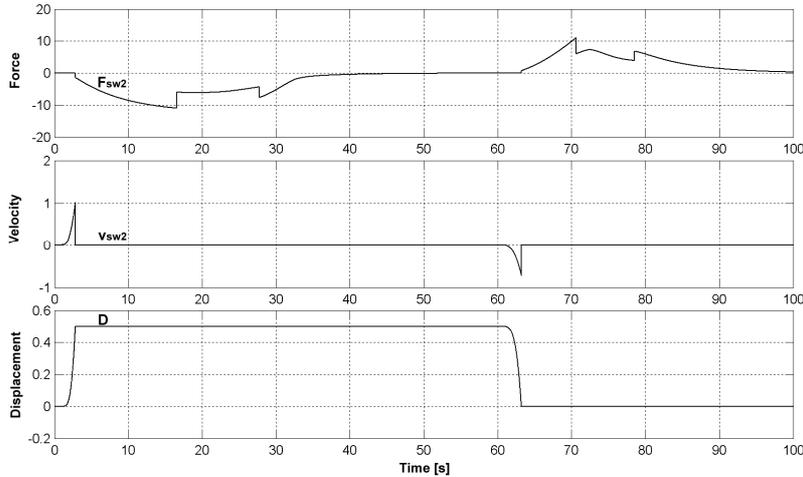


Fig. 40. Signals associated with the validation of transitions for backlash automaton

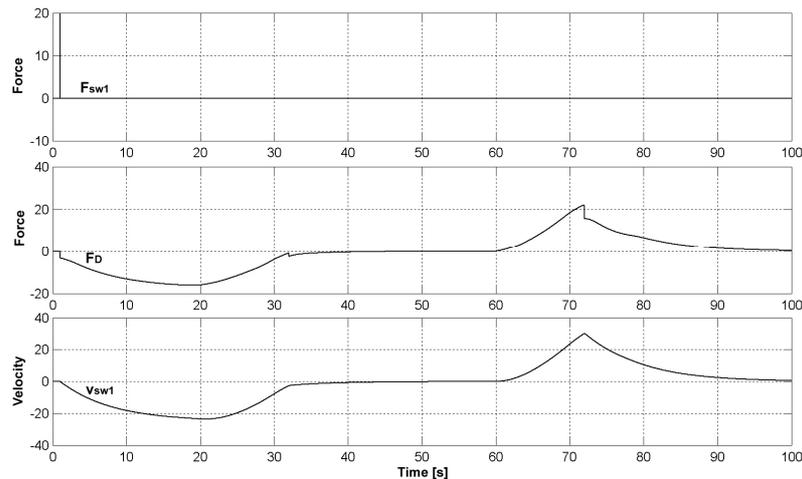


Fig. 41. Signals associated with the validation of transitions for irreversible motion transmission automaton

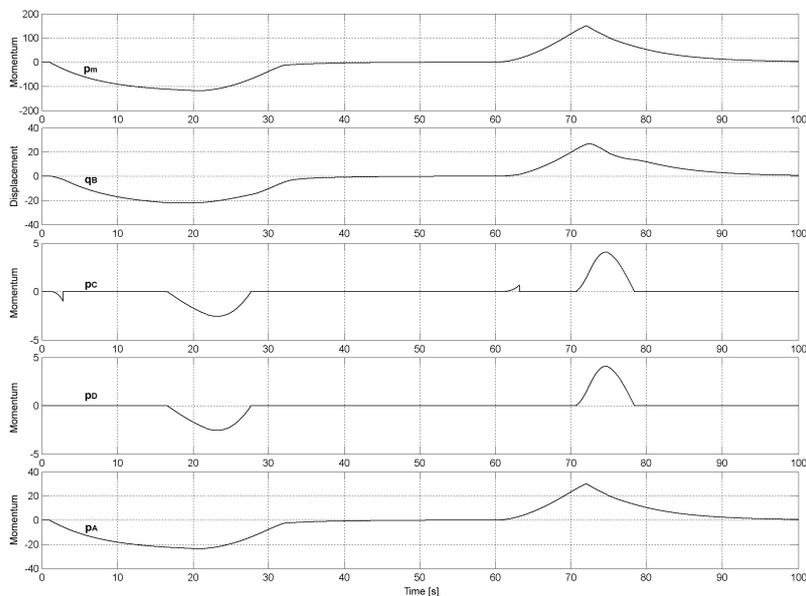


Fig. 42. Dynamic evolution of state variables

## 7. Conclusion

In this paper, it has been shown how the hybrid bond graph approach, originally developed for electrical switching systems, also provides a suitable framework to model hard nonlinear phenomena widespread in mechanical systems such as dry friction, backlash and irreversible motion transmission. This modelling approach uses the bond graph formalism enriched with ideal switching elements to describe the various dynamics of systems characterized by a piecewise continuous behaviour, and also relies on finite automata to control the commutations of switches. Additionally, it benefits from a generic analysis methodology, supported by formal tools, that allows the systematic and automated derivation of explicit computational schemes. Applying it to the above-mentioned nonlinear mechanical phenomena, atomic models have been built that capture the dynamic behaviour induced by each of these phenomena and give an idealized description of it in the most elementary way possible. These models are both simple and reusable. Indeed, taking advantage from the

intrinsic modularity of bond graph, they can be straightforwardly integrated in the representations of whole mechanical systems, which themselves can be analyzed in a systematic manner in order to generate overall simulation models that are computationally tractable. This valuable skill has been illustrated using the example of a mechanical system combining all the nonlinear phenomena of interest. Moreover, the simulation results show that the approach gives realistic models which properly predict the dynamic behaviour of complex systems. Further work will consist of studying how the proposed models can be used as a basis to synthesize control laws for such switching mechanical systems, knowing that the commutations they involve are autonomous.

## References

- [1] Mosterman P., Biswas G., “A Theory of Discontinuities in Physical System Models”, *Journal of the Franklin Institute*, 1996.
- [2] Mosterman P., Biswas G., “Formal Specifications for Hybrid Dynamical Systems”, in *Proceedings of the Fifteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 568-573, Nagoya, Japan, 1997.
- [3] Mosterman P.J., “Hybrid Dynamic Systems: a Hybrid Bond Graph Modeling Paradigm and its Application in Diagnosis”, Thesis, 1997.
- [4] Mazo M., “State of the Art on Hybrid Systems Identification”, *Centre for Complex Dynamic Systems and Control Internal Report*, 2005.
- [5] J. Buisson, H. Cormerais and P.Y. Richard. “Analysis of the bond graph model of hybrid physical systems with ideal switches”, *Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 216, pp. 47-72, 2002.
- [6] Heemels, W.P.M.H., Brogliato, B., “The Complementarity Class of Hybrid Dynamical Systems”. *European Journal of Control* 9, N°. 2-3, pp. 322-360, 2003.
- [7] M. Nordin, P.O. Gutman, “Controlling mechanical systems with backlash – a survey”, *Automatica*, vol. 38, N°10, pp. 1633-1649, 2002.
- [8] Johansson K.H., Lecture 2: *Hybrid Automata and Executions*, Lecture given in EECS291E Hybrid Systems at UC Berkeley, 2000.
- [9] Henzinger T., “The Theory of Hybrid Automata”, *Proceedings of the 11th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 278-292, 1996.
- [10] Gawthrop P., Geraint B., “Bond Graph Modeling”, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 27, 2007.
- [11] Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C. *System Dynamics: a Unified Approach*, Wiley Interscience, second edition, 1990.
- [12] J. Buisson, “Analysis of switching devices with bond-graphs” - *Journal of the Franklin Institute* Vol 330, N° 6, pp. 1165-1175, 1993.
- [13] Richard C., “On the Identification and Haptic Display of Friction”, Thesis, 2000.
- [14] Iurian C., Ikhouane F., Rodellar J., Griñó R., “Identification of a System with Dry Friction”, Institut d’Organització i Control de Sistemes Industrials, 2005.
- [15] Marchi J.A., “Modeling of Dynamic Friction, Impact Backlash and Elastic Compliance Nonlinearities in Machine Tools with Applications to Asymmetric Viscous and Kinetic Friction Identification”, Thesis, 1998.

- [16] M. Nordin, J. Galic and P.O. Gutman, “New models for backlash and gear play”, *International journal of adaptive control and signal processing*, vol. 11, pp. 49-63, 1997.
- [17] G. Tao and P.V. Kokotovic, *Adaptive control of systems with actuator and sensor nonlinearities*, Wiley, New York, 1996.
- [18] H. Cormerais, J. Buisson, S. Leirens, P.Y. Richard, “Calcul symbolique de l'ensemble des équations d'état pour les bond graphs en commutation”, *CIFA 2002*, Nantes, 8-10 juillet 2002.
- [19] Cormerais H., Buisson J., “A Mathematical Criteria to Determine the Valid Modes of a Hybrid System”, *IFAC Symposium on Power Plants and Power Systems Control*, Brussels, 2000.
- [20] Zainea M., Buisson J., Cormerais H., Guéguen H., Godoy E., “Automatic Simulink Model Building for Physical Switching Systems”, *17th IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation*, Paris, 2005.
- [21] Buisson J., Cormerais H., Zainea M., Guéguen H., Godoy E., “Formal Approach to Compute Hybrid Automata Models for Linear Physical Systems with Switches”, *Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, 2004.
- [22] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R., *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential Algebraic Equations*, 1989.
- [23] Venkatesh P., “Algorithmic Algebraic Model Checking: Hybrid Automata and Systems Biology”, Thesis, 2006.
- [24] Casagrande A., Balluchi A., Benvenuti L., Policriti A., Villa T., Sangiovanni-Vincentelli A., “Improving Reachability Analysis of Hybrid Automata for Engine Control”, *Proceedings of CDC, 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis, pp 2322-2327, 2004.
- [25] Erbes T., “Stochastic Learning Feedback Hybrid Automata for Dynamic Power Management In Embedded Systems”, Thesis, 2004.
- [26] F.E. Cellier, M. Otter, H. Elmqvist, “Bond graph modeling of variable structure systems”, *ICBGM'95*, pp.49-55, 1995.
- [27] Strömberg J.E., Top J., Södermann U., “Variable causality in bond graphs caused by discrete effects”, *ICBGM'93*, 1993.
- [28] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J.P., Rotella F., Zambettakis I., *Modélisation et identification des processus*, Technip, 1992.

**2. *15<sup>th</sup> IFAC World Congress on Automatic Control (Barcelona, 2002)***

## ANALYSIS OF FLATNESS USING BOND GRAPHS AND BICAUSALITY

P.Y. Richard, J. Buisson, H. Cormerais

**Equipe Automatique des Systèmes Hybrides**

*Supélec - Campus de Rennes*

*Avenue de la Boulaie, BP 28, F-35511 Cesson-Sévigné Cedex*

*France*

[Pierre-Yves.Richard@supelec.fr](mailto:Pierre-Yves.Richard@supelec.fr), <http://www.supelec-rennes.fr/>

Abstract: Considering one of the most popular examples of flat system, namely the two dimensional crane, this paper shows how bicausality can be used in order to analyse its bond graph model as far as flatness is concerned. More generally, it will be seen how applying this concept both allows verifying the flatness property of a system and deriving the open-loop control laws that result from it in a systematic fashion, provided that flat outputs have been identified. *Copyright © 2002 IFAC*

Keywords: flatness, bond graph, bicausality, inverse dynamics.

