



**HAL**  
open science

# Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique.

Adrien Loseille

## ► To cite this version:

Adrien Loseille. Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT : . tel-00361961v2

**HAL Id: tel-00361961**

**<https://theses.hal.science/tel-00361961v2>**

Submitted on 20 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides.

## Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique.

---

### THÈSE

présentée pour obtenir le titre de  
DOCTEUR  
de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

**École doctorale :** Sciences Mathématiques de Paris Centre  
**Spécialité :** Mathématiques Appliquées

par

**Adrien LOSEILLE**

---

soutenue le 18 décembre 2008 devant le jury composé de :

**Directeurs :**

Frédéric Alauzet	Chargé de recherche	INRIA Paris Rocquencourt
Alain Dervieux	Directeur de recherche	INRIA Sophia Antipolis

**Rapporteurs :**

Luca Formaggia	Professeur	Politecnico di Milano
Serge Nicaise	Professeur	Université de Valenciennes

**Examineurs :**

Paul-Louis George	Directeur de recherche	INRIA Paris Rocquencourt
Frédéric Hecht	Professeur	Université Pierre et Marie Curie
Bijan Mohammadi	Professeur	Université de Montpellier II
Gilbert Rogé	Docteur de l'université Paris VI	Dassault Aviation

---

Équipe projet Gamma, INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, 78 153 Le Chesnay.  
Équipe projet Tropics, INRIA Sophia, 2000 route des Lucioles, 06 902 Sophia Antipolis.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Modèle continu de maillage</b>	<b>15</b>
1.1 Notions de métriques en adaptation de maillage . . . . .	18
1.1.1 Concepts utiles de géométrie différentielle . . . . .	19
1.1.2 Classes d'espaces métriques . . . . .	20
1.1.3 Opérations élémentaires sur les métriques . . . . .	24
1.2 Modèle continu de maillage . . . . .	28
1.2.1 Propriétés géométriques du simplexe régulier . . . . .	29
1.2.2 Modélisation continue d'un simplexe . . . . .	29
1.2.3 Invariants géométriques . . . . .	32
1.2.4 Modélisation continue d'un maillage . . . . .	37
1.3 Formalisme et maillage continu . . . . .	49
1.A Preuves complètes sur les invariants géométriques . . . . .	53
Bibliographie . . . . .	62
<b>2 Adaptation de maillage multi-échelles</b>	<b>65</b>
2.1 Erreur d'interpolation dans le cas de fonctions quadratiques . . . . .	68
2.1.1 Erreur d'interpolation linéaire sur un tétraèdre . . . . .	68
2.1.2 Erreur d'interpolation linéaire sur un triangle . . . . .	70
2.2 Interpolation linéaire sur un élément continu . . . . .	71
2.2.1 Définition et propriétés d'exactitude . . . . .	71
2.2.2 Opérateur d'interpolation linéaire continu . . . . .	73
2.3 Modèle continu multi-échelles de l'erreur d'interpolation linéaire . . . . .	77
2.3.1 Définition basée sur un contrôle en norme $\mathbf{L}^p$ . . . . .	80
2.3.2 Principe d'optimalité globale . . . . .	80
2.3.3 Unicité et propriétés de la métrique multi-échelles optimale . . . . .	84
2.3.4 Le cas de l'interpolation linéaire . . . . .	86
2.4 Illustrations numériques . . . . .	88
2.4.1 Quelques aspects algorithmiques . . . . .	88
2.4.2 Illustration des sensibilités des normes $\mathbf{L}^p$ et de la convergence asymptotique . . . . .	90
2.4.3 Sur la validation de l'ordre de convergence asymptotique . . . . .	91
2.A Formules d'intégration . . . . .	97
Bibliographie . . . . .	99

<b>3</b>	<b>Adaptation de maillage multi-échelles en mécanique des fluides</b>	<b>101</b>
3.1	Méthodes numériques pour l'adaptation de maillage en CFD . . . . .	107
3.1.1	Algorithme d'adaptation de maillage . . . . .	107
3.1.2	Solveur numérique volumes finis . . . . .	111
3.1.3	Estimation d'erreur, génération de maillages et interpolation de solutions	119
3.1.4	Estimation de l'ordre de convergence . . . . .	120
3.2	Applications à des écoulements réguliers . . . . .	121
3.2.1	Convergence sur des maillages adaptés . . . . .	121
3.2.2	Écoulement subsonique en 3D . . . . .	121
3.2.3	Conclusion . . . . .	125
3.3	Applications à des écoulements non réguliers . . . . .	125
3.3.1	Perte de l'ordre deux en convergence spatiale . . . . .	125
3.3.2	Apport de l'adaptation de maillage . . . . .	126
3.3.3	Exemples numériques . . . . .	133
3.4	Problématiques restantes . . . . .	144
3.4.1	Intersection de chocs et points triples . . . . .	144
3.4.2	Schémas compressifs et véritables discontinuités . . . . .	144
3.A	Quelques temps CPU . . . . .	149
	Bibliographie . . . . .	150
<b>4</b>	<b>Adaptation à des fonctionnelles d'erreur pour les équations d'Euler</b>	<b>153</b>
4.1	Maillage continu et analyse <i>a priori</i> . . . . .	156
4.2	Contexte abstrait non linéaire . . . . .	159
4.3	Le cas des équations d'Euler . . . . .	161
4.4	Minimisation du modèle d'erreur . . . . .	163
4.4.1	Erreur d'interpolation pondérée . . . . .	164
4.4.2	Somme d'erreurs d'interpolation . . . . .	165
4.4.3	Le cas avec une intégrale volumique et une intégrale au bord . . . . .	166
4.5	Exemples numériques . . . . .	168
4.5.1	Stratégie d'adaptation avec adjoint . . . . .	168
4.5.2	Validations en deux dimensions . . . . .	170
4.5.3	Prédiction optimale d'une signature de pression émise par un avion . . . . .	188
	Bibliographie . . . . .	195
<b>5</b>	<b>Modélisation et prédiction haute-fidélité du bang sonique</b>	<b>197</b>
5.1	Le phénomène physique du bang sonique . . . . .	199
5.2	Modélisation du bang sonique . . . . .	202
5.2.1	Propagation d'ondes acoustiques dans l'atmosphère . . . . .	202
5.2.2	Couplage entre la CFD et la propagation des ondes . . . . .	205
5.3	Validation par confrontations aux expérimentations . . . . .	206
5.4	Etude du bang sonique de plusieurs jets supersoniques . . . . .	214
5.4.1	Paramètres de l'étude . . . . .	216
5.4.2	Validation des calculs . . . . .	217
5.4.3	Résultats des champs proche et médian . . . . .	217
5.4.4	Convergence du champ proche et du bang sonique . . . . .	219
5.4.5	Comparaison des différentes géométries . . . . .	225
	Bibliographie . . . . .	231

<b>Conclusion</b>	<b>233</b>
Résumé des principaux résultats . . . . .	233
Perspectives . . . . .	235
Bibliographie . . . . .	237
<b>A Interpolations d'ordre élevé et erreurs inhomogènes</b>	<b>239</b>
A.1 Principes géométriques pour l'adaptation et interpolations d'ordre élevé . . .	240
A.1.1 État de l'art et approche proposée . . . . .	240
A.1.2 Définitions et héritages du cas linéaire . . . . .	241
A.1.3 Erreur d'interpolation en norme $\mathbf{W}^{1,p}$ . . . . .	246
A.1.4 Vers l'ordre très élevé . . . . .	247
A.2 Modèles d'erreur inhomogène . . . . .	251
A.2.1 Quelques modèles et leur possible application . . . . .	251
A.2.2 Contrôle d'erreur en norme $\mathbf{L}^p$ . . . . .	254
A.2.3 Pistes pour des exemples d'application . . . . .	256
A.3 Formulaire . . . . .	256
A.3.1 Métriques en deux dimensions . . . . .	257
A.3.2 Métriques en trois dimensions . . . . .	259
A.4 Erreur d'interpolation linéaire en norme $\mathbf{L}^2$ et $\mathbf{H}^1$ . . . . .	262
Bibliographie . . . . .	264
<b>Bibliographie</b>	<b>265</b>



# Introduction

Une problématique économique constante vise à diminuer les temps de transport. Dans le cas des transports aériens, qui est le cadre d'application de cette thèse, ces temps diminuent généralement avec les avancées technologiques. À titre d'exemple, on peut citer la diminution des vols transatlantiques depuis les premières traversées à la sortie de la seconde guerre mondiale. Le premier vol Air-France Paris New-York fut le 1<sup>er</sup> juillet 1946 à bord d'un Douglas DC4 et affichait un temps de vol de 23h45 avec trois escales techniques. Trente ans plus tard, le Concorde ne mettait plus que 3h26 avec 2h54 de vols à une vitesse supersonique (supérieure à la vitesse du son 320m/s) de l'ordre de 2 160km/h (soit environ 600m/s). Aujourd'hui, avec l'arrêt des vols supersoniques civils, les temps de parcours sont de l'ordre de 8h. Cet arrêt est principalement dû à la gêne occasionnée sur les populations par le bang sonique émis tout au long du parcours. Le Concorde était en effet strictement limité au vol supersonique au dessus des océans réduisant ainsi son rayon d'action. De telles contraintes ne permettent pas de réduire des temps de vol au dessus des terres, comme un New-York Los-Angeles dont la durée de 5h pourrait être réduite à 2h en vol supersonique. Si le but de re-construire un avion équivalent au concorde reste pour le moment en suspend, le désir de proposer un avion d'affaire supersonique semble aujourd'hui accessible. Cependant, la réussite de ce défi ne sera assurée qu'avec la réduction drastique du bang sonique. De nombreux constructeurs, Aerion Corporation, Dassault Aviation, Gulfstream Aerospace, Lockheed Martin et la NASA, sont lancés dans la course. Cependant, proposer une géométrie d'avion à faible bang sonique reste un problème ouvert. La difficulté de ce phénomène est son échelle. En effet, il est créé à 10km d'altitude par les irrégularités géométriques de l'avion, dont une taille caractéristique est de l'ordre 40m, et c'est son intensité au sol, 10km plus bas, qui doit être minimisée. Cette complexité ne permet pas d'espérer mener des recherches exclusivement expérimentales car les mesures grandeur nature du bang sonique sont très difficiles à réaliser et très onéreuses. Une étude numérique (assistée par ordinateur), qui permet de tester un grand nombres de formes, semble inévitable dans la quête d'une forme d'avion optimale pour le bang et pratiquement réalisable.

Proposer des méthodes numériques pour mesurer avec précision le bang sonique produit par un avion complexe est un des buts de cette thèse. On introduit ces méthodes sur deux simulations numériques réalisées au cours de ce travail.

Le bang sonique est représenté sur la Figure 1. L'onde de choc (en blanc) est émise par la géométrie de l'avion de chasse (fuselage, voilure, ...). Elle va se propager jusqu'au sol où l'on entend la fameuse détonation «boom-boom». La méthode proposée dans cette thèse se base sur une utilisation fine des caractéristiques physiques du bang sonique pour améliorer la précision sur son évaluation numérique. En effet, on remarque que ce phénomène est très localisé car son intensité et ses directions de variation changent fortement suivant où l'on se

trouve dans le domaine, cf. Figure 1 en haut. On dit qu'il est **anisotrope**. Dans les simulations numériques, utiliser cette caractéristique physique permet de capter avec précision le phénomène en raffinant les zones de fortes variations. En effet, la précision et la fidélité obtenue sont fortement conditionnées par le support numérique, le **maillage**, représenté en bas sur les Figures 1 et 2. Dans cette thèse, on considère des maillages **non structurés** qui permettent de modéliser des formes complexes, cf. Figures 1 et 2. De plus, l'utilisation d'un maillage non structuré permet de choisir judicieusement la taille de discrétisation dans le domaine. On peut alors considérer le maillage comme **une inconnue** à part entière du problème. On propose pour contrôler le maillage des méthodes **automatiques d'optimisations**. Elles reposent sur une méthode d'adaptation **multi-échelles** anisotrope. Multi-échelles signifie que l'ensemble des particularités du phénomène physique est capté. Par exemple, les tourbillons générés à l'arrière d'un avion sont fidèlement mesurés dans notre approche même si l'amplitude de variation des tourbillons, cf. Figure 2, est faible comparativement aux ondes de choc, cf. Figures 1. Sur la Figure 2, on montre un exemple de maillage adapté pour la capture des tourbillons générés à l'arrière d'un avion d'affaire. Il est à noter que ce phénomène est également un problème majeur en aérodynamique car il influence en partie les temps d'attente aux aéroports entre deux décollages successifs.

## ORGANISATION ET PLAN DE LA THÈSE

Cette thèse a été effectuée au sein de deux projets INRIA<sup>1</sup>, le projet Gamma<sup>2</sup> et le projet Tropics<sup>3</sup>. Les problématiques et les choix retenus dans cette thèse trouvent leurs racines dans les axes de recherche de ces deux équipes. Côté maillage, on ne considère dans cette thèse que des maillages non structurés composés de tétraèdres en 3D et de triangles en 2D. Ce choix est motivé par le désir de simuler des écoulements autour de géométries complexes. Côté calcul scientifique, on se concentre sur des écoulements compressibles non visqueux, avec un intérêt particulier pour l'aérodynamique des avions supersoniques. Dans ce contexte, on s'intéresse à l'apport de l'adaptation de maillage aux simulations numériques en mécanique des fluides.

L'adaptation de maillage anisotrope non structuré est reconnue pour réduire le ratio entre le nombre de degrés de liberté et la précision du calcul. Ce gain est d'autant plus important que le phénomène physique approché est anisotrope. L'adaptation de maillage est généralement utilisée en complément d'un estimateur d'erreur. Ce dernier permet de capter automatiquement les caractéristiques du phénomène. Sous ces hypothèses, cette approche est complètement automatique. Enfin, son utilisation s'accompagne également d'un gain en terme de temps de calcul et facilite la visualisation des résultats. Avec ce point de vue, l'utilisation de l'adaptation de maillage est principalement motivée par les caractéristiques physiques du phénomène étudié.

Cependant, des problèmes se posent en pratique dans le cas d'écoulements avec des chocs. Il s'avère d'un part que les schémas numériques d'ordre élevé retombent à l'ordre un, d'autre part les estimateurs d'erreur tendent à prescrire dans les chocs une taille qui tend vers zéro. Il est alors nécessaire de tronquer cette taille par une taille minimale pour garantir la convergence du processus adaptatif. Cependant, prescrire une taille minimale entraîne une perte d'anisotropie, perdant ainsi tout l'intérêt de l'approche. Enfin, il semble nécessaire de filtrer

---

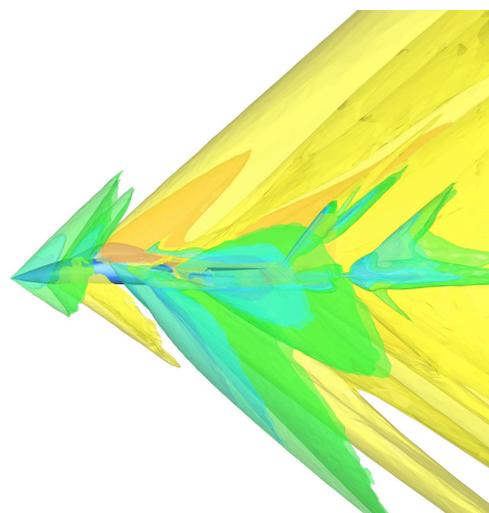
1. Institut Nationale de Recherche en Informatique et Automatique
2. Génération automatique de maillages et méthodes d'adaptation
3. Transformations et outils informatiques pour le calcul scientifique



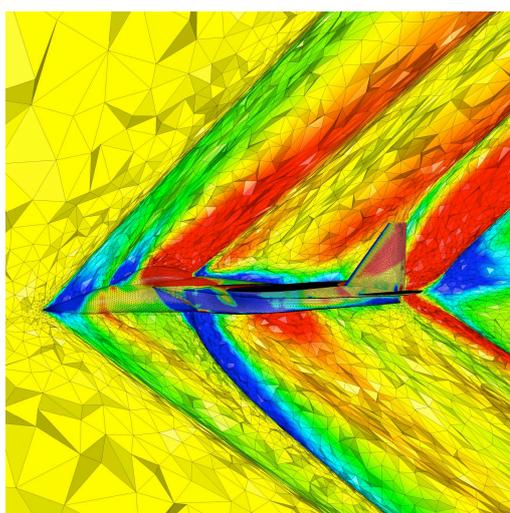
Image d'un F14 passant le mur du son.



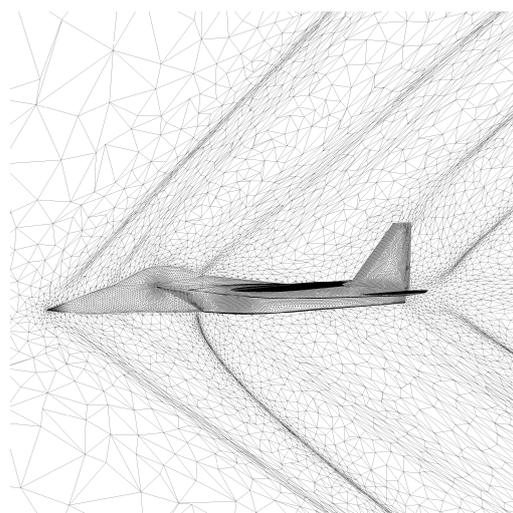
Modèle numérique 3D de l'avion



Iso-surfaces de la solution numérique.



Coupe dans le maillage de calcul.



Représentation du maillage anisotrope adapté.

**Figure 1:** Modélisation numérique 3D du bang sonique : Représentation du phénomène physique en haut. Un maillage de surface représentant la géométrie de l'avion, au milieu à gauche. Le maillage de volume est optimisé pour capturer avec précision les ondes de choc émises par l'avion. Représentation d'un maillage anisotrope non structuré pour capturer avec précision les ondes de chocs, en bas

la solution afin de garantir que toutes les échelles de la solution soient captées par le processus adaptatif. Dans cette thèse, on propose un élément de réponse aux problématiques précédentes en proposant une adaptation particulière du maillage. En effet, nous pensons qu'il existe un lien intrinsèque entre le support de calcul, le maillage, et le schéma de résolution numérique utilisé. On montre que l'adaptation de maillage peut apporter beaucoup plus que la simple capture des phénomènes physiques anisotropes.

Pour traiter ces problématiques, il est nécessaire de disposer d'un certain nombre d'outils d'analyse sur l'espace des maillages discrets. Cependant, il n'existe pas, à proprement parler, de structures mathématiques bien posées sur l'espace des maillages discrets. Pour s'abstraire de cette difficulté discrète, on propose dans le Chapitre 1, un modèle de maillage continu qui s'appuie sur la structure des espaces métriques riemanniens. Cela permet d'utiliser entre autres tous les outils de l'optimisation différentiable ou du calcul des variations, lesquels sont indisponibles sur l'espace des maillages discrets. Ce modèle de maillage est complètement géométrique et générique.

Dans le Chapitre 2, on utilise le modèle de maillage continu pour étudier l'erreur d'interpolation. Lorsqu'aucune information sur le type d'équation résolue n'est connue, contrôler l'erreur d'interpolation d'une variable physique permet de décrire des maillages anisotropes simplement à partir d'une solution. On montre qu'il est alors possible d'écrire l'erreur d'interpolation sur un maillage continu. On minimise pour une fonction  $u$  donnée l'erreur d'interpolation continue globalement en norme  $\mathbf{L}^p$  par un calcul de variations. Cette étude s'accompagne d'une majoration qui permet de prédire un ordre asymptotique de convergence en maillage. La vérification en pratique de cet ordre de convergence sur des suites de maillages discrets permet de valider l'adaptation. Le contrôle de l'erreur en norme  $\mathbf{L}^p$  permet de choisir la norme en fonction de sa sensibilité. Sur des fonctions analytiques, on montre que plus  $p$  est petit et proche de 1 plus les petits détails de la solution sont capturés même en présence de forts gradients. On définit ainsi l'adaptation de maillage multi-échelles.

Dans le Chapitre 3, les problématiques de l'adaptation de maillage pour les solutions numériques sont étudiées. Pour se faire, on propose des modèles numériques de chocs qui valident le comportement de l'adaptation multi-échelles sur des écoulements avec des chocs. Ces modèles simulent le comportement des schémas de résolution dans les chocs. On montre alors que l'adaptation de maillage multi-échelles permet de garantir la convergence du calcul adaptatif lorsque le schéma numérique utilisé est non compressif dans les chocs. De plus, l'utilisation d'un processus adaptatif multi-échelles permet de retrouver l'ordre deux spatial de convergence, initialement perdu, dans le tout le domaine de calcul. La prescription d'une taille minimale pour l'adaptation n'est plus nécessaire, même en présence de chocs. Enfin, le contrôle de l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^p$  implique également une normalisation locale qui permet de capturer toutes les échelles de la solution. Ces principes sont validés sur des exemples en deux et trois dimensions. En particulier, on s'attarde à montrer que l'anisotropie est parfaitement préservée et que l'ordre deux de convergence est bien atteint en pratique.

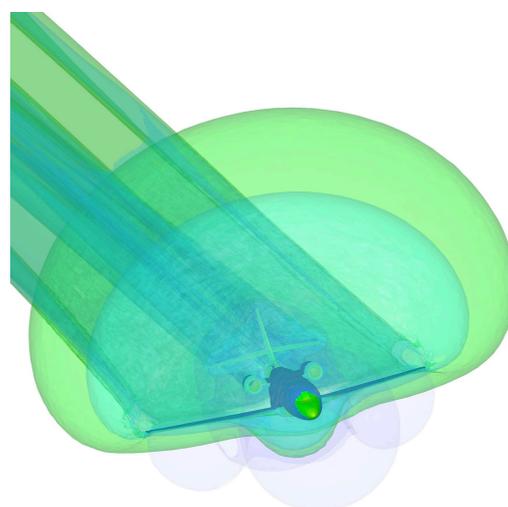
Jusqu'ici, on a proposé des stratégies d'adaptation génériques. Si on se donne des informations supplémentaires, comme une fonctionnelle précise à observer, l'équation aux dérivées partielles et le schéma numérique utilisé pour la résoudre, les méthodes génériques précédentes ne sont plus optimales dans la distribution des degrés de liberté. Le Chapitre 4 étudie cette problématique dans le cas particulier des équations d'Euler pour des fonctionnelles scalaires. Ce type d'étude est particulièrement bien adapté pour le calcul de grandeurs d'intérêt comme la portance ou la traînée en aérodynamique. On propose une estimation d'erreur *a priori* pour le contrôle de l'erreur d'approximation sur une fonctionnelle. Cette estimation est



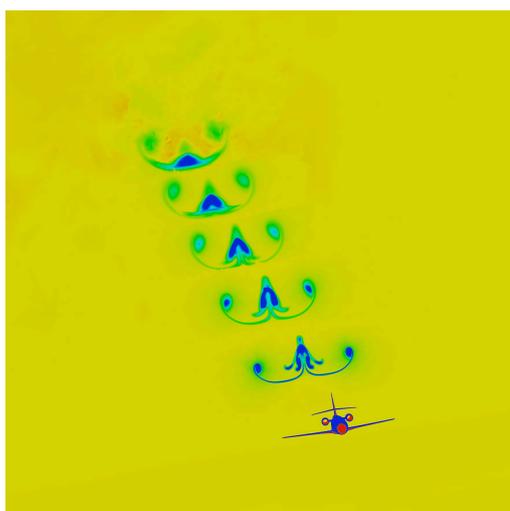
Turbulence générée derrière l'avion.



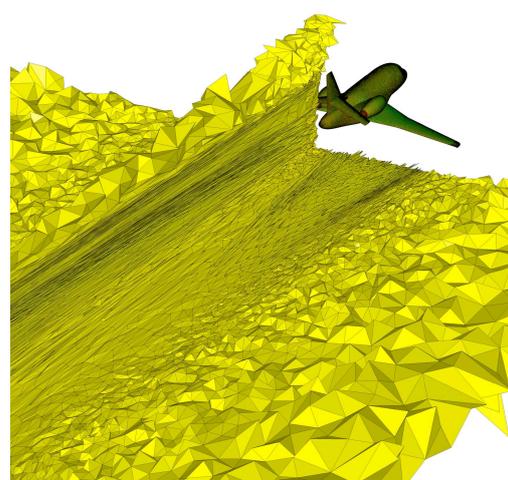
Modèle numérique 3D de l'avion



Iso-surfaces de la solution numérique.



Turbulence numérique.



Représentation du maillage anisotrope adapté.

**Figure 2:** Adaptation multi-échelles 3D : Représentation du phénomène physique, en haut. Maillage de surface représentant la géométrie de l'avion d'affaire, au milieu à gauche. Capture des tourbillons générés jusqu'à 500m derrière l'avion en bas à gauche. Représentation du maillage non structuré anisotrope adapté pour capter avec précision les tourbillons en bas à droite.

ensuite minimisée sur l'espace des maillages continus afin de décrire le maillage anisotrope optimal. On compare l'adaptation basée sur une fonctionnelle cible avec le contrôle de l'erreur d'interpolation en deux et trois dimensions.

Le Chapitre 5 se concentre sur le bang sonique. Ce phénomène acoustique fortement anisotrope se prête très bien à l'utilisation de l'adaptation de maillage multi-échelles. On montre que son utilisation est quasiment incontournable si l'on souhaite prédire avec fidélité la signature de bang sonique d'un avion complet. Cette étude s'inscrit dans le cadre du projet Européen HISAC<sup>4</sup>. Ce projet a pour vocation l'étude de la faisabilité d'un avion d'affaire supersonique «silencieux», c'est-à-dire un avion dont le bang n'est pas perceptible par un être humain. L'INRIA était l'un des partenaires impliqués dans l'étude de la prédiction et de la réduction du bang sonique.

*Avertissement au lecteur.* Dans cette thèse, on a pris le parti de concevoir chaque chapitre comme une entité indépendante traitant sa propre problématique. Cela inclut une introduction détaillée qui présente la problématique, l'état de l'art, l'approche proposée et sa propre bibliographie. Une bibliographie générale est reprise à la fin de la thèse. Chaque problématique est assez vaste pour justifier ce partitionnement. Néanmoins, cela ne suppose pas que les chapitres sont complètement indépendants les uns des autres. Il existe une suite logique qu'on a expliqué dans cette introduction générale.

## VALORISATION DE LA THÈSE

### Publications

- [1] Y. Bourgault, M. Picasso, F. Alauzet and A. Loseille, On the use of anisotropic a posteriori error estimators for the adaptive solution of 3D inviscid compressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Published online, 2008.
- [2] F. Alauzet, S. Borel-Sandou, L. Dumas, A. Dervieux, Q. Dinh, S. Kleinveld, A. Loseille, Y. Mesri and G. Rogé, Multi-model and multi-scale optimization strategies. Application to sonic boom reduction, *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 17, Issue 1-2 , pp.191-214, 2008.
- [3] A. Dervieux, Y. Mesri, F. Alauzet, A. Loseille, L. Hascoet and B. Koobus, Continuous mesh adaptation models for CFD, *CFD Journal*, Vol. 12, Number 3, 2007.

### Conférences avec actes

- [1] A. Dervieux, A. Loseille and F. Alauzet, High-order adaptive method applied to high speed flows, *Proc. of WEHSFF2007*, Moscow, Russia, November 2007.
- [2] A. Loseille, A. Dervieux, P. J. Frey and F. Alauzet, Achievement of second order mesh convergence for discontinuous flows with adapted unstructured meshes, *18th Computational fluids dynamics conference*, AIAA 2007-4186, Miami, FL, USA, June 2007.
- [3] F. Alauzet, A. Loseille, High-order sonic boom modelling by adaptive method, *Proc. in AAAF 2007*, Sophia-Antipolis, France, March 2007.
- [4] F. Alauzet, A. Loseille, A. Dervieux and P. J. Frey, Multi-dimensional continuous metric for mesh adaptation, *Proc. in 15th International Meshing Roundtable*, Springer-Verlag, pp.191-214, Birmingham, AL, USA, September 2006.

---

4. Environmentally Friendly High Speed Aircraft

## Conferences

- [1] A. Loseille, F. Alauzet, P.-L. George, L. Maréchal and E. Saltel, Harnessing the power of multi-core architectures in CFD by coupling multi-threading programming, cache misses reduction techniques with multi-scale adaptivity, *ECCOMAS'08*, Venice, Italy, July 2008.
- [2] A. Loseille, F. Alauzet, A continuous sight of interpolation error for 3D anisotropic unstructured mesh adaptation, *USNCCM'07*, San-Francisco, CA, USA, July 2007.
- [3] A. Loseille, A. Dervieux, P. J. Frey and F. Alauzet, Achievement of second order mesh convergence for unstructured adaptive steady flow simulations, *FEF'07*, Santa Fe, NM, USA, March 2007.

## Séminaires

- [1] A. Loseille, F. Alauzet, L. Maréchal and R. Aubry, Multi-scale Anisotropic Mesh Adaptation, Cache-misses reduction and Multi-threaded Programming, *Barcelona Super Computing Center*, Barcelone, Septembre 2008.
- [2] A. Loseille, Continuous mesh model and examples of its use : from interpolation error to multi-scale adaptation for Euler flow, IRMA, Strasbourg, Juin 2008.
- [3] A. Loseille, Adaptation de maillage : Une vision continue, Séminaire des Doctorants, LJLL, Paris 6, Mai 2007.

## Distinction

- [1] A. Loseille, A. Dervieux, P. J. Frey and F. Alauzet, Métriques continues pour l'adaptation de maillages, *38e Congrès National d'Analyse Numérique*, Meilleur poster, Guidel, France, Mai 2006.

## Enseignements

- [1] A. Loseille, An introduction to multi-scale mesh adaptation and anisotropic mesh adaptation, Formation «Estimateurs d'erreur *a posteriori* pour les méthodes d'éléments finis», Valenciennes, Septembre 2008.
  - [2] Cours centrale Paris, Apport des techniques d'adaptation de maillage à la simulation des écoulements, 30 heures d'enseignement, Mai 2008.
- <http://cours.etudes.ecp.fr/claroline/course/index.php?cid=MESH2>



# 1

---

## *Modèle continu de maillage*

### INTRODUCTION

Avec l'essor des méthodes de résolution numérique telles que les éléments finis, de nouveaux besoins en terme de maillages sont apparus. En effet, contrairement aux différences finies définies uniquement sur des grilles, les éléments finis sont naturellement bien posés sur des maillages non structurés, permettant ainsi d'envisager des simulations sur des géométries complexes. La résolution numérique d'équations aux dérivées partielles utilise alors le maillage comme un support discret afin d'approximer l'équation continue. L'étude numérique et mathématique de ce passage d'une équation continue à sa formulation discrète est un sujet très étudié : théorie de l'interpolation, approximation de Galerkin, ...

Cependant, le maillage tend à rester un objet discret quelque soit son contexte d'utilisation. Par exemple, l'étude des estimateurs d'erreur repose explicitement sur le maillage discret. Il n'existe pas d'analogie avec le schéma de résolution numérique des équations aux dérivées partielles dans lequel on déduit du continu une approximation discrète. Le but de ce chapitre est d'étudier cette projection du continu au discret dans le cas d'un maillage et d'en dégager les problématiques d'existence et d'unicité ainsi que son utilisation pratique.

On présente dans ce chapitre un modèle continu de maillage dans lequel le maillage discret (ou de calcul) apparaît comme une projection de sa représentation continue. Le but est de pouvoir utiliser *a priori* un maillage continu simultanément avec des équations continues. En particulier, le cas de l'erreur d'interpolation sera présenté au Chapitre 2 et celui des équations aux dérivées partielles avec les équations d'Euler au Chapitre 4.

On rappelle tout d'abord le contexte de cette étude.

### DÉFINITION ET CADRE DE L'ÉTUDE

On rappelle dans un premier temps la définition d'un maillage, que nous adopterons dans toute la thèse, ainsi que la nomenclature qui en découle. Pour une introduction générale et complète sur ce sujet, on peut se référer à [14]. Étant donné un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , de frontière

$\partial\Omega$ , on définit d'abord la notion de recouvrement simplicial du domaine  $\Omega$ . Un ensemble d'éléments  $\Omega_h$ , composé uniquement de simplexes, est un recouvrement simplicial du domaine  $\Omega$  si :

- quelque soit le point  $P \in \partial\Omega_h$  alors  $P \in \partial\Omega$ ,
- l'intérieur de tout élément de  $\Omega_h$  est non vide,
- l'intersection de l'intérieur de deux éléments est vide.

On peut alors introduire la notion de maillage. Un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  est un recouvrement conforme. On définit la contrainte de conformité par la condition supplémentaire suivante :

- l'intersection de deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  est soit l'ensemble vide, soit un sommet, une arête, une face commun(e) aux deux éléments en question.

Cette contrainte forte permet d'appliquer différents schémas de résolution numérique comme les éléments finis ou volumes finis en simplifiant les algorithmes. En effet, elle assure que pour chaque face d'un élément, il y a au plus un seul élément voisin. Notons cependant que pour certaines applications, comme la visualisation ou certaines méthodes (Galerkin discontinu ou volumes finis), la conformité n'est pas strictement nécessaire.

L'index  $h$  de  $\mathcal{T}_h$  est relatif à une mesure globale de taille d'éléments. Si pour un élément  $K$  quelconque, on dénote par  $h_K$  le diamètre de  $K$  défini par

$$h_K = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K} \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

alors  $h$  est pris égal à  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ . La nécessité d'un tel index apparaîtra naturelle dans le contexte de l'adaptation de maillage et du contrôle de l'erreur d'interpolation.

Enfin, on considère dans cette thèse que des maillages composés d'éléments simpliciaux, de tétraèdres dans l'espace et de triangles dans le plan. Ce choix est motivé par l'avènement de générateurs de maillages tri-dimensionnels non-structurés complètement automatiques. Les principaux avantages du maillage non-structuré sont de pouvoir mailler des domaines disposant de géométries complexes et la possibilité de choisir judicieusement la discrétisation dans le volume. L'utilisation de simplexes assure également la flexibilité nécessaire pour créer des éléments anisotropes, c'est-à-dire de tailles différentes suivant certaines directions. De plus, la preuve de l'existence d'un maillage d'un domaine (voire de l'unicité) sont possibles en utilisant certaines techniques de génération de maillage alors même que l'existence n'est pas assurée en maillage structuré.

## ÉTAT DE L'ART ET APPROCHE PROPOSÉE

L'enjeu de ce chapitre est de concilier deux termes apparemment antinomiques : le maillage, qui par nature est un objet discret, et le continu, qui classiquement vise à être discrétisé. En d'autres termes, on cherche à définir une correspondance, en un certain sens, entre un maillage de calcul discret et son modèle continu.

Les méthodes pour prescrire un maillage sont multiples. Elles sont toutes liées à une application spécifique et dépendent du type de maillage désiré : uniforme, isotrope ou anisotrope. Les algorithmes les plus simples d'adaptation de maillage consistent à modifier les maillages en les découpant localement suivant des motifs pré-définis. Cependant, il est impossible d'adapter le maillage de manière anisotrope. La méthode alors introduite consiste à générer un maillage suivant une métrique qui spécifie le calcul des distances dans le générateur de maillages. Les premiers fondements théoriques ont d'abord été proposés par Vallet [30] pour le cas anisotrope. La mise en œuvre pratique dans le cadre de la génération de maillage est due à [5].

Cette technique est couplée au contrôle de l’erreur d’interpolation [8], en introduisant le hessien de la solution qui est ensuite utilisé comme une métrique. Dervieux [22] a prolongé cette étude en étudiant l’erreur d’interpolation directement avec la métrique et non plus le hessien. Cette vision semble la plus naturelle car elle généralise le cas isotrope uniforme. En effet, un générateur de maillages adaptés est un générateur de maillages uniformes classique dont le calcul de distance est défini par la métrique. Une telle technique est complètement générique et dispose de propriétés d’existence du maillage lorsqu’elle a les mêmes fondements que les méthodes de génération de maillage basées sur le noyau de Delaunay [15]. Notons qu’il existe actuellement des générateurs de maillages adaptatifs anisotropes en deux et trois dimensions basés sur ce concept de métrique. Citons `Bamg` [18] et `BL2D` [21] en deux dimensions, `Yams` [13] pour les surfaces et enfin `Forge3d` [10], `Fun3d` [20], `Gamic` [16], `MeshAdap` [23], `Mmg3d` [12], `Mom3d` [29], `Tango` [7] et [26] en trois dimensions. Il est intéressant de remarquer la généralité du concept de métriques. En effet, tous ces maillages ne sont pas issus des mêmes méthodes de générations de maillages : Delaunay contraint avec remaillage global (`Bamg`, `Gamic`), Delaunay local (`Mmg3d`), marche liée Delaunay et frontal (`B12d`), modifications locales (`Yams`), optimisation locale basée sur le principe du volume minimal (`Forge3d`).

Dans cette thèse, on propose de modéliser un maillage discret par un objet mathématique continu. Ce modèle est complètement géométrique et sans relation directe avec l’erreur d’interpolation contrairement aux approches précédentes. Rappelons l’intérêt d’utiliser des métriques.

L’intérêt est, d’une part, de pouvoir contrôler le maillage, indépendamment de l’algorithme de génération utilisé. D’autre part, on va disposer naturellement sur le modèle continu d’outils d’analyse qui n’existent pas sur l’espace des maillages (discrets) : différentiation, optimisation, calcul des variations, calcul tensoriel, . . . Le but final est de considérer dans toute analyse le maillage comme une donnée ou une inconnue d’un problème continu. L’utilisation simultanée d’une formulation continue, à la fois pour le maillage et le problème sous-jacent (estimation d’erreur, minimisation de fonctionnelles), permet alors de dériver un ou le maillage continu adapté à notre problème. Cette étape est complémentaire aux étapes classiques, toujours indispensables, telles que l’estimation d’erreur *a posteriori*, l’adaptation et l’optimisation des maillages discrets. Cependant, la modélisation continue permet *a priori* d’éviter certains écueils comme la convergence vers un minimum local qui arrive généralement lors d’optimisations locales successives du maillage discret. Elle permet également de garantir certaines propriétés d’unicité ou d’optimalité qui seront vérifiées modulo “ les erreurs de projection ” du maillage continu vers un représentant discret.

Notre approche se base sur les espaces métriques riemanniens pour modéliser continûment les maillages. Localement, ces espaces se comportent dans leur plan tangent comme des espaces métriques euclidiens. On utilise ces derniers pour modéliser les éléments discrets. On montre que l’orientation et les ratios d’anisotropie sont des informations naturellement présentes dans la notion d’espace métrique. On utilise le concept d’élément unité [14] afin de lier le maillage continu à ses représentations discrètes. À partir de cette modélisation, on montre qu’il existe un ensemble d’invariants géométriques à la fois pour la métrique et les éléments unités. Cette étude révèle l’information intrinsèque contenue dans une métrique. De la même manière, les manquements du modèle sont exhibés. Ces derniers sont utilisés afin de définir des fonctions qualités qui permettent de différencier les éléments unités entre eux.

Tout comme le comportement global d’un espace riemannien est obtenu en “recollant” les comportements locaux de ses espaces tangents, un maillage va être modélisé par le “recolle-

ment” des modèles d’éléments continus. En généralisant la notion d’élément unité à l’ensemble du maillage, des classes d’équivalence de maillages sont exhibées. Un représentant continu de ces classes est naturellement le maillage continu lui-même. On montre qu’un maillage continu est composé d’informations locales anisotropes, comme l’orientation et les quotients d’anisotropie, et d’informations relatives au niveau de détail ou à la précision requise. Avec ce découplage, on généralise aux cas des maillages non-structurés adaptés, le paramètre de convergence  $h$  utilisé dans les estimateurs d’erreur en éléments finis. Des suites de maillages emboîtés continus sont ainsi créées. Tout comme un maillage discret est indexé par  $h$ , un maillage continu est également indexé par  $h$  rendant ainsi possible des études de convergence sur l’espace des maillages continus.

En pratique, cette modélisation amène à définir un opérateur de projection du maillage continu au maillage discret. Un mailleur particulier, avec sa méthode spécifique, générera un élément de la classe d’équivalence des maillages unités. Théoriquement, l’existence d’un maillage unité pour un maillage continu donné repose sur la possibilité de paver le plan ou l’espace avec des motifs seulement formés d’éléments unités. La fidélité de la représentation discrète est directement quantifiable au moyen de fonctions qualités qui estiment la corrélation entre l’idéal continu et sa projection. La justesse de la représentation discrète dépend également de la régularité du représentant continu.

## PLAN DU CHAPITRE

Dans une première partie, on rappelle quelques notions de géométrie différentielle qui sont à la base du modèle continu. Les structures d’espace euclidien, espace métrique euclidien et espace métrique riemannien sont rappelées. On rappelle également certaines opérations indispensables d’un point de vue pratique : l’interpolation et l’intersection.

La modélisation continue des éléments est introduite au moyen d’espaces métriques euclidiens. Les propriétés géométriques utilisées dans les chapitres suivants sont démontrées. Les propriétés d’existence et d’unicité sont également abordées.

On généralise ensuite la modélisation continue des éléments au domaine de calcul tout entier. On propose une analogie entre les propriétés du modèle continu avec celles des maillages discrets. Les problématiques d’ordre pratique, comme l’existence et la génération d’un représentant discret du modèle continu, sont dégagées. Plusieurs exemples de maillages continus sont également présentés.

Enfin, on introduit un cadre formel, repris dans les chapitres suivants, permettant d’utiliser ce concept avec des estimateurs d’erreur d’interpolation ou d’approximation.

### 1.1 NOTIONS DE MÉTRIQUES EN ADAPTATION DE MAILLAGE

Les variétés munies d’une structure riemannienne, ou variétés riemanniennes, sont un outil classique de la géométrie différentielle. Elles apparaissent dans de nombreux contextes pour compenser l’insuffisance de la géométrie euclidienne. On les utilise, par exemple, pour le calcul de la longueur d’un chemin s’inscrivant sur une sphère. En effet, cette longueur ne peut pas s’interpréter comme une distance euclidienne classique entre deux points d’un plan ou de l’espace. Une structure riemannienne repose sur des métriques riemanniennes qui courbent l’espace en redéfinissant la notion de distance classique. Dans le domaine de la génération de maillage adaptatif, cette structure est pour l’instant le seul moyen de prescrire des tailles dans toutes les directions partout dans le domaine. C’est l’outil fondamental pour l’adaptation de

maillage non structuré et anisotrope. En effet, on peut considérer qu'un mailleur adaptatif utilise le paradigme suivant :

*Un mailleur adaptatif anisotrope est équivalent à un mailleur uniforme isotrope unité avec un calcul de distance modifié<sup>1</sup>.*

Pour être plus précis, les mailleurs adaptatifs calculent les distances dans un espace métrique et vise à générer un maillage dont toutes les arêtes sont de longueur un.

Dans cette section, on rappelle les notions de géométrie différentielle qui sont utilisées dans le contexte de l'adaptation de maillage. Cela concerne les définitions de tenseur de métrique, d'espace métrique euclidien et d'espace métrique riemannien. On présente également les opérations élémentaires sur les métriques.

### 1.1.1 Concepts utiles de géométrie différentielle

On rappelle ici brièvement les notions nécessaires à la définition d'un maillage continu. Pour un exposé exhaustif des espaces métriques riemanniens, on peut se référer aux ouvrages de référence [4, 11].

L'espace le plus simple est l'espace euclidien. C'est également le plus naturel. Dans cet ensemble, les propriétés géométriques intuitives sont vraies comme le fait que la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite. On dit généralement qu'un espace euclidien est plat. Il s'agit en fait d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Grâce à ce dernier, on peut définir les notions d'angles et de distances, et donc par suite des rotations et des volumes. Notons qu'il existe des espaces métriques sans produit scalaire. Cependant, ces espaces ne permettent plus de définir des angles ou des volumes, notions indispensables dans le contexte du maillage.

Un cas plus complexe est la généralisation des espaces euclidiens en leur ajoutant une géométrie. En général, cet espace correspond à une variété continue. La structure est définie de sorte à ce que localement, *i.e.*, dans un espace tangent, cet espace soit similaire à  $\mathbb{R}^n$ . Cependant, contrairement au cas euclidien, cet espace ne possède pas un système de coordonnées naturel global. Plus formellement, une variété riemannienne est un espace topologique de Hausdorff qui est localement difféomorphe à un espace euclidien. Cette notion signifie qu'une variété riemannienne est munie d'un produit scalaire qui varie continûment d'un point à l'autre. Lorsque le produit scalaire sous-jacent est basé sur le choix d'une forme quadratique définie positive sur l'espace tangent à la variété, alors une géométrie riemannienne est définie. Ce choix conduit en particulier à des idées locales d'angles, de distances et de volumes. À partir de ces quantités locales, d'autres quantités globales peuvent être définies par intégration.

En résumé, une variété munie d'une géométrie riemannienne est un espace construit à partir de la déformation et de l'assemblage d'espaces euclidiens tel que leur comportement global est non euclidien. Un espace euclidien correspond au cas particulier où le produit scalaire est constant. Un exemple de variété riemannienne est donné par la sphère, cf. Figure 1.1.

L'idée principale dans l'approche continue de maillage est de modéliser continûment les maillages à l'aide de variétés riemanniennes. Localement, les éléments sont modélisés par des espaces euclidiens tangents. Le maillage continu correspond à l'assemblage de ces éléments locaux. On l'assimile donc à l'espace riemannien défini par ses espaces euclidiens tangents.

1. Cette vision ne doit pas cacher la grande complexité algorithmique ajoutée par l'anisotropie.

### 1.1.2 Classes d'espaces métriques

On introduit dans la suite la définition d'un espace métrique ainsi que ses propriétés utiles en adaptation de maillage.

**Définition 1.1** On appelle *espace métrique euclidien* un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$  défini par un tenseur de métrique c'est-à-dire une matrice symétrique définie positive  $\mathcal{M}$ . On le note  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ . Le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est donné par  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{M}} = {}^t \mathbf{u} \mathcal{M} \mathbf{v}$ . La distance entre deux points  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  s'en déduit par  $d_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{{}^t \mathbf{a} \mathbf{b} \mathcal{M} \mathbf{a} \mathbf{b}}$ . Enfin la longueur d'un segment  $\mathbf{ab}$  est égale à la distance entre ses deux extrémités :  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = d_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

REMARQUE 1.1 Si la matrice qui définit le produit scalaire est la matrice identité, notée  $I_n$ , alors on définit l'espace classique euclidien  $(\mathbb{R}^n, I_n)$  muni de son produit scalaire canonique :  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{I_n} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ .

À partir d'un espace métrique euclidien  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ , on peut alors définir un espace vectoriel normé  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$  et un espace métrique  $(\mathbb{R}^n, d_{\mathcal{M}})$  dont les structures sont induites par  $\mathcal{M}$ . Pour l'espace normé, on note  $\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^t \mathbf{u} \mathcal{M} \mathbf{u}}$ . On peut toujours définir des volumes et des angles dans des espaces métriques euclidiens. Étant donné  $K$ , un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$ , on définit le *volume* dans la métrique  $\mathcal{M}$  par :

$$|K|_{\mathcal{M}} = \int_K \sqrt{\det \mathcal{M}} \, dK = \sqrt{\det \mathcal{M}} |K|_{I_n}. \quad (1.1)$$

L'*angle* entre deux vecteurs non nuls  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est défini par l'unique réel  $\theta \in [0, \pi]$  qui vérifie :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{M}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{M}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{M}}}.$$

#### Interprétation géométrique

Il est souvent utile et plus pratique d'utiliser la représentation géométrique du tenseur de métrique  $\mathcal{M}$ . Elle permet de relier, par exemple, la métrique à un volume. On montre dans la suite qu'il existe une interprétation géométrique simple du tenseur de métrique.

Dans le voisinage  $\mathcal{V}(\mathbf{a})$  d'un point  $\mathbf{a}$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble des points tels que la longueur  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$  est donné dans  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$  par :

$$\Phi_{\mathcal{M}}(\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \mid {}^t (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \mathcal{M} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq \varepsilon^2\}.$$

Il est suffisant de décrire uniquement  $\Phi_{\mathcal{M}}(1)$  car on peut en déduire  $\Phi_{\mathcal{M}}(\varepsilon)$  par homogénéité :

$$\Phi_{\mathcal{M}}(\varepsilon) = \{\varepsilon^{-1} \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \mid \mathbf{x} \in \Phi_{\mathcal{M}}(1)\}.$$

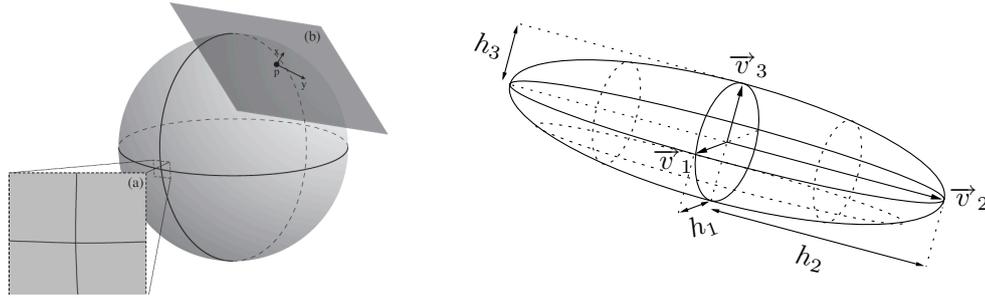
Comme  $\mathcal{M}$  est symétrique, elle admet la décomposition spectrale suivante  $\mathcal{M} = \mathcal{R} \Lambda {}^t \mathcal{R}$ .  $\mathcal{R}$  est la matrice des vecteurs propres normalisés de  $\mathcal{M}$  et vérifie  ${}^t \mathcal{R} \mathcal{R} = \mathcal{R} {}^t \mathcal{R} = I_n$ .  $\Lambda$  est la matrice diagonale formée par les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathcal{M}$  qui sont toutes strictement positives. Ainsi,

dans la base des vecteurs propres, la fonction quadratique initiale  ${}^t(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \mathcal{M} (\mathbf{x} - \mathbf{a})$  devient  ${}^t(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{a}}) \Lambda (\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{a}})$ . On peut donc réécrire  $\Phi_{\mathcal{M}}(1)$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{M}}(1) &= \left\{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\tilde{\mathbf{a}}) \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i (\tilde{x}_i - \tilde{a}_i)^2 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\tilde{\mathbf{a}}) \mid \sum_{i=1}^n \left( \frac{\tilde{x}_i - \tilde{a}_i}{h_i} \right)^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

La dernière expression représente l'ensemble des points contenus dans un ellipsoïde de centre  $\mathbf{a}$ , dont les axes sont les vecteurs propres de  $\mathcal{M}$ . Les distances suivant ces axes sont données par  $h_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}}$ . On note  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  cet ellipsoïde. La Figure 1.1 (à droite) donne une représentation géométrique en trois dimensions. L'ensemble défini par  $\Phi_{\mathcal{M}}(1)$  joue un rôle particulier dans la définition d'un maillage continu.

**Définition 1.2** *Étant donné un espace métrique euclidien  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ ,  $\Phi_{\mathcal{M}}(1)$  est appelé la boule unité de  $\mathcal{M}$ . On la note  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ .*



**Figure 1.1:** À gauche, la sphère est un exemple de variété riemannienne. En chaque point, il existe un plan tangent qui dépend de ce point, (a) et (b). Dans un plan (a), les propriétés métriques de la sphère sont approchées par les propriétés métriques du plan euclidien. À droite, représentation géométrique de la boule unité d'une métrique.

### Transformation bijective naturelle de la métrique

Une autre information intéressante du tenseur de métrique est qu'il permet de définir une transformation qui, à la boule unité de la matrice identité  $\mathcal{B}_{I_n}$  associe la boule unité de  $\mathcal{M}$ . Ainsi, si on considère la matrice  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{R} \sqrt{\Lambda} {}^t\mathcal{R}$ , où  $\sqrt{\Lambda}$  est une matrice diagonale qui contient les racines carrées des valeurs propres de  $\mathcal{M}$ , alors l'application définie par  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$  est la transformation cherchée. Il existe alors deux façons de définir l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  associé à la boule unité de la métrique :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid {}^t\mathbf{x} \mathcal{M} \mathbf{x} = 1 \} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_{\mathcal{M}} = \{ \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2^2 = 1 \}.$$

### Espace métrique riemannien

On s'intéresse désormais au cas plus général où la métrique varie d'un point à l'autre du domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

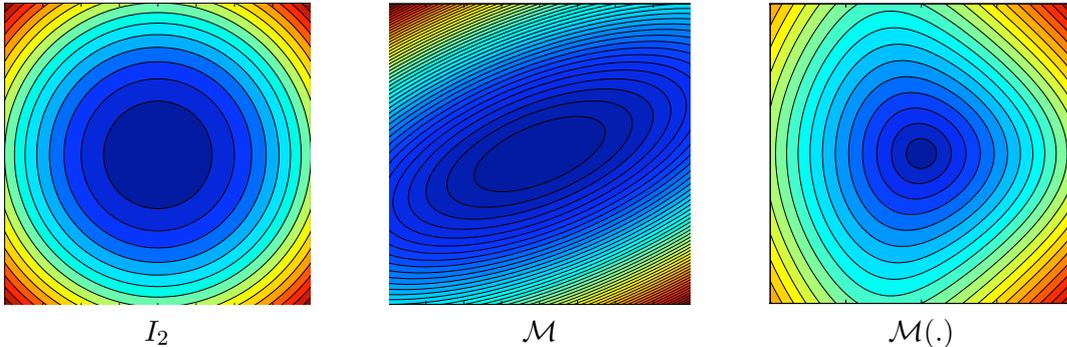
**Définition 1.3** On appelle variété riemannienne ou espace métrique riemannien, une variété continue  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  munie d'une métrique  $\mathcal{M}(\cdot)$ . On la note  $(\mathbf{x}, \mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ . La restriction de la métrique  $\mathcal{M}(\cdot)$  en un point  $\mathbf{x}$  de la variété définit un produit scalaire sur l'espace tangent  $T_{\mathbf{x}}\Omega$  (le plus souvent égal à  $\Omega$  pour nos applications). Muni de cette structure, l'espace tangent a une structure d'espace métrique euclidien.

Un exemple de variété riemannienne est donné Figure 1.1. Dans ce cas, la distance n'est plus liée à un seul produit scalaire. Contrairement à un espace métrique euclidien, le plus court chemin entre deux points n'est plus la ligne droite mais est donné par une géodésique. Cependant, dans le cadre de l'adaptation de maillage, on ne s'intéresse qu'au calcul de longueurs d'arêtes ce qui est différent de la distance entre ses deux extrémités. En d'autres termes, on s'intéresse à la longueur d'un chemin donné entre deux sommets et non à la distance entre ces deux sommets.

**Définition 1.4** Dans un espace métrique riemannien  $(\mathbf{x}, \mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ , la longueur d'une arête  $\mathbf{ab}$  est calculée en utilisant la paramétrisation  $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{ab}$ , où  $t \in [0, 1]$ . On a alors :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{t\mathbf{ab} \mathcal{M}(\mathbf{a} + t\mathbf{ab}) \mathbf{ab}} dt. \quad (1.2)$$

La Figure 1.2 illustre différents calculs de distance, de l'espace euclidien canonique à un espace métrique riemannien. On remarque que les lignes de niveaux sont isotropes pour le cas euclidien classique, alors que deux directions privilégiées apparaissent dans le cas d'un espace métrique euclidien. Dans ce cas, les lignes de niveaux sont toujours symétriques et homogènes par rapport à l'origine, ce qui n'est plus vrai pour un espace métrique riemannien.



**Figure 1.2:** Iso-valeurs de la fonction représentant la distance par rapport à l'origine pour différents espaces métriques riemanniens. À gauche, distance à l'origine dans le cas de l'espace vectoriel euclidien, au milieu, distance à l'origine dans le cas d'un espace métrique euclidien  $([-1, 1] \times [-1, 1], \mathcal{M})$  et à droite, distance à l'origine pour l'espace métrique riemannien  $(\mathbf{x}, \mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in [-1, 1]^2}$ . Il est intéressant de remarquer la perte progressive de symétrie.

On envisage maintenant deux exemples simples pour mieux illustrer l'utilisation de ce concept. Le but est d'en déduire un principe très général qui lie l'adaptation de maillage à la définition d'un espace riemannien.

EXEMPLE 1.1 (À PROPOS DE LA COURBURE DE L'ESPACE)

On illustre ici pourquoi une structure riemannienne courbe l'espace en redéfinissant les longueurs. Plus précisément on choisit un domaine plan  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x, y \leq 1\}$  muni de la structure riemannienne suivante :

$$\mathcal{M}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} x^2 & -xy \\ -xy & y^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Par construction, le calcul des distances sur  $(\Omega, \mathcal{M})$  est équivalent au calcul des distances sur la surface cartésienne  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sigma(x, y) = x^2 - y^2 \text{ et } (x, y) \in \Omega\}.$$

Autrement dit, étant donné deux points  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega \times \Omega$  et le chemin  $\gamma(t) = \mathbf{a} + (1-t)\mathbf{a}\mathbf{b}$  ainsi que leurs images  $(\mathbf{S}\mathbf{a}, \mathbf{S}\mathbf{b}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ , on a  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_{\mathcal{S}}(\mathbf{S}\mathbf{a}, \mathbf{S}\mathbf{b})$ , en suivant comme chemin sur  $\mathcal{S}$  le segment courbe image de  $\gamma$  par  $\sigma$ , cf. Figure 1.3. Dans cet exemple, on a simplement utilisé la métrique induite par la paramétrisation cartésienne  $\mathcal{S}$  sur  $\Omega$ . Cette surface représente donc la courbure induite par la structure riemannienne du domaine initial 2D. Le principe précédent est classiquement utilisé lors du maillage des courbes et des surfaces afin de contrôler la taille des éléments sur la surface dans l'espace des paramètres. Il se généralise à des paramétrisations quelconques, voir [14] pour plus de détails. Cependant, la réciproque, qui à partir d'une structure riemannienne donnée, exhibe la déformée, *i.e.*, la surface correspondante au domaine initial courbé, est beaucoup plus délicate et moins naturelle. Ce problème consiste à trouver une surface à partir de sa première et deuxième forme fondamentale [9].

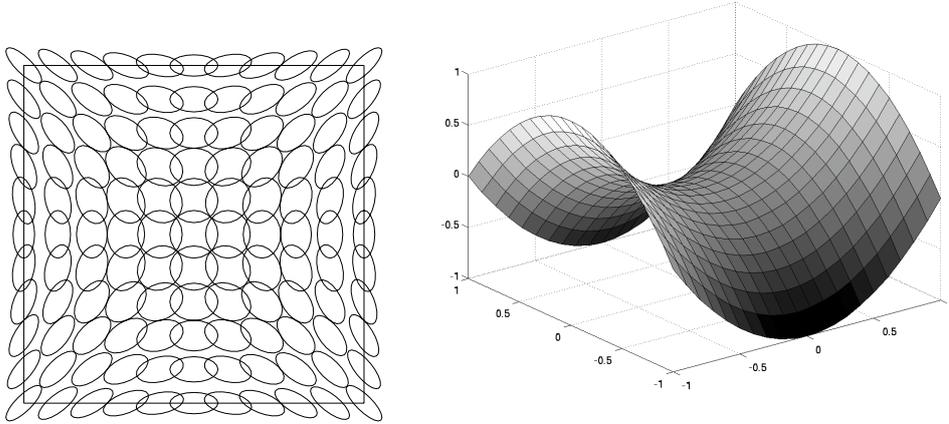
EXEMPLE 1.2 (POURQUOI LES ESPACES MÉTRIQUES SONT PLATS)

Si l'on considère un plan comme surface de  $\mathbb{R}^3$ , alors la structure riemannienne induite est simplement un espace métrique. Dans le cas simple où le plan est donné par une équation cartésienne de la forme  $z = ax + by + d$ , alors la métrique induite dans le plan  $(x, y)$  est constante égale à

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & ab \\ ab & 1 + b^2 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 1.2 Si les exemples précédents semblent assez triviaux aujourd'hui, il est à noter que l'idée d'utiliser les espaces riemanniens comme contrôle dans les maillages adaptatifs est antérieure à l'utilisation de maillages adaptés dans l'espace des paramètres. Même si théoriquement, les notions de géométrie différentielle pour les surfaces étaient bien établies (principalement la première et deuxième forme fondamentale), leur utilisation numérique dans le cadre du maillage des surfaces paramétrées date du milieu des années 1990. Les premiers outils de CAO 3D, qui remontent aux années 1980, utilisaient des déformations de grilles qui s'apparentaient aux méthodes algébriques, sujet alors très étudié. Un des premiers outils s'appelait CADAM (Computer-Augmented Drafting and Manufacturing, 1975, développé par Lockheed). Un des premiers en trois dimensions, issu de CADAM, est CATIA (Computer-Aided Three-Dimensional Interactive Application, 1981, initialement développé par Dassault Aviation puis par Dassault Systèmes).

Dans la suite, on s'intéresse à quelques opérations pratiques sur les métriques. Si de telles définitions n'apparaissent pas naturellement dans l'approche idéale continue, leur utilisation est néanmoins cruciale pour les applications numériques.



**Figure 1.3:** À gauche, représentation géométrique de l'espace plan  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x, y \leq 1\}$  muni d'une structure riemannienne  $\mathcal{M}(x, y)$  donnée par (1.3). En chaque point, la représentation géométrique  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}(x, y)$  a été dessinée. À droite, l'espace déformé par  $\mathcal{M}$  du domaine  $\Omega$  est la surface cartésienne de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $z = x^2 - y^2$ . La longueur d'un chemin entre deux points du domaine  $\Omega$  calculée dans  $\mathcal{M}$  est égale à la longueur du chemin courbe projeté sur la surface déformée  $\mathcal{S}$ .

### 1.1.3 Opérations élémentaires sur les métriques

Le principal avantage de travailler dans un espace métrique riemannien est la définition d'opérations bien posées telles que l'interpolation et l'intersection de métriques. On présente ici un aperçu de ces opérations dans l'espace. L'ensemble de ces opérations a une interprétation géométrique simple en considérant l'ellipsoïde  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$  défini pour une métrique  $\mathcal{M}$ .

#### Interpolation de deux métriques

On se concentre sur le problème suivant : les données sont un segment  $\mathbf{ab}$ , les deux métriques associées aux extrémités du segment  $\mathcal{M}_{\mathbf{a}}$  et  $\mathcal{M}_{\mathbf{b}}$ . On cherche alors une métrique interpolée  $\mathcal{M}(t)$  définie le long du segment paramétré par  $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{ab}$  où  $t \in [0, 1]$ . De plus, on impose une variation monotone de la métrique le long du segment. Cette méthode permet de définir un champ de métriques continu le long du segment.

On rappelle ici un schéma d'interpolation linéaire sur les tailles de l'ellipse, telle que la métrique au point de paramétrisation  $\gamma(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{M}(t) = \left( (1-t)\mathcal{M}_{\mathbf{a}}^{-\frac{1}{2}} + t\mathcal{M}_{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Pour le calcul effectif, on exprime les deux métriques dans une base commune qui les diagonalise à l'aide de la réduction simultanée [1]. On considère la matrice  $\mathcal{N} = \mathcal{M}_{\mathbf{a}}^{-1} \mathcal{M}_{\mathbf{b}}$  et  $\mathcal{P} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$  la matrice composée des vecteurs propres de  $\mathcal{N}$ . On calcule  $(\lambda_i)_{i=1,3}$  et  $(\mu_i)_{i=1,3}$  valeurs propres de  $\mathcal{M}_{\mathbf{a}}$  et  $\mathcal{M}_{\mathbf{b}}$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . En définissant  $\left( h_{\mathbf{a},i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right)_{i=1,3}$  et

$\left( h_{\mathbf{b},i} = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \right)_{i=1,3}$ , la métrique  $\mathcal{M}(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{M}(t) = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} h_1^{-2}(t) & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & h_3^{-2}(t) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où  $h_i(t)$ ,  $i = 1, 3$ , sont des fonctions linéaires  $h_i(t) = (1-t)h_{\mathbf{a},i} + th_{\mathbf{b},i}$ . La Figure 1.4 illustre ce principe. Elles consistent à modifier l'interpolation de la fonction  $h_i$ .

### Interpolation de $k \geq 2$ métriques

Le principal inconvénient de l'interpolation précédente, ou bien de toute interpolation basée sur la réduction simultanée, est de ne pas être commutative. Dans le cas où on est intéressé par la métrique interpolée en un point d'un élément, ce type d'interpolation est mise en défaut. On peut alors utiliser une interpolation dérivée de la théorie des métriques log-euclidiennes introduites dans [3]. Étant donnée une suite finie de points  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots k}$  et leurs métriques respectives  $\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)$ , alors en un point  $\mathbf{x}$  tel que :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1,$$

la métrique interpolée linéairement est définie par :

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \exp \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \ln(\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)) \right). \quad (1.5)$$

Sur l'espace des matrices diagonalisables, le logarithme et l'exponentiel opèrent termes à termes sur les valeurs propres de la métrique, *i.e.*, si une métrique admet le développement spectral  $\mathcal{M} = \mathcal{R} \Lambda {}^t\mathcal{R}$  alors :

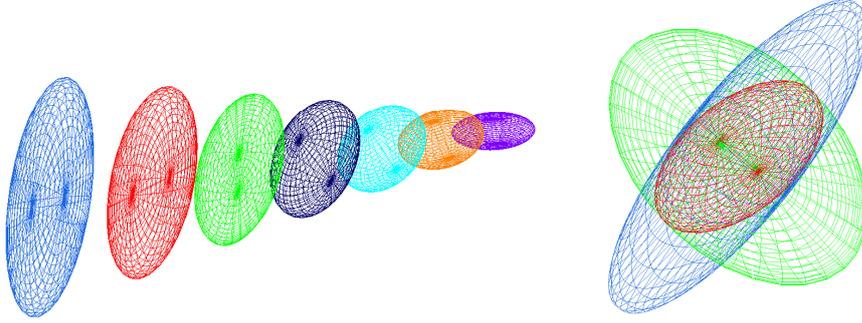
$$\ln(\mathcal{M}) = \mathcal{R} \ln(\Lambda) {}^t\mathcal{R} \quad \text{et} \quad \exp(\mathcal{M}) = \mathcal{R} \exp(\Lambda) {}^t\mathcal{R}.$$

Une telle interpolation est commutative mais nécessite le calcul de logarithmes et d'exponentielles. Cette procédure est indispensable pour définir un champ de métriques continûment sur tout le domaine, dans le cas où la métrique est seulement donnée aux sommets d'un maillage.

REMARQUE 1.3 La formule d'interpolation précédente (1.5), en utilisant les métriques log-euclidiennes, ne se simplifie en :

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \left( \prod_{i=1}^k \mathcal{M}(\mathbf{x}_i)^{\alpha_i} \right),$$

que si toutes les matrices commutent deux à deux. Une moyenne géométrique dans l'espace des logarithmes s'interprète donc comme une moyenne arithmétique dans l'espace euclidien.



**Figure 1.4:** À gauche, exemple d'interpolation entre deux métriques. À droite, intersection de deux métriques.

EXEMPLE 1.3 (CALCUL APPROCHÉ DE LA LONGUEUR D'UN SEGMENT)

Le calcul de la longueur d'une arête  $\mathbf{e}$  est donné par l'évaluation numérique de l'intégrale (1.2). Étant donnée une quadrature gaussienne à  $k$  points composée des poids et coefficients barycentriques suivants  $(\omega_i, \alpha_i)_{1 \dots k}$ , la longueur de l'arête  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2$  pour une métrique  $\mathcal{M}$  est approchée par :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t \mathbf{e} \mathcal{M}(\mathbf{x}_1 + t \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) \mathbf{e}} dt \approx \sum_{i=1}^k \omega_i \sqrt{{}^t \mathbf{e} \mathcal{M}(\mathbf{x}_1 + \alpha_i \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) \mathbf{e}},$$

où  $\mathcal{M}(\mathbf{x}_1 + \alpha_i \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2)$  est la métrique interpolée aux points de Gauss entre les deux extrémités  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ . Dans le cas d'une intégration à l'ordre un avec une interpolation log-euclidienne, il vient :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) \approx \sqrt{{}^t \mathbf{e} \exp\left(\frac{1}{2}(\ln(\mathcal{M}(\mathbf{x}_1)) + \ln(\mathcal{M}(\mathbf{x}_2)))\right) \mathbf{e}}.$$

Cependant, un calcul numérique de l'intégrale peut s'avérer assez coûteux en temps de calcul car plusieurs diagonalisations sont nécessaires selon l'ordre de la quadrature. Or, l'évaluation de la longueur d'une arête est une opération récurrente pour tout algorithme de maillage adaptatif. Il est donc important, dans un souci d'efficacité, de disposer de différentes approximations de la longueur d'une arête. Selon la précision désirée, une formule sera préférée à une autre, au détriment du temps de calcul. Ces évaluations des longueurs sont issues de différents types d'interpolation. On considère une arête  $\mathbf{e}$  de longueur euclidienne  $\|\mathbf{e}\|_2$  et les deux métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  aux extrémités de  $\mathbf{e} = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2$ . On note  $\ell_i = \sqrt{{}^t \mathbf{e} \mathcal{M}_i \mathbf{e}}$ , pour  $i = \{1, 2\}$ . On suppose  $\ell_1 > \ell_2$  et on note  $a = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ . On propose alors les approximations suivantes de  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e})$  qui consistent à choisir une interpolation de la variation de la métrique le long de  $\mathbf{e}$ . Si note  $\mathbf{u} = \mathbf{e}/\|\mathbf{e}\|$ , l'approximation consiste à calculer :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t \mathbf{e} \mathcal{M}(t) \mathbf{e}} dt = \|\mathbf{e}\|_2 \int_0^1 \sqrt{{}^t \mathbf{u} \mathcal{M}(t) \mathbf{u}} dt = \|\mathbf{e}\|_2 \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt.$$

On remarque alors  $\ell_1 = \frac{\|\mathbf{e}\|_2}{h_1}$  et  $\ell_2 = \frac{\|\mathbf{e}\|_2}{h_2}$ . On considère fréquemment les choix suivants comme interpolation sur la fonction  $h$  :

- l'interpolation linéaire  $h(t) = t h_1 + (1 - t) h_2$  :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) = \ell_1 \frac{\ln(a)}{a - 1},$$

- l'interpolation géométrique  $h(t) = h_1^{1-t} h_2^t$  :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) = \ell_1 \frac{a-1}{a \ln(a)},$$

- l'interpolation moyenne  $h^{-1}(t) = t h_1^{-1} + (1-t) h_2^{-1}$  :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) = \ell_1 \frac{a+1}{2a},$$

- l'interpolation quadratique consiste à écrire une variation quadratique de l'inverse de la longueur, soit  $h^{-1}(t) = at^2 + bt + c$ , en choisissant  $h^{-1}(0) = h_1^{-1}$ ,  $h^{-1}(1) = h_2^{-1}$  et

$$h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}},$$

la longueur approchée devient :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) = \frac{\ell_1}{6} \left(1 + a + 2\sqrt{2(1+a^2)}\right).$$

La dernière interpolation consiste en pratique à évaluer la longueur de l'arête dans la métrique moyenne  $\frac{1}{2}(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)$ .

#### EXEMPLE 1.4 (CALCUL APPROCHÉ DU VOLUME D'UN ÉLÉMENT)

De la même façon, le calcul approché du volume d'un élément dans la métrique vise à calculer numériquement l'intégrale (1.1). Avec une interpolation log-euclidienne à l'ordre un, on obtient :

$$|K|_{\mathcal{M}} = \int_K \sqrt{\det \mathcal{M}} dK \approx \sqrt{\det \left( \exp \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \log(\mathcal{M}_i) \right) \right)} |K|.$$

Une méthode moins coûteuse mais beaucoup moins précise lors de grandes variations de tailles de la métrique consiste à faire la moyenne des métriques aux sommets :

$$|K|_{\mathcal{M}} \approx \sqrt{\det \left( \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathcal{M}_i \right)} |K|.$$

### Intersection de deux métriques

On présente maintenant la procédure d'intersection de métriques. Soient deux tenseurs de métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  en un point du domaine. Le problème géométrique consiste à déterminer le tenseur de volume maximal inscrit dans les deux métriques. On note  $\mathcal{M}_{1 \cap 2}$  le tenseur correspondant à l'intersection de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . On utilise encore la réduction simultanée des formes quadratiques associées aux tenseurs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . On considère donc  $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{P} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$  la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de  $\mathcal{N}$ . La matrice  $\mathcal{M}_{1 \cap 2}$  est donc donnée par :

$$\mathcal{M}_{1 \cap 2} = {}^t \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & \max(\lambda_3, \mu_3) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1},$$

où  $\lambda_i = {}^t \mathbf{e}_i \mathcal{M}_1 \mathbf{e}_i$  et  $\mu_i = {}^t \mathbf{e}_i \mathcal{M}_2 \mathbf{e}_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . La Figure 1.4 illustre ce principe.

### Intersection de $k \geq 2$ métriques

Si on considère un ensemble fini de métriques  $(\mathcal{M})_{i=1\dots k}$  qui doivent être intersectées, alors il existe encore un ellipsoïde de volume maximal inscrit dans l'ensemble de la suite d'ellipsoïdes  $(\mathcal{E})_{i=1\dots k}$  correspondants aux  $(\mathcal{M})_{i=1\dots k}$ . La preuve et l'unicité sont basées sur l'ellipsoïde de John [19]. La métrique intersectée optimale est solution d'un problème d'optimisation semi-défini. La fonction coût à minimiser est généralement donnée par le logarithme du volume, afin d'obtenir une fonction convexe :

$$\mathcal{M}_{\cap_i \mathcal{M}_i} = \operatorname{Argmin}_{\mathcal{M}} \ln(\det(\mathcal{M})^{-1}),$$

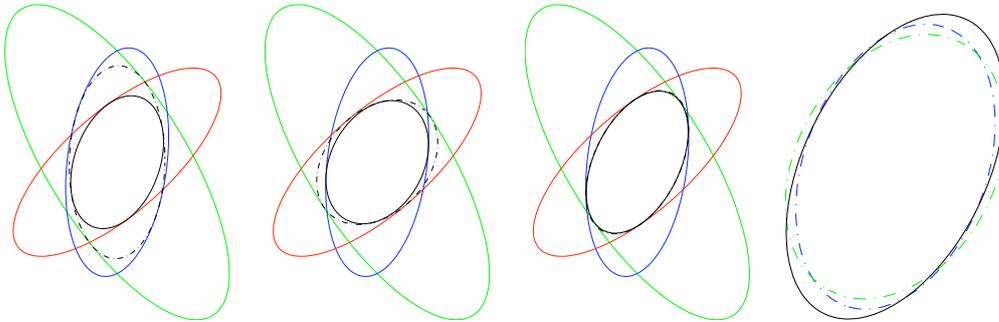
sous les  $k$  contraintes  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_i$ . La contrainte précédente peut être réécrite comme une condition matricielle :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_i \iff \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \lambda \mathcal{M} - \mathcal{M}_i \text{ est une matrice positive.}$$

Des solutions moins précises, mais moins coûteuses en temps de calcul, peuvent être déduites de l'intersection précédente qui sont exactes pour deux métriques seulement. Toutefois, l'unicité de la solution n'est pas garantie car elle dépend de l'ordre des intersections. Par exemple, on peut considérer :

$$\mathcal{M}_{\cap_i \mathcal{M}_i} = (((\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \cap \mathcal{M}_3) \dots) \cap \mathcal{M}_k,$$

où les métriques sont intersectées deux à deux. La Figure 1.5 illustre la non-unicité d'une suite d'intersections avec l'utilisation de la réduction simultanée. L'unique solution trouvée en résolvant le problème d'optimisation est optimale en terme de volume et de ratios d'anisotropie.



**Figure 1.5:** Intersection de trois métriques en utilisant à la fois la réduction simultanée dans des ordres différents et la méthode basée sur la résolution d'un problème d'optimisation. À droite, superposition des trois métriques trouvées, celle en trait plein correspond à celle de plus grand volume et de plus grand ratio d'anisotropie, obtenue par résolution du problème d'optimisation. Un écart de plus de 10% est observé à la fois sur les volumes et les ratios d'anisotropie.

## 1.2 MODÈLE CONTINU DE MAILLAGE

Dans cette section, des modèles continus pour les simplexes et les maillages formés de simplexes sont proposés. On introduit tout d'abord le modèle d'élément continu et son lien avec l'élément discret. On propose ensuite le modèle de maillage continu. On démontre qu'il représente une classe d'équivalence de maillages discrets.

### 1.2.1 Propriétés géométriques du simplexe régulier

Le simplexe régulier joue un rôle essentiel dans la modélisation continue des éléments. En particulier, ses caractéristiques sont utilisées afin de normaliser certaines quantités comme le volume ou la qualité. On rappelle ici sa définition ainsi que certaines de ses propriétés géométriques.

Dans un espace de dimension  $n$ , un  $n$ -simplexe est défini par  $n + 1$  sommets connectés par  $\frac{n(n+1)}{2}$  arêtes. Ce simplexe est dit régulier lorsque les longueurs euclidiennes de toutes ses arêtes sont constantes, égales à  $a$ . On peut alors définir les quantités suivantes :

- le volume  $V_n$ ,
- le rayon  $R_n$  de l'hyper-sphère circonscrite,
- le rayon  $r_n$  de l'hyper-sphère inscrite,
- la distance  $h_n$  d'un des sommets au centre de la face opposée (qui est elle-même un  $(n - 1)$ -simplexe régulier).

Il est possible de donner la valeur explicite de ces quantités, en utilisant les récurrences sur  $n$  suivantes :

$$h_n^2 + R_{n-1}^2 = a^2, \quad V_n = \frac{1}{n} V_{n-1} h_n,$$

$$V_n = \frac{n+1}{n} V_{n-1} r_n, \quad R_n^2 = r_n^2 + R_{n-1}^2.$$

En considérant que  $V_1 = h_1 = 1$  et que  $R_1 = r_1 = \frac{1}{2}$ , on trouve :

$$V_n = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, \quad h_n = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n+1}{n}},$$

$$R_n = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \quad r_n = \frac{a}{\sqrt{2n(n+1)}}.$$

La table 1.1 résume ces valeurs pour les deux cas qui nous intéressent en pratique : le triangle équilatéral et le tétraèdre régulier. Lorsque  $a$  est égal à un, alors le simplexe régulier est aussi unité.

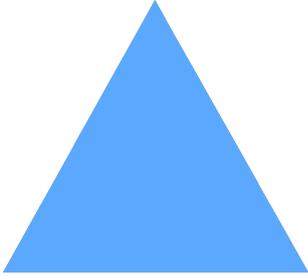
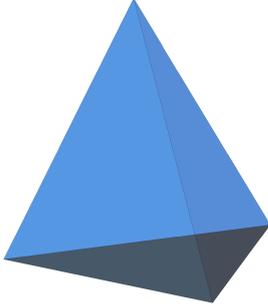
### 1.2.2 Modélisation continue d'un simplexe

Dans cette section, on définit la notion d'élément continu et on décrit tous les éléments discrets (simplexes) qui sont représentés par cette modélisation.

**Définition 1.5** Soit un espace métrique euclidien  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ , la boule unité  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$  est appelée élément continu.

La modélisation d'un élément dans un espace métrique euclidien  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$  permet de choisir sa taille et son orientation. Plus précisément, l'orientation d'un élément est donnée par les directions principales de la métrique, *i.e.*, ses vecteurs propres. Enfin, la taille d'un élément est une fonction des valeurs propres de  $\mathcal{M}$ .

REMARQUE 1.4 Les éléments continus sont convexes tout comme les éléments discrets. Cette analogie est requise pour bénéficier des mêmes propriétés de projection (et d'interpolation). Cette condition est nécessaire pour avoir une relation bien posée entre formulation discrète et continue dans le cas des estimateurs d'erreur.

	
$V_2 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad h_2 = a \frac{\sqrt{3}}{2},$	$V_3 = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}, \quad h_3 = a \sqrt{\frac{2}{3}},$
$R_2 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad r_2 = \frac{a}{\sqrt{12}}.$	$R_3 = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad r_3 = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$

**Table 1.1:** Quantités utiles pour le triangle et le tétraèdre régulier.

À partir du modèle continu  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ , l'ensemble des éléments discrets représentés par ce modèle est donné par :

**Définition 1.6** Un élément  $K$  est unité dans l'espace métrique euclidien  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$  si toutes ses arêtes ont une longueur égale à un calculée dans la métrique. Plus précisément, si  $K$  est donné par sa liste d'arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1..n(n+1)/2}$ , alors :

$$\forall i = 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \quad \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}_i) = 1.$$

Le volume de  $K$  est donné par :

$$|K|_{\mathcal{M}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} n!} \quad \text{et} \quad |K|_{I_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} n!} \sqrt{\det(\mathcal{M})}.$$

On a la propriété d'existence suivante :

**Proposition 1.1** Étant donné un espace métrique euclidien  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ , il existe un ensemble non vide d'éléments unités dans  $\mathcal{M}$ . Réciproquement, pour un élément  $K = (\mathbf{e}_i)_{i=1..n(n+1)/2}$  tel que  $|K|_{I_n} \neq 0$ , alors il existe une unique métrique  $\mathcal{M}$  telle que l'élément  $K$  est unité dans  $\mathcal{M}$ .

On va maintenant donner une description de la classe d'équivalence des éléments unités pour  $\mathcal{M}$  en trois dimensions. On considère, dans un premier temps, le cas uniforme donné par  $\mathcal{M} = I_3$ . Le cas général pour  $\mathcal{M}$  quelconque en sera déduit par la suite. On spécifie le tétraèdre  $K_0 = [A, B, C, D]$  :

$$\begin{cases} A = \left[0, 0, \frac{\sqrt{6}}{4}\right], & B = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right], \\ C = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right] & \text{et} \quad D = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]. \end{cases}$$

Il est bien unité dans  $I_3$  et son volume est égal à  $|K_0| = \frac{\sqrt{2}}{12}$ . Comme le modèle continu est isotrope, on en déduit que  $\mathcal{R}K_0$  est également un élément unité quelque soit la matrice de rotation  $\mathcal{R}$ . Par conséquent, la classe des éléments unités pour la métrique  $I_3$  est donc :

$$\mathcal{K} = \{K \mid \forall \mathcal{R} \in \mathcal{O}_3 : K = \mathcal{R}K_0\}, \text{ où } \mathcal{O}_3 = \{\mathcal{R} \mid {}^t\mathcal{R}\mathcal{R} = \mathcal{R}{}^t\mathcal{R} = I_3\}.$$

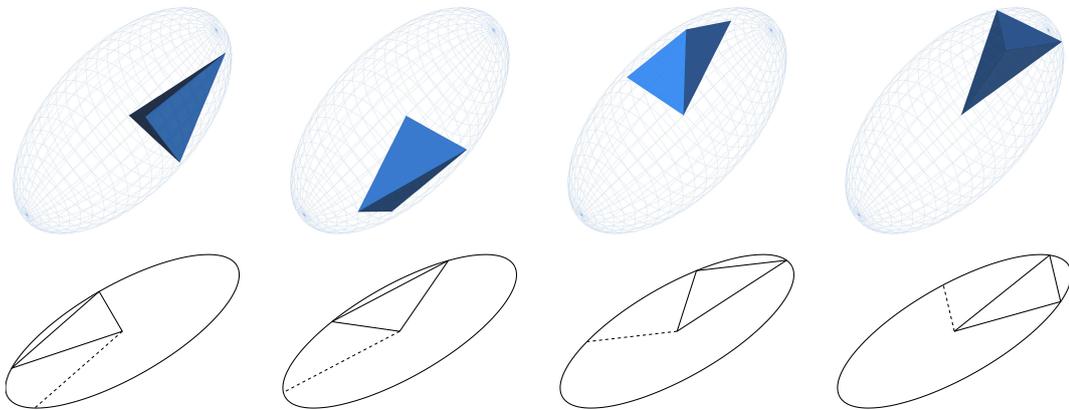
À partir du cas isotrope, on déduit le cas général en utilisant la bijection  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ . Les éléments de la classe de  $\mathcal{M}$  sont donnés en fonction de ceux de la classe de  $I_3$  par  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}K$ , où  $K \in \mathcal{K}$ . La Figure 1.6 illustre les différents éléments unités d'une métrique dans le plan et dans l'espace.

Réciproquement, étant donné un élément  $K = (\mathbf{e}_i)_{i=1..n(n+1)/2}$  tel que  $|K|_{I_n} \neq 0$ , montrons qu'il existe une unique métrique  $\mathcal{M}$  telle que  $K$  soit unité dans  $\mathcal{M}$ . Il suffit de résoudre le système linéaire suivant :

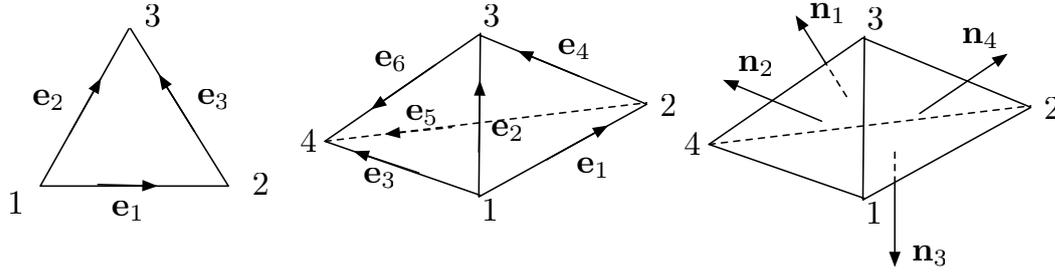
$$(S) \begin{cases} \ell_{\mathcal{M}}^2(\mathbf{e}_1) = 1 \\ \vdots \\ \ell_{\mathcal{M}}^2(\mathbf{e}_{n(n+1)/2}) = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le déterminant de  $(S)$  est égal au volume  $|K|_{I_n} \neq 0$ , il possède donc une unique solution.

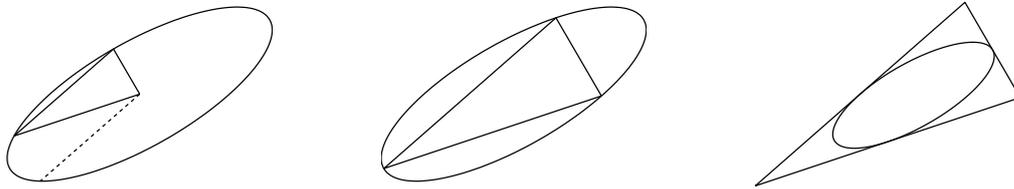
REMARQUE 1.5 Étant donné un élément  $K$ , il existe un unique ellipsoïde (resp. une ellipse) centré au centre de gravité de  $K$  et de volume minimal contenant  $K$ . Cet ellipsoïde de John [19] est proportionnel à  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$  lorsque  $K$  est unité dans  $\mathcal{M}$ . Le même théorème s'applique lorsqu'on s'intéresse à un ellipsoïde de volume maximal inclus, cette fois-ci, dans l'élément  $K$ . Par exemple, en deux dimensions si  $K$  est unité dans  $\mathcal{M}$ , l'ellipse de volume minimal contenant  $K$  est la boule unité de  $3\mathcal{M}$  et l'ellipse de volume maximal incluse est donnée par la boule unité de  $12\mathcal{M}$ . La Figure 1.7 illustre ces trois cas. Cette remarque indique également que certaines propriétés d'optimalité en terme de volume sont induites par le seul fait que l'élément considéré n'ait que des arêtes de longueur un dans la métrique.



**Figure 1.6:** Exemples d'éléments unités pour une métrique en trois et deux dimensions. Dans le cas 2D, l'arête en pointillée est la translatée de l'arête qui n'est pas issue du centre de l'ellipse. Cela permet de vérifier visuellement que toutes les arêtes ont une longueur un dans la métrique.



**Figure 1.8:** Convention retenue pour la numérotation des arêtes et des faces. Cette règle de numérotation assure que  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  pour les triangles et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  pour les tétraèdres.



**Figure 1.7:** Représentation d'un élément unitaire  $K$  dans une métrique  $\mathcal{M}$ . De gauche à droite, boule unité de  $\mathcal{M}$ , boule unité de  $3\mathcal{M}$  et boule unité de  $12\mathcal{M}$ .

### 1.2.3 Invariants géométriques

On s'intéresse ici à donner une description précise de l'information portée par notre modèle continu d'élément, *i.e.*, la métrique, vis-à-vis de l'ensemble de ses éléments unitaires. Outre les informations de tailles et d'orientation que l'on retrouve dans les éléments unitaires, la métrique induit des contraintes plus fortes. En pratique, cela se traduit par un ensemble d'invariants géométriques qui caractérise la classe des éléments unitaires d'une métrique. Un exemple est le volume des éléments d'une même classe. On sait qu'ils ont tous le même volume euclidien donc le même volume dans  $\mathcal{M}$ . Inversement, on montre qu'il est également possible de définir la métrique en fonction des propriétés géométriques de n'importe lequel de ses éléments unitaires. Cette étude permet de connaître *a priori* l'information qui peut être factorisée par une métrique, *i.e.*, son information intrinsèque, mais également ses manquements.

On introduit en premier des invariants standards qui sont la simple transcription de certaines propriétés des simplexes réguliers. On s'attarde ensuite à décrire la métrique en fonction d'un représentant quelconque de sa classe d'éléments unitaires. Enfin, on caractérise les éléments unitaires en fonction de la métrique.

**Notations et conventions.** Soit  $K$  est un élément, un triangle en 2D et un tétraèdre en 3D. On note  $|K|$  l'aire du triangle ou le volume du tétraèdre,  $\mathbf{e}_i$  la  $i^{\text{ième}}$  arête de  $K$ ,  $\mathbf{n}_i$  la normale à la face opposée au  $i^{\text{ième}}$  sommet,  $F_i$  est la face correspondante à  $\mathbf{n}_i$ ,  $|F_i|$  est l'aire de la face  $i$ . Si  $\mathcal{M}$  est une métrique 3D, on note  $\mathcal{M}_{F_i}$  la métrique projetée dans le plan défini par la face  $F_i$ . Si la face courante  $F_i$  est définie par les arêtes  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  alors la métrique projetée  $\mathcal{M}_{F_i}$  est :

$$\mathcal{M}_F = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix},$$

où les coefficients sont donnés par :

$$a = {}^t \mathbf{u}_1 \mathcal{M} \mathbf{u}_1, \quad b = {}^t \mathbf{u}_2 \mathcal{M} \mathbf{u}_2, \quad c = {}^t \mathbf{u}_1 \mathcal{M} \mathbf{u}_2,$$

avec  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  la base orthonormée déduite de  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . On utilise également les conventions d'orientation et d'énumération définies par la Figure 1.8.

### Invariants standards

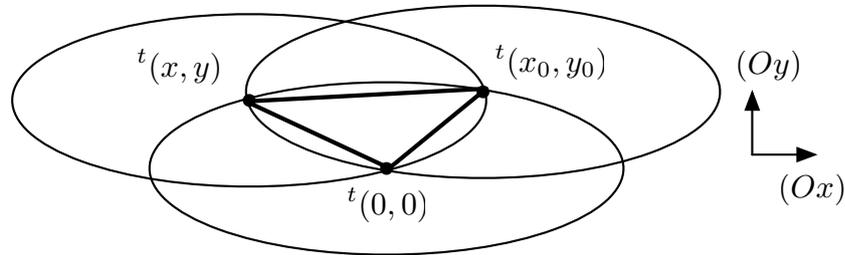
On rappelle deux invariants qui sont utiles pour la suite. Soient  $\mathcal{M}$  une métrique,  $K$  un élément unité dans  $\mathcal{M}$  et  $(\mathbf{e}_i)_i$  la liste d'arêtes de  $K$ , alors on a :

$$\forall (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad \begin{cases} {}^t \mathbf{e}_i \mathcal{M} \mathbf{e}_i = 1, \\ 2 {}^t \mathbf{e}_i \mathcal{M} \mathbf{e}_j + 1 = 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.7)$$

Le premier invariant vient de la définition d'un élément unité. Le second invariant fixe l'angle dans la métrique entre deux arêtes. Dans le cas d'un triangle régulier, l'angle entre deux arêtes est constant égal à soixante degrés. Le second invariant est donc l'analogue de cette propriété dans le cas d'une espace métrique. Étant donné un couple d'arêtes  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  d'un élément  $K$  unité, on considère **la troisième arête de la face** définie par ce couple, disons  $\mathbf{e}_k$ . Alors avec la convention d'orientation des arêtes, on a pour la face  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  :  $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ . En développant

$${}^t (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k) \mathcal{M} (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k) = 0,$$

et en utilisant le premier invariant, on obtient la seconde propriété.



**Figure 1.9:** Représentation géométrique de la construction de l'ensemble des triangles unités dans une métrique  $\mathcal{M}$ . À partir d'une arête initiale  $(x_0, y_0)$ , les autres arêtes sont trouvées par intersection des boules unités de  $\mathcal{M}$ . Seule une des deux solutions admissibles a été représentée sur le graphique.

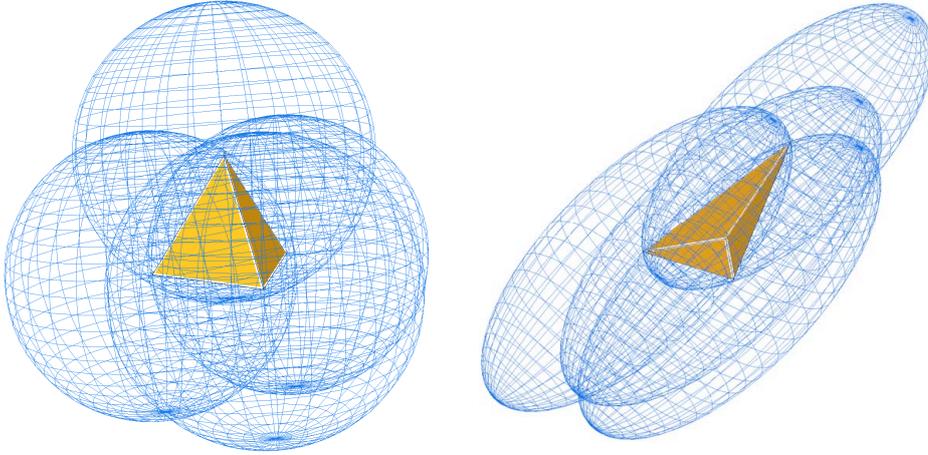
### Du modèle continu à l'élément discret

Dans cette partie, on donne des invariants sur le volume, l'aire des faces et la longueur des arêtes pour élément  $K$  unité dans une métrique  $\mathcal{M}$ .

**Proposition 1.2** *Étant donné un tenseur de métrique  $\mathcal{M}$ , alors quelque soit le triangle unité  $K$  dans  $\mathcal{M}$  défini par sa liste d'arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,3}$ , on a :*

- si  $|K|$  est l'aire euclidienne de  $K$  :

$$|K| = \frac{\sqrt{3}}{4} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$



**Figure 1.10:** Représentation géométrique dans l'espace de la construction de l'ensemble des tétraèdres unités dans la métrique  $I_3$  à gauche et une métrique anisotrope  $\mathcal{M}$  à droite.

- pour toute matrice symétrique  $H$  :

$$\sum_{i=1}^3 {}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i = \frac{3}{2} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}).$$

La preuve, donnée en Annexe 1.A, repose sur la construction explicite d'un élément unité vis-à-vis d'une métrique. À partir d'une arête initiale, les autres arêtes de longueur un sont déduites par intersection de la boule unité comme illustré sur la Figure 1.9. Un calcul direct analytique est alors possible.

**Proposition 1.3** *Étant donné un tenseur de métrique  $\mathcal{M}$ , alors quelque soit le tétraèdre unité  $K$  dans  $\mathcal{M}$  défini par sa liste d'arêtes  $[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6]$ , on a :*

- si  $|K|$  est le volume euclidien de  $K$  :

$$|K| = \frac{\sqrt{2}}{12} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$

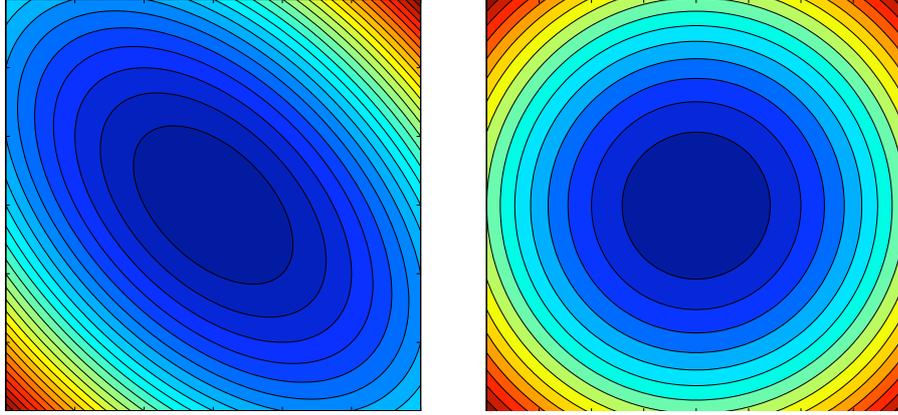
- pour toute matrice symétrique  $H$  :

$$\sum_{i=1}^6 {}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i = 2 \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$

- si  $(\mathbf{n}_i)_{i=1\dots 4}$  dénote les normales sortantes aux faces de  $K$  telle que  $\|\mathbf{n}_i\|_2 = |F_i|$  :

$$\sum_{i=1}^4 {}^t \mathbf{n}_i H \mathbf{n}_i = \frac{\text{trace}(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})}{\det(\mathcal{M})}.$$

La preuve en trois dimensions, donnée en Annexe 1.A, repose sur quelques considérations géométriques [24]. On montre et on utilise les résultats préliminaires suivants :



**Figure 1.11:** Iso-valeurs d'une forme quadratique  $H$  définie positive à gauche, vues dans l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^2, I_2)$ . À droite, iso-valeurs de la même forme quadratique vues dans un espace métrique euclidien  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$ .

- (i) Pour un tétraèdre régulier  $K_0$ , quelque soit la droite  $(D)$  passant par un des sommets de  $K_0$  alors la somme des longueurs au carré des arêtes  $\mathbf{e}_i$  projetées sur  $(D)$  est constante.
- (ii) Pour un tétraèdre régulier  $K_0$ , quelque soit la droite  $(D)$  passant par un des sommets de  $K_0$  alors la somme des normes au carré des vecteurs  $\mathbf{n}_i$  normaux aux faces projetées sur  $(D)$  est constante.

Le cas général d'une métrique  $\mathcal{M}$  est déduit en utilisant la transformation  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ .

Ces invariants sont les plus utiles car ils exhibent l'action d'une métrique  $\mathcal{M}$  sur une matrice symétrique  $H$  quelconque. Par exemple, si on se donne une matrice  $H$  qui correspond à la métrique d'une forme quadratique  $f$  quelconque :

$$f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x} H \mathbf{x},$$

alors la matrice  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$  correspond à une nouvelle fonction quadratique vu dans l'espace déformé par la métrique. En effet, si on considère le changement de coordonnées  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}$ , on définit une nouvelle forme quadratique  $\tilde{f}$  :

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = {}^t\mathbf{x} H \mathbf{x} = {}^t(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{x}}) H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{x}} = {}^t\tilde{\mathbf{x}} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{x}}.$$

Les iso-valeurs de  $\tilde{f}$  sont différentes de celles de  $f$ . Il est donc possible de contrôler (modifier) la carte des iso-valeurs en modifiant le choix de la métrique  $\mathcal{M}$ . Au Chapitre 2, on verra que si  $\mathcal{M}$  est choisie telle que les valeurs propres de  $\tilde{f}$  sont dans l'ensemble  $\{-1, 0, 1\}$  alors la carte d'iso-valeurs devient isotrope dans l'espace déformé par  $\mathcal{M}$ . On remarque également que l'opérateur  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$  ne modifie pas le caractère elliptique, hyperbolique ou parabolique de  $f$  car le signe de  $\det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}})$  est identique au signe de  $\det(H)$ . Ce contrôle en utilisant la métrique pour modifier la perception des fonctions quadratiques est illustré Figure 1.11.

**REMARQUE 1.6** Les faces d'un tétraèdre unité ne sont pas des triangles unités pour la métrique  $\mathcal{M}$  dans laquelle le tétraèdre est unité. Autrement dit,  ${}^t\mathbf{n}_i \mathcal{M} \mathbf{n}_i$  n'est pas d'aire unité. Cependant, chaque face est unité dans la métrique projetée dans le plan de la face. Par exemple, si  $\mathcal{M}_{F_4}$  est la métrique projetée sur  $\text{vec}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  alors  $\|\mathbf{n}_4\|_2^2 \det(\mathcal{M}_{F_4})$  est constant en utilisant les invariants 2D. De la même manière, la somme des longueurs des trois arêtes des faces

frontières n'est pas constante dans la métrique 3D. Par exemple, si on utilise les notations définies par la Figure 1.8, pour la face  $F_4$ , on a :

$$\|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_2\|_2^2 + \|\mathbf{e}_4\|_2^2 = \frac{3}{2}\text{trace}(\mathcal{M}_{F_4}^{-1}),$$

mais aucune relation ne peut être exhibée si on considère la métrique  $\mathcal{M}$  à la place de  $\mathcal{M}_{F_4}$ .

Le périmètre est également une quantité non conservée dans la métrique.

### De l'élément discret au modèle continu

Dans cette partie, on caractérise l'élément continu  $\mathcal{M}$  en fonction d'un élément discret  $K$  unité quelconque. On montre par un calcul direct ou en utilisant les Propositions 1.2 et 1.3 qu'on peut à partir des données géométriques d'un élément unité retrouver les valeurs propres de  $\mathcal{M}$ . On utilise pour cela les relations coefficients racines d'un polynôme. On a deux relations en deux dimensions et trois relations en trois dimensions.

**Proposition 1.4** *Le tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  s'exprime seulement en fonction des longueurs euclidiennes des arêtes d'un élément unité  $K$  (quelconque). En particulier, la trace, le déterminant et les valeurs propres de la métrique s'expriment comme des fonctions des longueurs des arêtes de  $K$  :*

$$\begin{aligned}\text{trace}(\mathcal{M}) &= \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_2\|_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|_2^2}{2 \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2} \\ \det(\mathcal{M}) &= \frac{3}{4 \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2}.\end{aligned}$$

La preuve complète est donnée en Annexe 1.A de ce chapitre. L'idée principale consiste à exprimer la matrice de la métrique dans une base orthonormée déduite des arêtes de l'élément  $K$  considéré. Cette expression est ensuite simplifiée en utilisant les invariants (1.7). L'intérêt de la preuve est de donner une forme explicite de la métrique, voir l'expression (1.14) en Annexe 1.A, dans une base qui est propre à l'élément  $K$ .

**Proposition 1.5** *En trois dimensions, on a :*

$$\begin{aligned}\text{trace}(\mathcal{M}) &= \frac{1}{2 \|\mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)\|_2^2} \sum_{i=1}^4 |F_i|^2, \\ \text{trace}(\mathcal{M}^{-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{e}_i\|_2^2, \\ \det(\mathcal{M}) &= \frac{1}{2 \|\mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)\|_2^2}.\end{aligned}$$

La preuve consiste d'abord à montrer que la Proposition 1.4 peut s'appliquer sur chaque face de  $F_i$  de  $K$  en considérant la métrique  $\mathcal{M}_{F_i}$ . L'idée est ensuite similaire au cas de la dimension deux. On exprime d'abord la métrique (2D) dans une base définie par  $F_i$  de l'élément  $K$ . Cette base est ensuite complétée à l'espace tout entier en considérant une arête non incluse dans  $F_i$ .

EXEMPLE 1.5 (APPLICATIONS PRATIQUES DE CES FORMULES)

La première application consiste à estimer la métrique de surface d'un maillage surfacique. L'algorithme consiste à écrire la matrice de la métrique dans une base orthonormée définie par

la face (le triangle courant) en utilisant (1.14). Cette métrique 2D est ensuite diagonalisée :

$$\mathcal{M}_{2D} = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} {}^t(\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2).$$

Les vecteurs propres 2D sont ensuite réécrits en trois dimensions. Par abus de notation, on garde les notations  $\mathbf{r}_i$ , la métrique finale de surface pour la face  $F$  est :

$$\mathcal{M}_F = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_{max}^2} \end{pmatrix} {}^t(\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2),$$

où  $h_{max}$  est un paramètre à définir. La métrique obtenue aux éléments peut ensuite être projetée aux nœuds du maillage en appliquant (1.5).

La deuxième application concerne le calcul d'une densité de surface à partir d'une métrique de volume. En toutes dimensions, la densité est simplement  $\sqrt{\det(\mathcal{M})}$  comme on le verra plus loin. Ce calcul nécessite donc d'intersecter la métrique de volume avec le plan défini par la face courante  $F$  afin de pouvoir estimer la densité de surface. Le calcul de la densité de surface se simplifie donc en :

$$\mathcal{C}_S(\mathcal{M}) = \int_S \sqrt{\det(\mathcal{M}_F)} \, ds.$$

#### 1.2.4 Modélisation continue d'un maillage

Dans cette section, on présente la modélisation continue d'un maillage. On démontre le lien entre cette modélisation et les maillages discrets à l'aide de paramètres locaux et globaux tels que l'orientation ou la densité. Ces paramètres permettent de définir des séquences de maillages continus emboîtés. Enfin, on montre qu'un maillage continu définit une classe d'équivalence de maillages discrets.

**Définition 1.7** *Un maillage continu  $\mathcal{M}(\cdot)$  défini sur  $\Omega$  est un espace métrique riemannien  $(\mathbf{a}, \mathcal{M}(\mathbf{a}))_{\mathbf{a} \in \Omega}$ .*

Le maillage continu est une fonction qui dépend localement de son orientation définie par la matrice de rotation  $\mathcal{R}(\cdot)$  et de ses tailles  $h_i(\cdot)$ , données par  $\lambda_i^{-1/2}(\cdot)$ , le long de ses directions principales :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbf{a} \in \Omega \mapsto \mathcal{M}(\mathbf{a}) &= \mathcal{R}(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{a}) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix} {}^t\mathcal{R}(\mathbf{a}) \\ &= \mathcal{R}(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1^{-2}(\mathbf{a}) & & \\ & \ddots & \\ & & h_n^{-2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} {}^t\mathcal{R}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Une simple réécriture de  $\mathcal{M}(\cdot)$  permet de montrer certaines analogies avec un maillage discret.

**Proposition 1.6** *Un maillage continu  $\mathcal{M}(\cdot)$  est une fonction composée de paramètres locaux :*

- une densité  $d$  :

$$d = \left( \prod_{k=1}^n h_k \right)^{-1} = \left( \prod_{k=1}^n \lambda_k \right)^{\frac{1}{2}},$$

- $n$  quotients d'anisotropie  $r_i$  :

$$r_i = h_i \left( \prod_{k=1}^n h_k \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Localement, la métrique  $\mathcal{M}(\mathbf{a})$  s'écrit :

$$\mathcal{M}(\mathbf{a}) = d^{\frac{2}{n}}(\mathbf{a}) \mathcal{R}(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} r_1^{-2}(\mathbf{a}) & & \\ & \ddots & \\ & & r_n^{-2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} {}^t \mathcal{R}(\mathbf{a}).$$

La complexité  $\mathcal{C}$  du maillage continu est définie en intégrant les contributions locales de densité  $d$  sur  $\Omega$ . Ce paramètre global est donc :

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} d(\mathbf{a}) \, d\mathbf{a} = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathcal{M}(\mathbf{a}))} \, d\mathbf{a}.$$

On décrit plus en détails chacun de ces paramètres.

La densité  $d$ , définie comme l'inverse du volume de la boule unité locale, est directement liée à la précision du maillage ou au niveau de détail. La Figure 1.12 illustre l'impact d'un accroissement de la densité sur un élément régulier. On remarque que l'orientation et les quotients d'anisotropie restent constants quelque soit la densité demandée. Cela permet de raffiner ou de déraffiner localement le maillage tout en gardant le même rapport d'aspect et la même orientation.

La matrice d'orientation  $\mathcal{R}(\mathbf{a})$  est formée des vecteurs propres associés à la matrice  $\mathcal{M}(\mathbf{a})$ . Elle permet de contrôler localement l'orientation des éléments du maillage.

Les quotients d'anisotropie sont l'extension en  $n$  dimensions des ratios d'anisotropie du plan. En 2D, on considère le rapport des tailles locales  $h_1$  et  $h_2$  dans les directions principales  $\mathbf{v}_1$  and  $\mathbf{v}_2$  respectivement. Cependant, il n'est pas trivial d'étendre cette définition au 3D car il faut privilégier deux directions parmi les trois disponibles pour former les ratios :

$$\frac{h_1}{h_2}, \frac{h_1}{h_3} \text{ ou } \frac{h_2}{h_3}.$$

Dans le premier ratio, la taille  $h_3$  est ignorée et dans le second la taille  $h_2$ , etc. Afin d'éviter ces inhomogénéités, on généralise l'écriture des ratios d'anisotropie 2D :

$$\frac{h_1}{h_2} = \left( \frac{h_1^2}{h_1 h_2} \right).$$

L'avantage de cette définition est de donner une interprétation des ratios non plus en terme de rapport de distances mais en terme de rapport d'aires. Afin de définir un quotient d'anisotropie

homogène à un rapport de distances, on prend la racine carrée. On propose donc la définition de quotient d'anisotropie suivante :

$$r = \left( \frac{h_1^2}{h_1 h_2} \right)^{1/2}.$$

En suivant le même raisonnement qu'en 2D, le  $i$ -ème quotient d'anisotropie en  $n$ D est défini par :

$$r_i = h_i \left( \prod_{k=1}^n h_k \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

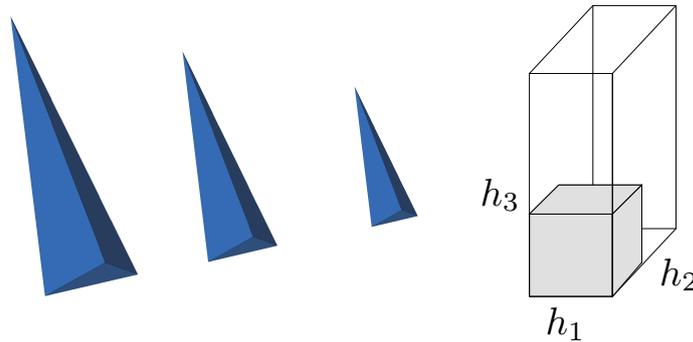
En trois dimensions, les quotients d'anisotropie ont une interprétation simple en termes de rapport de volumes, comme illustré sur la Figure 1.12.

La complexité  $\mathcal{C}$  représente la taille du maillage continu. Il s'agit en fait de l'analogie du nombre de sommets d'un maillage discret. Dans le cadre des estimateurs d'erreur, ce paramètre est utilisé comme un contrôle. Il est ajusté pour obtenir globalement le niveau de précision désiré. Ce paramètre global est la version continue et l'extension aux maillages anisotropes non structurés du paramètre de taille de maille  $h$  utilisé classiquement pour les analyses d'erreur en éléments finis.

REMARQUE 1.7 On remarque que  $\prod_{i=1}^n r_i = 1$ . L'ensemble des inconnues suffisantes pour définir complètement un maillage continu est donc

$$(\mathcal{R}, d, r_1, \dots, r_{n-1}) \text{ ou bien } (\mathcal{R}, h_1, \dots, h_n).$$

L'avantage du premier ensemble d'inconnues est de découpler d'une part des informations d'anisotropie qui sont contenues dans  $\mathcal{R}$  et les quotients d'anisotropie, et d'autre part une information de précision ou de mise à l'échelle contenue dans la densité  $d$ .



**Figure 1.12:** À gauche, différents éléments unitaires pour des métriques dont seulement la densité diffère. L'orientation et les quotients d'anisotropie sont conservés, seul le niveau de détail ou la précision est modifié. À droite, interprétation géométrique des quotients d'anisotropie en trois dimensions en terme de rapport de volumes.

### Maillage unité

On a démontré dans la Proposition 1.1 que pour tout élément continu, il existe une classe non-vide d'éléments discrets qui sont tous unités dans cette métrique. On cherche à préciser un résultat similaire pour un maillage dans son ensemble. Existe-t'il, pour un maillage continu  $\mathcal{M}(\cdot)$ , un maillage unité et réciproquement ?

