



**HAL**  
open science

# Problèmes aux limites et problèmes asymptotiques dans l'étude des systèmes hyperboliques

Jean-François Coulombel

► **To cite this version:**

Jean-François Coulombel. Problèmes aux limites et problèmes asymptotiques dans l'étude des systèmes hyperboliques. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2008. tel-00362284

**HAL Id: tel-00362284**

**<https://theses.hal.science/tel-00362284>**

Submitted on 17 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE  
LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ

Document de synthèse présenté en vue d'obtenir

## L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

*Discipline* : Mathématiques

---

# PROBLÈMES AUX LIMITES ET PROBLÈMES ASYMPTOTIQUES DANS L'ÉTUDE DES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES

---

Soutenu publiquement le 1er avril 2008 par Jean-François COULOMBEL

Après avis des rapporteurs

M. Gilles LEBEAU      Professeur, Université de Nice  
M. Roberto NATALINI    Directeur de recherches, IAC Rome  
M. Kevin ZUMBRUN      Professeur, Indiana University

### **Jury**

Mme Sylvie BENZONI-GAVAGE    Professeur, Université Lyon 1  
M. Patrick GÉRARD                Professeur, Université Paris 11  
M. Thierry GOUDON                Directeur de recherches, INRIA Lille  
M. Gilles LEBEAU                 Professeur, Université de Nice  
M. Denis SERRE                    Professeur, ENS Lyon  
M. Nikolay TZVETKOV              Professeur, Université Lille 1

## Remerciements

Ce mémoire est le fruit des recherches que j'ai accomplies pendant ma thèse de doctorat à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon et, dans une plus large mesure, depuis mon arrivée au laboratoire Paul Painlevé de l'Université Lille 1. L'aboutissement de ces travaux a été rendu possible par le confort exceptionnel que m'a procuré mon statut. Aussi mes premiers remerciements iront-ils au comité national du CNRS pour m'avoir accordé sa confiance et fait ainsi bénéficiaire de conditions de travail privilégiées.

Je dois beaucoup à Sylvie Benzoni, Guy Métivier et Thierry Goudon qui m'ont chacun ouvert à de nouveaux sujets et permis de développer tant mes connaissances que mes centres d'intérêt. Je souhaite les remercier chaleureusement pour leur disponibilité, leurs encouragements et l'enthousiasme qu'ils ont manifesté pour mes résultats. Travailler à leur contact fut une grande source de motivation et d'enrichissement.

Gilles Lebeau, Roberto Natalini et Kevin Zumbrun ont accepté la lourde tâche de rapporteur, et je suis honoré de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Je les remercie pour tout le temps et l'énergie qu'ils ont consacrés à cette évaluation.

J'adresse également de vifs remerciements à Patrick Gérard, Denis Serre et Nikolay Tzvetkov pour le plaisir qu'ils me font en participant au jury, ainsi que pour les conversations fructueuses que nous avons pu avoir.

Je souhaite également remercier mes collaborateurs qui m'ont tous beaucoup apporté. Sans eux ces résultats n'auraient sans doute pas vu le jour. Ma reconnaissance va également à tous les collègues qui ont pris le temps de m'aider et de m'éclairer pour surmonter les obstacles qui ont jalonné ce parcours.

Je suis très heureux d'avoir pu accomplir ce travail tout en participant au développement de l'équipe Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles du laboratoire Paul Painlevé. Je voudrais en remercier tous les membres pour le climat agréable et épanouissant qui y règne, avec une mention particulière à Pauline Lafitte pour tous les bons moments - et ils furent nombreux - passés ensemble depuis notre arrivée à Lille.

Enfin, mes remerciements les plus chaleureux iront à Sébastien, à ma famille et à mes amis pour tout ce qu'ils m'ont apporté.