### 1. INTRODUCTION

The issue of flatness from a bond graph point of view has already been addressed by Gil, *et al.* (1997). The method described in that contribution, which aims at determining the flatness property directly on a bond graph model, is based upon the analysis of causal paths between the inputs as well as the state variables on the one hand, and the candidate flat outputs on the other hand. It is restricted, however, to SISO systems. Moreover, it does only work in the case where flat outputs are state variables. The purpose of the present paper is to propose a more general approach. When searching for a structural way to verify flatness from a bond graph, one could first think of the notion of relative degrees, since flatness has to do with input-output invertibility. Thus a necessary condition for a system to be flat is that the relative degree associated with each of its input-flat output pairs be equal to its order. Now there exist systematic methods to determine relative degrees from bond graphs given a preferred integral causality assignment (Wu and Youcef-Toumi, 1993). Unfortunately, the previous

condition is not sufficient since flatness also implies some kind of state-output invertibility, as will be seen in the next section. As a consequence, it seems that the most relevant answer to the question of flatness is provided by the notion of inverse dynamics (Gawthrop, 1998). Now this notion is strongly related to the concept of bicausality, introduced by Gawthrop (1995). It is why the latter concept will be investigated as a tool to analyse the flatness of systems modelled by bond graphs. The paper is organized as follows. In section 2, some background is given about flatness, then about bond graph modelling and finally about bicausality. Section 3 illustrates the proposed analysis approach through the famous example of a 2-D crane, which is first studied in a basic context before being refined in section 4. Lastly a general methodology is deduced in section 5.

### 2. BACKGROUND

#### 2.1 Differential flatness

The concept of differential flatness was introduced by Fliess *et al.* as a new

nonlinear extension of Kalman's controllability. Flat systems, indeed, are equivalent to linear controllable ones via a special type of feedback called endogenous (Fliess, *et al.*, 1995). As a consequence, such systems are controllable whether they are linear or not. It is very important a result since many systems met in various engineering fields actually are flat (Rudolph, 1999).

Let now briefly recall the mathematical definition of this notion. Consider a nonlinear multivariable system characterized by the following generalized state representation:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$  denotes the state vector and  $u \in \mathbb{R}^m$  the input one.

This system is called (differentially) flat if there exists a new vector  $y = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)})$ , where  $y \in \mathbb{R}^m$  and  $\alpha \in \mathbb{N}$ , such that there exist two functions  $A$  and  $B$ , as well as an integer  $\beta$ , verifying the double property

$$\begin{cases} x = A(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta)}) \\ u = B(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta+1)}) \end{cases} \quad (2)$$

Vector  $y$  is called a flat (or linearizing) output. It has the same dimension as input vector  $u$ , and its components are differentially independent real-analytic functions of  $x$ ,  $u$  and a finite number of its time derivatives. Besides, it generally has a well defined physical meaning, although there is no uniqueness in its choice. The major property about it is that any variable of the system can be expressed as a differential function of its components, and thus calculated without integration of the differential equation governing the system.

Several important implications of flatness exist as far as control is concerned. The most obvious one is motion planning. Indeed, any desired trajectory of the linearizing output can be obtained in a straightforward manner via an open-loop

control, since  $x$  and  $u$  trajectories are exactly and explicitly deduced from  $y$  ones. By another way, closed-loop strategies can be easily applied in order to control a flat system, since the latter can be transformed into a linear controllable one in Brunovsky canonical form, namely

$$y^{(\beta+1)} = v \quad (3)$$

where  $v$  is the new input vector, by means of an endogenous feedback (Rotella and Carillo, 1999).

To date, there exists however no systematic method to determine the flatness of a system.

## 2.2 Bond graph modelling

Bond graph is a modelling tool which yields a lumped parameters graphical description of energy exchanges in dynamic systems. Each elementary energy transfer is represented by means of a bond with an half arrow indicating its conventional direction, as depicted in figure 1. Two variables are associated with each bond, namely the effort  $e$  and the flow  $f$ , the product of which gives the power transferred. See (Karnopp, *et al.*, 1990; Borne, *et al.*, 1992) for an in-depth description.



Fig.1. Bond graph representation of an elementary power transfer.

This tool has proved to be particularly convenient to deal with multidisciplinary systems, since it is characterized by a unique and reduced formalism whatever the physical field of interest may be. Thus any model can be put in the generic form of figure 2. Given such a bond graph, a structural analysis can be performed, as well as a generation of its symbolic equations, thanks to the essential notion of causality which provides physical models with a computational input-output structure (Sueur and Dauphin-Tanguy, 1989; Sueur and Dauphin-Tanguy, 1991). Standard

causality is based on the principle that an effort imposed at one end of a bond necessarily implies a flow imposed at the other end. By convention, a causal stroke is put at the end of the bond where effort is imposed, as depicted in figure 3. Systematic procedures exist in order to achieve causality assignment for a whole model in a consistent manner.

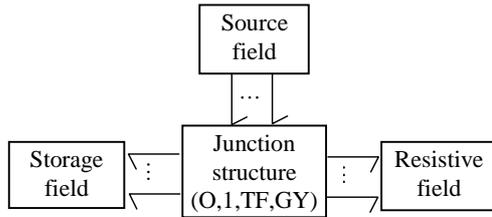


Fig.2. Bond graph generic model.

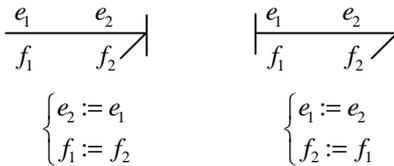


Fig.3. Bond graph notation for standard causality.

Using the causal orientation of bonds, state space representations can be systematically derived from possibly nonlinear bond graph models. The resulting equations generally have the following form:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4)$$

which appears as a particular case of (1).

This property explains why bond graph can be thought of as a suitable tool to analyse flatness.

### 2.3 Bicausality

The notion of bicausality was introduced by Gawthrop as an extension of conventional bond graph theory, in order to handle systems with non standard input-output patterns (Gawthrop, 1995). In conventional bond graph models, bonds are unicausal in the sense that a single causal (full) stroke is attached to each of them. In the context of bicausality instead, bonds are provided with two causal half strokes, which results in decoupling the effort and flow respective causalities. More

precisely, a causal half stroke put on the flow side of a bond (i.e. on the half arrow side) means a flow imposed on the variable associated with the far end of this bond, whereas a causal half stroke put on the effort side of a bond means an effort imposed on the variable associated with the near end of this bond. With such a convention, unicausal bonds appear as particular cases of bicausal ones where both causal half strokes coincide. For a single bond, two different extra configurations can be found (besides the ones of figure 3), which appear to be specifically bicausal. They are shown in figure 4, with the corresponding assignment statements.

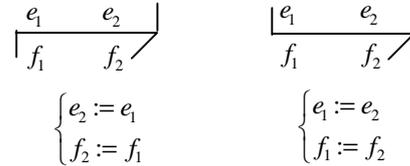


Fig.4. Bicausal configurations for a single bond.

Bicausality can be used to derive properties about inverse dynamics, state and parameter estimation. The inverse of a dynamic system such as addressed here is defined as the new system which, given the initial system output as its input, will exactly reproduce the system input as its output. It is therefore a question of (possibly partial) inversion with respect to input-output pairs. Now it has been demonstrated by Gawthrop that the inverse of a system modelled by a standard bond graph is best represented by a bicausal one, since only the latter permits all the equations of the inverse dynamics to be directly represented (Gawthrop, 1998). It is particularly true for systems with non-collocated input-output pairs. The same author has also introduced new bond graph components, namely source-sensor components denoted by SS, in order to help define inverse systems (Gawthrop and Smith, 1992). In the context of bicausal bond graphs, these components provide a more convenient representation of the input and output ports of systems than

standard effort and flow sources, since the causality on their bond is not irrevocably fixed. Note that one can conventionally distinguish between input and output SS components, by using the adequate direction for power (Fotsu-Ngwompo, et al., 1997).

By another way, it is obvious from (2) that the proof for flatness has to do with system inversion. Moreover, it will be seen in the following that parameter estimation can be necessary in the process of inverting a nonlinear system modelled by bond graphs. As a result, bicausal bond graphs associated with the use of SS components seem to provide a particularly adequate framework to study flat systems.

### 3. BASIC EXAMPLE

For the sake of both clarity and simplicity, the proposed analysis method will first be illustrated using an example instead of being exposed theoretically. Let take the case of the two dimensional crane displayed in figure 5, where the trolley travels horizontally while its load, which behaves like a variable length pendulum, remains in the fixed vertical plane of the figure. The trolley position  $D$  and the pendulum length  $R$  are control inputs.

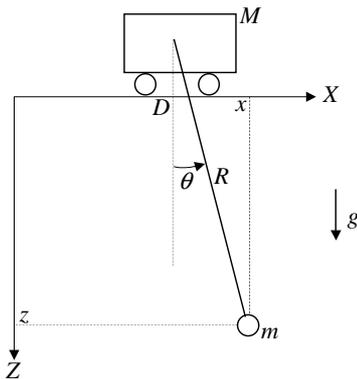


Fig.5. 2-D crane.

The corresponding basic bond graph model is shown in figure 6. Some geometrical constraints which cannot be directly represented on that bond graph must be joined.

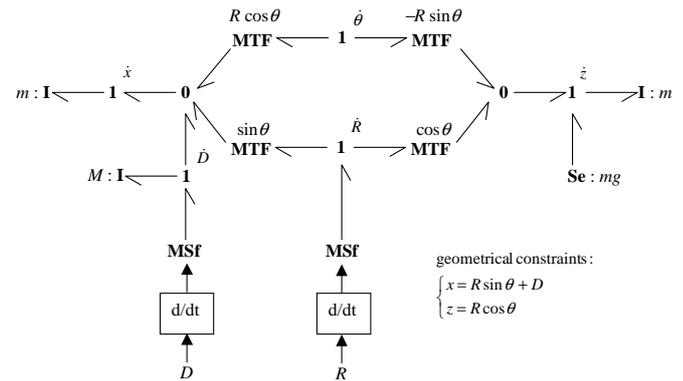


Fig.6. Basic bond graph.

According to the literature, couple  $(x, z)$  is a flat output for the system (Fliess, et al., 1995). Its two constitutive variables, however, do not appear as natural outputs of the bond graph, since they cannot be measured. On the other hand, their derivatives do, because each of them corresponds to the flow variable on a particular 1 junction. In order to measure them without disturbing the dynamic behaviour, source-sensor components *injecting a null effort* are added to the model. Each original modulated flow source is also replaced by a source-sensor component, in order to properly represent the inputs of the system with a view to its coming inversion. As a last point, internal variable  $\theta$  is made implicit. The equivalent model resulting from these transformations is shown in figure 7. A preferred causality has been assigned to this model, revealing an apparent order of 1, due to the presence of one storage element with integral causality. In order to determine the actual order of the model, the number of integrations, if any, which are necessary to compute all the MTF moduli must be taken into account. Actually,  $D$  and  $R$  being given as control inputs, the only knowledge of  $x$  and  $z$  is needed. Besides, it just requires one integration, since both variables are related by a geometrical constraint. Thus the actual order of the model is 2.

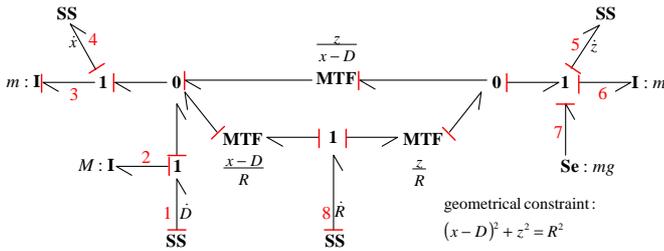


Fig.7. Equivalent causal bond graph with SS components.

Let  $p_3$  and  $x$  be the state variables. In order to verify the flatness property, it must be shown that the latter as well as the inputs can be derived from the flat outputs without integrating. As for the state variables, it is obvious since one has  $p_3 = m \dot{x}$  and  $x = x$ . As for the inputs, the causality of both SS elements corresponding to the flat outputs is modified so that they now inject the flow variable they used to measure, as well as continuing to provide a null effort. Thus the corresponding bonds become bicausal ones. Then propagation rules are used as defined in (Gawthrop, 1995). The result is the partly inverted bond graph of figure 8.

Knowing  $x$  and  $z$ , hence  $\dot{x}$  and  $\dot{z}$ , the unknown MTF modulus  $\frac{z}{x-D}$  can be obtained from the partial causality assignment, as the ratio of the efforts which are imposed to the MTF component on both of its bonds. This situation illustrates the ability of bicausal bond graphs to allow parameter estimation, not only for one-port components as described in (Gawthrop, 1995), but also for multi-port ones.