La première contrainte est la compatibilité de la métrique avec le domaine  $\Omega$ . Si le maillage continu est incompatible avec le domaine alors il n'existe pas de maillage unité dans  $\mathcal{M}(\cdot)$ . Par exemple, en une dimension, si on considère la métrique constante  $I_1$  et le domaine  $[0, \frac{1}{2}]$ , il est facile de voir qu'il n'existe pas de solution. Le même problème se pose pour la frontière du domaine  $\Omega$ . Pour éviter ce problème, on suppose que  $\Omega$  est égal à  $\mathbb{R}^n$ .

On considère dans un premier temps le problème plus simple de l'existence d'un maillage unité pour  $\mathbb{R}^n$  vis-à-vis de la métrique identité. Ce problème est équivalent à trouver un motif composé seulement d'éléments unités pavant l'espace. Dans  $\mathbb{R}^2$ , on sait que le triangle équilatéral, Figure 1.15, pave le plan. De plus, quelque soit l'orientation du triangle équilatéral initial, la transformation par l'application  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$  donne un unique triangle unité qui permet également de paver le plan. Par contre, il est bien connu que le tétraèdre équilatéral ne pave pas l'espace. Par conséquent, l'existence d'un maillage discret 3D pour un maillage continu constant n'est pas assurée. La notion de maillage unité ne peut pas être la seule extension du cas des éléments unités. Il est donc nécessaire de donner une définition plus faible à un maillage unitaire afin de pouvoir assurer l'existence.

**Définition 1.8** *Un maillage est unité pour un maillage continu  $\mathcal{M}(\cdot)$  si tous ses éléments sont quasi-unités pour  $\mathcal{M}$ .*

Il reste à proposer un sens à **quasi-unité**. Notre étude doit être valable dans le cadre général des mailleurs adaptatifs. En ce sens, une étude théorique sur le pavage de l'espace doit être compatible avec certaines contraintes techniques et algorithmiques nécessairement présentes dans tout mailleur adaptatif. Ces considérations et contraintes vont nous guider dans la définition pratique d'un élément quasi-unité.

*Une contrainte technique.* On schématise un mailleur adaptatif. À partir d'un maillage  $\mathcal{H}$  et d'un champ de métriques  $(\mathcal{M}_i)_{i=1\dots N}$  défini aux sommets de  $\mathcal{H}$ , on cherche à générer un maillage unité dans  $\mathcal{M}$ , où  $\mathcal{M}$  est l'extension du champ discret au domaine tout entier en utilisant (1.5). L'algorithme de génération peut se décomposer sous la forme suivante si l'on décide de couper les arêtes :

1. Construire la liste des arêtes du maillage et les empiler dans la pile<sup>2</sup>  $p$ .
2. Tant que  $p$  est non vide, faire
3.     Dépiler l'arête courante  $\mathbf{e}$
4.     Calculer la longueur  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e})$
5.     Si  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e})$  n'est pas unité :
6.         Couper ou fusionner l'arête  $\mathbf{e}$  et empiler dans  $p$  les nouvelles arêtes
7.     Fin Si
8. Fin tant que

---

2. Voir [14] pour plus de détails.

Une première question consiste à regarder si un tel algorithme a une chance de converger. En fonction du critère utilisé en 5., l'algorithme peut cycliser indéfiniment. En effet, si la comparaison de l'arête consiste seulement à observer si  $\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e})$  est supérieure ou inférieure à 1, on peut imaginer le cycle suivant :  $\mathbf{e}$  est trop grande, un point est inséré au milieu de  $\mathbf{e}$ , une des deux arêtes résultantes est analysée, elle est trop petite donc supprimée, l'arête initiale  $\mathbf{e}$  est re-crée par fusion, etc. Une solution proposée dans [14] est de considérer qu'une arête est unité si sa longueur est comprise entre  $[\frac{1}{\alpha}, \alpha]$  avec  $\alpha > 0$ . Considérer l'inverse de  $\alpha$  est nécessaire pour assurer un traitement similaire entre les arêtes dont les longueurs sont comprises entre  $[0, 1]$  et celles dont les longueurs appartiennent à  $[1, \infty]$ . Une arête de longueur 0.01 est 100 fois trop petite comme une arête de longueur 100 est 100 fois trop grande. Si de plus, on cherche un coefficient  $\alpha$  tel que  $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\alpha}$  pour la symétrie alors  $\alpha$  est égal à  $\sqrt{2}$ . Finalement, on propose une première définition d'élément quasi-unité dans  $\mathcal{M}$  :

**Définition 1.9** Un tétraèdre  $K$  donné par sa liste d'arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 6}$  est déclaré quasi-unité si :

$$\forall i \in [1, 6] \quad \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}_i) \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right]. \quad (1.8)$$

Cependant, nous ne savons pas si cette définition d'éléments quasi-unités garantit l'existence d'un maillage discret unité pour un maillage continu donné. On propose donc d'étudier cette question d'existence en s'inspirant du pavage de l'espace par des tétraèdres non réguliers.

*Tétraèdres non réguliers pavant l'espace.* L'étude des tétraèdres pavant l'espace [25] est une question géométrique assez ancienne, pour un historique voir [27]. Elle est généralement issue de problèmes de cristallographie. Ces travaux ont montré qu'il existe un ensemble de tétraèdres non réguliers qui permettent de paver l'espace : les tétraèdres de Sommerville [28] ou la famille des tétraèdres de Goldberg [17].

La première classe de tétraèdres repose sur des découpages particuliers d'un cube, Figure 1.13. On rappelle les coordonnées des sommets de ces tétraèdres sous la forme  $K = [A, B, C, D]$  avec  $A = [0, 0, 0]$  :

- tétraèdre de Sommerville 1 :

$$B = \left[ \frac{1}{2}, 0, 0 \right], C = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \text{ et } D = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

- tétraèdre de Sommerville 2 :

$$B = [1, 0, 0], C = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \text{ et } D = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

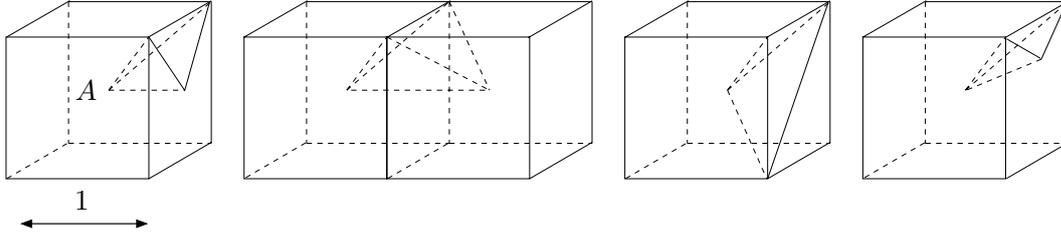
- tétraèdre de Sommerville 3 :

$$B = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right], C = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \text{ et } D = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

- tétraèdre de Sommerville 4 :

$$B = \left[ \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4} \right], C = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \text{ et } D = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

La seconde classe repose sur le découpage d'un prisme avec comme base un triangle équilatéral, Figure 1.14. Ses coordonnées dépendent d'un choix initial de deux longueurs  $a$  et  $e$ . On les spécifie ici pour  $a = 1/3$  et  $e = 1$  :



**Figure 1.13:** Tétrahédres de Sommerville 1, 2, 3, 4.

- tétraèdre de Goldberg :

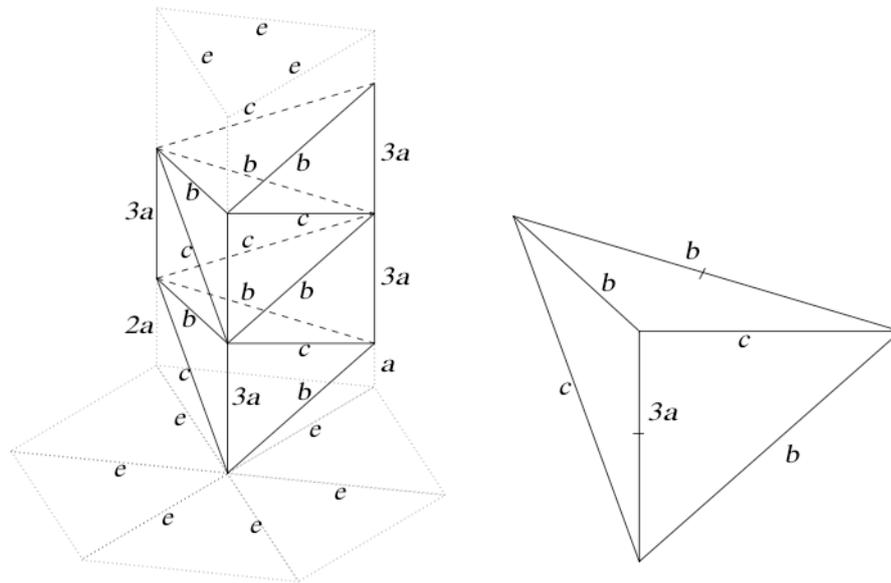
$$B = [0, 0, 1], C = \left[0, 1, \frac{1}{3}\right] \text{ et } D = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right].$$

Comme tous ces tétraèdres ne sont pas réguliers, on propose de comparer leurs tailles par rapport au tétraèdre de référence : le tétraèdre régulier unité. Tous les tétraèdres sont multipliés par une constante tel que le volume soit exactement  $\sqrt{2}/12$ . Les tailles de leurs arêtes sont données dans la Table 1.1. On constate que la contrainte technique (1.8) n'est vérifié que par les tétraèdres 1 et 2 de Sommerville et celui de Goldberg. Il existe donc bien des tétraèdres quasi-unités pour la métrique identité pavant l'espace. Dans la suite, on ne considère que le second tétraèdre de Sommerville car c'est celui dont la variation de taille par rapport à 1 est minimale.

On considère à présent une métrique constante uniforme anisotrope donnée par  $\mathcal{M}$ . On étudie le pavage de l'espace avec des éléments quasi-unités dans  $\mathcal{M}$ . À partir du motif formé par l'assemblage du second tétraèdre de Sommerville, on construit une boule d'éléments autour d'un point qu'on transforme ensuite dans la métrique par l'application  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ . On remarque que la non-uniformité du tétraèdre entraîne nécessairement la création de plusieurs tétraèdres différents, Figure 1.17. Cependant, ils ont tous le même volume et les mêmes longueurs d'arêtes dans la métrique  $\mathcal{M}$ . En 2D, cela s'exprime par un pavage par des triangles qui dépend de l'orientation du triangle initial, cf. Figure 1.15. Cependant, contrairement au cas 3D, un unique triangle anisotrope est suffisant pour paver la plan à partir d'un motif formé par la boule des triangles autour d'un point. En d'autres termes, le pavage de l'espace par un seul tétraèdre dans la métrique  $I_3$  est possible, mais un ensemble de tétraèdres est nécessaire pour paver l'espace de manière anisotrope.

Une autre solution est de considérer plusieurs tétraèdres (si possible 2) qui pavent l'espace en formant des formes régulières. On considère le cube de côté 1, que l'on découpe en cinq tétraèdres. Alors, quatre des tétraèdres sont le tétraèdre à angle droit dont trois arêtes sont de longueur un et trois arêtes de longueur  $\sqrt{2}$ ; le dernier tétraèdre au centre est le tétraèdre régulier de côté  $\sqrt{2}$ , cf Figure 1.16. Comme le cube pave l'espace, il est possible avec seulement ces deux types de tétraèdres de paver l'espace. De plus, comme toutes les longueurs des arêtes sont comprises entre 1 et  $\sqrt{2}$ , cf. Table 1.3, alors ces tétraèdres sont quasi-unités dans  $I_3$  au sens de la Définition 1.8.

*Contrôle du volume.* La contrainte plus faible sur la longueur des arêtes (1.8) peut malheureusement conduire à la création d'éléments quasi-unités mais de volume tendant vers zéro. Par exemple, dans l'espace  $(\mathbb{R}^3, I_3)$ , on considère le tétraèdre dont toutes les arêtes sont de



**Figure 1.14:** Famille de tétraèdre de Goldberg. Elle est paramétrée par la donnée de longueurs  $a$  et  $e$ , avec  $b^2 = a^2 + e^2$  et  $c^2 = 4a^2 + e^2$ . À gauche, l'assemblage des tétraèdres remplit un prisme dont la base est un triangle équilatéral de côté  $e$ .

Tétraèdre	Facteur	Longueurs des arêtes						Qualité
Sommerville 1	$\sqrt{2}$	0.70	1.22	1.22	1.0	1.0	1.41	0.800
Sommerville 2	$2^{\frac{1}{6}}$	1.12	0.970	0.970	0.970	0.970	1.12	<b>0.954</b>
Sommerville 3	$2^{\frac{1}{6}}$	0.970	0.970	0.970	1.12	<b>1.59</b>	1.12	0.763
Sommerville 4	$12^{-\frac{1}{3}} 2^{\frac{3}{2}}$	<b>0.691</b>	1.07	1.07	1.12	1.12	1.23	0.886
Goldberg	$3^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{6}}$	0.932	0.990	1.12	1.12	0.990	0.990	0.950

**Table 1.2:** Tétraèdres pavant l'espace. On donne les facteurs de normalisation des tétraèdres pour les rendre de volume unité  $\sqrt{2}/12$ , les longueurs des arêtes et les qualités  $Q_{I_3}$ .

Tétraèdre	Longueurs des arêtes						Qualité
Régulier	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
Rectangle	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0.84

**Table 1.3:** Ensemble de deux tétraèdres dont l'association forme un cube de côté 1 : longueurs des arêtes et qualité  $Q_{\mathcal{M}}$ .

longueur  $\sqrt{2}$ . Ce tétraèdre est quasi-unité dans  $I_3$ . Cependant, lorsqu'on projette orthogonalement un de ses sommets sur la face opposée, on obtient un tétraèdre quasi-unité de volume nul. En effet, trois arêtes ont une longueur égale à  $\sqrt{2}$  et les trois autres ont une longueur égale à  $\sqrt{6}/3 \approx 0.816 \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$ . En conclusion, le contrôle de la longueur des arêtes n'est plus suffisant, il faut aussi contrôler le volume de l'élément pour relaxer la notion d'unité.

En pratique, ce contrôle est assuré par la prescription d'une fonction qualité. On choisit la fonction qualité suivante :

$$Q_{\mathcal{M}} = \frac{36}{3^{\frac{1}{3}}} \frac{|K|_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3}}}{\sum_{i=1}^6 \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}_i)^2} \in [0, 1].$$

Pour des éléments parfaitement unités, la fonction qualité est constante égale à 1. Pour des tétraèdres de volume nul, elle vaut 0. Les qualités des tétraèdres pavant l'espace sont données dans les Tables 1.2 et 1.3.

La qualité  $Q_{\mathcal{M}}$  quantifie seulement l'écart à la forme de l'élément régulier. En aucun cas, la forme dans l'espace physique des éléments est contrôlée. En effet, on a vu qu'il existait un ensemble d'éléments unités dans  $\mathcal{M}$ . Tous ces éléments vérifient  $Q_{\mathcal{M}} = 1$ . D'autres fonctions qualités sont donc nécessaires si on souhaite les distinguer.

On en déduit que la génération d'un maillage adapté est contrôlée à la fois par les longueurs des arêtes et le calcul d'une fonction qualité. Le calcul des longueurs et des volumes est, en pratique, approché en utilisant les formules d'approximation données dans les exemples 1.3 et 1.4. Cela donne la nouvelle définition utilisée en pratique par le mailleur pour vérifier qu'un élément est quasi-unité :

**Définition 1.10 (Cas pratique)**  $K$  est quasi-unité, i.e., admissible pour  $\mathcal{M}$ , si :

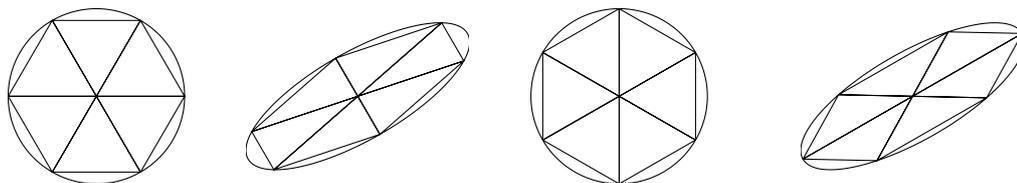
- $\forall i \in [1, 6] \quad \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}_i) \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right],$
- $Q_{\mathcal{M}}(K) \in [\alpha, 1],$  avec  $\alpha > 0.$

Dans notre étude,  $\alpha = 0.8$  est acceptable car on peut générer les tétraèdres de Sommerville 1, 2, le tétraèdre de Goldberg ainsi que les tétraèdres utilisés pour découper un cube. En pratique, lors de la génération d'un maillage adapté à une métrique, le mailleur donne en sortie un histogramme des tailles dans la métrique ainsi qu'un histogramme de la qualité des éléments dans la métrique. Ces informations permettent de parfaitement valider et quantifier l'écart à l'idéal continu.

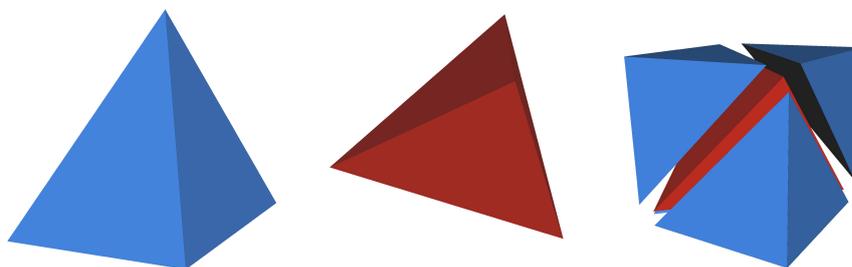
REMARQUE 1.8 Un point négligé dans la définition d'un élément quasi-unité est l'application envisagée. Dans le cas de maillages pour les éléments finis, le jacobien des éléments quasi-unités est un point à étudier car il influe sur le conditionnement total de la matrice. Dans le cas de maillages pour des solveurs volumes finis, l'étude de la forme des cellules volumes finis peut également avoir des impacts drastiques sur la précision et la performance des calculs.

### Maillages continus emboîtés

On regroupe ici les impacts théoriques et pratiques de la réécriture en maillage continu proposée dans la Définition (1.6).



**Figure 1.15:** Quelque soit la forme des éléments unités choisie, on peut paver le plan avec le motif formé par cet ensemble.



**Figure 1.16:** Pavage de l'espace avec deux formes de tétraèdre. Dans notre exemple, on a choisi le tétraèdre régulier de côté  $\sqrt{2}$  et celui ayant un angle droit, avec trois arêtes de longueur un et trois arêtes de longueur  $\sqrt{2}$ , dont l'association forme un cube de côté 1.

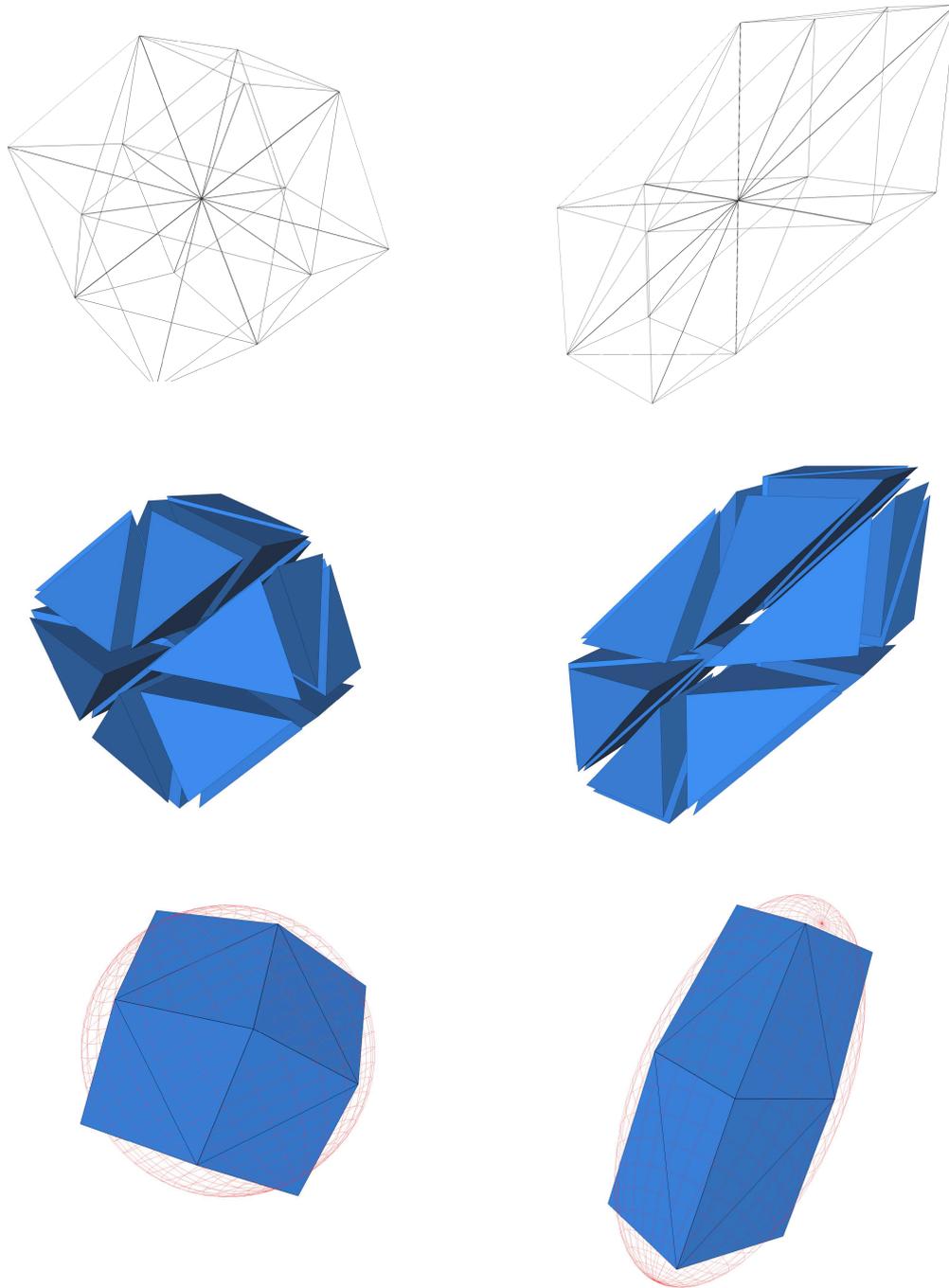
Étant donné un maillage continu de complexité  $N$ , il est possible de déterminer l'ensemble des maillages continus emboîtés, c'est-à-dire possédant la même orientation et les mêmes quotients d'anisotropie mais avec une complexité différente. Pour tout maillage continu  $\mathcal{M}$ , on peut déduire la classe des maillages unités à complexité  $N$  :

$$\mathcal{M}_N = \frac{N}{\int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathcal{M})}} \mathcal{M} = N\overline{\mathcal{M}}. \quad (1.9)$$

Quand  $N$  est égal à un, on définit la métrique de densité un,  $\overline{\mathcal{M}}$ , qu'on appelle métrique mère. La seule donnée de  $\overline{\mathcal{M}}$  est suffisante pour décrire la famille de maillages continus indexée par la complexité  $N$ . Cette propriété est très utile pour les analyses de convergence. En effet, il est possible à partir de  $\overline{\mathcal{M}}$  de définir une suite de maillages continus  $(\mathcal{M}_N)_{N=1\dots\infty}$ . On peut alors passer à la limite sur  $N$  pour effectuer des analyses asymptotiques de convergence pour des maillages non-structurés anisotropes. Cependant, par analogie avec la méthode des éléments finis, on peut également définir une suite de maillages continus  $\mathcal{M}_h$ . Dans le cas continu, l'index  $h$  est égal à

$$\max_{\mathcal{M}} (h_i)_{i=1\dots n}.$$

Le passage à la limite s'effectue alors pour  $h$  tendant vers zéro. La même mise à l'échelle par la formule (1.9) assure que lorsque  $N$  tend vers l'infini alors  $h$  tend vers zéro. On a également que  $N = O(h^n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le principal avantage des maillages continus emboîtés est de garantir que pour chaque  $N$  ou  $h$ , on conserve les mêmes quotients d'anisotropie et la même orientation. Un exemple de maillages continus emboîtés est donné Figure 1.18.



**Figure 1.17:** Boule isotrope et anisotrope d'un point en utilisant le second tétraèdre de Sommerville. On compare le cas d'une métrique isotrope à gauche à celui d'une métrique anisotrope. Si un unique tétraèdre pave l'espace dans le cas isotrope, ce n'est plus vrai dans le cas anisotrope. En bas, on visualise les erreurs sur la taille des longueurs des arêtes dans les différentes métriques.

On a également une analogie avec les classes d'équivalence d'éléments discrets pour les maillages quasi-unités. On dit que deux maillages discrets quasi-unités dans  $\mathcal{M}_N$ , où  $\mathcal{M}_N$  est le maillage issu de  $\overline{\mathcal{M}}$  avec une complexité  $N$ , sont équivalents si :

$$\mathcal{H}_1 \mathbf{R}_{\mathcal{M}} \mathcal{H}_2 \iff \begin{cases} \mathcal{H}_1 \text{ est unité dans } \mathcal{M}_N \\ \mathcal{H}_2 \text{ est unité dans } \mathcal{M}_N. \end{cases}$$

L'opérateur de projection  $\Pi \mathcal{M}_N = \Pi_N \overline{\mathcal{M}}$  permet d'obtenir tous les membres discrets de la classe d'équivalence du maillage continu  $\mathcal{M}_N$ . En pratique, un maillage unité est généré par un mailleur adaptatif. L'utilisation de différentes méthodes (Delaunay, frontal, ...) pour le maillage ou le remaillage donne lieu à des maillages différents au niveau de la topologie et du nombre de sommets. Cependant, pour de tels maillages, tous les éléments sont quasi-unités pour le même maillage continu. Ils possèdent des propriétés d'orientation, de densité et d'anisotropie équivalentes, cf Figure 1.18.

EXEMPLE 1.6 (MALLAGE CONTINU D'UN MALLAGE)

S'il est théoriquement difficile en trois dimensions de garantir l'existence d'un maillage pour un maillage continu donné, il est cependant plus aisé de trouver pour un maillage donné, un maillage continu le représentant ou du moins l'approchant. L'algorithme se décompose en deux étapes :

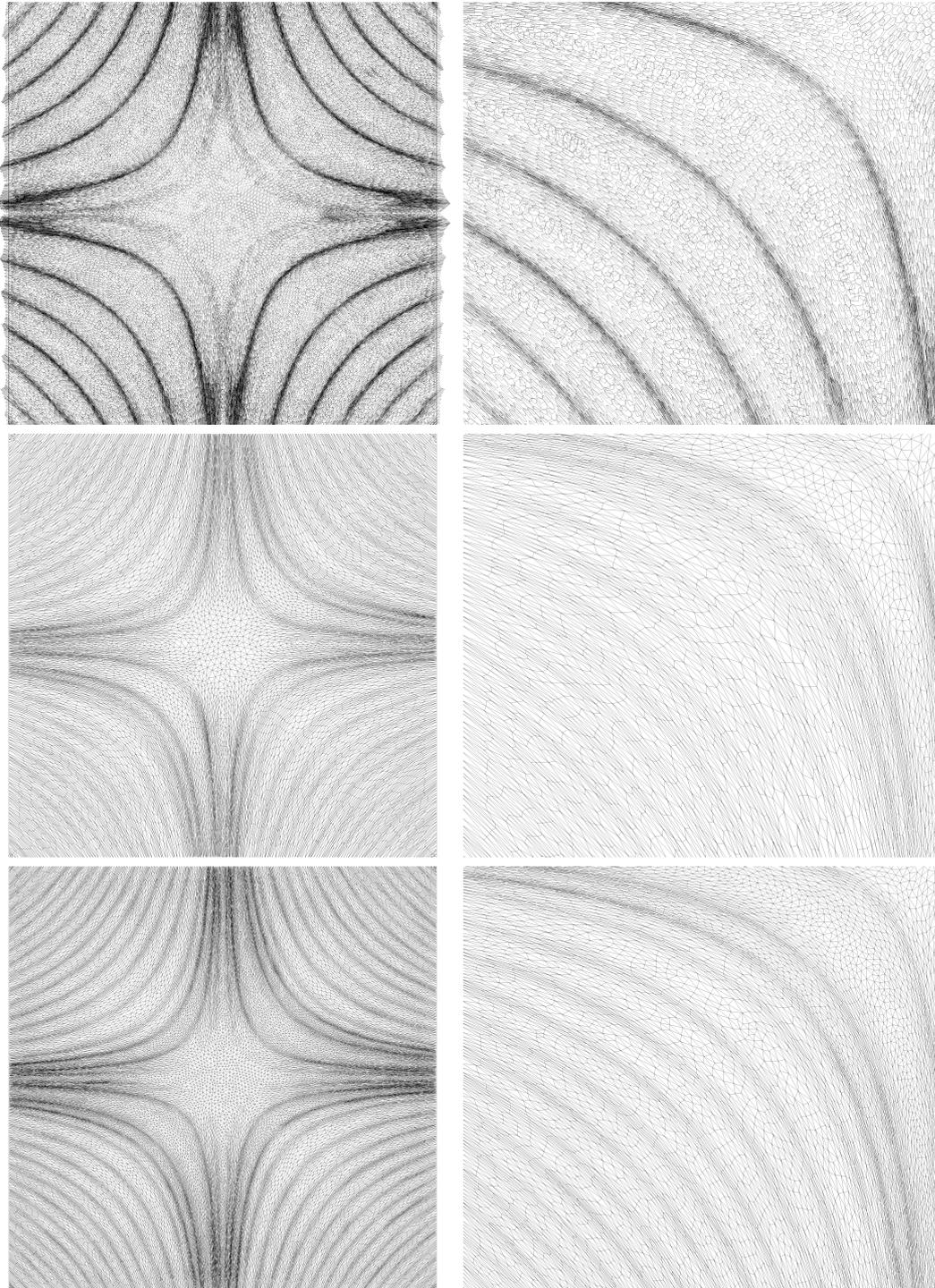
1. Pour chaque élément  $K$ , l'unique métrique  $\mathcal{M}_K$  représentant l'élément est calculée en résolvant le système linéaire donné par (1.6).
2. La métrique aux éléments est projetée aux sommets du maillage en faisant une moyenne pondérée par le volume des éléments, en utilisant (1.5) :

$$\mathcal{M}_P = \exp \left( \frac{\sum_{P \in K} |K|_{I_n} \ln(\mathcal{M}_K)}{\sum_{P \in K} |K|_{I_n}} \right).$$

Cette projection est en fait une projection  $\mathbf{L}^2$  dans l'espace des métriques log-euclidiennes. En pratique, la métrique d'un maillage est généralement utilisée pour définir un nouveau maillage, plus ou moins raffiné, qui est identique au maillage initial en terme de quotients d'anisotropie et de directions. Cela permet de préserver certaines zones pré-raffinées. Si à partir d'un maillage initial  $\mathcal{H}$ , on désire générer un maillage équivalent ou consistant à  $\mathcal{H}$  avec deux fois moins de sommets, il suffit alors de générer le maillage unité dans la métrique  $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{n}} \mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ . La constante  $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{n}}$  découle de la Relation (1.9).

REMARQUE 1.9 (COMPLEXITÉ ET NOMBRE DE SOMMETS D'UN MALLAGE UNITÉ) Une confusion possible consiste à considérer que la complexité  $\mathcal{C}$  d'une métrique  $\mathcal{M}$  est exactement égale au nombre de sommets du maillage unité généré. En pratique, des écarts très importants sont généralement observés entre ce que propose l'idéal continu et l'image discrète que propose le générateur de maillages. Plusieurs points expliquent cette différence.

- Si le maillage continu a de trop fortes variations de tailles, alors une gradation [6] préalable est (presque toujours) nécessaire afin de le rendre plus régulier vis-à-vis de sa représentation discrète. La gradation consiste à vérifier que le maillage continu est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$  comme naturellement introduit dans la définition d'un espace métrique riemannien.
- La frontière du domaine est incompatible avec le maillage continu : on peut alors soit reconstruire la métrique de surface et l'intersecter avec le maillage continu, soit adapter la surface.



**Figure 1.18:** Représentation graphique d'un maillage continu  $\mathcal{M}_1$ , en haut, et de deux maillages unités appartenant à  $\Pi_{1000}\mathcal{M}_1$ , au milieu, et  $\Pi_{2000}\mathcal{M}_1$  en bas. La colonne de droite est un zoom sur une partie du domaine. Pour chaque maillage unité, l'orientation et les quotients d'anisotropie sont conservés quelque soit le nombre de points utilisés.

- Le générateur de maillage interpole également la métrique aux nouveaux points insérés. Selon la méthode d'interpolation choisie, cette étape introduit également un biais dans la relation entre complexité et nombre de points.

Dans le cas où une suite de maillages  $(\mathcal{H}_N)_N$  est générée conformément à une suite de maillages continus emboîtés  $(\mathcal{M}_N)_N$  alors cette constante peut être estimée préalablement. Une correction est alors possible afin d'affiner le nombre de points désirés. En effet, si  $(\mathcal{M}_N)$  converge et que les paramètres pour la génération du maillage restent inchangés, alors il existe une constante  $k$ , telle que

$$\#\mathcal{H}_N = k\mathcal{C}(\mathcal{M}_N),$$

où  $\#\mathcal{H}_N$  dénote le nombre de points du maillage  $\mathcal{H}_N$ . Pour calibrer exactement la complexité de la métrique  $\mathcal{M}_N$  au nombre de sommets du maillage  $\mathcal{H}_N$ , il suffit de multiplier  $\mathcal{M}_N$  par  $k^{\frac{2}{n}}$ .

### 1.3 FORMALISME ET MAILLAGE CONTINU

L'utilisation du maillage continu consiste en pratique à formuler des problèmes sous une forme continue. Si on considère que le maillage continu  $\mathcal{M}$  permet de factoriser l'ensemble de la classe d'équivalence des maillages unités dans  $\mathcal{M}$  alors on peut utiliser  $\mathcal{M}$  à la place d'un maillage discret.

Dans cette section, on se contente d'illustrer formellement les principes d'utilisation du modèle continu. On considère successivement l'exemple de l'erreur d'interpolation puis de l'adaptation à une fonctionnelle coût.

#### Cas de l'erreur d'interpolation

On considère une fonction  $u$  définie sur un domaine  $\Omega$ . Soit  $\Pi_h u$  l'interpolé linéaire de Lagrange de  $u$  sur un maillage  $\mathcal{H}$  de  $\Omega_h$ . On cherche le maillage qui minimise l'erreur d'interpolation

$$\|u - \Pi_h u\|_H,$$

où  $\|\cdot\|_H$  est une norme ou semi-norme dans un espace fonctionnel  $H$ .

Une approche classique consiste à dériver des estimations d'erreur sur un élément  $K$  en utilisant la technique de l'élément de référence. Si  $\hat{K}$  est l'élément de référence alors les majorations anisotropes peuvent prendre la forme suivante [2] en 2D :

$$|u - \Pi_h u|_{W^{n,p}(K)} \leq C \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = l-m} h_{1,K}^{\alpha_1} h_{2,K}^{\alpha_2} \left| \frac{\partial^{l-m} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right|_{W^{m,p}(K)}, \quad (1.10)$$

où les tailles  $h_{i,K}$  sont dérivées de la transformation  $T_K : \hat{K} \mapsto K$ ,  $C$  une constante indépendante de  $K$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  des indices positifs.

Dans le cas du formalisme continu, on ne cherche pas à majorer l'erreur en fonction des données géométriques,  $h_{i,K}$ , d'un seul élément mais plutôt en fonction des propriétés de la métrique  $\mathcal{M}$  pour laquelle il est unité. Cela permet d'obtenir des majorations génériques en factorisant les informations géométriques des éléments grâce aux classes d'équivalence des éléments unités. Cela se traduit par des majorations valables pour tous les éléments unités dans la métrique :

$$\forall K \text{ unité dans } \mathcal{M}, \|u - \Pi_h u\|_{H(K)} \leq e(\mathcal{M}, u), \quad (1.11)$$

où  $e$  est une fonctionnelle qui lie la métrique à la fonction  $u$  et ses dérivées  $\partial u, \dots, \partial^k u$  selon l'ordre de l'approximation. On cherche à lier une erreur discrète à gauche à une représentation complètement continue à droite. Une simple réécriture de  $e$  sous la forme :

$$e(\mathcal{M}, u) = \|u - \pi_{\mathcal{M}}u\|_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}}$$

permet également de définir un interpolé linéaire continu  $\pi_{\mathcal{M}}u$  défini sur la boule unité de  $\mathcal{M}$  qui est alors vue comme un élément continu.

Les estimations du type (1.11) sont généralement moins précises que les estimations (1.10). Cependant, pour certaines classes de fonctions simples, elles peuvent être exactes. Le principal intérêt est de pouvoir minimiser globalement l'erreur indépendamment de toute technique de génération, d'adaptation ou d'optimisation de maillage. On s'abstrait donc de toutes les difficultés liées au caractère discret de l'estimation.

Ainsi, si on optimise l'erreur continue  $e$  vis-à-vis de  $\mathcal{M}$ , l'erreur discrète sera également minimisée. Le principal avantage est de disposer d'outils mathématiques sur l'espace des maillages continus comme l'optimisation ou la différentiation.

Le problème initial qui consiste à trouver un maillage discret optimal, est donc d'abord envisagé sous un angle continu. Formellement, on cherche le maillage continu optimal  $\mathcal{M}_{opt}$  :

$$\mathcal{M}_{opt} = \operatorname{Argmin}_{\mathcal{M}} F(\mathcal{M}) = \operatorname{Argmin}_{\mathcal{M}} \int_{\Omega} e(\mathcal{M}, u) \, d\Omega.$$

Ce problème d'optimisation peut se résoudre de deux façons :

- soit numériquement en utilisant l'approximation discrète de  $\mathcal{M}$ ,  $u$  et ses dérivées,
- soit de manière continue en utilisant le calcul des variations et en dérivant une solution analytique.

La première solution suppose que l'on doit disposer d'outils bien posés dans l'espace des métriques riemanniennes comme la différentiation. Si tel est le cas, implémenter un algorithme de gradient nécessite de garantir dans chaque étape de descente que la métrique solution soit toujours une matrice définie positive. La méthode de descente suivant une direction admissible  $\mathbf{d}$  s'écrit pour la fonction  $F$  :

$$\mathcal{M}_{i+1} = \mathcal{M}_i - \alpha \mathbf{d}, \text{ avec } \mathbf{d} \text{ tel que } F(\mathcal{M}_{i+1}) < F(\mathcal{M}_i).$$

Imposer la contrainte  $\mathcal{M}_{i+1} > 0$  dans l'algorithme est équivalent à garantir que tous les déterminants principaux sont strictement positifs, *i.e.*,

$$\mathcal{M} > 0 \iff \forall i \in [1 \dots n], \det(\mathcal{M}(1 \dots i, 1 \dots i)) > 0.$$

Les technologies pour imposer de telles contraintes non-linéaires (comme le *Sequential Quadratic Programming* ou le *Semi-Definite Programming*) sont bien plus complexes que les méthodes d'optimisation pour des problèmes sans contraintes. Une solution pour éviter cette difficulté est de travailler avec les métriques log-euclidiennes, déjà introduites pour l'interpolation. Le principe consiste à effectuer dans l'espace du logarithme des métriques les opérations euclidiennes classiques, puis de revenir dans l'espace initial en prenant l'exponentielle.

La seconde solution demande que la fonction  $F$  soit assez simple pour envisager la résolution analytique. Cela sera le cas pour nos études dans les Chapitres 2 et 4.

Quelque soit la méthode de résolution retenue, lorsqu'on minimise  $e$ , c'est implicitement l'erreur sur le maillage discret qui est également minimisée. En revanche, il est beaucoup plus difficile de déduire de l'Estimation (1.10) des informations d'optimisation discrète de maillages comme la bascule d'arêtes ou le bougé de points. Par ailleurs, on peut disposer de preuves de convergence globale dans le cas continu. Cela assure l'optimalité globale du maillage discret unité généré à partir du maillage continu optimal alors qu'une suite d'optimisations locales du maillage correspond à des méthodes de type plus grande pente. Par conséquent, elles ne convergent en général que vers des optima locaux.

Le modèle continu consiste donc simplement à changer de point de vue. L'estimation ne se déduit pas de la transformation entre un élément de référence et l'élément courant, mais plutôt de la transformation entre la métrique et les éléments discrets unités. Là encore, le comportement des éléments est factorisé par la métrique. Cela peut s'apparenter à la définition d'un élément de référence continu. Si l'élément de référence est le triangle équilatéral uniforme alors l'élément de référence continu sera le cercle de rayon 1.

La principale restriction est le choix des représentants offert par la métrique. En effet, en fonction de la norme  $H$ , tous les représentants d'une même classe ne sont pas égaux pour cette norme. Par exemple, lorsque la forme des éléments joue un rôle significatif dans l'estimation de l'erreur, il peut être nécessaire de différencier les éléments d'une même classe. Cela se traduit par l'étude de la déviation entre l'estimation continu et l'élément discret :

$$\delta(K) e(\mathcal{M}, u),$$

où  $\delta(K)$  particularise le comportement de chaque élément. On peut donc toujours minimiser l'erreur vis-à-vis du seul modèle continu  $e$ . Dans ce cas, les représentations discrètes ne seront pas toutes équivalentes mais seulement sous-optimales. Le choix du représentant optimal dans la classe d'équivalence sera guidé par la fonction  $\delta(K)$  dans le générateur de maillages. Le cas de l'erreur d'interpolation  $\mathbf{H}^1$  est un exemple de cette situation.

*Cas et utilisation pratique.* On s'intéresse dans cette thèse à l'interpolation linéaire en norme  $\mathbf{L}^p$ . Ce choix de norme est justifié au Chapitre 3 par les applications envisagées en mécanique des fluides. À partir de la Relation (1.11), le Chapitre 2 donne un sens précis et rigoureux aux relations suivantes :

$$\text{pour } K \text{ unité dans } \mathcal{M}, \|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^p(K)} \longleftrightarrow e(u, \mathcal{M}) \longleftrightarrow \|u - \pi_{\mathcal{M}} u\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{B}_{\mathcal{M}})}.$$

Cela signifie que chacune des trois représentations peut être inter-changée avec n'importe quelle autre. Pour certains cas, le symbole  $\longleftrightarrow$  sera une équivalence alors que pour des cas plus compliqués, on aura seulement une majoration. On remarque également qu'à une unique représentation continue correspond de multiples représentations discrètes. Par extension au volume tout entier, on propose des estimations globales sous la forme :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega_h)} \leq \left( \int_{\Omega} (u - \pi_{\mathcal{M}} u)^p \, d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}.$$

### Cas d'une fonctionnelle coût

Contrairement au contexte précédent, la solution  $w$  est ici seulement connue à travers une approximation numérique  $w_h$ . On sait seulement que  $w$  est solution d'une équation aux

dérivées partielles. Dans notre exemple, on considère une équation de conservation sous la forme :

$$\operatorname{div}(F(w)) = 0, \quad (1.12)$$

où  $F$  est une fonction régulière donnée. De manière équivalente, on écrit cette équation sous la forme d'une équation d'état pour la solution :

$$\Psi(w) = 0.$$

On cherche à mesurer une grandeur scalaire d'intérêt  $j$  sur une portion de surface  $\gamma$  du domaine de calcul :

$$j(w) = \int_{\gamma} p^2(w) \, d\gamma,$$

où  $p$  est une fonction connue. Le but est de trouver le maillage qui minimise à complexité donnée l'erreur d'approximation :

$$j(w) - j(w_h).$$

La démarche consiste à prouver une estimation *a priori*, puis de la transcrire en terme de maillage continu afin de dériver le maillage continu optimal.

On suppose que l'on ne commet pas d'erreur d'évaluation de  $j$  sur le maillage courant. Si on linéarise la fonctionnelle  $j$  par rapport à l'état  $w$ , il vient :

$$j(w) \approx j(w_h) + (g, w - w_h) + R,$$

où  $R$  est un reste infiniment petit, de l'ordre de  $O(|w - w_h|^2)$ , et

$$g = \frac{\partial j(w)}{\partial w} = 2 \int_{\gamma} \frac{\partial p}{\partial w}(w) \, d\gamma.$$

L'erreur d'approximation devient donc :

$$j(w) - j(w_h) \approx (g, w - w_h),$$

en négligeant le reste. Ensuite, on décompose l'erreur d'approximation (1) en deux termes : l'erreur d'interpolation (2) et l'erreur implicite (3) :

$$\underbrace{(g, w - w_h)}_{(1)} = \underbrace{(g, w - \Pi_h w)}_{(2)} + \underbrace{(g, \Pi_h w - w_h)}_{(3)}.$$

Le Chapitre 4 propose l'estimation discrète suivante en négligeant les termes de bord :

$$(g, w - w_h) \leq \int_{\Omega} |\nabla p_h| |F(w) - \Pi_h F(w)| \, d\Omega, \quad (1.13)$$

où  $p_h$  est l'état adjoint discret solution du système :

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial w}(w_h, \mathcal{M}) \right]^* p_h = g,$$

et  $\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial w}(w_h, \mathcal{M}) \right]^*$  l'opérateur adjoint de l'Équation (1.12) linéarisée. On remarque que l'Estimation (1.13) ne fait intervenir que des erreurs d'interpolation. On peut donc transcrire cette

équation sur un maillage continu  $\mathcal{M}$  quelconque. Il suffit pour cela de généraliser les données du paragraphe précédent à des erreurs d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^1$  pondérées par une fonction poids. Le poids est donné par le gradient de l'état adjoint  $\nabla P_h$ . On a donc la fonctionnelle suivante à minimiser :

$$(g, w - \Pi_h w) \leq \int_{\Omega} |\nabla p| |F(w) - \pi_{\mathcal{M}} F(w)| \, d\Omega.$$

L'optimisation analytique de ce modèle est également possible et présentée au Chapitre 4.

## CONCLUSION

Le modèle de maillage continu d'un domaine est directement lié à la notion d'**espace métrique riemannien**. Ce modèle est défini par une **fonction**  $\mathcal{M}(\cdot)$  qui associe à chacun des points du domaine de calcul  $\Omega$  un tenseur de métrique. Une réécriture de cette fonction permet d'établir l'analogie entre métriques riemanniennes et maillages. En tout point du domaine  $\Omega$ , l'espace tangent à un espace métrique riemannien est difféomorphe à un espace métrique euclidien. Dans ce plan tangent, on sait que la métrique est constante. On y définit le modèle continu d'un élément.

Le cas  $\mathcal{M}(\cdot)$  constante permet de modéliser des éléments discrets en utilisant la notion d'**élément unité**, Définition (1.6). Les relations des Propositions 1.2 et 1.3 lient complètement le modèle continu et l'ensemble des représentants discrets. Réciproquement, toutes les informations de la métrique sont contenues dans n'importe lequel des représentants discrets aux travers des relations des Propositions 1.4 et 1.5 : propriétés spectrales et représentation matricielle.

Le cas global permet de définir les **classes d'équivalence** de maillages discrets en généralisant la notion d'élément unité au maillage tout entier, Définition (1.8). La définition de suites de maillages continus emboîtés est possible à travers la **complexité**. Cela permet des études de convergence sur des maillages anisotropes en généralisant le paramètre classique  $h$  au cas continu anisotrope. En pratique, un représentant effectif de la classe d'équivalence est fourni par un mailleur adaptatif dont le calcul des distances s'effectue dans l'espace métrique riemannien défini par le maillage continu. Il vise à générer dans cet espace un maillage discret **unité**. Ce calcul est donné par la Relation (1.2). Généralement, une fonction qualité évalue l'écart entre l'idéal continu et sa représentation discrète.

La différentiation, le calcul tensoriel et l'interpolation ne sont pas des opérations définies de manière univoques directement sur l'espace des maillages discrets. L'avantage de ce modèle est que ces outils mathématiques sont bien posés dans l'espace des maillages continus. Il est alors possible de faire entrer le maillage dans une analyse numérique. Le cas de l'erreur d'interpolation est traité au Chapitre 2 et celui de l'adaptation à des fonctionnelles scalaires au Chapitre 4.

## 1.A PREUVES COMPLÈTES SUR LES INVARIANTS GÉOMÉTRIQUES

Cette section regroupe, dans un but exhaustif, l'ensemble des preuves qui n'ont pas été données au fil du texte. La principale section concernée est celle des invariants géométriques. On rappelle dans un premier temps l'énoncé des propositions, puis on distingue les preuves en deux dimensions et celles en trois dimensions. On rappelle que  $\mathcal{M}$  est un tenseur de métrique, on note  $K$  un élément unité dans  $\mathcal{M}$ . Les invariants classiques (1.7) sont le point de départ commun des démonstrations suivantes.

### Caractérisation des éléments unités en fonction de la métrique

On démontre dans cette section des invariants sur les éléments unités qui s'avéreront plus utiles en pratique que la simple longueur unité des arêtes. En 2D, une preuve analytique est proposée alors qu'en 3D, une preuve géométrique est préférée.

**Proposition 1.2** (2D) Étant donné un tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  et quelque soit le triangle unité  $K$  dans  $\mathcal{M}$  défini par sa liste d'arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,3}$ , on a :

- si  $|K|$  est l'aire euclidienne de  $K$  :

$$|K| = \frac{\sqrt{3}}{4} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$

- si  $H$  une matrice symétrique quelconque alors :

$$\sum_{i=1}^3 \|\mathbf{e}_i\|_2^2 = \frac{3}{2} \text{trace}(\mathcal{M}^{-1}) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^3 {}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i = -\frac{3}{4} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$

*Preuve.* L'invariance du volume se prouve par une intégration directe. En effet, étant donné un triangle  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$ , il existe un unique triangle régulier unité dans  $I_2$  tel que  $K = \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} K_0$ . Alors le volume de  $K$  est donné par :

$$|K| = \int_K 1 \, d\mathbf{x} = \int_{K_0} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \, d\mathbf{x} = \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) |K_0|,$$

où  $|K_0| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , cf. Section 1.2.1.

Pour les invariants suivants, on propose une preuve constructive qui donne l'algorithme permettant de dessiner un élément unité à partir d'une arête initiale donnée. On se donne une métrique  $\mathcal{M}$ , on note  $h_1$  et  $h_2$  les tailles suivant ses axes principaux que l'on prendra alignés avec les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . On suppose également que le premier point du triangle est à l'origine. On définit la première arête  $\mathbf{e}_1 = (x_0, y_0)$ . Elle doit vérifier  ${}^t \mathbf{e}_1 \mathcal{M} \mathbf{e}_1 = 1$ , soit :

$$\left(\frac{x_0}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{h_2}\right)^2 - 1 = 0. \quad (E_{x_0})$$

Les deux dernières arêtes  $\mathbf{e}_2 = (x, y)$  et  $\mathbf{e}_3 = (x - x_0, y - y_0)$  doivent également avoir une longueur unité :

$$(S) \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{h_2}\right)^2 - 1 = 0, & (E_x) \\ \left(\frac{x - x_0}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{h_2}\right)^2 - 1 = 0. & (E_{x-x_0}) \end{cases}$$

Géométriquement, la solution de  $(S)$  est l'intersection des trois boules unités de  $\mathcal{M}$  (ellipses), chacune étant centrée en un des points du triangle. Ce principe est illustré sur la Figure 1.9. En déplaçant le point courant  $(x_0, y_0)$  sur sa boule unité, on parcourt l'ensemble des triangles unités de  $\mathcal{M}$ . Il suffit donc de prouver que les invariants sont vrais pour tout couple  $(x, y)$  vérifiant  $(S)$  et paramétré par le choix initial de  $(x_0, y_0)$ . On résout d'abord  $(S)$  afin de trouver la famille de solutions. La combinaison  $(E_{x_0}) - (E_x) - (E_{x-x_0})$  donne une équation linéaire en  $x$  :

$$1 - 2 \left( \frac{xx_0}{h_1^2} + \frac{yy_0}{h_2^2} \right) = 0.$$

On substitue les solutions

$$x = \pm \frac{h_1}{h_2} \sqrt{h_2^2 - y^2},$$

dans  $(E_{x-x_0})$ , on obtient alors une équation du second degré en  $y$ . La famille des solutions, paramétrée par le choix de l'arête initiale  $\mathbf{e}_1 = (x_0, y_0)$ , est donnée par :

$$\begin{cases} y = \frac{y_0 \pm \sqrt{3(h_2^2 - y_0^2)}}{2}, \\ x = \frac{x_0 \pm \sqrt{3(h_1^2 - x_0^2)}}{2}. \end{cases}$$

On peut alors calculer  $\|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_2\|_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|_2^2$  suivant les deux axes principaux :

$$\begin{cases} x_0^2 + x^2 + (x - x_0)^2 = \frac{3}{2} h_1^2, \\ y_0^2 + y^2 + (y - y_0)^2 = \frac{3}{2} h_2^2. \end{cases}$$

De même, en développant  ${}^t(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0$  suivant les axes principaux, on obtient l'invariant sur les termes croisés.

**Proposition 1.3** (3D) Étant donné un tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  alors, pour tout tétraèdre  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$  défini par sa liste d'arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1..6}$ , on a les invariants suivants :

- si  $|K|$  est le volume euclidien de  $K$  :

$$|K| = \frac{\sqrt{2}}{12} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$

- si  $H$  une matrice symétrique quelconque :

$$\sum_{i=1}^6 \|\mathbf{e}_i\|_2^2 = 2 \operatorname{trace}(\mathcal{M}^{-1}) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^6 {}^t\mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i = 2 \operatorname{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$

- si  $(\mathbf{n}_i)_{i=1..4}$  dénote les normales sortantes aux faces de  $K$  telle que  $\|\mathbf{n}_i\|_2 = |F_i|$  :

$$\sum_{i=1}^4 {}^t\mathbf{n}_i \mathbf{n}_i = \frac{\operatorname{trace}(\mathcal{M})}{\det(\mathcal{M})}, \quad \sum_{i=1}^4 {}^t\mathbf{n}_i H \mathbf{n}_i = \frac{\operatorname{trace}(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})}{\det(\mathcal{M})}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} {}^t\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j = -\frac{\operatorname{trace}(\mathcal{M})}{2 \det(\mathcal{M})} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} {}^t\mathbf{n}_i H \mathbf{n}_j = -\frac{\operatorname{trace}(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})}{2 \det(\mathcal{M})}.$$

*Preuve.* On propose une preuve géométrique de la Proposition 1.3 car une preuve analytique n'est plus envisageable. En effet, contrairement au cas 2D, on serait amené à résoudre des équations de degré trois. La démonstration consiste à prouver les invariants sur la somme des longueurs des arêtes et la somme des aires des faces dans le cas d'un tétraèdre régulier puis d'utiliser une affinité, donnée par  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ , pour en déduire le cas général. Dans chaque cas, on

se ramène à une égalité trigonométrique en une dimension. On considère donc le tétraèdre régulier  $K_0 = [O, A, B, C]$  dont les sommets sont donnés par :

$$O = [0, 0, 0], A = [1, 0, 0], B = \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right] \text{ et } C = \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right].$$

Il est à noter que la preuve est indépendante de ce choix. On montre le résultat suivant : quelle que soit la droite  $(D)$  passant par un des sommets de  $K_0$ , la somme des carrés des longueurs des arêtes projetées sur  $(D)$  est constante. Sans perte de généralité, on suppose que la droite passe par le point  $O$ . Si la droite  $(D)$  est donnée par son vecteur directeur  $\mathbf{n} = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), \sin(u))$  avec  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  en coordonnées sphériques. On a pour les arêtes de  $K_0$  :

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{n} = \cos(u) \cos(v), \\ b &= \overrightarrow{OB} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \cos(u) \cos(v) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(u) \sin(v), \\ c &= \overrightarrow{OC} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \cos(u) \cos(v) + \frac{\sqrt{3}}{6} \cos(u) \sin(v) + \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(u). \end{aligned}$$

Par un calcul trigonométrique direct, on montre que la somme des longueurs projetées au carré est égale à 2. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma &= a^2 + b^2 + c^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2, \\ \Sigma &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 2ab - 2ac - 2bc. \end{aligned}$$

Après développement et factorisation, on obtient :

$$\Sigma = 2 \cos(u)^2 \cos(v)^2 + 2 \cos(u)^2 \sin(v)^2 + 2 \sin(u)^2 = 2.$$

On déduit le cas général en utilisant la droite alignée avec une direction principale  $\mathbf{u}_j$  de la métrique  $\mathcal{M}$  et l'affinité correspondante de coefficient  $h_j$  (donnée par l'application  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ ). La Figure 1.19 donne un exemple de construction géométrique en deux dimensions suivant une direction principale. Les coefficients de projection  $(a, b, c)$  pour cette direction principale sont donc tous multipliés par  $h_j$ . Par conséquent, les longueurs au carré des segments projetés sont donc aussi multipliés par  $h_j^2$ , d'où :

$$\sum_{i=1}^6 |\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_j|^2 = h_j^2 \Sigma = 2 h_j^2.$$

On conclut en utilisant chaque direction principale de  $\mathcal{M}$ . Il vient en projetant sur la base propre de  $\mathcal{M}$  :

$$\sum_{i=1}^6 \|\mathbf{e}_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^6 |\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_j|^2 = 2 (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) = 2 \text{trace}(\mathcal{M}^{-1}).$$

Le cas des faces est traité de manière similaire en considérant la somme des longueurs au carré des normales aux faces projetées sur  $(D)$ . On calcule donc les normales :

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= AC \wedge AB = -^t\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right], \\ \mathbf{n}_2 &= OB \wedge OC = -^t\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right], \\ \mathbf{n}_3 &= OC \wedge OA = -^t\left[0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right], \\ \mathbf{n}_4 &= OB \wedge OA = -^t\left[0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right].\end{aligned}$$

On considère ensuite les projections de ces normales sur la droite  $(D)$  quelconque que l'on suppose passer par le point  $O$  et de vecteur directeur  $\mathbf{n}$  :

$$\begin{aligned}d &= \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(u) \cos(v) + \frac{1}{\sqrt{6}} \cos(u) \sin(v) + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin(u), \\ e &= \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(u) \cos(v) - \frac{1}{\sqrt{6}} \cos(u) \sin(v) - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin(u), \\ f &= \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos(u) \sin(v) + \frac{\sqrt{3}}{6} \sin(u), \\ g &= \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(u).\end{aligned}$$

Par un calcul trigonométrique direct, on montre que la somme des longueurs au carré des normales projetées est constante, égale à 1 :

$$\begin{aligned}\Sigma &= d^2 + e^2 + f^2 + g^2 \\ \Sigma &= \cos(u)^2 \cos(v)^2 + \cos(u)^2 \sin(v)^2 + \sin(u)^2, \\ \Sigma &= 1.\end{aligned}$$

Pour le cas général, on considère  $K = [O, A', B', C']$  l'image de  $K_0$  par  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ . Dans le calcul des normales aux faces, l'utilisation du produit vectoriel fait apparaître des termes en facteur. Par exemple, pour la normale  $\mathbf{n}'_1$  de  $K$  on a :

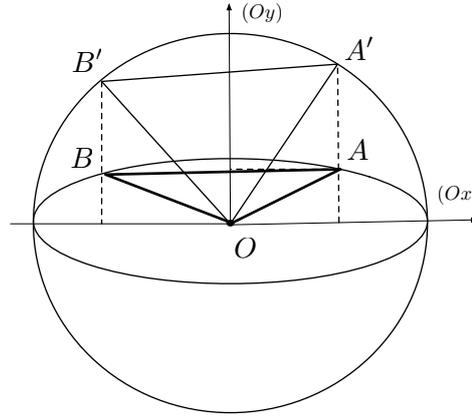
$$\mathbf{n}'_1 = A'C' \wedge A'B' = \begin{pmatrix} h_2 h_3 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \\ h_1 h_3 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ h_1 h_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}_3 \end{pmatrix},$$

où  $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$  sont les vecteurs propres de  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$  et  $[h_1, h_2, h_3]$  ses valeurs propres. Pour conclure dans le cas général d'une métrique  $\mathcal{M}$ , on utilise les droites alignées avec les directions principales  $\mathbf{u}_j$ . Il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{u}_1 &= h_2 h_3 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_1, \\ \mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{u}_2 &= h_1 h_3 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_2, \\ \mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{u}_3 &= h_1 h_2 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_3.\end{aligned}$$

La somme des aires au carré pour la métrique est donnée dans la base propre  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  et  $\mathbf{u}_3$  de la métrique  $\mathcal{M}$  :

$$\Sigma' = \sum_{i=1}^4 \|\mathbf{n}'_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^4 |\mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{u}_j|^2$$



**Figure 1.19:** Autre représentation géométrique de l'application  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$ .  $A'$  (respectivement  $B'$ ) est l'image de  $A$  (respectivement  $B$ ) par cette application.  $OAB$  est unité dans  $\mathcal{M}$  et  $OA'B'$  est un triangle régulier unité (volontairement grossi à  $h_x^{-2} I_3$  pour plus de clarté). Si  $h_y$  est la taille dans la direction  $y$  de la métrique :  $OA \cdot \mathbf{y} = h_y OA' \cdot \mathbf{y}$ ,  $OB \cdot \mathbf{y} = h_y OB' \cdot \mathbf{y}$ . À partir des propriétés d'invariance sur les longueurs sur le triangle régulier, on en déduit des propriétés d'invariance sur la métrique en utilisant les relations ci-dessus.

En développant l'expression précédente, on a :

$$\Sigma' = (h_2 h_3)^2 \sum_{i=1}^4 |\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_1|^2 + (h_1 h_3)^2 \sum_{i=1}^4 |\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_2|^2 + (h_1 h_2)^2 \sum_{i=1}^4 |\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_3|^2.$$

Finalement, en utilisant l'invariant pour le triangle régulier, il vient :

$$\Sigma' = (h_2 h_3)^2 + (h_1 h_3)^2 + (h_1 h_2)^2 = \frac{\text{trace}(\mathcal{M})}{\det(\mathcal{M})}.$$

Dans le cas des termes croisés  $\sum_{1 \leq i, j \leq 4} {}^t \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j$ , il suffit de remarquer que  $\sum_{i=1}^4 \mathbf{n}_i = 0$ . En développant  ${}^t(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4)(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4)$ , il vient :

$$\frac{\text{trace}(\mathcal{M})}{\det(\mathcal{M})} + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq 4} {}^t \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j = 0.$$

On prouve les invariances de  $\sum_{i=1}^4 {}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i$  et  $\sum_{i=1}^4 {}^t \mathbf{n}_i H \mathbf{n}_i$  seulement dans le cas où la matrice  $H$  est définie positive. Elle est donc inversible, en particulier  $H^{-\frac{1}{2}}$  et  $H^{\frac{1}{2}}$  existent et sont symétriques. On montre alors que si  $K$  est un élément unité dans  $\mathcal{M}$  alors  $H^{\frac{1}{2}} K$  est unité pour la métrique  $\tilde{\mathcal{M}}$  telle que  $\tilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}}$  : En effet, si on note  $\tilde{\mathbf{e}} = H^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}$ , où  $\mathbf{e}$  est une arête unité dans  $\mathcal{M}$  alors

$${}^t \tilde{\mathbf{e}} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{e}} = {}^t (H^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}} \mathbf{e} = 1.$$

On peut donc appliquer les invariants de la Proposition 1.3 sur la métrique  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$ . Le cas général se prouve par des arguments de densité du groupe des matrices inversibles dans l'espace vectoriel des matrices non inversibles. Si  $H$  est une matrice symétrique non positive et non définie alors on considère la matrice  $H + \epsilon I_3$ . On peut appliquer les invariants précédents sur cette matrice. Par passage à la limite sur  $\epsilon$  et par continuité de l'opérateur trace, les invariants de la Proposition 1.3 sont valables pour toute matrice symétrique.

### Caractérisation géométrique de la métrique en fonction de ses éléments unités

On démontre dans cette partie qu'il est possible de donner l'expression matricielle de la métrique  $\mathcal{M}$  en fonction de longueurs euclidiennes des arêtes d'un élément  $K$  quelconque unité dans  $\mathcal{M}$ . On rappelle les propositions qui expriment la trace ou le déterminant de  $\mathcal{M}$  en fonction d'un de ses représentants discrets. La preuve la plus simple consiste à utiliser les Propositions 1.2 et 1.3. Cependant, on a volontairement choisi :

- de donner l'expression matricielle de la matrice dans une base déduite des arêtes de l'élément  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$  en deux dimensions,
- de seulement montrer qu'en trois dimensions, l'expression matricielle de la métrique  $\mathcal{M}$  ne dépend que des longueurs euclidiennes des arêtes de  $K$ .

**Proposition 1.4** (2D) *Le tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  s'exprime seulement en fonction des longueurs euclidiennes des arêtes d'un élément unité  $K$  :*

$$\text{trace}(\mathcal{M}) = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_2\|_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|_2^2}{2\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2}$$

$$\det(\mathcal{M}) = \frac{3}{4\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2}.$$

*Preuve.* La preuve repose sur l'expression dans une base orthonormale bien choisie de la métrique  $\mathcal{M}$ . Un tel choix garantit une représentation matricielle symétrique de la métrique. Soit un élément  $K$  quelconque unité dans  $\mathcal{M}$ . À partir de la base formée par deux des arêtes de  $K$ , disons  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , on construit la base orthonormée  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  suivante par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|_2} \text{ et } \mathbf{u}_2 = \frac{[{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_2 - [{}^t\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_1}{\|[{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_2 - [{}^t\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_1\|_2}.$$

Dans la base  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , la formulation matricielle de  $\mathcal{M}$  devient :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix},$$

où les coefficients sont donnés par :

$$a = {}^t\mathbf{u}_1 \mathcal{M} \mathbf{u}_1, \quad b = {}^t\mathbf{u}_2 \mathcal{M} \mathbf{u}_2 \quad \text{et} \quad c = {}^t\mathbf{u}_1 \mathcal{M} \mathbf{u}_2.$$

Naturellement les coefficients précédents sont fonctions de  $\mathcal{M}$ . Le but est de les simplifier en utilisant seulement les invariants basiques introduits plus haut. On montre alors que  $a$ ,  $b$  et  $c$  dépendent seulement des longueurs euclidiennes des arêtes de  $K$ . Par un calcul direct en utilisant l'égalité suivante :

$$\|[{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_2 - [{}^t\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]\mathbf{e}_1\|_2^2 = \|\mathbf{e}_1\|_2^2 (\|\mathbf{e}_1\|_2^2 \|\mathbf{e}_2\|_2^2 - [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2),$$

et le fait que les arêtes de  $K$  sont de longueurs unités dans  $\mathcal{M}$ , on arrive aux expressions ci-dessous :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|_2^2}, \\ b = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^4 + [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2 - 2\|\mathbf{e}_1\|_2^2[{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]{}^t\mathbf{e}_1\mathcal{M}\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1\|_2^2(\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_2\|_2^2 - [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2)}, \\ c = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2{}^t\mathbf{e}_1\mathcal{M}\mathbf{e}_2 - [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]}{\|\mathbf{e}_1\|_2^2(\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_2\|_2^2 - [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

La simplification des termes croisés  ${}^t\mathbf{e}_i\mathcal{M}\mathbf{e}_j$  repose sur l'invariance des angles entre deux arêtes mesurés dans la métrique. On utilise l'égalité de Lagrange vraie pour tout couple de vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  non nuls :

$$\left(\frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{{}^t\mathbf{u}\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2}\right)^2,$$

ou de manière équivalente,

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2\|\mathbf{v}\|_2^2 - [{}^t\mathbf{u}\mathbf{v}]^2.$$

On considère désormais les vecteurs d'arêtes  $\mathbf{e}_i$  comme des vecteurs de l'espace afin de pouvoir utiliser le produit vectoriel. On obtient alors pour les coefficients  $(a, b, c)$  :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|_2^2}, \\ b = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^4 + [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2 - \|\mathbf{e}_1\|_2^2|{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|}{\|\mathbf{e}_1\|_2^2(\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_2\|_2^2 - [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2)} = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^4 + [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2 - \|\mathbf{e}_1\|_2^2{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2}, \\ c = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 - 2[{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]}{2\|\mathbf{e}_1\|_2^2(\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_2\|_2^2 - [{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 - 2[{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]}{2\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2}, \end{cases}$$

La simplification finale repose sur l'introduction de la dernière arête  $\mathbf{e}_3$  qui vérifie  $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ , cf. Figure 1.8. On a alors

$$\|\mathbf{e}_3\|_2^2 = \|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_2\|_2^2 - 2{}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2.$$

Finalement, en substituant les termes croisés  ${}^t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  par des différences de longueurs au carré, les coefficients sont donnés par :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|_2^2}, \\ b = \frac{3\|\mathbf{e}_1\|_2^4 + (\|\mathbf{e}_2\|_2^2 - \|\mathbf{e}_3\|_2^2)^2}{4\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2}, \\ c = \frac{\|\mathbf{e}_3\|_2^2 - \|\mathbf{e}_2\|_2^2}{2\|\mathbf{e}_1\|_2^2\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2}. \end{cases} \quad (1.14)$$

On peut donc évaluer la trace et le déterminant de  $\mathcal{M}$  :

$$\text{trace}(\mathcal{M}) = \text{trace}(\mathcal{M}_{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}) = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_2\|_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|_2^2}{2\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2}.$$

Pour le déterminant, il vient :

$$\det(\mathcal{M}) = \det(\mathcal{M}_{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}) = \frac{3}{4 \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2^2}.$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{M}$  sont les racines du polynôme de degré deux :

$$X^2 - \text{trace}(\mathcal{M})X + \det(\mathcal{M})$$

et s'expriment donc uniquement en fonction des longueurs au carré des arêtes de  $K$ .

**Proposition 1.5** (3D) *Le tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  s'exprime seulement en fonction des longueurs euclidiennes des arêtes d'un élément unité  $K$  :*

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathcal{M}) &= \frac{1}{2 \|\mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)\|_2^2} \sum_{i=1}^4 |F_i|^2, \\ \text{trace}(\mathcal{M}^{-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{e}_i\|_2^2, \\ \det(\mathcal{M}) &= \frac{1}{2 \|\mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)\|_2^2}. \end{aligned}$$

*Preuve.* Si la preuve précédente est écrite en deux dimensions, les calculs sont également valides pour une face d'un tétraèdre. En particulier, si on considère la face  $F_4 = \text{vec}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , la Proposition 1.4 s'applique sur la trace et le déterminant de la métrique projetée sur  $F_4$ . La preuve en trois dimensions consiste donc à compléter la représentation matricielle de  $\mathcal{M}$  à partir d'une des sous matrices projetée sur une face. La base initiale  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  est donc complétée en une base orthonormée  $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{vec}(\mathcal{U}) = \text{vec}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . L'expression de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{U}$  est donnée par :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ c & b & f \\ e & f & d \end{pmatrix},$$

avec

$$d = {}^t\mathbf{u}_3 \mathcal{M} \mathbf{u}_3, \quad e = {}^t\mathbf{u}_1 \mathcal{M} \mathbf{u}_3 \quad \text{et} \quad f = {}^t\mathbf{u}_2 \mathcal{M} \mathbf{u}_3.$$

On considère pour  $\mathbf{u}_3$  :

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2}.$$

Ce choix pour  $\mathbf{u}_3$  impose la simplification des termes de la forme  ${}^t(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \mathcal{M} \mathbf{e}_i$ . Cependant, il n'y a pas d'invariant concernant le produit mixte dans la métrique. Une solution possible est d'exprimer  $\mathbf{e}_3$  dans la base  $\mathcal{U}$  :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{u}_1 \mathbf{e}_3 &= \frac{{}^t\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|_2^2 - \|\mathbf{e}_5\|_2^2}{2 \|\mathbf{e}_1\|_2}, \quad {}^t\mathbf{u}_2 \mathbf{e}_3 = \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 [{}^t\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] - [{}^t\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] [{}^t\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3]}{\|\mathbf{e}_1\|_2 \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2} \quad \text{et} \\ {}^t\mathbf{u}_3 \mathbf{e}_3 &= \frac{{}^t(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2} = \frac{6 \text{Vol}(K)}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2}. \end{aligned}$$

$\text{Vol}(K)$  désigne le volume (euclidien) de l'élément considéré  $K$ . On obtient alors une expression de  $\mathbf{u}_3$  sans produit vectoriel dans la métrique :

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2}{6 \text{Vol}(K)} \left( \mathbf{e}_3 - \frac{[{}^t \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3]}{\|\mathbf{e}_1\|_2} \mathbf{u}_1 - \frac{\|\mathbf{e}_1\|_2^2 [{}^t \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] - [{}^t \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] [{}^t \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3]}{\|\mathbf{e}_1\|_2 \|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|_2} \mathbf{u}_2 \right).$$

Par conséquent, les calculs de la forme  $\mathbf{u}_3 \mathcal{M} \mathbf{u}_i$  pour  $i \in [1, 3]$  ne dépendront pas de  $\mathcal{M}$  car ils font intervenir seulement les deux types d'invariants (1.7). Afin que les coefficients de  $\mathcal{M}$  ne soient fonctions que de longueurs euclidiennes au carré, on remplace d'une part, les termes croisés par :

$$\begin{cases} 2 {}^t \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_2\|_2^2 - \|\mathbf{e}_4\|_2^2, \\ 2 {}^t \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \|\mathbf{e}_1\|_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|_2^2 - \|\mathbf{e}_5\|_2^2, \\ 2 {}^t \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \|\mathbf{e}_2\|_2^2 + \|\mathbf{e}_3\|_2^2 - \|\mathbf{e}_6\|_2^2. \end{cases}$$

D'autre part, le volume est remplacé par le déterminant de Cayley-Menger [4]. Ce dernier relie le volume d'un simplexe aux longueurs euclidiennes de ses arêtes :

$$288 \text{Vol}(K)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \|\mathbf{e}_1\|_2^2 & \|\mathbf{e}_2\|_2^2 & \|\mathbf{e}_3\|_2^2 \\ 1 & \|\mathbf{e}_1\|_2^2 & 0 & \|\mathbf{e}_4\|_2^2 & \|\mathbf{e}_5\|_2^2 \\ 1 & \|\mathbf{e}_2\|_2^2 & \|\mathbf{e}_4\|_2^2 & 0 & \|\mathbf{e}_6\|_2^2 \\ 1 & \|\mathbf{e}_3\|_2^2 & \|\mathbf{e}_5\|_2^2 & \|\mathbf{e}_6\|_2^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

À partir de l'expression du volume et des termes croisés, on peut affirmer que tous les coefficients  $\mathbf{u}_i \mathcal{M} \mathbf{u}_j$  de la matrice  $\mathcal{M}$  dans la base  $(\mathbf{u}_i)_{i=1\dots 3}$  s'expriment en fonction des longueurs euclidiennes  $\|\mathbf{e}_i\|_2^2$  des arêtes de  $K$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Alauzet and P. J. Frey. Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques. RR-4759, INRIA, 2003.
- [2] T. Apel. *Anisotropic finite elements : Local estimates and applications*. Book Series : Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Stuttgart, 1999.
- [3] V. Arsigny, P. Fillard, X. Pennec, and N. Ayache. Log-Euclidean metrics for fast and simple calculus on diffusion tensors. *Magnetic Resonance in Medicine*, 56(2) :411–421, August 2006.
- [4] M. Berger. *Geometry 1 & 2*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [5] H. Borouchaki, P. L. George, F. Hecht, P. Laug, and E. Saltel. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 1 : Algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25, 1997.
- [6] H. Borouchaki, F. Hecht, and P. J. Frey. Mesh gradation control. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 43(6) :1143–1165, 1998.
- [7] C. L. Bottasso. Anisotropic mesh adaption by metric-driven optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engrng*, 60 :597–639, 2004.
- [8] M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau. Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25 :475–491, 1997.
- [9] P. G. Ciarlet. *An Introduction to Differential Geometry, with Applications to Elasticity*. Springer, Dordrecht, 2005.

- [10] T. Coupez. Génération de maillages et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9 :403–423, 2000.
- [11] M. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [12] C. Dobrzynski and P. J. Frey. Anisotropic delaunay mesh adaptation for unsteady simulations. In *Proc. of 17th Int. Meshing Roundtable*, pages 177–194. Springer, 2008.
- [13] P. J. Frey. *Yams*, a fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure. RT-0252, INRIA, 2001.
- [14] P. J. Frey and P.-L. George. *Mesh generation. Application to finite elements*. Hermès Science, Paris, Oxford, 2000.
- [15] P.-L. George. Tet meshing : construction, optimization and adaptation. In *Proc. of 8th Meshing Roundtable*, South Lake Tao, CA, USA, 1999.
- [16] P.-L. George. *Gamhic3d*, a fully automatic adaptive mesh generation method in three dimensions. Technical Note, INRIA, 2001.
- [17] M. Goldberg. Three infinite families of tetrahedral space-fillers. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 16(3) :348–354, 1974.
- [18] F. Hecht. *BAMG* : bidimensional anisotropic mesh generator. Available from <http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/bang/eng.htm>, INRIA-Rocquencourt, France, 1998.
- [19] F. John. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In *Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday*, pages 187–204, New-York, 1948. Interscience Publishers.
- [20] W. T. Jones, E. J. Nielsen, and M. A. Park. Validation of 3D adjoint based error estimation and mesh adaptation for sonic boom prediction. *AIAA Paper*, 2006-1150, 2006.
- [21] P. Laug and H. Bourochaki. *BL2D-V2*, mailleur bidimensionnel adaptatif. RR-0275, INRIA, 2003.
- [22] D. Leservoisier, P.-L. George, and A. Dervieux. Métrique continue et optimisation de maillage. RR-4172, INRIA, 2001.
- [23] X. L. Li, M. S. Shephard, and M. W. Beall. 3D anisotropic mesh adaptation by mesh modification. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :4915–4950, 2005.
- [24] M. Mehrenberger. Personal communication, 2008.
- [25] D. J. Naylor. Filling space with tetrahedra. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 44 :1383–1395, 1999.
- [26] C. C. Pain, A. P. Umpleby, C. R. E. de Oliveira, and A. J. H. Goddard. Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190 :3771–3796, 2001.
- [27] M. Senechal. Which tetrahedra fill space? *Mathematics Magazine*, 54 :227–243, 1981.
- [28] D. Y. M. Sommerville. Space-filling tetrahedra in euclidean space. In *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, volume 41, pages 49–57, 1923.
- [29] A. Tam, D. Ait-Ali-Yahia, M. P. Robichaud, M. Moore, V. Kozel, and W. G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation for 3D flows on structured and unstructured grids. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 189 :1205–1230, 2000.
- [30] M.-G. Vallet. *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 1992.



# 2

---

## *Adaptation de maillage multi-échelles*

### INTRODUCTION

On étudie l'application du concept de maillage continu pour le contrôle de l'erreur d'interpolation linéaire. On considère le problème qui consiste à trouver le maillage minimisant globalement la norme  $\mathbf{L}^p$  de l'erreur d'interpolation pour une fonction continue. Ce problème est analysé sous la forme d'un problème d'optimisation continu où l'on cherche à décrire le maillage continu  $\mathcal{M}_{opt}$  optimum global d'une fonctionnelle coût  $E$  :

$$\min_{\mathcal{M}} E(\mathcal{M}). \quad (2.1)$$

On utilise pour la résolution le cadre théorique du calcul des variations et de l'optimisation différentiable. On exhibe une solution analytique  $\mathcal{M}_{opt}$  de (2.1) dans le cas de l'erreur d'interpolation linéaire. On prouve théoriquement l'optimalité globale et l'unicité de la solution. Dans un second temps, on obtient une solution optimale discrète en générant un maillage discret unité pour la solution continue  $\mathcal{M}_{opt}$ . On estime l'optimalité et la fidélité de la solution discrète en dérivant de (2.1) une estimation de l'ordre de convergence asymptotique. L'ensemble des solutions discrètes pour une précision donnée appartient à une même classe d'équivalence dont un représentant continu est le maillage continu optimal.

### ERREUR D'INTERPOLATION LINÉAIRE

On s'intéresse à l'adaptation de maillage non-structuré anisotrope pour la réduction de l'erreur d'interpolation linéaire. Sous sa forme la plus générale, nous l'écrivons comme un problème d'optimisation global, qui pour une fonction  $u$  donnée, vise à trouver le maillage  $\mathcal{H}_{opt}$  à  $N$  sommets qui minimise la norme  $\mathbf{L}^p$  de l'erreur d'interpolation :

$$\text{Trouver } \mathcal{H}_{opt} \text{ comportant } N \text{ sommets tel que } \mathcal{H}_{opt}(u) = \text{Arg} \min_{\mathcal{H}} \|u - \Pi_h u\|_{\mathcal{H}, \mathbf{L}^p(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Le but est d'identifier l'existence d'un optimum global et de construire effectivement le maillage optimal.

## État de l'art

Plusieurs solutions sont proposées dans la littérature pour aborder ce problème. Ces méthodes se distinguent par la façon dont le maillage optimal est prescrit. On les rappelle brièvement.

Dans un premier ensemble de méthodes, la prescription du maillage optimal se traduit généralement sous forme de contraintes sur les éléments, de sorte à minimiser  $\|u - \Pi_h u\|_{K, \mathbf{L}^p}$  sur chaque élément  $K$  de  $\mathcal{H}$ . Une classe de solutions se concentre sur la description géométrique du meilleur élément qui minimise l'erreur d'interpolation. Voir le travail précurseur de Babuska et Aziz [5]. Plus récemment, Cao [7] a proposé en deux dimensions une relation qui lie l'erreur d'interpolation linéaire aux angles maximaux, l'orientation et le rapport de forme d'un triangle pour une fonction quadratique. Ces contraintes sont utilisées pour certifier à la fois la validité de l'estimateur d'erreur et obtenir un bon contrôle. Cependant, il n'existe pas de méthode pour générer un maillage dont la forme est spécifiée en chaque point du domaine. L'enjeu est donc de proposer une solution qui intègre ces contraintes d'optimalité pour des fonctions quelconques. Au demeurant, ces estimations d'erreur sont dérivées pour un élément  $K$  du maillage et non pas sur tout le domaine de calcul  $\Omega$ . Ces estimations sont utilisées en adaptation pour proposer des modifications locales du maillage. Ce processus est comparable à une méthode de gradient simple dans l'algorithme de minimisation de l'erreur d'interpolation. Rien ne nous assure de converger vers un optimum global. Par ailleurs, D'Azevedo et Simpson ont dérivé les éléments optimaux pour la semi-norme  $\mathbf{H}^1$  en utilisant une bijection entre un maillage régulier et le maillage optimal [11]. Cette technique peut être vue comme une méthode d'adaptation de maillage par déformation d'un maillage régulier. En conclusion, on retient donc de ces méthodes : la description de l'élément optimal [7, 5] et une vision continue de l'erreur d'interpolation [11]. Ces deux points se retrouvent dans l'approche de ce chapitre.

Un deuxième ensemble de méthodes consiste à dériver *a priori* l'erreur d'interpolation sur un élément quelconque, de laquelle un tenseur de métrique est déduit. Les premières expériences sont dues à Peraire et al. [19, 20] en  $h$ -adaptation. Dans cette étude, un générateur de maillages adaptatif frontal est couplé à un estimateur d'erreur basé sur le hessien continu de la solution. En pratique, le hessien est calculé en utilisant des techniques de reconstruction ayant de bonnes propriétés d'approximation et de convergence [25, 26]. On distingue deux types de méthode, l'un basée aux éléments et l'autre centrée aux sommets.

Le premier type, afin de déduire un estimateur d'erreur anisotrope, consiste à regarder les contributions de l'erreur dans les directions données par la fonction qui transforme l'élément de référence en l'élément courant. Elle se base alors sur les estimateurs classiques des éléments finis [4, 10]. Elle est donc valide et utilisable pour des fonctions peu régulières. Pour illustrer ces méthodes, on peut citer [12, 16, 21]. Dans [12, 21], l'estimateur obtenu est transformé en une métrique compréhensible par un générateur de maillages anisotropes adaptatif. En pratique, la convergence de l'erreur vers la tolérance fixée peut être longue car il y a une forte dépendance vis-à-vis de l'état initial, *i.e.*, du maillage initial. Dans [16], des hypothèses *a priori* sur le maillage sont nécessaires. Elles se traduisent par un ensemble de paramètres qui mesure l'adéquation du maillage aux hypothèses. En pratique, cela oblige à calibrer ces paramètres. La méthode n'est donc pas complètement automatique.

Le second type de méthode est centré aux sommets. Les travaux de la littérature repose sur une estimée en norme  $\mathbf{L}^\infty$  pour des fonctions régulières. On peut citer en deux dimensions [8, 13] et en trois dimensions [15, 19]. Même sur des fonctions très régulières, mais avec des

gradients très raides, la convergence de l'erreur en norme  $\mathbf{L}^\infty$  n'est pas assurée pour des tailles de maille raisonnables. On retient de ces méthodes la mise en œuvre pratique de l'adaptation de maillage anisotrope.

En conclusion, l'ensemble des difficultés et limitations des méthodes précédentes montre bien la difficulté et la complexité du problème initial. Pour résoudre ce problème, les hypothèses portent sur la régularité de la fonction, la norme qui contrôle l'erreur ou encore les contraintes nécessaires sur le maillage. Indépendamment de toutes ces difficultés, on souhaite attirer l'attention sur le caractère mal posé du Problème (2.2). En effet, pour une fonction  $u$  donnée, il peut exister plusieurs maillages optimaux minimisant l'erreur d'interpolation linéaire sur tout le domaine de calcul. Aucune des méthodes citées précédemment ne propose une solution théorique à ce paradoxe. On souhaite apporter une réponse mathématique globale plus satisfaisante au Problème (2.2). Dans la suite, on présente notre solution pour répondre théoriquement et numériquement à ce problème.

### Approche $\mathbf{L}^p$ continue

La solution proposée dans ce chapitre consiste à regrouper dans une même classe d'équivalence l'ensemble des maillages discrets optimaux solution de (2.2). L'idée est d'utiliser le modèle de maillage continu afin de représenter la classe des maillage solutions de (2.2). À partir de ce modèle, on reformule le Problème (2.2) en continu. Étant donnée une fonctionnelle  $u$  définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on cherche le meilleur maillage continu  $\mathcal{M}_{opt}$  de complexité  $N$  qui minimise l'erreur d'interpolation linéaire continue  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_{opt}}(u)$  :

$$\text{Trouver } \mathcal{M}_{opt} \text{ de complexité } N \text{ tel que } \mathcal{E}_{\mathcal{M}_{opt}}(u) = \min_{\mathcal{M}} \|u - \pi_{\mathcal{M}}u\|_{\mathcal{M}, \mathbf{L}^p(\Omega)}, \quad (2.3)$$

où  $\pi_{\mathcal{M}}$  est l'opérateur d'interpolation linéaire continu.

L'originalité vient alors du fait que les hypothèses sur le maillage ne sont plus données *a priori* par l'analyse mathématique mais directement incluses dans la formulation du problème continu. Avec cette approche continue, un problème initialement mal posé et de dimension infinie se résume à un calcul de variations où une unique solution analytique existe et minimise globalement l'erreur d'interpolation. De plus, le maillage continu optimal et l'erreur d'interpolation à l'optimum sont explicitement donnés. Il est à noter qu'un résultat discret équivalent à notre estimation continue optimale de l'erreur a été obtenue par Chen et al. [9] et Vassilevski et al. [2, 24]. Ces auteurs obtiennent une majoration optimale de l'erreur d'interpolation globale pour un maillage quelconque dont la constante, non déterminée, dépend de la topologie du maillage. Dans notre approche, on donne l'erreur d'interpolation globale pour le maillage continu optimal où cette fois la constante est explicite. En outre, en majorant l'erreur optimale, l'ordre de convergence en maillage continu du schéma adaptatif est également exhibé.

L'unique solution continue du Problème (2.3) décrit l'ensemble des maillages solutions du Problème discret (2.2). Ainsi, un maillage discret optimal pour un nombre de points fixé est obtenu par projection du modèle continu optimal sur l'espace des maillages. Cette projection est réalisée par un générateur de maillages anisotropes adaptatif en utilisant la notion de maillage unité. Si, sur une suite de maillages discrets optimaux à complexité croissante, on vérifie l'ordre de convergence théorique, alors on peut vérifier la consistance de l'algorithme d'adaptation de maillage. En pratique, aucune solution directe du Problème discret (2.2) ne permet de certifier l'obtention d'une solution minimisant globalement l'erreur d'interpolation.

Par conséquent, proposer un algorithme constructif dont la convergence est prouvée est primordial ; On est en mesure de proposer une solution globale et optimale pour le Problème continu (2.3) puis le générateur de maillage est en mesure d'assurer une représentation discrète numérique optimale.

## PLAN DU CHAPITRE

On introduit d'abord des estimateurs classiques pour l'erreur d'interpolation linéaire sur des classes de fonctions quadratiques. À partir de ces estimations, on montre que l'erreur d'interpolation peut s'écrire de manière continue pour une métrique  $\mathcal{M}$ . On définit l'interpolé continu  $\pi_{\mathcal{M}}$  pour une fonction quadratique puis par extension pour une fonction  $u$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On lie également l'estimation continue à l'estimation discrète.

Cette estimation est ensuite étendue au cas de normes  $\mathbf{L}^p$  sur l'ensemble du domaine de calcul en considérant un calcul de variations. On montre également l'unicité de la solution ainsi que la convergence globale. Son utilisation pratique est illustrée sur plusieurs exemples analytiques en deux et trois dimensions.

*N.B.* On donne en annexe 2.A de ce chapitre un résultat général d'intégration de formes quadratiques sur des ellipsoïdes.

## 2.1 ERREUR D'INTERPOLATION DANS LE CAS DE FONCTIONS QUADRATIQUES

Cette section regroupe quelques résultats classiques sur l'erreur d'interpolation dans le cas des fonctions quadratiques. Ces estimateurs sont généralement utilisés pour dériver des fonctions qualitatifs ou décrire la meilleure forme d'élément minimisant l'erreur d'interpolation. Une panoplie de ces estimateurs d'erreur et des applications classiques sont disponibles dans [6, 18].

Dans notre cas, l'objectif est de proposer à partir de ces estimateurs un modèle d'erreur d'interpolation linéaire pour un élément continu. Ces estimateurs sont ensuite utilisés pour prouver certaines propriétés d'exactitude du modèle d'erreur *a priori* pour la classe des fonctions quadratiques.

Les preuves sont données en trois dimensions et les résultats sont simplement rappelés en deux dimensions.

### 2.1.1 Erreur d'interpolation linéaire sur un tétraèdre

On considère une **fonction quadratique**  $u$  définie pour tout  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{x} H \mathbf{x},$$

où  $H$  est une matrice symétrique. On interpole linéairement cette fonction sur un tétraèdre défini par sa liste de sommets :  $K = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ . On note  $\Pi_h u$  l'interpolé linéaire de  $u$  sur  $\Omega$ . Le but de cette section est de dériver une expression exacte de l'erreur d'interpolation  $e(\mathbf{x}) = (u - \Pi_h u)(\mathbf{x})$  pour  $x \in K$ .

On utilise la technique classique de l'élément de référence pour dériver l'expression de  $e$ . L'élément de référence  $K_{ref}$  est défini par les quatre sommets suivants :

$$\widehat{\mathbf{v}}_1 = {}^t(0, 0, 0), \widehat{\mathbf{v}}_2 = {}^t(1, 0, 0), \widehat{\mathbf{v}}_3 = {}^t(0, 1, 0) \text{ et } \widehat{\mathbf{v}}_4 = {}^t(0, 0, 1).$$

Tous les calculs sont indépendants du choix de  $K_{ref}$ . Ce choix particulier de  $K_{ref}$  est motivé par sa simplicité. Les calculs effectués sur  $K_{ref}$  sont ensuite déduits pour  $K$  en utilisant la transformation qui pour tout point  $\widehat{\mathbf{x}} \in K_{ref}$  associe un unique point de  $K$ . Cette transformation est donnée par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + B_K \widehat{\mathbf{x}} \text{ avec } B_K = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1).$$

On introduit les arêtes suivantes pour simplifier l'écriture de  $B_k$  :

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \text{ et } \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1,$$

telles que  $B_K = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . On peut donc réécrire la fonction  $u$  dans le tétraèdre de référence :

$$u(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) = \frac{1}{2} {}^t\mathbf{v}_1 H \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{v}_1 H B_K \widehat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} {}^t\widehat{\mathbf{x}} {}^t B_K H \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} {}^t\widehat{\mathbf{x}} {}^t B_K H B_K \widehat{\mathbf{x}}.$$

Pour une interpolation linéaire, les termes linéaires présents dans  $u(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}}))$  sont interpolés exactement. On peut donc sans perte de généralité seulement garder les termes quadratiques. En effet, si on note  $\tilde{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} {}^t\widehat{\mathbf{x}} {}^t B_K H B_K \widehat{\mathbf{x}}$ , alors on a :

$$e(\mathbf{x}) = (u - \Pi_h u)(\mathbf{x}) = (\tilde{u} - \Pi_h \tilde{u})(\mathbf{x}).$$

On peut donc considérer  $\tilde{u}$  à la place de  $u$ . Cependant afin de simplifier les notations, on continue à noter  $u$  à la place de  $\tilde{u}$ . On peut alors réécrire  $u$  sous forme matricielle :

$$u(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) = \frac{1}{2} {}^t \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1 & {}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_2 & {}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_3 \\ {}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_1 & {}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2 & {}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_3 \\ {}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_1 & {}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_2 & {}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}.$$

L'expression de  $u$  dans le tétraèdre de référence est donc :

$$u(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) = \frac{1}{2} [ \quad ({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1) \hat{x}^2 \quad + \quad ({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2) \hat{y}^2 \quad + \quad ({}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3) \hat{z}^2 \quad + \\ 2({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_2) \hat{x} \hat{y} \quad + \quad 2({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_3) \hat{x} \hat{z} \quad + \quad 2({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_3) \hat{y} \hat{z} \quad ].$$

L'interpolé linéaire  $\Pi_h u(\widehat{\mathbf{x}})$  s'écrit  $a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} + d$ , où les coefficients  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  vérifient le système suivant assurant la  $\mathcal{P}_1$  exactitude, *i.e.*,  $\Pi_h u(\mathbf{v}_i) = u(\mathbf{v}_i)$  pour tout  $i \in [1, 4]$  :

$$\begin{cases} \Pi_h u(\mathbf{v}_1) = d = u(\mathbf{x}((0, 0, 0))) = 0, \\ \Pi_h u(\mathbf{v}_2) = a = u(\mathbf{x}((1, 0, 0))) = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1), \\ \Pi_h u(\mathbf{v}_3) = b = u(\mathbf{x}((0, 1, 0))) = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2), \\ \Pi_h u(\mathbf{v}_4) = c = u(\mathbf{x}((0, 0, 1))) = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3). \end{cases}$$

La résolution du système linéaire précédent est directe et  $\Pi_h u$  est donné par :

$$\Pi_h u(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) = \frac{1}{2} [ ({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1) \hat{x} + ({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2) \hat{y} + ({}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3) \hat{z} ].$$

On est en mesure de calculer l'erreur d'interpolation exacte  $e(\mathbf{x})$  :

$$e(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) = \frac{1}{2} [ \begin{aligned} &({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1)(\hat{x}^2 - \hat{x}) + ({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2)(\hat{y}^2 - \hat{y}) + ({}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3)(\hat{z}^2 - \hat{z}) + \\ &2({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_2)\hat{x}\hat{y} + 2({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_3)\hat{x}\hat{z} + 2({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_3)\hat{y}\hat{z} \end{aligned} ].$$

On peut donc évaluer l'erreur en normes  $\mathbf{L}^1$ ,  $\mathbf{L}^2$  ou  $\mathbf{H}^1$  en intégrant l'erreur précédente sur l'élément  $K$ . Pour cela, on utilise la transformation linéaire  $B_K$ . L'intégrale d'une fonction  $F$  sur l'élément  $K$  vaut :

$$\int_K F(\mathbf{x}) dx dy dz = \int_{K_{ref}} F(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) |\det(B_K)| d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z},$$

qui se simplifie en :

$$\int_K F(\mathbf{x}) dx dy dz = 6V_K \int_{K_{ref}} F(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) d\hat{x} d\hat{y} d\hat{z},$$

car le volume de  $K$  est égal à  $\frac{1}{6} |\det(B_K)|$ . Dans la suite, on utilise les notations suivantes :  $l_i = ({}^t\mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i)$  pour  $i \in [1, 3]$  et  $l_{ij} = ({}^t\mathbf{e}_i H \mathbf{e}_j)$  quand  $i \neq j$ .

**Cas de la norme  $\mathbf{L}^1$ .** L'estimation en norme  $\mathbf{L}^1$  n'est valable que pour les fonctions strictement convexes ou strictement concaves. Cela nous permet de simplifier  $|(u - \Pi_h u)(\mathbf{x})| = (u - \Pi_h u)(\mathbf{x})$  dans le cas convexe et  $|(u - \Pi_h u)(\mathbf{x})| = -(u - \Pi_h u)(\mathbf{x})$  dans le cas concave. L'erreur en norme  $\mathbf{L}^1$  est donnée par :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} = \frac{\det(B_K)}{6 \cdot 40} |-3(l_1 + l_2 + l_3) + 2(l_{12} + l_{13} + l_{23})|.$$

Dans le cas d'une fonction quadratique quelconque, l'égalité précédente devient une inégalité en prenant simplement la valeur absolue des valeurs propres de  $H$ . On note  $|H|$  cette matrice et on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} |\mathbf{x} H \mathbf{x}| \leq \frac{1}{2} \mathbf{x} |H| \mathbf{x}.$$

On peut donc appliquer l'erreur précédente sur  $|H|$  et en déduire une majoration de l'erreur d'interpolation sur  $u$  :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} \leq \frac{\det(B_K)}{6 \cdot 40} |-3(l_1 + l_2 + l_3) + 2(l_{12} + l_{13} + l_{23})|.$$

### 2.1.2 Erreur d'interpolation linéaire sur un triangle

En conservant les notations précédentes, on dérive l'expression de l'erreur d'interpolation linéaire pour une fonction quadratique  $u$  en deux dimensions. Le triangle de référence est donné par :

$$\widehat{\mathbf{v}}_1 = {}^t(0, 0), \quad \widehat{\mathbf{v}}_2 = {}^t(1, 0) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{v}}_3 = {}^t(0, 1).$$

L'erreur d'interpolation se réduit à :

$$\hat{e}(\widehat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} l_1 (\hat{x}^2 - \hat{x}) + \frac{1}{2} l_2 (\hat{y}^2 - \hat{y}) + l_{12} \hat{x} \hat{y}.$$

*Cas de la norme  $\mathbf{L}^1$ .* Pour une fonction quadratique générale, on a la majoration suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} \leq \frac{\det(B_K)}{2 \cdot 12} |l_{12} - l_1 - l_2|.$$

REMARQUE 2.1 L'annexe 6.B du Chapitre 6 donne les estimations en norme  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{H}^1$ .

## 2.2 INTERPOLATION LINÉAIRE SUR UN ÉLÉMENT CONTINU

Les estimateurs précédents, même s'ils sont exacts, sont difficilement utilisables avec efficacité en pratique. On peut les utiliser *a posteriori*. On déduit donc pour un maillage initial donné une carte d'erreur constante par élément. L'enjeu est alors d'équi-répartir ce champ d'erreur en modifiant le maillage. Cependant, il est difficile d'en déduire des informations anisotropes. L'autre alternative consiste à définir l'élément qui minimise l'erreur d'interpolation. Là encore, l'utilisation pratique pour dériver un maillage adapté est quasiment impossible. Seules des fonctions de qualité sont généralement déduites de ces estimations.

L'utilisation de métriques dans le but de générer des maillages anisotropes adaptés est donc une solution pratique qui semble actuellement quasiment incontournable. Dans ce but, on propose d'estimer l'erreur d'interpolation sur un maillage continu. On montre dans cette section qu'il est possible d'écrire exactement l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^1$  sur un maillage continu pour l'ensemble des fonctions quadratiques.

### 2.2.1 Définition et propriétés d'exactitude

Étant donné une fonction **quadratique définie positive**  $u$  et un tenseur de métrique  $\mathcal{M}$ , alors on a :

**Proposition 2.1** *Pour tout élément  $K$  unité pour  $\mathcal{M}$ , l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^1$  ne dépend pas de la forme de l'élément et est seulement une fonction du tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  et du hessien  $H$  de  $u$  :*

- *En trois dimensions, pour tout élément  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$ , on a :*

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} = \frac{\sqrt{2}}{240} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}). \quad (2.4)$$

- *En deux dimensions, pour tout élément  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$ , on a :*

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} = \frac{\sqrt{3}}{64} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}).$$

La preuve repose sur la simple utilisation des invariants géométriques, cf. Section 1.2.3, Chapitre 1. D'après la section précédente, l'erreur d'interpolation pour un élément  $K$  est donnée par :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} = \frac{|K|}{40} |-3(l_1 + l_2 + l_3) + 2(l_{12} + l_{13} + l_{23})|.$$

Si  $K$  est unité pour  $\mathcal{M}$  alors son volume  $|K|$  est constant égal à  $\frac{\sqrt{2}}{12} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}})$ . L'erreur d'interpolation se simplifie donc en :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} = \frac{\sqrt{2}}{480} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) |-3(l_1 + l_2 + l_3) + 2(l_{12} + l_{13} + l_{23})|.$$

Afin de simplifier les termes croisés  $l_{ij}$ , on introduit l'ensemble des arêtes en conservant la convention de la Figure 2.1. Il vient alors :

$$\begin{cases} 2l_{12} = {}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1 + {}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2 - {}^t\mathbf{e}_4 H \mathbf{e}_4, \\ 2l_{13} = {}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1 + {}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3 - {}^t\mathbf{e}_5 H \mathbf{e}_5, \\ 2l_{23} = {}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2 + {}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3 - {}^t\mathbf{e}_6 H \mathbf{e}_6. \end{cases}$$

On en déduit :

$$|-3(l_1 + l_2 + l_3) + 2(l_{12} + l_{13} + l_{23})| = \sum_{i=1}^6 {}^t\mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i.$$

Le membre de droite est un invariant géométrique. Finalement, l'erreur d'interpolation sur  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$  s'écrit :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)} = \frac{\sqrt{2}}{240} \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}).$$

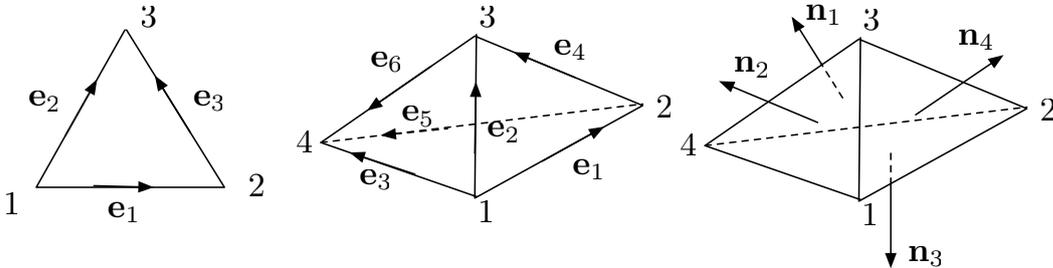
On remarque la forte analogie avec les estimateurs d'erreur pour des interpolations de Lagrange [10]. En particulier :

- $\det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}})$  s'apparente au jacobien de la transformation affine qui, à l'élément de référence associe l'élément courant. Dans notre cas,  $\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$  est la transformation de la boule unité  $\mathcal{B}_{I_3}$  vers la boule unité  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ . Autrement dit, c'est la transformation qui à l'élément continu de référence  $I_3$  associe l'élément continu courant  $\mathcal{M}$ .
- $\text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}})$  est la partie anisotrope de l'estimateur qui dépend de l'alignement de l'élément vis-à-vis des composantes anisotropes du hessien  $H$ .

Cependant, la principale différence réside dans le fait que l'Estimation (2.4) est valable pour un ensemble d'éléments. La métrique permet donc de factoriser le comportement de l'ensemble de ses éléments unités. Si on définit les deux relations d'équivalence  $\mathcal{R}_1(\mathcal{M})$  et  $\mathcal{R}_2(u)$  suivantes pour deux tétraèdres  $K_1$  et  $K_2$  :

$$\begin{array}{ll} K_1 \mathcal{R}_1(\mathcal{M}) K_2 & \text{si et seulement si } K_1 \text{ et } K_2 \text{ sont unités dans } \mathcal{M}, \\ K_1 \mathcal{R}_2(u) K_2 & \text{si et seulement si } \|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K_1)} = \|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K_2)}, \end{array}$$

pour toute fonction quadratique  $u$ , alors une relecture de la Proposition 2.1 est de dire que les classes d'équivalences définies par  $\mathcal{R}_1(\mathcal{M})$  et  $\mathcal{R}_2(u)$  sont égales.



**Figure 2.1:** Convention retenue pour la numérotation des arêtes et des faces. Cette règle de numérotation assure que  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  pour les triangles et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  pour les tétraèdres.

### 2.2.2 Opérateur d'interpolation linéaire continu

L'Estimation (2.4) permet d'envisager une erreur d'interpolation continue pour des fonctions quelconques. En effet, on peut tout a fait écrire formellement une estimation complètement continue où  $\mathcal{M}$  et  $H$  seraient des fonctions non constantes. Il suffit de considérer le développement de Taylor de  $u$  et d'utiliser en un point son hessien. Cependant, les difficultés pour justifier ce passage formel sont de plusieurs types :

- l'Estimation (2.4) est intégrée et non locale au point,
- généraliser l'interpolé linéaire sur un élément continu (un ellipsoïde) est non trivial.

Dans la suite, on étudie l'existence d'un tel interpolé linéaire continu dans la métrique que l'on note  $\pi_{\mathcal{M}}$ . On souhaite donc prolonger l'analogie entre continu et discret pour l'erreur d'interpolation.

*Équivalence continu discret.* Puisque dans le cas des fonctions quadratiques, il y a équivalence stricte pour la norme  $\mathbf{L}^1$  entre une estimation dans la métrique  $\mathcal{M}$  et l'estimation discrète sur un élément  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$ , on peut proposer une définition bien posée de l'opérateur d'interpolation linéaire continu. En effet, étant donnée une fonction quadratique  $u$ , on peut s'interroger sur l'existence et la définition d'une fonction polynomiale de degré un :

$$\pi_{\mathcal{M}}u : \mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}} \mapsto {}^t\mathbf{a}\mathbf{x} + b,$$

où  $\mathbf{a}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et  $b$  une constante qui dépendent des caractéristiques de  $u$ .

**Lemme 2.1** *Étant données une métrique  $\mathcal{M}$  et une forme quadratique complète :*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} {}^t\mathbf{x} H \mathbf{x} + {}^t\mathbf{g}\mathbf{x} + c,$$

avec  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{g}$  un vecteur et  $H$  une matrice symétrique, alors l'interpolé linéaire continu  $\pi_{\mathcal{M}}u$  de  $u$  sur  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$  est donné :

- en trois dimensions par :

$$\pi_{\mathcal{M}}u(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{g}\mathbf{x} + c + \frac{1}{10} \text{trace} (\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}),$$

- en deux dimensions par :

$$\pi_{\mathcal{M}}u(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{g}\mathbf{x} + c + \frac{1}{8} \text{trace} (\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}).$$

En trois dimensions, la preuve consiste à trouver le plan  $\pi_{\mathcal{M}}u$  qui approche au mieux la fonction  $u$  sur la boule  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$  au sens de la norme  $\mathbf{L}^2$ , c'est-à-dire qu'il minimise la distance :

$$\pi_{\mathcal{M}}u = \underset{p={}^t\mathbf{a}\mathbf{x}+b}{\text{Argmin}} \|u - p\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{B}_{\mathcal{M}})}.$$

Comme l'espace des fonctions polynomiales de degré un défini sur la boule unité de  $\mathcal{M}$  est convexe ainsi que  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ , le projeté est unique. Il vérifie pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  de degré total 1 :

$$\int_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}} (u(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{M}}u(\mathbf{x})) P(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Il est suffisant de vérifier la condition précédente pour une base de l'espace des polynômes linéaires sur  $\mathbb{R}^3$ . On choisit la base suivante :

$$\mathbf{x} \mapsto 1, \quad \mathbf{x} \mapsto x_1, \quad \mathbf{x} \mapsto x_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \mapsto x_3.$$

La condition précédente se résume à vérifier les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}} (u(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{M}}u(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}}} (u(\mathbf{x}) - \pi_{\mathcal{M}}u(\mathbf{x})) x_i \, d\mathbf{x} &= 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour  $i = \{1, 2, 3\}$ . On ramène ces intégrales sur la boule unité de l'identité grâce au changement de variables :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathcal{B}_{I_3} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{y} = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

La fonction quadratique  $u$  et l'interpolé  $\pi_{\mathcal{M}}u$  deviennent :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \tilde{u}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} {}^t\mathbf{y} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} + {}^t\mathbf{y} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{g} + c, \\ \pi_{\mathcal{M}}u(\mathbf{x}) &= \tilde{\pi}_{\mathcal{M}}u(\mathbf{y}) = {}^t\mathbf{y} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a} + b. \end{aligned}$$

On considère la base suivante :

$$\mathbf{y} \mapsto 1, \quad \mathbf{y} \mapsto y_1, \quad \mathbf{y} \mapsto y_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{y} \mapsto y_3,$$

les Équations (2.5) deviennent :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_{I_3}} (\tilde{u}(\mathbf{y}) - \tilde{\pi}_{\mathcal{M}}u(\mathbf{y})) \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \, d\mathbf{y} &= 0, \\ \int_{\mathcal{B}_{I_3}} (\tilde{u}(\mathbf{y}) - \tilde{\pi}_{\mathcal{M}}u(\mathbf{y})) y_i \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \, d\mathbf{y} &= 0, \end{aligned}$$

pour  $i = \{1, 2, 3\}$ . On utilise alors les formules d'intégration données dans l'Annexe 2.A de ce chapitre. En trois dimensions, il vient :

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{15} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) + \frac{4}{3} (c - b) \right) \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) &= 0, \\ \left( \frac{4}{15} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \right) \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) &= 0, \end{aligned}$$

et en deux dimensions :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{8} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} (c - b) \right) \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) &= 0, \\ \left( \frac{1}{4} \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \right) \det(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) &= 0. \end{aligned}$$

On a alors pour la dimension 3 :

$$\begin{cases} \mathbf{a} &= \mathbf{g}, \\ b &= c + \frac{1}{10} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

L'interpolé continu linéaire  $\pi_{\mathcal{M}}u$  possède le même gradient que  $u$ . Sa partie constante est composée de celle de  $u$  plus du terme anisotrope rencontré dans l'Estimation (2.4).

On peut finalement étudier l'erreur d'interpolation linéaire continue en trois dimensions :

$$\begin{aligned}(u - \pi_{\mathcal{M}}u)(\mathbf{x}) &= \frac{1}{10} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{x} H \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{10} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) + O(\|\mathbf{x}\|_2^2).\end{aligned}$$

La relation ci-dessus permet de lier, dans le cas de fonctions quadratiques, la vision discrète à la vision continue de l'erreur d'interpolation :

**Proposition 2.2** *Pour une fonction  $u$  quadratique définie positive, il existe un opérateur d'interpolation linéaire continu  $\pi_{\mathcal{M}}$ , défini sur la boule unité  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ , tel que l'erreur d'interpolation discrète  $\mathbf{L}^1(K)$  pour une fonction quadratique  $u$  sur tout élément  $K$  unité dans  $\mathcal{M}$  soit égale à une constante près connue à l'erreur d'interpolation continue ponctuelle pour  $\mathcal{M}$  :*

$$(u - \pi_{\mathcal{M}}u)(0) = 2 \frac{\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^1(K)}}{|K|}.$$

**Erreur d'interpolation continue pour des fonctions régulières.** Dans le cas où la fonction  $u$  n'est plus quadratique et le maillage continu n'est plus constant, on considère le modèle quadratique de  $u$  donné par le développement de Taylor. On considère que la fonction  $u$  est **deux fois continûment différentiable**, on a :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0), u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) + {}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} {}^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) H(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^3),$$

où  $\mathbf{g}$  est le gradient de  $u$  et  $H$  son hessien. On définit alors l'interpolé linéaire continu de  $u$  sur l'élément continu  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0)$  :

$$\pi_{\mathcal{M}}u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) + {}^t \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + c_n \text{trace} \left( \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_0) H(\mathbf{x}_0) \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_0) \right),$$

avec

$$c_3 = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{8}.$$

En utilisant les tailles  $(h_i)_{i=1,n}$  suivant les directions principales  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,n}$  de  $\mathcal{M}$ , l'erreur sur  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_0)$  se simplifie en :

$$(u - \pi_{\mathcal{M}}u)(\mathbf{x}) = c_n \sum_{i=1}^n h_i^2(\mathbf{x}_0) {}^t \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_0) H(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_0) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2).$$

On a donc l'estimation de l'erreur locale :

$$|(u - \pi_{\mathcal{M}}u)(\mathbf{x}_0)| \leq c_n \sum_{i=1}^n h_i^2(\mathbf{x}_0) |{}^t \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_0) H(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_0)|. \quad (2.6)$$

La Relation (2.6) permet d'écrire une estimation globale de l'erreur d'interpolation continue en norme  $\mathbf{L}^p$  :

$$\|u - \pi_{\mathcal{M}}u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u - \pi_{\mathcal{M}}u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En d'autres termes, on peut choisir de représenter une erreur discrète  $u - \Pi_h u$  par son équivalent continu  $u - \pi_{\mathcal{M}} u$ . On s'abstrait donc de toutes les contraintes discrètes. Cela se traduit par la possibilité d'utiliser les outils mathématiques existants sur l'espace des maillages continus et non définis sur l'espace discret des maillages.