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Problèmes aux limites hyperboliques multidimensionnels</b>            | <b>9</b>  |
| 2.1      | Problèmes linéaires à coefficients constants . . . . .                   | 9         |
| 2.1.1    | Espaces fonctionnels et normes . . . . .                                 | 10        |
| 2.1.2    | Stabilité uniforme et stabilité faible . . . . .                         | 10        |
| 2.1.3    | Estimations d'énergie a priori [A] . . . . .                             | 14        |
| 2.2      | Problèmes linéaires à coefficients variables . . . . .                   | 16        |
| 2.2.1    | Estimations d'énergie a priori [B] . . . . .                             | 16        |
| 2.2.2    | Vérification du caractère bien-posé des équations [E] . . . . .          | 19        |
| 2.3      | Problèmes non-linéaires non-caractéristiques . . . . .                   | 21        |
| 2.3.1    | Deux exemples . . . . .  | 21        |
| 2.3.2    | Persistance des ondes faiblement stables [F] . . . . .                   | 25        |
| 2.4      | Un problème caractéristique : les discontinuités de contact . . . . .    | 31        |
| 2.4.1    | Le critère de stabilité faible [D] . . . . .                             | 31        |
| 2.4.2    | Persistance des discontinuités de contact [C] [F] . . . . .              | 33        |
| 2.5      | Perspectives . . . . .   | 35        |
| <b>3</b> | <b>Systèmes hyperboliques avec dissipation</b>                           | <b>36</b> |
| 3.1      | Systèmes hyperboliques avec une forte relaxation . . . . .               | 36        |
| 3.1.1    | Système des moments avec minimisation d'entropie [G] [H] . . . . .       | 36        |
| 3.1.2    | Equations d'Euler isothermes avec friction [I] . . . . .                 | 43        |
| 3.1.3    | Relaxation en pression des équations d'Euler [J] . . . . .               | 44        |
| 3.2      | Etude d'un modèle d'hydrodynamique radiative . . . . .                   | 49        |
| 3.2.1    | Existence et stabilité asymptotique de profils de choc [K] [L] . . . . . | 49        |
| 3.2.2    | Calcul numérique des profils de choc [M] . . . . .                       | 55        |
| 3.3      | Perspectives . . . . .   | 57        |

# Chapitre 1

## Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude d'équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires du premier ordre, posées le plus souvent sous la forme de systèmes de lois de conservation :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(u) = 0, \quad (1.1)$$

l'inconnue  $u$  prenant ses valeurs dans un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ , et les flux  $f_j$  étant des fonctions régulières sur  $\mathcal{U}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ . De telles équations aux dérivées partielles modélisent de nombreux phénomènes physiques d'évolution dans des domaines aussi variés que la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, l'élastodynamique, et d'une manière générale des phénomènes de propagation d'ondes en mécanique des milieux continus. Une caractéristique fondamentale de ces équations est la propagation à vitesse finie de l'information, cette vitesse de propagation dépendant elle-même de l'état du milieu. Cette inter-dépendance entre la vitesse de propagation et l'état du milieu est la cause de la formation de singularités, comme les ondes de choc, dans les solutions. Une fois que ces ondes de choc se rencontrent et interagissent, elles peuvent donner naissance à d'autres ondes comme des ondes de détente, des discontinuités de contact, ou encore des ondes soniques. A partir de ce schéma général, nous pouvons concevoir une stratégie pour résoudre le problème de Cauchy associé au système (1.1), c'est-à-dire résoudre (1.1) pour une condition initiale  $u_0$  donnée. Nous commençons par résoudre le problème de Cauchy pour des conditions initiales régulières, nous étudions ensuite le cas des solutions représentant un seul type d'onde (choc, détente, discontinuité de contact), puis nous essayons de résoudre le cas des interactions entre plusieurs types d'ondes. Dans le cas de la dimension un d'espace ( $d = 1$ ), c'est essentiellement cette démarche qui mène à l'existence globale de solutions faibles pour des conditions initiales à variations bornées via le schéma de Glimm ou l'algorithme de front-tracking. Il intervient une condition de petitesse sur la taille de la condition initiale, cette condition assurant le contrôle uniforme en temps des interactions entre les différentes ondes générées par la condition initiale. Nous renvoyons aux ouvrages [13, 59] pour une exposition détaillée des résultats dans ce cas.