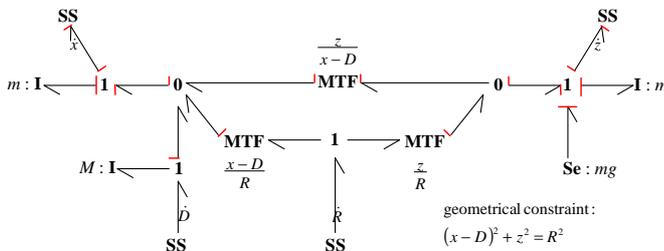


Fig.8. Partial inverse bicausal bond graph.

The expression of  $D$  is straightforwardly deduced:

$$D = x - z \frac{\ddot{x}}{\ddot{z} - g} \quad (5)$$

Then the geometrical constraint yields that of  $R$ :

$$R = \sqrt{\left( z \frac{\ddot{x}}{\ddot{z} - g} \right)^2 + z^2} \quad (6)$$

At this stage, the flatness property has been demonstrated. It is possible however to go further into the analysis. Indeed, using the previous pieces of information, the non standard causality assignment can be completed in order to define the whole inverse model, as depicted in figure 9.

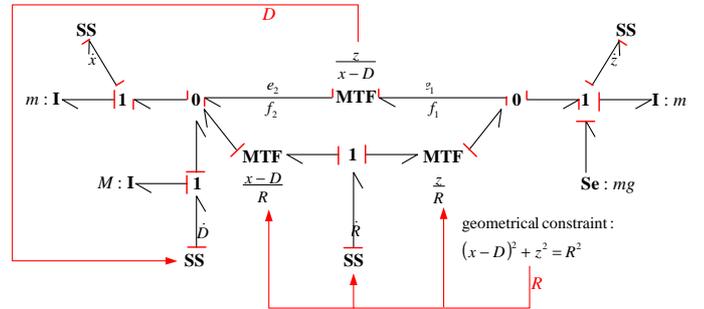


Fig.9. Complete inverse bicausal bond graph.

It can be seen that a double determination of the MTF modulus primarily used to find  $D$  as a function of  $x$  and  $z$  results from the causal assignment achieved. The consistency of such a situation must be verified. Actually, the expressions found for  $D$  and  $R$  yield:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\dot{x} - \dot{D} - \left( \frac{x-D}{R} \right) \dot{R}}{\frac{z}{R} \dot{R} - \dot{z}} = \frac{\ddot{z} - g}{\ddot{x}} = \frac{f_2}{f_1} \quad (7)$$

#### 4. MORE REFINED EXAMPLE

Now the previous system is augmented with the traversing and hoisting dynamics, which implies taking new control inputs, namely force  $F$  and torque  $\Gamma$ , according to the bond graph of figure 10.  $r$  is the radius of the hoist pulley and  $J$  its inertia momentum. This time, the apparent order of the system is 3 and the actual one 6 (taking the geometrical constraint into

account). The natural state variables (in a bond graph sense) are  $p_2$ ,  $p_3$  and  $p_9$ ;  $x$ ,  $D$  and  $R$  (for instance) must be added to them.

It has already been shown in other contributions that this augmented system is still flat, with unchanged flat outputs (D'Andréa-Novel and Levine, 1990; Siguerdidjane, 1998). The point here is to verify this property directly from the bond graph model using bicausality, as done just before for the basic system. In order to invert the new system dynamics, it can be proceeded the same way as previously, modifying the causality of both SS elements associated with the candidate flat outputs and propagating through the junction structure.

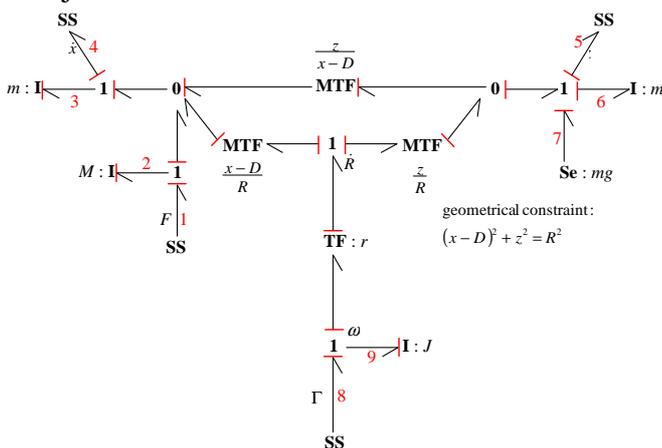


Fig.10. Unicausal bond graph of the augmented system.

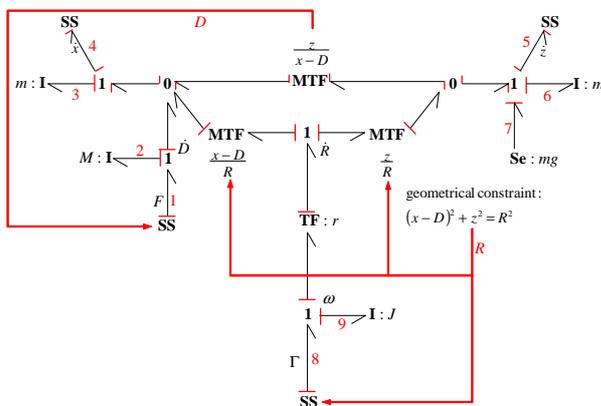


Fig.11. Bicausal bond graph of the inverted augmented system.

$D$  and  $R$  are identically determined, and thus given by the same formulas (5) and

(6). Then, it can be verified that the (bi)causal assignment is such that  $F$  and  $\Gamma$  can be deduced from the graph. Moreover, since all the storage elements have been imposed a derivative causality, the order of the inverse system is zero and no integration will be needed for their computation.

Thus one gets:

$$\begin{cases} F = M \ddot{D} + m \ddot{x} \\ \Gamma = \frac{J}{r} \ddot{R} + \frac{m r}{R} [(x-D)\ddot{x} + z(\ddot{z} - g)] \end{cases} \quad (8)$$

Besides, the state variables are given by:

$$\begin{cases} x = x \\ D = x - z \frac{\ddot{x}}{\ddot{z} - g} \\ R = \sqrt{\left( z \frac{\ddot{x}}{\ddot{z} - g} \right)^2 + z^2} \\ p_2 = M \dot{D} \\ p_3 = m \dot{x} \\ p_9 = \frac{J}{r} \dot{R} \end{cases} \quad (9)$$

which demonstrates the flatness of the system with respect to the same couple of linearizing outputs  $(x, z)$ .

Once again, a double determination of the MTF modulus is encountered, whose consistency straightforwardly results from the verification made in the previous section.

## 5. GENERALIZATION

From the previous examples, a general methodology can be deduced in order to analyse the flatness of a system. Given a standard bond graph model, a sequential procedure including 3 stages is proposed:

- First assign conventional causality to the model, using SCAP or any equivalent method based upon preferred integral causality. Identify the resulting state variables ( $p$  on I components,  $q$  on C components in integral causality, plus possibly extra variables in the case of

modulated components such as MTF for instance).

- Coming back to the acausal model, replace the sources by input SS components and attribute output SS components to the candidate flat outputs.
- Assign the flow-source/effort-source causality to the output SS components and propagate as far as possible. Whenever the bicausal information allows estimating a modulated component parameter, use the resulting piece of knowledge to propagate again (by determining other modulated components parameters or partly imposing the causality of input SS components for instance). Also use any additional physical constraint possibly not included in the bond graph.

If at the end of this step:

- the whole model has been causally completed (which means that any bond has its two causal half strokes set),
- no storage element has been imposed an integral causality,
- the causality of the input SS components is such that every original input of the system now appears as an output of the bicausal junction structure,

then the original system is flat with respect to the chosen outputs.

In such a case indeed, the inverse system exists and its order is zero, which implies that any variable, including the original system inputs and state variables, can be calculated without integrating given its inputs (i.e. the original system outputs). In order to find the laws corresponding to (2), one just has to write the equations of the bond graph in the form dictated by causality.

On the other hand, if one of the previous conditions is not satisfied, then it can just be concluded that the considered outputs are not linearizing ones for the system.

## 6. CONCLUSION

This contribution shows how bicausal bond graphs can be used to verify the flatness of a system with respect to identified linearizing outputs, as well as to derive the resulting open-loop control laws. First, applying a standard causality assignment to the bond graph model straightforwardly leads to a minimal state space representation. Then, respectively attributing SS components to the input and output ports, and giving an adequate bicausal assignment to the latter, one can build the inverse model, the order of which must be zero for the original system to be flat. Further research will consist in investigating how to seek for flat outputs if any, given some system.

## REFERENCES

- D'Andréa-Novel, B., Levine, J. (1990). Modelling and Nonlinear control of an overhead crane. In: *Robust Control of Linear and Nonlinear Systems, Mathematical Theory of Networks and Systems* (MTNS'89), Vol. 2, pp. 523-529.
- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J.P., Rotella, F., Zamvettakis, I. (1992). *Modélisation et Identification des processus*, Tome 2, Technip.
- Fliess, M., Levine, J., Martin, P., Rouchon, P. (1995). Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples. In: *International Journal of Control*, Vol. 61, No. 6, pp.1327-1361.
- Fotsu-Ngwompo, R., Scavarda, S., Thomasset, D. (1997). Physical Interpretation of Zero Dynamics for Linear SISO Control Systems. In: *IFAC-IFIP-IMACS Conference*, Belfort, pp. 232-236.
- Gawthrop, P.J., Smith, L. (1992). Causal Augmentation of Bond Graphs. In: *Journal of the Franklin Institute*, 329(2), pp. 291-303.
- Gawthrop, P.J. (1995). Bicausal Bond Graphs. In: *Proceedings of International*

*Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'95)*, Las Vegas, pp. 83-88.

Gawthrop, P.J. (1998). Physical Interpretation of Inverse Dynamics using Bond Graphs. In: *The Bond Graph Digest*, Vol. 2.

Gil, J.C., Pedraza A., Delgado, M. (1997). Flatness and Passivity from a Bond Graph. In: IEEE.

Karnopp, D.C., Margolis, D.L., Rosenberg, R.C. (1990). *System Dynamics : a Unified Approach*. Wiley Interscience, second edition.

Rotella, F., Carillo, F.J. (1999). Flatness Approach for the Numerical Control of a Tuning Process. In: *Les systèmes plats : aspects théoriques et pratiques, mise en œuvre, Journée thématique PRC-GDR Automatique*, pp.143-149.

Rudolph, J. (1999). Flatness Based Control of Chemical Reactors. In: *Les systèmes*

*plats : aspects théoriques et pratiques, mise en œuvre, Journée thématique PRC-GDR Automatique*, pp.179-219.

Siguerdidjane, H.B. (1998). Divers schémas de Commande Non Linéaire et Applications. In: *Habilitation Degree from University of Paris XI*.

Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. (1989). Structural Controllability/Observability of Linear Systems Represented by Bond Graphs. In: *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 326, No. 6, pp. 869-883.

Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. (1991). Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems. In: *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70.

Wu, S.T., Youcef-Toumi, K. (1993). On Relative Degrees and Zero Dynamics from System Configuration. In: *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, pp. 1025-1029.