REMARQUE 2.2 La définition de l'opérateur d'interpolation, basée sur une projection linéaire au sens de la projection  $\mathbf{L}^2$ , permet d'envisager une étude de l'erreur d'interpolation pour des fonctions moins régulières [12].

*Exemples numériques continus.* On peut désormais définir une erreur d'interpolation de manière complètement continue, à la fois pour la fonction mais également pour le maillage. Cela justifie l'utilisation du concept de maillage continu. Afin de démontrer qu'il est tout à fait possible de calculer une erreur d'interpolation sans support discret, on propose de calculer une erreur d'interpolation sur un maillage continu puis de comparer à l'erreur d'interpolation sur un représentant discret. Dans notre exemple, on considère le maillage continu  $\mathcal{M}_\alpha$  défini sur le carré  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  :

$$\mathcal{M}_\alpha(x, y) = \alpha \begin{pmatrix} h_1^{-2} & 0 \\ 0 & h_2^{-2} \end{pmatrix}, \text{ avec } h_1 = 0.1(x+1) + 0.05(x-1) \text{ et } h_2 = 0.2.$$

On note  $N$  la complexité de  $\mathcal{M}_\alpha$ , elle est donnée par :

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}_\alpha) = N = \iint_D \frac{1}{h_1 h_2}(x, y) \, dx dy = \frac{200}{3} \ln(2) \alpha.$$

On considère l'erreur d'interpolation sur  $\mathcal{M}_\alpha$  pour les fonctions  $u_1$  and  $u_2$  suivantes :

- $u_1$  est une fonction quadratique, définie par :

$$u_1(x, y) = 6x^2 + 2xy + 4y^2.$$

- $u_2$  est une fonction non quadratique définie par :

$$u_2(x, y) = e^{(2x^2+y)}.$$

Toutes ces fonctions sont définies sur  $D$ . Dans le cas de la fonction  $u_1$ , l'erreur d'interpolation continue sur  $\mathcal{M}_\alpha$  est ponctuellement donnée par :

$$\begin{aligned} (u_1 - \pi_{\mathcal{M}_\alpha} u_1)(x, y) &= \frac{1}{8} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}(x, y) |H_{u_1}|(x, y) \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}(x, y)) \\ &= \frac{3(0.15x + 0.05)^2}{2\alpha} + \frac{0.04}{\alpha}, \\ &= \frac{27x^2 + 18x + 35}{800\alpha}. \end{aligned}$$

avec

$$|H_{u_1}| = H_{u_1} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

On peut alors intégrer analytiquement l'erreur d'interpolation continue sur  $D$ . Il vient :

$$\iint_D |u_1 - \pi_{\mathcal{M}_\alpha} u_1|(x, y) \, dx dy = \frac{53}{800\alpha} = \frac{53 \ln(2)}{21 N}.$$

Dans le cas de la fonction  $u_2$ , l'erreur d'interpolation continue sur  $\mathcal{M}_\alpha$  est ponctuellement donnée par :

$$\begin{aligned} (u_2 - \pi_{\mathcal{M}_\alpha} u_2)(x, y) &= \frac{1}{8} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}(x, y) |H_{u_2}|(x, y) \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}(x, y)) \\ &= \frac{e^{4x^2+y}}{8\alpha} ((0.15x + 0.05)^2 (4 + 16x^2) + 0.05), \end{aligned}$$

avec

$$|H_{u_2}| = H_{u_2} = \begin{pmatrix} e^{2x^2+y}(4 + 16x^2) & 4x e^{2x^2+y} \\ 4x e^{2x^2+y} & e^{2x^2+y} \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$\iint_D |u_2 - \pi_{\mathcal{M}_\alpha} u_2|(x, y) \, dx dy = \frac{0.2050950191}{\alpha} = \frac{13.673 \ln(2)}{N}.$$

On compare les expressions de l'erreur d'interpolation continue avec le calcul numérique de l'erreur d'interpolation sur des maillages discrets. On considère une suite de maillages unités  $(\mathcal{H}_\alpha)_\alpha$  vis-à-vis de  $\mathcal{M}_\alpha$  pour  $\alpha = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ . Ces maillages ont été générés par Yams [14]. La Figure 2.2 montre la suite de maillages. On estime alors sur  $(\mathcal{H}_\alpha)_\alpha$  :

$$\|u_1 - \Pi_h u_1\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{H}_\alpha)} = \sum_{K \in \mathcal{H}_\alpha} \|u_1 - \Pi_h u_1\|_{\mathbf{L}^1(K)},$$

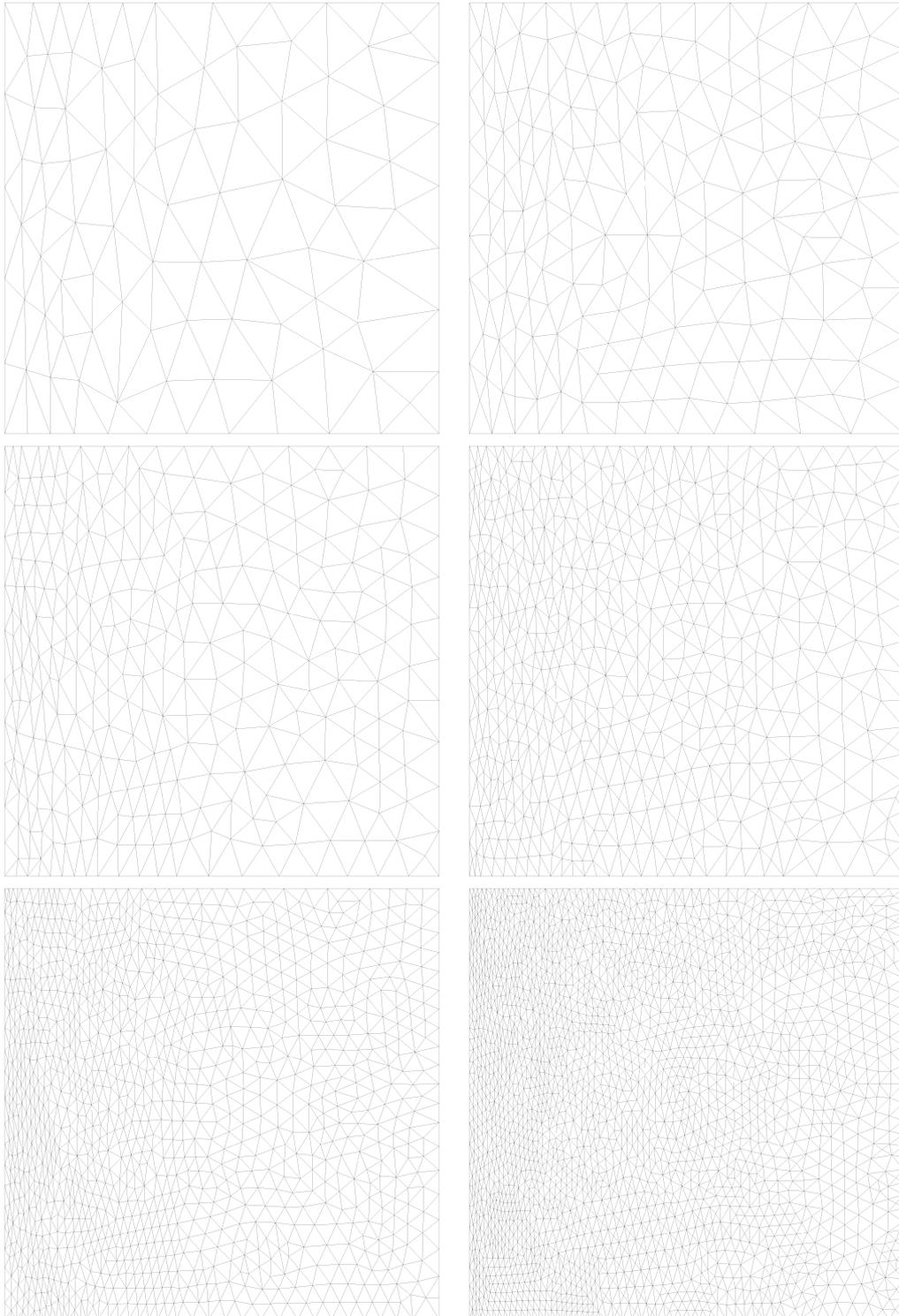
où l'erreur d'interpolation  $\|u_1 - \Pi_h u_1\|_{\mathbf{L}^1(K)}$  sur un élément  $K$  est calculée par une intégration numérique en utilisant une quadrature de Gauss d'ordre 5. Les Figures 2.3 et 2.4 représentent l'écart entre le modèle continu et l'erreur d'interpolation discrète calculée sur les maillages unités dans  $\mathcal{M}_\alpha$ . Il y a une très bonne corrélation entre le modèle continu et le calcul discret. Cet exemple confirme l'intérêt des maillages continus en montrant qu'une entité fondamentalement discrète, l'erreur d'interpolation, pouvait bien se modéliser dans un formalisme continu.

**REMARQUE 2.3** Lorsque le maillage continu  $\mathcal{M}$  n'est connu qu'à travers sa représentation linéaire sur un maillage discret  $\mathcal{H}_0$ , l'évaluation de l'erreur d'interpolation continue est estimée numériquement en utilisant l'interpolation linéaire de  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{H}_0$ .

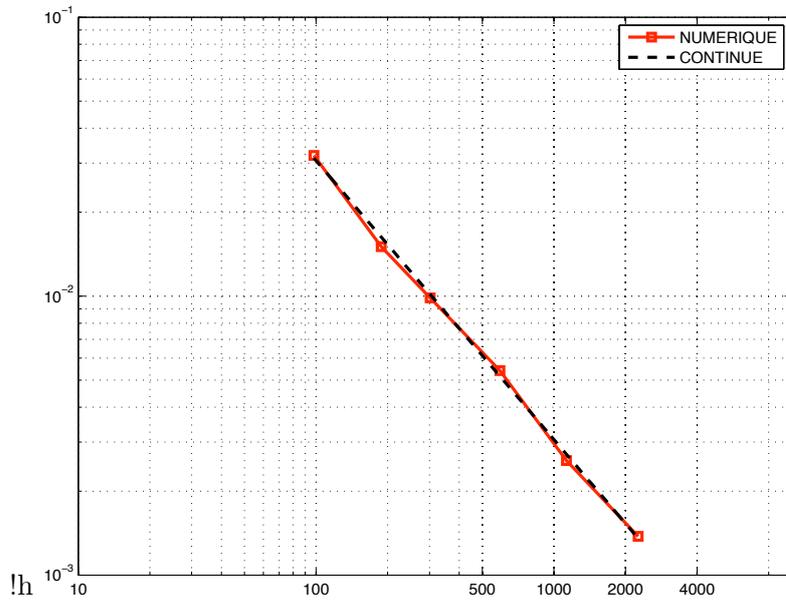
Puisqu'on sait écrire l'erreur d'interpolation sur un maillage continu  $\mathcal{M}$  quelconque, on peut s'intéresser à décrire le maillage optimal pour minimiser globalement l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^p$  pour une fonction donnée.

## 2.3 MODÈLE CONTINU MULTI-ÉCHELLES DE L'ERREUR D'INTERPOLATION LINÉAIRE

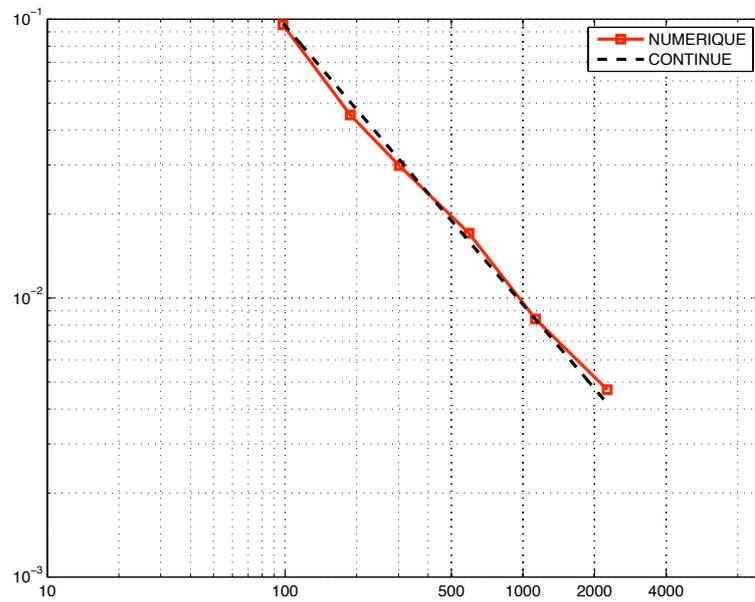
Dans cette section, on propose un modèle approché et générique de l'erreur d'interpolation sur un maillage continu  $\mathcal{M}$ . À partir de ce modèle, une distribution optimale des tailles est obtenue par un calcul de variations. On montre également l'unicité de la solution optimale et on exhibe l'ordre de convergence en maillage.



**Figure 2.2:** Maillages unités pour  $\mathcal{M}_\alpha$ , avec  $\alpha = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$  de gauche à droite et de haut en bas.



**Figure 2.3:** Comparaison entre l'erreur d'interpolation continue  $\|u_1 - \pi_{\mathcal{M}_\alpha} u_1\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{M}_\alpha)}$  et l'erreur d'interpolation discrète  $\|u_1 - \Pi_h u_1\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{H}_\alpha)}$  pour la fonction  $u_1$ .



**Figure 2.4:** Comparaison entre l'erreur d'interpolation continue  $\|u_2 - \pi_{\mathcal{M}_\alpha} u_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{M}_\alpha)}$  et l'erreur d'interpolation discrète  $\|u_2 - \Pi_h u_2\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{H}_\alpha)}$  pour la fonction  $u_2$ .

### 2.3.1 Définition basée sur un contrôle en norme $L^p$

Pour une fonction  $u$  donnée définie sur  $\mathbb{R}^n$ , on propose le modèle d'erreur local sur un maillage continu  $\mathcal{M}$  de tailles  $(h_i)_{i=1,n}$  suivant ses directions propres  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,n}$  :

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = (u - \pi_{\mathcal{M}}u)(\mathbf{x}) &= c_n \sum_{i=1}^n h_i^2(\mathbf{x}) |\mathbf{v}_i(\mathbf{x})^t H(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i(\mathbf{x})| \\ &= c_n \sum_{i=1}^n h_i^2(\mathbf{x}) \gamma_i(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Pour plus de généralité, on considère le modèle d'erreur local suivant paramétré par  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$e_{\mathcal{M}} = \left( \sum_{i=1}^n h_i^\beta \gamma_i \right)^\alpha,$$

où  $\gamma_i > 0$  dépend de l'estimateur d'erreur. On néglige  $c_n$  dans ce modèle. Dans ce problème, on considère qu'en chaque point l'**orientation** de la métrique donnée par les vecteurs  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,n}$  est **fixée**. Les inconnues restantes sont donc seulement les tailles  $(h_i)_{i=1..n}$  de la métrique le long de ces directions.

*Problématique.* On cherche la distribution optimale de tailles minimisant la norme  $L^p$  de  $e_{\mathcal{M}}$  pour l'ensemble des métriques dont l'orientation  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,n}$  est fixée. Cela se traduit par un problème de calcul de variations :

$$\min_{\mathcal{M}} \mathcal{E}(\mathcal{M}), \text{ avec } \mathcal{E}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} e_{\mathcal{M}}^p = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n h_i^\beta \gamma_i \right)^{\alpha p}, \quad (2.7)$$

sous la contrainte :

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} d = \int_{\Omega} \left( \prod_{i=1}^n h_i \right)^{-1} = N.$$

On impose la contrainte  $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = N$  afin d'éviter la solution triviale  $h_i = 0$  pour tout  $i \in [1, n]$  qui donne une erreur nulle.

### 2.3.2 Principe d'optimalité globale

La résolution du problème d'optimisation se base sur un changement de variables qui fait intervenir la densité et les quotients d'anisotropie de la métrique, Section 1.2.4, Chapitre 1.

*Changement de variables.* Les  $n$  tailles  $(h_i)_{i=1..n}$  sont remplacées par la densité  $d$  et les  $n-1$  premiers quotients d'anisotropie. Ce changement de variables est donné par :

$$h_i = d^{-\frac{1}{n}} r_i \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \text{ et } h_n = d^{-\frac{1}{n}} P^{-1},$$

avec

$$r_i = h_i \left( \prod_{k=1}^n h_k \right)^{-\frac{1}{n}} \text{ et } P = \left( \prod_{i=1}^{n-1} r_i \right).$$

Le premier avantage de ce changement de variables est de rendre la contrainte  $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = N$  linéaire en la variable  $d$ , de sorte que le problème devient convexe. Pour cet ensemble de variables, l'erreur locale devient :

$$e_{\mathcal{M}} = d^{-\frac{\alpha\beta}{n}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} r_i^\beta \gamma_i + P^{-\beta} \gamma_n \right)^\alpha.$$

Finalement, on doit résoudre :

$$\min_{((r_i)_i, d)} \int_{\Omega} d^{-\frac{\alpha\beta p}{n}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} r_i^\beta \gamma_i + P^{-\beta} \gamma_n \right)^{\alpha p},$$

sous la contrainte linéaire :

$$\int_{\Omega} d = N.$$

Le deuxième avantage de ce changement de variables est le découplage du problème en un problème local et un global. On trouve d'abord localement les quotients d'anisotropie optimaux indépendamment de la densité, qui est explicitée dans un second temps.

*Résolution formelle.* La condition nécessaire d'Euler-Lagrange implique qu'il existe une constante  $\lambda$ , associée à la contrainte  $\mathcal{C}$  telle que :  $\forall \delta \mathcal{M}, \delta \mathcal{E}(\mathcal{M}; \delta \mathcal{M}) = \lambda \delta \mathcal{C}(\mathcal{M}; \delta \mathcal{M})$ . La variation de la fonction coût  $\delta \mathcal{E}$ , évaluée sur la solution courante  $\mathcal{M}$  dans la direction  $\delta \mathcal{M}$ , est donnée par :

$$\delta \mathcal{E}(\mathcal{M}; \delta \mathcal{M}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(\mathcal{M} + \varepsilon \delta \mathcal{M}) - \mathcal{E}(\mathcal{M})}{\varepsilon}.$$

Comme une approche formelle est utilisée, la variation de la fonctionnelle  $\mathcal{E}$  est approchée par :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}(\mathcal{M}; \delta \mathcal{M}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{\Omega} e_{\mathcal{M} + \varepsilon \delta \mathcal{M}}^p - \int_{\Omega} e_{\mathcal{M}}^p \right) \\ &\approx \left( \int_{\Omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e_{\mathcal{M} + \varepsilon \delta \mathcal{M}}^p - e_{\mathcal{M}}^p}{\varepsilon} \right) \\ &\approx \int_{\Omega} \frac{\partial e_{\mathcal{M}}^p}{\partial \mathcal{M}} \delta \mathcal{M} \end{aligned}$$

En considérant que la variation est donnée par  $\delta \mathcal{M} = (\delta r_1, \dots, \delta r_{n-1}, \delta d)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \forall \delta \mathcal{M}, \quad \delta \mathcal{E}(\mathcal{M}; \delta \mathcal{M}) &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta \mathcal{E}(r_i; \delta r_i) + \delta \mathcal{E}(d; \delta d), \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Omega} \frac{\partial e_{\mathcal{M}}^p}{\partial r_i} \delta r_i + \int_{\Omega} \frac{\partial e_{\mathcal{M}}^p}{\partial d} \delta d \end{aligned}$$

Les dérivées sont données de manière formelle par :

$$\begin{cases} \frac{\partial e_{\mathcal{M}}^p}{\partial r_i} \delta r_i = \alpha \beta p d^{-\frac{\alpha\beta p}{n}} \left( r_i^{\beta-1} \gamma_i - \frac{P^{-\beta}}{r_i} \gamma_n \right) \left( \sum_{j=1}^{n-1} r_j^\beta \gamma_j + P^{-\beta} \gamma_n \right)^{\alpha p - 1} \delta r_i, \\ \frac{\partial e_{\mathcal{M}}^p}{\partial d} \delta d = -\frac{\alpha \beta p}{n} d^{-\frac{\alpha\beta p + n}{n}} \left( \sum_{j=1}^{n-1} r_j^\beta \gamma_j + P^{-\beta} \gamma_n \right)^{\alpha p} \delta d. \end{cases}$$

Comme le nombre de points est constant, la variation de la contrainte est nulle :

$$\delta\mathcal{C}(\mathcal{M}; \delta\mathcal{M}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \int (d + \varepsilon d) - \int d \right) = \int \delta d = 0.$$

On en déduit, en utilisant la condition nécessaire d'Euler-Lagrange, que la variation de la fonction coût est donnée par :

$$\forall (\delta r_1, \dots, \delta r_{n-1}, \delta d), \quad \delta\mathcal{E}(\mathcal{M}; \delta\mathcal{M}) = 0, \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \delta d = 0. \quad (2.8)$$

L'étape suivante consiste à proposer des choix de fonctions valides  $\delta d$  et  $\delta r_i$  afin de dériver des conditions nécessaires sur la solution. On remarque que la seule contrainte dans ces choix réside dans la fonction  $\delta d$  qui doit vérifier  $\int_{\Omega} \delta d = 0$ .

*Ratios d'anisotropie optimaux.* Les choix particuliers  $\delta d = 0$  et  $r_k = 0$  pour  $k \neq i$  impliquent que  $\frac{\partial e^p_{\mathcal{M}}}{\partial r_k} = 0$  pour  $k \neq i$ . Avec ces choix de fonctions, la Condition (2.8) se simplifie en :

$$\int_{\Omega} \alpha \beta p d^{-\frac{\alpha \beta p}{n}} \left( r_i^{\beta-1} \gamma_i - \frac{P^{-\beta}}{r_i} \gamma_n \right) \left( \sum_{j=1}^{n-1} r_j^{\beta} \gamma_j + P^{-\beta} \gamma_n \right)^{\alpha p - 1} \delta r_i = 0,$$

pour toute fonction  $\delta r_i$ . Comme pour tout  $i$  les fonctions  $d$ ,  $r_i$  et  $\gamma_i$ ,  $P$  et les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $p$  sont supposées strictement positives, la condition précédente est équivalente à l'égalité :

$$r_i^{\beta-1} \gamma_i - \frac{P^{-\beta}}{r_i} \gamma_n = 0.$$

L'égalité précédente peut aussi s'écrire pour  $i \in [1, n-1]$  avec des choix de fonctions similaires. Par conséquent, on en déduit les quotients d'anisotropie comme des fonctions de  $P$  :

$$r_i = \left( \frac{\gamma_n}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{\beta}} P^{-1}, \quad \text{pour } i \in [1, n-1]. \quad (2.9)$$

En utilisant la définition de  $P$  et en multipliant les  $n-1$  égalités précédentes, on obtient :

$$P = \gamma_n^{\frac{n-1}{\beta}} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right)^{-\frac{1}{\beta}} P^{-n+1} \implies P = \gamma_n^{\frac{1}{\beta}} \left( \prod_{j=1}^n \gamma_j \right)^{-\frac{1}{n\beta}}. \quad (2.10)$$

En remplaçant l'expression finale de  $P$  dans (2.9), on peut exprimer, indépendamment de  $P$ , chaque ratio d'anisotropie :

$$r_i = \gamma_i^{-\frac{1}{\beta}} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{n\beta}}, \quad \text{pour } i \in [1, n-1]. \quad (2.11)$$

Pour calculer la densité, on fait le choix valide  $\delta r_i = 0$  pour tout  $i$ . La condition nécessaire devient alors :

$$\forall \delta d, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial e^p_{\mathcal{M}}}{\partial d} \delta d = 0 \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \delta d = 0.$$

On obtient que  $\frac{\partial e_{\mathcal{M}}^p}{\partial d}$  doit être constant. Il existe donc une constante  $K_1$  telle que :

$$-\frac{\alpha\beta p}{n} d^{-\frac{\alpha\beta p+n}{n}} \left( \sum_{j=1}^{n-1} r_j^\beta \gamma_j + P^{-\beta} \gamma_n \right)^{\alpha p} = K_1.$$

En reprenant les expressions de  $P$  (2.10) et  $r_i$  (2.11), on a :

$$\sum_{j=1}^{n-1} r_j^\beta \gamma_j + P^{-\beta} \gamma_n = 2 \left( \prod_{j=1}^n \gamma_j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

La densité vérifie alors :

$$d = K_2 \left( \prod_{j=1}^n \gamma_j \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}}.$$

Finalement, la constante  $K_2$  est choisie telle que la contrainte sur la complexité soit vérifiée.

On a alors :

$$d = N \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{i=j}^n \gamma_j \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}} \right)^{-1} \left( \prod_{j=1}^n \gamma_j \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}}.$$

*Solutions optimales  $\mathbf{L}^p$ .* Les tailles optimales  $h_i$  ou, de manière équivalente, les valeurs propres optimales  $\lambda_i$  de  $\mathcal{M}_{opt}$ , sont obtenues en utilisant l'inverse du changement de variables :

$$\begin{aligned} h_i &= d^{\frac{1}{n}} r_i \\ &= N^{-\frac{1}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{-\frac{\alpha p}{n(\alpha\beta p+n)}} \gamma_i^{-\frac{1}{\beta}} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{n\beta}} \\ &= N^{-\frac{1}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{\beta(\alpha\beta p+n)}} \gamma_i^{-\frac{1}{\beta}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i &= h_i^{-2} \\ &= N^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}} \right)^{-\frac{2}{n}} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{-\frac{2}{\beta(\alpha\beta p+n)}} \gamma_i^{\frac{2}{\beta}}. \end{aligned}$$

*Solution formelle pour la norme  $\mathbf{L}^\infty$ .* Formellement, en utilisant le passage à la limite  $p \rightarrow \infty$ , on obtient le comportement asymptotique de la métrique basée sur la norme  $\mathbf{L}^\infty$  :

$$\begin{aligned} h_i &= N^{-\frac{1}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\frac{1}{n}} \gamma_i^{-\frac{1}{\beta}}, \\ \lambda_i &= N^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{-\frac{2}{n}} \gamma_i^{\frac{2}{\beta}}. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.4 La simplicité du modèle d'erreur  $e_{\mathcal{M}}$  permet une résolution analytique du problème minimisant l'erreur  $e_{\mathcal{M}}$  en norme  $\mathbf{L}^p$ . Cependant, il semble envisageable de minimiser numériquement ce modèle d'erreur en utilisant les algorithmes de minimisation différentiable sur des variétés [1]. Par exemple, un tel traitement semble nécessaire pour des modèles d'erreur non linéaires.

### 2.3.3 Unicité et propriétés de la métrique multi-échelles optimale

On précise dans un premier temps la notion de l'ordre de convergence en maillages continus en  $n$  dimensions puis on étudie l'unicité de la solution.

#### Ordre de convergence

**Définition 2.1** Une suite de maillages continus  $(\mathcal{M}_N)_N$  de complexités croissantes  $\mathcal{C}(\mathcal{M}_N) = N$  converge à l'ordre  $k$  en norme  $\mathbf{L}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , si on a :

$$\|e_{\mathcal{M}_N}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^p} \leq Cst N^{-k/n}. \quad (2.12)$$

Une simple analogie avec une grille régulière en trois dimensions conduit à considérer que  $N = O((h_x h_y h_z)^{-1}) = O((h^3)^{-1})$ . L'Estimation (3.9) devient alors :

$$\|e_{\mathcal{M}_N}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^p} \leq Cst h^k.$$

Comme le maillage continu optimal à complexité fixée existe et est explicité complètement par notre analyse, il est possible d'évaluer l'erreur d'interpolation optimale. En utilisant la solution de (2.7), on réécrit, dans un premier temps, le modèle au point :

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{M}_{opt}} &= \left( \sum_{i=1}^n h_i^\beta \gamma_i \right)^\alpha \\ &= N^{-\frac{\alpha\beta}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}} \right)^{\frac{\alpha\beta}{n}} \left( \sum_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{1}{(\alpha\beta p+n)}} \right)^\alpha \\ &= n^\alpha N^{-\frac{\alpha\beta}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}} \right)^{\frac{\alpha\beta}{n}} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{\alpha}{(\alpha\beta p+n)}}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\|e_{\mathcal{M}_{opt}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^p} = \left( \int_{\Omega} e_{\mathcal{M}_{opt}}^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^\alpha N^{-\frac{\alpha\beta}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{k=1}^n \gamma_k \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha\beta p+n}} \right)^{\frac{\alpha\beta p+n}{np}}.$$

Par conséquent, à partir de l'erreur optimale précédente, on obtient l'estimation de l'ordre de convergence suivante :

$$\|e_{\mathcal{M}_{opt}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}^p} \leq \frac{K}{N^{\frac{\alpha\beta}{n}}}.$$

**Proposition 2.3** L'ordre de convergence du maillage global est donné par le produit  $\alpha\beta$ , où les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  définissent le modèle d'erreur local :

$$e_{\mathcal{M}} = \left( \sum_{i=1}^n h_i^\beta \gamma_i \right)^\alpha,$$

### Unicité de la solution

On montre par une preuve directe que le maillage optimal obtenu minimise réellement l'erreur du modèle et qu'il est unique. On considère  $\mathcal{M}$  un maillage continu quelconque défini par  $n - 1$  ratios d'anisotropie  $r_i$  pour  $i \in [1, n - 1]$  et  $d$  une densité décrite sous la forme générale  $d = N(\int_{\Omega} f)^{-1} f$ . On rappelle que  $r_i$  pour  $i \in [1, n - 1]$  et  $f$  sont des fonctions strictement positives. A partir de la Relation (2.7), l'erreur commise sur  $\mathcal{M}$  est donnée par :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = N^{-\frac{\alpha p}{n}} \left( \int_{\Omega} f \right)^{-\frac{\alpha \beta p}{n}} \int_{\Omega} f^{-\frac{\alpha \beta p}{n}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} r_i^{\beta} \gamma_i + \gamma_n \prod_{i=1}^{n-1} r_i^{-\beta} \right)^{\alpha p}.$$

L'erreur commise avec la solution optimale  $\mathcal{M}_{opt}$  est :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}_{opt}) = n^{\alpha p} N^{-\frac{\alpha \beta p}{n}} \left( \int_{\Omega} \left( \prod_{i=1}^n \gamma_i \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha \beta p + n}} \right)^{\frac{\alpha \beta p + n}{n}}.$$

Pour prouver que  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_{opt}) \leq \mathcal{E}(\mathcal{M})$ , on utilise une inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique. Cette inégalité provient de la concavité de la fonction  $\ln$  :

$$\ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^{\beta} \gamma_i \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( r_i^{\beta} \gamma_i \right) = \ln \left( \prod_{i=1}^n \gamma_i^{\frac{1}{n}} \right),$$

car on a  $\prod_{i=1}^n r_i = 1$ . En substituant la valeur de  $r_n$ , on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n-1} r_i^{\beta} \gamma_i + \gamma_n \prod_{i=1}^{n-1} r_i^{-\beta} \geq n \left( \prod_{i=1}^n \gamma_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Finalement, si on note

$$g = \left( \prod_{i=1}^n \gamma_i \right)^{\frac{\alpha p}{\alpha \beta p + n}},$$

on a alors

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\mathcal{M}_{opt})^{\frac{n}{\alpha \beta p + n}} = n^{\frac{\alpha \beta p n}{\alpha \beta p + n}} N^{-\frac{\alpha \beta p}{\alpha \beta p + n}} \int_{\Omega} g, \\ \mathcal{E}(\mathcal{M})^{\frac{n}{\alpha \beta p + n}} \geq n^{\frac{\alpha p n}{\alpha \beta p + n}} N^{-\frac{\alpha \beta p}{\alpha \beta p + n}} \left( \int_{\Omega} f \right)^{\frac{\alpha \beta p}{\alpha \beta p + n}} \left( \int_{\Omega} f^{-\frac{\alpha \beta p}{n}} g^{\frac{\alpha \beta p + n}{n}} \right)^{\frac{n}{\alpha \beta p + n}}. \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left( \int_{\Omega} f^{\frac{\alpha \beta p}{\alpha \beta p + n}} \left( \frac{g}{f^{\frac{\alpha \beta p}{\alpha \beta p + n}}} \right) \right) \leq \left( \int_{\Omega} f \right)^{\frac{\alpha \beta p}{\alpha \beta p + n}} \left( \int_{\Omega} f^{-\frac{\alpha \beta p}{n}} g^{\frac{\alpha \beta p + n}{n}} \right)^{\frac{n}{\alpha \beta p + n}}, \quad (2.13)$$

comme on a

$$\begin{cases} 1 + \frac{n}{\alpha \beta p} \geq 1, \\ 1 + \frac{\alpha \beta p}{n} \geq 1, \\ \frac{1}{1 + \frac{n}{\alpha \beta p}} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha \beta p}{n}} = 1. \end{cases}$$

De plus, la Relation (2.13) implique que  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_{opt}) \leq \mathcal{E}(\mathcal{M})$ , pour tout maillage  $\mathcal{M}$ . Comme le Problème d'optimisation (2.7) est strictement convexe, la solution est unique.

### 2.3.4 Le cas de l'interpolation linéaire

On décrit pour l'interpolation linéaire les maillages continus multi-échelles pour les normes usuelles  $\mathbf{L}^p$  en trois dimensions. Dans ce cas, le modèle d'erreur est donné par  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$ , il se simplifie en :

$$e_{\mathcal{M}} = \left( \sum_{i=1}^3 h_i^2 \gamma_i \right).$$

L'orientation de  $\mathcal{M}$  est donnée par sa base propre  $\mathcal{R} = (\mathbf{v}_i)_{i=1,3}$ . Les coefficients  $\gamma_i$  sont donnés par  $\gamma_i = |\mathbf{v}_i^t H \mathbf{v}_i|$ . On rappelle dans un premier temps la distribution optimale pour les tailles  $(h_i)_{i=1,3}$  de  $\mathcal{M}$ . On donne ensuite les directions optimales.

#### Distribution de tailles optimale

Le maillage optimal  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}$  dépend du hessien  $H$  de la fonction  $u$  et s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} = \mathcal{R} \Lambda \mathbf{t}\mathcal{R},$$

avec  $\Lambda$  la matrice diagonale :

$$\Lambda = \left( \det \left( \prod_{k=1}^3 \gamma_k \right)^{-\frac{1}{2p+3}} \gamma_i \right)$$

Si on note  $\Gamma$  la matrice diagonale :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \gamma_2 & \\ & & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

et que l'on souhaite avoir la solution qui correspond à une complexité égale à  $N$ , alors la solution s'écrit :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} = D_{\mathbf{L}^p} \det(\Gamma)^{\frac{-1}{2p+3}} \mathcal{R} \Gamma \mathbf{t}\mathcal{R},$$

où  $D_{\mathbf{L}^p}$  est un coefficient de normalisation global :

$$N^{\frac{2}{3}} \left( \int_{\Omega} \det(\Gamma)^{\frac{2p}{2p+3}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

En norme  $\mathbf{L}^\infty$ , la métrique est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{L}^\infty} = D_{\mathbf{L}^\infty} \mathcal{R} \Gamma \mathbf{t}\mathcal{R}.$$

Les relations précédentes donnent une information quantitative de l'impact du choix de la norme sur la métrique. La métrique  $\mathbf{L}^\infty$  prescrit une taille très fine dans les zones où les coefficients  $\gamma_i$  sont grands. Dans le cas de la métrique multi-échelles en norme  $\mathbf{L}^p$ ,  $p \geq 1$ , les valeurs propres sont multipliées par un facteur de mise à l'échelle  $\det(\Gamma)^{\frac{-1}{2p+3}}$  qui tend à être petit pour de grandes variations des  $\gamma_i$ . Par conséquent, plus  $p$  est proche de 1 plus la métrique est sensible aux petites échelles de la solution. Cette analyse justifie le nom de maillage multi-échelles et cette sensibilité est vérifiée dans les applications numériques.

### Directions optimales

En trois dimensions, pour une distribution d'orientation  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,3}$ , l'erreur d'interpolation optimale est donnée par :

$$\|u - \pi_{\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}} u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = 3N^{-\frac{2}{3}} \left( \int_{\Omega} (\det(\Gamma))^{\frac{p}{2p+3}} \right)^{\frac{2p+3}{3p}}.$$

On peut alors minimiser l'erreur précédente en chaque point en recherchant l'orientation qui minimise :

$$\det(\Gamma)^{\frac{p}{2p+3}}.$$

Comme  $x \mapsto x^{\frac{p}{2p+3}}$  est une fonction croissante, il est équivalent de minimiser  $x$ , soit le déterminant  $\det(\Gamma)$ . L'interprétation géométrique de  $\det(\Gamma)$  est simplement le volume du cube de côtés  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,3}$  mais avec des longueurs calculées dans la métrique du hessien. On peut minimiser ce volume, en choisissant judicieusement les vecteurs  $\mathbf{v}_i$ . On suppose ici que le hessien  $H$  de  $u$  est défini positif. Si tel n'est pas le cas, on considère  $|H|$  à la place de  $H$ . On note  $(\lambda_i)_{i=1,3}$  les valeurs propres de  $H$  et  $(\mathbf{u}_i)_{i=1,3}$  ses directions principales. La longueur dans la métrique de  $H$  de la direction  $\mathbf{v}_1$  s'écrit :

$$|{}^t \mathbf{v}_1 H \mathbf{v}_1| = {}^t \mathbf{v}_1 H \mathbf{v}_1 = \sum_{k=1}^3 \lambda_k ({}^t \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_k)^2 \geq \min_{k=1,3} (|\lambda_k|).$$

Cette longueur est minimale si le vecteur  $\mathbf{v}_1$  est aligné avec le vecteur propre de  $H$  associé à la plus petite valeur propre. En poursuivant ce raisonnement, sur les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  restants, on associe à chaque fois le vecteur  $\mathbf{v}_i$  à la direction  $\mathbf{u}_j$  qui est associée à la plus petite valeur propre restante. Ainsi, le déterminant  $\det(\Gamma)$  est minimal lorsque les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  sont alignés avec les directions principales du hessien de la solution  $u$ . On déduit que la métrique optimale en orientations et étirements est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} = D_{\mathbf{L}^p} \det(|H|)^{\frac{-1}{2p+3}} |H|,$$

avec

$$D_{\mathbf{L}^p} = N^{\frac{2}{3}} \left( \int_{\Omega} \det(|H|)^{\frac{2p}{2p+3}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

### Convergence en maillage

L'utilisation des résultats des deux sections précédentes prouve dans le cas particulier de l'erreur d'interpolation linéaire la proposition suivante :

**Proposition 2.4** *Pour une fonction  $u$  deux fois continûment différentiable sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et le maillage continu  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(u)$  optimal pour  $u$  en norme  $\mathbf{L}^p$ , on a :*

- $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(u)$  est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} = D_{\mathbf{L}^p} \det(|H|)^{\frac{-1}{2p+3}} |H|, \quad \text{avec } D_{\mathbf{L}^p} = N^{\frac{2}{3}} \left( \int_{\Omega} \det(|H|)^{\frac{2p}{2p+3}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

- $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(u)$  est unique.

- $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}(u)$  est localement alignée avec la base propre du hessien  $H$  de  $u$  et a les mêmes ratios d'anisotropie.
- L'erreur d'interpolation continue optimale en norme  $\mathbf{L}^p$  est donnée :

$$\|u - \pi_{\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}} u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = 3 N^{-\frac{2}{3}} \left( \int_{\Omega} |\det(H)|^{\frac{p}{2p+3}} \right)^{\frac{2p+3}{3p}}.$$

- Pour une suite de maillages continus emboîtés  $(\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}^N)_{N=1 \dots \infty}$  optimaux indexés par leur complexité  $N$ , l'ordre de convergence en maillage asymptotique vérifie :

$$\|u - \pi_{\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}^N} u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \frac{Cst}{N^{2/3}}, \quad (2.14)$$

ce qui correspond à un **ordre deux** de convergence en maillage.

Une estimation de l'erreur d'interpolation optimale similaire a été prouvée par Chen et al [9]. Cependant, leur estimation est calculée sur un maillage existant qui doit vérifier un certain nombre d'hypothèses comme l'orientation et la distribution. Dans notre cas, l'estimation est indépendante du maillage discret unité qui sera généré. Cela se traduit par une formulation explicite des constantes dans l'estimation.

## 2.4 ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES

On illustre l'utilisation des maillages continus sur des exemples analytiques en deux et trois dimensions. Pour une fonction  $u$  donnée, on cherche le maillage optimal en norme  $\mathbf{L}^p$  minimisant l'erreur d'interpolation linéaire sur tout le domaine de calcul. On vérifie également l'ordre de convergence prédit par la Proposition 2.4. On introduit tout d'abord la mise en œuvre numérique.

### 2.4.1 Quelques aspects algorithmiques

L'algorithme d'adaptation dans le cas analytique est composé de trois phases :

- projection de la fonction  $u$  sur le maillage courant pour obtenir  $\Pi_h u$ ,
- construction de  $\mathcal{M}_{opt}$  en norme  $\mathbf{L}^p$  à complexité  $N$  fixée,
- génération d'un maillage unité pour  $\mathcal{M}_{opt}$ .

On se concentre dans ce qui suit sur la construction du maillage continu optimal.

### Construction numérique du maillage continu optimal

Étant donné un maillage initial  $\mathcal{H}$ , une fonction  $u$  et son interpolé linéaire  $\Pi_h u$  sur  $\mathcal{H}$ , on cherche à construire le maillage optimal minimisant l'erreur d'interpolation linéaire en norme  $\mathbf{L}^p$ . D'après la Proposition 2.4, il est nécessaire de connaître le hessien  $H$  de la solution  $u$ . En pratique, on ne dispose généralement pas de cette information, on doit donc reconstruire  $H$  à partir de l'interpolé linéaire  $\Pi_h u$ . On peut se reporter à [3, 23, 25] pour des techniques classiques de reconstruction de hessien ainsi que des études de convergence. Les méthodes utilisées dans cette thèse sont brièvement rappelées dans le Chapitre 3, Section 3.1.1.

On suppose désormais que l'on a un opérateur de reconstruction de dérivée  $\nabla_R$  qui agit sur une solution numérique continue linéaire par morceaux,  $\mathcal{P}^1$  par élément, et donne une dérivée également  $\mathcal{P}^1$  par élément.

*Algorithme.* On note  $u_i$  la solution au sommet  $P_i$ . Pour une complexité  $N$  ou un niveau d'erreur  $\varepsilon$ , on cherche la représentation sur  $\mathcal{H}$  du maillage continu optimal en norme  $\mathbf{L}^p$ . Cette représentation est donnée par un champ de métriques  $\mathcal{M}_i$  définies en chaque sommet du maillage. L'algorithme se décompose en :

1. reconstruction à partir de la solution numérique  $u_i$  d'un gradient  $\mathbf{g}_i$  au sommet  $P_i$  :

$$\mathbf{g}_i = \nabla_R u_i,$$

2. reconstruction à partir de  $u_i$  et  $\mathbf{g}_i$  d'un hessien au sommet  $P_i$  :

$$H_i = \nabla_R^2 u_i = \nabla_R \mathbf{g}_i,$$

3. diagonalisation des matrices hessiennes  $H_i$  reconstruites aux sommets et troncation des valeurs propres  $(\lambda_i^k)_{k=1\dots 3}$  :

$$|H_i| = \mathcal{R}_i \begin{pmatrix} \max(|\lambda_i^1|, \epsilon_{num}) & & \\ & \max(|\lambda_i^2|, \epsilon_{num}) & \\ & & \max(|\lambda_i^3|, \epsilon_{num}) \end{pmatrix} {}^t \mathcal{R}_i,$$

une valeur classique de la constante  $\epsilon_{num}$  est  $10^{-10}$ .

4. normalisation locale en norme  $\mathbf{L}^p$  qui donne le champ de métriques :

$$\mathcal{M}_i = \det(|H_i|)^{-\frac{1}{2p+3}} |H_i|.$$

5. Calculer la complexité du champ  $\mathcal{M}_i$  :

$$c = \sum_{K \in \mathcal{H}} \frac{|K|}{4} \left( \sum_{P_j \in K} \sqrt{\det(\mathcal{M}_j)} \right),$$

puis normaliser le champ de métrique  $\mathcal{M}_i$  pour obtenir la complexité  $N$  désirée :

$$\mathcal{M}_i = \left( \frac{N}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{M}_i.$$

Si on désire contrôler un niveau d'erreur  $\varepsilon$  au lieu de la complexité  $N$ , alors la normalisation du champ de métriques est donnée par :

$$\mathcal{M}_i = \frac{3}{\varepsilon} c^{\frac{3}{p}} \mathcal{M}_i.$$

Cette normalisation est la simple application de la Proposition 2.4. Une normalisation sur la complexité est généralement utilisée lors de calculs stationnaires en mécanique de fluides alors qu'un unique niveau d'erreur est préféré lors de calculs instationnaires afin de garantir une consistance globale sur tout l'intervalle de temps de la simulation.

REMARQUE 2.5 Dans les exemples analytiques où la fonction  $u$  est donnée, on peut se demander pourquoi on n'utilise pas le véritable hessien analytique. La réponse est simplement pour être plus proche des problèmes réels où la solution  $u$  est une solution numérique.

### Estimation de l'ordre de convergence

Afin de vérifier l'ordre de convergence en maillages, on construit les maillages unités qui correspondent à des maillages continus pour des complexités croissantes pour la fonction  $u$  en norme  $\mathbf{L}^p$  :

$$N, 2N, 4N, 8N.$$

On note les maillages unités correspondant aux maillages continus :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}_N(u) & \mathcal{M}_{2N}(u) & \mathcal{M}_{4N}(u) & \mathcal{M}_{8N}(u) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{H}_N(u) & \mathcal{H}_{2N}(u) & \mathcal{H}_{4N}(u) & \mathcal{H}_{8N}(u) \end{array}$$

On estime ensuite l'erreur d'interpolation sur chaque maillage :

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}_k) = \|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega), \mathcal{H}_k}, \text{ avec } k \in [N, 2N, 4N, 8N],$$

en utilisant une quadrature numérique de type Gauss sur chaque élément [17]. On représente alors l'erreur  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_k)$  en fonction du nombre de sommets du maillage  $\mathcal{H}_k$ . L'ordre de convergence est alors donné par la pente de la droite représentant le logarithme du nombre de points du maillage en fonction du logarithme de l'erreur d'interpolation sur ce maillage. Cette représentation est utilisée sur les Figures 2.5, 2.8 et 2.6.

#### 2.4.2 Illustration des sensibilités des normes $\mathbf{L}^p$ et de la convergence asymptotique

On applique l'adaptation de maillage multi-échelles sur deux fonctions régulières, une en deux dimensions et l'autre en trois dimensions. On considère dans chaque cas une adaptation en norme  $\mathbf{L}^p$  avec  $p \in [1, \infty]$ .

*Exemple 2D.* On définit la fonction  $f_1$  sur le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  :

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 0.01 \sin(50xy) & \text{si } xy \leq \frac{\pi}{50}, \\ \sin(50xy) & \text{sinon si } xy \leq 2\frac{\pi}{50}, \\ 0.01 \sin(50xy) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction possède à la fois des variations d'amplitude 1 et des variations beaucoup plus faibles, d'amplitude 0.01. Une section suivant la droite  $y = 0$  illustre ces deux échelles de variation, cf. Figure 2.5. Trois adaptations pour les normes  $\mathbf{L}^1$ ,  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{L}^4$  ont été réalisées. La Figure 2.5 montre les ordres de convergence obtenus sur les suites de maillages correspondants à chaque norme. Elle représente l'erreur d'interpolation en fonction du nombre de points  $N$ . Quelque soit la norme, on peut dissocier sur ce graphe trois zones qui dépendent de  $N$  :

- pour  $N$  de 1 à 1000, on obtient une convergence d'ordre deux,
- pour  $N$  de 1000 à 9000, la convergence a un ordre inférieur ou égal à un,
- pour  $N > 9000$ , la convergence d'ordre deux est obtenue à nouveau.

Ce phénomène s'explique par les caractéristiques de la fonction. L'ordre deux en maillage est d'abord obtenu sur les variations de la solution de plus grandes amplitudes. Tant que la taille de maille n'atteint pas la précision suffisante pour capter les variations d'amplitudes 0.01,

elles sont ignorées. Par contre, dès que la taille de maille devient suffisante, on a une phase de convergence d'ordre 1 avant de finalement capter toutes les échelles de la solution à l'ordre deux.

Toutes les normes ne sont pas équivalentes sur le nombre de points nécessaires pour atteindre l'ordre deux asymptotique. La norme  $\mathbf{L}^1$  capte l'ordre asymptotique dès 3000 points alors que 9000 points sont nécessaires pour la norme  $\mathbf{L}^4$ . Cela s'explique par la sensibilité des normes. Pour une norme  $\mathbf{L}^p$ , plus  $p$  est grand, plus cette norme est sensible aux variations de fortes amplitudes. Cette sensibilité est visible directement sur les maillages adaptés, Figure 2.7.

*Exemple 3D.* On considère la fonction  $f_2$  qui est une extension de  $f_1$  en trois dimensions :

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} 0.1 \sin(50 \mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \leq \frac{-\pi}{50}, \\ \sin(50 \mathbf{x}) & \text{si } \frac{-\pi}{50} < \mathbf{x} \leq \frac{2\pi}{50}, \\ 0.1 \sin(50 \mathbf{x}) & \text{si } \frac{2\pi}{50} < \mathbf{x}. \end{cases}$$

avec  $\mathbf{x} = (x - 0.4)(y - 0.4)(z - 0.4)$ . Dans ce cas, des adaptations en norme  $\mathbf{L}^1$ ,  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{L}^\infty$  ont été réalisées. On remarque que les mêmes conclusions s'appliquent en trois dimensions. L'ordre asymptotique est capturé dès 50 000 points, Figure 2.8 en haut en droite. Les maillages adaptés de surface sont illustrés Figure 2.8 et ceux de volume Figure 2.9. Que ce soit sur le maillage de surface ou de volume, plus  $p$  est proche de 1, plus les faibles variations de  $f_2$  sont représentées dans le maillage.

### 2.4.3 Sur la validation de l'ordre de convergence asymptotique

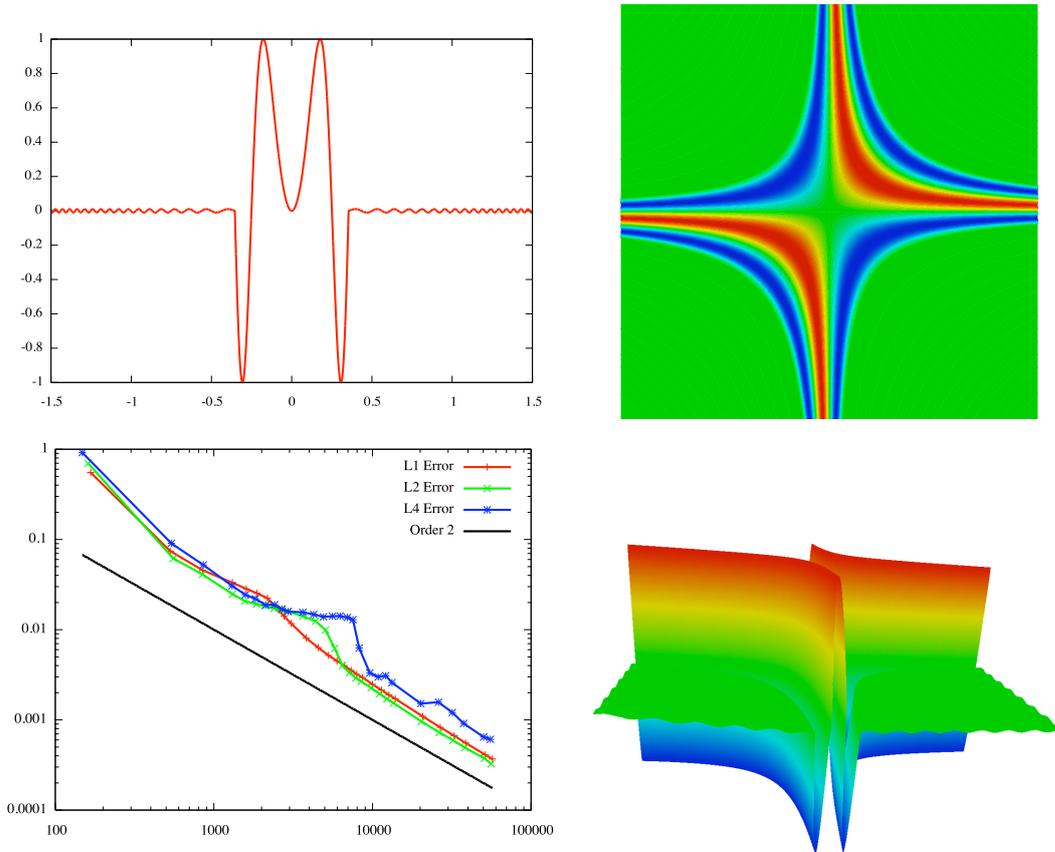
L'Estimation (2.14) de l'ordre de convergence en maillage est continue. Cela signifie qu'elle est valide asymptotiquement, *i.e.*, pour des maillages dont la taille de maille tend vers zéro. Cependant, on espère en pratique que cette convergence soit atteinte pour des tailles de maillage raisonnables. Les deux exemples précédents l'ont démontrés numériquement puisqu'en deux dimensions, 9 000 points au maximum ont été nécessaires et 50 000 en trois dimensions. Cependant, il n'y avait pas de différences majeures entre les normes  $p \in [1, \infty[$ . On montre sur un exemple en deux dimensions comment l'estimation asymptotique est mise en défaut en pratique.

On illustre ce principe sur l'exemple suivant :

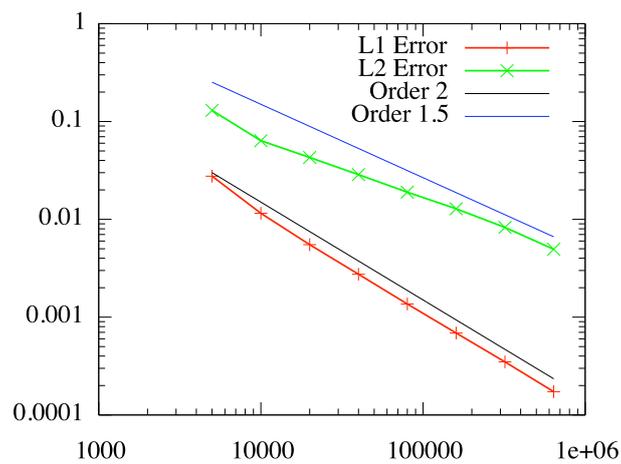
$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad f_3(x, y) = 0.1 \sin(50x) + \operatorname{atan} \left( \frac{0.1}{\sin(5y) - 2x} \right).$$

Cette fonction, bien que de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , présente une forte variation de gradient. Ses iso-valeurs sont représentées sur la Figure 2.10. Trois adaptations ont été réalisées en norme  $\mathbf{L}^p$  avec  $p = [1, 2, \infty]$ . La Figure 2.11 montre les maillages, à nombre de points équivalents (environ 100 000), obtenus pour la norme  $\mathbf{L}^1$  et  $\mathbf{L}^\infty$ . La norme  $\mathbf{L}^\infty$  est complètement insensible aux faibles variations de la fonction. Tous les points sont donc insérés dans le voisinage du « choc » qui est dû à la fonction  $\operatorname{atan}$  dans l'expression de  $f_3$ . À l'inverse, l'adaptation en norme  $\mathbf{L}^1$  capture à la fois le « choc » et les faibles variations qui sont dues à la fonction sinus.

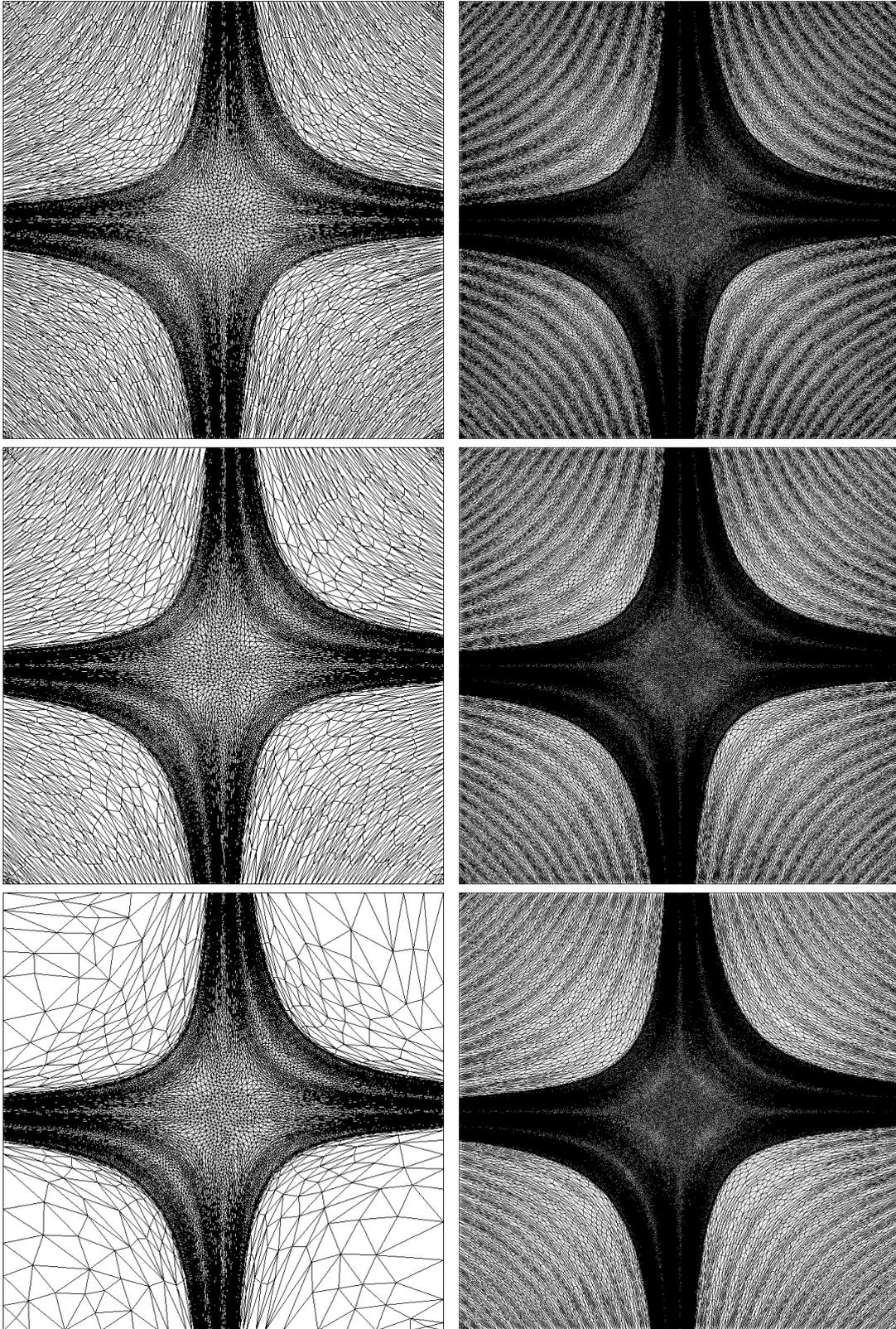
Les ordres de convergence en maillages sont représentés Figure 2.6. La norme  $\mathbf{L}^1$  atteint l'ordre deux très tôt pour 10 000 points alors que la norme  $\mathbf{L}^2$ , même à près d'un million de



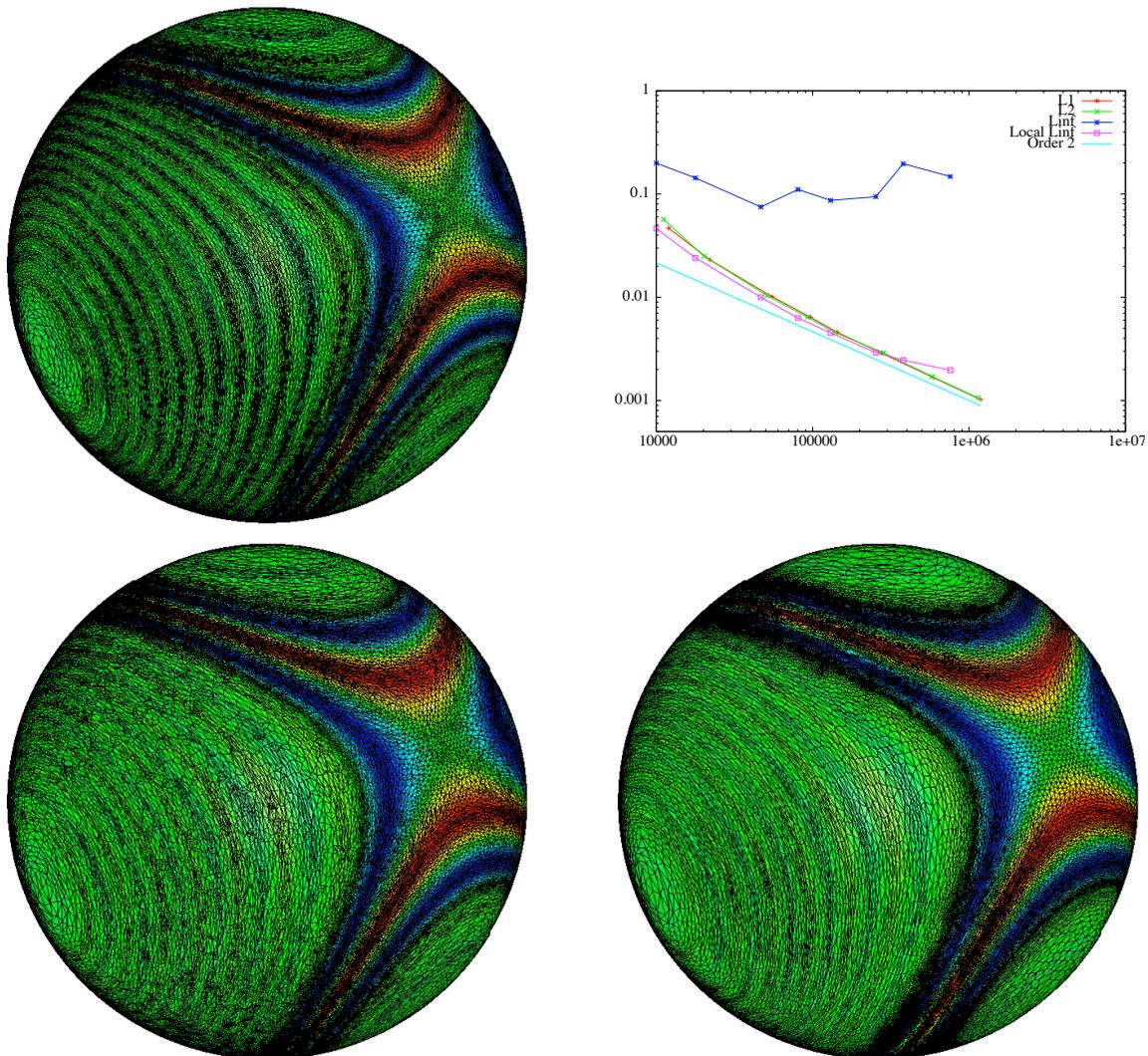
**Figure 2.5:** En haut à gauche, section suivant la droite  $y = 0$  pour la fonction  $f_1$ . En haut à droite, iso-valeurs de  $f_1$ . En bas à gauche, ordre de convergence en maillages. L'erreur d'interpolation sur  $f_1$  en norme  $\mathbf{L}^p$  est représentée en fonction du nombre de sommets des maillages. En bas à droite, représentation en trois dimensions des variations de  $f_1$ .



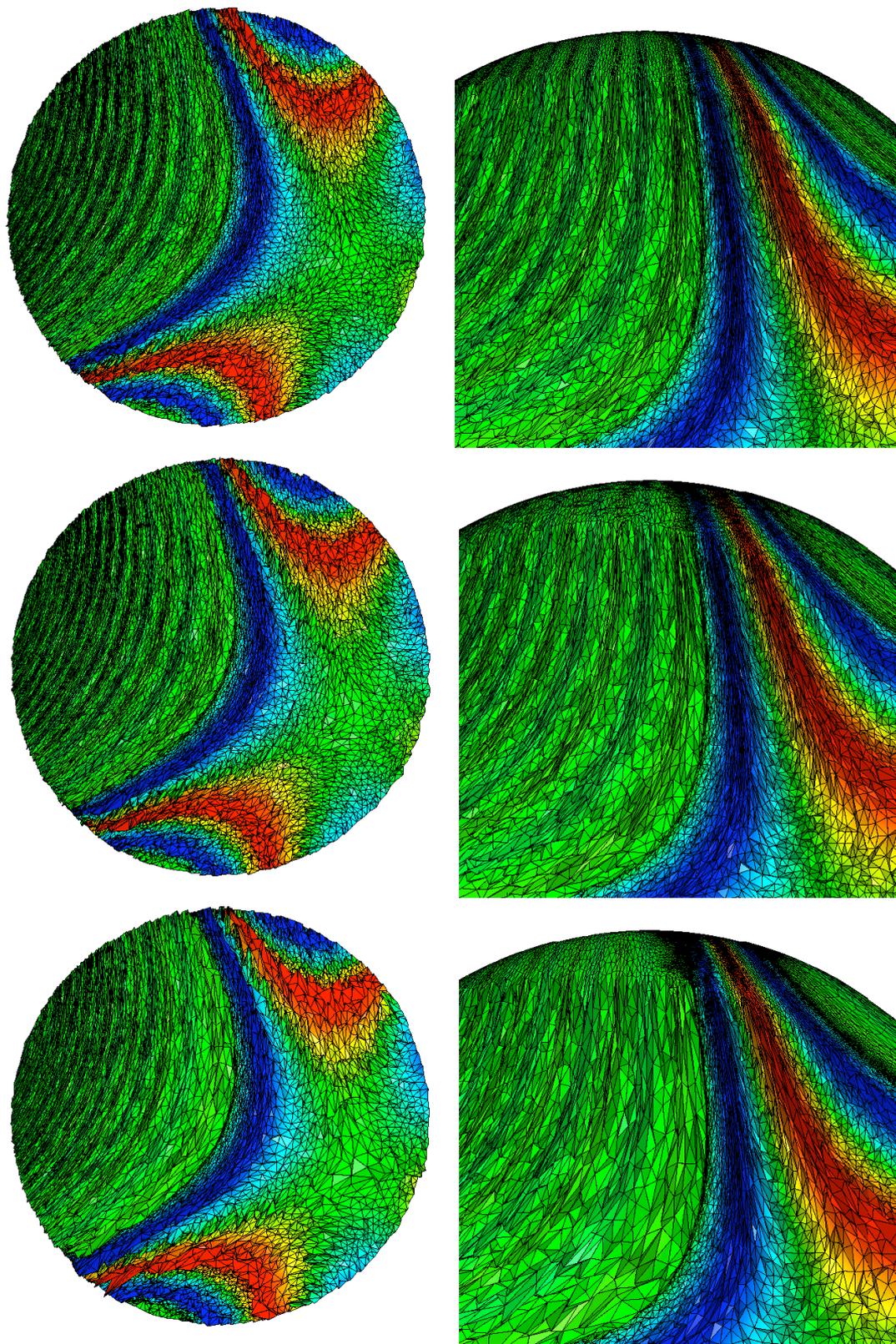
**Figure 2.6:** Ordre de convergence pour la fonction  $f_3$ .



**Figure 2.7:** Maillages adaptés pour la fonction  $f_1$  en norme  $\mathbf{L}^p$  avec  $p = [1, 2, 4]$ . Les maillages de gauche sont composés de 7000 sommets et de 140 000 à droite. De haut en bas, maillages en norme  $\mathbf{L}^1$ ,  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{L}^4$ .

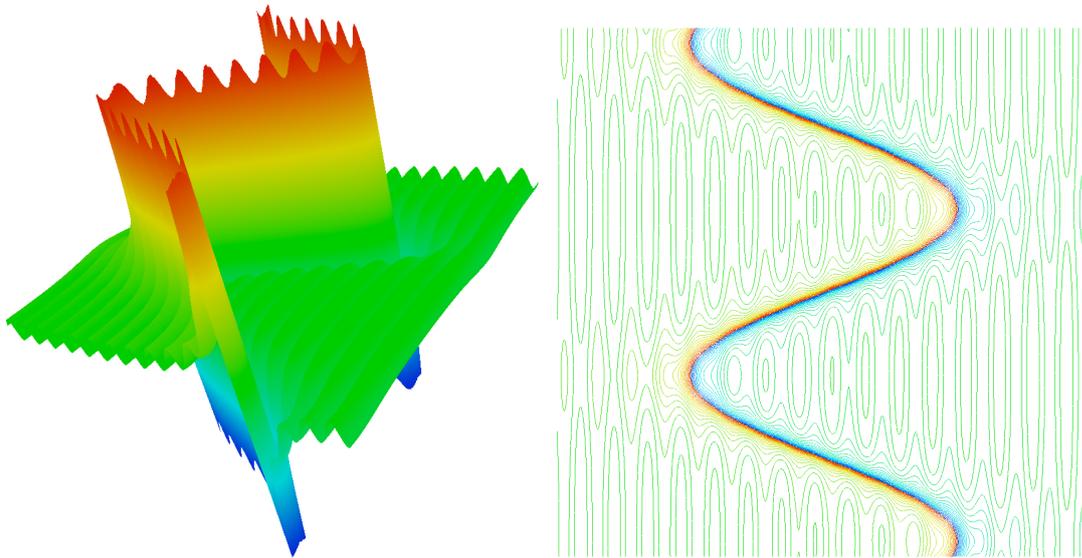


**Figure 2.8:** Maillages de surface adaptés minimisant l'erreur d'interpolation pour la fonction  $f_2$  en norme  $L^p$  avec  $p = [1, 2, \infty]$ . En haut à gauche, maillage en norme  $L^1$ , en bas à gauche, maillage en norme  $L^2$  et en bas à droite, maillage en norme  $L^\infty$ . Chaque maillage est composé d'environ 245 000 sommets. En haut à droite, erreur d'interpolation pour chaque norme en fonction du nombre de points.

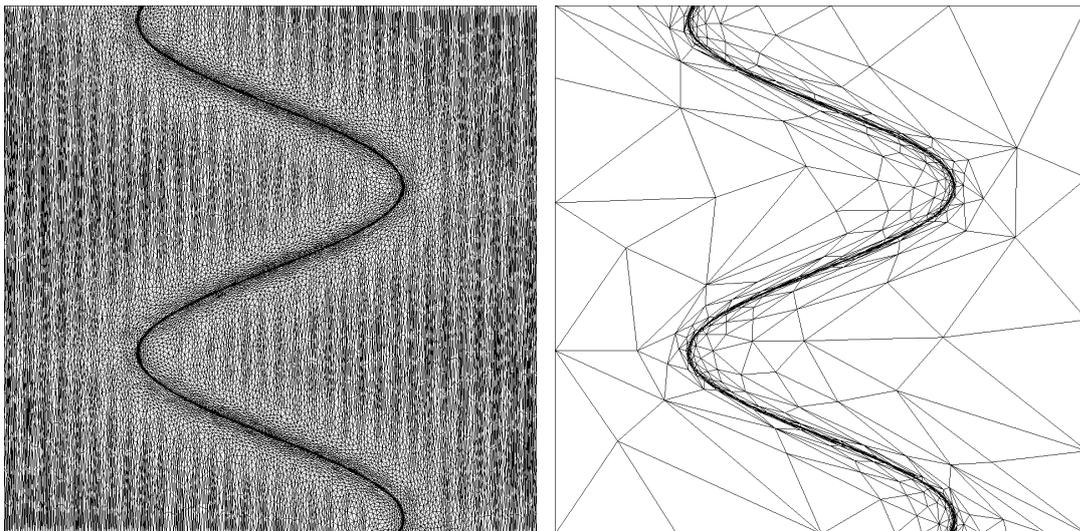


**Figure 2.9:** Coupes dans les maillages volumiques adaptés minimisant l'erreur d'interpolation pour la fonction  $f_2$  en norme  $\mathbf{L}^p$  avec  $p = [1, 2, \infty]$ . De haut en bas, maillages en norme  $\mathbf{L}^1$ ,  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{L}^\infty$ . Chaque maillage est composé d'environ 245 000 sommets.

points, n'arrive pas à atteindre la convergence d'ordre deux. Ce nombre de points est insuffisant pour capturer toutes les échelles de la solution. Dans ce cas, l'optimalité du maillage n'est validé numériquement que pour la norme  $L^1$ . Atteindre cette convergence dépend à la fois de la sensibilité de la norme utilisée ainsi que de la régularité de la fonction.



**Figure 2.10:** Représentation graphique des variations de  $f_3$  en 3D à gauche. À droite, iso-valeurs de  $f_3$ .



**Figure 2.11:** Maillages optimaux en norme  $L^1$  à gauche et  $L^\infty$  à droite pour la fonction  $f_3$ . Chaque maillage est composé d'environ 100 000 points.

## CONCLUSION

Si l'utilisation de maillages anisotropes pour contrôler l'erreur d'interpolation est assez ancienne [8], son efficacité reste souvent mystérieuse aux yeux de beaucoup. Afin de convaincre les plus sceptiques, on a démontré dans ce chapitre que minimiser l'erreur d'interpolation sur un maillage pouvait s'écrire comme un **problème continu**. Ce problème repose sur la définition d'un interpolé linéaire continu  $\pi_{\mathcal{M}}$  qui dépend du maillage continu  $\mathcal{M}$ . Le modèle d'erreur  $u - \pi_{\mathcal{M}} u$  en norme  $\mathbf{L}^1$  est globalement exact pour des fonctions quadratiques et localement exact pour des fonctions régulières  $\mathcal{C}^2$ , cf. Proposition 2.2.

Théoriquement, on montre que trouver le maillage continu qui minimise l'erreur d'interpolation globale en norme  $\mathbf{L}^p$  est un **problème bien posé** contrairement au cas discret. La solution continue est indexée par la complexité  $N$ . Une étude asymptotique sur  $N \rightarrow \infty$  démontre un **ordre deux** en convergence en maillage pour le processus adaptatif, cf. Proposition 2.4.

En pratique, on est en mesure de construire une représentation du maillage continu optimal en utilisant le concept de **maillage unité**. On vérifie également que l'ordre de convergence asymptotique est atteint en pratique pour des tailles de maille raisonnables dépendant de la sensibilité de la norme  $\mathbf{L}^p$ .

## 2.A FORMULES D'INTÉGRATION

Les résultats de cette annexe sont issus de [22].

*Notations.*  $\mathbf{x}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , ses composantes sont notées  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . On rappelle que  $\mathcal{B}_{I_n}$  est la boule unité de la métrique identité de  $\mathbb{R}^n$ . Elle est décrite par

$$\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}.$$

On note  $V_n(R)$  le volume défini par une sphère de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $R$ . Avec cette notation, on a  $V_n(1) = \mathcal{B}_{I_n}$ . Étant donné un vecteur d'indices  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  et une fonction polynomiale :

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \prod_i (x_i^2)^{p_i},$$

on donne une expression de l'intégrale :

$$W_n(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{B}_{I_n}} E(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \, d\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

La définition de  $E(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \prod_i (x_i^2)^{p_i}$  permet de calculer les monômes de puissance totale  $\sum_{i=1}^n p_i$  paire ou la valeur absolue des monômes de puissance totale impaire. En effet, si  $p_i = 1/2$  pour tout  $i$ , on a  $E(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \prod_i |x_i|$ . Enfin, l'intégrale sur  $V_n$  de toute fonction impaire est nulle par symétrie. On propose une formule de récurrence sur  $n$  pour évaluer (2.15). On considère le changement de variables suivant :

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, \cos(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

de jacobien  $|\sin(\theta)| = \sin(\theta)$ . Si on note  $\tilde{\mathbf{p}} = (p_1, \dots, p_{n-1})$  et  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , il vient en considérant le changement de variable précédent :

$$W_n(\mathbf{p}) = \int_0^\pi \left( \int_{V_{n-1}(\sin(\theta))} E(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}) \, d\tilde{\mathbf{x}} \right) (\cos^2(\theta))^{p_n} \sin(\theta) \, d\theta.$$

On transforme l'intégrale sur  $V_{n-1}(\sin(\theta))$  par une intégrale de  $V_{n-1}(1)$  par une simple division de chaque composante par  $\sin(\theta)$ . Ce changement de variables est donné par :

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \longrightarrow \frac{1}{\sin(\theta)} (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

et a pour jacobien  $\sin(\theta)^{n-1}$ . Il vient alors :

$$\int_{V_{n-1}(\sin(\theta))} E(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}) d\tilde{\mathbf{x}} = \left( \prod_{i=1}^{n-1} (\sin(\theta))^{2p_i+1} \right) W_{n-1}(\tilde{\mathbf{p}}).$$

$W_n(\mathbf{p})$  devient :

$$W_n(\mathbf{p}) = W_{n-1}(\tilde{\mathbf{p}}) \int_0^\pi \left( \prod_{i=1}^{n-1} (\sin(\theta))^{2p_i+1} \right) (\cos^2(\theta))^{p_n} \sin(\theta) d\theta.$$

On a finalement :

$$W_n(\mathbf{p}) = 2 W_{n-1}(\tilde{\mathbf{p}}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^{2\alpha-1} (\cos(\theta))^{2\beta-1} d\theta,$$

avec

$$\alpha = \frac{n+1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2} + p_n.$$

La dernière intégrale sur  $\theta$  est la fonction Beta. La table ci-dessous donne les exemples d'intégrale en deux et trois dimensions qui permettent d'intégrer des formes quadratiques sur  $V_n(1)$  :

$n$	1	$x_i$	$x_i x_j$	$x_i^2$	$ x_i $	$ x_i x_j $
2	$\pi$	0	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{4}{3}\pi$	0	0	$\frac{4}{15}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{8}{15}$

*Exemples d'applications.* Étant donnée une forme quadratique  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{x} H \mathbf{x} + {}^t \mathbf{x} G + c,$$

où  $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est une matrice symétrique,  $G = (g_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur et  $c \in \mathbb{R}$  une constante, alors on a les résultats d'intégration suivants en deux dimensions :

$$\begin{aligned} \int_{\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1} f(\mathbf{x}) &= \pi \left( \frac{1}{8} \text{trace}(H) + c \right), \\ \int_{\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1} f(\mathbf{x}) x_1 &= \frac{1}{4} \pi g_1, \\ \int_{\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq 1} f(\mathbf{x}) x_2 &= \frac{1}{4} \pi g_2. \end{aligned}$$

En trois dimensions, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} f(\mathbf{x}) &= \pi \left( \frac{2}{15} \text{trace}(H) + \frac{4}{3} c \right), \\ \int_{\|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} f(\mathbf{x}) x_1 &= \frac{4}{15} \pi g_1, \\ \int_{\|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} f(\mathbf{x}) x_2 &= \frac{4}{15} \pi g_2, \\ \int_{\|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} f(\mathbf{x}) x_3 &= \frac{4}{15} \pi g_3.\end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.-A. Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre. *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [2] A. Agouzal, K. Lipnikov, and Y. V. Vassilevski. Adaptive generation of quasi-optimal tetrahedral meshes. *East-West J.*, 7(4) :879–882, 1999.
- [3] F. Alauzet. *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides*. PhD thesis, Université Montpellier II, Montpellier, France, 2003.
- [4] T. Apel. *Anisotropic finite elements : Local estimates and applications*. Book Series : Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Stuttgart, 1999.
- [5] I. Babuska and A. K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13 :214–226, 1976.
- [6] M. Berzins. Solution-based mesh quality for triangular and tetrahedral meshes. In *Proc. of 6th Meshing Roundtable*, 1997.
- [7] W. Cao. On the error of linear interpolation and the orientation, aspect ratio, and internal angles of a triangle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43 :19–40, 2005.
- [8] M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau. Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25 :475–491, 1997.
- [9] L. Chen, P. Sun, and J. Xu. Optimal anisotropic simplicial meshes for minimizing interpolation errors in  $L^p$ -norm. *Math. Comp.*, 76(257) :179–204, 2007.
- [10] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [11] E. F. D’Azevedo and R. B. Simpson. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numer. Math.*, 59 :321–348, 1991.
- [12] L. Formaggia and S. Perotto. New anisotropic a priori error estimate. *Numer. Math.*, 89 :641–667, 2001.
- [13] M. Fortin, M.-G. Vallet, J. Dompierre, Y. Bourgault, and W. G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation : theory, validation and applications. In *Proc. of ECCOMAS CFD*, 1996.
- [14] P. J. Frey. *Yams*, a fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure. RT-0252, INRIA, 2001.
- [15] P. J. Frey and F. Alauzet. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :5068–5082, 2005.
- [16] W. Huang. Metric tensors for anisotropic mesh generation. *J. Comp. Phys.*, 204 :633–665, 2005.
- [17] V. I. Krylov and A. H. Stroud. *Approximate calculation of integrals*. Dover, 2006.
- [18] E. J. Nadler. *Piecewise linear approximation on triangulations of a planar regions*. PhD thesis, Brown university, Providence, 1985.
- [19] J. Peraire, J. Peiró, and K. Morgan. Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations. *J. Comp. Phys.*, 103 :269–285, 1992.
- [20] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *J. Comp. Phys.*, 72 :449–466, 1987.

- 
- [21] M. Picasso. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : Application to elliptic and parabolic problems. *SIAM J. Sci. Comp.*, 24(4) :1328–1355, 2003.
  - [22] S. Sykora. Quantum theory and the bayesian inference problems. *J. Statistical Phys.*, 11(1) :17–27, 1974.
  - [23] M.-G. Vallet, C.-M. Manole, J. Dompierre, S. Dufour, and F. Guibault. Numerical comparison of some hessian recovery techniques. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 72 :987–1007, 2007.
  - [24] Y. V. Vassilevski and A. Agouzal. Unified asymptotic analysis of interpolations errors for optimal meshes. *Doklady Mathematics*, 72(3) :295–298, 2005.
  - [25] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33(7) :1331–1364, 1992.
  - [26] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33(7) :1365–1380, 1992.

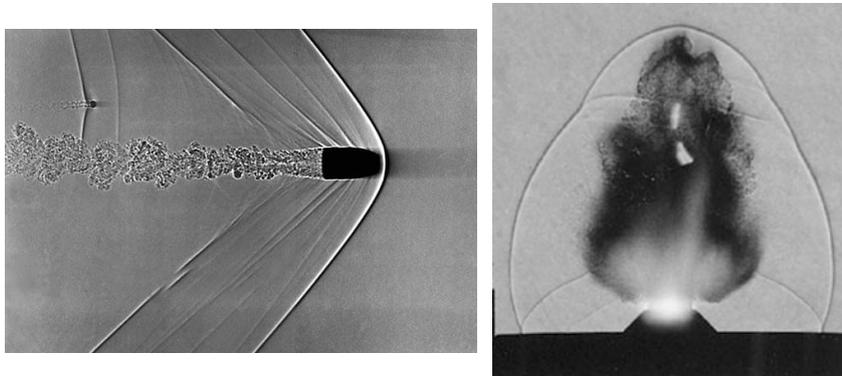
# 3

---

## *Adaptation de maillage multi-échelles en mécanique des fluides*

### INTRODUCTION

L'utilisation d'un processus adaptatif en mécanique des fluides numérique (CFD, *Computational Fluid Dynamics* en Anglais), est fortement motivée par la nature des phénomènes physiques modélisés. Elle se base sur une problématique simple : comment distribuer au mieux les degrés de liberté du maillage en fonction des caractéristiques de l'écoulement. Un exemple classique d'adaptation est la génération de maillages de couches limites pour des écoulements visqueux. Ces derniers sont nécessaires pour mesurer avec précision le profil de vitesse proche des parois. Le maillage est donc adapté pour capter cette particularité. Une telle adaptation est cependant manuelle, car elle est réalisée en pré-traitement lors de la création du maillage de calcul. Pour automatiser le processus d'adaptation, il est nécessaire de disposer d'un estimateur d'erreur qui permet de contrôler la génération du maillage. Couplée à une estimation d'erreur, l'adaptation de maillage anisotrope permet d'optimiser le ratio entre la précision



**Figure 3.1:** Exemples d'écoulements avec de fortes caractéristiques anisotropes.

obtenue et le nombre de degrés de liberté utilisés. Ce gain est d'autant plus important que le phénomène physique étudié a des composantes fortement anisotropes et localisées : ondes de chocs, zones de glissements, couches limites, *etc.* De tels phénomènes sont représentés sur la Figure 3.1. Il est donc évident que les maillages uniformes ne sont pas optimaux à la fois en terme de taille et en terme de direction. Toutefois, le traitement des singularités et des discontinuités n'est pas une chose aisée. Elles sont sources de problématiques tant du côté de l'adaptation de maillage anisotrope que du côté des méthodes de résolution numériques qui permettent la capture de forts gradients ou de chocs.

En ce qui concerne l'adaptation de maillage, il est nécessaire de proposer des estimateurs d'erreur valides sur des écoulements discontinus ou possédant de forts gradients. En effet, le senseur peut prescrire dans les chocs une taille de maille qui tend vers zéro à nombre de points constant. On doit alors tronquer cette taille par une taille minimale. On perd alors tout le profit d'une approche anisotrope. Jouir du complet avantage de l'adaptation anisotrope pour des solutions numériques demande donc une amélioration de l'algorithme et une attention particulière contrairement au cas analytique. Pour un gain optimal, il est également nécessaire de proposer des schémas de résolution précis qui supportent des maillages anisotropes.

En CFD, certaines simulations numériques montrent que seulement un ordre un de convergence global en maillage est numériquement atteint sur des suites de maillages uniformément raffinés, même si le schéma numérique est d'ordre deux. Cela est dû à la présence de discontinuités (équations d'Euler) ou de forts gradients (équations de Navier-Stokes) dans l'écoulement modélisé. En particulier, les schémas numériques d'ordre élevé (*i.e.*, ordre deux) de type *shock capturing* dégénèrent nécessairement à l'ordre un dans les chocs afin de préserver la stabilité.

On montre dans ce chapitre comment l'utilisation de schémas de résolution d'ordre élevé et de l'adaptation de maillage multi-échelles permet de garantir l'ordre de convergence spatial théorique même en présence de discontinuités numériques. On applique à cet effet à la CFD les estimations d'erreur du Chapitre 2. On rappelle d'abord le contexte général de l'adaptation de maillage non-structuré en mécanique des fluides et les problématiques.

## ÉTAT DE L'ART

L'adaptation de maillage pour la CFD est un sujet très étudié. On peut citer en deux et trois dimensions les travaux suivants sur l'adaptation isotrope [2, 5, 27, 32, 34, 37, 39, 46]. Pour le cas anisotrope, on distingue les études en deux dimensions [3, 8, 9, 17, 18] et celles en trois dimensions [6, 20, 24, 29, 35, 40, 41, 49]. L'utilisation d'un processus adaptatif s'accompagne de plus en plus d'une certification des calculs qui devient également un sujet crucial pour valider les approches [44].

L'adaptation de maillage **anisotrope** en CFD a été initiée en deux dimensions à la fin des années 80 par Peraire et al. [38]. Ils avaient déjà observé deux éléments fondamentaux pour l'adaptation anisotrope :

- la possibilité de reconstruire des dérivées à partir de solutions discrètes,
- le fait que le hessien reconstruit de la solution numérique donnait pour l'erreur d'interpolation des informations anisotropes exploitables par un générateur de maillage.

Leurs principales difficultés étaient liées à la génération des maillages adaptés. Leur méthode de génération était basée sur une avancée de front modifiée pour l'anisotropie en utilisant des transformations issues du hessien reconstruit. Cependant, les étirements obtenus étaient très faibles. Les premières expériences anisotropes en trois dimensions sont dues à Löhner [30,

31, 32] au début des années 90. Cependant, la principale faiblesse résidait toujours dans la prescription des longueurs au générateur de maillages. Zienkiewicz et Wu dirent à ce sujet dans [50] :

Unfortunately, the amount of elongation which can be used in a typical mesh generation by such mapping is small.

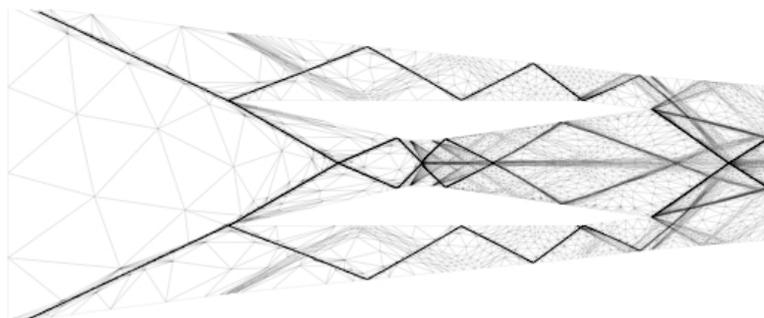
Une idée nouvelle fut apportée par Mavriplis [33]. Il proposa de modifier l'algorithme d'insertion de Delaunay et de voir le maillage adapté en deux dimensions comme le maillage d'une surface cartésienne de  $\mathbb{R}^3$ . Cette étude a été prolongée par la définition de maillages unités dans une métrique proposée par Hecht [25]. Cette approche propose un contexte mathématique solide dans le cas anisotrope pour les générateurs de maillage. Le calcul des longueurs et des volumes s'effectue dans un espace riemannien. De plus, ce cadre généralise le cas uniforme et le cas isotrope. L'article de Castro-Diaz et al. [9] est précurseur puisqu'il inclut à la fois l'estimation d'erreur anisotrope, le maillage adaptatif basé sur la prescription d'un champ de métriques et des calculs en CFD. Il existe désormais un grand nombre de générateurs de maillage anisotrope basés sur ce concept de métrique [6, 12, 16, 22, 26, 35, 29, 49].

## PROBLÉMATIQUES

On présente en détails sur un exemple historique les principales problématiques de l'adaptation anisotrope pour la CFD. On montre que dans un processus adaptatif, l'estimateur d'erreur et le schéma de résolution jouent tous les deux un rôle majeur dans la perte d'anisotropie. Dans une vision adaptative, leurs études respectives ne peuvent donc pas être complètement dissociées.

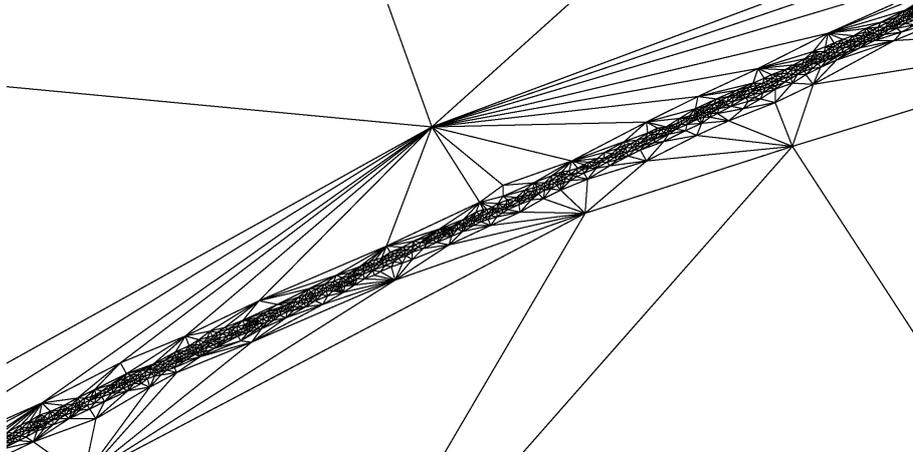
### Vers la génération de maillages anisotropes

On considère un écoulement supersonique dans un scramjet qui est un réacteur sans pièce mobile et auto-alimenté. Les technologies d'adaptation sont celles de l'article [9]. L'estimateur d'erreur repose sur un contrôle en norme  $L^\infty$  de l'erreur d'interpolation sur la densité. La Figure 3.2 montre le maillage anisotrope après 10 itérations d'adaptation.



**Figure 3.2:** Calcul adaptatif anisotrope dans un scramjet réalisé en 1997 dans [9].

Par abus de langage, on dit que la solution se «lit» sur le maillage. De nombreuses composantes anisotropes, comme les ondes de choc qui rebondissent sur les parois, semblent parfaitement capturées par le processus adaptatif.



**Figure 3.3:** Calcul adaptatif isotrope dans un scramjet réalisé en 1997 dans [9].

Cependant, un zoom sur le premier choc, Figure 3.3, montre que le maillage qui semblait anisotrope est en fait isotrope dans les chocs. Les causes de cette perte d'anisotropie sont doubles :

- Dans la direction normale aux chocs, la cause provient de l'estimateur d'erreur qui prescrit une taille infiniment petite non réalisable en pratique par un générateur de maillages.
- Dans la direction tangentielle du choc, le solveur oscille localement car il n'est pas strictement TVD. Le hessien utilisé comme senseur, capture cette oscillation et prescrit une taille, qui lorsque la précision augmente, tend vers la taille minimale prescrite dans la direction normale.

Cette taille est donc à la fois indispensable pour la convergence du calcul, mais en contrepartie, sa prescription engendre une perte d'anisotropie. Si l'utilisation de schéma strictement monotone peut permettre d'éliminer la seconde problématique, la première demeure toujours.

Le second inconvénient d'une mesure de l'erreur en norme  $\mathbf{L}^\infty$  est d'ignorer les petites échelles de la solution. Or, les écoulements issus de la CFD présentent de nombreuses caractéristiques ayant des amplitudes différentes :

- lors d'écoulements supersoniques, l'amplitude des chocs dépend de la géométrie,
- les zones de glissement, les zones de re-circulation, les points d'arrêts, *etc...*, ont des échelles de variation différentes.

Pour l'adaptation de maillage basée sur l'erreur d'interpolation d'une variable  $u$ , plusieurs normalisations du hessien  $H$  de  $u$  ont été proposées pour tenter de capter toutes les variations de la solution. Dans [9], le hessien est simplement normalisé localement par la solution  $u$  :

$$\frac{|H|}{|u|}.$$

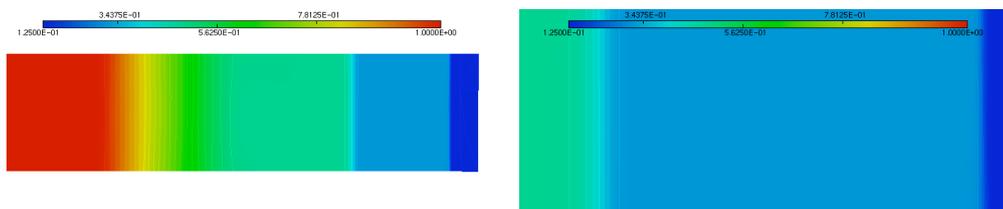
Cette normalisation permet de capter la re-circulation pour un écoulement sur une marche. Dans [31], la normalisation utilise également la taille du maillage  $h$  ainsi que le gradient de la solution :

$$\frac{|H|}{|u| + h \|\nabla u\|_2}.$$

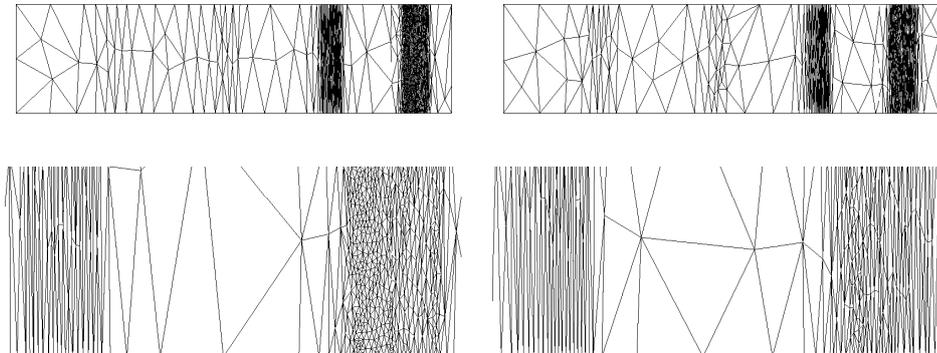
Cette dernière normalisation a été généralisée dans [1] en considérant une pondération de la solution et du gradient :

$$\frac{|H|}{\gamma|u| + (1 - \gamma)h\|\nabla u\|_2}.$$

Pour des écoulements avec des chocs, l'auteur conseille de prendre  $\gamma = 0.001$ . La normalisation se fait donc principalement par le gradient de la solution<sup>1</sup>. Cette normalisation a été initialement proposée comme un filtre des oscillations de la solution numérique. L'impact sur l'anisotropie est illustré sur les Figures 3.4 et 3.5, sur l'exemple du tube à choc de Sod, tiré de [1]. Cependant, quelque soit la normalisation choisie, le contrôle de l'erreur est toujours effectué en norme  $L^\infty$ .



**Figure 3.4:** Iso-valeurs de la densité à un instant particulier du tube à choc de Sod à gauche. Zoom sur la discontinuité de contact et le choc à droite.



**Figure 3.5:** Impact des normalisations locales sur l'anisotropie. À gauche, exemple avec normalisation par  $|u|$  [9] et à droite exemple avec normalisation locale par le gradient et la solution  $|u| + h\|\nabla u\|_2$  [1]. Vus de loin, les deux maillages en haut semblent équivalents. En bas, le maillage à droite avec normalisation est beaucoup plus anisotrope que celui de gauche.

## Adaptation de maillage et schémas numériques

L'adaptation de maillage est principalement utilisée et reconnue pour pouvoir capturer avec précision les phénomènes physiques modélisés à moindre coût (en terme de nombre de

1. En un point  $\mathbf{x}$ , diviser le hessien  $H(\mathbf{x})$  par la norme du gradient  $\|\nabla u(\mathbf{x})\|_2$  de la solution  $u(\mathbf{x})$  revient à estimer la courbure de l'iso-ligne de  $u$  passant par  $\mathbf{x}$ . Cela revient à considérer dans un choc un modèle d'erreur inhomogène, cf. Annexe A.2.

degrés de liberté). Les efforts des études précédentes portaient à la fois sur les techniques de génération de maillage et la dérivation d'estimations d'erreur. L'impact de l'adaptation sur le schéma de résolution était rarement abordé. Des études [7, 36] sur cette problématique ont été menées avant l'émergence de l'adaptation anisotrope. Elles portaient donc sur des techniques d'adaptation basées sur un découpage local des éléments. L'intérêt était alors d'appréhender le comportement des schémas de résolution numérique lorsque la discrétisation est modifiée.

Pour aller plus loin, il paraît impossible de dissocier le schéma numérique et le support de calcul. En effet, la définition d'un schéma numérique est basée sur la discrétisation que le supporte. Ils sont donc intrinsèquement liés. Il apparaît alors évident que le choix du maillage a un impact direct sur la précision et les propriétés de la méthode numérique [11]. On illustre dans ce chapitre ce point de vue dans le cas particulier des méthodes de capture de choc.

## L'APPORT DE L'ADAPTATION MULTI-ÉCHELLES

On montre dans ce chapitre que tant que l'erreur est contrôlée en norme  $\mathbf{L}^\infty$ , la prescription d'une taille minimale est obligatoire. Pour supprimer cette contrainte, il est nécessaire d'utiliser une norme moins sensible dans les zones de fort gradient. On propose de contrôler l'erreur en norme  $\mathbf{L}^p$  en utilisant le concept de maillage continu. Changer de norme introduit également une normalisation automatique sur le champ solution, permettant ainsi de capturer toutes les échelles de la solution. La normalisation optimale au sens  $\mathbf{L}^p$  n'est ni la solution ou son gradient mais simplement le déterminant du hessien pondéré par une puissance dépendant de  $p$ . En dérivant des modèles continus des chocs numériques, on peut vérifier que pour des écoulements eulériens et avec des modèles anisotropes, un ordre deux de convergence en maillage est retrouvé pour des solutions numériques avec des chocs. Dans le même temps, la prescription d'une taille minimale n'est plus nécessaire. Le processus d'adaptation devient donc complètement automatique et l'anisotropie est préservée. De vrais maillages anisotropes sont obtenus.

## PLAN DU CHAPITRE

Dans une première partie, on présente l'algorithme d'adaptation dédié aux simulations stationnaires en CFD. Ensuite, on justifie la validité de l'approche proposée sous certaines hypothèses.

On décrit les caractéristiques du solveur *Wolf* utilisé pour la résolution des équations d'Euler. Ce dernier est utilisé pour illustrer sur des écoulements en deux dimensions la perte de l'ordre de convergence spatial pour des écoulements en présence de chocs. On introduit alors deux modèles continus de choc numérique. Ces modèles valident l'utilisation de l'adaptation de maillage multi-échelles introduite au chapitre précédent. On décrit ensuite une stratégie d'adaptation pour converger un calcul adaptatif à l'ordre deux spatialement. Cette stratégie est numériquement validée sur des exemples en deux et trois dimensions. On montre que l'anisotropie est conservée et que l'ensemble des échelles de la solution est capturé.

Enfin, on montre les limites de l'adaptation multi-échelles sur certains écoulements complexes. On envisage également les problématiques liées à une adaptation sur des fonctions discontinues. On démontre ensuite que la convergence pour des solutions discontinues ne peut être retrouvée que si l'erreur est mesurée en norme  $\mathbf{L}^p$  avec  $p \in [1, \infty[$ .

### 3.1 MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'ADAPTATION DE MAILLAGE EN CFD

Contrairement au cas analytique, le processus adaptatif comporte une phase de calcul de la solution par un solveur et une phase d'interpolation. À notre disposition, on a seulement une solution numérique dont la précision dépend du maillage courant. Ces considérations impliquent plusieurs modifications de l'algorithme d'adaptation par rapport au cas analytique. On explique dans cette section ces changements.

On donne dans un premier temps l'algorithme adaptatif. Chaque étape du processus est ensuite analysée : résolution numérique, estimation d'erreur, interpolation et génération de maillages. On présente ensuite comment estimer l'ordre de convergence quand la solution n'est pas connue.

#### 3.1.1 Algorithme d'adaptation de maillage

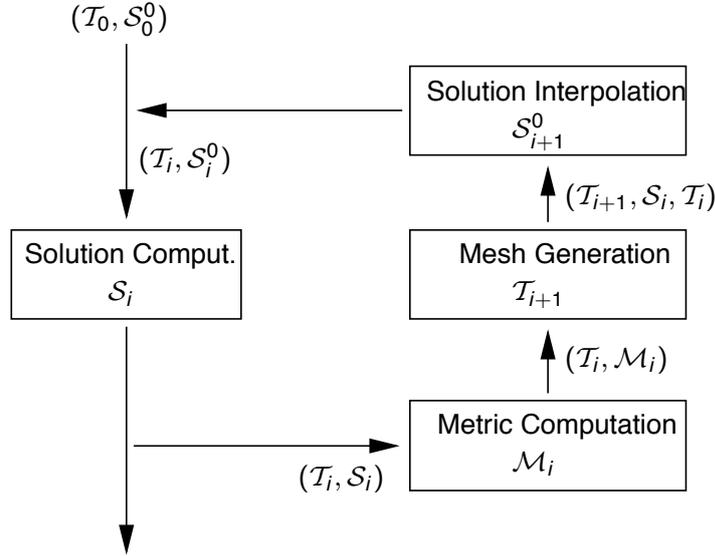
Dans le cas de simulations numériques, la précision de la solution sur laquelle on réalise l'adaptation dépend de sa résolution via le solveur utilisé. L'adaptation de maillage est donc un problème non linéaire dont il est nécessaire de converger à la fois le maillage et la solution. On utilise pour cela un algorithme itératif de point fixe. Enfin, la consistance de la solution du processus adaptatif n'est plus seulement assurée par la seule vérification de l'estimation de l'ordre de convergence en norme  $\mathbf{L}^p$ , Proposition 2.4, Chapitre 1, car dans le cas de solutions numériques, le senseur est construit sur des dérivées reconstruites à partir de la solution numérique.

#### Boucle adaptative

On suppose que l'on dispose d'un maillage initial  $\mathcal{H}_0$  et d'une solution initiale  $\mathcal{S}_0$ . On se donne  $k$  le nombre d'adaptation,  $N$  ou  $\varepsilon$  une complexité ou un niveau d'erreur. L'algorithme d'adaptation de maillage vise à converger la solution et le maillage pour une complexité fixée ou un niveau d'erreur fixé. On itère jusqu'à convergence algorithmique du couple maillage/solution. On peut considérer comme critère d'arrêt le pourcentage de variation du nombre de sommets entre deux maillages successifs. Dans nos exemples, un seuil de 5% ou un nombre maximum de 10 itérations sont utilisés. L'algorithme d'adaptation est représenté sur la Figure 3.6. À l'itération courante correspondant à une complexité  $N$ , la solution numérique  $\mathcal{S}_i$  est d'abord calculée, puis un champ de métriques  $\mathcal{M}_i$  est déduit de l'estimation d'erreur avec  $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i) = N$ . Un maillage unité vis-à-vis de  $\mathcal{M}_i$  est ensuite généré. La solution  $\mathcal{S}_i$  est projetée sur ce nouveau maillage et le processus est ré-itéré.

Pour accélérer le processus adaptatif, on considère un algorithme dynamique sur la complexité ou le seuil d'erreur. Plus précisément, comme la solution sur le maillage initial ou les maillages intermédiaires n'est pas forcément précise, il n'est pas adéquat de chercher de suite à obtenir un maillage adapté pour le seuil d'erreur que l'on s'est fixé. L'idée consiste à faire évoluer le niveau d'erreur ou la complexité au cours du processus adaptatif. Ainsi, on découpe l'ensemble des  $n_a$  adaptations en  $n_s$  étapes au cours desquelles l'erreur (respectivement la complexité) est constante. À l'étape  $i_s \in [1, n_s]$ , l'erreur (respectivement la complexité) est donnée par  $4^{(i_s-1)} \varepsilon$  (respectivement  $N/2^{(i_s-1)}$ ), si  $\varepsilon$  ou  $N$  sont les seuils à atteindre. À chaque étape, on converge le couple maillage/solution pour ces seuils intermédiaires en  $n_k$  sous-itérations (entre 5 et 10 en pratique). On a alors  $n_a = n_s n_k$ . Cette approche permet de

converger de manière progressive vers la solution recherchée en évitant des solutions intermédiaires non optimales (et coûteuses) dues à la pauvreté de l'information que l'on détenait à ce moment là.



**Figure 3.6:** Boucle d'adaptation de maillages pour des problèmes stationnaires.  $\mathcal{T}_i$  représente le  $i^{\text{ième}}$  maillage,  $\mathcal{S}_i$  la  $i^{\text{ième}}$  solution et  $\mathcal{M}_i$  la métrique calculée à partir du couple  $(\mathcal{T}_i, \mathcal{S}_i)$ .

### Principes de consistance du senseur

Il est assez difficile de donner une justification mathématique de la convergence du processus adaptatif pour plusieurs raisons. D'une part, les estimateurs utilisés dans ce chapitre sont complètement génériques. On ignore le fait que la solution sur laquelle l'adaptation est réalisée est solution d'une EDP. La méthode numérique utilisés sont également ignorées. D'autre part, tous les estimateurs reposent sur un algorithme de reconstruction de dérivées, gradient et hessien, sur lequel nous n'avons pas de résultat sur l'ordre de convergence. De plus, la solution numérique  $u_h$  connue est seulement linéaire par morceaux, il est donc impossible d'appliquer directement sur  $u_h$  les estimations du second chapitre. Cependant, il est possible de montrer certaines propriétés du senseur.

On fait l'hypothèse que la solution exacte  $u$  est assez régulière. On suppose que l'on sait reconstruire localement (dans la boule d'un point) une solution  $u^*$  à partir de  $u_h$  qui converge plus vite vers  $u$  que  $u_h$  en **semi-norme  $\mathbf{H}^1$**  :

$$|u - u^*|_{\mathbf{H}^1} = O(h^{1+\eta}) \text{ et } |u - u_h|_{\mathbf{H}^1} = O(h), \text{ avec } \eta > 0.$$

Cela ne suppose pas que  $u^*$  converge vers  $u$  plus vite que  $u_h$  mais seulement que  $u^*$  approche mieux les dérivées de  $u$  que  $u_h$ . On peut alors écrire :

$$|u - u_h|_{\mathbf{H}^1} - |u - u^*|_{\mathbf{H}^1} \leq |u^* - u_h|_{\mathbf{H}^1} \leq |u - u_h|_{\mathbf{H}^1} + |u - u^*|_{\mathbf{H}^1},$$

qui est équivalent à

$$1 - \frac{|u - u^*|_{\mathbf{H}^1}}{|u - u_h|_{\mathbf{H}^1}} \leq \frac{|u^* - u_h|_{\mathbf{H}^1}}{|u - u_h|_{\mathbf{H}^1}} \leq 1 + \frac{|u - u^*|_{\mathbf{H}^1}}{|u - u_h|_{\mathbf{H}^1}}.$$

Ce qui implique

$$|u^* - u_h|_{\mathbf{H}^1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} |u - u_h|_{\mathbf{H}^1}.$$

Sous les hypothèses précédentes, cette convergence signifie que l'écart entre  $u$  et  $u_h$  donne une approximation de l'erreur d'approximation en semi-norme  $\mathbf{H}^1$ . Dans notre approche, l'idée consiste donc à approcher l'erreur d'approximation  $\|u - u_h\|$  par  $\|u^* - u_h\|$ . Si, de plus, on considère que la reconstruction  $u^*$  vérifie  $u^*(P_i) = u_h(P_i)$  pour tout sommet  $P_i$  du domaine discrétisé, alors on a :

$$\|u - u_h\| \approx \|u^* - u_h\| = \|u^* - \Pi_h u^*\|.$$

On constate alors qu'il suffit d'appliquer les estimateurs d'erreur proposés dans le chapitre précédent à  $u^*$  et non pas à  $u$  ou à  $u_h$ . En pratique, on ne cherche pas à connaître explicitement  $u^*$ , seul son hessien est nécessaire. On rappelle brièvement les deux méthodes de reconstruction du hessien de  $u^*$  à partir de la solution discrète  $u_h$  qui ont été utilisées dans cette thèse.

**REMARQUE 3.1** Ces principes de consistance ne sont pas strictement vérifiés pour les reconstructions de hessien que nous utilisons. On peut remarquer seulement que si on effectue une reconstruction localement quadratique dans la boule d'un sommet  $P_i$ , alors on cherche à vérifier au mieux (au sens des moindres carrés)  $u^*(P_i) = u_h(P_i)$  pour la reconstruction  $u^*$ .

