



HAL
open science

Analyse de signaux par quantification semi-classique. Application à l'analyse des signaux de pression artérielle

Taous-Meriem Laleg

► To cite this version:

Taous-Meriem Laleg. Analyse de signaux par quantification semi-classique. Application à l'analyse des signaux de pression artérielle. Mathématiques [math]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2008. Français. NNT: . tel-00357309

HAL Id: tel-00357309

<https://theses.hal.science/tel-00357309>

Submitted on 30 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

préparée à

**L'INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN
AUTOMATIQUE, INRIA CENTRE PARIS ROCQUENCOURT**

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

délivrée par

L'UNIVERSITÉ VERSAILLES SAINT QUENTIN EN YVELINES

présentée par

Taous-Meriem LALEG KIRATI

Sujet de la thèse :

**ANALYSE DE SIGNAUX PAR QUANTIFICATION
SEMI-CLASSIQUE. APPLICATION À L'ANALYSE
DES SIGNAUX DE PRESSION ARTÉRIELLE**

Soutenue le 15 octobre 2008 devant le jury composé de :

Directeurs	Michel SORINE Emmanuelle CRÉPEAU	Directeur de recherche INRIA Maître de conférence UVSQ
Rapporteurs	Jean-Pierre FRANÇOISE Pierre ROUCHON	Professeur Université Paris 6 Professeur École des Mines
Examineurs	Otared KAVIAN Denis CHEMLA	Professeur UVSQ PU-PH Université Paris 11

Remerciements

Cette thèse m'a permis de découvrir le monde des mathématiques appliquées. Un monde que je trouve passionnant. Elle m'a permis également de prendre goût à la recherche avec ses hauts et ses bas, avec ses surprises et ses imprévus et finalement pour me rendre compte que souvent un sujet de recherche se construit au fur et à mesure que l'on avance. J'ai eu la chance et le plaisir de rencontrer durant ces trois années de nombreuses personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et je tiens à les remercier.

J'exprime ma plus grande gratitude à Michel Sorine, directeur de recherche à l'INRIA, centre Paris-Rocquencourt, qui m'a accueillie au sein de son équipe SISYPHE. Je tiens à le remercier pour la liberté et la confiance qu'il m'a accordées, pour m'avoir dirigée et conseillée, pour sa disponibilité mais aussi pour les longues discussions, enrichissantes, que nous avons eues. Je tiens également à remercier ma co-directrice de thèse Emmanuelle Crépeau, maître de conférence à l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, pour tous ses conseils, sa gentillesse et sa disponibilité.

C'est un réel plaisir que de travailler avec Claire Médigue, ingénieur de recherche à l'INRIA centre Paris Rocquencourt. Je lui exprime mes plus vifs remerciements pour sa collaboration dans la partie analyse des signaux de pression artérielle, pour les discussions intéressantes que nous avons eues, pour sa relecture de la partie II du manuscrit et aussi pour son soutien et son écoute.

Je remercie Monsieur Jean-Pierre Françoise, professeur à l'université Paris 6 et Monsieur Pierre Rouchon, professeur à l'École des Mines de Paris pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je remercie aussi Monsieur Otared Kavian, professeur à l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et Monsieur Denis Chemla professeur des Universités et Praticien Hospitalier dans le Service d'Explorations Fonctionnelles du CHU de Bicêtre de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Je remercie Qinghua Zhang, directeur de recherche à l'INRIA Rennes pour les discussions intéressantes que nous avons eues au sujet de la programmation numérique, pour ses questions pertinentes qui m'ont permis de soulever de nombreuses ambiguïtés et pour sa relecture d'une partie du manuscrit. Je remercie également mes collègues de l'INRIA, centre Paris-Rocquencourt à commencer par Pierre-Alexandre Blimann, chargé de recherche, pour avoir eu la courtoisie de relire une partie de la thèse, à Frédérique Clément, directrice de recherche et à Catherine Bonnet, chargée de recherche pour leurs précieux conseils, à Martine Verneuille, assistante du projet SISYPHE pour

sa gentillesse et sa serviabilité et à James Richards, professeur d'anglais pour son excellent cours qui m'a réellement permis de progresser dans ma pratique de l'anglais.

Pour nous avoir fourni les données de pression artérielle et de débit cardiaque et pour nous avoir aidé à comprendre et à interpréter les résultats, je remercie le Docteur Yves Papelier et le Professeur Pierre Escourrou du service des explorations fonctionnelles multidisciplinaires de l'Hôpital Antoine Béchère de Clamart, le Professeur Michel Slama du service de cardiologie de l'Hôpital Antoine Béchère de Clamart, Monsieur François Cottin, enseignant chercheur à l'Unité de Biologie Intégrative des Adaptations à l'Exercice (INSERM U902/Université d'Évry EA 3872, Génopôle) de l'université d'Évry ainsi que le Docteur Andry Van de Louw, médecin réanimateur au service de réanimation polyvalente du centre Hospitalier Sud-Francilien d'Évry.

Pour leurs précieux conseils, les discussions et les échanges de mails que j'ai eu le plaisir de partager avec eux, je remercie vivement les professeurs François Alouges, Yacine Chitour, Bernard Helffer, de l'université Paris-Sud 11 et Fritz Gesztesy de l'université de Missouri.

Mes vifs remerciements à tous mes amis qui m'ont toujours soutenue et encouragée. La liste est longue mais je tiens particulièrement à remercier Fatima-Zahra qui a été pour moi un exemple de courage et de détermination, Itheri pour sa bonne humeur, son écoute, ses conseils et sa gentillesse, Mehdi pour son *soutien moral*, Mohamed pour les discussions sur des questions de mathématiques qui m'ont été très utiles. J'exprime aussi ma reconnaissance à Faïçal, notre génie en informatique, serviable et toujours présent quand on a besoin de lui. Je remercie l'ensemble des *forumistes*, diplômés de l'École polytechnique d'Alger, une véritable famille virtuelle.

Enfin je remercie et je dédie ce travail :

- à mes premiers professeurs, mes très chers parents dont le sacrifice, la tendresse, l'amour et la patience sont l'essence de ma réussite. Ils m'ont appris à affronter les difficultés et à ne jamais reculer mais à avancer et toujours avancer. Malgré la distance, ils n'ont pas cessé de me soutenir et m'encourager,
- à mon mari Wissem pour son soutien continu et pour tous ses sacrifices pour moi. En dépit des difficultés et de la distance il a toujours été présent à mes côtés pour m'encourager.
- à mon grand frère Nazim pour avoir fait preuve d'une grande patience durant ces trois années de thèse et à sa femme Aurélie,
- à mon petit frère Aziz pour ses encouragements, sa bonne humeur, sa serviabilité et surtout pour les *kilomètres* parcourus.
- à toute ma famille et en particulier mes grands-mères, à mes cousines Narjisse et Malia et à toute la famille Kirati.

Résumé : Cette thèse introduit une nouvelle méthode d'analyse de signaux, appelée SCSA, basée sur une quantification semi-classique. L'idée principale de la SCSA consiste à interpréter un signal en forme d'impulsions comme un puits de potentiel pour une particule semi-classique et à le représenter par les niveaux d'énergie discrets associés donnés par le spectre discret d'un opérateur de Schrödinger. La SCSA est une première étape vers une approximation par solitons (potentiels sans réflexion), qui définit une représentation parcimonieuse du signal, intéressante pour des applications en traitement du signal, par exemple la compression de données. Ce travail propose aussi un algorithme numérique pour l'estimation de signaux par la SCSA et présente les résultats de l'analyse des signaux de pression artérielle par cette méthode. En plus de la reconstruction satisfaisante de ces signaux, la SCSA introduit de nouveaux indices qui semblent véhiculer des informations physiologiques importantes.

Mots clés : analyse de signaux, opérateur de Schrödinger, quantification semi-classique, transformées scattering, solitons, pression artérielle, indices cardio-vasculaires.

Abstract : This thesis introduces a new signal analysis method called SCSA, based on a semi-classical quantification. The main idea in the SCSA consists in interpreting a pulse-shaped signal as a potential well for a semi-classical particle and to represent this signal with the associated discrete energy levels given by the discrete spectrum of a Schrödinger operator. The SCSA is in fact a first step to an approximation by solitons (reflectionless potentials), which introduces a parsimonious representation of a signal, interesting in signal analysis applications for example for data compression. This work proposes also a numerical algorithm for signals estimation using the SCSA and presents the results obtained for the analysis of the arterial blood pressure with this method. More than a satisfactory estimation of the pressure signals, the SCSA introduces new indices that seem to contain important physiological information.

Key words : signal analysis, Schrödinger operator, semi-classical quantization, scattering transforms, solitons, arterial blood pressure, cardiovascular indices.

Table des matières

Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Notations	xv
Introduction	1
1 Contexte de l'étude : solitons, analyse de signaux et approximation de fonctions	11
1.1 Introduction	11
1.2 Solitons	13
1.2.1 Définitions	13
1.2.2 Solitons solutions d'une équation de KdV	15
1.2.3 L'inverse scattering pour la résolution de l'équation de KdV	16
1.3 Solitons et pression artérielle	20
1.4 Solitons, inverse scattering et analyse de signaux	22
1.5 Solitons et approximation de fonctions	23
1.6 Objectifs et motivations de la thèse	24
I Une nouvelle méthode d'analyse de signaux basée sur l'analyse spectrale semi-classique	27
2 Transformées scattering directe et inverse de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel	29
2.1 Introduction	29
2.2 Opérateur de Schrödinger	30

2.3	Solutions de Jost, bound states et données scattering	32
2.4	Transformée scattering inverse	36
2.4.1	Méthode de Gel'fand Levitan Marchenko	36
2.4.2	Formule de reconstruction de Deift-Trubowitz	38
2.5	Formules de traces et invariants	38
2.6	Potentiels sans réflexion	40
2.6.1	Définition et propriétés	41
2.6.2	Un exemple de potentiels sans réflexion	42
2.7	Conclusion	43
3	Analyse spectrale semi-classique de signaux : SCSA	45
3.1	Introduction	45
3.2	Définition de la SCSA et cas particulier des potentiels sans réflexion . .	46
3.3	Comportement du spectre discret en fonction de χ	48
3.4	Une condition pour que l'approximation soit exacte	54
3.5	Etude de la convergence de y_χ quand $\chi \rightarrow +\infty$	55
3.5.1	Une première approche <i>classique</i> de la convergence	55
3.5.2	Une approche par l'analyse semi-classique : utilisation de la transformation de Wigner	56
3.5.3	Les conditions de $1/\sqrt{\chi}$ - <i>oscillation</i> pour la convergence faible-* dans \mathcal{S}'	58
3.6	Approximation de fonctions $L^2(\mathbb{R})$ par les valeurs propres négatives d'opérateurs de Schrödinger	61
3.7	Conclusion	64
4	Résolution numérique de la SCSA, validation et exemples	65
4.1	Introduction	65
4.2	Résolution numérique de la SCSA	65
4.2.1	Discrétisation du problème	67
4.2.2	Calcul d'une valeur optimale du paramètre χ	71
4.3	Validation et exemples	74
4.3.1	Identification des solitons de l'équation de KdV	74
4.3.2	Reconstruction de $\text{sech}^2(t)$	75
4.3.3	Application à l'estimation de signaux divers	84
4.4	Conclusion	89

II	Application à l'analyse des signaux de pression artérielle	97
5	Rappels de physiologie cardio-vasculaire	99
5.1	Introduction	99
5.2	Le système cardio-vasculaire	100
5.2.1	La pompe cardiaque	100
5.2.2	Les valves cardiaques	101
5.2.3	Notions d'élasticité et de distensibilité	101
5.2.4	Le réseau vasculaire	101
5.2.5	La circulation sanguine	102
5.3	Fonctionnement de la pompe cardiaque	104
5.4	La pression artérielle	105
5.4.1	Courbes de pression et de débit sanguins	105
5.4.2	Variabilité de la pression artérielle	107
5.5	Régulation du système cardio-vasculaire par le système nerveux auto- nome : baroréflexe	107
5.6	Volume d'éjection systolique	110
5.7	Mesure de la pression artérielle	111
5.7.1	Les mesures non invasives	111
5.7.2	Les mesures invasives	113
5.8	Conclusion	113
6	Reconstruction des signaux de pression artérielle par la SCSA	115
6.1	Introduction	115
6.2	Modèles d'écoulements	116
6.2.1	État de l'art	116
6.2.2	Un modèle réduit de pression artérielle	119
6.3	SCSA et pression artérielle	124
6.3.1	Reconstruction de la pression artérielle par la SCSA	124
6.3.2	Séparation des pressions systolique et diastolique	124
6.4	Conclusion	131
7	De nouveaux indices pour l'analyse de la forme des signaux de pres- sion artérielle	133
7.1	Introduction	133

7.2	Paramètres SCSA et pression artérielle	134
7.2.1	Les valeurs propres	135
7.2.2	Les invariants	135
7.3	Analyse des paramètres SCSA dans différentes situations physiologiques et pathologiques	137
7.3.1	Test tilt	138
7.3.2	Exercice isometrique ou handgrip	140
7.3.3	Insuffisants cardiaques versus contrôles	144
7.3.4	Sportifs avant et après entraînement	150
7.4	Conclusion	153
Conclusion générale		157
Annexes		161
A	Opérateur de Schrödinger et données scattering	163
A.1	Cas point limite et cercle limite	163
A.2	Existence et unicité des solutions de Jost [23], [51]	164
A.3	Données scattering : définitions et propriétés [23], [51]	172
B	Preuve des formules de traces et des invariants	183
B.1	Preuve de la formule de Deift-Trubowitz	183
B.2	Preuve des formules de traces	185
B.3	Preuve des formules des invariants	190
C	Quelques rappels sur l'équation de KdV	192
C.1	Résolution d'une équation de KdV par inverse scattering	192
C.2	Invariants de l'équation de KdV	196
D	Dispersion faible de l'équation de KdV : approche de Lax-Levermore	198
E	Quelques résultats de convergence sur le coefficient de réflexion	201
Bibliographie		205

Table des figures

1	Signal de pression sur un battement mesuré au doigt par FINAPRES	2
2	Pressions estimée et mesurée au niveau du doigt : "2-soliton + windkessel à deux éléments"	3
3	Les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} - y(x)$ sont toutes comprises entre $-y_{max}$ et 0	6
4	Potentiel négatif avec un seul minimum (mono-puits)	7
1.1	Exemples d'ondes solitaires	13
1.2	Exemple d'un 2-soliton	14
1.3	Phénomène scattering de l'opérateur de Schrödinger	17
1.4	L'IST pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires	19
1.5	Un 3-soliton à deux positions x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$)	21
1.6	Les signaux de pression artérielle ressemblent à des solitons en interaction	22
2.1	Représentation de $V(x) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$	42
4.1	Algorithme de reconstruction d'un signal par la SCSA	66
4.2	Calcul d'une valeur optimale de χ	73
4.3	Un 3-soliton à trois instants t_0, t_1 et t_2	75
4.4	Identification d'un 3-soliton	76
4.5	Estimation du 3-soliton initial pour $N_\chi = 3, 4, 7, 10$	77
4.6	Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour $y(t) = \operatorname{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$	79
4.7	Variation des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour $y(t) = \operatorname{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$	80
4.8	Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où $\chi = 20$ pour $y(t) = \operatorname{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$	80

4.9	Allure des quatre premières fonctions $\psi_{n\chi}^2$ dans le cas où $\chi = 20$ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$	81
4.10	Reconstruction de $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$, de gauche à droite : $N_\chi = 1, N_\chi = 2$ (haut). $N_\chi = 3, N_\chi = 4$ (bas)	82
4.11	Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$	84
4.12	Variation des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$	85
4.13	Estimation de $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$ pour $N_\chi = 4$	85
4.14	Estimation de $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$, de gauche à droite : $\chi = 2, \chi = 6$ (haut). $\chi = 12, \chi = 20$ (bas)	86
4.15	Relation entre le pas de discrétisation et χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$	87
4.16	Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour un signal gaussien	88
4.17	Variation des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour un signal gaussien	89
4.18	Estimation d'un signal gaussien, de gauche à droite : $N_\chi = 1, N_\chi = 2$ (haut). $N_\chi = 3, N_\chi = 4$ (bas)	90
4.19	Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour un signal sinusoidal	91
4.20	Evolution des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour un signal sinusoidal	91
4.21	Estimation d'un signal sinusoidal, de gauche à droite : $N_\chi = 4, N_\chi = 6$ (haut). $N_\chi = 8, N_\chi = 10$ (bas)	92
4.22	Estimation d'un signal sinusoidal sur 4 périodes avec $N_\chi = 10$	93
4.23	Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour un signal chirp	94
4.24	Evolution des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour un signal chirp	94
4.25	Estimation d'un signal chirp, de gauche à droite : $N_\chi = 30, N_\chi = 50$ (haut). $N_\chi = 80, N_\chi = 100$ (bas)	95
5.1	Schéma de l'anatomie du cœur	100
5.2	La circulation sanguine	103
5.3	Phases du fonctionnement cardiaque	103

5.4	Courbes de pression, de volume et de débit artériels	106
5.5	Schéma décrivant les changements de l'onde de pression artérielle lors de sa propagation le long de l'arbre artériel	106
5.6	Boucle de régulation à court terme	110
6.1	Modèles windkessel	118
6.2	Modèle réduit de pression artérielle : N -soliton + windkessel	120
6.3	Pressions estimée et mesurée au niveau du doigt : 2-soliton + windkessel à deux éléments	122
6.4	Pressions estimée et mesurée au niveau de l'aorte : 3-soliton + windkessel à deux éléments	122
6.5	Pressions estimée et mesurée au niveau du doigt : 3-soliton + windkessel à deux éléments	123
6.6	Reconstruction de la pression aortique par la SCSA. A gauche les pres- sions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.	125
6.7	Reconstruction de la pression aortique par la SCSA. A gauche les pres- sions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.	126
6.8	Reconstruction de la pression au doigt par la SCSA. A gauche les pres- sions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.	127
6.9	Reconstruction de la pression au doigt par la SCSA. A gauche les pres- sions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.	128
6.10	Pressions mesurée et estimée au niveau de l'aorte sur plusieurs batte- ments, pour $N_\chi = 9$	129
6.11	Pressions mesurée et estimée au niveau du doigt sur plusieurs batte- ments, pour $N_\chi = 9$	129
6.12	Pression systolique estimée	130
6.13	Pression diastolique estimée	131
7.1	(a) Série temporelle de la première valeur propre pour un sujet sain au repos, sous une fréquence de respiration de $0.25Hz$, sur plusieurs bat- tements. (b) Un zoom sur quelques battements montre les changements morphologiques du signal de pression artérielle.	136
7.2	Un signal de pression aortique	138
7.3	Test d'inclinaison ou tilt	139
7.4	PI et SBP durant le protocole tilt	140

7.5	Séries temporelles des paramètres de la pression artérielle dans le cas d'un sujet sain sous une fréquence de respiration de $0.25Hz$, en position allongée et en position debout après un test tilt de 60 degrés.	141
7.6	Sensibilité du baroréflexe battement à battement, représenté par la relation entre $ \lambda_1(n) $ et $PI(n+1)$. La pente et la corrélation sont plus importantes durant le tilt.	143
7.7	PI et SBP durant le protocole handgrip	144
7.8	Séries temporelles des paramètres de la pression artérielle pour un sujet en bonne santé, sous une fréquence de respiration spontanée, au repos et pendant le test handgrip.	145
7.9	Sensibilité du baroréflexe battement à battement, représenté par la relation entre $ \lambda_1(n) $ et $PI(n+1)$. La pente est fortement diminuée pendant le handgrip	147
7.10	Signal de pression artérielle pour un sujet contrôle et un insuffisant cardiaque	148
7.11	Séries temporelles des paramètres de la pression artérielle pour un sujet contrôle et un insuffisant cardiaque	149
7.12	Signal de pression artérielle pour un sportif avant et après entraînement	152
7.13	Premiers invariants de la pression artérielle (haut) et leur amplitude très haute fréquence (bas) pour un sujet avant et après entraînement. Lignes discontinues : paramètres diastoliques, lignes continues : paramètres systoliques	155
7.14	Figures illustrant la corrélation entre le débit mesuré par PICCO et $INVS_1$	159
7.15	Reconstruction d'un signal ECG par la SCSA	160
16	Phénomène scattering de l'opérateur de Schrödinger	176

Liste des tableaux

4.1	Valeurs optimales de χ pour $y(t) = \operatorname{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$	83
7.1	Paramètres de la pression artérielle dans le cas d'un test tilt pour 15 sujets en bonne santé	142
7.2	Sensibilité du baroréflexe battement à battement durant le protocole tilt	142
7.3	Trois indices pour l'étude de la sensibilité du baroréflexe battement à battement durant le tilt	143
7.4	Paramètres de la pression artérielle pour le protocole handgrip pour 13 sujets en bonne santé	146
7.5	Sensibilité du baroréflexe battement à battement durant le test handgrip	146
7.6	Trois indices pour l'étude de la sensibilité du baroréflexe battement à battement dans le cas du test handgrip	147
7.7	Valeurs moyennes et variabilité globale des paramètres de la pression artérielle pour 9 insuffisants cardiaques et 9 sujets contrôles	150
7.8	Valeurs moyennes et variabilité globale des paramètres de la pression artérielle pour 8 athlètes juniors avant et après entraînement.	153
7.9	Variabilité basse fréquence, haute fréquence et très haute fréquence des invariants de la pression artérielle, avant et après entraînement pour les 8 athlètes	154

Notations

DBP	: pression diastolique (diastolic blood pressure).
DST	: transformée scattering direct (direct scattering transform).
ECG	: électrocardiogramme.
IST	: transformée scattering inverse (inverse scattering transform).
KdV	: Korteweg-de Vries.
PP	: pression pulsée (pulse pressure).
PI	: période systolique (pulse interval).
RR	: période cardiaque.
SBP	: pression systolique (systolic blood pressure).
SBSA	: scattering based signal analysis.
SCSA	: semi-classical signal analysis.
SEM	: standard error of the mean.
0D	: pas de dépendance spatiale.
1D	: unidimensionnel.
2D	: bidimensionnel.
3D	: tridimensionnel.
c_{ln}	: coefficient de normalisation par la gauche associé à $H(V)$.
c_{rn}	: coefficient de normalisation par la droite associé à $H(V)$.
$c_{ln\chi}$: coefficient de normalisation par la gauche associé à $H(-\chi y)$.
$c_{rn\chi}$: coefficient de normalisation par la droite associé à $H(-\chi y)$.
\mathbb{C}^+	: demi plan complexe supérieur.

$\overline{\mathbb{C}}^+$: $\overline{\mathbb{C}}^+ = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.
$\mathcal{D}(H)$: domaine de l'opérateur H .
$f_+(k, x)$: fonction de Jost par la gauche associée à $H(V)$.
$f_-(k, x)$: fonction de Jost par la droite associée à $H(V)$.
$f_{+\chi}(k, x)$: fonction de Jost par la gauche associée à $H(-\chi y)$.
$f_{-\chi}(k, x)$: fonction de Jost par la droite associée à $H(-\chi y)$.
$I_m(y)$: $m^{\text{ième}}$ invariants en temps de l'équation de Korteweg-de Vries.
INV_1	: premier invariant global.
INV_2	: deuxième invariant global.
$INVS_1$: premier invariant systolique.
$INVS_2$: deuxième invariant systolique.
$INVD_1$: premier invariant diastolique.
$INVD_2$: deuxième invariant diastolique.
$H(V)$: opérateur de Schrödinger associé au potentiel V .
$L^p(\mathbb{R})$: $\{f \text{ mesurable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) ^p dx < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.
$L_{loc}^p(\mathbb{R})$: $\{f \in L^p(\mathbb{K}) \text{ pour tout compact } \mathbb{K} \subset \mathbb{R}\}$, $1 \leq p < \infty$.
$L_1^1(\mathbb{R})$: $\{f \text{ mesurable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x) f(x) dx < \infty\}$.
$H^2(\mathbb{R})$: espace de Sobolev d'ordre 2.
$\text{Im}(X)$: partie imaginaire de X .
pp	: presque partout.
P	: signal de pression artérielle.
\hat{P}	: pression artérielle estimée.
\hat{P}_s	: pression systolique estimée.
\hat{P}_d	: pression diastolique estimée.
σ	: spectre.
σ_c	: spectre continu.
σ_d	: spectre discret.
$\mathbb{S}(\mathbf{R})$: espace de Schwartz.
$S_\gamma(\chi, \lambda)$: moyenne de Riesz.
R^2	: coefficient de corrélation.
$\text{Re}(X)$: partie réelle de X .
$R_l(k)$: coefficient de réflexion par la gauche associé à $H(V)$.
$R_r(k)$: coefficient de réflexion par la droite associé à $H(V)$.
$R_{l\chi}(k)$: coefficient de réflexion par la gauche associé à $H(-\chi y)$.
$R_{r\chi}(k)$: coefficient de réflexion par la droite associé à $H(-\chi y)$.

$T(k)$:	coefficient de transmission associé à $H(V)$.
$T_\chi(k)$:	coefficient de transmission associé à $H(-\chi y)$.
V	:	potentiel de l'opérateur de Schrödinger.
y	:	signal à analyser.
$W(f, g)$:	Wronskien de f et g .
χ	:	constante de couplage.
ψ_n	:	bound state associée à $H(V)$.
$\psi_{n\chi}$:	bound state associée à $H(-\chi y)$.
$-\kappa_n^2$:	valeur propre négative de $H(V)$.
$-\kappa_{n\chi}^2$:	valeur propre négative de $H(-\chi y)$.
$ \lambda_1 $:	module de la première valeur propre négative de $H(-\chi P)$.
$ \lambda_2 $:	module de la deuxième valeur propre négative de $H(-\chi P)$.

Introduction

Les maladies cardio-vasculaires constituent, à l'heure actuelle, l'une des principales causes de mortalité dans le monde. Le nombre de décès imputables à une maladie cardio-vasculaire est estimé à 17.5 millions pour 2005, soit 30 % de la mortalité mondiale totale ¹. Parmi les paramètres qui jouent un rôle important dans le système cardio-vasculaire citons la pression artérielle communément appelée la tension. Son importance a depuis longtemps suscité l'intérêt de la communauté scientifique qui tente d'élaborer des modèles mathématiques afin de mieux comprendre le fonctionnement du système cardio-vasculaire aussi bien dans le cas sain que pathologique. Bien que la littérature abonde en travaux sur la modélisation de la circulation sanguine, l'interprétation de la pression artérielle en clinique de routine se restreint souvent à l'interprétation des valeurs maximale et minimale appelées respectivement pressions systolique et diastolique et mesurées à l'aide d'un sphygmomanomètre (voir figure 1). Aucune information sur la variabilité instantanée de la pression n'est fournie dans ce cas, pourtant des informations pertinentes pourraient se cacher derrière la forme du signal de pression. L'analyse de la forme de la pression artérielle nécessite des enregistrements continus, battement par battement, faisant appel à des techniques invasives, intra-artérielles, potentiellement dangereuses pour le patient, qui ne sont donc utilisables que dans des cas très particuliers et non en clinique de routine. Il existe cependant des appareils permettant la mesure non invasive de la pression artérielle continue, au niveau du doigt, le FINAPRES en est un exemple [120]. Il serait alors intéressant d'élaborer des techniques qui permettraient d'analyser la pression artérielle instantanée à partir de mesures non-invasives.

Inspirés par un modèle réduit de pression artérielle à base de solitons, proposé dans [20], [56], notre motivation au début de cette thèse était de développer un outil d'analyse des signaux de pression artérielle par moyen non-invasif. Le modèle en

¹Statistiques de l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), site internet : <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/fr/index.html>

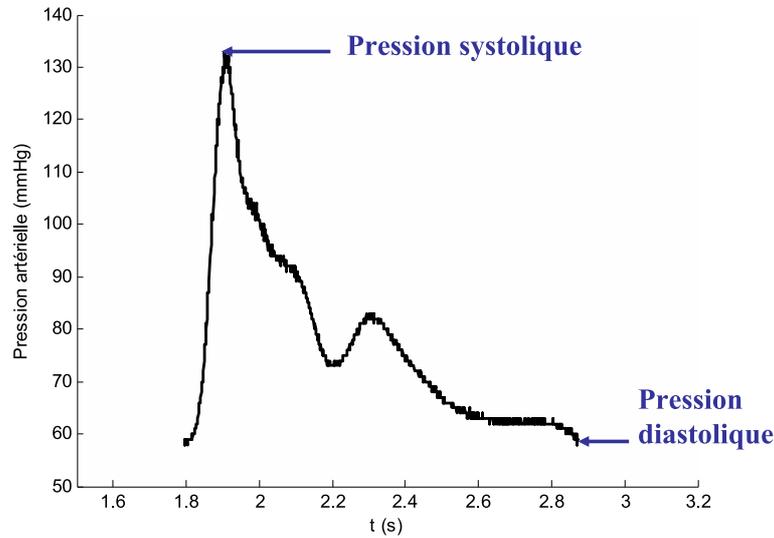


FIG. 1 – Signal de pression sur un battement mesuré au doigt par FINAPRES

question consiste à décomposer la pression en une superposition d'un N -soliton (en gros N représente le nombre de bosses dans le signal de pression), solution particulière d'une équation de Korteweg-de Vries (KdV), qui décrit les phénomènes rapides d'ondes progressives (transit du pouls entre le cœur et le point de mesure) de la phase systolique et un modèle windkessel à deux éléments (voir chapitre 6), qui décrit les phénomènes lents de la phase diastolique. Les modèles à base de solitons s'avèrent être de bons modèles de pression artérielle d'autant plus qu'ils permettent d'expliquer certains phénomènes observés sur l'onde de pression lors de sa propagation le long de l'arbre artériel.

L'analyse des signaux de pression artérielle par le modèle réduit " N -soliton + windkessel" marche bien comme l'illustre la figure 2 mais présente un inconvénient majeur : cette décomposition n'est que partiellement justifiée du point de vue physique et mathématique [20], ce qui se paye en pratique par la nécessité d'ajuster à la main l'ordre N du soliton puis d'identifier les paramètres de ce modèle "hybride". Nous avons alors essayé de représenter l'ensemble du signal, y compris sa fin exponentielle (phase télédiastolique où le modèle de windkessel excelle) par un N -soliton. Les résultats pratiques ont été très encourageants, mais cette approche nécessite l'identification directe d'un N -soliton. C'est la première difficulté que nous avons rencontrée dans cette thèse. Nous avons alors fait appel à une technique de résolution de l'équation

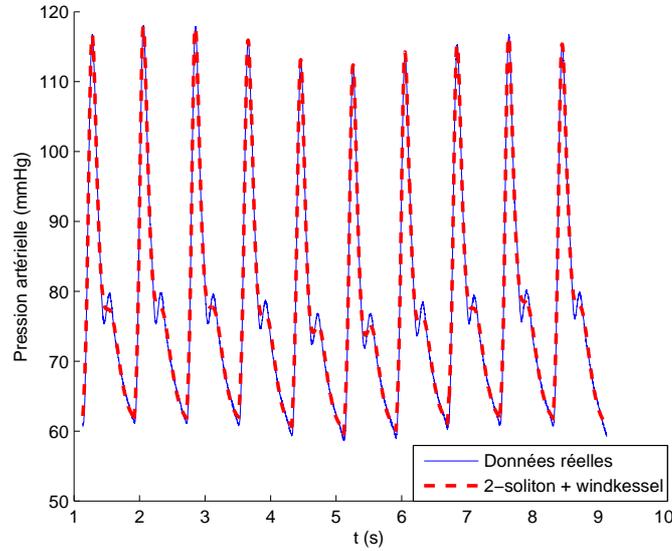


FIG. 2 – Pressions estimée et mesurée au niveau du doigt : "2-soliton + windkessel à deux éléments"

de KdV qui est la transformée scattering inverse (IST) de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel [32]. L'équation de KdV est en effet associée à un problème spectral d'un opérateur de Schrödinger ($H(-\chi y) = -\frac{d^2}{dx^2} - \chi y$) qui s'écrit :

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}(k, x) - \chi y(x)\psi(k, x) = k^2\psi(k, x), \quad k \in \mathbb{C}^+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où y est le signal de pression artérielle (pour retrouver les notations usuelles, la variable temporelle est remplacée par la variable spatiale) et χ un paramètre positif qui dépend des caractéristiques des vaisseaux sanguins. Les solitons sont en réalité des potentiels particuliers de l'équation (1), appelés potentiels sans réflexion. Ainsi, nous connaissons une formule explicite d'un N_χ -soliton donnée par :

$$y_\chi(x) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

où $-\kappa_{n\chi}^2$ et $\psi_{n\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ sont respectivement les valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$ et les fonctions propres L^2 -normalisées associées. Les fonctions $\psi_{n\chi}$ sont telles

que :

$$\psi_{n\chi}(x) = c_{ln\chi} e^{-\kappa_{n\chi} x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

où $c_{ln\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ sont des constantes de normalisation.

Les $2N_\chi$ paramètres $\kappa_{n\chi}$ et $c_{ln\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ sont particulièrement intéressants puisqu'ils déterminent complètement le N_χ -soliton par la formule :

$$y_\chi^s(x) = -\frac{2}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det (I + A_\chi)(x), \quad (4)$$

où $A_\chi(x)$ est une matrice $N_\chi \times N_\chi$ dont les coefficients sont donnés par :

$$A_\chi(x) = \left[\frac{c_{lm\chi} c_{ln\chi}}{\kappa_{m\chi} + \kappa_{n\chi}} e^{-(\kappa_{m\chi} + \kappa_{n\chi})x} \right]_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N_\chi. \quad (5)$$

Cela peut être avantageux comparé à la formule (2) qui utilise N_χ paramètres et N_χ fonctions. La formule (4)-(5) qui s'exprime simplement et uniquement en fonction de $2N_\chi$ paramètres définit une représentation parcimonieuse du signal pouvant avoir des applications intéressantes en traitement du signal comme par exemple la compression de données. Cette méthode d'analyse en solitons de la pression artérielle apparaît alors comme une nouvelle méthode d'analyse de signaux à bosses. Les paramètres $\kappa_{n\chi}$ et $c_{ln\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ peuvent être calculés par transformée scattering directe (DST) de l'opérateur de Schrödinger $H(-\chi y)$. Celle-ci consiste à déterminer, pour un potentiel donné de l'opérateur de Schrödinger $H(-\chi y)$, un ensemble de données spectrales appelées données scattering qui comprend en particulier $\kappa_{n\chi}$ et $c_{ln\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$. Ainsi, nous appelons cette méthode SBSA pour Scattering Based Signal Analysis.

Lorsque nous avons été capables de calculer les $\kappa_{n\chi}$ et les $c_{ln\chi}$ (qui posent un problème sur lequel nous allons revenir), nous avons constaté numériquement que nos signaux "à bosses" s'approchent très bien par des N_χ -solitons pour N_χ assez grand. Il est alors naturel d'étudier la question de l'approximation par des N_χ -solitons quand $N_\chi \rightarrow +\infty$, ce qui chez nous correspond à $\chi \rightarrow +\infty$. Ce problème a été étudié par Lax et Levermore dans un contexte aux motivations initiales très différentes [63]. Ces auteurs étudiaient la limite faible dispersion de l'équation de KdV, ce qui les a conduit à approcher la condition initiale de l'équation de KdV par un N -soliton dont l'expres-

sion contient le petit paramètre de dispersion, chez nous $\frac{1}{\chi}$. Ils ont montré un résultat de convergence dans le cas d'un puits unique (correspondant pour le signal $y = -v$ à une bosse unique), conjecturant que le résultat devait être valable pour un nombre fini de puits. Mais ce dernier résultat n'a, à notre connaissance, jamais été démontré.

A cette difficulté théorique de l'approximation par un N_χ -soliton, s'ajoutent des difficultés liées au calcul numérique des coefficients $c_{ln\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ rendant la SBSA non applicable pour le moment. La formule (2) quant à elle est plus simple à calculer numériquement. Néanmoins, elle ne représente pas forcément un N_χ -soliton. Dans cette thèse nous nous sommes donc limités à l'utilisation de la formule (2) qui, comme nous le verrons par la suite, constitue une première étape vers l'approximation en solitons et relève d'une quantification semi-classique du signal vu comme potentiel.

Nous utilisons donc des données scattering incomplètes, les $\kappa_{n\chi}$. Il est apparu dans les applications à la pression artérielle qu'elles avaient un grand intérêt. En fait les $\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$ peuvent s'interpréter comme des valeurs particulières du signal qui ne ressortent pas des méthodes usuelles d'échantillonnage : valeurs aux points de discrétisation ou valeurs extrémales. C'est l'interprétation semi-classique qui semble la plus naturelle ici : le signal y étant interprété comme un potentiel $-y$, sa quantification de Bohr-Sommerfeld est naturelle, asymptotiquement, c'est le sens des valeurs particulières que sont les $\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$.

Donnons les idées générales qui seront utilisées dans ce travail. Supposons un signal y positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ et à décroissance rapide. Posons $h = \frac{1}{\sqrt{\chi}}$ et $\lambda_h = \frac{k^2}{\chi}$. L'équation (1) se réécrit alors sous la forme suivante :

$$-h^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2}(\sqrt{\lambda_h \chi}, x) - y(x) \psi(\sqrt{\lambda_h \chi}, x) = \lambda_h \psi(\sqrt{\lambda_h \chi}, x). \quad (6)$$

Lorsque $\chi \rightarrow +\infty$ et donc $h \rightarrow 0$, nous nous retrouvons avec un problème d'analyse semi-classique [24], [96], [97].

Il est connu que les valeurs propres négatives de l'opérateur $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} - y(x)$, à sa-

voir $-\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ sont comprises entre $-y_{max}$ et 0 comme illustré sur la figure 3. Pour une valeur fixée de χ , elles correspondent donc à des valeurs particulières de $-y$.

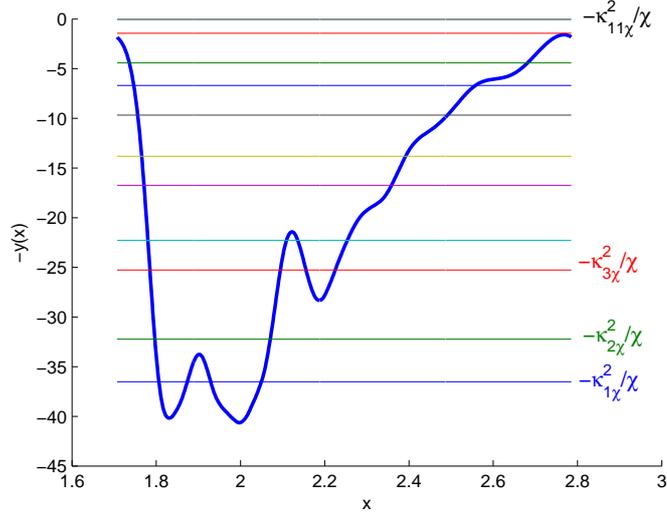


FIG. 3 – Les valeurs propres de l’opérateur de Schrödinger $-h^2 \frac{d^2}{dx^2} - y(x)$ sont toutes comprises entre $-y_{max}$ et 0

Supposons à présent que $-y$ a un seul minimum $-y_{max}$ et soit λ telle que $-y_{max} < \lambda \leq 0$, alors il existe deux valeurs x_- et x_+ qui vérifient :

$$y(x_-) = y(x_+) = \lambda, \quad x_- < x_+. \quad (7)$$

D’après la loi de Weyl sur la densité des valeurs propres [44], le nombre de valeurs propres négatives inférieures à λ est donné par :

$$N_\chi(\lambda) \simeq \frac{\sqrt{\chi}}{\pi} \Phi(\lambda), \quad \text{avec} \quad \Phi(\lambda) = \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{y(x) + \lambda} dx. \quad (8)$$

En régime semi-classique, (c’est à dire lorsque $h \rightarrow 0$ ou de manière équivalente $\chi \rightarrow +\infty$), les valeurs possibles de $-\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi} \leq \lambda$ sont telles que $\Phi(\lambda)$ est, à un $\frac{1}{2}$ près, un

multiple entier de $\frac{1}{\sqrt{\chi}}$: c'est la condition de Bohr-Sommerfeld [125],

$$\Phi(\lambda) = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\sqrt{\chi}}. \quad (9)$$

La situation est comparable à celle d'une bille qui oscille au fond d'une cuvette de part et d'autre de son centre. Si on lâche la bille en x_- dans la cuvette, elle oscille entre x_- et x_+ . Les énergies propres sont alors, à $\frac{1}{2}$ près, des multiples entiers de $\frac{1}{\sqrt{\chi}}$.

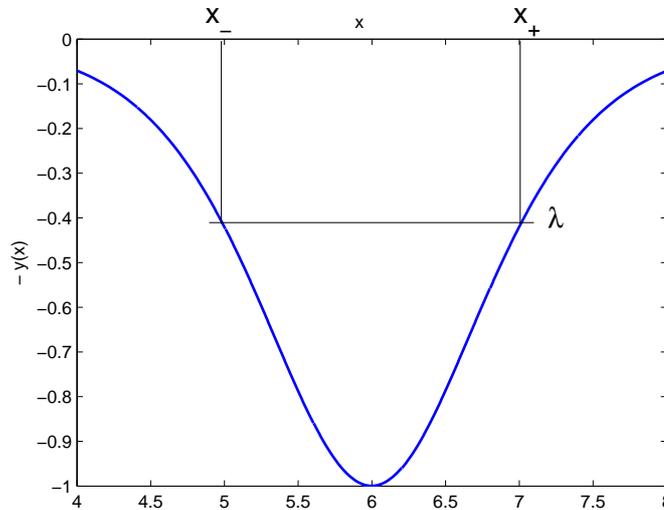


FIG. 4 – Potentiel négatif avec un seul minimum (mono-puits)

Ainsi, si nous considérons le signal à analyser comme un puits de potentiel, nous pouvons lui associer les valeurs $\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ qui seront donc utilisées comme des valeurs représentatives du signal. C'est une nouvelle approche pour quantifier et analyser un signal basée sur le principe de quantification semi-classique. Nous appelons cette méthode SCSA pour Semi-Classical Signal Analysis. Remarquons que la connaissance des $\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$ ne caractérise pas l'approximant. Par exemple le N_χ -soliton correspondra à ces mêmes valeurs mais les $\psi_{n\chi}$ associés auront le "bon comportement" asymptotique qui en feront des approximants sans réflexion : SBSA est un cas particulier de SCSA.

Nous avons appliqué la SCSA à l'analyse des signaux de pression artérielle. Pour

cela, nous avons travaillé en collaboration avec l'hôpital Bécclère de Clamart et l'Unité de Biologie Intégrative des Adaptations à l'Exercice (INSERM U902/Université d'Évry EA 3872, Génopôle) qui nous ont fourni des données de pression mesurées aux niveaux du ventricule, de l'aorte et du doigt. Comme nous allons le voir, la reconstruction des signaux de pression artérielle par la SCSA est satisfaisante et nécessite un nombre modéré de composantes spectrales (entre 5 et 9 composantes uniquement). La SCSA a également été utilisée comme filtre permettant de séparer les pressions systolique et diastolique. Par ailleurs, elle introduit de nouveaux indices spectraux qui semblent contenir une information riche sur le signal de pression. Nous avons analysé ces paramètres, calculés pour une pression mesurée au doigt par moyen non-invasif, dans différentes situations physiologiques et pathologiques. Les premiers résultats paraissent prometteurs notamment concernant la discrimination entre différentes situations.

Après un premier chapitre qui introduit le contexte de l'étude, nous diviserons le travail en deux parties :

La première partie, composée de trois chapitres, présente la méthode SCSA. Nous commencerons par rappeler dans le premier chapitre quelques notions et propriétés de la transformée scattering, nécessaires pour la compréhension de notre travail. La SCSA fera l'objet du chapitre 3. Son principe de base ainsi que ses différentes propriétés, notamment de convergence, y seront présentés. Nous verrons également le cas particulier de l'approximation par solitons (ou par potentiels sans réflexion) pour lequel la SBSA et la SCSA coïncident. Le chapitre 4, riche en exemples, s'intéressera à la validation de la SCSA. Nous présenterons le schéma numérique proposé pour reconstruire un signal par cette méthode qui sera ensuite appliquée à des exemples simples comme l'identification des solitons solutions de l'équation de KdV et à la reconstruction de signaux divers.

La deuxième partie propose l'application de la SCSA à l'analyse des signaux de pression artérielle et comporte 3 chapitres. Le chapitre 5 rappelle quelques concepts sur la physiologie cardio-vasculaire. Dans le chapitre 6, après une brève présentation de l'état de l'art sur la modélisation de l'écoulement sanguin où un intérêt particulier sera donné aux modèles à base de solitons, il sera question d'appliquer la SCSA à la reconstruction des signaux de pression artérielle. Nous verrons également que la SCSA

peut être utilisée pour séparer les pressions systolique et diastolique. Enfin, le chapitre 7 présentera quelques résultats sur l'analyse, par la SCSA, de la pression artérielle mesurée au doigt par moyen non-invasif, dans différentes situations physiologiques et pathologiques (test tilt, test handgrip, insuffisants cardiaques versus contrôles, sportifs avant et après entraînement).

Une conclusion générale donnera une synthèse du travail effectué et résumera les principaux résultats obtenus ainsi que les perspectives envisagées.

Le document comprend également des annexes qui explicitent les détails de certains résultats présentés brièvement dans le texte et rappellent les preuves de quelques théorèmes.

Chapitre 1

Contexte de l'étude : solitons, analyse de signaux et approximation de fonctions

1.1 Introduction

Dotés de propriétés exceptionnelles, les solitons sont utilisés dans différents domaines (hydrodynamique, fibres optiques, transmission et communication etc...) pour modéliser des phénomènes naturels tels que les tsunamis et décrire le comportement de certains systèmes physiques.

L'histoire des solitons remonte à la découverte de l'Écossais John Scott Russell au 17^{ième} siècle et plus précisément en 1834. Lors d'une promenade le long du canal Edinburgh-Glasgow, il suivit pendant plusieurs kilomètres une vague produite par le sillage d'un bateau. Celle-ci se propageait sans se déformer. Il découvrit alors ce qu'il a appelé *les grandes ondes de translation* ou *ondes solitaires*. Ce n'est qu'en 1895, que la découverte de Russel fût confortée grâce aux mathématiciens Korteweg et de Vries qui proposèrent leur célèbre équation aux dérivées partielles, appelée depuis équation de Korteweg-de Vries, couramment abrégé en KdV, pour décrire le mouvement des ondes en eaux peu profondes. Ils montrèrent que les ondes solitaires sont solutions de cette équation.

Il a fallu attendre les expériences de Zabusky et Kruskal en 1965 [128] pour voir

la naissance du concept *soliton*. Ces derniers simulèrent les solutions numériques de l'équation de KdV et remarquèrent une propriété intéressante : après collision d'ondes solitaires entre elles, chacune préserve son aspect. Zabusky et Kruskal expliquèrent le phénomène de collision par le fait que la vitesse de ces ondes soit proportionnelle à leur amplitude. Ainsi les composantes de plus grande amplitude vont plus vite. Cependant, en dépit de la non-linéarité de l'interaction, chacune retrouve sa forme et sa vitesse initiales après collision, la seule conséquence étant l'apparition d'un déphasage. Zabusky et Kruskal nommèrent ces ondes *solitons* pour décrire la propriété de particule qui les caractérise ¹.

Le plus important développement des solitons est survenu vers la fin des années soixante où une relation remarquable entre les solitons et la transformée scattering de l'opérateur de Schrödinger a été introduite par Gardner, Green, Kruskal et Miura [32]. Ces derniers ont proposé de résoudre le problème de Cauchy de l'équation de KdV en utilisant l'inverse scattering. Cette découverte a permis d'établir des propriétés intéressantes des solitons et d'explicitier leur relation aux potentiels dits sans réflexion de l'opérateur de Schrödinger. L'approche de Gardner *et al* a été aussitôt généralisée par Lax en 1968 [62], suivie par les travaux de Zakharov et Shabat en 1972 [130] sur la résolution de l'équation de Schrödinger non-linéaire à partir du problème scattering du système de Zakharov-Shabat. La méthode a été ensuite utilisée par Ablowitz, Kaup, Newell et Segur en 1973 [1] pour la résolution d'une équation de Sine-Gordon. D'autres équations aux dérivées partielles pouvant être résolues par l'inverse scattering ont été découvertes plus tard.

Il existe une littérature abondante sur la théorie des solitons. Nous nous intéressons uniquement aux solitons solutions de l'équation de KdV, et à leur application à l'hémodynamique ² pour la modélisation des ondes de pression artérielle, mais aussi en traitement du signal et à l'approximation de fonctions.

¹Le suffixe *on* décrit une propriété de particule

²L'hémodynamique consiste en l'étude des différents facteurs régissant la circulation du sang dans l'organisme.

1.2 Solitons

1.2.1 Définitions

Commençons par quelques définitions [99] :

Définition 1.2.1. *Une onde progressive est une solution d'une équation aux dérivées partielles qui dépend des variables spatiale x et temporelle t uniquement à travers la relation $\xi = x - ct$; c étant la vitesse de propagation constante.*

Définition 1.2.2. *Une onde solitaire est une onde progressive localisée, c'est à dire, une onde progressive qui tend vers des états constants lorsque $\xi \rightarrow -\infty$ et $\xi \rightarrow +\infty$.*

La figure 1.1 illustre l'exemple de deux ondes solitaires : une impulsion solution d'une équation de KdV à gauche et un kink solution d'une équation de Sine-Gordon à droite.

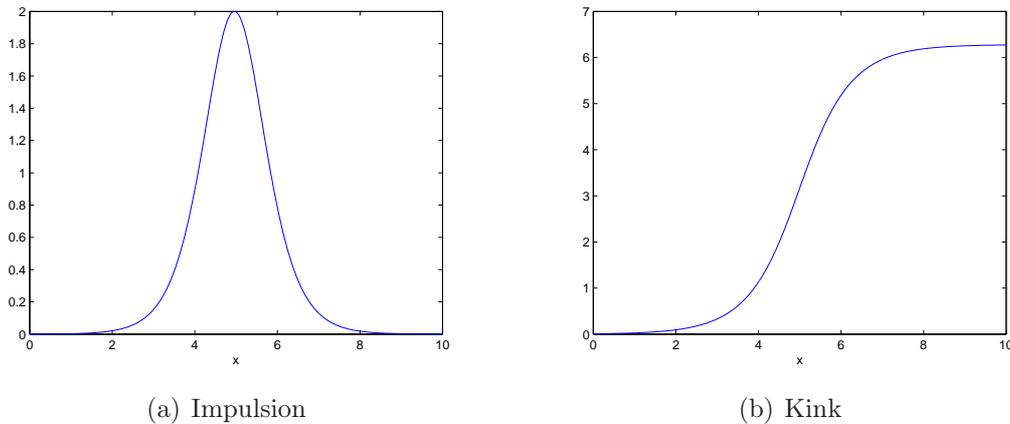


FIG. 1.1 – Exemples d'ondes solitaires

Définition 1.2.3. *Un soliton est une onde solitaire qui asymptotiquement préserve sa forme et sa vitesse après collision avec d'autres ondes solitaires.*

Définition 1.2.4. *Un N -soliton consiste en N ondes solitaires de différentes amplitudes, se propageant à différentes vitesses, éventuellement en interaction.*

La figure 1.2 illustre l'exemple d'un 2-soliton, solution d'une équation de KdV se propageant vers la droite, en fonction de x et à 4 instants différents. Initialement les deux ondes sont bien séparées. Sachant que la vitesse des solitons est proportionnelle à leur amplitude, l'onde de plus grande amplitude va plus vite que la deuxième, la rattrape et après collision chacune d'entre elles retrouve sa forme et son amplitude initiales. Pendant la collision, caractérisée par une interaction non-linéaire entre les deux ondes, la forme de la solution ne se résume pas à une superposition linéaire de deux solitons.

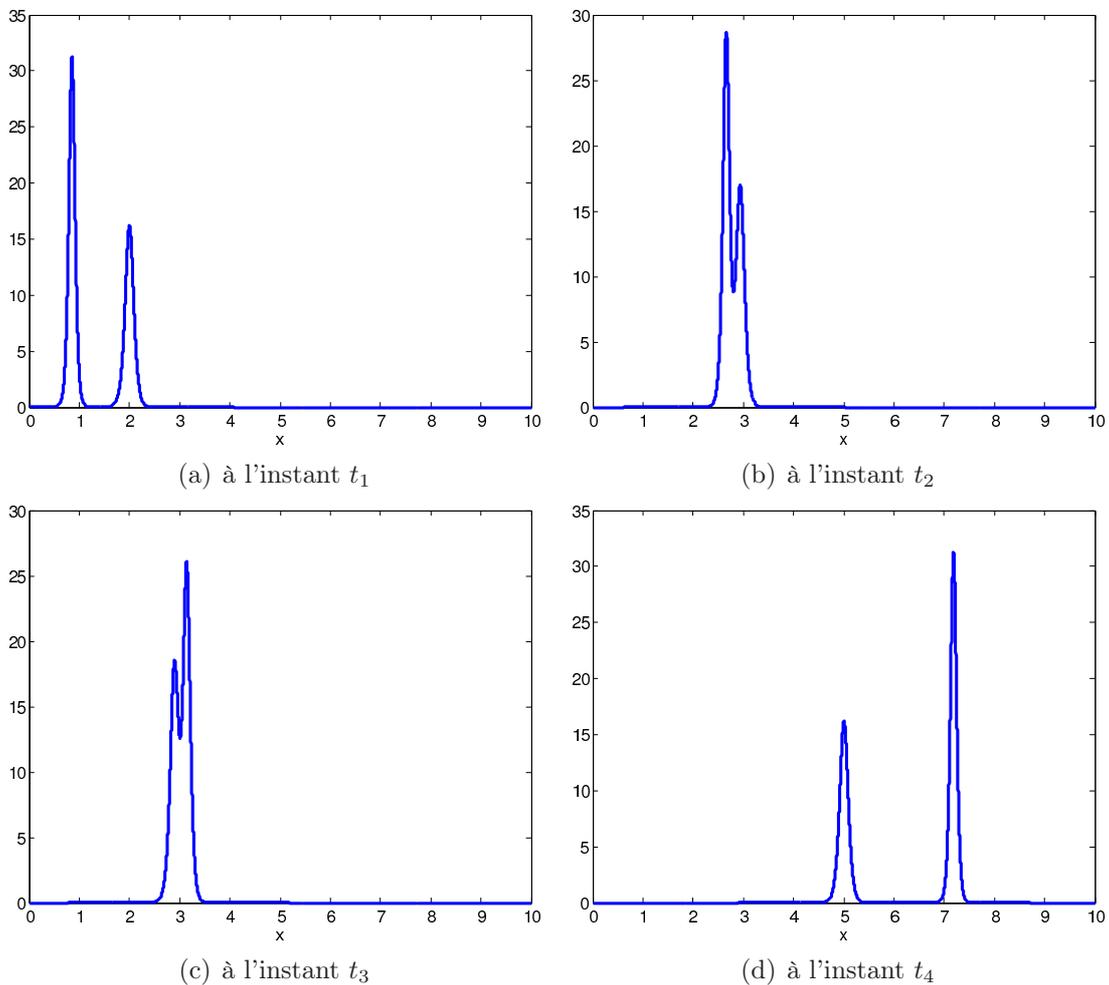


FIG. 1.2 – Exemple d'un 2-soliton

1.2.2 Solitons solutions d'une équation de KdV

Après la découverte des premiers solitons permettant de modéliser des phénomènes naturels, de nombreuses études mathématiques ont permis de trouver des équations d'évolution qui admettent des solitons comme solutions. L'exemple le plus connu est l'équation de KdV. C'est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, non-linéaire et dispersive, dont la forme standard est donnée par [32], [59], [74], [123] :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - 6V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 0, \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad (1.1)$$

x et t étant les variables spatiale et temporelle respectivement et V_0 la condition initiale. Sachant que les phénomènes de non-linéarité et de dispersion engendrent respectivement des fronts raides (ondes de choc) et l'étalement de l'onde, il est naturel de se demander comment les solitons, qui se propagent sans changer de forme ni de vitesse, peuvent être solutions d'équations non-linéaires et dispersives ? En réalité, la présence simultanée de la non-linéarité et de la dispersion est à l'origine de l'existence des solitons. Ces derniers naissent en effet d'un équilibre stable entre ces deux phénomènes [99], [128].

Une onde solitaire, solution de l'équation de KdV, s'écrit sous la forme suivante [74], [123] :

$$V(x, t) = -\frac{1}{2}a^2 \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}a(x - x_0 - a^2t)\right], \quad (1.2)$$

où la fonction secante hyperbolique sech est définie par :

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \quad (1.3)$$

x_0 est la position du centre de symétrie de l'onde à $t = 0$ et a^2 représente sa vitesse. Nous remarquons que la vitesse de cette onde est proportionnelle à son amplitude.

Différentes méthodes de résolution de l'équation de KdV ont été proposées [59], [74], [123] s'intéressant particulièrement aux cas des solitons. Ainsi, une expression analytique d'un N -soliton solution de l'équation de KdV a été établie et est donnée par :

$$V(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln \det(A(x, t))), \quad (1.4)$$

où A est une matrice $N \times N$ dont les coefficients s'expriment par :

$$A(x, t) = \left[\delta_{mn} + \frac{2a_m}{a_m + a_n} f_m(x, t) \right]_{n,m}, \quad m, n = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

δ_{mn} étant le symbole de Kronecker et

$$f_m(x, t) = e^{-a_m(x-s_m-a_m^2 t)}, \quad (a_m, s_m) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Un 2-soliton par exemple s'écrit :

$$V(x, t) = -2 \frac{a_1^2 f_1 + a_2^2 f_2 + 2(a_2 - a_1)^2 f_1 f_2 + \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right)^2 (a_2^2 f_1^2 f_2 + a_1^2 f_1 f_2^2)}{\left(1 + f_1 + f_2 + \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right)^2 f_1 f_2 \right)^2}. \quad (1.7)$$

1.2.3 L'inverse scattering pour la résolution de l'équation de KdV

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, le plus important développement des solitons est survenu suite aux travaux de Gardner *et al* [32] qui ont proposé une méthode de résolution de l'équation de KdV en utilisant l'inverse scattering. Le principe de cette approche est rappelé dans l'annexe C.1. L'équation de KdV (1.1) est associée à un opérateur de Schrödinger unidimensionnel, paramétré par la variable temporelle t , dont le potentiel est donné par la solution de l'équation de KdV $V(x, t)$. Notons $H(V)$ cet opérateur qui s'écrit :

$$H(V) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x, t). \quad (1.8)$$

Le problème spectral associé à $H(V)$ est donné par :

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x, t) \psi = k^2 \psi, \quad k \in \overline{\mathbb{C}}^+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

où k^2 et ψ sont respectivement les valeurs propres de $H(V)$ et les fonctions propres associées.