**3. *Nonlinear Analysis* 65 (2006) 1751-1772**

# A generic design methodology for sliding mode control of switched systems

P.Y. Richard\*, H. Cormerais, J. Buisson

*IETR – Supélec*

Campus de Rennes, BP 81127, F-35511 Cesson-Sévigné Cedex

*France*

Fax : (+33) 299 844599

[Pierre-Yves.Richard@supelec.fr](mailto:Pierre-Yves.Richard@supelec.fr), <http://www.rennes.supelec.fr/>

**Abstract** - The aim of this paper is to present a generic methodology to design sliding mode controllers for multivariable switched systems affine in the control such as dc-dc power converters. An original formulation of the so-called reachability condition, suitable for this class of systems, is established. Based upon the choice of a Lyapunov-like function and parameterised by a single weighting matrix, it allows several kinds of control strategies to be derived, namely conventional piecewise continuous ones as well as discrete (Boolean) one. Its application to the important subclass of linear time invariant systems is more specifically investigated. In the Boolean case, the present approach is also compared to another hybrid one called the stabilizing approach. Eventually, Its efficiency as a design methodology as well as the performances of the resulting control are shown by simulating it on non trivial examples of power converters.

**Key-words** : switched systems, dc-dc converters, sliding mode control, Boolean inputs

## 1. Introduction

Switched systems have gained an increasing place in industrial applications since the middle of the 20<sup>th</sup> century, especially in the field of power electronics where static converters are extensively used. For that reason, they have been acknowledged as a research object for several decades. But their study has recently received a growing attention from control researchers. Indeed, beyond their industrial interest, such systems basically are characterized by a discontinuous dynamic behavior, which makes them particularly attractive to the emergent hybrid community.

From a physical point of view, switched systems are defined as continuous time systems including some components that evolve much faster than the time scale at which their global behavior needs to be analyzed. If the fast dynamics of these components are neglected, the latter can be modeled using so-called ideal switches, which instantaneously modify the topology of their continuous surroundings according to their individual state [1]. Then the remaining dynamics naturally exhibit some discontinuities, which can be interpreted as the effect of commutations between several continuous modes.

In the present paper, the emphasis is put on a subclass of switched systems for which it is possible to establish a state equation common to all operating modes, parameterized by Boolean variables whose values define the current one [2]. It is assumed, in addition, that all commutations are fully controlled, which means that no change of mode can occur without an intentional control action, while such an action may enforce any commutation between two modes at any desired time. As it should be noticed, this property generally holds for power converters, even in the frequent case where they include autonomous switching components

such as diodes, since the latter are always associated with transistors in order to make controlled switching pairs, both elements of which commute simultaneously in normal operating conditions.

From a control point of view, the key feature of switched systems fulfilling both previous conditions is that the Boolean parameters of their state equation represent control inputs. Their study will still be restricted to the case where this state equation can be expressed in a form affine in its control inputs. The latter assumption, anyway usual in nonlinear control theory, is technically essential for the proposed method to work. Besides, it is verified by most power converters.

Quite naturally, sliding mode control (SMC) has been thought of as an appropriate methodology to regulate switched systems, which are characterized by intrinsically discontinuous inputs, since this technique provides by itself discontinuous control laws [3]. Among the possible strategies that can be applied to multivariable switched systems, it must be distinguished between two distinct approaches. First one includes the conventional SMC strategies, such as diagonalization or the unit vector method, which generate piecewise continuous laws [4,5]. In the particular context of switched systems, their main drawback lies in their implementation which requires an additional pulse width modulation, thus rendering the control scheme more complex. Indeed, switches are operated via PWM signals, modulated by continuous control variables which take the place of the actual Boolean inputs and represent their respective duty cycles [6]. The second approach can be called a Boolean one since it specifically uses, instead, Boolean sliding mode controllers, which generate binary (discrete) output values. The latter approach should be preferred to the former as far as switched systems are concerned, since it ensures a better consistency with the actual nature of the control inputs, and therefore simplifies the implementation : it allows switches to be operated in a straightforward asynchronous manner, and not via their duty cycle in a periodic control any more.

Several authors have already investigated the Boolean approach [7,8]. But few work has been done to render its formalization generic, so as to make it straightforwardly applicable to a sufficiently wide variety of switched systems. To our knowledge, one of the earliest contributions to such a generic methodology is due to Herbertt Sira-Ramirez in [7]. Yet it is restricted to single-input systems. A recent attempt to extend it to the multivariable case whilst keeping its generic feature can be found in [9]. But the proposed approach requires a complex system of linear matrix inequalities to be solved. Besides, a fast combinatorial explosion occurs as soon as the number of Boolean inputs increases. The stake of this paper is to present a new approach which is as generic as the previous one, but does not lead to the above mentioned problems.

The paper is organized as follows. Section 2 recalls the main principles of SMC and formulates them in the context of affine-in-the-control systems. Especially, a generic expression of the so-called reachability condition is established. Both following sections describe two kinds of strategies deduced from this expression: section 3 proposes various piecewise continuous strategies, while section 4 describes the original Boolean one dedicated to the particular case of switched systems. Next, section 5 investigates the application of the previous SMC design methodologies to a specific sub-class of linear time-invariant switched systems. Some considerations about stability are given in section 6. Lastly, examples are presented in section 7.

## 2. A general formalization of SMC for affine systems

Dynamic systems modeled by a state space representation whose expression is affine in the control, without any additional assumption, make a classical and quite large framework to study modern nonlinear control theories. This framework, which possibly includes multivariable, nonlinear and even time varying systems, is also an appropriate one to formulate the principles of SMC in the most generic way. With no lack of generality, the state equation of affine systems can be written as:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u = f(x, t) + \sum_{i=1}^m g_i(x, t)u_i \quad (1)$$

where the system state is denoted by  $x \in \mathbb{R}^n$ , while  $u \in \mathbb{R}^m$  stands for the control input,  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  being continuous functions of the state vector.

Within the class of affine systems described by equation (1), switched ones are characterized by Boolean control inputs:  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, u_i \in \{0, 1\}$ . But this particular case will be emphasized only in the next section. In the immediate following, the most general case is still considered.

SMC belongs to the class of so-called variable structure controls (VSC), which consist of both a set of feedback control laws and a decision rule allowing to select at any time the right law according to the current state of the system. More specifically, the principle of SMC is to constrain the time evolution of a system in the very neighbourhood of a prescribed manifold of the state space called the sliding manifold (ideally just on it), thanks to a control which admits of a discontinuity across this manifold.

Designing a SMC is usually a two-step process. First, a switching function  $s(x, t)$  has to be determined. This possibly time-varying function must have the same dimension as the control input  $u(t)$ ; it is parameterized by the system state and its nullification defines the equation of the sliding manifold. As the control will be designed in order to maintain the system state on this manifold, the choice of the switching function entirely defines the closed loop dynamics of the system (at least in the ideal case). It is therefore directly dictated by the objectives of the control and its expected performances. It can be noticed that the sliding manifold itself evolves with time when a time-varying switching function is taken. Such a choice is usually made when a changing reference must be tracked. Most generally, this manifold is defined as:

$$S(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x, t) = 0\} \text{ where } s(x, t) = [s_1(x, t), \dots, s_m(x, t)]^T \in \mathbb{R}^m \quad (2)$$

In the multivariable case, it can be interpreted as the intersection between as many switching hypersurfaces (i.e. manifolds whose common dimension equals the system order minus one, hyperplanes in the linear case) as available scalar control inputs:

$$S(t) = \bigcap_{i=1}^m S_i(t) \text{ where } S_i(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_i(x, t) = 0\} \quad (3)$$

In practice, when a system is working in sliding mode, it is possible to distinguish between its actual closed loop dynamics, which give a fast oscillatory motion with a small magnitude about the sliding manifold, and its apparent dynamics, which in turn give a slow motion along the sliding manifold. The former motion, known as the chattering phenomenon, is the main drawback of SMC, since it prevents the state trajectories from staying exactly on the desired manifold. This phenomenon, which essentially originates in switching imperfections (non zero commutation times), has to be reduced [10]. In the ideal case, its magnitude is cancelled

while its frequency becomes infinite. Then the only remaining motion is the so-called sliding one, which corresponds to the control objective. Its dynamics is characterized by a reduced order with respect to the original order of the open-loop dynamics and, above all, it is independent from the actual discontinuous control. The system exactly behaves as if it was subject to a continuous state feedback, known as the equivalent control, which can be interpreted as an average value of the actual high frequency switched control.

The ideal sliding dynamics can be characterized using so-called invariance conditions, as soon as manifold  $S(t)$  is determined:

$$\begin{cases} s(t) = 0 \\ \dot{s}(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Both conditions together mathematically express the property that state trajectories evolve in restriction to the prescribed manifold, according to a reduced order sliding motion along its surface. The second one specifically defines the above mentioned equivalent control, namely the continuous state feedback which maintains the trajectory on the sliding manifold provided that first condition be initially verified. This equivalent control does not depend on the discontinuous control law actually applied. It is fully determined by both the choice of the sliding manifold  $S(t)$  and the knowledge of the open-loop dynamics of the system, as can be seen in its general expression:

$$u_{eq}(x,t) = - \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} f(x,t) \right] \quad (5)$$

where  $\frac{\partial s}{\partial x}$  stands for the Jacobian matrix  $J_s(x)$  of function  $s$  with respect to state vector  $x$  :

$$\left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \quad (6)$$

Remark:

Even if the notion of equivalent control essentially makes sense during the sliding motion, namely on the sliding manifold itself, its definition given by (5) can be formally extended to the overall state space. In the following, such a general meaning will be used. In other words, the equivalent control will be assimilated to the continuous state feedback defined by (5), not only inside but also outside the sliding manifold.

The mathematical expression of the ideal sliding dynamics simply results from substituting this equivalent control in the original state equations of the system. It is thus defined by equations:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[ I - g(x,t) \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f(x,t) - g(x,t) \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial t} \\ s(x,t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

It has been demonstrated that a necessary and sufficient condition for the existence of a sliding motion on the specified manifold  $S(t)$ , provided of course that an appropriate discontinuous control  $u(x,t)$  is applied, is given by both the mathematical validity of the previous expression of the equivalent control, which implies that matrix  $\frac{\partial s}{\partial x} g(x,t)$  be non

singular, and its restriction within the boundary values of the actual control  $u(x,t)$  [11]. Thus, if for instance the control is Boolean, this condition can be written as :  $0 \leq u_{eq}(x,t) \leq 1$ .

So the actual sliding domain is generally a sub-domain of the theoretical sliding manifold  $S(t)$ , defined by:

$$D(t) = \left\{ x \in S(t) \mid \min_{x,t} (u(x,t)) \leq u_{eq}(x,t) \leq \max_{x,t} (u(x,t)) \right\} \quad (8)$$

It should be noticed that the regularity of matrix  $\frac{\partial s}{\partial x} g(x,t)$  by itself is just a necessary condition for the existence of a sliding motion, known as the transversality condition.

The second step in the process of designing a SMC consists of determining the control action to be applied. What is remarkable about this control action is that its aim is not to ensure the prescribed dynamic performances, like in most control approaches, but only to render the sliding manifold invariant (at least locally) with respect to the system state trajectories. For this purpose, the control must be discontinuous about the surface of the sliding manifold, and such that all state trajectories be directed towards it in its close neighbourhood. In other words, the actual control must make the sliding manifold attractive to the system state. In order to formalize such a property as well as to establish conditions on the control that will guarantee it, the use of a Lyapunov function in the range of  $s(x,t)$  is proposed. The candidate function is chosen quadratic, and parameterized by a square, positive definite,  $m$ -dimensional matrix  $W$ :

$$V(s) = \frac{1}{2} s^T W s \quad (9)$$

Considering the previous definition, it is obvious that  $V(s)$  can never be negative. Besides, its value is only annulled if  $s(x,t) = 0$ , namely on the sliding manifold. Thus, provided that its time derivative is kept negative, it actually becomes a Lyapunov function. As a consequence, its current value necessarily decreases along time to converge towards zero. In the state space, this behaviour results in a state trajectory first progressively reaching the sliding manifold, and next remaining on its surface. *Stricto sensu*, of course,  $V$  can only be called a Lyapunov function with respect to variable  $s$ , namely in the range of  $s(x,t)$ . Yet, it is convenient to interpret it instead as a function of the state vector, and also possibly of time, benefiting from the dependence of  $s$  with respect to these two variables. That is why the notation  $V(x,t)$  will be used from now on. Since  $V(x,t)$  does not exhibit in the state space the exact properties which characterize a Lyapunov function any more, it will rather be called a Lyapunov-like function with respect to  $x$ . Its time derivative can be expressed as:

$$\dot{V}(x,t) = s^T(x,t) W \dot{s}(x,t) \quad (10)$$

$$\text{where } \dot{s}(x,t) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t)u \quad (11)$$

Using the definition of the equivalent control, it comes :

$$0 = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t)u_{eq} \quad (12)$$

Subtracting both previous equalities one from another provides:

$$\dot{s}(x,t) = \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) [u(x,t) - u_{eq}(x,t)] \quad (13)$$

Hence:

$$\dot{V}(x,t) = s^T W \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) [u(x,t) - u_{eq}(x,t)] \quad (14)$$

The so-called reachability condition, namely the necessary and sufficient condition for  $V$  to be a Lyapunov-like function, is straightforwardly deduced from (14). It simply amounts to the negativity of this expression of  $\dot{V}(x,t)$ , for any non zero value of  $s(x,t)$  whatever the sign of the latter may be. Starting from this fundamental outcome, two different kinds of strategies can be applied in order to produce a sliding motion on manifold  $S(t)$ , or more precisely on its sub-domain  $D(t)$ .