*Une double projection  $\mathbf{L}^2$ .* Soit  $P_k$  un point du maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . On note  $S_k$  la boule de  $P_k$ , constituée des éléments de  $\mathcal{T}_h$  partageant  $P_k$ . L'opérateur local de projection  $\mathbf{L}^2$  est basé sur l'interpolé de Clément [10]. L'idée consiste à projeter  $v \in L^2(\Omega)$  dans l'ensemble des fonctions constantes par éléments, indépendamment sur chaque support  $S_k \subset \mathcal{T}_h$ . Plus précisément, pour  $v \in L^2(\Omega)$ , on définit  $\Pi_0 v \in L^2(\Omega)$  par :

$$\forall S_k \subset \mathcal{T}_h, \quad \begin{cases} (\Pi_0 v)|_{S_k} \text{ est constant,} \\ \int_{S_k} (\Pi_0 v - v) = 0. \end{cases}$$

L'opérateur d'interpolation de Clément  $\Pi_c : L^2 \rightarrow V_h$  est donné par :

$$\Pi_c v = \sum_{j=1}^{N_{ver}} \Pi_0 v(P_j) \varphi_j.$$

Comme  $u_h$  est linéaire par élément, on applique l'opérateur de Clément à  $\nabla u_h \in L^2(\Omega)$  qui est constant discontinu par élément. On obtient alors, pour chaque sommet  $P_k$  du maillage, la reconstruction nodale du gradient suivante :

$$\nabla_R u_h(P_k) = \frac{\sum_{K \in S_k} |K| \nabla(u_h|_K)}{|S_k|}. \quad (3.1)$$

Cette reconstruction n'est rien d'autre que la moyenne des gradients des éléments de la boule de  $P_k$  pondérée par les volumes des éléments de la boule. Elle correspond à la notion de gradient nodal  $P_1$ -Galerkin en éléments finis. On obtient ainsi une représentation  $P^1$  par

élément du gradient. On applique à nouveau la même procédure à chaque composante du gradient pour reconstruire le hessien :

$$H_R(u_h) = \frac{H^*(u_h) + H^*(u_h)^t}{2} \quad \text{où} \quad H^*(u_h) = \nabla_R((\nabla_R u_h)^t) = \begin{pmatrix} \nabla_R(\Pi_c(\frac{\partial u_h}{\partial x})) \\ \nabla_R(\Pi_c(\frac{\partial u_h}{\partial y})) \\ \nabla_R(\Pi_c(\frac{\partial u_h}{\partial z})) \end{pmatrix},$$

avec pour chaque composante  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  :

$$\nabla_R(\Pi_c(\frac{\partial u_h}{\partial x_j}))(P_k) = \frac{\sum_{K \in S_k} |K| \nabla((\Pi_c(\frac{\partial u_h}{\partial x_k}))|_K)}{|S_i|}.$$

*Formulation faible basée sur la formule de Green.* Dans cette approche, le hessien de la solution est reconstruit en utilisant une formulation faible basée sur la formule de Green. On considère que le gradient de  $u_h$  est constant par élément. Pour chaque sommet  $P_k$  de  $\mathcal{T}_h$ , on a pour  $1 \leq i, j \leq n$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_h} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_k &= \int_{S_k} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_k, \\ &= - \int_{S_k} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \int_{\partial S_k} \frac{\partial u_h}{\partial n} \varphi_k \, d\sigma, \\ &= - \sum_{K \in S_k} \int_K \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

en supposant que la fonction test vaut zéro sur la frontière du support  $\partial S_k$ . Par conséquent, un traitement particulier doit être effectué pour les sommets appartenant à la frontière. Chaque composante du hessien est alors reconstruite à l'aide de la relation :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j}(P_k) := \frac{- \int_{S_k} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}}{\int_{S_k} \varphi_k} = - \frac{\sum_{K \in S_k} (\frac{\partial u_h}{\partial x_j})|_K \int_K \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}}{\frac{|S_k|}{n+1}}.$$

REMARQUE 3.2 La principale différence entre les deux méthodes est simplement la proximité des informations utilisées pour la reconstruction. Dans le cas de la double projection  $\mathbf{L}^2$ , la boule d'ordre deux d'un point est utilisée alors que seule la boule d'ordre un est utilisée dans le cas de la formulation faible. D'un point de vue pratique, la double projection  $\mathbf{L}^2$  produit un hessien plus régulier. Par exemple dans le cas de la fonction de Heavyside, la variation du hessien s'effectue sur seulement deux mailles dans le cas de Green alors que 4 mailles sont nécessaires dans le cas de la double projection  $\mathbf{L}^2$ . L'impact sur le processus adaptatif est étudié en faisant des comparaisons à des expérimentations au Chapitre 5.

REMARQUE 3.3 Si une reconstruction locale du hessien en utilisant une méthode de moindres carrés et un développement de Taylor est une solution très satisfaisante dans les cas analytiques [1], son application à des solutions numériques peu régulières en CFD est moins adaptée.

### 3.1.2 Solveur numérique volumes finis

On donne les principales caractéristiques du solveur volumes finis **Wolf** utilisé dans cette thèse et qui a été développé au sein du projet Gamma.

En supposant le gaz parfait non visqueux et en l'absence de diffusion thermique, les équations d'Euler pour la conservation de la masse, de la quantité de moment et de l'énergie s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p)\mathbf{U}) = 0, \end{cases}$$

où  $\rho$  est la densité volumique,  $\mathbf{U} = {}^t(u, v, w)$  le vecteur vitesse,  $E = T + \frac{\|\vec{U}\|^2}{2}$  l'énergie totale et  $p = (\gamma - 1)\rho T$  la pression, avec  $\gamma = 1.4$  le rapport des chaleurs spécifiques et  $T$  la température. On peut réécrire ces équations sous une forme matricielle plus condensée :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) = 0,$$

où  $W = {}^t(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$  est le vecteur des variables conservatives et  $F$  l'opérateur de convection  $F(W) = (F_1(W), F_2(W), F_3(W))$  avec :

$$F_1(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}, F_2(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}, F_3(W) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 \\ w(\rho E + p) \end{pmatrix},$$

de sorte que l'équation d'état devient :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_1(W)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(W)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(W)}{\partial z} = 0.$$

Le système des équations d'Euler est résolu par une méthode de type volumes finis sur des maillages composés de tétraèdres [14]. Le schéma proposé se base sur des degrés de liberté centrés aux sommets et utilise une formulation particulière basée sur les arêtes utilisant des éléments amonts et avals pour le décentrage. Les flux numériques aux interfaces sont calculés à l'aide des solveurs de Riemann de Roe ou HLLC. Un schéma d'ordre élevé est obtenu grâce à une méthode de reconstruction de type MUSCL qui utilise l'information portée par les éléments en amont et en aval de l'écoulement. Cette approche est compatible avec les formulations centrées aux sommets et basées aux arêtes. Par conséquent, cette méthode est une extension d'ordre élevé peu coûteuse en temps de calcul et en mémoire des schémas décentrés classiques. L'intégration du flux basée sur les arêtes et leurs éléments amont et aval correspondants est un point clef pour que ce schéma préserve la positivité de la densité. La reconstruction de type MUSCL est couplée à un limiteur à trois entrées qui généralise le limiteur Superbee et qui garantit la propriété TVD (*i.e.*, la variation totale de la solution n'augmente pas) du schéma numérique. Deux schémas d'intégration en temps sont disponibles. Le premier est un schéma explicite de type Runge-Kutta multi-pas et le second un schéma implicite.

### Schéma pour les flux convectifs

La méthode utilisée pour les flux convectifs est un schéma basé sur les arêtes. Cette formulation consiste à associer à chaque sommet  $P_i$  du maillage un volume de contrôle ou cellule volume fini, noté  $C_i$ . Le maillage dual est construit en utilisant les cellules médianes. La frontière commune  $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$  entre deux cellules adjacentes  $C_i$  et  $C_j$  est décomposée en plusieurs interfaces triangulaires. Une illustration de cette construction en 2D est montrée sur la Figure 3.7.

On applique la méthode des volumes finis aux équations d'Euler. On obtient pour chaque cellule volume fini  $C_i$  :

$$|C_i| \frac{dW_i}{dt} + \int_{\partial C_i} F(W_i) \cdot \mathbf{n}_i d\gamma - \int_{\Gamma_h \cap \partial C_i} \hat{F}(W_i) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_h} d\Gamma_h = 0,$$

où  $W_i$  est la valeur moyenne de la solution  $W$  sur la cellule  $C_i$ . La deuxième intégrale représente les flux frontières donnés par les conditions aux limites. Les différents choix possibles seront explicités par la suite. En ce qui concerne l'intégrale des flux convectifs  $F$ , elle est calculée en décomposant la frontière des cellules volumes finis en facettes  $\partial C_{ij}$  :

$$\int_{\partial C_i} F(W_i^n) \cdot \mathbf{n}_i d\gamma = \sum_{P_j \in \mathcal{V}(P_i)} F|_{I_{ij}} \cdot \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i d\gamma = \sum_{P_j \in \mathcal{V}(P_i)} \Phi_{ij}(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}),$$

où  $\mathcal{V}(P_i)$  est l'ensemble des sommets voisins de  $P_i$ ,  $\mathbf{n}_i$  est la normale extérieure à la cellule  $C_i$  et  $F|_{I_{ij}}$  représente la valeur constante de  $F(W)$  sur l'interface  $\partial C_{ij}$ . Le flux est calculé en utilisant une fonction flux numérique, notée  $\Phi_{ij}$  :

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = F|_{I_{ij}} \cdot \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i d\gamma, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i d\gamma$ . La fonction  $\Phi_{ij}$  approche les termes hyperboliques sur la frontière commune  $\partial C_{ij}$ . On remarque que le calcul des flux convectifs est effectué de manière unidirectionnelle dans la direction normale à la frontière de la cellule volume fini. Ainsi, le calcul numérique de la fonction flux sur l'interface  $\partial C_{ij}$  est effectué par la résolution d'un problème de Riemann 1D dans la direction normale  $\mathbf{n}_{ij}$ , au moyen d'un solveur de Riemann approché. Plusieurs flux numériques décentrés  $\Phi_{ij}$  sont disponibles. Ils peuvent s'écrire formellement comme la somme de flux centrés et un terme de dissipation numérique :

$$\Phi_{ij}(W_i, W_j, \bar{\mathbf{n}}_{ij}) = \frac{F(W_i) + F(W_j)}{2} \cdot \mathbf{n}_{ij} + d(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}), \quad (3.3)$$

où la fonction  $d$  contient le terme de décentrage qui dépend du schéma choisi. Dans notre cas, on utilise le solveur de Riemann HLLC [4] ou bien celui de Roe [42]. Dans la suite, on résume succinctement le solveur de Riemann approché proposé par Roe.

*Solveur de Riemann de Roe.* Dans l'approche de Roe, le terme de décentrage  $d$  est défini par la matrice Jacobienne de  $F$  :

$$A(W) = \frac{\partial(F(W) \cdot \mathbf{n}_{ij})}{\partial W}.$$

Les valeurs propres de  $A(W)$  sont toutes réelles et sont données par  $u$ ,  $u + c$  et  $u - c$ . Dans le contexte des équations d'Euler, le flux hyperbolique est une fonction homogène d'ordre un vérifiant la propriété :

$$F(W) \cdot \mathbf{n}_{ij} = A(W) W,$$

qui permet de construire des schémas conservatifs non oscillants. La résolution du flux utilise la formulation de  $\Phi$  introduite par Roe :

$$\Phi^{Roe}(W_i, W_j, \mathbf{n}_{ij}) = \frac{F(W_i) + F(W_j)}{2} \cdot \mathbf{n}_{ij} + |\tilde{A}(W_i, W_j)| \frac{W_i - W_j}{2},$$

où  $\tilde{A}$  est le Jacobien de  $F$  évalué pour les variables moyennes de Roe. Pour une matrice diagonalisable  $A = P\Lambda P^{-1}$ , on a noté  $|A| = P|\Lambda|P^{-1}$ . Soient deux états  $W_i$  et  $W_j$ , alors les variables moyennes de Roe sont données par :

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_l \rho_i}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \frac{\sqrt{\rho_i} \mathbf{U}_i + \sqrt{\rho_j} \mathbf{U}_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \quad \text{et} \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_i} H_i + \sqrt{\rho_j} H_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}},$$

desquelles on déduit la vitesse du son moyenne de Roe :

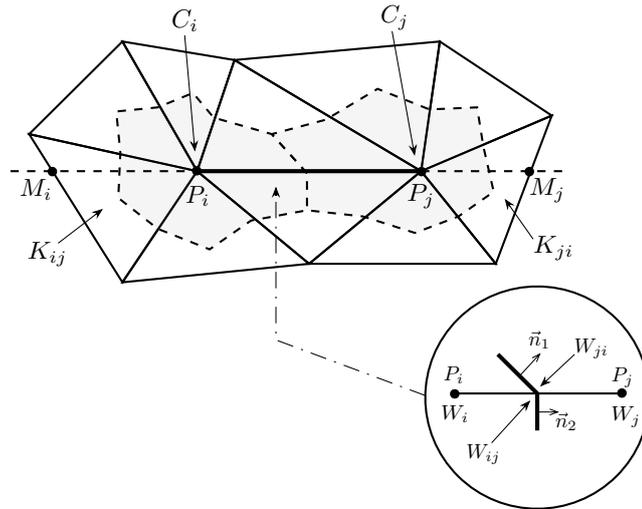
$$\tilde{c}^2 = (\gamma - 1) \left( \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{q}^2 \right) \quad \text{où} \quad \tilde{q}^2 = \|\tilde{\mathbf{U}}\|_2^2.$$

Cette formulation donne au mieux un schéma d'ordre 1 en espace. Une version d'ordre plus élevé est obtenue en utilisant une technique de reconstruction de type MUSCL.

### Schéma d'ordre élevé

La méthode de reconstruction de type MUSCL, introduite dans une série de papiers par Van Leer [28] et généralisée ensuite aux maillages non structurés par Stoufflet et al. [48], est utilisée pour augmenter l'ordre de précision du schéma. L'idée consiste à évaluer les flux pour des valeurs extrapolées  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$  de  $W$  sur l'interface  $\partial C_{ij}$  (Figure 3.7). On effectue l'approximation suivante :

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(W_{ij}, W_{ji}, \mathbf{n}_{ij}),$$



**Figure 3.7:** Illustration de la construction des cellules volumes finis en deux dimensions : cellules médianes  $C_i$  et  $C_j$ , triangles amont et aval  $K_{ij}$  et  $K_{ji}$  associés à l'arête  $P_i P_j$ . Représentation des valeurs extrapolées  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$  à l'interface  $\partial C_{ij}$  utilisées dans la reconstruction MUSCL.

où  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$  sont interpolées linéairement par :

$$\begin{cases} W_{ij} &= W_i + \frac{1}{2} (\nabla W)_{ij} \cdot \overrightarrow{P_i P_j}, \\ W_{ji} &= W_j + \frac{1}{2} (\nabla W)_{ji} \cdot \overrightarrow{P_j P_i}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Contrairement à la méthode MUSCL originale, les gradients approximatés  $(\nabla W)_{ij}$  et  $(\nabla W)_{ji}$  sont définis pour chaque arête et obtenus par combinaison des gradients centré, décentrés et nodaux.

Le gradient centré, associé à l'arête  $P_i P_j$ , est défini par :

$$(\nabla W)_{ij}^C \cdot \overrightarrow{P_i P_j} = W_j - W_i.$$

Les gradients décentrés, qui sont également associés à l'arête  $P_i P_j$ , sont calculés en utilisant les notions de tétraèdres amont et aval de l'arête  $P_i P_j$ . Ces tétraèdres sont notés respectivement  $K_{ij}$  et  $K_{ji}$ .  $K_{ij}$  (resp.  $K_{ji}$ ) est l'unique tétraèdre de la boule de  $P_i$  (resp.  $P_j$ ) dont la face opposée est intersectée par la droite définie par l'arête  $P_i P_j$ , cf. Figure 3.8 et Figure 3.7 pour le 2D. Les gradients décentrés pour les sommets  $P_i$  et  $P_j$  sont donnés par :

$$(\nabla W)_{ij}^U = (\nabla W)|_{K_{ij}} \text{ et } (\nabla W)_{ij}^D = (\nabla W)|_{K_{ji}},$$

où  $(\nabla W)|_K = \sum_{P \in K} W_P \nabla \phi_P|_K$  est gradient  $P_1$ -Galerkin sur le tétraèdre  $K$  communément utilisé en éléments finis. On peut alors paramétrer les gradients aux sommets utilisés pour l'extrapolation. Ils sont construits en introduisant le  $\beta$ -schéma :

$$\begin{aligned} (\nabla W)_{ij} &= (1 - \beta)(\nabla W)_{ij}^C + \beta (\nabla W)_{ij}^U \\ (\nabla W)_{ji} &= (1 - \beta)(\nabla W)_{ji}^C + \beta (\nabla W)_{ji}^D, \end{aligned}$$

où  $\beta \in [0, 1]$  est le paramètre contrôlant la quantité de décentrage. Par exemple, pour  $\beta = 0$  le schéma est centré et pour  $\beta = 1$  il est totalement décentré.

**Schéma V4 : une dissipation numérique d'ordre quatre.** Le  $\beta$ -schéma le plus précis est obtenu pour  $\beta = 1/3$ . En effet, on peut montrer que ce schéma est d'ordre trois en espace pour l'advection linéaire 2D sur des maillages triangulaires structurés de type Friedrichs-Keller. Dans notre cas, pour les équations d'Euler non-linéaires sur des maillages tétraédriques non-structurés, on obtient un schéma d'ordre deux en espace avec une dissipation numérique d'ordre quatre. Ce gradient d'ordre élevé est noté par :

$$\begin{aligned} (\nabla W)_{ij}^{V4} &= \frac{2}{3} (\nabla W)_{ij}^C + \frac{1}{3} (\nabla W)_{ij}^U \\ (\nabla W)_{ji}^{V4} &= \frac{2}{3} (\nabla W)_{ji}^C + \frac{1}{3} (\nabla W)_{ji}^D. \end{aligned}$$

**Schéma V6 : une dissipation numérique d'ordre six.** Un schéma encore moins dissipatif a été proposé dans [14]. Il utilise une combinaison linéaire beaucoup plus complexe de gradients centrés, décentrés et nodaux. Le gradient nodal  $P_1$ -Galerkin du sommet  $P_i$  est associé à la

cellule  $C_i$  et est calculé en moyennant les gradients de tous les tétraèdres contenant le sommet  $P_i$  (i.e., la boule de  $P_i$ ) :

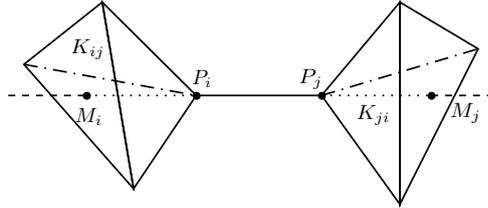
$$(\nabla W)_{P_i} = \frac{1}{4|C_i|} \sum_{K \in C_i} |K| (\nabla W)|_K.$$

Un schéma avec une dissipation d'ordre six est alors obtenu en considérant les gradients d'ordre élevé suivants :

$$(\nabla W)_{ij}^{V6} = (\nabla W)_{ij}^{V4} - \frac{1}{30} ((\nabla W)_{ij}^U - 2(\nabla W)_{ij}^C + (\nabla W)_{ij}^D) - \frac{2}{15} ((\nabla W)_{M_i} - 2(\nabla W)_{P_i} + (\nabla W)_{P_j})$$

$$(\nabla W)_{ji}^{V6} = (\nabla W)_{ji}^{V4} - \frac{1}{30} ((\nabla W)_{ij}^D - 2(\nabla W)_{ij}^C + (\nabla W)_{ij}^U) - \frac{2}{15} ((\nabla W)_{M_j} - 2(\nabla W)_{P_j} + (\nabla W)_{P_i}),$$

où  $(\nabla W)_{M_{i,j}}$  sont les gradients aux points  $M_{i,j}$ , points d'intersection entre la droite définie par  $P_i P_j$  et les tétraèdres amont et aval, cf. Figures 3.7 et 3.8. Ces gradients sont calculés en interpolant linéairement les gradients nodaux des trois sommets de la face contenant  $M_{i,j}$ . Ce schéma est d'ordre cinq en espace pour l'advection linéaire 2D sur des maillages triangulaires structurés de type Friedrichs-Keller.



**Figure 3.8:** Tétraèdre amont  $K_{ij}$  et tétraèdre aval  $K_{ji}$  associés à l'arête  $P_i P_j$ .

### Fonction de limitation de pentes.

Le schéma d'ordre élevé décrit précédemment n'est pas monotone. On remédie à ce problème par l'utilisation de procédés de "limitation de pentes". On remplace le gradient de la Relation (3.4) par un gradient limité que l'on note  $(\nabla W)_{ij}^{lim}$ . Dans *Wolf*, on considère un limiteur à trois entrées, introduit par Dervieux, qui est une généralisation du limiteur Superbee [13] :

$$\begin{aligned} &\text{si } uv \leq 0 \text{ alors} \\ &\quad Lim(u, v, w) = 0 \\ &\text{sinon} \\ &\quad Lim(u, v, w) = Sign(u) \min(2|u|, 2|v|, |w|), \end{aligned}$$

et on utilise :

$$Lim((\nabla W)_{ij}^C, (\nabla W)_{ij}^D, (\nabla W)_{ij}^{HO}) \quad \text{où } (\nabla W)_{ij}^{HO} \text{ est soit } (\nabla W)_{ij}^{V4} \text{ ou } (\nabla W)_{ij}^{V6}.$$

### Conditions aux limites

Pour les simulations numériques réalisées dans cette thèse, on a principalement utilisé trois types de condition aux limites. Les conditions de glissement qui sont imposées sur les

parois quand l'écoulement est considéré non visqueux. Pour imposer le flux à l'infini lors d'écoulements externes ou les flux d'entrée et de sortie pour des écoulements internes, un traitement par décentrage basé sur le flux numérique de Steger-Warming est considéré [47]. Finalement, pour les géométries avec des réacteurs, les entrées de réacteurs et les jets de sortie sont aussi modélisés par un flux de Steger-Warming modifié.

*Conditions de glissement.* Pour cette condition aux limites on impose faiblement :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.5)$$

Pour cela, on calcule le flux  $\Phi$  entre l'état sur la frontière  $W$  et un état miroir  $\bar{W}$  :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{U} \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{U} - 2\rho(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ \rho E \end{pmatrix}.$$

Si la Condition (3.5) est vérifiée alors  $W = \bar{W}$  et donc  $\Phi(W, \bar{W}) = F(W)$ . De plus, comme  $W$  vérifie la Relation (3.5),  $F(W)$  se simplifie en :

$$\Phi_{Slip} = F(W) = (0, p \mathbf{n}, 0)^t.$$

Par conséquent, si la condition que l'on désire imposer est satisfaite, le flux frontière est réduit sous sa forme communément utilisée.

Cependant, en pratique, l'état  $W$  sur la frontière ne vérifie pas cette condition à moins qu'elle soit imposée fortement, ce qui n'est pas possible sinon la masse ne serait pas conservée. On peut prendre en compte cette inconsistance en calculant directement le flux entre l'état et l'état miroir. Le flux frontière dépend donc du solveur de Riemann considéré et en général, il peut se simplifier sous la forme :

$$\Phi_{Slip} = F(W) = (0, p^* \mathbf{n}, 0)^t,$$

avec  $p^* = p$  lorsque la Relation (3.5) est vérifiée.

*Conditions de flux à l'infini.* Cette condition impose un flux uniforme pour l'écoulement à l'infini. Un flux similaire est utilisé pour les conditions d'entrée ou de sortie. Cette condition suppose que l'on a une frontière à l'infini  $\Gamma_\infty$  pour laquelle l'état infini  $W_\infty$  est constant uniforme et connu :

$$W_\infty = \begin{pmatrix} \rho_\infty \\ (\rho \mathbf{U})_\infty \\ (\rho E)_\infty \end{pmatrix}.$$

Cet état permet de calculer des flux décentrés à l'infini. Le flux frontière est construit en le décomposant suivant les valeurs caractéristiques. On considère le flux de Steger-Warming [47] qui est totalement décentré sur la solution  $W_i$  :

$$\Phi_\infty = A^+(W_i, \mathbf{n}_i) W_i + A^-(W_i, \mathbf{n}_i) W_\infty,$$

où  $A^+ = \frac{|A| + A}{2}$  et  $A^- = \frac{|A| - A}{2}$ .

*Conditions de réacteur.* Les conditions aux limites de réacteur sont définies pour un jeu de variables représentant les caractéristiques du réacteur : entrées d'air et jets en arrière corps. Toutes les variables sont liées par les relations isentropiques qui lient en particulier les états statiques et totaux. Ces données sont utilisées pour définir l'état associé au réacteur  $W_{jet}$ . Pour calculer les caractéristiques du réacteur, on a besoin de :

- 3 données pour l'entrée :  $M^{in}$ ,  $p_s^{in}$  et  $T_t^{in}$ ,
- 3 données pour la sortie :  $M^{out}$ ,  $p_t^{out}$  et  $T_t^{out}$ ,

sachant de plus que la direction de l'écoulement est normale aux faces d'entrée ou de sortie du réacteur  $\mathbf{U} = \|\mathbf{U}\|_2 \mathbf{n}$ . Le flux frontière est calculé en utilisant un flux de Steger and Warming modifié :

$$\Phi_{jet} = A^+(W_{jet}, \mathbf{n}_i)W_i + A^-(W_{jet}, \mathbf{n}_i)W_{jet}.$$

### Avancée en temps

Même si on considère seulement les équations d'Euler stationnaires, le schéma utilisé en temps pour converger vers la solution stationnaire a un impact sur la stabilité du calcul. En effet, une approche pseudo-instationnaire est considérée où le temps et l'espace sont traités de manière indépendante. On introduit les stratégies proposées dans **Wolf**.

Deux discrétisations temporelles sont disponibles. Le schéma explicite provenant de la discrétisation précédente s'écrit en chaque sommet  $P_i$  :

$$\frac{|C_i|}{\Delta t_i^n} (W_i^{n+1} - W_i^n) = -\Psi_2(W_i^n) \quad (3.6)$$

où  $\Psi_2 = \sum_{P_j \in \mathcal{V}(P_i)} \Phi_{ij}$  est le flux spatial d'ordre 2 et  $\Delta t_i^n$  le pas de temps utilisé à la  $n$ -ième itération en temps. De même, le schéma implicite s'écrit :

$$\frac{|C_i|}{\Delta t_i^n} (W_i^{n+1} - W_i^n) = -\Psi_2(W_i^{n+1}) \quad (3.7)$$

Dans la suite, on précise les deux schémas.

*Schéma explicite.* Les schémas explicites que nous utilisons sont soumis à des contraintes en terme de pas de temps. Le pas de temps maximal admissible par la méthode numérique se détermine sur des équations modèles linéarisées. La formule suivante est utilisée pour calculer le pas de temps pour un sommet  $P_i$  du maillage :

$$\Delta t(P_i) = \frac{\Delta x(P_i)}{\|\mathbf{U}_i\|_2 + c_i},$$

où  $\Delta x(P_i)$  est la plus petite hauteur des tétraèdres ayant pour sommet  $P_i$ ,  $\mathbf{U}_i$  la vitesse au sommet  $P_i$  et  $c_i$  la vitesse du son locale en  $P_i$  dans le fluide.

Les équations d'Euler n'étant pas linéaires, le pas de temps admissible est en général plus faible que le pas de temps ainsi calculé. On introduit alors la notion de nombre de Courant-Friedrich-Lewy ou nombre de *CFL*. Si nous notons par  $\tilde{\Delta t}$  le pas de temps effectivement utilisé, on définit le nombre de *CFL* par :  $CFL = \frac{\tilde{\Delta t}}{\Delta t}$ .

Le pas de temps local consiste à déterminer le pas de temps admissible en chacun des sommets tandis que le pas de temps global ou pas de temps physique représente le minimum

des pas de temps locaux. Le pas de temps local permet d'accélérer la convergence non linéaire du schéma numérique et ne s'applique donc que pour la recherche d'une solution stationnaire.

Le schéma (3.6) est linéairement instable, nous le remplaçons par un schéma multi-pas de type Runge-Kutta. Ces méthodes de discrétisation en temps, qualifiées de SSP (Strong-Stability-Preserving), ont des propriétés de stabilité non linéaire qui sont particulièrement adéquates pour l'intégration de systèmes hyperboliques de lois de conservation où des discontinuités apparaissent. On les appelle SSPRK d'ordre  $k$ . Ces schémas vérifient la propriété TVD.

Le schéma optimal SSPRK d'ordre 2 à 2-pas introduit par Shu et Osher [45] est le schéma d'Euler modifié :

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= W^n - \Delta t \frac{\Psi_2(W^n)}{|C|}, \\ W^{n+1} &= \frac{1}{2}W^n + \frac{1}{2}W^{(1)} - \frac{1}{2}\Delta t \frac{\Psi_2(W^{(1)})}{|C|}. \end{aligned}$$

Shu et Osher ont aussi proposé le schéma optimal SSPRK d'ordre 3 à 3-pas :

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= W^n - \Delta t \frac{\Psi_2(W^n)}{|C|}, \\ W^{(2)} &= \frac{3}{4}W^n + \frac{1}{4}W^{(1)} - \frac{1}{4}\Delta t \frac{\Psi_2(W^{(1)})}{|C|}, \\ W^{n+1} &= \frac{1}{3}W^n + \frac{2}{3}W^{(2)} - \frac{2}{3}\Delta t \frac{\Psi_2(W^{(2)})}{|C|}. \end{aligned}$$

Ces deux schémas acceptent des  $CFL$  inférieurs ou égaux à 1.

*Schéma implicite.* Dans certains calculs, on a considéré le schéma implicite pour des raisons de convergence plus rapide dans le cas de schémas spatiaux à faible dissipation. En effet, pour des calculs très précis (*i.e.*, faible dissipation) sur des problèmes subsoniques, le schéma décentré tend vers le schéma centré. Alors, les valeurs propres de l'opérateur sortent des régions de stabilité des schémas SSPRK. Cela a pour effet de créer trop d'entropie. Pour y remédier, on utilise un schéma implicite d'ordre un qui est inconditionnellement stable.

La résolution du schéma implicite (3.7) demande l'élaboration d'algorithmes plus complexes. La non linéarité des équations nous amène à linéariser le schéma implicite. Pour cela, on linéarise chaque terme du flux  $\Psi_2$  par un développement de Taylor à l'ordre un en temps. La linéarisation s'écrit :

$$\Psi_2(W^{n+1}) = \Psi_2(W^n) + \frac{\partial \Psi_2}{\partial W}(W^n) (W^{n+1} - W^n) + O(\Delta t^n),$$

ce qui nous donne la forme linéarisée du schéma implicite :

$$\left( \frac{|C_i|}{\Delta t_i^n} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial W}(W^n) \right) (W_i^{n+1} - W_i^n) = -\Psi_2(W_i^n).$$

Toutefois, le calcul de la matrice jacobienne d'ordre deux  $\frac{\partial \Psi_2}{\partial W}$  est une opération complexe et coûteuse. On l'approche par la jacobienne d'ordre un  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial W}$ . On obtient un schéma hybride ordre 1/ordre 2 qui s'écrit sous la forme :

$$\left( \frac{|C_i|}{\Delta t_i^n} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial W}(W^n) \right) (W_i^{n+1} - W_i^n) = -\Psi_2(W_i^n). \quad (3.8)$$

Pour des pas de temps infiniment grands, l'Algorithme (3.8) devient une méthode de Newton modifiée pour le calcul des zéros de  $\Psi_2$ . La linéarisation des flux d'Euler est décrite précisément dans [19].

La résolution du système linéaire est réalisée par un algorithme itératif de type GMRES [43] couplé à un préconditionneur ILU(0) [43].

### 3.1.3 Estimation d'erreur, génération de maillages et interpolation de solutions

Dans cette section, on décrit succinctement les blocs restants du processus adaptatif.

#### Estimation d'erreur

On utilise les estimateurs d'erreur du Chapitre 2. Comme on a supposé dans le cas analytique que l'on ne connaissait pas le hessien des solutions, la mise en œuvre pour le cas de solutions numériques est immédiat. Dans ce chapitre, on utilise les deux types de reconstruction de hessien présentées précédemment dans la Section 3.1.1 :

- la double projection  $\mathbf{L}^2$ ,
- et la formulation faible basée sur la formule de Green.

#### Algorithme de remaillage adaptatif

Dans ce chapitre, on a utilisé le remailleur local adaptatif développé dans [15]. L'objectif est, par des modifications locales du maillage, d'obtenir un maillage unité. Pour cela, le remailleur analyse toutes les arêtes du maillage et essaye de les rendre de longueur unité :  $\forall e \in \mathcal{H}, \ell_{\mathcal{M}}(e) \approx 1$ , tout en conservant (en maximisant) la qualité des éléments :  $Q_{\mathcal{M}}(K) = c \frac{|K|^{\frac{2}{3}}}{\sum \ell_{\mathcal{M}}^2(e)}$ , ce qui revient à générer les éléments les plus réguliers possibles. Les modifications locales utilisées sont : l'insertion de point, la suppression de point, la bascule d'arête et l'optimisation en bougeant les points. L'insertion de point utilise un noyau de Delaunay [23] généralisé au cas anisotrope. Chaque fois qu'un nouveau point est inséré, on lui associe comme métrique la métrique interpolée en utilisant la Formule (1.5) du Chapitre 1.

#### Interpolation de solutions

C'est une étape supplémentaire comparée au cas analytique. Dans le cas d'un calcul stationnaire, l'étape d'interpolation permet de conserver l'état actuel de la solution en projetant la solution du maillage précédent sur le nouveau maillage. L'interpolation est donc primordiale pour économiser du temps de calcul et ne pas repartir d'une solution uniforme après chaque adaptation du maillage. Elle s'effectue en deux étapes. La principale difficulté réside dans la première étape où les sommets du nouveau maillage sont localisés dans le maillage précédent en utilisant un algorithme de barycentrique et la topologie des deux maillages. Cette difficulté est d'autant plus importante dans le cas anisotrope. Ce processus permet de se déplacer dans le maillage précédent. Une fois tous les sommets localisés, on applique un schéma d'interpolation de Lagrange. Dans ce travail, on a simplement utilisé une interpolation  $P^1$  :

$$u(P) = \sum_{P_i \in K} \beta_i u(P_i),$$

où  $K = [P_0 P_1 P_2 P_3]$  est l'élément contenant  $P$  et les  $\beta_i$  sont les coordonnées barycentriques de  $P$  par rapport à  $K$ . Plus de détails sont donnés dans [1, 21].

### 3.1.4 Estimation de l'ordre de convergence

On décrit comment estimer l'ordre de convergence sur un ensemble de solutions dans le cas d'un calcul stationnaire. Étant donnée une suite de couples maillages et solutions  $(\mathcal{H}_i, u_i)_{i=1,l}$ , on souhaite estimer l'ordre de convergence des solutions numériques  $u_i$  définies sur  $\mathcal{H}_i$  vers la solution exacte  $u$ . Si on note l'erreur :

$$e_i = \|u - u_i\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{H}_i)}.$$

Alors, on dira que la suite de solutions converge à l'ordre  $k$  vers  $u$  si la suite d'erreur  $(e_i)_{i=1,l}$  vérifie asymptotiquement :

$$e_i = Cte N_i^{-\frac{k}{n}}, \quad (3.9)$$

où  $n$  est la dimension d'espace,  $N_i$  le nombre de sommets du maillage  $\mathcal{H}_i$  et  $Cte$  une constante.

Cependant, par rapport au cas des fonctions analytiques, vu dans le Chapitre 2, il n'est plus possible d'avoir recours à une solution de référence  $u$  exacte. Dans le cas où seule une solution numérique est connue, il est nécessaire de proposer une stratégie pour estimer cet ordre de convergence. Deux approches sont envisagées.

#### Cas d'une unique solution de référence

Ce cas est la simple extension aux solutions numériques du cas analytique. La solution de référence  $u_{ref}$  est simplement la solution la plus précise obtenue sur le maillage le plus fin  $(\mathcal{H}_{ref}, \mathcal{S}_{ref})$ . On estime l'ordre de convergence sur la suite  $(\mathcal{H}_i, \mathcal{S}_i)_{i=1,l}$  en calculant l'erreur entre  $\mathcal{S}_{ref}$  et les  $\mathcal{S}_i$ . Une étape de projection de la solution  $\mathcal{S}_i$  sur le maillage de référence est nécessaire. On estime ensuite l'erreur :

$$e_i = \|u_{ref} - u_i^{proj}\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{H}_{ref})},$$

où  $u_i^{proj}$  est la solution  $\mathcal{S}_i$  projetée sur  $\mathcal{H}_{ref}$ . On obtient alors une suite d'erreur  $(e_i)_{i=1,l}$ . L'ordre de convergence  $k$  est estimé en faisant une régression linéaire sur (3.9). En effet, on cherche l'ordre de convergence  $k$  et la constante  $Cte$  vérifiant pour la suite d'erreur  $(e_i)_{i=1,l}$  la Relation (3.9). On prenant le logarithme, il vient :

$$\forall i \in [1, l], \quad \ln(e_i) = -\frac{k}{n} \ln(N_i) + \ln(Cte).$$

La couple solution  $X = (k, Cte)$  est donnée au sens des moindres carrés par la résolution du système linéaire  ${}^t A A X = {}^t A B$ , avec :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \ln(N_1) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} \ln(N_l) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \ln(e_1) \\ \vdots \\ \ln(e_l) \end{pmatrix}.$$

En pratique, cette solution donne de bonnes corrélations entre l'ordre de convergence théorique et l'ordre de convergence numérique pour des suites de maillages uniformes.

### Cas d'un processus adaptatif anisotrope

On se place dans le cas d'une adaptation basée sur une suite de maillages issus de maillages continus de complexité croissante  $N, 2N, 4N, 8N$ . Contrairement au cas précédent, on estime l'ordre de convergence des solutions deux à deux, en ayant préalablement projeté toutes les solutions sur le maillage le plus précis :

$$e_i = \|u_{2N_i} - u_{N_i}\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{H}_{8N})}.$$

À partir de la suite d'erreur  $(e_i)_{i=1,L}$ , on estime l'ordre de convergence par en  $2N_i$  est donné par :

$$\frac{\|u_{2N_i} - u_{N_i}\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{H}_{8N})}}{\|u_{4N_i} - u_{2N_i}\|_{\mathbf{L}^p(\mathcal{H}_{8N})}}.$$

## 3.2 APPLICATIONS À DES ÉCOULEMENTS RÉGULIERS

On considère dans cette section des écoulements subsoniques sans choc. Quelque soit la variable physique, elle peut être considérée comme régulière de sorte que l'hypothèse de régularité imposée par les estimations du Chapitre 2 soit valide. On montre alors que pour des écoulements réguliers, l'ordre deux spatial est obtenu sur des suites de maillages adaptés.

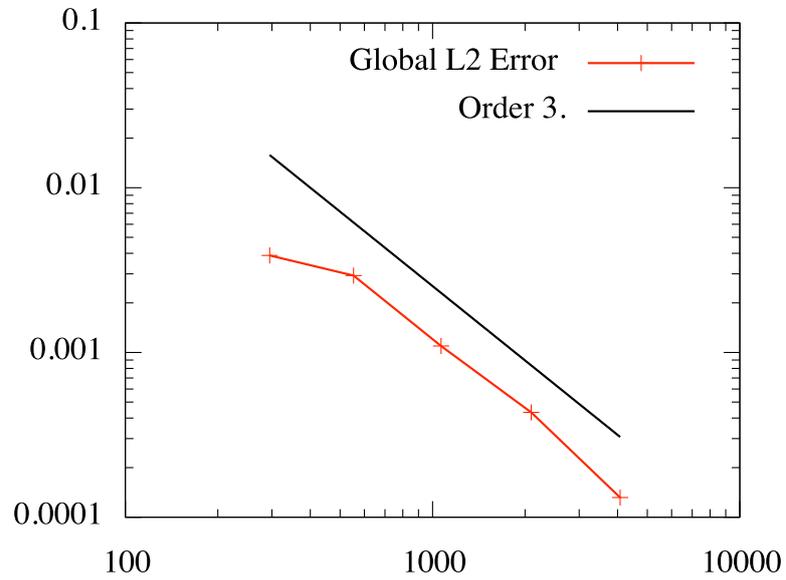
Pour les simulations subsoniques, les calculs CFD sont effectués avec le solveur de Riemann HLLC, les schémas V4 ou V6 et le schéma implicite pour l'intégration en temps.

### 3.2.1 Convergence sur des maillages adaptés

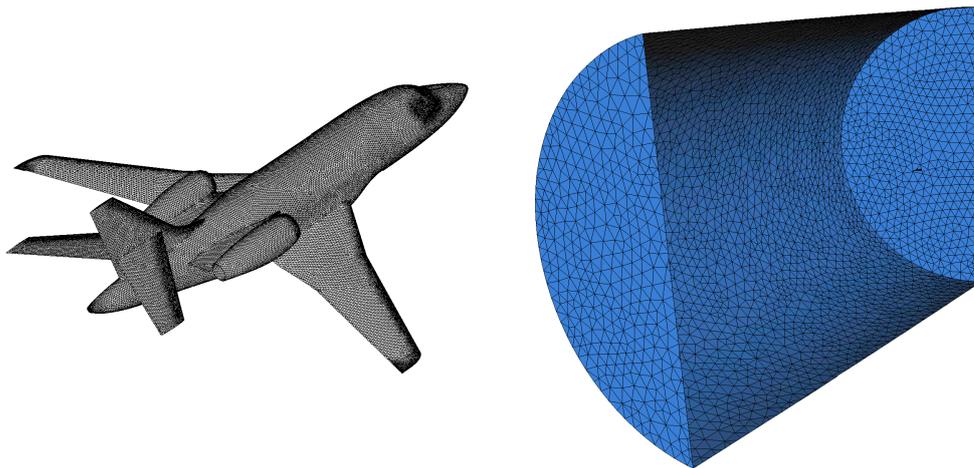
On considère un écoulement autour du profil 2D NACA0012 au nombre de Mach 0.4 et pour un angle d'attaque de 5 degrés. On a réalisé une adaptation sur la densité pour des complexités de 100 à 10 000. La convergence asymptotique obtenue sur la suite de maillages adaptés est représentée sur la Figure 3.9. On remarque sur cet exemple que l'on obtient une convergence à l'ordre trois, ce qui est très surprenant. Nous n'avons pas d'explication de ce comportement. On peut juste préciser qu'on utilise un schéma V6 qui converge à l'ordre 5 sur des grilles régulières pour l'advection linéaire.

### 3.2.2 Écoulement subsonique en 3D

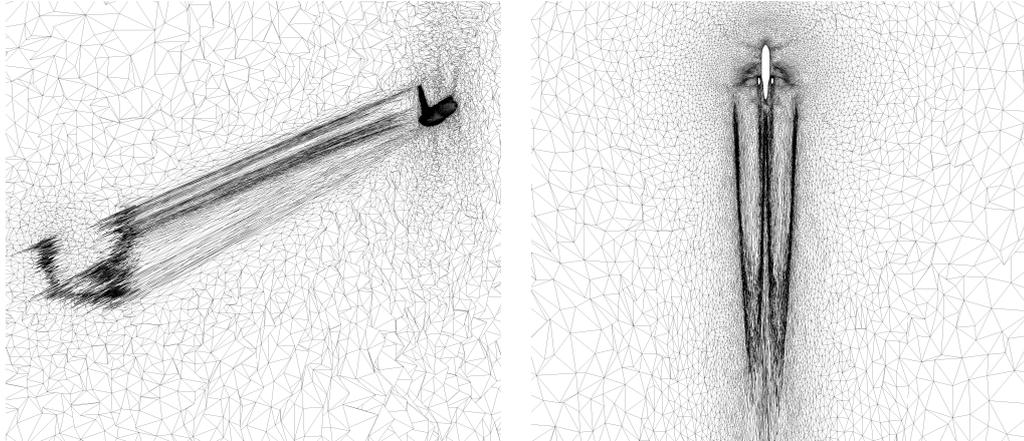
On démontre la bonne application à la CFD de l'adaptation multi-échelles pour des solutions numériques régulières en trois dimensions. On considère un écoulement autour d'un Falcon, géométrie fournie par Dassault Aviation. Le maillage de surface et le domaine de calcul sont représentés sur la Figure 3.10. Les paramètres de l'écoulement sont un nombre de Mach de 0.4 et un angle d'attaque de 10 degrés. On considère une adaptation pour une complexité de 400 000 à 2 500 000. La variable d'adaptation est la densité contrôlée en norme  $\mathbf{L}^2$ . La Figure 3.13 montre que la densité converge bien à l'ordre deux sur la suite de maillages adaptés. Les Figures 3.11 et 3.12 montrent les iso-surfaces de la densité. On remarque, que pour ce cas subsonique, l'anisotropie du maillage se concentre essentiellement dans le sillage de l'avion.



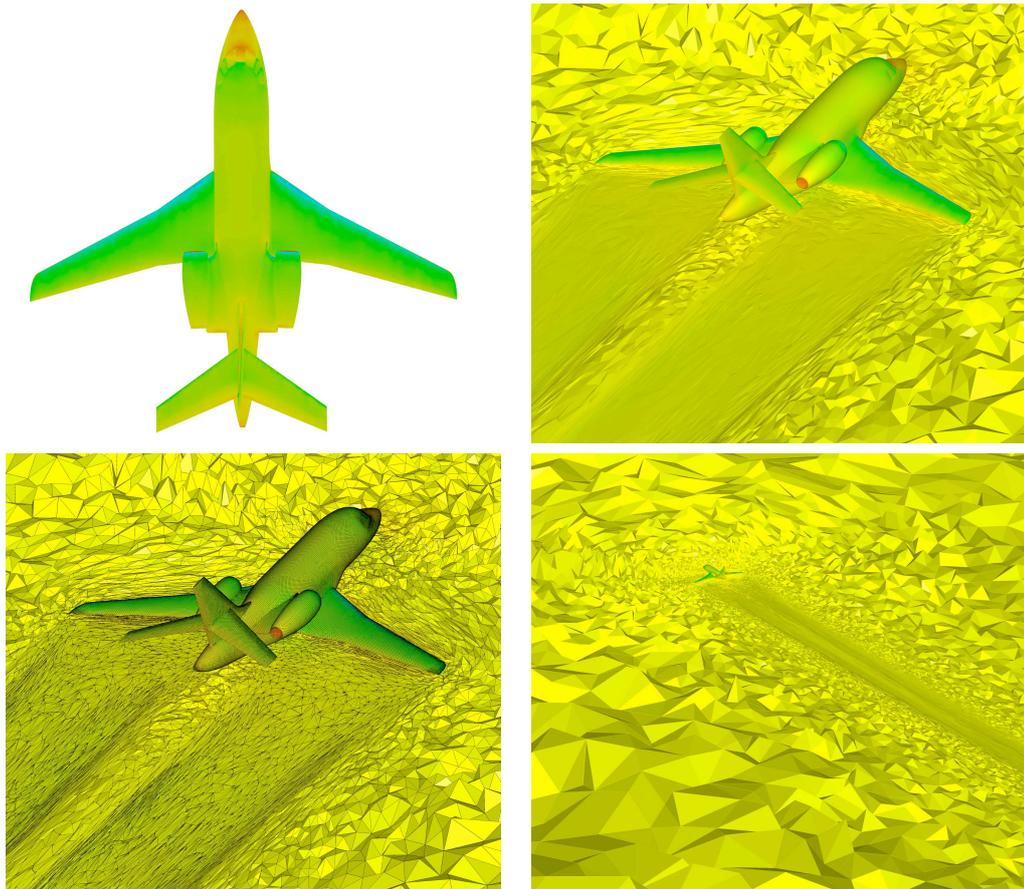
**Figure 3.9:** Cas du profil NACA0012 à Mach 0.4 et pour un angle d'attaque de 5 degrés. Ordre de convergence sur la densité.



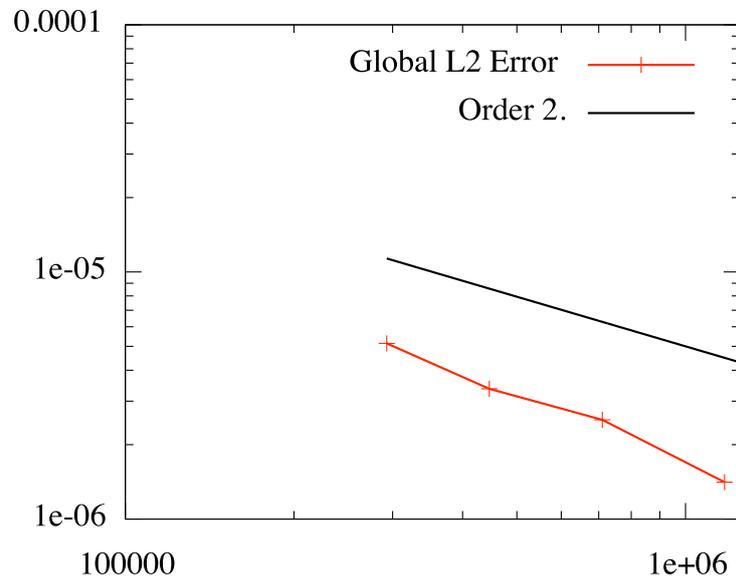
**Figure 3.10:** Simulation subsonique autour d'un Falcon à Mach 0.4 et pour un angle d'attaque de 10 degrés. À gauche, maillage surfacique de la géométrie du Falcon (jet d'affaire transsonique). À droite, le domaine de calcul cylindrique de longueur et diamètre 500 mètres.



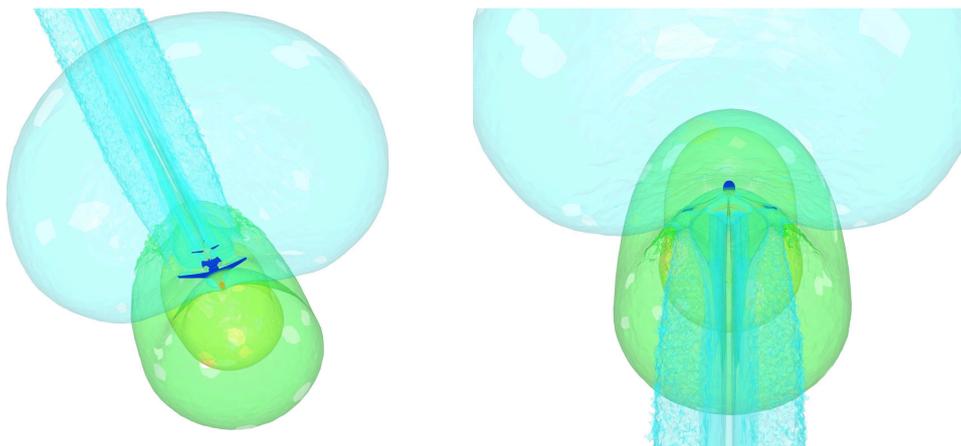
**Figure 3.11:** Simulation subsonique autour d'un Falcon à Mach 0.4 et pour un angle d'attaque de 10 degrés. Coupes volumiques dans le maillage final adapté comportant 2.5 millions de sommets. À gauche, coupe et vue de côté montrant l'anisotropie du maillage dans le sillage. À droite, coupe et vue au dessus de l'avion.



**Figure 3.12:** Simulation subsonique autour d'un Falcon à Mach 0.4 et pour un angle d'attaque de 10 degrés. De gauche à droite, de haut en bas, iso-valeurs de la densité sur le Falcon, coupe du maillage sous l'avion, idem avec représentation des éléments, représentation du maillage anisotrope dans le sillage de l'avion.



**Figure 3.13:** Simulation subsonique autour d'un Falcon à Mach 0.4 et pour un angle d'attaque de 10 degrés. Ordre de convergence sur la densité. On représente l'erreur en fonction du nombre de sommets des maillages.



**Figure 3.14:** Simulation subsonique autour d'un Falcon à Mach 0.4 et pour un angle d'attaque de 10 degrés. Iso-surfaces de la densité.

### 3.2.3 Conclusion

L'application de l'adaptation multi-échelles est directe dans le cas d'écoulements subsoniques car les solutions physiques des équations d'Euler sont régulières. La convergence asymptotique a été vérifiée en deux et trois dimensions. Cependant, un des buts de cette thèse est la prédiction du bang sonique. Il est donc nécessaire de proposer une étude fiable pour des écoulements avec des chocs. On envisage dans la suite la problématique liée à des écoulements transsoniques ou supersoniques.

## 3.3 APPLICATIONS À DES ÉCOULEMENTS NON RÉGULIERS

Dans de nombreuses applications industrielles, notamment en aérodynamique, on utilise des schémas d'ordre élevé avec une dissipation artificielle automatique dans les zones où l'écoulement est peu régulier. L'utilité de tels schémas est d'avoir une robustesse indépendante du type d'écoulement (avec ou sans choc).

Cependant, pour des écoulements présentant des chocs (Euler) ou de forts gradients (Navier-Stokes), on observe en pratique sur des suites de maillages uniformes que l'on converge seulement à l'ordre un quelque soit l'ordre du schéma utilisé. Cette perte dans l'ordre d'approximation spatial pourrait être attribuée *a priori* par l'utilisation d'un limiteur.

En fait, la perte de l'ordre de convergence doit être attribuée au maillage. On propose de retrouver l'ordre perdu en adaptant le maillage. En effet, on montre que l'adaptation de maillage anisotrope, dans des normes peu sensibles aux chocs, est une stratégie qui permet de prescrire une distribution optimale de taille de maille dans les chocs. Cela a pour conséquence que l'ordre deux est observé quelque soit la régularité de l'écoulement. On peut également certifier l'adaptation en vérifiant numériquement cet ordre de convergence.

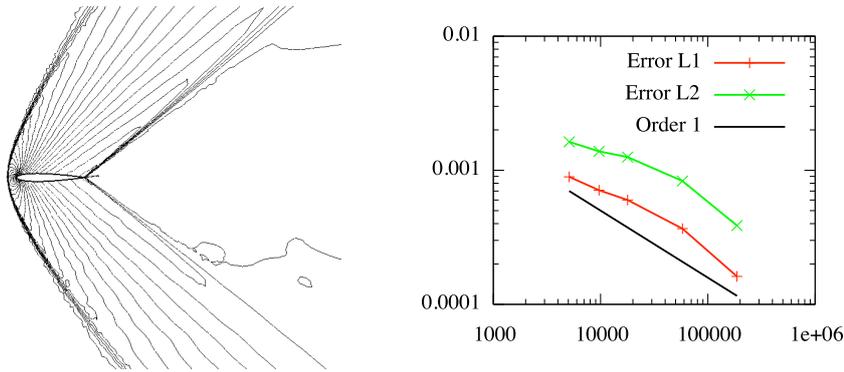
On propose d'illustrer cette problématique dans le cas du solveur volumes finis `Wolf`. On valide ensuite l'utilisation de l'adaptation multi-échelles dans le cadre de la CFD en proposant deux modèles de chocs, d'abord un modèle continu puis un modèle discret avec viscosité numérique.

### 3.3.1 Perte de l'ordre deux en convergence spatiale

On illustre sur des écoulements en deux dimensions la problématique de la perte de convergence spatiale pour des écoulements avec des chocs. Dans chaque cas, on considère une suite de maillages uniformes avec une taille de maille  $h$  décroissante. L'ordre de convergence est mesuré en norme  $\mathbf{L}^1$  et  $\mathbf{L}^2$ . La solution sur le maillage le plus fin est prise comme solution de référence. Les calculs CFD utilisent le solveur de Riemann HLLC avec un schéma V4, le limiteur de Dervieux et une avancée en temps explicite d'ordre 2 à 5 pas.

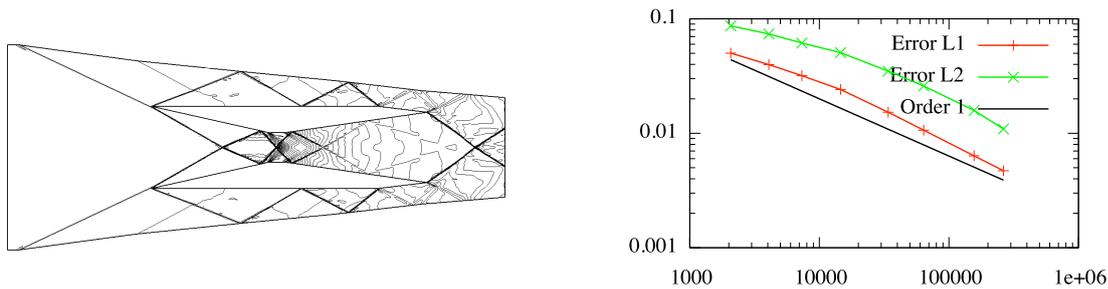
On considère un écoulement externe autour d'un profil d'aile NACA0012 pour un nombre de Mach de 1.4 et un angle d'attaque de 3 degrés. Dans cette simulation, une onde de choc détachée devant le profil est créée, cf. Figure 3.15 à gauche. L'ordre de convergence sur le nombre de Mach a été estimé. L'analyse de l'ordre de convergence montre qu'asymptotiquement un ordre 1 de convergence est atteint pour les normes  $\mathbf{L}^1$  et  $\mathbf{L}^2$ , cf. Figure 3.15 à droite.

Le second exemple est un écoulement interne dans un scramjet à un nombre de Mach égal à 3. Ce phénomène est caractéristique des écoulements compressibles fortement anisotropes et présentant de multiples ondes de choc, cf. Figure 3.16 à gauche. L'ordre de convergence est



**Figure 3.15:** Écoulement supersonique autour du profil NACA0012. À gauche, iso-valeurs du nombre de Mach pour un maillage uniforme de 80 000 sommets. À droite, ordre de convergence spatial sur une suite de maillages uniformes en norme  $L^1$  et  $L^2$ .

estimé sur la densité. Dans cet exemple encore, l'ordre de convergence spatial est proche de 1, cf. Figure 3.16 à droite.



**Figure 3.16:** Écoulement interne supersonique dans un scramjet. À gauche, iso-valeurs de la densité pour un maillage uniforme de 150 000 sommets. À droite, ordre de convergence spatial sur une suite de maillages uniformes en norme  $L^1$  et  $L^2$ .

Ces deux exemples illustrent la perte de l'ordre de convergence spatial lors de la simulation d'écoulements non réguliers. Si dans les deux cas un schéma de résolution d'ordre deux est utilisé, l'ordre de convergence spatial vaut seulement un sur une suite de maillages uniformes.

### 3.3.2 Apport de l'adaptation de maillage

Nous étudions et analysons l'impact de l'adaptation multi-échelles vis-à-vis de l'ordre de convergence pour des écoulements non réguliers. Dans ce but, on propose un modèle de choc continu sur lequel toutes les hypothèses de régularité pour appliquer la théorie de l'adaptation multi-échelles sont vérifiées. On modélise ensuite un choc numérique de manière discrète. On montre sur ce cas que l'algorithme converge bien vers un point fixe.

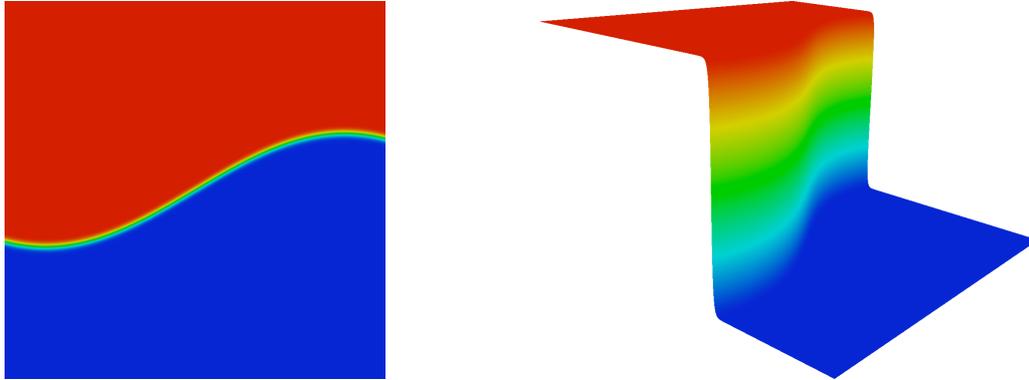
### Ordre deux pour des schémas dissipatifs dans les chocs

La convergence et la précision d'une solution numérique sont intimement liées à la dissipation du schéma numérique utilisé. Cette dissipation peut être en fait modélisée par une fonction continue paramétrée par  $\varepsilon$ . Une étude paramétrique permet alors de valider la convergence à l'ordre deux pour des écoulements stationnaires avec des chocs.

*Modèle continu de choc.* En une dimension, on choisit d'approcher un choc par la fonction  $s(x) = \tanh(\varepsilon x)$ . L'épaisseur du choc est alors de l'ordre de  $\delta(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon}$ , Figure 3.18 en haut à gauche. À partir de  $s$ , on définit une fonction modélisant un choc non droit en deux dimensions :

$$f_s(x, y) = \tanh(\varepsilon(y + 0.3 \sin(-2x))),$$

pour  $(x, y) \in [-1, 1]^2$ . Les iso-valeurs de  $f_s$  sont représentées Figure 3.17. Lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers l'infini, le gradient de  $f_s$  devient de plus en plus grand mais la fonction reste  $\mathcal{C}^\infty$ . Cette fonction vérifie donc les hypothèses théoriques du Chapitre 2 pour l'adaptation multi-échelles. Ce modèle correspond plutôt à un choc dans le cas des équations de Navier-Stokes dans la mesure où son épaisseur est fonction de la viscosité du fluide. Plusieurs adaptations ont été réalisées en norme  $\mathbf{L}^1$  et  $\mathbf{L}^2$  pour des valeurs du paramètre  $\varepsilon$  dans  $[10, 10^5]$ . La Figure 3.18 montre les ordres de convergence asymptotiques sur la fonction  $f_s$ . Quelque soit la valeur du paramètre  $\varepsilon$ , l'ordre deux est atteint dès 50 000 sommets pour la norme  $\mathbf{L}^2$ . Pour des valeurs du paramètre  $\varepsilon$  appartenant à  $[10, 1000]$ , seulement 10 000 sommets sont nécessaires en norme  $\mathbf{L}^1$  pour atteindre l'ordre deux de convergence asymptotique.



**Figure 3.17:** Modèle de choc  $\mathcal{C}^\infty$ . À gauche, iso-valeurs de la fonction  $f_s$ , à droite, représentation en trois dimensions des valeurs de  $f_s$

*Modèle discret et dissipatif de choc.* Le modèle précédent n'est valide que lorsque la solution de l'EDP est régulière, *i.e.*, quand l'épaisseur de la solution physique  $\delta(\varepsilon)$  reste constante quelque soit le maillage. Dans le cas des équations d'Euler, les solutions peuvent être discontinues. On peut alors montrer que sur une fonction analytique discontinue, **l'algorithme d'adaptation diverge dans la mesure où il prescrit taille de maille nulle** quelque soit la complexité ou la précision demandée, cf. Section 3.4 de ce chapitre. Cependant, en pratique, les schémas numériques sont diffusifs dans les chocs pour des raisons de stabilité, dans le sens où un choc est étalé sur plusieurs mailles. Cela se traduit par le fait que la précision dans le choc dépend de la taille de maille courante. Par analogie au modèle précédent, l'épaisseur  $\delta(\varepsilon)$

change en fonction du maillage. On illustre ce propos sur l'exemple du scramjet en étudiant la représentation numérique d'un des chocs sur différents maillages, cf. Figure 3.19 en haut. On a convergé trois solutions sur trois maillages uniformes de plus en plus fins. L'épaisseur du choc pour chaque maillage est représentée sur la Figure 3.19 au milieu. Plus le maillage est fin, plus l'épaisseur du choc diminue. On observe également que la représentation du choc est toujours étalée sur 3 mailles, cf. Figure 3.19 en bas. Dans la suite, on modélise ce comportement analytiquement, en introduisant une diffusion numérique du choc. Un tel modèle est équivalent à considérer dans le processus adaptatif une épaisseur de choc  $\delta(\varepsilon_h)$  qui dépend de la taille de maille  $h$ . On élabore ce modèle à partir de la fonction analytique discontinue suivante :

$$f_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On propose alors le modèle numérique de choc  $f_h$  qui approche  $f_H$  sur la portion de maillage  $[0, h, h]$  autour de la discontinuité :

$$f_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2h-x}{2h} & \text{si } x \in [0, 2h], \\ 0 & \text{si } x \geq 2h. \end{cases}$$

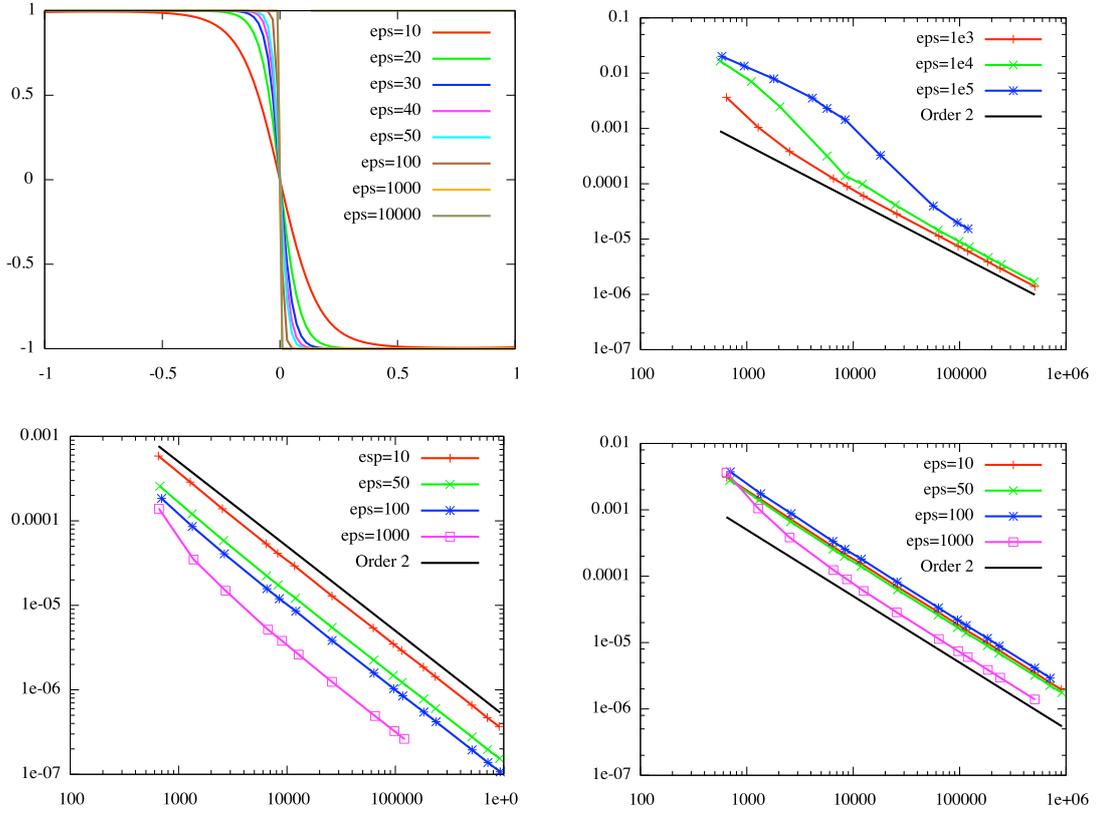
Ce modèle approche la représentation des chocs des solveurs où l'épaisseur du choc dépend de la taille de maille courante. On diffuse le choc initial donné par  $f_H$  sur trois sommets au lieu de seulement deux, si l'on prenait seulement  $\Pi_h f_H$  comme modèle. La Figure 3.20 illustre les fonctions  $f_h$  et  $\Pi_h f_H$ .

On a réalisé deux adaptations en 1D à la fois sur le modèle numérique  $f_h$  et la fonction discontinue  $f_H$ . Dans chaque cas, l'erreur d'interpolation est contrôlée en norme  $\mathbf{L}^\infty$ . Deux seuils d'erreur  $Err$  ont été testés,  $Err = 0.1$  et  $Err = 0.12$ . La Figure 3.21 représente la taille minimale prescrite dans les deux cas pour ces seuils d'erreur. Dans le cas de la fonction discontinue  $f_H$ , quelque soit le seuil d'erreur  $Err$ , la taille requise dans le choc tend vers zéro. À l'inverse, une diffusion de la discontinuité sur 2 mailles montre que pour les deux seuils d'erreur, la taille minimale converge vers une limite non nulle. La limite de la taille minimale diminue également quand le seuil d'erreur  $Err$  diminue, ce qui est consistant.

Cet exemple montre que l'adaptation sur l'erreur d'interpolation pour des écoulements avec des chocs capturés par des solveurs diffusifs converge. Dans notre exemple, la diffusion est donnée par la taille  $h$ . Il semble donc que l'adaptation pour un seuil d'erreur fixé distribue de manière optimale la diffusion numérique. Cependant, cette taille minimale, même si elle ne tend pas vers zéro, peut tendre vers une taille qui n'est pas réalisable en pratique sur des cas réels en 3D. Il est donc nécessaire d'utiliser des normes moins sensibles dans les chocs que la norme  $\mathbf{L}^\infty$  pour être en mesure de générer le maillage adapté.

### Taille minimale et normalisation locale

On compare sur un exemple, l'adaptation basée sur une estimation en norme  $\mathbf{L}^\infty$  avec une normalisation locale [1] et l'adaptation multi-échelles qui mesure l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^p$ . On considère un écoulement supersonique autour d'un SSBJ, un avion d'affaire fourni par Dassault Aviation. La géométrie est donnée Figure 3.28 à gauche. On considère pour l'écoulement un nombre de Mach de 1.6 et un angle d'attaque de 3 degrés. L'infini est une



**Figure 3.18:** En haut à gauche, épaisseur du choc  $f_s$  en fonction du paramètre  $\varepsilon$ . En haut à droite, convergence asymptotique en norme  $\mathbf{L}^2$  sur la fonction  $f_s$  pour des valeurs très grandes de  $\varepsilon$ . En bas, convergence asymptotique en norme  $\mathbf{L}^1$  (à gauche) et norme  $\mathbf{L}^2$  (à droite) pour des valeurs raisonnables de  $\varepsilon$ .

sphère de rayon 500 mètres pour un avion de 37 mètres. On contrôle l'erreur d'interpolation pour un niveau d'erreur  $\varepsilon$  fixé. Dans le premier cas, l'estimateur d'erreur est donné par [1] :

$$\left\| \frac{u - \Pi_h u}{\gamma|u|_\varepsilon + (1 - \gamma)\bar{h} \|\nabla u\|_2} \right\|_{\infty, K} \leq c \max_{x \in K} \max_{\vec{e} \in E_K} \left\langle \vec{e}, \frac{|H(x)|}{\gamma|u(x)|_\varepsilon + (1 - \gamma)\bar{h} \|\nabla u(x)\|_2} \vec{e} \right\rangle,$$

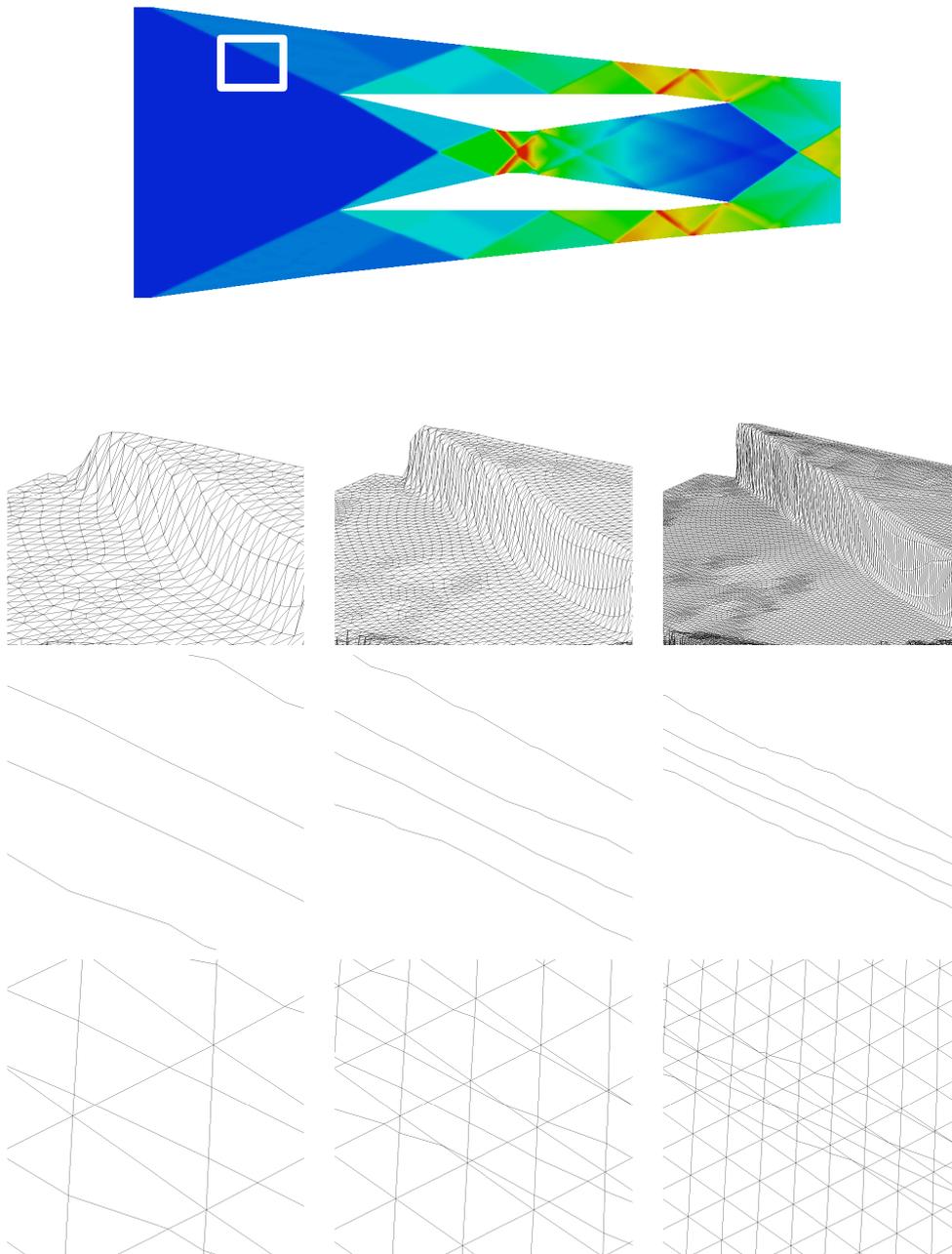
où  $K$  est un élément,  $\vec{e}$  est une arête incluse dans  $K$ ,  $H$  le hessien du nombre de Mach,  $\gamma$  un coefficient de normalisation égal à 0.001,  $\nabla u$  le gradient du nombre de Mach et  $c$  une constante. Une précision minimale est requise, on choisit  $h_{min} = 30\text{cm}$ . Le champ de métriques est finalement donné par :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \tilde{\Lambda} \mathcal{R}^{-1}, \quad \text{où } \tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i) \text{ and } \tilde{\lambda}_i = \min \left( \max \left( \frac{c|\lambda_i|}{\varepsilon}, \frac{1}{h_{max}^2} \right), \frac{1}{h_{min}^2} \right),$$

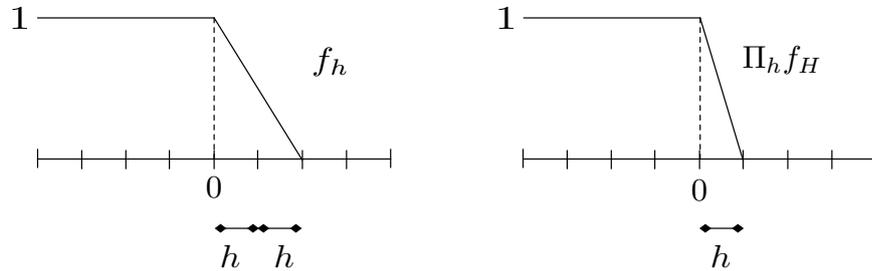
où  $(\lambda_i)_{i=1,3}$ , respectivement  $\mathcal{R}$ , sont les valeurs propres, respectivement les directions propres, de la matrice :

$$\frac{|H(x)|}{\gamma|u(x)|_\varepsilon + (1 - \gamma)\bar{h} \|\nabla u(x)\|_2},$$

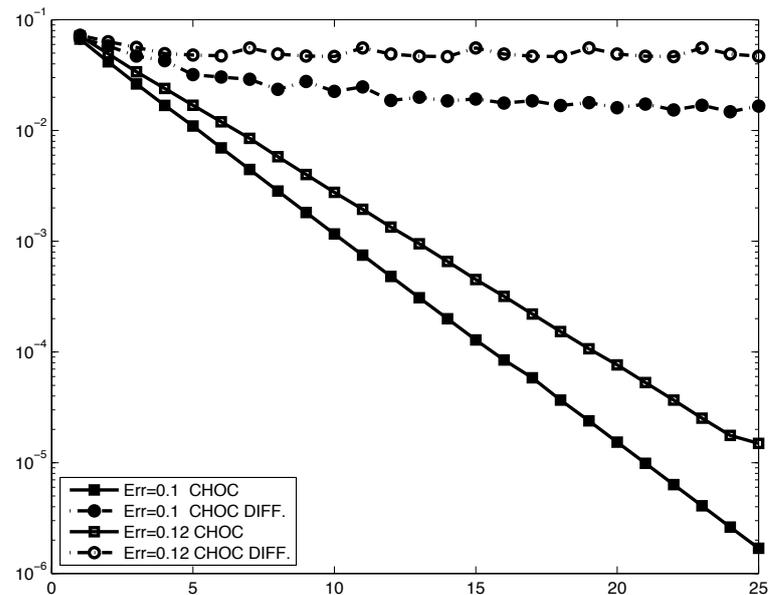
et  $h_{max}$  une taille maximale utilisée dans les directions où l'erreur d'interpolation est nulle. Dans le second cas, l'adaptation est réalisée en norme  $\mathbf{L}^2$  et aucune taille minimale n'est



**Figure 3.19:** Représentation de la capture d'un choc par le schéma volumes finis dans le cas du scramjet. En haut, la zone du choc étudié est encadrée en blanc. De haut en bas, représentation en 3D du choc, représentation des iso-valeurs de la densité dans le choc et superposition des iso-valeurs sur le maillage, du plus grossier à gauche au plus fin à droite. Dans chaque cas, l'épaisseur du choc est de 3 mailles.



**Figure 3.20:** Représentation des modèles de choc  $f_h$  et  $f_H$  sur un maillage uniforme.



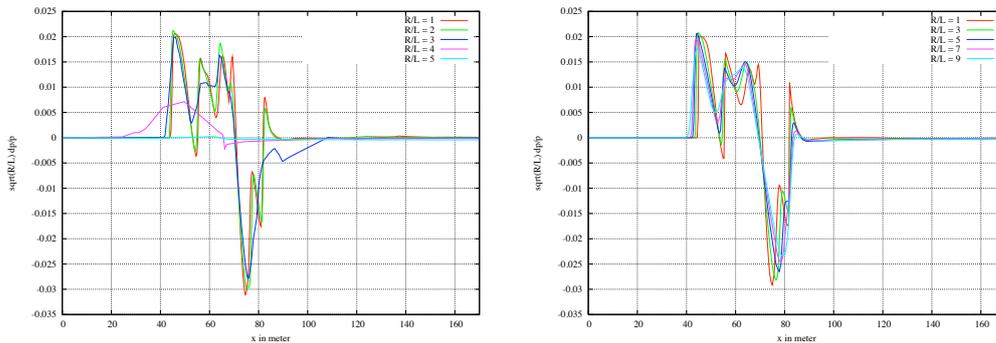
**Figure 3.21:** Modèles de choc numérique. Représentation de la taille minimale prescrite dans un choc en fonction de l'itération d'adaptation. Les courbes représentées par les cercles creux et pleins correspondent au modèle de choc numérique  $f_h$  avec une diffusion sur 2 mailles. Les courbes représentées par les carrés pleins et creux correspondent à un modèle de choc discontinu  $f_H$ . Dans le cas où le choc est diffusé, la taille minimale prescrite converge vers une taille minimale non nulle qui dépend du seuil d'erreur  $Err$ . Dans le cas du choc discontinu, la taille minimale tend vers zéro.

imposée. Le champ de métrique est donné par

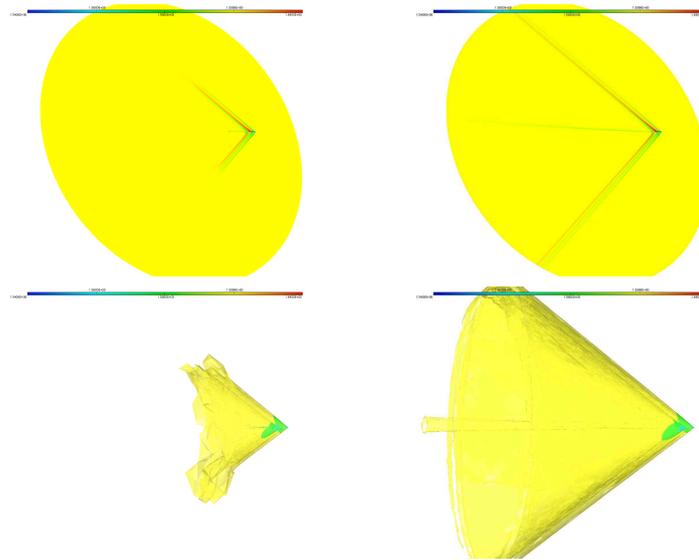
$$\mathcal{M} = \frac{3}{\varepsilon} \left( \int_{\Omega} (\det(|H|))^{\frac{p}{2p+3}} \right)^{\frac{3}{p}} (\det |H|)^{-\frac{1}{2p+3}} |H|.$$

Contrairement à la métrique  $\mathbf{L}^{\infty}$ , seule une troncature des valeurs propres de  $H$  par  $h_{max}^{-2}$  est nécessaire afin de ne pas annuler le déterminant  $\det(|H|)$ . La Figure 3.23 compare les iso-valeurs du nombre de Mach pour les deux adaptations. Les deux maillages finaux adaptés comportent environ 700 000 sommets. Si la solution est vite diffusée sous l'avion dans le cas  $\mathbf{L}^{\infty}$ , une solution est obtenue jusqu'à la frontière du domaine. Par exemple, le sillage derrière l'avion n'est quasiment pas capturé pour l'adaptation  $\mathbf{L}^{\infty}$  alors qu'il est parfaitement visible pour l'adaptation  $\mathbf{L}^p$ . Ceci est d'autant plus flagrant lorsqu'on regarde les iso-surfaces du cône de Mach, Figure 3.23 en bas. Pour donner une information quantitative, le champ de pression a été extrait le long d'une droite pour un ensemble de distances normalisées  $R/L$  sous l'avion, avec  $L = 37$  mètres, cf. Figure 3.22. Jusqu'à  $R/L = 3$ , la pression en norme  $\mathbf{L}^{\infty}$  est plus précise que la solution  $\mathbf{L}^p$ . Cependant, le champ de pression pour  $R/L > 3$  est complètement diffusé dans le cas de la norme  $\mathbf{L}^{\infty}$  alors que le champ de pression est parfaitement capturé dans le cas  $\mathbf{L}^p$ .

Au delà de la perte d'anisotropie induite par la prescription d'une taille minimale  $h_{min}$ , l'utilisation d'une norme  $\mathbf{L}^{\infty}$  ralentit implicitement le calcul. En effet, comme la taille minimale est atteinte très vite, les hauteurs des tétraèdres sont nécessairement plus petit que dans une adaptation  $\mathbf{L}^p$ . Or, le pas de temps du du solveur est directement lié à la plus petite hauteur des tétraèdres du maillage.



**Figure 3.22:** Comparaison d'une adaptation en norme  $\mathbf{L}^{\infty}$  avec normalisation locale à gauche et d'une adaptation multi-échelles à droite. Représentation du champ de pression normalisé sur une droite qui se trouve à une distance  $R$  fois la taille de l'avion. À gauche, aucun signal n'est détecté dès 140m sous l'avion alors qu'un signal est détecté jusqu'à plus de 330m sous l'avion dans le cas de l'adaptation multi-échelles.



**Figure 3.23:** Comparaison d'une adaptation en norme  $\mathbf{L}^\infty$  avec normalisation locale à gauche et d'une adaptation multi-échelles à droite. En haut, iso-valeurs du nombre de Mach. En bas, représentation du cône de Mach.

### 3.3.3 Exemples numériques

#### Exemples en deux dimensions

Pour valider l'approche proposée, on reconsidère les deux exemples numériques de la Section 3.3.1 où l'on avait mis en évidence la perte de l'ordre de convergence spatial. Dans chaque cas, on réalise des adaptations en normes  $\mathbf{L}^1$  et  $\mathbf{L}^2$  et on analyse l'ordre de convergence global en maillage. Comme précédemment, pour évaluer l'ordre de convergence, chaque solution est comparée à la solution obtenue sur le maillage le plus fin. Les paramètres du solveur sont identiques à ceux de la Section 3.3.1.

Pour la simulation supersonique du profil d'aile NACA0012, on considère le nombre de Mach comme senseur pour l'adaptation de maillage. Le maillage adapté en norme  $\mathbf{L}^1$  le plus fin contient environ 300 000 sommets, Figure 3.24. Les régions discontinues, comme le choc détaché, sont maillées très finement et les raffinements du maillage sont propagés dans tout le domaine de calcul. Il faut préciser que la taille du NACA0012 est d'un mètre et que la taille du domaine est d'un kilomètre. La solution est calculée précisément partout dans le domaine, les chocs émis par le profil sont propagés sans dissipation jusqu'aux frontières du domaine. La solution obtenue est à comparer avec la solution sur le maillage uniforme contenant 80 000 sommets (cf. Figure 3.15). Pour cette simulation, l'ordre deux de convergence globale est immédiatement atteint pour la variable nombre de Mach, voir Figure 3.27 à gauche.

La simulation du scramjet amène aux mêmes conclusions. Cette fois, l'adaptation de maillage est effectuée sur la pression. Sur la Figure 3.25, on montre un maillage adapté en norme  $\mathbf{L}^1$  et la solution (champ de densité) correspondante au cours du processus adaptatif. Il contient seulement 22 566 sommets. En la comparant à la solution obtenue sur maillage uniforme avec environ 150 000 sommets (Figure 3.16), on constate qu'elle est beaucoup plus précise. Par exemple, l'épaisseur des ondes de choc est beaucoup plus étroite. En ce qui concerne l'ordre

de convergence pour cette simulation, l'ordre deux est aussi immédiatement atteint pour la densité (cf. Figure 3.27 à droite), alors qu'un million de sommets n'était pas encore suffisant dans le cas uniforme.

On constate que l'anisotropie est cette fois préservée lors de l'adaptation de maillage multi-échelles. Il n'y a plus de perte d'anisotropie comme sur la Figure 3.3. On le voit clairement sur la Figure 3.26 qui montre un zoom sur un des chocs du maillage final adapté.

### Exemples en trois dimensions

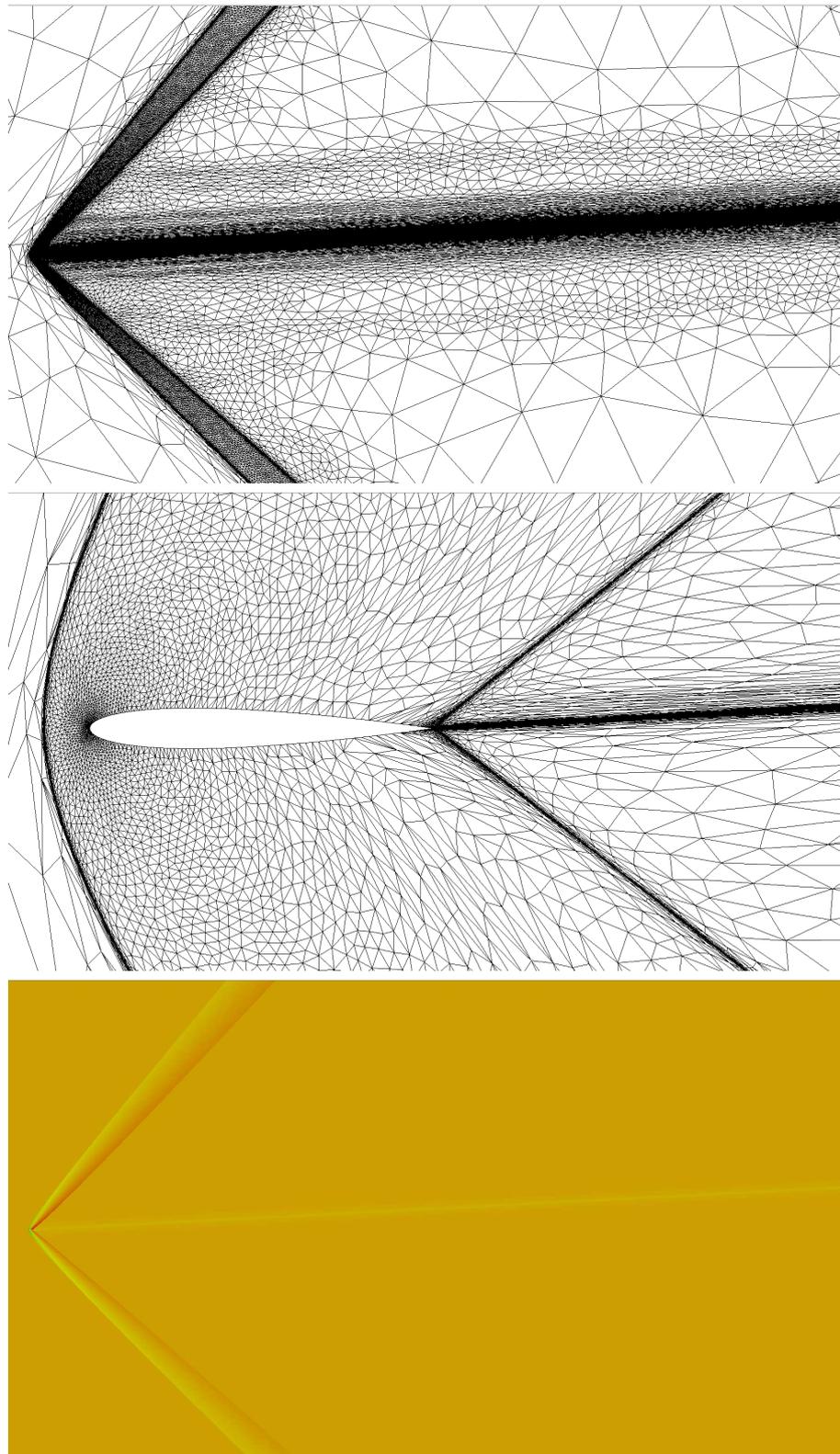
On illustre maintenant l'impact de l'adaptation multi-échelles en dimension trois sur deux exemples en aéronautique. Les deux maillages surfaciques des avions étant de très bonne qualité et suffisamment précis (voir Figure 3.28 et Figure 3.32 à gauche), on choisit de n'adapter que le maillage volumique dans chaque cas.

*Jet d'affaire supersonique.* On étudie le cas d'un écoulement supersonique autour d'un jet d'affaire supersonique, le SSBJ qui nous a été fourni par Dassault Aviation. L'avion a une longueur de 37 mètres et la précision du maillage de surface varie de 1 millimètre à 30 centimètres, Figure 3.28 à gauche. La géométrie du SSBJ est plongée dans un domaine de calcul cylindrique qui a une longueur et un diamètre de 2.5 kilomètres, Figure 3.28 à droite. Le jet vole à une altitude de 13 700 mètres avec une vitesse de croisière de Mach 1.6 et un angle d'attaque de 3 degrés.

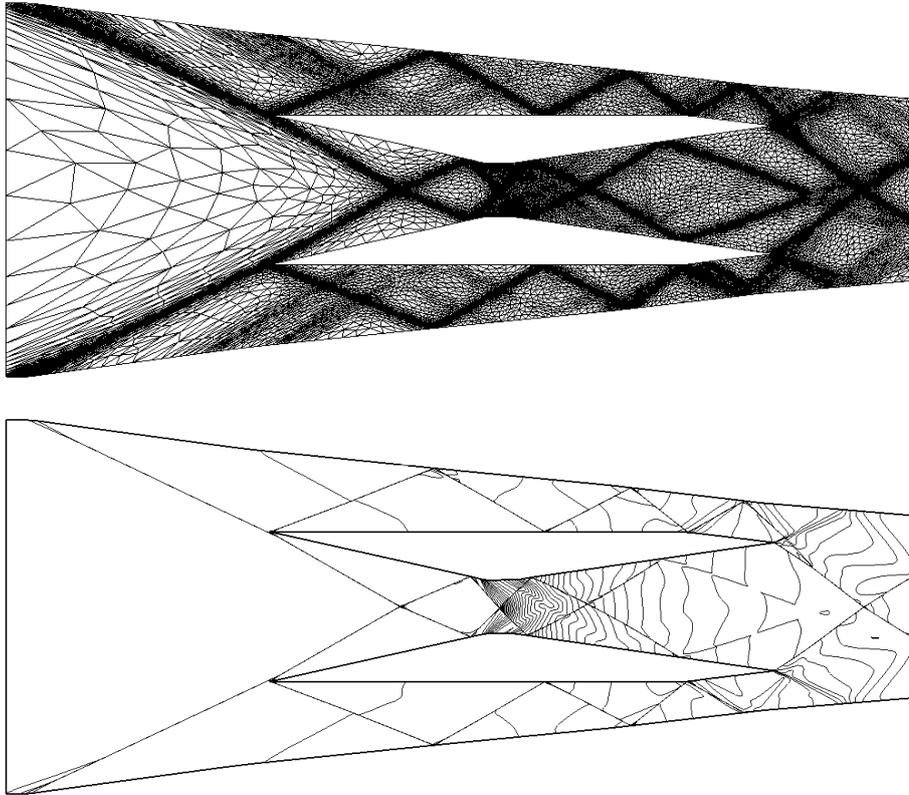
Les écoulements supersoniques génèrent des structures fortement anisotropes. Dans le cas d'un avion supersonique, un grand nombre d'ondes de choc est présent dans l'écoulement, elles correspondent aux cônes de Mach émis par la géométrie, Figure 3.31. Par conséquent, ce type de simulation est très approprié pour valider l'approche proposée et mettre en avant les gains conséquent que l'on peut obtenir avec des maillages adaptés anisotropes.

Pour cette simulation, on a considéré les paramètres de résolution suivants : solveur de HLLC, dissipation numérique d'ordre 4, limiteur à trois entrées de Dervieux et schéma de Runge Kutta SSP d'ordre 2 à 5 pas pour l'intégration en temps. En ce qui concerne l'adaptation de maillage, on a choisi de contrôler le nombre de Mach en norme  $L^2$  car cette variable est très représentative pour ce type d'écoulement. 20 adaptations de maillage ont été réalisées au total. La boucle d'adaptation a été découpée en 5 sous-itérations. À chaque sous-itération, on converge le couple maillage/solution à une complexité fixée. La complexité est multipliée par un coefficient deux entre deux sous-itérations, comme décrit dans la Section 3.1.1. Les solutions finales de chaque sous-itération sont utilisées pour calculer l'ordre de convergence spatial. Pour la première sous-itération, on cherche à obtenir un maillage adapté avec 250 000 sommets et pour l'itération finale on prescrit une complexité de 3 750 000 sommets. Le temps de calcul total pour cette simulation est de deux jours sur 4 processeurs sur un ordinateur de bureau Mac Pro avec un processeur Intel de fréquence 2.66 GHz et 4 Go de mémoire vive.

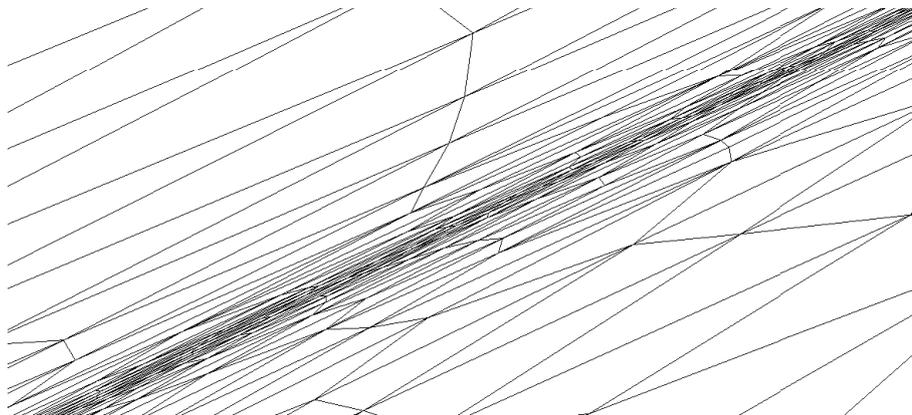
La simulation commence avec un maillage grossier uniforme contenant 161 061 sommets et 745 779 tétraèdres. Le maillage final obtenu contient 3 764 591 sommets et 22 324 258 tétraèdres, la Figure 3.30 montre quelques vues de ce maillage. Comme prévu, des maillages fortement anisotropes sont générés (en bas à gauche). Les raffinements le long des cônes de Mach ont été propagés dans tout le domaine de calcul (en haut à gauche) avec une grande précision dans les régions des chocs (en haut à droite). Toujours sur la Figure 3.30, en bas à droite, on montre une vue rapprochée sur le maillage tout en bas du domaine de calcul, *i.e.*,



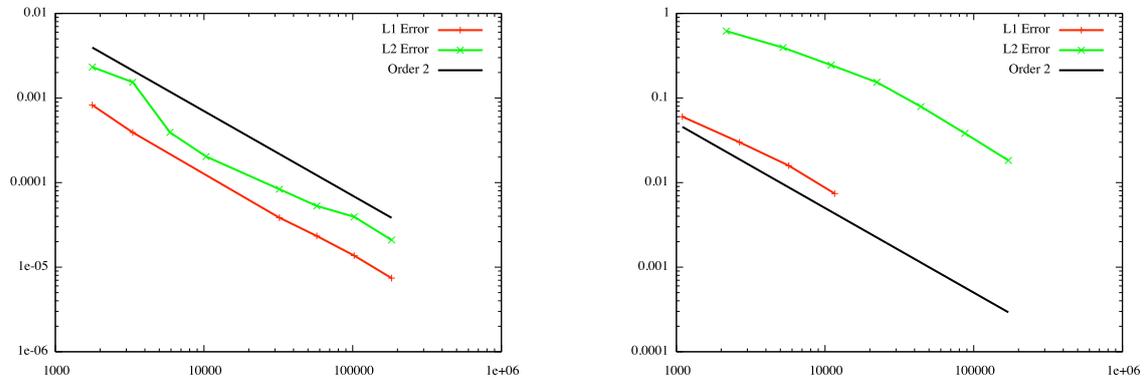
**Figure 3.24:** En haut, maillage final adapté en norme  $L^1$  pour la simulation supersonique autour du profil NACA0012. Il contient environ 300 000 sommets et 700 000 triangles. Au milieu, un zoom sur le maillage autour du profil. En bas, la solution correspondante : les iso-valeurs du nombre de Mach.



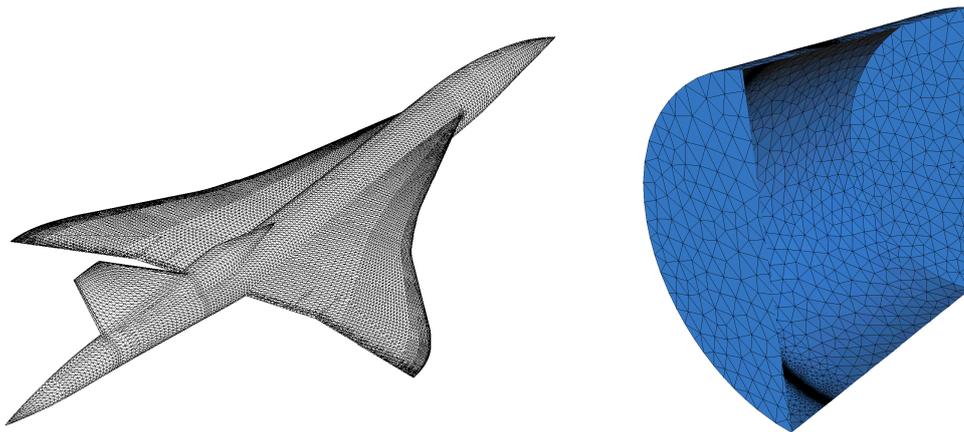
**Figure 3.25:** En haut, maillage final adapté en norme  $L^1$  pour la simulation du scramjet contenant 22 566 sommets. En bas, les iso-valeurs de densité calculées sur ce maillage.



**Figure 3.26:** Zoom sur un des choc du maillage final adapté. On constate que l'anisotropie est cette fois préservée avec l'adaptation de maillage multi-échelles. Cette figure est à comparer à la Figure 3.3.



**Figure 3.27:** À gauche, les ordres de convergence numériques dans le calcul supersonique du NACA0012 pour le nombre de Mach en normes  $\mathbf{L}^1$  et  $\mathbf{L}^2$ . À droite, les ordres de convergence numériques pour la simulation du scramjet pour la densité en normes  $\mathbf{L}^1$  et  $\mathbf{L}^2$ . Dans chaque cas, un ordre deux est obtenu.

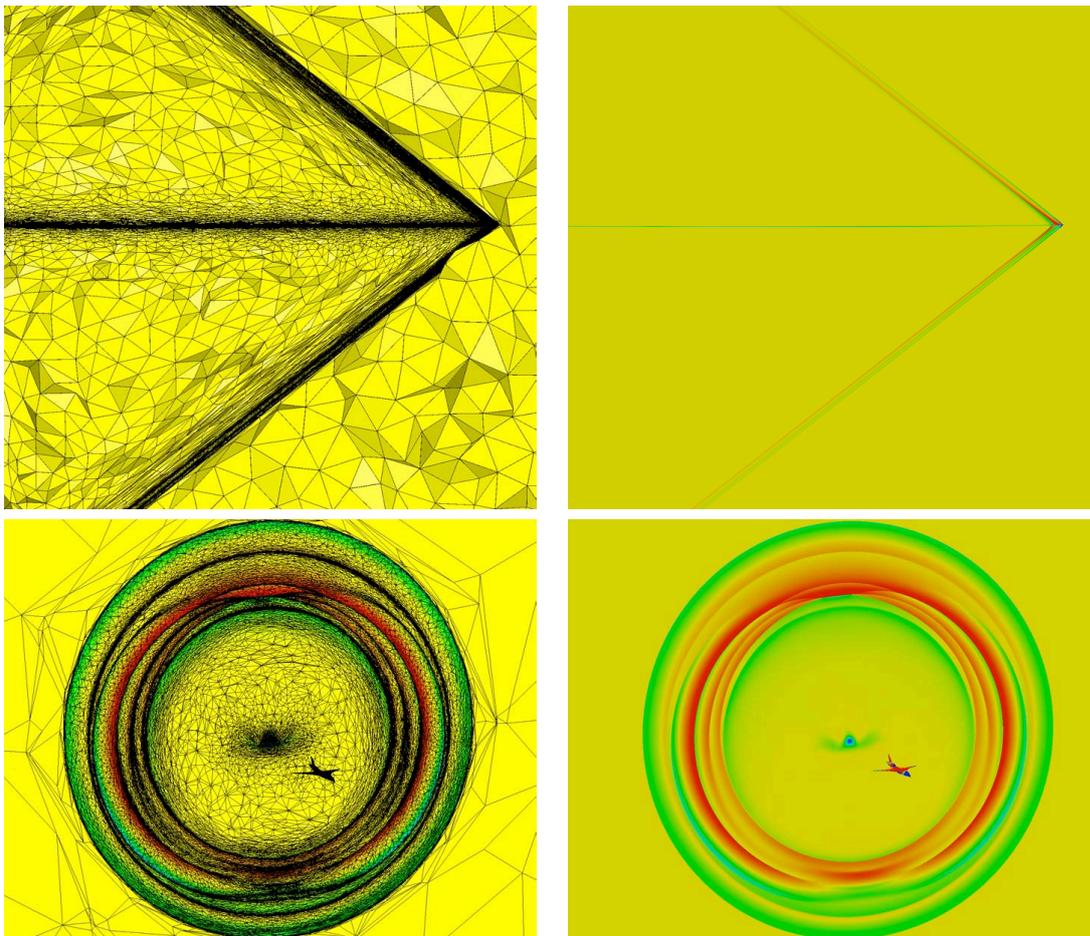


**Figure 3.28:** À gauche, maillage surfacique de la géométrie du SSBJ (jet d'affaire supersonique). À droite, le domaine de calcul cylindrique de longueur et diamètre 2.5 kilomètres.

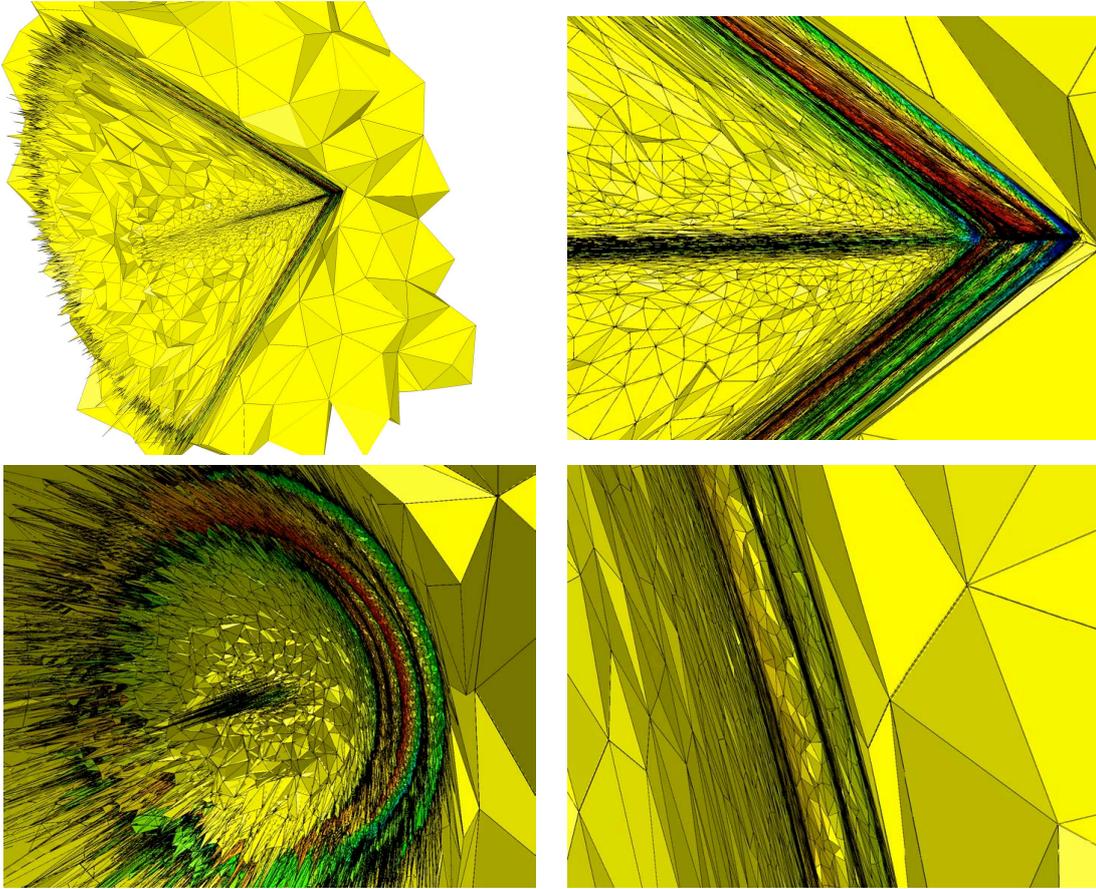
un kilomètre et demi plus bas. On remarque que trois ondes de choc sont toujours représentées et séparées dans le maillage, la précision étant de l'ordre du mètre.

Ces maillages anisotropes réduisent considérablement le nombre de sommets requis pour obtenir cette précision sur la solution. De plus, ils réduisent aussi drastiquement la diffusion numérique du solveur permettant de propager très précisément les ondes de choc dans tout le domaine de calcul, Figure 3.29. Des résultats équivalents sur des maillages non-structurés uniformes ou adaptés isotropes nous semblent impossible à obtenir. La Figure 3.29, en bas, illustre la très grande précision obtenue sur un plan de coupe orthogonal à la trajectoire de l'avion, à une centaine de mètres du jet. On voit clairement une multitude de chocs capturés très précisément dans la solution et dans le maillage.

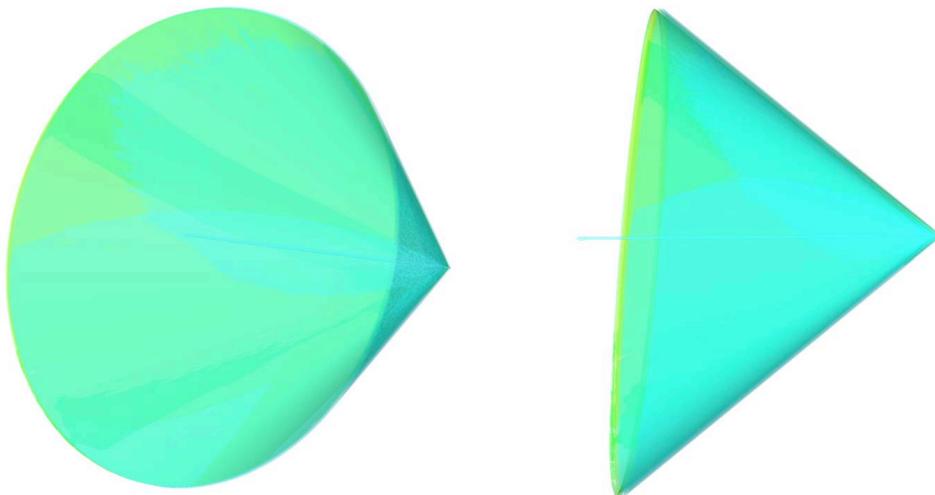
Finalement, pour calculer l'ordre de convergence de la simulation, on a considéré comme solution de référence la solution obtenue sur le maillage à 3 764 591 de sommets. On a calculé l'écart entre cette solution et les solutions finales de chaque sous-itération de la boucle d'adaptation de maillage. L'ordre deux théorique est bien atteint asymptotiquement et il est



**Figure 3.29:** Jet d'affaire supersonique. Vues du maillage adapté anisotrope final contenant 3 764 591 sommets et 22 324 258 tétraèdres (à gauche) et la solution correspondante (à droite), les iso-valeurs du nombre de Mach. En haut, coupe suivant le plan de symétrie, et en bas, coupe derrière le SSBJ dans un plan orthogonal à sa direction.



**Figure 3.30:** Jet d'affaire supersonique. Plusieurs vues du maillage adapté anisotrope final contenant 3 764 591 sommets et 22 324 258 tétraèdres. Les plans de coupe sont dans le plan de symétrie ou bien derrière le SSBJ. On notera la forte anisotropie du maillage tétraédrique.



**Figure 3.31:** Jet d'affaire supersonique. Iso-surfaces du nombre de Mach qui représentent les cône de Mach émis par le jet dans tout le domaine de calcul. On notera que la solution n'est pas dissipée lors de la propagation des ondes de choc sur plusieurs kilomètres.

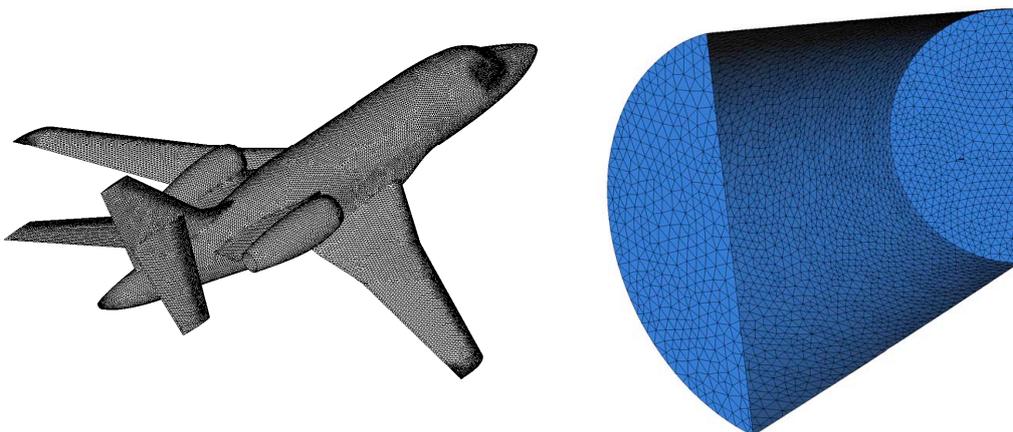
illustré sur la Figure 3.37 à gauche.

*Jet d'affaire transsonique.* On considère cette fois un écoulement transsonique non-visqueux autour du jet d'affaire Falcon fourni par Dassault Aviation. Les dimensions de l'avion sont une longueur 19 mètres et une envergure de 9,6 mètres. La précision du maillage surfacique est variée de 1 centimètre à 10 centimètres, Figure 3.32 à gauche. Le domaine de calcul est encore cylindrique de longueur et diamètre 500 mètres, Figure 3.32 à droite. Le Falcon vole à une altitude de 13 700 mètres avec une vitesse de croisière de Mach 0.8 et un angle d'attaque de 3 degrés.