Le spectre de l'opérateur de Schrödinger est réel et comprend un spectre continu

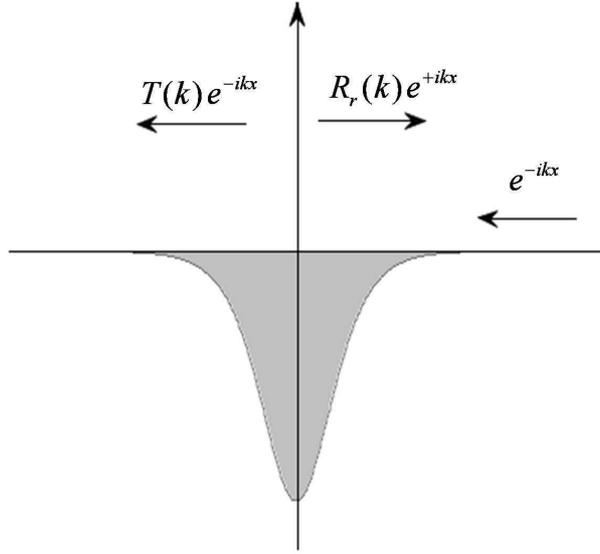


FIG. 1.3 – Phénomène scattering de l'opérateur de Schrödinger

égal à $[0, +\infty)$ et un spectre discret composé de valeurs propres négatives $k^2 = -\kappa_n^2$.

Pour $k^2 > 0$, nous définissons les solutions ψ_{\pm} de l'équation (1.9) qui se comportent asymptotiquement comme suit :

$$\psi_{-}(k, x) = \begin{cases} T(k)e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-ikx} + R_r(k)e^{+ikx} & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\psi_{+}(k, x) = \begin{cases} T(k)e^{+ikx} & x \rightarrow +\infty, \\ e^{+ikx} + R_l(k)e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (1.11)$$

où $T(k)$ est appelé coefficient de transmission et $R_{l(r)}(k)$ sont appelés coefficients de réflexion par la gauche et par la droite respectivement. La solution ψ_{-} par exemple décrit le phénomène scattering pour une onde e^{-ikx} d'amplitude 1, émise de $+\infty$. Cette onde se heurte à un obstacle qui est le potentiel et transmet ainsi une partie du signal $T(k)e^{-ikx}$ et réfléchit l'autre partie $R_r(k)e^{+ikx}$ comme illustré sur la figure 1.3. De même ψ_{+} décrit le phénomène scattering pour une onde e^{+ikx} émise de $-\infty$.

Pour $k^2 < 0$, le spectre de l'opérateur de Schrödinger comprend N valeurs propres négatives notées $-\kappa_n^2$, $n = 1, \dots, N$. Les fonctions propres L^2 -normalisées associées se

comportent asymptotiquement comme suit :

$$\psi_n(x) = c_{ln} e^{-\kappa_n x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.12)$$

$$\psi_n(x) = (-1)^{N-n} c_{rn} e^{+\kappa_n x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad (1.13)$$

c_{ln} et c_{rn} sont appelés constantes de normalisation à gauche et à droite respectivement.

L'analyse spectrale de l'opérateur de Schrödinger introduit deux transformations :

- La transformée scattering directe (DST) qui consiste à calculer, pour un potentiel donné, les données spectrales de $H(V)$ appelées données scattering. Soient les ensembles $\mathcal{S}_l(V)$ et $\mathcal{S}_r(V)$ qui regroupent respectivement les données scattering à gauche et à droite :

$$\mathcal{S}_j(V) := \{R_{\bar{j}}(k), \kappa_n, c_{jn}, n = 1, \dots, N\}, \quad j = l, r, \quad (1.14)$$

où $\bar{j} = r$ si $j = l$ et $\bar{j} = l$ si $j = r$.

- La transformée scattering inverse (IST) qui consiste à reconstruire le potentiel V à partir des données scattering.

Le principe de résolution d'équations d'évolution non linéaires par la transformée scattering est similaire au principe de résolution d'équations linéaires par la transformée de Fourier. La procédure consiste à (figure (1.4)) :

1. Résoudre le problème DST de l'opérateur de Schrödinger associé à la condition initiale V_0 et déterminer ainsi les données scattering $\mathcal{S}_{l(r)}(k, 0)$ à l'instant initial.
2. Déterminer l'évolution en temps des données scattering $\mathcal{S}_{l(r)}(k, t)$. Comme le décrit l'annexe C.1, l'un des avantages de cette méthode consiste en la simplicité des relations décrivant l'évolution en temps des données scattering : les valeurs propres sont invariantes en temps, le coefficient de réflexion et les coefficients de normalisation varient linéairement.
3. Déterminer la solution $V(x, t)$ à partir des données scattering $\mathcal{S}_{l(r)}(k, t)$ en appliquant l'IST.

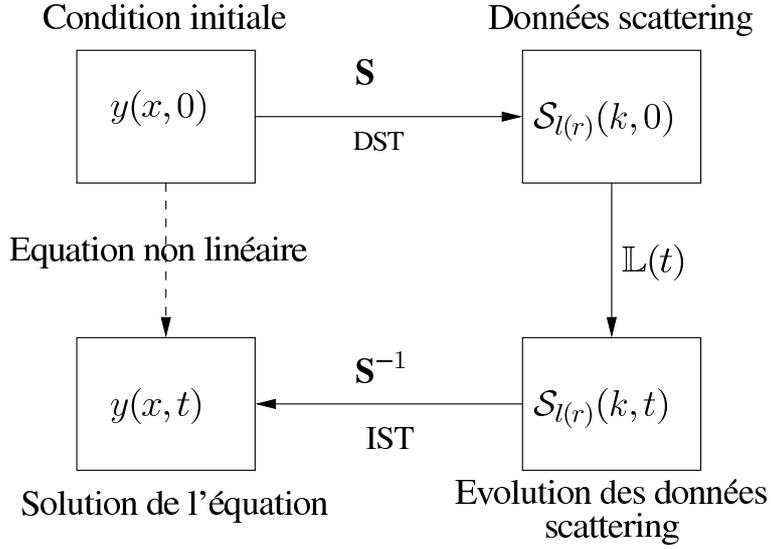


FIG. 1.4 – L'IST pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires

La solution $V(x, t)$ de l'équation de KdV peut s'écrire sous la forme suivante :

$$V(., t) = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbb{L}(t) \circ \mathbf{S}(V(., 0)), \quad (1.15)$$

où \mathbf{S} et \mathbf{S}^{-1} représentent respectivement la DST et l'IST. \mathbb{L} est une transformation linéaire qui permet de déterminer l'évolution en temps des données scattering.

L'IST n'est pas toujours simple à résoudre. Néanmoins, il existe des cas particuliers de potentiels appelés potentiels sans réflexion ($R_{l(r)}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$) pour lesquels le problème se simplifie. Comme nous allons le voir dans le chapitre 2, dans le cas d'un potentiel sans réflexion, le problème scattering est entièrement caractérisé par le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger, composé de valeurs propres négatives. Gardner *et al* [32] ont montré qu'un potentiel sans réflexion s'écrit simplement :

$$V(x, t) = -4 \sum_{n=1}^N \kappa_n \psi_n^2(x, t), \quad (1.16)$$

où $-\kappa_n^2, n = 1, \dots, N$ sont les valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ et $\psi_n, n = 1, \dots, N$ les fonctions propres L^2 -normalisées associées.

Intéressons nous à présent au cas de solitons solutions de l'équation de KdV. Gardner *et al* ont montré qu'un N -soliton est un potentiel sans réflexion et peut être ainsi entièrement caractérisé par le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger en utilisant la formule (1.16). Chaque composante $\kappa_n \psi_n^2$ de la somme (1.16) fait alors référence à un 1-soliton. Une autre expression explicite reliant les solitons aux données scattering a été proposée dans [32] :

$$V(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det (I + A(x, t)), \quad (1.17)$$

où A est une matrice $N \times N$ dont les coefficients sont donnés par :

$$A(x, t) = \left[\frac{c_{lm} c_{ln}}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x + 4(\kappa_m^3 + \kappa_n^3)t} \right]_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (1.18)$$

Chaque couple (κ_n, c_{ln}) caractérise un soliton de vitesse $4\kappa_n^2$ et d'amplitude $2\kappa_n^2$. Le coefficient c_{ln} caractérise la position du soliton. En comparant cette expression du N -soliton à la formule (1.4) - (1.5) précédemment introduite, nous obtenons une relation entre les données spectrales et les coefficients a_n et s_n , $n = 1 \dots, N$:

$$\kappa_n = \frac{a_n}{2}, \quad c_{ln} = \sqrt{a_n e^{a_n s_n}}. \quad (1.19)$$

L'IST peut donc être utilisée pour déterminer le nombre et les propriétés des solitons qui émergent à partir d'une condition initiale.

1.3 Solitons et pression artérielle

Afin de mieux comprendre le fonctionnement du système cardio-vasculaire, différentes études ont été effectuées pour modéliser l'écoulement sanguin. En dépit de la non-linéarité des phénomènes mis en jeu, les études, les plus répandues à ce sujet, font appel à des modèles linéarisés. Seuls quelques modèles non-linéaires ont été proposés. Par exemple, sous l'hypothèse de l'écoulement d'un fluide incompressible dans un vaisseau à parois minces, Yomosa [127] a montré que la propagation des ondes de pression artérielle est régie par une équation de KdV. Plus tard, Paquerot et Remoissenet [87] ont proposé une équation de Boussinesq pour décrire la propagation des ondes de pression artérielle dans de larges artères, sous certaines conditions, cette équation peut

être approchée par une équation de KdV. Par ailleurs, dans [20], à partir d'une équation de Navier-Stokes et en appliquant une méthode de perturbation singulière, une équation de KdV a été proposée pour modéliser uniquement les phénomènes rapides ; les phénomènes lents étant bien décrits pas un modèle windkessel à deux éléments, comme nous allons le rappeler dans le chapitre 6.

Ainsi, les solitons solutions de l'équation de KdV semblent être de bon candidats pour modéliser les ondes de pression artérielle, d'autant plus que l'allure des ondes de pression ressemble fortement à des solitons en interaction. En pratique, il a été remarqué que 2 ou 3-solitons sont suffisants pour décrire convenablement la pression pulsée, chaque soliton représentant une bosse dans le signal de pression [56]. La figure 1.5 montre un 3-soliton en interaction en deux positions x_1 et x_2 , avec $x_1 < x_2$ alors que la figure 1.6 illustre des mesures de pression artérielle au niveau de l'aorte et du doigt respectivement. Notons la ressemblance remarquable entre les solitons en interaction et le signal de pression.

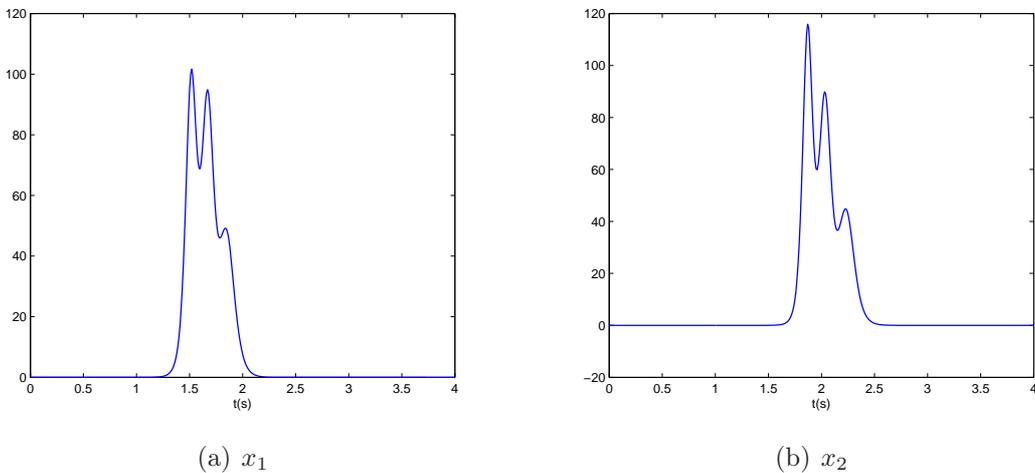


FIG. 1.5 – Un 3-soliton à deux positions x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$)

Par ailleurs, il est connu que lors de sa propagation le long de l'arbre artériel, l'onde de pression subit des changements de forme caractérisés par une augmentation de l'amplitude, accompagnée de fronts raides [72]. Ces deux phénomènes, appelés *Peaking* et *Steepening* respectivement, ont été expliqués par l'existence d'ondes réfléchies qui se

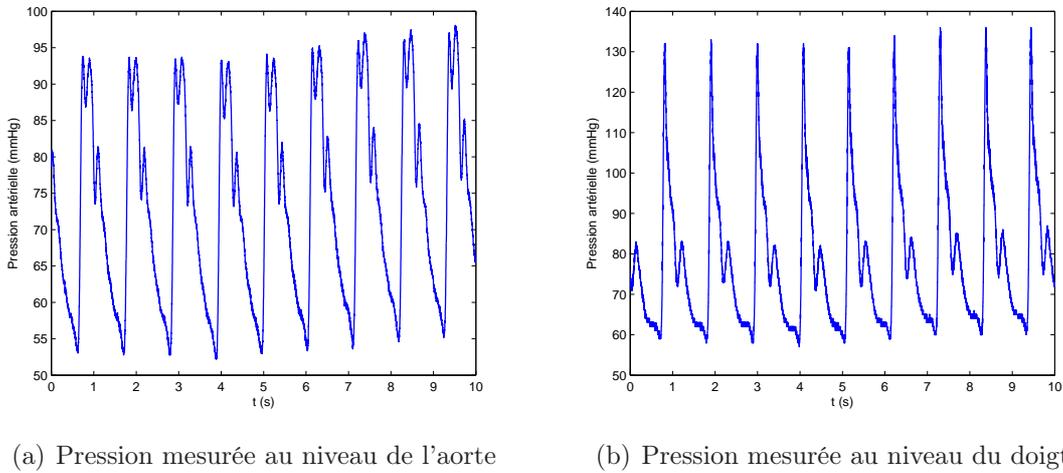


FIG. 1.6 – Les signaux de pression artérielle ressemblent à des solitons en interaction

superposent aux ondes incidentes. Ces réflexions naissent par exemple au niveau des bifurcations. Cette décomposition de la pression artérielle en ondes incidentes et réfléchies est très répandue [6], [65], [88], [91], [92], [93], [108], [121] mais ne constitue pas l'unique manière d'interpréter les phénomènes observés. En effet, les modèles à base de solitons le permettent également. Le *Peaking*, par exemple, résulterait d'une augmentation de la vitesse de l'onde tout au long de l'arbre artériel due aux changements des caractéristiques des vaisseaux (augmentation de la rigidité et diminution de la section). L'amplitude des solitons étant proportionnelle à leur vitesse, l'augmentation de cette dernière engendre le *Peaking* [20], [56].

1.4 Solitons, inverse scattering et analyse de signaux

L'exploitation des solitons et de la transformée scattering dans le domaine du traitement du signal est restée modeste. Parmi les travaux effectués à ce sujet, nous pouvons citer ceux de Singer *et al* [104], [105] et Osborne *et al* [84], [85], [86], [90].

Singer *et al* [104], [105] ont proposé d'explorer les caractéristiques des solitons en tant que signaux. Ils ont proposé des circuits qui génèrent des solitons et qui peuvent être utilisés comme multiplexeur et démultiplexeur dans des applications en communication.

Par ailleurs Osborne et ses co-auteurs ont plutôt exploité le fait que la DST constitue une généralisation d'une transformée de Fourier linéaire à un contexte non-linéaire. Ils se sont inspirés de la transformée de Fourier discrète pour proposer un algorithme récursif qui permet de calculer la DST à partir de séries discrètes temporelles ou spatiales dont la dynamique est décrite approximativement par une équation de KdV [84], [90]; leur objectif étant d'extraire les propriétés spectrales de données non-linéaires. Ils ont montré que cet algorithme pouvait être utilisé pour extraire les composantes solitons, y compris en présence de bruits. Ils ont aussi montré que la DST constituait un filtre non-linéaire pour des données décrites par une équation de KdV. Cette approche a été généralisée au cas périodique et appliquée en océanographie [85], [86].

1.5 Solitons et approximation de fonctions

Une méthode d'approximation de fonctions par solitons a été proposée par Lax et Levermore [63], [64]. Ils ont étudié le problème de dispersion faible de l'équation de KdV en utilisant l'IST et ont montré que, sous certaines conditions sur le potentiel, il est possible de construire une suite de potentiels sans réflexion qui converge vers le potentiel dans $L^2(\mathbb{R})$. Lax et Levermore se sont limités au cas de potentiels négatifs ayant un seul point critique (un seul minimum). Bien qu'ils aient affirmé que cette approche se généralisait au cas de potentiels à plusieurs points critiques, ce résultat n'a, à notre connaissance, jamais été démontré. Cependant, d'autres études ont étendu cette approche aux cas de fonctions positives [116] et de fonctions périodiques [117]. Un résumé sur l'approche de Lax-Levermore est proposé dans l'annexe D.

L'étude du problème de dispersion faible de l'équation de KdV proposée par Lax et Levermore revient à l'étude d'un problème de limite semi-classique ($h \rightarrow 0$) de l'opérateur de Schrödinger dont le problème spectral s'écrit :

$$-h^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - y\psi = \lambda_h \psi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Divisons l'équation (1.20) par h^2 et posons $\chi = \frac{1}{h^2}$ et $\lambda_\chi = \frac{\lambda_h}{h^2}$, nous obtenons alors :

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \chi y \psi = \lambda_\chi \psi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

Le paramètre χ est appelé constante de couplage. Notons que faire tendre h vers 0 revient à faire tendre χ vers l'infini.

Il est à noter que l'approximation d'une fonction par des potentiels sans réflexion (ou solitons) est très intéressante puisqu'elle permet de représenter simplement la fonction à l'aide de $2N$ paramètres uniquement à savoir les κ_n et les c_{ln} , $n = 1, \dots, N$ en utilisant la formule (1.17)-(1.18). Si cette formule est utilisée pour approcher un signal alors ce dernier sera entièrement caractérisé par $2N$ paramètres. Ce qui définit une représentation parcimonieuse du signal, intéressante pour des applications en traitement du signal comme par exemple la compression de données. Néanmoins des difficultés liées au calcul numérique des coefficients c_{ln} rendent cette méthode non applicable pour le moment. En effet, à notre connaissance, il n'existe aucune méthode numérique permettant le calcul de ces coefficients. Une tentative a été néanmoins proposée dans [106].

1.6 Objectifs et motivations de la thèse

Nous avons rappelé dans les paragraphes précédents certaines propriétés des solitons solutions de l'équation de KdV. Nous avons vu notamment que les solitons constituent des modèles intéressants pour décrire les ondes de pression artérielle. Au delà de la ressemblance remarquable entre des solitons en interaction et l'allure des signaux de pression artérielle, les solitons permettent d'expliquer certains phénomènes observés lors de la propagation des ondes de pression tout au long de l'arbre artériel. Il serait ainsi intéressant d'exploiter les solitons pour analyser ces signaux afin de proposer de nouveaux outils de diagnostic clinique : c'est ce qui a constitué la première motivation de la thèse.

L'outil naturel qui se présente à nous est l'utilisation de l'inverse scattering qui permet de résoudre l'équation de KdV. A notre connaissance, peu d'études ont été effectuées sur l'utilisation des solitons et de la transformée scattering dans le domaine du traitement du signal. Par ailleurs, l'approche de Lax-Levermore sur l'approximation de fonctions par des potentiels sans réflexion ou par des solitons, bien qu'intéressante en théorie, nécessite des conditions très restrictives sur la fonction (qui représente le signal à analyser) et présente des difficultés liées au calcul de certains coefficients.

La question que l'on se pose alors est : peut-on développer un algorithme efficace de reconstruction et d'analyse des signaux en utilisant les solitons ou la transformée scattering ?

Nous verrons dans cette thèse, que pour répondre à cette question, nous devons renoncer à l'approximation systématique par solitons et utiliser, en contre partie, une approximation par quantification semi-classique SCSA. L'approximation par solitons ou par potentiels sans réflexion SBSA apparaît alors comme un cas particulier de la SCSA. Nous proposerons également un algorithme permettant la reconstruction de signaux par la SCSA (chapitre 4) et nous verrons que le champ d'application de la SCSA dépasse le cadre de l'analyse des signaux de pression artérielle pour lesquels nous avons obtenu des résultats prometteurs décrits dans les chapitres 6 et 7. En raison du rôle important que joue la transformée scattering dans cette thèse, nous consacrerons le chapitre 2 à rappeler les différents concepts relatifs au problème scattering de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel et qui nous seront utiles.

Première partie

Une nouvelle méthode d'analyse de
signaux basée sur l'analyse spectrale
semi-classique

Chapitre 2

Transformées scattering directe et inverse de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel

2.1 Introduction

La transformée scattering a suscité, ces dernières décennies, un grand intérêt chez les mathématiciens qui ont non seulement proposé des techniques pour résoudre le problème scattering de certains opérateurs mais ont permis de l'exploiter dans différentes applications. Parmi ces applications, la résolution d'équations d'évolution non linéaires telles que l'équation de KdV qui a été la première équation aux dérivées partielles à être résolue par la transformée scattering de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel suite aux travaux de Gardner *et al* [32]. Différentes études ont été effectuées pour la résolution des problèmes DST et IST de l'opérateur de Schrödinger ; parmi lesquelles les travaux de Deift et Trubowitz [23], Faddeev [26], Gel'fand et Levitan [33], Marchenko [69] et d'autres approches basées sur l'analyse fonctionnelle et l'analyse harmonique (voir par exemple le livre de Reed et Simon [94]) et également des approches basées sur l'utilisation de la fonction des différences spectrales (shift spectral function) [8], [9], [37], [37], [35], [36], [126].

Le présent chapitre regroupe de nombreux résultats sur la transformée scattering que nous avons jugé utiles de rappeler pour la compréhension de nos travaux. Ces résultats sont issus de différentes références, en particulier des travaux de Deift et Tru-

bowitz [23], Gesztesy et Holden [34] et d'autres que nous citerons dans le texte. Nous commencerons par fixer les notations utilisées et rappeler quelques définitions notamment la définition des fonctions de Jost, des bound states et des données scattering et nous expliciterons quelques propriétés de ces dernières. Ensuite, nous rappellerons brièvement deux techniques de résolution du problème inverse. Nous porterons un intérêt particulier à la formule de reconstruction de Deift-Trubowitz [23] qui jouera un rôle important dans la SCSA. Nous nous intéresserons également à des relations explicites liant des fonctions du potentiel aux données scattering. Ces relations, appelées formules de traces, nous permettront de démontrer quelques résultats dans le chapitre 3. Nous terminerons le chapitre par un petit rappel sur les potentiels sans réflexion.

2.2 Opérateur de Schrödinger

Soit l'expression différentielle définie par :

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + V, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

où $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ¹ est appelé *potentiel*. Supposons le cas point limite en $\pm\infty$ (voir la définition dans l'annexe A.1). Alors, l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel H dans $L^2(\mathbb{R})$ défini par,

$$H(V)f = Lf, \quad (2.2)$$

$$f \in \mathcal{D}(H(V)) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) \mid g, \frac{dg}{dx} \in AC_{loc}(\mathbb{R}), Lg \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad (2.3)$$

est auto-adjoint [103], [112] ($AC_{loc}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions localement absolument continues dans \mathbb{R}). Le spectre de $H(V)$ est donc réel et composé d'un spectre continu et d'un spectre discret. Son spectre continu comprend des valeurs propres positives, de multiplicité 2 et son spectre discret est composé de valeurs propres négatives, de multiplicité 1 [103], [112].

Considérons un point de référence fixé $x_0 \in \mathbb{R}$ et notons $s_\alpha(z, \cdot)$ et $c_\alpha(z, \cdot)$, avec

¹Les différents espaces utilisés dans cette thèse sont décrits dans les pages de notations

$z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in [0, \pi)$, un système fondamental de solutions de l'équation,

$$(L - z)\psi(z, x) = 0, \quad x \in [x_0, \pm\infty), \quad (2.4)$$

sur les demi-droites $[x_0, +\infty)$ et $(-\infty, x_0]$ respectivement (notées $[x_0, \pm\infty)$). Ces solutions sont caractérisées par des conditions initiales au point de référence x_0 , données par :

$$s_\alpha(z, x_0) = -\frac{dc_\alpha}{dx}(z, x_0) = -\sin(\alpha), \quad (2.5)$$

et

$$c_\alpha(z, x_0) = \frac{ds_\alpha}{dx}(z, x_0) = \cos(\alpha). \quad (2.6)$$

Il existe deux solutions uniques $\psi_{+,\alpha}(z, \cdot)$ et $\psi_{-,\alpha}(z, \cdot)$ de [112] :

$$(L - z)\psi(z, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

telles que,

$$\psi_{\pm,\alpha}(z, \cdot) \in L^2([x_0, \pm\infty)), \quad \sin(\alpha)\frac{d\psi_{\pm,\alpha}}{dx}(z, x_0) + \cos(\alpha)\psi_{\pm,\alpha}(z, x_0) = 1. \quad (2.8)$$

Ces solutions sont appelées *solutions de Weyl* [112] et s'écrivent sous la forme :

$$\psi_{\pm,\alpha}(z, x) = c_\alpha(z, x) + m_{\pm,\alpha}(z, x_0)s_\alpha(z, x). \quad (2.9)$$

où $m_{\pm,\alpha}$ sont appelées *les m-fonctions de Weyl-Titchmarsh* [112] de l'opérateur $H(V)$ sur respectivement les demi-droites $[x_0, +\infty)$ et $(-\infty, x_0]$.

Sauf indication contraire, nous supposons dans ce chapitre que V est une fonction à valeurs réelles qui vérifie :

$$V \in L_1^1(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial^m}{\partial x^m} V \in L^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \quad (2.10)$$

où,

$$L_1^1(\mathbb{R}) = \left\{ V \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |V(x)|(1 + |x|)dx < \infty \right\}. \quad (2.11)$$

$L_1^1(\mathbb{R})$ est souvent appelée classe de *Faddeev* [2], [26]. Avec ces conditions, nous sommes dans le cas point limite et donc nous n'avons pas besoin de conditions aux limites à

l'infini (voir l'annexe A.1). Ainsi, nous considérons l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$H(V)\psi = -\frac{d^2}{dx^2}\psi + V\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(H(V)) = H^2(\mathbb{R}), \quad (2.12)$$

où $H^2(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev d'ordre 2.

Pour un potentiel V nul, l'équation :

$$H(V)\psi = z\psi, \quad (2.13)$$

admet des solutions exponentielles. Si V est non nul mais à support compact, alors les solutions de l'équation (2.13) se comportent comme des exponentielles pour $x \rightarrow \pm\infty$. En fait, l'hypothèse $V \in L^1_1(\mathbb{R})$ permet de retrouver le comportement exponentiel des solutions de l'équation (2.13) en $\pm\infty$, comme indiqué dans l'annexe A.2.

Soit $z = k^2$, $k \in \mathbb{C}^+$, le demi plan complexe supérieur ($\text{Im}(k) \geq 0$). Notons σ , σ_c et σ_d le spectre de $H(V)$, son spectre continu et son spectre discret respectivement. Nous avons $\sigma_c = [0, +\infty)$ et σ_d est composé d'un nombre fini (ou nul) de valeurs propres négatives que l'on note $k^2 = -\kappa_n^2$, $n = 1, \dots, N$ (voir annexe A.3).

2.3 Solutions de Jost, bound states et données scattering

Les solutions de Jost notées f_{\pm} sont définies comme étant les solutions uniques de l'équation intégrale de Schrödinger en $\pm\infty$ (voir annexe A.2) [23], [26], [51], [69] :

$$f_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} - \int_x^{\pm\infty} \frac{\sin[k(x-x')]}{k} V(x') f_{\pm}(k, x') dx', \quad \text{Im}(k) \geq 0, x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Ce sont des fonctions propres de $H(V)$ associées aux valeurs propres k^2 qui vérifient :

$$H(V)f_{\pm}(k, x) = k^2 f_{\pm}(k, x), \quad (2.15)$$

avec,

$$f_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (2.16)$$

$$\frac{df_{\pm}}{dx}(k, x) = \pm ik e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.17)$$

Remarque : Les solutions de Jost f_{\pm} sont proportionnelles aux solutions de Weyl ψ_{\pm} pour $\text{Im}(k) > 0$ et à $\lim_{\text{Im}(k^2) \rightarrow 0} \psi_{\pm}(k^2, x)$ pour k réel [39].

Les coefficients de transmission $T(k)$ et les coefficients de réflexion par la gauche et par la droite $R_l(k)$ et $R_r(k)$ respectivement sont définis en fonction du Wronskien des solutions de Jost comme suit [23], [51] :

$$\frac{1}{T(k)} = \frac{1}{2ik} W(f_-(k, x), f_+(k, x)), \quad k \in \overline{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}, \quad (2.18)$$

$$\frac{R_l(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} W(f_+(k, x), f_-(-k, x)), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2.19)$$

$$\frac{R_r(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} W(f_+(-k, x), f_-(k, x)), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2.20)$$

où $W(f, g) = f(x) \frac{dg(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} g(x)$ représente le Wronskien de f et g et $\overline{\mathbb{C}}^+ = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.

Le comportement en $\mp\infty$ de f_{\pm} se déduit des propriétés du Wronskien (voir annexe A.3) et s'écrit en fonction de $T(k)$ et $R_{l(r)}(k)$:

$$f_{\pm}(k, x) = \frac{1}{T(k)} e^{\pm ikx} + \frac{R_{l(r)}(k)}{T(k)} e^{\mp ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \mp\infty. \quad (2.21)$$

Une interprétation physique de ces équations consiste à considérer la solution $T(k)f_+(k, x)$ comme décrivant une onde plane e^{ikx} émise de $-\infty$, $T(k)e^{ikx}$ est alors transmise vers $+\infty$ et $R_l(k)e^{-ikx}$ est réfléchi. De même pour $T(k)f_-(k)$ qui décrit le phénomène pour une onde émise de $+\infty$.

Des propriétés du Wronskien, nous déduisons les propriétés suivantes de $T(k)$ et $R_{l(r)}(k)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ décrites dans l'annexe A.3 :

$$\overline{T(k)} = T(-k), \quad \overline{R_r(k)} = R_r(-k), \quad \overline{R_l(k)} = R_l(-k), \quad (2.22)$$

$$R_r(k)\overline{T(k)} = -\overline{R_l(k)}T(k), \quad (2.23)$$

$$|T(k)|^2 + |R_l(k)|^2 = 1 = |T(k)|^2 + |R_r(k)|^2. \quad (2.24)$$

L'équation (2.24) s'interprète physiquement par la conservation de l'énergie des ondes transmises et réfléchies. Nous en déduisons que $|T(k)| \leq 1$ et $|R(k)| \leq 1, \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Les coefficients de transmission et de réflexion peuvent également s'écrire sous forme d'une intégrale dépendant du potentiel et des solutions de Jost (annexe A.3) :

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} V(x) f_{\mp}(k, x) dx, \quad (2.25)$$

et

$$\frac{R_{l(r)}(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} V(x) f_{\pm}(k, x) dx. \quad (2.26)$$

Intéressons nous à présent aux valeurs propres négatives de $H(V)$ notées $k^2 = -\kappa_n^2, n = 1, \dots, N, \kappa_1 \geq \kappa_2 \dots \geq \kappa_N$. Soient $\psi_n, n = 1, \dots, N$ les fonctions propres L^2 -normalisées associées aux valeurs propres $-\kappa_n^2, n = 1, \dots, N$. Ces fonctions sont appelées *bound states* et vérifient :

$$H(V)\psi_n(x) = -\kappa_n^2\psi_n(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.27)$$

Nous rappelons que $-i\kappa_n, n = 1, \dots, N$ sont les pôles de $T(k)$ et que les résidus de $T(k)$ aux points $k = i\kappa_n, n = 1, \dots, N$ sont donnés par (voir annexe A.3) :

$$\text{Res}_{i\kappa_n}(T(k)) = i \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_+(i\kappa_n, x) f_-(i\kappa_n, x) dx \right]^{-1}. \quad (2.28)$$

Sachant que les valeurs propres $-\kappa_n^2, n = 1, \dots, N$ sont de multiplicité 1, $f_+(i\kappa_n, x)$ et $f_-(i\kappa_n, x)$ sont proportionnelles. Notons γ_n le coefficient de proportionnalité entre $f_+(i\kappa_n, x)$ et $f_-(i\kappa_n, x)$:

$$\frac{f_+(i\kappa_n, x)}{f_-(i\kappa_n, x)} = \gamma_n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \gamma_n \neq 0. \quad (2.29)$$

Nous réécrivons alors les résidus de $T(k)$ aux points $k = i\kappa_n, n = 1, \dots, N$ en fonction

de γ_n , en se rappelant que $f_{\pm}(i\kappa_n, x) \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\text{Res}_{i\kappa_n}(T(k)) = i\gamma_n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_n, x)|^2 dx \right]^{-1} = \frac{i}{\gamma_n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f_-(i\kappa_n, x)|^2 dx \right]^{-1}. \quad (2.30)$$

Notons :

$$c_{ln} := \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_n, x)|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad c_{rn} := \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f_-(i\kappa_n, x)|^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.31)$$

Il est alors facile de vérifier que :

$$\psi_n(x) = c_{ln} f_+(i\kappa_n, x) = (-1)^{N-n} c_{rn} f_-(i\kappa_n, x), \quad (2.32)$$

c_{ln}, c_{rn} sont appelées *constantes de normalisation* et sont reliées par $c_{rn} = (-1)^{N-n} \gamma_n c_{ln}$.

La matrice scattering $S(k)$ est définie par :

$$S(k) := \begin{bmatrix} T(k) & R_r(k) \\ R_l(k) & T(k) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.33)$$

A partir des propriétés de $T(k)$ et $R_{l(r)}(k)$, on montre que $S(k)$ est unitaire. Notons également que la connaissance de l'un des coefficients de réflexion et des valeurs propres négatives suffit pour déterminer $S(k)$ sachant que :

$$T(k) = \left(\prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n} \right) e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1-|R_j(\xi)|^2)}{\xi-k} d\xi}, \quad \text{Im}(k) > 0, \quad j = l, r, \quad (2.34)$$

$$T(k) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} T(k + i\epsilon), \quad \text{Im}(k) = 0, \quad (2.35)$$

$$R_{\bar{j}}(k) = -\frac{\overline{R_j(k)} T(k)}{T(k)}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad j = l, r. \quad (2.36)$$

L'analyse spectrale de l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ introduit ainsi un ensemble de données spectrales appelées *données scattering*. Soient les ensembles $\mathcal{S}_l(V)$ et $\mathcal{S}_r(V)$ qui regroupent respectivement les données scattering à gauche et à droite :

$$\mathcal{S}_j(V) := \{R_{\bar{j}}(k), \kappa_n, c_{jn}, \quad n = 1, \dots, N\}, \quad j = l, r. \quad (2.37)$$

A chaque potentiel V correspond un ensemble unique de données scattering. La détermination des données scattering et de leurs propriétés pour un potentiel donné constitue la DST. L'IST consiste alors à reconstruire le potentiel connaissant $\mathcal{S}_l(V)$ ou $\mathcal{S}_r(V)$. Ce problème fait objet de la section suivante.

Remarque : Notons qu'en absence de bound states, seul l'un des coefficients de réflexion suffit pour déterminer la matrice scattering $S(k)$ et donc pour reconstruire le potentiel V . Alors qu'en présence de bound states, la connaissance des valeurs propres négatives et des coefficients de normalisation, en plus du coefficient de réflexion, est nécessaire [23].

2.4 Transformée scattering inverse

L'IST consiste à reconstruire le potentiel V de l'opérateur de Schrödinger à partir des données scattering. La reconstruction unique d'un potentiel particulier nécessite l'identification des conditions sur les données scattering associées à ce potentiel. C'est ce qu'on appelle *la caractérisation* du problème inverse. La caractérisation de la classe de Faddeev a fait objet des études de Faddeev [26] et de Deift et Trubowitz [23]. Ces derniers ont corrigé certains aspects de la caractérisation de Faddeev. D'autres classes de potentiels ont été également étudiées, par exemple les potentiels dans $L^1_2(\mathbb{R}) = \{V \mid \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^2)|V(x)|dx\}$ étudiés par Deift et Trubowitz [23] et les potentiels périodiques considérés par Dubrovin, Matveev et Novikov [25] ainsi que Its et Matveev [46]. Pour plus de détails sur les différentes méthodes de caractérisation du problème inverse et de reconstruction du potentiel, nous invitons le lecteur à consulter la littérature abondante à ce sujet, par exemple le livre de Chadan et Sabatier [16] et celui de Marchenko [69]. Dans ce qui suit, nous allons rappeler deux méthodes de résolution de l'IST. Il s'agit de la méthode de Gel'fand Levitan Marchenko [33], [69] et de l'approche de Deift et Trubowitz [23].

2.4.1 Méthode de Gel'fand Levitan Marchenko

Cette méthode propose de reconstruire le potentiel à partir des données scattering à gauche (resp. à droite) en résolvant une équation intégrale dite de Gel'fand Levitan Marchenko à gauche (resp. à droite). Cette technique passe par trois étapes que nous rappelons brièvement :

1. Déterminer les fonctions B_{\pm} telles que :

$$B_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} R_{r(l)}(k) dk + \sum_{n=1}^N c_{l(r)n}^2 e^{\mp \kappa_n x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

Les fonctions B_{\pm} sont deux fonctions réelles qui dépendent des données scattering $R_{l(r)}(k)$, κ_n et $c_{l(r)n}$, $n = 1, \dots, N$. Le premier terme dans l'expression de $B_{\pm}(x)$ représente la transformée de Fourier inverse du coefficient de réflexion caractérisant la contribution du spectre continu. Le second terme décrit la contribution du spectre discret.

2. Résoudre l'équation intégrale de Gel'fand Levitan Marchenko à gauche ou à droite dont les inconnues sont $K_{+}(x, z)$ et $K_{-}(x, z)$:

$$K_{\pm}(x, z) + B_{\pm}(x + z) \mp \int_{\pm\infty}^x K_{\pm}(x, z') B_{\pm}(z + z') dz' = 0, \quad (2.39)$$

$z > x$ pour l'équation à gauche et $z < x$ pour l'équation à droite. Ici x est un paramètre.

3. Calculer le potentiel V en utilisant la formule :

$$V(x) = \mp 2 \frac{\partial K_{\pm}}{\partial x}(x, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.40)$$

Les solutions de Jost sont données en fonction de la solution de l'équation de Gel'fand Levitan Marchenko par,

$$f_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} \mp \int_{\pm\infty}^x K_{\pm}(x, z) e^{\pm ikz} dz, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.41)$$

Cette méthode simplifie le problème inverse car elle permet de passer de la résolution d'un problème non-linéaire à la résolution d'une équation linéaire qui est l'équation de Gel'fand Levitan Marchenko. Cette dernière n'est cependant pas simple à résoudre dans tous les cas.

2.4.2 Formule de reconstruction de Deift-Trubowitz

Deift et Trubowitz [23] ont montré que le potentiel V de l'opérateur de Schrödinger peut être reconstruit par une formule explicite décrite dans le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. [23] Soit $V \in L^1_+(\mathbb{R})$, alors V peut être reconstruit, de manière unique, par la formule suivante :

$$V(x) = -4 \sum_{n=1}^N \kappa_n \psi_n^2(x) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} k R_{r(l)}(k) f_{\pm}^2(k, x) dk \right) da, \quad pp. \quad (2.42)$$

- Si en plus $k R_{r(l)}(k) \in L^1(\mathbb{R})$ alors :

$$V(x) = -4 \sum_{n=1}^N \kappa_n \psi_n^2(x) + \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)}(k) f_{\pm}^2(k, x) dk, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

Cette formule est souvent appelée *formule de trace de Deift-Trubowitz*. Elle se décompose en la somme de deux termes, un terme donné par la somme sur n de $\kappa_n \psi_n^2$, qui caractérise le spectre discret et un terme qui caractérise la contribution du spectre continu et qui est donné par une intégrale sur k de $k R_{r(l)} f_{\pm}^2(k, x)$. La condition $k R(k) \in L^1(\mathbb{R})$ peut être remplacée par une condition sur le potentiel à savoir $\frac{\partial^m V}{\partial x^m} \in L^1(\mathbb{R})$, $m = 1, 2$ [23]. En effet, la régularité sur le potentiel entraîne la régularité sur les coefficients de réflexion $R_{r(l)}(k)$. Ainsi si $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'espace de Schwartz ² alors $R_{l(r)}(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quelques éléments de la preuve de la formule de Deift-Trubowitz [23] sont repris dans l'annexe B.1. Une généralisation de cette formule a été démontrée par Gesztesy et Holden dans [34] proposant une infinité de formules de traces faisant intervenir des polynômes du potentiel et de ses dérivées par rapport à x comme le décrit la section suivante. Il est à noter que la formule de Deift-Trubowitz a été introduite dans [48] pour exprimer le potentiel dans la base des carrés des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger et de leurs dérivées [78], [79].

2.5 Formules de traces et invariants

Nous présentons dans cette section une généralisation de la formule de Deift-Trubowitz (2.43) [34] :

²Espace des fonctions indéfiniment dérivables, de dérivées à décroissance rapide.

Théorème 2.5.1. [34] *Soit V un potentiel qui vérifie :*

$$V \in L^1_1(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial V^m}{\partial x^m} \in L^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.44)$$

alors, pour $m = 0, 1, \dots$ et $x \in \mathbb{R}$, on a les formules suivantes :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} (2ik)^{2m+1} T(k) f_+(k, x) f_-(k, x) dk + \frac{\pi}{2} \omega_{2m+2}(x) = 2^{2m+2} \pi \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2m+1} \psi_n^2(x), \quad (2.45)$$

et

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} (2ik)^{2m} \left[T(k) f_+(k, x) f_-(k, x) - \sum_{l=0}^m \frac{\omega_{2l}(x)}{(2ik)^{2l}} \right] dk = -2^{2m+1} \pi \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2m} \psi_n^2(x), \quad (2.46)$$

où ω_{2m} sont des polynômes en V et leurs dérivées successives par rapport à x et sont définis par la formule de récurrence (B.46) donnée dans l'annexe B.2.

Les formules (2.45) se récrivent en fonction des coefficients de réflexion comme suit :

$$\omega_{2m+2}(x) = 2^{2m+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2m+1} \psi_n^2(x) - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (2ik)^{2m+1} R_{r(l)}(k) f_{\pm}^2(k, x) dk, \quad (2.47)$$

$m = 0, 1, \dots, x \in \mathbb{R}$.

Remarquons que pour $m = 0$, (2.47) est la formule de Deift-Trubowitz (2.43) et que pour $m = 1$, nous obtenons une expression de $V^2(x)$:

$$V^2(x) = \frac{16}{3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^3 \psi_n^2(x) + \frac{8i}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^3 R_{r(l)}(k) f_{\pm}^2(k, x) dk - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.48)$$

L'annexe B.2 reprend la démonstration de Geztesy et Holden [34].

Soit le théorème suivant :

Théorème 2.5.2. [34] Soit $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors pour $m = 0, 1, \dots$, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{2m+2}(x) dx = 2^{2m+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2m+1} + (-1)^m \frac{2^{2m+2}}{\pi} (2m+1) \int_{-\infty}^{+\infty} k^{2m} \ln(|T(k)|) dk. \quad (2.49)$$

Cette formule fait intervenir les moments de la fonction $\ln(|T(k)|)$ ainsi que les puissances des κ_n . Quelques éléments de la preuve sont rappelés dans l'annexe B.3. Notons que les formules (2.49) sont reliées aux invariants en temps de l'équation de KdV rappelés dans l'annexe C.2 [13], [34], [129]. Ainsi, pour $m = 0$ et dans le cas où le potentiel évolue selon une équation de KdV, nous obtenons l'expression du premier invariant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx = I_0(V) = -4 \sum_{n=1}^N \kappa_n - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(|T(k)|) dk. \quad (2.50)$$

Pour $m = 1$, nous obtenons la deuxième formule de trace connue sous le nom de *formule de Buslaev-Faddeev-Zakharov* et qui correspond au deuxième invariant en temps de l'équation de KdV [129] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V^2(x) dx = I_1(V) = \frac{16}{3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^3 - \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \ln(|T(k)|) dk. \quad (2.51)$$

Dans cette thèse, nous appellerons *invariants* les quantités $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{2m+2}(x) dx$.

2.6 Potentiels sans réflexion

L'IST n'est pas en général simple à résoudre, en particulier en raison des difficultés de calcul des caractéristiques du spectre continu (voir paragraphe 2.4). Supposons $R_{l(r)}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$, alors la fonction B_{\pm} (équation (2.38)) ne dépend plus que du spectre discret :

$$B_{\pm}(x) = \sum_{n=1}^N c_{l(r)n}^2 e^{\mp \kappa_n x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.52)$$

La contribution du spectre continu dans la reconstruction du potentiel est donc nulle. L'équation de Gel'fand Levitan Marchenko se simplifie et le potentiel s'exprime en

fonction du spectre discret uniquement [32], [49]. Ce cas particulier de potentiels pour lequel $R_{l(r)}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$ est appelé *potentiel sans réflexion* et joue un rôle important dans la théorie scattering [32], [49], [70].

2.6.1 Définition et propriétés

Définition 2.6.1. *Un potentiel sans réflexion de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel est tel que le coefficient de réflexion $R_{l(r)}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$.*

Pour illustrer cette définition, rappelons que le potentiel de l'équation de Schrödinger V constitue un obstacle pour une onde qui se propage, une partie de cette onde est alors transmise et l'autre partie est réfléchiée. Si le potentiel est sans réflexion, la réflexion sera absente et l'onde sera entièrement transmise, c'est comme si le potentiel était complètement transparent.

Notons que si le coefficient de réflexion s'annule dans la formule de Deift-Trubowitz (2.43), alors le potentiel s'exprime simplement en fonction du spectre discret :

Théorème 2.6.1. [32] *Si V est un potentiel sans réflexion de l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ alors V s'écrit :*

$$V(x) = -4 \sum_{n=1}^N \kappa_n \psi_n^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.53)$$

où $-\kappa_n^2$ et $\psi_n, n = 1, \dots, N$ représentent respectivement les valeurs propres négatives de $H(V)$ et les fonctions propres L^2 -normalisées associées.

Ce théorème a été introduit initialement par Gardner *et al* [32] qui ont aussi proposé d'exprimer le potentiel en fonction de $2N$ paramètres uniquement, à savoir les κ_n et les $c_{l(r)n}, n = 1, \dots, N$ comme suit :

Théorème 2.6.2. *Un potentiel sans réflexion V de l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ s'écrit en fonction des κ_n et $c_{ln}, n = 1, \dots, N$:*

$$V(x) = -2 \frac{\partial^2 (\ln (\det(I + A)))}{\partial x^2}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.54)$$

où A est une matrice dont les coefficients sont donnés par :

$$A = \left[\frac{c_{lm}c_{ln}}{\kappa_m + \kappa_n} e^{(\kappa_m + \kappa_n)x} \right]_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N. \quad (2.55)$$

Comme décrit dans le chapitre 1, la formule (2.54) définit un N -soliton, solution de l'équation de KdV, à l'instant $t = 0$.

2.6.2 Un exemple de potentiels sans réflexion

Dans ce paragraphe, nous introduisons un exemple de potentiels de l'opérateur de Schrödinger bien connu en théorie [51], [59], [60], [81]. Il s'agit de :

$$V(x) = V_0 \operatorname{sech}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad V_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.56)$$

Ce potentiel est connu en mécanique quantique sous le nom de potentiel de *Pöschl-Teller* [81]. Dans le cas où $V_0 < 0$, il existe au moins une valeur propre négative de $H(V)$ [51]. Si $V_0 = -2$, V définit un 1-soliton solution stationnaire de l'équation de KdV (4.31).

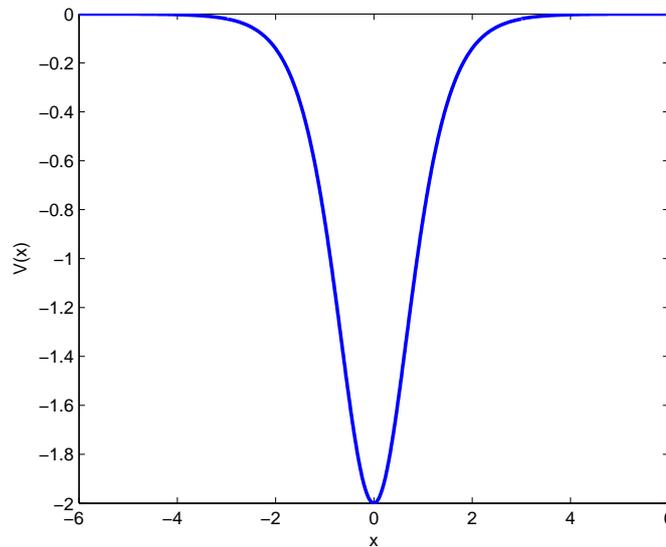


FIG. 2.1 – Représentation de $V(x) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$

Le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion par la droite associés à l'opérateur de Schrödinger $H(V)$, avec V donné par (2.56), sont respectivement donnés par les formules suivantes, pour $k \in \mathbb{R}$:

$$T(k) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - ik + \sqrt{\frac{1}{4} - V_0})\Gamma(\frac{1}{2} - ik - \sqrt{\frac{1}{4} - V_0})}{\Gamma(1 - ik)\Gamma(-ik)}, \quad (2.57)$$

$$R_r(k) = \cos(\pi\sqrt{\frac{1}{4} - V_0})\Gamma(\frac{1}{2} - ik + \sqrt{\frac{1}{4} - V_0})\Gamma(\frac{1}{2} - ik - \sqrt{\frac{1}{4} - V_0})\frac{\Gamma(ik)}{\pi\Gamma(-ik)}, \quad (2.58)$$

où Γ représente la fonction Gamma [51], [59]. Remarquons que $R_r(k)$ est nul pour tout k , i.e le potentiel est sans réflexion, si et seulement si :

$$V_0 = -N(N + 1), \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (2.59)$$

Dans ce cas, le spectre discret de $H(V)$ est composé de N valeurs propres négatives données par $-N^2, -(N - 1)^2, \dots, -4, -1$ [60], [81].

2.7 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre quelques définitions et concepts relatifs à la transformée scattering de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel. Après avoir introduit les définitions utiles et fixé les notations utilisées, nous nous sommes intéressés au problème scattering inverse en présentant deux techniques de reconstruction du potentiel. Nous avons en particulier présenté la formule de reconstruction de Deift-Trubowitz. Nous nous sommes ensuite intéressés aux formules de traces et aux invariants qui joueront un rôle important dans cette thèse. Pour terminer, nous avons rappelé la définition et les propriétés d'un potentiel sans réflexion.

Chapitre 3

Analyse spectrale semi-classique de signaux : SCSA

3.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre une nouvelle méthode d'analyse de signaux basée sur une analyse spectrale semi-classique SCSA. Le principe de cette méthode consiste à interpréter le signal comme un puits de potentiel pour lequel sont associées une suite de valeurs représentatives $(\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi})$ résultant de la résolution spectrale de l'opérateur de Schrödinger mais qui ne ressortent pas des méthodes usuelles d'échantillonnage : valeurs aux points de discrétisation ou valeurs extrémales. Elles peuvent par ailleurs s'expliquer par une approche semi-classique : il s'agit de la quantification de Bohr Sommerfeld (voir par exemple [125]). Dans ce contexte, nous allons introduire trois formules d'approximation :

- y_χ qui dépend de N_χ paramètres et N_χ fonctions et qui est simple à calculer numériquement. C'est d'ailleurs cette formule que nous considérons dans la thèse.
- y_χ^s qui consiste en une approximation par solitons (ou par potentiels sans réflexion) notée SBSA. Cette formule dépend de $2N_\chi$ paramètres uniquement, ce qui peut être très avantageux en pratique. Elle est cependant difficile à calculer numériquement. La SBSA est en réalité un cas particulier de la SCSA.
- y_χ^{KS} qui converge quand le petit paramètre de l'opérateur de Schrödinger tend vers 0 (ou chez nous quand la constante de couplage χ tend vers l'infini). Cependant cette formule est lourde à mettre en œuvre.

Nous commencerons par définir la SCSA en explicitant le cas particulier de l'analyse par potentiels sans réflexion (ou par solitons). Nous nous intéresserons ensuite aux propriétés de la SCSA et notamment à ses propriétés de convergence quand $\chi \rightarrow +\infty$.

3.2 Définition de la SCSA et cas particulier des potentiels sans réflexion

Soit l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ défini comme dans (2.12) et soit y tel que :

$$y \in L^1_1(\mathbb{R}), \quad y(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^m y}{\partial x^m} \in L^1(\mathbb{R}), \quad m = 1, 2, \quad (3.1)$$

alors $H(-\chi y)$ est défini sur $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $\chi > 0$:

$$H(-\chi y) = -\frac{d^2}{dx^2} - \chi y, \quad \mathcal{D}(H(-\chi y)) = H^2(\mathbb{R}). \quad (3.2)$$

Il est à noter que sous les hypothèses (3.1), il existe un nombre N_χ fini ([23], théorème 1) et non nul ([51], corollaire 2.4.4) de valeurs propres négatives de l'opérateur $H(-\chi y)$. Notons $-\kappa_{n\chi}^2$ les valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$ avec $\kappa_{n\chi} > 0$ et $\kappa_{1\chi} > \kappa_{2\chi} > \dots > \kappa_{N_\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$. Soient $\psi_{n\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ les fonctions propres L^2 -normalisées associées à $-\kappa_{n\chi}^2$, $n = 1, \dots, N_\chi$. Soient $f_{\pm\chi}$, $R_{l(r)\chi}(k)$ et $T_\chi(k)$ les solutions de Jost à gauche et à droite, les coefficients de réflexion par la gauche et par la droite et le coefficient de transmission respectivement.

Nous définissons la SCSA par :

Définition 3.2.1. *Soient y une fonction vérifiant les hypothèses (3.1) et χ un paramètre positif, alors l'approximation par SCSA est définie par :*

$$y_\chi(x) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

où $-\kappa_{n\chi}^2$ et $\psi_{n\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ sont respectivement les valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$ et les fonctions propres L^2 -normalisées associées.

Un cas particulier de la SCSA est l'approximation par potentiels sans réflexion SBSA qui est définie par :

Définition 3.2.2. Soient y une fonction vérifiant les hypothèses (3.1) et χ un paramètre positif, alors l'approximation par SBSA est définie par :

$$y_\chi^s = -\frac{1}{\chi} \mathbf{S}^{-1} \circ \Pi_d \circ \mathbf{S}(-\chi y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

où \mathbf{S} et \mathbf{S}^{-1} sont les transformées scattering directe et inverse respectivement. Π_d est le projecteur sur le spectre discret de l'opérateur de Schrödinger.

y_χ^s s'écrit également sous la forme suivante :

$$y_\chi^s(x) = \frac{2}{\chi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(\det(I + A_\chi))(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

avec $A_\chi(x)$ une matrice $N_\chi \times N_\chi$ dont les coefficients sont donnés par :

$$A_\chi(x) = \left[\frac{c_{ln\chi} c_{ln\chi}}{\kappa_{m\chi} + \kappa_{n\chi}} e^{-(\kappa_{m\chi} + \kappa_{n\chi})x} \right]_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N_\chi, \quad (3.6)$$

où $-\kappa_{n\chi}^2$ et $c_{ln\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$ sont respectivement les valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$ et les constantes de normalisation associées.

Notons que dans le cas particulier où $-\chi y$ est un potentiel sans réflexion alors $y_\chi = y_\chi^s$ [32]. Ainsi, les deux approximations SCSA et SBSA coïncident. La SBSA peut s'interpréter par une superposition de solitons et s'avère intéressante pour des applications en traitement du signal par exemple pour la décomposition d'une onde progressive en une superposition de solitons. Elle permet dans ce cas de définir une méthode d'analyse temps-vitesse de manière analogue aux méthodes d'analyse temps-fréquence (distribution de Wigner-Ville) et temps-échelles (ondelettes). En effet, étant donné que chaque soliton est caractérisé par sa vitesse qui est déterminée par les valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$, l'onde pourrait être séparée en ses parties rapides et lentes (filtrage) comme nous le verrons dans le chapitre 6 dans le cas de la pression artérielle.

En outre, la formule (3.5)-(3.6) s'exprime à l'aide de $2N_\chi$ paramètres uniquement $(\kappa_{n\chi}, c_{ln\chi})$, $n = 1, \dots, N_\chi$, ce qui définit une représentation parcimonieuse du signal intéressante pour des applications en traitement du signal comme par exemple la compression de données. Cependant, cette représentation n'est pas directement exploitable en raison de difficultés liées au calcul numérique des coefficients $c_{ln\chi}$, $n = 1, \dots, N_\chi$. Des travaux sont en cours sur le calcul numérique de ces coefficients et une première tentative a été proposée dans [106]. Ainsi, nous nous sommes limités dans la thèse à l'utilisation de la formule (3.3), qui est plus simple à calculer.

3.3 Comportement du spectre discret en fonction de χ

Nous commençons par énoncer deux résultats qui seront fondamentaux dans notre analyse :

Théorème 3.3.1. [44] Soit $y \in C^\infty(\mathbb{R})$, avec $y(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que pour un $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $\min_{\mathbb{R}}(-y + \gamma_0) > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ tel que $|\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}| \leq C_\alpha(-y + \gamma_0)$. Soit $\chi > 0$ et $\lambda \in]-\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}, 0]$, notons S_γ les moyennes de Riesz des valeurs $-\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$ inférieures à λ :

$$S_\gamma(\chi, \lambda) = \sum_{-\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi} \leq \lambda} \left(\lambda + \frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi} \right)^\gamma, \quad \gamma \geq 0. \quad (3.7)$$

Alors pour $0 \leq \gamma \leq 1$, nous avons :

$$S_\gamma(\chi, \lambda) = \sqrt{\chi} \left(L_\gamma^{cl} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda + y(x)|_+^{\gamma+\frac{1}{2}} dx + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)^{1+\gamma}\right) \right), \quad (3.8)$$

où $|V|_+$ désigne la partie positive de V et L_γ^{cl} , connue sous le nom de constante classique, est donnée par :

$$L_\gamma^{cl} = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma + \frac{3}{2})}. \quad (3.9)$$

Dans le cas $\lambda = 0$, les estimations fines de type Lieb-Thirring ont conduit à étendre

les formules du théorème 3.3.1 à des potentiels $L^p(\mathbb{R})$. Nous avons donc le lemme suivant :

Lemme 3.3.1. [61] Pour $y \in L^{\gamma+\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, $y(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\gamma \geq 0$, on a :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{S_\gamma(\chi, 0)}{\sqrt{\chi}} = L_\gamma^{cl} \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)^{\gamma+\frac{1}{2}} dx, \quad (3.10)$$

où L_γ^{cl} est la constante classique donnée par (3.9) pour tout $\gamma \geq 0$.