### 3. Piecewise continuous SMC strategies

The basic idea used in order to ensure the negativity of  $\dot{V}(x,t)$  is to make it the opposite of an Euclidean vector norm, thanks to an appropriate choice of a discontinuous  $u(x,t)$ , noticing that expression (14) can be interpreted as a dot product provided that it is split up into two factors. Such a decomposition, however, is not unique because of the associative property of matrix multiplication in linear algebra. As a result, various control policies can be deduced from this simple idea. The most natural ones are piecewise continuous control strategies, which make each scalar component  $u_i$  of the control commute between two continuous but distinct state feedbacks when crossing a specific manifold (which is not necessarily the final sliding manifold). The first possible decomposition of expression (14) is obtained by considering a so-called pseudo-control:

$$\hat{u}(x,t) = W \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) [u(x,t) - u_{eq}(x,t)] \quad (15)$$

It allows the time derivative of  $V$  to be explicitly expressed as the following dot product:

$$\dot{V}(x,t) = s^T \hat{u}(x,t) \quad (16)$$

Then, obviously, a sufficient condition for  $\dot{V}(x,t)$  to be negative is that the pseudo control can be written as  $\hat{u}(x,t) = -k s(x,t)$  where  $k > 0$ . But it is necessary, in addition, that  $\hat{u}(x,t)$  should be discontinuous at the manifold defined by  $s(x,t) = 0$ , in order that a sliding motion may take place on it. Otherwise, state trajectories would asymptotically converge towards this manifold instead of reaching it in finite time. This additional requirement can be simply fulfilled by taking  $k = \rho / \|s(x,t)\|$  where  $\rho > 0$ . It leads to a first SMC policy, known as the unit vector approach, which consists in globally defining the pseudo-control as follows:

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} -\rho \frac{s(x,t)}{\|s(x,t)\|} & \text{with } \rho > 0 \text{ if } s \neq 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases} \quad (17)$$

It should be remarked that the value assigned to  $\hat{u}(x,t)$  in (17) when  $s(x,t)=0$  does not really matter, because  $\dot{V}(x,t)=0$  anyway in these conditions. The above-mentioned policy obviously fulfills the reachability condition, since it leads to:

$$\dot{V}(x,t) = -\rho \|s(x,t)\| \quad (18)$$

In addition, it allows the magnitude of  $\hat{u}(x,t)$  to be controlled via an appropriate choice of coefficient  $\rho$ , by guaranteeing that any of its components remains within the boundary values  $-\rho$  and  $\rho$ .

Another famous SMC policy, called the diagonalization approach, can be derived from the expanded form of the dot product displayed in (16), namely:

$$\dot{V}(x,t) = \sum_{i=1}^m s_i(x,t) \hat{u}_i(x,t) \quad (19)$$

This approach consists in separately choosing each component of the pseudo-control so that all the terms of the above sum be inferior to zero (which is the simplest way, but of course not the only one, to render the sum itself negative):

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \hat{u}_i(x,t) = -\alpha_i \operatorname{sgn}(s_i(x,t)) \quad \text{where } \alpha_i > 0 \quad (20)$$

This time, each scalar control  $\hat{u}_i(x,t)$  becomes a discrete one taking its values in the binary set  $\{-\alpha_i, +\alpha_i\}$ . Once again, the choice of coefficient  $\alpha_i$  allows to control its magnitude. Note that the “sgn” function used in (20) may be understood as returning either +1 for positive or zero values of its variable and -1 for strictly negative values, or +1 for strictly positive values of its variable and -1 for negative or zero values. This convention, with its degree of freedom, will hold from now on, up to the end of the paper.

In both previous cases, once  $\hat{u}(x,t)$  has been defined, the actual control is straightforwardly deduced :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) \right]^{-1} W^{-1} \hat{u}(x,t) + u_{eq}(x,t) \\ &= \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) \right]^{-1} \left[ W^{-1} \hat{u}(x,t) - \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial x} f(x,t) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$W$  can thus be interpreted as a weighting matrix with respect to the different components of the pseudo-control.

A second possible decomposition of expression (14) is obtained by considering the following new pseudo-control:

$$\hat{u}(x,t) = \frac{\partial s}{\partial x} g(x,t) [u(x,t) - u_{eq}(x,t)] \quad (22)$$

Indeed, it allows the time derivative of  $V$  to be expressed as another dot product:

$$\dot{V}(x,t) = (W s)^T \hat{u}(x,t) \quad (23)$$

By analogy with (17) the following control policy is straightforwardly deduced from this new decomposition of  $\dot{V}(x, t)$ :

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} -\rho \frac{W s(x, t)}{\|W s(x, t)\|} & \text{with } \rho > 0 \text{ if } W s \neq 0 \\ 0 & \text{if } W s = 0 \end{cases} \quad (24)$$

In addition, the expanded form of the dot product displayed in (23) leads to another control policy analogous to (20):

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \hat{u}_i(x, t) = -\alpha_i \operatorname{sgn}((W s)_i(x, t)) \quad \text{where } \alpha_i > 0 \quad (25)$$

This time, the weighting matrix  $W$  directly affects the pseudo-control. In both cases, the actual control is expressed as:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x, t) \right]^{-1} \hat{u}(x, t) + u_{eq}(x, t) \\ &= \left[ \frac{\partial s}{\partial x} g(x, t) \right]^{-1} \left[ \hat{u}(x, t) - \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial x} f(x, t) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Eventually, still another decomposition of expression (14) can be proposed by considering a third expression of the pseudo-control:

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t) - u_{eq}(x, t) \quad (27)$$

Referring to its definition given by (27),  $\hat{u}(x, t)$  can be interpreted as the part of the control that has to be made discontinuous so that the overall control be discontinuous itself. It allows the expression of  $\dot{V}(x, t)$  to exhibit a last dot product:

$$\dot{V}(x, t) = \left( g^T \frac{\partial s^T}{\partial x} W s \right)^T \hat{u}(x, t) = \sum_{i=1}^m s^T(x, t) W \frac{\partial s}{\partial x} g_i(x, t) \hat{u}_i(x, t) \quad (28)$$

Once again, two distinct control policies can be deduced from (28), respectively using its vector form and its expanded one:

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} -\rho \frac{g^T \frac{\partial s^T}{\partial x} W s(x, t)}{\left\| g^T \frac{\partial s^T}{\partial x} W s(x, t) \right\|} & \text{with } \rho > 0 \text{ if } g^T \frac{\partial s^T}{\partial x} W s \neq 0 \\ 0 & \text{if } g^T \frac{\partial s^T}{\partial x} W s = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \hat{u}_i(x, t) = -\alpha_i \operatorname{sgn} \left[ s^T(x, t) W \frac{\partial s}{\partial x} g_i(x, t) \right] \quad \text{where } \alpha_i > 0 \quad (30)$$

In both last cases, the actual control is simply expressed as:

$$u(x, t) = \hat{u}(x, t) + u_{eq}(x, t) \quad (31)$$

Using the control policies respectively defined by (20), (25) and (30), which have all been deduced from the expanded form of the various dot products, each scalar component of the pseudo-control  $\hat{u}(x, t)$  commutates on a specific hypersurface, whose equation results from nullifying the corresponding argument of the “sgn” function. Since the actual control  $u(x, t)$  is derived from the pseudo one using a matrix product as displayed in (21), (26) and (31), each of these  $m$  hypersurfaces makes at least one of its components commutate (possibly all of them). It results that the overall actual control is discontinuous on all these hypersurfaces at once. As a consequence, its application progressively drives the system state onto their common intersection by successive sliding motions along each of them, in order of crossing. It should be noticed, however, that the  $m$  actual switching hypersurfaces of policies (25) and (30) are different from those of policy (20), namely from the original ones  $(S_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ , whose intersection used to define the sliding manifold. Fortunately, their common intersection exactly coincides with this manifold as soon as the transversality condition is satisfied, since  $W$  is by assumption a regular matrix.

Using the control policies respectively defined by (17), (24) and (29), in contrast, the control exclusively commutates on the common intersection of the previous hypersurfaces, and not on each of them. So  $u(x, t)$  is just discontinuous on the sliding manifold itself. This time, the sliding motion is not set in a progressive manner any more: the state trajectories directly reach the final sliding manifold without switching before.

The main difference between the couples of control policies deduced from each specific decomposition of  $\dot{V}(x, t)$  as a dot product (either in vector or in expanded form), lies in the way the weighting matrix  $W$  affects the control. So this matrix plays the role of a tuning parameter, which modifies the switching hypersurfaces, keeping, however, their common intersection identical to the final sliding manifold. The choice of  $W$  may thus influence the convergence speed towards the latter.

All the various strategies considered so far share a common feature, concerning the attractivity domain of the sliding manifold (namely the domain of the state space from which a sliding motion can be successfully initiated): this domain is only limited by the physical bounds of the control variables. Ideally, for unbounded controls, the previous laws make the sliding manifold attractive from the overall state space. Consequently, in that case, the choice of the initial point is entirely free.

Eventually, it should be noticed that since these laws make  $V$  a Lyapunov-like function, both the attractivity of the sliding manifold and its invariance are guaranteed despite the possible existence of equilibrium points in the various natural operating modes of the system. This property still holds for the second class of SMC strategies considered in the next section.

#### 4. Boolean SMC strategies for switched systems

The second class of SMC strategies that can be deduced from expression (14) of the reachability condition provides discrete control laws, where each scalar component of the actual control commutates between two given values when crossing a specified manifold. This constraint can be formulated as:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u_i(x, t) \in \{u^+, u^-\} \quad \text{with } u^- < u^+ \quad (32)$$

Then the necessary and sufficient condition for the existence of a sliding motion on a given manifold  $S(t)$  becomes:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u^- < u_{i,eq}(x,t) < u^+ \quad (33)$$

As for the sliding domain, it is known regardless of the control actually applied:

$$D(t) = \left\{ x \in S(x,t) \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u^- < u_{i,eq}(x,t) < u^+ \right\} \quad (34)$$

Since the values of the actual control are dictated in advance, the only possible ones belonging to the discrete set  $\{u^-, u^+\}^m$ ,  $u(x,t)$  cannot be obtained as the result of a computation formula like (21) or (26) any longer. So, referring to the various approaches of the previous section, only the last one, based on the decomposition of  $\dot{V}(x,t)$  given by (28), may still be relevant for a discrete control design. Furthermore, each individual component of the control being constrained according to (32), the expanded form of (28) should be considered. Consequently  $u(x,t)$  has to be chosen so as to ensure the negativity of expression

$$\sum_{i=1}^m s^T(x,t) W \frac{\partial s}{\partial x} g_i(x,t) [u_i(x,t) - u_{i,eq}(x,t)].$$

Now in order to render this sum negative, several strategies are possible again. Yet, the simplest one still consists in individually choosing the components of the control so that each term of the sum be negative. Assuming that property (33) holds, it straightforwardly leads to the following control policy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ if } s^T(x,t) W \frac{\partial s}{\partial x} g_i(x,t) \geq 0 \text{ then } u_i(x,t) = u^- \\ \bullet \text{ if } s^T(x,t) W \frac{\partial s}{\partial x} g_i(x,t) < 0 \text{ then } u_i(x,t) = u^+ \end{array} \right. \quad (35)$$

Equivalently, a unique expression can be proposed:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u_i(x,t) = \frac{1}{2}(u^+ + u^-) - \frac{1}{2}(u^+ - u^-) \operatorname{sgn} \left[ s^T(x,t) W \frac{\partial s}{\partial x} g_i(x,t) \right] \quad (36)$$

In the particular – but frequent – case of a Boolean control,  $u^+ = 1$  and  $u^- = 0$ . Then the control law becomes:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u_i(x,t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{sgn} \left[ s^T(x,t) W \frac{\partial s}{\partial x} g_i(x,t) \right] \right) \quad (37)$$

Once again, the positive definite matrix  $W$  operates as a tuning parameter, which modifies the switching hypersurfaces, keeping the sliding manifold unchanged.