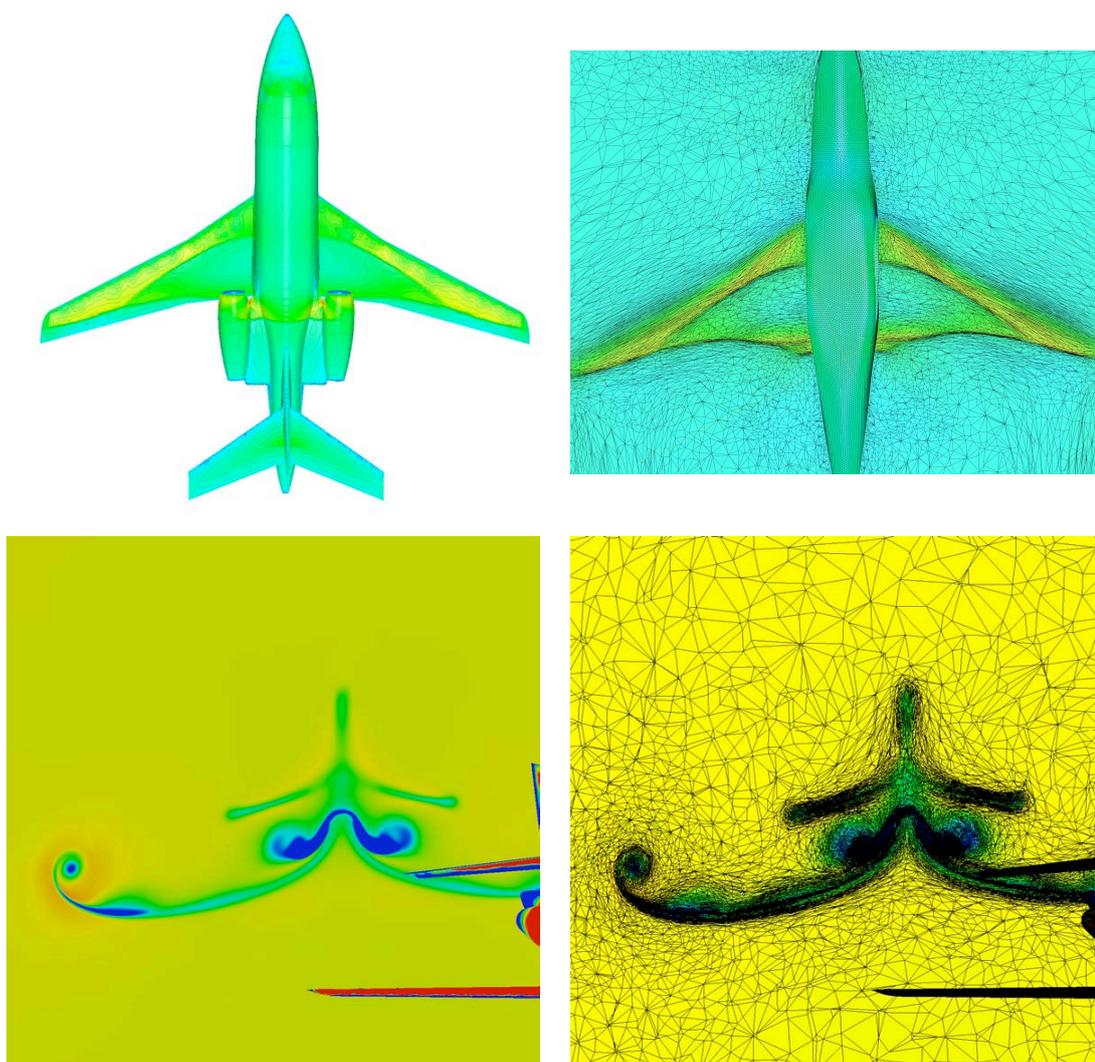
Dans cette simulation, on cherche à bien capturer l'écoulement autour de l'avion et à illustrer l'impact du multi-échelles. En effet, on montre que l'on capture à la fois les ondes de choc sur la structure de l'avion et le sillage du jet, dont les tourbillons de bout d'ailes. Ces phénomènes physiques ont pourtant des magnitudes très différentes.

Pour cette simulation, on a considéré les mêmes paramètres de résolution que pour la simulation précédente du SSBJ. En ce qui concerne l'adaptation de maillage, on a encore choisi de contrôler le nombre de Mach en norme  $L^2$ . 30 adaptations de maillage ont été réalisées au total. La boucle d'adaptation a été découpée en 6 sous-itérations de complexité croissante. Les solutions finales de chaque sous-itération sont utilisées pour calculer l'ordre de convergence spatial. Pour la première sous-itération, on cherche à obtenir un maillage adapté avec 250 000 sommets et pour l'itération finale on prescrit une complexité de 2 000 000 sommets.

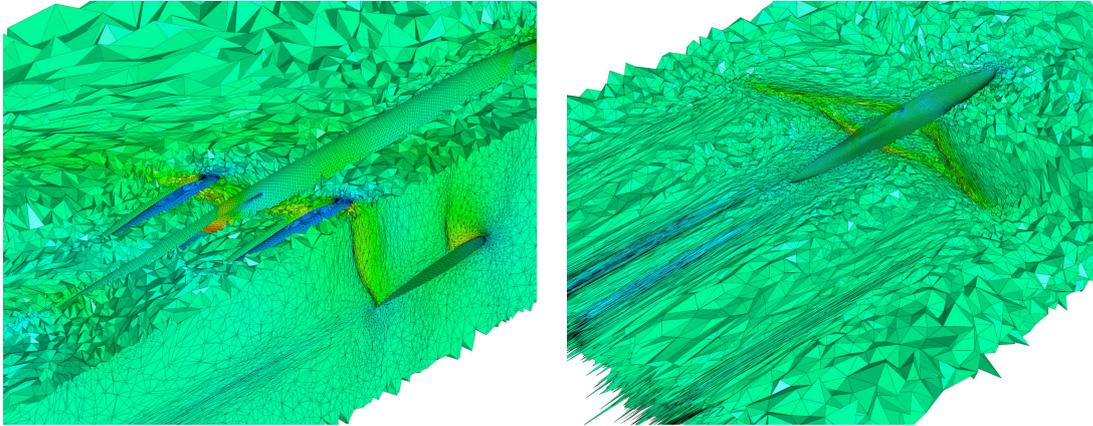
La simulation commence avec un maillage grossier uniforme contenant 357 624 sommets et 1 943 637 tétraèdres. Le maillage final obtenu contient 2 025 231 sommets et 11 860 697 tétraèdres, les Figures 3.34 et 3.33 montrent quelques vues de ce maillage. Les iso-surfaces du nombre de Mach représentant la solution sur ce maillage sont montrées sur la Figure 3.36. On constate sur la Figure 3.33, en haut, que le choc en  $\lambda$  est précisément capturé sur l'avion (à gauche) et dans le maillage (à droite). Le sillage et les tourbillons de bout d'ailes



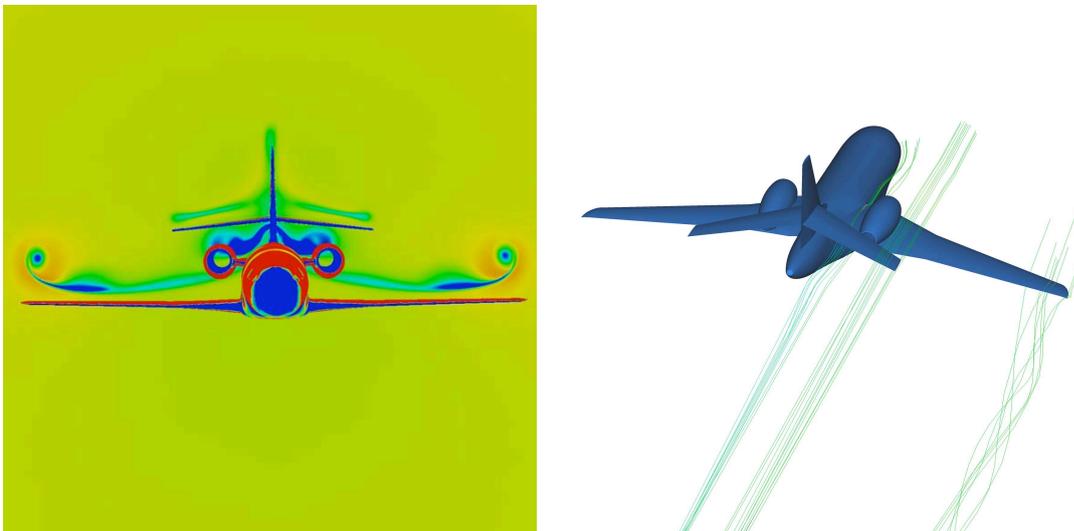
**Figure 3.32:** À gauche, maillage surfacique de la géométrie du Falcon (jet d'affaire transsonique). À droite, le domaine de calcul cylindrique de longueur et diamètre 500 mètres.



**Figure 3.33:** Jet d'affaire transsonique. Maillage final adapté à droite et solution, *i.e.*, les iso-valeurs du nombre de Mach, correspondante à gauche. En haut, on notera la capture précise des deux chocs en lambda et l'adaptation anisotrope du maillage. En bas, un zoom sur le sillage de l'avion. Le tourbillon de bout d'aile capté très précisément se dessine dans le maillage adapté.



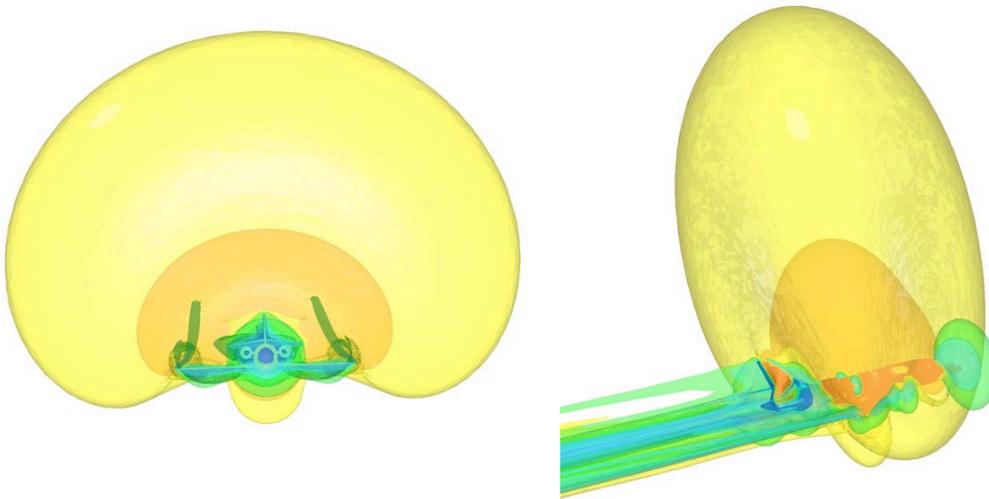
**Figure 3.34:** Jet d'affaire transsonique. Deux vues du maillage final adapté contenant 2025 231 sommets. On notera l'anisotropie du maillage à la fois pour le choc en  $\lambda$  et pour le sillage de l'avion.



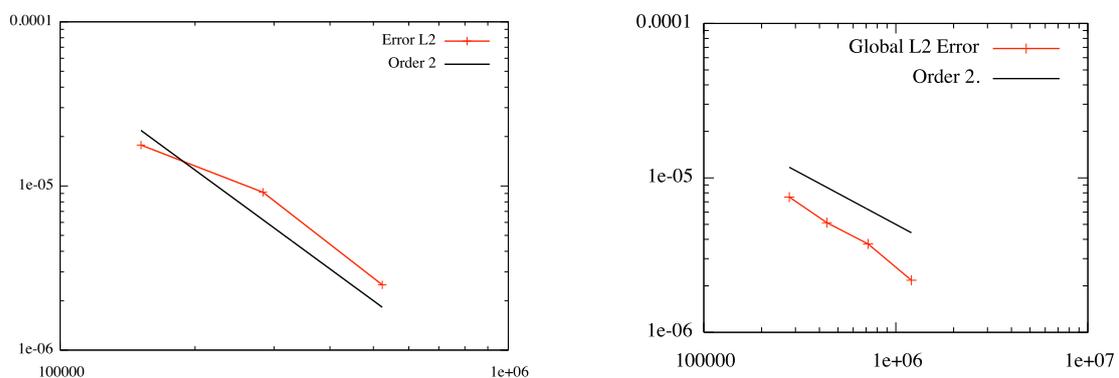
**Figure 3.35:** Jet d'affaire transsonique. À gauche, solution dans un plan de coupe derrière le Falcon orthogonalement à sa trajectoire. On voit nettement la capture précise du sillage de l'avion. À droite, plusieurs lignes de courant montrant la vorticité.

apparaissent clairement dans le maillage fournissant une solution très précise et peu dissipée, cf. Figure 3.33 en bas. La capture du sillage est aussi illustrée sur la Figure 3.35. L'anisotropie du maillage dans le sillage de l'avion est mise en évidence sur la Figure 3.34.

Enfin, pour calculer l'ordre de convergence de la simulation, on a considéré comme solution de référence, la solution obtenue sur le maillage à 2 025 231 de sommets. On a calculé l'écart entre cette solution et les solutions finales de chaque sous-itération de la boucle d'adaptation de maillage. L'ordre deux théorique est bien atteint asymptotiquement et il est illustré sur la Figure 3.37 à droite.



**Figure 3.36:** Jet d'affaire transsonique. Iso-surfaces du nombre de Mach. On voit clairement les chocs générés par le Falcon ainsi que les tourbillons de bout d'aile.



**Figure 3.37:** Courbe de convergence pour le nombre de Mach en norme  $L^2$ . À gauche, pour le SSBJ, et à droite, pour le Falcon. Dans les deux cas, l'ordre deux théorique est atteint asymptotiquement.

### 3.4 PROBLÉMATIQUES RESTANTES

L'adaptation de maillage multi-échelles en norme  $\mathbf{L}^p$  apporte une solution satisfaisante à l'adaptation en CFD en retrouvant l'ordre de convergence spatial pour des chocs numériques et en éliminant la prescription d'une taille minimale. Cependant, dans certains écoulements complexes, certaines particularités aérodynamiques ne sont pas bien capturés. Cela provient du fait que ces particularités ne peuvent pas être représentées localement par une forme quadratique. Le modèle d'erreur est donc mis en défaut. Enfin, dans le cas d'un solveur compressif, *i.e.* représentant un choc sur une seule maille, la prescription d'une taille minimale redevient obligatoire. Il est alors important de savoir s'il existe toujours une stratégie permettant de garantir l'ordre deux.

On donne ici un état des lieux des problématiques restantes. On illustre de plus les insuffisances de l'adaptation multi-échelles. Enfin, on propose quelques pistes pour prolonger l'étude.

#### 3.4.1 Intersection de chocs et points triples

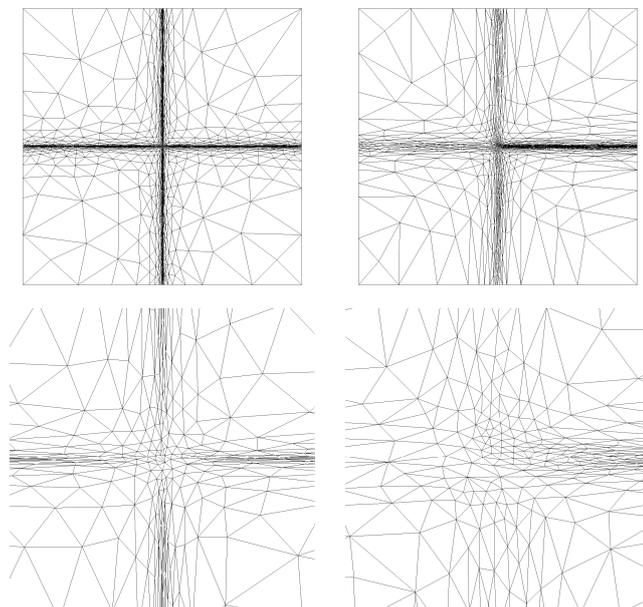
On peut mettre en défaut l'adaptation multi-échelles sur un exemple analytique simple. Considérons la fonction  $f_{step}$  définie sur le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  :

$$f_{step} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0, \\ 2 & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0, \\ 3 & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0, \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

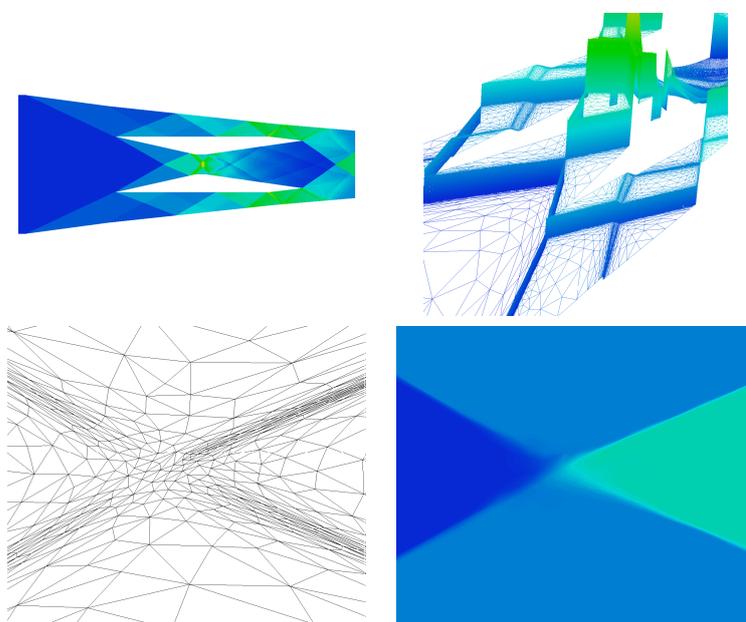
Cette fonction est composée de 4 chocs d'intensités différentes. Une adaptation en norme  $\mathbf{L}^\infty$  sur cette fonction est représentée sur la Figure 3.38 à droite. On s'aperçoit que seul le choc de plus forte amplitude est bien raffiné. Au contraire, une adaptation en norme  $\mathbf{L}^1$  permet de capturer tous les chocs, cf. Figure 3.38 à droite. C'est l'effet multi-échelles. Cependant, si on fait un gros plan autour du voisinage de zéro, on s'aperçoit que l'on a une perte de précision par rapport au maillage représentant les quatre chocs. Cette perte de précision s'explique par deux phénomènes. D'une part, il est impossible de représenter par un hessien le point quadruple qui se trouve en zéro. Enfin, au voisinage de zéro, le hessien est isotrope avec des valeurs propres du même ordre de grandeur. La normalisation  $\mathbf{L}^p$  a donc tendance à dilater d'autant plus cette métrique isotrope. On peut visualiser ce problème sur le calcul du scramjet qui possède un point triple à l'intersection de deux ondes de choc, cf. Figure 3.39. On s'aperçoit sur le maillage et les iso-valeurs, cf. Figure 3.39, que la précision obtenue dans les chocs qui prolongent le point triple est bien supérieure à celle obtenue directement sur le point triple. Cependant, dans tous les cas, on **conserve l'ordre deux globale de convergence spatiale** malgré cette perte de précision.

#### 3.4.2 Schémas compressifs et véritables discontinuités

Jusqu'à présent, on a soit considéré des fonctions analytiques régulières soit, dans le cadre de la CFD, des solutions issues de schémas de résolution numérique dissipatifs dans les chocs. De telles hypothèses, lorsqu'elles sont vérifiées permettent d'établir des modèles continus de choc. La principale conséquence était alors de pouvoir retrouver l'ordre du schéma numérique même dans le cas d'écoulements présentant des chocs. En effet, la dissipation agit alors comme



**Figure 3.38:** Maillages adaptés pour la fonction  $f_{step}$  en norme  $\mathbf{L}^1$  à gauche et en norme  $\mathbf{L}^\infty$  à droite. En bas, gros plan autour du point quadruple. Chaque maillage comporte 1 000 sommets.



**Figure 3.39:** Échec de la normalisation  $\mathbf{L}^p$  pour le point triple dans le calcul du scramjet. En haut à droite, représentation de la solution comme une surface  $\mathbb{R}^3$ . En bas, maillage adapté autour du point triple à gauche et iso-valeurs de la densité à droite.

une régularisation de la solution. Si le modèle précédent est mis en défaut en présence de points triples ou d'intersections de chocs, il échoue également en présence de véritables discontinuités. Ces dernières sont introduites soit par l'utilisation de fonctions analytiques discontinues soit dans le cas de schémas numériques compressifs dans les chocs.

Dans un premier temps, la problématique est analysée sur un exemple en une dimension. Une stratégie d'adaptation est proposée afin de garantir la convergence au bon ordre du schéma adaptatif.

### Norme infinie inadéquate

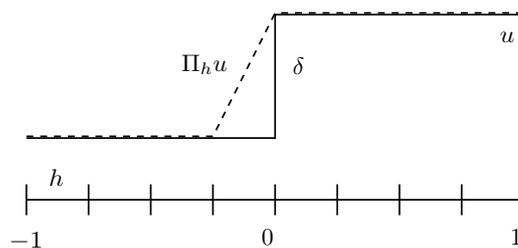
On montre sur un exemple 1D que le contrôle de l'erreur d'interpolation doit nécessairement se faire en norme  $\mathbf{L}^p$  pour converger, ce qui justifie les développements précédents. On considère l'interpolé linéaire sur un maillage uniforme de la fonction discontinue  $u$ , représentée sur la Figure 3.40, valant 0 si  $x < 0$  et  $\delta$  ailleurs :

$$\Pi_h u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \frac{\delta}{h}x & \text{si } x \in [0, h] \\ \delta & \text{si } x \in [h, 1]. \end{cases}$$

On calcule analytiquement l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^p$  :

$$\int_0^h \left| \delta \left(1 - \frac{x}{h}\right) \right|^p dx = \frac{h\delta^p}{p+1} \implies \|u - \Pi_h u\|_{[0,h], \mathbf{L}^p} = \delta \left( \frac{h}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On voit alors que l'on obtient une convergence en  $O(h^{\frac{1}{p}})$  pour les normes  $\mathbf{L}^p$  et un ordre  $O(1)$  pour la norme  $\mathbf{L}^\infty$ . Cet exemple discrédite donc complètement l'utilisation de la norme  $\mathbf{L}^\infty$  qui ne converge pas dans les chocs. On montre cependant que même avec une norme  $\mathbf{L}^p$  l'algorithme d'adaptation diverge pour une fonction discontinue.



**Figure 3.40:** Représentation d'une marche 1D pour l'étude de la convergence des normes  $\mathbf{L}^p$ .

### Divergence de l'algorithme d'adaptation

On montre sur un exemple simple en une dimension, que si l'on considère l'algorithme d'adaptation classique avec une reconstruction numérique du hessien d'une fonction discontinue alors l'algorithme diverge en prescrivant une taille dans la discontinuité qui tend vers zéro quelque soit la complexité demandée.

*Problématique.* Soit la fonction d'Heavyside  $u$  définie sur  $[-1, 1]$  avec une discontinuité d'amplitude  $\delta$  en zéro. On considère un maillage uniforme de taille initiale  $h$  qui comporte  $N > 2$  sommets. On calcule le hessien numérique basé sur une double projection  $\mathbf{L}^2$ . L'interpolé linéaire  $\Pi_h u$  de  $u$  s'écrit, dans la voisinage de la discontinuité :

$$\Pi_h u = \begin{cases} u(-2h) = u_{i-2} = 0, \\ u(-h) = u_{i-1} = 0, \\ u(0) = u_i = 0, \\ u(h) = u_{i+1} = \delta, \\ u(2h) = u_{i+2} = \delta. \end{cases}$$

On reconstruit par double projection  $\mathbf{L}^2$  le gradient et le hessien qui correspondent au gradient et au hessien d'une fonction  $u^*$ . Pour le gradient, il vient :

$$\nabla u^* = \begin{cases} \nabla u^*(-2h) = 0, \\ \nabla u^*(-h) = 0, \\ \nabla u^*(0) = \delta/(2h), \\ \nabla u^*(h) = \delta/(2h), \\ \nabla u^*(2h) = 0. \end{cases}$$

Le hessien de  $u^*$  est donné par :

$$\nabla^2 u^* = \begin{cases} \nabla^2 u^*(-2h) = 0, \\ \nabla^2 u^*(-h) = \delta/(2h)^2, \\ \nabla^2 u^*(0) = \delta/(2h)^2, \\ \nabla^2 u^*(h) = -\delta/(2h)^2, \\ \nabla^2 u^*(2h) = -\delta/(2h)^2. \end{cases}$$

À partir de cette reconstruction, on calcule la métrique  $\mathbf{L}^p$  optimale à complexité  $N$ . Elle se compose d'un terme de normalisation globale  $D_{\mathbf{L}^p}$  égale à :

$$D_{\mathbf{L}^p} = N^2 \left( \int_0^1 |\nabla^2 u^*|^{\frac{p}{2p+1}} \right)^{-2} = N^2 (4h)^{-2} \left( \frac{\delta}{4h^2} \right)^{\frac{-2p}{2p+1}}.$$

Le terme de normalisation locale est donné par :

$$(\det |\nabla^2 u^*|)^{\frac{-1}{2p+1}} |\nabla^2 u^*| = \left( \frac{\delta}{4h^2} \right)^{\frac{2p}{2p+1}}.$$

Finalement, on a l'expression de la métrique optimale  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p}$  au voisinage de zéro :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} = \frac{N^2}{4h^2} = \left( \frac{N}{2h} \right)^2.$$

La métrique précédente est d'une part indépendante de l'amplitude  $\delta$  du choc et d'autre part de la norme  $\mathbf{L}^p$  considérée avec  $p \geq 1$ . Pour un niveau de précision constant donné par  $N$ , la nouvelle taille  $h_{new}$  doit être de longueur unité dans la métrique. Elle vérifie donc  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} h_{new}^2 = 1$  dont on extrait  $h_{new} : h_{new} = \frac{2}{N} h$ . En itérant le procédé d'adaptation qui utilise à chaque étape la métrique précédente, la taille de maille dans le voisinage de la discontinuité est donnée à l'itération  $n + 1$  par une suite géométrique :

$$h_{n+1} = \frac{2}{N} h_n = \left( \frac{2}{N} \right)^n h_0,$$

où  $h_0$  est la taille initiale qui encadre la discontinuité. Comme  $N \gg 2$ ,  $h_n$  tend donc vers zéro quand le nombre d'adaptation augmente. En d'autres termes, cette stratégie d'adaptation ne converge pas vers un point fixe, maillage et solution, et ceci quelque soit la norme utilisée et la complexité requise.

L'exemple précédent donne une indication pour résoudre le problème de convergence. En effet, il semble naturel que la solution pour faire converger l'adaptation soit d'imposer une taille minimale. Cependant, l'enjeu est de trouver une taille minimale consistante pour tout le processus d'adaptation. En d'autres termes, il faut tenir compte de la taille minimale physique qui correspond à la limite du générateur de maillage,  $H_{min} = 10^{-6}$  par exemple, ainsi qu'à la séquence de complexité ou d'erreurs requises, par exemple  $N, 2N, 4N, \dots$ . Il faut ensuite proposer pour chaque complexité la taille minimale correspondante tel que l'ordre de l'approximation soit conservé ainsi que la taille minimale physique  $H_{min}$  correspondant seulement à la complexité la plus grande. Cela est équivalent à prescrire une suite de complexité  $(N_i)_{i=1\dots k}$  et également une suite de taille minimale  $(h_{min,i})_{i=1\dots k}$ ,  $k$  étant le nombre d'adaptations. Il est aussi possible de prescrire  $H_{min}$  quelque soit la complexité, cependant, ce choix fait chuter nécessairement l'ordre de convergence de la méthode et peut entraîner la perte de l'anisotropie.

## CONCLUSION

On a appliqué dans ce chapitre les estimations multi-échelles de l'erreur d'interpolation dans le cas de solutions numériques. On a utilisé le solveur volumes finis d'ordre élevé **Wolf** dans les calculs. On distingue alors deux cas selon la régularité de la solution numérique.

Lorsque la solution numérique est régulière, l'application des estimations du Chapitre 2 est directe. On utilise alors les reconstructions de hessien basées sur la double projection  $\mathbf{L}^2$  ou la formule de Green. Puis, on converge vers un point fixe le maillage et la solution. On a vérifié sur des écoulements subsoniques que l'on obtenait bien l'ordre deux de convergence en maillage.

De plus, lorsque la solution numérique est composée de chocs, on a introduit des modèles numériques de choc afin de montrer que le processus adaptatif convergeait. Ces modèles imitent le comportement du schéma de résolution, **non compressif** dans les chocs, *i.e.* qui représente les chocs sur plusieurs mailles. On montre que l'adaptation de maillage avec un contrôle en norme  $\mathbf{L}^p$  permet de retrouver l'**ordre deux de convergence** dans des écoulements avec des discontinuités ou forts gradients. Dans le même temps, l'adaptation multi-échelles  $\mathbf{L}^p$  induit une **normalisation locale** qui permet de capter **toutes les échelles** de la solution : choc, discontinuité de contact, tourbillons. On a réalisé un ensemble de simulations pour des écoulements compressibles en deux et trois dimensions. L'ordre deux de convergence sur la variable d'adaptation a été vérifiée numériquement. Enfin, tous ces calculs ont été effectués sans prescription d'une taille minimale. On a alors bien pu vérifier que l'on conservait l'anisotropie durant tout le processus adaptatif.

On a également mis en avant les problématiques restantes : l'intersection des chocs, les points multiples et les solutions discontinues. Ces problématiques montrent les limites de la normalisation  $\mathbf{L}^p$  et de la modélisation de l'erreur par un hessien. Dans le cas des points multiples et de l'intersection de chocs, l'ordre deux global de convergence est conservé.

### 3.A QUELQUES TEMPS CPU

Toutes les informations données dans la suite concernent la simulation SSBJ qui a été effectuée sur un ordinateur Mac Pro avec un processeur Intel à 2.66 GHz avec 4 Go de mémoire.

*Construction du champ de métriques.* La construction du champ de métriques a une complexité en temps CPU linéaire  $t(s) = 6.e^{-5}Nv$  et un coût de stockage d'environ  $O(20Nv)$  mots, où  $Nv$  est le nombre de sommets du maillage. La table ci-dessous donne des exemples de temps CPU pour la construction du champ de métriques.

# Sommets	Temps CPU
336 975	14s
636 717	32s
1 203 271	1m6s
2 301 742	2m9s
3 251 116	3m3s

*Adaptation de maillage.* Le tableau ci-dessous indique les temps CPU pour la génération des maillages adaptés. Le premier bloc supérieur considère des maillages adaptés avec à peu près le même nombre de sommets alors que le bloc inférieur considère les temps CPU des maillages adaptés pour presque 1.5 fois plus de sommets que le maillage donné en entrée. Les temps CPU sont répartis entre la construction du maillage unité dans une métrique donnée et l'optimisation du maillage. En ce qui concerne les coûts mémoire, 1.8 Go a été alloué pour la création du maillage final adapté (dernière ligne du tableau ci-dessous). Le temps passé pour l'optimisation du maillage est nécessaire lorsqu'il s'agit de maillages très anisotropes dont la qualité doit être améliorée de manière significative. En effet, la qualité des éléments est directement liée à l'efficacité du solveur volumes finis. La table ci-dessous donne des exemples de temps CPU pour la création des maillages adaptés.

# Sommets $\mathcal{T}_{ini}$	# Sommets $\mathcal{T}_{final}$	Maillage unité	Optimisation
336 975	348 545	2m11s	4m38s
636 717	651 647	5m41s	9m15s
1 203 271	1 233 949	17m	19m56s
2 301 742	2 360 877	51m53s	47m3s
348 545	472 671	5m37s	7m12s
651 647	881 672	13m37s	17m16s
1 233 949	1 682 593	36m2s	44m4s
2 360 877	3 251 116	1h48m39s	2h10m54s

*Interpolation de solutions.* Le tableau ci-dessous donne les temps CPU pour l'interpolation de solutions. Le coût mémoire est de l'ordre de  $O(20Nv_1 + 3Nv_2)$  mots, où  $Nv_1$  et  $Nv_2$  sont les nombres de sommets du maillage de fond et du maillage courant. Les temps CPU sont décomposés en la localisation des points du maillage adapté courant dans l'ancien maillage d'une part et l'interpolation linéaire de la solution d'autre part. La table ci-dessous donne des exemples de temps CPU pour l'interpolation de solutions.

# Sommets $\mathcal{T}_{ini}$	# Sommets $\mathcal{T}_{final}$	Localisation	Interpolation
336 975	348 545	43s	2s
636 717	651 647	1m32s	4s
1 203 271	1 233 949	3m12s	8s
2 301 742	2 360 877	6m21s	16s
348 545	472 671	49s	3s
651 647	881 672	1m47s	5s
1 233 949	1 682 593	3m28s	10s
2 360 877	3 251 116	7m25s	21s

*Solveur CFD.* Pour les temps CPU du solveur, on considère un nombre donné d'itérations fixé à 500. La table ci-dessous donne des exemples de temps CPU pour le solveur.

# Sommets	Temps CPU pour 500 Itérations	Mémoire (Go)
336 975	15m	0.25
636 717	29m	0.46
1 203 271	55m	0.86
2 301 742	1h44m	1.65
3 764 591	2h52m	2.69

Les maillages adaptés et les solutions sont stockés *out of core*. Pour le dernier maillage composé de 3 764 591 sommets et de 22 324 258 tétraèdres, le fichier du maillage binaire correspondant a une taille de 485Mo. Le fichier de la métrique a une taille de 85Mo. Le temps passé à ouvrir et à lire le maillage et les fichiers solutions est d'environ 30s.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Alauzet. *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides*. PhD thesis, Université Montpellier II, Montpellier, France, 2003.
- [2] F. Alauzet, P.-J. Frey, P.-L. George, and B. Mohammadi. 3D transient fixed point mesh adaptation for time-dependent problems : Application to CFD simulations. *J. Comp. Phys.*, 222 :592–623, 2007.
- [3] R. C. Almeida, R. A. Feijóo, A. C. Galeão, C. Padra, and R. S. Silva. Adaptive finite element computational fluid dynamics using an anisotropic error estimator. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 182 :379–400, 2000.
- [4] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D. M. Causon. On the choice of wavespeeds for the HLLC riemann solver. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(6) :1553–1570, 1997.
- [5] R. Biswas and R. C. Strawn. A new procedure for dynamic adaption of three-dimensional unstructured grids. *Appl. Numer. Math.*, 13 :437–452, 1994.
- [6] C. L. Bottasso. Anisotropic mesh adaption by metric-driven optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 60 :597–639, 2004.
- [7] M. O. Bristeau, , and J. Periaux. Finite element methods for the calculation of compressible viscous flows using self adaptive mesh refinements. In *Int. Conf. on Num. Meth. for Fluid Dyn.*, 1986.
- [8] G. C. Buscaglia and E. A. Dari. Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 40 :4119–4136, 1997.
- [9] M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau. Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25 :475–491, 1997.
- [10] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle*, R-2 :77–84, 1975.

- [11] Y. Coudiere, B. Palmerio, A. Dervieux, and D. Leservoisier. Accuracy barriers in mesh adaptation. RR-4528, INRIA, 2002.
- [12] T. Coupez. Génération de maillages et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9 :403–423, 2000.
- [13] P.-H. Cournède, B. Koobus, and A. Dervieux. Positivity statements for a Mixed-Element-Volume scheme on fixed and moving grids. *European Journal of Computational Mechanics*, 15(7-8) :767–798, 2006.
- [14] C. Debiez and A. Dervieux. Mixed-Element-Volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations. *Computers & Fluids*, 29 :89–118, 2000.
- [15] C. Dobrzynski. *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2005.
- [16] C. Dobrzynski and P. J. Frey. Anisotropic delaunay mesh adaptation for unsteady simulations. In *Proc. of 17th Int. Meshing Roundtable*, pages 177–194. Springer, 2008.
- [17] J. Dompierre, M.-G. Vallet, M. Fortin, Y. Bourgault, and W. G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation : towards a solver and user independent cfd. *AIAA Paper*, 97-0861, 1997.
- [18] L. Formaggia, S. Micheletti, and S. Perotto. Anisotropic mesh adaptation in computational fluid dynamics : Application to the advection-diffusion-reaction and the Stokes problems. *Appl. Numer. Math.*, 51 :511–533, 2004.
- [19] J. Francescatto. *Méthodes multigrilles par agglomération directionnelle pour le calcul d'écoulements turbulents*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, Nice, France, 1998.
- [20] P. J. Frey and F. Alauzet. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :5068–5082, 2005.
- [21] P. J. Frey and P.-L. George. *Mesh generation. Application to finite elements*. Hermès Science, Paris, Oxford, 2000.
- [22] P.-L. George. *Gamhic3d, a fully automatic adaptive mesh generation method in three dimensions*. Technical Note, INRIA, 2001.
- [23] P.-L. George and H. Borouchaki. *Delaunay triangulation and meshing : application to finite elements*. Hermès Science, Paris, Oxford, 1998.
- [24] C. Gruau and T. Coupez. 3D tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :4951–4976, 2005.
- [25] F. Hecht and B. Mohammadi. Mesh adaptation by metric control for multi-scale phenomena and turbulence. *AIAA Paper*, 97-0859, 1997.
- [26] W. T. Jones, E. J. Nielsen, and M. A. Park. Validation of 3D adjoint based error estimation and mesh adaptation for sonic boom prediction. *AIAA Paper*, 2006-1150, 2006.
- [27] Y. Kallinderis and P. Vijayan. Adaptive refinement-coarsening scheme for three-dimensional unstructured meshes. *AIAA Paper*, 31(8) :1440–1447, 1993.
- [28] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme i. The quest of monotonicity. *Lecture notes in physics*, 18 :163–168, 1973.
- [29] X. L. Li, M. S. Shephard, and M. W. Beall. 3D anisotropic mesh adaptation by mesh modification. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :4915–4950, 2005.
- [30] R. Löhner. Adaptive remeshing for transient problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 75 :195–214, 1989.
- [31] R. Löhner. Three-dimensional fluid-structure interaction using a finite element solver and adaptive remeshing. *Computing Systems in Engineering*, 1(2-4) :257–272, 1990.
- [32] R. Löhner and J. D. Baum. Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 14 :1407–1419, 1992.
- [33] D. J. Mavriplis. Unstructured mesh generation and adaptivity,. Technical report, ICASE Report 95-26, 1995.
- [34] D. J. Mavriplis. Adaptive meshing techniques for viscous flow calculations on mixed-element unstructured meshes. *AIAA Paper*, 97-0857, 1997.
- [35] C. C. Pain, A. P. Umpheby, C. R. E. de Oliveira, and A. J. H. Goddard. Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190 :3771–3796, 2001.

- [36] B. Palmerio, V. Billey, A. Dervieux, and J. Periaux. Self-adaptive refinements and F.E.M. for solving the euler equations. In *Int. Conf. on Num. Meth. for Fluid Dyn.*, 1986.
- [37] J. Peraire, J. Peiró, and K. Morgan. Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations. *J. Comp. Phys.*, 103 :269–285, 1992.
- [38] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *J. Comp. Phys.*, 72 :449–466, 1987.
- [39] R. D. Rausch, J. T. Batina, and H. T. Y Yang. Spatial adaptation of unstructured meshes for unsteady aerodynamic flow calculations. *AIAA Journal*, 30 :1243–1251, 1992.
- [40] J.-F. Remacle, X. Li, N. Chevaugeon, and M. S. Shephard. Transient mesh adaptation using conforming and non conforming mesh modifications. In *Proc. of 11th Meshing Roundtable*, Ithaca, NY, USA, 2002.
- [41] J.-F. Remacle, X. Li, M.S. Shephard, and J. E. Flaherty. Anisotropic adaptive simulation of transient flows using discontinuous galerkin methods. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 62 :899–923, 2005.
- [42] P. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43 :357–372, 1981.
- [43] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
- [44] E. Schall, D. Leservoisier, A. Dervieux, and B. Koobus. Mesh adaptation as a tool for certified computational aerodynamics. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 45 :179–196, 2004.
- [45] C. W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77 :439–471, 1988.
- [46] W. Speares and M. Berzins. A 3D unstructured mesh adaptation algorithm for time-dependent shock-dominated problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25 :81–104, 1997.
- [47] J. L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *J. Comput. Phys.*, 40 :263–293, 1981.
- [48] B. Stoufflet, J. Periaux, L. Fezoui, and A. Dervieux. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite element. *AIAA Paper*, 87-0560, 1987.
- [49] A. Tam, D. Ait-Ali-Yahia, M. P. Robichaud, M. Moore, V. Kozel, and W. G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation for 3D flows on structured and unstructured grids. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 189 :1205–1230, 2000.
- [50] O. C. Zienkiewicz and J. Wu. Automatic directional refinement in adaptive analysis of compressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 37 :2189–2210, 1994.

# 4

---

## *Adaptation à des fonctionnelles d'erreur pour les équations d'Euler*

### INTRODUCTION

L'adaptation basée sur le hessien d'une solution  $w$  permet de spécifier des maillages optimaux, y compris anisotropes, vis-à-vis de l'erreur d'interpolation  $w - \Pi_h w$ . On a montré que cette approche a une convergence optimale au sens de la théorie des maillages continus. Cette convergence a été vérifiée sur des fonctions analytiques dans le Chapitre 2. La méthode d'adaptation a également été étendue aux solutions numériques d'équations aux dérivées partielles (EDP) dans le Chapitre 3. Dans le cas des équations d'Euler, cette méthode a permis par exemple :

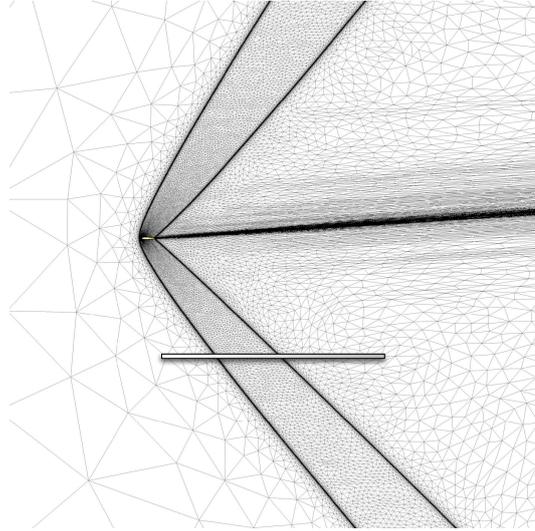
- de capturer automatiquement toutes les échelles de la solution en utilisant des senseurs en norme  $\mathbf{L}^p$ ,
- de capturer automatiquement les particularités de l'écoulement : chocs droits, chocs obliques, discontinuités de contact, zones de glissement en adaptant sur les variables adéquates,
- de supprimer la prescription d'une taille minimale dans le processus d'adaptation dans le cas d'écoulements avec chocs et singularités,
- de certifier numériquement la convergence des calculs pour des écoulements stationnaires.

L'approche précédente est complètement générique car seul un écart entre la solution et son interpolé linéaire est contrôlé. On n'utilise pas le fait que la solution  $w$  est la solution d'une EDP :

$$\Psi(w) = 0.$$

Bien qu'étant un avantage majeur, la généricité représente également un défaut. En effet, la précision de la solution d'une EDP n'est pas bien décrite par une erreur d'interpolation locale. Cette insuffisance apparaît en pratique lorsqu'on souhaite prédire avec précision la valeur d'une fonctionnelle dépendant de la solution  $w$ . Dans le cas d'une adaptation basée sur le hessien, la répartition des degrés de liberté ne peut pas être optimale pour n'importe quelle fonctionnelle observant un aspect particulier de l'écoulement. Dans l'image ci-dessous,

si on souhaite mesurer avec précision une variable, par exemple la pression, sur la zone grisée sous le profil d'aile, une adaptation basée sur le hessien d'une variable n'est pas optimale. En effet, elle prescrit des raffinements au dessus du profil et en dessous de la zone d'observation. Compte tenu du caractère supersonique de l'écoulement, la précision obtenue dans ces régions n'influe pas sur la précision du calcul dans la zone d'observation.



Pour que l'approche soit optimale, il faudrait prendre en compte uniquement les zones de l'écoulement qui influent sur la zone d'observation

## ÉTAT DE L'ART ET APPROCHE PROPOSÉE

Si on désire prendre en compte le problème que l'on résout, *i.e.*, l'EDP, dans un processus adaptatif, on est amené à contrôler l'erreur d'approximation  $w - w_h$  où la solution continue  $w$  et la solution discrète  $w_h$  vérifient les équations d'état :

$$\Psi(w) = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_h(w_h) = 0.$$

On constate alors que dans ce contexte l'erreur d'interpolation est insuffisante car elle ne contrôle pas la partie discrète de l'erreur d'approximation, c'est-à-dire le terme d'erreur implicite :

$$(w - w_h) = (w - \Pi_h w) + (\Pi_h w - w_h).$$

Cependant, elle est particulièrement bien adaptée à la spécification de maillages anisotropes.

Deux approches sont possibles pour contrôler l'erreur d'approximation : les méthodes *a posteriori* [1, 3, 5, 11, 16, 21] et les méthodes *a priori* [2, 6].

À partir d'un premier calcul, l'estimation *a posteriori* travaille sur l'application d'un résidu continu calculé sur la solution discrète. Formellement, on peut écrire :

$$w - w_h \approx - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial w} \right)^{-1} \Psi(w_h).$$

Cette estimation découle de la résolution d'un problème continu linéarisé. À travers  $w_h$ , l'erreur *a posteriori* prend notamment en compte la qualité du maillage.

Les estimations *a priori* sont les plus anciennes historiquement. Elles reposent sur la résolution d'un système linéaire, avec comme second membre, soit le résidu de l'équation discrète appliquée à la solution continue (erreur de troncature), soit une erreur d'interpolation sur une fonction continue. Formellement, on peut écrire :

$$w - w_h \approx \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w} \right)^{-1} \Psi_h(w).$$

Les estimations *a priori* sont à la base des preuves de convergence des méthodes de discrétisation.

Toutefois, les applications industrielles suggèrent de minimiser l'erreur sur des quantités spécifiques à la physique ou à l'ingénierie. Par exemple en aérodynamique, on s'intéresse à la portance, la traînée, . . . , qui sont des grandeurs mesurant les performances d'une forme (avion, voiture, train, . . . ). Le besoin de précision sur une quantité particulière se retrouve également dans un cycle d'optimisation de forme. Réduire l'erreur d'évaluation de la fonctionnelle coût évaluant les performances d'une forme est alors crucial. On cherche donc à contrôler l'erreur d'approximation sur la fonctionnelle et non directement sur l'état.

Pour répondre à ce besoin, les méthodes **orientées objectif** (*Goal oriented* en Anglais) ont été développées. Elles reposent sur l'utilisation d'un état adjoint pour évaluer de telles contributions de l'erreur [9, 10, 17, 19, 20]. L'évaluation de l'erreur d'approximation sur une fonctionnelle  $j$  est réalisée via son jacobien  $g$  que l'on peut formellement écrire pour une estimation *a posteriori* :

$$j(w) - j(w_h) \approx (g, w - w_h) = -(p, \psi(w_h))$$

et pour une estimation *a priori* :

$$j(w) - j(w_h) \approx (g, w - w_h) = (p_h, \psi_h(w))$$

où  $P$  et  $P_h$  sont les états adjoints continu et discret.

Dans notre approche, on choisit de contrôler l'erreur d'approximation sur la fonctionnelle *a priori* car elle fait apparaître la solution continue, ce qui va nous permettre spécifier un contrôle par le biais d'un maillage continu comme pour l'erreur d'interpolation dans le Chapitre 3. La difficulté réside dans le traitement de l'opérateur discret  $\psi_h$ .

Dans ce chapitre, on montre que l'analyse *a priori*, combinée avec un état adjoint, permet la description d'un maillage optimal. Plus précisément, nous proposons une analyse qui combine la théorie de l'optimisation de l'erreur d'interpolation sur des maillages continus avec une analyse *a priori*. À cet effet, nous considérons un schéma de discrétisation particulier des équations d'Euler dans lequel les erreurs d'approximation s'expriment en fonction d'erreurs d'interpolation sur les flux d'Euler. Ainsi, on peut utiliser les résultats du Chapitre 2 sur ces fonctions locales.

## PLAN DU CHAPITRE

Dans une première partie, on propose un état de l'art étendu des analyses *a priori*, présenté dans le formalisme du maillage continu.

Dans une seconde partie, on donne les principes de l'analyse sur un modèle abstrait.

On démontre ensuite que notre modèle de discrétisation volumes finis des équations d'Euler s'inscrit bien dans les hypothèses du modèle. Puis, on applique la théorie abstraite sur ce schéma de discrétisation.

Enfin, on présente plusieurs adaptations anisotropes utilisant ce modèle, en deux et trois dimensions.

#### 4.1 MAILLAGE CONTINU ET ANALYSE A PRIORI

On rappelle dans cette section, avec les notations adaptées aux maillages continus, les contributions des analyses *a posteriori* et *a priori* de la littérature. On en profite également pour détailler les approches proposées dans [11, 19, 20].

*Notations.* On distingue l'opérateur continu  $\Psi$  de l'opérateur discret  $\Psi_h$ . Une solution continue est notée  $w$  alors qu'une solution numérique, correspondant à un maillage continu  $\mathcal{M}$ , est notée  $w(\mathcal{M})$ . On suppose que l'opérateur exact  $\Psi$  peut s'appliquer sur une solution numérique  $w(\mathcal{M})$ .

*Position du problème.* On considère un écoulement autour d'un avion dont la forme est décrite par le paramètre  $\gamma$ . L'écoulement  $w$  autour de l'avion satisfait certaines équations de la mécanique des fluides :

$$\Psi(\gamma, w(\gamma)) = 0.$$

On souhaite calculer avec précision une fonctionnelle  $j$  dépendant de la forme  $\gamma$ . L'évaluation de  $j$  dépend également de la solution physique  $w(\gamma)$ , on note cette dépendance à travers la fonctionnelle  $J$  :

$$j(\gamma) = J(\gamma, w(\gamma)).$$

En pratique, le calcul de  $j$  dépend d'une solution numérique. Il est donc nécessaire de prendre en compte les erreurs de discrétisation sur  $j$ . On considère que la solution discrète  $w(\mathcal{M}, \gamma)$  a été calculée sur un maillage discret unité dans la classe d'équivalence définie par la métrique  $\mathcal{M}$ . Le problème discrétisé devient donc :

$$j_h(\mathcal{M}, \gamma) = J_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) \text{ sous la contrainte } \Psi_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) = 0.$$

Dans la classe des maillages unités pour  $\mathcal{M}$ , il existe un maillage  $\mathcal{H}$  qui maximise l'erreur de discrétisation sur  $J_h$ , on choisit cette erreur comme modèle dans  $\mathcal{M}$ . L'évaluation de  $j$  est écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} j(\gamma) &= J_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) \\ &+ J(\gamma, w(\gamma)) - J_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\gamma)) \\ &+ J_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\gamma)) - J_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)). \end{aligned}$$

On suppose pour simplifier l'exposé que l'on ne commet pas d'erreur de discrétisation sur  $J$ , soit :

$$J(\gamma, w(\gamma)) - J_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\gamma)) = 0.$$

L'erreur d'approximation  $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = j(\gamma) - J_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma))$  est donc remplacée par :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = J(\gamma, w(\gamma)) - J(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)).$$

Le problème s'écrit donc sous la forme d'un problème d'optimisation avec contraintes sur  $\mathcal{M}$  et généralise le Problème plus simple traité au Chapitre 2 :

$$\text{Trouver } \mathcal{M}_{opt} = \text{Argmin}_{\mathcal{M}} \mathcal{E}(\mathcal{M}), \quad (4.1)$$

sous les contraintes :

$$\Psi(\gamma, w(\gamma)) = 0, \quad \Psi_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) = 0 \text{ et } \mathcal{C}(\mathcal{M}) = N.$$

Par rapport au problème d'optimisation dans le cas de l'erreur d'interpolation, on remarque la différence suivante : on a une contrainte d'égalité supplémentaire sur l'équation d'état. On montre dans la suite comment l'approche *a posteriori* permet d'évaluer la fonctionnelle  $\mathcal{E}(\mathcal{M})$  en prenant en compte la contrainte sur l'état. Pour cela, il est nécessaire de faire certaines hypothèses de régularité sur la fonctionnelle  $J$ . En particulier, on suppose que la variation de  $J$  par rapport à l'état  $w$  est assez régulière pour que l'on puisse effectuer un développement limité à l'ordre 1 :

$$j(\gamma) = J(\gamma, w(\gamma)) = J(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) + (g, w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma)) + R,$$

où  $g$  est une fonction régulière représentant le jacobien de  $J$  pour une variation sur le calcul de l'état. On en déduit :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = (g, w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma)) + R.$$

Par ailleurs, la linéarisation de l'équation d'état donne :

$$\Psi(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) = \Psi(\gamma, w(\gamma)) + \frac{\partial \Psi}{\partial w}(\gamma, w(\gamma))(w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma)) + R'.$$

On suppose que les restes  $R$  et  $R'$  sont asymptotiquement plus petits que le carré de l'erreur d'approximation. Autrement dit, quand la plus grande taille de  $\mathcal{M}$  tend vers zéro, on a :

$$|R| + |R'| = o(\|w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma)\|^2).$$

L'erreur d'approximation estimée pour la fonctionnelle  $j$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} (g, w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma)) &\approx \left( g, \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial w}(\gamma, w(\gamma)) \right]^{-1} \left( \Psi(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) - \Psi(\gamma, w(\gamma)) \right) \right), \\ &\approx \left( \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial w}(\gamma, w(\gamma)) \right]^{-*} g, \left( \Psi(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) - \Psi(\gamma, w(\gamma)) \right) \right). \end{aligned}$$

Si on introduit l'état adjoint exact  $p(\gamma)$ , solution du problème adjoint :

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial w}(\gamma, w(\gamma)) \right]^* p(\gamma) - g = 0,$$

l'erreur d'approximation devient :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \left( p(\gamma), \Psi(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) - \Psi(\gamma, w(\gamma)) \right) + o(\|w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma)\|^2). \quad (4.2)$$

REMARQUE 4.1 Dans le cas particulier de l'adaptation ciblée à une fonctionnelle, le recours à un état adjoint agit comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'égalité sur l'état. Cela permet de simplifier l'évaluation de  $\mathcal{E}(\mathcal{M})$  en ayant plus qu'une contrainte sur la complexité. Par conséquent, décrire le maillage optimal pour une fonctionnelle donnée, *i.e.*, contrôler le terme :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) \approx (g, w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma)) \approx (p(\gamma), \Psi(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) - \Psi(\gamma, w(\gamma))),$$

sous la contrainte  $\Psi_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) = 0$  est un problème théorique plus abordable que décrire le maillage optimal pour

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \int (w(\gamma) - w(\mathcal{M}, \gamma))^p, \quad (4.3)$$

sous la contrainte  $\Psi_h(\mathcal{M}, \gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) = 0$  car le traitement de la contrainte sur l'état se fait au travers de l'état adjoint. Un traitement de seule l'erreur d'approximation a été proposé par Becker et Rannacher [3].

En général, l'Estimation 4.2 est exploitée en tant que correcteur afin d'améliorer l'évaluation de la fonctionnelle discrète. Si on atteint la convergence asymptotique sur l'état adjoint, alors on a l'estimation asymptotique de  $j$  :

$$j^{corrected}(\mathcal{M}, \gamma) = j_h(\mathcal{M}, \gamma) + (p(\mathcal{M}, \gamma), \Psi(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma)) - \Psi(\gamma, w(\gamma))). \quad (4.4)$$

L'approximation (4.4) peut converger à l'ordre quatre alors que sans correction la convergence est seulement d'ordre deux, cf. [17] pour plus de détails.

Un premier couplage entre correcteur et estimation *a posteriori* a été proposé par Venditti et Darmofal [19]. Elle consiste d'une part, à utiliser la reconstruction super-convergente de la fonctionnelle, et d'autre part à estimer l'erreur *a posteriori* sur cette fonctionnelle reconstruite. L'idée consiste alors à supposer qu'après la correction de  $j$ , le terme principal de l'erreur est dû à la substitution de l'adjoint exact par un adjoint approché. Les auteurs cherchent ainsi à contrôler :

$$j^{corrected}(\mathcal{M}, \gamma) - j(\gamma) \approx (p(\mathcal{M}, \gamma) - p(\gamma), \Psi(\gamma, w(\mathcal{M}, \gamma))),$$

ou de manière équivalente :

$$j^{corrected}(\mathcal{M}, \gamma) - j(\gamma) \approx \left( w(\mathcal{M}, \gamma) - w(\gamma), \left( \frac{\partial \Psi}{\partial w} \right)^* p(\mathcal{M}, \gamma) - \frac{\partial J}{\partial w} \right).$$

Le point-clé consiste à estimer précisément les erreurs d'approximation :

$$w(\mathcal{M}, \gamma) - w(\gamma) \quad \text{et} \quad p(\mathcal{M}, \gamma) - p(\gamma).$$

Là encore, il faut approcher une erreur d'approximation sur l'état et l'état adjoint. Dans [19], il contourne cette difficulté théorique pointé dans la Remarque 4.1 en proposant de comparer l'approximation linéaire de l'état et de l'état adjoint à une reconstruction quadratique sur un maillage plus fin :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{M}, \gamma) - p(\gamma) &\approx L_{h/2}^h p(\mathcal{M}, \gamma) - Q_{h/2}^h p(\mathcal{M}, \gamma) \\ w(\mathcal{M}, \gamma) - w(\gamma) &\approx L_{h/2}^h w(\mathcal{M}, \gamma) - Q_{h/2}^h w(\mathcal{M}, \gamma). \end{aligned}$$

Bien que cette synthèse ait prouvé un gain en comparaison de l'adaptation sur l'erreur d'interpolation d'une variable en deux dimensions pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes, elle présente les limites suivantes :

- Les erreurs d'approximation sont en pratique estimées par des erreurs d'interpolation au travers des interpolateurs  $L_{h/2}^h$  et  $Q_{h/2}^h$ .
- Adapter sur un critère de tolérance et découper les éléments qui dépassent le seuil tend à équi-répartir l'erreur sans proposer une répartition optimale entre le nombre de degrés de liberté et la précision.
- Le principe d'adaptation par niveau de tolérance est par nature isotrope.
- Faire une reconstruction quadratique sur un maillage 3D est beaucoup plus coûteux qu'en 2D. En effet, on multiplie par 8 la taille totale du maillage.

Une extension anisotrope a été proposée en couplant l'approche précédente et une stratégie basée sur le hessien [20]. Le contrôle de l'erreur d'interpolation sur une variable donne les directions d'anisotropie et les ratios d'anisotropie. Le contrôle de l'erreur sur la fonctionnelle donne la densité en chaque point. La métrique anisotrope est mise à l'échelle par cette densité. Cependant les directions repose sur un senseur particulier, le nombre de Mach.

Dans ce travail, on propose une analyse *a priori* de l'erreur d'approximation sur  $j$  afin d'exploiter la notion de maillage continu et dériver une **estimation intrinsèquement anisotrope de l'erreur**. On réalise cela dans un contexte abstrait non-linéaire puis on l'applique aux équations d'Euler.

## 4.2 CONTEXTE ABSTRAIT NON LINÉAIRE

*Hypothèses et définitions.* Soit  $V$  un espace de fonctions. L'équation d'état s'écrit sous forme variationnelle :

$$w \in V, \forall \varphi \in V, (\Psi(w), \varphi) = 0, \quad (4.5)$$

où l'opérateur  $(\cdot, \cdot)$  est à comprendre dans  $V' \times V$  et  $w$  la solution de cette équation. La forme  $\Psi$  est linéaire en  $\varphi$  mais *a priori* non linéaire en  $w$ . De manière analogue nous introduisons un état adjoint continu :

$$p \in V, \forall \psi \in V, \left( \frac{\partial \Psi}{\partial w}(w) \psi, p \right) = (g, \psi). \quad (4.6)$$

Soit  $V_h$  un sous-espace de dimension finie  $N$  de  $\mathcal{V} = V \cap \mathcal{C}^0$ , nous écrivons l'équation d'état discrète comme suit (on notera que le résidu  $\Psi_h$  est défini pour des fonctions continues) :

$$w_h \in V_h, \forall \varphi_h \in V_h, (\Psi_h(w_h), \varphi_h) = 0.$$

Nous pouvons donc écrire que :

$$(\Psi_h(w), \varphi_h) - (\Psi_h(w_h), \varphi_h) = (\Psi_h(w), \varphi_h) - (\Psi(w), \varphi_h) = ((\Psi_h - \Psi)(w), \varphi_h). \quad (4.7)$$

Pour notre analyse *a priori*, nous supposons que les solutions  $w$  et  $p$  sont assez régulières :

$$w \in V \cap \mathcal{C}^0, \quad p \in V \cap \mathcal{C}^0,$$

et que nous disposons d'un opérateur d'interpolation :

$$\Pi_h : V \cap \mathcal{C}^0 \rightarrow V_h.$$

*Estimation.* On se donne une fonction  $j$  qui est supposée assez régulière de sorte qu'elle puisse être observée en utilisant son jacobien  $g$  :

$$j(w) = (g, w).$$

L'objectif est de proposer formellement une évaluation de l'erreur d'approximation :

$$\delta j = j(w) - j(w_h),$$

seulement en fonction de solutions continues et des équations d'état continue et discrète. On décompose l'erreur d'approximation  $\delta j$  de la manière suivante :

$$\delta j = j(w) - j(w_h) = (g, w - \Pi_h w) + (g, \Pi_h w - w_h).$$

en un terme d'erreur d'interpolation et un terme d'erreur implicite. Il est alors utile d'introduire l'état adjoint discret suivant :

$$p_h \in V_h, \forall \psi_h \in V_h, \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(\Pi_h w) \psi_h, p_h \right) = (g, \psi_h).$$

Nous en déduisons le développement suivant de  $\delta j$  avec  $\varphi_h = \Pi_h w - w_h$  :

$$\delta j = (g, w - \Pi_h w) + \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(\Pi_h w)(\Pi_h w - w_h), p_h \right).$$

Le terme contenant l'erreur implicite est simplifié en utilisant un développement limité de l'opérateur  $\Psi_h$ . D'après la Relation (4.7), on a :

$$(\Psi_h(\Pi_h w), \varphi_h) - (\Psi_h(w_h), \varphi_h) = (\Psi_h(\Pi_h w), \varphi_h) - (\Psi_h(w), \varphi_h) + ((\Psi_h - \Psi)(w), \varphi_h),$$

qui donne après un développement de Taylor :

$$\left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(\Pi_h w)(\Pi_h w - w_h), \varphi_h \right) = (\Psi_h(\Pi_h w), \varphi_h) - (\Psi_h(w), \varphi_h) + ((\Psi_h - \Psi)(w), \varphi_h) - R_1,$$

avec

$$R_1 = (\Psi_h(\Pi_h w), \varphi_h) - (\Psi_h(w_h), \varphi_h) - \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(\Pi_h w)(\Pi_h w - w_h), \varphi_h \right).$$

En introduisant la relation précédente avec le choix particulier  $\varphi_h = p_h$  dans l'expression de  $\delta j$ , on a :

$$\delta j = (g, w - \Pi_h w) + (\Psi_h(\Pi_h w), p_h) - (\Psi_h(w), p_h) + ((\Psi_h - \Psi)(w), p_h) - R_1,$$

avec

$$R_1 = (\Psi_h(\Pi_h w), p_h) - (\Psi_h(w_h), p_h) - \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(\Pi_h w)(\Pi_h w - w_h), p_h \right). \quad (4.8)$$

Appliquons une deuxième formule de Taylor, on en déduit :

$$(\Psi_h(\Pi_h w), p_h) - (\Psi_h(w), p_h) = \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(w)(\Pi_h w - w), p_h \right) + R_2$$

où

$$R_2 = (\Psi_h(\Pi_h w), p_h) - (\Psi_h(w), p_h) - \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(w)(\Pi_h w - w), p_h \right). \quad (4.9)$$

Il en découle

$$\delta j = (g, w - \Pi_h w) + \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w}(w)(\Pi_h w - w), p_h \right) + ((\Psi_h - \Psi)(w), p_h) - R_1 + R_2.$$

Pour notre propos, nous avons besoin d'éliminer les solutions discrètes dans les termes dominants. On réécrit  $\delta j$  sous la forme :

$$\delta j = (g, w - \Pi_h w) + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial w}(w)(\Pi_h w - w), p \right) + ((\Psi_h - \Psi)(w), p) - R_1 + R_2 + D_1 + D_2 + D_3,$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont donnés par les Relations (4.8) et (4.9), et on a :

$$\begin{aligned} D_1 &= \left( \left( \frac{\partial \Psi_h}{\partial w} - \frac{\partial \Psi}{\partial w} \right)(w)(\Pi_h w - w), p_h \right), \\ D_2 &= \left( \frac{\partial \Psi}{\partial w}(w)(\Pi_h w - w), p_h - p \right), \\ D_3 &= ((\Psi_h - \Psi)(w), p_h - p). \end{aligned}$$

On peut simplifier cette dernière expression grâce à l'Équation adjointe continue (4.6), soit :

$$\delta j = ((\Psi_h - \Psi)(w), p) - R_1 + R_2 + D_1 + D_2 + D_3. \quad (4.10)$$

De manière formelle, les termes  $R_i$  et  $D_k$  sont des termes d'erreur d'ordre supérieur, le premier terme est la partie principale de l'écart  $\delta j$ . Il reste à exhiber à partir de (4.10) une spécification de maillage. Nous décrivons cette étape pour les équations d'Euler.

### 4.3 LE CAS DES ÉQUATIONS D'EULER

On reprend le calcul précédent dans le cas des équations d'Euler stationnaires. On introduit tout d'abord une formulation particulière de Galerkin. Cette formulation est ensuite enrichie d'un terme de diffusion numérique.

#### Formulations faibles et équivalence

En régime stationnaire, les équations d'Euler prennent la forme suivante :

$$\Psi(W) = \text{div}(\mathcal{F}(W)) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(W) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{e}_x \\ \rho \mathbf{u} v + p \mathbf{e}_y \\ \rho \mathbf{u} w + p \mathbf{e}_z \\ \rho \mathbf{u} H \end{pmatrix},$$

où  $\rho$ ,  $p$  et  $E$  représentent respectivement la masse volumique du fluide, la pression thermodynamique et l'énergie totale par unité de masse. Les symboles  $u$ ,  $v$ , et  $w$  désignent les

composantes cartésiennes du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  et  $H$  désigne l'enthalpie totale donnée par  $H = E + \frac{p}{\rho}$ . Pour un gaz caloriquement parfait, on a :

$$p = (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right],$$

avec  $\gamma$  constant. La formulation faible du système d'Euler continu s'écrit pour  $W \in V = [H^1(\Omega)]^5$  sous la forme :

$$\forall \phi \in V, \quad (\Psi(W), \phi) = \int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \mathcal{F}(W) \, d\Omega - \int_{\Gamma} \phi \hat{\mathcal{F}}(W) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0, \quad (4.11)$$

où  $\Gamma$  est la frontière du domaine de calcul. Le flux  $\hat{\mathcal{F}}$  représente les flux frontières donnés par les conditions aux limites. L'Équation (4.11) est équivalente à l'Équation d'état (4.5) dans l'analyse abstraite. La formulation (4.11) peut être discrétisée en une formulation centrée aux sommets applicable sur les maillages non structurés simpliciaux. Cette formulation faible discrète s'écrit sur l'espace d'approximation défini sur un maillage simplicial  $\mathcal{T}_h$  :

$$V_h = \left\{ \phi_h \mid \phi_h \text{ est continue et } \phi_h|_T \text{ est linéaire } \forall T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$\forall \phi_h \in V_h, \quad (\Psi_h(W_h), \phi_h) = \int_{\Omega_h} \phi_h \nabla \cdot \mathcal{F}_h(W_h) \, d\Omega_h - \int_{\Gamma_h} \phi_h \hat{\mathcal{F}}_h(W_h) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_h = 0. \quad (4.12)$$

Sous cette forme, la formulation variationnelle précédente est équivalente au schéma de résolution volumes finis introduit au Chapitre 3, cf. [15]. On admet que l'analyse d'erreur abstraite de la Section 4.2 s'applique sur le schéma de résolution volumes finis utilisés dans cette thèse. Cependant, en pratique ce schéma est enrichi de termes de viscosité artificielle pour garantir la stabilité :

$$\forall \phi_h \in V_h, \quad \int_{\Omega_h} \phi_h \nabla \cdot \mathcal{F}_h(W_h) \, d\Omega_h - \int_{\Gamma_h} \phi_h \hat{\mathcal{F}}_h(W_h) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_h = - \int_{\Omega_h} \phi_h D_h(W_h) \, d\Omega_h,$$

où  $D_h$  modélise la diffusion numérique, avec  $\mathcal{D}_h$  :

$$\mathcal{D}_h(W, \phi) = \int_{\Omega_h} \Pi_h \phi D_h(\Pi_h W) \, d\Omega_h.$$

On admet que la diffusion vérifie la condition suivante pour une solution régulière  $W$  et un maillage suffisamment fin et régulier :

$$\mathcal{D}_h(W, \phi) \leq h^3 K(W) |\phi|_{L^2}.$$

La dissipation numérique est donc considérée comme un terme d'ordre élevé qui, comme les restes  $R_i$  et  $D_k$  de (4.10) (cf. Section 4.2), n'intervient pas dans la partie principale de l'erreur.

### Estimation de l'erreur d'approximation

On considère une fonctionnelle  $j$  que nous observons à travers son jacobien  $g$  :

$$j(W) = (g, W).$$

Conformément à l'Estimation (4.10), l'erreur d'approximation *a priori*  $\delta j$  s'écrit :

$$\delta j = (g, W - W_h) \approx ((\Psi_h - \Psi)(W), P),$$

où  $P$  est l'état adjoint exact, solution de :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial W} P = g.$$

En appliquant à la solution  $W$ , les formulations (4.11) et (4.12), et en négligeant la dissipation  $\mathcal{D}_h$ , il vient :

$$(g, W - W_h) \approx \int_{\Omega_h} P (\nabla \cdot \mathcal{F}_h(W) - \nabla \cdot \mathcal{F}(W)) \, d\Omega_h - \int_{\Gamma_h} P (\hat{\mathcal{F}}_h(W) - \hat{\mathcal{F}}(W)) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_h.$$

Une intégration par partie donne :

$$(g, W - W_h) \approx \int_{\Omega_h} \nabla P (\mathcal{F}(W) - \mathcal{F}_h(W)) \, d\Omega_h - \int_{\Gamma_h} P (\bar{\mathcal{F}}(W) - \bar{\mathcal{F}}_h(W)) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_h,$$

où les flux  $\bar{\mathcal{F}}$  sont donnés par :

$$\bar{\mathcal{F}}(W) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{F}(W) \cdot \mathbf{n} - \hat{\mathcal{F}}(W) \cdot \mathbf{n}.$$

Par définition  $\mathcal{F}_h$  est l'interpolé linéaire de  $\mathcal{F}$ , l'estimation précédente se réécrit en :

$$\delta j \approx \int_{\Omega_h} \nabla P (\mathcal{F}(W) - \Pi_h \mathcal{F}(W)) \, d\Omega_h - \int_{\Gamma_h} P (\bar{\mathcal{F}}(W) - \Pi_h \bar{\mathcal{F}}(W)) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_h. \quad (4.13)$$

On remarque que l'estimation de  $\delta j$  ne fait intervenir que des erreurs d'interpolation sur les flux d'Euler avec des estimations sur les variables continues. On peut donc minimiser l'estimation précédente en utilisant les estimations du Chapitre 2. Cependant, pour la mise en œuvre numérique, on approche l'état adjoint  $P$  par  $P_h$ .

#### 4.4 MINIMISATION DU MODÈLE D'ERREUR

Le terme principal de l'Estimation *a priori* (4.13) est majoré de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (g, W_h - W) &\leq \int_{\Omega_h} |\nabla P| |\mathcal{F}(W) - \Pi_h \mathcal{F}(W)| \, d\Omega_h \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} |P| |(\bar{\mathcal{F}}(W) - \Pi_h \bar{\mathcal{F}}(W)) \cdot \mathbf{n}| \, d\Gamma_h \end{aligned}$$

On utilise alors le modèle continu d'erreur d'interpolation présenté au Chapitre 2, l'estimation s'écrit donc pour un maillage continu  $\mathcal{M}$  en fonction de l'interpolé linéaire continu  $\pi_{\mathcal{M}}$  :

$$\begin{aligned} (g, W_h - W) &\approx \int_{\Omega} |\nabla P| |\mathcal{F}(W) - \pi_{\mathcal{M}} \mathcal{F}(W)| \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} |P| |(\bar{\mathcal{F}}(W) - \pi_{\mathcal{M}} \bar{\mathcal{F}}(W)) \cdot \mathbf{n}| \, d\Gamma \end{aligned}$$

Le calcul du maillage optimal revient à résoudre le problème d'optimisation suivant, en fixant  $P$  :

$$\text{Trouver } \mathcal{M}_{opt} = \text{Argmin}_{\mathcal{M}} \mathcal{E}(\mathcal{M}),$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} |\nabla P| |\mathcal{F}(W) - \pi_{\mathcal{M}}\mathcal{F}(W)| d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} |P| |(\bar{\mathcal{F}}(W) - \pi_{\mathcal{M}}\bar{\mathcal{F}}(W)) \cdot \mathbf{n}| d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.14)$$

sous la contrainte  $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = N$ .

Cependant, contrairement au problème d'optimisation pour l'erreur d'interpolation, on observe les nouveautés suivantes :

- la formulation est mixte en volume et en surface,
- il y a une somme d'erreurs d'interpolation,
- les erreurs d'interpolation sont pondérées par des fonctions poids. Le problème d'adaptation avec un état adjoint revient donc à une problématique d'erreur d'interpolation  $\mathbf{L}^1$  pondérée.

Dans la suite, on se propose d'expliquer comment résoudre les problèmes d'optimisation dans le cas d'une erreur d'interpolation pondérée, puis de la somme d'erreurs d'interpolation et enfin du couplage volume et surface. On donnera ensuite la solution du Problème (4.14).

#### 4.4.1 Erreur d'interpolation pondérée

*Rappels et notations.* Dans cette section, on référera assez souvent à la définition de l'interpolé linéaire continu, Proposition 2.4, ou à la résolution d'un calcul de variations, Équation (2.7), sur l'espace des maillages continus vu dans le Chapitre 2. Étant donné un maillage continu  $\mathcal{M}$ , les  $(h_i)_{i=1\dots 3}$  dénotent les tailles suivant les directions principales  $(\mathbf{v}_i)_{i=1\dots 3}$  et les  $(r_i)_{i=1\dots 3}$  sont les quotients d'anisotropie, voir la décomposition donnée dans la Proposition 1.6, Chapitre 1. Si  $H$  est une matrice symétrique alors  $|H|$  est la matrice symétrique définie positive déduite de  $H$  dont les valeurs propres sont le maximum entre les valeurs absolues des valeurs propres de  $H$  et un seuil  $\varepsilon$  strictement positif arbitrairement petit.

Étant données deux fonctions  $u$  et  $g$  avec  $u$  deux fois continûment différentiable et  $g$  strictement positive, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Minimiser } E_{wgt}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} g |u - \pi_{\mathcal{M}}u| d\Omega,$$

sous la contrainte d'égalité  $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = N$ .

D'après le Chapitre 2, l'erreur d'interpolation sur le maillage continu  $\mathcal{M}$ , s'exprime en fonction du hessien  $H$  de la solution  $u$  :

$$E_{wgt}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} g \left( \sum_{i=1}^3 h_i^2 {}^t \mathbf{v}_i |H| \mathbf{v}_i \right) d\Omega.$$

Cette fonctionnelle se simplifie en utilisant les quotients d'anisotropie et la densité :

$$E_{wgt}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} g d^{-\frac{2}{3}} \left( \sum_{i=1}^3 r_i^2 {}^t \mathbf{v}_i |H| \mathbf{v}_i \right) d\Omega.$$

La présence du poids  $g$  n'influe pas la composante locale anisotrope de la fonctionnelle :

$$\left( \sum_{i=1}^3 r_i^2 {}^t \mathbf{v}_i |H| \mathbf{v}_i \right),$$

qui peut être minimisée localement et indépendamment. À l'optimum, elle se simplifie en :

$$\left( \sum_{i=1}^3 r_i^2 {}^t \mathbf{v}_i |H| \mathbf{v}_i \right) = 3 \det(|H|)^{\frac{1}{3}}.$$

Par conséquent, le poids modifie seulement la densité de la métrique optimale, il vient pour une variation  $\delta d$  vérifiant  $\int_{\Omega} \delta d = 0$  :

$$\int_{\Omega} g d^{-\frac{5}{3}} \det(|H|)^{\frac{1}{3}} \delta d = \int_{\Omega} d^{-\frac{5}{3}} \det(g|H|)^{\frac{1}{3}} \delta d = 0.$$

Il existe donc une constante  $C$  telle que l'intégrande précédente soit constante. La valeur de  $C$  est déterminée par la contrainte  $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = N$ . La métrique optimale finale est donc déduite de la Proposition 2.4 en norme  $\mathbf{L}^1$  et en multipliant la densité par le poids  $g$  :

$$\mathcal{M}_{wgt}(g, u) = D(g, u) \det(g|H|)^{-\frac{1}{5}} |g H|,$$

où  $D(g, u)$  est donnée par :

$$D(g, u) = N^{\frac{2}{3}} \left( \int_{\Omega} (\det(g|H|))^{\frac{2}{5}} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

En pratique, il suffit de calculer la métrique optimale sur le hessien  $|H|$  de  $u$  pondéré par  $g$ .

#### 4.4.2 Somme d'erreurs d'interpolation

Étant données deux fonctions  $u$  et  $v$  deux fois continûment différentiables ainsi que deux fonctions de pondération  $\alpha$  et  $\beta$  positives, on cherche le maillage continu optimal minimisant la somme des erreurs d'interpolation pondérées en norme  $\mathbf{L}^1$  :

$$\text{Minimiser } E_{sum}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} \alpha |u - \pi_{\mathcal{M}} u| d\Omega + \int_{\Omega} \beta |v - \pi_{\mathcal{M}} v| d\Omega,$$

sous la contrainte  $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = N$ .

On montre que minimiser  $E_{sum}$  est équivalent à minimiser une seule erreur d'interpolation sur une fonction dont le hessien est la combinaison linéaire  $\alpha |H_u| + \beta |H_v|$ , où  $|H_u|$  et  $|H_v|$  sont les hessiens modifiés de  $u$  et  $v$ . En effet, en utilisant la définition de l'interpolé linéaire continu, il vient :

$$\begin{aligned} \alpha |u - \pi_{\mathcal{M}} u| + \beta |v - \pi_{\mathcal{M}} v| &= \alpha \sum_{i=1}^3 h_i^2 {}^t \mathbf{v}_i |H_u| \mathbf{v}_i + \beta \sum_{i=1}^3 h_i^2 {}^t \mathbf{v}_i |H_v| \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 h_i^2 {}^t \mathbf{v}_i (\alpha |H_u| + \beta |H_v|) \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer directement les résultats de la Proposition 2.4. En pratique, la métrique optimale est donnée en calculant la métrique optimale  $\mathbf{L}^1$  sur la matrice définie positive  $(\alpha |H_u| + \beta |H_v|)$ .

#### 4.4.3 Le cas avec une intégrale volumique et une intégrale au bord

On considère deux fonctions découplées  $u$  et  $\bar{u}$  définies respectivement sur  $\Omega$  et  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ . On considère que ces fonctions sont découplées par analogie au Problème (4.14). En effet, dans l'erreur  $\mathcal{E}(\mathcal{M})$  le terme de bord repose sur une erreur d'interpolation sur les flux frontière  $\bar{\mathcal{F}}$  alors que le terme de volume sur l'erreur d'interpolation des flux d'Euler  $\mathcal{F}$ . Dans ce qui suit, toutes les variables relatives à  $\Gamma$  sont surmontées d'une barre.

On considère le problème générique de minimisation de l'erreur d'interpolation de volume pondérée enrichie comme suit par une intégrale de bord :

$$\text{Minimiser } E_{surf}(\mathcal{M}, \bar{\mathcal{M}}) = \int_{\Omega} |g| |u - \pi_{\mathcal{M}}u| d\Omega + \int_{\Gamma} |\bar{g}| |\bar{u} - \pi_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{u}| d\Gamma, \quad (4.15)$$

sous la contrainte

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) + \mathcal{C}(\bar{\mathcal{M}}) = N,$$

où  $g$  et  $\bar{g}$  sont deux fonctions positives. On peut distinguer plusieurs cadres théoriques plus ou moins complexes pour l'intégrale de surface :

- la fonction  $\bar{u}$  est la trace sur  $\Gamma$  d'une fonction définie sur  $\Omega$ ,
- la fonction  $\bar{u}$  n'admet pas de prolongement dans  $\Omega$ .

Le premier cas est le plus simple en pratique car il est suffisant en un point de projeter l'information courante (gradient, hessien, etc...) sur le plan tangent. Le second cas nécessite la définition d'algorithmes bien posés pour l'estimation ou la reconstruction des dérivées sur des variétés (riemanniennes). Cependant, dans les calculs envisagés, les conditions aux limites sont constantes et il n'est donc pas nécessaire de contrôler leur erreur d'interpolation (si on accepte de ne pas avoir le maillage optimal pour les conditions aux limites).

REMARQUE 4.2 Un exemple où l'adaptation sur la frontière aurait été nécessaire consiste à considérer des conditions d'entrée avec des profils de vitesse paraboliques.

On rappelle que l'erreur d'interpolation de volume (resp. de surface) d'une fonction  $u$  (resp.  $\bar{u}$ ) de hessien  $H_u$  (resp.  $\bar{H}_{\bar{u}}$ ) sur le maillage  $\mathcal{M}$  (resp.  $\bar{\mathcal{M}}$ ) est donnée par, cf. Chapitre 2 :

$$u - \pi_{\mathcal{M}}u = \sum_{i=1}^3 h_i^2 {}^t\mathbf{v}_i |H_u| \mathbf{v}_i,$$

et pour la surface :

$$\bar{u} - \pi_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{u} = \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i^2 {}^t\bar{\mathbf{v}}_i |\bar{H}_{\bar{u}}| \bar{\mathbf{v}}_i,$$

où  $\mathbf{v}_i$  et  $\bar{\mathbf{v}}_i$  sont les directions principales des métriques de volume  $\mathcal{M}$  et de surface  $\bar{\mathcal{M}}$ , et  $h_i$  et  $\bar{h}_i$  les tailles suivant ces directions, respectivement. Pour le hessien, on considère que sur un élément de surface de base orthonormale  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , le hessien de surface s'écrit comme la projection du hessien  $3D$ , noté  $H_3$ , sur  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  :

$$\bar{H}_{\bar{u}} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}_1 H_3 \mathbf{u}_1 & {}^t\mathbf{u}_1 H_3 \mathbf{u}_2 \\ {}^t\mathbf{u}_1 H_3 \mathbf{u}_2 & {}^t\mathbf{u}_2 H_3 \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Les étirements optimaux et les orientations optimales de  $\mathcal{M}$  (respectivement  $\bar{\mathcal{M}}$ ) sont ceux classiquement déduits du hessien  $H$  (respectivement  $\bar{H}_{\bar{u}}$ ). On suppose donc que les directions

et étirements agissent de manière découplée dans (4.15). Le Problème (4.15) devient donc :

$$\text{Minimiser } E_{surf} = 3 \int_{\Omega} \left( d^{-\frac{2}{3}} \det(|H|)^{\frac{1}{3}} \right) |g| \, d\Omega + 2 \int_{\Gamma} \left( \bar{d}^{-1} \det(|\bar{H}|)^{\frac{1}{2}} \right) |\bar{g}| \, d\Gamma, \quad (4.16)$$

sous la contrainte

$$\int_{\Omega} d + \int_{\Gamma} \bar{d} = N.$$

La condition nécessaire d'Euler-Lagrange associée à (4.16) est donnée par :

$$\int_{\Omega} |g| \det(|H|)^{\frac{1}{3}} d^{-\frac{5}{3}} \delta d + \int_{\Gamma} |\bar{g}| \det(|\bar{H}|)^{\frac{1}{2}} \bar{d}^{-2} \delta \bar{d} = 0, \quad (4.17)$$

où les fonctions  $(\delta d, \delta \bar{d})$  vérifient :

$$\int_{\Omega} \delta d + \int_{\Gamma} \delta \bar{d} = 0.$$

On perturbe  $\delta d$  par un terme  $\delta d'$  d'intégrale nulle sur  $\Omega$  de sorte que la contrainte reste vrai. Il vient :

$$\int_{\Omega} |g| \det(|H|)^{\frac{1}{3}} d^{-\frac{5}{3}} \delta d' + \int_{\Omega} |g| \det(|H|)^{\frac{1}{3}} d^{-\frac{5}{3}} \delta d + \int_{\Gamma} |\bar{g}| \det(|\bar{H}|)^{\frac{1}{2}} \bar{d}^{-2} \delta \bar{d} = 0,$$

soit

$$\int_{\Omega} |g| \det(|H|)^{\frac{1}{3}} d^{-\frac{5}{3}} \delta d' = 0,$$

sous la contrainte

$$\int_{\Omega} \delta d' = 0.$$

On déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que :

$$|g| \det(|H|)^{\frac{1}{3}} d^{-\frac{5}{3}} = C \implies d = C^{-\frac{3}{5}} |g|^{\frac{3}{5}} \det(|H|)^{\frac{1}{5}}.$$

Le même raisonnement s'applique pour le terme de bord, il existe donc une constante  $\bar{C}$  telle que :

$$|\bar{g}| \det(|\bar{H}|)^{\frac{1}{2}} \bar{d}^{-2} = \bar{C} \implies \bar{d} = \bar{C}^{-\frac{1}{2}} |\bar{g}|^{\frac{1}{2}} \det(|\bar{H}|)^{\frac{1}{4}}.$$

La contrainte donnant une complexité  $N$  donne une première relation qui lie les constantes  $C$  et  $\bar{C}$  :

$$C^{-\frac{3}{5}} \int_{\Omega} |g|^{\frac{3}{5}} \det(|H|)^{\frac{1}{5}} + \bar{C}^{-\frac{1}{2}} \int_{\Gamma} |\bar{g}|^{\frac{1}{2}} \det(|\bar{H}|)^{\frac{1}{4}} = N.$$

Enfin le choix particulier admissible :

$$(\delta d, \delta \bar{d}) = \left( \frac{1}{|\Omega|}, -\frac{1}{|\Gamma|} \right),$$

car

$$\int_{\Omega} \delta d + \int_{\Gamma} \delta \bar{d} = 1 - 1 = 0,$$

donne, en le substituant dans (4.17) et en utilisant les relations donnant  $d$  et  $\bar{d}$ , une deuxième relation liant le couple  $(C, \bar{C})$  :

$$C - \bar{C} = 0.$$

Pour trouver la constante  $C$ , on doit résoudre le problème non linéaire suivant :

$$C^{-\frac{3}{5}} \int_{\Omega} |g|^{\frac{3}{5}} \det(|H|)^{\frac{1}{5}} + C^{-\frac{1}{2}} \int_{\Gamma} |\bar{g}|^{\frac{1}{2}} \det(|\bar{H}|)^{\frac{1}{4}} = N.$$

Finalement, le maillage optimal est donné par une spécification de la complexité indépendante dans le volume et sur la frontière. En pratique, une régularisation est effectuée sur le champ de métriques de volume et de surface afin de garantir une transition lisse entre les deux spécifications de maillages. En effet, ces dernières peuvent être antagonistes, voir par exemple le cas d'une condition d'entrée de Dirichlet dont le maillage de surface optimale est un taille maximale.

## 4.5 EXEMPLES NUMÉRIQUES

On illustre l'algorithme d'adaptation de maillage pour des fonctionnelles d'erreur sur plusieurs exemples en deux et trois dimensions. On présente également l'algorithme d'adaptation de maillage surfacique et volumique utilisé. Enfin, afin de démontrer les différences entre une adaptation de type hessien et une de type adjoint, on étudie la capture automatique d'ondes de choc pour un écoulement supersonique autour d'un avion.

### 4.5.1 Stratégie d'adaptation avec adjoint

La stratégie d'adaptation est similaire à celle présentée au Chapitre 3. Cependant, certaines modifications sont nécessaires dans le solveur et dans la phase de remaillage. On donne un bref aperçu des difficultés supplémentaires liées à l'adaptation basée sur un état adjoint ainsi que les choix retenus dans l'implémentation.

#### Solveur numérique et état adjoint

Étant donné un maillage  $\mathcal{H}$  d'un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . On note  $\partial\mathcal{H}$  le maillage de  $\Gamma$ . Le solveur fournit un état  $W_h$  convergé sur  $\mathcal{H}$ . On renvoie au Chapitre 3 pour la méthode utilisée. On se calcule la fonctionnelle  $J(\gamma, W_h)$  définie sur la région d'observation  $\gamma$ . La nouvelle étape correspond à la résolution du système linéaire :

$$A_h^* P_h = g_h,$$

où  $g_h$  est le jacobien de  $J(\gamma, W_h)$  et  $P_h$  l'état adjoint calculés sur le maillage  $\mathcal{H}$ .  $A_h^*$  est la matrice adjointe d'ordre un déduite de la linéarisation du schéma utilisé. Il est parfois utile d'avoir recours à la différentiation automatique [12, 13] afin de différencier la fonctionnelle et linéariser le schéma dans des cas de fonctionnelles compliquées.

Si le maillage 3D comporte  $N$  sommets alors la taille du système est  $5N$ . La matrice  $A_h^*$  est creuse, elle est composée en trois dimensions de blocs  $5 \times 5$ . Le nombre total de blocs  $5 \times 5$  est  $N + 2N_e$ , où  $N_e$  est le nombre d'arêtes du maillage. En 3D, on a approximativement  $N_e \approx 8N$ , le nombre de blocs devient  $10N$ . Le simple stockage de la matrice pour un maillage d'un million de sommets est de l'ordre de 2 Giga octets. Il faut ajouter à cela la place pour stocker le préconditionneur. Dans notre cas, on utilise un préconditionneur  $ILU(0)$  qui double la taille de stockage. Ce préconditionneur est couplé à un algorithme itératif de type GMRES [18]. Avec cette stratégie, l'état adjoint est convergé en moins de 10 itérations avec un résidu absolu de l'ordre de  $10^{-6}$ . Il est à noter que pour les applications envisagées d'autres méthodes de

préconditionnement semblent tout aussi efficaces et moins coûteuses en mémoire, voir par exemple [14].

Après le calcul de  $P_h$ , son gradient aux sommets est calculé en projetant le gradient constant aux éléments sur les sommets en appliquant une projection  $\mathbf{L}^2$ , cf. Chapitre 3. Les fichiers sortis par le solveur sont des couples poids et variables :

- les gradients  $\left(\frac{\partial P_h}{\partial x_i}\right)_{i=1\dots 3}$  associés aux flux  $(\mathcal{F}_{x_i}(W_h))_{i=1\dots 3}$ , tous de taille  $N \times 5$ ,
- l'état adjoint associé aux flux frontières  $\bar{\mathcal{F}}$  sur  $\gamma$ .

Pour un maillage d'un million de sommets, l'espace mémoire nécessaire pour calculer la métrique est de l'ordre de 30 Méga octets.

### Construction de la métrique

Le champ de métriques optimales est composé d'un champ de métriques volumiques  $\mathcal{M}^{go}$  et d'un champ de métriques surfaciques  $\bar{\mathcal{M}}^{go}$ . On calcule :

- en chaque sommet  $P$  de  $\mathcal{H}$ , la matrice hessienne associée aux contributions du volume :

$$H(P) = \sum_{j=1}^5 \left( \sum_{i=1}^3 |\nabla_{x_i} P_h| |H_R(\mathcal{F}_{x_i}(W_h))| \right),$$

- en chaque sommet  $P$  appartenant au maillage surfacique  $\partial\mathcal{H}$ , la matrice hessienne associée à la contribution de surface :

$$\bar{H}(P) = \sum_{j=1}^5 |P_h| |H_R \left( \sum_{i=1}^3 \bar{\mathcal{F}}_{x_i}(W_h) n_{x_i} \right)|,$$

où  $\mathbf{n} = (n_{x_1}, n_{x_2}, n_{x_3})$  est la normale sortante à  $\Gamma$ .

$H_R$  est l'opérateur qui reconstruit numériquement des hessiens linéaires par morceaux sur les éléments. On applique indépendamment sur chaque champ de métrique la normalisation  $\mathbf{L}^1$  :

$$\mathcal{M}^{go}(P) = C \det(|H(P)|)^{-\frac{1}{2p+3}} |H(P)| \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{M}}^{go}(P) = \bar{C} \det(|\bar{H}(P)|)^{-\frac{1}{2p+2}} |\bar{H}(P)|.$$

Les constantes  $C$  et  $\bar{C}$  dépendent de la complexité désirée  $N$  et reposent sur la résolution d'un problème non linéaire 1D, cf. Section 4.4.3.

### Adaptation de maillages

Dans une stratégie d'adaptation avec objectif, adapter le maillage de la surface d'observation  $\gamma$  est nécessaire afin d'assurer une consistance entre la précision du maillage de peau et du maillage de volume. En pratique, cela se traduit par un raccord compatible entre le maillage anisotrope de volume et celui de surface. Cette modification, principalement dans le cas anisotrope, implique de sérieuses complications d'ordre numérique dans la phase de génération de maillage. En effet, il est nécessaire de remailler globalement le maillage afin de prendre en compte le nouveau maillage de peau. Si on note  $(\mathcal{H}_k, \mathcal{M}_k^{go})$  le couple maillage et métrique optimale à l'itération  $k$ . Une première étape consiste à adapter le maillage de peau de  $\mathcal{H}_k$  pour  $\mathcal{M}_k^{go}$ , on note  $\mathcal{S}_{k+1}$  le maillage adapté correspondant à l'adaptation de  $\gamma$ . Cette étape est réalisée en utilisant le remaillonneur anisotrope de surfaces **Yams** [7]. Il reste à générer le maillage de volume  $\mathcal{H}_{k+1}$  ayant comme frontière  $\mathcal{S}_{k+1}$  et unité dans  $\mathcal{M}_k^{go}$ . Une approche classique, développée dans **Gamanic**, l'extension anisotrope de **Gamhic** [8], consiste à :

1. initialiser  $\mathcal{H}_{k+1}$  par un maillage vide d'une boîte englobant  $\mathcal{S}_{k+1}$ ,
2. insérer dans  $\mathcal{H}_{k+1}$  une liste de sommets recyclée du maillage  $\mathcal{H}_k$ ,
3. insérer dans  $\mathcal{H}_{k+1}$  les sommets de la nouvelle frontière, *i.e.*, les sommets de  $\mathcal{S}_{k+1}$ ,
4. forcer la frontière, *i.e.*, les faces de  $\mathcal{S}_{k+1}$  sont des faces de tétraèdres de  $\mathcal{H}_{k+1}$ ,
5. insertion des sommets de  $\mathcal{H}_{k+1}$  tels que  $\mathcal{H}_{k+1}$  est unité dans  $\mathcal{M}_k^{go}$  et optimisation du maillage anisotrope  $\mathcal{H}_{k+1}$ .

La phase de recyclage des points du maillage accélère le processus global car elle permet très rapidement de conserver des points sans commettre d'erreur d'interpolation sur les métriques. Cette stratégie est d'autant plus gagnante pour un calcul stationnaire où les modifications d'un maillage à l'autre sont faibles. Cet enchaînement suppose également que l'insertion des points du maillage de fond facilite le forçage de frontière en cassant les facteurs d'échelle.

#### 4.5.2 Validations en deux dimensions

##### Calcul de la traînée et de la portance sur le profil NACA0012

On considère la géométrie du NACA0012, déjà rencontrée au Chapitre 3, pour laquelle on simule un écoulement subsonique à Mach 0.63 et un angle d'attaque de 2 degrés et deux écoulements transsoniques aux Mach 0.8 et 0.85 et aux angles d'attaque 1.25 et 1 degrés. L'objectif est d'analyser l'impact d'adaptations ciblées sur la portance et la traînée pour ces trois écoulements. Les paramètres du solveur sont : une résolution par le flux HLLC, une diffusion numérique d'ordre 6, le limiteur à trois entrées de Dervieux (sauf pour le cas subsonique qui est réalisé sans limiteur) et une avancée en temps implicite.

Pour l'adaptation ciblée on considère comme quantité d'intérêt la portance :

$$J_l(\gamma, W) = \int_{\gamma} (p - p_{\infty}) n_y d\gamma,$$

et la traînée

$$J_d(\gamma, W) = \int_{\gamma} (p - p_{\infty}) n_x d\gamma,$$

où la zone d'observation  $\gamma$  est le profil du NACA0012 et  $p_{\infty}$  la pression à l'infini. On réalise donc six simulations que l'on répertorie dans la table suivante :

Cas Test	Fonctionnelle	Mach	Angle d'attaque
Test 1	Portance	0.63	2
Test 2	Traînée	0.63	2
Test 3	Portance	0.8	1.25
Test 4	Traînée	0.8	1.25
Test 5	Portance	0.85	1
Test 6	Traînée	0.85	1

Dans chaque cas, on a considéré 9 étapes d'adaptation pour les complexités :

$$[500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000, 32000, 64000],$$

avec 6 sous-itérations à complexité constante. Soit un total de 54 adaptations. L'adaptation de maillage 2D est réalisée en utilisant **Yams** [7].

Cas test	Portance	Traînée	Ord. Conv.
1	0.3103	0.00067	4
2	0.3098	0.00065	3
3	0.3069	0.0197	3.5
4	0.3071	0.0197	4
5	0.3279	0.0538	3
6	0.327	0.0537	2.5

**Table 4.1:** Coefficients aérodynamiques pour les cas tests 1 à 6 sur le profil NACA0012. Dans chaque cas, on donne le nombre de chiffres significatifs qui est obtenu sur plus de deux itérations successives.

Les valeurs de la portance et de la traînée calculées dans chaque cas sont résumées dans la Table 4.1. On y précise aussi l'ordre de convergence sur la fonctionnelle d'adaptation.

Le cas subsonique, même si il paraît anodin (cf. les iso-lignes de pression Figure 4.1), est un cas difficile pour le calcul de la traînée. En effet, la pression contribue de manière importante seulement dans le voisinage du point d'arrêt et au bord de fuite, voir les courbe de  $C_p$  Figure 4.2. Or, dans le voisinage du point d'arrêt la normale à la surface a principalement une composante suivant  $x$ . Donc, si la discrétisation du point d'arrêt n'est pas suffisante alors on commet une erreur importante sur la traînée. Par contre, le calcul de la portance est relativement aisée car les normales au profil sont majoritairement orientées suivant  $y$ . C'est effectivement ce que l'on constate sur les historiques de traînée et de portance, Figure 4.3.

La portance est bien évaluée dès le début de la simulation car il n'y a que 1% d'écart entre la valeur sur le maillage à 1 000 sommets (premier point rouge sur la Figure 4.3 en haut à gauche) et celle sur le maillage à 80 000 sommets (dernier point rouge sur la même figure). L'ordre asymptotique est atteint rapidement et on obtient un ordre 4 comme dans la théorie avec correcteur, Figure 4.3 en bas à gauche. On constate aussi que la portance est moins bien évaluée avec l'adaptation sur la traînée.

Pour la traînée, on remarque une forte évolution de sa valeur au cours du processus adaptatif. En effet, pour le cas test 2, elle vaut 0.003689 pour le maillage final à complexité 500 (*i.e.*, itération 8) et 0.00065 sur le maillage final à complexité 64000. Il y a un coefficient 6 d'écart. On trouve une bonne estimation de la traînée à partir 10 000 sommets. En ce qui concerne la remarque initiale, on voit sur le maillage final obtenu, cf. Figure 4.1, que le voisinage du point d'arrêt est la région où est effectivement concentrée la majeure partie des sommets du maillage. Pour le cas test 2, la traînée converge à l'ordre 3 et on constate qu'elle est toujours plus précise que la traînée obtenue dans le cas test 1 tout au long de la boucle adaptative.

La Figure 4.12 montre le coefficient de réduction de taille prescrite par la pondération (gradient de l'adjoint) sur la taille donnée par l'erreur d'interpolation sur le flux de la densité. On observe que la portance est influencée assez loin dans le domaine de calcul alors que les régions qui impactent la traînée sont concentrées près du profil. Il est intéressant de rappeler, que par le passé, il a été constaté que la taille du domaine de calcul influence notablement la précision de la portance. Ceci est effectivement mis en évidence par les poids dus à l'adjoint. Sinon, pour les deux valeurs d'intérêt, on note que le voisinage du point d'arrêt et le bord de fuite sont les zones qui demandent le plus de précision.

Le premier cas transsonique à Mach 0.8 présente un fort choc sur l'extrados et un deuxième choc plus faible sur l'intrados, cf. Figure 4.8. D'un côté, les fonctionnelles semblent plus facile

à évaluer que dans le cas précédent car l'intégrale de pression n'est plus localisée en deux endroits comme on peut s'en apercevoir sur les courbes de  $C_p$ , Figure 4.4. D'un autre côté, la présence de chocs dans l'écoulement peut être la source de perte de convergence comme dans le Chapitre 3.

Comme précédemment, la portance est bien évaluée avec un nombre raisonnable de sommets, Figure 4.5. Entre, le maillage à 1 000 sommets et celui à 80 000, il n'y a qu'un écart de 2.5%. On obtient un ordre de convergence de 3.5 avec l'adaptation sur la portance au lieu de 4 précédemment. Et logiquement, l'adaptation sur la portance donne un meilleur résultat que l'adaptation sur la traînée, même si les valeurs sont proches.

Cette fois, la variation de la traînée entre le premier et le dernier maillage n'est que de 20%. Elle est très bien évaluée assez rapidement : environ 3 000 sommets. Ce qui montre bien que le cas est plus simple. D'ailleurs, on obtient un ordre 4 de convergence avec l'adaptation sur la traînée même si deux chocs sont présents dans l'écoulement. C'est l'ordre théorique de convergence des fonctionnelles corrigées.

La Figure 4.10 montre les maillages finaux contenant 80 000 sommets pour les cas 3 et 4. Les maillages sont effectivement adaptés au voisinage du point d'arrêt, au bord de fuite, au niveau des ondes de choc et dans le sillage. Mais, il est plus surprenant de voir que, dans le cas de la portance, le maillage est adapté à l'entropie créée par le choc sur l'extrados et, dans le cas de la traînée, le maillage suit les iso-lignes de la solution avant le choc. Ces maillages ne perturbent pas la précision de la solution calculée comme on peut le constater sur la Figure 4.8.

La Figure 4.13 montre le coefficient de réduction de taille prescrite par la pondération sur la taille donnée par l'erreur d'interpolation sur le flux de la densité. Comme dans le cas subsonique, la portance est influencée assez loin dans le domaine de calcul alors que les régions qui impacte la traînée sont concentrées près du profil. Notons que les deux adaptations ont été relativement sensibles au pied du choc sur l'extrados.

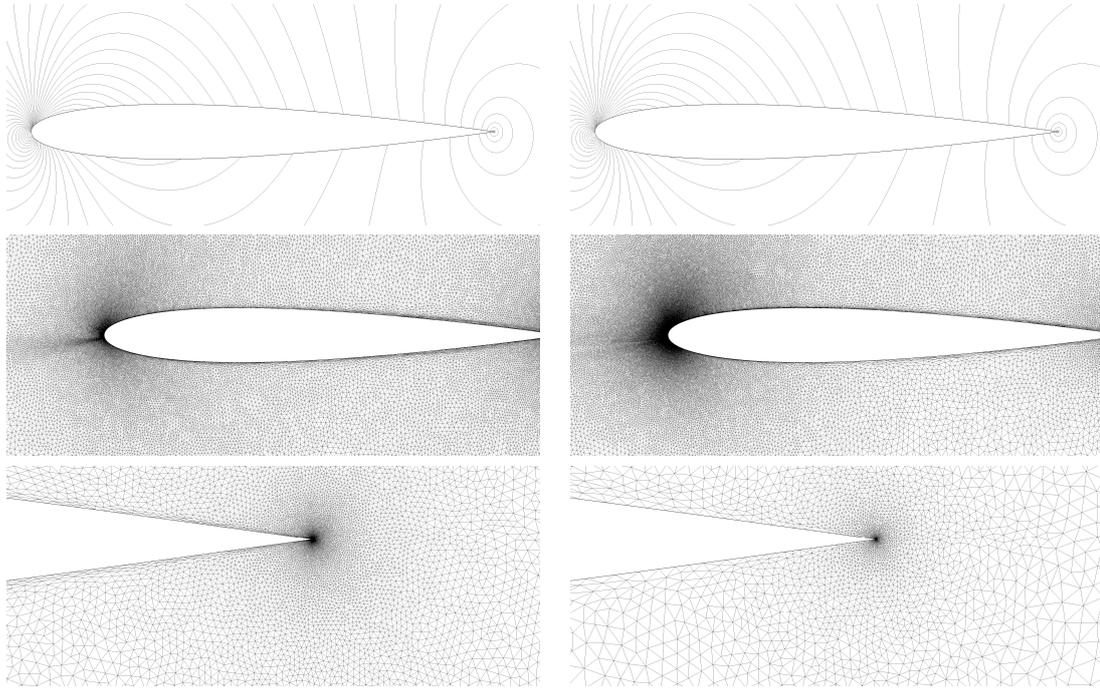
Le deuxième cas transsonique à Mach 0.85 présente deux forts chocs : un sur l'extrados et un sur l'intrados, cf. Figure 4.9. Cet écoulement semble encore plus facile à évaluer car l'augmentation du Mach a augmenté l'intégrale de pression sur le profil, Figure 4.6. En effet, lors du processus d'adaptation sur la portance, la portance a varié au maximum de 0.2%, et lors de l'adaptation sur la traînée, on a 1% d'écart sur celle-ci entre le premier et le dernier maillage. Les ordres de convergence sont moins bon que précédemment, on obtient des ordres 3 et 2.5 sur la portance et la traînée, respectivement. Ceci est peut être dû aux chocs forts. Mais cela est à relativiser au vu de la précision des fonctionnelles dès les premiers maillages adaptés.

Cette fois aussi, les maillages sont effectivement adaptés au voisinage du point d'arrêt, au bord de fuite, au niveau des ondes de choc et dans le sillage, cf. Figure 4.11. On constate encore que les maillages sont adaptés sur les iso-lignes d'entropie produites par les ondes de chocs mais de manière différente suivant la portance ou la traînée.

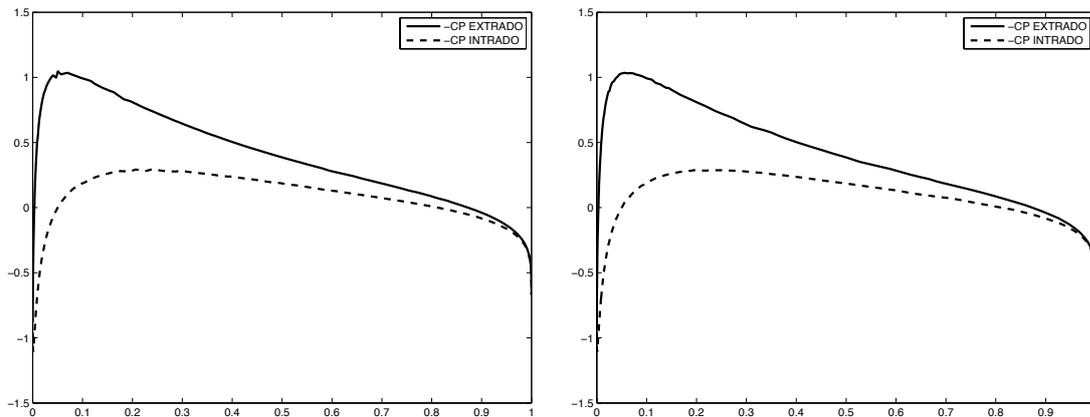
L'impact du gradient de l'adjoint est illustré sur la Figure 4.14. On peut faire les mêmes constatations que dans les deux autres exemples. Néanmoins, les iso-valeurs de poids sont beaucoup plus complexes. En particuliers, on voit clairement apparaître les ondes de chocs dans ces iso-valeurs et même l'effet de l'entropie, cf. image en bas à droite.

Ces cas simples en deux dimensions laissent supposer un problème très complexe en trois dimensions. Pour donner un ordre de grandeur, si on désire atteindre la même précision en 3D, alors on approche le nombre de points par  $(80\,000)^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 10^7$ , soit plus de 20 millions de sommets. Actuellement, le nombre maximum de sommets pour un maillage anisotrope 3D

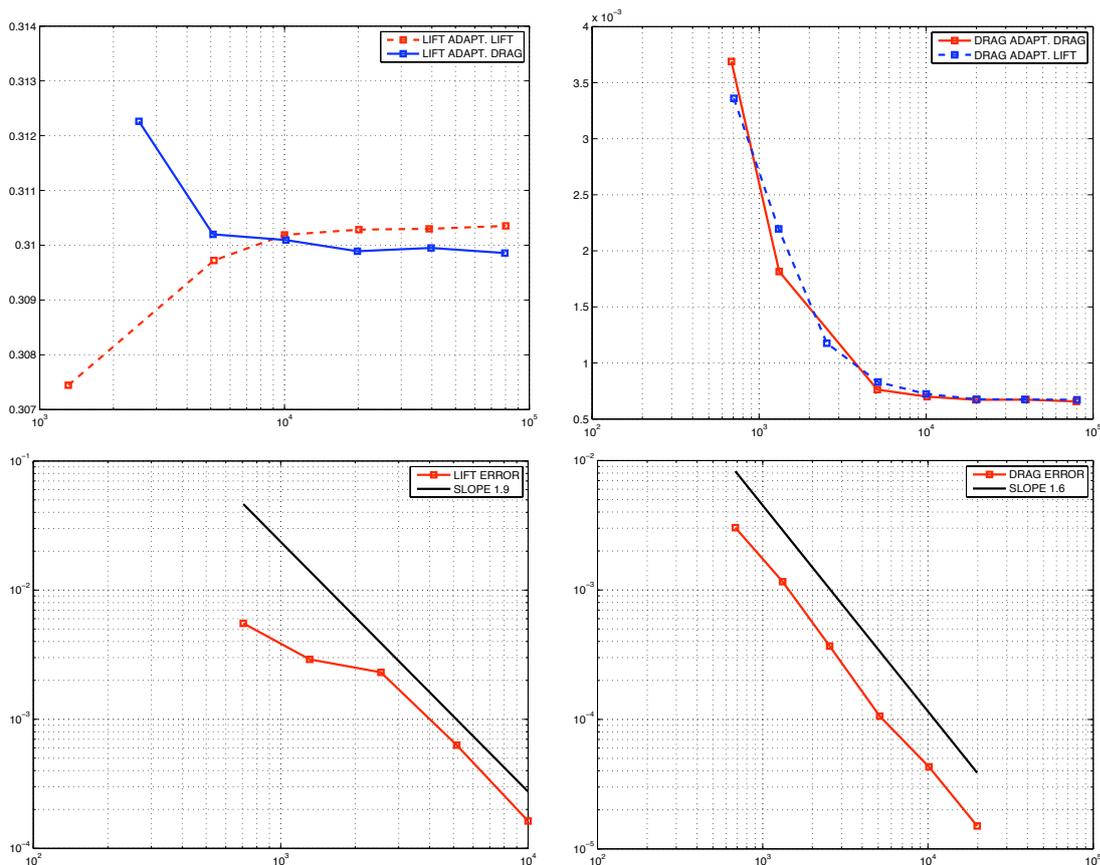
créé dans cette thèse est de l'ordre de 10 millions.



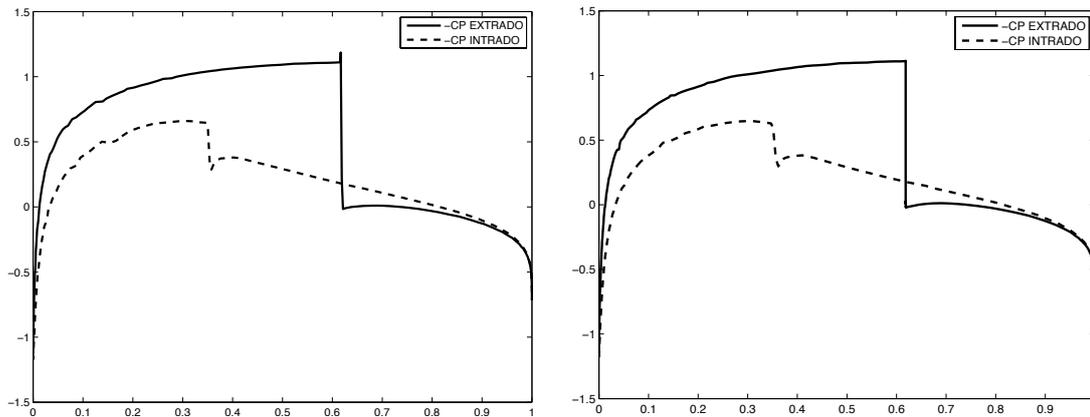
**Figure 4.1:** NACA0012 à Mach 0.63 et avec un angle d'attaque de 2 degrés. Comparaison des isolignes de pression et des maillages adaptés pour une adaptation sur la portance (à gauche) et sur la traînée (à droite). Les deux maillages comportent 80 000 sommets.