Dans le cas multi-dimensionnel ( $d \geq 2$ ), le "programme" décrit ci-dessus est en revanche beaucoup moins avancé, et la compréhension du problème de Cauchy n'est encore que très partielle. Nous renvoyons aux ouvrages [44, 7] pour un panorama des principaux

résultats connus à ce jour dont nous n’esquisserons ici que les grandes lignes. Le premier pas, que nous devons à Kato [32], a été la résolution du problème de Cauchy localement en temps pour des données initiales régulières. Le cadre fonctionnel est celui des espaces de Sobolev  $H^s$  construits sur  $L^2$ , l’indice  $s$  de régularité correspondant à l’injection dans les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Le choix de  $L^2$  n’est pas innocent car le cadre  $L^p$ ,  $p \neq 2$ , n’est en général pas adapté pour les systèmes hyperboliques en deux ou trois dimensions d’espace, voir les résultats de Brenner, Guès et Rauch [12, 24]. L’étape suivante concerne les solutions faibles de (1.1) qui sont régulières de part et d’autre d’une interface que nous supposerons donnée par une équation  $\{x_d = \varphi(t, x_1, \dots, x_{d-1})\}$ . Le premier cas résolu fut celui des ondes de choc, que Majda traita dans [43, 42]. La méthode de Majda consiste en premier lieu à se ramener à un problème aux limites dans un demi-espace, le front inconnu  $\varphi$  intervenant dans les conditions aux limites (qui sont les conditions de Rankine-Hugoniot). Majda montre alors comment étendre la technique de Kreiss [36] à ce type de conditions aux limites non-standard (l’analyse de Kreiss [36] permet d’étudier le cas où le système (1.1) est posé dans un domaine fixe avec des conditions aux limites ne dépendant que de la trace de la solution à l’intérieur). L’analyse de Majda passe en particulier par la notion de “stabilité uniforme” sur laquelle nous reviendrons par la suite, et qui est une hypothèse centrale pour obtenir les résultats de [43, 42]. Cette notion est l’extension au cas des problèmes avec un front de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme qui intervient dans le cas d’un problème aux limites posé dans un domaine fixe, voir par exemple [36, 7, 15]. Signalons qu’indépendamment de Majda, Blokhin [9, 10] a obtenu des résultats analogues pour le système de la dynamique des gaz. Toutefois, les résultats de Blokhin ne semblent pas directement applicables à n’importe quel système de la forme (1.1), tandis que l’approche de Majda ne requiert que des hypothèses structurelles sur (1.1) qui ont l’avantage d’être vérifiées dans bon nombre d’applications. A la suite des travaux de Majda, de nombreux problèmes voisins ont été résolus en suivant une démarche similaire. Harabetian [27] a ainsi résolu le problème de Cauchy pour une donnée initiale  $u_0$  régulière de part et d’autre d’une hypersurface dans le cadre des fonctions analytiques, Métivier [47] a résolu l’interaction entre deux chocs uniformément stables (dans ce cas, la solution de (1.1) présente deux fronts  $\{x_d = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_{d-1})\}$  et  $\{x_d = \varphi_2(t, x_1, \dots, x_{d-1})\}$  qui coïncident en  $t = 0$ ), Alinhac [1] a résolu les ondes de détente (dans ce problème, la solution présente deux fronts caractéristiques et se raccorde continûment entre les deux fronts). Métivier [48] a étudié ensuite les chocs de faible amplitude, un problème qui a reçu un traitement définitif par Francheteau et Métivier [19], puis Métivier [49] et Sablé-Tougeron [58] ont étudié les ondes soniques (qui sont des solutions continues de (1.1) dont le gradient présente des discontinuités). Enfin, mais la liste est loin d’être exhaustive, Freistühler [20] a étendu les résultats de Majda aux chocs sous-compressifs pour lesquels il convient d’ajouter des conditions aux limites en plus des conditions de Rankine-Hugoniot. A l’exception du travail d’Harabetian qui traite des solutions analytiques, le cadre des travaux mentionnés ci-dessus est celui des espaces de Sobolev construits sur  $L^2$  (dans le cas des problèmes avec un front caractéristique, il peut être nécessaire d’introduire des espaces avec une régularité conormale par rapport au bord).

La première partie de ce mémoire est consacrée à étendre les résultats de Majda au

cas de fronts qui ne sont pas uniformément stables. Les motivations sont multiples. Tout d’abord, il existe de nombreux exemples de problèmes aux limites hyperboliques qui ne satisfont pas l’hypothèse de stabilité uniforme (ou l’hypothèse de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans le cas d’un problème aux limites standard sans front). Nous nous concentrerons dans ce mémoire sur trois problèmes typiques, qui sont les suivants :

- les ondes de choc pour le système des équations d’Euler isentropiques,
- le modèle de transitions de phase liquide-vapeur isothermes étudié par Benzoni [4],
- les discontinuités de contact pour le système des équations d’Euler isentropiques.