Eventually, it should be underlined that the control given by (36) or (37) only guarantees the attractivity of the sliding manifold  $S(t)$  with respect to state trajectories and its invariance in the state space domain where property (33) holds, namely where all components of the equivalent control remain bounded by  $u^-$  and  $u^+$ . So applying this control, the generation of a sliding motion is only ensured provided that the initial state is chosen inside this domain.

## 5. The particular case of linear time-invariant (LTI) switched systems

This section more specifically investigates the choice of the switching function in the particular – but widespread – case of linear time-invariant switched systems (still affine in the control). For technical reasons, the systems of interest are supposed to be square, which means that as many independent scalar outputs as available Boolean inputs are considered.

Using the set of Boolean inputs as a control variable, referred to as vector  $u$ , and assuming, in addition, a constant input  $e$ , their state representation obeys the following generic form:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + B(u)e \\ y = Cx \end{cases} \quad (38)$$

with the complementary notations and properties:

$$\begin{cases} \dim(x) = n, \dim(u) = \dim(y) = m \leq n \\ A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i, B(u) = B_0 + \sum_{i=1}^m u_i B_i \\ C \text{ full rank matrix} \end{cases} \quad (39)$$

All these assumptions define a framework which includes many usual dc-dc converters (constant input  $e$  stands for their power supply). In order to control such systems using sliding mode principle, a  $m$ -dimensional switching function  $s(x,t)$  has to be introduced in accordance with the expected performances of the closed loop dynamics. For the sake of simplicity, the study is deliberately restricted to the linear case, where all the components  $s_i(x,t)$  of this switching function are to be chosen in the class of time-invariant affine functions of the state vector with real values. Then their nullification defines the equations of  $m$  hyperplanes  $S_i$  of the state space. The sliding manifold itself is given by their common intersection, so its dimension is equal to  $(n - m)$ . The point here is to propose criteria allowing to select appropriate functions  $s_i(x)$  and, following, to build  $s(x)$ . More precisely, what is expected is a generic expression of this switching function in the above defined linear framework, considering a specific control objective which consists in regulating the system output  $y$  around a prescribed reference  $y_r$ .

Such a regulation objective is ideally achieved when property  $y = y_r$  holds, which implies  $m$  independent constraints on the system state. Thus, the latter is required to evolve – following zero dynamics – in restriction to a  $(n - m)$ -dimensional affine state subspace defined as:

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n / Cx = y_r\} \quad (40)$$

It should be noticed that this subspace is entirely determined by the knowledge of the reference. In order to perform the regulation objective using a sliding motion, it is enough to make it coincide with the sliding manifold, both having the same dimension. Since the sliding manifold is defined as the intersection of  $m$  hyperplanes, the latter have to be chosen such that their intersection also define the previous subspace, hence the desired property:

$$\bigcap_{i=1}^m S_i = \Delta \quad (41)$$

In order to ensure this property whilst keeping as many degrees of freedom as possible in the choice of functions  $s_i(x)$ , another definition of  $\Delta$  will be used. Actually, the most general way to express the linear constraint implied by definition (40) is obtained multiplying both of its terms by any  $m$ -dimensional regular matrix  $Q^T$ :

$$Cx = y_r \Leftrightarrow Q^T Cx = Q^T y_r \quad (42)$$

It should be remarked that the matrix transposition is just used for writing facility: introducing the columnwise notation  $Q = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_m]$ , the preceding equality can be expanded in the form:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad Q_i^T (C x - y_r) = 0 \quad (43)$$

Hence a new definition of  $\Delta$ , which is the most general one:

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad Q_i^T (C x - y_r) = 0\} \quad (44)$$

where  $(Q_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  refers to any set of  $m$  linearly independent vectors of  $\mathbb{R}^m$ .

By another way, the definition of the sliding manifold can be written as:

$$\bigcap_{i=1}^m S_i = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad s_i(x) = 0\} \quad (45)$$

The admissible choice for functions  $s_i(x)$  immediately results from a comparison between (44) and (45):

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad s_i(x) = Q_i^T (C x - y_r) \quad (46)$$

Eventually, the overall switching function can be expressed as:

$$s(x) = Q^T (C x - y_r) \quad (47)$$

Remarks:

1. Matrix  $Q$  can thus be interpreted as a synthesis parameter, including  $m^2$  coefficients to be chosen in an arbitrary way, provided that the non singularity constraint be fulfilled. The choice of  $Q$  has no influence on the sliding manifold itself, but determines the orientation of its intersecting hyperplanes, since any one referred to by index  $i$  admits of a normal vector  $U_i = C^T Q_i$ .
2. In this linear context, matrix  $Q$  exactly provides the same degrees of freedom than the weighting matrix  $W$  used in the various control strategies of sections 3 and 4. So either  $W$  or  $Q$  can be taken equal to identity matrix with no lack of generality. This property is easily verified considering the Boolean control law given by (37), which becomes:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad u_i(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ (C x - y_r)^T Q W Q^T C g_i(x) \right] \right) \quad (48)$$

It obviously appears that the following choices are equivalent for any regular matrix  $Q_0$  and any positive definite matrix  $W_0$  :

$$\begin{cases} Q = Q_0 \\ W = W_0 = W_1 W_1^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = Q_0 W_1 \\ W = Id \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = Id \\ W = Q_0 W_0 Q_0^T \end{cases} \quad (49)$$

## 6. Some considerations about stability related to dimensional issues

Generally, in a  $n$ -dimensional space, at most  $n$  algebraic constraints can be set on the state of a system whilst ensuring the existence of solutions. Indeed, if the number of constraints exceeds the order of the system, there is generally no solution, except for particular cases (unique solution or infinite number of solutions). If, in contrast, the number of constraints is inferior to

the order of the system, there generally exists an infinite number of solutions, except for particular cases again (unique solution or no solution). Lastly, if the number of constraints exactly equals the order of the system, there generally exists a unique solution, except for particular cases (infinite number of solutions or no solution).

Let  $m$  be the number of algebraic constraints, from now on inferior or equal to the order  $n$  of the system by assumption. These constraints are said to be independent if they provide  $(n - m)$  degrees of freedom in the choice of the state variables, which means that they allow the values of  $(n - m)$  state variables to be chosen in an arbitrary way, the values of the  $m$  remaining state variables being then fully determined. Equivalently, these  $m$  constraints are independent if they allow  $m$  state variables to be expressed as algebraic functions of the  $(n - m)$  remaining ones. By extension, noticing that any algebraic constraint defines a hypersurface in the state space,  $m$  hypersurfaces will be said to be independent if their common intersection is a  $(n - m)$ -dimensional manifold.

In order to regulate a  $n$ -order system around a fixed point  $x_r$  of the state space using SMC, the sliding manifold must be reduced to this single point. As a consequence, it has to be defined as the intersection of  $n$  independent hypersurfaces, which implies that  $n$  independent control variables (namely the number of which cannot be reduced) be available. The final sliding dynamics are then completely cancelled : once the sliding manifold has been reached, the closed-loop system becomes equivalent to a purely static one, for which the stability question makes no sense any longer. So the stability of the regulation is guaranteed. In this particular case, the switching function can be written:

$$s(x) = x - x_r \quad (50)$$

Taking as a weighting matrix  $W = F$ , where  $F$  is the symmetric positive definite matrix used to express the energy stored in the system, namely  $\frac{1}{2} x^T F x$ , the candidate Lyapunov function becomes :

$$V(x) = \frac{1}{2} (x - x_r)^T F (x - x_r) \quad (51)$$

Then the Boolean SMC strategy of section 4 consists in enforcing the following control law:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u_i(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ (x - x_r)^T F g_i(x, t) \right] \right) \quad (52)$$

With the above mentioned choices, this strategy can be compared to the so-called stabilization approach addressed in [12], although the latter approach is dedicated to a more specific class of systems. In both cases, indeed, the criterion used to build the actual control is exactly the same, namely rendering the time derivative of  $V$  negative. Yet the solutions proposed are not identical.

In the SMC approach, since the time derivative of the switching function is also that of the system state itself, the equivalent control, which results from nullifying this time derivative, can be interpreted as the state feedback necessary to maintain the system at the equilibrium:

$$u_{eq}(x) = -g(x)^{-1} f(x) \Leftrightarrow \dot{x} = 0 \quad (53)$$

For a regulation to be possible about point  $x_r$ , the latter must fulfill the necessary and sufficient condition of existence of a sliding motion, namely:

$$u_{eq}(x_r) \in [0,1]^n \quad (54)$$

In other words, there must exist a constant control  $u_r \in [0,1]^n$  such that the following property holds:

$$f(x_r) + g(x_r)u_r = 0 \quad (55)$$

Thus, it appears that a successful application of the Boolean SMC strategy (52) for the purpose of performing a regulation requires the reference point  $x_r$  to be an equilibrium point for the average model associated with the original system. Furthermore, according to the conclusions of section 4, the efficiency of the corresponding control law is only ensured in a restricted region of the state space, namely that where all the components of  $u_{eq}(x)$ , such as defined by (53), remain in  $[0,1]$ .

The stabilization approach uses the same constraint (55) about the reference point, but since it applies to a more specific class of systems, it leads to less conservative results. The systems concerned with that approach are port controlled Hamiltonian LTI switched ones, supposed to be affine in the control. Such systems, which make a subclass of those considered in section 5, can be modelled by equations (38-39), but also benefit from structural properties related to their physical nature. Especially, their state matrix can be expressed as:

$$A(u) = [J(u) - R(u)]F \quad (56)$$

where  $J(u)$  and  $R(u)$  are respectively a skew symmetric matrix and a positive semi definite one for any value of the control  $u$ . Then it can be shown that both functions involved in the most generic expression (1) of their state equation, namely  $f$  and  $g$ , become affine functions of the state vector  $x$ :

$$\begin{cases} f(x) = (J_0 - R_0)F x + B_0 e \\ \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad g_i(x) = (J_i - R_i)F x + B_i e \end{cases} \quad (57)$$

where

$$\begin{cases} J_0 + \sum_{i=1}^m u_i J_i = J(u) \\ R_0 + \sum_{i=1}^m u_i R_i = R(u) \\ B_0 + \sum_{i=1}^m u_i B_i = B(u) \end{cases} \quad (58)$$

Taking advantage of these specific properties, the stabilization approach expresses the time derivative of  $V$  as the sum of two terms, the first one of which is structurally negative. Using the notations of the present paper, the following expression is established:

$$\dot{V}(x) = -[F(x - x_r)]^T R(u) F(x - x_r) + [F(x - x_r)]^T g(x_r)(u - u_r) \quad (59)$$

Then a variety of discontinuous control laws are deduced which allow the regulation objective to be reached from any initial point in the state space. Still using the notations of the present paper, it can be verified that the so-called maximum descent strategy of [11], which ensures the fastest convergence towards the regulation objective, can be written:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad u_i(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ (x - x_r)^T F g_i(x_r, t) \right] \right) \quad (60)$$

It is formally very close to (52), the only difference being that function  $g$  is taken at the equilibrium point in (60). Moreover, thanks to the first negative term in expression (59), the time derivative of  $V$  generally remains negative at any point  $x \neq x_r$  of the state space, even if  $(x - x_r)^T F g(x_r)$  is a null row matrix. As a consequence, the convergence of the state trajectories towards the actual desired point  $x_r$  is still ensured when the intersection of the switching hypersurfaces is not reduced to this single point.