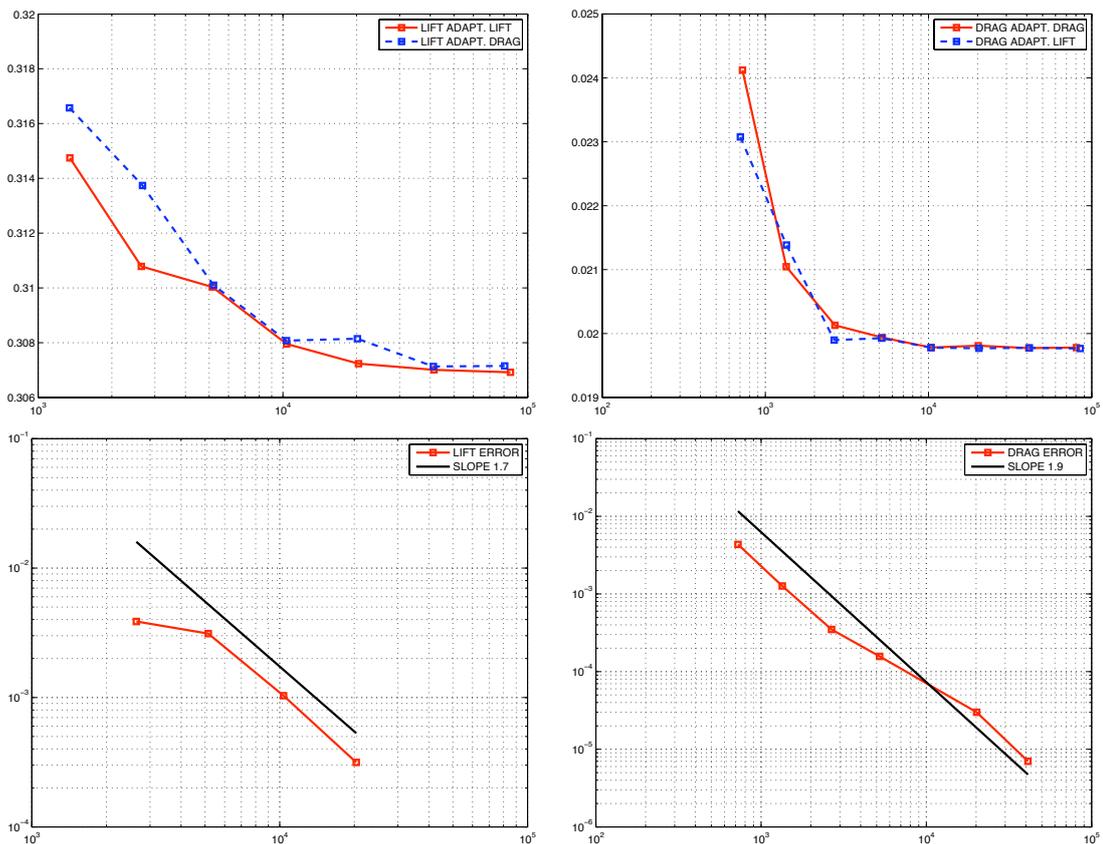
**Figure 4.2:** NACA0012 à Mach 0.63 et avec un angle d'attaque de 2 degrés. A gauche, le cas test 1 et, à droite, le cas test 2. Représentation du coefficient de pression  $-C_p$  sur l'intrados et l'extrados du profil.



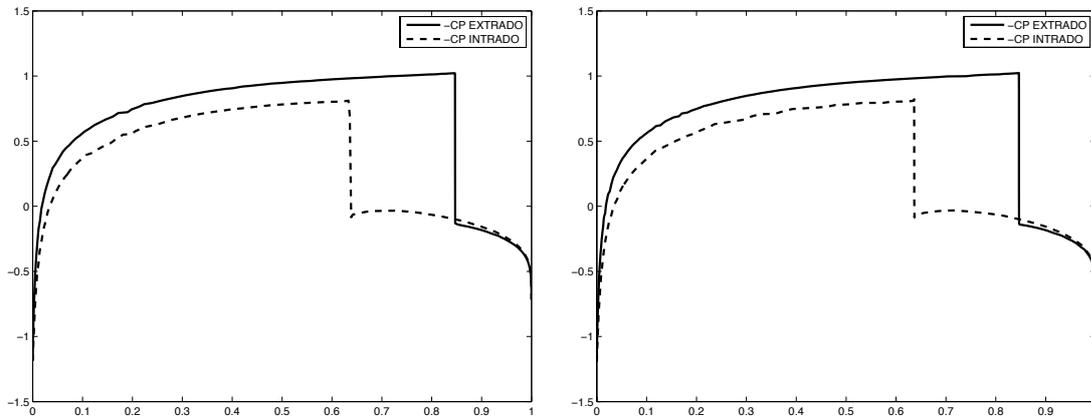
**Figure 4.3:** NACA0012 à Mach 0.63 et avec un angle d'attaque de 2 degrés. En haut, historique de convergence de la portance (à gauche) et de la traînée (à droite) en fonction du logarithme du nombre de points pour les cas 1 et 2. En bas à gauche, ordre de convergence de la portance pour le cas 1 estimé à 4. En bas à droite, ordre de convergence de la traînée pour le cas 2 estimé à 3.



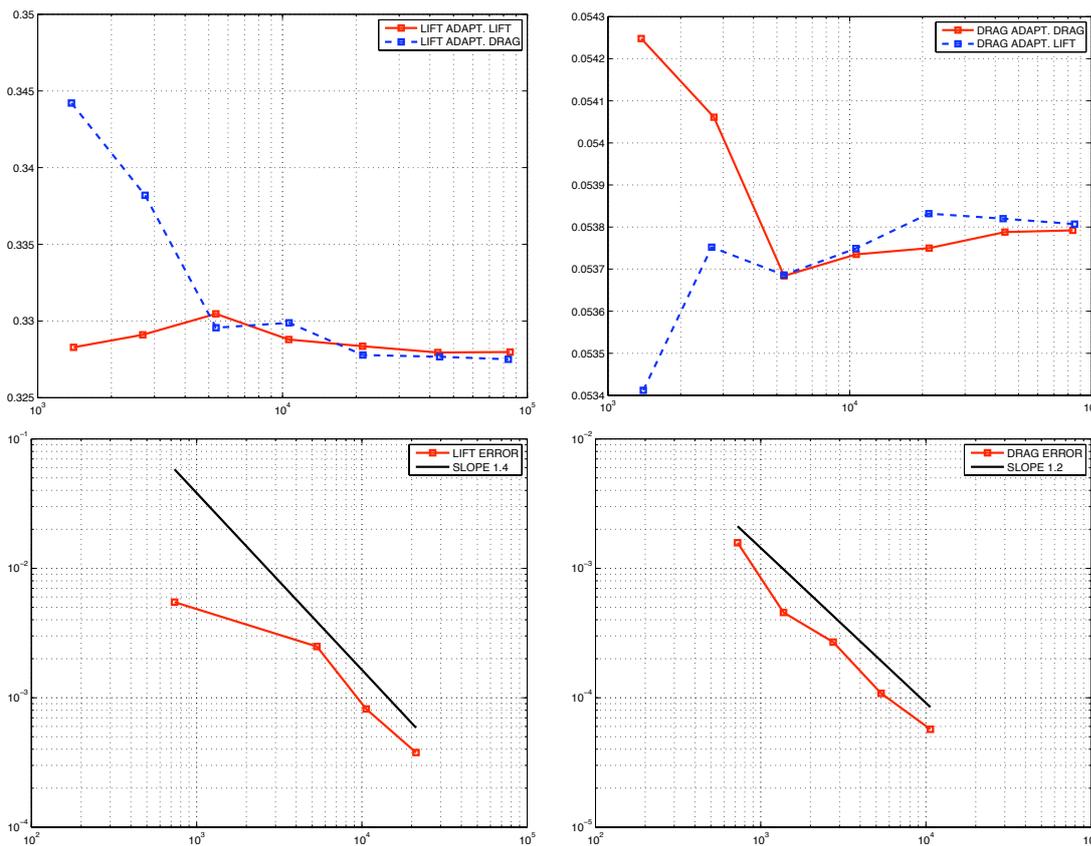
**Figure 4.4:** NACA0012 à Mach 0.8 et avec un angle d'attaque de 1.25 degrés. A gauche, le cas test 3 et, à droite, le cas test 4. Représentation du coefficient de pression  $-C_p$  sur l'intrados et l'extrados du profil.



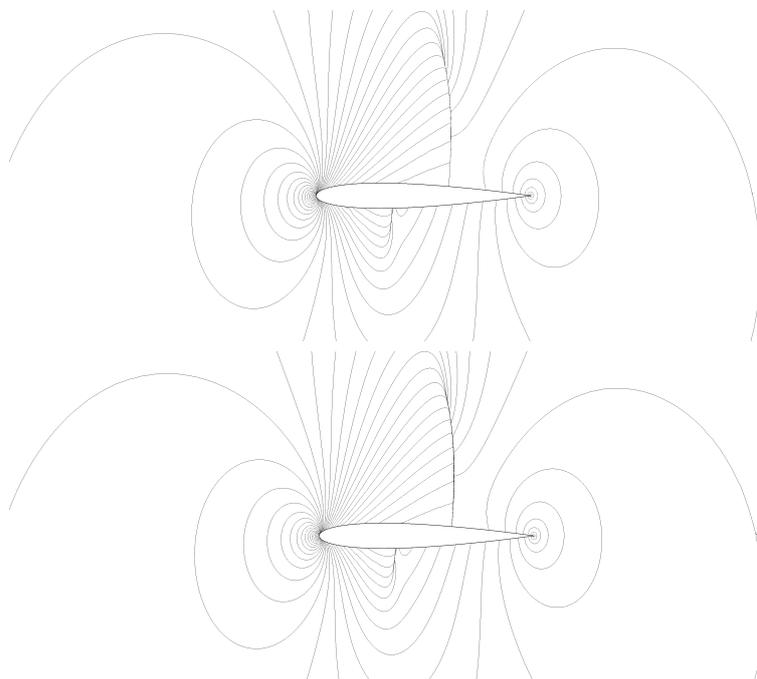
**Figure 4.5:** NACA0012 à Mach 0.8 et avec un angle d'attaque de 1.25 degrés. En haut, historique de convergence de la portance (à gauche) et de la traînée (à droite) en fonction du logarithme du nombre de points pour les cas 3 et 4. En bas à gauche, ordre de convergence de la portance pour le cas 3 estimé à 3.5. En bas à droite, ordre de convergence de la traînée pour le cas 4 estimé à 4.



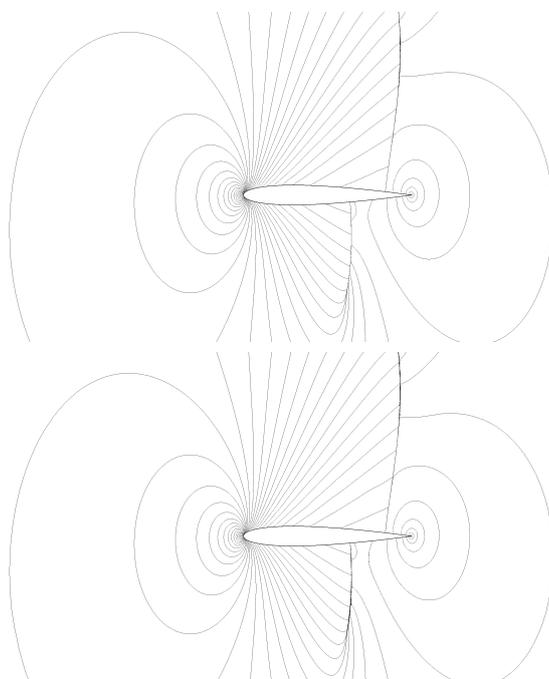
**Figure 4.6:** NACA0012 à Mach 0.85 et avec un angle d'attaque de 1 degré. À gauche, le cas test 5 et, à droite, le cas test 6. Représentation du coefficient de pression  $-C_p$  sur l'intrados et l'extrados du profil.



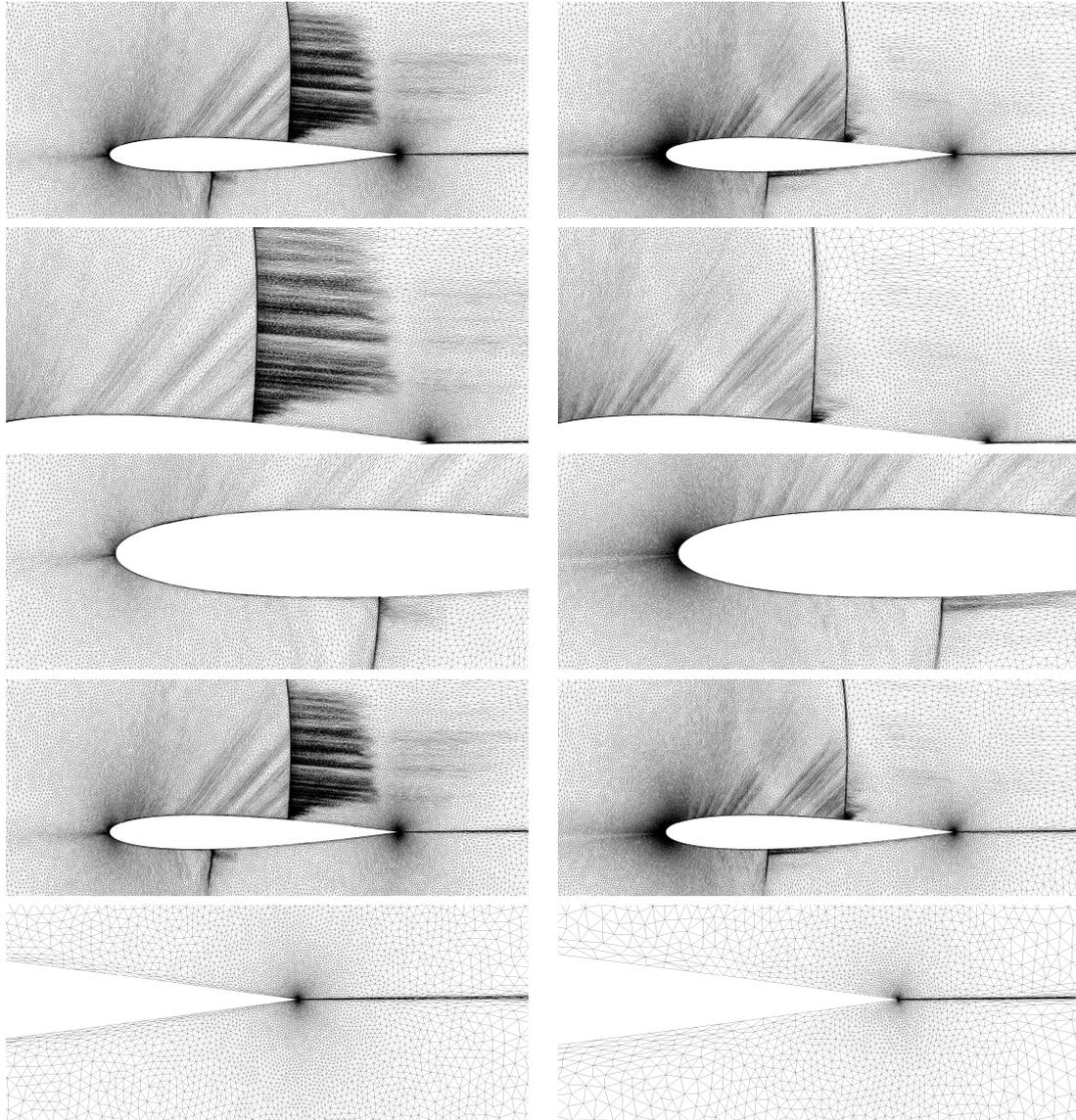
**Figure 4.7:** NACA0012 à Mach 0.85 et avec un angle d'attaque de 1 degré. En haut, historique de convergence de la portance (à gauche) et de la traînée (à droite) en fonction du logarithme du nombre de points pour les cas 5 et 6. En bas à gauche, ordre de convergence de la portance pour le cas 5 estimé à 3. En bas à droite, ordre de convergence de la traînée pour le cas 6 estimé à 2.5.



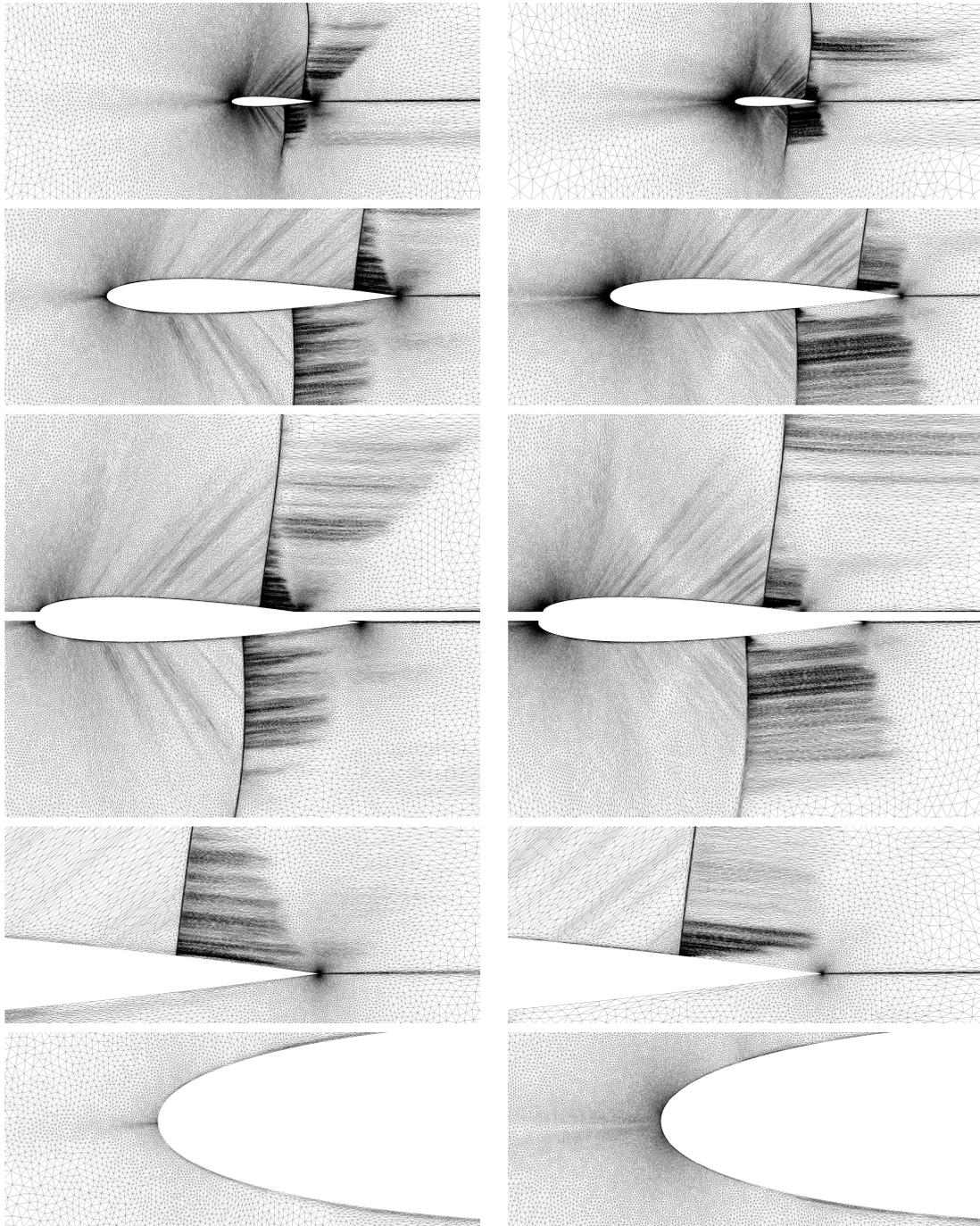
**Figure 4.8:** NACA0012 à Mach 0.8 et avec un angle d'attaque de 1.25 degrés. Représentation des iso-lignes de pression pour une adaptation sur la portance (en haut) et sur la traînée (en bas). Les deux maillages comportent 80 000 sommets.



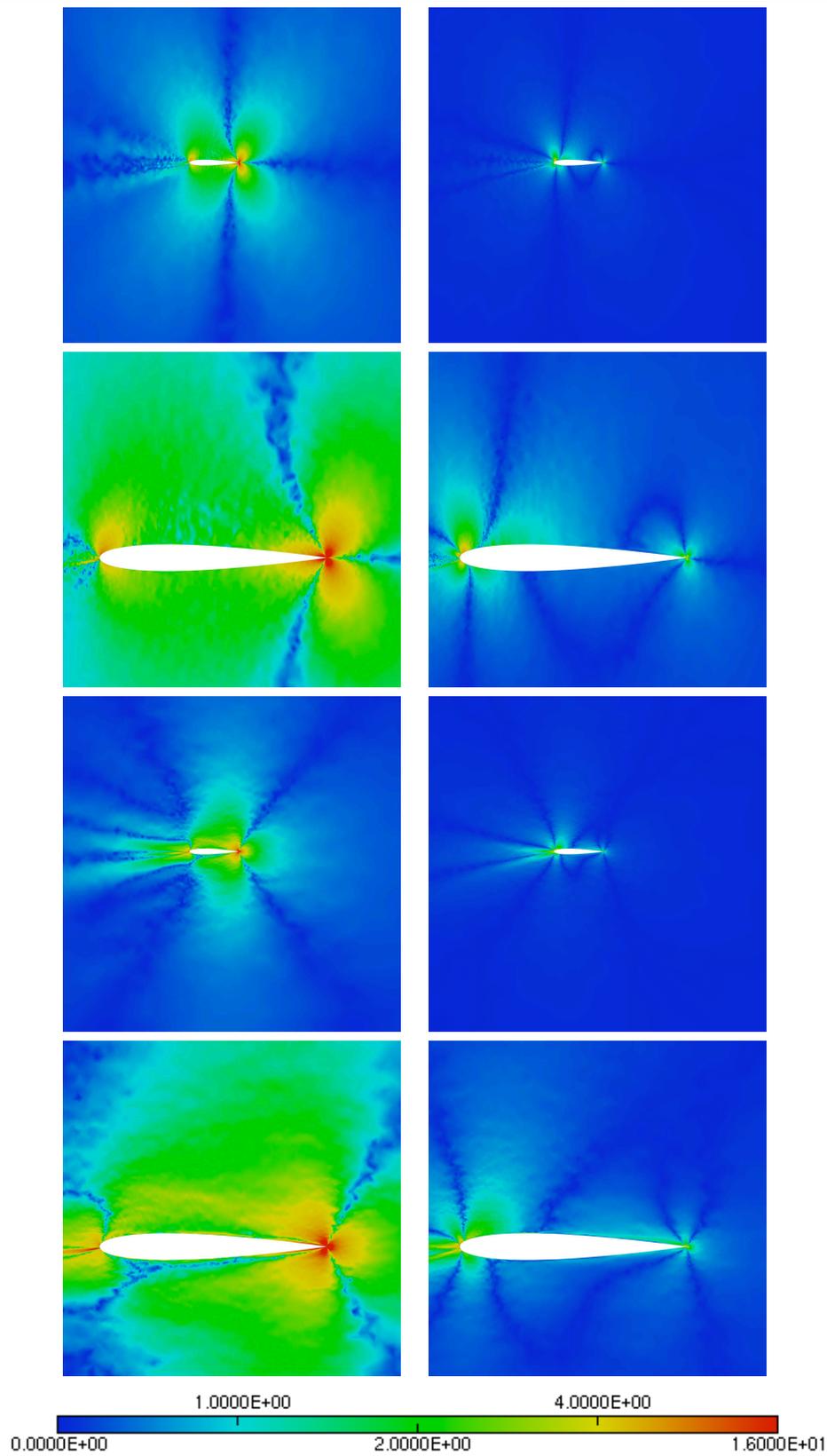
**Figure 4.9:** NACA0012 à Mach 0.85 et avec un angle d'attaque de 1 degré. Représentation des iso-lignes de pression pour une adaptation sur la portance (en haut) et sur la traînée (en bas). Les deux maillages comportent 80 000 sommets.



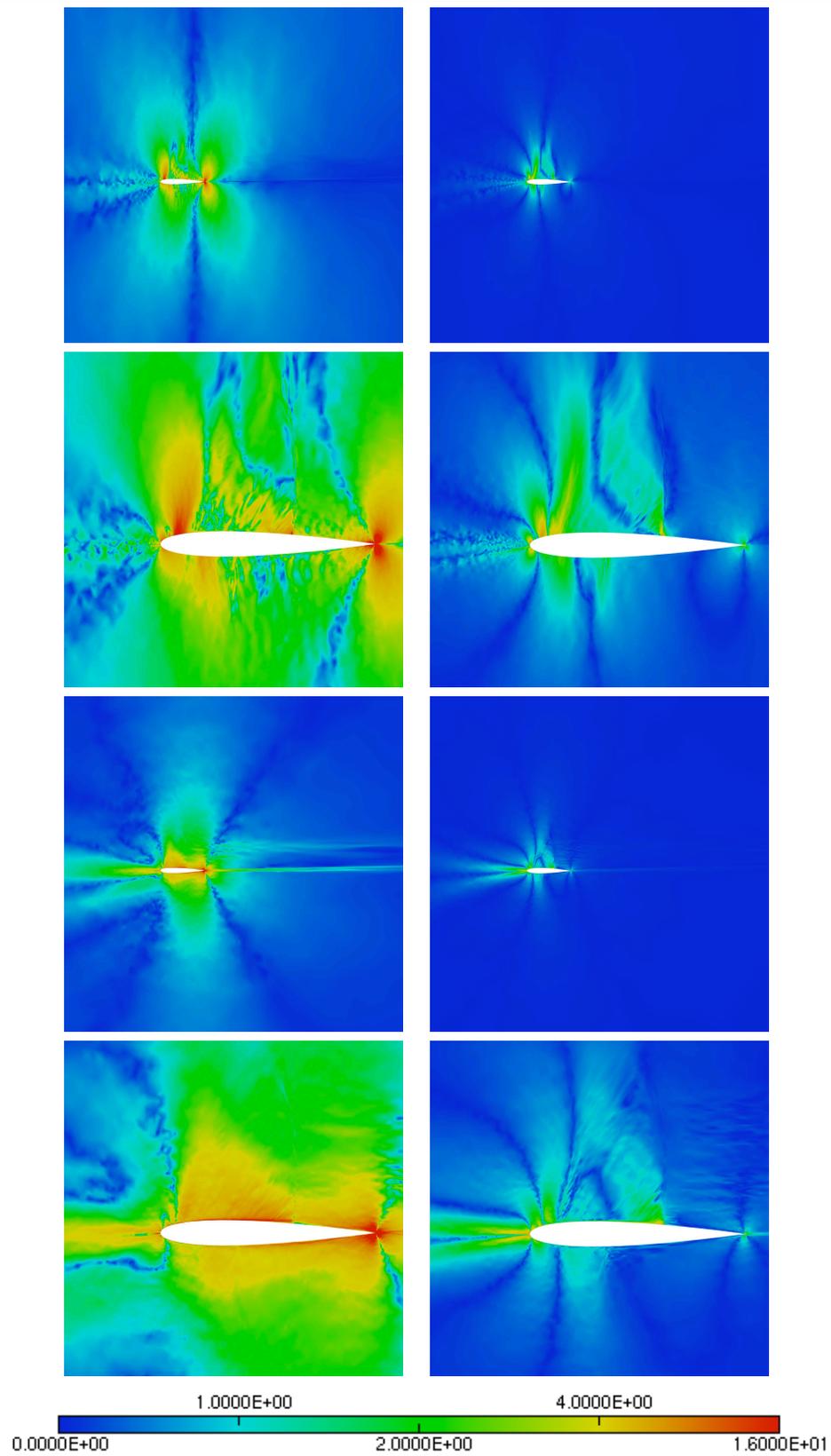
**Figure 4.10:** NACA0012 à Mach 0.8 et avec un angle d'attaque de 1.25 degrés. Représentation des maillages finaux adaptés pour une adaptation sur la portance (à gauche) et sur la traînée (à droite). Les deux maillages comportent 80 000 sommets.



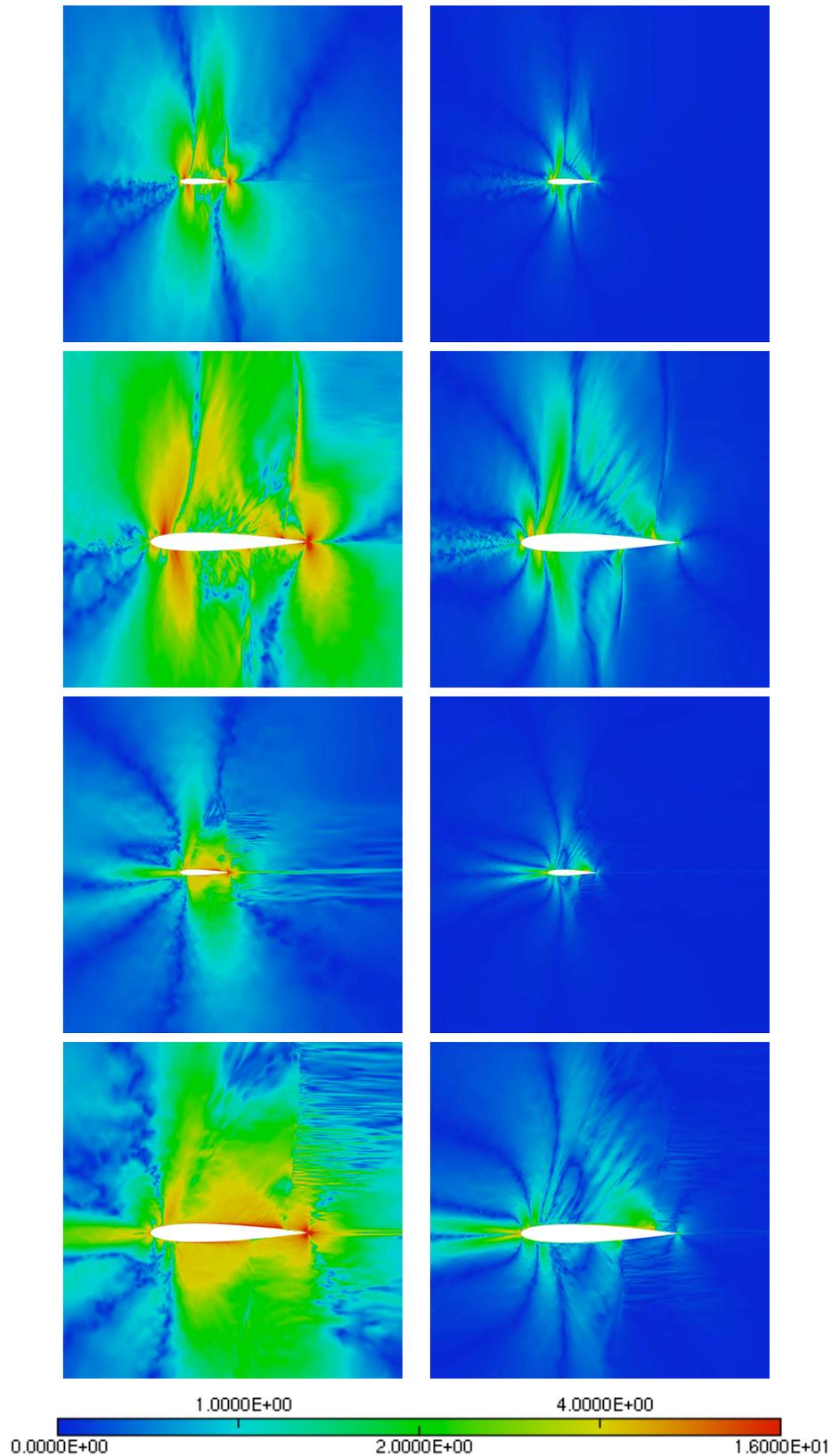
**Figure 4.11:** NACA0012 à Mach 0.85 et avec un angle d'attaque de 1 degré. Représentation des maillages fins adaptés pour une adaptation sur la portance (à gauche) et sur la traînée (à droite). Les deux maillages comportent 80 000 sommets.



**Figure 4.12:** NACA0012 à Mach 0.63 et avec un angle d'attaque de 2 degrés. Représentation des poids  $\sqrt{\nabla_x P}$  (en haut) et  $\sqrt{\nabla_y P}$  (en bas) pour la densité pour le cas test 1 (à gauche) et le cas test 2 (à droite). Il représente le coefficient de réduction de taille prescrite par la pondération sur la taille donnée par l'erreur d'interpolation sur le flux de la densité.



**Figure 4.13:** NACA0012 à Mach 0.8 et avec un angle d'attaque de 1.25 degrés. Représentation des poids  $\sqrt{\nabla_x P}$  (en haut) et  $\sqrt{\nabla_y P}$  (en bas) pour la densité pour le cas test 3 (à gauche) et le cas test 4 (à droite). Il représente le coefficient de réduction de taille prescrite par la pondération sur la taille donnée par l'erreur d'interpolation sur le flux de la densité.



**Figure 4.14:** NACA0012 à Mach 0.85 et avec un angle d'attaque de 1 degré. Représentation des poids  $\sqrt{v_x}P$  (en haut) et  $\sqrt{v_y}P$  (en bas) pour la densité pour le cas test 5 (à gauche) et le cas test 6 (à droite). Il représente le coefficient de réduction de taille prescrite par la pondération sur la taille donnée par l'erreur d'interpolation sur le flux de la densité.

### Demi-scramjet

Dans cet exemple, on illustre les capacités de l'état adjoint à prédire automatiquement les zones de l'écoulement qui influent l'évaluation de la fonctionnelle d'observation. On considère un écoulement interne sur la géométrie du scramjet à un nombre de Mach de 3. On observe la densité sur la moitié inférieure de la sortie de la géométrie comme illustré sur la Figure 4.15. La fonctionnelle d'observation est donnée par :

$$J(\gamma, W) = \int_{\gamma} \left( \frac{\rho - \rho_{\infty}}{\rho_{\infty}} \right)^2 d\gamma$$

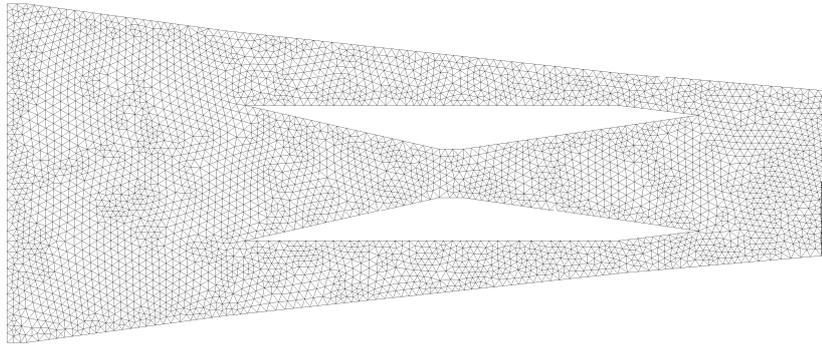
Cette fonctionnelle est très intéressante car les extrémités de chaque partie centrale de la géométrie (*i.e.*, les pointes juste avant la sortie) émettent chacune une discontinuité de contact très difficile à capter. Pour illustrer cette difficulté, on remarque qu'elles ne sont pas (à peine) visibles sur le résultat obtenu (densité) sur le maillage uniforme comportant 150 000 sommets présenté au Chapitre 3, cf. Figure 3.16. Il est à noter, qu'elles n'ont pas été captées avec l'adaptation multi-échelles du Chapitre 3, cf. Figure 3.25. En effet, une discontinuité de contact est visible sur la densité ou le nombre de Mach mais elle ne l'est pas sur la pression. Or, l'adaptation a été réalisée sur la pression.

On a réalisé un total de 20 adaptations découpé en 5 étapes de complexités croissantes :

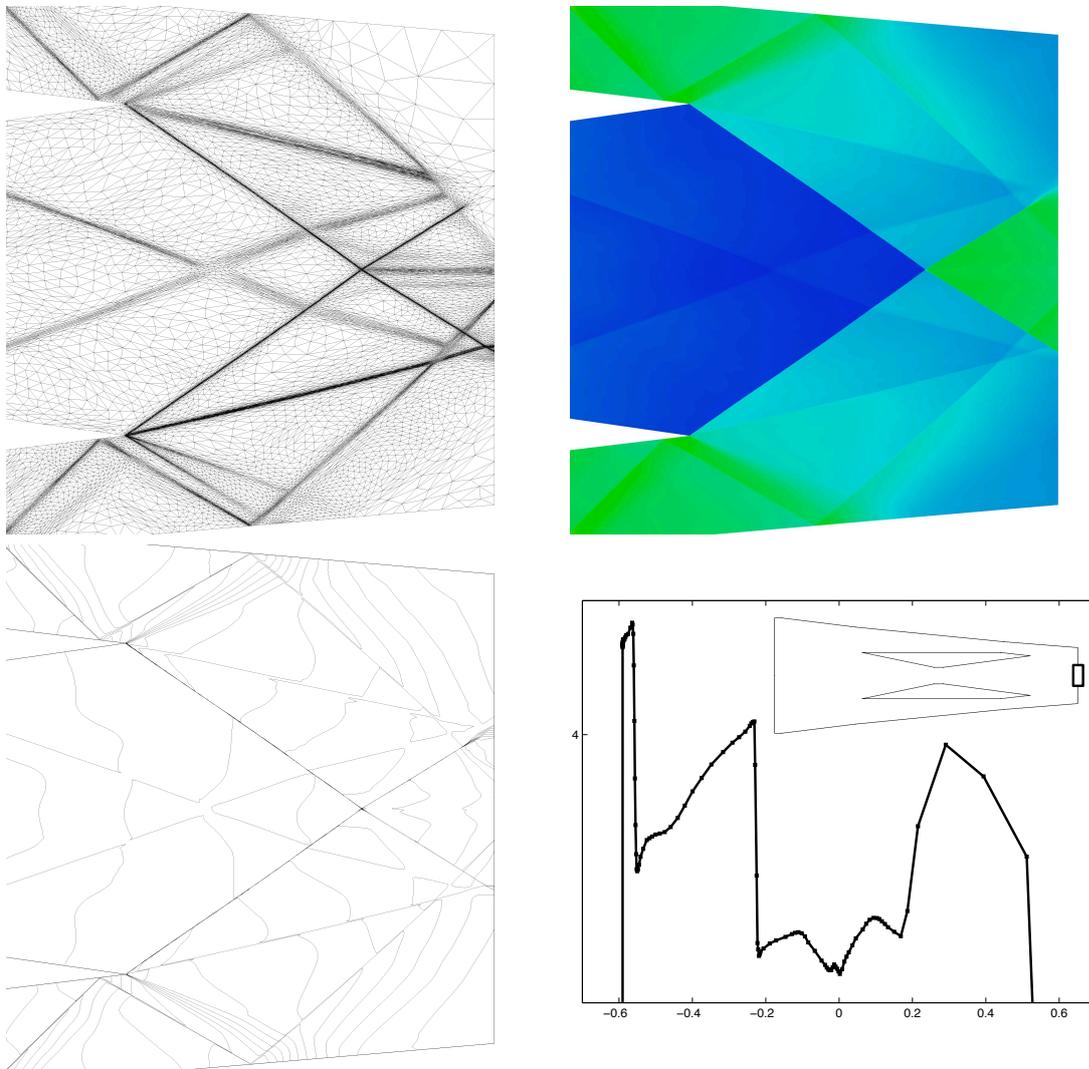
$$[1\ 000, 2\ 000, 4\ 000, 8\ 000, 16\ 000].$$

À chaque étape, 4 sous-itérations sont effectuées pour converger le maillage et la solution à complexité fixée. La Figure 4.17 montre le maillage final adapté composé de 31 337 sommets et 61 630 triangles, et les iso-valeurs et les iso-lignes de densité correspondantes. La Figure 4.16 est un gros plan sur l'extrémité finale du scramjet où se situe la zone d'observation. On constate que les régions qui n'influencent pas ou qui influencent peu l'écoulement sont maillées plus grossièrement, comme les ondes de choc dans la région supérieure du scramjet comparées à celles de la région inférieure, cf. Figure 4.17. Cela est encore mis en évidence sur la discontinuité de contact émise par la pointe supérieure juste avant la sortie du scramjet qui est peu raffinée alors que celle de la partie inférieure qui impacte directement la zone d'observation est maillée très finement, cf. Figure 4.16. L'influence sur le calcul de la solution, et plus particulièrement sur la densité, est illustrée sur la Figure 4.16, en bas à droite, en regardant le profil de densité à la sortie du scramjet. Le profil de densité est précisément capturé sur la partie inférieure alors que la résolution est très grossière sur la partie supérieure.

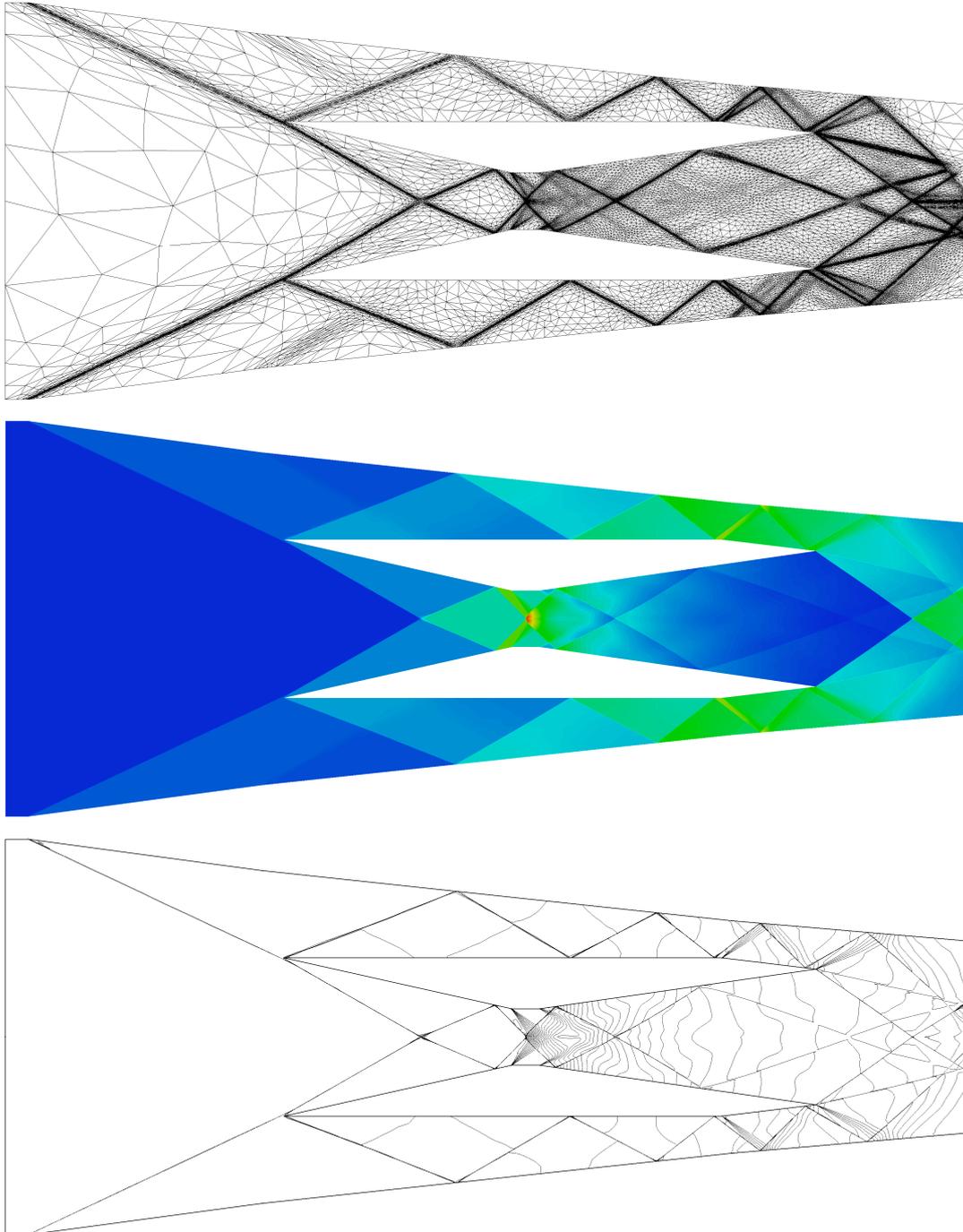
Les Figures 4.18 et 4.19 montrent l'évolution du maillage et de la solution au cours du processus adaptatif, après la convergence de chaque étape à complexité fixée. On voit clairement que le processus adaptatif ciblé évolue au fur et à mesure que l'information qu'il reçoit s'améliore. En effet, initialement (pour les étapes 1, 2 et 3) le senseur considère que c'est la partie supérieure du scramjet qui impacte le plus la fonctionnelle. En effet, le choc issue de la pointe supérieure est alors la contribution principale de l'erreur dans la zone d'observation. Sa précision dépend fortement des ondes de choc de la partie supérieure, elles sont donc adaptées. Puis, on capture lors de l'étape 3 la discontinuité de contact émise par la pointe inférieure. Alors que, lors de l'étape 4 (maillage du bas sur la Figure 4.18), le maillage est similairement adapté dans les régions supérieure et inférieure. Finalement lors de la dernière étape, pour encore améliorer la précision sur la fonctionnelle c'est la région inférieure du scramjet qui est la plus raffinée, cf. Figure 4.17.



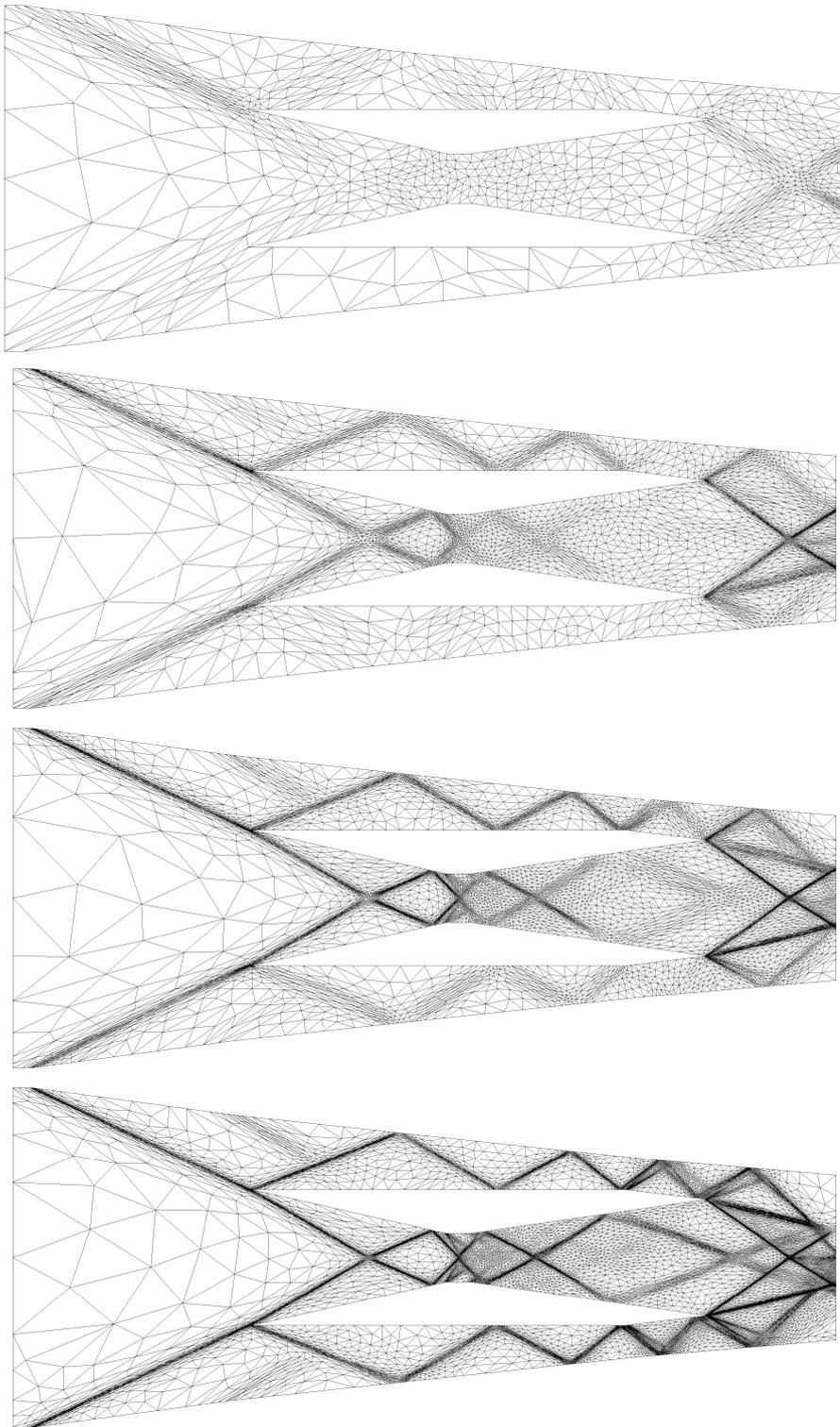
**Figure 4.15:** Maillage initial du scramjet et zone d'observation de la densité représentée par le rectangle grisé.



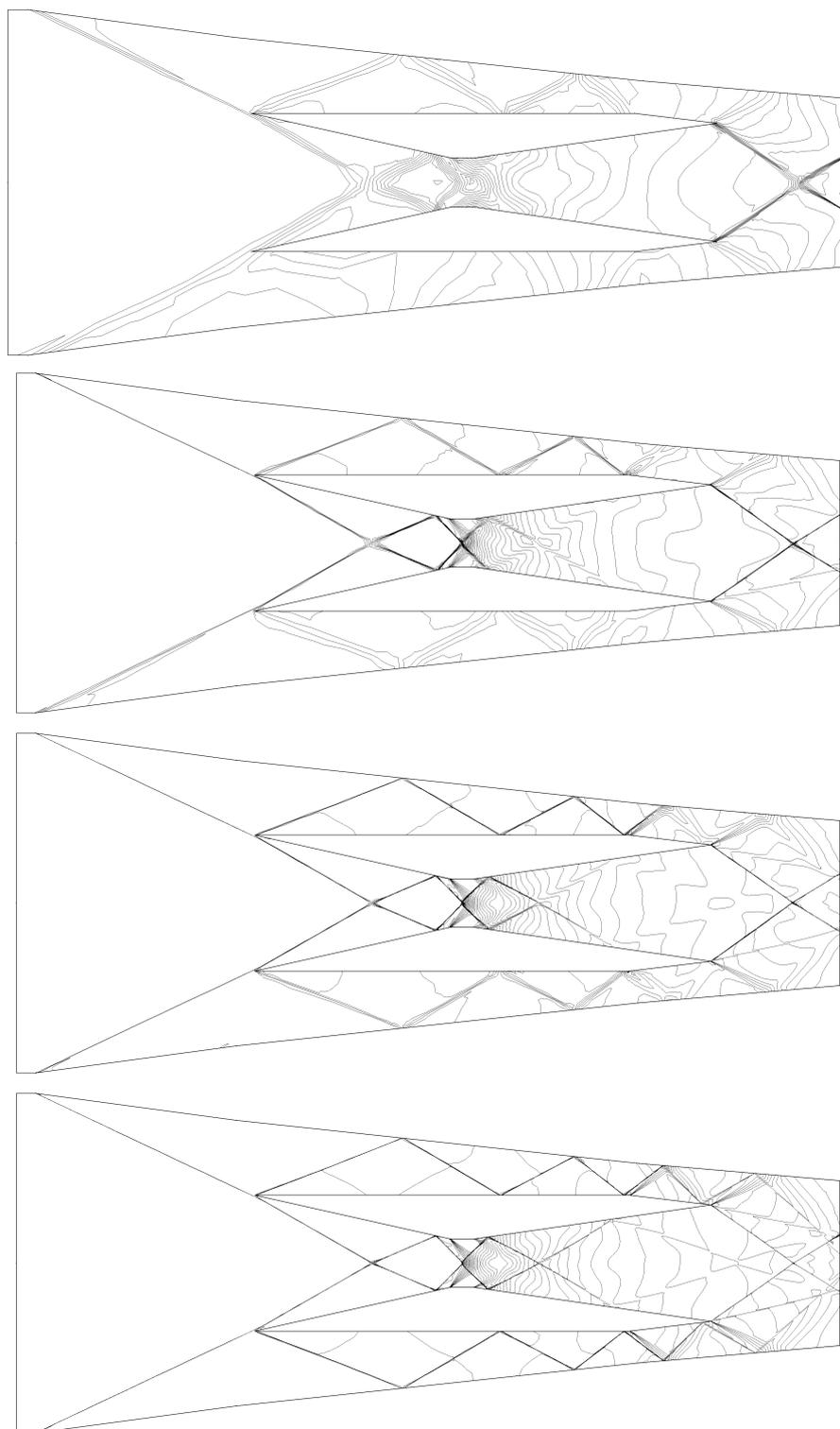
**Figure 4.16:** Zoom sur le maillage final adapté et représentation de la densité à la sortie du scramjet. En bas à droite, profil de la densité sur la région centrale de la sortie du scramjet. Les points du profil correspondent aux sommets du maillage 2D.



**Figure 4.17:** Maillage final adapté et représentation des iso-valeurs et iso-lignes de densité. On remarque les différences de précision dans le maillage et dans la solution entre les régions qui influent sur la zone d'observation et celles qui n'influent pas, alors que la solution réelle est symétrique.



**Figure 4.18:** Maillages finaux pour les quatre premières étapes du calcul adaptatif, *i.e.*, pour des complexités de 1 000, 2 000, 4 000 et 8 000 de haut en bas.



**Figure 4.19:** Iso-lignes de densités finales pour les quatre premières étapes du calcul adaptatif, *i.e.*, pour des complexités de 1000, 2000, 4000 et 8000 de haut en bas.

### 4.5.3 Prédiction optimale d'une signature de pression émise par un avion

On simule un écoulement supersonique autour d'un jet privé d'affaire, le SSBJ de Dassault Aviation. Cette géométrie a déjà été utilisée dans le Chapitre 3. Les conditions de l'écoulement sont un nombre de Mach de 1.6 et un angle d'attaque de 3 degrés. L'objectif est de calculer avec précision la signature de pression sur un plan à une distance de 100 mètres sous l'avion. On cherche à montrer la capacité de l'adaptation basée sur l'adjoint à capturer de manière optimale toutes les régions de l'écoulement, et seulement celle-là, qui impacte la fonctionnelle objectif. Pour l'illustrer, on considère un plan d'observation dont la largeur sera seulement de 2m alors que l'envergure de l'avion est de 17m. La fonctionnelle cible sur le plan d'observation  $\gamma$  est donnée par :

$$J(\gamma, W) = \int_{\gamma} \left( \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \right)^2 d\gamma,$$

avec

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 100 \leq x \leq 140, -1 \leq y \leq 1, z = -100\}.$$

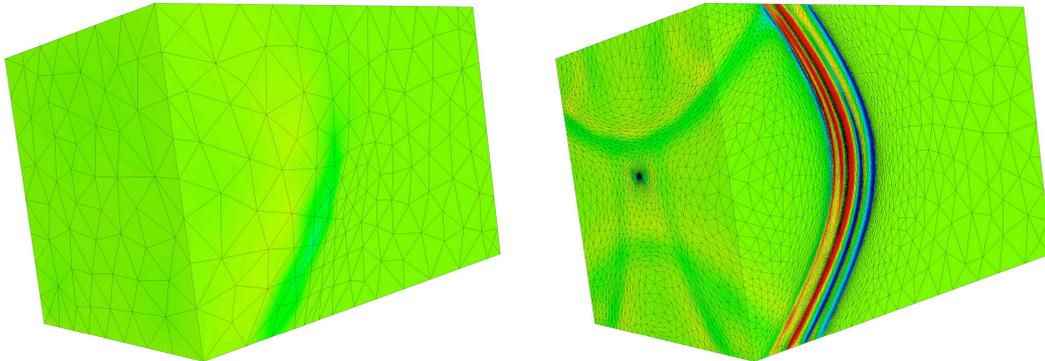
La zone d'observation  $\gamma$  ainsi que sa position par rapport à l'avion sont représentées sur la Figure 4.20.

Pour mettre en évidence, comme précédemment dans le cas du scramjet, l'optimalité du maillage en terme de nombre de sommets en n'adaptant que les régions nécessaires à l'observation de la fonctionnelle, on compare la précision obtenue sur la fonctionnelle par l'adaptation ciblée avec une adaptation multi-échelles basée sur le hessien du nombre de Mach en norme  $\mathbf{L}^2$ . On adapte sur le nombre de Mach car il regroupe la vitesse  $\mathbf{u}$ , la pression et la densité :  $M = \sqrt{\frac{\rho \|\mathbf{u}\|_2^2}{\gamma p}}$  et est donc très représentatif de l'écoulement.

Pour la résolution, on utilise le solveur de HLLC et le schéma V4 couplé au limiteur de



**Figure 4.20:** Représentation du plan d'observation  $\gamma$  et position relative par rapport au SSBJ.



**Figure 4.21:** Maillage de surfaces adaptés du domaine de calcul, cas adjoint à gauche et hessien à droite.

Dervieux. L'intégration en temps est effectuée par un schéma SSPRK d'ordre deux. La boucle adaptative est composée de 30 adaptations dans chaque cas. Elle est découpée en 5 étapes de complexité croissante [10 000, 20 000, 40 000, 80 000, 160 000], dans lesquelles on réalise 6 sous-itérations. Les deux maillages finaux comportent environ 800 000 sommets. Les maillages finaux pour chaque stratégie d'adaptation sont représentés Figure 4.23.

Dans le cas d'un écoulement supersonique, chaque irrégularité géométrique de l'avion émet une onde de choc qui a la forme d'un cône. Une multitude d'ondes de choc est donc émise, elles se propagent et focalisent tout autour de l'avion. Les Figures 4.23, 4.24 et 4.26, présentent respectivement les maillages, les iso-valeurs du nombre de Mach et les iso-surfaces de nombre de Mach obtenus à la dernière itération pour chaque méthode d'adaptation. Les résultats pour l'adaptation basée sur l'adjoint sont présentés à gauche sur les figures et ceux de l'adaptation multi-échelles à droite.

Pour l'adaptation basée sur l'adjoint, le maillage a été adapté au niveau de toutes les ondes de choc qui focalisent sur le plan d'observation. Cela illustre notamment que les ailes impactent le plan d'observation, cf. Figure 4.23 au milieu. Contrairement à l'adaptation multi-échelles qui a adapté le maillage dans tous le domaine de calcul, on constate que les régions n'influençant pas la fonctionnelle ne se sont pas raffinées avec cette nouvelle approche. On peut citer :

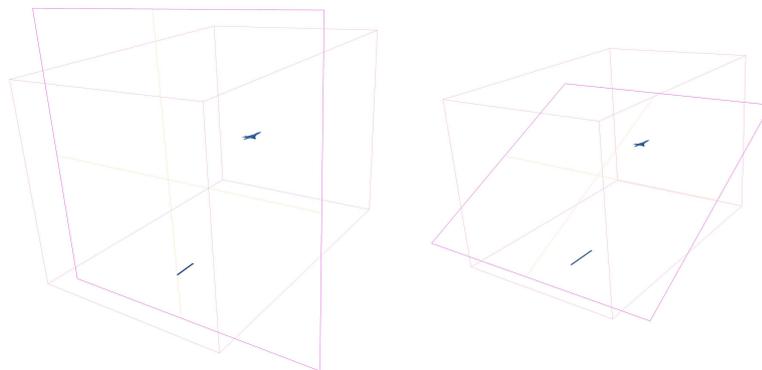
- la région au dessus de l'avion,
- le sillage de l'avion, voir en particulier les iso-valeurs du cône du nombre de Mach sur la Figure 4.26 (milieu),
- juste derrière l'avion les chocs sont raffinés en dessous pour un angle de plus de 180 degrés suivant l'axe  $x$ , cf. Figures 4.23 et 4.24 (au milieu), puis cet angle diminue loin derrière l'avion, cf. Figures 4.23 et 4.24 (en bas),
- ou encore, on remarque que dans le cas d'une adaptation avec hessien, Figure 4.22 à droite, les ondes de choc sont capturées dans tout le domaine comme en témoigne le maillage de surface. À l'inverse, la méthode avec adjoint est insensible à ces ondes de

choc qui n'influent pas sur la fonctionnelle laissant un maillage grossier partout sur la frontière, Figure 4.22 à gauche, sauf sur la zone d'observation qui est représentée sur la Figure 4.25 en bas à droite.

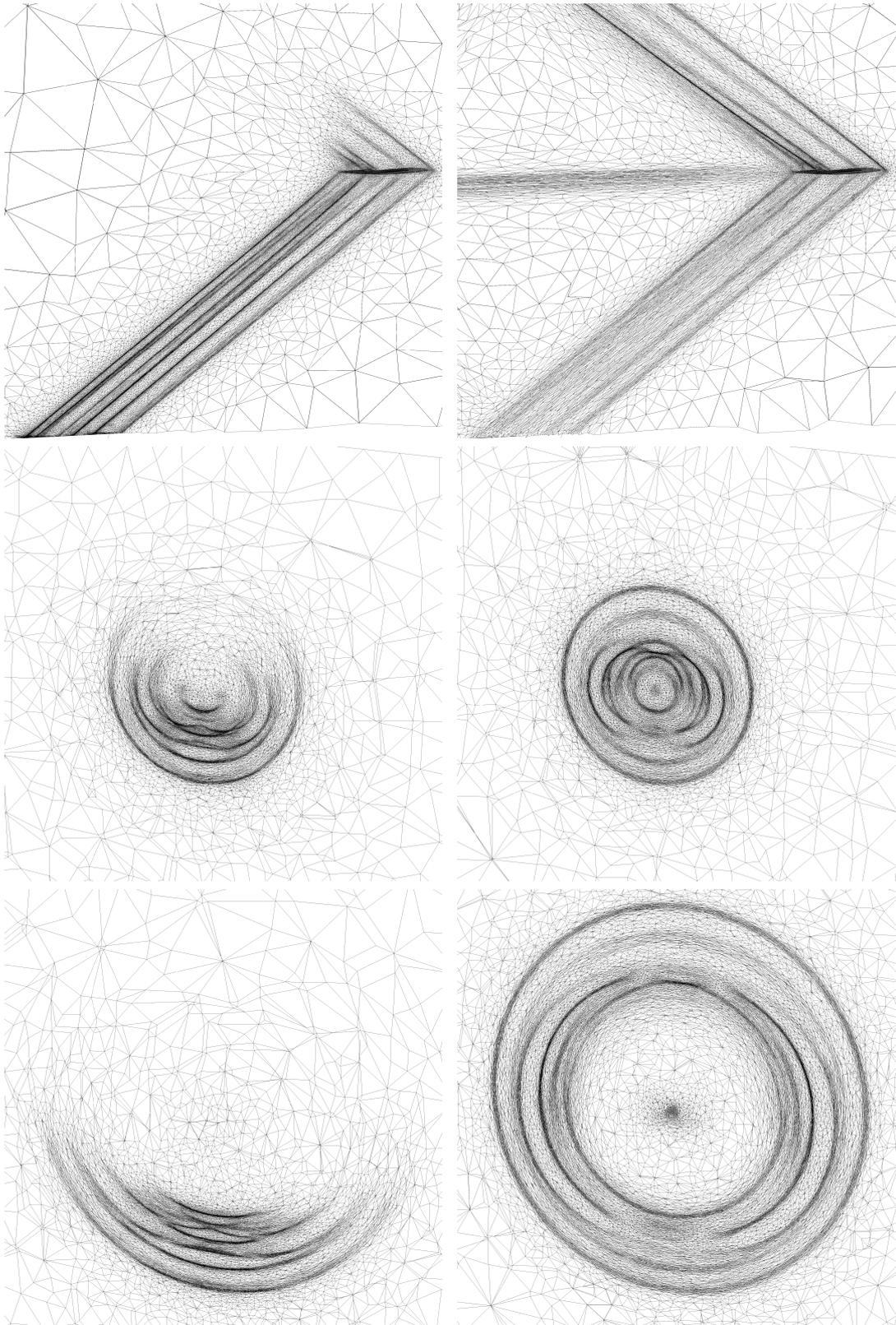
De plus, l'adaptation en norme  $L^2$  tend à prescrire une taille de maille qui dépend de l'intensité des ondes de choc. Un choc plus fort sera maillé avec plus de précision. Dans cette simulation, on remarque que les chocs situés directement sous l'avion sont de plus faible intensité que ceux émis latéralement par la voilure, Figure 4.23 en bas à droite. Par conséquent, l'adaptation multi-échelles donne moins de crédit aux chocs qui impactent directement la zone d'observation. A contrario, les chocs sous l'avion ne sont pas uniformément raffinés avec l'approche par adjoint. On remarque que les chocs sous l'avion qui influent le plus la région d'intérêt sont plus précisément maillés, le tout en déraffinant progressivement le maillage latéralement.

En conclusion, même si la solution en adaptation multi-échelles semblent plus «jolie» car bien calculée partout (Figure 4.26, en haut), un grand nombre de degrés de liberté n'est pas utilisé à bon escient ou même est inutile pour le calcul de la fonctionnelle sur la zone d'observation. Ceci impacte grandement la précision obtenue à même complexité, comme on peut le voir sur la Figure 4.25 (bas, gauche) où la fonctionnelle sur  $\gamma$  est représentée. Tout cela démontre bien l'optimalité de l'adaptation avec adjoint tant sur les régions qu'il a choisi d'adapter que sur la précision qu'il impose pour la capture des phénomènes physiques.

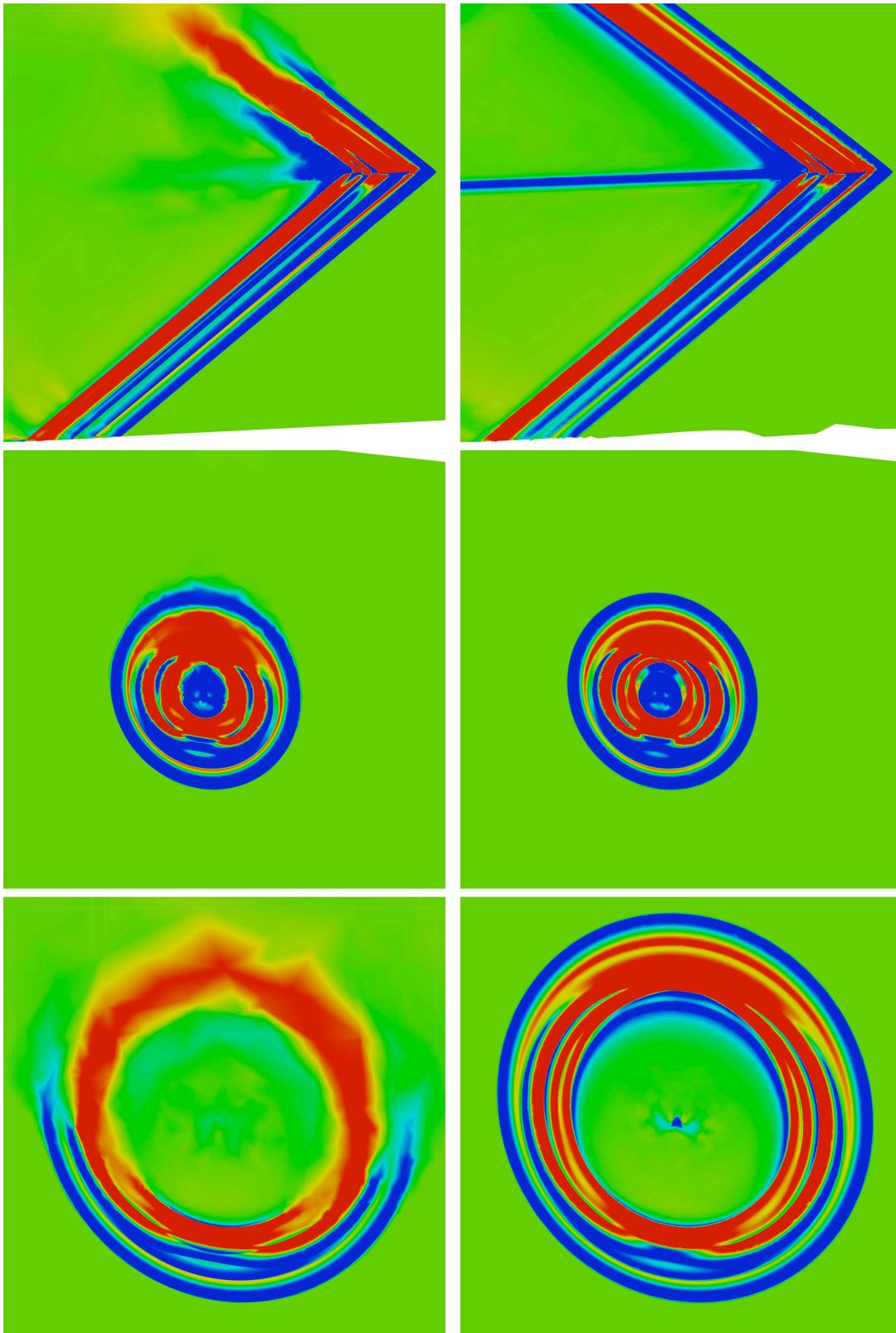
Il est essentiel de rappeler que cette méthode est complètement automatique et fournit l'optimal, alors qu'il nous semble difficile, si ce n'est impossible, d'établir une stratégie d'adaptation manuelle pour évaluer avec précision la fonctionnelle tout en réduisant le nombre de degrés de liberté. En effet, on pourrait considérer une première approche qui consiste à améliorer l'adaptation multi-échelles en l'appliquant seulement sur le demi-domaine sous l'avion. Cependant, le maillage ne serait toujours pas optimal car des régions non nécessaires seraient adaptées. Une deuxième approche manuelle serait d'adapter le maillage seulement entre l'avion et la zone d'observation. Dans ce cas, les effets latéraux influençant la fonctionnelle seraient oubliés, cf. Figure 4.25 en haut à gauche. Pour terminer, il est important de noter que dans les deux cas, si on considère un contrôle de l'erreur d'interpolation basé sur le hessien pour la prescription de taille, alors on est encore une fois non optimal dans le poids que l'on donne aux phénomènes physiques.



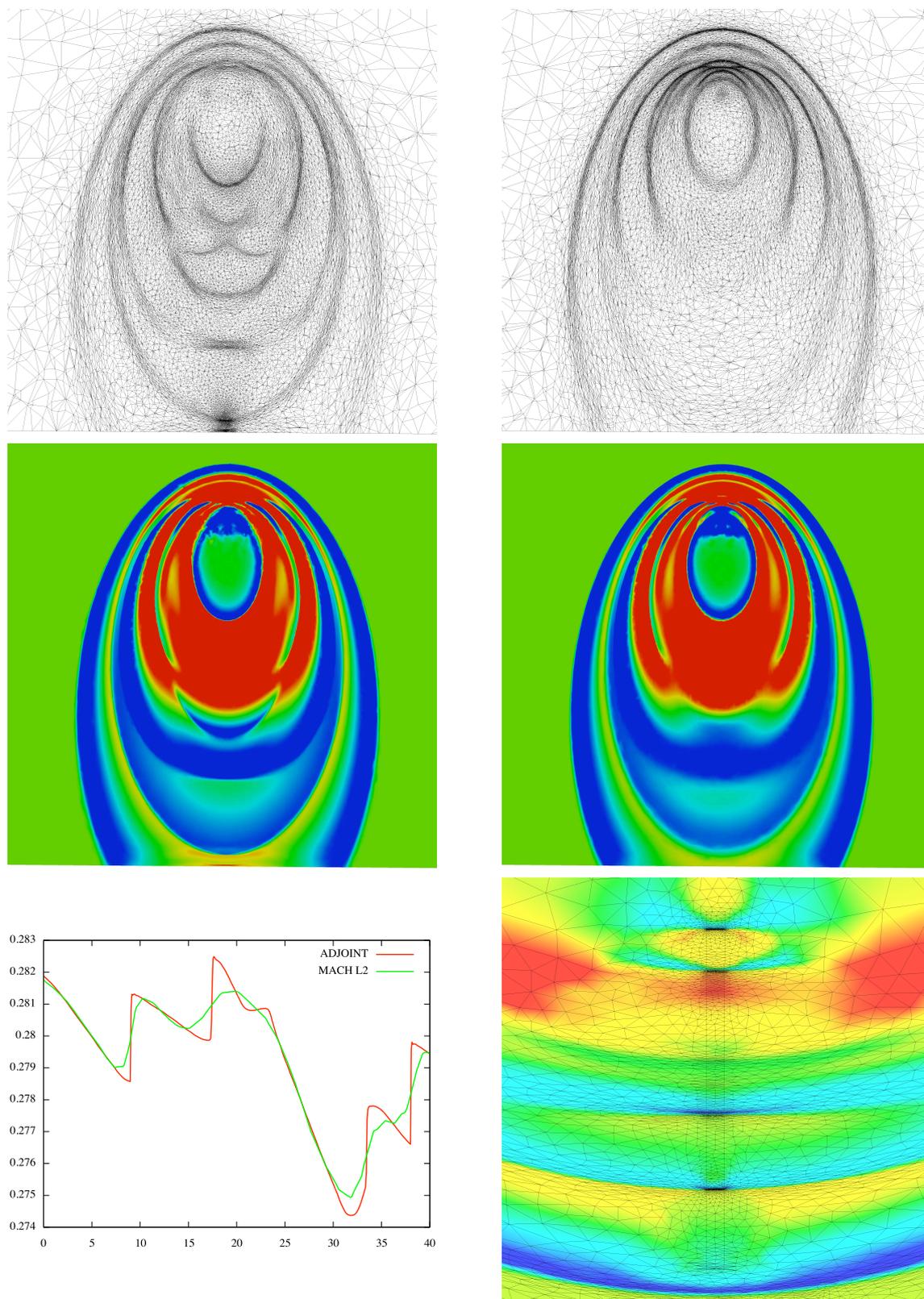
**Figure 4.22:** Représentations des plans de coupe à une translation près suivant l'axe  $x$  utilisé.



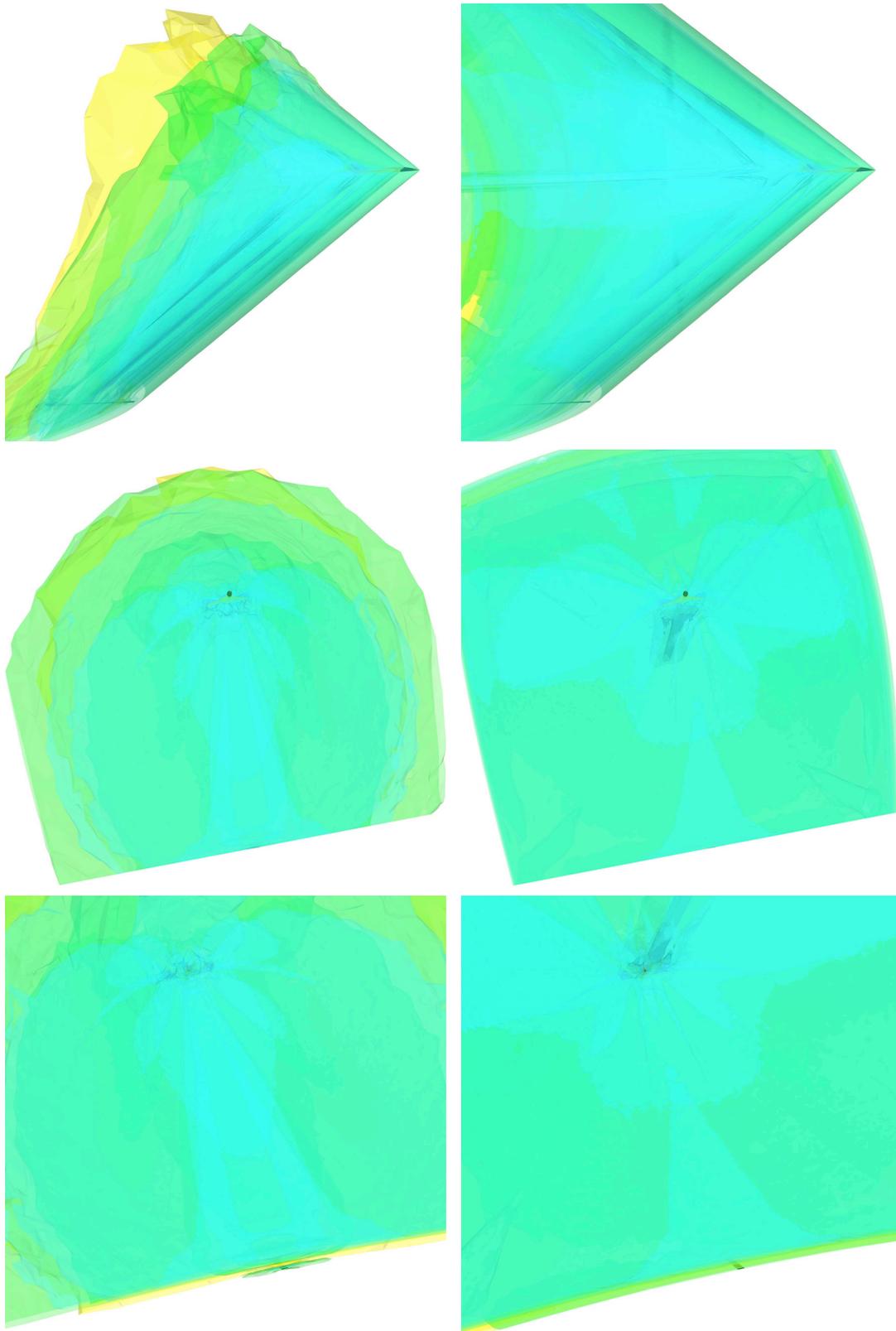
**Figure 4.23:** Coupes des maillages volumiques adaptés, cas adjoint à gauche et hessien à droite. Les plans de coupe (milieu et bas) sont donnés par la Figure 4.22 à gauche.



**Figure 4.24:** Iso-valeurs du nombre de Mach dans les plans de coupes de la Figure 4.23, cas adjoint à gauche et hessien à droite.



**Figure 4.25:** Coupes volumiques des maillages adaptés (haut) et nombre de Mach sur ces plans (milieu), pour les cas adjoint à gauche et hessian à droite. Le plan de coupe est donné par la Figure 4.22 à droite. En bas à gauche, coupe 1D suivant l'axe  $x$  dans le plan d'observation. En bas à droite, zoom sur le maillage de surface sur la zone d'observation.



**Figure 4.26:** Iso-surfaces du nombre de Mach, cas adjoint à gauche et hessien à droite. On distingue plusieurs iso-surfaces en forme de dipôles dans le cas adjoint (milieu et bas) qui ne sont pas captés dans le cas hessien. Dans le cas hessien, les tourbillons des bouts d'ailes sont capturées, alors que dans le cas adjoint, ils sont ignorés.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons introduit une stratégie reposant sur une analyse *a priori* pour décrire un maillage optimal dans le cas d'une EDP et d'une fonction objectif. Cette analyse a été appliquée au schéma numérique volumes finis utilisé pour les calculs présentés dans cette thèse. Son application est relativement aisée dès lors que l'état adjoint est disponible. Les résultats sont fortement différents des calculs en erreur d'interpolation pure du Chapitre 3. La précision sur la fonctionnelle est bien supérieure même si le maillage est très grossier dans une grande partie du domaine.

Si on compare avec les autres méthodes contrôlant l'erreur d'approximation, une des spécificités de cette méthode est de reposer sur une analyse *a priori*. Dans l'étude menée dans ce chapitre, on peut identifier certaines différences entre les deux approches. D'une part, les estimations *a posteriori* sont aptes à prendre en compte l'erreur d'approximation **dans sa totalité**. Elles permettent à partir d'une solution initiale de proposer un **meilleur** maillage en le raffinant. D'autre part, l'analyse *a priori*, telle que celle proposée ici, prend en compte la **partie principale** de l'erreur mais propose un algorithme pour définir un maillage **optimal** vis-à-vis de ce terme. Même si cette méthode est conçue pour des solutions régulières, le comportement asymptotique lorsqu'elle est appliquée à des solutions peu régulières est cohérent. Le bonus de cette approche, par rapport aux autres méthodes de la littérature, réside dans le traitement intrinsèque de l'anisotropie qui se traduit par la grande qualité de la propagation spatiale des chocs.

La combinaison des Chapitres 3 et 4 permet une flexibilité à l'utilisateur pour obtenir une solution sur un maillage optimal. Il est évident que si l'objectif est d'obtenir la meilleure évaluation sur une fonctionnelle alors la méthode de ce chapitre est la plus appropriée. Toutefois, elle ne remplace pas complètement l'approche plus classique du Chapitre 3 si l'on désire contrôler globalement la précision de la solution.

Enfin, on donne quelques précisions sur les possibilités d'extension de cette approche. Dans le cas elliptique linéaire [4], cette approche ne s'applique pas directement car  $\Psi - \Psi_h = 0$ , il est alors nécessaire d'étudier les termes d'ordre deux, *i.e.*, les  $R_i$  et  $D_k$ . Cependant, dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles, les flux visqueux ne sont pas linéaires par rapport aux variables conservées. On peut donc s'attendre à ce que les termes de l'erreur principale comportent des contributions d'erreurs d'interpolation sur les flux d'Euler et d'erreurs d'interpolation sur les flux visqueux. La vérification de cette hypothèse permettrait d'étendre à ce contexte notre méthode.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Apel. *Anisotropic finite elements : Local estimates and applications*. Book Series : Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Stuttgart, 1999.
- [2] I. Babuška and T. Strouboulis. *The Finite Element Method and its reliability*. Oxford Scientific Publications, New York, 2001.
- [3] R. Becker and R. Rannacher. A feed-back approach to error control in finite element methods : basic analysis and examples. *East-West J. Numer. Math.*, 4 :237–264, 1996.
- [4] F. Courty. *Optimisation différentiable en mécanique des fluides numérique*. PhD thesis, Université Paris XI, Orsay, Paris, France, 2003.
- [5] L. Formaggia, S. Micheletti, and S. Perotto. Anisotropic mesh adaptation in computational fluid dynamics : Application to the advection-diffusion-reaction and the Stokes problems. *Appl. Numer. Math.*, 51 :511–533, 2004.
- [6] L. Formaggia and S. Perotto. New anisotropic a priori error estimate. *Numer. Math.*, 89 :641–667, 2001.

- [7] P. J. Frey. *Yams*, a fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure. RT-0252, INRIA, 2001.
- [8] P.-L. George. *Gamhic3d*, a fully automatic adaptive mesh generation method in three dimensions. Technical Note, INRIA, 2001.
- [9] M. B. Giles. On adjoint equations for error analysis and optimal grid adaptation in CFD. Technical Report NA-97/11, Oxford, 1997.
- [10] M. B. Giles and N. Pierce. Improved lift and drag estimates using adjoint euler equations. *AIAA Paper*, 99-3293, 1999.
- [11] M. B. Giles and A. Suli. Adjoint methods for PDEs : a posteriori error analysis and postprocessing by duality. *Acta Numerica*, pages 145–236, 2002.
- [12] A. Griewank. On Automatic Differentiation. In M. Iri and K. Tanabe, editors, *Mathematical Programming : Recent Developments and Applications*, pages 83–108. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [13] L. Hascoët and V. Pascual. TAPENADE 2.1 user's guide. Rapport technique 300, NRIA, Sophia Antipolis, 2004.
- [14] R. Löhner. *Applied CFD techniques*. Wiley, New-York, 2001.
- [15] K. Mer. Variational analysis of a mixed element/volume scheme with fourth-order viscosity on general triangulations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 153 :45–62, 1998.
- [16] M. Picasso. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : Application to elliptic and parabolic problems. *SIAM J. Sci. Comp.*, 24(4) :1328–1355, 2003.
- [17] N. A. Pierce and M. B. Giles. Adjoint recovery of superconvergent functionals from PDE approximations. *SIAM Review*, 42(2) :247–264, 2000.
- [18] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
- [19] D. A. Venditti and D. L. Darmofal. Grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensional inviscid flows. *J. Comp. Phys.*, 176(1) :40–69, 2002.
- [20] D. A. Venditti and D. L. Darmofal. Anisotropic grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensional viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 187(1) :22–46, 2003.
- [21] R. Verfürth. *A review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement techniques*. Wiley Teubner Mathematics, New York, 1996.

# 5

---

## *Modélisation et prédiction haute-fidélité du bang sonique*

### INTRODUCTION

Le bang sonique est un phénomène acoustique créé quand un objet se déplace à une allure supérieure à la vitesse du son locale. Dans le cas d'un avion, les ondes de pression qui s'accumulent autour de l'avion en régime transsonique ne se déplacent plus suffisamment vite quand l'avion vole en régime supersonique. Les ondes de pression sont de plus en plus comprimées. Lorsque l'avion passe le mur du son, une onde de choc est créée, les ondes de pression ne s'écoulent plus autour mais au derrière de l'avion, cf. Figure 5.1 à gauche, les nombreuses discontinuités en se propageant vers le sol se focalise en un petit nombre d'ondes de choc de fortes intensités créant le fameux bang sonique.



**Figure 5.1:** À gauche avion de combat (F18) «passant le mur du son» et à droite, le concorde, avion civil supersonique.

Il est à noter que ce bang est entendu sous la trajectoire de l'avion durant toute la phase de vol supersonique. Cette onde de choc est actuellement la principale limite dans la conception d'un avion supersonique. En l'état, la contrainte environnementale empêche de répondre au besoin économique. En effet, le bang sonique, outre les dégâts matériels dus aux vibrations, aurait un effet très perturbant sur la population si elle était soumise régulièrement à ce bruit. Les effets nuisibles du bang sur la santé sont : le manque de sommeil, l'hypertension, le risque

d'infarctus ou de troubles psychologiques, ... Ces effets ont conduit à l'interdiction stricte du vol supersonique pour des avions civils au dessus des terres. Par exemple, le Concorde, cf. Figure 5.1 à droite, en service de 1963 à 2003, était seulement autorisé à voler en régime supersonique au dessus de l'océan pour réduire la gêne sur la population. Autre exemple, en 2005, l'armée israélienne a été forcée de s'excuser pour des bangs générés au dessus des habitations<sup>1</sup>. La cible à atteindre pour espérer pouvoir effectuer des vols supersoniques au dessus des terres est estimée à 15 Pa et 65 dBA. Aujourd'hui, de nombreux industriels et laboratoires travaillent sur cette problématique, car il y a actuellement un réel marché pour un avion d'affaire supersonique. La principale motivation est la réduction du temps de parcours. Par exemple, sur le trajet New York-Los Angeles, on pourrait observer les temps de parcours suivant le nombre de Mach :

$$\begin{array}{llll} \text{Mach} = 0.85 & \approx & 900 \text{ km.h}^{-1} & \implies & 5 \text{ h} \\ \text{Mach} = 0.98 & \approx & 1035 \text{ km.h}^{-1} & \implies & 4 \text{ h } 20 \text{ min} \\ \text{Mach} = 1.8 & \approx & 1900 \text{ km.h}^{-1} & \implies & 2 \text{ h } 15 \text{ min} \end{array}$$

Réduire le bang sonique représente donc un enjeu économique. Cependant, il n'existe pas actuellement de forme conventionnelle qui permette de le réduire.

## UN CHALLENGE NUMÉRIQUE

La création de prototypes grandeur nature pour l'étude du bang sonique coûte très cher. De plus, la mesure expérimentale du bang est tout aussi chère et compliquée. Le recours à la simulation numérique semble inévitable. La conception numérique d'un avion faible bang, *low boom* en Anglais, est donc un challenge. En effet, la simulation numérique du bang sonique est très complexe principalement à cause des échelles du phénomène : de l'ordre du millimètre sur l'avion à plusieurs kilomètres pour la propagation des ondes de choc jusqu'au sol. C'est donc un phénomène naturellement multi-échelles.

Contrairement à l'approche expérimentale seule, l'approche numérique présente l'avantage de pouvoir tester un grand nombre de formes. Les résultats sont ensuite corrélés par des tests en soufflerie. Les formes sont généralement issues des méthodes d'optimisation [7, 1] qui, à partir d'une forme initiale, convergent vers une forme *low boom*. Cependant, dans les méthodes d'optimisation, l'évaluation de la fonctionnelle coût (et de ses dérivées) est souvent un ingrédient fondamental. Une prédiction fiable de la fonctionnelle est donc primordiale avant toute phase d'optimisation. On propose dans ce chapitre l'étude de la prédiction du bang sonique.

## PLAN DU CHAPITRE

On rappelle dans une première partie le phénomène physique.

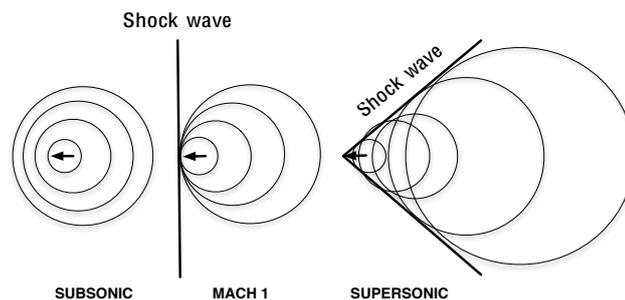
Dans un deuxième temps, on décrit la modélisation du bang sonique que l'on propose. Elle repose sur le couplage entre le calcul du champ proche, réalisé par un calcul CFD par une méthode adaptative, avec la propagation du signal acoustique. Le calcul du champ proche est validé par comparaison à des expérimentations.

Enfin, on propose une étude de trois géométries issues du projet européen HISAC. Les bangs soniques de ces trois avions sont comparés. On analyse les problématiques liées à une capture précise des bangs quand la géométrie devient complexe.

1. Palestinians hit by sonic boom air raids. The Guardian, 2005

## 5.1 LE PHÉNOMÈNE PHYSIQUE DU BANG SONIQUE

Le bang sonique est un phénomène acoustique associé aux objets se déplaçant dans l'atmosphère à une vitesse supérieure à la vitesse du son. Ce phénomène a lieu tout au long du vol supersonique et pas seulement lorsque l'avion passe le mur du son. Plus précisément, un avion, lorsqu'il est en vol, comprime l'air tout autour de lui créant des surpressions et des dépressions acoustiques, cf. Figure 5.2 à gauche. Lorsque l'avion se déplace à une vitesse supersonique, les ondes acoustiques qu'il émet focalisent à l'intérieur d'une région conique formant des ondes de choc. Cette région est connue sous le nom de cône de Mach, cf. Figure 5.2 à droite. Elle représente une surface de discontinuité pour la majorité des variables thermo-dynamiques : pression, densité, vitesse, entropie, ... Le son émis par l'appareil est inclus dans ce cône. Ce cône a pour sommet le nez de l'avion et pour demi-angle  $\alpha$  tel que  $\sin(\alpha) = c/a = M^{-1}$  où  $c$ ,  $a$  et  $M$  sont la vitesse du son, la vitesse de l'avion et le nombre de Mach, respectivement. Chaque partie de la géométrie de l'avion émet son propre cône de Mach (nez, ailes, ...). Toutefois, ces ondes de choc se propagent dans l'atmosphère à différentes vitesses car une surpression augmente la température de l'air et ainsi augmente la vitesse du son. Pour un avion, ces ondes de choc se propagent sur d'assez grandes distances dans l'atmosphère (plus de 10 kms) pour focaliser en une onde ayant la forme caractéristique d'un N. Pour cette raison, seul un «boom-boom» est entendu sur le sol à cause de la brusque augmentation de la pression de l'air ambiant, *i.e.*, les deux ondes de choc de la forme de N du signal acoustique.



**Figure 5.2:** Signal acoustique dû à un objet mobile dans l'air. Lorsque l'objet dépasse la vitesse du son, les ondes acoustiques focalisent créant des ondes de choc. Elles forment un cône : le cône de Mach.

Néanmoins, la présentation précédente est une description simplifiée du bang sonique. La région au sol exposée au bang sonique s'étend horizontalement de chaque côté du parcours de l'avion, sur une bande de 10 à 100 kms (en fonction des conditions de vol), voir Figure 5.3. C'est le couloir où le bang sonique est entendu, on l'appelle carpettes primaires. La largeur de la carquette augmente avec l'altitude de vol. Pour des conditions atmosphériques normales, le gradient de température courbe les ondes acoustiques vers le haut délimitant la largeur de la carquette. En général, le signal acoustique dans cette carquette primaire présente 2 chocs, donnant la célèbre signature en forme de N, mais parfois plus. La forme des ailes et des autres surfaces portantes influence la signature du bang sonique. L'altitude de croisière est également un facteur. Plus on augmente l'altitude, plus les ondes de choc ont du temps pour focaliser en une onde en N. La vitesse de l'avion et les conditions atmosphériques sont également des facteurs. Notez que, en général, l'intensité maximale du bang sonique est atteinte dans la région directement sous le parcours de l'avion et son intensité baisse progressivement quand

on s'éloigne latéralement de sa trajectoire.

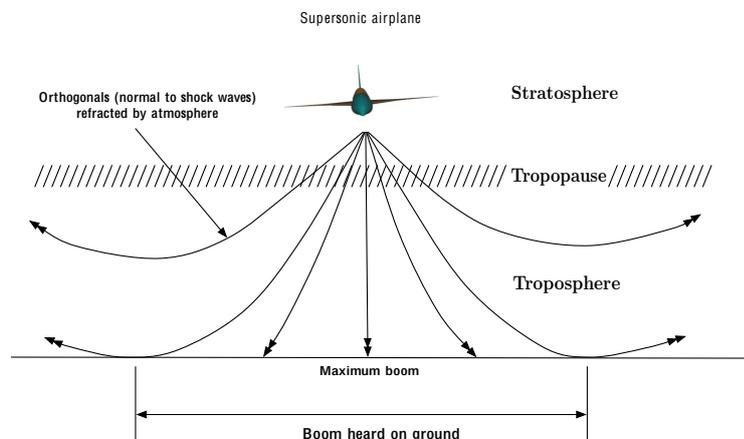
De plus, les manœuvres, telles qu'une accélération, un virage ou une descente, peuvent conduire à une amplification locale du bang sonique. La forme du signal est alors considérablement modifiée. La signature de pression au sol prend généralement la forme d'un U. Le bang sonique focalisé résultant a des chocs positifs à l'avant et à l'arrière de la signature. Les intensités sont plus élevées que dans la forme standard en N du bang. Le facteur d'amplification peut être de l'ordre de 10 mais reste très localisé. Au contraire, les manœuvres telles qu'une décélération ou une ascension peuvent réduire le bang sonique. Le tableau ci-dessous résume les types de bang sonique :

Onde	U	N	N lisse
Localisation	Focalisation	Carpette primaire	Carpette primaire latérale
Amplitude	300 Pa	10 – 100 Pa	< 10 Pa

Dans cette thèse, on ne simule que le bang sonique émis par des avions en vol de croisière.

Tout changement atmosphérique a une grande incidence sur le bang sonique. En particulier, le vent, la température et la turbulence avant le sol influent d'une part sur la position et la taille de la carpette primaire et d'autre part sur la forme et l'intensité du bang sonique. Par exemple, les ondes en N peuvent être transformées en ondes en U en raison de la turbulence atmosphérique dans la couche limite de la terre (< 1 km d'altitude). La durée du temps de montée (*rise time*) du bang est principalement affectée, ce qui a un fort impact sur la perception du boom au sol. Le temps de montée décrit le temps que la pression met pour atteindre le premier choc à partir de l'état au repos. Plus le temps de montée est grand, moins on perçoit le bang sonique.

**Régulation.** Le bang sonique des avions supersoniques a un impact majeur sur l'environnement. Cet impact est une gêne pour les populations à cause du bruit et de l'effet de surprise. Il peut également causer des dégâts sur les bâtiments à cause des vibrations pouvant aller jusqu'à l'endommagement des bâtiments dans le cas d'un de bang focalisé en forme de U. En conséquence, il existe une interdiction formelle de vol supersonique au dessus des terres dans la réglementation internationale actuelle. Pour espérer tout changement, le bang sonique



**Figure 5.3:** Illustrations du parcours des rayons acoustiques émis par l'avion. La région où ces rayons atteignent le sol est appelée carpette primaire.

doit être réduit mais l'accord des populations doit aussi être gagné. À l'heure actuelle, les recherches sont axées sur le développement d'une métrique permettant de juger si les bangs sont acceptables ou non.

*Réduire le bang sonique.* D'un autre côté, beaucoup de travail est effectué sur la réduction du bang sonique en modifiant la forme des avions. Tout d'abord, il a été démontré qu'une réduction significative de l'amplitude des chocs est obtenue en réduisant la taille, *i.e.*, le poids, des avions. En effet, si le poids d'un avion supersonique est réduit de 340,000 kg à environ 68,000 kg le premier choc du bang peut être réduit de 143 Pa à environ 76 Pa [9]. Par conséquent, la première étape est de se concentrer sur les avions d'affaire beaucoup plus petits que les avions de transport. Plusieurs entreprises dans le monde travaillent à proposer un avion supersonique avec une forme émettant un niveau de bang sonique faible. On peut citer Lockheed Martin, Gulfstream Aerospace, Aerion, Boeing, la JAXA et Dassault Aviation. Ils sont impliqués dans plusieurs programmes de recherche : Quiet Supersonic Platform (QSP) aux États-Unis, High Speed Aircraft (HISAC) en Europe et Silent Supersonic Technology Demonstration Program (S3TD) au Japon.

L'optimisation de forme pour les avions supersoniques étudie les coefficients aérodynamiques et le bang sonique. Elle aboutit à un problème compliqué et mal posé. Réduire la traînée et le bang sonique conduit généralement à des formes opposées. En effet, pour une vitesse supersonique, une forme à faible traînée est une forme qui génère un niveau élevé de bang car les ondes de choc sont attachées. De plus, il n'existe pas de forme classique pour réduire le bang. Cette problématique est illustrée par la grande variété des formes proposées dans tous les projets. Néanmoins, certains concepts naturels ont un impact majeur sur le bang sonique. Par exemple, placer les moteurs au dessus des ailes réduit le volume sonore du bang sonique au sol car une partie des ondes est propagée au dessus de l'avion. Une idée plus difficile à réaliser consiste à retarder la focalisation des ondes de choc en une onde en N. C'est-à-dire, l'objectif est de fractionner la première onde en plusieurs autres de plus petite intensité en s'assurant que ces dernières ne focalisent pas lors de la propagation jusqu'au sol. Cela crée intrinsèquement une augmentation du temps de montée (*rise time*) qui est bénéfique dans la perception humaine du bang sonique. Autre aspect, plus on monte en altitude, plus une onde de choc est atténuée lors de sa propagation dans l'atmosphère. En contrepartie, elle a aussi plus de chance de se transformer en une onde en N. De plus, un avion volant à plus haute altitude nécessite des ailes plus grandes et de plus gros moteurs. Un compromis est alors nécessaire entre la vitesse de l'avion, la taille de ses moteurs et d'autres paramètres de conception. Aujourd'hui, le nombre de Mach optimal semble être compris entre 1.6 et 1.8. A ces nombres de Mach, l'altitude optimale de croisière est de 15 240 à 16 764 mètres.

Deux nouvelles formes innovantes ont déjà été réalisées et testées aux États-Unis. Elles ont fait l'objet de mesures du bang sonique à mi-hauteur et au sol. Ces études ont montré qu'il est possible de réduire le bang sonique. Il s'agit du *Shaped Sonic Boom Demonstration* (SSBD), qui est une modification du corps du F5-E, cf. Figure 5.4 à gauche, et la «perche silencieuse» (*Quiet Spike*) de Gulfstream qui a été ajoutée sur le nez d'un F15B, cf. Figure 5.4 à droite. Le SSBD réduit l'amplitude de la première onde de choc en la rabotant [8]. La seconde vise à briser la première onde de choc en plusieurs autres d'amplitude plus petite afin d'accroître le temps de montée et de modifier la perception humaine du bang [4].

Dans cette thèse, on étudie deux formes d'avion fournies par Dassault Aviation durant le projet européen HISAC : une forme à faible traînée et une forme à faible bang.



**Figure 5.4:** F5-E *Shaped Sonic Boom Demonstration* à gauche et F15B avec la perche silencieuse à droite.

## 5.2 MODÉLISATION DU BANG SONIQUE

En raison de la complexité du phénomène, une simulation précise du bang sonique exige de coupler des modèles CFD non-linéaires et des équations linéaires de propagation des ondes acoustiques. Les champs proche et médian de l'écoulement sont calculés en résolvant les équations d'Euler couplées aux techniques d'adaptation multi-échelles. La signature de pression obtenue sous l'avion dans le champ proche ou médian est utilisée pour définir les conditions initiales de la propagation des ondes acoustiques au sol.

Cette propagation est réalisée avec un modèle simplifié 1D donnant la signature du bang sonique. Toutefois, le couplage n'est valable que si des conditions particulières, données par la théorie linéaire de l'aérodynamique supersonique, sont vérifiées. Ces points sont examinés dans la suite.

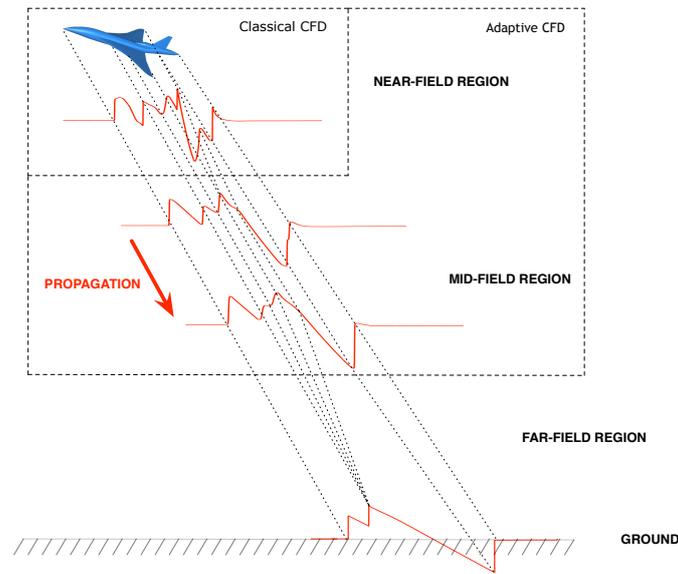
### 5.2.1 Propagation d'ondes acoustiques dans l'atmosphère

Le code de propagation utilisé est un algorithme de suivi de rayons basé sur la méthode *waveform parameter* de Thomas [10]. Cet algorithme propage les perturbations du champ proche au sol afin d'obtenir la signature du bang sonique. Dans cette approche, l'onde de pression est caractérisée par trois paramètres (voir Figure 5.6) :

- $m_i$  la pente du segment d'onde de pression  $i$ ,
- $\Delta p_i$  la variation de pression par segment (entre les ondes de pression  $i$  et  $i + 1$ ),
- $\lambda_i$  le temps caractéristique pour le segment de l'onde de pression  $i$ .

Un système de trois équations différentielles ordinaires (ODE), une pour chaque paramètre, est résolu pour propager l'onde de pression dans l'atmosphère :

$$\begin{cases} \frac{dm_i}{dt} = C_1 m_i^2 + C_2 m_i, \\ \frac{d\Delta p_i}{dt} = \frac{1}{2} C_1 \Delta p_i (m_i + m_{i-1}) + C_2 \Delta p_i, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{1}{2} C_1 (\Delta p_i + \Delta p_{i+1}) - C_1 m_i \lambda_i, \end{cases} \quad (5.1)$$



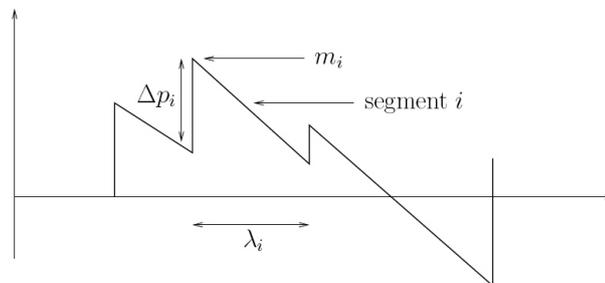
**Figure 5.5:** Modélisation du bang sonique.

avec les notations :

$$C_1 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{c}{p a_n} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{c} \frac{dc}{dt} + \frac{1}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dt} - \frac{2}{a_n} \frac{da_n}{dt} - \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right),$$

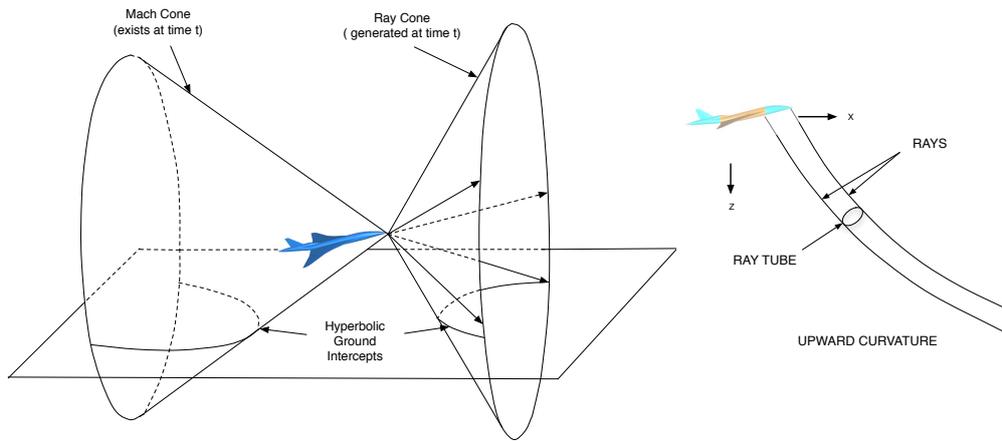
où  $c$ ,  $\rho$  et  $p$  caractérisent respectivement la vitesse du son dans l'air ambiant, la densité volumique et la pression statique. On note par  $a_n$  la vitesse d'une onde qui se propage le long du cône de rayon acoustique et  $A$  l'aire de la section du tube de rayon acoustique coupée par le front d'onde, cf. Figure 5.7. Toutes ces quantités sont fonctions de l'altitude. La vitesse d'une onde qui se propage le long du cône de rayons acoustiques est donnée par  $a_n = c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  où  $\mathbf{v}$  la vitesse du vent et  $\mathbf{n}$  la normale unité au cône de rayons. Si la vitesse du vent est supposée nulle alors on a  $a_n = c$ .

Les rayons acoustiques sont émis par l'avion et se propagent orthogonalement aux fronts d'onde, *i.e.*, le cône de Mach. Ils représentent les chemins (géodésiques) selon lesquels les perturbations acoustiques se propagent dans l'atmosphère. Ils forment le cône de rayon, cf. Figure 5.7. La direction initiale d'un rayon est donnée par le cône de rayons près de l'avion qui



**Figure 5.6:** Illustration des trois paramètres  $m_i$ ,  $\Delta p_i$  et  $\lambda_i$  caractérisant l'onde de pression.

est orthogonal au cône de Mach. Pour calculer l'aire du tube de rayons acoustiques, quatre rayons sont sélectionnés, séparés par un incrément de temps et un incrément azimutal. Les directions initiales de ces rayons sont régies par les paramètres de vol de l'avion et l'azimut considéré. Avec ces conditions initiales, la trajectoire des rayons peut être tracée. Elle est donnée par une intégration numérique directe de l'équation eikonale. Les quatre rayons sont définis de cette façon et l'aire du tube de rayons est calculée par une différentiation numérique. Les formules détaillées pour calculer le front d'onde et l'aire du tube de rayons sont données dans [3]. Dans cette étude, on analyse uniquement la signature du bang sonique pour un angle d'azimut des rayons acoustiques égal à zéro.



**Figure 5.7:** À gauche, définition du cône de rayons acoustiques qui représente les trajectoires le long desquelles les perturbations acoustiques se propagent. À droite, définition du tube de rayon et de son aire  $A$ .

Pour évaluer ces quantités, l'atmosphère doit être définie, *i.e.*, l'évolution de la température et de la pression en fonction de l'altitude doit être précisée. Ici, nous considérons l'atmosphère standard ICAO [5] où il n'y a pas de vent. Cette atmosphère est représentée de manière précise par les fonctions analytiques suivantes :

$$T(z) = \max(T_{gnd} - 6.5z, 216.65),$$

$$p(z) = \begin{cases} p_{gnd} \left(1 - \frac{6.50z}{T_{gnd}}\right)^{5.26} & \text{si } 0 \text{ km} < z < 12.25 \text{ km}, \\ p_{gnd} \left(1 - \frac{3.04z}{T_{gnd}}\right)^{12.26} & \text{si } 12.25 \text{ km} < z < 30 \text{ km}, \end{cases}$$

où  $T_{gnd} = 288.15 \text{ K}$  et  $p_{gnd} = 101300 \text{ Pa}$  sont la température en Kelvin et la pression en Pascal au sol, respectivement. De plus, on suppose que l'air respecte la loi des gaz parfaits.

Pour résoudre ce système, les trois équations différentielles ordinaires du système (5.1) sont intégrées par rapport au temps en considérant des pas de temps assez petits pour supposer que les variables  $C_1$  et  $C_2$  sont constantes. De plus, les pas de temps doivent être tronqués de manière adéquate lors de la résolution. En effet, quand l'onde acoustique se propage vers le sol, des chocs s'unissent pour en former un nouveau. Lorsque cela se produit, un ou plusieurs des  $\lambda_i$  s'annulent. Lorsque l'un des  $\lambda_i$  s'annule quelque part entre deux points, le segment associé est supprimé et les paramètres de forme de l'onde doivent être redéfinis. La réflexion

du signal acoustique sur le sol est pris en compte par un coefficient de réflexion égal à 1, ce qui implique un doublement de l'intensité de la pression au sol.

### 5.2.2 Couplage entre la CFD et la propagation des ondes

La simulation du bang sonique nécessite de coupler des modèles CFD et des équations de propagation d'ondes acoustiques. Le champ proche est modélisé par les équations d'Euler et est résolu par la méthode des volumes finis présentée dans le Chapitre 3. La solution du champ proche est utilisée comme condition initiale de la méthode de propagation. Cette condition initiale est donnée par un signal de pression extrait sous l'avion. Le procédé pour extraire la signature de pression est présenté dans le paragraphe suivant. Pour assurer que le couplage est valide, la solution dans la région où est extraite la signature doit vérifier la théorie linéaire de l'aérodynamique supersonique. Ces conditions sont expliquées dans le dernier paragraphe.

Tout d'abord on introduit la nomenclature utilisée. On note :

- $\alpha$  l'angle d'attaque de l'avion
- $M$  le nombre de Mach
- $p$  la pression acoustique et  $p_\infty$  la pression atmosphérique
- $\beta$  l'angle du cône de Mach avec la direction de l'écoulement définie par :  $\sin \beta = \frac{1}{M}$
- $L$  la taille caractéristique de l'avion
- $R$  la distance de la droite d'observation à la droite parallèle à la direction de l'écoulement passant par le nez de l'avion
- $\theta$  l'angle azimutal ou l'angle d'émission

En pratique, la distance de la droite d'extraction à l'avion est généralement exprimée par le ratio  $R/L$ .