La première proposition que nous énonçons concerne les propriétés du nombre N_χ de valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$:

Proposition 3.3.1. Soit y une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (3.1). Alors,

- i) Le nombre N_χ de valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$ est une fonction croissante de χ .
- ii) Si de plus $y \in L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{N_\chi}{\sqrt{\chi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{y(x)} dx, \quad (3.11)$$

Preuve : i) Pour montrer cette propriété, utilisons le lemme suivant :

Lemme 3.3.2. [10][94] Pour $\lambda \leq 0$, soit $N_\lambda(-\chi y)$, le nombre de valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$ inférieures à λ . Soient V et W deux potentiels de l'opérateur de Schrödinger tels que $V \leq W$, alors :

$$N_\lambda(W) \leq N_\lambda(V), \quad \forall \lambda \leq 0. \quad (3.12)$$

Prenons :

$$W = -\chi_1 y, \quad V = -\chi_2 y, \quad \text{avec } \chi_1 \leq \chi_2. \quad (3.13)$$

Nous obtenons alors pour $\lambda = 0$:

$$N_0(-\chi_1 y) \leq N_0(-\chi_2 y), \quad (3.14)$$

or nous avons : $N_0(-\chi_j y) = N_{\chi_j}$, $j = 1, 2$, d'où le résultat.

ii) Cette propriété résulte du lemme 3.3.1 en prenant $\gamma = 0$ dans (3.10). □

Remarque : T. Kato ([47], page 388) a analysé le spectre de l'opérateur de Schrödinger $H(\chi q)$ associé à un potentiel dépendant linéairement du paramètre χ . Pour un puits de potentiel carré q de profondeur -1 , le nombre N_χ de valeurs propres négatives augmente avec la profondeur du puits de potentiel χq . En changeant χ , les valeurs propres se déplacent du spectre discret vers le spectre continu et vice-versa. La situation est quasiment similaire pour la SCSA. Kato [47] montre aussi dans son étude que les valeurs propres $-\kappa_{n\chi}^2$, $n = 1, \dots, N_\chi$ se présentent sous forme de fonctions décroissantes de χ et ont une multiplicité constante.

Intéressons nous à présent aux valeurs propres négatives $-\kappa_{n\chi}^2$, $n = 1, \dots, N_\chi$ de $H(-\chi y)$. En réalité, ce sont plutôt les valeurs $\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$ qui nous intéressent comme l'illustre la proposition suivante :

Proposition 3.3.2. *i) Soit y une fonction à valeurs réelles vérifiant les hypothèses (3.1). Soit $\chi > 0$, soient $-\kappa_{n\chi}^2$, $n = 1, \dots, N_\chi$ avec $-\kappa_{1\chi}^2 < -\kappa_{2\chi}^2 < \dots < 0$ les valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$. Supposons que $0 \leq y(x) \leq y_{max}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ alors,*

$$\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi} \leq y_{max}, \quad n = 1, \dots, N_\chi. \quad (3.15)$$

ii) Si de plus $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que pour un $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $\min_{\mathbb{R}}(-y + \gamma_0) > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ tel que $|\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}| \leq C_\alpha(-y + \gamma_0)$, alors toute valeur régulière de y est point d'accumulation de l'ensemble $(\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}, \chi > 0, n = 1, \dots, N_\chi)$ (v est une valeur régulière si $0 < v < y_{max}$ et si $y(x) = v$ alors $|\frac{dy(x)}{dx}| > 0$).

Preuve : i) Soit le problème spectral de l'opérateur de Schrödinger :

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} - \chi y \psi = \lambda \psi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Soit $-\kappa_{n\chi}^2$ une valeur propre de $H(-\chi y)$ et $\psi_{n\chi}$ la fonction propre L^2 -normalisée

associée à $-\kappa_{n\chi}^2$:

$$-\frac{d^2\psi_{n\chi}}{dx^2} - \chi y \psi_{n\chi} = -\kappa_{n\chi}^2 \psi_{n\chi}. \quad (3.17)$$

Multiplions l'équation précédente par $\psi_{n\chi}$,

$$-\frac{d^2\psi_{n\chi}}{dx^2} \psi_{n\chi} - \chi y \psi_{n\chi}^2 = -\kappa_{n\chi}^2 \psi_{n\chi}^2. \quad (3.18)$$

En intégrant sur \mathbb{R} , nous obtenons :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\psi_{n\chi}}{dx^2} \psi_{n\chi} dx - \chi \int_{-\infty}^{+\infty} y \psi_{n\chi}^2 dx = -\kappa_{n\chi}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n\chi}^2 dx. \quad (3.19)$$

En intégrant par parties le premier terme de l'équation (3.19) et sachant $\psi_{n\chi}$ normalisée dans $L^2(\mathbb{R})$ nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\psi_{n\chi}}{dx} \right)^2 dx + \kappa_{n\chi}^2 = \chi \int_{-\infty}^{+\infty} y \psi_{n\chi}^2 dx. \quad (3.20)$$

Tous les termes de (3.20) sont positifs, nous obtenons donc :

$$\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} y \psi_{n\chi}^2 dx \leq y_{max} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n\chi}^2 dx, \quad (3.21)$$

d'où (3.15).

- ii) Montrons qu'une valeur régulière y est un point d'accumulation de l'ensemble $(\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}, \chi > 0, n = 1, \dots, N_\chi)$. Pour cela, prenons $\gamma = 0$ dans l'expression des moyennes de Riesz introduite par (3.7). Notons que $S_0(\chi, \lambda)$ représente le nombre de valeurs $-\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$ inférieures à λ . En remplaçant γ par 0 dans (3.8), nous obtenons :

$$S_0(\chi, \lambda) = \sqrt{\chi} L_0^d \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|\lambda + y(x)|_+} dx + O(1). \quad (3.22)$$

Supposons qu'il existe une valeur régulière y_0 de y qui ne soit pas un point d'accumulation de l'ensemble $(\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}, \chi > 0, n = 1, \dots, N_\chi)$. Il existe alors un voisinage $V(y_0)$ de y_0 et un χ_0 suffisamment grand tel que $\forall \chi > \chi_0$, $V(y_0)$ ne contient pas d'éléments de cet ensemble.

Par ailleurs, nous pouvons choisir $V(y_0)$ assez petit de sorte que :

$$\inf\left\{\left|\frac{dy(x)}{dx}\right|, \text{ pour } x|y(x) \in V(y_0)\right\} = c > 0. \quad (3.23)$$

Nous pouvons donc prendre $V(y_0) = [y_1, y_2[$, avec y_1 et y_2 des valeurs régulières et $0 < y_1 < y_2$.

Pour tout $\chi > \chi_0$, la différence $S_0(\chi, -y_1) - S_0(\chi, -y_2)$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble $(\frac{\kappa_n^2}{\chi}, \chi > 0, n = 1, \dots, N_\chi)$ dans l'intervalle $] -y_2, -y_1]$ qui est nul puisqu'il n'y a pas d'éléments de l'ensemble dans ce voisinage de y_0 .

Notons $X(\lambda) = \{x|y(x) + \lambda \geq 0\}$. A partir de (3.22) nous avons :

$$\begin{aligned} S_0(\chi, -y_1) - S_0(\chi, -y_2) &= \sqrt{\chi} L_0^{cl} \left(\int_{X(-y_1)} \sqrt{y(x) - y_1} dx - \int_{X(-y_2)} \sqrt{y(x) - y_2} dx \right) \\ &+ O(1), \end{aligned} \quad (3.24)$$

d'où,

$$\int_{X(-y_1)} \sqrt{y(x) - y_1} dx = \int_{X(-y_2)} \sqrt{y(x) - y_2} dx. \quad (3.25)$$

Or $X(-y_1) = X(-y_2) \cup y^{-1}([y_1, y_2[$, d'où :

$$\int_{X(-y_2)} \sqrt{y(x) - y_1} dx + \int_{y^{-1}([y_1, y_2[)} \sqrt{y(x) - y_1} dx = \int_{X(-y_2)} \sqrt{y(x) - y_2} dx. \quad (3.26)$$

$$\int_{X(-y_2)} (\sqrt{y(x) - y_1} - \sqrt{y(x) - y_2}) dx + \int_{y^{-1}([y_1, y_2[)} \sqrt{y(x) - y_1} dx = 0. \quad (3.27)$$

Les deux intégrales sont positives et donc nulles. Nous avons alors :

$$\int_{y^{-1}([y_1, y_2[)} \sqrt{y(x) - y_1} dx = 0, \quad (3.28)$$

d'où $|y(x) - y_1| = 0$ presque partout sur $y^{-1}([y_1, y_2[$, ainsi $y_1 = y_2$, ce qui est une contradiction, d'où le résultat recherché. □

La proposition suivante donne des résultats de convergence (quand $\chi \rightarrow +\infty$) des

sommes de $\frac{\kappa_{n\chi}}{\chi}$ et de $\frac{\kappa_{n\chi}^3}{\chi^2}$. Ces sommes peuvent être très intéressantes dans l'analyse de signaux comme nous allons le voir dans le cas de la pression artérielle (chapitre 7).

Proposition 3.3.3. *Sous les hypothèses (3.1), nous avons :*

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx, \quad (3.29)$$

et

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_\chi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx. \quad (3.30)$$

Si de plus $y \in L^2(\mathbb{R})$, alors,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}^3 = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x) dx. \quad (3.31)$$

Preuve : Les limites (3.29) et (3.31) se déduisent du lemme 3.3.1 pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{3}{2}$ respectivement :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx, \quad (3.32)$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}^3 = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x) dx. \quad (3.33)$$

En se rappelant que :

$$y_\chi(x) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(x) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n\chi}^2(x) dx = 1, \quad (3.34)$$

nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_\chi(x) dx = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}. \quad (3.35)$$

Ainsi, en combinant (3.35) et (3.29), nous obtenons (3.30). \square

3.4 Une condition pour que l'approximation soit exacte

Proposition 3.4.1. *Pour χ fini, l'approximation par SCSA est exacte si et seulement si $-\chi y$ est un potentiel sans réflexion ($R_{l(r)\chi}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$). Dans ce cas les deux approximations SCSA et SBSA coïncident.*

Preuve. Nous supposons l'approximation par SCSA de y exacte pour un χ donné : $y_\chi = y$. Nous avons alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_\chi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx. \quad (3.36)$$

En écrivant le premier invariant (2.50) pour un potentiel $-\chi y$ et en utilisant $|T_\chi(k)|^2 = 1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2$, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} + \frac{1}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2) dk. \quad (3.37)$$

En utilisant (3.35), nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y_\chi(x) dx + \frac{1}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2) dk. \quad (3.38)$$

Ainsi, à partir de (3.36) et (3.38) nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2) dk = 0. \quad (3.39)$$

Or en se rappelant que $|R_{r(l)\chi}(k)| \leq 1, \forall k \in \mathbb{R}$, nous avons $\ln(1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2) \leq 0$. L'égalité (3.39) est donc vérifiée si et seulement si $\ln(1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$; ce qui n'est vrai que pour $|R_{r(l)\chi}(k)| = 0, \forall k \in \mathbb{R}$.

La réciproque se déduit aisément de la formule de Deift-Trubowitz (2.43) en prenant $R_{r(l)\chi}(k) = 0$. □

Pour illustrer la proposition 3.4.1, prenons l'exemple du potentiel de Pöschl-Teller présenté dans la paragraphe 2.6.2. Ainsi, si nous avons $y(x) = \operatorname{sech}^2(x), x \in \mathbb{R}$ alors nous savons que $-\chi y$ est un potentiel sans réflexion si et seulement si $\chi = N_\chi(N_\chi + 1)$,

N_χ étant le nombre de valeurs propres négatives de $H(-\chi y)$. Nous reviendrons sur cet exemple dans le chapitre 4.

3.5 Etude de la convergence de y_χ quand $\chi \rightarrow +\infty$

Le paramètre χ joue un rôle important dans la SCSA. Il permet en effet de modifier le spectre de $H(-\chi y)$ de façon à approcher au mieux y par y_χ . Intuitivement, plus χ augmente plus le pas de quantification semi-classique $\frac{1}{\sqrt{\chi}}$ diminue et par conséquent meilleure est l'extraction des valeurs de y par la SCSA comme nous l'avons montré au point ii) de la proposition 3.3.2. Cependant, en pratique l'augmentation de χ devient vite très lourde à gérer numériquement. Comme nous le verrons dans le chapitre 4, nous nous contentons d'un ordre qui permet la réalisation de performances satisfaisantes, à savoir, pour ϵ fixé suffisamment petit,

$$\hat{\chi} = \min\{\chi, J(\chi) \leq \epsilon\}, \quad J(\chi) = \|y_\chi - y\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.40)$$

Nous nous intéressons dans cette section à l'analyse du comportement asymptotique (quand $\chi \rightarrow +\infty$) de y_χ .

3.5.1 Une première approche *classique* de la convergence

Suivant la motivation initiale qui nous a conduit à définir y_χ par la formule (3.3), nous avons dans un premier temps tenté d'exploiter la formule de Deift-Trubowitz introduite par (2.43) pour l'étude de la convergence de y_χ . En effet, en écrivant la formule de Deift-Trubowitz pour un potentiel $-\chi y$, nous obtenons :

$$y(x) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(x) - \frac{2i}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

Nous remarquons donc que :

$$y(x) = y_\chi(x) - \frac{2i}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.42)$$

et par conséquent, l'étude de la convergence de y_χ quand $\chi \rightarrow +\infty$, revient à l'étude du terme intégrale :

$$-\frac{2i}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

qui caractérise la contribution du spectre continu dans la reconstruction de y . En essayant d'exploiter cette voie, nous avons démontré des résultats intermédiaires sur le coefficient de réflexion mais qui malheureusement ne nous ont pas aidés à conclure sur la convergence de y_χ . Nous avons énoncé quelques résultats dans l'annexe E.

3.5.2 Une approche par l'analyse semi-classique : utilisation de la transformation de Wigner

La deuxième approche que nous proposons pour l'étude de la convergence de y_χ est l'utilisation de la transformation de Wigner. La transformation de Wigner est un outil puissant en analyse semi classique [41], [66], en particulier pour les questions de passages à la limite pour retrouver la mécanique classique à partir de la mécanique quantique. Elle a une place naturelle dans notre contexte de traitement du signal comme nous allons le voir. Il faut remarquer qu'elle est déjà utilisée comme un outil d'analyse temps-fréquence en traitement du signal sous le nom de transformation de Wigner-Ville [29]. L'usage que nous en faisons ici est différent : son rôle pour nous est semblable à celui qu'elle a en mécanique quantique.

Nous nous limiterons à la dimension 1 et aux fonctions à valeurs scalaires, ce qui fait que la définition qui nous est utile est la suivante :

Pour ψ et ϕ dans $L^2(\mathbb{R})$, nous définissons pour $h > 0$:

$$w^h(\psi, \phi)(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - h\frac{y}{2}) \bar{\phi}(x + h\frac{y}{2}) e^{i\xi y} dy, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (3.44)$$

La fonction de x et ξ ainsi obtenue est la mesure de Wigner. L'importance de cette mesure vient de ce que, lorsque x est la position d'une particule quantique et $\psi(x, t)$ sa fonction d'onde, la densité de probabilité de présence de la particule en x , $|\psi(x, t)|^2$,

peut se calculer ainsi : nous remarquons d'abord que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^h(\psi, \phi)(x, \xi) d\xi = \psi(x) \cdot \bar{\phi}(x), \quad (3.45)$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour la densité de position,

$$|\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} w^h(\psi, \psi)(x, \xi) d\xi. \quad (3.46)$$

Il est intéressant de noter une autre propriété remarquable de cette transformation. Si nous notons $\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\zeta} dx$ la transformée de Fourier de f , nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^h(\psi, \phi)(x, \xi) dx = \frac{1}{2\pi h} \hat{\psi}\left(\frac{\xi}{h}\right) \cdot \bar{\hat{\phi}}\left(\frac{\xi}{h}\right). \quad (3.47)$$

Nous proposons donc dans ce qui suit d'exploiter la transformation de Wigner pour l'analyse de la convergence de y_χ quand $\chi \rightarrow +\infty$. Notons $f_\chi = \sqrt{y_\chi}$ avec $y_\chi(x) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Les f_χ sont dans un borné de $L^2(\mathbb{R})$. Introduisons la transformée de Wigner de f_χ :

$$W[f_\chi](x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi z} f_\chi\left(x + \frac{z}{2}\right) f_\chi\left(x - \frac{z}{2}\right) dz. \quad (3.48)$$

Notons $w_\chi(x, \xi)$ son comportement aux petites échelles défini par :

$$\begin{aligned} w_\chi[f_\chi](x, \xi) &= \sqrt{\chi} W[f_\chi](x, \sqrt{\chi}\xi) = \frac{\sqrt{\chi}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sqrt{\chi}\xi z} f_\chi\left(x + \frac{z}{2}\right) f_\chi\left(x - \frac{z}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi z} f_\chi\left(x + \frac{z}{2\sqrt{\chi}}\right) f_\chi\left(x - \frac{z}{2\sqrt{\chi}}\right) dz. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Par transformation de Fourier inverse, nous obtenons :

$$f_\chi\left(x + \frac{z}{2\sqrt{\chi}}\right) f_\chi\left(x - \frac{z}{2\sqrt{\chi}}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi z} w_\chi[f_\chi](x, \xi) d\xi. \quad (3.50)$$

En particulier, pour $z = 0$, nous avons :

$$y_\chi(x) = f_\chi^2(x) = \int_{\mathbb{R}} w_\chi[f_\chi](x, \xi) d\xi. \quad (3.51)$$

Ces calculs se justifient comme dans Lions et Paul [66] ou Gérard *et al* [41] (voir par exemple la proposition 1.1 de [41]). L'étude de la convergence de y_χ se ramène donc à celle de $\int_{\mathbb{R}} w_\chi[f_\chi](x, \xi) d\xi$.

3.5.3 Les conditions de $1/\sqrt{\chi}$ -oscillation pour la convergence faible-* dans \mathcal{S}'

Avec la proposition III.1 de [66] (ou la proposition 1.1 de [41]), nous avons que les f_χ étant dans un borné de $L^2(\mathbb{R})$, les $w_\chi[f_\chi]$ sont dans un borné de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x, \mathbb{R}_\xi)$ (distributions tempérées) et nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.5.1. *i) Il existe une sous-suite de χ (notée comme la suite) telle que $f_\chi \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ faible et $w_\chi[f_\chi] \rightarrow w$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x, \mathbb{R}_\xi)$ faible-**

$$|f(x)|^2 \delta_0(\xi) \leq w \quad \text{au sens des mesures de } \mathcal{M}(\mathbb{R}^2), \quad (3.52)$$

avec $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des mesures réelles. Nous avons en particulier,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} dw \leq \liminf_{\chi \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_\chi^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} y(x) dx. \quad (3.53)$$

ii) Une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité dans (3.52) est que pour toute fonction continue à support compact ϕ ,

$$\limsup_{\chi \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \geq \sqrt{\chi}R} |\widehat{\phi f_\chi}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty. \quad (3.54)$$

Une condition suffisante pour que (3.54) soit vérifiée est que :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que les } \chi^{-\alpha/2} \frac{d^\alpha f_\chi}{dx^\alpha} \text{ sont uniformément bornées dans } L^2(\mathbb{R}). \quad (3.55)$$

iii) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} y(x) dx$ est que la suite vérifie (3.54) et

$$\limsup_{\chi \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq R} y_\chi(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty. \quad (3.56)$$

Remarque Lorsque (3.54) est vérifiée, $f_\chi(x + \frac{z}{2\sqrt{\chi}})f_\chi(x - \frac{z}{2\sqrt{\chi}}) \rightarrow |f(x)|^2$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x, \mathbb{R}_z)$ faible-*, nous avons donc :

$$w_\chi[f_\chi](x, \xi) \rightarrow |f(x)|^2 \delta_0(\xi) \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x, \mathbb{R}_\xi) \text{ faible-*.} \quad (3.57)$$

C'est la mesure de Wigner de la suite f_χ . Nous la noterons $w_0[f_\chi]$. Nous avons donc $w_0[f_\chi](x, \xi) = |f(x)|^2 \delta_0(\xi)$.

Preuve. i) résulte de l'application du théorème III.1 de [66] (points (43), (44)).

ii) donne des conditions à vérifier pour avoir des égalités à la place des inégalités dans (3.52) et (3.53). La condition (3.54) dit que la suite des $\sqrt{\chi}|\hat{f}_\chi(\sqrt{\chi}\xi)|^2$ est *étroitement relativement compacte* dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ [66] ou encore *1/ $\sqrt{\chi}$ -oscillante* (cf [41], définition (1.26) et proposition 1.7).

iii) Lorsque (3.54) est vérifiée, cette propriété revient à avoir une égalité à la place de la deuxième inégalité de (3.53). Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que f_χ soit *compacte à l'infini* quand $\chi \rightarrow +\infty$, c'est à dire (cf [41], définition (1.27)) :

$$\limsup_{\chi \rightarrow +\infty} \int_{|x| \geq R} |f_\chi(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quand } R \rightarrow +\infty, \quad (3.58)$$

et donc (3.56) suit. □

Le problème est donc de vérifier des propriétés du type (3.55) et (3.56). Commençons par (3.56). Nous avons avec (3.29) :

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} y_\chi(x) dx &= \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \int_{|x| \geq R} |\psi_{n\chi}(x)|^2 dx, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} y(x) dx \cdot \max_{n=1, \dots, N_\chi} \int_{|x| \geq R} |\psi_{n\chi}(x)|^2 dx + o(1). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Il suffit donc d'étudier l'asymptotique des $\int_{|x| \geq R} |\psi_{n\chi}(x)|^2 dx$. En fait ce travail a été fait par Yafaev dans le cas particulier où $-y$ est un mono-puits, ce que nous allons

supposer ici. Nous pouvons utiliser le résultat ([125], corollaire 2.7) qui résulte de cette étude asymptotique et que nous rappelons dans le lemme suivant :

Lemme 3.5.1. [125] *Supposons de plus que $y \in C^2(\mathbb{R})$ et que, pour $\lambda > 0$,*

$$\{x|y(x) \geq \lambda\} = [x_-(\lambda), x_+(\lambda)].$$

Pour toute fonction continue ϕ , nous avons, λ étant un point d'accumulation de l'ensemble $(\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}, \chi > 0, n = 1, \dots, N_\chi)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)|\psi_{n\chi}(x)|^2 dx = \frac{\int_{x_-(\lambda)}^{x_+(\lambda)} \phi(x)|y(x) - \lambda|_+^{-1/2} dx}{\int_{x_-(\lambda)}^{x_+(\lambda)} |y(x) - \lambda|_+^{-1/2} dx} + o(1). \quad (3.60)$$

Nous déduisons de ce lemme, en prenant pour ϕ une suite de fonctions régulières convergeant vers la fonction caractéristique de $[R, +\infty[$, pour $R > 0$ fixé que :

$$\begin{aligned} \int_R^{+\infty} |\psi_{n\chi}(x)|^2 dx &= \frac{\int_R^{x_+(\lambda)} |y(x) - \lambda|_+^{-1/2} dx}{\int_{x_-(\lambda)}^{x_+(\lambda)} |y(x) - \lambda|_+^{-1/2} dx} + o(1) \text{ pour } R \in [x_-(\lambda), x_+(\lambda)], \\ \int_R^{+\infty} |\psi_{n\chi}(x)|^2 dx &= o(1) \text{ pour } R > x_+(\lambda). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Supposons que (3.56) ne soit pas vraie. Alors il existe $c > 0$ et des suites R_k et $\chi_{k,l}$ telles que :

$$\lim_k R_k = +\infty, \lim_l \chi_{k,l} = +\infty, \int_{|x| \geq R_k} y_{\chi_{k,l}}(x) dx \geq c. \quad (3.62)$$

Pour chaque k , nous pouvons choisir $l(k)$ tel que $\lim_k \chi_{k,l(k)} = +\infty$. Notons plus simplement $\chi_k = \chi_{k,l(k)}$. En utilisant (3.59), nous avons :

$$\lim_k R_k = +\infty, \lim_k \chi_k = +\infty, \max_{n=1, \dots, N_{\chi_k}} \int_{|x| \geq R_k} |\psi_{n\chi_k}(x)|^2 dx \geq c' = \frac{c}{\int_{\mathbb{R}} y(x) dx} + o(1). \quad (3.63)$$

Pour chaque k , nous pouvons choisir $n(k)$ qui réalise le max et nous avons :

$$\lim_k R_k = +\infty, \lim_k \chi_k = +\infty, \int_{|x| \geq R_k} |\psi_{n(k)\chi_k}(x)|^2 dx \geq \frac{c}{\int_{\mathbb{R}} y(x) dx} + o(1). \quad (3.64)$$

Nous pouvons maintenant extraire une sous-suite des $\frac{\kappa_{n(k)\chi_k}^2}{\chi_k}$ qui converge vers une

valeur λ entre 0 et y_{\max} . Supposons que $0 < \lambda \leq y_{\max}$. Comme $\int_{|x| \geq R_k} |\psi_{n(k)\chi_k}(x)|^2 dx \geq c' > 0$, d'après (3.61), nous sommes dans le cas $R_k \in [x_-(\lambda), x_+(\lambda)]$, mais c'est en contradiction avec $\lim_k R_k = +\infty$, sauf si $x_+(\lambda) = +\infty$, ce qui n'est possible que pour $\lambda = 0$. Cette valeur est en fait dans le spectre continu et de l'autre côté (côté des énergies positives), les solutions de Jost oscillent à $+\infty$. La difficulté avec $\lambda = 0$ n'est donc pas surprenante.

Le problème avec cette approche est maintenant, d'une part de localiser le résultat de convergence recherché pour éviter les valeurs non régulières et 0 et de *filtrer* les oscillations hautes fréquences pour pouvoir utiliser les arguments de compacité de Lions et Paul [66]. L'idée que nous avons est de réaliser ce filtrage en régularisant $w_\chi[f_\chi]$ par convolution avec une gaussienne régularisante, ce qui revient à utiliser la transformée de Husimi, régularisation de celle de Wigner (voir [66]). Cela fera l'objet d'un travail à venir.

3.6 Approximation de fonctions $L^2(\mathbb{R})$ par les valeurs propres négatives d'opérateurs de Schrödinger

Partant des résultats introduits par la proposition 3.3.3, il serait intéressant d'avoir une variante de (3.29) ou (3.31) pour une restriction de y à, par exemple, $] -\infty, x]$ et de la dériver. C'est ce que nous proposons d'étudier dans cette section.

Soit $V \in L^2(\mathbb{R})$. Nous définissons l'opérateur $H_{x_0}(V)$ sur $L^2(\mathbb{R})$ associé au potentiel tronqué $1_{(x_0, +\infty)}V$ par :

$$H_{x_0}(V) = -\frac{d^2}{dx^2} + 1_{(x_0, \infty)}V(x), \quad x_0 \in [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.65)$$

où

$$1_{(x_0, \infty)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > x_0, \\ 0 & \text{pour } x \leq x_0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Remarquons que si $V(x) = 0$, pour $x \leq x_0$ alors $H_0(V) = H(V)$.

Notons $-\kappa_n^2(x_0)$, $n = 1, \dots, N(x_0)$ les valeurs propres négatives de $H_{x_0}(V)$ avec $\kappa_n(x_0) \geq 0$, $\kappa_1(x_0) \geq \kappa_2(x_0) \geq \dots$ et $\psi_n(x_0; \cdot)$, $n = 1, \dots, N(x_0)$ les fonctions propres

associées. Soit $T(k, x_0)$ défini par son module comme suit [50] :

$$|T(k, x_0)|^2 = \frac{4k \operatorname{Im}(m_{+,0}(k^2 + i0, x_0))}{|m_{+,0}(k^2 + i0, x_0) + ik|^2}, \quad (3.67)$$

où $m_{+,0}(\cdot, x_0)$ est la m-fonction de Weyl-Titchmarsh (2.9) définie pour l'opérateur $H_{x_0}(V)$ restreint à $[x_0, +\infty)$ (voir la définition au paragraphe 2.2). Nous supposons ici que la limite $\lim_{\epsilon \downarrow 0} m_{+,0}(k^2 + i\epsilon, x_0) = m_{+,0}(k^2 + i0, x_0)$ existe.

Killip et Simon ont proposé dans [50] une formule de trace particulière "a step by step sum rule", rappelée dans le théorème suivant :

Théorème 3.6.1. [50] Soit $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$ un potentiel de l'opérateur $H_{x_0}(V)$ et supposons $\operatorname{Im}(m_{+,0}(\lambda + i0)) > 0$ pour presque tout $\lambda > 0$. Alors, pour tout $x_0 > 0$,

$$\int_0^{x_0} V^2(x) dx = \frac{16}{3} \sum_{n \geq 1} [\kappa_n^3(0) - \kappa_n^3(x_0)] + 8 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k, \xi) \ln \left[\frac{|T(k, x_0)|}{|T(k, 0)|} \right] dk, \quad (3.68)$$

où

$$P(k, \xi) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4k^2 \xi^4}{(k^2 + 4\xi^2)(k^2 + \xi^2)} \right]. \quad (3.69)$$

Les $-\kappa_n^2(\alpha)$ sont les valeurs propres négatives de $H_\alpha(V)$, pour $\alpha = 0, x_0$ et $|T(k, \alpha)|$ est défini par l'équation (3.67) pour $H_\alpha(V)$, $\alpha = 0, x_0$.

Supposons à présent que $V = -\chi y$ avec $y \in L^2(\mathbb{R})$, $y(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Notons $-\kappa_{n\chi}^2(x_0)$, $n = 1, \dots, N_\chi(x_0)$ les valeurs propres négatives de $H_{x_0}(-\chi y)$ avec $\kappa_{n\chi}(x_0) \geq 0$, $n = 1, \dots, N_\chi(x_0)$ et $\kappa_{1\chi}(x_0) \geq \kappa_{2\chi}(x_0) \geq \dots$. Soit $T_\chi(k, x_0)$ défini par son module :

$$|T_\chi(k, x_0)|^2 = \frac{4k \operatorname{Im}(m_\chi(k^2 + i0, x_0))}{|m_\chi(k^2 + i0, x_0) + ik|^2}, \quad (3.70)$$

où $m_\chi(\cdot, x_0)$ est la m-fonction de Weyl-Titchmarsh associée à l'opérateur $H_{x_0}(-\chi y)$ restreint à $[x_0, +\infty)$.

Soit le théorème suivant,

Théorème 3.6.2. Soit $y \in L^2(\mathbb{R})$ avec $y(x) = 0$ pour $x < 0$ et $y(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Soient $-\kappa_{n\chi}^2(x)$ les valeurs propres négatives de $H_x(-\chi y)$, avec $\chi > 0$. Notons pour $x \in \mathbb{R}$,

$$y_\chi^{KS}(x) = \frac{4}{\sqrt{3}\chi} \sqrt{-\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{N_\chi(x)} \kappa_{n\chi}^3(x)}, \quad (3.71)$$

alors,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} y_\chi^{KS}(x) = y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.72)$$

Preuve. La preuve du théorème 3.6.2 utilise le théorème 3.6.1 ainsi que le lemme 3.3.1. Soient $-\kappa_{n\chi}^2(\alpha)$ les valeurs propres négatives de $H_\alpha(-\chi y)$, $\alpha = 0, x_0$. Pour un potentiel $-\chi y$, l'équation (3.68) s'écrit :

$$\int_0^{x_0} y^2(x) dx = \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n \geq 1} [\kappa_{n\chi}^3(0) - \kappa_{n\chi}^3(x_0)] + \frac{8}{\chi^2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k, \xi) \ln \left[\frac{|T_\chi(k, x_0)|}{|T_\chi(k, 0)|} \right] dk. \quad (3.73)$$

En utilisant la formule asymptotique de Weyl pour $\gamma = \frac{3}{2}$, à savoir (3.31), nous obtenons :

– Pour $1_{(0,+\infty)}y \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi(0)} \kappa_{n\chi}^3(0) = \frac{3}{16} \int_0^{+\infty} y^2(x) dx. \quad (3.74)$$

– Pour $1_{(x_0,+\infty)}y \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi(x_0)} \kappa_{n\chi}^3(x_0) = \frac{3}{16} \int_{x_0}^{+\infty} y^2(x) dx. \quad (3.75)$$

En soustrayant (3.75) de (3.74), nous obtenons :

$$\int_0^{x_0} y^2(x) dx = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n \geq 1} [\kappa_{n\chi}^3(0) - \kappa_{n\chi}^3(x_0)]. \quad (3.76)$$

En dérivant (3.76) par rapport à x_0 et en prenant la racine carrée, nous trouvons :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} y_\chi^{KS}(x) = y(x). \quad (3.77)$$

□

En combinant (3.73) et (3.76), nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.6.1. *Sous les conditions du théorème 3.6.2, nous avons :*

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{8}{\chi^2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k, \xi) \ln \left[\frac{|T_\chi(k, x_0)|}{|T_\chi(k, 0)|} \right] dk = 0. \quad (3.78)$$

Notons qu'en dépit de la convergence de y_χ^{KS} , cette approche semble inutilisable en pratique du fait de la lourdeur des calculs à faire pour chaque point de discrétisation.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle méthode d'analyse de signaux SCSA, basée sur une quantification semi classique. Nous avons vu que l'approximation par potentiels sans réflexion SBSA est un cas particulier de la SCSA et que celle-ci pourrait avoir des applications intéressantes en traitement du signal comme par exemple l'analyse temps-vitesse d'ondes progressives ou encore la compression de données. Cependant des difficultés liées au calcul numérique des coefficients de normalisation qui interviennent dans la SBSA ne permettent pas d'exploiter cette méthode pour le moment. Nous nous sommes donc limités à l'utilisation de la formule (3.3). Aussi, nous avons introduit dans ce chapitre quelques propriétés de la SCSA notamment des propriétés de convergence (encore incomplètes) quand la constante de couplage tend vers l'infini.

Chapitre 4

Résolution numérique de la SCSA, validation et exemples

4.1 Introduction

Ce chapitre traite de la résolution numérique et de la validation de la SCSA. Après présentation du schéma numérique proposé pour reconstruire un signal par la SCSA, la méthode sera appliquée à des exemples simples permettant de valider l'approche. Ainsi, nous commencerons par l'identification d'un 3-soliton solution d'une équation de KdV. Ensuite nous étudierons un exemple bien connu en théorie : $V(x) = V_0 \operatorname{sech}^2(x)$. Nous terminerons par la reconstruction de signaux divers : signal gaussien, signal sinusoïdal, signal chirp.

4.2 Résolution numérique de la SCSA

Le calcul essentiel qui intervient dans la SCSA est la résolution du problème spectral de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel. Pour que ceci soit possible numériquement, la première étape consiste à discrétiser cet opérateur puis à calculer les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur discrétisé. Le deuxième calcul qui intervient dans la SCSA consiste à déterminer une valeur optimale du paramètre χ selon un critère donné. La figure 4.1 résume la procédure de reconstruction d'un signal par la SCSA.

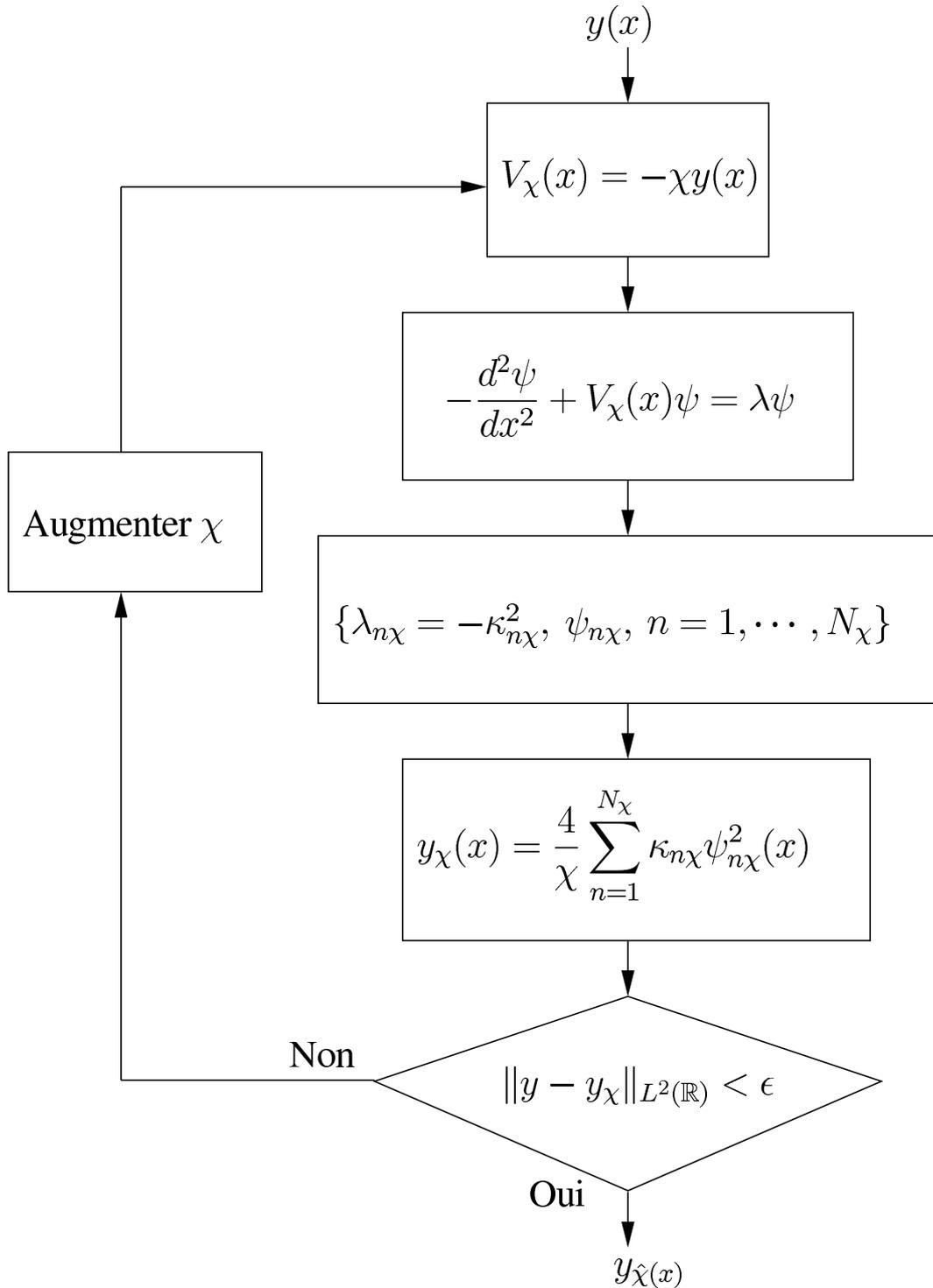


FIG. 4.1 – Algorithme de reconstruction d’un signal par la SCSA

4.2.1 Discrétisation du problème

Il existe de nombreuses méthodes de discrétisation des équations différentielles et aux dérivées partielles [3], [12], [40], [114]. L'idée de toutes ces méthodes consiste à approcher la solution par une série de fonctions de base en un nombre fini de points. La différence entre elles réside dans la nature des fonctions de base et le choix des points de discrétisation. Ces méthodes peuvent être regroupées en trois grandes familles [3], [12] :

- Méthodes des différences finies,
- Méthodes des éléments finis,
- Méthodes pseudo-spectrales.

Les méthodes pseudo-spectrales sont basées sur une interpolation globale de la solution réelle d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles contrairement aux méthodes des différences finies et des éléments finis qui sont basées sur une interpolation locale.

Soit, par exemple, l'équation :

$$H\psi = f, \tag{4.1}$$

où H est un opérateur. Alors, la solution ψ peut être approchée par la fonction,

$$F(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \Phi_k(x), \tag{4.2}$$

où les Φ_k , $k = 1, \dots, N$ sont appelées fonctions de base et les α_k , $k = 1, \dots, N$ sont des coefficients. La fonction F est un interpolant de la fonction ψ ; elle satisfait :

$$F(x_j) = \psi(x_j), \quad j = 1, \dots, M. \tag{4.3}$$

La méthode de discrétisation est choisie selon la nature du problème à résoudre [12], [113], [114], [119]. Généralement pour des problèmes périodiques, l'utilisation de la méthode de Fourier, dont les fonctions de base sont les polynômes trigonométriques issus de l'analyse de Fourier, est recommandée. Pour des problèmes non périodiques, différents types de polynômes orthogonaux comme ceux de Chebyshev, Legendre, Hermite etc... peuvent être utilisés.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à la méthode pseudo-spectrale de Fourier [12], [40], [43], [113], [114] que nous avons utilisée pour la résolution numérique de la SCSA. Cette méthode permet en effet de réaliser un bon compromis entre précision et temps de calcul. Bien qu'elle soit adaptée à des problèmes périodiques, en pratique cette condition n'est guère une restriction. En effet, cette méthode donne de bons résultats pour certains problèmes non-périodiques comme par exemple pour des fonctions à décroissance rapide.

Considérons le problème spectral de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel, associé au potentiel $-\chi y$,

$$H(-\chi y)\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} - \chi y(x)\psi = \lambda\psi. \quad (4.4)$$

Soient M points x_j , $j = 1, \dots, M$ uniformément répartis sur un intervalle $[a, b]$ tels que :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b \quad (4.5)$$

Le pas Δx qui représente l'écart entre deux points successifs x_j et x_{j+1} est constant et est donné par :

$$\Delta x = \frac{b - a}{M - 1}. \quad (4.6)$$

Notons y_j et ψ_j les valeurs des fonctions y et ψ aux points x_j :

$$y_j = y(x_j), \quad \psi_j = \psi(x_j), \quad j = 1 \dots, M. \quad (4.7)$$

Ramenons nous à présent à l'intervalle $\left[0, 2\pi \frac{M-1}{M}\right]$ par une homothétie $x \leftrightarrow \frac{2\pi(M-1)}{(b-a)M}(x-a)$. Soit alors $\Delta = \frac{2\pi}{M}$ le nouveau pas.

La transformée de Fourier discrète de ψ est définie par :

$$\hat{\psi}_k = \Delta \sum_{j=1}^M \psi_j e^{-ikx_j}, \quad k = -\frac{M}{2} + 1, \dots, \frac{M}{2}. \quad (4.8)$$

La transformée de Fourier discrète inverse est donnée par :

$$\psi_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \hat{\psi}_k e^{ikx_j}, \quad j = 1, \dots, M. \quad (4.9)$$

Il est alors naturel d'approcher ψ par sa transformée de Fourier discrète inverse :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \hat{\psi}_k e^{ikx}. \quad (4.10)$$

Néanmoins, en raison de l'asymétrie, nous posons $\hat{\psi}_{-\frac{M}{2}} = \hat{\psi}_{\frac{M}{2}}$. $F(x)$ peut être réécrit sous la forme suivante [114] :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{\psi}_k e^{ikx} + \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \hat{\psi}_k e^{ikx} \right) \right]. \quad (4.11)$$

Le calcul de la dérivée seconde de ψ aux points de discrétisation que nous notons $w_j = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} |_{x_j}$, $j = 1, \dots, M$ peut être effectué à l'aide de la transformée de Fourier discrète. Le principe est de déterminer les valeurs de $\hat{\psi}_k$ par la transformée de Fourier discrète puis de calculer les dérivées $n^{ième}$ par $\hat{w}_k = (ik)^n \hat{\psi}_k$ et ensuite de déduire w_j à partir de la transformée de Fourier discrète inverse appliquée à \hat{w}_k . Ainsi, le calcul numérique peut être effectué par la transformée de Fourier rapide (FFT). Cependant, les w_j peuvent être déterminés par une approche matricielle faisant appel à des matrices de différenciation, ce qui permet de transformer le problème spectral d'un opérateur en un problème aux valeurs propres de matrices. Il existe des situations pour lesquelles le calcul matriciel est préférable. Par exemple si le nombre de points de discrétisation M est petit alors le calcul matriciel s'avère plus rapide que l'utilisation de la FFT. L'approche matricielle permet l'utilisation des méthodes directes pour le calcul des valeurs propres exploitant ainsi des routines performantes du logiciel MATLAB, que nous utilisons dans notre travail.

Intéressons nous à présent au calcul qui permet de déduire les matrices de différenciation. Pour cela, nous proposons de calculer la valeur de $F(x)$ pour une fonction

de Kronecker périodique [114],

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = nM, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.12)$$

Une telle fonction constitue la manière la plus simple de représenter des données. En effet, nous avons :

$$\psi_j = \sum_{n=1}^M \psi_n \delta_{j-n}. \quad (4.13)$$

L'interpolant dans ce cas est donné par :

– pour M pair,

$$F_M(x) = \frac{\Delta \sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right)}{2\pi \tan\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad (4.14)$$

– pour M impair,

$$F_M(x) = \frac{\Delta \sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right)}{2\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (4.15)$$

Ainsi, (4.11) peut s'écrire simplement sous la forme suivante :

$$F(x) = \sum_{n=1}^M \psi_n F_M(x - x_n). \quad (4.16)$$

La dérivée seconde de ψ aux points x_j , $j = 1, \dots, M$ se déduit alors en dérivant l'équation (4.16) et s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{w} = D_2^\pi \underline{\psi}, \quad (4.17)$$

où $\underline{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{M-1} \ w_M]^T$ et $\underline{\psi} = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{M-1} \ \psi_M]^T$. D_2^π est la matrice de différenciation du second ordre et est donnée par :

– Si M est pair,

$$D_2^\pi(k, j) = \begin{cases} \frac{-\pi^2}{3\Delta^2} - \frac{1}{6} & \text{pour } k = j, \\ -(-1)^{k-j} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(k-j)\Delta}{2}\right)} & \text{pour } k \neq j. \end{cases} \quad (4.18)$$

– Si M est impair,

$$D_2^\pi(k, j) = \begin{cases} \frac{-\pi^2}{3\Delta^2} - \frac{1}{12} & \text{pour } k = j, \\ -(-1)^{k-j} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin\left(\frac{(k-j)\Delta}{2}\right)} \cot\left(\frac{(k-j)\Delta}{2}\right) & \text{pour } k \neq j. \end{cases} \quad (4.19)$$

Notons que D_2^π est symétrique et définie négative.

La version discrétisée de l'équation de Schrödinger (4.4) est alors donnée par :

$$(-D_2 - \chi \text{diag}(Y)) \underline{\psi} = \lambda \underline{\psi}, \quad (4.20)$$

où $D_2 = \frac{\Delta^2}{(\Delta x)^2} D_2^\pi$. La matrice $\text{diag}(Y)$ est la matrice diagonale dont les éléments sont les y_j , $j = 1, \dots, M$.

Ainsi, nous nous ramenons à un problème aux valeurs propres de matrices que nous pouvons résoudre par des méthodes de calcul direct de valeurs propres. Dans notre travail, nous avons utilisé la commande Matlab *eig*.

4.2.2 Calcul d'une valeur optimale du paramètre χ

Rappelons que N_χ est une fonction à valeur dans \mathbb{N} croissante en χ et que plus χ augmente, plus l'erreur d'approximation par la SCSA diminue. L'augmentation de χ devient néanmoins très vite lourde à gérer numériquement et nous nous contentons en pratique de déterminer une valeur $\hat{\chi}$ de χ qui permet de réaliser de bonnes performances : une bonne précision avec un minimum de composantes spectrales (de valeurs propres négatives). A travers les différents exemples que nous avons étudiés, nous avons remarqué numériquement que N_χ est une fonction en escalier de χ . Soit alors $[\chi_1, \chi_2]$ l'intervalle pour lequel N_χ est constant. Pour déterminer $\hat{\chi}$, nous proposons de minimiser la fonctionnelle quadratique suivante, sur l'intervalle $[\chi_1, \chi_2]$ pour un N_χ donné :

$$J(\chi) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (y_i - y_{\chi i})^2, \quad y_{\chi i} = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{ni\chi}^2, \quad i = 1, \dots, M. \quad (4.21)$$

Pour χ suffisamment grand, N_χ est relié au paramètre χ par la relation [60], [123] :

$$N_\chi \sim \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|\chi y(x)|} dx. \quad (4.22)$$

Les valeurs de χ_1 et χ_2 peuvent être déterminées approximativement en fonction de N_χ par les relations suivantes que nous avons vérifiées expérimentalement :

$$\chi_1 = \left(\frac{N_\chi \pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|y(x)|} dx} \right)^2, \quad \chi_2 = \left(\frac{(N_\chi + 1) \pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|y(x)|} dx} \right)^2. \quad (4.23)$$

Ainsi, l'optimisation s'effectue en deux étapes :

1. Chercher une valeur optimale $\hat{\chi}$ étant donné un nombre de valeurs propres négatives N_χ . Cette optimisation s'effectue à l'aide de la fonction Matlab *Fminbnd* basée sur l'algorithme de Golden Section avec une interpolation parabolique.
2. Déterminer un nombre minimal de composantes \hat{N}_χ qui permet d'approcher au mieux le signal selon le critère (4.21) : prendre d'abord $N_\chi = 1$ puis déterminer $\hat{\chi}$ selon l'étape (1). Si le résultat n'est pas satisfaisant, augmenter N_χ de 1 ($N_\chi = N_\chi + 1$) et déterminer $\hat{\chi}$ et ainsi de suite jusqu'à satisfaction de la condition d'arrêt.

La figure 4.2 résume la procédure qui permet d'approcher le signal avec un minimum de composantes.

Remarques :

1. En pratique, nous nous contentons de fixer une valeur N_χ suffisamment grande (environ 10 pour l'analyse des signaux de pression artérielle) et nous résolvons la phase (1) uniquement.
2. Il existe une relation étroite entre le pas de discrétisation Δx et l'ordre de l'approximation N_χ (ou de manière équivalente χ). Pour que la résolution numérique soit possible, il est nécessaire d'avoir un pas suffisamment petit. C'est à dire plus

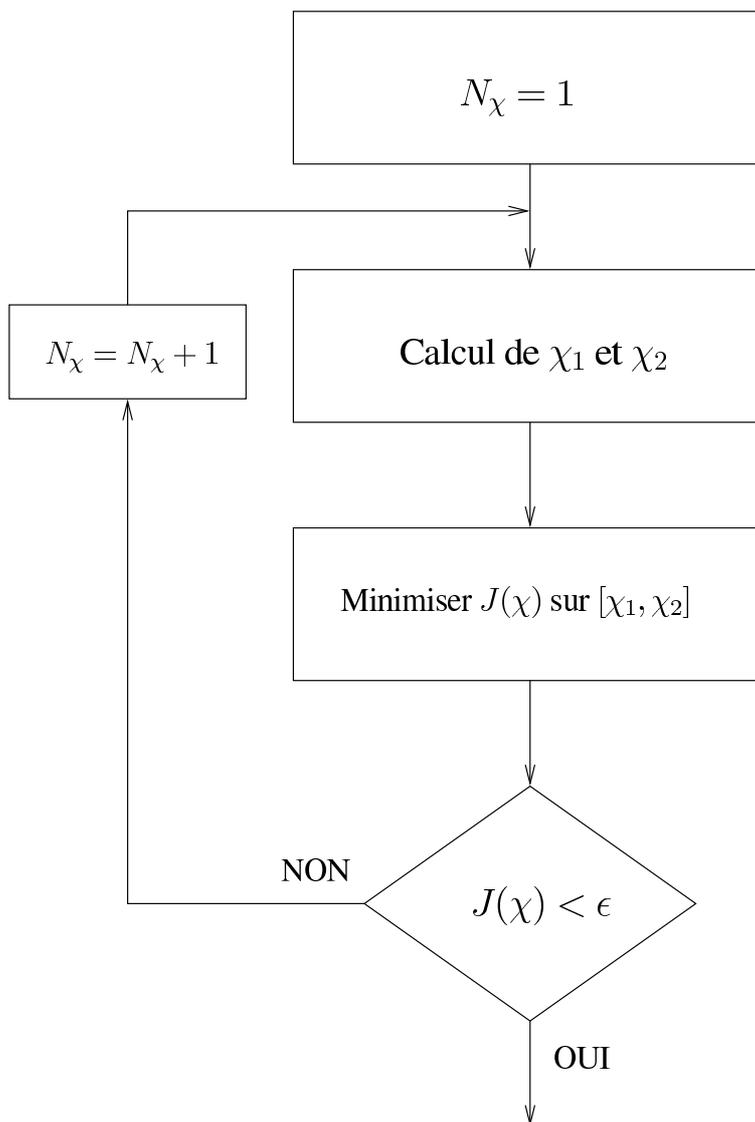


FIG. 4.2 – Calcul d’une valeur optimale de χ

χ augmente, plus le pas doit diminuer comme nous allons le voir dans les résultats numériques présentés plus loin.

4.3 Validation et exemples

4.3.1 Identification des solitons de l'équation de KdV

Ce paragraphe présente un exemple d'application de l'IST à l'identification d'un N -soliton, solution de l'équation de KdV à tout instant, selon la procédure décrite dans le chapitre 1. Considérons l'équation de KdV suivante :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + 6y \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0, \quad y(x, 0) = y_0(x). \quad (4.24)$$

La première étape consiste à résoudre la DST de l'opérateur de Schrödinger de potentiel donné par la condition initiale. Les théorèmes C.2 et C.3 de l'annexe C permettent alors d'identifier le N -soliton à tout instant. Pour résoudre le problème spectral de l'opérateur de Schrödinger, nous utilisons l'algorithme décrit dans le paragraphe précédent en considérant dans un premier temps $\chi = 1$. Nous allons par la suite étudier l'influence de χ sur la reconstruction du N -soliton. Pour surmonter la difficulté liée au calcul numérique des constantes de normalisation $c_{ln\chi}$, nous avons effectué une optimisation de telle sorte que la reconstruction du N -soliton initial y_0 soit satisfaisante, à l'aide des équations :

$$V(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det (I + A(x, t)), \quad (4.25)$$

où A est une matrice $N \times N$ dont les coefficients sont donnés par,

$$A(x, t) = \left[\frac{c_{lm} c_{ln}}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x + 4(\kappa_m^3 + \kappa_n^3)t} \right]_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N. \quad (4.26)$$

Pour cela, nous avons utilisé la commande MATLAB *fminsearch* basée sur l'algorithme du simplexe de Nelder-Mead.

Nous proposons de tester l'algorithme sur le 3-soliton représenté sur la figure 4.3,

défini par la formule (4.25)-(4.26) pour,

$$\kappa_1 = 9, \quad \kappa_2 = 7, \quad \kappa_3 = 5, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 2.05, \quad s_3 = 2.1. \quad (4.27)$$

Nous rappelons que la relation entre s_n et c_{ln} , $n = 1, \dots, 3$ est donnée par :

$$c_{ln} = \sqrt{2\kappa_n e^{2\kappa_n s_n}}. \quad (4.28)$$

La figure 4.4 illustre une reconstruction satisfaisante du 3-soliton aux trois instants t_0 , t_1 et t_2 . La figure 4.5, quant à elle, représente la reconstruction du 3-soliton pour plusieurs valeurs de χ . Nous retrouvons bien que N_χ est une fonction croissante de χ . D'autre part, nous remarquons qu'il existe pour tout $N_\chi \geq 3$, une valeur de χ qui permet une bonne reconstruction du 3-soliton initial y_0 .

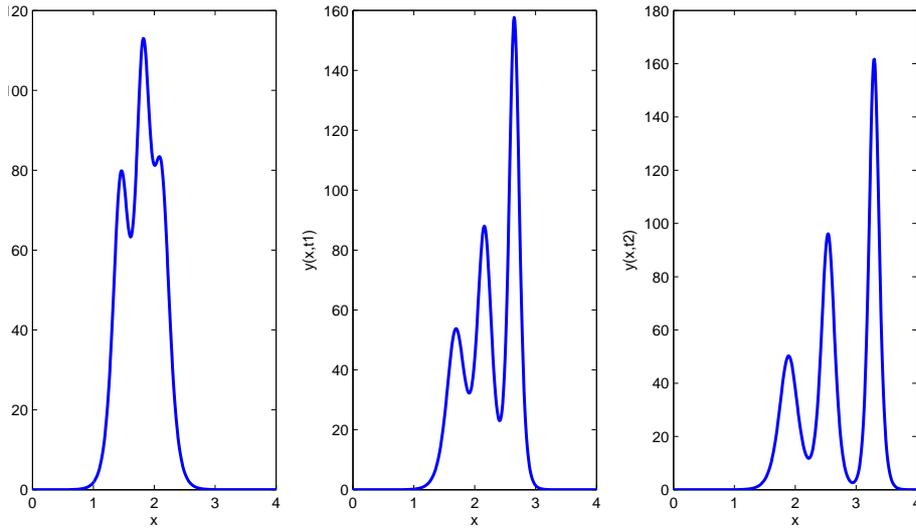
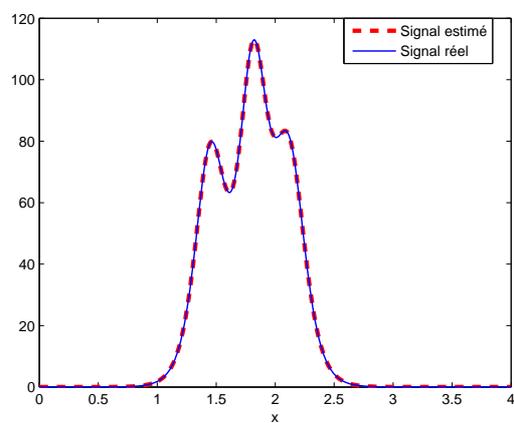


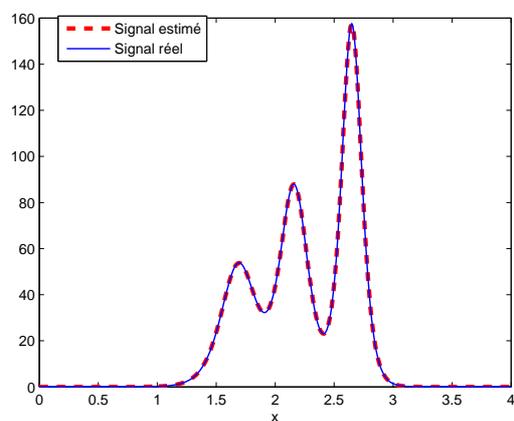
FIG. 4.3 – Un 3-soliton à trois instants t_0 , t_1 et t_2

4.3.2 Reconstruction de $\text{sech}^2(t)$

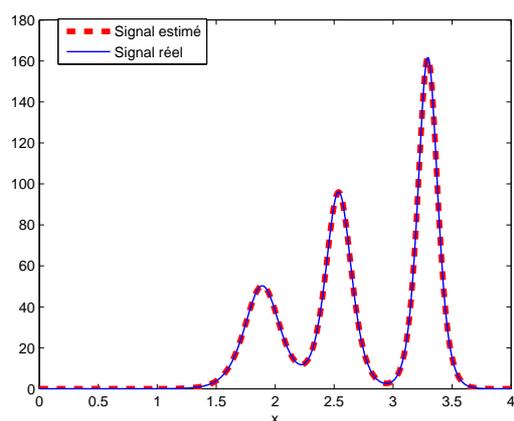
Dans ce qui suit et pour des raisons pratiques, nous remplaçons la variable spatiale x par la variable temporelle t .