When the number  $m$  of available independent control variables is inferior to the order  $n$  of the system, the order of the closed-loop dynamics is reduced with respect to  $n$ , but still remains non zero once the sliding manifold has been reached. These dynamics can be stable (asymptotically or not) or unstable (namely diverging). If they are asymptotically stable, the system state converges towards an equilibrium point while sliding along the prescribed manifold. Then, as soon as this point has been reached, the system behaves as if it was regulated around it. Once again, such an equilibrium point for the sliding dynamics is also necessarily an equilibrium point for the average model associated with the original open-loop dynamics. Moreover, the constant value  $u_r$  of the control corresponding to the equilibrium point  $x_f$  can be interpreted as the time limit of the equivalent control  $u_{eq}(x, t)$  associated with the sliding motion.

## 7. Examples

Let first take the example of a bicellular serial converter, such as depicted in Figure 1.

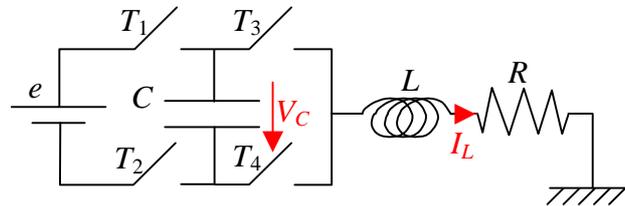


Fig. 1. electrical scheme of a Buck converter

This system is a two-order one with a two-dimensional control input (its switches working by complementary pairs). 2 output variables are considered, namely the current  $I_L$  in the load and the capacitor voltage  $V_C$ . Its multi configuration state representation obeys the general form of section 5:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{(u_2 - u_1)}{C} \\ \frac{u_2 - u_1}{L} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e + \frac{x_2}{C} & -\frac{x_2}{C} \\ -\frac{x_1}{L} & \frac{x_1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} x \end{array} \right. \quad (61)$$

where Booleans  $u_1$  and  $u_2$  respectively control the state of pairs  $(T_1, T_2)$  and  $(T_3, T_4)$ :  $u_1 = 0$  when  $T_1$  is off and  $T_2$  is on,  $u_2 = 0$  when  $T_3$  is off and  $T_4$  on.

In this particular case, each value of the output vector corresponds to one point in the state space. As a consequence, given a prescribed reference  $y_r$ , the sliding manifold is reduced to a single point:

$$x_r = \begin{pmatrix} L y_{r1} \\ C y_{r2} \end{pmatrix} \quad (62)$$

Such a reference is admissible if it corresponds to an equilibrium point for the average model, namely if there exists a couple of constant control inputs  $(u_{1r}, u_{2r}) \in [0,1] \times [0,1]$  to which it can be associated by one of the following relations:

$$\begin{cases} x_r = \frac{1}{(u_{2r} - u_{1r})^2} \begin{pmatrix} 0 & -(u_{2r} - u_{1r})L \\ (u_{2r} - u_{1r})C & RC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1r} \\ 0 \end{pmatrix} e \text{ if } u_{2r} \neq u_{1r} \\ x_r = \begin{pmatrix} u_{1r} \frac{L}{R} e \\ x_{2r} \end{pmatrix} \text{ if } u_{2r} = u_{1r} \text{ (} x_{2r} \text{ entirely free)} \end{cases} \quad (63)$$

Using (62), the admissible choices are straightforwardly deduced:

$$\begin{cases} y_{r1} = 0 \\ y_{r2} = \frac{u_{1r}}{u_{2r} - u_{1r}} e \text{ if } u_{2r} \neq u_{1r} \\ y_{r1} = u_{1r} \frac{e}{R} \text{ if } u_{2r} = u_{1r} \\ y_{2r} \text{ free} \end{cases} \quad (64)$$

Making  $u_{1r}$  and  $u_{2r}$  vary between 0 and 1 in the previous relations, it is possible to reach any reference output fulfilling the constraint:

$$0 \leq y_{r1} \leq \frac{e}{R} \quad (65)$$

Let the switching function be given by (50) and (62). Taking  $W = \text{diag}\left(\frac{1}{L}, \frac{1}{C}\right)$ , the Boolean control (37) becomes:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ C e (x_1 - x_{r1}) - x_2 x_{r1} + x_1 x_{r2} \right] \right) \\ u_2(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ x_2 x_{r1} - x_1 x_{r2} \right] \right) \end{cases} \quad (66)$$

And eventually:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ C e (x_1 - L y_{r1}) + C y_{r2} x_1 - L y_{r1} x_2 \right] \right) \\ u_2(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \text{sgn} \left[ C y_{r2} x_1 - L y_{r1} x_2 \right] \right) \end{cases} \quad (67)$$

Let assign some realistic values to the parameters:

$C = 1.0e-3$  F;  $L = 75.0e-3$  H;  $R = 20.0$   $\Omega$ ;  $e = 100.0$  V;

Besides, let the reference be defined by  $y_{r1} = 2$ A,  $y_{r2} = -40$ V. In the state space, it corresponds to the desired equilibrium point  $(0.15, -0.04)$ . Then the control policy given by (67) provides the numerical expression:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(0.06x_1 - 0.15x_2 - 0.015)) \\ u_2(x, t) = \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(0.04x_1 + 0.15x_2)) \end{cases} \quad (68)$$

The resulting Boolean control can be simulated. Figure 2 shows the state trajectories obtained from two initial points, namely  $(0, 0)$  and  $(0.2, -0.15)$ . Both switching lines are also displayed.

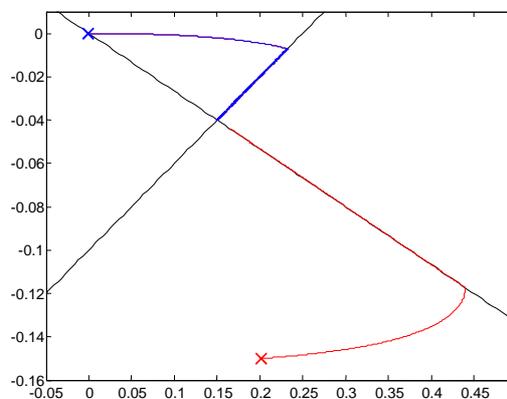


Fig. 2. simulated state trajectories

The corresponding time responses of the states variables in both cases are shown in Figure 3.

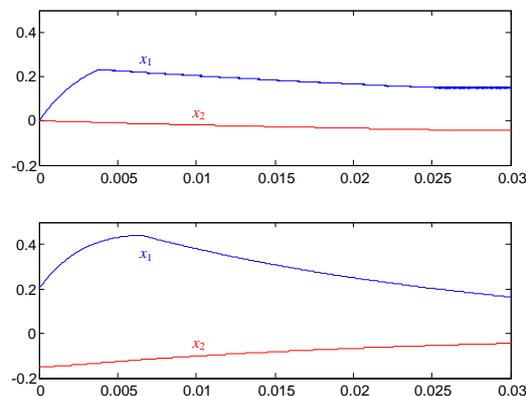


Fig. 3. time responses of the state variables

Let next take the example of a 3-level multicellular serial converter, such as depicted in Figure 4.

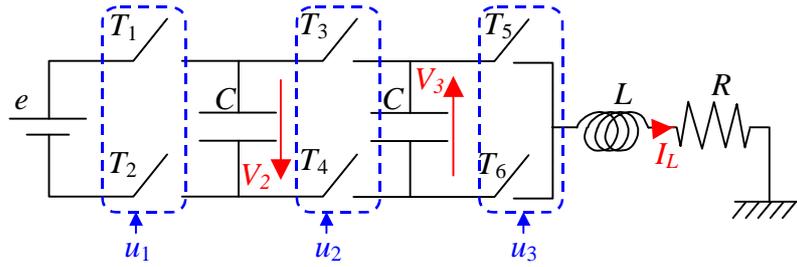


Fig. 4. electrical scheme of a 3-level converter

In normal operating conditions, all its switches commutate by pairs:  $T_1$  together with  $T_2$ ,  $T_3$  with  $T_4$ , and  $T_5$  with  $T_6$ . Furthermore, each pair is controlled by means of a specific Boolean input. The resulting control vector is denoted by  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ . By convention,  $u_1 = 0$  when  $T_1$  is off and  $T_2$  is on,  $u_2 = 0$  when  $T_3$  is on and  $T_4$  off,  $u_3 = 0$  when  $T_5$  is on and  $T_6$  off.

Again, the overall dynamics of the system can be modelled by a single multi configuration state equation, which this time obeys the following form:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{(1-u_1-u_2)}{C} & -\frac{(1-u_2-u_3)}{C} \\ \frac{1-u_1-u_2}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1-u_2-u_3}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e \quad (69)$$

Considering 3 output variables, namely the current  $I_L$  in the load and both capacitor voltages  $V_2, V_3$ , the model is made square, with an output equation given by:

$$y = \begin{pmatrix} I_L \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} x \quad (70)$$

It can be observed that state equation (69) is affine in the control, since all the terms in the matrices it involves actually are affine functions of the Boolean variables.

As in the previous case, each value of the output vector corresponds to one point in the state space. As a consequence, given a prescribed reference  $y_r$ , the sliding manifold is reduced to a single point again:

$$x_r = \begin{pmatrix} L y_{r1} \\ C y_{r2} \\ C y_{r3} \end{pmatrix} \quad (71)$$

Such a reference is admissible if it corresponds to an equilibrium point for the average model, namely if there exists a 3-uple of constant control inputs  $(u_{1r}, u_{2r}, u_{3r}) \in [0, 1]^3$  to which it can be associated by the following relation:

$$\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{(1-u_{1r}-u_{2r})}{C} & -\frac{(1-u_{2r}-u_{3r})}{C} \\ \frac{1-u_{1r}-u_{2r}}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1-u_{2r}-u_{3r}}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} x_r = -\begin{pmatrix} u_{1r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e \quad (72)$$

In the particular case where  $u_{1r} = u_{3r} = 1 - u_{2r}$ , relation (72) just determines the first state variable, namely  $x_{r1} = u_{1r} \frac{L}{R} e$ , but neither constrain  $x_{r2}$  nor  $x_{r3}$ , whose choice is thus entirely free. Otherwise, it induces a linear relation between both previous state variables, namely  $(1 - u_{1r} - u_{2r})x_{r2} + (1 - u_{2r} - u_{3r})x_{r3} = u_{1r} C e$ , while enforcing  $x_{r1} = 0$ . As a result, it is possible to reach any reference output fulfilling constraint (65), namely  $0 \leq y_{r1} \leq \frac{e}{R}$ .