*Extraction de la signature de pression.* En supposant que l'avion vole le long de l'axe  $x$  des valeurs positives vers les valeurs négatives, la droite d'extraction à la distance 0, ou  $R/L = 0$ , est la droite passant par le nez de l'avion avec un angle  $\alpha$  dans le plan de symétrie  $Oxz$ , c'est-à-dire la droite parallèle à la direction de l'écoulement passant par le nez de l'avion. Le segment extrait sur cette droite est défini par ses deux extrema :

$$\begin{cases} x_0 = x_{jet} - l_{front} \cos \alpha \\ y_0 = y_{jet} \\ z_0 = z_{jet} - l_{front} \sin \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = x_{jet} + (L + l_{back}) \cos \alpha \\ y_1 = y_{jet} \\ z_1 = z_{jet} + (L + l_{back}) \sin \alpha \end{cases}$$

où  $P_{jet} = (x_{jet}, y_{jet}, z_{jet})$  est le nez de l'avion et,  $l_{front}$  et  $l_{back}$  sont les longueurs d'extraction avant le nez et après la queue de l'avion, respectivement. Le segment d'extraction à une distance donnée  $R/L$  est obtenu en translatant le segment précédent le long du cône de Mach :

$$\begin{cases} x_i^{R/L} = x_i + R \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin \beta} \\ y_i^{R/L} = y_i \\ z_i^{R/L} = z_i - R \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

Finalement, le segment d'extraction à une distance  $R/L$  et pour un angle d'azimut  $\theta$  est donné par :

$$\begin{cases} x_i^{R/L,\theta} &= x_i + R \cos \theta \sin \alpha + R \frac{\cos \alpha}{\tan \beta} \\ y_i^{R/L,\theta} &= y_i + R \sin \theta \\ z_i^{R/L,\theta} &= z_i - R \cos \theta \cos \alpha + R \frac{\sin \alpha}{\tan \beta} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

Dans cette étude, on considère seulement des segments d'extraction pour un angle azimutal nul.

Le segment d'extraction est utilisé comme initialisation pour le code de propagation. Dans notre implémentation, ce segment correspond à une discrétisation uniforme *a posteriori* le long de la trajectoire de l'avion. Les valeurs de la pression sur cette discrétisation sont obtenues par interpolation linéaire du champ de pression aérodynamique. Pour cela, chaque point du segment est localisé dans le maillage tétraédrique CFD, *i.e.*, on cherche le tétraèdre auquel il appartient. Dans notre approche, la discrétisation du segment d'extraction est plus fine que celle utilisée dans le calcul CFD. La donnée initiale du code de propagation est la variation de pression :

$$\delta p = \frac{p - p_\infty}{p_\infty}.$$

**Validité du couplage.** Par nature, l'écoulement du champ proche est 3D et non-linéaire alors que la propagation est un modèle linéaire 1D. Le couplage devient donc valide lorsqu'il n'y a plus d'effet non-linéaire dans la solution. Cela se traduit par le fait que la solution du champ proche doit être localement axisymétrique. C'est une condition nécessaire pour prendre en compte tous les éléments de la géométrie de l'avion (fuselage, voilure,...).

Selon la théorie linéaire de l'aérodynamique supersonique, la variation de pression  $\delta p$  décroît en  $\sqrt{R/L}$ . Par conséquent, la solution du champ proche est convergée et est considérée localement axisymétrique si sa variation de pression décroît en  $\sqrt{R/L}$ . Par conséquent, le signal de pression doit être extrait assez loin de l'avion pour vérifier de telles conditions.

Néanmoins, ces conditions doivent être soigneusement vérifiées. En effet, un tel comportement peut apparaître dans la solution en raison de la dissipation numérique du solveur qui dissipe les non-linéarités. En particulier, si le maillage CFD n'est pas assez précis, les ondes de choc seront diffusées lors de leur propagation et des effets non linéaires seront supprimés.

On propose donc d'utiliser l'adaptation de maillage anisotrope multi-échelles afin de résoudre ce problème, car elle contrôle globalement la taille du maillage et garantit une dissipation numérique cohérente dans tout le domaine de calcul.

### 5.3 VALIDATION PAR CONFRONTATIONS AUX EXPÉRIMENTATIONS

On propose dans cette section de valider le solveur couplé à l'adaptation multi-échelles en comparant les champs proches et médians de pression aux données obtenues en soufflerie dans une étude expérimentale de la NASA. La Figure 5.10 montre une représentation de la soufflerie utilisée lors des expérimentations. On a choisi de faire la validation sur le modèle 8 pour lequel les résultats expérimentaux sont présentés dans le rapport de la NASA [2]. La géométrie est définie analytiquement en inches. Elle représente une perche qui est composée

de deux cylindres de rayons différents :

$$\begin{aligned}
 r &= x \sqrt{\frac{0.08}{\pi}} & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 l \\
 r &= \sqrt{\frac{0.02}{\pi}} & \text{si } 0.25 l \leq x \leq 0.75 l \\
 r &= \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{0.04}{\pi}} \left( x - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) & \text{si } 0.75 l \leq x \leq l,
 \end{aligned}$$

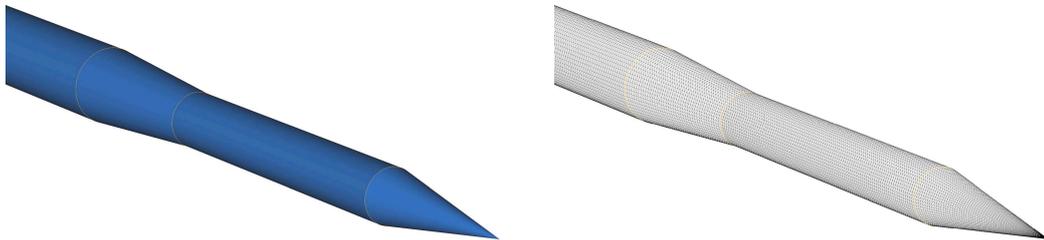
où  $l$  est la longueur de référence égale à 2 inches (5.08 centimètres). La Figure 5.8 montre cette géométrie. La géométrie initiale a été rallongée par l'adjonction d'un cylindre de longueur  $2l$ , cf. Figure 5.9, pour représenter le *sting support* cf. Figure 5.10. Le domaine de calcul est un cylindre aligné suivant l'axe  $x$  de rayon 2.5 mètres et de longueur 6 mètres, cf. Figure 5.9. Les conditions de l'expérience sont un angle d'attaque de 0 degré à Mach 1.41. On a choisi délibérément de calculer l'écoulement dans tout le domaine et de ne pas le réduire à l'aide de l'axi-symétrie de la géométrie suivant  $x$ . En effet, l'objectif est de valider les codes 3D qui seront utilisés par la suite sur des avions qui sont bien entendus non axi-symétriques.

REMARQUE 5.1 La NASA a également utilisé ce cas test pour valider le code fun3d [6] en 2006, soit 40 ans après les expérimentations. En effet, l'adaptation de maillage anisotrope semble indispensable pour capter avec précision un signal à une distance jusqu'à 20 fois supérieure à la longueur de l'objet.

On utilise cette simulation pour comparer aux expérimentations les méthodes suivantes :

- les solveurs de Riemann approchés HLLC et Roe,
- les schémas de dissipation numérique  $\mathbf{V4}$  et  $\mathbf{V6}$ ,
- les reconstructions de hessien basées sur la double projection  $\mathbf{L}^2$  et la formule de Green,
- l'adaptation basée sur le contrôle multi-échelles du nombre de Mach et celle basée sur la fonctionnelle :

$$J(W) = \int_S \left( \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \right)^2,$$



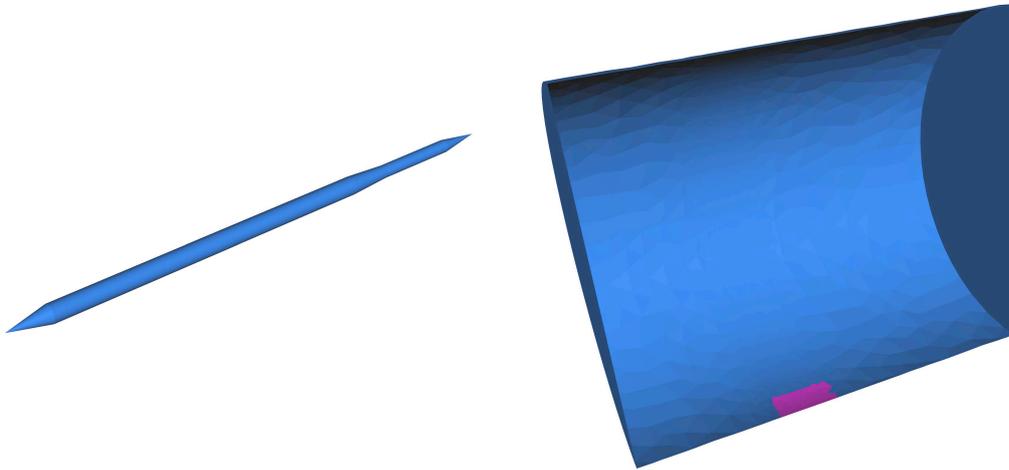
**Figure 5.8:** Géométrie et maillage du modèle 8 de [2] qui représente une perche.

où  $S$  est la surface d'intégration, cf. Figure 5.9.

La Table 5.1 résume l'ensemble des cas test.

Cas	Solveur	Schéma	Hessien	Variable	$\mathcal{T}_{final}$ # sommets	$\mathcal{T}_{final}$ # tétraèdres
1	HLLC	V4	$L^2$ -proj.	Mach	5 107 296	30 315 882
2	Roe	V4	$L^2$ -proj.	Mach	4 295 057	25 464 860
3	HLLC	V4	Green	Mach	4 306 398	25 539 731
4	HLLC	V6	$L^2$ -proj.	Mach	5 496 361	32 615 241
5	HLLC	V6	Green	Mach	4 161 098	24 661 706
6	HLLC	V6	Green	Adjoint	2 058 351	12 043 429

**Table 5.1:** Table résumant les simulations réalisées. Dans chaque cas, le nombre de sommets et le nombre de tétraèdres du maillage final sont donnés.



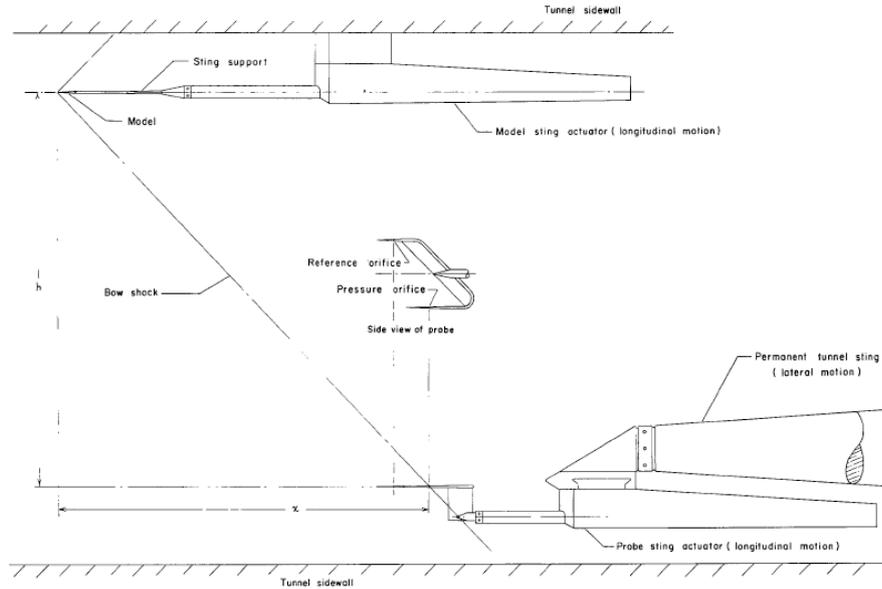
**Figure 5.9:** À gauche, géométrie de la perche utilisée pour les calculs, et à droite, le domaine cylindrique de calcul. La géométrie initiale a été rallongée par l'adjonction d'un cylindre de longueur  $2l$ . La portion violette sur le domaine cylindrique correspond à la surface d'intégration  $S$  pour le calcul de la fonctionnelle  $J$ .

Le maillage uniforme initial est composé de 243 446 sommets et 1 163 402 tétraèdres. Toutes les adaptations, autre que l'adjoint, sont basées sur le contrôle de l'erreur d'interpolation du nombre de Mach en norme  $L^2$ . Dans chaque cas, un total de 15 adaptations ont été réalisées. Elles ont été découpées en 3 étapes de complexités :

$$[200\,000, 400\,000, 800\,000].$$

Pour chaque étape, 5 sous-itérations à complexité constante sont effectuées. Les maillages obtenus comportent entre 1 500 000 et 4 500 000 sommets. Le maillage obtenu pour le cas 5 est représenté sur les Figures 5.11 and 5.12. Dans chaque cas, les maillages comparés comportent près de 5 millions de sommets, sauf dans le cas de l'adjoint où l'on a choisi un maillage deux fois plus petit.

Afin de comparer les résultats aux expérimentations, on extrait le champ de pression sur des segments sous la géométrie aux distances  $5l$ ,  $10l$  et  $20l$  où  $l$  est la longueur de référence



**Figure 5.10:** Représentation de la soufflerie supersonique utilisée dans [2].

de la géométrie. Pour chaque extraction, on trace :

$$\left(\frac{R}{l}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \quad \text{en fonction de} \quad \Delta = \frac{x}{l} \left(\frac{R}{l}\right)^{-\frac{1}{4}},$$

où  $R$  est la distance d'extraction par rapport à la géométrie. Ces signatures de pression sont comparées avec celles données dans l'étude expérimentale [2]. Dans chaque cas, on observe une très bonne corrélation entre l'expérience et la solution numérique, cf. Figures 5.13, 5.14, 5.15 et 5.16. Les auteurs de [2] précisent que le fait que les maxima de pression soient tous arrondis est en parti dû aux vibrations de la soufflerie et à des effets de couches limites. Ils précisent également que ces maxima devraient être beaucoup plus «pointus». C'est ce que l'on retrouve dans les solutions numériques obtenues. Les auteurs de [2] comparent également les signatures expérimentales avec la théorie linéaire de Witham. Pour d'autres géométries simples, ils obtiennent une bonne corrélation. Cependant, pour le modèle de perche étudié ici, des écarts importants apparaissent. Cette remarque montre simplement la limite d'un modèle linéaire pour l'étude du bang sonique. Elle démontre également l'intérêt de calculer le champ proche avec les équations d'Euler afin de capter les effets non linéaires. Cette remarque est d'autant plus pertinente que la géométrie est complexe.

On précise tout d'abord trois points qui nous guident dans la comparaison des résultats :

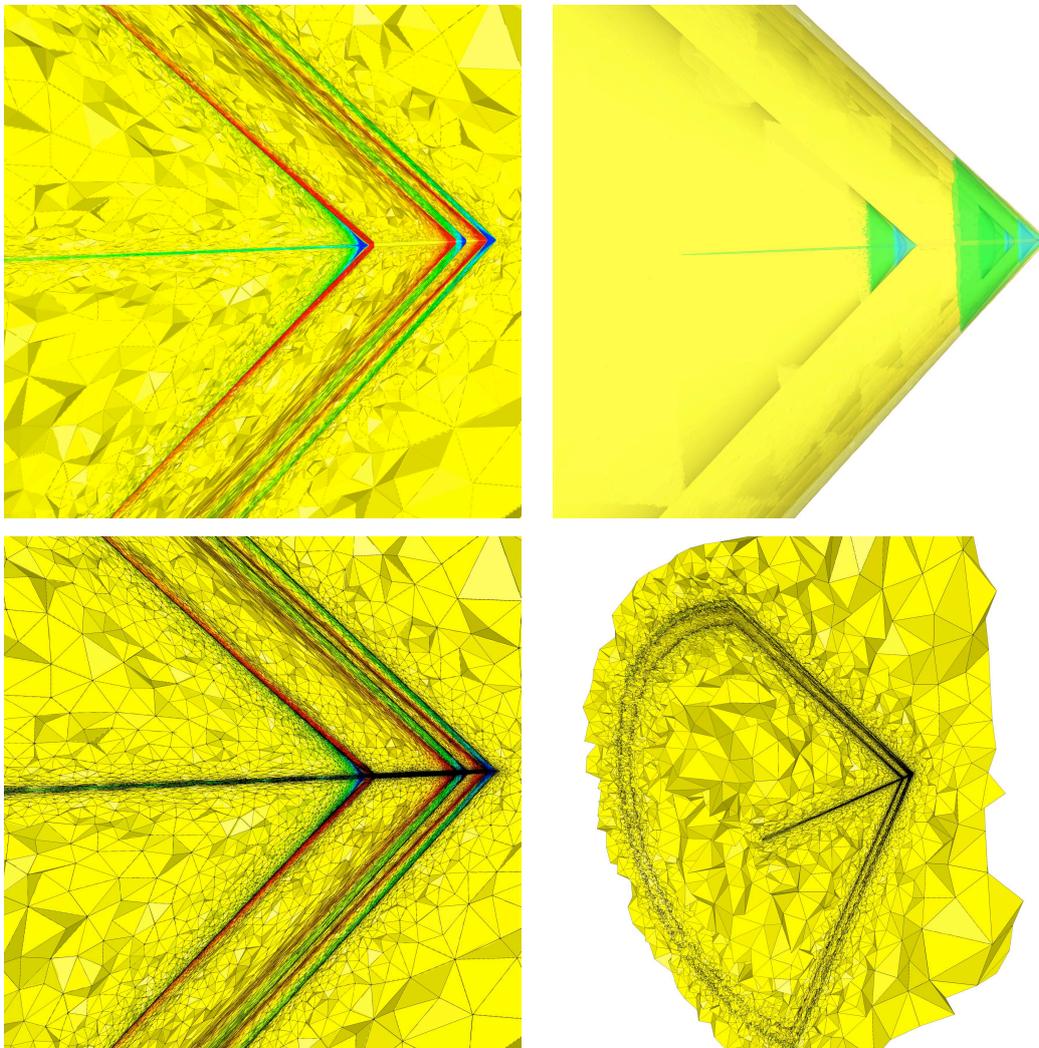
1. La convergence du calcul peut être validée en s'assurant que le maximum d'amplitude du premier choc est constant quelque soit  $R/l$ , car on a normalement une décroissance en  $(R/l)^{\frac{3}{4}}$  (se référer à [2] pour plus de détails). Une baisse d'amplitude pour cette première onde de choc indiquerait que le signal a été diffusé, soit par le schéma numérique, soit par la méthode de reconstruction de hessien.
2. Les deux ondes de chocs initialement (*i.e.*, à  $R/l = 5$ ) comprises entre  $\Delta = -0.4$  et  $\Delta = 0.2$  ne doivent fusionner qu'à une distance de  $R/l = 20$ . Si une seule onde de choc

apparaît à la distance  $R/l = 5$  ou  $R/l = 10$  alors la fusion de ces ondes est un artefact numérique dû à un manque de précision dans la résolution de ces chocs.

3. La position de la dernière onde de choc à  $R/l = 20$  illustre la précision de la méthode. Noter que les résultats expérimentaux fournissent la localisation de l'onde par contre son amplitude est entachée d'erreur due aux conditions expérimentales indiquées précédemment.

Sur ces deux points, une méthode peut être jugée meilleure qu'une autre. Dans tous les cas traités, on a spécifié le limiteur de Dervieux à trois entrées et un schéma de Runge Kutta SSP d'ordre 2 à 5 pas pour l'intégration en temps, cf. Section 3.1.2.

*Roe et HLLC.* On compare les solveurs de Riemann de Roe et HLLC en utilisant le schéma V4 et une double projection  $\mathbf{L}^2$  pour la reconstruction du hessien. Les résultats sont présentés sur la Figure 5.13. Comme escompté, le solveur de Roe donne les résultats les plus précis. On



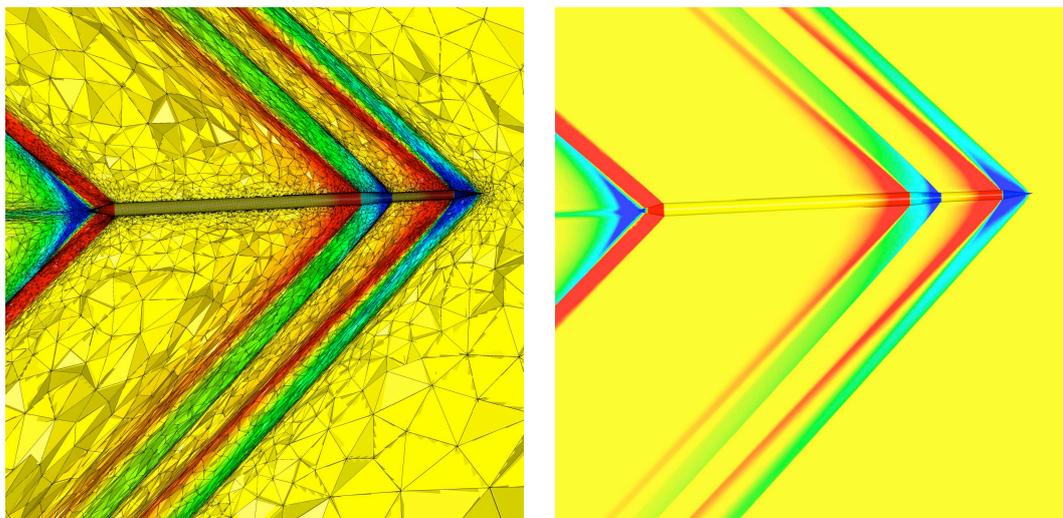
**Figure 5.11:** Maillage final et solution finale pour le cas test 5. En haut, les iso-valeurs (à gauche) et les iso-surfaces (à droite) du nombre de Mach. En bas, le maillage adapté anisotrope.

observe par exemple que les chocs sont plus raides. Cela se traduit par une solution moins diffusée à  $R/l = 20$  par rapport à HLLC. La solution à  $R/l = 10$  a un point d'inflexion en  $\Delta = -0.25$ . Cette particularité n'est pas capturée avec HLLC alors qu'elle est parfaitement capturée dans le cas de Roe. Cependant, pour des raisons de robustesse, on préfère utiliser le solveur HLLC au lieu du solveur de Roe. En effet, le solveur de Roe n'est pas positif et peut produire des pressions négatives.

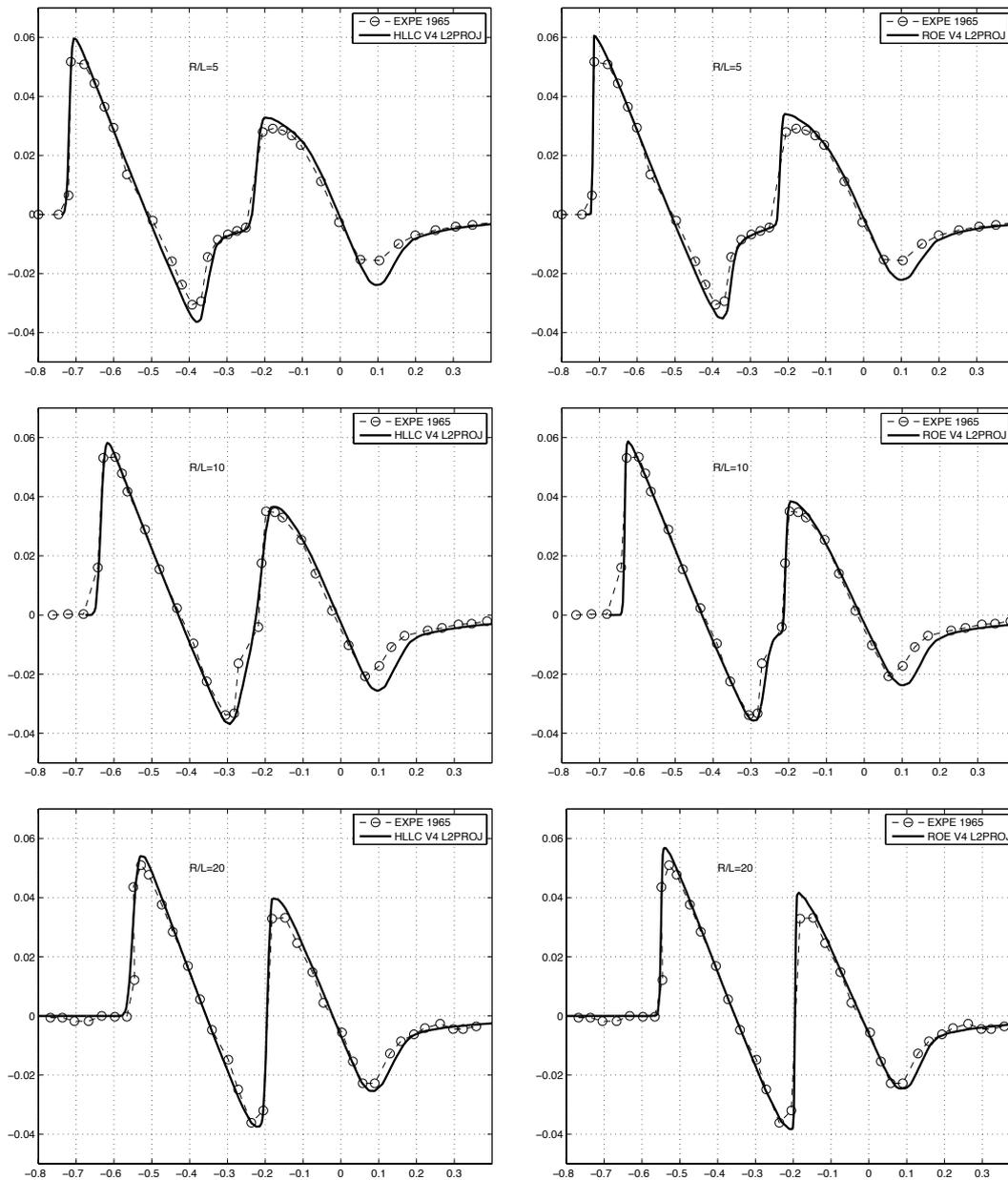
*Green ou  $\mathbf{L}^2$ .* On compare les méthodes de reconstruction de hessien en utilisant le solveur HLLC et soit le schéma V4 pour les cas 1 et 3, cf. Figure 5.14, soit le schéma V6 pour les cas 4 et 5, cf. Figure 5.15. Pour les méthodes de reconstruction de hessien, un choix clair s'impose. La reconstruction basée sur la formule de Green est bien meilleure que la double projection  $\mathbf{L}^2$ . La séparation des deux chocs médians à  $R/l = 10$  n'a pas été capturée en utilisant la double projection  $\mathbf{L}^2$ , ni dans le cas 1 et ni dans le cas 4. A contrario, l'utilisation de la formule de Green permet de la capturer dans les deux cas (3 et 5). Cette différence s'explique par la distance des informations utilisées pour approcher le hessien dans chaque cas. Pour chaque point, la boule d'ordre deux est nécessaire dans le cas de la projection  $\mathbf{L}^2$  alors que seule la boule d'ordre un est nécessaire dans le cas de Green. Cela se traduit par une information dans la métrique due au choc étalé sur deux mailles dans le cas de Green et trois dans le cas de la double projection  $\mathbf{L}^2$ .

On peut également remarquer que la solution HLLC-V4-Green (cas 3), cf. Figure 5.14 à droite, est très similaire au cas 2 Roe-V4- $\mathbf{L}^2$ , cf. Figure 5.13 à droite.

*V4 ou V6.* Quelque soit le solveur de Riemann approché et quelque soit la reconstruction de hessien, l'utilisation du schéma V6 améliore les signatures de pression. Les Figures 5.14 et 5.15 illustrent ce point de vue. Même si ce schéma a été initialement introduit par capturer avec plus de précision des phénomènes réguliers, instabilités ou tourbillons, il permet également de mieux résoudre les chocs en réduisant la dissipation numérique. Cela se traduit par une meilleure préservation de l'amplitude des chocs lors de la propagation.

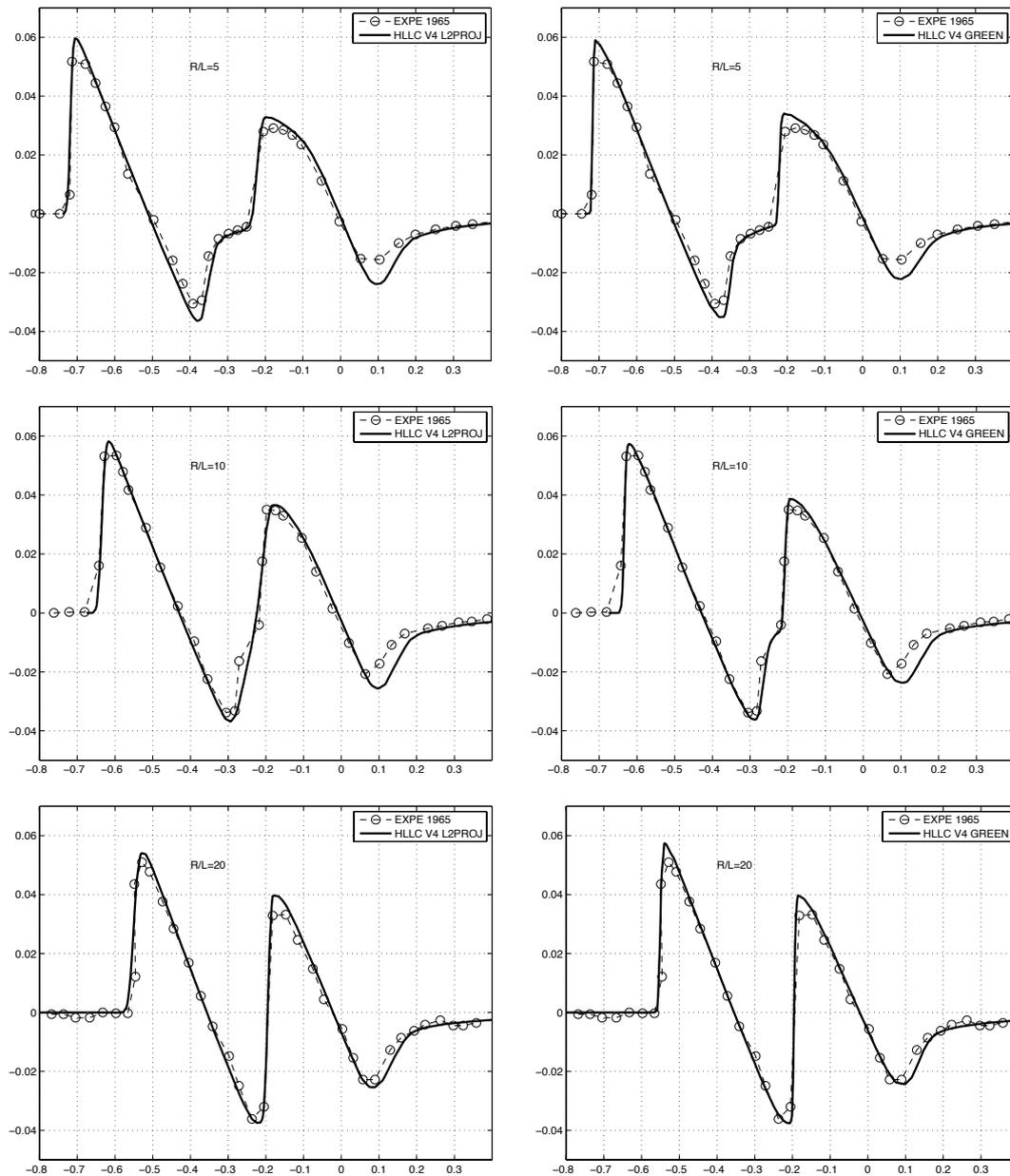


**Figure 5.12:** Zoom sur le maillage et la solution près de la géométrie de la perche pour le cas test 5.



**Figure 5.13:** Comparaison des solveurs de Riemann HLLC (à gauche) et Roe (à droite). Dans les deux cas, on a utilisé le schéma V4 et une double projection  $L^2$  pour la reconstruction du hessien.

*Hessien ou adjoint.* Si l'on s'intéresse seulement à la signature de pression sous l'avion, l'utilisation de l'adaptation ciblée permet de capter plus rapidement toutes les particularités de la solution et ceci avec deux fois moins de sommets. Pour illustrer cela, on compare les signatures de pression obtenues avec l'adaptation de maillage multi-échelles sur le nombre de Mach (cas 3), cf. Figure 5.14 à droite, et l'adaptation de maillage basée sur l'adjoint (cas 6), cf. Figure 5.16. Pour la comparaison à même nombre de sommets (4 millions), on constate que l'adaptation sur l'adjoint est nettement plus précise. Elle est beaucoup moins dissipative. Si l'on compare l'adaptation ciblée avec deux fois moins de sommets à l'adaptation multi-échelles,

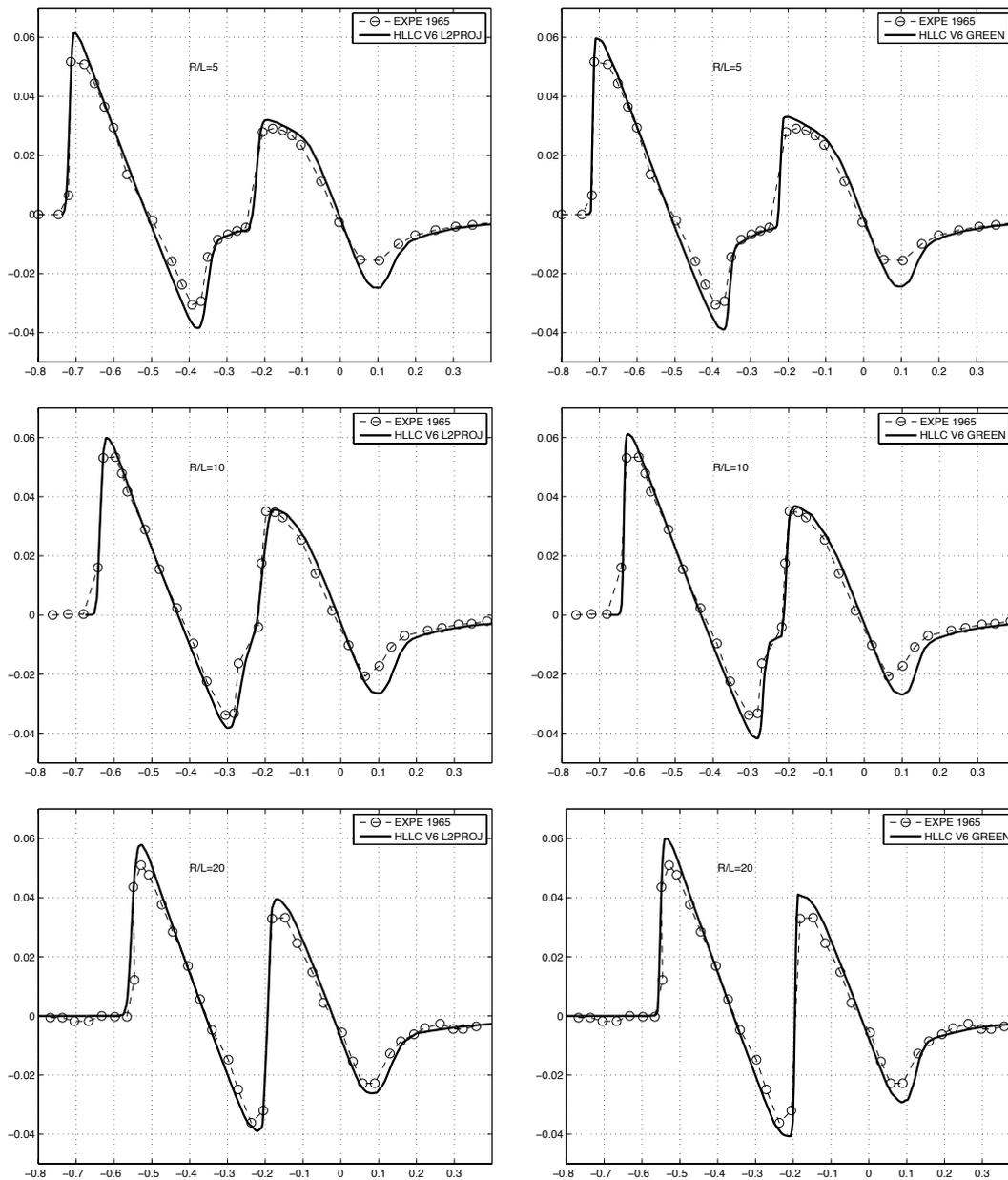


**Figure 5.14:** Comparaison des reconstructions de hessien : la double projection  $L^2$  (à gauche) et la formule de Green (à droite). Dans les deux cas, on a utilisé le solveur HLLC et le schéma V4.

on remarque qu'elle fournit encore un meilleur résultat.

### Validations sans expérimentations

Lorsqu'aucune étude expérimentale n'est disponible, on valide le calcul du champ proche en vérifiant que l'on obtient une convergence asymptotique à l'ordre deux comme prédit par la théorie. Cette approche a déjà été utilisée dans le Chapitre 3. On l'utilise également sur les formes d'avions étudiées dans ce chapitre. Enfin, on peut comparer les signatures de pression obtenues par des codes différents. Cette validation a été réalisée dans le cadre du projet

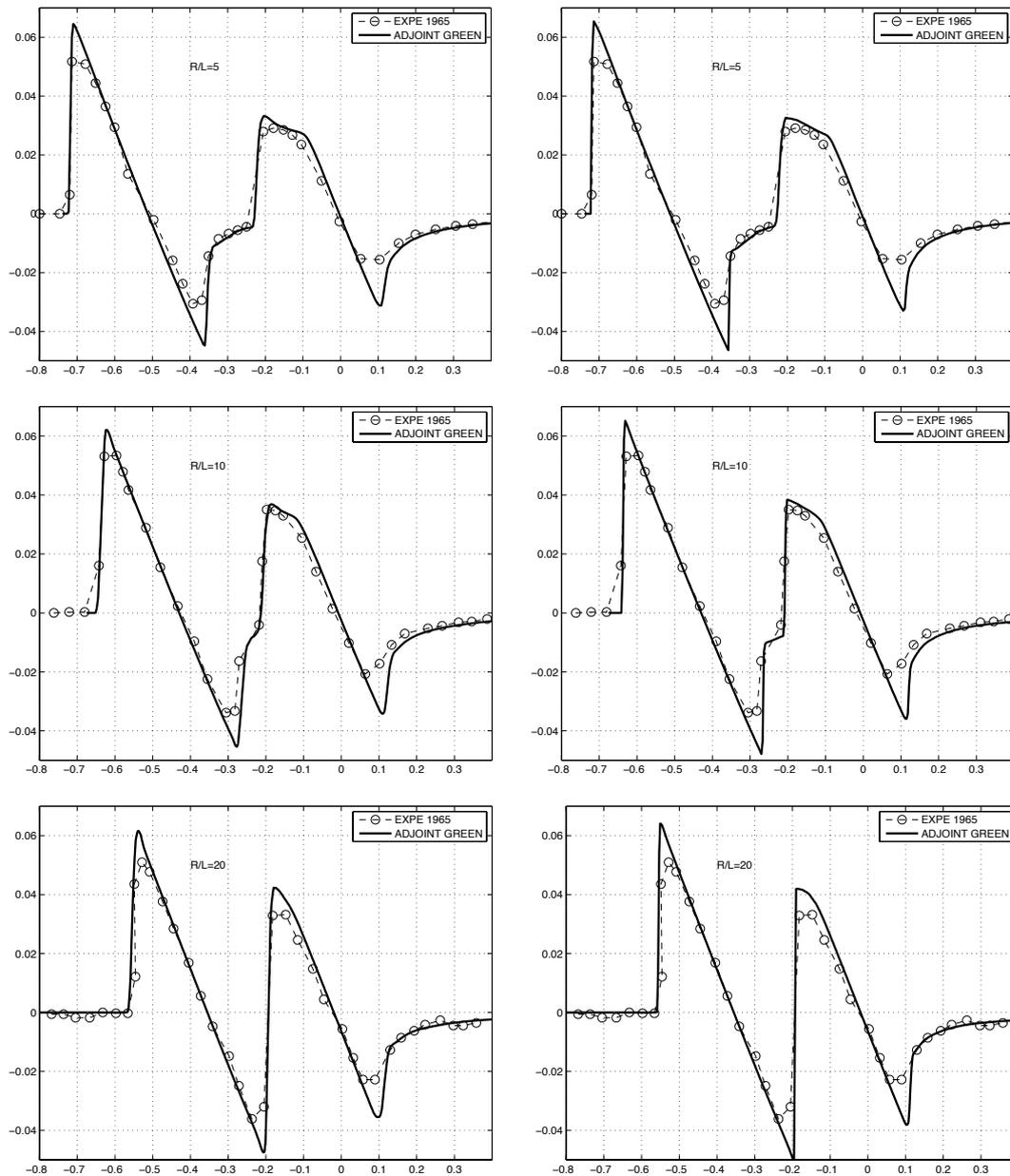


**Figure 5.15:** Comparaison des reconstructions de hessien : la double projection  $L^2$  (à gauche) et la formule de Green (à droite). Dans les deux cas, on a utilisé le solveur HLLC et le schéma V6.

Européen HISAC. Les signatures de Wolf ont été comparées aux signatures calculées par Eugénie le solveur Euler de Dassault Aviation.

## 5.4 ETUDE DU BANG SONIQUE DE PLUSIEURS JETS SUPERSONIQUES

Dans cette section, on étudie et on compare trois formes d'avions supersoniques qui nous ont été fournies par Dassault Aviation lors du projet européen HISAC. Ces trois avions représentent des jets d'affaire.



**Figure 5.16:** Adaptation de maillage basée sur l'adjoint (cas 6). On a utilisé le solveur HLLC, le schéma V4 et la formule de Green pour la reconstruction du hessien. Signatures de pression obtenues sur les maillages adaptés comportant 2 millions de sommets (à gauche) et 4 millions sommets (à droite).

Le premier avion, cf. Figure 5.18 en haut, est un jet à faible traînée. Il est nommé **SSBJ** (SuperSonic Business Jet). Cette géométrie est la plus simple des trois. En particulier, les moteurs n'ont pas été intégrés alors que l'on sait qu'ils ont un impact conséquent sur la signature du bang sonique. La longueur de cet avion est  $L = 37$  mètres et il a une envergure de 17 mètres. La précision du maillage surfacique varie de 1 millimètre à 30 centimètres.

Le deuxième avion est un jet à faible bang sonique. Il est décliné en deux versions. La

première est la forme standard, elle est représentée sur la Figure 5.18 au milieu. On la nommera **low boom**. La différence entre la première et la deuxième forme se situe au niveau de la voilure. On s'intéresse à l'effet d'un angle dièdre pour les ailes : l'angle vertical de la voilure. Les ailes, au lieu d'être «plates» ont un double angle dièdre. Le premier angle dièdre est au niveau de l'emplanture, *i.e.*, à la jonction de l'aile et du fuselage. Le deuxième angle dièdre est au niveau du changement de l'angle de flèche (l'angle horizontal du bord d'attaque de l'aile). On voit plus précisément les différences de voilure sur la Figure 5.22. On l'appellera **low boom + dièdre**. Sur ce deuxième avion, la géométrie est complète. L'intégration des moteurs a été réalisée. D'ailleurs, il est placé sur le dessus de l'avion pour minimiser leur impact sur le bang sonique. Cette géométrie est beaucoup plus complexe. La longueur de cet avion est  $L = 42$  mètres et il a une envergure de 20 mètres. La précision du maillage surfacique varie de 0.2 millimètres à 12 centimètres, soit déjà une variation de taille de trois ordres de grandeur vis-à-vis de la dimension de l'avion !

Le domaine de calcul est un cylindre de 2.25 kilomètres de long et 1.5 kilomètres de diamètre, ce qui représente un facteur d'échelle de  $10^7$  si on compare la taille du domaine à la précision maximale sur l'avion low boom. Cette taille de domaine permet d'obtenir des signatures de pression dans le champ médian jusqu'à  $R/L = 19$  pour le SSBJ et  $R/L = 16$  pour les deux modèles low boom.

Le plan de la section est le suivant. On donne d'abord les paramètres de l'étude. Ensuite on présente les ordres de convergence globale pour chaque simulation et on détaille les résultats obtenus pour les champs proche et médian, c'est-à-dire les calculs CFD. Dans une quatrième section, on analyse la convergence des signaux de pression en fonction du ratio  $R/L$  et à partir de quelle distance le couplage est valide. La convergence des bangs soniques est aussi étudiée. Finalement, on compare les signaux acoustiques de chaque géométrie.

Dans la présentation des résultats, on ne donnera pas les valeurs physiques obtenues pour la traînée, les signatures de champ proche et les bangs soniques en raison de la politique de confidentialité de Dassault Aviation. On ne donnera que des valeurs relatives en se basant sur les résultats du SSBJ.

#### 5.4.1 Paramètres de l'étude

On utilise les mêmes paramètres pour chaque géométrie afin de pouvoir les comparer. Les conditions de l'écoulement sont un nombre de Mach de 1.6 à une altitude de 13 680 mètres. Pour pouvoir comparer les bangs soniques, il est primordial de réaliser les calculs à iso-portance. En effet, ce sont les effets de portance qui génèrent le bang sonique (les ondes de choc). Dans cette étude, la portance pour un vol de croisière a été définie à  $C_l = 0.115$  par Dassault Aviation. L'angle d'attaque prescrit pour chaque avion est tel que cette portance soit atteinte. Dans chaque cas, on a défini l'angle d'attaque de la simulation sur le maillage initial qui est un maillage précis près de l'avion. Les angles d'attaque pour chaque avion sont voisins de 3 degrés.

En ce qui concerne le solveur volumes finis, on a spécifié le solveur de Riemann HLLC, le schéma V6 couplé au limiteur de Dervieux à trois entrées et un schéma de Runge Kutta SSP d'ordre 2 à 5 pas pour l'intégration temporelle. Pour les conditions de réacteur des avions low boom, on a utilisé les données fournis par Dassault Aviation. Les coefficients de portance et de traînée sont calculés à partir des données de référence de chaque géométrie.

Pour l'adaptation de maillage, on a choisi d'effectuer une adaptation multi-échelles en norme  $\mathbf{L}^2$  sur le nombre de Mach car il est très représentatif de ce type d'écoulement<sup>2</sup>. On a décidé délibérément de ne pas adapter les maillages surfaciques des avions. En effet, les maillages de surfaces fournis sont très précis et d'excellente qualité pour les calculs. 32 adaptations de maillage ont été réalisées au total. La boucle d'adaptation a été découpée en 4 étapes. À chaque étape, on converge le couple maillage/solution à une complexité fixée. La complexité est multipliée par un coefficient deux entre deux sous-itérations, comme décrit dans la Section 3.1.1. On a imposé les complexités suivantes :

$$[200\,000, 400\,000, 800\,000, 1\,600\,000],$$

qui donnent des maillages dont les tailles sont d'environ 1.25, 2.5, 5 et 10 millions de sommets. Pour chaque étape, 8 sous-itérations d'adaptation de maillage sont effectuées. Le temps de calcul total pour ces simulations est de quatre jours sur quatre processeurs sur un ordinateur de bureau Mac Pro avec un processeur Intel de fréquence 2.66 GHz et 4 Go de mémoire vive.

#### 5.4.2 Validation des calculs

Pour valider les calculs, on a analysé les ordres de convergence globaux en maillage pour chaque géométrie vis-à-vis d'une solution de référence. La convergence est calculée en norme  $\mathbf{L}^2$  sur le nombre de Mach qui est utilisé pour l'adaptation. Pour les avions SSBJ, low boom et low boom + dièdre on obtient des ordres de convergence 2.8, 2.6 et 2.2, respectivement. Les courbes de convergence sont données dans la Figure 5.17.

Ces ordres de convergence supérieurs à l'ordre deux théorique sont surprenants. On n'a pas encore analysé la raison. On propose deux hypothèses pour expliquer ces résultats. Premièrement, les solutions finales sur les maillages à 10 millions de sommets (*i.e.*, à l'adaptation 32) ne sont pas complètement convergées pour des raisons de temps de calcul. Elles sont donc proches des solutions précédentes. Deuxièmement, ces ordres de convergence peuvent être dus à un effet du schéma V6. En effet, tous les calculs des Chapitres 3 et 4 ont été réalisés avec le schéma V4 où l'on obtenait un ordre deux. L'hypothèse est que le schéma V6 sur des maillages adaptés anisotropes fournit un ordre de convergence entre deux et trois. Cette hypothèse reste à vérifier.

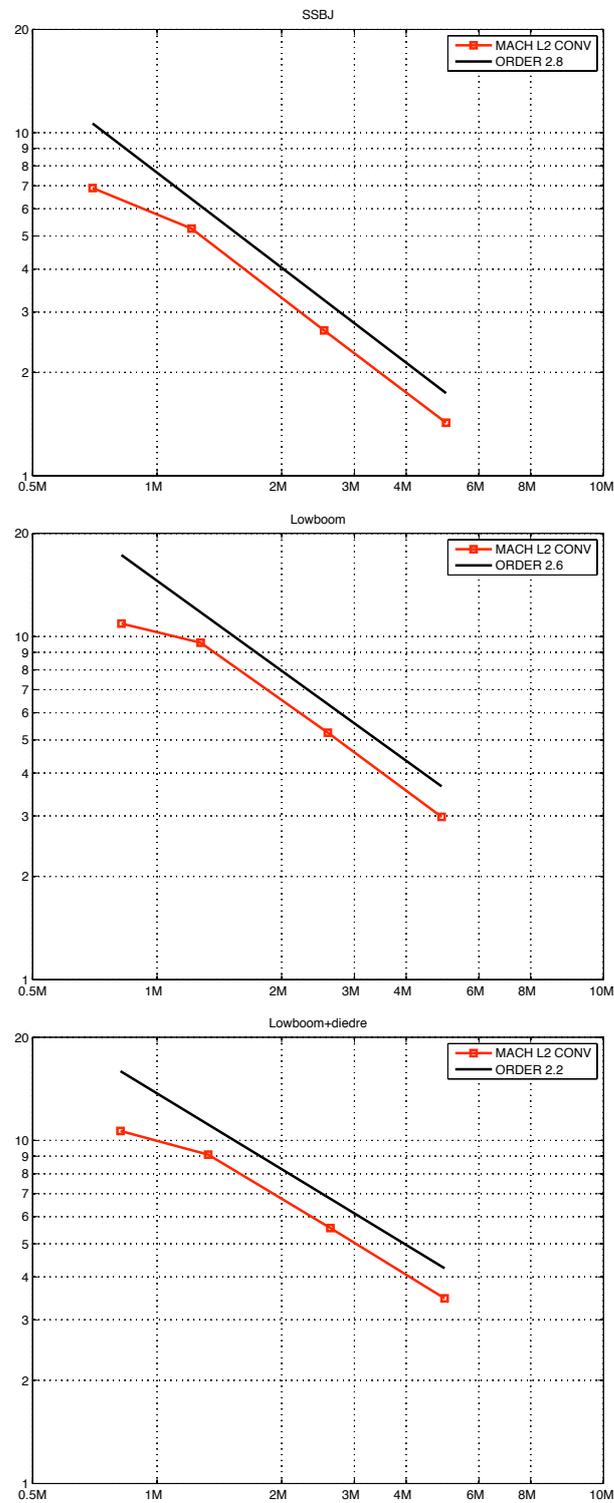
#### 5.4.3 Résultats des champs proche et médian

Pour chaque calcul, on constate que l'on obtient un résultat très précis dans tout le domaine de calcul pour les maillages finaux à 10 millions de sommets. Les tailles des maillages finaux sont récapitulées dans la Table 5.2. En effet, la précision dans les maillages volumiques atteint la précision des maillages surfaciques.

2. Au moment de cette étude, l'adaptation de maillage basée sur l'adjoint n'était pas encore disponible.

Géométrie	$\mathcal{T}_{final}$ # sommets	$\mathcal{T}_{final}$ # tétraèdres
SSBJ	9 589 960	57 637 872
Low boom	9 263 813	55 255 520
Low boom + dièdre	9 262 948	55 244 110

**Table 5.2:** Nombre de sommets et de tétraèdres pour les maillages finaux adaptés.



**Figure 5.17:** Ordre de convergence global en maillage pour chaque avion. De haut en bas, on obtient un ordre 2.8 pour le SSBJ, 2.6 pour le low boom et 2.2 pour le low boom + dièdre.

Les maillages surfaciques et les solutions sur la surface de chaque avion sont montrés sur la Figure 5.18. On peut voir la différence de position des ondes de choc sur la voilure due aux angles dièdres dans la configuration low boom.

La Figure 5.19 illustre les iso-valeurs du nombre de Mach et le maillage final adapté dans le plan de symétrie  $0xz$ . Comme dans les chapitres précédents, on constate que les ondes de choc et les raffinements anisotropes sont bien propagés dans tout le domaine de calcul sans dissipation. On peut noter, sur le maillage, la capture très précise des ondes de choc à l'entrée du réacteur et au niveau du jet. Cela met en évidence l'effet multi-échelles de l'approche adaptative.

Deux plans de coupe sous l'avion dans le maillage volumique sont présentés sur la Figure 5.20. On note clairement que chaque élément de la géométrie émet ses propres ondes de choc. On voit aussi dans le maillage des ondes qui focalisent dans le champ proche.

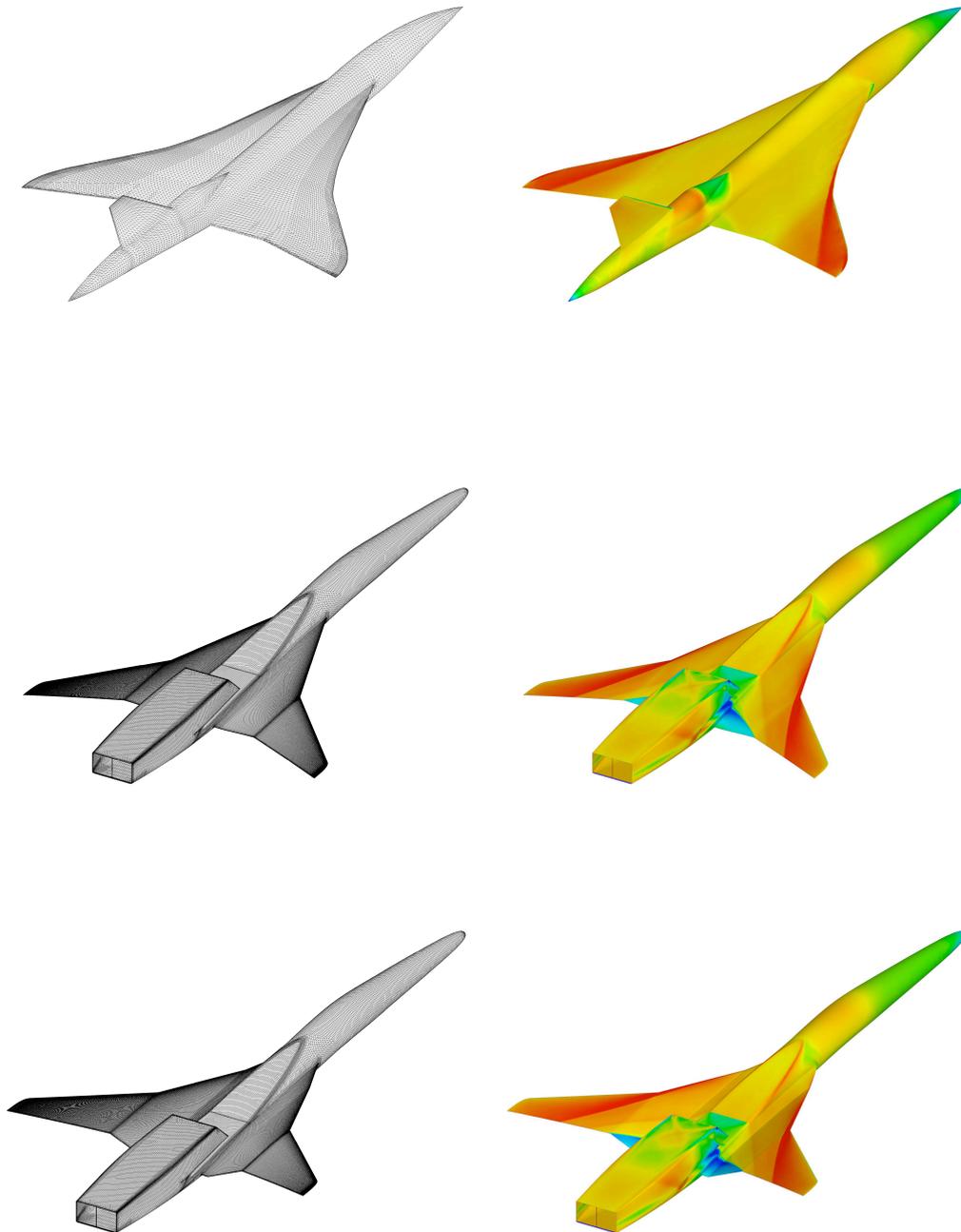
Les Figures 5.21 et 5.22 sont deux vues de la solution finale et du maillage final dans un plan de coupe derrière l'avion orthogonal à sa trajectoire. Elles illustrent l'anisotropie du maillage le long des chocs et les effets multi-échelles avec la capture de tourbillons, ainsi que la complexité du phénomène physique et des raffinements de maillage justifiant la nécessité d'une méthode complètement automatique.

#### 5.4.4 Convergence du champ proche et du bang sonique

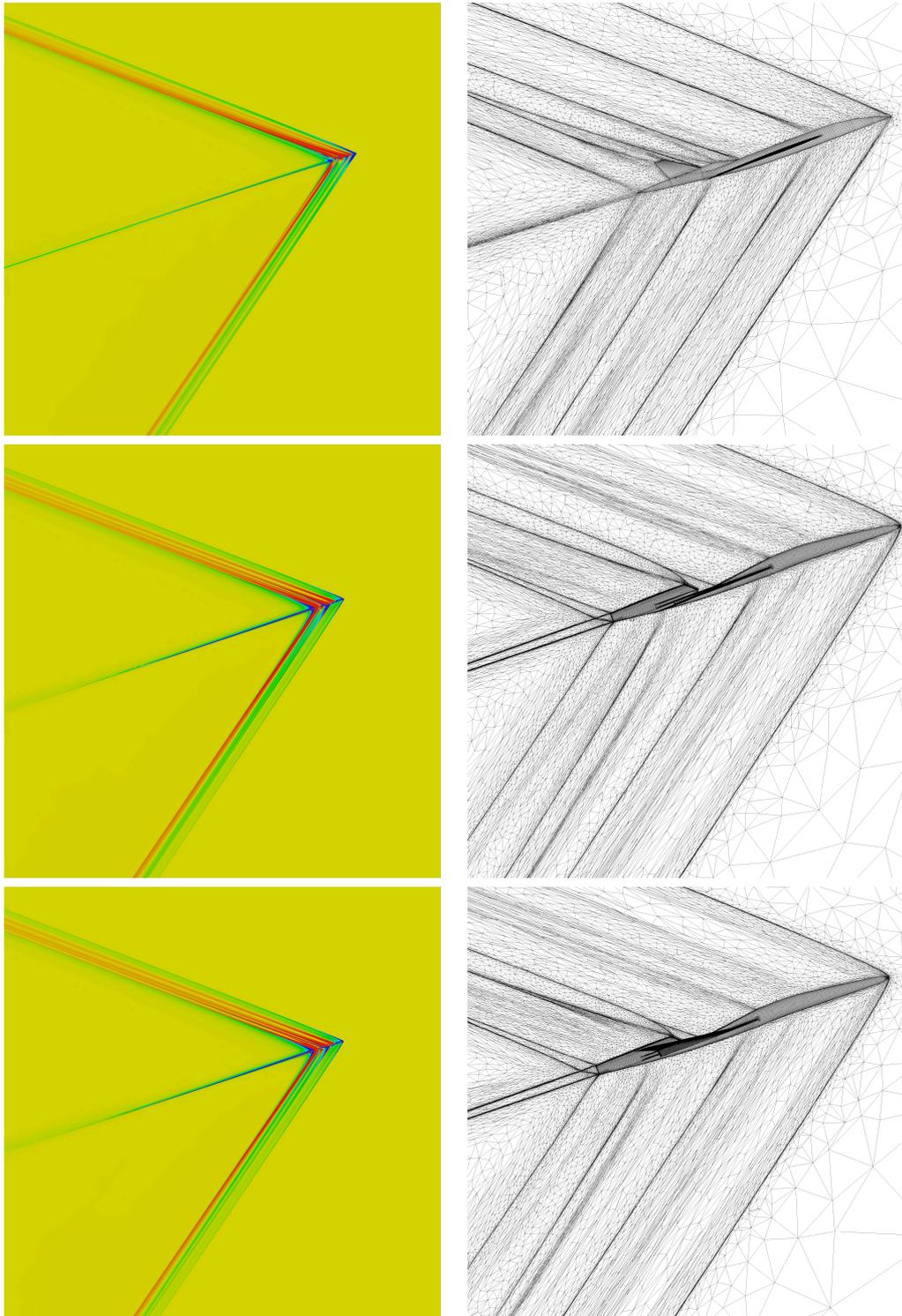
Les Figures 5.23, 5.24 et 5.25 exhibent pour les trois configurations, à gauche, les signatures de pression du champ proche ( $R/L = 1$ ) et du champ médian ( $R/L$  de 1 à 20), que l'on désignera tous les deux par champ proche dans la suite, et à droite, les signaux de bang sonique au sol. Les signatures des champs proches représentent  $\sqrt{\frac{R}{L}} \frac{p-p_\infty}{p_\infty}$  en fonction de la position en mètre. Les bangs soniques représentent la pression en pascal en fonction du temps en milliseconde.

Dans chaque cas, on montre la convergence du signal acoustique dans le champ proche et des bangs associés, c'est-à-dire les signatures au sol obtenues à partir de ces signaux de pression. Elles correspondent aux courbes en haut et au milieu des figures. Dans chaque cas, on n'obtient pas de bang en forme de N mais un signal avec trois chocs. Il y a toujours deux ondes de choc au début. La première est due au nez de l'avion et la seconde à la voilure. On constate dans les trois cas la grande variabilité du signal de pression dans le champ proche (de  $R/L = 1$  à 19 pour le SSBJ et  $R/L = 1$  à 16 pour les low boom). Il en résulte une grande disparité du signal au sol en fonction de la distance d'extraction du champ proche. On observe la convergence des signaux de pression et des signatures au sol pour le SSBJ de  $R/L = 13$  à 19 et de  $R/L = 10$  à 16 pour les low boom. Plus précisément, dans le cas du SSBJ, on obtient la convergence et donc un couplage valide aux environs de  $R/L = 6$ . Cette convergence est atteinte vers  $R/L = 11$  pour les géométries des low boom. En effet, elles sont plus complexes et génèrent plus de non-linéarités.

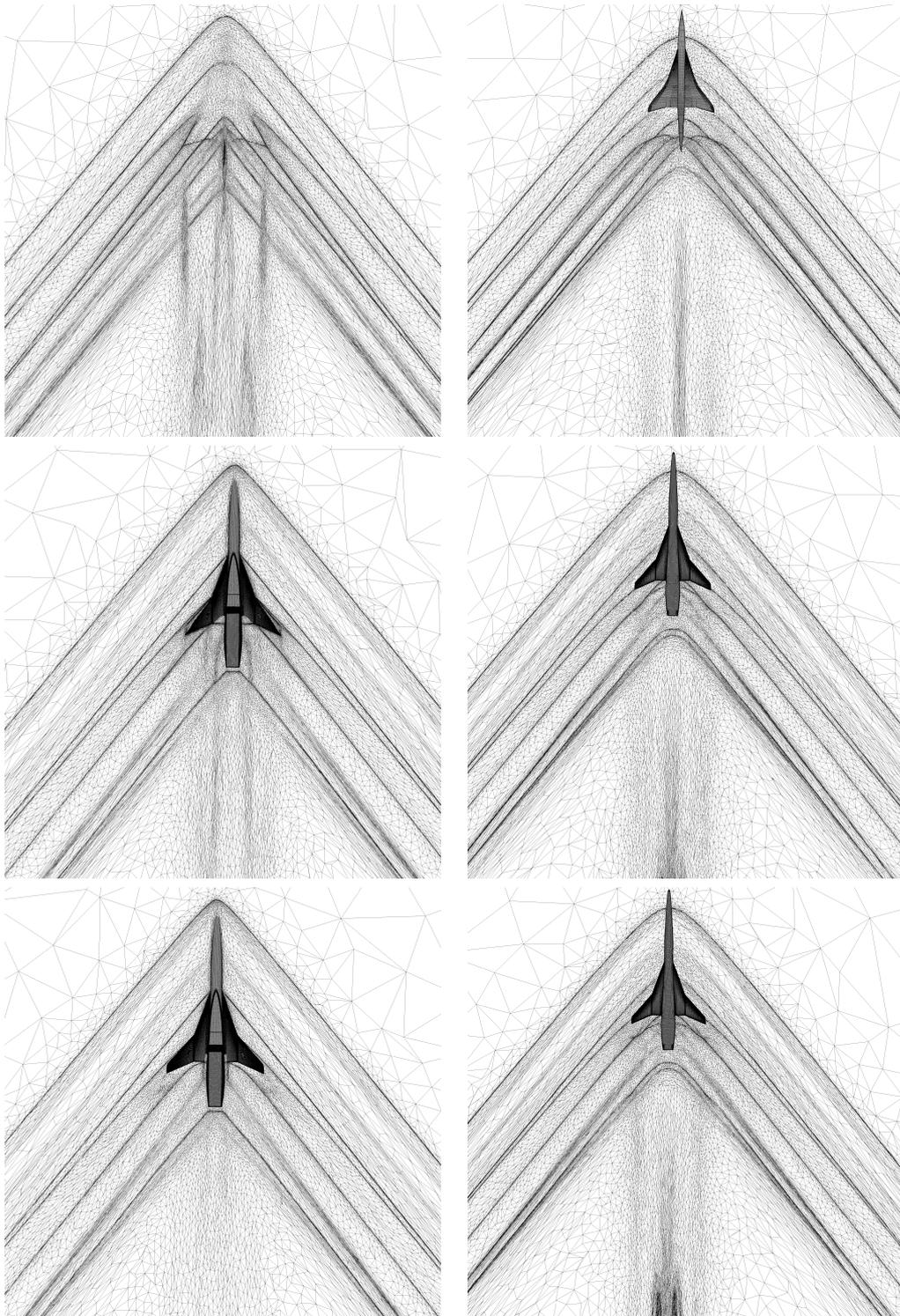
En bas sur les Figures 5.23, 5.24 et 5.25, on analyse la convergence des signaux à  $R/L = 15$  et de la convergence de la propagation à partir de  $R/L = 15$  au cours du processus adaptatif. Plus précisément, on compare les signaux pour chacune des solutions finales à complexité fixée, *i.e.*, aux itérations 8, 16, 24 et 32 de la boucle d'adaptation. On dénote par adaptation 1, 2, 3 et 4 les maillages contenant environ 1.25, 2.5, 5 et 10 millions de sommets. Il est important de préciser qu'en trois dimensions si on augmente d'un coefficient quatre la précision, c'est-à-dire que la taille de maillage est divisée par deux, alors le nombre de sommets est multiplié par 8.



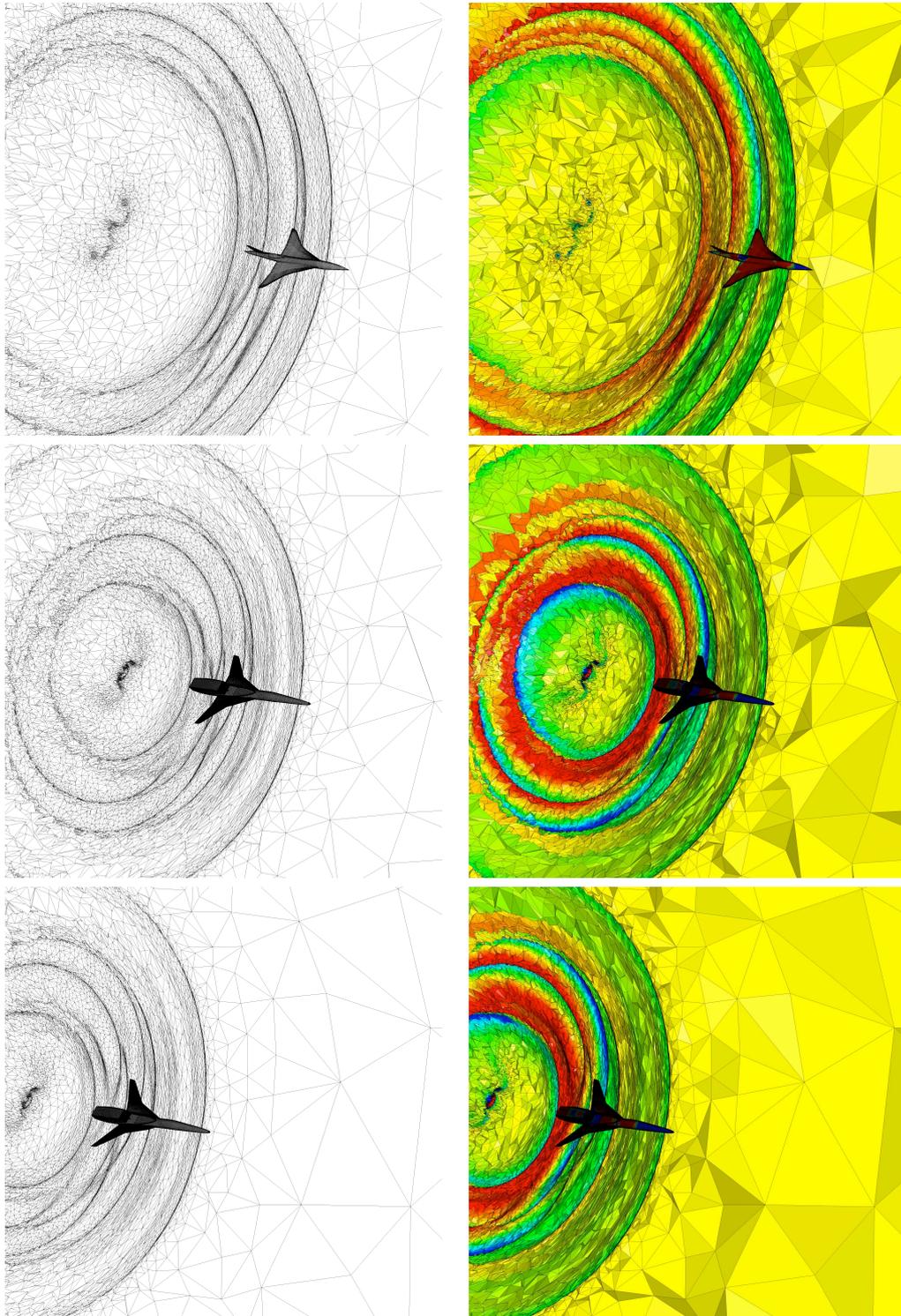
**Figure 5.18:** De haut en bas, les trois configurations étudiées : SSBJ, low boom et low boom+dièdre. À gauche, les maillages surfaciques, et à droite, les iso-valeurs du nombre de Mach.



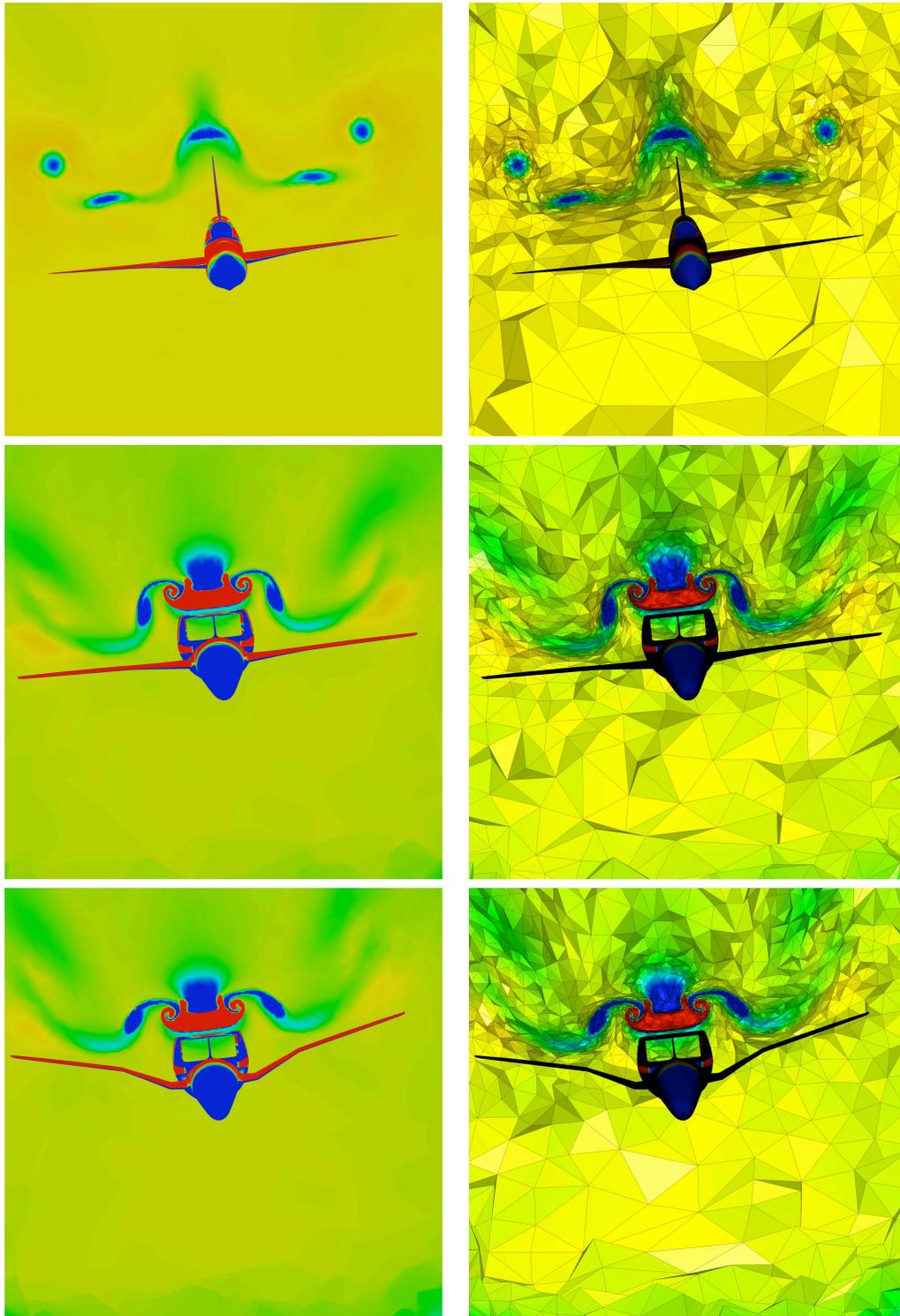
**Figure 5.19:** Coupe des maillages volumiques suivant le plan de symétrie  $0xz$  pour chaque configuration. De haut en bas, les configurations SSBJ, low boom et low boom+dièdre.



**Figure 5.20:** Coupe des maillages volumiques suivant le plan  $0xz$  sous chaque configuration. De haut en bas, les configurations SSBJ, low boom et low boom+dièdre.



**Figure 5.21:** Coupe des maillages volumiques suivant le plan  $0xy$  derrière chaque configuration. De haut en bas, les configurations SSBJ, low boom et low boom+dièdre.



**Figure 5.22:** Coupe des maillages volumiques suivant le plan de symétrie  $0xz$  pour chaque configuration. De haut en bas, les configurations SSBJ, low boom+dièdre et low boom.

Donc dans cette étude, le maillage à l'adaptation 4 n'est «que» deux fois plus fin que celui à l'adaptation 1.

Pour le SSBJ, la convergence est presque atteinte à l'adaptation 1 même si la signature de pression est diffusée lorsqu'on la compare à celle de l'adaptation 4. En effet, cela n'influence que très peu le bang. Pour la configuration low boom, il faut au moins la précision du maillage de l'adaptation 2 pour avoir une solution représentative à  $R/L = 15$ . Sinon, le premier choc du bang sonique au sol est mal calculé. Enfin pour le low boom + dièdre, il faut aussi avoir au moins la précision atteinte lors de l'adaptation 2. Sinon, cette fois ce sont les chocs de nez et de voilure qui sont sous-estimés.

Ces observations signifient que certaines échelles de la solution, en fait les petits détails d'amplitude, n'influencent pas la signature du bang sonique obtenue avec la méthode de Thomas. Toutefois, il faut quand même faire attention avec la dissipation de la solution. Si on diffuse trop la solution alors on peut avoir une mauvaise signature à l'extraction. Il est intéressant de remarquer que la dissipation obtenue sur les maillages adaptés anisotropes semble avoir une certaine consistance au cours du processus adaptatif en préservant les propriétés du signal. Les bangs au sol obtenus sont donc proches.

En conclusion, on a mis en évidence qu'avec la méthode de propagation de Thomas il était impératif d'avoir une signature de pression suffisamment précise assez loin dans le champ proche pour avoir un couplage valide entre le modèle non linéaire du champ proche et le modèle linéaire acoustique pour la propagation. Cette distance augmente avec la complexité de la géométrie et les effets non-linéaires qu'elle crée. Par contre, il n'est pas nécessaire d'être «ultra» précis au niveau de l'extraction si la dissipation du signal est consistante. Néanmoins, on peut être amené à avoir une telle précision dans le champ proche si elle est nécessaire pour avoir un signal convenable lors de l'extraction.

#### 5.4.5 Comparaison des différentes géométries

On compare maintenant les trois géométries en analysant :

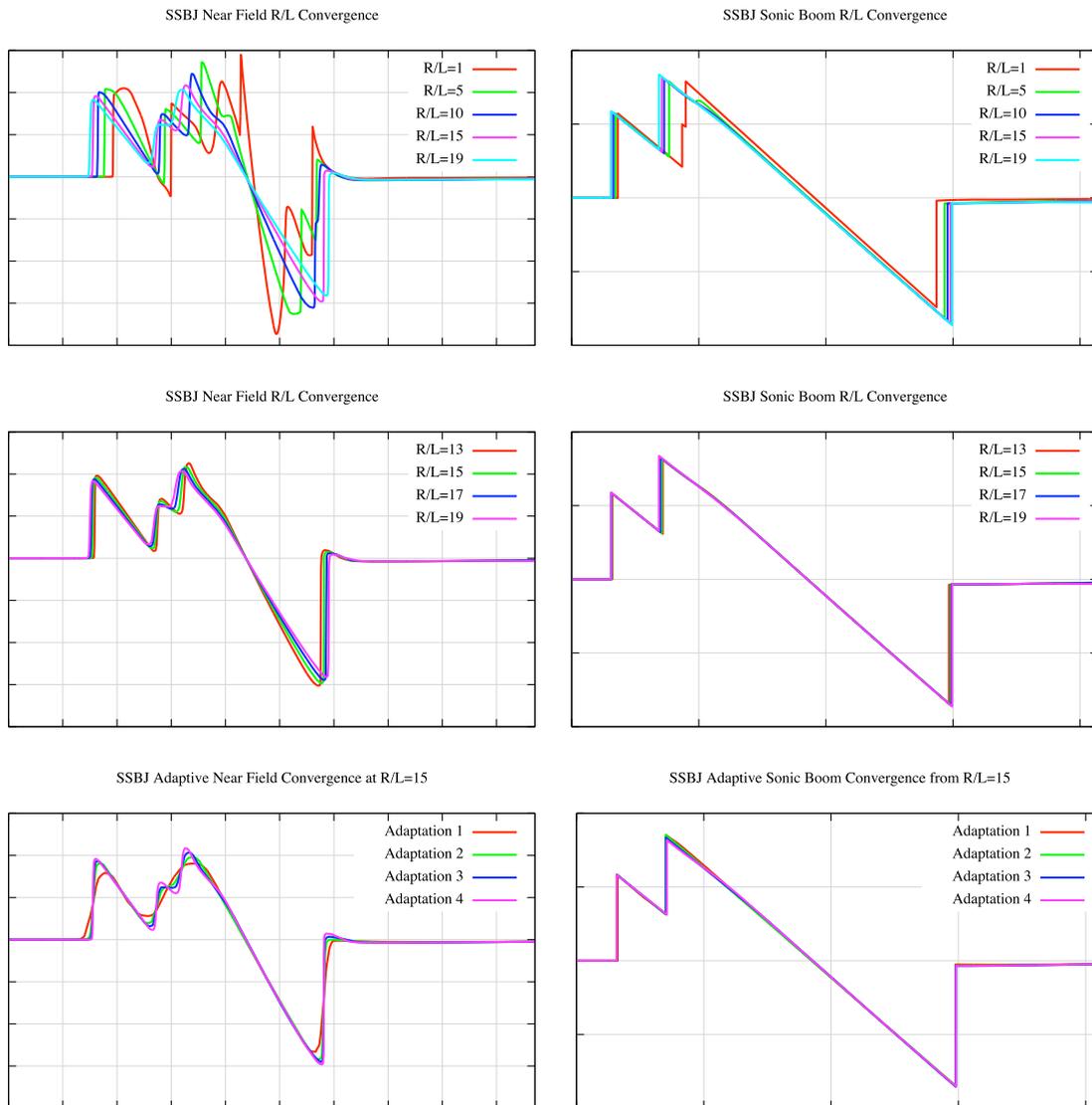
- la traînée,
- la signature de pression à 700 mètres sous l'avion, *i.e.*,  $R/L = 18$  pour le SSBJ et  $R/L = 16$  pour les low boom
- et les bangs soniques à partir de ces extractions.

Pour faire les comparaisons, on va donner les valeurs d'intérêt, traînée et l'intensité des trois chocs, en relatif. La référence sera le SSBJ. On pose que le SSBJ a une traînée de 1 et tous les chocs des bangs soniques sont comparés au premier choc du bang du SSBJ pour lequel on impose son intensité à 1. Les résultats relatifs sont résumés dans la Table 5.3.

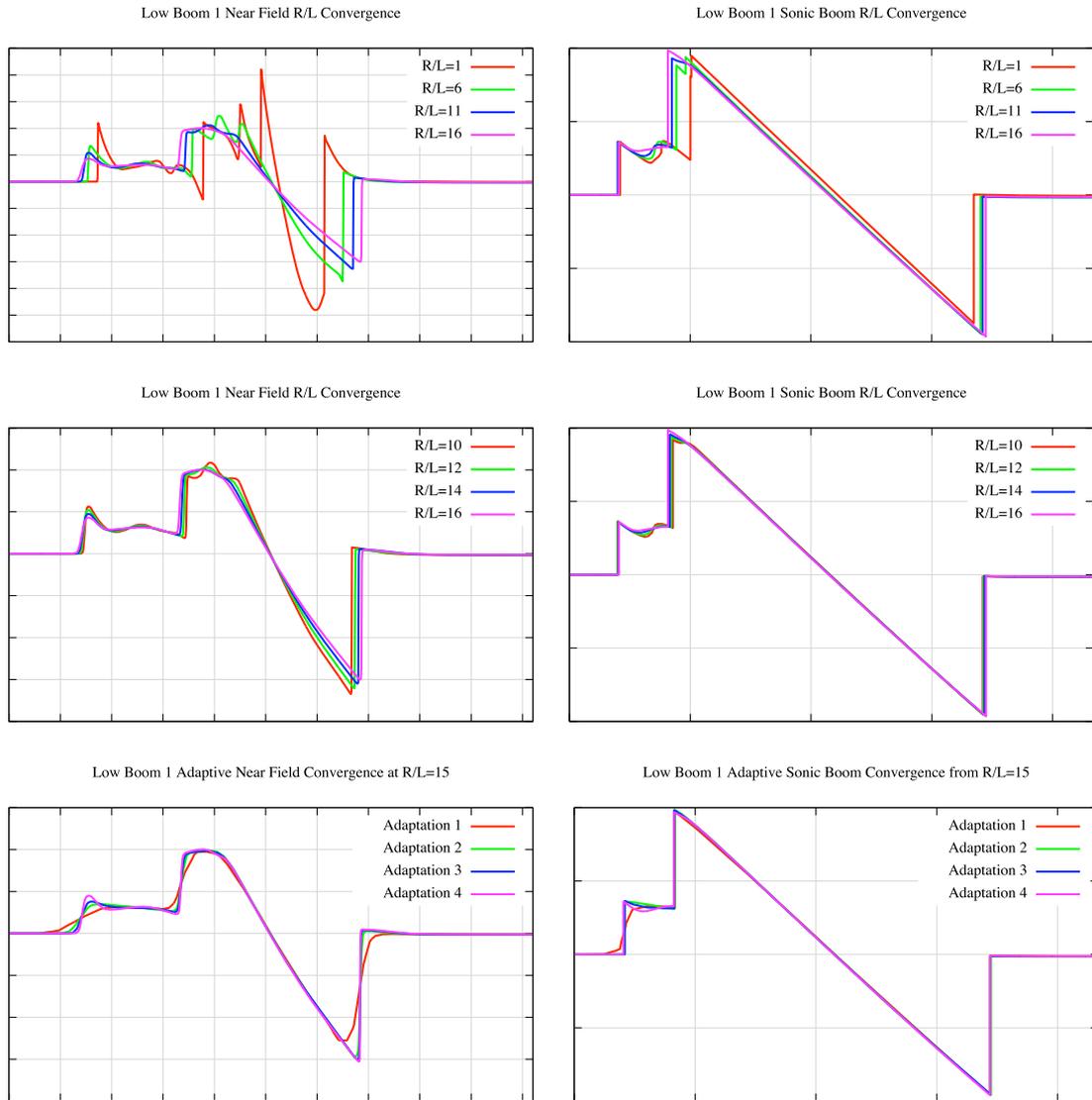
On compare d'abord les configurations faible traînée et faible bang. Puis, on analyse l'effet de l'angle dièdre de la voilure sur le bang sonique.

*Faible traînée vs. faible bang.* L'analyse du champ proche, à 700 mètres sous l'avion, montre que la configuration low boom + dièdre réduit nettement le choc de nez de l'avion. Par contre, les chocs de voilure et de queue sont légèrement supérieurs à ceux du SSBJ. Ces différences se traduisent sur la signature de pression au sol par une réduction de près de 40% du premier choc et une augmentation de 30% et de 17% de l'intensité du deuxième et troisième chocs, respectivement.

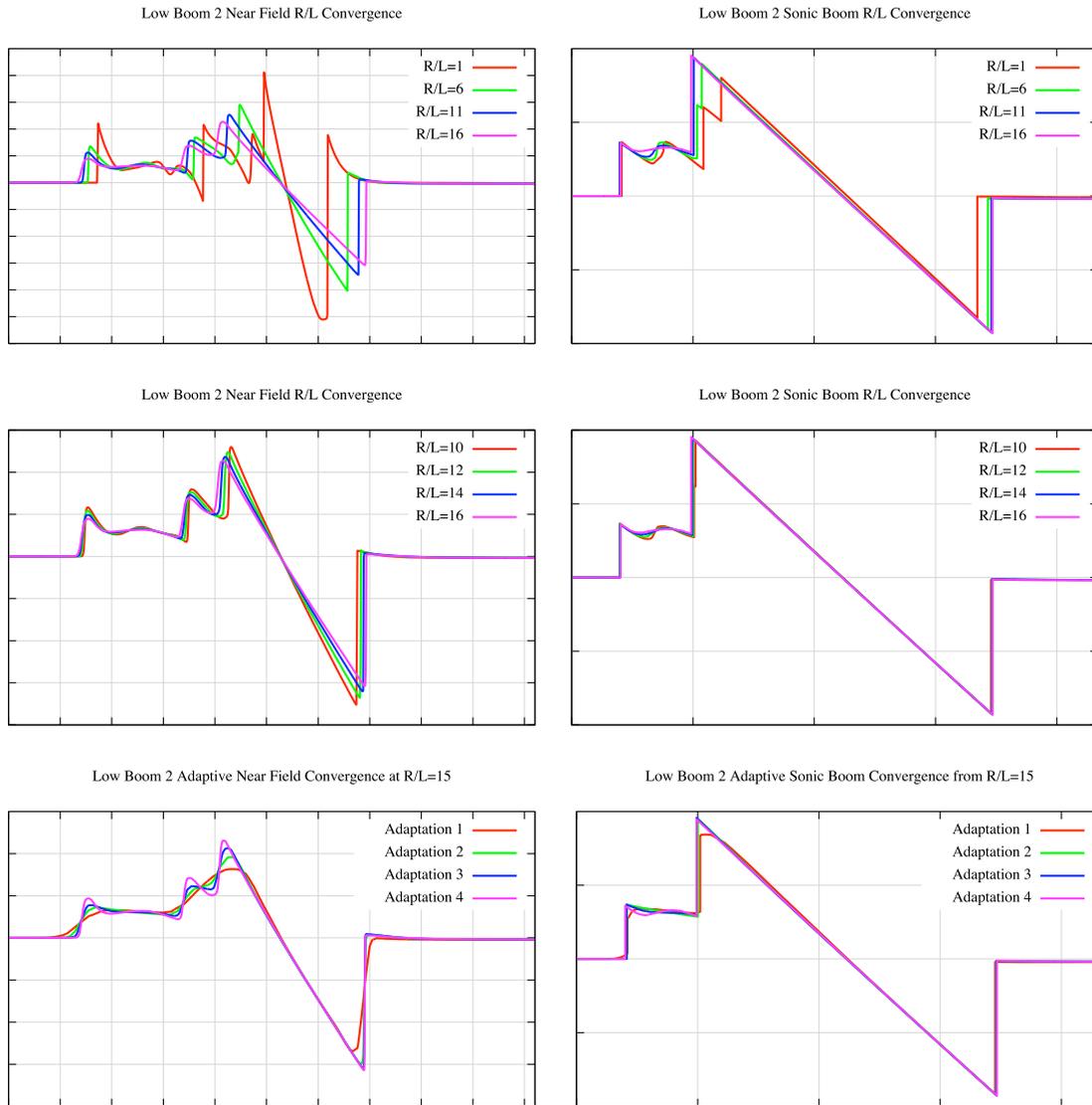
Il est très intéressant et surprenant de constater l'existence d'une région sinusoïdale entre le premier et le deuxième choc sur la signature de bang sonique de la configuration low boom



**Figure 5.23:** Signatures du champ proche de pression et bangs soniques associés pour le SSBJ. À gauche, on représente le champ proche  $\sqrt{R/L} \delta p$  en fonction de la position  $x$ . À droite, on représente la pression en fonction du temps.



**Figure 5.24:** Signatures du champ proche de pression et bangs soniques associés pour le low boom. À gauche, on représente le champ proche  $\sqrt{R/L} \delta p$  en fonction de la position  $x$ . À droite, on représente la pression en fonction du temps.



**Figure 5.25:** Signatures du champ proche de pression et bangs soniques associés pour le low boom+dièdre. À gauche, on représente le champ proche  $\sqrt{R/L} \delta p$  en fonction de la position  $x$ . À droite, on représente la pression en fonction du temps.

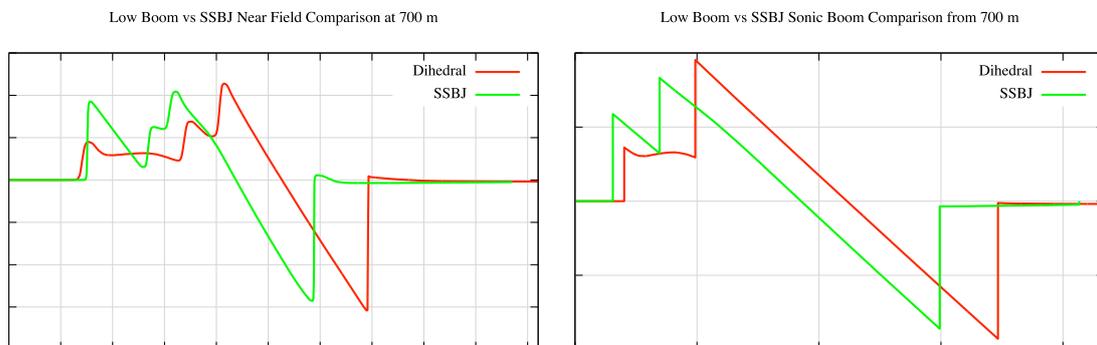
+ dièdre. Il est très rare de voir de telle région lisse dans les ondes de bang sonique. On peut alors se demander quel est réellement son impact sur le bang. Est ce qu'elle va avoir pour effet d'augmenter le temps de montée du choc de voilure ? Si c'est le cas, alors même si l'intensité de ce deuxième choc est importante, sa nuisance serait fortement réduite. En effet, le temps de montée est essentiel dans notre perception du bang sonique, plus il est grand, moins on ressent de gêne. Ce qui serait un atout essentiel pour la forme faible bang.

*Effet de l'angle dièdre.* Un angle dièdre sur les ailes modifie intrinsèquement le choc de voilure de l'avion dans le champ proche. Cette modification de la géométrie a pour impact d'envoyer plus d'effets de portance latéralement. Dans la signature de pression à  $R/L = 15$ , cf. Figure 5.27, on remarque que l'on obtient un double choc au lieu d'une «bosse». L'impact sur le bang est de décaler le deuxième choc, *i.e.*, il arrive plus tard, et de réduire légèrement l'amplitude du dernier choc : 1.56 au lieu de 1.62. Cela est dû à la longueur effective de l'avion qui a été augmentée par l'effet du dièdre. Par contre, l'intensité du deuxième choc n'a pas du tout été modifiée.

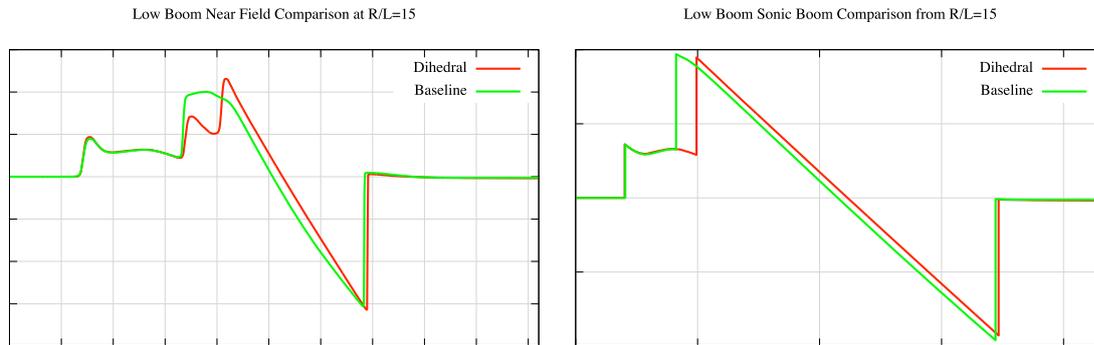
L'effet dièdre est positif mais il influe faiblement sur la signature du bang au sol. La question que l'on peut se poser est : est ce que le décalage dans le temps du deuxième choc a un impact positif sur la perception humaine du bang sonique ?

En contre partie, la réduction du bang sur le premier choc s'accompagne d'une forte augmentation de la traînée. On obtient pour la géométrie low boom une traînée de 1.63 et pour la configuration low boom + dièdre une traînée de 1.64. Ce qui représente une augmentation de près de 60%, illustrant ainsi l'impact fortement négatif sur la traînée d'une optimisation du bang sonique. Cependant, ce chiffre doit être revue à la baisse car il n'y a pas eu d'intégration moteur pour la géométrie du SSBJ.

En conclusion, la perte de traînée a permis un gain substantiel sur le premier choc. Par contre, il y a un effet négatif sur le deuxième choc à moins que la zone sinusoïdale augmente le temps de montée de celui-ci. En ce qui concerne le troisième choc, il a été amplifié et est toujours aussi nuisible. Néanmoins, ces résultats doivent être relativisés car on a étudié une configuration du SSBJ sans l'intégration des nacelles.



**Figure 5.26:** Comparaison des signatures de pression et des bang soniques associés pour le SSBJ et le low boom+dièdre.



**Figure 5.27:** Comparaison des signatures de pression et des bang soniques associés pour le low-boom+dièdre et le lowboom.

Géométrie	1 <sup>ier</sup> choc	2 <sup>ième</sup> choc	3 <sup>ième</sup> choc	Traînée
SSBJ	1	0,86	1,40	1
Low boom	0,61	1,12	1,62	1,63
Low boom + dièdre	0,62	1,12	1,56	1,64

**Table 5.3:** Table récapitulant les intensités relatives des ondes de choc des bangs soniques pour chaque configuration. La traînée relative de chaque avion est aussi indiquée.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a validé la boucle d'adaptation anisotrope sur des géométries complexes avec des confrontations à l'expérimentation pour les calculs CFD. De toutes les méthodes testées, la plus précise et la plus robuste est le schéma V6 avec une reconstruction de Green pour le hessien et l'utilisation du solveur de HLLC. Dans le cadre de l'étude du bang sonique, l'adaptation de maillage multi-échelles a permis d'analyser les signatures de pression à de grandes distances sous l'avion, *i.e.*,  $R/L$  supérieure à 16 sur l'ensemble des géométries proposées.

Cette étude a montré que la modélisation du bang sonique en utilisant la méthode de Thomas pour la propagation nécessite d'utiliser des signatures du champ médian suffisamment loin sous l'avion afin d'avoir des signatures au sol convergées. Cela permet également de valider le couplage avec le calcul CFD. On a constaté que la propagation dans l'atmosphère filtre les hautes fréquences du signal acoustique. Par conséquent, la solution n'a pas à être très précise au niveau de l'extraction. Dans les cas étudiés, il semble que 5 millions de sommets soit suffisant. Les maillages les plus précis sont cependant nécessaires lorsqu'on souhaite valider l'ordre deux asymptotique sur les solutions CFD.

Par contre, l'étude menée ici confirme que la réduction du bang sonique implique une augmentation de la traînée. Ce qui implique que l'avion consomme plus.

Des améliorations possibles pour la prédiction du bang sonique seraient d'utiliser des méthodes de propagation plus performantes, comme la méthode multipôle. Elle nécessite une solution CFD très précise mais dans le champ proche de l'avion pour des  $R/L$  compris entre 1 et 2. L'utilisation de l'adaptation avec adjoint permettrait également de diminuer la taille des maillages ou bien à taille équivalente d'extraire les signatures beaucoup plus loin dans le

champ médian.

### Remerciements

Je tiens à remercier Dassault Aviation pour nous avoir fourni les maillages surfaciques de ces géométries et de nous permettre de présenter ces résultats. Je tiens à remercier tout particulièrement F. Dagrau, L. Daumas, N. Héron, M. Mallet et G. Rogé.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Alauzet, S. Borel-Sandou, L. Daumas, A. Dervieux, Q. Dinh, S. Kleinveld, A. Loseille, Y. Mesri, and G. Rogé. Multi-model and multi-scale optimization strategies. application to sonic boom reduction. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(1-2) :191–214, 2008.
- [2] H. W. Carlson and R. J. Mack and O. A. Morris. A wind-tunnel investigation of the effect of body-shape on sonic-boom pressure distributions. TN. D-3106, Nasa, 1965.
- [3] W. D. Hayes, R. C. Haefeli, and H. E. Kulsrud. Sonic boom propagation in a stratified atmosphere with computer program. TN. CR-1299, Nasa, 1969.
- [4] D. C. Howe, K. A. Waithe, and E. A. Haering. Quiet spike near field flight test pressure measurement with computational fluid dynamics comparisons. *AIAA Paper*, 2008-128, 2008.
- [5] ICAO. *Manual of the ICAO Standard Atmosphere (extended to 80 kilometres)*. Doc 7488. Third edition edition, 1993.
- [6] W. T. Jones, E. J. Nielsen, and M. A. Park. Validation of 3D adjoint based error estimation and mesh adaptation for sonic boom prediction. *AIAA Paper*, 2006-1150, 2006.
- [7] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied shape optimization for fluids*. Oxford university press, 2001.
- [8] J. M. Morgenstern, A. Arslan, V. Lyman, and J. Vadyak. F-5 shaped sonic boom demonstrator's persistence of boom shaping reduction through turbulence. *AIAA Paper*, 2005-0012, 2005.
- [9] Pederson. Sonic boom technologies and challenges. In *FAA Civil Supersonic Aircraft Workshop*, Arlington, VI, USA, 2003.
- [10] C. Thomas. Extrapolation of sonic boom pressure signatures by the waveform parameter method. TN. D-6832, Nasa, 1972.



# Conclusion

Cette thèse s'est inspirée de nombreux travaux préalables [1, 2, 3, 5, 6, 7, 9]. Son ambition en est parfois le complément ou la suite logique. Si ces thèses avaient toutes une composante principale orientée plutôt vers les fluides ou le maillage, elles démontrent toutes cependant, par leur contenu, l'existence d'une corrélation forte entre le maillage et le but applicatif visé. Les problématiques type fluide se nourrissent des problématiques du maillage et inversement. Il est donc impératif de disposer d'outils de couplage entre un solveur et le support discret, le maillage. Le but devient alors de pouvoir tirer le meilleur parti de chaque composante.

J'ai bénéficié au cours de ma thèse des deux expertises complémentaires (i) maillage et (ii) solveur numérique pour la mécanique des fluides numériques. J'ai pu en dégager une problématique générale qui consiste à proposer un formalisme générique pour la **modélisation** des maillages **non structurés anisotropes** et son utilisation et application en mécanique des fluides. L'enjeu est donc de décrire «le meilleur» maillage pour l'application visée et d'être en mesure de le générer en pratique. À titre d'exemple, on a décrit le maillage minimisant globalement l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^p$  dans le Chapitre 2. Dans le Chapitre 3, on s'est intéressé à l'adaptation anisotrope pour des écoulements avec des chocs où le schéma de résolution est d'ordre un dans les chocs et d'ordre deux ailleurs. On décrit alors le maillage qui assure un ordre deux de convergence en norme  $\mathbf{L}^p$  partout. Dans le Chapitre 4, on décrit le maillage qui minimise l'erreur d'approximation sur une fonctionnelle en prenant en compte que son évaluation dépend de la résolution des équations d'Euler.

Dans la suite, on rappelle brièvement les principaux résultats. Pour terminer, on dégage certaines perspectives possibles.

## RÉSUMÉ DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

L'adaptation de maillage est un moyen de contrôler le maillage pour l'application visée. Dans cette thèse, on a proposé un modèle géométrique et générique de maillage basé sur la notion d'**élément unité** et de **maillage quasi-unité** par analogie avec les **espaces métriques riemanniens**. Le formalisme introduit permet d'écrire le problème courant sous la forme unifiée d'un problème d'optimisation portant sur un maillage continu. On a successivement envisagé comme problème :

1. la minimisation de l'erreur d'interpolation linéaire,
2. la certification d'un calcul adaptatif pour des écoulements avec des chocs numériques,
3. l'erreur sur une fonctionnelle coût, en considérant explicitement dans l'analyse l'équation aux dérivées partielles résolue.

Cela permet de faire entrer dans toute analyse numérique, le maillage comme une inconnue du problème.

## L'erreur d'interpolation : d'un problème discret mal posé à un problème continu bien posé

On a montré que trouver le maillage minimisant globalement la norme  $\mathbf{L}^p$  de l'erreur d'interpolation est un problème mal posé sur l'espace des maillages. On a résolu ce problème en utilisant la classe d'équivalence des maillages ayant la même erreur pour le même nombre de sommets. On généralise en trois dimensions la vision des métriques continues introduites dans [2, 6]. Dans [2, 6], l'estimation de l'erreur d'interpolation est issue d'une majoration discrète en norme  $\mathbf{L}^\infty$  introduite dans [1]. L'obtention d'un **modèle** d'erreur local **continu** était sous-entendue dans l'analyse. On a montré dans cette thèse, que l'erreur d'interpolation linéaire sur un élément  $K$  pour des fonctions quadratiques n'était fonction que de la métrique  $\mathcal{M}$  pour laquelle  $K$  est unité et du hessien de la fonction. On montre alors que la classe d'équivalence des éléments unités dans  $\mathcal{M}$  est égale à la classe d'équivalence des éléments commettant la même erreur d'interpolation et de même volume. Cette égalité provient d'**invariants géométriques** vérifiés par les éléments unités dans  $\mathcal{M}$ . On déduit un modèle d'erreur qui est exact pour des fonctions quadratiques définies positives. On montre également que l'erreur d'interpolation peut s'écrire continûment au moyen d'un **opérateur d'interpolation linéaire continu** défini sur un maillage continu. Le problème initial est résolu par un calcul de variations pour minimiser l'erreur d'interpolation linéaire continue en norme  $\mathbf{L}^p$ . En pratique, le maillage optimal est un maillage unité du maillage continu optimal. On montre l'unicité du maillage continu ainsi que l'**ordre deux de convergence asymptotique** de l'erreur d'interpolation en fonction de la complexité du maillage. Cet ordre a été validé sur des exemples numériques en deux et trois dimensions.

## Retrouver l'ordre deux pour des écoulements avec des chocs

Le Chapitre 3 traite de l'adaptation de maillage anisotrope pour des écoulements en présence de chocs. On prend en compte dans l'analyse l'utilisation d'un schéma de résolution d'**ordre élevé** pour les équations d'Euler. Trois problématiques sont alors étudiées :

- le recours classique à une **taille minimale** dans le processus adaptatif en présence de chocs, qui conduit à la **perte de l'anisotropie**,
- l'ordre du schéma de résolution qui retombe à l'**ordre un dans les chocs**, ce qui conduit à la perte de l'ordre deux initial,
- les **normalisations locales** introduites pour capter toutes les échelles de la solution.

On montre que le processus adaptatif converge, même en présence de chocs, lorsque le schéma numérique n'est pas compressif, *i.e.*, assez dissipatif. Cependant, si l'estimateur est en norme  $\mathbf{L}^\infty$ , la taille requise dans les chocs peut tendre vers une taille irréalisable en pratique. Prescrire une taille minimale est alors nécessaire, mais on perd l'anisotropie et l'ordre deux de convergence. On montre pour des chocs numériques qu'un contrôle de l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^p$  permet de retrouver l'ordre deux dans les chocs. Dans le même temps, le choix de la norme induit une normalisation, optimale pour l'erreur d'interpolation, qui **élimine la prescription d'une taille minimale** et qui permet de **capter toutes les échelles de la solution**. Un ensemble de calculs CFD fortement anisotropes a été réalisé, sans prescription d'une taille minimale, en deux et trois dimensions. L'ordre deux, même en présence de chocs, est obtenu sur des suites de maillages adaptés. On montre également les limites de l'adaptation multi-échelles pour des schémas compressifs, ou l'échec de la normalisation sur des particularités d'écoulements complexes comme les points triples.

## Adaptation orientée pour une fonctionnelle coût : une anisotropie naturelle

On a proposé dans ce chapitre une estimation *a priori* abstraite pour le contrôle de l'**erreur d'approximation** d'une fonctionnelle dans le cas des équations d'Euler. On s'appuie sur les développements de Giles [4] sur les termes correcteurs d'erreurs pour les fonctionnelles scalaires. L'idée consiste à décrire le maillage pour **minimiser l'incertitude du terme correcteur**. Cependant, l'estimation ne représente réellement l'incertitude qu'à convergence. L'utilisation d'un processus adaptatif permet d'atteindre cette convergence à la fois sur la solution et sur le terme correcteur. Cette estimation est dérivée formellement pour les équations d'Euler dans le cas particulier d'un solveur volumes finis. Elle fait intervenir des **erreurs d'interpolation sur les flux d'Euler** pondérées par le gradient de l'**état adjoint** associé au jacobien de la fonctionnelle. En pratique, cette estimation est minimisée dans le cadre théorique des maillages continus afin de prescrire le meilleur maillage pour minimiser l'erreur d'approximation. On vérifie ces bonnes convergences numériquement en deux dimensions sur des fonctionnelles classiques en aérodynamique comme la prédiction de la traînée ou de la portance. Même si la théorie suppose des solutions régulières, son comportement en pratique sur des écoulements avec des chocs est très satisfaisant. On montre également sur des exemples que cette stratégie d'adaptation distribue de manière optimale les degrés de liberté pour observer la fonctionnelle, contrairement à une adaptation basée sur l'erreur d'interpolation. Enfin, cette approche propose intrinsèquement un **contrôle anisotrope**. L'anisotropie ne repose pas sur le choix subjectif d'un champ solution comme le nombre de Mach ou la pression comme dans [10] mais dépend de toutes les solutions conservatives et des flux d'Euler.

## Prédiction haute fidélité du bang sonique

Le bang sonique est un phénomène complexe, fortement anisotrope. On montre que la complexité de la géométrie a un impact sur la signature du bang entendu au sol. L'adaptation de maillage multi-échelles permet de capter avec précision le champ de pression loin sous l'avion (1 Km). Cela permet de proposer un **couplage valide** entre le modèle fluide, non-linéaire et représenté par les équations d'Euler, et un modèle linéaire de propagation d'ondes acoustiques. En effet, la signature du champ de pression sous l'avion doit vérifier des propriétés de convergence. La distance sous l'avion pour laquelle cette convergence est atteinte est fonction de la complexité de la géométrie : présence de nacelles, ... On compare plusieurs **formes complexes**, faible traînée ou faible bang, qui ont été fournies lors du contrat Européen HISAC.

## PERSPECTIVES

### Pour les estimateurs d'erreur

Le formalisme de maillage continu a naturellement une interprétation géométrique simple. Il est facilement envisageable de développer des estimateurs en trois dimensions pour des interpolations d'ordre élevé. Cet aspect est nécessaire pour une stratégie d'adaptation pour les méthodes numériques d'ordre très élevé : méthode de distribution des résidus, Galerkin discontinu par exemple. On peut voir l'introduction sur ce sujet en Annexe A.1.

Cette thèse a proposé des développements pour la *h*-adaptation, on peut également s'intéresser à une adaptation en norme *n* et en ordre *p*. En effet, on peut par exemple calculer les distances dans les espaces normés suivants  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  ou  $\|\cdot\|_\infty$ . En effet, la complexité de la

physique implique que le maillage continu tend à représenter des maillages inhomogènes. Par exemple, un maillage en trois dimensions peut être composé des parties suivantes : couches limites, adaptation Euler classique, ordre élevé pour la turbulence. Il est donc impératif que la prescription du maillage continu soit également adaptée à la diversité des maillages. Le choix de la norme permet de définir des formes d'élément unité différentes. Le traitement combiné de *hpn*-adaptation est une solution envisageable à court terme. Pour des modèles d'erreur inhomogène (*p*-adaptation), on peut lire l'introduction sur ce sujet en Annexe A.2.

Enfin, on s'est efforcé dans cette thèse d'écrire l'adaptation de maillage dans le formalisme de l'optimisation. L'ensemble des fonctionnelles ont été minimisées par un calcul de variations analytique. On peut imaginer des cas plus complexes non linéaires où une résolution analytique n'est plus envisageable. On peut alors envisager de minimiser numériquement les fonctionnelles en utilisant les techniques d'optimisation numérique sur l'espace des maillages continus.

### Pour le maillage adaptatif

Améliorer les estimations d'erreur s'accompagne également de plusieurs développements techniques sur la génération de maillage anisotrope.

Des extensions du noyau de Delaunay pour des métriques anisotropes existent [3]. Cependant, un certain nombre d'approximations théoriques sont nécessaires, rendant le problème mal posé. Le calcul des distances dans la métrique ou la définition de la cavité par exemple, dépendent fortement des interpolations de métriques utilisées. En pratique, on ne peut pas prédire et évaluer l'impact sur le maillage final de ces approximations. Cependant, avec l'utilisation d'outils bien posés comme l'interpolation de métriques Log-Euclidiennes, on peut penser qu'il existe un formalisme tel que le noyau de Delaunay ait une certaine consistance théorique. La conséquence pratique serait d'avoir un noyau anisotrope plus robuste et plus fiable.

Dans cette thèse, des maillages comportants plus de 10 millions de points ont été générés en parallèle. L'utilisation d'un processus parallèle a permis d'améliorer le maillage en limitant les facteurs d'échelles. Cependant, cette stratégie n'est valide que pour du remaillage local. Un grand défi serait de proposer une stratégie parallèle pour contrer les faiblesses des méthodes de génération (globale) de maillage. Cette approche pourrait être couplée avec la Delaunay admissibilité [8] par exemple.

L'utilisation d'une unique fonction qualité par le maillage n'est plus suffisante. En effet, en fonction des applications visées, une fonction qualité peut être préférée à une autre. On peut citer par exemple l'optimisation des hauteurs pour la mécanique des fluides, ou encore une fonction qualité pour la génération de couches limites. Ce travail serait une extension en trois dimensions des travaux initiaux présents dans [5].

En pratique, considérer des adaptations de maillage en norme permettrait de générer automatiquement des maillages adaptés cartésiens orientés et étirés. L'idée est alors d'identifier le comportement des schémas numériques sur ce type de maillage.

### Pour le solveur

Dans le cas spécifique de l'étude du bang sonique, un prolongement consisterait à proposer un schéma compressif dans les chocs. On peut alors envisager de faire du *direct sonic boom*, en propageant les ondes de choc émises par l'avion jusqu'au sol tout en prenant en compte un modèle d'atmosphère dans le volume. On pourrait se libérer de la nécessité de coupler un

code CFD à un code de propagation. L'application visée serait de faire de l'optimisation de forme. Or la difficulté actuelle réside dans la différentiation du code de propagation.