(a) t_0

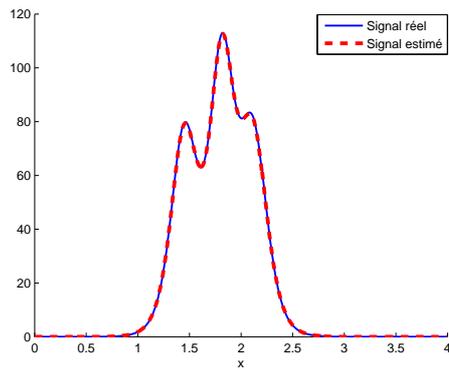


(b) t_1

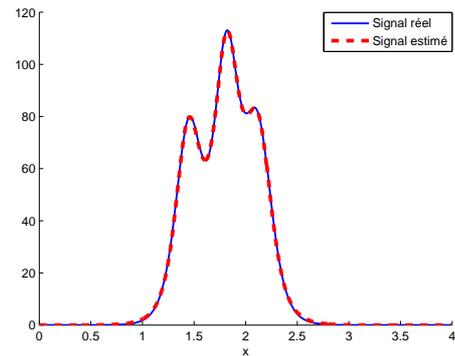


(c) t_2

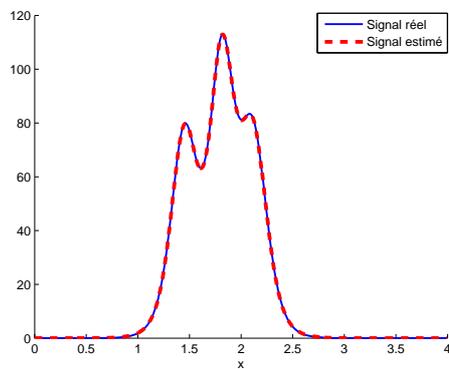
FIG. 4.4 – Identification d'un 3-soliton



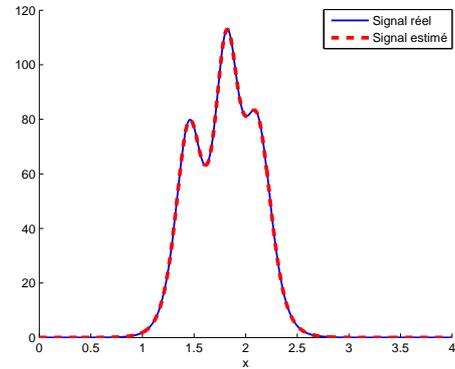
(a) $N_\chi = 3$, $\chi = 1$



(b) $N_\chi = 4$, $\chi = 1.55$



(c) $N_\chi = 7$, $\chi = 4.48$



(d) $N_\chi = 10$, $\chi = 8.85$

FIG. 4.5 – Estimation du 3-soliton initial pour $N_\chi = 3, 4, 7, 10$

Nous proposons à travers l'exemple présenté dans ce paragraphe, de valider la SCSA et d'étudier l'influence du paramètre χ sur la reconstruction de signaux par cette méthode. Notre choix a porté sur un potentiel bien connu dans la littérature [13], [60], [81] dont nous avons rappelé quelques propriétés dans le chapitre 2. Il s'agit de,

$$y(t) = -y_0 \operatorname{sech}^2(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y_0 > 0. \quad (4.29)$$

Il est bien connu que ce potentiel appartient à la classe des potentiels sans réflexion pour,

$$y_0 = N(N + 1), \quad (4.30)$$

où N est un entier qui représente le nombre de valeurs propres négatives [60], [95] de l'opérateur de Schrödinger $H(y)$. Ces valeurs propres sont données par : $-N^2, -(N - 1)^2, \dots, -1$. Soit par exemple $y(t) = -2 \operatorname{sech}^2(t - t_0)$ alors, le spectre de l'opérateur de Schrödinger $H(y)$ ne contient qu'une valeur propre négative -1 . Si $y(t) = -6 \operatorname{sech}^2(t - t_0)$, $H(y)$ a deux valeurs propres négatives : -4 et -1 .

Pour être conformes aux notations proposées dans le chapitre 3, nous posons $y_0 = 1$ et nous définissons le potentiel de l'opérateur de Schrödinger par,

$$V_\chi(t) = -\chi y(t) = -\chi \operatorname{sech}^2(t - t_0), \quad \chi > 0. \quad (4.31)$$

Pour la résolution numérique, nous considérons $V_\chi(t)$ sur M points équidistants d'un intervalle $[t_1, t_2]$. Nous commençons par étudier le cas d'un intervalle suffisamment large. Prenons par exemple : $t_0 = 6$, $t_1 = 0$ et $t_2 = 15$.

La figure 4.6 illustre les variations de l'erreur quadratique $J(\chi)$ ainsi que le nombre de valeurs propres négatives N_χ en fonction de χ . Nous constatons que :

- N_χ est une fonction croissante conformément à la proposition (3.3.1). Nous remarquons aussi que N_χ est une fonction en escalier.
- Il existe des valeurs particulières de χ sur chaque intervalle où la fonction N_χ est constante, pour lesquelles l'erreur $J(\chi)$ est minimale. Ces valeurs correspondent exactement aux valeurs $\chi_p = N_\chi(N_\chi + 1)$, $N_\chi = 1, 2, \dots$ pour lesquelles V_χ est un N_χ -soliton donc un potentiel sans réflexion.

- Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une valeur $\chi = \chi_\epsilon$ telle que $\forall \chi > \chi_\epsilon, \quad J(\chi) < \epsilon$.

La figure 4.7 représente les variations des quatre premières valeurs propres, rangées par ordre croissant, de la matrice $-D_2 - \chi \text{diag}(Y)$ en fonction de χ . Nous constatons que ces valeurs propres, initialement positives, sont des fonctions décroissantes en χ et qu'à chaque passage de N_χ à $N_\chi + 1$, une valeur propre positive devient négative.

La figure 4.8 illustre une bonne estimation des valeurs propres négatives pour $\chi = 20$. Dans ce cas, nous avons quatre valeurs propres égales à $-16, -9, -4, -1$ respectivement. Par ailleurs, sur la figure 4.9 nous représentons les carrés des quatre premières fonctions propres $\psi_n^2, n = 1, \dots, 4$ pour $\chi = 20$. Nous remarquons que chaque fonction ψ_n^2 possède $n - 1$ zéros.

La figure 4.10 montre une reconstruction satisfaisante du signal y pour $N_\chi = 1, 2, 3$ et 4 qui correspondent respectivement à un 1-soliton, un 2-soliton, un 3-soliton et un 4-soliton.

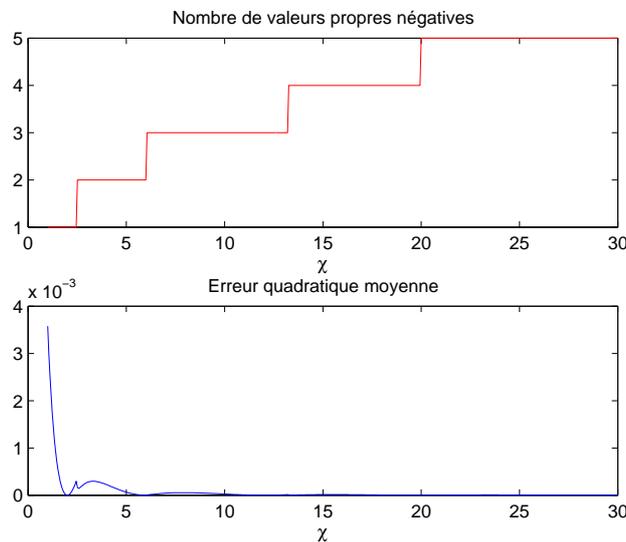


FIG. 4.6 – Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$

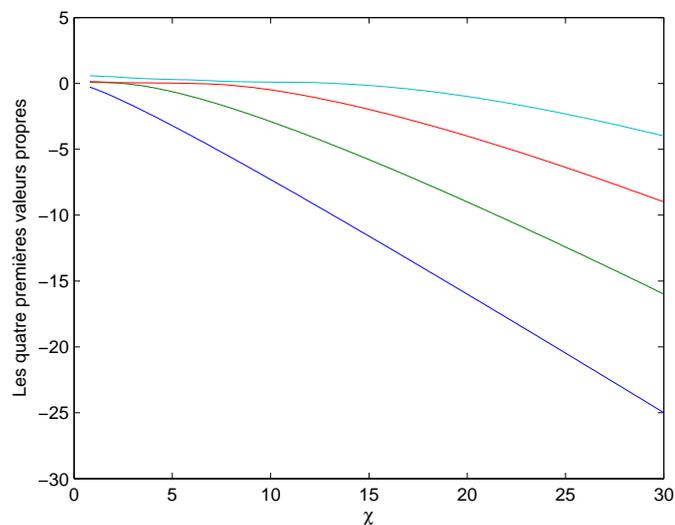


FIG. 4.7 – Variation des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$

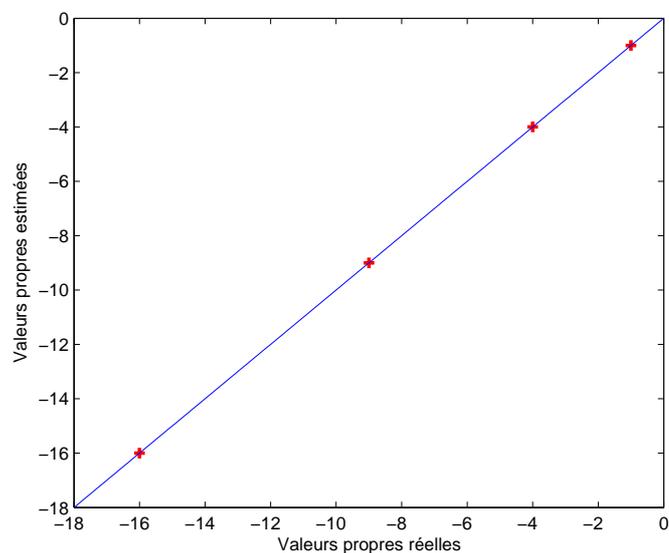


FIG. 4.8 – Valeurs propres réelles et estimées dans le cas où $\chi = 20$ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$

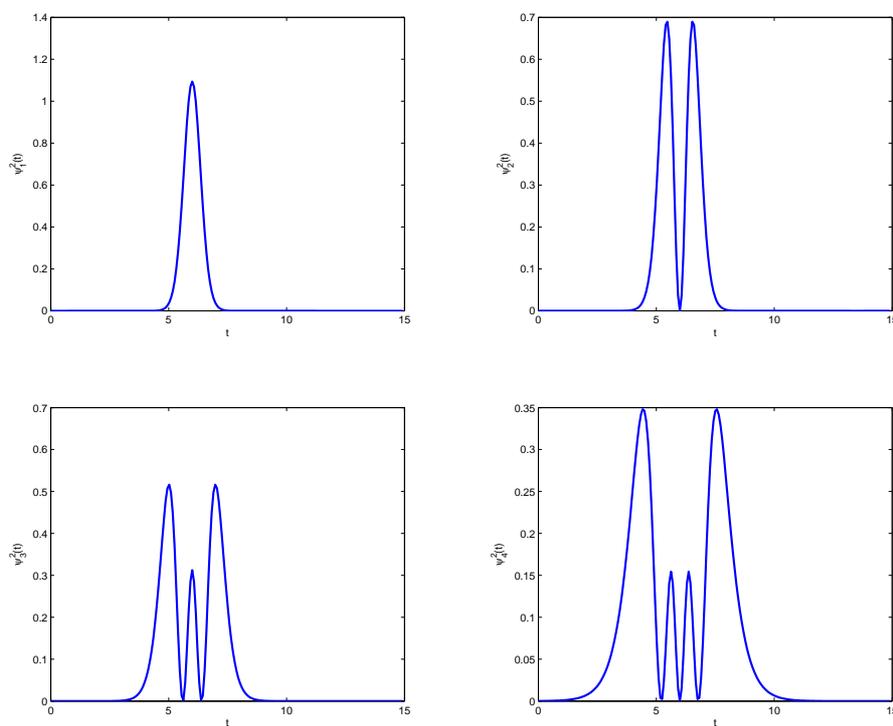


FIG. 4.9 – Allure des quatre premières fonctions $\psi_{n\chi}^2$ dans le cas où $\chi = 20$ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$

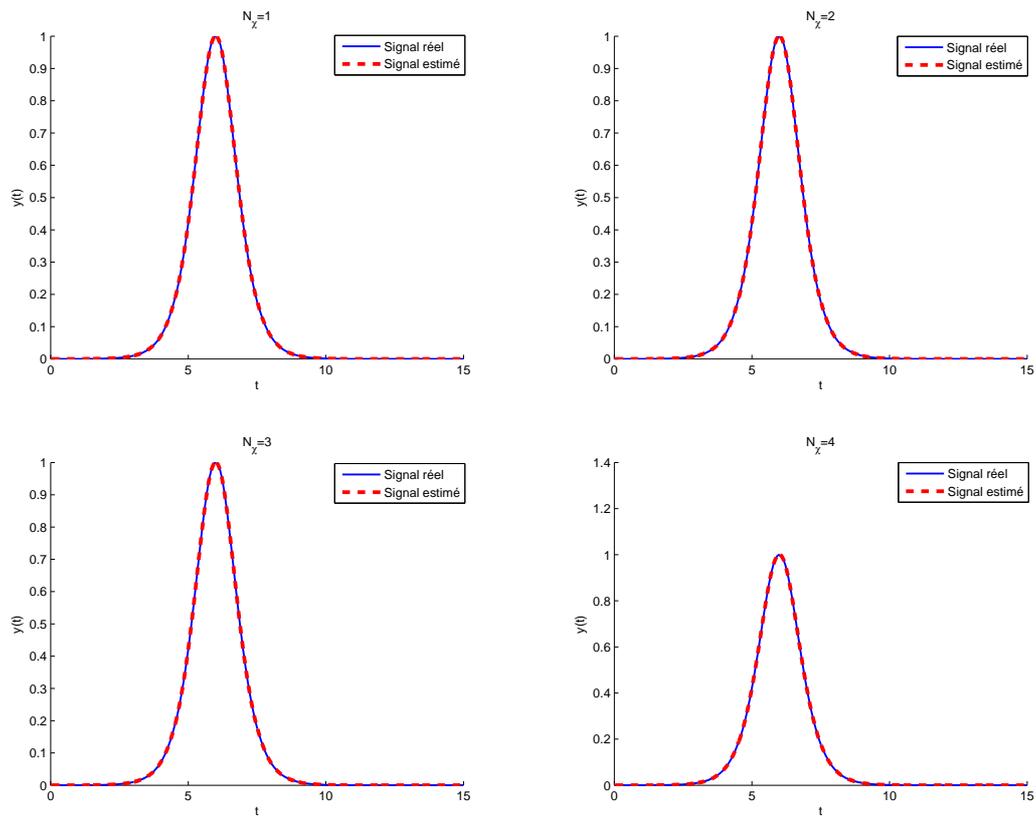


FIG. 4.10 – Reconstruction de $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[0, 15]$, de gauche à droite : $N_\chi = 1$, $N_\chi = 2$ (haut). $N_\chi = 3$, $N_\chi = 4$ (bas)

Remarque : Soit un N -soliton $-y_N$ tel que :

$$y_N(t) = N(N + 1) \operatorname{sech}^2(t). \quad (4.32)$$

y_N peut être reconstruit par la SCSA pour $\chi = 1$. Prenons la valeur $\chi = \frac{N + 2}{N}$, alors :

$$V_\chi = -\frac{N + 2}{N} y_N = -\frac{N + 2}{N} N(N + 1) \operatorname{sech}^2(t). \text{ D'où}$$

$$V_\chi(t) = -(N + 1)(N + 2) \operatorname{sech}^2(t), \quad (4.33)$$

qui représente un $(N + 1)$ -soliton.

Étudions à présent l'effet de troncature sur la reconstruction du signal et le rôle du paramètre χ dans ce cas. Nous prenons par exemple $t_0 = 6$, $t_1 = 4$ et $t_2 = 8$. La figure 4.11 représente l'erreur d'estimation ainsi que le nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ . La première constatation est que les valeurs particulières de χ pour lesquelles l'erreur est minimale ne sont plus égales à $\chi_p = N_\chi(N_\chi + 1)$ mais prennent des valeurs plus grandes. Ces dernières sont données sur le tableau 4.1. Par ailleurs, nous constatons aussi qu'il existe une valeur de $\chi = \chi_\epsilon$ tel que $\forall \chi > \chi_\epsilon, \quad J(\chi) < \epsilon$.

χ	$J(\chi)$	$-\kappa_{n\chi}^2$
2.64	0.0016	-1.5428
7.21	$4.35 \cdot 10^{-4}$	-4.99; -1.12; -0.0637
16.44	$1.14 \cdot 10^{-4}$	-12.85; -6.63; -2.93
25.54	$5.48 \cdot 10^{-5}$	-20.96; -12.79; -6.81; -1.31; -0.22
41.87	$2.66 \cdot 10^{-5}$	-35.88; -24.90; -15.94; -8.72; -4.80
55.37	$1.46 \cdot 10^{-5}$	-48.41; -35.5; -24.58; -15.62; -9.22; -1.51; -0.4
79.02	$9.86 \cdot 10^{-6}$	-70.62; -54.81; -41.00; -29.19; -19.46; -11.03; -7.06

TAB. 4.1 – Valeurs optimales de χ pour $y(t) = \operatorname{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$

Les quatre premières valeurs propres de la matrice $-D_2 - \chi \operatorname{diag}(Y)$ sont représentées sur la figure 4.12. Comme dans le premier cas étudié précédemment, nous constatons que les valeurs propres sont des fonctions décroissantes de χ . La figure 4.13, quant à elle, illustre une reconstruction satisfaisante du signal pour une valeur de χ égale à 25.54 qui correspond à une approximation par 4 composantes spectrales. D'autres part, la figure 4.14 illustre une mauvaise estimation du signal pour les valeurs

$$\chi_p = N_\chi(N_\chi + 1), N_\chi = 1, \dots, 4.$$

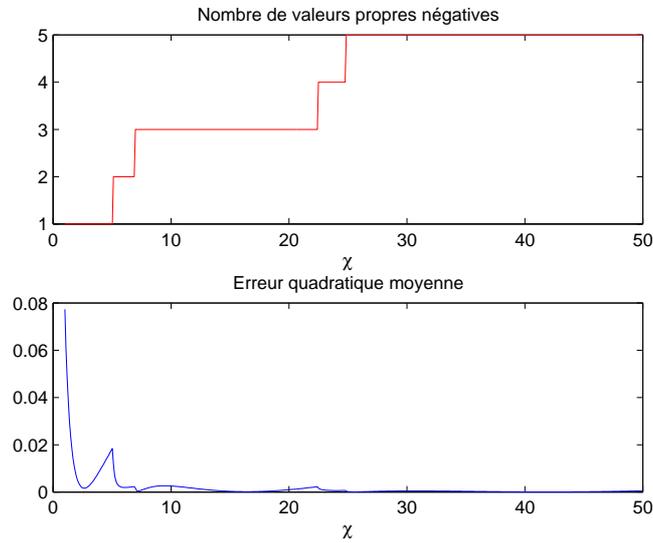


FIG. 4.11 – Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$

La figure 4.15 illustre la relation entre le pas de discrétisation Δx et le paramètre χ ou de manière équivalente l'ordre de l'approximation. Plus χ augmente, plus Δx doit diminuer.

4.3.3 Application à l'estimation de signaux divers

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'estimation de quelques signaux à l'aide de la SCSA. Nous représentons l'erreur d'estimation, le nombre de valeurs propres négatives ainsi que l'évolution des quatre premières valeurs propres en fonction de χ . Nous représentons également les signaux réels et estimés pour différentes valeurs de l'ordre de l'approximation.

Commençons par un signal gaussien. Les potentiels gaussiens de l'opérateur de Schrödinger ont beaucoup été étudiés en raison de leur large utilisation dans différents

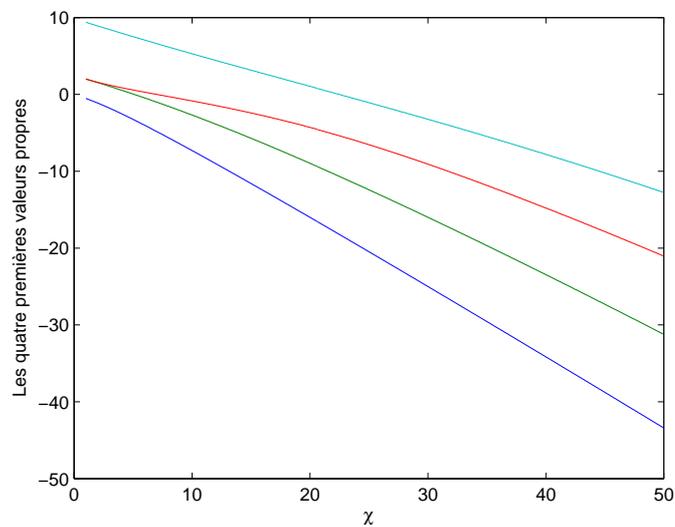


FIG. 4.12 – Variation des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$

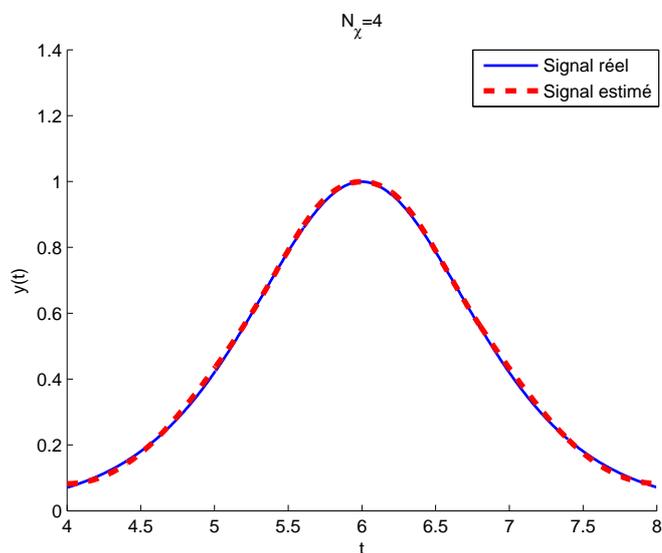


FIG. 4.13 – Estimation de $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$ pour $N_\chi = 4$

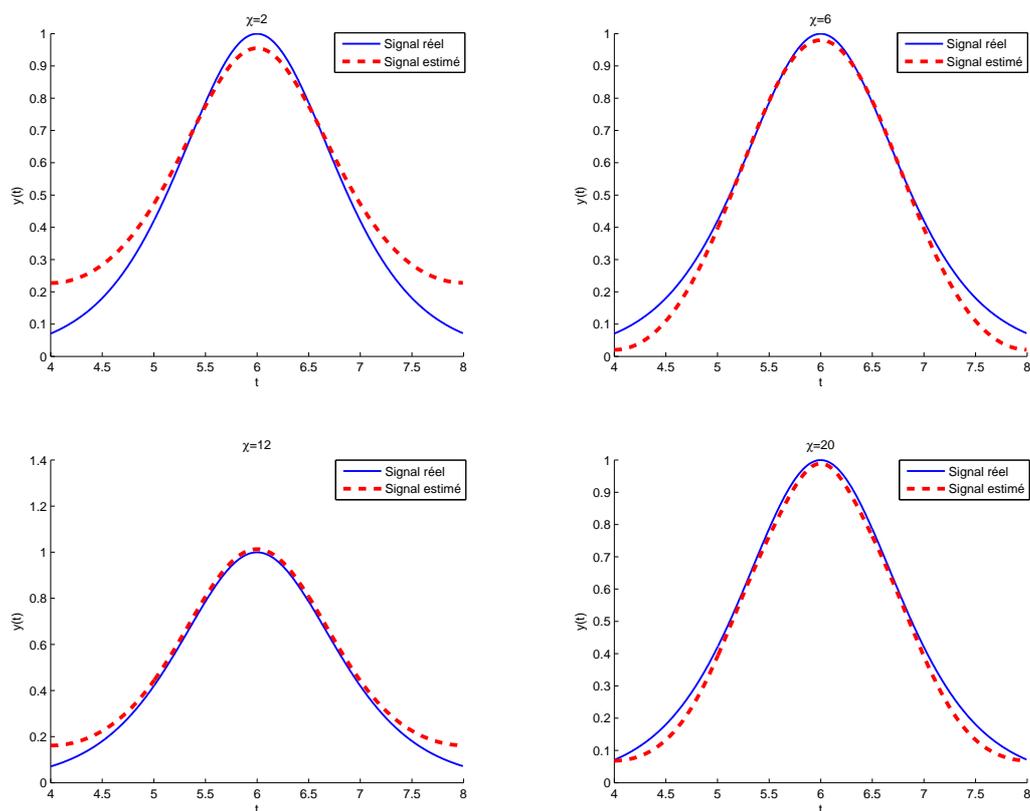


FIG. 4.14 – Estimation de $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$ sur $[4, 8]$, de gauche à droite : $\chi = 2$, $\chi = 6$ (haut). $\chi = 12$, $\chi = 20$ (bas)

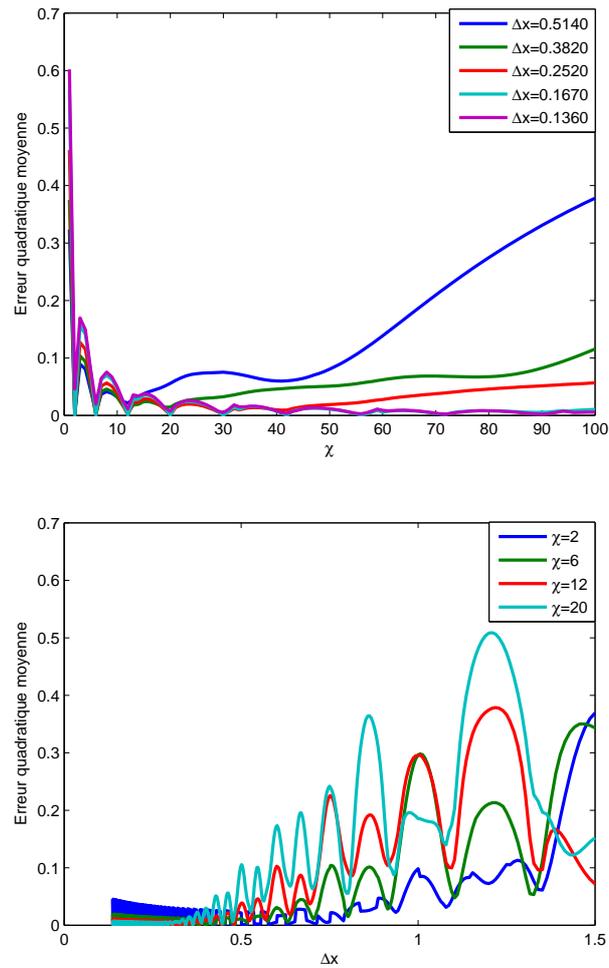


FIG. 4.15 – Relation entre le pas de discrétisation et χ pour $y(t) = \text{sech}^2(t - 6)$

domaines [17], [18], [98]. Considérons le signal gaussien défini par :

$$y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.34)$$

Pour les tests numériques nous avons pris $\sigma = 0.1$, $\mu = 0.75$.

Les résultats sont illustrés sur les figures 4.16, 4.17 et 4.18. Nous constatons qu'à partir de 2 composantes spectrales, la reconstruction est satisfaisante et que plus le nombre de composantes augmente, meilleure est la reconstruction. Un résultat proche a déjà été établi dans [98] en utilisant des transformations de Darboux. Il a été montré qu'un potentiel gaussien de l'opérateur de Schrödinger peut être approché par un potentiel multi-solitons et que plus le nombre des solitons augmente meilleure est l'approximation.

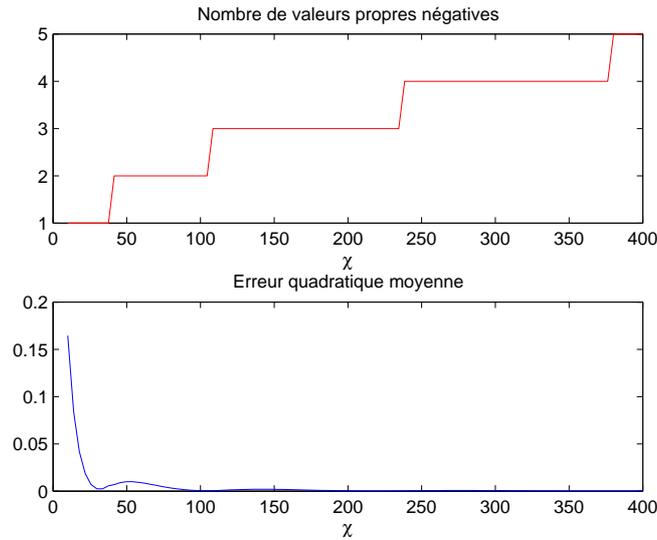


FIG. 4.16 – Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour un signal gaussien

Étudions à présent le cas d'un signal périodique par exemple un signal sinusoidal défini sur un intervalle fini,

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi). \quad (4.35)$$

Ce signal ayant des parties négatives, pour pouvoir appliquer la SCSA, nous devons

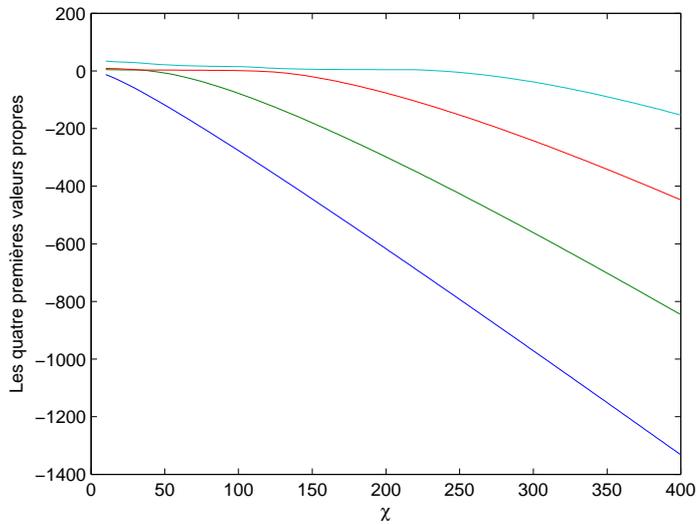


FIG. 4.17 – Variation des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour un signal gaussien

d’abord effectuer une translation de $y_{min} = -A$ tel que $y - y_{min} > 0$. Le potentiel de Schrödinger à considérer est alors donné par $-\chi(y - y_{min})$. Pour les tests numériques, nous posons $A = 2$, $\omega = \pi$ et $\phi = -0.5$.

Les résultats sont représentés sur les figures 4.19, 4.20, 4.21 et 4.22. Dans 4.21 nous avons considéré une période du signal alors que dans 4.22, quatre périodes ont été représentées. Dans ce dernier cas, nous avons remarqué que les valeurs propres sont de multiplicité 4, elles se répètent sur chaque période.

Pour finir, les figures 4.23, 4.24 et 4.25 illustrent les résultats obtenus pour un signal chirp. Un signal chirp est généralement défini par une sinusoïde dont la fréquence varie en fonction du temps. Dans notre cas, nous considérons des variations linéaires de la fréquence.

4.4 Conclusion

La résolution numérique de la SCSA a fait objet de ce chapitre. Les différents exemples étudiés nous ont permis de valider la méthode et de relever les difficultés

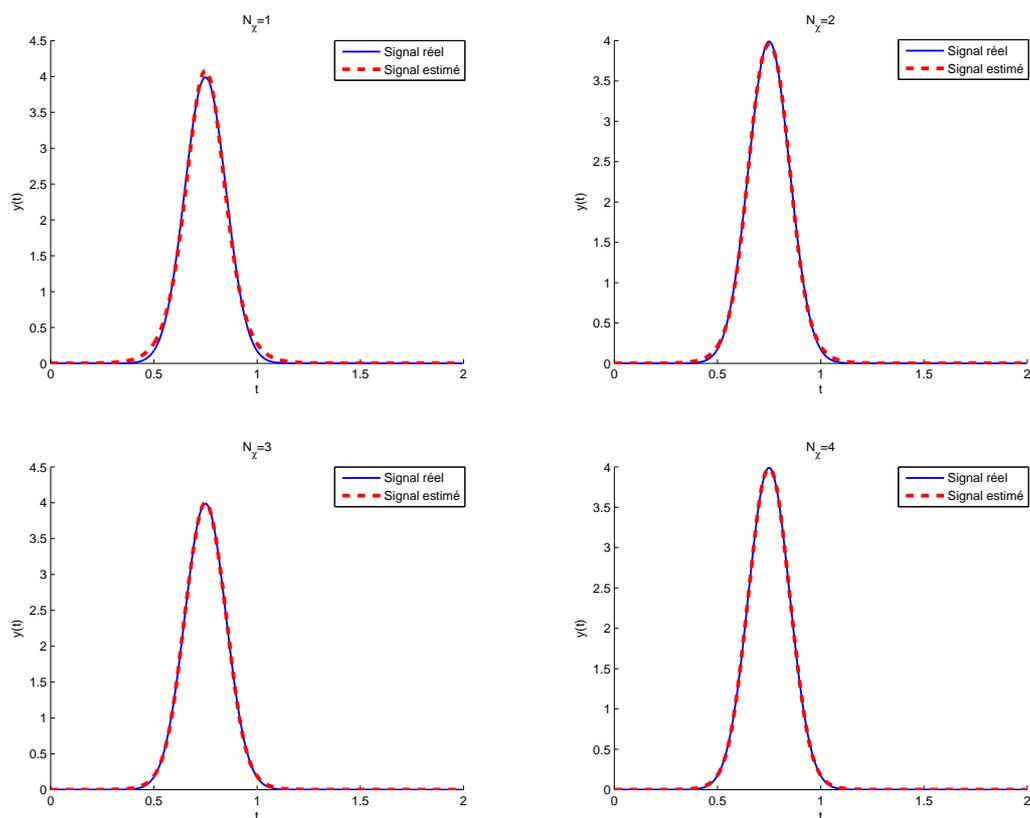


FIG. 4.18 – Estimation d'un signal gaussien, de gauche à droite : $N_x = 1$, $N_x = 2$ (haut). $N_x = 3$, $N_x = 4$ (bas)

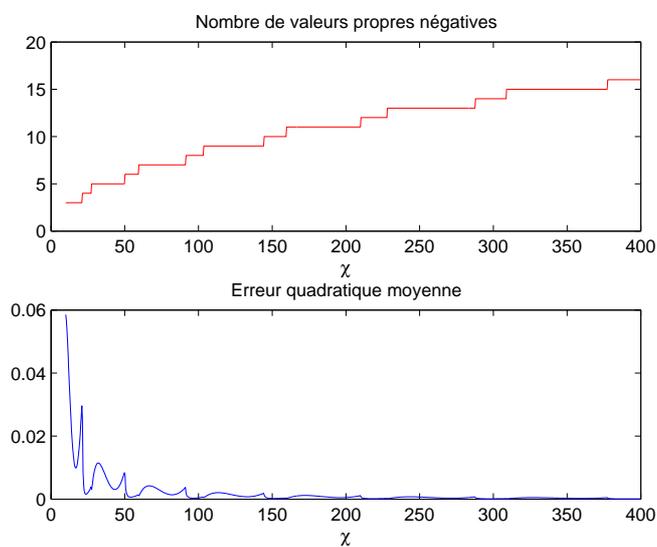


FIG. 4.19 – Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour un signal sinusoidal

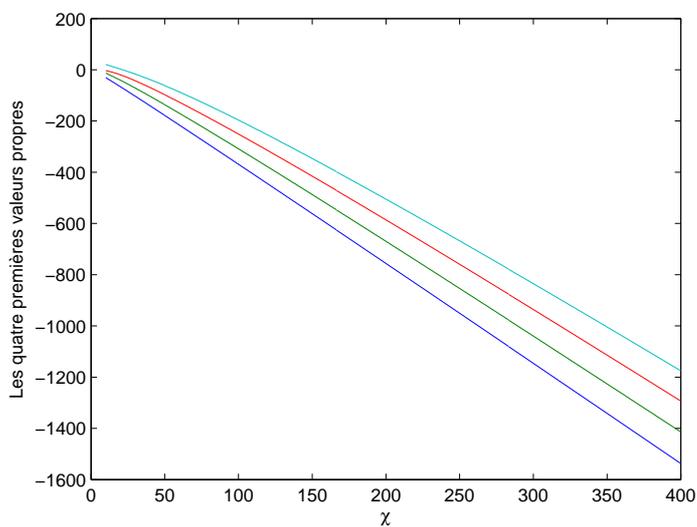


FIG. 4.20 – Evolution des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour un signal sinusoidal

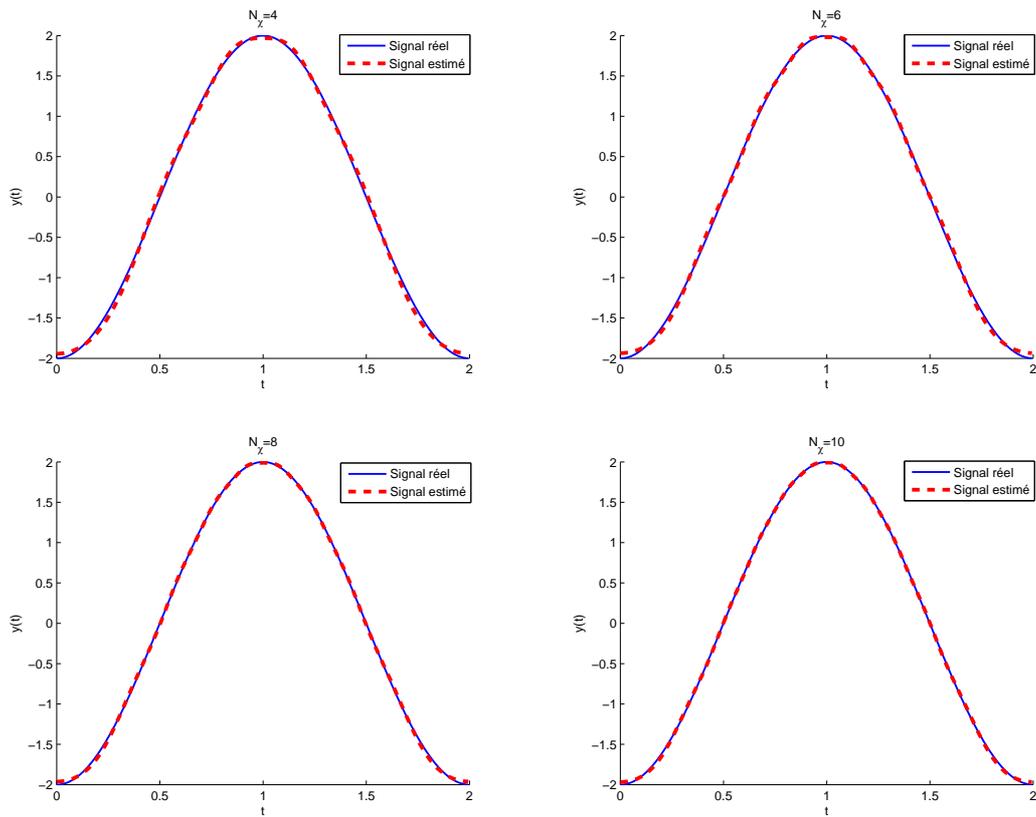


FIG. 4.21 – Estimation d'un signal sinusoidal, de gauche à droite : $N_x = 4$, $N_x = 6$ (haut). $N_x = 8$, $N_x = 10$ (bas)

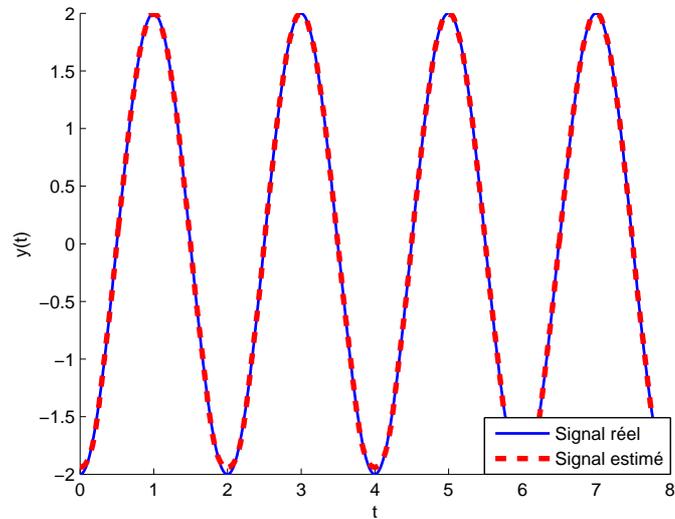


FIG. 4.22 – Estimation d’un signal sinusoidal sur 4 périodes avec $N_\chi = 10$

numériques comme la relation entre le pas de discrétisation et l’ordre de l’approximation. Ces exemples nous ont permis également de noter certaines propriétés de la SCSA notamment l’influence du paramètre χ sur l’estimation d’un signal. Ainsi, le nombre des valeurs propres négatives de l’opérateur de Schrödinger est une fonction en escalier croissante de χ et les valeurs propres sont des fonctions décroissantes de χ . Plus l’ordre de l’approximation augmente, plus l’erreur diminue. Nous allons à présent appliquer la méthode à l’analyse des signaux de pression artérielle : c’est l’objet de la deuxième partie de la thèse.

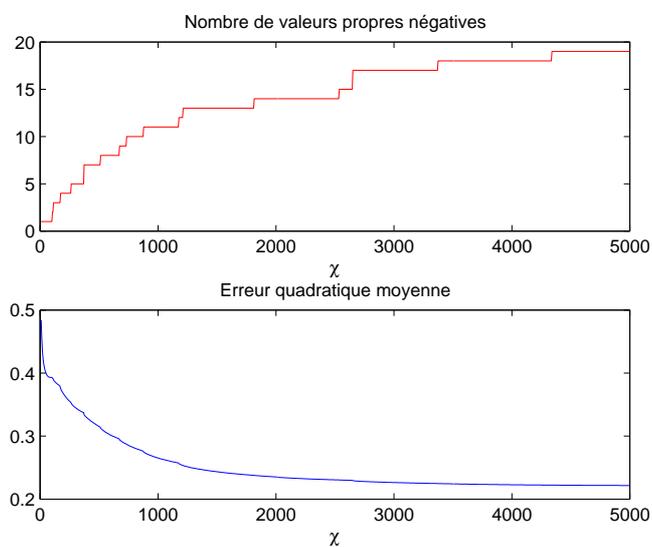


FIG. 4.23 – Erreur quadratique et nombre de valeurs propres négatives en fonction de χ pour un signal chirp

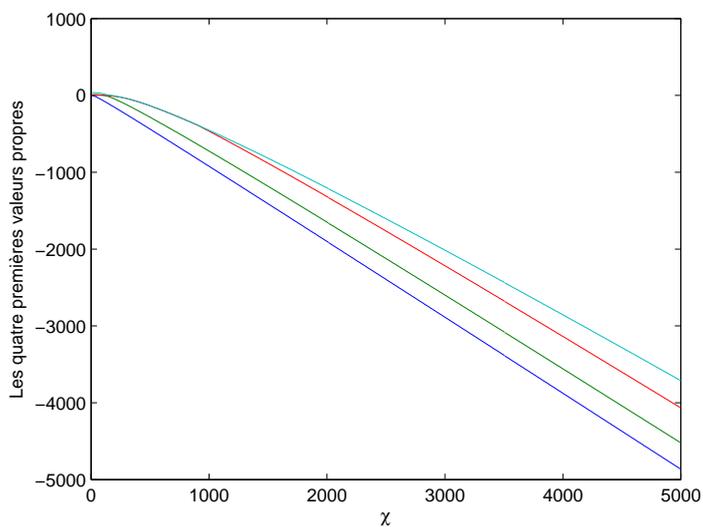


FIG. 4.24 – Evolution des quatre premières valeurs propres en fonction de χ pour un signal chirp

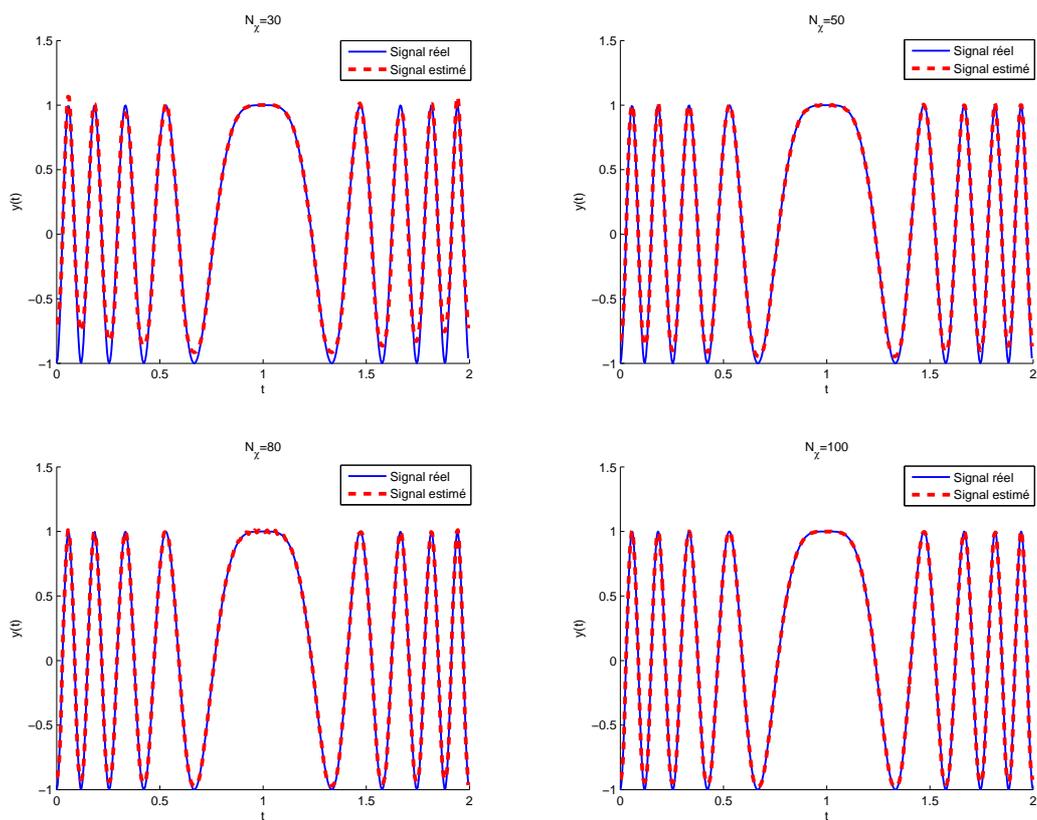


FIG. 4.25 – Estimation d'un signal chirp, de gauche à droite : $N_x = 30$, $N_x = 50$ (haut). $N_x = 80$, $N_x = 100$ (bas)

Deuxième partie

Application à l'analyse des signaux de pression artérielle

Chapitre 5

Rappels de physiologie cardio-vasculaire

5.1 Introduction

Le système cardio-vasculaire assure l'alimentation de tous les organes du corps en oxygène et nutriments et permet d'évacuer le dioxyde de carbone. Il est composé du cœur et d'un réseau complexe de vaisseaux sanguins. Parmi les facteurs jouant un rôle majeur dans la circulation sanguine, la pression artérielle constitue un paramètre de grand intérêt. Son maintien à des valeurs physiologiques efficaces est fondamental pour assurer un débit sanguin efficace au niveau de tous les tissus, et donc une oxygénation adéquate de ces tissus.

Nous allons dans ce chapitre introduire les bases fondamentales de la physiologie cardio-vasculaire. Après une brève présentation de l'anatomie de la pompe cardiaque, des valves cardiaques, du système vasculaire ainsi que du fonctionnement de l'appareil circulatoire, nous nous intéresserons à la pression artérielle. Nous parlerons de l'onde de pression, de sa propagation le long de l'arbre artériel et de sa variabilité à court terme et à long terme. Nous introduirons également la notion de baroréflexe lié au contrôle du système cardio-vasculaire par le système nerveux autonome et la définition du volume d'éjection systolique. Nous terminerons par décrire les différentes techniques utilisées pour mesurer la pression artérielle.

5.2 Le système cardio-vasculaire

5.2.1 La pompe cardiaque

Le cœur est un organe creux et musculaire. Il est constitué de deux parties, gauche et droite, composées chacune d'une oreillette en haut et d'un ventricule en bas qui communiquent à travers une valve. Un mur musculaire, *le septum*, divise l'oreillette et le ventricule gauche de l'oreillette et du ventricule droit, évitant le passage du sang entre les deux moitiés du cœur.

Les ventricules ont pour fonction de pomper le sang vers le corps ou vers les poumons. Leurs parois sont plus épaisses que celles des oreillettes. La contraction des ventricules est fondamentale pour la distribution du sang. Les oreillettes en se contractant jouent un rôle d'appoint pour le remplissage des ventricules. Le ventricule gauche est bien plus massif que le droit, parce qu'il doit exercer une force considérable pour pousser le sang dans tout le corps contre les résistances à l'écoulement, alors que le ventricule droit n'assure que la circulation pulmonaire dont les résistances sont bien moindres.

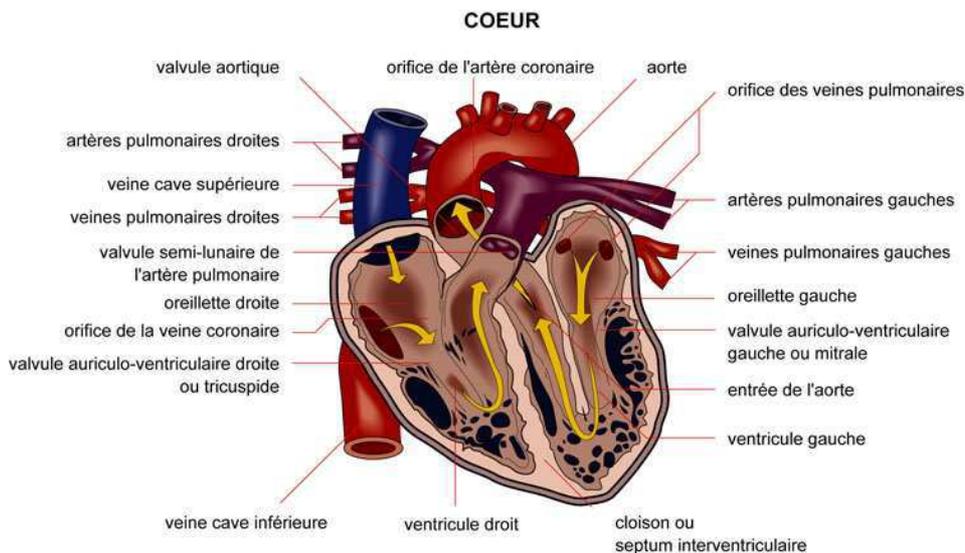


FIG. 5.1 – Schéma de l'anatomie du cœur

5.2.2 Les valves cardiaques

Les valves cardiaques jouent un rôle très important dans la circulation sanguine. Elles assurent un écoulement unidirectionnel dans le cœur, et empêchent le sang de refluer. Les ventricules possèdent deux valves, une d'admission et une d'échappement. La valve d'admission du ventricule droit est formée de trois lames et dénommée valve tricuspide. Celle du ventricule gauche est formée seulement de deux lames et dénommée valve mitrale. Les valves d'échappement se trouvent à l'entrée de l'aorte et de l'artère pulmonaire. Il s'agit de la valve aortique et la valve pulmonaire formées chacune de trois poches en nid de pigeon, appelées valvules sigmoïdes et ayant leur ouverture dirigée vers l'extérieur du cœur. Derrière les valvules sigmoïdes, dans la paroi de l'aorte, se trouve une petite dilatation appelée sinus de Valsalva. Pendant l'éjection, les courants tourbillonnaires qui se forment dans ce sinus évitent l'accolement des valves avec les orifices d'entrée des coronaires situés à leur niveau. L'ouverture et la fermeture des valves dépendent des pressions de part et d'autre de celles-ci.

5.2.3 Notions d'élasticité et de distensibilité

En physiologie cardio-vasculaire, la compliance exprime la facilité de distension d'un vaisseau sous l'effet de la pression d'écoulement. Elle est définie par le rapport de la variation du volume par une variation de pression $\frac{\Delta V}{\Delta P}$. Le rapport inverse définit l'élastance ou élasticité volumique. Cette dernière représente la facilité de retour à son volume initial, du vaisseau ou du cœur après distension [22], [102]. On distingue l'élastance passive, qui concerne les propriétés du cœur ou des vaisseaux sanguins au repos, de l'élastance active qui représente ces mêmes propriétés pendant la contraction des cellules musculaires striées cardiaques ou des muscles lisses des vaisseaux.

5.2.4 Le réseau vasculaire

L'appareil circulatoire est complété par un large réseau vasculaire. En réponse à la contraction de la pompe cardiaque, les vaisseaux sanguins assurent le transport du sang à tous les organes de l'organisme. Le réseau vasculaire est composé du système artériel et du système veineux.

Le système artériel a pour fonction de conduire le sang du cœur vers les tissus. Il comprend l'aorte, les grosses artères, les petites artères, les artérioles et les capillaires.

Le sang propulsé du ventricule gauche vers la périphérie passe par l'aorte et les grosses artères. Ces dernières sont caractérisées par une élasticité qui permet de transformer le flux discontinu du sang pulsé au niveau de la portion initiale de l'aorte en un flux continu. Les petites artères et les artérioles, quant à elles, sont des vaisseaux résistifs. Elles sont les principales responsables de la résistance périphérique totale (résistance à l'écoulement du sang). Elles sont en nombre important et sont caractérisées par une très grande élastance. Les capillaires sont le site d'échanges de liquides et de solutés entre le sang et l'espace extracellulaire. Compte tenu de la très faible vitesse du sang à ce niveau, de leur surface d'échange considérable, ainsi que de l'extrême minceur de leur paroi, ces vaisseaux sont bien adaptés à ce rôle d'échange.

Le système veineux a pour rôle de ramener le sang des organes vers le cœur. A la différence des artères, certaines veines sont équipées de valvules qui empêchent le reflux, favorisant ainsi le retour veineux. Elles sont caractérisées par une forte compliance leur permettant de jouer leur rôle de réservoir sanguin. Ce sont des vaisseaux capacitifs.

5.2.5 La circulation sanguine

Nous distinguons (figure 5.2) :

1. La circulation systémique (ou grande circulation) : le sang chargé d'oxygène et de nutriments, est propulsé du ventricule gauche dans les vaisseaux artériels jusqu'aux vaisseaux capillaires périphériques puis revient au cœur droit par le réseau veineux.
2. La circulation pulmonaire (ou petite circulation) : le sang pauvre en oxygène est propulsé du ventricule droit vers les poumons où il s'enrichit en oxygène et revient vers le cœur gauche par les veines pulmonaires.

Le ventricule gauche et la totalité des artères et artérioles de la circulation systémique constituent le système à haute pression. Alors que le réseau capillaire et le réseau veineux de la circulation systémique, l'oreillette droite, le ventricule droit, la totalité de la circulation pulmonaire et l'oreillette gauche constituent le système à basse pression.

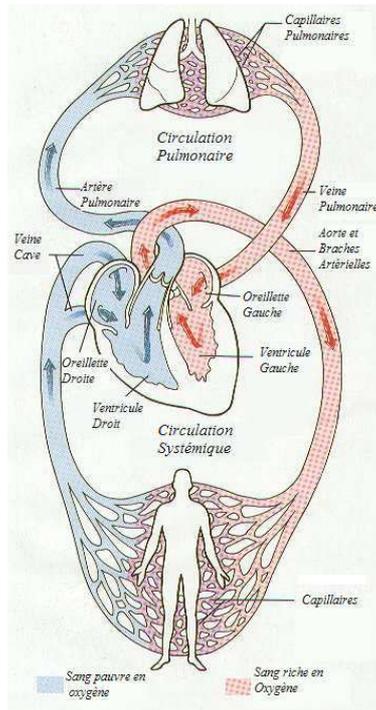


FIG. 5.2 – La circulation sanguine

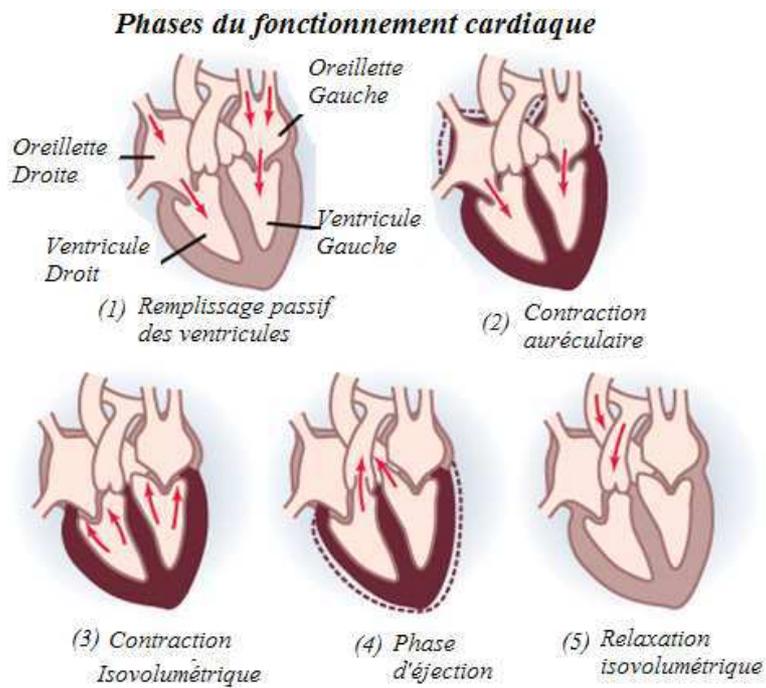


FIG. 5.3 – Phases du fonctionnement cardiaque

5.3 Fonctionnement de la pompe cardiaque

Le cycle cardiaque se divise en quatre phases [22], [102] :

1. La phase de remplissage : après sa dernière contraction, le muscle ventriculaire se relâche et la pression dans le ventricule diminue. Au moment où elle devient inférieure à celle de l'oreillette, la valve mitrale (respectivement tricuspide) s'ouvre et le sang s'écoule dans le ventricule gauche (respectivement droit). Au fur et à mesure que le ventricule se remplit, la pression intraventriculaire augmente et lorsqu'elle dépasse la pression auriculaire, la valve mitrale (respectivement tricuspide) se ferme, la valve d'échappement étant alors fermée par la contre pression aortique.
2. La phase de contraction isovolumétrique : les valves étant fermées, la paroi ventriculaire développe une tension qui change la forme du ventricule. La pression du sang dans le ventricule gauche (respectivement droit) s'élève rapidement et au moment où celle-ci dépasse la pression aortique (respectivement de l'artère pulmonaire), la valve aortique (respectivement pulmonaire) s'ouvre.
3. La phase d'éjection : la valve aortique étant ouverte, une partie du sang est éjectée dans l'aorte plus vite qu'il ne peut s'écouler en raison des résistances périphériques. Les pressions atteignent alors un maximum appelé pression systolique. Dans la seconde moitié de la phase d'éjection, la pression aortique dépasse la pression ventriculaire. Ce qui entraîne une rapide décélération du débit, suivie d'une légère inversion du flux sanguin à l'origine du remplissage des valvules sigmoïdes et donc la fermeture de la valve aortique (respectivement pulmonaire).
4. La phase de relaxation isovolumétrique : les valves étant fermées, les oreillettes se remplissent à nouveau sous l'effet de la chute de pression veineuse centrale. La pression dans le ventricule diminue avec le relâchement ventriculaire jusqu'à l'ouverture de la valve mitrale (respectivement tricuspide).