A set of typical values of the parameters is assumed for the simulation:

$$C = 1.0e-3 \text{ F}; L = 75.0e-3 \text{ H}; R = 20.0 \text{ } \Omega; e = 90.0 \text{ V};$$

Then, starting from initial conditions located at the origin of the state space (system at rest), an output reference is arbitrarily defined by  $y_r = (2A \quad -30V \quad 60V)^T$ . In the state space, it corresponds to the desired equilibrium point  $x_r$  of coordinates  $(0.15 \quad -0.03 \quad 0.06)$ . Before computing the control law, the state equation of the system must be put in a form affine in the control:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e + \frac{x_2}{C} & \frac{x_2 + x_3}{C} & \frac{x_3}{C} \\ -\frac{x_1}{L} & -\frac{x_1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{x_1}{L} & -\frac{x_1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (73)$$

Then, taking for instance a 3-dimensional identity matrix for the weighting function  $W$ , the formal control laws deduced from (37) which aim at reaching the prescribed equilibrium point are:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ (x_1 - x_{r1}) \left( e + \frac{x_2}{C} \right) - (x_2 - x_{r2}) \frac{x_1}{L} \right] \right) \\ u_2(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ (x_1 - x_{r1}) \frac{x_2 + x_3}{C} - (x_2 - x_{r2} + x_3 - x_{r3}) \frac{x_1}{L} \right] \right) \\ u_3(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sgn} \left[ (x_1 - x_{r1}) \frac{x_3}{C} - (x_3 - x_{r3}) \frac{x_1}{L} \right] \right) \end{cases} \quad (74)$$

Their expressions show that the corresponding switching surfaces are nonlinear. Though it can be analytically verified that their common intersection is reduced to point  $x_r$ . With such a simplistic choice of  $W$ , however, the simulation of the control needs a fixed-step algorithm with a very small sampling time to be used in order to achieve a good numerical accuracy of

the state trajectory, since the overall model is badly conditioned. The trajectory obtained with a  $10^{-7}$  s step size is shown in Figure 5, while Figure 6 displays the corresponding time responses of the state variables.

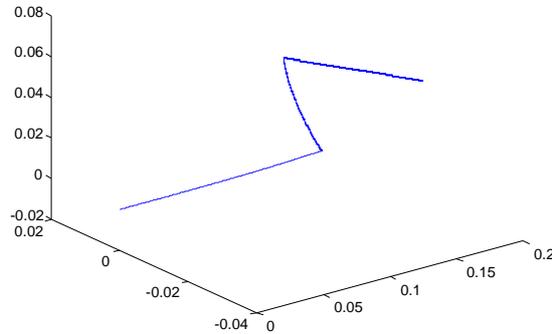


Fig. 5. simulated state trajectory

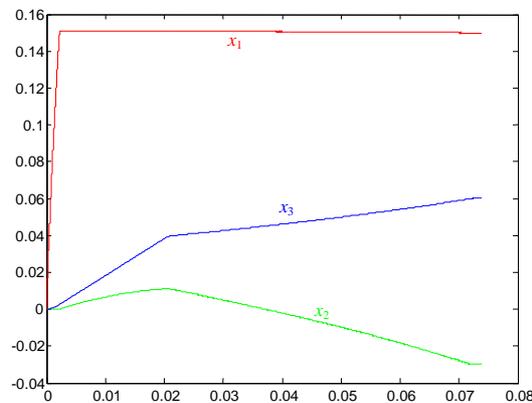


Fig. 6. time responses of the state variables

A settling time of 72 ms is observed. Better control laws are obtained if, instead of taking an identity matrix, the weighting matrix  $W$  is defined as the energy-shaping diagonal matrix:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \quad (75)$$

Their new expression is then:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{sgn} \left[ \frac{C e + x_{r2}}{LC} x_1 - \frac{x_{r1}}{LC} x_2 - x_{r1} \frac{e}{L} \right] \right) \\ u_2(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{sgn} \left[ \frac{x_{r2} + x_{r3}}{LC} x_1 - \frac{x_{r1}}{LC} (x_2 + x_3) \right] \right) \\ u_3(x, t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{sgn} \left[ \frac{x_{r3}}{LC} x_1 - \frac{x_{r1}}{LC} x_3 \right] \right) \end{cases} \quad (76)$$

This time, the corresponding switching surfaces become 3 hyperplanes, whose common intersection is of course still reduced to point  $x_r$ . Again, the state trajectory and the time responses of the state variables are displayed, respectively in Figure 7 and Figure 8. The results are quite different from the previous ones. From a numerical point of view, a  $10^{-5}$  s step size has been sufficient for the simulation. Moreover, the settling time has been reduced to 42 ms.

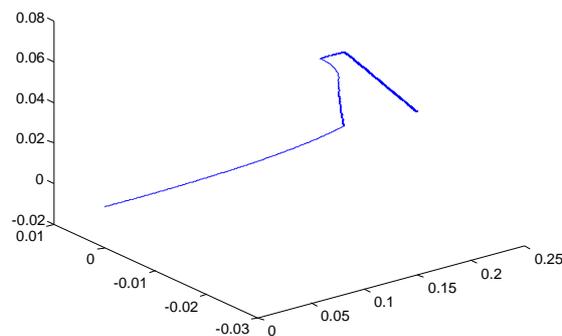


Fig. 7. simulated state trajectory

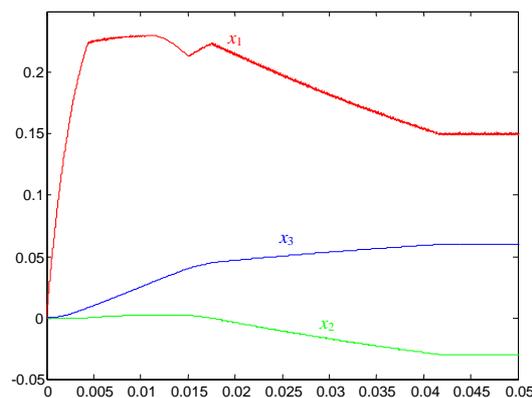


Fig. 8. time responses of the state variables

## Conclusion

The control design methodology proposed in this paper is dedicated to switched systems the commutations of which are fully controlled by means of Boolean inputs, and the state equations of which are affine in these control variables as well. It is based upon sliding mode principle and benefits from a generic formulation which renders it straightforwardly applicable to a wide class of systems including most dc-dc power converters. Unlike conventional ones, some of the sliding mode controllers designed through this methodology directly produce Boolean control actions, making useless the pulse-width modulation most generally used to control power converters. At the heart of the methodology is a specific formulation of the well-known reachability condition for the class of systems considered. This formulation, parameterized by a single weighting matrix, essentially results from the choice of a Lyapunov-like function expressed in the range of the switching function associated with the desired sliding manifold. It allows several control strategies to be deduced, the most original of which being the Boolean one, whose comparison is carried out with another control approach proposed in the recent literature, namely the so-called stabilization one, in the restricted case of linear time invariant switched systems. The efficiency of the design methodology as well as that of the resulting control is illustrated through simulation using non trivial examples of power converters. In addition, some criteria are also given to analyse the

stability of the sliding motion induced by the control strategy proposed, and thus to conclude about the ability of this strategy to perform a regulation task. As a topic for further work, the way the above-mentioned weighting matrix affects the state trajectories, and especially their convergence speed towards the sliding manifold during the reaching phase, still has to be investigated. Such a complementary study could provide useful criteria for choosing this matrix.

#### REFERENCES

- [1] Buisson, J., Cormerais, H., Richard, P.Y. (2001). Bond Graph Modeling of Power Converters with Switches Commutating by Pairs. In: *International Conference on Bond Graph Modelling (ICBGM 2001)*, Phoenix.
- [2] Buisson, J., Cormerais, H., Richard, P.Y. (2002). Analysis of the bond graph model of hybrid physical systems with ideal switches. In: *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 216 N° II, pp. 47-63.
- [3] Utkin, V.I. (1977). Variable structure systems with sliding modes. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22, p.212-222.
- [4] Edwards, C., Spurgeon, S.K. (1998). *Sliding Mode Control, theory and applications*, Taylor & Francis Systems and Control Book Series.
- [5] Perruquetti, W., Barbot, J.P. (2002). *Sliding Mode Control in Engineering*, Control Engineering Series.
- [6] Cunha, F.B., Pagano, D.J. (2002). Limitations in the Control of a DC-DC Boost Converter. In: *15<sup>th</sup> IFAC Triennial World Congress*, Barcelona.
- [7] Sira-Ramirez, H. (1987). Sliding Motions in Bilinear Switched Networks. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Volume 34, N° 8, p.919-933.
- [8] Pinon, D., Fadel, M., Meynard, T. (2002). Commande par mode de glissement d'un hacheur à deux cellules. In *Revue internationale de génie électrique*, Volume 5/1.
- [9] Morvan, C., Cormerais, H., Richard, P.Y., Buisson, J. (2004). Sliding Mode Control of Switching Systems with Boolean Inputs. In: *6<sup>th</sup> IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*, Stuttgart.
- [10] Romero, M. (2004). Chattering Reduction Techniques in Sliding Modes Control Implemented in Discrete Time. In: *International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA 2004)*, Genoa.
- [11] Sira-Ramirez, H., Rios-Bolivar, M. (1994). Sliding Mode Control of dc-dc Power Converters via Extended Linearization. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Volume 41, N° 10, p.652-661.
- [12] Buisson, J., Richard, P.Y., Cormerais, H., (2005). On the stabilisation of switching electrical power converters. In: *HSCC*, Vol. 216 N° II, pp. 47-63.

## SOMMAIRE

Préambule.....	3
CHAPITRE 1 : Présentation détaillée de mon parcours professionnel.....	9
1. État civil .....	9
2. Formation .....	9
3. Évolution professionnelle.....	10
4. Production scientifique.....	10
4.1. Chapitres d’ouvrages.....	10
4.2. Articles de revues internationales avec comité de lecture.....	10
4.3. Articles de revues internationales en cours d’expertise .....	11
4.4. Articles de revues nationales avec comité de lecture .....	11
4.5. Dépôt de logiciel .....	11
4.6. Conférences internationales avec comité de lecture et actes.....	12
4.7. Conférences nationales.....	14
4.8. Rapports de contrats industriels .....	15
5. Autres activités de recherche.....	15
5.1. Encadrement de thèses .....	15
5.2. Autres encadrements .....	16
5.3. Évaluation d’articles pour des revues et conférences internationales .....	17
5.4. Activités nationales .....	17
5.5. Activités internationales .....	17
6. Activités d’enseignement .....	18
6.1. Tronc commun (1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>nde</sup> années) à SUPELEC.....	18
6.2. Spécialisation (3 <sup>ème</sup> année) à SUPELEC.....	19
7. Activités de recherche contractuelles et relations industrielles.....	19
8. Activités d’intérêt général .....	20
CHAPITRE 2 : Approches fondées sur des modèles énergétiques pour l’analyse formelle et la commande des systèmes non linéaires hybrides .....	21
1. Introduction .....	21
2. Synthèse de modèles énergétiques de systèmes complexes.....	23
2.1. Couplage entre phénomènes à localisation discrète et à répartition continue dans l’espace.....	23
2.2. Couplage entre dynamiques à événements discrets et à évolution continue dans le temps .....	31
2.3. Modélisation de systèmes mécaniques articulés .....	35

2.4.	Modélisation non singulière de circuits électriques .....	37
3.	Analyse formelle des modèles bond graphs .....	38
3.1.	Analyse de modèles bond graph standards.....	39
3.1.1.	Analyse harmonique.....	39
3.1.2.	Dérivation de formes d'état explicites en présence de causalités dérivées ..	40
3.1.3.	Procédure SCAP modifiée .....	41
3.2.	Analyse des modèles bond graph de systèmes à commutations .....	42
3.2.1.	Analyse structurelle par la méthode des perturbations singulières .....	43
3.2.2.	Calcul formel de représentations d'état explicites .....	44
3.2.3.	Cellules de commutation.....	46
3.3.	Analyse de propriétés à partir de modèles en bond graph.....	48
4.	Commande de systèmes à commutations.....	51
4.1.	Commande par mode glissant .....	51
4.2.	Commande par passivation .....	54
5.	Perspectives : modélisation dynamique et commande de systèmes physiologiques....	55
	Bibliographie.....	59
	Annexes.....	64
1.	Nonlinear Analysis: Hybrid Systems (2008), doi.org/10.1016/j.nahs.2008.03.002 ....	64
2.	15 <sup>th</sup> IFAC World Congress on Automatic Control (Barcelona, 2002).....	107
3.	Nonlinear Analysis 65 (2006) 1751-1772.....	116
	Sommaire .....	139