Je souhaiterais, même si c'est peu commun, faire des remerciements de clôture aux personnes qui ont toutes perdu et investi beaucoup de temps pour moi : Alain, Cécile, Éric, Frédéric, Géraldine, Loïc, Pascal et Paul-Louis.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Alauzet. *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides*. PhD thesis, Université Montpellier II, Montpellier, France, 2003.
- [2] F. Courty. *Optimisation différentiable en mécanique des fluides numérique*. PhD thesis, Université Paris XI, Orsay, Paris, France, 2003.
- [3] C. Dobrzynski. *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2005.
- [4] M. B. Giles and A. Suli. Adjoint methods for PDEs : a posteriori error analysis and postprocessing by duality. *Acta Numerica*, pages 145–236, 2002.
- [5] J.-F. Lagüe. *Optimisation de maillage basée sur une erreur locale d'approximation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2006.
- [6] D. Leservoisier. *Stratégies d'adaptation et de raffinement de maillage en mécanique des fluides numérique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2001.
- [7] Y. Mesri. *Gestion et contrôle des maillages non structurés anisotropes, applications en aérodynamique*. PhD thesis, Université de Nice, Nice, France, 2007.
- [8] P. Pebay. *A priori Delaunay-conformity in 2 and 3 dimensions*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2000.
- [9] M.-G. Vallet. *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 1992.
- [10] D. A. Venditti. *Grid adaptation for functional outputs of compressible flow simulations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, 2002.



# A

---

## *Interpolations d'ordre élevé et erreurs inhomogènes*

Dans l'ensemble des chapitres précédents, l'erreur d'**interpolation linéaire** a joué un rôle central pour des buts et dans des contextes différents :

- adaptation à des fonctions analytiques,
- adaptation à des solutions numériques,
- adaptation à une fonctionnelle pour les équations d'Euler.

On justifie cette utilisation constante par le fait que l'erreur d'interpolation linéaire est un sujet de mieux en mieux appréhendé. De plus, son utilisation pour la prescription d'un maillage anisotrope est facilitée par le fait que l'erreur d'interpolation linéaire est d'ordre deux spatialement, dans toutes les directions. Sur une arête d'un maillage, l'erreur d'interpolation s'exprime comme la «longueur» de l'arête pour le hessien de la solution numérique. La transformation d'un hessien à une métrique, outil de base pour générer des maillages anisotropes, est relativement aisée car elle consiste simplement à considérer la valeur absolue des valeurs propres du hessien.

On peut alors légitimement s'interroger sur la généralisation des résultats introduits jusqu'ici : contrôle en norme  $\mathbf{L}^p$ , opérateur d'interpolation continu, calcul des variations sur un maillage continu. Loin de proposer une réponse à cette question, on envisage l'utilisation du maillage continu dans des deux contextes (i) l'**interpolation d'ordre élevé** et (ii) les modèles d'**erreur inhomogène**. La première problématique revient à proposer une «quadratisation» d'un polynôme homogène de degré  $k$ . Ce cas généralise l'approche de l'erreur d'interpolation linéaire, plus simple, où le polynôme est déjà une forme quadratique. La seconde application concerne des modèles d'erreur qui ne sont pas homogènes, *i.e.*, où l'ordre de l'erreur est différent selon les directions d'observation. Une telle étude trouve des applications pour l'adaptation à des iso-surfaces. Elle permet également de proposer une stratégie d'adaptation anisotrope dans le cas où seule une carte d'erreurs par élément est disponible.

Dans une première partie, on introduit l'étude de l'erreur d'interpolation pour des interpolations d'ordre élevé. On propose une vision complètement indépendante du type d'interpolation. On revisite également géométriquement l'erreur d'interpolation linéaire.

Dans une deuxième partie, on se concentre sur la définition de modèles d'erreur inhomogène. On montre que ces derniers sont des généralisations du modèle d'erreur d'interpolation. Enfin, on propose un contrôle global en norme  $\mathbf{L}^p$  de ces modèles.

Enfin, on a regroupé à la fin un formulaire synthétisant l'ensemble des métriques obtenues ainsi que des estimations d'erreur d'interpolation en normes  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{H}^1$ .

## A.1 PRINCIPES GÉOMÉTRIQUES POUR L'ADAPTATION ET INTERPOLATIONS D'ORDRE ÉLEVÉ

L'interprétation géométrique des résultats obtenus dans le cas de l'erreur d'interpolation linéaire permet de prolonger cette étude pour des interpolations d'ordre élevé. On s'attache à dégager les problématiques d'ordre théorique.

Dans le cadre de l'adaptation de maillage non-structuré anisotrope, il existe assez peu de résultats à la fois numériques et théoriques pour les interpolations d'ordre élevé. Cela peut s'expliquer par le nombre d'interpolations envisageables et par leur complexité. On peut citer par exemple l'interpolation de Clément, lagrangienne, hermitienne. Il est donc difficile d'être complètement générique. Une autre complexité est due à la difficulté de générer des maillages avec des éléments courbes et donc de disposer pleinement des avantages de l'ordre élevé. Cependant, l'adaptation reste envisageable en conservant toujours le cadre classique des maillages simpliciaux.

La principale motivation provient alors plutôt du côté applicatif avec l'émergence de méthodes numériques naturellement d'ordre élevé comme le Galerkin discontinu ou la méthode de distribution des résidus [1] en mécanique des fluides. Théoriquement, ces méthodes permettent de monter en ordre assez facilement. Disposer alors d'une méthode d'adaptation adaptée à l'ordre de résolution apparaît nécessaire afin de répartir au mieux les degrés de liberté.

Le but de cette étude est de proposer une approche géométrique simple. On rappelle et commente dans un premier temps les résultats déjà existants.

### A.1.1 État de l'art et approche proposée

Pour une étude théorique générale, Huang [11] propose des estimations génériques en ordre d'interpolation. Ces travaux sont issus de la théorie de l'interpolation pour les éléments finis [5]. Cependant, une telle approche est en pratique assez délicate à mettre en œuvre. En effet, la métrique utilisée pour approcher une forme  $k$ -linéaire est basée sur un contrôle terme à terme du hessien de chacune des dérivées partielles. Ainsi pour chaque dérivée partielle, une métrique est dérivée, la métrique finale est l'intersection de l'ensemble de ces métriques. Cette idée est similaire à celle introduite par Hecht [10] pour le cas des interpolations de Lagrange d'ordre deux qui vise à contrôler l'erreur suivant chaque dérivée partielle. Suivant la procédure d'intersection de métriques utilisée, l'unicité du résultat n'est pas assurée. Pire encore, dans le cas d'une intersection basée sur la réduction simultanée, la métrique résultante tend à devenir isotrope, perdant ainsi tout l'intérêt des estimateurs anisotropes, cf. Chapitre 1.

On peut également citer les travaux de Cao qui reposent sur un développement analytique de l'erreur en deux dimensions. L'auteur généralise l'étude développée dans le cas d'une interpolation linéaire [3] à des interpolations d'ordre élevé [4]. Cependant, l'ensemble des paramétrisations introduites sont difficilement envisageables pour la dimension trois.

Notre approche se base sur un modèle d'erreur générique qui est un polynôme homogène de degré  $k$ . Outre le cas classique d'une erreur basée sur une série de Taylor, la plupart des

estimations anisotropes ont cette forme. On étudie d'abord le cas des polynômes de degré deux qui correspondent au cas d'une interpolation linéaire. Une vision complètement géométrique de l'erreur d'interpolation est proposée. On généralise les résultats obtenus dans le Chapitre 2. Localement, la métrique optimale est celle dont la boule unité est incluse dans la ligne de niveau un du polynôme homogène. Afin de garantir l'unicité dans le cas linéaire, elle doit également vérifier trois principes géométriques :

1. la consistance,
2. maximiser la plus petite des ses tailles,
3. maximiser son volume.

Analytiquement, cela revient à approcher un polynôme homogène de degré  $k$  par une forme quadratique définie positive prise à la puissance  $\frac{k}{2}$ . Le premier principe assure que le modèle quadratique majore bien la valeur absolue du polynôme homogène. Le second évite de s'aligner sur des branches infinies où d'erreur nulle. Dans le cas de l'adaptation isotrope, ce principe assure également un volume maximal. Le dernier principe est lié à l'ordre de convergence en maillage. En effet, pour maximiser l'ordre de convergence, il est nécessaire de minimiser le nombre d'éléments. Localement, cela est équivalent à maximiser le volume de la boule unité de la métrique. La nécessité de chaque principe est analysée sur le cas linéaire.

À partir de l'étude locale, un modèle d'erreur est dérivé. Il est alors possible de minimiser la norme  $\mathbf{L}^p$  de l'erreur en utilisant directement les résultats de la Section 2.4. Cela est équivalent à un contrôle en norme  $\mathbf{W}^{l,p}$  dans le cas de l'erreur d'interpolation pour une fonction donnée. On obtient également une majoration de l'erreur à partir de laquelle une convergence en maillages à l'ordre  $k + 1 - l$  peut être obtenue.

Dans une première partie, on introduit le modèle d'erreur local et quelques exemples d'estimations qui vérifient ce cadre. Ensuite, l'interpolation linéaire est revisitée géométriquement. Certaines pathologies liées au caractère hyperbolique ou parabolique de la forme quadratique sous-jacente sont étudiées. Dans une seconde partie, on présente la recherche de solutions vérifiant ces principes de manière théorique.

### A.1.2 Définitions et héritages du cas linéaire

La principale difficulté pour le cas de l'adaptation d'ordre élevé est la multiplication du nombre d'interpolations possibles : Lagrange, Hermite, ... Il est donc nécessaire de trouver un modèle générique d'erreur qui puisse factoriser un grand nombre d'interpolations. Dans notre approche, ce modèle repose sur l'espace des polynômes homogènes de degré  $k \geq 2$ .

On se concentre sur le cas en trois dimensions. Dans le voisinage d'un point  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , on suppose que l'erreur est bien représentée par un polynôme homogène  $H_e$  de degré  $k$  si l'interpolation utilisée est de degré de  $k - 1$ . Le polynôme  $H_e$  est composé de

$$N_k = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} 1 = \frac{k^2 + 3k - 1}{2}$$

coefficients. On l'écrit sous la forme suivante :

$$H_e(\mathbf{a}; x, y, z) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{k-1} c_{ij} (x - a_1)^i (y - a_2)^j (z - a_3)^{k-i-j}.$$

Afin de simplifier l'exposé, on suppose également que le point  $\mathbf{a}$  est l'origine de notre système de coordonnées, *i.e.*,  $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ .

La fonction  $H_e$  permet d'estimer l'erreur le long d'une arête  $\mathbf{ax}$  issue de  $\mathbf{a}$ . Si  $\mathbf{ax} = (x, y, z)$  alors cette erreur est simplement donnée par la fonction  $\Phi_{H_e}$  :

$$\Phi_{H_e}(\mathbf{x}) = |H_e(\mathbf{a}; x, y, z)|^{\frac{1}{k}}.$$

La fonction  $\Phi_{H_e}$  généralise le calcul des "longueurs" dans  $H_e$ . Si  $H_e$  est une forme quadratique définie positive  $\Phi_{H_e}$  est simplement la longueur dans le métrique de l'arête  $\mathbf{ax}$ . En utilisant l'homogénéité du polynôme  $H_e$ , on peut à partir de la carte d'erreurs définie sur la boule unité d'une norme  $\|\cdot\|$  donnée déduire la carte d'erreur partout. En effet, pour un point  $\mathbf{x} = (x, y, z) \neq \mathbf{a}$ , comme  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$  appartient à la boule unité de  $\|\cdot\|$ , il vient :

$$H_e(\mathbf{a}; \frac{x}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{y}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{z}{\|\mathbf{x}\|}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^k} H_e(\mathbf{a}; x, y, z) \implies \Phi_{H_e}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \Phi_{H_e}(\mathbf{x}_0).$$

L'homogénéité permet de simplifier l'approche et les algorithmes même si le cas d'erreurs inhomogènes est possible comme démontré dans la section suivante.

*Exemples.* On donne quelques exemples d'erreurs s'écrivant comme des polynômes homogènes.

- Pour une fonction régulière  $u$ , on peut dériver une estimation d'erreur de troncature en utilisant un développement de Taylor d'ordre  $k$  de  $u$ . Dans ce cas, on obtient une erreur qui s'écrit bien comme un polynôme homogène, les coefficients  $c_{ij}$  s'écrivent :

$$c_{ij} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l} u(\mathbf{a}), \text{ with } l = k - i - j.$$

- Dans le cas de fonctions moins régulières, l'erreur s'écrit encore comme un polynôme homogène [2, 7]. Les coefficients sont souvent intégrés sur une élément  $K$  :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{W}^{m,q}(K)} \leq |K|^{1/q-1/p} \sum_{\alpha_i + \dots + \alpha_3 = l-m} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} h_3^{\alpha_3} \left| \frac{\partial^{l-m} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}} \right|_{\mathbf{W}^{m,p}(K)},$$

avec  $\Pi_h$  un opérateur d'interpolation,  $|K|$  le volume de  $K$  et  $h_1, h_2, h_3$  les tailles suivant des directions données par la technique de l'élément de référence. Ces majorations dépendent généralement de certaines hypothèses sur les puissances des espaces de Sobolev  $\mathbf{W}^{m,q}, \mathbf{W}^{m,p}$  ainsi que des particularités géométriques de  $K$ . On constate seulement que le membre de droite est un polynôme homogène de degré  $l - m$  vis-à-vis des variables  $h_i$ , avec pour coefficients :

$$c_{ij} = \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l} \right|_{\mathbf{W}^{m,p}(K)}, \text{ with } l = k - i - j.$$

- Le dernier exemple est hérité de l'approximation des surfaces [8]. Dans ce cas, l'erreur d'approximation de la surface s'écrit comme un polynôme homogène de degré deux.

REMARQUE A.1 Même si l'on se restreint au cas des polynômes homogènes, notre approche demeure valide pour des modèles qui sont seulement homogènes, *i.e.*,  $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha^k f(\mathbf{x})$ , avec  $f$  une fonction représentant l'erreur.

Pour un polynôme homogène  $H_e$  de degré  $k$ , on approche les variations de  $H_e$  par des variations quadratiques données par une métrique  $\mathcal{M}$ . Pour comparer ces variations de degré 2 et de degré  $k$ , il est nécessaire de les normaliser. On définit dans ce but des fonctions distance.  $\Phi_{\mathcal{M}}$  est la fonction distance issue de la métrique  $\mathcal{M}$ . Elle est donnée par :

$$\Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \sqrt{{}^t\mathbf{x}\mathcal{M}(\mathbf{a})\mathbf{x}}.$$

De manière similaire,  $\Phi_{H_e}$  est la fonction distance associée au polynôme de degré  $k$   $H_e$ . Elle est définie par :

$$\Phi_{H_e}(\mathbf{x}) = |H_e(\mathbf{a}; \mathbf{x})|^{\frac{1}{k}}.$$

On propose dans la suite plusieurs principes géométriques qui permettent d'approcher  $\Phi_{H_e}$  par  $\Phi_{\mathcal{M}}$ .

### Principe 1. Consistance

Ce principe assure que le modèle quadratique majore bien l'erreur représentée par  $H_e$ . Étant donné un seuil d'erreur  $\varepsilon > 0$ , une métrique  $\mathcal{M}$  est un modèle consistant vis-à-vis de l'erreur initiale  $H_e$  si sa fonction distance vérifie :

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \mid \Phi_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \mid \Phi_{H_e}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon\}. \quad (\text{A.1})$$

En utilisant l'homogénéité de  $H_e$  et de  $\mathcal{M}$ , il est suffisant que cette condition soit vérifiée pour  $\varepsilon = 1$  pour qu'elle soit vraie partout. Il est à noter que si l'on travaille directement sur l'erreur  $H_e$  et non sur  $\Phi_{H_e}$  alors l'inclusion précédente devient :

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \mid {}^t\mathbf{x}\mathcal{M}(\mathbf{a})\mathbf{x} \leq \varepsilon^2\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \mid |H_e(\mathbf{a}; \mathbf{x})| \leq \varepsilon^k\}.$$

D'un point de vue géométrique, l'inclusion ci-dessus impose que la boule unité de  $\mathcal{M}$  soit incluse dans la boule unité de  $H_e$ . En effet, la Relation (A.1) implique :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \text{ tel que } {}^t\mathbf{x}\mathcal{M}(\mathbf{a})\mathbf{x} \leq 1 \text{ then } |H_e(\mathbf{a}; \mathbf{x})| \leq {}^t\mathbf{x}\mathcal{M}(\mathbf{a})\mathbf{x}.$$

Cette majoration est indispensable pour certifier que localement, dans le voisinage  $\mathcal{V}(\mathbf{a})$ , le modèle d'erreur quadratique

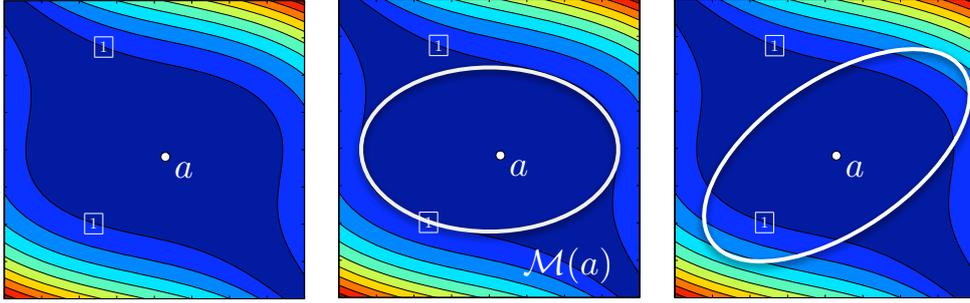
$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) : \quad \mathbf{x} \mapsto {}^t\mathbf{x}\mathcal{M},$$

majore bien l'erreur  $H_e$ . La Figure A.1 donne une illustration géométrique pour un polynôme  $H_e$  de degré trois d'une métrique consistante et inconsistante. Pour la boule unité de la métrique de droite, Figure A.1, il existe une arête unité, *i.e.*, dont l'erreur dans  $H_e$  est supérieure à 1. Le modèle quadratique dans ce cas là ne majore pas l'erreur  $H_e$ .

### Principe 2. Optimalité

Le premier principe seul donne une infinité de métriques possibles. En effet, si  $\mathcal{M}_0$  est une métrique qui vérifie le premier principe géométrique, alors la famille  $\alpha \mathcal{M}_0$  paramétrée par  $\alpha > 1$  le vérifie également. Il est donc nécessaire de proposer un critère d'optimalité.

Soit  $\mathcal{M}$  une métrique qui vérifie (A.1). On sait d'après le Chapitre 1, que l'aire des éléments unité vis-à-vis de  $\mathcal{M}$  est liée au volume de la boule unité de  $\mathcal{M}$ . D'après le Chapitre 2, l'ordre



**Figure A.1:** À gauche, représentation des variations d'un polynôme  $H_e(\mathbf{a}; x, y)$  de degré trois. L'isoline de valeur un est représentée par  $\boxed{1}$ . Au milieu, on représente la boule unité d'une métrique qui vérifie le premier principe et à gauche la boule unité d'une métrique violant le premier principe.

de convergence dépend de la complexité du maillage continu, car il s'écrit en fonction d'une constante  $Cte$  :

$$\frac{Cte}{\mathcal{C}(\mathcal{M})^{\frac{k}{n}}},$$

Localement, la complexité est proportionnelle au volume de la boule unité de  $\mathcal{M}$ . Pour minimiser l'estimation précédente, on peut maximiser la complexité  $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ , ce qui localement est équivalent maximiser le volume de  $\mathcal{M}$ . En fait, on cherche à minimiser la constante  $Cte$ . En conclusion, on cherche un ellipsoïde de plus grand volume inclus dans la boule unité de  $H_e$ . Si  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont deux métriques qui vérifient le premier principe,  $\mathcal{M}_1$  est un meilleur modèle que  $\mathcal{M}_2$  si

$$\mathcal{M}_1 \geq \mathcal{M}_2 \iff \det(\mathcal{M}_1) \leq \det(\mathcal{M}_2). \quad (\text{A.2})$$

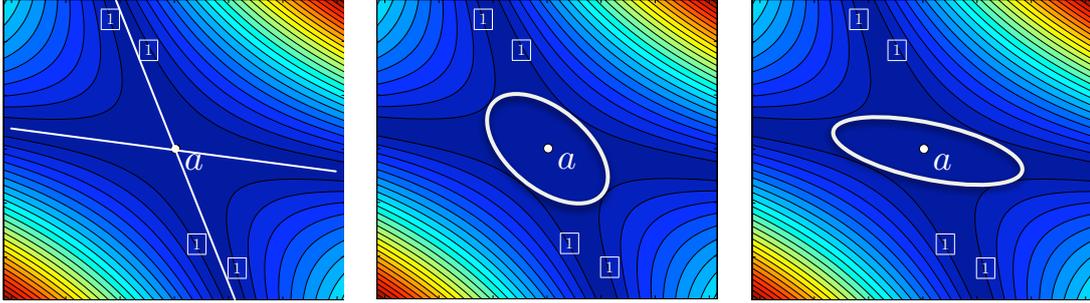
### Principe 3. Taille minimale maximale

Cette contrainte est induite par le fait que  $H_e$  n'est pas une norme. Autrement dit, l'ensemble des points  $\{\mathbf{x} \mid H_e(\mathbf{x}) = 0\}$ , n'est pas réduit au singleton  $\mathbf{0}$ . En deux dimensions et dans le cas linéaire ( $k = 2$ ), on peut considérer l'exemple hyperbolique  $H_e = x^2 - y^2$ . On cherche alors à approcher  $H_e$  par une forme quadratique définie positive. Pour un réel  $r$  non nul, on a les relations suivantes :

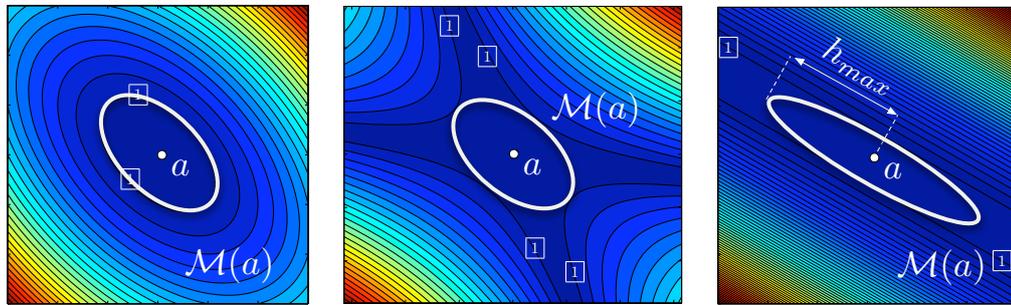
$$\begin{aligned} |x^2 - y^2| &\leq x^2 + y^2 \\ |x^2 - y^2| &\leq \frac{r}{2}(x - y)^2 + \frac{2}{r}(x + y)^2 \text{ pour tout } r > 0 \\ |x^2 - y^2| &\leq \frac{r}{2}(x + y)^2 + \frac{2}{r}(x - y)^2 \text{ pour tout } r > 0 \end{aligned}$$

Ces majorations correspondent à une famille de métriques  $(\mathcal{M}(r))_r$  dont tous les membres vérifient le premier principe. Ils ont également toutes le même volume. Le principe 2 ne permet donc pas de les distinguer. La seule différence sur ces métriques est le choix des directions principales. La première majoration correspond à une métrique qui est alignée avec les directions principales de  $H_e$ . Elle est donc alignée avec les directions de plus fort gradient de  $H_e$ . L'ensemble des autres majorations correspond à des métriques alignées avec une direction d'erreur nulle de  $H_e$ . On introduit alors le dernier principe,  $\mathcal{M}_1$  est un meilleur modèle que  $\mathcal{M}_2$  si

$$\mathcal{M}_1 \succeq \mathcal{M}_2 \iff (h_{11}, h_{12}, h_{13}) \geq^l (h_{21}, h_{22}, h_{23}), \quad (\text{A.3})$$



**Figure A.2:** À gauche, représentation des iso-valeurs de l'erreur hyperbolique  $H_e$  caractérisée par ses deux directions d'erreur nulle. On montre au milieu et à droite les deux choix d'alignement possibles. Les deux métriques ont le même volume et vérifient toutes les deux le premier principe.



**Figure A.3:** Illustration de la boule unité de la métrique optimale lorsque  $H_e$  est quadratique : cas elliptique à gauche, hyperbolique au milieu et parabolique à droite. Dans ce dernier cas, une taille maximale  $h_{max}$  doit être choisie.

où  $\succeq^l$  représente l'ordre lexicographique.

**REMARQUE A.2** Ce principe assure également que si l'on déduit d'une métrique anisotrope  $\mathcal{M}$ , vérifiant (A.1), (A.2) et (A.3) pour une erreur  $H_e$ , une métrique isotrope, alors cette dernière vérifie (A.1), (A.2) et (A.3) parmi l'ensemble des métriques isotropes. Autrement dit, si  $\mathcal{M}$  est optimale au sens (A.1), (A.2) et (A.3) avec  $h_{min}$  comme plus petite taille, on ne peut pas trouver de métrique  $\mathcal{M}_i$  isotrope, vérifiant (A.1), (A.2) et (A.3), telle que  $\det(\mathcal{M}_i) \leq h_{min}^{-\frac{n}{2}}$ . Globalement, cela assure qu'un maillage anisotrope «optimal» pour le contrôle de l'erreur d'interpolation est toujours une amélioration d'un maillage isotrope.

*Retour sur le cas de l'interpolation linéaire.* On considère le cas une interpolation linéaire. L'erreur est bien représentée par une forme quadratique, de représentation matricielle  $Q$ . On peut alors écrire  $H_e(\mathbf{a}; \mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}Q(\mathbf{a})\mathbf{x}$ . Il est clair que lorsque le déterminant de  $Q$  est non nul, il existe une unique solution vérifiant les trois principes. Pour définir le modèle dans le cas où le déterminant de  $Q$  est nul, il est nécessaire de définir une taille  $h_{max}$ . En effet, dans ce dernier cas, on peut inclure un ellipsoïde de volume infini dans la ligne de niveau 1 de  $H_e$ . Ces trois cas sont représentés sur la Figure A.3.

### A.1.3 Erreur d'interpolation en norme $\mathbf{W}^{1,p}$

En utilisant les principes géométriques précédents on peut proposer un modèle d'erreur en norme  $\mathbf{W}^{1,p}$ . En effet, si on considère que localement, l'erreur d'interpolation  $H_e$  s'écrit comme une forme quadratique, le gradient de l'erreur  $\nabla_{x_i} H_e$ , pour  $i = \{1, 2, 3\}$ , est constitué d'un réseau de droites en deux dimensions et d'un réseau de plans en trois dimensions. Le problème géométrique consiste à inscrire une ellipse de plus grand volume dans le polytope formé par les iso-lignes d'erreur  $|\nabla_{x_i} H_e| \leq \varepsilon$  des dérivées partielles suivant chaque axe. Le polytope étant convexe, l'existence et l'unicité sont assurées par l'ellipsoïde de John. Dans la base propre du hessien  $H$  de  $H_e$ , le réseau de droites  $(D_i)$  s'écrit simplement en fonction des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $H$  que l'on suppose toutes non nulles :

$$(D_i) : |\lambda_i x_i| = \varepsilon \text{ pour } i \in [1, 3].$$

Dans cette base, les droites  $D_i$  et  $D_j$  sont orthogonales entre elles pour  $i \neq j$ . La boule unité de  $\mathcal{M}$  est donc par symétrie alignée avec ces axes. On déduit que la base propre de  $H$  est alignée avec la base propre de  $\mathcal{M}$ . Pour équi-répartir une erreur  $\varepsilon$  suivant chaque axe, les tailles  $h_i$  doivent être égales à :

$$h_i = |\lambda_i|^{-1} \varepsilon.$$

On déduit de cette analyse la métrique qui contrôle l'erreur en norme  $\mathbf{W}^{1,\infty}$  de  $H_e$  en fonction de son hessien :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{W}^{1,\infty}} = \frac{1}{\varepsilon^2} {}^t H H.$$

La Figure A.4 illustre ce principe.

Tout comme dans le cas linéaire, on cherche désormais à trouver la répartition optimale des tailles en norme  $\mathbf{L}^p$ . L'erreur pour une métrique quelconque s'exprime :

$$\frac{1}{n} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} {}^t H H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}).$$

Dans ce cas, l'erreur varie en  $O(h_i)$  alors que l'erreur exprimée dans la métrique varie en  $O(h_i^2)$ . Le modèle d'erreur local dans la métrique homogène à l'erreur sur le gradient de  $H_e$  est donc :

$$e_{\mathcal{M}} = \left( \frac{1}{n} \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} {}^t H H \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

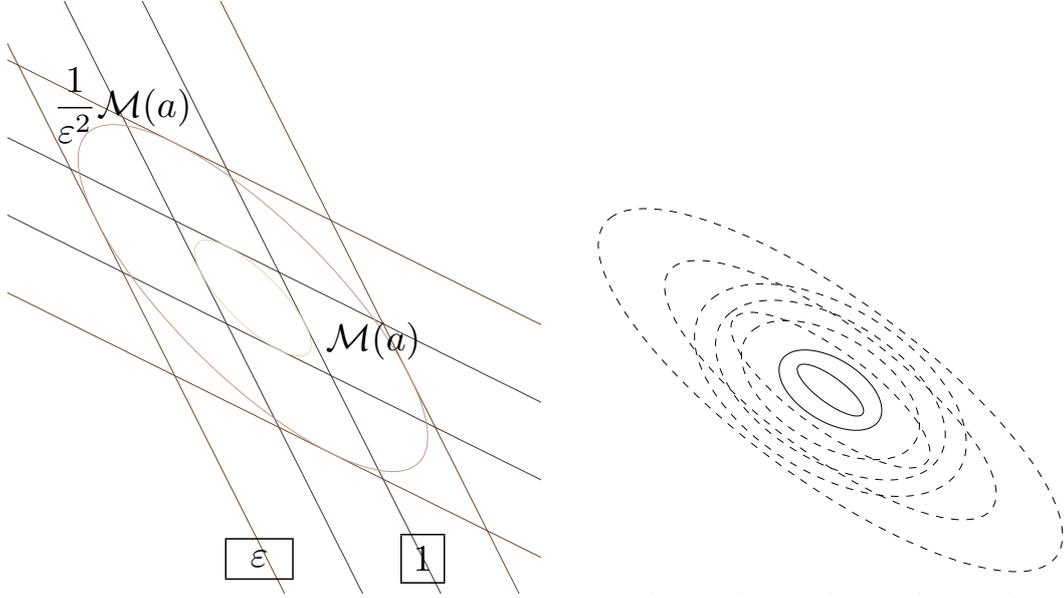
D'après l'étude locale précédente, on peut considérer que les directions optimales sont celles du hessien  $H$  de  $H_e$ . L'erreur se simplifie en :

$$e_{\mathcal{M}} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i^2 \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On vérifie alors que le choix particulier pour la métrique  $h_i = \lambda_i^{-1}$  donne une erreur égale à 1. On minimise  $e_{\mathcal{M}}$  en norme  $\mathbf{L}^p$  en utilisant la solution du problème d'optimisation avec comme paramètre  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 2$  :

$$h_i = N^{-\frac{1}{n}} \left( \int_{\Omega} (\det(H))^{\frac{p}{p+n}} \right)^{\frac{1}{n}} (\det(H))^{\frac{1}{p+n}} \lambda_i^{-1},$$

$$\lambda_i = N^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\Omega} (\det(H))^{\frac{p}{p+n}} \right)^{-\frac{2}{n}} (\det(H))^{-\frac{2}{p+n}} \lambda_i^2.$$



**Figure A.4:** À gauche, représentation graphique de la construction de la métrique pour un réseau de droites. Les ellipses incluses dans les ensembles de niveau 1 et  $\varepsilon$  sont représentées. À droite, comparaison des métriques  $L^\infty$  (trait plein le plus à l'extérieur) et  $W^{1,\infty}$  (trait plein le plus au centre).

La norme  $L^p$  de  $e_{\mathcal{M}}$  est donnée par :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M})^{\frac{1}{p}} = n^\alpha N^{-\frac{1}{n}} \left( \int_{\Omega} (\det(H))^{\frac{p}{p+n}} \right)^{\frac{p+n}{np}}.$$

Par conséquent, à partir de l'erreur optimale précédente, on obtient l'estimation de l'ordre de convergence suivante :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M})^{\frac{1}{p}} \leq \frac{K}{N^{\frac{1}{n}}}.$$

On obtient donc dans le cas des normes  $W^{1,\infty}$  un ordre un de convergence en maillage. Si les directions de la métrique pour l'erreur linéaire et pour son gradient sont identiques, les quotients d'anisotropies sont différents :

$$r_i = \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_i^3} \right)^{\frac{1}{6}} \text{ en } \mathcal{P}^1 \text{ et } r_i = \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_2}{\lambda_i^3} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ sur le gradient.}$$

La Figure A.4 (à gauche) montre la différence entre ces deux métriques.

#### A.1.4 Vers l'ordre très élevé

Pour trouver les directions optimales pour l'ordre élevé, on résout une succession de problèmes d'optimisation, chaque principe géométrique induit sa contrainte.

Dans un premier temps, on cherche le meilleur modèle isotrope. Géométriquement, cela revient à trouver la plus grande sphère incluse dans l'iso-ligne de niveau 1 de l'erreur définie

par le polynôme homogène  $H_e$ . Ce problème est équivalent à un résoudre un problème d'optimisation global sans contrainte de dimension inférieure, *i.e.*, de dimension 2 en 3D et de dimension 1 en 2D.

On utilise pour cela, un changement de variables polaire et sphérique. Cela permet de paramétrer l'iso-ligne 1 ou l'iso-surface 1. Ce changement de variables est donné par :

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos(z/\rho) \\ \phi = \arctan(x, y), \end{array} \right.$$

en trois dimensions, l'erreur  $H_e$  s'écrit :

$$H_e = \rho^k P(\theta, \phi),$$

où  $k$  est l'ordre de  $H_e$ ,  $P$  est un polynôme en  $\cos(\theta)$ ,  $\sin(\theta)$ ,  $\cos(\phi)$  et  $\sin(\phi)$ . L'équation de l'iso-surface 1 (respectivement de l'iso-ligne 1) est simplement donnée par :

$$\rho = |P(\theta, \phi)|^{\frac{1}{k}}.$$

La boule  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$  unité d'une métrique est alors définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} h_1 \sin(\phi) \cos(\theta) \\ h_2 \sin(\phi) \sin(\theta) \\ h_3 \cos(\phi) \end{pmatrix}, \text{ with } \theta \in [0, \pi] \text{ and } \phi \in [0, 2\pi].$$

On illustre sur un exemple 2D, les problèmes qui sont résolus pour trouver le modèle d'erreur local. Soit l'erreur suivante :

$$H_e = 10(xy^2 - y^3),$$

dans le système polaire, on a :

$$P(\theta) = \sin(t)^2(-\sin(t) + \cos(t)).$$

Pour trouver la direction d'erreur maximale, on cherche le maximum sur l'iso-ligne 1. En toute rigueur, il faudrait considérer le polynôme  $P(\theta)^{\frac{1}{k}}$ . Cependant, en pratique, il est équivalent, grâce à l'homogénéité, de chercher le minimum sur  $P$  directement. La Figure A.5 représente les variations de  $P$  en fonction de  $\theta$ . Numériquement, on obtient la direction d'erreur maximale  $\theta_{max} = -1.3$ . À cette direction est associé un niveau d'erreur (une distance) représenté par  $\rho_{max} = P(\theta_{max})^{-\frac{1}{k}}$ . La métrique isotrope de plus grand volume incluse dans l'iso-ligne 1 est donnée par :

$$\mathcal{M}_{iso} = \mathcal{R}(\theta_{max}) \begin{pmatrix} \lambda_{max} & \\ & \lambda_{max} \end{pmatrix} {}^t\mathcal{R}(\theta_{max}),$$

avec :

$$\mathcal{R}(\theta_{max}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{max}) & -\sin(\theta_{max}) \\ \cos(\theta_{max}) & \sin(\theta_{max}) \end{pmatrix},$$

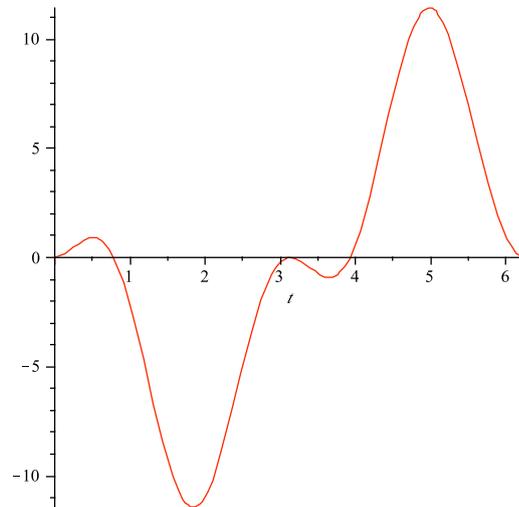
et

$$\lambda_{max} = \frac{1}{r_{max}^2}.$$

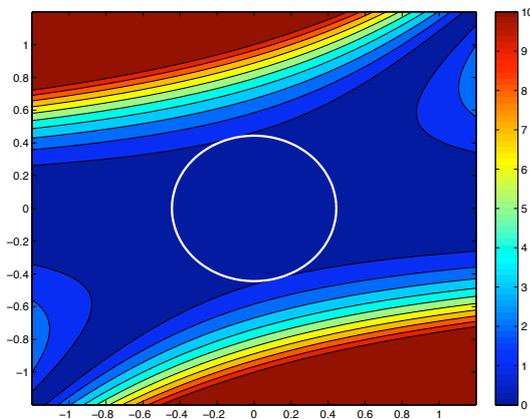
La Figure A.6 représente la boule unité de  $\mathcal{M}_{iso}$ . Pour déduire une estimation d'erreur anisotrope, on «gonfle» la métrique dans la direction orthogonale à  $\theta_{max}$ . Ce problème est équivalent à la résolution d'un problème d'optimisation de type min – max. En effet, on considère la métrique paramétrée par un réel  $\alpha \leq 1$  :

$$\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{R}(\theta_{max}) \begin{pmatrix} \lambda_{max} & \\ & \alpha \lambda_{max} \end{pmatrix} {}^t\mathcal{R}(\theta_{max}),$$

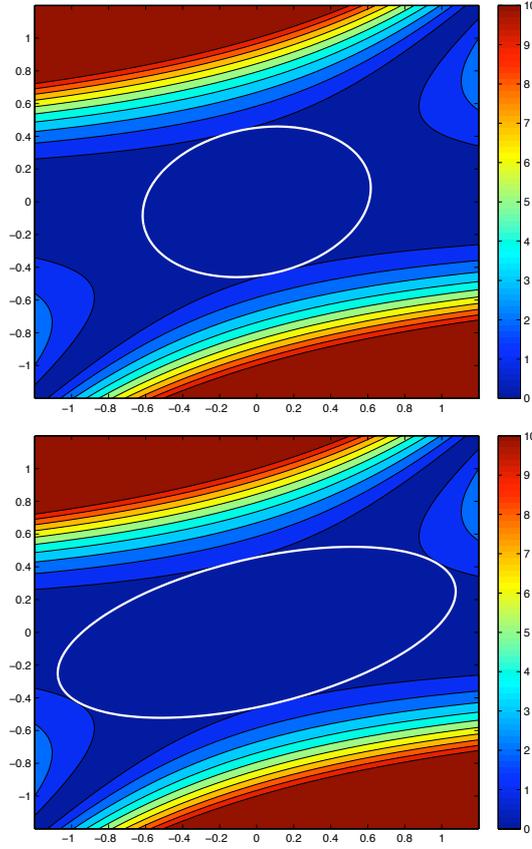
Le problème de type min – max regarde la trace de l'erreur  $H_e$  sur la boule unité de  $\mathcal{M}(\alpha)$ . Il existe un  $\alpha_{opt}$  tel que le maximum d'erreur donné par la trace soit égale à un. On a représenté sur la Figure A.7 un ensemble d'itérations de convergence vers  $\alpha_{opt}$ . À chaque itération, le maximum d'erreur sur la boule unité de la métrique courante doit être inférieure ou égale à 1.  $\alpha_{opt}$  est atteint quand ce maximum vaut un.



**Figure A.5:** Représentation du polynôme  $P$  déduit du modèle d'erreur  $H_e = 10(xy^2 - y^3)$ .



**Figure A.6:** Métrique isotrope pour le modèle d'erreur  $H_e = 10(xy^2 - y^3)$ .



**Figure A.7:** Convergence vers la métrique optimale  $\mathcal{M}(\alpha_{opt})$  pour le modèle d'erreur  $H_e = 10(xy^2 - y^3)$ . En haut, boule unité pour  $\mathcal{M}(0.5)$  et en bas boule unité pour  $\mathcal{M}(\alpha_{opt})$ .

REMARQUE A.3 On peut prolonger cette étude, en appliquant sur la métrique un problème de calcul de variations pour minimiser l'erreur en norme  $\mathbf{L}^p$  à complexité fixée.

REMARQUE A.4 On a utilisé jusqu'à présent des métriques issues d'un produit scalaire. Ce type de métriques est adopté dans la communauté de la génération de maillages. En effet, elles permettent de définir des angles et des volumes qui sont bien souvent des ingrédients indispensables pour les algorithmes de maillages. Cependant, en analysant l'ensemble des propriétés précédentes, il apparaît que la notion de produit scalaire défini par  $\mathcal{M}$ , n'est pas toujours nécessaire. En effet, c'est plutôt la notion de distance qui s'avère prépondérante. Une problématique est donc d'étudier la possibilité de définir une métrique seulement sur un espace métrique  $(\mathbb{R}^n, d)$ . Une approche similaire a déjà été abordée dans le contexte de l'optimisation de maillage, voir [12]. On conserve la notation matricielle issue des métriques riemanniennes,  $\mathcal{M}(\mathbf{a}) = \mathcal{R} \Lambda^t \mathcal{R}$ . À partir de la métrique  $\mathcal{M}$ , on définit les distances suivantes en notant  $\tilde{x} = \mathcal{R}\mathbf{x}$  :

- distance basée sur la norme  $\|\cdot\|_1$  :

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} |\tilde{x}_i - a_i|,$$

- distance basée sur la norme  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \max_i \left( \sqrt{\lambda_i} |\tilde{x}_i - a_i| \right),$$

- distance basée sur la norme  $\|\cdot\|_p$  :

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \left( \sum_{i=1}^3 \left( \sqrt{\lambda_i} |\tilde{x}_i - a_i| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La vision géométrique précédente permettrait de dériver de estimations d'erreur dans ces types de norme.

## A.2 MODÈLES D'ERREUR INHOMOGÈNE

On propose une introduction aux modèles d'erreur inhomogène. On montre que sur ce type d'erreur, la normalisation  $\mathbf{L}^p$  est toujours possible. Enfin, on donne quelques idées d'application utilisant ces modèles.

### A.2.1 Quelques modèles et leur possible application

Le point de départ est identique à celui de l'erreur d'interpolation. On considère une fonction  $f$  régulière définie sur  $\Omega$ . En point  $\mathbf{x}_0$ , la régularité de la fonction nous permet d'écrire son développement limité à l'ordre deux :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) \quad f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla^2 f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Afin de simplifier les notations, on introduit le gradient et le hessien en  $\mathbf{x}_0$  :

$$\begin{cases} \mathbf{g} &= \nabla f(\mathbf{x}_0), \\ H &= \nabla^2 f(\mathbf{x}_0). \end{cases}$$

### Rappel sur l'erreur d'interpolation

Dans le cas de l'erreur d'interpolation, le développement limité précédent est écrit pour un point d'un élément  $K$ , en considérant comme fonction  $f$ , l'erreur d'interpolation sur une fonction  $u$ , soit  $f = u - \Pi_h u$ . Cependant, l'estimation de cette erreur se fait généralement en norme  $\mathbf{L}^\infty$ . On cherche donc les maxima de  $u - \Pi_h u$ . Ces maxima (points stationnaires) vérifient  $\mathbf{g} = \nabla(u - \Pi_h u) = 0$ . On se retrouve donc avec une estimation homogène ne faisant intervenir que le hessien  $H$  de  $u$ . À une troncature près des valeurs propres de  $H$ , on en déduit facilement de  $H$  une métrique.

Dans la suite, on dérive des modèles d'erreur qui prennent explicitement en compte l'erreur sur le gradient. Ces erreurs sont inhomogènes, car l'erreur est d'ordre  $h = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2$  dans la direction du gradient  $\mathbf{g}$  et d'ordre  $O(h^2)$  dans une direction orthogonale à  $\mathbf{g}$ .

### Modèle le plus simple

Pour une erreur  $\varepsilon$  donnée, on cherche à contrôler  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|$ . Lorsque le gradient de  $f$  est non nul, la direction suivant laquelle on commet la plus grande erreur, d'ordre  $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2)$ , est celle du gradient. On note  $\mathbf{n} = \mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|_2$  cette direction, qui constitue la première direction principale de la métrique  $\mathcal{M}_f(\mathbf{x}_0)$ . La taille  $h_{\mathbf{n}}$  suivant  $\mathbf{n}$  qui donne une erreur  $\varepsilon$  est simplement :

$$\varepsilon = |{}^t\nabla f(\mathbf{x}_0) \mathbf{n}| h_{\mathbf{n}} = \|\mathbf{g}\|_2 h_{\mathbf{n}} \quad \text{soit} \quad h_{\mathbf{n}} = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{g}\|_2}.$$

Dans la direction orthogonale à  $\mathbf{n}$ , l'erreur, d'ordre  $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2^2)$ , se réduit à :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} |{}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) H (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|.$$

On se ramène à une étude similaire à celle de l'erreur d'interpolation. Il existe deux directions optimales orthonormales  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  qui respectivement minimisent, maximisent ou annulent l'erreur suivant ces directions. Les différents cas dépendent du signe du déterminant  $\det(H)$  du hessien de  $f$  en  $\mathbf{x}_0$ . On en déduit les tailles qui donnent une erreur  $\varepsilon$  suivant ces directions :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{2} h_{\mathbf{t}_1}^2 |{}^t\mathbf{t}_1 H \mathbf{t}_1|, \\ \varepsilon = \frac{1}{2} h_{\mathbf{t}_2}^2 |{}^t\mathbf{t}_2 H \mathbf{t}_2|. \end{cases}$$

Dans le cas où le déterminant  $\det(H)$  est non nul, les vecteurs  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  sont des vecteurs propres du projeté de  $H$  sur le plan  $\mathbf{n}^\perp$  orthogonal à  $\mathbf{n}$ .  $|{}^t\mathbf{t}_1 H \mathbf{t}_1|$  et  $|{}^t\mathbf{t}_2 H \mathbf{t}_2|$  sont égales à la valeur absolue des valeurs propres du hessien projeté. La métrique optimale qui équi-distribue l'erreur  $\varepsilon$  dans les directions  $\mathcal{R} = (\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  est donnée par :

$$\mathcal{M}_f^\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \frac{\|\mathbf{g}\|_2^2}{\varepsilon^2} & & \\ & \frac{|{}^t\mathbf{t}_1 H \mathbf{t}_1|}{2\varepsilon} & \\ & & \frac{|{}^t\mathbf{t}_2 H \mathbf{t}_2|}{2\varepsilon} \end{pmatrix} {}^t\mathcal{R}$$

### Adaptation aux iso-lignes

On utilise dans ce cas, l'équation implicite de l'iso-ligne,  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ , déduite du développement limité. En effet, l'équation implicite de l'iso-ligne de valeur  $f(\mathbf{x}_0)$  est donc :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) \quad {}^t\mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) H (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0. \quad (\text{A.4})$$

On introduit dans la suite des métriques qui permettent de contrôler l'écart à cette iso-ligne ou iso-surface. Cependant, on ne donne pas de majoration sur l'écart dans la métrique. On peut se reporter à [6] pour un estimateur d'erreur sur l'approximation linéaire d'une ligne de niveau.

Pour dériver une métrique qui mesure un éloignement à une ligne de niveau  $f(\mathbf{x}_0)$ , il est nécessaire d'approcher un écart à cette ligne. On utilise donc un développement limité de l'Équation (A.4).

Pour se faire, on se place donc localement dans le repère de Frenet, donné par  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$  avec :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|_2}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n}^\perp.$$

Ce repère existe pour tous les points réguliers, *i.e.*, quand  $\|\mathbf{g}\|_2 \neq 0$ . On propose alors de contrôler l'écart à l'iso-ligne  $f(\mathbf{x}_0)$  suivant ces deux directions. En effet, la direction normale correspond à la direction selon laquelle on s'éloigne le plus vite de l'iso-ligne passant par le point  $\mathbf{x}_0$ . Dans la direction orthogonale, on utilise la courbure pour trouver quelle taille compatible à l'écart choisi sur la direction normale. La Figure A.8 illustre ce principe.

Dans la direction normale, il existe deux possibilités :

- soit on désire un écart en terme de distance, *i.e.*, indépendant du gradient,
- soit on désire un écart qui prend en compte le gradient.

Ces deux choix conduisent aux erreurs suivantes :

$$\varepsilon_{\mathbf{n}} = h_{\mathbf{n}} \quad \text{où} \quad \varepsilon_{\mathbf{n}} = \|\mathbf{g}\|_2 h_{\mathbf{n}}.$$

Pour la direction tangentielle, on souhaite prendre en compte la courbure, on écrit localement l'iso-ligne  $f(\mathbf{x}_0)$  au point  $\mathbf{x}_0$  dans le repère de Frenet sous la forme d'une fonction  $\varepsilon_{\mathbf{n}}(h_{\mathbf{t}})$  :

$$\varepsilon_{\mathbf{n}}(h_{\mathbf{t}}) = \varepsilon_{\mathbf{n}}(0) + \varepsilon'_{\mathbf{n}}(0) h_{\mathbf{t}} + \frac{1}{2} \varepsilon''_{\mathbf{n}}(0) h_{\mathbf{t}}^2.$$

On sait déjà que  $\varepsilon_{\mathbf{n}}(0) = 0$ , car le développement limité est écrit au point  $\mathbf{x}_0$  qui vérifie naturellement (A.4). Le point  $(\varepsilon_{\mathbf{n}}(h_{\mathbf{t}}), h_{\mathbf{t}})$  vérifie (A.4), cf. Figure A.8, on écrit cette condition sous la forme d'une fonction  $F$  telle que :

$$F(\varepsilon_{\mathbf{n}}, h_{\mathbf{t}}) = 0,$$

Si on écrit le hessien  $H$  de  $f$  en  $\mathbf{x}_0$  dans la base de Frenet sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  des coefficients réels. Il vient alors :

$$F(\varepsilon_{\mathbf{n}}, h_{\mathbf{t}}) = \|\mathbf{g}\|_2 \varepsilon_{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} (a \varepsilon_{\mathbf{n}}^2 + 2b \varepsilon_{\mathbf{n}} h_{\mathbf{t}} + c h_{\mathbf{t}}^2).$$

On écrit alors que la dérivée de la fonction composé  $\Psi = F \circ g$  est nulle car :

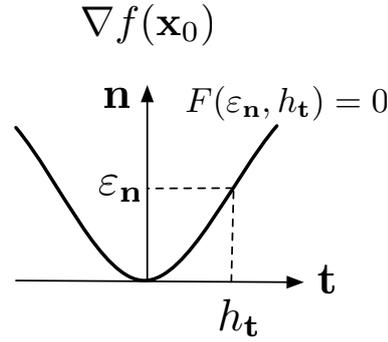
$$\Psi : h_{\mathbf{t}} \mapsto (\varepsilon_{\mathbf{n}}, h_{\mathbf{t}}) \mapsto F(\varepsilon_{\mathbf{n}}, h_{\mathbf{t}}) = 0.$$

La dérivé de  $\Psi$  devient alors :

$$\Psi'(h_{\mathbf{t}}) = \frac{\partial g}{\partial h_{\mathbf{t}}} \circ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}, \quad \text{avec } \mathbf{x} = (\varepsilon_{\mathbf{n}}, h_{\mathbf{t}}).$$

Écrire  $\Psi'(h_{\mathbf{t}}) = 0$  est équivalent à vérifier l'équation suivante :

$$\varepsilon'_{\mathbf{n}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\mathbf{n}}} + \frac{\partial F}{\partial h_{\mathbf{t}}} = 0. \quad (\text{A.5})$$



**Figure A.8:** Représentation du repère de Frenet en  $\mathbf{x}_0$  et de l'iso-ligne  $f(\mathbf{x}_0)$  donnée par l'équation implicite  $F(\varepsilon_{\mathbf{n}}, h_{\mathbf{t}}) = 0$ .

Il vient :

$$\varepsilon'_{\mathbf{n}}(0) = 0$$

En dérivant une nouvelle fois (A.5) par rapport à  $h_{\mathbf{t}}$ , il vient :

$$\varepsilon''_{\mathbf{n}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{\mathbf{n}}} + \varepsilon'_{\mathbf{n}} \frac{\partial^2 F}{\partial h_{\mathbf{t}} \partial \varepsilon_{\mathbf{n}}} + \frac{\partial^2 F}{\partial h_{\mathbf{t}}^2} = 0.$$

On trouve :

$$\varepsilon''_{\mathbf{n}}(0) = -\frac{a}{2\|\mathbf{g}\|_2}, \text{ ce qui implique } \varepsilon''_{\mathbf{n}}(h_{\mathbf{t}}) = -\frac{1}{2} \frac{{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}}{\|\mathbf{g}\|_2} h_{\mathbf{t}}^2.$$

Les deux métriques pour un niveau d'erreur  $\varepsilon$  sont données par :

$$\mathcal{M}_{\varepsilon} = (\mathbf{n}, \mathbf{t}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} & \\ & \frac{1}{2} \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{\|\mathbf{g}\|_2 \varepsilon} \end{pmatrix} {}^t (\mathbf{n}, \mathbf{t}),$$

où

$$\mathcal{M}_{\varepsilon} = (\mathbf{n}, \mathbf{t}) \begin{pmatrix} \frac{\|\mathbf{g}\|_2^2}{\varepsilon^2} & \\ & \frac{1}{2} \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{\|\mathbf{g}\|_2 \varepsilon} \end{pmatrix} {}^t (\mathbf{n}, \mathbf{t}),$$

suivant le contrôle dans la direction normale.

## A.2.2 Contrôle d'erreur en norme $\mathbf{L}^p$

Pour des fonctions d'erreur avec de multiples échelles, la métrique  $\mathbf{L}^{\infty}$  précédente ne va capter que les petites variations de la fonction d'erreur. On propose donc de décrire la métrique optimale pour des normes plus sensibles aux faibles variations. D'une manière similaire au contrôle  $\mathbf{L}^p$  de l'erreur d'interpolation, on cherche la métrique qui minimise la norme  $\mathbf{L}^p$  de l'erreur commise dans chacune des directions locales optimales  $\mathbf{n}, \mathbf{t}$ .

### Résolution locale

Dans ce cas, le calcul de variations se s'écrit sous la forme générique suivante :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} (\varepsilon_{\mathbf{n}} + \varepsilon_{\mathbf{t}})^p = \int_{\Omega} (h_{\mathbf{n}}\gamma_{\mathbf{n}} + h_{\mathbf{t}}^2\gamma_{\mathbf{t}})^p.$$

sous la contrainte

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} d = \int_{\Omega} \frac{1}{h_{\mathbf{n}}h_{\mathbf{t}}} = N.$$

Dans le cas de l'erreur d'interpolation, on a utilisé un changement de variables dans la résolution en utilisant les quotients d'anisotropie. Dans le cas d'une erreur inhomogène, on définit des quotients d'anisotropie généralisés. Les quotients d'anisotropie généralisés sont les solutions du problème local :

$$\min_{h_{\mathbf{n}}, h_{\mathbf{t}}} h_{\mathbf{n}}\gamma_{\mathbf{n}} + h_{\mathbf{t}}^2\gamma_{\mathbf{t}} \text{ sous la contrainte } h_{\mathbf{n}}h_{\mathbf{t}} = \frac{1}{d} \text{ constant.}$$

On note  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'égalité. On écrit la condition nécessaire d'optimalité :

$$\begin{cases} \gamma_{\mathbf{n}} & - \lambda h_{\mathbf{t}} & = & 0, \\ 2 h_{\mathbf{t}}\gamma_{\mathbf{t}} & - \lambda h_{\mathbf{n}} & = & 0. \end{cases}$$

Le multiplicateur de Lagrange est donné par :

$$\lambda = \frac{\gamma_{\mathbf{n}}}{h_{\mathbf{t}}}.$$

Finalement, les tailles solutions paramétrées par la densité  $d$  sont égales à :

$$h_{\mathbf{n}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{\gamma_{\mathbf{t}}}{\gamma_{\mathbf{n}}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad h_{\mathbf{t}} = \frac{2^{-\frac{1}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{\gamma_{\mathbf{n}}}{\gamma_{\mathbf{t}}} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

### Résolution globale

On finalise la résolution en utilisant les solutions des tailles paramétrées par la densité qui devient l'unique inconnue du problème.

En substituant les tailles précédentes dans l'erreur initiale, on est amené à résoudre :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} 3^p 2^{-\frac{2p}{3}} d^{-\frac{2p}{3}} (\gamma_{\mathbf{n}}^2\gamma_{\mathbf{t}})^{\frac{p}{3}}.$$

La variation de la fonctionnelle  $\mathcal{E}$  dans la direction  $\delta d$  s'écrit :

$$\forall \delta d \quad \text{tel que} \quad \int_{\Omega} \delta d = 0 \quad \delta \mathcal{E}(\mathcal{M}; \delta \mathcal{M}) = \int_{\Omega} -\frac{2p}{3} 3^p 2^{-\frac{2p}{3}} d^{-\frac{2p+3}{3}} (\gamma_{\mathbf{n}}^2\gamma_{\mathbf{t}})^{\frac{p}{3}} \delta d.$$

Afin de vérifier la condition nécessaire d'Euler-Lagrange  $\delta \mathcal{E}(\mathcal{M}; \delta \mathcal{M}) = 0$ , il suffit de considérer l'intégrande :

$$d^{-\frac{2p+3}{3}} (\gamma_{\mathbf{n}}^2\gamma_{\mathbf{t}})^{\frac{p}{3}} \text{ constante.}$$

Il existe une constante  $K_N$  telle que la densité est réduite à :

$$d = K_N (\gamma_{\mathbf{n}}^2\gamma_{\mathbf{t}})^{\frac{p}{(2p+3)}}.$$

La constante  $K_N$  est choisie tel que la complexité finale donnée par la densité précédente soit égale à  $N$ . Finalement, la densité  $d$  est donnée par

$$d = \frac{N}{\int_{\Omega} (\gamma_{\mathbf{n}}^2 \gamma_{\mathbf{t}})^{\frac{p}{(2p+3)}}} (\gamma_{\mathbf{n}}^2 \gamma_{\mathbf{t}})^{\frac{p}{(2p+3)}}.$$

La solution est donnée par :

$$\left( \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|_2}, \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|_2} \right) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{n}} & \\ & \alpha_{\mathbf{t}} \end{pmatrix} t \left( \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|_2}, \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|_2} \right),$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{n}} &= 2^{-\frac{2}{3}} K_N^{\frac{4}{3}} \gamma_{\mathbf{n}}^{\frac{2(2p+1)}{2p+3}} \gamma_{\mathbf{t}}^{-\frac{2}{2p+3}}, \\ \alpha_{\mathbf{t}} &= 2^{\frac{2}{3}} K_N^{\frac{2}{3}} \gamma_{\mathbf{n}}^{-\frac{2}{2p+3}} \gamma_{\mathbf{t}}^{\frac{2(p+1)}{2p+3}}. \end{aligned}$$

On peut réécrire les valeurs propres précédentes en fonction du ratio  $r$  et de la puissance  $s$  :

$$r = \frac{\gamma_{\mathbf{n}}}{\gamma_{\mathbf{t}}} \text{ et } s = \frac{2}{2p+3},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{n}} &= 2^{-\frac{2}{3}} K_N^{\frac{4}{3}} r^s (\gamma_{\mathbf{n}}^{2s})^p, \\ \alpha_{\mathbf{t}} &= 2^{\frac{2}{3}} K_N^{\frac{2}{3}} r^{-s} (\gamma_{\mathbf{t}}^s)^p. \end{aligned}$$

La preuve en trois dimensions est identique. Le résultat est donné dans le formulaire A.3 de cette annexe.

### A.2.3 Pistes pour des exemples d'application

Les métriques qui contrôlent un écart à une iso-ligne ou iso-surface sont utiles pour décrire précisément des interfaces, notamment dans des problèmes bi-fluides [9]. On peut d'ailleurs remarquer que les métriques précédentes sont équivalentes lorsque  $\|\nabla \mathbf{g}\|_2 = 1$ . Cela correspond aux méthodes *level-set*.

On peut également utiliser ces métriques, afin de proposer un couplage simple entre les estimateurs *a posteriori* et l'adaptation anisotrope. En effet, de nombreux estimateurs d'erreur sont définis sur un élément et donne un résultat scalaire. On peut imaginer de projeter aux sommets du maillage courant ces champs d'erreur discrets. À partir de ce champ d'erreur aux sommets, on peut appliquer les estimations inhomogènes pour contrôler, de manière anisotrope, l'erreur initiale. Cela suppose néanmoins que l'estimateur *a posteriori* utilisé soit valide sur des maillages anisotropes.

## A.3 FORMULAIRE

On résume l'ensemble des métriques proposées dans cette thèse.  $u$  est une fonction  $\mathcal{C}^2$ , on note  $\mathbf{g}$  son gradient,  $\mathbf{g}^\perp$  le vecteur orthogonal à  $\mathbf{g}$  et  $H$  son hessien. En trois dimensions,  $\mathbf{g}^\perp$  est une matrice  $2 \times 3$ . On note  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|_2}$  la normalisation de  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{g}^\perp}{\|\mathbf{g}^\perp\|_2}$  la normalisation

de  $\mathbf{g}^\perp$  en deux dimensions,  $[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]$  en trois dimensions. On définit la matrice  $F$  de passage au repère de Frenet :

$$F = (\mathbf{n}, \mathbf{t}).$$

$|H|$  est la matrice déduite de  $H$  dont les valeurs propres sont maximales entre la valeur absolue des valeurs propres de  $H$  et un seuil prédéfini  $h_{max}^{-2}$  strictement positif. On note  $\lambda_i$  ces valeurs propres.

$\mathcal{M}$  est une métrique quelconque,  $\mathcal{M}_H$  est la métrique optimale pour un modèle d'erreur  $H$ . On note  $h_i$  les tailles de la métrique  $\mathcal{M}$ .  $\varepsilon$  est un seuil d'erreur strictement positif et  $K_N$  une constante strictement positive.  $d_{\mathbf{H}}$  est la densité locale telle que :

$$C(\mathcal{M}_{\mathbf{H}}) = \int_{\Omega} d_{\mathbf{H}} \, d\Omega.$$

$e_{\mathbf{H}}$  est la contribution locale de l'erreur telle que :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}_{\mathbf{H}}) = \int_{\Omega} e_{\mathbf{H}} \, d\Omega.$$

### A.3.1 Métriques en deux dimensions

- Erreur d'interpolation  $\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^\infty}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max_{i=1,2} (h_i^2 \lambda_i), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{L}^\infty} &= \frac{1}{\varepsilon} |H|, \\ d_{\mathbf{L}^\infty} &= \frac{\sqrt{\det(|H|)}}{\varepsilon}, \\ e_{\mathbf{L}^\infty} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

- Erreur d'interpolation  $\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^p}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} (h_1^2 \lambda_1 + h_2^2 \lambda_2)^p, \\ \mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} &= K_N \det(|H|)^{-\frac{1}{2(p+1)}} |H|, \\ d_{\mathbf{L}^p} &= K_N \det(|H|)^{\frac{p}{2(p+1)}}, \\ e_{\mathbf{L}^p} &= \left(\frac{2}{K_N}\right)^p \det(|H|)^{\frac{p}{2(p+1)}}. \end{aligned}$$

- Erreur d'interpolation  $\|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{\mathbf{L}^\infty}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max_{i=1,2} (h_i \lambda_i), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{W}^{1,\infty}} &= \frac{1}{\varepsilon^2} |{}^t H H|, \\ d_{\mathbf{L}^p} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \det(|H|), \\ e_{\mathbf{L}^p} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

- Erreur d'interpolation  $\|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{\mathbf{L}^p}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} (h_1^2 \lambda_1^2 + h_2^2 \lambda_2^2)^{\frac{p}{2}}, \\ \mathcal{M}_{\mathbf{W}^{1,p}} &= K_N (\det(|H|))^{-\frac{2}{p+2}} |{}^t H H|, \\ d_{\mathbf{W}^{1,p}} &= K_N \det(|H|)^{\frac{p}{p+2}}, \\ e_{\mathbf{W}^{1,p}} &= \left(\frac{2}{K_N}\right)^{\frac{p}{2}} \det(|H|)^{\frac{p}{p+2}}.\end{aligned}$$

- Écart aux lignes de niveaux avec adaptation à la courbure de  $u$ , noté  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}^\infty}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max\left(h_1 \|\mathbf{g}\|_2, h_2^2 \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2 \|\mathbf{g}\|_2}\right), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{C}^\infty} &= F\left(\frac{\|\mathbf{g}\|_2^2}{\varepsilon^2}, \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2 \|\mathbf{g}\|_2 \varepsilon}\right) {}^t F, \\ d_{\mathbf{C}^\infty} &= \sqrt{\frac{\|\mathbf{g}\|_2 |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2 \varepsilon^3}}, \\ e_{\mathbf{C}^\infty} &= \varepsilon.\end{aligned}$$

- Erreur inhomogène en norme infinie de la fonction  $u$  notée  $\|u\|_{\mathbf{I}^\infty}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max\left(h_1 \|\mathbf{g}\|_2, h_2^2 \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2}\right), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{I}^\infty} &= F\left(\frac{\|\mathbf{g}\|_2^2}{\varepsilon^2}, \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2 \varepsilon}\right) {}^t F, \\ d_{\mathbf{I}^\infty} &= \sqrt{\frac{\|\mathbf{g}\|_2^2 |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2 \varepsilon^3}}, \\ e_{\mathbf{I}^\infty} &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour dériver un contrôle en norme  $\mathbf{L}^p$  des deux erreurs précédentes, on considère le modèle d'erreur inhomogène générique suivant :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} (h_1 \gamma_{\mathbf{n}} + h_2^2 \gamma_{\mathbf{t}})^p.$$

$\gamma_{\mathbf{n}}$  est l'erreur commise dans la direction de  $\mathbf{g}$  alors que  $\gamma_{\mathbf{t}}$  est l'erreur commise dans la direction  $\mathbf{g}^\perp$ . On a donc :

$$\gamma_{\mathbf{n}} = \|\mathbf{g}\|_2 \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathbf{t}} = \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2 \|\mathbf{t}\|_2},$$

pour un contrôle en norme  $\mathbf{L}^p$  sur la courbure et :

$$\gamma_{\mathbf{n}} = \|\mathbf{g}\|_2 \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathbf{t}} = \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2},$$

pour un écart en norme  $\mathbf{L}^p$  à la solution. Le maillage optimale minimisant l'erreur générique inhomogène est donnée par :

$$\mathcal{M} = F \begin{pmatrix} 2^{-\frac{2}{3}} K_N^{\frac{4}{3}} r^s (\gamma_{\mathbf{n}}^{2s})^p & \\ & 2^{\frac{2}{3}} K_N^{\frac{2}{3}} r^{-s} (\gamma_{\mathbf{t}}^s)^p \end{pmatrix} {}^t F,$$

avec :

$$r = \frac{\gamma_{\mathbf{n}}}{\gamma_{\mathbf{t}}} \quad \text{et} \quad s = \frac{2}{2p+3}.$$

On en déduit alors les métriques suivantes :

- Écart aux lignes de niveaux en norme  $p$  avec adaptation à la courbure de  $u$ , noté  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}^p}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} \left( h_1 \|\mathbf{g}\|_2 + h_2^2 \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2 \|\mathbf{g}\|_2} \right)^p, \\ d_{\mathbf{C}^p} &= K_N \left( \frac{\|\mathbf{g}\|_2 |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2} \right)^{\frac{p}{2p+3}}, \\ e_{\mathbf{C}^p} &= 3^p 2^{-\frac{p(4p+9)}{3(2p+3)}} K_N^{-\frac{2p}{3}} \|\mathbf{g}\|_2^{\frac{p}{2p+3}} |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|^{\frac{p}{2p+3}}. \end{aligned}$$

- Erreur inhomogène en norme  $p$  de la fonction  $u$  notée  $\|u\|_{\mathbf{I}^p}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} \left( h_1 \|\mathbf{g}\|_2 + h_2^2 \frac{|{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2} \right)^p, \\ d_{\mathbf{I}^p} &= K_N \left( \frac{\|\mathbf{g}\|_2^2 |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|}{2} \right)^{\frac{p}{2p+3}}, \\ e_{\mathbf{I}^p} &= 3^p 2^{-\frac{p(4p+9)}{3(2p+3)}} K_N^{-\frac{2p}{3}} \|\mathbf{g}\|_2^{\frac{2p}{2p+3}} |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|^{\frac{p}{2p+3}}. \end{aligned}$$

Dans le cas des fonctions distance pour les lignes de niveaux (*level-set*), les métriques  $\mathcal{M}_{\mathbf{C}^\infty}$  et  $\mathcal{M}_{\mathbf{I}^\infty}$  sont équivalentes car  $\|\mathbf{g}\|_2 = 1$ .

### A.3.2 Métriques en trois dimensions

- Erreur d'interpolation  $\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^\infty}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max_{i=1,3} (h_i^2 \lambda_i), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{L}^\infty} &= \frac{1}{\varepsilon} |H|, \\ d_{\mathbf{L}^\infty} &= \frac{\sqrt{\det(|H|)}}{\varepsilon}, \\ e_{\mathbf{L}^\infty} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

- Erreur d'interpolation  $\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^p}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} (h_1^2 \lambda_1 + h_2^2 \lambda_2 + h_3^2 \lambda_3)^p, \\ \mathcal{M}_{\mathbf{L}^p} &= K_N \det(|H|)^{-\frac{1}{2p+3}} |H|, \\ d_{\mathbf{L}^p} &= K_N^{\frac{3}{2}} \det(|H|)^{\frac{p}{2p+3}}, \\ e_{\mathbf{L}^p} &= \left( \frac{3}{K_N} \right)^p \det(|H|)^{\frac{p}{2p+3}}. \end{aligned}$$

- Erreur d'interpolation  $\|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{\mathbf{L}^\infty}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max_{i=1,3} (h_i \lambda_i), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{W}^{1,\infty}} &= \frac{1}{\varepsilon^2} |{}^t H H|, \\ d_{\mathbf{L}^p} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \det(|H|), \\ e_{\mathbf{L}^p} &= \varepsilon.\end{aligned}$$

- Erreur d'interpolation  $\|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{\mathbf{L}^p}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} (h_1^2 \lambda_1^2 + h_2^2 \lambda_2^2 + h_3^2 \lambda_3^2)^{\frac{p}{2}}, \\ \mathcal{M}_{\mathbf{W}^{1,p}} &= K_N (\det(|H|))^{-\frac{2}{p+3}} |{}^t H H|, \\ d_{\mathbf{W}^{1,p}} &= K_N^{\frac{3}{2}} \det(|H|)^{\frac{p}{p+3}}, \\ e_{\mathbf{W}^{1,p}} &= \left(\frac{3}{K_N}\right)^{\frac{p}{2}} \det(|H|)^{\frac{p}{p+3}}.\end{aligned}$$

Pour les métriques inhomogènes en trois dimensions, il est nécessaire de contrôler l'erreur dans le plan orthogonal à  $\mathbf{n}$ . Si ce plan est défini par une base orthonormale  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , l'erreur est réduite à :

$$\varepsilon_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2\|\mathbf{g}\|_2} |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}| \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{\mathbf{t}} = \frac{1}{2} |{}^t \mathbf{t} H \mathbf{t}|,$$

où  $\mathbf{t}$  appartient au plan  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ . Cette étude peut se réduire à un contrôle d'erreur d'interpolation 2D dans le  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ . Il existe alors deux directions  $\bar{\mathbf{t}}_1$  et  $\bar{\mathbf{t}}_2$  2D qui sont les directions propres du hessien projeté  $\bar{H}$  sur  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  :

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} {}^t \mathbf{u}_1 H \mathbf{u}_1 & {}^t \mathbf{u}_1 H \mathbf{u}_2 \\ {}^t \mathbf{u}_1 H \mathbf{u}_2 & {}^t \mathbf{u}_2 H \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}.$$

On note  $\bar{\lambda}_1$  et  $\bar{\lambda}_2$  les valeurs propres associées à  $\bar{H}$  qui sont données par :

$$\bar{\lambda}_1 = {}^t \mathbf{t}_1 \bar{H} \mathbf{t}_1 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_2 = {}^t \mathbf{t}_2 \bar{H} \mathbf{t}_2.$$

On note également  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  les expressions de  $\bar{\mathbf{t}}_1$  et  $\bar{\mathbf{t}}_2$  en 3D dans la base canonique. Sous ces hypothèses, la matrice de Frenet devient :

$$F = (\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2).$$

- Écart aux lignes de niveaux avec adaptation à la courbure de  $u$ , noté  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}^\infty}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max \left( h_1 \|\mathbf{g}\|_2, h_2^2 \frac{|\bar{\lambda}_1|}{2\|\mathbf{g}\|_2}, h_3^2 \frac{|\bar{\lambda}_2|}{2\|\mathbf{g}\|_2} \right), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{C}^\infty} &= F \begin{pmatrix} \frac{\|\mathbf{g}\|_2^2}{\varepsilon^2} & & \\ & \frac{|\bar{\lambda}_1|}{2\|\mathbf{g}\|_2 \varepsilon} & \\ & & \frac{|\bar{\lambda}_2|}{2\|\mathbf{g}\|_2 \varepsilon} \end{pmatrix} {}^t F, \\ d_{\mathbf{C}^\infty} &= \frac{1}{2\varepsilon^2} \sqrt{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2}, \\ e_{\mathbf{C}^\infty} &= \varepsilon.\end{aligned}$$

- Erreur inhomogène en norme infinie de la fonction  $u$  notée  $\|u\|_{\mathbf{I}^\infty}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \max \left( h_1 \|\mathbf{g}\|_2, h_2^2 \frac{|\bar{\lambda}_1|}{2}, h_3^2 \frac{|\bar{\lambda}_3|}{2} \right), \\ \mathcal{M}_{\mathbf{I}^\infty} &= F \begin{pmatrix} \frac{\|\mathbf{g}\|_2^2}{\varepsilon^2} & & \\ & \frac{|\bar{\lambda}_1|}{2\varepsilon} & \\ & & \frac{|\bar{\lambda}_2|}{2\varepsilon} \end{pmatrix} {}^t F, \\ d_{\mathbf{I}^\infty} &= \frac{1}{2\varepsilon^2} \sqrt{\|\mathbf{g}\|_2^2 |\bar{\lambda}_1| |\bar{\lambda}_2|}, \\ e_{\mathbf{I}^\infty} &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour dériver un contrôle en norme  $\mathbf{L}^p$  des deux erreurs précédentes, on considère le modèle d'erreur inhomogène générique suivant :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} (h_1 \gamma_{\mathbf{n}} + h_2^2 \gamma_{\mathbf{t}_1} + h_3^2 \gamma_{\mathbf{t}_2})^p.$$

$\gamma_{\mathbf{n}}$  est l'erreur commise dans la direction de  $\mathbf{g}$  alors que  $\gamma_{\mathbf{t}}$  est l'erreur commise une direction orthogonale à  $\mathbf{g}$ . On a donc :

$$\gamma_{\mathbf{n}} = \|\mathbf{g}\|_2 \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathbf{t}_i} = \frac{|{}^t \mathbf{t}_i H \mathbf{t}_i|}{2 \|\mathbf{g}\|_2},$$

pour un contrôle en norme  $\mathbf{L}^p$  sur la courbure et :

$$\gamma_{\mathbf{n}} = \|\mathbf{g}\|_2 \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathbf{t}_i} = \frac{|{}^t \mathbf{t}_i H \mathbf{t}_i|}{2},$$

pour un écart en norme  $\mathbf{L}^p$  à la solution. Le maillage optimale minimisant l'erreur générique inhomogène est donnée par :

$$\mathcal{M} = F \begin{pmatrix} 2^{-1} K_N r_{\gamma_{\mathbf{n}}} \gamma_{\mathbf{n}}^{\frac{2p}{p+2}} & & \\ & 2^{\frac{1}{2}} K_N^{\frac{1}{2}} r_{\gamma_{\mathbf{t}_1}} \gamma_{\mathbf{t}_1}^{\frac{p+1}{p+2}} & \\ & & 2^{\frac{1}{2}} K_N^{\frac{1}{2}} r_{\gamma_{\mathbf{t}_2}} \gamma_{\mathbf{t}_2}^{\frac{p+1}{p+2}} \end{pmatrix} {}^t F,$$

avec :

$$r_{\gamma_{\mathbf{n}}} = (\gamma_{\mathbf{n}}^2 \gamma_{\mathbf{t}_1}^{-1} \gamma_{\mathbf{t}_2}^{-1})^{\frac{1}{p+2}}, \quad r_{\gamma_{\mathbf{t}_1}} = \left( \gamma_{\mathbf{n}}^{-1} \gamma_{\mathbf{t}_1}^{\frac{1}{2}} \gamma_{\mathbf{t}_2}^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p+2}} \quad \text{et} \quad r_{\gamma_{\mathbf{t}_2}} = \left( \gamma_{\mathbf{n}}^{-1} \gamma_{\mathbf{t}_1}^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\mathbf{t}_2}^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p+2}}.$$

On en déduit alors les métriques suivantes :

- Écart aux lignes de niveaux en norme  $p$  avec adaptation à la courbure de  $u$ , noté  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}^p}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} \left( h_1 \|\mathbf{g}\|_2 + h_2^2 \frac{|\bar{\lambda}_1|}{2 \|\mathbf{g}\|_2} + h_3^2 \frac{|\bar{\lambda}_2|}{2 \|\mathbf{g}\|_2} \right)^p, \\ d_{\mathbf{C}^p} &= 2^{-\frac{p}{p+2}} K_N (|\bar{\lambda}_1| |\bar{\lambda}_2|)^{\frac{p}{2(p+2)}}, \\ e_{\mathbf{C}^p} &= 2^{-\frac{p(3p+4)}{2(p+2)}} K_N^{-\frac{p}{2}} (|\bar{\lambda}_1| |\bar{\lambda}_2|)^{\frac{p}{2(p+2)}}.\end{aligned}$$

- Erreur inhomogène en norme  $p$  de la fonction  $u$  notée  $\|u\|_{\mathbf{I}^p}$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{M}) &= \int_{\Omega} \left( h_1 \|\mathbf{g}\|_2 + h_2^2 \frac{|\bar{\lambda}_1|}{2} + h_3^2 \frac{|\bar{\lambda}_2|}{2} \right)^p, \\ d_{\mathbf{I}^p} &= 2^{-\frac{p}{p+2}} K_N \left( \|\mathbf{g}\|_2 |\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2|^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{p}{p+2}}, \\ e_{\mathbf{I}^p} &= 2^{-\frac{p(3p+4)}{2(p+2)}} K_N^{-\frac{p}{2}} \left( \|\mathbf{g}\|_2 |\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2|^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{p}{p+2}}.\end{aligned}$$

Dans le cas des fonctions distance pour les lignes de niveaux (*level-set*), les métriques  $\mathcal{M}_{\mathbf{C}^\infty}$  et  $\mathcal{M}_{I^\infty}$  sont équivalentes car  $\|\mathbf{g}\|_2 = 1$ .

#### A.4 ERREUR D'INTERPOLATION LINÉAIRE EN NORME $\mathbf{L}^2$ ET $\mathbf{H}^1$

On utilise l'ensemble des notations de la Section 2.1. On donne ici en complément des estimations pour les normes  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{H}^1$ .

On rappelle seulement que pour une fonction quadratique de hessien  $H$ , l'erreur d'interpolation d'un tétraèdre  $K$  de volume  $V_K$  est donnée par :

$$e(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}})) = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc} ({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_1) (\hat{x}^2 - \hat{x}) & + & ({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_2) (\hat{y}^2 - \hat{y}) & + & ({}^t\mathbf{e}_3 H \mathbf{e}_3) (\hat{z}^2 - \hat{z}) \\ 2({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_2) \hat{x} \hat{y} & + & 2({}^t\mathbf{e}_1 H \mathbf{e}_3) \hat{x} \hat{z} & + & 2({}^t\mathbf{e}_2 H \mathbf{e}_3) \hat{y} \hat{z} \end{array} \right],$$

où  $(\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 3}$  sont les arêtes de  $K$  définissant la transformation affine de jacobien  $B_K$  de l'élément de référence  $\hat{K}$  vers  $K$ .  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  sont les variables dans  $\hat{K}$ .

##### Erreur sur un tétraèdre

*Cas de la norme  $\mathbf{L}^2$ .* En intégrant directement l'erreur  $e$  précédente, on en déduit l'estimation de l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^2$  :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 = \frac{\det(B_K)}{6 \cdot 1680} {}^t\mathbf{e} M_{\mathbf{L}^2} \mathbf{e} = \frac{V_K}{1680} {}^t\mathbf{e} M_{\mathbf{L}^2} \mathbf{e},$$

avec  $\mathbf{e} = {}^t[l_1, l_2, l_3, l_{12}, l_{13}, l_{23}]$  et où la matrice  $M_{\mathbf{L}^2}$  est donnée par :

$$M_{\mathbf{L}^2} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 9 & -8 & -8 & -5 \\ 9 & 12 & 9 & -8 & -5 & -8 \\ 9 & 9 & 12 & -5 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -5 & 8 & 4 & 4 \\ -8 & -5 & -8 & 4 & 8 & 4 \\ -5 & -8 & -8 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

avec  $l_i = ({}^t\mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i)$  pour  $i \in [1, 3]$  et  $l_{ij} = ({}^t\mathbf{e}_i H \mathbf{e}_j)$  quand  $i \neq j$ .

*Cas de la semi-norme  $\mathbf{H}^1$ .* Le cas de la norme  $\mathbf{H}^1$  nécessite de dériver l'erreur  $e$ . Si on note  $\hat{e}(\hat{\mathbf{x}}) = e(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}))$  alors à partir du gradient  $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{e}(\hat{\mathbf{x}})$  sur l'élément  $K_{ref}$ , on en déduit le gradient sur  $K$  par composition :

$$\nabla_{\mathbf{x}}e(\mathbf{x}) = {}^t B_K^{-1} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{e}(\hat{\mathbf{x}}) \implies \|\nabla_{\mathbf{x}}e(\mathbf{x})\|^2 = {}^t \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{e}(\hat{\mathbf{x}}) [B_K^{-1t} B_K^{-1}] \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{e}(\hat{\mathbf{x}}).$$

Dans ce cas, l'intégration d'une fonction  $F$  sur  $K$  est également donnée par :

$$\int_K \|\nabla_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})\|^2 dx dy dz = 6V \int_{K_{ref}} \|\nabla_{\mathbf{x}}(F \circ B_K \cdot \hat{\mathbf{x}})\|^2 d\hat{x}d\hat{y}d\hat{z}.$$

En dérivant  $\hat{e}$ , il vient :

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{e}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} l_1 & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_2 & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}.$$

En notant  $(\hat{x}_m, \hat{y}_m, \hat{z}_m)$  le vecteur  ${}^t B_K^{-1} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{e}(\hat{\mathbf{x}})$ , le gradient  $\|\nabla e\|_2^2$  est donné :

$$\begin{aligned} \|\nabla e\|_2^2 &= \left(\frac{1}{2} l_1 (2\hat{x}_m - 1) + l_{12}\hat{y}_m + l_{13}\hat{z}_m\right)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} l_2 (2\hat{y}_m - 1) + l_{12}\hat{x}_m + l_{23}\hat{z}_m\right)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} l_3 (2\hat{z}_m - 1) + l_{13}\hat{x}_m + l_{23}\hat{y}_m\right)^2. \end{aligned}$$

L'intégration de la fonction précédente permet d'écrire :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{H}^1(K)}^2 = \frac{\det(B_K)}{6 \cdot 20} {}^t \mathbf{e} M_{\mathbf{H}^1} \mathbf{e} = \frac{V_K}{20} {}^t \mathbf{e} M_{\mathbf{H}^1} \mathbf{e},$$

où la partie triangulaire supérieure de la matrice  $M_{\mathbf{H}^1}$  symétrique est donnée ligne à ligne :

$$\begin{aligned} &[8 h_{1,1}, 4 h_{1,2}, 4 h_{1,3}, -6 h_{1,1} - 2 h_{1,2}, -2 h_{1,3} - 6 h_{1,1}, -6 h_{1,3} - 6 h_{1,2}], \\ &[8 h_{2,2}, 2 h_{2,3} + 2 h_{1,2}, -2 h_{1,2} - 6 h_{2,2}, -3 h_{2,3} - 9 h_{1,2}, -h_{2,3} - h_{1,2} - 6 h_{2,2}], \\ &[8 h_{3,3}, -6 h_{1,3} - 3 h_{2,3} - 3 h_{1,2}, -6 h_{3,3} - 2 h_{1,3}, -h_{1,2} - h_{2,3} - 6 h_{3,3}], \\ &[8 h_{2,2} + 8 h_{1,2} + 8 h_{1,1}, 4 h_{2,3} + 4 h_{1,1} + 4 h_{1,3} + 8 h_{1,2}, 6 h_{1,2} + 2 h_{2,3} + 4 h_{2,2} + 8 h_{1,3}], \\ &[8 h_{3,3} + 8 h_{1,1} + 8 h_{1,3}, 2 h_{2,3} + 4 h_{3,3} + 4 h_{1,3} + 10 h_{1,2}], \\ &[8 h_{2,2} + 4 h_{1,2} + 8 h_{3,3} + 4 h_{2,3}], \end{aligned}$$

en notant symboliquement  $B_K^{-1t} B_K = (h_{i,j})_{i,j \in [1,3]^2}$ .

### Erreur sur un triangle

L'erreur d'interpolation se réduit à :

$$\hat{e}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} l_1 (\hat{x}^2 - \hat{x}) + \frac{1}{2} l_2 (\hat{y}^2 - \hat{y}) + l_{12} \hat{x} \hat{y}.$$

*Cas de la norme  $\mathbf{L}^2$ .* Par intégration directe, l'erreur d'interpolation en norme  $\mathbf{L}^2$  se réduit à :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 = \frac{\det(B_K)}{2 \cdot 360} {}^t \mathbf{e} M_{\mathbf{L}^2} \mathbf{e} = \frac{S_K}{360} {}^t \mathbf{e} M_{\mathbf{L}^2} \mathbf{e},$$

avec  $\mathbf{e} = {}^t[l_1, l_2, l_{12}]$  et où la matrice  $M_{\mathbf{L}^2}$  est donnée par :

$$M_{\mathbf{L}^2} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -6 \\ 5 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 8 \end{pmatrix},$$

avec  $l_i = ({}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i)$  pour  $i \in [1, 2]$  et  $l_{ij} = ({}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_j)$  quand  $i \neq j$ .

*Cas de la semi-norme  $\mathbf{H}^1$ .* Si on note la matrice :

$$B_k^{-1} {}^t B_k = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{pmatrix},$$

l'erreur d'interpolation en semi-norme  $\mathbf{H}^1$  s'écrit :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\mathbf{H}^1(K)}^2 = \frac{\det(B_K)}{2 \cdot 6} {}^t \mathbf{e} M_{\mathbf{H}^1} \mathbf{e} = \frac{S_K}{6} {}^t \mathbf{e} M_{\mathbf{H}^1} \mathbf{e},$$

avec  $\mathbf{e} = {}^t[l_1, l_2, l_{12}]$  et où la matrice  $M_{\mathbf{H}^1}$  est donnée par :

$$M_{\mathbf{H}^1} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & -h_{1,1} \\ 0 & h_{2,2} & -h_{2,2} \\ -h_{1,1} & -h_{2,2} & 2(h_{1,1} + h_{2,2}) + h_{1,2} + h_{2,1} \end{pmatrix},$$

avec  $l_i = ({}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_i)$  pour  $i \in [1, 2]$  et  $l_{ij} = ({}^t \mathbf{e}_i H \mathbf{e}_j)$  quand  $i \neq j$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Abgrall. Residual distribution schemes : current status and future trends. *Computers & Fluids*, 35 :641–669, 2006.
- [2] T. Apel. *Anisotropic finite elements : Local estimates and applications*. Book Series : Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Stuttgart, 1999.
- [3] W. Cao. On the error of linear interpolation and the orientation, aspect ratio, and internal angles of a triangle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43 :19–40, 2005.
- [4] W. Cao. An interpolation error estimate in *mathcal{R}^2* based on the anisotropic measures of higher derivatives. *Math. Comp.*, 77 :265–286, 2008.
- [5] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [6] V. Ducrot and P. J. Frey. Contrôle de l'approximation géométrique d'une interface par une métrique anisotrope. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 345, 2007.
- [7] L. Formaggia and S. Perotto. New anisotropic a priori error estimate. *Numer. Math.*, 89 :641–667, 2001.
- [8] P. J. Frey and H. Borouchaki. Surface meshing using a geometric error estimate. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 58(2) :227–245, 2003.
- [9] D. Guegan. *Modélisation numérique d'écoulements bifluïdes 3D instationnaires avec adaptation de maillage*. PhD thesis, Université de Nice, Nice, France, 2007.
- [10] F. Hecht. Mesh generation and error indicator. Summer school : More efficiency in finite element methods, 2008.
- [11] W. Huang. Metric tensors for anisotropic mesh generation. *J. Comp. Phys.*, 204 :633–665, 2005.
- [12] K.-F. Tchon and R. Camarero. Quad-dominant mesh adaptation using specialized simplicial optimization. In *Proc. of 15th Meshing Roundtable*, pages 21–38. Springer, 2006.

# Bibliographie

- R. Abgrall. Residual distribution schemes : current status and future trends. *Computers & Fluids*, 35 :641–669, 2006.
- P.-A. Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre. *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- A. Agouzal, K. Lipnikov, and Y. V. Vassilevski. Adaptive generation of quasi-optimal tetrahedral meshes. *East-West J.*, 7(4) :879–882, 1999.
- F. Alauzet. *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides*. PhD thesis, Université Montpellier II, Montpellier, France, 2003.
- F. Alauzet, S. Borel-Sandou, L. Daumas, A. Dervieux, Q. Dinh, S. Kleinveld, A. Loseille, Y. Mesri, and G. Rogé. Multi-model and multi-scale optimization strategies. application to sonic boom reduction. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(1-2) :191–214, 2008.
- F. Alauzet and P. J. Frey. Estimateur d’erreur géométrique et métriques anisotropes pour l’adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques. RR-4759, INRIA, 2003.
- F. Alauzet, P. J. Frey, P.-L. George, and B. Mohammadi. 3D transient fixed point mesh adaptation for time-dependent problems : Application to CFD simulations. *J. Comp. Phys.*, 222 :592–623, 2007.
- R. C. Almeida, R. A. Feijóo, A. C. Galeão, C. Padra, and R. S. Silva. Adaptive finite element computational fluid dynamics using an anisotropic error estimator. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 182 :379–400, 2000.
- T. Apel. *Anisotropic finite elements : Local estimates and applications*. Book Series : Advances in Numerical Mathematics. Teubner, Stuttgart, 1999.
- V. Arsigny, P. Fillard, X. Pennec, and N. Ayache. Log-Euclidean metrics for fast and simple calculus on diffusion tensors. *Magnetic Resonance in Medicine*, 56(2) :411–421, August 2006.
- I. Babuska and A. K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13 :214–226, 1976.
- I. Babuška and T. Strouboulis. *The Finite Element Method and its reliability*. Oxford Scientific Publications, New York, 2001.
- P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D. M. Causon. On the choice of wavespeeds for the HLLC riemann solver. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(6) :1553–1570, 1997.
- R. Becker and R. Rannacher. A feed-back approach to error control in finite element methods : basic analysis and examples. *East-West J. Numer. Math.*, 4 :237–264, 1996.
- M. Berger. *Geometry 1 & 2*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- M. Berzins. Solution-based mesh quality for triangular and tetrahedral meshes. In *Proc. of 6th Meshing Roundtable*, 1997.
- R. Biswas and R. C. Strawn. A new procedure for dynamic adaption of three-dimensional unstructured grids. *Appl. Numer. Math.*, 13 :437–452, 1994.
- H. Borouchaki, P. L. George, F. Hecht, P. Laug, and E. Saltel. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 1 : Algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25, 1997.
- H. Borouchaki, F. Hecht, and P. J. Frey. Mesh gradation control. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 43(6) :1143–1165, 1998.
- C. L. Bottasso. Anisotropic mesh adaption by metric-driven optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 60 :597–639, 2004.
- M. O. Bristeau, , and J. Periaux. Finite element methods for the calculation of compressible viscous flows using self adaptive mesh refinements. In *Int. Conf. on Num. Meth. for Fluid Dyn.*, 1986.

- G. C. Buscaglia and E. A. Dari. Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 40 :4119–4136, 1997.
- W. Cao. On the error of linear interpolation and the orientation, aspect ratio, and internal angles of a triangle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43 :19–40, 2005.
- W. Cao. An interpolation error estimate in  $mathcal{R}^2$  based on the anisotropic measures of higher derivatives. *Math. Comp.*, 77 :265–286, 2008.
- M. J. Castro-Díaz, F. Hecht, B. Mohammadi, and O. Pironneau. Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25 :475–491, 1997.
- L. Chen, P. Sun, and J. Xu. Optimal anisotropic simplicial meshes for minimizing interpolation errors in  $L^p$ -norm. *Math. Comp.*, 76(257) :179–204, 2007.
- P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- P. G. Ciarlet. *An Introduction to Differential Geometry, with Applications to Elasticity*. Springer, Dordrecht, 2005.
- P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle*, R-2 :77–84, 1975.
- Y. Coudiere, B. Palmerio, A. Dervieux, and D. Leservoisier. Accuracy barriers in mesh adaptation. RR-4528, INRIA, 2002.
- T. Coupez. Génération de maillages et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9 :403–423, 2000.
- P.-H. Cournède, B. Koobus, and A. Dervieux. Positivity statements for a Mixed-Element-Volume scheme on fixed and moving grids. *European Journal of Computational Mechanics*, 15(7-8) :767–798, 2006.
- F. Courty. *Optimisation différentiable en mécanique des fluides numérique*. PhD thesis, Université Paris XI, Orsay, Paris, France, 2003.
- E. F. D'Azevedo and R. B. Simpson. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numer. Math.*, 59 :321–348, 1991.
- C. Debiez and A. Dervieux. Mixed-Element-Volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations. *Computers & Fluids*, 29 :89–118, 2000.
- M. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- C. Dobrzynski. *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2005.
- C. Dobrzynski and P. J. Frey. Anisotropic delaunay mesh adaptation for unsteady simulations. In *Proc. of 17th Int. Meshing Roundtable*, pages 177–194. Springer, 2008.
- J. Dompierre, M.-G. Vallet, M. Fortin, Y. Bourgault, and W. G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation : towards a solver and user independent cfd. *AIAA Paper*, 97-0861, 1997.
- V. Ducrot and P. J. Frey. Contrôle de l'approximation géométrique d'une interface par une métrique anisotrope. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 345, 2007.
- L. Formaggia, S. Micheletti, and S. Perotto. Anisotropic mesh adaptation in computational fluid dynamics : Application to the advection-diffusion-reaction and the Stokes problems. *Appl. Numer. Math.*, 51 :511–533, 2004.
- L. Formaggia and S. Perotto. New anisotropic a priori error estimate. *Numer. Math.*, 89 :641–667, 2001.
- M. Fortin, M.-G. Vallet, J. Dompierre, Y. Bourgault, and W. G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation : theory, validation and applications. In *Proc. of ECCOMAS CFD*, 1996.
- J. Francescato. *Méthodes multigrilles par agglomération directionnelle pour le calcul d'écoulements turbulents*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, Nice, France, 1998.
- P. J. Frey. *Yams*, a fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure. RT-0252, INRIA, 2001.
- P. J. Frey and F. Alauzet. Anisotropic mesh adaptation for CFD computations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :5068–5082, 2005.
- P. J. Frey and H. Borouchaki. Surface meshing using a geometric error estimate. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 58(2) :227–245, 2003.
- P. J. Frey and P.-L. George. *Mesh generation. Application to finite elements*. Hermès Science, Paris, Oxford, 2000.
- P.-L. George. Tet meshing : construction, optimization and adaptation. In *Proc. of 8th Meshing Roundtable*, South Lake Tao, CA, USA, 1999.

- P.-L. George. **Gamhic3d**, a fully automatic adaptive mesh generation method in three dimensions. Technical Note, INRIA, 2001.
- P.-L. George and H. Borouchaki. *Delaunay triangulation and meshing : application to finite elements*. Hermès Science, Paris, Oxford, 1998.
- M. B. Giles. On adjoint equations for error analysis and optimal grid adaptation in CFD. Technical Report NA-97/11, Oxford, 1997.
- M. B. Giles and N. Pierce. Improved lift and drag estimates using adjoint euler equations. *AIAA Paper*, 99-3293, 1999.
- M. B. Giles and A. Suli. Adjoint methods for PDEs : a posteriori error analysis and postprocessing by duality. *Acta Numerica*, pages 145–236, 2002.
- M. Goldberg. Three infinite families of tetrahedral space-fillers. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 16(3) :348–354, 1974.
- A. Griewank. On Automatic Differentiation. In M. Iri and K. Tanabe, editors, *Mathematical Programming : Recent Developments and Applications*, pages 83–108. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- C. Gruau and T. Coupez. 3D tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :4951–4976, 2005.
- D. Guegan. *Modélisation numérique d'écoulements bifluïdes 3D instationnaires avec adaptation de maillage*. PhD thesis, Université de Nice, Nice, France, 2007.
- H. W. Carlson and R. J. Mack and O. A. Morris. A wind-tunnel investigation of the effect of body-shape on sonic-boom pressure distributions. TN. D-3106, Nasa, 1965.
- L. Hascoët and V. Pascual. TAPENADE 2.1 user's guide. Rapport technique 300, NRIA, Sophia Antipolis, 2004.
- W. D. Hayes, R. C. Haefeli, and H. E. Kulsrud. Sonic boom propagation in a stratified atmosphere with computer program. TN. CR-1299, Nasa, 1969.
- F. Hecht. **BAMG** : bidimensional anisotropic mesh generator. Available from <http://www-rocq.inria.fr/gamma/cdrom/www/bamg/eng.htm>, INRIA-Rocquencourt, France, 1998.
- F. Hecht. Mesh generation and error indicator. Summer school : More efficiency in finite element methods, 2008.
- F. Hecht and B. Mohammadi. Mesh adaptation by metric control for multi-scale phenomena and turbulence. *AIAA Paper*, 97-0859, 1997.
- D. C. Howe, K. A. Waithe, and E. A. Haering. Quiet spike near field flight test pressure measurement with computational fluid dynamics comparisons. *AIAA Paper*, 2008-128, 2008.
- W. Huang. Metric tensors for anisotropic mesh generation. *J. Comp. Phys.*, 204 :633–665, 2005.
- ICAO. *Manual of the ICAO Standard Atmosphere (extended to 80 kilometres)*. Doc 7488. Third edition edition, 1993.
- F. John. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In *Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday*, pages 187–204, New-York, 1948. Interscience Publishers.
- W. T. Jones, E. J. Nielsen, and M. A. Park. Validation of 3D adjoint based error estimation and mesh adaptation for sonic boom prediction. *AIAA Paper*, 2006-1150, 2006.
- Y. Kallinderis and P. Vijayan. Adaptive refinement-coarsening scheme for three-dimensional unstructured meshes. *AIAA Paper*, 31(8) :1440–1447, 1993.
- V. I. Krylov and A. H. Stroud. *Approximate calculation of integrals*. Dover, 2006.
- J.-F. Lagüe. *Optimisation de maillage basée sur une erreur locale d'approximation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2006.
- P. Laug and H. Bourouchaki. **BL2D-V2**, mailleur bidimensionnel adaptatif. RR-0275, INRIA, 2003.
- B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme i. The quest of monotonicity. *Lecture notes in physics*, 18 :163–168, 1973.
- D. Leservoisier. *Stratégies d'adaptation et de raffinement de maillage en mécanique des fluides numérique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2001.
- D. Leservoisier, P.-L. George, and A. Dervieux. Métrique continue et optimisation de maillage. RR-4172, INRIA, 2001.
- X. L. Li, M. S. Shephard, and M. W. Beall. 3D anisotropic mesh adaptation by mesh modification. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(48-49) :4915–4950, 2005.

- R. Löhner. Adaptive remeshing for transient problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 75 :195–214, 1989.
- R. Löhner. Three-dimensional fluid-structure interaction using a finite element solver and adaptive remeshing. *Computing Systems in Engineering*, 1(2-4) :257–272, 1990.
- R. Löhner. *Applied CFD techniques*. Wiley, New-York, 2001.
- R. Löhner and J. D. Baum. Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 14 :1407–1419, 1992.
- D. J. Mavriplis. Unstructured mesh generation and adaptivity,. Technical report, ICASE Report 95-26, 1995.
- D. J. Mavriplis. Adaptive meshing techniques for viscous flow calculations on mixed-element unstructured meshes. *AIAA Paper*, 97-0857, 1997.
- M. Mehrenberger. Personal communication, 2008.
- K. Mer. Variational analysis of a mixed element/volume scheme with fourth-order viscosity on general triangulations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 153 :45–62, 1998.
- Y. Mesri. *Gestion et contrôle des maillages non structurés anisotropes, applications en aérodynamique*. PhD thesis, Université de Nice, Nice, France, 2007.
- B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied shape optimization for fluids*. Oxford university press, 2001.
- J. M. Morgenstern, A. Arslan, V. Lyman, and J. Vadyak. F-5 shaped sonic boom demonstrator's persistence of boom shaping reduction through turbulence. *AIAA Paper*, 2005-0012, 2005.
- E. J. Nadler. *Piecewise linear approximation on triangulations of a planar regions*. PhD thesis, Brown university, Providence, 1985.
- D. J. Naylor. Filling space with tetrahedra. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 44 :1383–1395, 1999.
- C. C Pain, A. P. Umpleby, C. R. E. de Oliveira, and A. J. H. Goddard. Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190 :3771–3796, 2001.
- B. Palmerio, V. Billey, A. Dervieux, and J. Periaux. Self-adaptive refinements and F.E.M. for solving the euler equations. In *Int. Conf. on Num. Meth. for Fluid Dyn.*, 1986.
- P. Pebay. *A priori Delaunay-conformity in 2 and 3 dimensions*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2000.
- Pederson. Sonic boom technologies and challenges. In *FAA Civil Supersonic Aircraft Workshop*, Arlington, VI, USA, 2003.
- J. Peraire, J. Peiró, and K. Morgan. Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations. *J. Comp. Phys.*, 103 :269–285, 1992.
- J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *J. Comp. Phys.*, 72 :449–466, 1987.
- M. Picasso. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : Application to elliptic and parabolic problems. *SIAM J. Sci. Comp.*, 24(4) :1328–1355, 2003.
- N. A. Pierce and M. B. Giles. Adjoint recovery of superconvergent functionals from PDE approximations. *SIAM Review*, 42(2) :247–264, 2000.
- R. D. Rausch, J. T. Batina, and H. T. Y Yang. Spatial adaptation of unstructured meshes for unsteady aerodynamic flow calculations. *AIAA Journal*, 30 :1243–1251, 1992.
- J.-F. Remacle, X. Li, N. Chevaugéon, and M. S. Shephard. Transient mesh adaptation using conforming and non conforming mesh modifications. In *Proc. of 11th Meshing Roundtable*, Ithaca, NY, USA, 2002.
- J.-F. Remacle, X. Li, M.S. Shephard, and J. E. Flaherty. Anisotropic adaptive simulation of transient flows using discontinuous galerkin methods. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 62 :899–923, 2005.
- P. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43 :357–372, 1981.
- Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2nd edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
- E. Schall, D. Leservoisier, A. Dervieux, and B. Koobus. Mesh adaptation as a tool for certified computational aerodynamics. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 45 :179–196, 2004.
- M. Senechal. Which tetrahedra fill space? *Mathematics Magazine*, 54 :227–243, 1981.
- C. W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77 :439–471, 1988.

- D. Y. M. Sommerville. Space-filling tetrahedra in euclidean space. In *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, volume 41, pages 49–57, 1923.
- W. Speares and M. Berzins. A 3D unstructured mesh adaptation algorithm for time-dependent shock-dominated problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25 :81–104, 1997.
- J. L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *J. Comput. Phys.*, 40 :263–293, 1981.
- B. Stoufflet, J. Periaux, L. Fezoui, and A. Dervieux. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite element. *AIAA Paper*, 87-0560, 1987.
- S. Sykora. Quantum theory and the bayesian inference problems. *J. Statistical Phys.*, 11(1) :17–27, 1974.
- A. Tam, D. Ait-Ali-Yahia, M. P. Robichaud, M. Moore, V. Kozel, and W. G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation for 3D flows on structured and unstructured grids. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 189 :1205–1230, 2000.
- K.-F. Tchon and R. Camarero. Quad-dominant mesh adaptation using specialized simplicial optimization. In *Proc. of 15th Meshing Roundtable*, pages 21–38. Springer, 2006.
- C. Thomas. Extrapolation of sonic boom pressure signatures by the waveform parameter method. TN. D-6832, Nasa, 1972.
- M.-G. Vallet. *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 1992.
- M.-G. Vallet, C.-M. Manole, J. Dompierre, S. Dufour, and F. Guibault. Numerical comparison of some hessian recovery techniques. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 72 :987–1007, 2007.
- Y. V. Vassilevski and A. Agouzal. Unified asymptotic analysis of interpolations errors for optimal meshes. *Doklady Mathematics*, 72(3) :295–298, 2005.
- D. A. Venditti. *Grid adaptation for functional outputs of compressible flow simulations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, 2002.
- D. A. Venditti and D. L. Darmofal. Grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensional inviscid flows. *J. Comp. Phys.*, 176(1) :40–69, 2002.
- D. A. Venditti and D. L. Darmofal. Anisotropic grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensional viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 187(1) :22–46, 2003.
- R. Verfürth. *A review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement techniques*. Wiley Teubner Mathematics, New York, 1996.
- O. C. Zienkiewicz and J. Wu. Automatic directional refinement in adaptive analysis of compressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 37 :2189–2210, 1994.
- O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33(7) :1331–1364, 1992.
- O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33(7) :1365–1380, 1992.

Thèse soutenue le 18 Décembre 2008

Par **M. LOSEILLE, ADRIEN**

Sujet de la thèse

ADAPTATION DE MAILLAGE ANISOTROPE 3D MULTI-ÉCHELLES ET CIBLÉE À UNE FONCTIONNELLE POUR LA MÉCANIQUE DES FLUIDES APPLICATION À LA PRÉDICTION HAUTE-FIDÉLITÉ DU BANG SONIQUE

Jury M. FORMAGGIA  
M. NICAISE  
M. DERVIEUX  
M. GEORGE  
M. ROGE  
M. MOHAMMADI  
M. ALAUZET  
M. HECHT

Rapport de soutenance

(utiliser le verso de ce document pour le rapport de soutenance)

Mention accordée au candidat \*  
par le jury *très honorable*

Paris, le 18/12/2008

Le président et les membres du jury :

\*  
L'UPMC recommande de ne plus attribuer que les mentions 'Honorable' et 'Très honorable' (décision des Conseils Scientifiques du 04/12/2000 et du 02/07/2001 et du Conseil d'Administration du 08/10/2001)

A. Loseille a présenté, de façon brillante, ses travaux de thèse sur l'adaptation de maillage anisotropes et applications en mécanique des fluides.

Le jury a grandement apprécié la qualité de la présentation, amenant de manière très didactique les concepts de la thèse.

En réponse aux nombreuses questions des membres du jury, A. Loseille a démontré qu'il dominait tous les aspects liés à l'adaptation de maillage pour la mécanique des fluides.

En conclusion, le jury unanime décerne à A. Loseille le titre de docteur de l'UPMC avec la mention très honorable.

18/12/2008

Bijan Mohammadi

A. Loseille a présenté de façon brillante ses travaux de thèse sur l'adaptation de maillage anisotrope et applications en mécanique des fluides.

Le jury a grandement apprécié la qualité de la présentation, amenant de manière très didactique les concepts de la thèse.

En réponse aux nombreuses questions des membres du jury, A. Loseille a démontré qu'il dominait tous les aspects liés à l'adaptation de maillage pour la mécanique des fluides.

En conclusion, le jury unanime décerne à A. Loseille le titre de docteur de l'UPMC avec la mention très honorable.

18/12/2008

Bijan Mohammadi

**Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle  
pour la mécanique des fluides.  
Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique.**

*Résumé.* En mécanique des fluides (CFD), l'adaptation de maillage anisotrope est reconnue pour sa capacité à réduire le ratio entre le nombre de degrés de liberté et la précision du calcul. Cependant, son application dans le cas d'écoulements compressibles avec des chocs pose les problématiques suivantes : (i) les schémas numériques d'ordre élevé de type *shock capturing* retombent à l'ordre un dans les chocs, (ii) les senseurs utilisés pour l'adaptation prescrivent dans les chocs des tailles qui tendent vers zéro. Il est donc nécessaire de prescrire une taille minimale. On perd alors tout l'intérêt d'une adaptation anisotrope. On apporte une réponse à ces problématiques en considérant une adaptation anisotrope multi-échelles du maillage basée sur le modèle de maillage continu. On alors montre que le processus adaptatif converge dans les chocs si le schéma numérique utilisé est non compressif. La prescription d'une taille minimale n'est plus nécessaire. On retrouve également un ordre deux de convergence dans tout le domaine, même en présence de chocs.

Si on se donne des informations supplémentaires (fonctionnelle précise à observer, équation aux dérivées partielles, schéma numérique utilisé pour la résoudre) les méthodes génériques précédentes ne sont plus optimales dans la distribution des degrés de liberté. On étudie cette problématique dans le cas particulier des équations d'Euler pour des fonctionnelles scalaires. Ce type d'étude est très bien adapté pour le calcul de grandeurs d'intérêt comme la portance ou la traînée en aérodynamique. On propose une estimation d'erreur *a priori* pour le contrôle de l'erreur d'approximation sur une fonctionnelle. Cette estimation est ensuite minimisée sur l'espace des maillages continus afin de décrire le maillage anisotrope optimal.

Enfin, on applique l'adaptation multi-échelles à la prédiction haute-fidélité du bang sonique.

*Mots-clés :* Adaptation de maillage non-structuré, estimateurs d'erreur *a priori*, maillage continu, optimisation de maillage, erreur d'interpolation, mécanique des fluides, équations d'Euler, fonctionnelle objectif, adjoint, bang sonique.

**Anisotropic 3D hessian-based multi-scale and adjoint-based mesh adaptation  
for Computational fluid dynamics  
Application to high fidelity sonic boom prediction.**

*Abstract.* Hessian based unstructured mesh adaptation has already proved its efficiency to improve the ratio between solution accuracy and the number of degrees of freedom. However, when dealing with flows with shocks, several problematics occur : (i) a loss of convergence order generally due to the presence of steep gradients or genuine discontinuities in the flow, even if a provably spatially high order method is employed, (ii) error estimates may prescribe a size converging to zero in the discontinuity vicinity. These problems lead to the loss of anisotropy.

We show that these problems can be solved by using a particular multi-scales mesh adaptation procedure based on a continuous mesh model. With this approach, prescribing a minimal size is not required and anisotropy is fully preserved. Global second order mesh convergence is numerically observed even with flows with shocks.

When more information is given (as the EDP or a functional output), hessian based mesh adaptation is no more optimal in the distribution of degrees of freedom in the computational domain. We address this issue by considering an *a priori* error estimate to control approximation error on functionals when the flow is governed by the Euler equations. This estimate allows us to derive an anisotropic mesh prescription.

Finally, all adaptive strategies are applied to predict high-fidelity sonic boom signature of complex aircrafts.

*Key-words :* Unstructured mesh adaptation, *a priori* error estimates, continuous mesh model, mesh optimization, interpolation error, computational fluid dynamics, Euler equations, functional outputs, adjoint, sonic boom.

INRIA Rocquencourt, Projet Gamma, Domaine de Voluceau, BP 105, 78153, Le Chesnay.  
INRIA Sophia Antipolis, Projets Tropics, 2004 route des lucioles, 06902 Sophia Antipolis.