Les première et quatrième phases correspondent à la diastole (période de repos), les deuxième et troisième à la systole (la contraction). La figure 5.3 illustre les phases

d'un cycle cardiaque.

5.4 La pression artérielle

5.4.1 Courbes de pression et de débit sanguins

Par pression sanguine, nous faisons référence à la pression artérielle systémique qui s'exerce sur la paroi interne des artères pendant la circulation sanguine. Celle-ci joue un rôle très important dans le fonctionnement du système cardio-vasculaire. Elle varie entre deux valeurs extrémales : SBP et DBP. SBP est la pression systolique couramment appelée "maxima" ; elle résulte de l'activité du cœur pendant la phase d'éjection sanguine systolique contre les résistances périphériques. DBP est la pression diastolique ou "minima" qui correspond à la phase de relaxation du cœur [22], [102].

Au début de la phase d'éjection, l'inertie des longues colonnes de sang contenues dans les artères empêche le brusque passage du sang de l'aorte aux artères périphériques. La pression augmente, accélérant le déplacement du sang et provoque la déformation de la paroi viscoélastique de l'aorte. De proche en proche, ce même mécanisme se reproduit le long de l'arbre artériel. Ainsi, se propage une onde de pression qui peut être perçue par palpation de l'artère : c'est le pouls.

Le débit sanguin augmente très rapidement après ouverture de la valve aortique. Il atteint son maximum à la fin du premier tiers de la période d'éjection, puis diminue et devient nul pendant la phase diastolique (juste après la fermeture de la valve aortique, le sens de l'écoulement du sang s'inverse (reflux)). La figure 5.4 représente les courbes du débit et du volume ventriculaires ainsi que les courbes des pressions ventriculaire, aortique et auriculaire. Au niveau de la pression aortique, le pic systolique est suivi d'une incisure qui se produit suite à la fermeture de la valve aortique. Celle-ci entraîne une remontée de pression appelée onde dicrote. En plus de la bosse systolique et de l'onde dicrote, certains signaux présentent une troisième bosse comme l'illustre par exemple la figure 7.2. Cette bosse a été expliquée par certains par l'existence d'ondes réfléchies [77]. Elle permet de définir l'index d'augmentation aortique qui est, en se référant à la figure 7.2, donné par le rapport $\frac{\Delta P}{PP}$. Celui-ci a été utilisé pour classifier les signaux de pression [77].

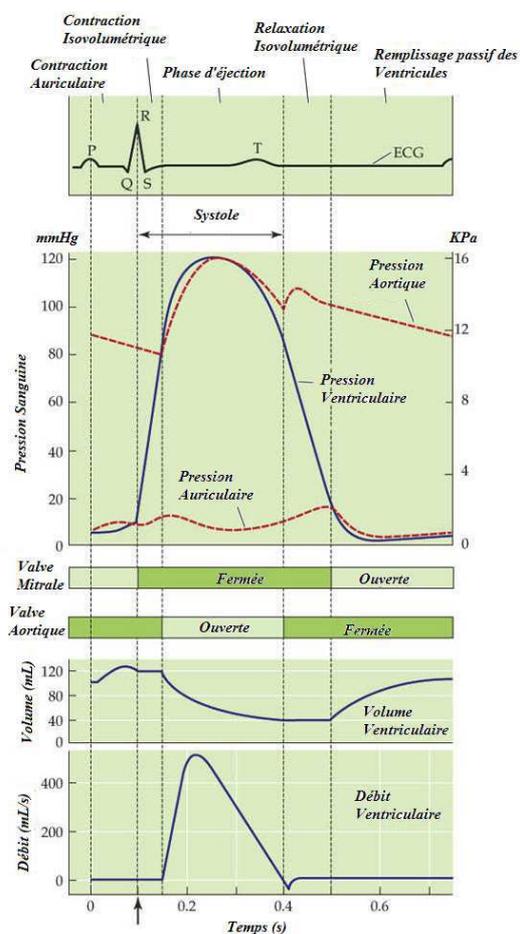


FIG. 5.4 – Courbes de pression, de volume et de débit artériels

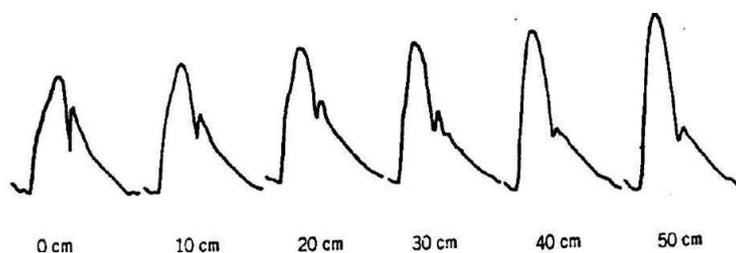


FIG. 5.5 – Schéma décrivant les changements de l'onde de pression artérielle lors de sa propagation le long de l'arbre artériel

La figure 5.5 illustre l'évolution de la pression artérielle tout au long de sa propagation. Celle-ci subit des changements en forme et en amplitude. L'amplitude du pic systolique augmente avec l'éloignement du cœur. Ce phénomène a été expliqué par l'existence d'une onde réfléchie suite aux nombreux obstacles que l'onde rencontre lors de sa propagation (par exemple des embranchements, des changements de calibre des artères ou des propriétés élastiques des parois) [22]. Néanmoins, la réflexion -bien qu'avérée- ne peut expliquer complètement les phénomènes observés [127]. De même la vitesse de l'onde de pression, qui est nettement plus élevée que la vitesse du flux sanguin, augmente tout au long de la propagation. Ceci est dû à la diminution du diamètre des artères et à l'augmentation de leur rigidité.

5.4.2 Variabilité de la pression artérielle

La pression artérielle varie continuellement en fonction de divers facteurs physiologiques, physiopathologiques et environnementaux [42], parmi lesquels l'âge, l'activité physique, les émotions, les éventuelles pathologies, l'heure de la journée et bien d'autres. Son maintien à une valeur physiologique efficace s'effectue grâce à l'interaction complexe entre plusieurs mécanismes, comprenant les effets cardiaques et vasculaires induits par le système nerveux autonome via les récepteurs cardio-pulmonaires et les récepteurs artériels (baroréflexe). On distingue deux types de variabilité de la pression artérielle, à savoir :

1. La variabilité à long terme qui décrit les variations sur 24 heures et plus (variations saisonnières).
2. La variabilité à court terme qui englobe les fluctuations à périodicité brève allant de quelques secondes à quelques minutes.

5.5 Régulation du système cardio-vasculaire par le système nerveux autonome : baroréflexe

Afin de fournir à chaque organe une quantité de sang suffisante pour couvrir ses besoins métaboliques, le maintien de la pression artérielle à une valeur efficace est fondamental. Or celle-ci est soumise à divers facteurs la faisant varier continûment. Le contrôle de la pression artérielle fait intervenir des régulations concertées et multiples ayant toutes des cinétiques d'activation spécifique permettant un contrôle optimal du

niveau tensionnel. Trois types de mécanismes sont distingués [22] :

- Régulation à court terme : met en jeu des capteurs sensibles à la pression, appelés baro-récepteurs et des capteurs sensibles aux variations de substances chimiques (PO_2 , PCO_2 et PH), appelés chémorécepteurs. Ces capteurs agissent en quelques secondes ou parfois quelques heures. Cette régulation est mise en évidence par exemple lors du passage de la position couchée à la position debout.
- Régulation à moyen terme : mise en jeu lors de variations de la pression artérielle qui durent quelques minutes ou quelques heures. Elle fait intervenir surtout des régulations hormonales par leur effet vasomoteur systémique.
- Régulation à long terme : s'exerce essentiellement sur la volémie. Elle fait intervenir un organe essentiel, le rein, et un système majeur, le système rénine-angiotensine. Son efficacité maximale n'est atteinte qu'au bout de quelques heures.

Dans la régulation à court terme de la pression artérielle, le principal acteur est le système nerveux autonome. Ce dernier appelé aussi système nerveux végétatif a pour rôle de réguler les fonctions organiques internes, les adapter aux besoins du moment et contrôler les fonctions dites végétatives de l'organisme qui correspondent à l'ensemble des fonctions de nutrition et de maintien de l'homéostasie ¹. L'arc réflexe qui symbolise la base fonctionnelle du système nerveux autonome, est composé de voies afférentes (vers le système nerveux central) et efférentes (vers la périphérie). Les fibres afférentes véhiculent les informations relatives à la douleur et celles qui émanent des mécano et chémorécepteurs des poumons, du tube digestif et du système vasculaire. Les fibres efférentes commandent les réponses réflexes des muscles lisses des différents organes et le fonctionnement du cœur et des glandes. Le système nerveux autonome se compose de deux parties distinctes tant du point de vue anatomique que du point de vue fonctionnel :

- Système parasympathique : c'est l'élément dominant de la régulation de la fréquence cardiaque chez l'homme. Il permet le ralentissement de la fréquence car-

¹L'homéostasie est la capacité à conserver l'équilibre de fonctionnement en dépit des contraintes extérieures

diaque.

- Système sympathique : il est surtout relié aux processus qui impliquent une dépense d'énergie. Lorsque l'organisme est en homéostasie, la fonction principale du système sympathique est de combattre les effets du système parasympathique. A l'inverse de la situation au repos, lors d'une tension extrême par exemple, le système sympathique domine le système parasympathique, surtout dans des situations de stress.

L'action du système nerveux autonome s'exerce préférentiellement par le biais du baroréflexe, défini par un rétro-contrôle ayant pour objectif de réguler de façon rapide l'état tensionnel du système circulatoire. Le contrôleur de la boucle de régulation est donc le système nerveux autonome, l'actionneur principal est le cœur, les capteurs qui mesurent les variations de la pression artérielle sont les baro-récepteurs situés principalement sur l'aorte près du cœur et sur le sinus carotidien dans le cou (figure 5.6). Quand un changement de pression se manifeste, les baro-récepteurs envoient l'information vers le système nerveux autonome qui aussitôt renvoie une réponse aux composants par ses deux branches : la parasympathique cardiomodératrice, à destination du pacemaker naturel du nœud sinoatrial, et le sympathique cardioaccélétratrice, à destination du nœud sinoatrial, du ventricule, et des résistances vasculaires systémiques. Leur effet à court terme est une variation de la pression artérielle, par modification de l'un de ses trois déterminants essentiels qui sont :

- La fréquence cardiaque : toute variation de la pression artérielle entraîne une variation opposée de la fréquence cardiaque (augmentation de la fréquence en cas de baisse de la pression artérielle et ralentissement de la fréquence en cas d'augmentation de la pression artérielle).
- La contractilité.
- Les résistances périphériques : vasodilatation (diminution de la résistance) en cas de diminution de la pression artérielle et une vasoconstriction (augmentation de la résistance) en cas d'augmentation de la pression artérielle.

Dans les deux premiers cas, on parle de baroréflexe cardiaque et dans le dernier cas de baroréflexe vasomoteur.

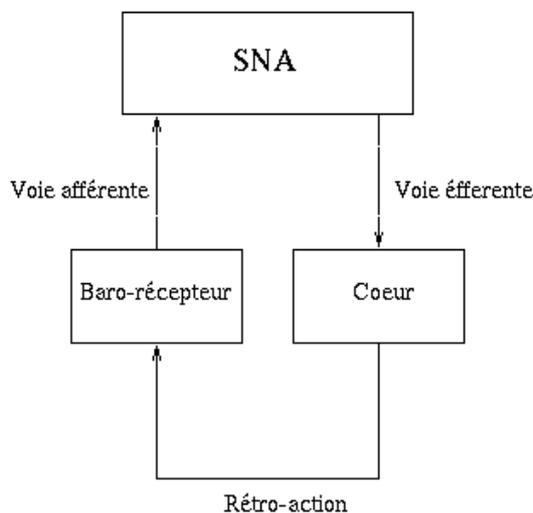


FIG. 5.6 – Boucle de régulation à court terme

L'approche la plus répandue pour mesurer la sensibilité du baroréflexe consiste à étudier la corrélation entre la fréquence cardiaque et des valeurs particulières de la pression artérielle, très souvent la pression systolique (SBP) mais aussi la pression moyenne (MBP) et la pression pulsée (PP). Diverses méthodes temporelles [67], [75], [89] et spectrales [11], [68], [75], [67] ont été proposées pour l'étude de la sensibilité du baroréflexe.

5.6 Volume d'éjection systolique

Le volume d'éjection systolique est une variable physiologique importante continûment régulée par le système nerveux autonome. Il représente le volume de sang que le cœur éjecte à chaque contraction. Il dépend d'une multitude de facteurs, notamment de la force et de la durée de contraction et de la résistance à l'éjection du sang dans la circulation systémique. C'est un indice cardio-vasculaire utilisé pour la prise de décision en clinique. C'est pour cette raison que différentes méthodes ont été développées pour la mesure du volume d'éjection systolique, par exemple la ventriculographie nucléaire invasive [124], l'échocardiographie 2D [52], la surveillance radionuclide [110] etc...

5.7 Mesure de la pression artérielle

Ce n'est qu'en 1730 que la pression sanguine fut mesurée pour la première fois par S. Hales avec un manomètre relié par une canule à l'artère crurale d'un cheval. Cent ans plus tard, en 1828, J.L.M. Poiseuille fit les mêmes mesures avec un manomètre à mercure dont les unités sont encore utilisées en pratique médicale.

En clinique, la mesure de la pression artérielle s'effectue, le plus souvent, en utilisant des techniques non invasives, auscultatoires et oscillatoires [22]. Cependant, ces deux méthodes fournissent seulement une valeur momentanée et ne peuvent être d'une grande utilité lorsque la pression artérielle subit des variations instantanées rapides et importantes. La mesure directe par voie sanglante s'impose. Celle-ci fournit des mesures plus précises et permet l'enregistrement de la pression instantanée mais elle ne peut être utilisée en routine. Toutefois, il existe un type d'appareillage permettant la mesure non invasive de la pression artérielle continue, au niveau du doigt : FINAPRES, PORTAPRES, FINOMETER [83], [120].

5.7.1 Les mesures non invasives

Dans ce qui suit, nous présenterons brièvement les techniques auscultatoires et oscillatoires et nous détaillerons le fonctionnement du FINAPRES.

1. Technique auscultatoire : l'auscultation des bruits artériels a été décrite en 1905 par Korotkoff. L'apparition du premier son marque la pression systolique et sa disparition marque la pression diastolique. La mesure s'effectue avec un sphygmomanomètre (sphygmos : pouls; manomètre : mesure de pression) et un stéthoscope. Le sphygmomanomètre est constitué d'un brassard gonflable relié à une poire et à un manomètre gradué en millimètre de mercure qui mesure la pression dans le brassard. La poire de gonflage est munie d'une valve permettant à l'air du brassard de s'évacuer. Le stéthoscope sert à détecter le pouls artériel.

Le principe de mesure consiste d'abord à ramener la pression du brassard à une valeur supérieure à la pression systolique pour bloquer la circulation artérielle dans le bras. Aucun bruit n'est alors entendu. On laisse ensuite la pression du brassard diminuer progressivement jusqu'à la valeur limite à partir de laquelle la pression artérielle

est suffisante pour laisser de nouveau le sang passer dans l'artère. Le pouls est alors perçu. C'est la pression systolique. En poursuivant le dégonflage, le sang continue à circuler et se fait entendre. Dès que la pression du brassard devient inférieure à la pression diastolique, il n'y a plus d'obstacle au flux artériel et on n'entend plus le pouls [22], [102].

2. Technique oscillatoire : la technique oscillométrique a été mise au point par Marey en 1876. Elle a été appliquée dans l'appareil manuel de Pachon [22]. Elle est basée sur le fait que des oscillations sont enregistrées dans la poche gonflable du sphygmomanomètre lors de son dégonflage. Les oscillations débutent avant la réelle valeur de SBP et se poursuivent au delà de la réelle valeur de DBP. Le maximum d'amplitude des variations de pression correspond à la pression moyenne qui peut ainsi être directement mesurée par cette méthode. SBP et DBP sont estimées en utilisant des méthodes de calcul automatisées à partir de la valeur de cette pression moyenne. Des appareils automatiques ont été mis au point pour réaliser ces mesures. Leur fiabilité dépend de l'algorithme employé pour l'estimation des pressions systolique et diastolique.

3. Le FINAPRES : FINAPRES est l'acronyme de FINger Arterial PRESure (pression artérielle au doigt). C'est un appareil qui permet la mesure non invasive de la pression artérielle continue, battement par battement, au niveau du doigt. La technique mise en œuvre dans cet appareil a été développée par le physiologiste tchèque Jan Peñáz et utilise les critères physiologiques de Karel Wesseling [120]. Diverses études ont prouvé la fiabilité du FINAPRES dans des conditions standards. La méthode de Peñáz consiste à maintenir les artères du doigt à un diamètre fixe malgré les changements intra-artériels de pression, et cela en appliquant une pression externe par l'intermédiaire d'un mini-brassard gonflable placé autour du doigt. Le diamètre auquel les artères du doigt sont maintenues est déterminé à partir d'un pléthysmographe infrarouge, situé au niveau du mini-brassard gonflable et doté d'un émetteur-récepteur optique, telle que la pression transmurale soit nulle et la pression intra-artérielle soit identique à celle du mini-brassard, en forme, en amplitude et à tout instant. Le principe de mesure par pléthysmographie repose sur les propriétés d'absorption et de diffusion de la lumière par le sang. Le dispositif comprend également une valve électrique, un circuit de contrôle électronique ainsi qu'un amplificateur différentiel dont les entrées sont le signal issu du pléthysmographe et une valeur de référence appelée servo-référence. L'ajuste-

ment de cette dernière s'effectue en boucle ouverte (manuellement) ou en boucle fermée (automatiquement). Dans ce dernier cas, il existe plusieurs approches mais le principe de base demeure le même [120]. Le signal issu de l'amplificateur constitue une entrée pour un régulateur PID qui a pour rôle de commander la valve électrique permettant ainsi d'ajuster la pression fournie au mini-brassard gonflable. Enfin, un transducteur de pression connecté à la sortie de la valve électrique permet de visualiser la courbe de pression.

5.7.2 Les mesures invasives

La mesure invasive est nécessaire lorsque la pression varie rapidement et qu'il faut obtenir des prélèvements artériels fréquents ou lorsque la mesure non invasive est difficile ou impossible. Elle permet d'analyser l'aspect de la courbe de la pression artérielle et donne des mesures plus précises que les méthodes indirectes. Cependant, son caractère invasif ne permet pas de l'utiliser en routine et restreint son utilisation à des circonstances particulières. L'enregistrement graphique direct de la pression artérielle par cette méthode s'effectue à l'aide d'un manomètre relié par un cathéter à une artère. L'usage du cathétérisme artériel pour la mesure de la pression artérielle peut engendrer des complications dont certaines, comme l'ischémie ou l'hémorragie peuvent être graves bien qu'exceptionnelles.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions de physiologie cardio-vasculaire. Nous avons présenté brièvement l'anatomie de la pompe cardiaque ainsi que le fonctionnement de l'appareil circulatoire. Notre intérêt a porté sur la notion de pression artérielle qui joue un rôle fondamental dans la circulation sanguine. Nous avons parlé de l'onde de pression artérielle, des changements qu'elle subit lors de sa propagation le long de l'arbre artériel et de sa variabilité à court terme et à long terme. Nous avons également introduit la notion de baroréflexe et de volume d'éjection systolique. Nous avons terminé le chapitre par une brève description des techniques de mesure de la pression artérielle.

Chapitre 6

Reconstruction des signaux de pression artérielle par la SCSA

6.1 Introduction

L'importance de la pression artérielle dans le système cardio-vasculaire a depuis longtemps suscité l'intérêt de la communauté scientifique qui tente d'élaborer des modèles mathématiques afin de mieux comprendre le fonctionnement du système cardio-vasculaire aussi bien dans le cas sain que pathologique. Bien que la littérature abonde de travaux sur la modélisation de la circulation sanguine, l'interprétation de la pression artérielle en clinique de routine se restreint souvent à l'interprétation des valeurs maximale et minimale appelées respectivement pressions systolique et diastolique. Aucune information sur la variabilité instantanée de la pression n'est fournie dans ce cas, pourtant des informations pertinentes pourraient être extraites de la forme du signal de pression artérielle. L'objet de ce chapitre et du suivant consiste à exploiter la SCSA pour analyser la forme des signaux de pression artérielle.

Nous entamerons ce chapitre par un état de l'art sur la modélisation de l'écoulement sanguin. Nous nous intéresserons ensuite à un modèle réduit de la pression artérielle qui consiste en la somme d'un N -soliton, solution de l'équation de KdV, et d'un modèle windkessel à deux éléments. Nous exploiterons ce modèle pour proposer, en fin de chapitre, une technique qui permet de séparer les pressions systolique et diastolique à l'aide de la SCSA, qui joue ainsi le rôle d'un filtre. Mais auparavant, nous illustrerons la reconstruction des signaux de pression artérielle par la SCSA. Nous verrons que 5

à 10 composantes spectrales sont suffisantes pour une reconstruction satisfaisante de ces signaux.

6.2 Modèles d'écoulements

6.2.1 État de l'art

Concernant la modélisation de la pression artérielle, deux approches peuvent être distinguées :

1. les modèles 0D,
2. les modèles à paramètres distribués.

Les modèles 0D incluent le célèbre modèle windkessel introduit par Otto Frank en 1899. Ce dernier compara le cœur et le système artériel à un circuit hydraulique fermé composé d'une pompe connectée à une chambre d'air. Le mot windkessel, d'origine germanique, signifie littéralement "chambre d'air". Ce circuit est rempli d'eau sauf dans les poches d'air. Lorsque l'eau est pompée dans la chambre, elle comprime l'air et elle est éjectée vers l'extérieur de la chambre puis revient de nouveau à la pompe. Ainsi, la compressibilité de l'air dans les poches simule l'élasticité des grosses artères lorsque le sang est propulsé du ventricule gauche. Cet effet est connu sous le nom de compliance artérielle qui est donnée par la relation : $C = \frac{dV_{wk}}{dP_{wk}}$, où V_{wk} et P_{wk} représentent respectivement le volume artériel et la pression artérielle. La résistance à l'écoulement de l'eau, en quittant la chambre d'air, simule la résistance périphérique totale notée R . Elle est donnée par la loi de Hagen-Poiseuille [22], [122].

Ce modèle est analogue à un circuit électrique RLC où le courant et la tension sont respectivement représentés par le débit et la pression [30]. Différents circuits ont été proposés à commencer par le simple windkessel à deux éléments (figure 6.1.a), composé d'une résistance et d'une capacité placées en parallèle. La résistance et la capacité simulent respectivement la résistance périphérique totale et la compliance artérielle. Bien que le windkessel à deux éléments soit simple et décrit efficacement les caractéristiques globales d'un compartiment vasculaire avec un nombre réduit de paramètres ayant un sens physiologique, il ne prend pas en compte les phénomènes de propagation (ne dépend que de la variable temporelle) et ne représente pas de manière satisfaisante

l'impédance d'entrée du système. En effet, lorsque le flux aortique est utilisé comme entrée, la pression aortique estimée par ces modèles présente des différences remarquables par rapport aux mesures en haute fréquence.

Afin d'améliorer le comportement en haute fréquence, Bromser, physiologiste suisse et Frank ont proposé, en 1930, d'ajouter une résistance au circuit précédent. Placée entre la pompe et la chambre d'air, celle-ci caractérise la résistance à l'écoulement due à la valve [107]. Ce modèle est connu sous le nom du modèle windkessel à trois éléments. Le schéma électrique analogue est illustré sur la figure 6.1.b où R_c représente l'impédance caractéristique, placée en série avec la cellule RC . Le modèle windkessel à trois éléments est couramment utilisé car l'introduction de R_c permet d'améliorer considérablement le comportement du modèle en moyenne et haute fréquences. Néanmoins, en basse fréquence, l'impédance d'entrée du système est surestimée.

Ainsi, différentes modifications des schémas précédents ont été proposées. Une des corrections retenue consiste à placer en parallèle à la résistance caractéristique une inductance L qui prend en compte l'inertie totale du système (figure 6.1.c) [109]. Ce modèle fournit une bonne représentation du système dans toutes les gammes de fréquences :

- Dans les très basses fréquences, l'impédance d'entrée est donnée par la résistance R .
- Pour les basses fréquences, l'impédance d'entrée décroît en raison de la présence de la capacité et de l'inductance.
- Pour les fréquences moyennes et les hautes fréquences (environ deux à quatre fois le rythme cardiaque), l'impédance d'entrée est donnée par la résistance caractéristique, qui est une résistance constante en haute fréquence.

Les modèles à paramètres distribués quant à eux, font appel aux principes de l'écoulement des fluides. Ils considèrent le sang comme étant un fluide incompressible qui s'écoule dans des vaisseaux élastiques. Ces modèles découlent des équations de Navier-Stokes, à savoir les équations de quantité de mouvement et de continuité, complétées par des équations qui décrivent le mouvement de la paroi du vaisseau. Diverses

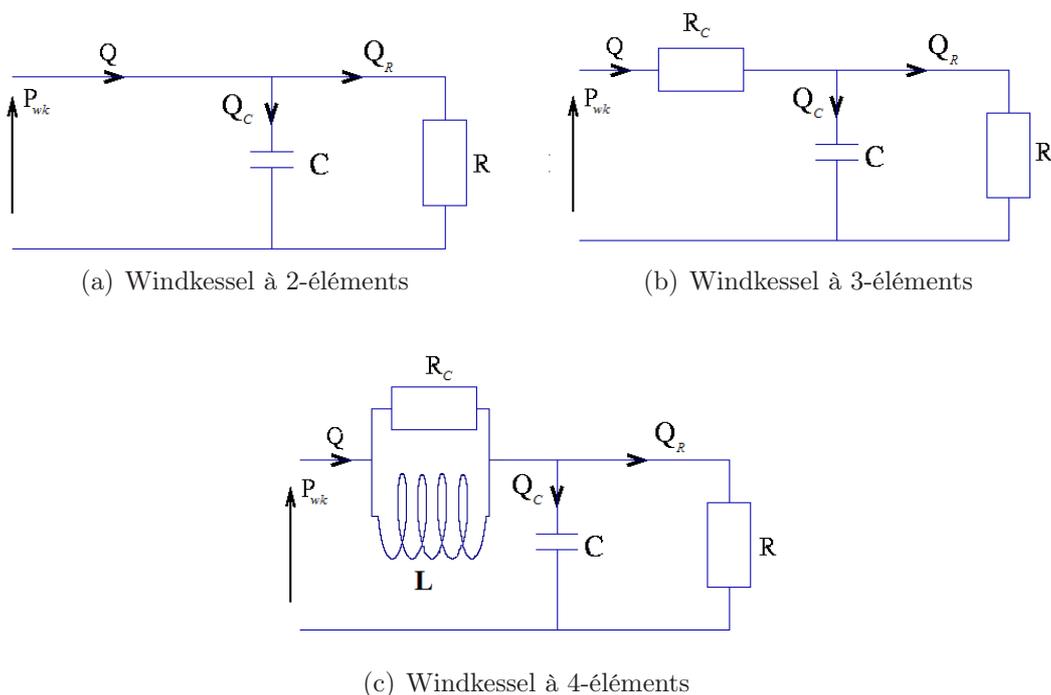


FIG. 6.1 – Modèles windkessel

études ont été consacrées à l'élaboration de tels modèles [15], [28], [80], [72], [82], [87], [127]. Celles-ci diffèrent en fonction des hypothèses effectuées sur le sang et les vaisseaux ainsi que de la manière d'analyser et de traiter les équations qui en découlent. A l'opposé des modèles windkessel, les modèles à paramètres distribués renseignent sur la propagation des ondes ainsi que sur certaines dynamiques non linéaires. Il est cependant difficile, voire impossible, d'établir des expressions explicites des ondes de pression et de débit artériels dans ce cas. Toutefois, le développement des calculateurs numériques a fortement contribué à la résolution numérique de ces problèmes.

Ainsi, en dépit du fait que les modèles $3D$ soient particulièrement précis, ils ne peuvent modéliser que de petits compartiments en raison de leur complexité. Les modèles $3D$ sont souvent simplifiés en des modèles $2D$ et $1D$ [14] sous différentes hypothèses. Aussi, les modèles $0D$ peuvent être déduits à partir des modèles $1D$ [76], [73] pour être utilisés comme conditions aux limites pour des modèles $1D$ [82], [27] ou pour l'analyse des signaux.

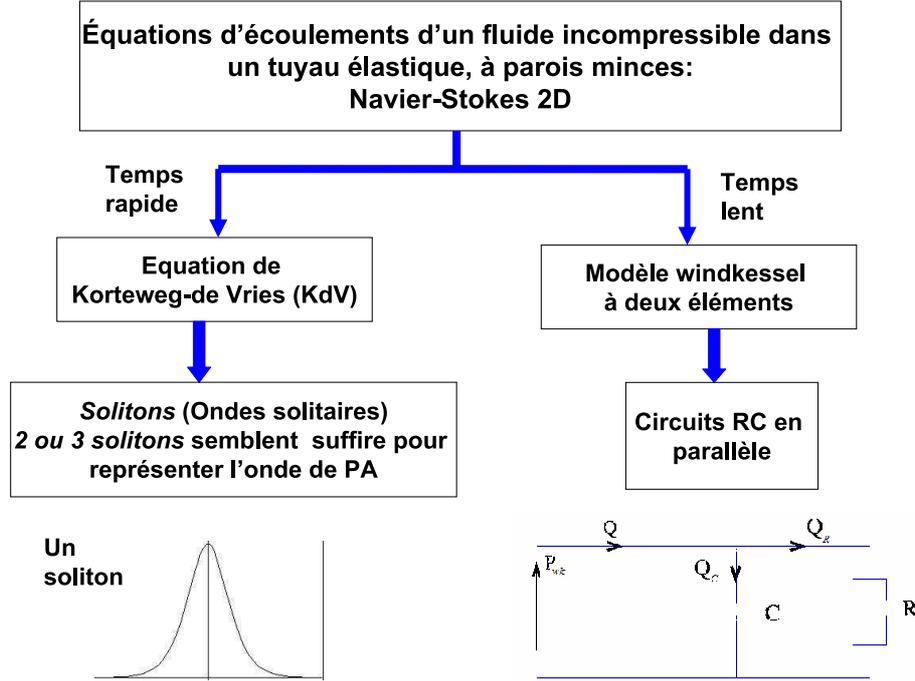
Lors de sa propagation le long de l'arbre artériel, l'onde de pression artérielle subit des changements de forme caractérisés par une augmentation de l'amplitude, accompagnée de fronts raides. Ces deux phénomènes, appelés *Peaking* et *Steepening* respectivement ont été expliqués par l'existence d'ondes réfléchies qui se superposent aux ondes incidentes. Ces réflexions naissent par exemple au niveau des bifurcations. Cette décomposition de la pression artérielle en ondes incidentes et réfléchies est très répandue [121], [65], [88], [6], [108], [92], [91], [93], mais ne constitue pas l'unique manière d'interpréter les phénomènes observés. En effet, une décomposition de l'onde de pression artérielle en la somme d'ondes progressives et d'un modèle windkessel à deux éléments telle que proposée dans [20], [56] permet d'expliquer le *Peaking* et le *Steepening* comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit.

6.2.2 Un modèle réduit de pression artérielle

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à un modèle réduit de pression artérielle proposé dans [19], [20], [54], [55], [56]. L'idée principale de cette approche, comme illustré sur la figure 6.2, consiste à décomposer la pression artérielle en une somme de deux termes : un N -soliton, solution d'une équation de KdV, qui décrit les phénomènes rapides prédominant durant la phase systolique et un modèle windkessel à deux éléments décrivant les phénomènes lents qui prédominent durant la phase diastolique.

L'utilisation des solitons pour décrire les ondes de pression artérielle a déjà été introduite dans [127] et [87] où une équation de KdV et une équation de Boussinesq ont été respectivement proposées comme modèles d'écoulements sanguins. Par ailleurs, dans [20], partant d'une équation de Navier-Stokes en prenant en compte l'accélération radiale et en appliquant une méthode de perturbation singulière, une équation de KdV a été proposée pour modéliser uniquement les phénomènes rapides et qui admet comme solution particulière un N -soliton. Il a été alors remarqué que 2 ou 3 solitons en interaction sont en général suffisants pour une description satisfaisante de la phase systolique, chaque soliton représentant une bosse dans le signal de pression. En outre, en ajoutant un simple modèle windkessel à deux éléments, la phase diastolique est bien représentée [56].

Rappelons brièvement cette décomposition de la pression artérielle notée P . Celle-ci


 FIG. 6.2 – Modèle réduit de pression artérielle : N -soliton + windkessel

s'écrit sous la forme suivante :

$$P(x, t) = P_s(x, t) + P_{wk}(t), \quad (6.1)$$

où x est la position sur l'arbre artériel et t le temps. $P_s(x, t) = \bigoplus_{j=1}^N P_{sj}(x, t)$ représente une superposition non-linéaire de N solitons $P_{sj}(x, t)$, avec $N = 2$ ou 3 , en général. P_{wk} est la pression obtenue par un modèle windkessel à deux éléments.

Nous rappelons que P_s est solution d'une équation de KdV donnée par :

$$\frac{\partial P_s}{\partial x} + (d_0 + d_1 P_s) \frac{\partial P_s}{\partial t} + d_2 \frac{\partial^3 P_s}{\partial t^3} = 0, \quad (6.2)$$

où

$$d_0 = \frac{1}{c_0}, \quad d_1 = -\frac{3}{2} \frac{1}{A_0 c_0^2}, \quad d_2 = -\frac{\rho_\omega h_0 R_0}{2\rho c_0^3}, \quad (6.3)$$

avec ρ et ρ_ω les densités du sang et de la paroi respectivement. c_0 est la vitesse de Moens-Korteweg [20]. E représente le coefficient d'élasticité de la paroi. R_0 , A_0 et h_0

sont respectivement le rayon, la section et l'épaisseur du vaisseau à l'équilibre.

Par le changement de variable suivant :

$$\xi = t - d_0x, \quad \tau = d_2x \quad \text{et} \quad y = \frac{d_1}{6d_2}P_s, \quad (6.4)$$

l'équation (6.2) se ramène à une équation de KdV standard :

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + 6y \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3} = 0, \quad y(\xi, 0) = y_0(\xi). \quad (6.5)$$

L'expression d'un N -soliton, solution de l'équation (6.5) est donnée par (4.25)-(4.26).

D'autre part, $P_{wk}(t)$ est régi par l'équation différentielle suivante [109], [118] :

$$\frac{dP_{wk}}{dt}(t) + \frac{P_{wk}(t)}{RC} = \frac{P_\infty}{RC} + \frac{Q(t)}{C}, \quad (6.6)$$

où R représente la résistance périphérique totale et $C = \frac{dV_{wk}}{dP_{wk}}$ la compliance artérielle. $Q(t)$ est le débit d'entrée qui est proportionnel à P_s comme suggéré dans [118] : $Q = \frac{P_s}{R_s}$.

L'identifiabilité des paramètres du 2-soliton, du 3-soliton et du modèle windkessel à deux éléments a été étudiée dans [20], [56]. Les paramètres du modèle réduit (2 ou 3 solitons + windkessel) ont été estimés à partir de mesures réelles de pression artérielle. Les pressions réelles et estimées sont représentées sur les figures 6.3-6.5.

Comme nous l'avons dit précédemment, le modèle à base de solitons " N -soliton + windkessel" permet d'expliquer certains phénomènes observés lors de la propagation de l'onde de pression artérielle. Le *Peaking* par exemple résulterait d'une augmentation de la vitesse de l'onde tout au long de l'arbre artériel due aux changements des caractéristiques des vaisseaux (augmentation de la rigidité et diminution de la section). L'augmentation de la vitesse des solitons engendre l'augmentation de leur amplitude d'où le *Peaking*. D'autre part, ce modèle dépend d'un nombre réduit de paramètres et prend en compte les phénomènes de propagation, ce qui peut être utile pour faire du transfert distal-proximal, à savoir reconstruire la pression proximale (au niveau du

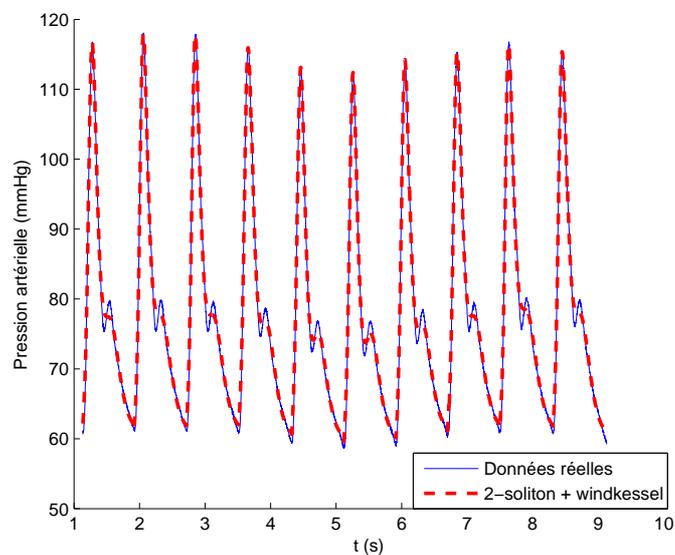


FIG. 6.3 – Pressions estimée et mesurée au niveau du doigt : 2-soliton + windkessel à deux éléments

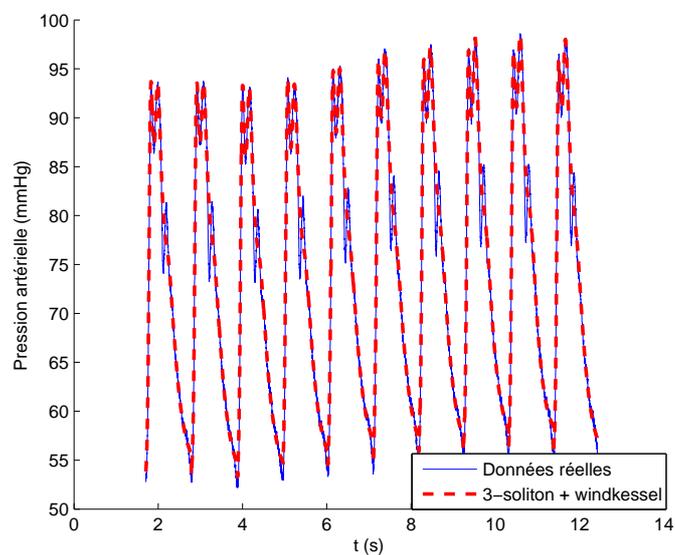


FIG. 6.4 – Pressions estimée et mesurée au niveau de l'aorte : 3-soliton + windkessel à deux éléments

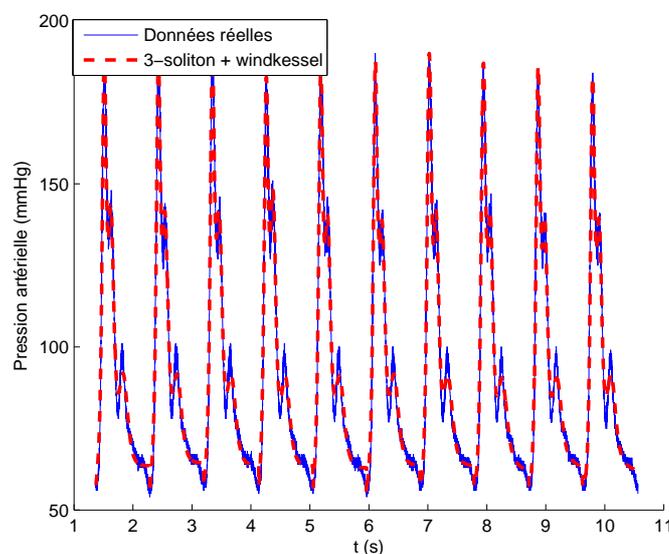


FIG. 6.5 – Pressions estimée et mesurée au niveau du doigt : 3-soliton + windkessel à deux éléments

cœur) à partir de la pression distale (au niveau du doigt par exemple), cette dernière étant mesurée par des méthodes non-invasives.

Bien que le modèle " N -soliton + windkessel" marche bien comme l'illustre les figures précédentes, il présente un inconvénient majeur liée au fait que cette décomposition ne soit que partiellement justifiée du point de vue physique et mathématique [20], ce qui se paye en pratique par la nécessité d'ajuster à la main l'ordre N du soliton puis d'identifier les paramètres de ce modèle "hybride". Nous avons pensé donc essayer de représenter l'ensemble du signal, y compris sa fin exponentielle (phase télédiastolique où le modèle de windkessel excelle) par un N -soliton et donc appliquer la SBSA. Mais comme nous l'avons dit dans la première partie de la thèse, étant donné les difficultés liées au calcul numérique des coefficients de normalisation, nous proposons d'utiliser la SCSA au lieu de la SBSA. C'est l'objet du paragraphe suivant.

6.3 SCSA et pression artérielle

6.3.1 Reconstruction de la pression artérielle par la SCSA

Nous proposons à présent d'exploiter la SCSA pour la reconstruction des signaux de pression artérielle. Notons P le signal de pression artérielle et \hat{P} son estimation par la SCSA :

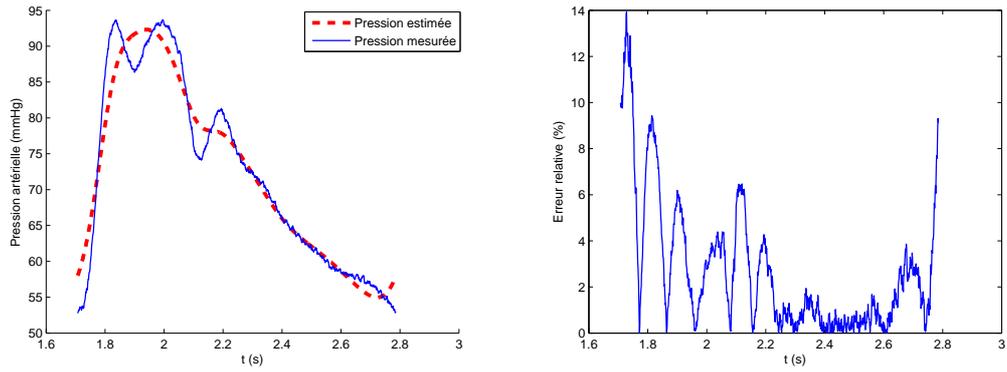
$$\hat{P}(t) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(t), \quad (6.7)$$

où $-\kappa_{n\chi}^2$, $n = 1, \dots, N_\chi$ sont les N_χ valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $H(-\chi P)$ et $\psi_{n\chi}$ les fonctions propres L^2 -normalisées associées (pour la procédure de calcul de $\hat{P}(t)$ se référer au chapitre 4).

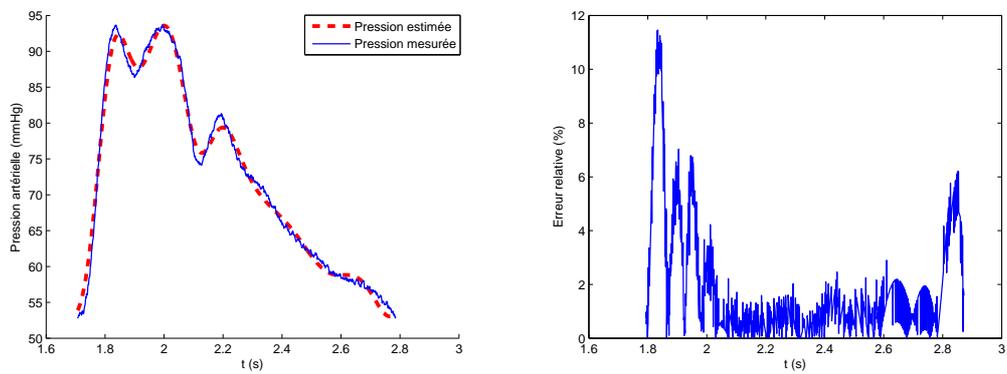
Le signal de pression est reconstruit pour plusieurs valeurs de χ et donc de N_χ . Les figures 6.6, 6.7, 6.8 et 6.9 illustrent les pressions mesurées et estimées sur un battement ainsi que l'erreur d'estimation, au niveau de l'aorte et du doigt respectivement. Notons que 5 à 9 composantes spectrales sont suffisantes pour une bonne reconstruction de la pression. Les figures 6.10 et 6.11 montrent une bonne représentation de la pression au niveau aortique et au niveau du doigt sur plusieurs battements avec 9 composantes spectrales [53], [57].

6.3.2 Séparation des pressions systolique et diastolique

Inspirés du modèle " N -solitons + windkessel" présenté dans le paragraphe 6.2.2, nous proposons dans cette section une technique qui permet d'estimer les pressions systolique et diastolique. Nous avons vu dans le chapitre 3 que dans le cas particulier où $-\chi y$ est un N -soliton, la SCSA coïncide avec la SBSA et s'interprète par une superposition de solitons. Chaque composante spectrale représente ainsi un 1-soliton. Or d'après le modèle réduit de pression artérielle " N -solitons + windkessel", la partie systolique est décrite par des solitons. Nous avons aussi vu que les solitons sont caractérisés par leur vitesse déterminée par les valeurs propres négatives $-\kappa_{n\chi}^2$, $n = 1, \dots, N_\chi$ de l'opérateur de Schrödinger. Les plus grandes valeurs des $\kappa_{n\chi}$ caractérisent les composantes rapides et les plus petites valeurs des $\kappa_{n\chi}$ caractérisent les composantes lentes. Partons de ces remarques, nous proposons de prendre deux

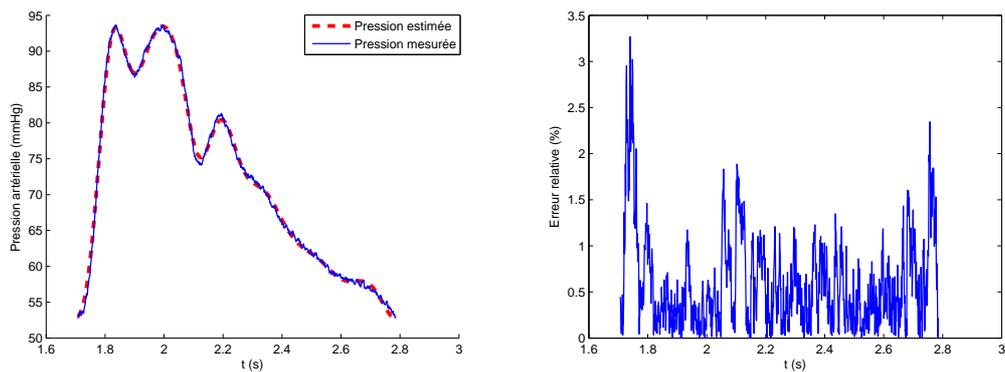


(a) $N_\chi = 3$

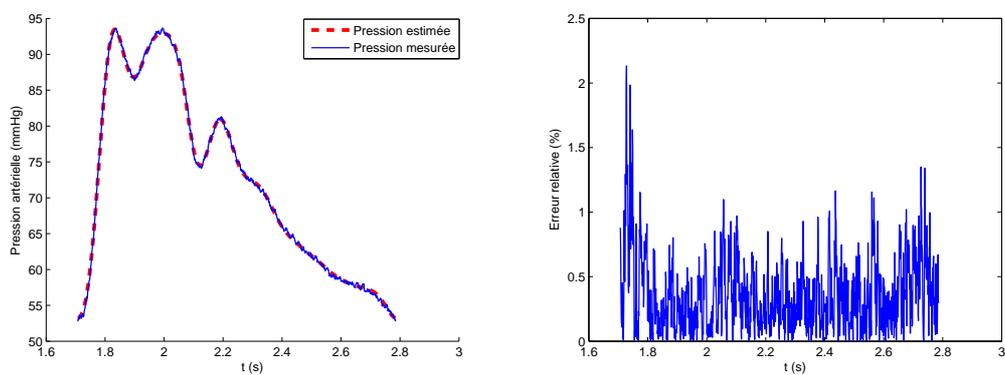


(b) $N_\chi = 5$

FIG. 6.6 – Reconstruction de la pression aortique par la SCSA. A gauche les pressions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.

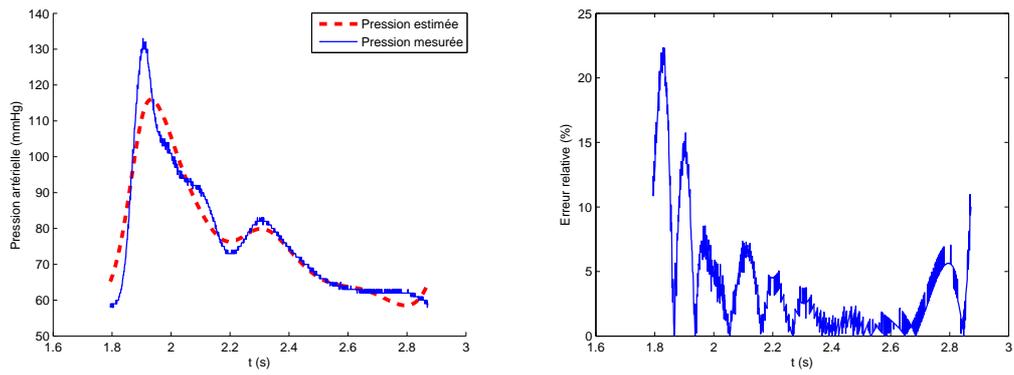


(c) $N_x = 7$

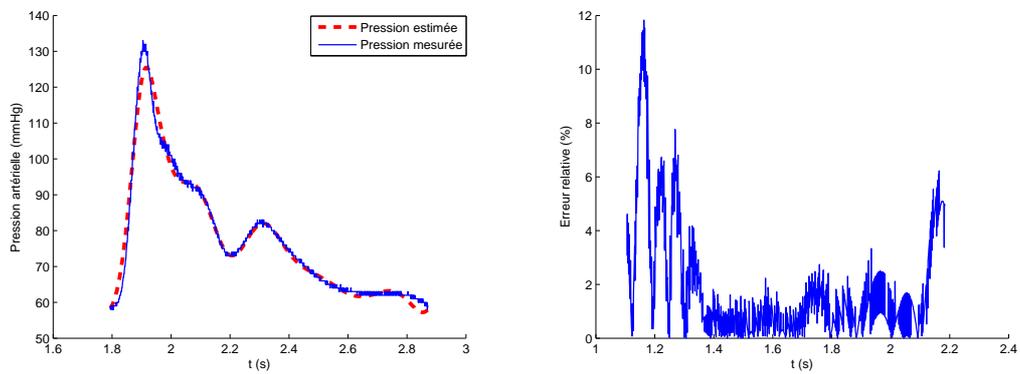


(d) $N_x = 9$

FIG. 6.7 – Reconstruction de la pression aortique par la SCSA. A gauche les pressions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.

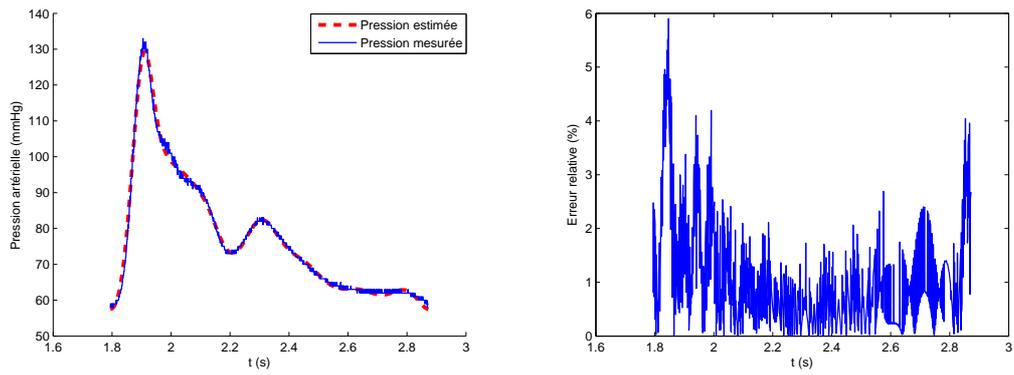


(a) $N_\chi = 3$

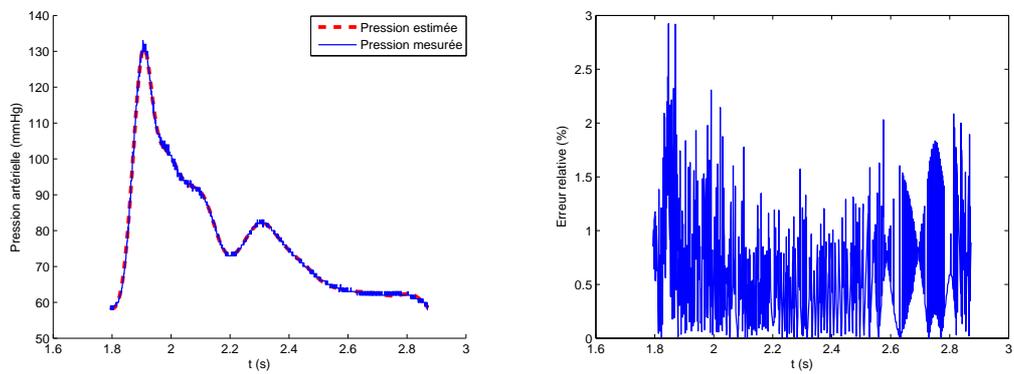


(b) $N_\chi = 5$

FIG. 6.8 – Reconstruction de la pression au doigt par la SCSA. A gauche les pressions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.



(c) $N_x = 7$



(d) $N_x = 9$

FIG. 6.9 – Reconstruction de la pression au doigt par la SCSA. A gauche les pressions mesurée et estimée, à droite, l'erreur relative.

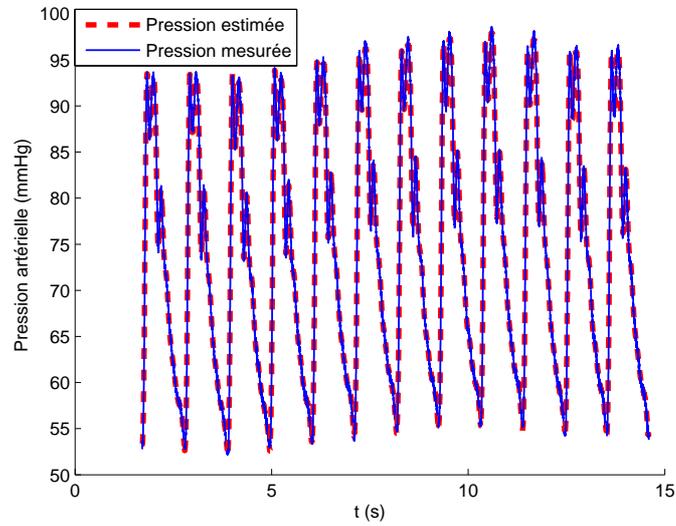


FIG. 6.10 – Pressions mesurée et estimée au niveau de l'aorte sur plusieurs battements, pour $N_\chi = 9$

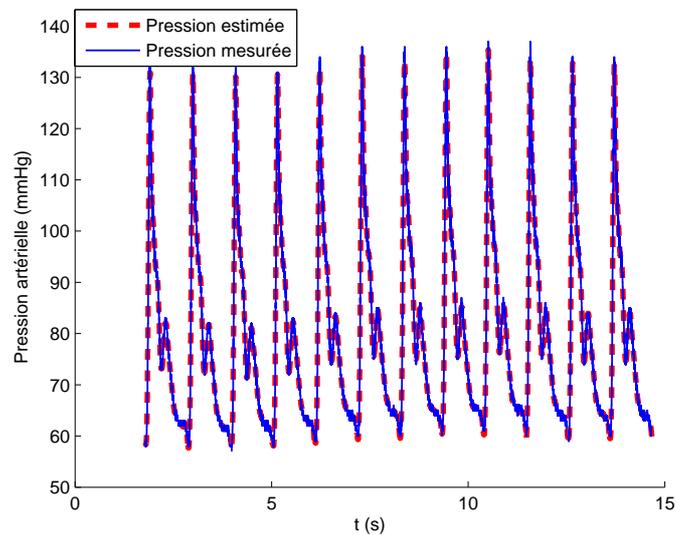


FIG. 6.11 – Pressions mesurée et estimée au niveau du doigt sur plusieurs battements, pour $N_\chi = 9$

sommes partielles de composantes spectrales : la première composée de N_s (égal à 1, 2 ou 3 en général) composantes associées aux $\kappa_{n\chi}$ les plus grands et la deuxième comprenant le reste des composantes. La première somme partielle, représentera les phénomènes rapides qui prédominent durant la phase systolique et la seconde somme partielle, décrit les phénomènes lents qui prédominent durant la phase diastolique. Notons \hat{P}_s et \hat{P}_d respectivement les pressions systolique et diastolique estimées par la SCSA. Nous avons donc :

$$\hat{P}_s(t) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_s} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(t), \quad \hat{P}_d(t) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=N_s+1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(t). \quad (6.8)$$

Les figures 6.12 et 6.13 représentent les pressions totales mesurées et les pressions systolique et diastolique estimées. Nous remarquons que \hat{P}_s et \hat{P}_d sont respectivement localisées durant la systole et la diastole. Ce qui valide notre décomposition.