Dans certains régimes des paramètres, et selon la dimension  $d$  de l’espace, ces trois problèmes présentent tous la particularité de mettre en défaut la condition de stabilité uniforme hors des points “glancing” du cotangent au bord. Nous expliciterons plus loin toutes ces notions. Le problème est alors de savoir si nous pouvons montrer des résultats de stabilité linéaire et non-linéaire analogues à ceux de Majda pour de tels problèmes. Nous répondrons positivement à cette question. Plus généralement, il est connu depuis les résultats de Kreiss [36] et Majda [43, 42] que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est suffisante pour assurer le caractère bien-posé des problèmes aux limites hyperboliques linéaires et non-linéaires, et il est naturel de se demander si cette condition est également nécessaire. Nos résultats montrent que cette condition n’est pas nécessaire pour que les problèmes aux limites hyperboliques soient bien-posés, à condition toutefois d’autoriser une perte de régularité entre les données et la solution. Nos résultats couvrent à la fois des situations où le bord du domaine, ou bien le front, est caractéristique (c’est le cas pour le problème des discontinuités de contact), et des situations où le bord du domaine, ou le front, est non-caractéristique (les ondes de choc, les transitions de phase liquide-vapeur). La démarche que nous avons adoptée reprend les grandes lignes de la méthode de Majda et peut se décomposer selon les grandes étapes suivantes :

1. Montrer des estimations a priori pour les problèmes à coefficients constants,
2. Montrer des estimations a priori pour les problèmes à coefficients variables,
3. Vérifier le caractère bien-posé des problèmes linéaires,
4. Vérifier le caractère bien-posé des problèmes non-linéaires.

La première partie de ce mémoire reprendra une à une chacune de ces étapes. Il est opportun de dégager une structure commune suffisamment générale pour décrire les problèmes étudiés, ceci afin de pouvoir appliquer l’analyse au plus de situations possibles. Il est cependant difficile d’englober tous les problèmes dans une seule et même classe. Autant il semble abordable d’écrire un résultat général pour les discontinuités non-caractéristiques, autant il semble encore délicat de dégager une structure générale pour les discontinuités caractéristiques. Nous expliquerons cette difficulté en insistant sur les points essentiels de l’analyse dans cette situation. Nos résultats pour les discontinuités caractéristiques seront donc limités au cas particulier des discontinuités de contact pour le système des équations d’Euler isentropiques. Le cas techniquement plus favorable des discontinuités non-caractéristiques permet une présentation générale que nous adopterons ici.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à des systèmes de la forme (1.1) qui tiennent compte de forces de relaxation, par exemple des forces de frottement, ou bien qui

tiennent compte d'un autre phénomène ayant un effet dissipatif sur le système considéré. De manière générale, nous étudierons des systèmes de la forme :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(u) = b(u), \quad (1.2)$$

où la fonction  $b$  apparaissant dans le second membre de (1.2) enverra continûment l'espace  $H^s$  dans lui-même (soit pour tout  $s$ , soit pour tout  $s$  suffisamment grand). Sans autre hypothèse sur  $b$ , on ne peut bien-sûr pas espérer que le comportement des solutions de (1.2) soit meilleur que le comportement des solutions de (1.1). Nous nous intéresserons ici à des problèmes où le second membre  $b$  tend à ramener les solutions  $u$  vers un état d'équilibre constant. Schématiquement, et bien que nous ne traiterons pas de problèmes dans un cadre aussi général, nous considérerons des fonctions  $b$  telles que pour tout  $u_0$  dans l'espace  $H^s$ , le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{du}{dt} = b(u),$$

admet une solution définie pour tout  $t \geq 0$ , cette solution tendant vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Le système (1.2) exprime alors une compétition entre ces forces de rappel et le mécanisme hyperbolique classique décrit plus haut qui tend à former des singularités en temps fini. La seconde partie de ce mémoire est consacrée à deux situations où nous étudierons cette compétition entre l'explosion hyperbolique et la dissipation due au terme source  $b$  :

1. La limite de forte relaxation, qui correspond au cas où dans (1.2) le terme source  $b(u)$  est remplacé par  $b(u)/\varepsilon$ , et où nous chercherons à décrire le comportement asymptotique des solutions lorsque  $\varepsilon$  devient infiniment petit.
2. La théorie du transfert radiatif où les équations d'Euler de l'hydrodynamique sont couplées avec une équation elliptique décrivant les radiations. Le terme source  $b$  prend dans ce cas la forme d'un multiplicateur de Fourier, qu'il est possible d'écrire sous la forme d'un opérateur de convolution.