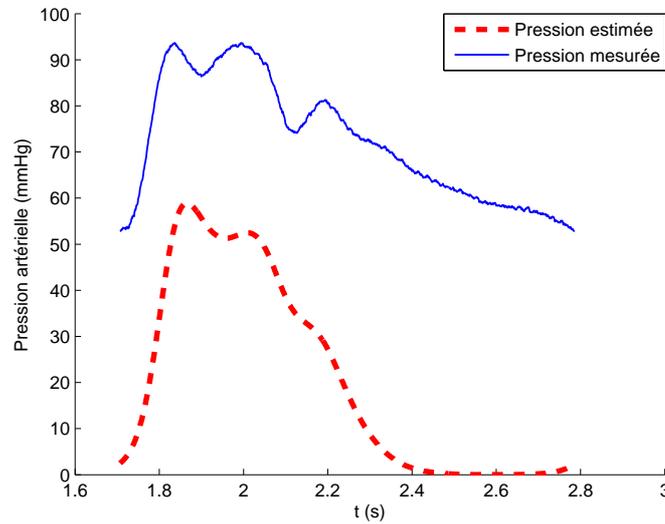


FIG. 6.12 – Pression systolique estimée

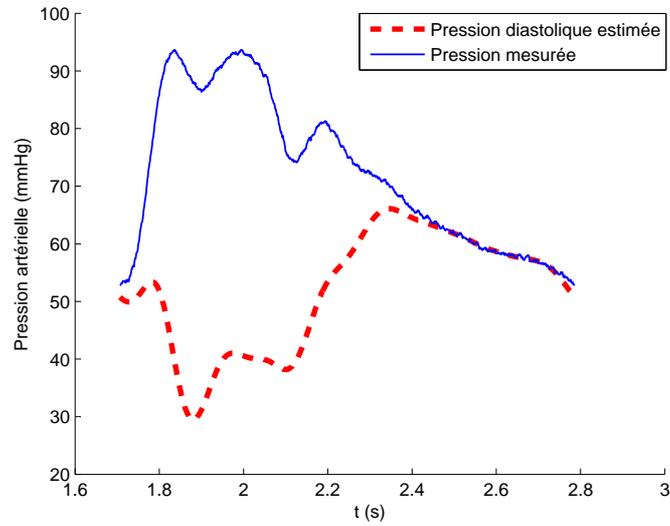


FIG. 6.13 – Pression diastolique estimée

6.4 Conclusion

Après un rappel sur les modèles d'écoulements sanguins, nous avons appliqué la SCSA à la reconstruction des signaux de pression artérielle. Nous avons vu que 5 à 9 composantes spectrales sont suffisantes pour une bonne reconstruction de ces signaux. Nous avons également vu qu'il est possible d'avoir des estimations des pressions systolique et diastolique en utilisant la SCSA qui joue ainsi le rôle d'un filtre. Cette estimation des pressions systolique et diastolique doit être néanmoins affinée afin de déterminer le nombre de composantes rapides à considérer.

Chapitre 7

De nouveaux indices pour l'analyse de la forme des signaux de pression artérielle

7.1 Introduction

L'analyse de la variabilité cardio-vasculaire permet d'évaluer l'influence du système nerveux autonome sur le contrôle de l'activité cardiaque. Elle offre également la possibilité de détecter et de prédire des anomalies cardiaques. Elle consiste d'abord à extraire des séries temporelles ¹ de variables cardio-vasculaires à partir de mesures de signaux de pression artérielle et d'électrocardiogramme (ECG). Ces deux signaux sont les plus utilisés en clinique de routine en raison de la simplicité de leur mesure par moyen non-invasif. Les séries extraites sont ensuite analysées par différentes techniques.

Le système cardio-vasculaire est un système dynamique ; la valeur prise par les variables cardio-vasculaires changent constamment au cours du temps sous l'influence de divers facteurs physiologiques, pathologiques, environnementaux etc... Les moyennes des valeurs prises par ces paramètres peuvent varier d'une condition physiologique à une autre, par exemple entre le repos et l'exercice. Cependant ces valeurs peuvent varier également sous des conditions relativement stables, d'où la nécessité de considérer simultanément les moyennes et la variabilité globale, mesurée par l'écart type par

¹Une série temporelle, appelée également série chronologique consiste en une série de valeurs prises par une variable au cours du temps.

exemple.

L'analyse de la variabilité se fait en général sur la fréquence cardiaque représentée par RR (distance entre deux pics R successifs sur un signal ECG) ou PI (distance entre deux maximums successifs de pression), et sur les variations de la pression artérielle souvent représentée par SBP, DBP ou MBP qui renseignent sur l'activité mécanique du cœur. Il existe différentes méthodes d'analyse des séries chronologiques cardiaques : temporelles, fréquentielles, temps-fréquence. L'analyse temporelle étudie la variabilité en moyenne et la variabilité globale exprimée en terme de déviation standard des séries temporelles de ces paramètres. Dans l'analyse fréquentielle, deux types d'oscillations sont distinguées : haute fréquence liée à la fréquence respiratoire, appelée également arythmie sinusale respiratoire et basse fréquence qui caractérise les ondes Mayer.

Nous avons montré dans le chapitre précédent que la SCSA permet une reconstruction satisfaisante des signaux de pression artérielle et que 5 à 9 composantes spectrales sont suffisantes. La SCSA permet également de faire un filtrage séparant les pressions systolique et diastolique. Par ailleurs, la SCSA introduit de nouveaux paramètres qui sont les valeurs propres et les invariants. Nous proposons donc, à partir de signaux de pression artérielle, d'extraire les séries temporelles de ces nouveaux paramètres battement par battement afin de les analyser dans différentes situations pathologiques et physiologiques. Après l'introduction des paramètres SCSA que nous proposons d'analyser, nous présenterons dans ce chapitre les résultats, enrichis de discussions, obtenus dans trois situations physiologiques (tilt, handgrip, sportifs avant et après entraînement) et une situation pathologique (insuffisance cardiaque).

Cette étude a été effectuée en collaboration avec Claire Médigue qui s'est chargée d'extraire les séries temporelles des différents paramètres et d'effectuer les différents tests statistiques.

7.2 Paramètres SCSA et pression artérielle

L'application de la SCSA à l'analyse d'un signal de pression artérielle permet de calculer de nouveaux paramètres qui sont :

- les valeurs propres,

- les invariants globaux,
- les invariants systoliques et diastoliques qui résultent de la séparation des phases systolique et diastolique comme c'est présenté dans le chapitre 6.

Nous nous contentons dans cette étude d'analyser les modules des deux premières valeurs propres négatives $|\kappa_{j\chi}^2| = |\lambda_j|$, $j = 1, 2$ et des deux premiers invariants, globaux, systoliques et diastoliques notés respectivement INV_j , $INVS_j$, $INVD_j$, $j = 1, 2$.

7.2.1 Les valeurs propres

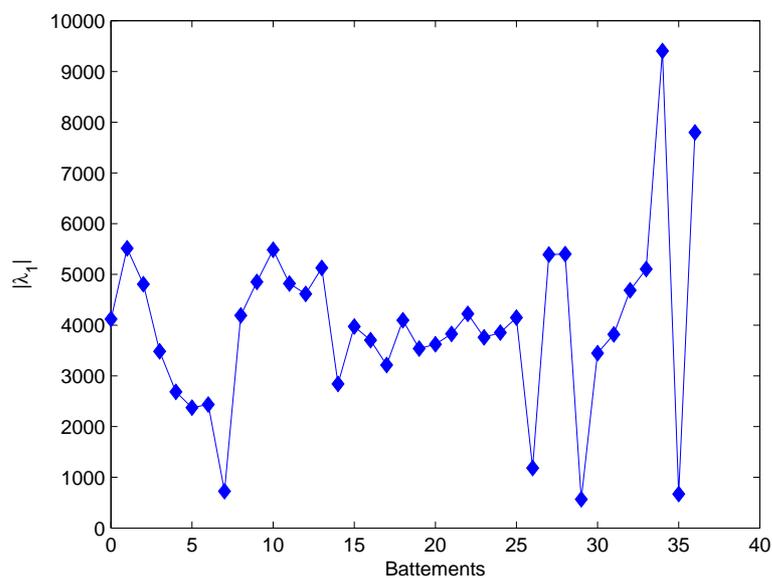
Les valeurs propres calculées par la méthode SCSA dépendent fortement de la forme de l'onde de pression. En effet, quand celle-ci change, les valeurs propres de $H(-\chi P)$ changent également. Ceci est illustré sur la figure 7.1 dans laquelle sont représentés un signal de pression artérielle sur quelques battements et la série temporelle du module de la première valeur propre extraite à partir de ce signal. Celle-ci reflète bien les variations sur la forme du signal. Ainsi, nous pensons qu'il serait possible d'utiliser ces valeurs propres, et en particulier la première valeur propre qui est la plus significative (de plus grand module), pour mesurer la sensibilité du baroréflexe dans un certain sens. Pour rappel, le baroréflexe exprime la variation de la fréquence cardiaque en réponse aux variations de pression. Les mesures les plus fréquemment utilisées pour l'étude de la sensibilité du baroréflexe utilisent une ou deux valeurs de pression uniquement à savoir le rapport RR sur SBP ou RR sur PP. Ainsi $|\lambda_1|$, qui reflète tout changement de la forme du signal de pression artérielle, pourrait être plus informative sur la relation entre la période cardiaque et la pression artérielle.

7.2.2 Les invariants

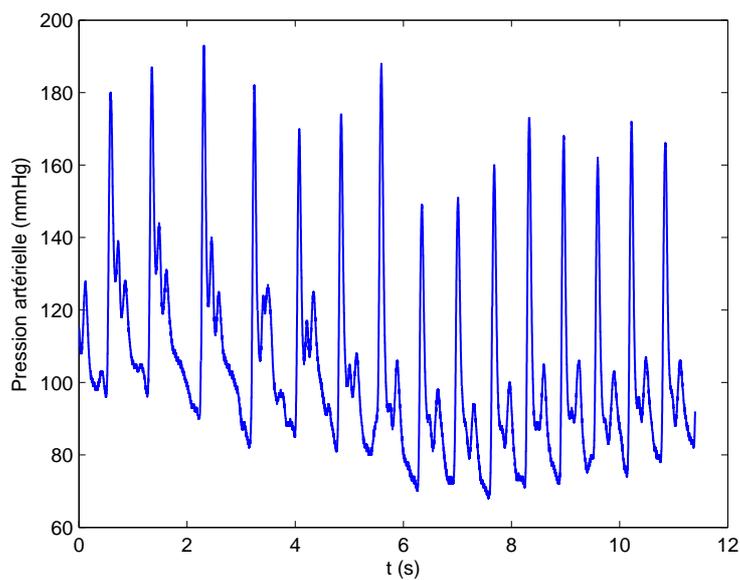
En se référant à la proposition 3.3.3, nous définissons les deux premiers invariants globaux par :

$$INV_1 = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}, \quad INV_2 = \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}^3, \quad (7.1)$$

Les invariants systoliques et diastoliques se déduisent de la séparation des phases systolique et diastolique et sont par conséquent donnés par des sommes partielles des



(a)



(b)

FIG. 7.1 – (a) Série temporelle de la première valeur propre pour un sujet sain au repos, sous une fréquence de respiration de $0.25Hz$, sur plusieurs battements. (b) Un zoom sur quelques battements montre les changements morphologiques du signal de pression artérielle.

puissances des modules des valeurs propres négatives :

$$INVS_1 = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_s} \kappa_{n\chi}, \quad INVD_1 = \frac{4}{\chi} \sum_{n=N_s+1}^{N_x} \kappa_{n\chi}, \quad (7.2)$$

$$INVS_2 = \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n=1}^{N_s} \kappa_{n\chi}^3, \quad INVD_2 = \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n=N_s+1}^{N_x} \kappa_{n\chi}^3. \quad (7.3)$$

Le premier invariant global INV_1 est, par définition, la valeur moyenne de la pression artérielle qui est une grandeur standard en clinique. Le deuxième invariant global INV_2 , représente quand à lui l'intégrale du carré de la pression, qui n'est pas une grandeur connue en clinique mais calculable par des méthodes directes. Les deux premiers invariants systoliques et diastoliques sont de nouveaux indices qu'il semble intéressant d'exploiter. Par quelques considérations physiques, il serait possible d'associer $INVS_1$ au volume d'éjection systolique et $INVS_2$ à la force de contraction du ventricule gauche.

7.3 Analyse des paramètres SCSA dans différentes situations physiologiques et pathologiques

Les paramètres SCSA ainsi que certains paramètres classiques qui sont PI, SBP et DBP (figure 7.2) ont été analysés dans quatre situations physiologiques et pathologiques, d'un battement à un autre. La procédure suivie pour l'analyse est la suivante :

1. Extraire les séries temporelles des différents paramètres : classique et SCSA, à partir de signaux brut de pression artérielle.
2. Analyser la variabilité des séries temporelles obtenues en moyenne et en terme de variabilité globale par des tests statistiques tels que les tests de Wilcoxon et Mann-Whitney [38].

Nous présentons dans ce qui suit les résultats obtenus dans les situations suivantes :

1. comparaison entre avant et après un test tilt,
2. comparaison entre avant et pendant un test handgrip,
3. discrimination entre des insuffisants cardiaques modérés et des sujets contrôles [58],

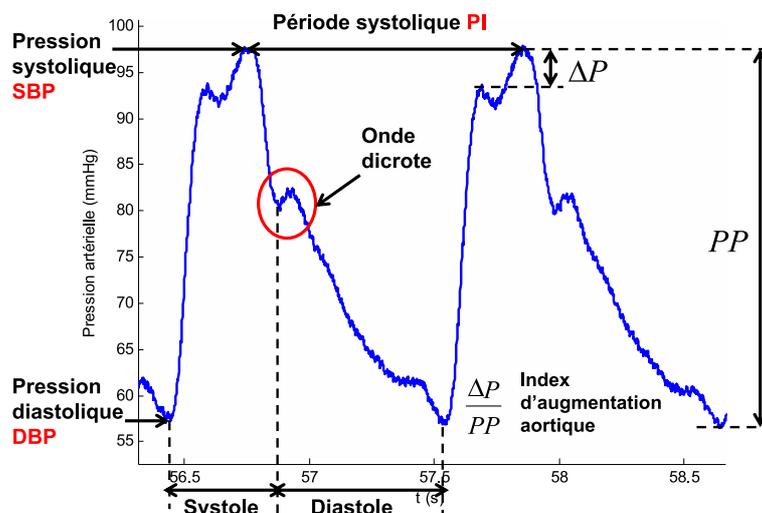


FIG. 7.2 – Un signal de pression aortique

4. comparaison entre avant et après entraînement pour des sportifs [58].

7.3.1 Test tilt

Le test tilt ou test d'inclinaison est principalement utilisé pour l'étude du contrôle à court terme du système cardio-vasculaire par le système nerveux autonome. Il est utilisé dans le diagnostic des syncopes. Il consiste au passage passif de la position allongée à la position debout (figure 7.3). Ce qui engendre une redistribution du volume sanguin veineux, de la région intra-thoracique vers les veines des membres inférieurs provoquant une diminution du volume d'éjection systolique, une diminution de PI (augmentation de la fréquence cardiaque), une diminution de la SBP et une augmentation de la contractilité ventriculaire (figure 7.4) [21], [100], [101], [111].

A travers cet exemple, nous voulons étudier l'information apportée par les paramètres SCSA et comparer ces derniers aux paramètres classiques de la pression artérielle. Nous avons opté pour un test tilt parce que c'est un test bien connu, ce qui nous permet de vérifier certaines hypothèses sur les paramètres. Nous avons considéré un groupe de 15 sujets en bonne santé, sous une fréquence de respiration de $0.25Hz$ [7]. La table a été inclinée de 60 degrés. La pression artérielle continue a été mesurée au niveau du doigt à l'aide d'un FINAPRES. Les séries temporelles des paramètres classiques et des paramètres SCSA pour les deux positions, allongée et debout, ont été

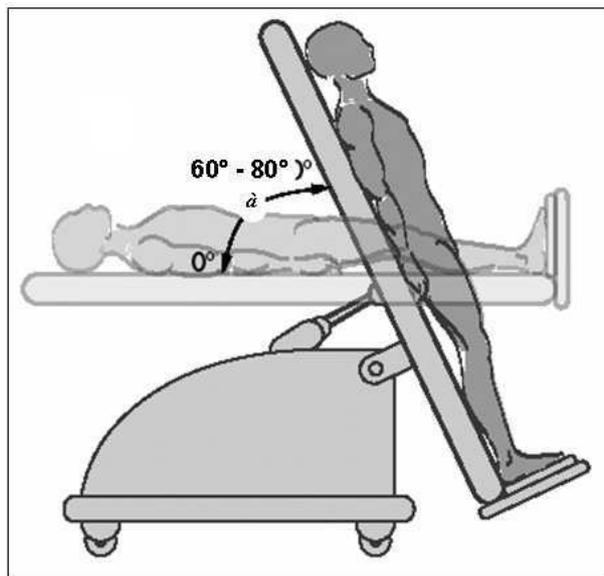


FIG. 7.3 – Test d’inclinaison ou tilt

extraites et comparées à l’aide du test statistique non paramétrique de Wilcoxon. Il est à noter que la position debout fait référence à la position bien après le tilt (loin de la transition).

La figure 7.5 illustre les séries temporelles de PI, SBP, $INVS_1$ et $|\lambda_1|$ en position allongée et debout. Les valeurs moyennes des paramètres de la pression artérielle sont représentées sur le tableau 7.1². Nous remarquons des différences importantes entre les deux positions sur les moyennes de PI, DBP, $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ et $INVS_1$ alors que les autres paramètres ne varient pas de manière significative. Si l’on associait $INVS_1$ au volume d’éjection systolique, comme suggéré dans le paragraphe 7.2.2, alors les résultats obtenus font état d’un volume d’éjection systolique diminué à distance du tilt. Ce résultat s’avère réaliste puisque la diminution du volume d’éjection systolique s’explique par la diminution du retour veineux.

L’analyse de la pression artérielle durant la transition de la position allongée à la position debout a été possible dans le cas de 9 sujets uniquement. Pour ces derniers, nous avons représenté PI du battement $n + 1$ en fonction de $|\lambda_1|$ calculé pour le battement n : la relation est linéaire. Nous remarquons à travers la figure 7.6 que

²SEM (Standard Error of the Mean) fait référence à l’erreur type de la moyenne.

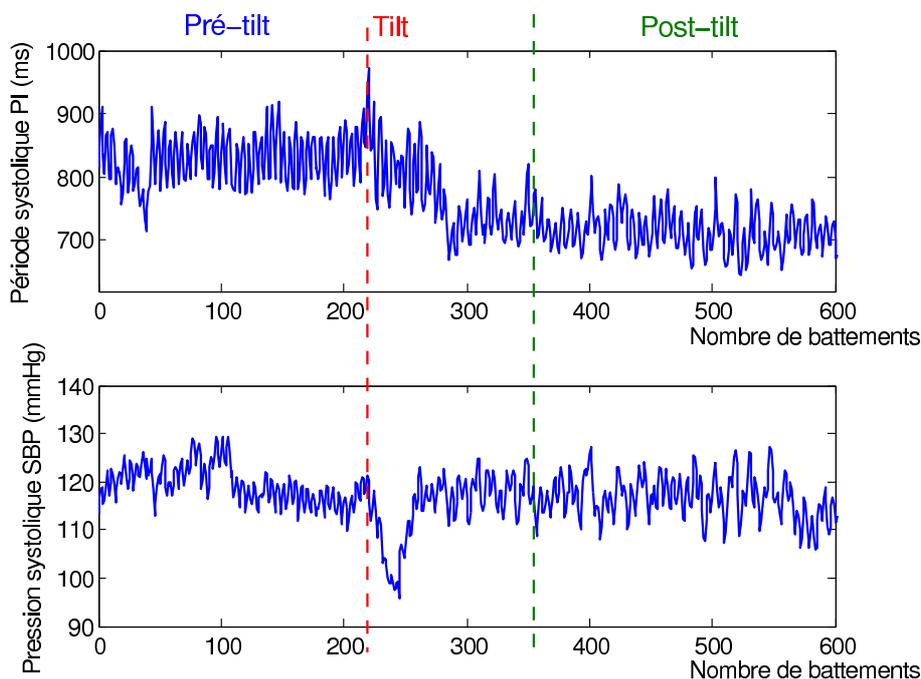


FIG. 7.4 – PI et SBP durant le protocole tilt

lorsque PI diminue, $|\lambda_1|$ augmente et que la corrélation linéaire entre PI et $|\lambda_1|$ est plus importante autour de la transition qu'en position allongée. Le tableau 7.2 montre que le coefficient de corrélation (R^2) et la pente sont significativement plus importants autour de la transition. Nous avons comparé cette pente et ce coefficient de corrélation à ceux obtenus en utilisant des indices classiques de mesure de la sensibilité du baroréflexe, qui sont SBP et PP. Le tableau 7.3 montre que $|\lambda_1|$ a une corrélation plus importante avec PI.

7.3.2 Exercice isométrique ou handgrip

L'exercice isométrique ou handgrip consiste en une contraction statique du muscle sans mouvement visible des articulations [31]. C'est un exercice principalement utilisé pour l'évaluation d'un comportement anormal du système nerveux autonome et permet de mimer des situations professionnelles qui peuvent engendrer des pathologies. Cet exercice implique une réaction paradoxale : le contrôle fait comme s'il s'agissait d'un exercice dynamique généralement caractérisé par une augmentation des besoins en oxygène du muscle, il autorise ainsi une augmentation de la fréquence cardiaque,

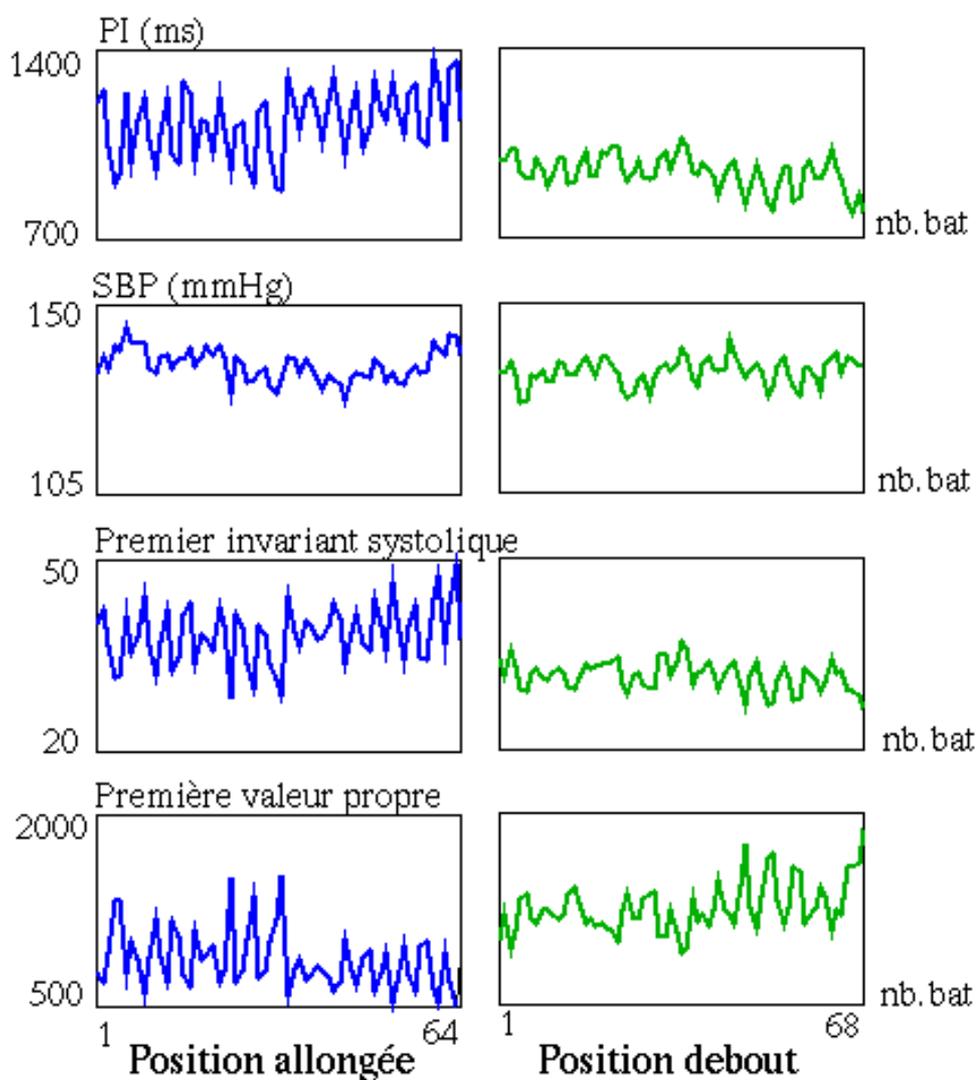


FIG. 7.5 – Séries temporelles des paramètres de la pression artérielle dans le cas d'un sujet sain sous une fréquence de respiration de $0.25Hz$, en position allongée et en position debout après un test tilt de 60 degrés.

TAB. 7.1 – Paramètres de la pression artérielle dans le cas d'un test tilt pour 15 sujets en bonne santé

Paramètres	position allongée	position debout	probabilité
Classiques			
PI	918 ± 33	778 ± 21	***
SBP	121 ± 4	127 ± 3	NS
DBP	68 ± 4	80 ± 3	**
Valeurs propres			
Première	1515 ± 131	1965 ± 137	***
Seconde	1205 ± 86	1612 ± 92	***
Premiers invariants			
Global	77 ± 6	71 ± 4	NS
Systolique	21 ± 1	19 ± 1	**
Diastolique	56 ± 4	51 ± 3	NS
Deuxièmes invariants			
Global	7041 ± 975	6833 ± 711	NS
Systolique	2705 ± 328	2566 ± 247	NS
Diastolique	4336 ± 648	4276 ± 465	NS

Données exprimées en terme de moyenne et SEM
 ** : $P \leq .01$, *** : $P \leq .001$, NS : non significatif

TAB. 7.2 – Sensibilité du baroréflexe battement à battement durant le protocole tilt

	position allongée	pendant le tilt	position debout	probabilité
R^2	.335 ± .102	.611 ± .074	.421 ± .079	***
pente	-.105 ± .03	-.177 ± .03	-.106 ± .015	**

Données exprimées en terme de moyenne et SEM
 ** $p \leq .01$, *** $p \leq .001$

de SBP et de la contractilité (figure 7.7).

Comme dans le cas du test tilt, l'objectif de cette étude est d'analyser le comportement des paramètres SCSA et de les comparer aux paramètres classiques. Nous avons considéré un groupe de 13 sujets en bonne santé. La pression artérielle a été mesurée au niveau du doigt par FINAPRES. Les deux états : repos et pendant le handgrip ont été comparés en utilisant le test statistique de Wilcoxon.

La figure 7.8 illustre les séries temporelles des paramètres PI, SBP, $INV S_2$ et $|\lambda_1|$ au repos et pendant le handgrip. Dans le tableau 7.4 sont représentées les valeurs moyennes des paramètres classiques et ceux calculés par la SCSA. Nous remarquons

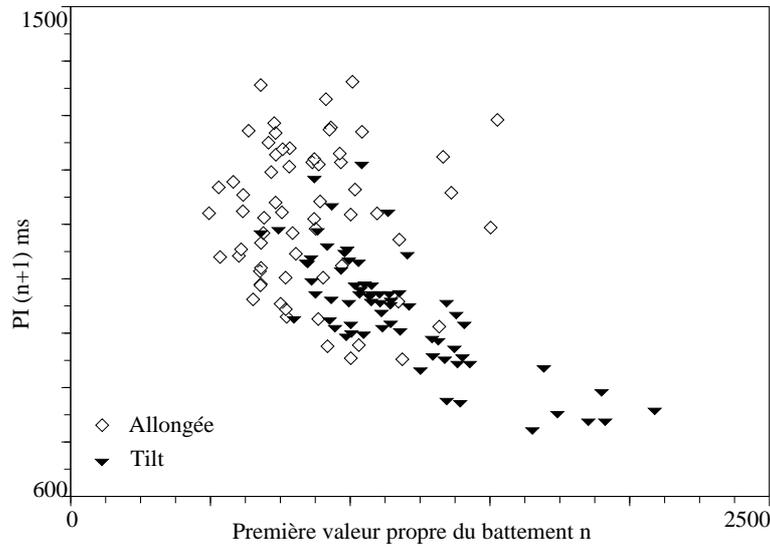


FIG. 7.6 – Sensibilité du baroréflexe battement à battement, représenté par la relation entre $|\lambda_1(n)|$ et $PI(n + 1)$. La pente et la corrélation sont plus importantes durant le tilt.

TAB. 7.3 – Trois indices pour l'étude de la sensibilité du baroréflexe battement à battement durant le tilt

R^2	tilt
$ \lambda_1 $	$.611 \pm .074$
SBP	$.351 \pm .091$
PP	$.415 \pm .069$

Données exprimées en terme de moyenne et SEM

qu'alors que les premiers invariants ne changent pas de manière significative, les seconds invariants augmentent sensiblement pendant le handgrip. La commande centrale volontaire, durant le handgrip, active le système moteur et le système cardio-vasculaire engendrant d'abord une augmentation de la fréquence cardiaque, suivie d'une augmentation de la pression artérielle. Ce mécanisme peut être considéré comme étant un mécanisme feed-forward, ouvrant la boucle de contrôle [45], [71]. Comme prévu, PI diminue et SBP augmente. Par ailleurs, sous les hypothèses que $INVS_1$ et $INVS_2$ soient associés respectivement à la variabilité du volume d'éjection systolique et de la force de contraction ventriculaire, le volume d'éjection systolique ne change pas alors que la force de contraction augmente. C'est comme si le cœur tentait d'éjecter la même quantité de sang durant une période plus courte. Ce qui semble donc ne pas contredire

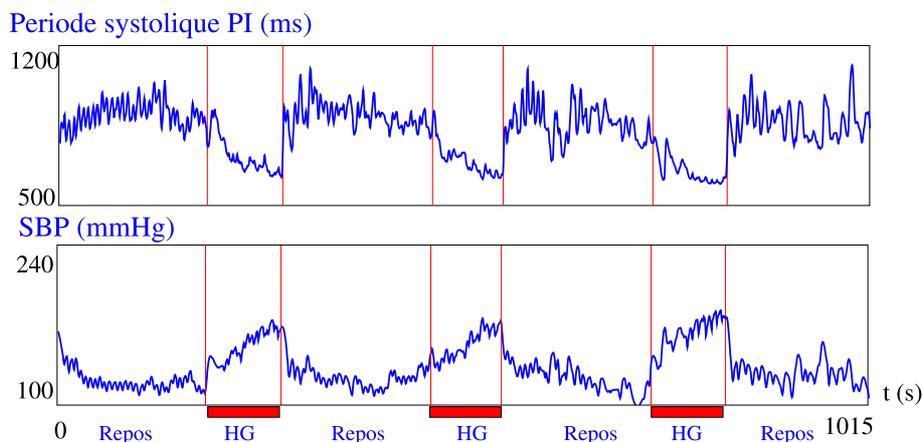


FIG. 7.7 – PI et SBP durant le protocole handgrip

la réalité physique.

Comme dans le cas du test tilt, nous étudions à présent la relation entre PI et $|\lambda_1|$. Le figure 7.9 illustre la relation entre PI du battement $n + 1$ et $|\lambda_1|$ calculé pour le battement n au repos et pendant le test handgrip. La corrélation est linéaire entre PI et $|\lambda_1|$ dans les deux conditions : repos et durant le handgrip. Cependant, la pente est fortement diminuée durant le handgrip (tableau 7.5), ceci pourrait refléter la diminution de l'efficacité du baroréflexe, engendré par l'ouverture de la boucle de contrôle. Par ailleurs, une comparaison entre les indices standards de mesure de la sensibilité du baroréflexe, à savoir SBP et PP, montre que la corrélation avec PI est plus forte pour $|\lambda_1|$ (tableau 7.6). Ce résultat, ajouté au résultat obtenu dans le cas du tilt nous permet de conclure que $|\lambda_1|$ pourrait être un indice prometteur pour l'étude de la relation entre la fréquence cardiaque et la forme du signal de pression artérielle.

7.3.3 Insuffisants cardiaques versus contrôles

L'insuffisance cardiaque se définit par une réduction de la capacité de travail du myocarde et touche essentiellement le ventricule gauche, au moins dans les premiers stades. Les causes les plus fréquentes de cette insuffisance sont une maladie coronaire et une hypertension. Cependant, presque toutes les autres maladies cardiaques ainsi que certaines maladies extra-cardiaques peuvent conduire à une insuffisance cardiaque.

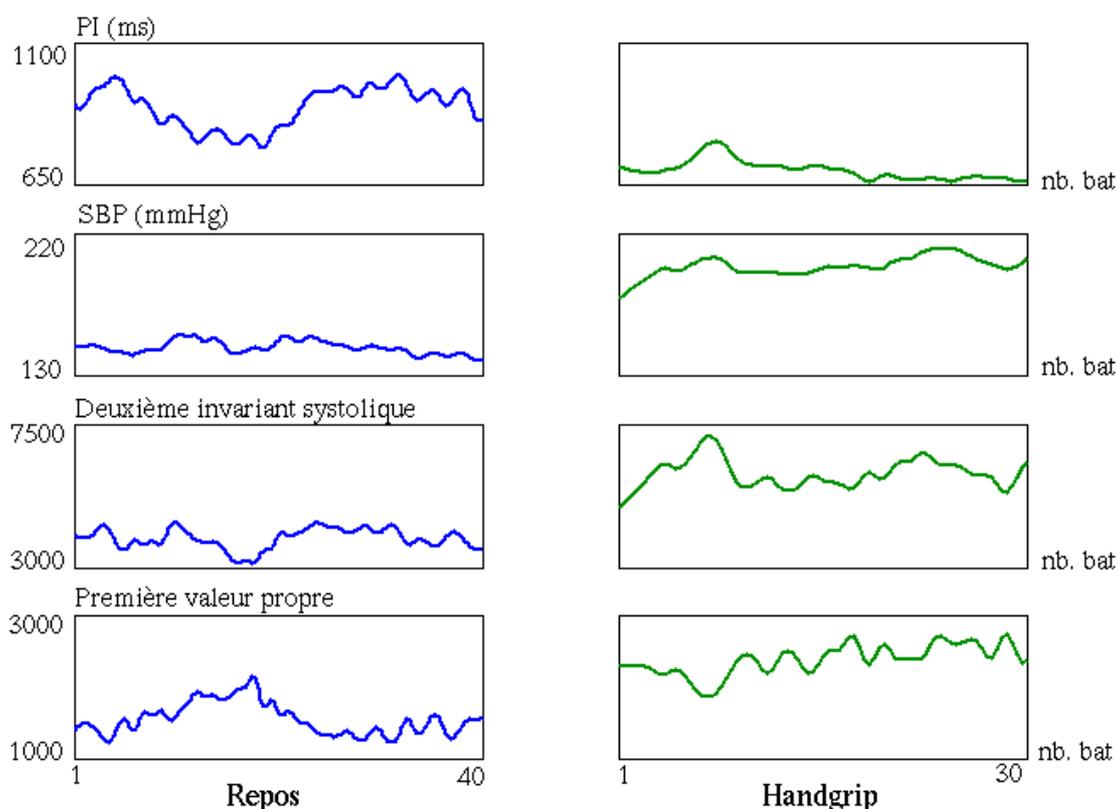


FIG. 7.8 – Séries temporelles des paramètres de la pression artérielle pour un sujet en bonne santé, sous une fréquence de respiration spontanée, au repos et pendant le test handgrip.

L'objet de cette étude est de déterminer des indices qui permettent de discriminer entre des sujets sains et des insuffisants cardiaques modérés. Nous avons considéré un groupe de 9 insuffisants cardiaques modérés, NYHA ³ de classe II/III, et un groupe de 9 sujets contrôles en bonne santé, âgés entre 35 et 50 ans. Les enregistrements de pression ont été effectués à l'aide d'un FINAPRES/FINOMETER, au repos, en position allongée, sous une fréquence de respiration constante de $0.15Hz$. Comme la respiration a un effet sur la variabilité des paramètres cardio-vasculaires, ce protocole présente l'avantage de limiter son influence sur une bande de fréquences réduite, homogène pour tous les sujets. Pour chaque sujet les valeurs moyennes et la variabilité globale, estimée par l'écart type, ont été calculées sur une période d'une minute. Les

³Classification New York Heart Association (NYHA)

TAB. 7.4 – Paramètres de la pression artérielle pour le protocole handgrip pour 13 sujets en bonne santé

Paramètres	repos	handgrip	probabilité
Classiques			
PI	953 ± 59	748 ± 42	***
SBP	148 ± 5	183 ± 5	***
DBP	83 ± 3	104 ± 4	***
Valeurs propres			
Première	1439 ± 160	2325 ± 249	**
Deuxième	1186 ± 125	1872 ± 180	***
Premiers invariants			
Global	96 ± 6	95 ± 6	NS
Systolique	26 ± 1	26 ± 1	NS
Diastolique	70 ± 4	69 ± 4	NS
Deuxièmes invariants			
Global	10239 ± 866	12886 ± 1192	**
Systolique	3956 ± 344	5013 ± 470	**
Diastolique	6283 ± 526	7872 ± 727	**

Données exprimées en terme de moyenne et SEM
 ** : $P \leq .01$, *** : $P \leq .001$, NS : non significatif

TAB. 7.5 – Sensibilité du baroréflexe battement à battement durant le test handgrip

	repos	handgrip	probabilité
R^2	.647 ± .054	.609 ± .050	NS
pente	-.302 ± .071	-.132 ± .024	**

Données exprimées en terme de moyenne et SEM
 ** $p \leq .01$, NS : non significatif

deux groupes ont été comparés à l'aide du test statistique de Mann-Whitney non apparié. La figure 7.10 illustre l'allure des signaux de pression pour un sujet contrôle et un insuffisant cardiaque sur quelques battements.

Nous constatons, à travers les résultats représentés sur le tableau 7.7, que la variabilité sur les valeurs moyennes des paramètres classiques et des paramètres SCSA entre les deux groupes contrôles et insuffisants cardiaques n'est pas significative. D'autre part, alors que la variabilité globale n'est pas significativement différente pour les paramètres classiques, celle des paramètres SCSA est fortement diminuée dans le cas des insuffisants cardiaques. Les séries temporelles de $|\lambda_1|$, $INVS_1$ et $INVD_1$ sont représentées sur la figure 7.11.

TAB. 7.6 – Trois indices pour l'étude de la sensibilité du baroréflexe battement à battement dans le cas du test handgrip

R^2	repos	handgrip
$ \lambda_1 $.647 ± .054	.609 ± .050
SBP	.166 ± .055	.261 ± .060
PP	.375 ± .078	.284 ± .060

Données exprimées en terme de moyenne et SEM

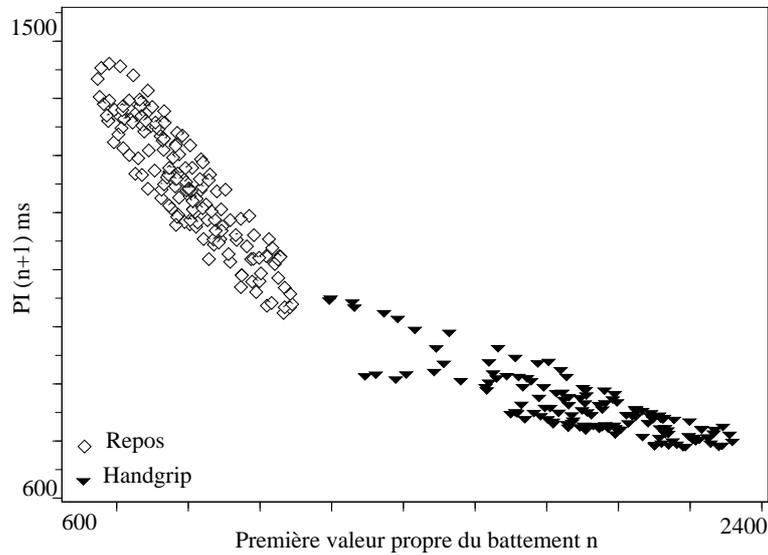
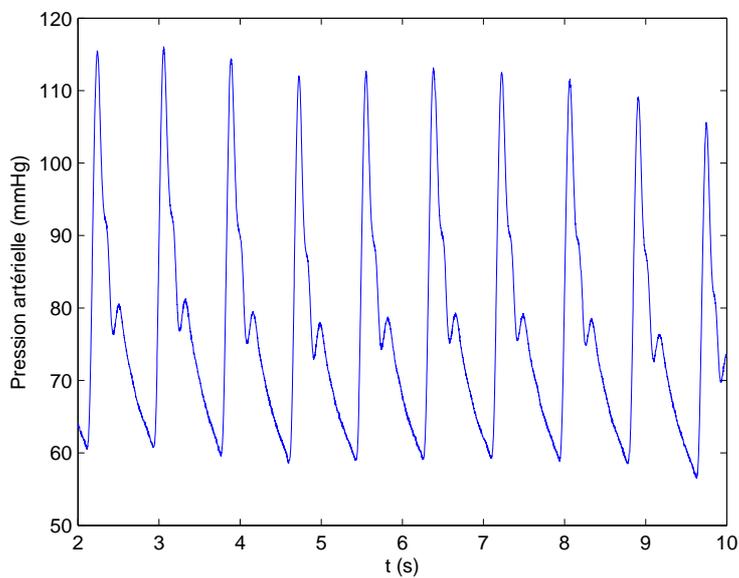
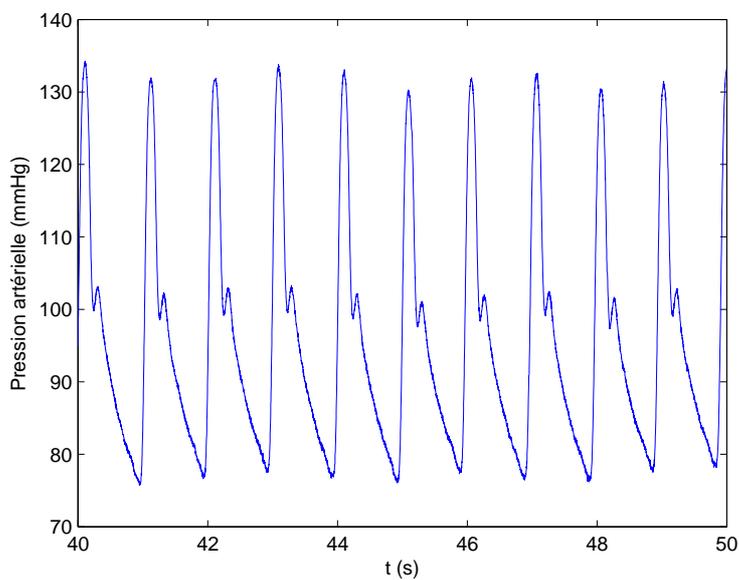


FIG. 7.9 – Sensibilité du baroréflexe battement à battement, représenté par la relation entre $|\lambda_1(n)|$ et $PI(n + 1)$. La pente est fortement diminuée pendant le handgrip

Cette base de données a déjà fait objet d'une étude [68]. Les résultats obtenus par la SCSA ne contredisent pas les résultats de l'étude antérieure. Cependant, dans l'étude antérieure, la significativité basée sur la comparaison de l'amplitude fréquentielle en haute fréquence, basse fréquence et du gain spectral, restait faible (de l'ordre de $p < 0.05$) alors que la significativité basée sur la comparaison de la variabilité des paramètres SCSA est d'emblée plus élevée (de l'ordre de $p < 0.01$).



(a) Contrôle



(b) IC

FIG. 7.10 – Signal de pression artérielle pour un sujet contrôle et un insuffisant cardiaque

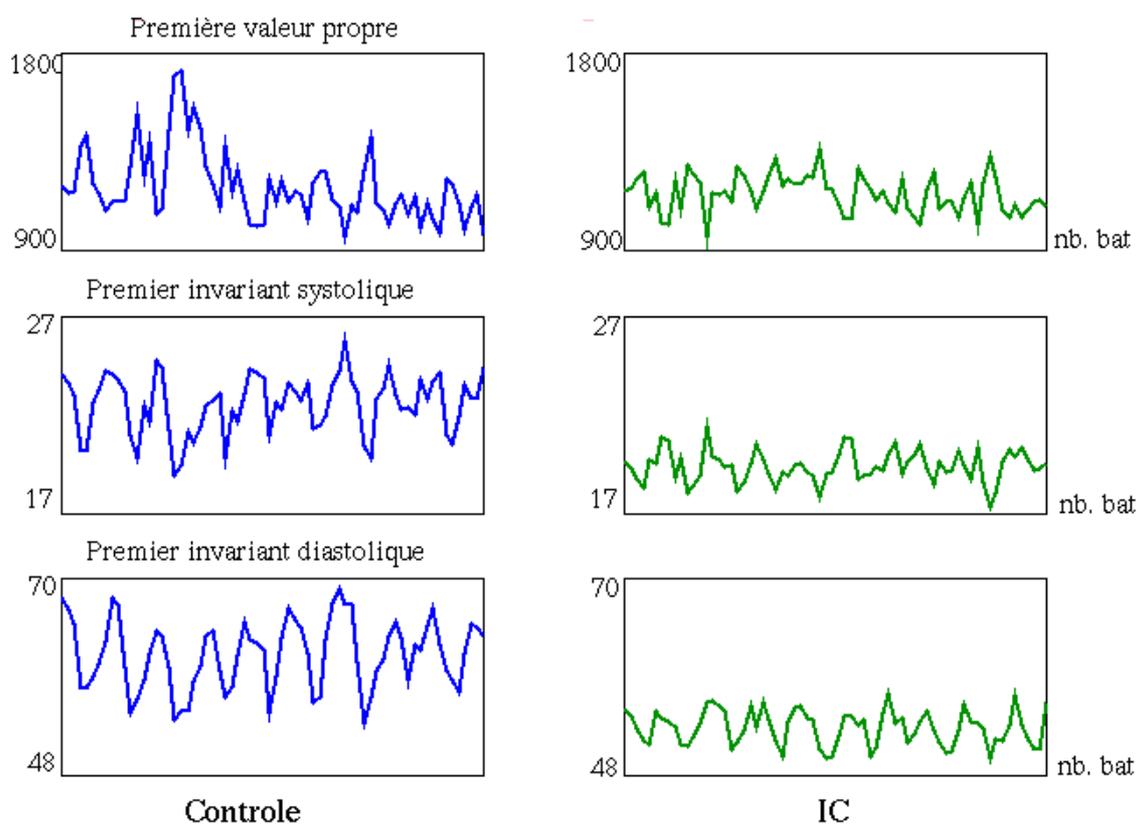


FIG. 7.11 – Séries temporelles des paramètres de la pression artérielle pour un sujet contrôle et un insuffisant cardiaque

TAB. 7.7 – Valeurs moyennes et variabilité globale des paramètres de la pression artérielle pour 9 insuffisants cardiaques et 9 sujets contrôles

Paramètres	Valeurs moyenne		Variabilité globale	
	Contrôles	insuffisants cardiaques	Contrôles	insuffisants cardiaques
Classiques				
PI	804 ± 31	887 ± 51	50.18 ± 9.244	25.00 ± 3.494
SBP	113.3 ± 4.9	111.8 ± 6.2	4.286 ± 0.549	3.254 ± 0.301
DBP	65.6 ± 4.3	63.9 ± 4.1	2.110 ± 0.422	1.348 ± 0.175
Valeurs propres				
Première	1898 ± 149	1683 ± 265	256.4 ± 44.30	140.2 ± 16.91 **
Deuxième	1556 ± 114	1343 ± 227	214.0 ± 37.53	114.0 ± 15.66 **
Premiers invariants				
Global	65.5 ± 4.3	68.5 ± 4.5	4.778 ± 0.649	2.492 ± 0.262 **
Systolique	17.7 ± 1.1	18.7 ± 1.3	1.447 ± 0.192	0.916 ± 0.064 **
Diastolique	47.4 ± 3	47.9 ± 3.3	3.424 ± 0.47	1.940 ± 0.203 **
Deuxièmes invariants				
Global	5648 ± 618	5670 ± 648	534.9 ± 95.7	283.7 ± 30.08 **
Systolique	2196 ± 229	2253 ± 273	230.3 ± 41.26	136.7 ± 12.06 *
Diastolique	3255 ± 324	3362 ± 384	307.5 ± 56.59	175.0 ± 25.31 **

Données exprimées en terme de moyenne et SEM

* : $p < 0.05$, ** : $p < 0.01$

7.3.4 Sportifs avant et après entraînement

L'analyse de la variabilité cardio-vasculaire chez les sportifs pourrait offrir un moyen efficace pour prédire les performances et optimiser l'entraînement. Ceci permettrait par exemple à l'entraîneur d'individualiser les programmes d'entraînement et de les affiner. Il serait donc intéressant de disposer d'indices de forme physique capables de prédire la performance et de déceler un état de fatigue ou un sur-entraînement [5], [115].

Notre objectif à travers cette étude est de voir si les paramètres SCSA permettent d'extraire des informations sur l'état physiologique des sportifs. Nous avons considéré 8 athlètes juniors, âgés entre 15 et 19 ans, au repos. La pression artérielle a été mesurée au niveau du doigt par le FINAPRES avant, et 5 mois après un entraînement durant une compétition. Les sujets étaient en position allongée sous une fréquence de respiration constante de $0.25Hz$ lors de l'enregistrement. Pour chaque sujet, la valeur moyenne et la variabilité globale des paramètres classiques et des paramètres SCSA ont été calculées sur un enregistrement de deux minutes avant et après entraînement. Les deux situations physiologiques ont été ensuite comparées à l'aide du test statistique de Wilcoxon. La figure 7.12 illustre l'allure de la pression mesurée pour un sportif avant

et après entraînement. Notons la différence significative de la forme du signal entre ces deux situations.

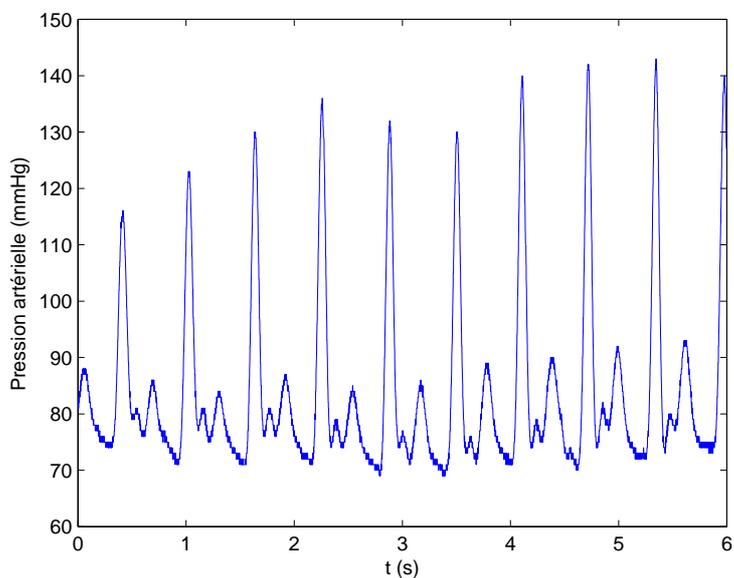
Dans le tableau 7.8, sont représentées les valeurs moyennes des paramètres. Nous ne remarquons aucune différence significative entre les deux situations. De même la différence sur la variabilité globale des paramètres n'est pas significative excepté pour les premiers invariants normalisés, systolique et diastolique (normalisés par la variabilité totale du premier invariant global).

Comme aucune différence significative entre les deux situations n'a été constatée dans l'analyse des valeurs moyennes et de la variabilité globale des paramètres excepté pour la variabilité globale des invariants normalisés, nous nous sommes intéressés à l'analyse des composantes fréquentielles. En plus des deux bandes de fréquences classiques (haute et basse fréquences), nous avons considéré une troisième bande de fréquence : très haute fréquence qui consiste en une variabilité battement à battement. Les amplitudes basse fréquence, haute fréquence et très haute fréquence sont données par :

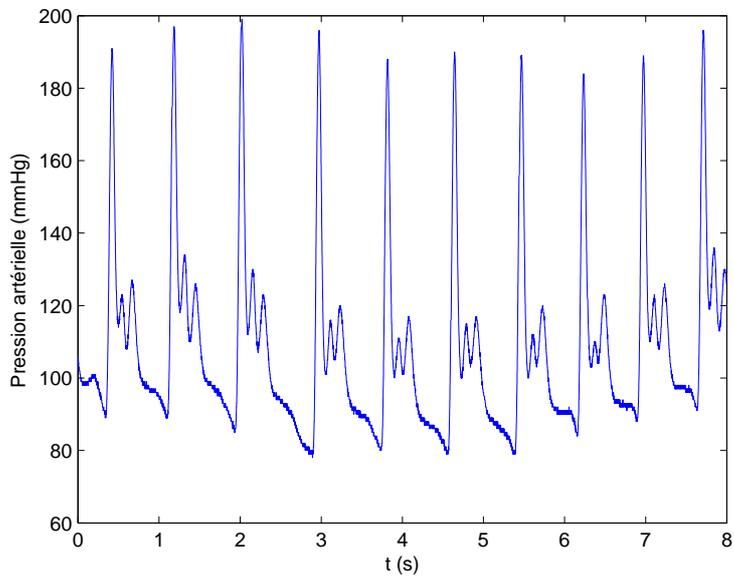
- Basse fréquence : $[0.03 - 0.15]Hz$.
- Haute fréquence : $0.25Hz$, centrée autour de la fréquence de respiration ($[0.15 - 0.3]Hz$).
- Très haute fréquence : $[0.3 - 0.6]Hz$.

Seules les amplitudes très haute fréquence ont exhibé une variabilité significative dans le sens d'une diminution après l'entraînement (tableau 7.9 et figure 7.13).

Une analyse antérieure des composantes haute fréquence et basse fréquence de l'intervalle RR effectuée sur la même base de données que nous avons analysée, aussi bien que les composantes haute fréquence, basse fréquence, très haute fréquence de PI et SBP n'ont montré aucune variabilité significative. La variabilité très haute fréquence des invariants s'avère donc intéressante.



(a) Avant entraînement



(b) Après entraînement

FIG. 7.12 – Signal de pression artérielle pour un sportif avant et après entraînement

TAB. 7.8 – Valeurs moyennes et variabilité globale des paramètres de la pression artérielle pour 8 athlètes juniors avant et après entraînement.

Paramètres	Valeurs moyennes		Variabilité globale	
	avant	après	avant	après
Classiques				
PI	886 ± 32	935 ± 46	69.67 ± 8.466	65.04 ± 4.962
SBP	124.2 ± 10.2	121.3 ± 5.3	5.460 ± 0.756	7.074 ± 0.929
DBP	64.6 ± 5.9	51.2 ± 3.8	3.385 ± 0.526	3.538 ± 0.429
Valeurs propres				
Première	1524 ± 97	1487 ± 158	259.0 ± 20.40	246.3 ± 28.99
Deuxième	9810 ± 931	1161 ± 115	210.9 ± 20.81	178.9 ± 18.53
Premiers invariants				
Global	91.0 ± 4.8	83.3 ± 4.6	8.104 ± 1.393	7.277 ± 0.654
Systolique	24.7 ± 1.2	22.9 ± 1.2	2.358 ± 0.340	2.160 ± 0.18
Diastolique	66.3 ± 3.6	60.3 ± 3.3	5.963 ± 1.038	5.315 ± 0.467
Deuxièmes invariants				
Global	9810 ± 931	7880 ± 703	1083.0 ± 249.0	912.0 ± 94.85
Systolique	3777 ± 303	3154 ± 257	434.6 ± 83.34	381.4 ± 38.68
Diastolique	6032 ± 637	4725 ± 449	667.0 ± 165.6	544.5 ± 56.67
Premiers invariants normalisés				
Systolique	0.272 ± 0.002	0.276 ± 0.001	8.80E + 04 ± 8.41E02	9.02E + 04 ± 7.52E02 *
Diastolique	0.728 ± 0.002	0.724 ± 0.001	8.80E + 04 ± 8.41E02	9.02E + 04 ± 7.52E02 *
Deuxièmes invariants normalisés				
Systolique	0.388 ± 0.008	0.402 ± 0.005	9.51E + 04 ± 3.08E03	9.98E + 04 ± 3.15E03
Diastolique	0.612 ± 0.008	0.598 ± 0.005	9.51E + 04 ± 3.08E03	9.98E + 04 ± 3.15E03

Données exprimées en terme de moyenne et SEM

* : $p < 0.05$

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques résultats obtenus sur l'analyse des signaux de pression artérielle par la SCSA dans trois situations physiologiques et une pathologique. Nous avons vu que les paramètres calculés à partir de la SCSA permettent non seulement de discriminer différentes situations mais peuvent apporter des informations physiologiques importantes. Nous avons notamment constaté que le premier invariant systolique pourrait être relié au volume d'éjection systolique, un paramètre physiologique d'un grand intérêt mais difficile à mesurer. Ainsi si cette hypothèse se vérifiait, la SCSA permettrait d'estimer la variabilité du volume d'éjection systolique uniquement par des mesures non-invasives de la pression artérielle. Nous avons aussi noté que la première valeur propre qui reflète toute variation de la pression artérielle, pourrait être un paramètre prometteur pour l'étude de la sensibilité du

TAB. 7.9 – Variabilité basse fréquence, haute fréquence et très haute fréquence des invariants de la pression artérielle, avant et après entraînement pour les 8 athlètes

Amplitude moyenne en	avant entraînement	après entraînement
Haute fréquence		
Premier invariant systolique	2.132 ± 0.246	1.924 ± 0.2
Deuxième invariant systolique	383.2 ± 54.94	305.4 ± 35.58
Premier invariant diastolique	5.202 ± 0.723	4.646 ± 0.441
Deuxième invariant diastolique	529.9 ± 96.08	395.5 ± 39.72
Basse fréquence		
Premier invariant systolique	1.838 ± 0.32	1.699 ± 0.192
Deuxième invariant systolique	324.6 ± 61.01	317.9 ± 38.93
Premier invariant diastolique	4.679 ± 0.843	4.111 ± 0.513
Deuxième invariant diastolique	502.0 ± 105.8	461.8 ± 59.07
Très haute fréquence		
Premier invariant systolique	1.018 ± 0.048	0.814 ± 0.052*
Deuxième invariant systolique	149.1 ± 11.54	105.2 ± 9.747*
Premier invariant diastolique	2.183 ± 0.234	1.555 ± 0.109*
Deuxième invariant diastolique	166.7 ± 27.98	97.71 ± 9.367*

Données exprimées en terme de moyenne et SEM

* : $p < 0.05$

baroréflexe.

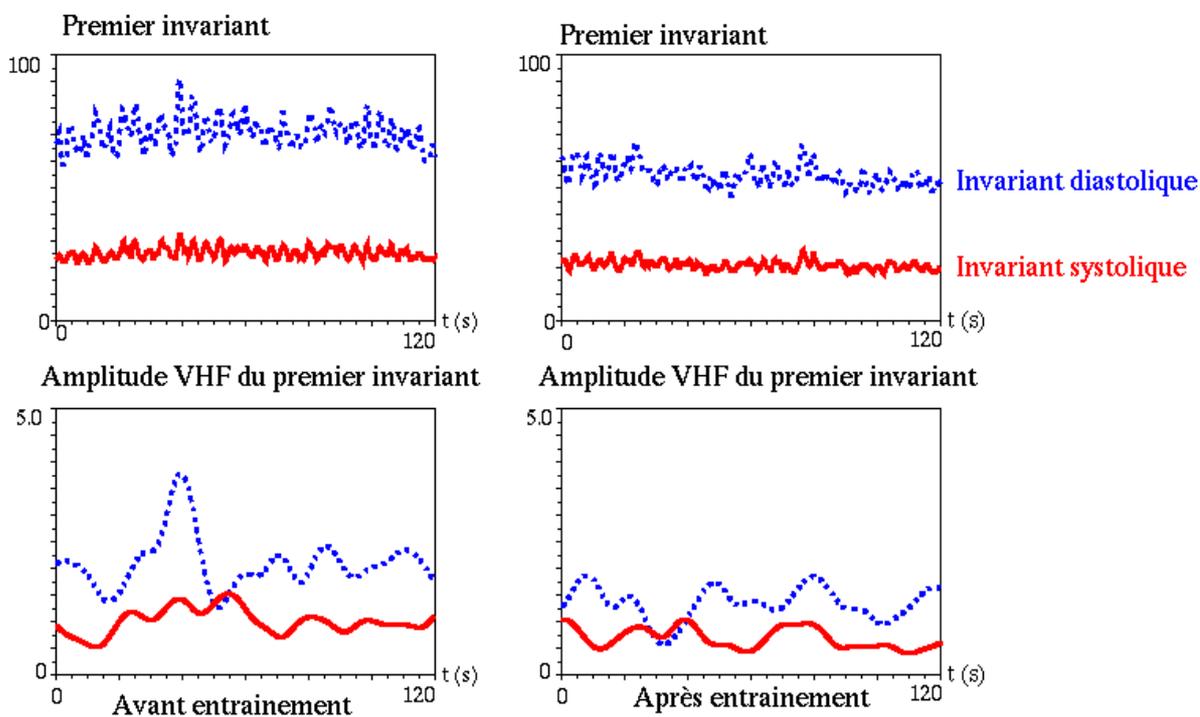


FIG. 7.13 – Premiers invariants de la pression artérielle (haut) et leur amplitude très haute fréquence (bas) pour un sujet avant et après entraînement. Lignes discontinues : paramètres diastoliques, lignes continues : paramètres systoliques

Conclusions et perspectives

La motivation initiale de cette thèse était de développer une technique de traitement des signaux de pression artérielle à base de solitons. Les difficultés que nous avons rencontrées et qui étaient liées à l'identification et au calcul numérique des solitons, nous ont finalement guidés vers une nouvelle méthode, plus générale, d'analyse de signaux basée sur une quantification semi-classique SCSA. Le principe de la SCSA consiste à interpréter le signal comme un puits de potentiel auquel sont associés des niveaux d'énergie propres qui sont autant de valeurs représentatives du signal : c'est une approche qui semble nouvelle en traitement du signal.

Un cas particulier de la SCSA est l'approximation par solitons (ou par potentiels sans réflexion) SBSA qui introduit une formule y_χ^s (formule (3.5)-(3.6)) simple et entièrement déterminée par $2N_\chi$ paramètres $(\kappa_{n\chi}, c_{ln\chi})$, $n = 1, \dots, N_\chi$. Cette représentation parcimonieuse peut être plus avantageuse que la formule d'approximation y_χ (formule (3.3)) qui utilise les N_χ paramètres $\kappa_{n\chi}$ et N_χ fonctions. Cependant, la SBSA est difficile à mettre en œuvre en pratique en raison de difficultés liées au calcul numérique des coefficients $c_{ln\chi}$. La formule y_χ est quant à elle plus simple à calculer numériquement et il faut remarquer que pour les applications considérées, ce sont les valeurs représentatives du signal qui sont utilisées. C'est cette représentation que nous avons utilisée dans la thèse. Néanmoins elle ne représente pas un N_χ -soliton en général.

Nous avons, dans un premier temps, rappelé quelques définitions et propriétés relatives à la transformée scattering à la base de la SBSA. Puis nous avons défini la SCSA et nous avons vu le cas particulier des potentiels sans réflexion pour lequel la SBSA et la SCSA coïncident. Bien que nous ayons constaté numériquement que plus la constante de couplage χ augmente meilleure est l'approximation, nous n'avons obtenu que des résultats incomplets sur la convergence de y_χ . Une approche locale de l'inverse scattering a conduit à une autre formule d'approximation y_χ^{KS} qui utilise une variante locale des $\kappa_{n\chi}$. Ici la convergence peut être démontrée mais cette méthode est lourde

à mettre en œuvre numériquement.

Nous nous sommes intéressés ensuite à l'analyse des signaux de pression artérielle par la SCSA. Nous avons constaté qu'un nombre réduit de composantes spectrales est suffisant pour la reconstruction d'un battement de pression. Nous avons vu également que la SCSA permet de séparer les pressions systolique et diastolique et introduit de nouveaux paramètres qui permettent d'analyser et d'interpréter le signal. Nous avons notamment vu, à travers l'étude de ces paramètres dans quelques situations physiologiques et pathologiques, qu'ils permettent non seulement de discriminer différentes situations mais peuvent également véhiculer des informations physiologiques importantes et que l'on peut extraire à partir de mesures non invasives de pression.

Tout aussi bien d'un point de vue théorique que pratique, il n'en demeure pas moins qu'il reste beaucoup à faire. Aussi, comme perspectives, nous suggérons, tout d'abord d'établir la convergence de y_χ . L'analyse semi-classique semble fournir des outils bien adaptés à cette étude. Il faut quand même remarquer que l'hypothèse *mono-puits* doit être difficile à lever. Aussi, notre approche de quantification semi-classique fait naturellement apparaître des valeurs particulières, les $\frac{\kappa_{n\chi}^2}{\chi}$ et des segments associés du signal. L'interprétation de ces valeurs et de cette segmentation serait intéressante.

En raison des propriétés intéressantes de la SBSA et en particulier de sa représentation parcimonieuse, nous proposons d'étudier les problèmes numériques liés au calcul des coefficients de normalisation $c_{ln\chi}$ afin de développer une méthode fiable pour les calculer.

Il est aussi naturel d'envisager la comparaison de la SCSA à d'autres méthodes de traitement du signal. Nous espérons aussi que cette méthode puisse être appliquée à d'autres domaines et en particulier de la généraliser au traitement d'images (quantification par des lignes de niveau associées au spectre discret de l'opérateur de Schrödinger en 2D).

En outre, suite aux résultats prometteurs obtenus sur l'analyse des signaux de pression artérielle par la SCSA, nous proposons de poursuivre cette étude afin de comprendre le sens physiologique des paramètres introduits par cette méthode. C'est

dans cette perspective que nous avons entamé l'étude de la corrélation entre le volume d'éjection systolique et le premier invariant systolique $INVS_1$. Suite aux difficultés rencontrées pour avoir des mesures du volume d'éjection systolique, nous n'avons pas pu finaliser l'étude dans le cadre de cette thèse mais les premiers résultats obtenus semblent aller dans le bon sens comme l'illustre la figure 7.14.

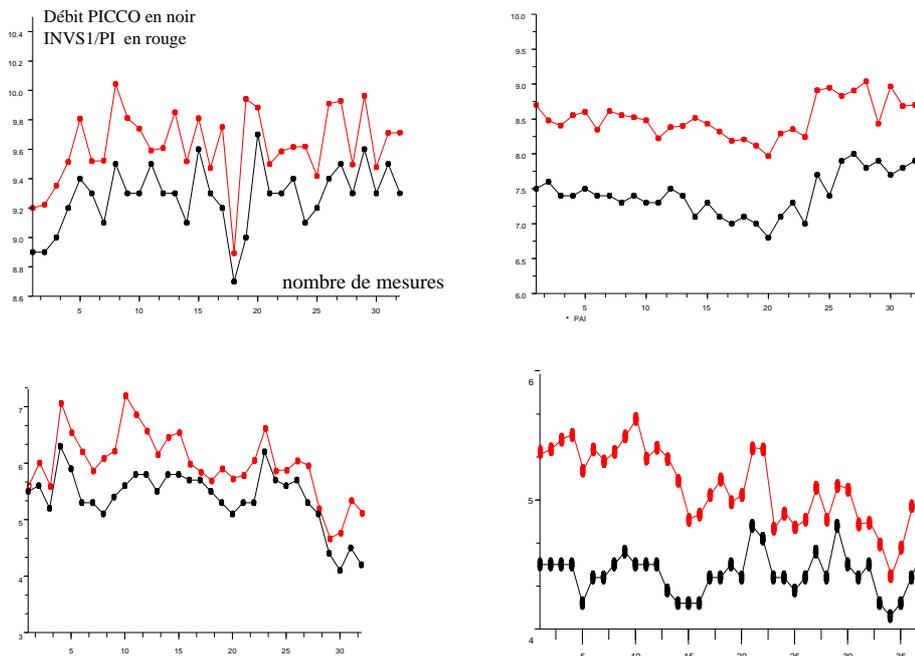


FIG. 7.14 – Figures illustrant la corrélation entre le débit mesuré par PICCO et $INVS_1$

Enfin toujours comme application à l'analyse des signaux cardio-vasculaires, nous proposons d'étendre la méthode à l'analyse de l'électrocardiogramme (ECG) qui mesure l'activité électrique du cœur. L'ECG est Mesuré par moyens non-invasifs et est utilisé en clinique de routine pour le diagnostique des dysfonctionnements cardio-vasculaires. La figure 7.15 illustre une estimation satisfaisante d'un signal ECG par la SCSA. Nous avons constaté que 15 à 20 composantes spectrales sont suffisantes pour une reconstruction satisfaisante d'une période. Il serait donc intéressant d'exploiter la SCSA pour l'analyse des signaux ECG et de comprendre les informations véhiculées par les paramètres SCSA. Une application envisageable serait alors la segmentation du signal. Il est à noter également que l'approximation de l'ECG par SBSA pourrait

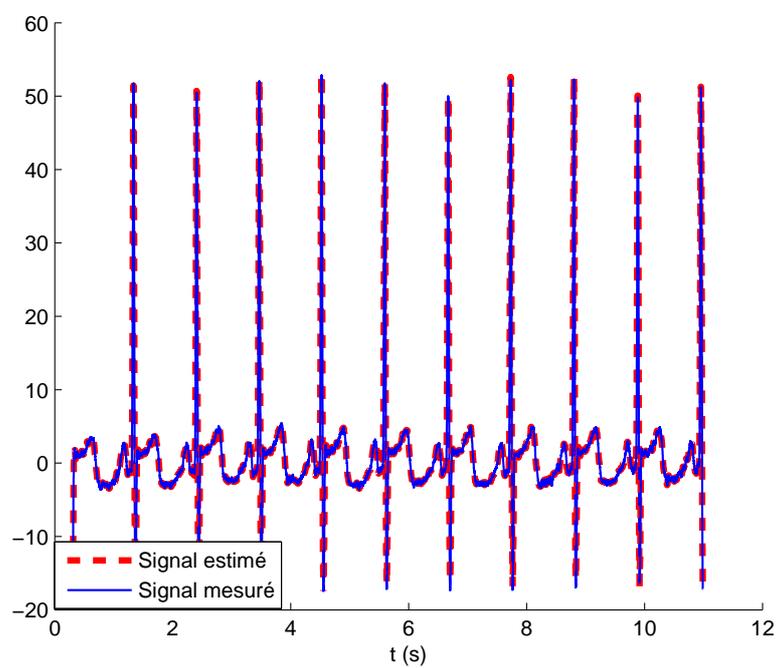


FIG. 7.15 – Reconstruction d'un signal ECG par la SCSA

être très utile pour la compression des données.

Annexes

A Opérateur de Schrödinger et données scattering

A.1 Cas point limite et cercle limite

La distinction entre les cas point limite et cercle limite a été introduite par Weyl. Ce cercle fait référence à l'image de la droite réelle sous la transformation suivante [4] :

$$\xi \mapsto M(\xi) = -\frac{c_{\frac{\pi}{2}}(x) - \xi \frac{dc_{\frac{\pi}{2}}(x)}{dx}}{s_{\frac{\pi}{2}}(x) - \xi \frac{ds_{\frac{\pi}{2}}(x)}{dx}}, \quad (\text{A.1})$$

où $s_{\frac{\pi}{2}}$ et $c_{\frac{\pi}{2}}$ sont solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre qui est dans notre cas l'équation de Schrödinger donnée par :

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = z\psi, \quad 0 \leq x < x_f \leq \infty, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

$s_{\frac{\pi}{2}}$ et $c_{\frac{\pi}{2}}$ sont déterminées par les conditions initiales (2.5) et (2.6) pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $x_0 = 0$ que nous rappelons :

$$s_{\frac{\pi}{2}}(0) = -\frac{dc_{\frac{\pi}{2}}}{dx}(0) = 1, \quad c_{\frac{\pi}{2}}(0) = \frac{ds_{\frac{\pi}{2}}}{dx}(0) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Posons $z = k^2$. Notons $C(x, k)$ l'image de la droite réelle sous la transformation (A.1) et $D(x, k)$ le disque fermé, de frontière $C(x, k)$. La théorie de Weyl stipule que pour $0 < x_1 < x_2$, $D(x_2, k) \subset D(x_1, k)$ [4]. Ainsi, quand $x \rightarrow x_f$, $C(x, k)$ tend, soit vers un point limite $m(z)$, soit vers un cercle limite. Résumons à présent les définitions de ces deux situations :

– Le cas cercle limite se définit par :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, toute solution de $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = z\psi$, $x \in [0, +\infty)$ est dans $L^2([0, +\infty))$.

– Le cas point limite se définit par :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il n'existe pas plus d'une solution de $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = z\psi$,

$x \in [0, +\infty)$ dans $L^2([0, +\infty))$ et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe une fonction unique $\psi \in L^2([0, +\infty))$ telle que $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = z\psi$, $x \in [0, +\infty)$ et $\psi(0) = 1$. $\frac{d\psi}{dx}(0)$ est notée $m(z)$. Cette propriété assure que l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + V$, $x \in [0, +\infty)$ soit auto-adjoint sans nécessité d'avoir des conditions aux limites à l'infini.

Dans le cas de la droite $(-\frac{d^2}{dx^2} + V, x \in \mathbb{R})$, le cas point limite se définit par :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^+$ (demi plan complexe supérieur), il existe des solutions uniques $\psi_{\pm}(z, x)$ de $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = z\psi$ telles $\psi_+ \in L^2(0, +\infty)$ et $\psi_- \in L^2(-\infty, 0)$.

A.2 Existence et unicité des solutions de Jost [23], [51]

Définition A.1. On appelle *équation intégrale de Schrödinger en $\pm\infty$* , l'équation intégrale suivante :

$$f(k, x) = e^{\pm ikx} + \int_{\pm\infty}^x \frac{\sin [k(x - x')]}{k} V(x') f(k, x') dx', \quad \text{Im}(k) \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.4})$$

où V est une fonction intégrable, à valeurs réelles et qui décroît rapidement à l'infini.

Théorème A.1. Soient $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(k) \geq 0$ et V une fonction intégrable à valeurs réelles. Alors, l'équation intégrale de Schrödinger en $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet une solution unique f_+ (resp. f_-) continûment dérivable sur \mathbb{R} et qui vérifie (pour $k \neq 0$) :

$$|f_+(k, x) - e^{+ikx}| \leq e^{-x \text{Im}(k)} \left| e^{\frac{1}{|k|} \int_x^{+\infty} |V(x')| dx'} - 1 \right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.5})$$

$$\left| \frac{df_+}{dx}(k, x) - ike^{+ikx} \right| \leq |k| e^{-x \text{Im}(k)} \left| e^{\frac{1}{|k|} \int_x^{+\infty} |V(x')| dx'} - 1 \right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.6})$$

resp.

$$|f_-(k, x) - e^{-ikx}| \leq e^{x \text{Im}(k)} \left| e^{\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |V(x')| dx'} - 1 \right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

$$\left| \frac{df_-}{dx}(k, x) + ike^{-ikx} \right| \leq |k| e^{x \text{Im}(k)} \left| e^{\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |V(x')| dx'} - 1 \right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.8})$$

Les fonctions f_+ et f_- sont fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger associées

aux valeurs propres k^2 et vérifient :

$$H(V)f_{\pm}(k, x) = k^2 f_{\pm}(k, x), \quad (\text{A.9})$$

avec :

$$f_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{df_{\pm}}{dx}(k, x) = \pm ik e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{A.11})$$

Les solutions f_+ et f_- sont connues sous le nom de solutions de Jost.

Preuve. Nous rappelons la preuve du théorème pour l'équation intégrale de Schrödinger à $+\infty$ donnée dans ([51], chapitre 4), le cas $-\infty$ se traite de manière analogue.

Les équations intégrales de Schrödinger sont des équations de type Volterra. La solution de ces équations peut être déterminée par itérations successives. Soient $f_0(k, x) = e^{ikx}$ et :

$$f_{n+1}(k, x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(k(x-x'))}{k} V(x') f_n(k, x') dx', \quad n \geq 0. \quad (\text{A.12})$$

Posons $h_n(k, x) = e^{-ikx} f_n(k, x)$, alors $h_0(k, x) = 1$ et :

$$h_{n+1}(k, x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(k(x-x'))}{k} e^{ik(x'-x)} V(x') h_n(k, x') dx', \quad n \geq 0, \quad (\text{A.13})$$

ou encore :

$$h_{n+1}(k, x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2ik} \left(e^{2ik(x'-x)} - 1 \right) V(x') h_n(k, x') dx', \quad n \geq 0. \quad (\text{A.14})$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\left| \sin(k(x-x')) e^{ik(x'-x)} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 - e^{2ik(x'-x)} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2(x'-x)\text{Im}(k)} \right) \leq 1, \quad (\text{A.15})$$

pour $x' \geq x$ et $\text{Im}(k) \geq 0$.

En supposant $\text{Im}(k) \geq 0$, nous avons :

$$|h_{n+1}(k, x)| \leq \frac{1}{|k|} \int_x^{+\infty} |V(x')| |h_n(k, x')| dx'. \quad (\text{A.16})$$

Ainsi, par récurrence sur n , nous avons :

$$|h_n(k, x)| \leq \frac{(\Lambda(x))^n}{|k|^n n!}, \quad (\text{A.17})$$

où,

$$\Lambda(x) = \int_x^{+\infty} |V(x')| dx' \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |V(x')| dx' = \|V\|_1. \quad (\text{A.18})$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(k, x)$ converge uniformément en x d'où la convergence uniforme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k, x)$ en x , pour $\text{Im}(k) \geq 0$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k, x)$ est une solution de l'équation intégrale de Schrödinger en $+\infty$ notée $f_+(k, x)$. Nous avons :

$$|f_+(k, x) - e^{ikx}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(k, x)| \leq e^{-x \text{Im}(k)} \sum_{n=1}^{\infty} |h_n(k, x)| \leq e^{-x \text{Im}(k)} \left| e^{\frac{\Lambda(x)}{|k|}} - 1 \right|, \quad (\text{A.19})$$

ainsi nous obtenons :

$$|f_+(k, x) - e^{ikx}| \rightarrow 0, \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.20})$$

pour k fixé dans \mathbb{C} avec $k \neq 0$ et $\text{Im}(k) \geq 0$.

Sachant que $h_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{C}$, et que les intégrales qui définissent h_n en fonction de h_{n-1} convergent absolument pour $\text{Im}(k) \geq 0$, alors h_n est au moins dans $C^1(\mathbb{R})$, d'où $f_n \in C^1(\mathbb{R})$. Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{df_{n+1}}{dx}(k, x) &= - \int_x^{+\infty} \cos(k(x-x')) V(x') f_n(k, x') dx', \\ &= - \int_x^{+\infty} \cos(k(x-x')) e^{ikx'} V(x') h_n(k, x') dx', \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

or

$$\left| \cos(k(x-x')) e^{ikx'} \right| = \frac{1}{2} \left| e^{ikx} \right| \left| 1 + e^{2ik(x'-x)} \right|, \quad (\text{A.22})$$

et sachant que

$$\frac{1}{2} \left| 1 + e^{2ik(x'-x)} \right| \leq 1, \quad (\text{A.23})$$

alors

$$\left| \cos(k(x-x'))e^{ikx'} \right| \leq |e^{ikx}| = e^{-x \operatorname{Im}(k)}, \quad (\text{A.24})$$

pour $x' \geq x$, $\operatorname{Im}(k) \geq 0$. Nous obtenons ainsi,

$$\left| \frac{df_{n+1}}{dx}(k, x) \right| \leq e^{-x \operatorname{Im}(k)} \int_x^{+\infty} |V(x')| \frac{(\Lambda(x'))^n}{|k|^n n!} dx' = \frac{e^{-x \operatorname{Im}(k)} (\Lambda(x))^{n+1}}{|k|^n (n+1)!}. \quad (\text{A.25})$$

Ainsi, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(k, x)$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R} , c'est donc une fonction continue et $f_+ \in C^1(\mathbb{R})$. Pour $\operatorname{Im}(k) \geq 0$, nous avons :

$$\left| \frac{df_+}{dx}(k, x) - ik e^{ikx} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{df_n}{dx}(k, x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x \operatorname{Im}(k)} (\Lambda(x))^n}{|k|^{n-1} n!} = |k| e^{-x \operatorname{Im}(k)} \left(e^{\frac{\Lambda(x)}{|k|}} - 1 \right), \quad (\text{A.26})$$

qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Pour montrer l'unicité de cette solution, supposons l'existence de deux solutions f et g de l'équation intégrale de Schrödinger en $+\infty$ avec f, g dans $C^1(\mathbb{R})$. La fonction $D(x) = e^{-ikx} (f(x) - g(x))$ est alors solution de :

$$D(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(k(x-x'))}{k} e^{ik(x'-x)} V(x') D(x') dx'. \quad (\text{A.27})$$

Soient x_0 un réel arbitraire et $L = \sup_{x \geq x_0} |D(x)| < \infty$. Alors $D(x) \leq L$, pour tout $x \geq x_0$ et par récurrence sur la formule (A.27) nous obtenons,

$$|D(x)| \leq L \frac{(\Lambda(x))^n}{|k|^n n!} \leq L \frac{(\|V\|_1)^n}{|k|^n n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.28})$$

Ainsi $D(x) = 0$ pour tout $x \geq x_0$. Étant donné que x_0 est arbitraire, nous en déduisons l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Schrödinger en $+\infty$. □

Corollaire A.1. Les fonctions f_{\pm} , $\frac{df_{\pm}}{dx}$ sont analytiques en k pour $\operatorname{Im}(k) > 0$ et continues en k pour $\operatorname{Im}(k) \geq 0$, $k \neq 0$.

preuve. Ce résultat se déduit de la convergence uniforme des séries du théorème A.1.

□

Théorème A.2. Soit V une fonction à valeurs réelles vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |V(x)| dx < \infty. \quad (\text{A.29})$$

Alors, pour $k \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im}(k) \geq 0$, l'équation intégrale de Schrödinger en $+\infty$ (resp. $-\infty$) admet une solution unique f_+ (resp. f_-) continûment dérivable et qui vérifie :

$$|f_+(k, x) - e^{ikx}| \leq \frac{C e^{-x \text{Im}(k)}}{1 + |k|} (1 + \max(-x, 0)) \int_x^{+\infty} (1 + |x'|) |V(x')| dx', \quad (\text{A.30})$$

$$\left| \frac{df_+}{dx}(k, x) - ike^{ikx} \right| \leq \frac{C e^{-x \text{Im}(k)}}{1 + |k|} \int_x^{+\infty} (1 + |x'|) |V(x')| dx', \quad (\text{A.31})$$

resp.

$$|f_-(k, x) - e^{-ikx}| \leq \frac{C e^{x \text{Im}(k)}}{1 + |k|} (1 + \max(x, 0)) \int_{-\infty}^x (1 + |x'|) |V(x')| dx', \quad (\text{A.32})$$

$$\left| \frac{df_-}{dx}(k, x) + ike^{-ikx} \right| \leq \frac{C e^{x \text{Im}(k)}}{1 + |k|} \int_{-\infty}^x (1 + |x'|) |V(x')| dx'. \quad (\text{A.33})$$

où C est une constante qui dépend uniquement de V .

Les fonctions f_+ et f_- , appelées solutions de Jost, sont fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger associées aux valeurs propres k^2 et vérifient :

$$H(V)f_{\pm}(k, x) = k^2 f_{\pm}(k, x), \quad (\text{A.34})$$

avec :

$$f_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{df_{\pm}}{dx}(k, x) = \pm ike^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{A.36})$$

Preuve. Remarquons que les estimations données dans le théorème A.1 sont satisfaites. Soient les fonctions h_{\pm} définies par $h_{\pm}(k, x) = e^{\mp ikx} f_{\pm}(k, x)$. Elles sont solutions de l'équation :

$$\frac{d^2 h_{\pm}(k, x)}{dx^2} \pm 2ik \frac{dh_{\pm}(k, x)}{dx} = V h_{\pm}(k, x). \quad (\text{A.37})$$

Intéressons nous à $h_+(k, x)$ qui vérifie :

$$h_+(k, x) = 1 + \int_x^{+\infty} \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2ik} V(x') h(k, x') dx'. \quad (\text{A.38})$$

Nous avons :

$$\left| \frac{1}{2ik} \left(e^{2ik(x'-x)} - 1 \right) \right| \leq (x' - x), \quad (\text{A.39})$$

pour $k \in \mathbb{R}$ et $x' - x \geq 0$, en réitérant comme dans la preuve du théorème A.1, nous obtenons :

$$|h_n(k, x)| \leq \iint \cdots \int_{x \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n} (x_1 - x) (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) |V(x_1)| \cdots |V(x_n)| dx_n \cdots dx_1 \quad (\text{A.40})$$

$$|h_n(k, x)| \leq \iint \cdots \int_{x \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n} (x_1 - x) (x_2 - x) \cdots (x_n - x) |V(x_1)| \cdots |V(x_n)| dx_n \cdots dx_1 \quad (\text{A.41})$$

Nous remarquons que l'intégrande ne varie pas par rapport à des permutations de x_1 à x_n mais ce n'est pas le cas pour l'intervalle d'intégration. En prenant l'ensemble des permutations possibles avec S_n désignant le groupe de permutations sur n éléments, nous obtenons :

$$\begin{aligned} n! |h_n(k, x)| &\leq \sum_{\omega \in S_n} \int \int \cdots \int_{x \leq x_{w(1)} \leq x_{w(2)} \leq \cdots \leq x_{w(n)}} (x_1 - x) (x_2 - x) \cdots (x_n - x) |V(x_1)| \cdots |V(x_n)| dx_n \cdots dx_1 \\ &= \int_x^{+\infty} \int_x^{+\infty} \cdots \int_x^{+\infty} (x_1 - x) (x_2 - x) \cdots (x_n - x) |V(x_1)| \cdots |V(x_n)| dx_n \cdots dx_1 \\ &= \left(\int_x^{+\infty} (x' - x) |V(x')| dx' \right)^n, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

ainsi, en posant :

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} (x' - x) |V(x')| dx', \quad (\text{A.43})$$

nous obtenons :

$$|h_+(k, x) - 1| \leq e^{Q(x)} - 1 \leq Q(x) e^{Q(x)}. \quad (\text{A.44})$$

Par ailleurs, nous avons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 |h_+(k, x)| &\leq 1 + \int_x^{+\infty} (x' - x)|V(x')||h_+(k, x')|dx', \\
 &= 1 + \int_x^{+\infty} x'|V(x')||h_+(x')|dx' + (-x) \int_x^{+\infty} |V(x')||h_+(x')|dx', \\
 &\leq 1 + \int_0^{+\infty} x'|V(x')||h_+(x')|dx' + (-x) \int_x^{+\infty} |V(x')||h_+(x')|dx' \quad (\text{A.45})
 \end{aligned}$$

Le premier terme est indépendant de x et vérifie :

$$\begin{aligned}
 1 + \int_0^{+\infty} x'|V(x')||h_+(x')|dx' &\leq 1 + (Q(0)e^{Q(0)} + 1) \int_0^{+\infty} x'|V(x')|dx' \\
 &= 1 + (Q(0)e^{Q(0)} + 1)Q(0) = C_1 < \infty, \quad (\text{A.46})
 \end{aligned}$$

où C_1 est une constante finie qui ne dépend que de $Q(0)$.

Soient les fonctions F et p telles que :

$$F(k, x) = \frac{h_+(k, x)}{C_1(1 + |x|)}, \quad p(x) = (1 + |x|)|V(x)| \in L^1(\mathbb{R}). \quad (\text{A.47})$$

Écrivons l'estimation sur $h_+(k, x)$ en fonction de $F(k, x)$. Nous avons :

$$C_1(1 + |x|)|F(k, x)| \leq C_1 + (-x) \int_x^{+\infty} C_1(1 + |x'|)|V(x')||F(k, x')|dx', \quad (\text{A.48})$$

d'où,

$$|F(k, x)| \leq \frac{1}{1 + |x|} + \frac{-x}{1 + |x|} \int_x^{+\infty} p(x')|F(k, x')|dx' \leq 1 + \int_x^{+\infty} p(x')|F(k, x')|dx', \quad (\text{A.49})$$

En utilisant le lemme de Gronwall ⁴, nous obtenons :

$$|H(k, x)| \leq e^{\int_x^{+\infty} p(x')dx'} \leq e^{\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x'|)V(x')dx'} = C_2 < \infty. \quad (\text{A.50})$$

ainsi,

$$|h_+(k, x)| \leq C_3(1 + |x|), \quad (\text{A.51})$$

avec $C_3 = C_1 C_2$ et ne dépend que du potentiel.

En combinant ce résultat avec (A.45), nous obtenons :

$$|h_+(k, x) - 1| \leq Q(0)e^{Q(0)} \int_0^{+\infty} x'V(x')dx' + (-x)C_3 \int_x^{+\infty} (1 + |x'|)|V(x')|dx', \quad (\text{A.52})$$

ce qui donne :

– pour $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} |h_+(k, x) - 1| &\leq Q(0)e^{Q(0)} \int_x^{+\infty} (1 + |x'|)|V(x')|dx' + |x|C_3 \int_x^{+\infty} (1 + |x'|)|V(x')|dx', \\ &\leq C_4(1 + |x|) \int_x^{+\infty} (1 + |x'|)|V(x')|dx', \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

avec $C_4 = \max(Q(0)e^{Q(0)}, C_3)$ et ne dépend que de V ,

– Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} |h_+(k, x) - 1| &\leq Q(x)e^{Q(x)} \leq Q(x)e^{Q(0)} = e^{Q(0)} \int_x^{+\infty} (x' - x)|V(x')|dx', \\ &\leq e^{Q(0)} \int_x^{+\infty} x'|V(x')|dx' \leq e^{Q(0)} \int_x^{+\infty} (1 + |x'|)|V(x')|dx'. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

⁴**Lemme :** Soient deux fonctions f et g positives et continues sur \mathbb{R} . Supposons qu'il existe $K \geq 0$ telle que :

$$f(x) \leq K + \int_x^{+\infty} f(x')g(x')dx',$$

alors :

$$f(x) \leq Ke^{\int_x^{+\infty} g(x')dx'}.$$

Ainsi, en prenant $C_5 = \max(C_4, e^{Q(0)})$, nous avons :

$$|h_+(k, x) - 1| \leq C_5(1 + \max(0, -x)) \int_x^{+\infty} (1 + |x'|)|V(x')|dx'. \quad (\text{A.55})$$

Pour $k \in \mathbb{R}$, le résultat du théorème A.2 se déduit en combinant (A.55) pour $|k| \leq 1$ et le théorème A.1 pour $|k| \geq 1$. Pour $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(k) \geq 0$, le résultat se déduit par le corollaire A.1.

En dérivant l'équation (A.38), nous obtenons :

$$\frac{dh_+}{dx}(k, x) = - \int_x^{+\infty} e^{2ik(x'-x)}V(x')h_+(k, x')dx', \quad (\text{A.56})$$

d'où,

$$\left| \frac{dh_+}{dx}(k, x) \right| \leq C \int_x^{+\infty} |V(x')| \frac{1 + \max(0, -x')}{1 + |k|} dx'. \quad (\text{A.57})$$

Ce qui achève la démonstration du théorème A.2; les résultats pour f_- s'obtenant de manière analogue. \square

Remarque : Pour une fonction réelle intégrable V , les fonctions $f_{\pm}(k, x)$, $f_{\pm}(-k, x)$ sont toutes solutions de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + Vf = k^2 f. \quad (\text{A.58})$$

Ainsi, il existe des relations entre ces solutions étant donné que l'espace des solutions est de dimension 2 pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et de dimension 1 pour $k \in \mathbb{C}^+$ comme nous le verrons dans la section qui suit.

A.3 Données scattering : définitions et propriétés [23], [51]

Proposition A.1. *Soit V une fonction continue, intégrable à valeurs réelles. Alors, le Wronskien $W(f_1, f_2)$ de deux solutions f_1 et f_2 de l'équation $-\frac{d^2 f}{dx^2} + Vf = k^2 f$ est constant et nous avons :*

$$W(f_+(k, x), f_+(-k, x)) = -2ik, \text{ et } W(f_-(k, x), f_-(-k, x)) = 2ik, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.59})$$

Preuve. Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation :

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + Vf = k^2 f. \quad (\text{A.60})$$

Nous avons par définition du Wronskien :

$$W(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x) \frac{df_2}{dx}(x) - \frac{df_1}{dx}(x) f_2(x). \quad (\text{A.61})$$

Dérivons $W(f_1(x), f_2(x))$ par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(f_1(x), f_2(x)) &= f_1(x) \frac{d^2 f_2}{dx^2}(x) - \frac{d^2 f_1}{dx^2} f_2(x), \\ &= (V(x) - k^2) f_1(x) f_2(x) - (V(x) - k^2) f_1(x) f_2(x), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Dans le cas où $f_1(x) = f_{\pm}(k, x)$ et $f_2 = f_{\pm}(-k, x)$, nous utilisons le comportement asymptotique des solutions de Jost pour évaluer le Wronskien étant donné que celui-ci est constant par rapport à x . Ainsi, nous avons :

$$f_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A.63})$$

et

$$\frac{df_{\pm}}{dx}(k, x) = \pm ik e^{\pm ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A.64})$$

d'où,

$$W(f_{\pm}(k, x), f_{\pm}(-k, x)) = \mp 2ik, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.65})$$

□

Le Wronskien de deux solutions de l'équation de Schrödinger est non-nul si et seulement si ces solutions sont linéairement indépendantes. Pour $k \neq 0$, les solutions $f_+(k, x)$ et $f_+(-k, x)$ (resp. $f_-(k, x)$ et $f_-(-k, x)$) sont linéairement indépendantes. Il existe alors des coefficients uniques $a_{\pm}(k)$ et $b_{\pm}(k)$, tels que pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f_{\pm}(k, x) = b_{\mp}(k) f_{\mp}(k, x) + a_{\mp}(k) f_{\mp}(-k, x). \quad (\text{A.66})$$

Sachant que $\overline{f_{\pm}(k, x)} = f_{\pm}(-k, x)$ alors :

$$\overline{a_{\pm}(k)} = a_{\pm}(-k), \quad \overline{b_{\pm}(k)} = b_{\pm}(-k). \quad (\text{A.67})$$

Calculons à présent $W(f_{-}(k, x), f_{-}(-k, x))$ en fonction de $b_{\pm}(k)$ et $a_{\pm}(k)$,

$$\begin{aligned} W(f_{-}(k, x), f_{-}(-k, x)) &= W(b_{+}(k)f_{+}(k, x) + a_{+}(k)f_{+}(-k, x), \\ &\quad b_{+}(-k)f_{+}(-k, x) + a_{+}(-k)f_{+}(k, x)), \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

d'où,

$$\begin{aligned} W(f_{-}(k, x), f_{-}(-k, x)) &= b_{+}(k)b_{+}(-k)W(f_{+}(k, x), f_{+}(-k, x)) \\ &\quad + a_{+}(k)a_{+}(-k)W(f_{+}(-k, x), f_{+}(k, x)). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

En utilisant,

$$W(f_{\pm}(k, x), f_{\pm}(-k, x)) = \mp 2ik, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.70})$$

nous obtenons,

$$|a_{+}(k)|^2 - |b_{+}(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.71})$$

De même nous avons,

$$b_{+}(k) = -\frac{1}{2ik}W(f_{-}(k, x), f_{+}(-k, x)), \quad a_{+}(k) = \frac{1}{2ik}W(f_{-}(k, x), f_{+}(k, x)), \quad (\text{A.72})$$

$$|a_{-}(k)|^2 - |b_{-}(k)|^2 = 1, \quad (\text{A.73})$$

$$b_{-}(k) = \frac{1}{2ik}W(f_{+}(k, x), f_{-}(-k, x)), \quad a_{-}(k) = -\frac{1}{2ik}W(f_{+}(k, x), f_{-}(k, x)), \quad (\text{A.74})$$

On en déduit :

$$a_{+}(k) = a_{-}(k). \quad (\text{A.75})$$

Posons (figure 16) :

$$\psi_{\pm}(k, x) = \frac{1}{a_{\mp}(k)}f_{\pm}(k, x) = \frac{b_{\mp}(k)}{a_{\mp}(k)}f_{\mp}(k, x) + f_{\mp}(-k, x). \quad (\text{A.76})$$

Notons :

$$T(k) = \frac{1}{a_+(k)} = \frac{1}{a_-(k)}, \quad R_{r(l)}(k) = \frac{b_\pm(k)}{a_\pm(k)} = \frac{b_\pm(k)}{a_\mp(k)}. \quad (\text{A.77})$$

Nous obtenons alors :

$$\psi_-(k, x) = \begin{cases} T(k)e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-ikx} + R_r(k)e^{ikx} & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

$$\psi_+(k, x) = \begin{cases} T(k)e^{ikx} & x \rightarrow +\infty, \\ e^{ikx} + R_l(k)e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

$T(k)$ est appelé coefficient de transmission et $R_{l(r)}(k)$ sont appelés coefficients de réflexion par la gauche et par la droite respectivement. En réécrivant (A.66) en fonction de $T(k)$ et $R_{l(r)}(k)$, nous obtenons :

$$f_\pm(k, x) = \frac{R_{l(r)}(k)}{T(k)} f_\mp(k, x) + \frac{1}{T(k)} f_\mp(-k, x). \quad (\text{A.80})$$

Nous en déduisons le comportement asymptotique des solutions de Jost f_\pm en $\mp\infty$:

$$f_\pm(k, x) = \frac{e^{\pm ikx}}{T(k)} + \frac{R_{l(r)}(k)e^{\mp ikx}}{T(k)} + o(1), \quad x \rightarrow \mp\infty. \quad (\text{A.81})$$

Les propriétés des coefficients $a_\pm(k)$ et $b_\pm(k)$ permettent de déduire différentes propriétés de $T(k)$ et $R_{l(r)}(k)$ que nous résumons dans la proposition suivante :

Proposition A.2. *Pour un potentiel réel $V \in L_1^1(\mathbb{R})$, les coefficients de transmission et de réflexion vérifient les propriétés suivantes :*

$$\overline{T(k)} = T(-k), \quad \overline{R_r(k)} = R_r(-k), \quad \overline{R_l(k)} = R_l(-k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.82})$$

$$R_r(k)\overline{T(k)} = -\overline{R_l(k)}T(k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.83})$$

$$|T(k)|^2 + |R_l(k)|^2 = 1 = |T(k)|^2 + |R_r(k)|^2, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.84})$$

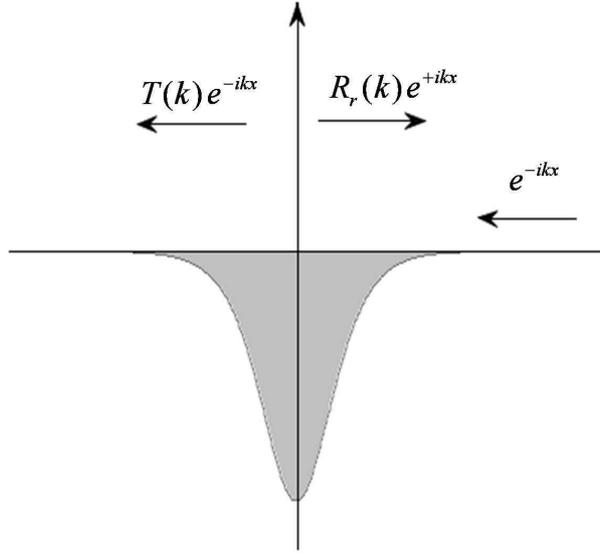


FIG. 16 – Phénomène scattering de l'opérateur de Schrödinger

$$\frac{1}{T(k)} = \frac{1}{2ik} W(f_-(k, x), f_+(k, x)), \quad k \in \overline{\mathbb{C}}^+ \setminus \{0\}, \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{R_l(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} W(f_+(k, x), f_-(-k, x)), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{R_r(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} W(f_+(-k, x), f_-(k, x)), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.87})$$

La matrice scattering $S(k)$ est définie par :

$$S(k) = \begin{pmatrix} T(k) & R_r(k) \\ R_l(k) & T(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (\text{A.88})$$

Il est facile de vérifier à l'aide des propriétés de $T(k)$ et $R_{l(r)}(k)$ que $S(k)$ est unitaire.

Proposition A.3. Pour un potentiel réel $V \in L_1^1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} T(k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \pm\infty} R(k) = 0. \quad (\text{A.89})$$

Preuve. Soient les fonctions g_{\pm} et h_{\pm} telles que :

$$f_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} + g_{\pm}(k, x), \quad \frac{df_{\pm}(k, x)}{dx} = \pm ike^{\pm ikx} + h_{\pm}(k, x). \quad (\text{A.90})$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} W(f_-(k, x), f_+(k, x)) &= 2ik + ik e^{ikx} g_-(k, x) + e^{-ikx} h_+(k, x) + g_-(k, x) h_+(k, x) \\ &\quad + ik e^{-ikx} g_+(k, x) - e^{ikx} h_-(k, x) - g_+(k, x) h_-(k, x). \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

D'après le théorème A.1, nous avons :

$$|g_{\pm}(k, x)| \leq |e^{\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx} - 1|, \quad |h_{\pm}(k, x)| \leq |k| |e^{\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx} - 1|, \quad (\text{A.92})$$

avec :

$$e^{\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx} - 1 = O\left(\frac{1}{|k|}\right). \quad (\text{A.93})$$

D'où, pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{W(f_-(k, x), f_+(k, x))}{2ik} - 1 \right| \leq 2 \left| e^{\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx} - 1 \right| + \left| e^{\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) dx} - 1 \right|^2, \quad (\text{A.94})$$

par conséquent :

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \left| \frac{W(f_-(k, x), f_+(k, x))}{2ik} - 1 \right| = 0. \quad (\text{A.95})$$

En combinant ce résultat avec la propriété (A.85), nous obtenons la limite sur le coefficient de transmission et ensuite la limite sur les coefficients de réflexion. \square

Proposition A.4. *Soit un potentiel réel $V \in L^1_1(\mathbb{R})$ alors pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les coefficients de transmission et de réflexion s'écrivent en fonction du potentiel et des solutions de Jost comme suit :*

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} V(x) f_{\mp}(k, x) dx, \quad (\text{A.96})$$

et

$$\frac{R_{l(r)}(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} V(x) f_{\pm}(k, x) dx. \quad (\text{A.97})$$

Preuve. Notons h une solution de $-\frac{d^2 h}{dx^2} = k^2 h$ et g une solution de $-\frac{d^2 g}{dx^2} + Vg = k^2 g$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(h(k, x), g(k, x)) &= h(k, x)\frac{d^2}{dx^2}g(k, x) - \frac{d^2}{dx^2}h(k, x)g(k, x) \\ &= V(x)h(k, x)g(k, x). \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

En intégrant sur un intervalle $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b V(x)h(k, x)g(k, x)dx = W(h(k, x), g(k, x))|_{x=b} - W(h(k, x), g(k, x))|_{x=a}. \quad (\text{A.99})$$

Prenons $h(k, x) = e^{ikx}$ et $g(k, x) = f_+(k, x)$ et passons à la limite sur les bornes de l'intégrale précédente : $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)e^{ikx}f_+(k, x)dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} W(e^{ikx}, f_+(k, x))|_{x=b} \\ &\quad - \lim_{a \rightarrow -\infty} W(e^{ikx}, f_+(k, x))|_{x=a}. \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

Connaissant le comportement en $\pm\infty$ de $f_+(k, x)$, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)e^{ikx}f_+(k, x)dx = 2ik\frac{R_l(k)}{T(k)}, \quad (\text{A.101})$$

d'où,

$$\frac{R_l(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} V(x)f_+(k, x)dx. \quad (\text{A.102})$$

L'expression de $\frac{1}{T(k)}$ s'obtient de la même manière en prenant $h(k, x) = e^{ikx}$ et $g(k, x) = f_-(k, x)$ ou $h(k, x) = e^{-ikx}$ et $g(k, x) = f_+(k, x)$ et celle de $\frac{R_r(k)}{T(k)}$ s'obtient en posant $h(k, x) = e^{-ikx}$ et $g(k, x) = f_-(k, x)$. \square

Proposition A.5. [23] Soit $V \in L_1^1(\mathbb{R})$, alors :

$$T(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \quad (\text{A.103})$$

$$R_{l(r)}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.104})$$

Si en plus, V a m dérivées dans $L^1(\mathbb{R})$ alors :

$$R_{l(r)}(k) = O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.105})$$

Preuve. Cette proposition se déduit des formules (A.96) et (A.97). En effet, en utilisant (voir la preuve du théorème A.1) :

$$h_+(k, x) = e^{-ikx} f_+(k, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(k, x), \quad h_n(k, x) = O\left(\frac{1}{|k|^n}\right), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.106})$$

dans (A.96) et (A.97), nous obtenons :

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x') dx' + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.107})$$

d'où,

$$T(k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x') dx' + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.108})$$

et

$$R_{l(r)}(k) = \frac{T(k)}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x') e^{\pm 2ikx'} dx' + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.109})$$

d'où $R_{l(r)}(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$, $|k| \rightarrow +\infty$.

Si V a m dérivées dans $L^1(\mathbb{R})$ (tel que f_{\pm} a $m+2$ dérivées), alors l'intégration par parties de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} V(x') f_{\pm}(k, x) dx$ donne $R_{l(r)}(k) = O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right)$, $|k| \rightarrow +\infty$. \square

Théorème A.3. Soit un potentiel réel $V \in L^1_1(\mathbb{R})$ alors, le coefficient de transmission $T(k)$ est une fonction méromorphe dans le demi plan complexe supérieur $\text{Im}(k) > 0$, avec un nombre fini de pôles $i\kappa_n$, $\kappa_n > 0$, $n = 1, \dots, N$. En plus, $T(k)$ est continue pour $\text{Im}(k) \geq 0$ sauf pour $k = 0$ et $k = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$.

Par ailleurs, $-\kappa_n^2$, $n = 1, \dots, N$ sont les valeurs propres simples de l'opérateur de Schrödinger avec $f_+(i\kappa_n, x)$ comme fonctions propres associées. Soit γ_n une constante réelle non nulle telle que $f_+(i\kappa_n, x) = \gamma_n f_-(i\kappa_n, x)$, alors les résidus de $T(k)$ aux points $k = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$ sont donnés par,

$$\text{Res}_{k=i\kappa_n}(T(k)) = i\gamma_n c_{ln}^2, \quad \text{où} \quad c_{ln} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_n, x)|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.110})$$

Preuve. En se référant au corollaire A.1, nous avons que $W(f_-(k, x), f_+(k, x))$ est analytique en k pour $\text{Im}(k) > 0$ et en se rappelant que $T(k) = \frac{1}{2ik} \frac{W(f_-(k, x), f_+(k, x))}{W(f_-(k, x), f_+(k, x))}$ nous en déduisons que $T(k)$ est analytique dans le demi plan supérieur $\text{Im}(k) > 0$ sauf pour les valeurs de k qui annulent le Wronskien $W(f_-(k, x), f_+(k, x))$.

Nous rappelons que $\frac{1}{T(k)}$ s'écrit sous la forme suivante (A.96) :

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} V(x) f_+(k, x) dx = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) h_+(k, x) dx, \quad (\text{A.111})$$

avec $h_+(k, x) = e^{-ikx} f_+(k, x)$. Nous rappelons aussi que (équation (A.51)) :

$$|h_+(k, x)| \leq C(1 + |x|). \quad (\text{A.112})$$

Étant donné que $h_+(k, x)$ est continue pour $\text{Im}(k) \geq 0$, alors $\frac{1}{T(k)}$ est aussi continue pour $\text{Im}(k) \geq 0$, $k \neq 0$. D'après la proposition A.2, $\frac{1}{|T(k)|} \geq 1$ pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ainsi $T(k) = \frac{1}{T(k)^{-1}}$ est continue près de $\text{Im}(k) = 0$, $k \neq 0$.

Soit $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(k) > 0$, avec $k = \gamma + i\beta$, $\beta > 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} h_+(k, x) &= 1 + \int_x^{+\infty} \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2ik} V(x') h_+(k, x') dx', \\ &= \frac{1}{T(k)} + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x V(x') h_+(k, x') dx' + \int_x^{+\infty} \frac{e^{2ik(x'-x)}}{2ik} V(x') h_+(k, x') dx' \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

Étudions le comportement de $h_+(k, x)$ quand $x \rightarrow -\infty$. Nous supposons $x < 0$ et par le théorème A.1 nous avons :

$$\left| \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x V(x') h_+(k, x') dx' \right| \leq C \int_{-\infty}^x |V(x')| dx' = o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\text{A.114})$$

où C dépend de $V(x')$ et de k . De même par le théorème A.1, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{+\infty} \frac{e^{2ik(x'-x)}}{2ik} V(x') h_+(k, x') dx' \right| &\leq C \int_x^{\frac{x}{2}} e^{-2\beta(x'-x)} |V(x')| dx' + \\ C \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} e^{-2\beta(x'-x)} |V(x')| dx' &\leq C \int_x^{\frac{x}{2}} |V(x')| dx' + C e^{\beta x} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(x')| dx'. \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

Le premier terme est $o(1)$ en $-\infty$ puisque V est intégrable et le second terme est $O(e^{x\beta})$, $x \rightarrow -\infty$. Ainsi, en combinant (A.113), (A.114) et (A.115), nous obtenons pour $\text{Im}(k) > 0$:

$$h_+(k, x) = \frac{1}{T(k)} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (\text{A.116})$$

De la même manière, nous montrons que $h_-(k, x) = \frac{1}{T(k)} + o(1)$, $x \rightarrow +\infty$, $\text{Im}(k) > 0$.

Supposons que k_0 , $\text{Im}(k_0) > 0$ n'est pas un pôle de $T(k)$, d'où $W(f_-(k, x); f_+(k, x)) \neq 0$. Par conséquent, f_- et f_+ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Schrödinger et engendrent l'espace des solutions. Du comportement en $x \rightarrow -\infty$ de $h_+(k, x)$, nous avons :

$$f_+(k_0, x) = e^{ik_0x} h_+(k, x) = \frac{e^{ik_0x}}{T(k_0)} + o(e^{-c\text{Im}(k_0)}), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (\text{A.117})$$

Nous en déduisons que $f_+(k_0, x) \notin L^2(\mathbb{R})$. De même $f_-(k_0, x) \notin L^2(\mathbb{R})$ et puisque f_- et f_+ engendrent l'espace des solutions, il n'y a pas de solutions dans $L^2(\mathbb{R})$ et k_0^2 n'est pas une valeur propre de l'opérateur de Schrödinger.

Supposons à présent que k_0 est un pôle de $T(k)$, avec $\text{Im}(k_0) > 0$, f_- est donc multiple de f_+ qui sont dans $L^2((-\infty, x])$ et $L^2([x, +\infty))$ respectivement (d'après le théorème A.1), ainsi $f_+ \in L^2(\mathbb{R})$. Les fonctions $f_{\pm}(k_0, x)$ sont des fonctions propres associées à la valeur propre k_0^2 . Sachant que l'opérateur de Schrödinger est auto-adjoint alors $k_0^2 \in \mathbb{R}$, d'où k_0 est un imaginaire pur avec $\text{Im}(k_0) > 0$. Les pôles de $T(k)$ qui sont sur l'axe imaginaire positif correspondent donc aux valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger. Ces valeurs propres, que nous notons $k_0 = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$ correspondent au spectre discret et leur nombre est fini.

Montrons à présent que les résidus de $T(k)$ aux points $i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$ s'expriment en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_n, x)|^2 dx$. Notons :

$$c_{ln} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_n, x)|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.118})$$

Nous rappelons que :

$$\frac{2ik}{T(k)} = W(f_-(k, x), f_+(k, x)), \quad (\text{A.119})$$

est analytique pour $\text{Im}(k) > 0$. En dérivant par rapport à k , nous obtenons :

$$\frac{2ik}{T(k)} + 2ik \frac{dT^{-1}}{dk}(k) = W\left(\frac{\partial f_-}{\partial k}(k, x), f_+(k, x)\right) + W\left(f_-(k, x), \frac{\partial f_+}{\partial k}(k, x)\right). \quad (\text{A.120})$$

Pour $k = k_0$, où k_0 est un pôle de $T(k)$, nous avons :

$$2ik_0 \frac{dT^{-1}}{dk}(k_0) = W\left(\frac{\partial f_-}{\partial k}(k_0, x), f_+(k_0, x)\right) + W\left(f_-(k_0, x), \frac{\partial f_+}{\partial k}(k_0, x)\right). \quad (\text{A.121})$$

Or, nous avons que f_{\pm} et $\frac{df_{\pm}}{dk}$ vérifient respectivement :

$$-\frac{d^2 f_{\pm}}{dx^2}(k, x) + V(x)f_{\pm}(k, x) = k^2 f_{\pm}(k, x), \quad (\text{A.122})$$

et

$$-\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f_{\pm}}{\partial k}(k, x) + V \frac{\partial f_{\pm}}{\partial k}(k, x) = k^2 \frac{\partial f_{\pm}}{\partial k} + 2k f_{\pm}(k, x), \quad (\text{A.123})$$

d'où,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(W\left(\frac{\partial f_+}{\partial k}(k, x)\right), f_-(k, x) \right) &= \frac{\partial f_+}{\partial k}(k, x) \frac{d^2 f_-}{dx^2}(k, x) - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f_+}{\partial k}(k, x) f_-(k, x), \\ &= 2k f_+(k, x) f_-(k, x), \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

ainsi,

$$2k \int_x^a f_+(k, x') f_-(k, x') dx' = W\left(\frac{\partial f_+}{\partial k}(k, a), f_-(k, a)\right) - W\left(\frac{\partial f_+}{\partial k}(k, x), f_-(k, x)\right). \quad (\text{A.125})$$

Nous avons vu précédemment que les pôles de $T(k)$ sont les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger telles que $k_0 = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$, $\kappa_n > 0$ et que $f_+(i\kappa_n, x)$ et $f_-(i\kappa_n, x)$ sont proportionnelles : $f_+(i\kappa_n, x) = \gamma_n f_-(i\kappa_n, x)$, avec γ_n une constante réelle non nulle. En réécrivant l'équation (A.125) pour $k = i\kappa_n$ et en passant à la limite $a \rightarrow +\infty$, nous obtenons :

$$2i\kappa_n \int_x^{+\infty} f_+(i\kappa_n, x') f_-(i\kappa_n, x') dx' = -W\left(\frac{\partial f_+}{\partial k}(i\kappa_n, x), f_-(i\kappa_n, x)\right). \quad (\text{A.126})$$

De manière analogue :

$$2i\kappa_n \int_{-\infty}^x f_+(i\kappa_n, x') f_-(i\kappa_n, x') dx' = -W(f_+(i\kappa_n, x), \frac{\partial f_-}{\partial k}(i\kappa_n, x)), \quad (\text{A.127})$$

ainsi,

$$-2\kappa_n \frac{dT^{-1}}{dk}(i\kappa_n) = 2i\kappa_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(i\kappa_n, x') f_-(i\kappa_n, x') dx', \quad (\text{A.128})$$

d'où,

$$\frac{dT^{-1}}{dk}(i\kappa_n) = \frac{1}{i\gamma_n} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_n, x')|^2 dx' \neq 0, \quad (\text{A.129})$$

Les résidus de $T(k)$ aux points $i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$ sont alors donnés par :

$$\text{Res}_{k=i\kappa_n}(T(k)) = i\gamma_n c_{ln}^2, \quad c_{ln} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_+(i\kappa_n, x)|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.130})$$

Remarquons que,

$$\frac{dT^{-1}}{dk}(i\kappa_n) \neq 0, \quad (\text{A.131})$$

ainsi les pôles de $T(k)$ sont simples. \square

B Preuve des formules de traces et des invariants

B.1 Preuve de la formule de Deift-Trubowitz

Nous rappelons que $h_{\pm}(k, x) = e^{\mp ikx} f_{\pm}(k, x)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d^2 h_{\pm}}{dx^2} \pm 2ik \frac{\partial h_{\pm}}{\partial x} = V h_{\pm}. \quad (\text{B.1})$$

La preuve du théorème 2.4.1 est basée sur les propriétés de la fonction $\frac{2ik}{\pi} T(k) h_+(k, x) h_-(k, x)$ et utilise le lemme suivant [23] :

Lemme B.1. [23] Pour $V \in L^1_1(\mathbb{R})$:

$$h_+(k, x) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^{+\infty} (e^{2ik(x'-x)} - 1) V(x') dt + \frac{1}{2(2ik)^2} \left(\int_x^{+\infty} V(x') dx' \right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (\text{B.2})$$

$$h_-(k, x) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x (e^{2ik(x-x')} - 1) V(x') dx' + \frac{1}{2(2ik)^2} \left(\int_x^{+\infty} V(x') dx' \right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (\text{B.3})$$

et

$$T(k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x') dx' + \frac{1}{2(2ik)^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} V(x') dx' \right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (\text{B.4})$$

En combinant les équations du lemme, nous avons :

$$\frac{2ik}{\pi} (T(k)h_+(k, x)h_-(k, x) - 1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ik|x'-x|} V(x') dx' + o\left(\frac{1}{k}\right). \quad (\text{B.5})$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ik|x'-x|} V(x') dx' \right) dk = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \left(e^{-2ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ikx'} V(x') dx' \right) dk \equiv V(a, x). \quad (\text{B.6})$$

Étant donné que $V \in L^1_1(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} (e^{-2ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ikx'} V(x') dx') dk \right) da &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \int_0^b V(a, x) da, \\ &= V(x), \text{ p.p.} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Par ailleurs, nous avons :

$$V(a, x) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} 2ik(T(k)h_+(k, x)h_-(k, x) - 1) dk = \int_{-a}^{+a} o\left(\frac{1}{k}\right) dk, \quad (\text{B.8})$$

où $o\left(\frac{1}{k}\right)$ est une fonction méromorphe dans $\text{Im}(k) > 0$ avec les pôles et les résidus de $\frac{2ik}{\pi} T h_+ h_-$. Par conséquent, pour tout x , nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\int_{-a}^{+a} \frac{2ik}{\pi} (T(k)h_+(k, x)h_-(k, x) - 1) dk - V(a, x) \right] \\ = - \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x} (2c_{in}^2 e^{-2\kappa_n x}) h_+^2(i\kappa_n, x). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} k(T(k)h_+(k, x)h_-(k, x) - 1) dk &= \frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} k R_r(k) e^{2ikx} h_+^2(k, x) + k(|h_+^2(k, x)| - 1) dk, \\ &= \frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} k R_r(k) e^{2ikx} h_+^2(k, x) dk. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Ainsi,

$$V(x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left(\frac{2i}{\pi} \int_{-a}^{+a} k R_r(k) e^{2ikx} h_+^2(k, x) dk \right) da + \sum_{n=1}^N \frac{\partial(2c_{ln}^2 e^{-2\kappa_n x})}{\partial x} h_+^2(i\kappa_n, x), \quad (\text{B.11})$$

d'où le théorème 2.4.1.

B.2 Preuve des formules de traces

Nous proposons dans cette section quelques éléments de la preuve du théorème 2.5.1 issus de [34]. Nous supposons que le potentiel V satisfait les hypothèses (2.44).

Soient les fonctions θ_{\pm} définies par :

$$\theta_{\pm}(k, x) = \mp ik + \frac{d}{dx} \ln f_{\pm}(k, x) = \mp ik + \frac{\frac{df_{\pm}}{dx}(k, x)}{f_{\pm}(k, x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{Im}(k) \geq 0. \quad (\text{B.12})$$

En remplaçant dans l'équation de Schrödinger $-\frac{d^2 f_{\pm}}{dx^2}(k, x) + V f_{\pm}(k, x) = k^2 f_{\pm}(k, x)$, nous trouvons que θ_{\pm} sont solutions d'une équation de Riccati donnée par :

$$\frac{d\theta_{\pm}}{dx}(k, x) \pm 2ik\theta_{\pm}(k, x) + \theta_{\pm}^2(k, x) = V(x), \quad (\text{B.13})$$

avec $\theta_{\pm}(k, x) = 0$, quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Pour $|k| \rightarrow +\infty$, les fonctions θ_{\pm} s'écrivent sous forme d'un développement en séries de $(2ik)^{-1}$ uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}$ [34] :

$$\theta_{\pm}^{(m)}(k, x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{\pm, n}^{(m)}(x)}{(2ik)^n}, \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad \text{Im}(k) > 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (\text{B.14})$$

avec :

$$\theta_{\pm, n+1}(x) = \mp \frac{d\theta_{\pm, n}}{dx}(x) \mp \sum_{m=1}^{n-1} \theta_{\pm, m}(x) \theta_{\pm, n-m}(x), \quad n \geq 2, \quad (\text{B.15})$$

$$\theta_{\pm, 1}(x) = \pm V(x), \quad (\text{B.16})$$

$$\theta_{\pm, 2}(x) = -\frac{dV}{dx}(x). \quad (\text{B.17})$$

Étant donné que $\overline{f_{\pm}(k, x)} = f_{\pm}(-k, x)$, alors $\theta_{-,m}(x) = (-1)^m \theta_{+,m}(x)$, $m \in \mathbb{N}$. Nous avons en particulier :

$$\theta_{+,1}(x) = -\theta_{-,1}(x) = V(x), \quad (\text{B.18})$$

$$\theta_{+,2}(x) = \theta_{-,2}(x) = -\frac{dV}{dx}(x), \quad (\text{B.19})$$

$$\theta_{+,3}(x) = -\theta_{-,3}(x) = \frac{d^2V}{dx^2}(x) - V^2(x), \quad (\text{B.20})$$

$$\theta_{+,4}(x) = \theta_{-,4}(x) = -\frac{d^3V}{dx^3}(x) + 4V(x)\frac{dV}{dx}(x), \quad (\text{B.21})$$

$$\theta_{+,5}(x) = -\theta_{-,5}(x) = \frac{d^4V}{dx^4}(x) - 6V(x)\frac{d^2V}{dx^2}(x) - 5\left(\frac{dV}{dx}(x)\right)^2 + 2V^3(x). \quad (\text{B.22})$$

La fonction de green $G(k, x, x')$ de l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ est donnée par [34] :

$$G(k, x, x') = \frac{f_+(k, x)f_-(k, x')}{W(f_+(k, x)f_-(k, x'))}, \quad x' \leq x. \quad (\text{B.23})$$

De (2.18) nous écrivons :

$$G(k, x, x') = -\frac{T(k)}{2ik} f_+(k, x)f_-(k, x'), \quad x' \leq x. \quad (\text{B.24})$$

Nous pouvons écrire le Wronskien $W(f_-(k, x)f_+(k, x'))$ en fonction de $\theta_+(k, x)$ et $\theta_-(k, x')$ comme suit :

$$W(f_-(k, x), f_+(k, x)) = (2ik + \theta_+(k, x) - \theta_-(k, x)) f_+(k, x)f_-(k, x), \quad (\text{B.25})$$

d'où, pour $\text{Im}(k) \geq 0$:

$$T(k)f_+(k, x)f_-(k, x') = \frac{2ik}{2ik + \theta_+(k, x) - \theta_-(k, x)} \frac{f_-(k, x')}{f_-(k, x)}. \quad (\text{B.26})$$

Pour $x = x'$, nous avons :

$$T(k)f_+(k, x)f_-(k, x) = \frac{2ik}{2ik + \theta_+(k, x) - \theta_-(k, x)}, \quad \text{Im}(k) \geq 0. \quad (\text{B.27})$$

D'autre part, en combinant (2.18) et (B.12), nous trouvons :

$$T(k) = e^{\pm \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_{\pm}(k, x) dx}, \quad \text{Im}(k) \geq 0. \quad (\text{B.28})$$

Par conséquent :

$$T(k)f_+(k, x)f_-(k, x') = e^{ik(x-x') + \int_{-\infty}^x \theta_+(k, x'') dx'' + \int_{-\infty}^{x'} \theta_-(k, x'') dx''}, \quad (\text{B.29})$$

d'où,

$$T(k)f_+(k, x)f_-(k, x') \sim e^{ik(x-x')} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n(x, x')}{(2ik)^n}\right), \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \quad (\text{B.30})$$

avec

$$\sigma_n(x, x') = \int_{-\infty}^x \theta_{+,n}(x'') + \int_{-\infty}^{x'} \theta_{-,n}(x''), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.31})$$

en particulier :

$$\sigma_1(x, x') = \int_{x'}^x V(x'') dx'', \quad (\text{B.32})$$

$$\sigma_2(x, x') = -V(x) - V(x'), \quad (\text{B.33})$$

$$\sigma_3(x, x') = \int_{x'}^x \left(\frac{d^2 V}{dx^2}(x'') - V^2(x'') \right) dx''. \quad (\text{B.34})$$

Nous obtenons alors :

$$T(k)f_+(k, x)f_-(k, x') \sim e^{ik(x-x')} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Omega_n(x, x')}{(2ik)^n}, \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \quad (\text{B.35})$$

où :

$$\Omega_n(x, x') = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \sum_{\substack{\tau: \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{N} \\ |\tau| = n}} \sigma_{\tau(1)}(x, x') \sigma_{\tau(2)}(x, x') \cdots \sigma_{\tau(m)}(x, x'), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.36})$$

avec $\Omega_0(x, x') = 1$ et $|\tau| := \tau(1) + \cdots + \tau(m)$. Les trois premières fonctions Ω_n sont données par :

$$\Omega_1(x, x') = \sigma_1(x, x') = \int_{x'}^x V(x'') dx'', \quad (\text{B.37})$$

$$\Omega_2(x, x') = \sigma_2(x, x') + \frac{1}{2} \sigma_1^2(x, x') = -V(x) - V(x') + \frac{1}{2} \left[\int_{x'}^x V(x'') dx'' \right]^2, \quad (\text{B.38})$$

et

$$\begin{aligned}
 \Omega_3(x, x') &= \sigma_3(x, x') + \sigma_1(x, x')\sigma_2(x, x') + \frac{1}{6}\sigma_1^3(x, x'), \\
 &= \int_{x'}^x \left(\frac{d^2V}{dx^2}(x'') - V^2(x'') \right) dx'' - (V(x) + V(x')) \int_{x'}^x V(x'') dx'' \\
 &\quad + \frac{1}{6} \left(\int_{x'}^x V(x'') dx'' \right)^3. \tag{B.39}
 \end{aligned}$$

Pour $x = x'$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 T(k)f_+(k, x)f_-(k, x) &= e^{\int_{-\infty}^x (\theta_+(k, x') + \theta_-(k, x')) dx'}, \\
 &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_n(x)}{(2ik)^n}, \quad |k| \rightarrow +\infty, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \tag{B.40}
 \end{aligned}$$

avec : $\omega_n(x) = \Omega_n(x, x)$. Nous avons $\omega_{2m+1}(x) = 0$ et en particulier :

$$\omega_0(x) = 1, \tag{B.41}$$

$$\omega_1(x) = 0, \tag{B.42}$$

$$\omega_2(x) = -2V(x), \tag{B.43}$$

$$\omega_3(x) = 0, \tag{B.44}$$

$$\omega_4(x) = 6V^2(x) - 2\frac{d^2V}{dx^2}(x). \tag{B.45}$$

ω_{2m} peuvent être calculées en utilisant la formule de récurrence suivante :

$$\omega_{2m}(x) = -2\theta_{+, 2m-1}(x) - 2 \sum_{j=1}^{m-1} \omega_{2(m-j)}(x)\theta_{+, 2j-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots \tag{B.46}$$

avec $\omega_0(x) = 1$.

Nous rappelons que sous les hypothèses (2.44) sur le potentiel V , le coefficient de transmission $T(k)$ est une fonction méromorphe pour $\text{Im}(k) > 0$ et continue pour $\text{Im}(k) \geq 0$. Nous rappelons également que $T(k)$ possède N pôles simples $i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$ avec $\kappa_n > 0$, $-\kappa_n^2$ étant les valeurs propres négatives de l'opérateur de Schrödinger $H(V)$. Les résidus de $T(k)$ aux points $k = i\kappa_n$ sont données par (2.30) et (2.31). Aussi, les fonctions $f_{\pm}(k, x)$ sont analytiques pour $\text{Im}(k) > 0$ et continues pour

$\text{Im}(k) \geq 0$.

Soit la fonction Z définie pour $n = 0, 1, \dots$ par :

$$Z(k, x, x') = (2ik)^n \left[T(k) f_+(k, x) f_-(k, x') e^{-ik(x-x')} - \sum_{m=0}^n \frac{\Omega_m(x, x')}{(2ik)^m} \right]. \quad (\text{B.47})$$

Nous proposons d'intégrer $Z(k, x, x')$ sur un contour fermé Γ_a dans $\overline{\mathbb{C}}_+ = \mathbb{C} \cup \mathbb{R}$ défini par :

$$\Gamma_a = [-a, +a] \cup C_a, \quad C_a = \{ae^{i\phi} | 0 \leq \phi \leq \pi\}, \quad a > 0. \quad (\text{B.48})$$

Afin d'inclure tous les pôles de $T(k)$, a est choisi suffisamment grand. Nous obtenons ainsi,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_a} Z(k, x, x') dk &= 2i\pi \sum_j \text{Res}_{k=i\kappa_j}(Z(k, x, x')) \\ &= -2\pi \sum_j (-2\kappa_j)^n c_{lj}^2 e^{\kappa_j(x-x')} f_+(i\kappa_j, x) f_+(i\kappa_j, x'). \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

En utilisant (B.35), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} Z(k, x, x') dk + \int_{C_a} Z(k, x, x') dk &= \int_{-a}^{+a} Z(k, x, x') dk \\ &+ \frac{1}{2} \Omega_{n+1}(x, x') \int_0^\pi d\phi + O(a^{-1}), \quad a \rightarrow +\infty, \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a Z(k, x, x') dk + \frac{\pi}{2} \Omega_{n+1}(x, x'). \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

D'où le résultat suivant, pour $x, x' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} (2ik)^n \left[T(k) f_+(k, x) f_-(k, x') e^{-ik(x-x')} - \sum_{m=0, (n-m) \text{ pair}}^n \frac{\Omega_m(x, x')}{(2ik)^m} \right] dk \\ + \frac{\pi}{2} \Omega_{n+1}(x, x') = (-2)^{n+1} \pi \sum_j \kappa_j^n e^{\kappa_j(x-x')} \psi_j(x) \psi_j(x'), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

avec $\psi_j(x) = c_{lj} f_+(i\kappa_j, x)$.

Nous en déduisons alors (2.45) et (2.46) du théorème 2.5.1 en posant $x = x'$. Les

formules (2.47) s'en déduisent aisément en utilisant :

$$T(k)f_{\pm}(k, x) = R_{l(r)}f_{\mp}(k, x) + f_{\mp}(-k, x). \quad (\text{B.52})$$

B.3 Preuve des formules des invariants

Nous rappelons dans cette section quelques éléments de la démonstration de Gesztesy et Holden [34] du théorème 2.5.2.

Nous supposons $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'espace de Schwartz des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ qui décroissent ainsi que leur dérivées, plus vite que n'importe quelle puissance de $|x|^{-1}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par un calcul simple, nous avons :

$$\frac{d}{dx}W\left(\frac{df_+}{dk}(k, x), f_-(k, x)\right) = 2kf_+(k, x)f_-(k, x). \quad (\text{B.53})$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned} W\left(\frac{df_+}{dk}(k, x), f_-(k, x)\right) &= \frac{2kx}{T(k)} - i\frac{R_r(k)}{T(k)}e^{2ikx} - \frac{i}{T(k)} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \\ W\left(\frac{df_+}{dk}(k, x), f_-(k, x)\right) &= \frac{2kx}{T(k)} + i\frac{R_l(k)}{T(k)}e^{-2ikx} - \frac{i}{T(k)} \\ &+ \frac{2ik}{T(k)^2}\frac{d}{dk}T(k) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \int_{-a}^{+a} (2ik)^{2l+1} T(k) f_+(k, x) f_-(k, x) dk dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{+a} (-1)^l (2k)^{2l} \operatorname{Re} (2ikT(k) f_+(k, x) f_-(k, x)) dk dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+a} (-1)^l (2k)^{2l} \operatorname{Re} \left(iT(k) W\left(\frac{df_+}{dk}(k, x), f_-(k, x)\right) \Big|_{x=x_1}^{x_2} \right) dk. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Pour $x_1 \rightarrow -\infty$ et $x_2 \rightarrow +\infty$, nous avons :

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+a} (-1)^l (2k)^{2l} \operatorname{Re} \left(2k \frac{d}{dk} \ln T(k) + R_r(k) e^{2ikx_2} + R_l(k) e^{-2ikx_1} + o(1) \right) dk, \\ &= \frac{4}{\pi} (-1)^l \int_0^{+a} (2k)^{2l+1} \frac{d}{dk} \ln |T(k)| dk. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

En passant à la limite $a \rightarrow +\infty$, nous obtenons :

$$\frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \int_{-a}^{+a} (2ik)^{2l+1} T(k) f_+(k, x) f_-(k, x) dk dx = \frac{2^{2l+3}}{\pi} (-1)^{l+1} (2l+1) \int_0^{+\infty} k^{2l} \ln |T(k)| dk \quad (\text{B.57})$$

Ainsi en combinant (2.45) du théorème 2.5.1 et (B.57), nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{2l+2}(x) dx = 2^{2l+3} \sum_{n=1} \kappa_n^{2l+1} + (-1)^l \frac{2^{2l+3}}{\pi} (2l+1) \int_0^{\infty} k^{2l} \ln |T(k)| dk, \quad (\text{B.58})$$

C Quelques rappels sur l'équation de KdV

C.1 Résolution d'une équation de KdV par inverse scattering

Considérons l'équation de KdV :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - 6V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 0, \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad (\text{C.1})$$

où x et t représentent les variables spatiale et temporelle respectivement et V_0 la condition initiale. Supposons que V_0 satisfait :

$$\sum_{i=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^i y_0(x)}{\partial x^i} \right|^2 dx < \infty, \quad (\text{C.2})$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |V_0(x)| dx < \infty. \quad (\text{C.3})$$

Ces deux conditions assurent respectivement l'existence d'une solution classique à l'équation de KdV et l'existence d'une solution au problème scattering de l'opérateur de Schrödinger $H(V_0)$ [74].

Nous allons voir que la résolution d'un problème de Cauchy de l'équation de KdV peut se ramener à la résolution d'un problème spectral de l'opérateur de Schrödinger. Commençons par le théorème suivant :

Théorème C.1. [32], [74] *Si v est solution de l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) - 6v^2(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x, t) = 0, \quad (\text{C.4})$$

alors

$$V(x, t) = v^2(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} v(x, t), \quad (\text{C.5})$$

est solution de l'équation de KdV :

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t) - 6V(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} V(x, t) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Remarquons que $V(x, t) = v^2(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} v(x, t)$ est une équation de Riccati en v et

peut être linéarisée par la transformation standard suivante :

$$v = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{C.7})$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V\psi = 0. \quad (\text{C.8})$$

Nous reconnaissons ici l'équation de Schrödinger stationnaire mais il manque le terme des niveaux d'énergie. Pour retrouver ce terme il suffit de se rappeler que V est solution d'une équation de KdV qui est invariante sous transformation Galiléenne [32], [74]. Ainsi, sans perte de généralité l'équation précédente se met alors sous la forme :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t)\psi = \lambda\psi. \quad (\text{C.9})$$

Par de simples transformations sur la solution de l'équation de KdV, nous arrivons à une équation de Schrödinger unidimensionnelle dont le potentiel est donné par la solution de l'équation de KdV. L'équation de Schrödinger est dans ce cas paramétrée par le temps. Comme nous l'avons brièvement introduit dans le chapitre 1, Gardner *et al* [32] ont proposé d'exploiter l'analyse spectrale de l'opérateur de Schrödinger $H(V_0) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0$ pour résoudre le problème de Cauchy de l'équation de KdV. La procédure est la suivante :

1. Résoudre le problème DST pour $H(V_0)$ et déterminer ainsi les données scattering à l'instant initial.
2. Déterminer l'évolution en temps des données scattering.
3. Déterminer l'évolution de $V(x, t)$ par IST.

Cependant, cette procédure nécessite la connaissance de l'évolution en temps des données scattering ; chose qui n'apparaît pas aisée à première vue. Mais Gardner *et al* ont montré des résultats fondamentaux que nous résumons dans les deux théorèmes qui suivent :

Théorème C.2. [32] *Si V évolue selon une équation de KdV et tend asymptotiquement vers 0 alors les valeurs propres négatives $-\kappa_n^2(t)$, $n = 1, \dots, N$ de l'opérateur de*

Schrödinger $H(V)$ sont indépendantes du temps :

$$\kappa_n(t) = \kappa_n(0) = \kappa_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (\text{C.10})$$

$-\kappa_n^2$ étant les valeurs propres négatives de $H(V_0)$.

Théorème C.3. [32] Sous les mêmes conditions du théorème C.2, les coefficients de normalisation $c_{ln}(t)$, $n = 1, \dots, N$, le coefficient de réflexion $R_r(k, t)$ et le coefficient de transmission $T(k, t)$ évoluent respectivement selon les relations suivantes :

$$c_{ln}(t) = c_{ln} e^{4\kappa_n^3 t}, \quad n = 1, \dots, N \quad (\text{C.11})$$

$$R_r(k, t) = R_r(k) e^{8ik^3 t}, \quad (\text{C.12})$$

$$T(k, t) = T(k), \quad (\text{C.13})$$

où c_{ln} , $n = 1, \dots, N$, $R_r(k)$ et $T(k)$ sont les coefficients de normalisation, les coefficients de réflexion et de transmission associés à $H(V_0)$.

Notons que l'évolution des données scattering est linéaire. Ainsi, la résolution du problème non-linéaire (équation de KdV) se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires par l'IST.

D'après l'équation (C.12), dans le cas d'un potentiel sans réflexion, i.e $R_r(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$ alors $R_r(k, t) = 0$, $\forall t$. Cela voudrait dire que si la condition initiale de l'équation de KdV est un potentiel sans réflexion alors la solution de l'équation de KdV est un potentiel sans réflexion à tout instant t .

Intéressons nous à présent aux solitons. Avant d'aborder le cas général, illustrons le cas d'un 1-soliton. Ce dernier est donné par l'équation (1.2). Posons $a = 2$ et $x_0 = 0$. La condition initiale est alors :

$$V(x, 0) = V_0(x) = -2 \operatorname{sech}^2(x). \quad (\text{C.14})$$

La résolution du problème spectral de $H(-2 \operatorname{sech}^2(x))$ donne une seule valeur propre négative (-1) et un coefficient de réflexion nul [60]. Le 1-soliton solution de l'équation de KdV est donc un potentiel sans réflexion et son spectre discret est composé d'une unique valeur propre négative.

Pour déterminer $V(x, t)$, il faut résoudre le problème inverse. L'équation GLM s'écrit :

$$K(x, V) + 2e^{8t-x-V} + 2e^{8t-V} \int_x^\infty K(x, z)e^{-z} dz = 0. \quad (\text{C.15})$$

En supposant $K(x, V) = L(x)e^{-V}$, nous avons :

$$L(x) = \frac{-2e^x}{1 + e^{2x-8t}}, \quad K(x, V) = \frac{-2e^{x-V}}{1 + e^{2x-8t}}. \quad (\text{C.16})$$

C'est une solution de l'équation GLM et par unicité de la solution, c'est l'unique solution. Ainsi, $V(x, t)$ solution de l'équation de KdV est donnée par :

$$V(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t), \quad (\text{C.17})$$

qui représente bien un 1-soliton avec $a = 2$. Ce résultat a été généralisé :

Théorème C.4. [32] *Une solution V de l'équation de KdV qui est un potentiel sans réflexion de $H(V)$ consiste en un nombre fini de solitons; les solitons se séparant asymptotiquement contiennent toute l'énergie présente dans la condition initiale.*

Ainsi, un N-soliton (ou un potentiel sans réflexion) peut s'écrire en fonction des données scattering à tout instant t [32] :

$$V(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det (I + A)(x, t), \quad (\text{C.18})$$

où $A(x, t)$ est une matrice $N \times N$ dont les coefficients sont donnés par :

$$A(x, t) = \left[\frac{c_{lm} c_{ln}}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x + 4(\kappa_m^3 + \kappa_n^3)t} \right]_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N. \quad (\text{C.19})$$

Chaque couple (κ_n, c_{ln}) du spectre discret caractérise un soliton de vitesse $4\kappa_n^2$ et d'amplitude $2\kappa_n^2$. Le coefficient c_{ln} caractérise la position des différentes composantes.

C.2 Invariants de l'équation de KdV

Une propriété intéressante de l'équation de KdV (C.1) consiste en l'existence d'un nombre infini de *lois de conservation* ou *d'invariants* en temps [74], [62], [129]. Une loi de conservation est une équation qui se met sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.20})$$

où ρ et $-q$ représentent respectivement la densité conservée et le flux. Ces quantités sont fonctions de t , x , V et des dérivées successives de V ; V étant une solution de l'équation de KdV.

Les trois premières lois de conservation de l'équation de KdV s'écrivent :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-3V^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-4V^3 + 2V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right) = 0, \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(V^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{9}{2} V^4 + 3V^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 6V \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 \right) = 0. \quad (\text{C.23})$$

La première équation, résulte d'une réécriture de l'équation de KdV (C.1). La seconde est obtenue en multipliant l'équation de KdV par $2V$ et en écrivant l'équation résultante sous forme d'une loi de conservation. La troisième équation résulte de calculs simples après multiplication de l'équation de KdV par $\left(3V^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$. Ainsi les densités conservées sont respectivement [13], [32], [59] :

$$\rho = V, \quad \rho = V^2, \quad \rho = V^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2. \quad (\text{C.24})$$

Ces dernières peuvent s'interpréter comme la masse, la quantité de mouvement et l'énergie d'un système physique respectivement.

Notons $I_m(V)$ les invariants en temps de l'équation de KdV. Ces derniers s'écrivent

en fonction des données scattering de l'opérateur de Schrödinger $H(V)$ comme suit :

$$I_m(V) = (-1)^{m+1} \frac{2^{2m+2}}{2m+1} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2m+1} - \frac{2^{2m+1}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^{2m} \ln(|T(k)|) dk, \quad m = 0, 1, \dots \quad (\text{C.25})$$

Pour $m = 0$, nous obtenons l'expression du premier invariant :

$$I_0(V) = -4 \sum_{n=1}^N \kappa_n - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(|T(k)|) dk. \quad (\text{C.26})$$

Pour $m = 1$, nous avons une formule pour le deuxième invariant connue sous le nom de formule de Buslaev-Faddeev-Zakharov :

$$I_1(V) = \frac{16}{3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^3 - \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \ln(|T(k)|) dk. \quad (\text{C.27})$$

Pour $m = 2$, le troisième invariant s'écrit :

$$I_2(V) = -\frac{64}{5} \sum_{n=1}^N \kappa_n^5 - \frac{32}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^4 \ln(|T(k)|) dk. \quad (\text{C.28})$$

Dans le cas d'un N-soliton, ces invariants s'écrivent en fonction du spectre discret uniquement :

$$I_m(V) = (-1)^{m+1} \frac{2^{2m+2}}{2m+1} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.29})$$

D Dispersion faible de l'équation de KdV : approche de Lax-Levermore

Nous rappelons dans cette annexe l'approche de Lax-Levermore pour l'étude du problème de dispersion faible de l'équation de KdV [63], [64]. L'idée principale de cette approche consiste à utiliser la transformée scattering de l'opérateur de Schrödinger.

Soit l'équation de KdV :

$$\frac{\partial y_h}{\partial t} - 6y_h \frac{\partial y_h}{\partial x} + h^2 \frac{\partial^3 y_h}{\partial x^3} = 0, \quad y_h(x, 0) = y(x), \quad (\text{D.1})$$

y étant une condition initiale indépendante de h . Le problème consiste à étudier le comportement de la solution $y_h(x, t)$ quand $h \rightarrow 0$: $\lim_{h \rightarrow 0} y_h(x, t)$. Lax et Levermore [63], [64] ont supposé que $y(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + x^2) |y(x)| dx < \infty. \quad (\text{D.2})$$

Aussi, ils ont étudié le cas mono-puits, c'est à dire le cas où y a un seul point critique (un seul minimum). Il est à noter que d'autres études ont étendu l'approche de Lax-Levermore aux cas de fonctions positives [116] et de fonctions périodiques [117].

Considérons le problème spectral de l'opérateur de Schrödinger associée à l'équation de KdV (D.1) :

$$H_h(y)\psi = -h^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + y\psi = \lambda_h \psi. \quad (\text{D.3})$$

Le problème d'identification de la limite $\lim_{h \rightarrow 0} y_h(x, t)$ revient à un problème de limite semi-classique et passe donc par l'étude du comportement limite des données scattering. Le calcul de ces données a été effectué à l'aide de l'approximation WKB [64]. Notons $\lambda_{hn} = -\eta_n^2, n = 1, \dots, N_h$ les valeurs propres négatives de $H_h(y)$. Le calcul de ces valeurs propres utilise le théorème de Weyl que nous rappelons :

Théorème D.1. [64] *Soit l'opérateur de Schrödinger $H_h(y)$ associé à un potentiel y qui vérifie (D.2). Alors le nombre de valeurs propres négatives N_h est donné par :*

$$N_h \simeq \frac{1}{\pi h} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-y(x)} dx. \quad (\text{D.4})$$

De manière plus générale, le nombre $N_{h,\eta}$ de valeurs propres inférieures à $-\eta^2$ est donné par :

$$N_{h,\eta} \simeq \frac{1}{\pi h} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-y(x) - \eta^2} dx. \quad (\text{D.5})$$

Nous rappelons que la condition initiale y a un seul minimum noté $-\eta_{max}^2$. Alors, dans ce cas, pour $-\eta^2 > -\eta_{max}^2$, il existe deux fonctions $x_-(\eta) < x_+(\eta)$ telles que : $y(x_{\pm}) = -\eta^2$. Donc, nous avons que $y(x) < -\eta^2$ pour $x_- < x < x_+$. (D.5) peut être alors écrite sous la forme suivante :

$$N_{h,\eta} \approx \frac{1}{\pi h} \Phi(\eta), \quad (\text{D.6})$$

où

$$\Phi(\eta) = \int_{x_-(\eta)}^{x_+(\eta)} \sqrt{-v(x) - \eta^2} dx. \quad (\text{D.7})$$

L'approximation WKB consiste à considérer une forme particulière de fonctions propres [64] :

$$\psi(x) = ce^{-\frac{\theta(x)}{h}}. \quad (\text{D.8})$$

Les constantes de normalisation sont alors données par :

$$c_{hn} = c(\eta_n), \quad n = 1, \dots, N_h, \quad (\text{D.9})$$

où

$$c(\eta) = \exp\left(\frac{1}{h}\eta x_+(\eta) + \int_{x_+(\eta)}^{\infty} \left(\eta - \sqrt{\eta^2 + v(x)}\right) dx\right). \quad (\text{D.10})$$

Par ailleurs, par l'approximation WKB, le coefficient de réflexion est nul.

L'idée de base dans l'approche de Lax-Levermore consiste à remplacer la condition initiale $y(x)$ par une fonction $y_h(x)$; potentiel sans réflexion de $H_h(y_h)$ dont les données scattering sont déterminées par l'approche WKB comme suit :

1. $R_h(k) \equiv 0$,
2. Les valeurs propres négatives $\lambda_{hn} = -\eta_n^2$ sont telles que :

$$\frac{1}{\pi h} \Phi(\eta_n) = n - \frac{1}{2}, \quad n = 1, \dots, N_h, \quad (\text{D.11})$$

avec

$$-\eta_{max}^2 < \lambda_{h1} < \dots < \lambda_{hn} < \dots < \lambda_{hN_h}, \quad (D.12)$$

et

$$N_h \equiv \text{Int} \left(\frac{1}{\pi h} \Phi(0) \right) = \text{Int} \left(\frac{1}{\pi h} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-v(x)} dx \right). \quad (D.13)$$

$\text{Int}(\cdot)$ fait référence à l'arrondi à l'entier le plus proche.

3. Les coefficients de normalisation sont données par :

$$c_{hn} = c(\eta_n), \quad n = 1, \dots, N_h. \quad (D.14)$$

Une fois que la condition initiale y ait été remplacée par le potentiel sans réflexion y_h , Lax et Levermore ont analysé la solution explicite de l'IST proposée par Kay et Moses [49] dans le cas de potentiels sans réflexion. Ils ont ainsi montré la convergence de y_h [64] :

$$L^2 - \lim_{h \rightarrow 0} y_h(x) = y(x). \quad (D.15)$$

E Quelques résultats de convergence sur le coefficient de réflexion

Nous présentons dans cette annexe quelques résultats de convergence sur les coefficients de réflexion que nous avons établis.

Proposition E.1. *Sous les hypothèses (3.1), nous avons :*

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk dx = 0. \quad (\text{E.1})$$

Si de plus $y \in L^2(\mathbb{R})$, alors,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k^3 R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk dx = 0. \quad (\text{E.2})$$

Preuve. Commençons par écrire les deux premières formules de traces (2.43) et (2.48) pour un potentiel $-\chi y$:

$$y(x) = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} \psi_{n\chi}^2(x) - \frac{2i}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk, \quad (\text{E.3})$$

et

$$y^2(x) = \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}^3 \psi_{n\chi}^2(x) + \frac{8i}{3\pi\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^3 R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk - \frac{1}{3\chi} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x). \quad (\text{E.4})$$

En intégrant (E.3) et (E.4) par rapport à x , nous obtenons respectivement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} - \frac{2i}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk dx, \quad (\text{E.5})$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x) dx = \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}^3 + \frac{8i}{3\pi\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k^3 R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk. \quad (\text{E.6})$$

En utilisant (E.5), (E.6) ainsi que les formules asymptotiques de Weyl pour respec-

tivement $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{3}{2}$ données respectivement par (3.29) et (3.31), nous obtenons :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk dx = 0, \quad (\text{E.7})$$

et

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k^3 R_{r(l)\chi}(k) f_{\pm\chi}^2(k, x) dk dx = 0. \quad (\text{E.8})$$

□

Proposition E.2. *Sous les hypothèses (3.1), nous avons :*

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2) dk = 0, \quad (\text{E.9})$$

Si de plus $y \in L^2(\mathbb{R})$ alors,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \ln(1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2) dk = 0, \quad (\text{E.10})$$

Preuve. Écrivons les deux premiers invariants (2.50) et (2.51) pour un potentiel $-\chi y$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx = \frac{4}{\chi} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi} + \frac{2}{\pi\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |T_\chi(k)| dk, \quad (\text{E.11})$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x) dx = \frac{16}{3\chi^2} \sum_{n=1}^{N_\chi} \kappa_{n\chi}^3 - \frac{8}{\pi\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \ln |T_\chi(k)| dk. \quad (\text{E.12})$$

En combinant avec (3.29) et (3.31), nous obtenons :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |T_\chi(k)| dk = 0, \quad (\text{E.13})$$

et

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \ln |T_\chi(k)| dk = 0. \quad (\text{E.14})$$

Les limites (E.9) et (E.10) se déduisent alors de (E.13) et (E.14) respectivement en utilisant (2.24). □

Proposition E.3. Soit $y \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction réelle qui vérifie aussi les hypothèses (3.1). Alors,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 |R_{r(l)\chi}(k)|^2 dk = 0. \quad (\text{E.15})$$

Nous avons également :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk = 0. \quad (\text{E.16})$$

Preuve : La limite (E.15) se déduit aisément de la proposition E.2. En effet, nous avons :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi \chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \ln((1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2)^{-1}) dk = 0. \quad (\text{E.17})$$

Or nous avons pour $n = 1, 2, \dots$:

$$\frac{4}{\pi \chi^2 n} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 |R_{r(l)\chi}(k)|^{2n} dk \leq \frac{4}{\pi \chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \ln((1 - |R_{r(l)\chi}(k)|^2)^{-1}) dk, \quad (\text{E.18})$$

d'où :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 |R_{r(l)\chi}(k)|^{2n} dk = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{E.19})$$

Nous en déduisons alors (E.15).

Intéressons nous à présent à (E.16). Remarquons tout d'abord que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk = 2 \int_0^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk, \quad (\text{E.20})$$

étant donné que $|R(-k)| = |\overline{R(k)}| = |R(k)|$.

Décomposons alors l'intégrale $\frac{1}{\chi} \int_0^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk$ comme suit :

$$\frac{1}{\chi} \int_0^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk = \frac{1}{\chi} \int_0^L |R_{r(l)\chi}(k)| dk + \frac{1}{\chi} \int_L^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk, \quad (\text{E.21})$$

avec $L > 0$. Quelque soit la valeur de χ , nous avons $|R_{r(l)\chi}(k)| \leq 1, \forall k \in \mathbb{R}$, d'où,

$$\frac{1}{\chi} \int_0^L |R_{r(l)\chi}(k)| dk \leq \frac{1}{\chi} \int_0^L dk = \frac{L}{\chi}, \quad (\text{E.22})$$

ainsi,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \int_0^L |R_{r(l)\chi}(k)| dk = 0. \quad (\text{E.23})$$

Étudions l'intégrale $\frac{1}{\chi} \int_L^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk$. Nous avons :

$$|R_{r(l)\chi}(k)| = \frac{1}{k} (k |R_{r(l)\chi}(k)|). \quad (\text{E.24})$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} \int_L^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk &\leq \frac{1}{\chi} \int_L^{+\infty} \frac{1}{k} (k |R_{r(l)\chi}(k)|) dk \\ &\leq \left(\int_L^{+\infty} \frac{1}{k^2} dk \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\chi^2} \int_L^{+\infty} k^2 |R_{r(l)\chi}(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Après passage à la la limite sur χ et en utilisant la limite (E.15), nous obtenons,

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \int_0^{+\infty} |R_{r(l)\chi}(k)| dk = 0. \quad (\text{E.26})$$

Nous en déduisons alors (E.16). □

Bibliographie

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. Method for solving the Sine-Gordon equation. *Phys. Rev. Lett.*, 30 :1262–1264, 1973.
- [2] T. Aktosun and M. Klaus. *Inverse theory : problem on the line*, chapter 2.2.4, pages 770–785. Academic Press, London, 2001.
- [3] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Les Editions de l’Ecole Polytechnique, 2005.
- [4] F. V. Atkinson. On the location of the Weyl circles. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg*, 88A :345–356, 1981.
- [5] M. Baumert, L. Brechtel, J. Lock, M. Hermsdorf, R. Wolff, V. Baier, and A. Voss. Heart rate variability, blood pressure variability, and baroreflex sensitivity in overtrained athletes. *Clin. J. Sport. Med.*, 15(5) :412–417, September 2006.
- [6] D. S. Berger, J. K. J. Li, W. K. Laskey, and A. Noordergraaf. Repeated reflection of waves in the systemic arterial system. *The American Physiological Society*, pages 269–281, 1993.
- [7] J. Bestel, L. Mangin, C. Médigue, A. Monti, and M. Sorine. Proposition of an index of the autonomic nervous system activity in the arterial blood pressure short term regulation. *Blood Pressure Variability in Health and Disease, Satellite Symposium of the XVII^e Scientific Meeting of the International Society of Hypertension*, 12/Suppl. 1 of the Fundamental & Clinical Pharmacology Journal, Nancy, June 1998.
- [8] M. Sh. Birman and A. B. Pushnitski. Spectral shift function, amazing and multifaceted. *Integral Equations and Operator Theory*, 30(2) :191–199, June 1998.

- [9] M. SH. Birman and D. R. Yafaev. The spectral shift function. The work of M.G. Krein and its further development. *St. Petersburg Math. Journal*, 4(5) :833–870, 1993.
- [10] Ph. Blanchard and J. Stubbe. Bound states for Schrödinger Hamiltonians : phase space methods and applications. *Rev. Math. Phys.*, 35 :504–547, 1996.
- [11] E. J. Bowers and A. Murray. Effects on baroreflex sensitivity measurements when different protocols are used to induce regular changes in beat-to-beat intervals and systolic pressure. *Physiol. Meas.*, 25 :523–538, 2004.
- [12] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publication, Inc., 2nd edition, 2000.
- [13] F. Calogero and A. Degasperis. *Spectral Transform and Solitons*. North Holland, 1982.
- [14] S. Canic, D. Lamponi, A. Mikelic, and J. Tambaca. Self-consistent effective equations modeling blood flow in medium-to-large compliant arteries. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 3(3) :559–596, 2005.
- [15] S. Canic and A. Mikelic. Effective equations modeling the flow of viscous incompressible fluid through a long tube arising in the study of blood flow through small arteries. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 2 :431–463, 2003.
- [16] K. Chadan and P. C. Sabatier. *Inverse problems in quantum scattering theory*. Springer, New York, 2nd edition, 1989.
- [17] M. Cohen. On the Schrödinger equation with a Gaussian potential. *J. Phys. A :Math. Gen*, 17 :L101–L104, 1984.
- [18] R. E. Crandall. Fast eigenvalue algorithm for central potentials. *J. Phys. A :Math. Gen*, 16 :L395–L399, 1983.
- [19] E. Crépeau and M. Sorine. Identifiability of a reduced model of pulsatile flow in an arterial compartment. In *Proc. IEEE CDC and ECC*, December 2005.
- [20] E. Crépeau and M. Sorine. A reduced model of pulsatile flow in an arterial compartment. *Chaos Solitons & Fractals*, 34 :594–605, 2007.
- [21] T. L. Culham and G. K. Savard. Hemodynamic strategies in blood pressure regulation during orthostatic challenge in women. *Revue Canadienne de Physiologie Appliquée*, 22(4) :351–367, 1997.

- [22] E. P. D'Alché. *Comprendre la Physiologie Cardiovasculaire*. Médecine-Sciences Flammarion, 2nd edition, 2003.
- [23] P. A. Deift and E. Trubowitz. Inverse scattering on the line. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXII :121–251, 1979.
- [24] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*. Cambridge U Press, 1999.
- [25] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, and S. P. Novikov. Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties. *Russian Math. Surveys*, 31(1) :59–146, 1976.
- [26] L. D. Faddeev. Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 73 :314–336, 1964.
- [27] M. Fernandez, V. Milisic, and A. Quarteroni. Analysis of a geometrical multiscale blood flow model based on the coupling of ODE's and hyperbolic PDE's. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 4(1) :215–236, 2005.
- [28] A. Figueroa, K. E. Jansen, T. J. R. Hughes, and C. A. Taylor. A coupled momentum method to model blood flow in deformable arteries. *Tsinghua University and Springer-Verlag*, 2004.
- [29] P. Flandrin. *Temps-fréquence*. Editions Hermès, Paris, Deuxième édition revue et corrigée, 1998.
- [30] C. P. Frank and L. Zhaorong. Estimating arterial resistance and compliance during transient conditions in humans. *Am. J. Physiol*, (257) :190–197, 1989.
- [31] U. Freyschuss. Cardiovascular adjustment to somatomotor activation. The elicitation of increments in heart rate, aortic pressure and venomotor tone with the initiation of muscle contraction. *Acta Physiol Scand Suppl*, 342 :01–63, 1970.
- [32] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Korteweg-de Vries equation and generalizations VI. Methods for exact solution. In *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume XXVII, pages 97–133. J. Wiley & Sons, 1974.
- [33] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 2(1) :253–304, 1955.
- [34] F. Gesztesy and H. Holden. Trace formulas and conservation laws for nonlinear evolution equations. *Reviews in Mathematical Physics*, 6(1) :51–95, 1994.

- [35] F. Gesztesy, H. Holden, B. Simon, and Z. Zhao. Trace formulae and inverse spectral theory for Schrödinger operators. *American Mathematical Society*, 29(2) :250–255, October 1993.
- [36] F. Gesztesy, H. Holden, B. Simon, and Z. Zhao. Higher order trace relations for Schrödinger operators. *Reviews in Mathematical Physics*, 7(6) :893–922, 1995.
- [37] F. Gesztesy and B. Simon. The xi function. *Acta Mathematica*, 176(1) :49–71, March 1996.
- [38] J. D. Gibbons and S. Chakraborti. *Non parametric statistical inference. Fourth edition, revised and expanded*. Statistics : A DEKKER Series of Textbooks and Monographs, 2003.
- [39] D. J. Gilbert and B. J. Harris. Bounds for the points of spectral concentration of Sturm-Liouville problems. *Mathematika*, 47 :327–337, 2000.
- [40] D. Gottlieb, M. Y. Hussaini, and S. A. Orszag. Theory and applications of spectral methods. In *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, R. Voigt, D. Gottlieb and M. Hussaini, Eds., pages 1–54, 1984.
- [41] P. Gérard, P. A. Markowich, N. J. Mauser, and F. Poupand. Homogenization limits and Wigner transforms. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, L :0323–0379, 1997.
- [42] S. Grosch, A. Saint-Remy, and J. M. Krzesinski. Variabilité de la pression artérielle : curiosité naturelle ou phénomène à maîtriser ? *Revue Médicale de Liège*, 60 :147–153, 2005.
- [43] R. Guantes and S. C. Farantos. High order finite difference algorithms for solving the Schrödinger equation in molecular dynamics. *Journal of Chemical Physics*, 111(24) :10827–10835, December 1999.
- [44] B. Helffer and D. Robert. Riesz means of bound states and semiclassical limit connected with a Lieb-Thirring’s conjecture I. *Asymptotic Analysis*, 3 :91–103, 1990.
- [45] S. F. Hobbs. Central command during exercise : parallel activation of the cardiovascular and motor systems by descending command signals. In *Circulation, Neurobiology, and Behavior*, pages 2176–232. 1982.
- [46] A. R. Its and V. B. Matveev. Schrödinger operators with finite-gap spectrum and N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation. *Theor. Math. Phys.*, 23 :343–355, 1975.

- [47] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2nd edition, 1976.
- [48] D. J. Kaup and A. C. Newell. Solitons as particles oscillators and in slowly changing media : A singular perturbation theory. *Proceedings of the Royal Society of London Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 361(1707) :413–446, 1978.
- [49] I. Kay and H.E. Moses. The determination of the scattering potential from the spectral measure function, III : Calculation of the scattering potential from the scattering operator for the one dimensional Schrödinger equation. *Nuevo Cimento*, 10 :276–304, 1956.
- [50] R. Killip and B. Simon. Sum rules and spectral measures of Schrödinger operators with L^2 potentials. *To appear in Annals of Mathematics*.
- [51] E. Koelink. Scattering theory. Lecture notes, 2008.
<http://www.math.ru.nl/~koelink/edu/LM-dictaat-scattering.pdf>.
- [52] D. Kozłowski, P. Byrdziak, W. Krupa, M. Gawrysiak, G. Piwko, J. Kubica, and G. Swiatecka. Left ventricle systolic volume in vasovagal syncope patients. *Folia Morphol (Warsz)*, 62(3) :175–178, 2003.
- [53] T. M. Laleg, E. Crépeau, Y. Papelier, and M. Sorine. Arterial blood pressure analysis based on scattering transform I. In *Proc. EMBC, Sciences and Technologies for Health, Lyon, France*, August 2007.
- [54] T. M. Laleg, E. Crépeau, and M. Sorine. Arterial pressure modelling by an integrable approximation of Navier-Stokes equations. In *Proc. 5th Mathmod Vienna Proceedings*, volume 1, page 337. ARGESIM Report, February 2006.
- [55] T. M. Laleg, E. Crépeau, and M. Sorine. Separation of arterial pressure into solitary waves and windkessel flow. In *Proc. 6th IFAC Symposium on Modelling and Control in Biomedical Systems, Reims (France)*, September 2006.
- [56] T. M. Laleg, E. Crépeau, and M. Sorine. Separation of arterial pressure into a nonlinear superposition of solitary waves and a windkessel flow. *Biomedical Signal Processing and Control Journal*, 2(3) :163–170, 2007.
- [57] T. M. Laleg, E. Crépeau, and M. Sorine. Travelling-wave analysis and identification. A scattering theory framework. In *Proc. European Control Conference ECC, Kos, Greece*, July 2007.

- [58] T. M. Laleg, C. Médigue, F. Cottin, and M. Sorine. Arterial blood pressure analysis based on scattering transform II. In *Proc. EMBC, Sciences and Technologies for Health, Lyon, France*, August 2007.
- [59] G. L. Lamb. *Elements of Soliton Theory*. J.Wiley & sons, 1980.
- [60] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory*, volume 3. Pergamon Press, 1958.
- [61] A. Laptev and T. Weidl. Sharp Lieb-Thirring inequalities in high dimensions. *Acta Mathematica*, 184(1) :87–111, 2000.
- [62] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 :467–490, 1968.
- [63] P. D. Lax and C. D. Levermore. The zero-dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 76 :3602–3606, 1979.
- [64] P. D. Lax and C. D. Levermore. The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation I, II, III. *Comm. Pure. & Appl. Math.*, 36 :253–290, 571–593, 809–828, 1983.
- [65] J. K. J. Li. Time domain resolution of forward and reflected waves in the aorta. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 33(8) :783–785, 1986.
- [66] P. L. Lions and T. Paul. Sur les mesures de Wigner. *Revista Mathematica Iberoamericana*, 9(3) :553–618, 1993.
- [67] R. D. Lipman, J.K. Salisbury, and J. A. Taylor. Spontaneous indices are inconsistent with arterial baroreflex gain. *Hypertension*, 42(4) :481–487, 2003.
- [68] L. Mangin, A. Monti, C. Médigue, I. Macquin-Mavier, M. E. Lopes, P. Gueret, A. Castaigne, B. Swynghedauw, and P. Mansier. Altered baroreflex gain during voluntary breathing in chronic heart failure. *European Journal of Heart Failure*, 3 :189–195, 2001.
- [69] V. A. Marchenko. *Sturm-Liouville operators and applications*. Birkhäuser, Basel, 1986.
- [70] V. A. Marchenko. *The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data*, In *What is integrability?*, pages 273–318. Springer-Verlag, 1991.
- [71] D. I. McCloskey. Centrally-generated commands and cardiovascular control in man. *Clin. Exp. Hypertens.*, 3(3) :369–378, 1981.
- [72] D. A. McDonald. *Blood flow in arteries*. Edward Arnold, 2nd edition, 1974.

- [73] V. Milisic and A. Quarteroni. Analysis of lumped parameter models for blood flow simulations and their relation with 1D models. *M2AN*, 38(4) :613–632, 2004.
- [74] R. M. Miura. The Korteweg-de Vries equation : A survey of results. *SIAM Review*, 18(3) :412–459, July 1976.
- [75] A. Monti, C. Médigue, H. Nedelcoux, and P. Escourrou. Cardiovascular autonomic control during sleep in normal subjects. *European Journal of Applied Physiology*, 87(2) :174–181, 2002.
- [76] A. Monti, C. Medigue, and M. Sorine. Short-term modelling of the controlled cardiovascular system. In *ESAIM :Proceedings*, volume 12, 2002.
- [77] J. P. Murgu, N. Westerhof, J. P. Giolma, and S. A. Altobelli. Aortic input impedance in normal man : relationship to pressure wave forms. *Circulation*, 62(1) :105–116, 1980.
- [78] A. C. Newell. The Inverse Scattering Transform. In R. Bullough and P. Caudrey, editors, *Topics in Current Physics 17*, pages 177–242. Springer-Verlag, New-York, 1980.
- [79] A. C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [80] F. Nicoud, H. Vernhet, and M. Dautzat. Changes in fluid mechanics after endovascular stenting : The pressure waves point of view. In *ESAIM, Proceedings*, volume 12, pages 134–139, 2002.
- [81] G. Olafsson and S. Zheng. Function spaces associated with Schrödinger operators : the Pöschl-Teller potential. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 12(6) :653–674, 2006.
- [82] M. Olufsen. Structured tree outflow condition of blood flow in larger systemic arteries. *The American Physiological Society*, 1999.
- [83] S. Omboni, G. Parati, P. Castiglioni, M.D. Rienzo, B.P.M. Imholz, K.H. Weseling G.J. Langewouters, and G.Mancia. Estimation of blood pressure variability from 24-hour ambulatory finger blood pressure. *American Heart Association Inc.*, 32 :52–58, 1998.
- [84] A. R. Osborne. Nonlinear Fourier analysis for the infinite-interval Korteweg-de Vries equation I : An algorithm for the direct scattering transform. *Journal of Computational Physics*, 94(2) :284–313, 1991.

- [85] A. R. Osborne. The Inverse Scattering Transform : Tools for the nonlinear Fourier analysis and filtering of ocean surface waves. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(12) :2623–2637, 1995.
- [86] A. R. Osborne, M. Serio, L. Bergamasco, and L. Cavaleri. Solitons, cnoidal waves and nonlinear interactions in shallow-water ocean surface waves. *Physica*, 123 :64–81, 1998.
- [87] J. F. Paquerot and M. Remoissenet. Dynamics of nonlinear blood pressure waves in large arteries. *Physics Letters A*, pages 77–82, October 1994.
- [88] K. H. Parker and J. H. Jones. Forward and backward running waves in arteries : analysis using the method of characteristics. *ASME J. Biomech. Eng.*, (112) :322–326, 1990.
- [89] J. Parlow, J. P. Viale, G. Annat, R. Hughson, and L. Quintin. Spontaneous cardiac baroreflex in humans. Comparison with drug-induced responses. *Hypertension*, 25(5) :1058–1068, May 1995.
- [90] A. Provenzale and A. R. Osborne. Nonlinear Fourier analysis for the infinite-interval Korteweg-de Vries equation II : Numerical tests of the Direct Scattering Transform. *Journal of Computational Physics*, 94 :314–351, 1991.
- [91] F. Pythoud, N. Stergiopoulos, C. D. Bertram, and J. J. Meister. Effects of friction and nonlinearity on the separation of arterial waves into their forward and backward components. *J. Biomechanics*, 29(11) :1419–1429, 1996.
- [92] F. Pythoud, N. Stergiopoulos, and J. J. Meister. Forward and backward waves in the arterial system : nonlinear separation using Riemann invariants. *Technology and Health Care*, 3 :201–207, 1995.
- [93] F. Pythoud, N. Stergiopoulos, and J. J. Meister. Separation of arterial pressure waves into their forward and backward running components. *Journal of Biomechanical Engineering*, 118 :295–301, 1996.
- [94] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, IV. Analysis of operators theory*. Academic Press, New York, 1978.
- [95] M. Remoissenet. *Waves called solitons, concepts and experiments*. Springer, 1994.
- [96] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68. Progress in Mathematics, 1987.

- [97] D. Robert. Semi-classical approximation in quantum mechanics. A survey of old and recent mathematical results. *Helvetica Physica Acta*, 71 :44–116, 1998.
- [98] B. F. Samsonov and Y. V. Pershin. Supersymmetry approach to nuclear-spin-polarization-induced quantum dot structure calculations. January 2004.
- [99] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin. The soliton : A new concept in applied science. *Proceedings of the IEEE*, 61(10) :1443–1483, October 1973.
- [100] J. K. Shoemaker, C. S. Hogeman¹, and L. I. Sinoway. Contributions of MSNA and stroke volume to orthostatic intolerance following bed rest. *Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol.*, 277 :R1084–R1090, 1999.
- [101] J. Siebert, P. Drabik, R. Lango, and K. Szyndler. Stroke volume variability and heart rate power spectrum in relation to posture changes in healthy subjects. *Medical Science Monitor*, 10(2) :MT31–MT37, 2004.
- [102] S. Silbernagl and A. Despopoulos. *Atlas de Poche de Physiologie*. Médecine-Sciences Flammarion, 3 edition, 2002.
- [103] Barry Simon. Schrödinger operators in the twentieth century. *Journal of Mathematical Physics*, 41(6) :3523–3555, 2000.
- [104] A. C. Singer. *Signal Processing and Communication with Solitons*. Ph.d dissertation, The Research Laboratory of Electronics Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, June 1996.
- [105] A. C. Singer, A. V. Oppenheim, and G. W. Wornell. Detection and estimation of multiplexed soliton signals. *IEEE Transaction on signal processing*, 47(10) :2768–2782, October 1999.
- [106] M. Sorine, Q. Zhang, T. M. Laleg, and E. Crepeau. Parsimonious representation of signals based on scattering transform. In *IFAC'08*, July 2008.
- [107] N. Stergiopoulos, P. Segers, and N. Westerhof. Use of pulse pressure method for estimating total arterial compliance in vivo. *The American Physiological Society*, (276) :424–428, 1999.
- [108] N. Stergiopoulos, N. Tardy, and Y. Meister. Nonlinear separation of forward and backward running waves in elastic conduits. *J.Biomechanics*, (26) :201–209, 1993.
- [109] N. Stergiopoulos, B. E. Westerhof, and N. Westerhof. Total arterial inertance as the fourth element of the windkessel model. *The American Physiological Society*, pages 81–88, 1999.

- [110] B. Takase, H. Hosaka, K. Kitamura, A. Uehata, K. Satomura, K. Isojima, S. Kosuda, S. Kusano, A. Kurita, and F. Ohsuzu. The repeatability of left ventricular volume assessment by a new ambulatory radionuclide monitoring system during head-up tilt. *Jpn. Heart J.*, 42(6) :749–758, November 2001.
- [111] I. Taneja, C. Moran, M. S. Medow, J. L. Glover, L. D. Montgomery, and J. M. Stewart. Differential effects of lower body negative pressure and upright tilt on splanchnic blood volume. *m. J. Physiol. Heart. Circ. Physiol.*, 292 :H1420–H1426, 2007.
- [112] E. C. Titchmarsh. *Eigenfunctions expansions associated with second order differential equations*, volume I. Oxford at the Clarendon Press, 2nd edition, 1962.
- [113] L. N. Trefethen. Finite difference and spectral methods for ordinary partial differential equations. Available at <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen/pdetext.html>, 1996.
- [114] L. N. Trefethen. *Spectral Methods in Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [115] A. L. T. Uusitalo, A. J. Uusitalo, and H. K. Rusko. Heart rate and blood pressure variability during heavy training and overtraining in the female athlete. *Int J Sports Med*, 21(1) :45–53, January 2000.
- [116] S. Venakides. The zero dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation with nontrivial reflection coefficient. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 38 :125–155, 1985.
- [117] S. Venakides. The zero dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation with periodic initial data. *Transactions of the American Mathematical Society*, 301(1) :189–226, 1987.
- [118] J. J. Wang, A. B. O’Brien, N. G. Shrive, K. H. Parker, and J. V. Tyberg. Time-domain representation of ventricular-arterial coupling as a windkessel and wave system. *AM J Physiol Heart Circ Physiol*, December 2002.
- [119] J. A. C. Weideman and S. C. Reddy. A Matlab differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 26(4) :465–519, December 2000.
- [120] K. H. Wesseling. Method and device for controlling the cuff pressure in measuring the blood pressure in a finger by means of photo-electric plethysmograph. *United State Patent*, September 1985.

- [121] N. Westerhof, P. Sipkema, G. C. Van Den Bos, and G. Elzinga. Forward and backward waves in the arterial system. *Cardiovascular Research*, 6 :648–656, 1972.
- [122] N. Westerhof, N. Stergiopoulos, and M. I. M. Noble. *Snapshots of Hemodynamics, An Aid for Clinical Research and Graduate Education*. Springer Science, 2005.
- [123] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. J.Wiley & Sons, 1999.
- [124] M. F. Wilson, B. H. Sung, G. A. Pincomb, and W. R. Livallo. Simultaneous measurement of stroke volume by impedance cardiography and nuclear ventriculography : Comparisons at rest and exercise. *Ann. Biomed. Eng.*, 17(5) :475–482, 1989.
- [125] D. Yafaev. A balance of kinetic and potential energies in the semi-classical limit. *Vth Meeting of the GDRE Mathematics and Quantum Physics - Workshop*.
- [126] D. R. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory. General Theory*. Izdar. Sankt-Peterburgskogo Univ., St. Petersburg 1994 (Russian), Translations of Mathematical Monographs, vol. 105, American Mathematical Society, 1992.
- [127] S. Yomosa. Solitary waves in large vessels. *Journal of the Physical Society of Japan*, 50(2) :506–520, February 1987.
- [128] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of 'soliton' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6) :240–243, 1965.
- [129] V. E. Zakharov and L. D. Faddeev. Korteweg-de Vries equation : A completely integrable Hamiltonian system. *V.A. Steklov Mathematics Institute. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, 5(4) :18–27, 1971.
- [130] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34 :62–69, 1972.