D'une manière générale, nous traiterons des situations où la dissipation l'emporte sur l'explosion hyperbolique, ce qui permet d'obtenir des solutions régulières globales en temps. Il est en effet nettement plus aisé d'étudier ce cas de figure car nous disposons de techniques performantes pour l'étude des solutions régulières. Le cas où l'explosion hyperbolique l'emporte sur la dissipation est techniquement beaucoup plus difficile, tout d'abord parce que la compréhension du problème de Cauchy pour (1.1) est encore partielle dans le cas multidimensionnel, mais aussi parce que les situations où nous savons résoudre globalement le problème de Cauchy ne supportent pas forcément bien l'incorporation de termes d'ordre inférieur. Pour l'étude des solutions régulières, la principale difficulté que nous rencontrerons viendra du fait que la dissipation introduite par le terme source  $b$  ne porte a priori que sur certaines composantes de  $u$  car  $b$  aura des composantes identiquement nulles, et nous voudrions néanmoins montrer que toutes les composantes de  $u$  bénéficient d'un effet dissipatif.

La limite de forte relaxation évoquée ci-dessus se rencontre par exemple dans la théorie des équations cinétiques. En effet, pour un ensemble de particules décrit de

manière cinétique, lorsque le libre parcours moyen des particules devient infiniment petit, l'évolution de la densité de particules tend dans de nombreux cas vers un comportement macroscopique diffusif. Il est par ailleurs possible d'approcher formellement l'équation cinétique par les équations satisfaites par les  $N$  premiers moments de la densité de particules. Se pose alors la question de savoir quel est le comportement des solutions du système des moments quand le paramètre décrivant le libre parcours moyen devient infiniment petit. Si le comportement asymptotique est lui-même un régime de diffusion, le système des moments sera cohérent avec l'asymptotique de diffusion et nous pourrions légitimement approcher l'équation cinétique par son système des moments, par exemple dans un but de simulations numériques. Un premier obstacle vient cependant du fait que le système d'équations vérifié par les  $N$  premiers moments n'est en général pas fermé, car il fait intervenir le  $N + 1$ -ième moment. Il existe de nombreuses procédures de fermeture approchée. Pour la procédure dite de minimisation d'entropie proposée par Levermore [40, 41], nous montrerons que le comportement asymptotique des solutions du système des moments est bien décrit par un régime diffusif, ce qui répond à une question posée dans [40] et rend pertinent l'approximation de la densité de particules par ses moments dans l'asymptotique de diffusion. Ce premier problème que nous résoudrons est très proche de la limite de forte relaxation pour les équations d'Euler de l'hydrodynamique avec une force de frottements. En adaptant la méthode utilisée pour traiter le système des moments de Levermore, nous justifierons que la limite de forte relaxation pour le système d'Euler isotherme avec frottements correspond à un régime de diffusion pour la densité du fluide. Notre résultat étendra ainsi au cas multidimensionnel le résultat de Junca et Rasle [30]. Le problème analogue pour les équations d'Euler isentropiques a été résolu par Sideris, Thomases et Wang [61]. Nous traiterons enfin l'approximation des équations d'Euler par le système dit de relaxation en pression. Ce système a été introduit par Chalons et Coquel [14] à des fins numériques car il présente l'avantage d'avoir tous ses champs caractéristiques linéairement dégénérés. Son problème de Riemann se résout explicitement et permet de construire à moindre coût un solveur de Riemann approché pour les équations d'Euler, cette procédure ayant l'avantage de s'appliquer à des lois de pression très générales. Nous justifierons que les solutions de ce système relaxé convergent effectivement vers les solutions des équations d'Euler quand le paramètre de relaxation tend vers l'infini. Des simulations numériques viendront confirmer cette convergence dans des situations pour lesquelles les résultats théoriques ne s'appliquent pas.

La seconde situation que nous étudierons dans cette thématique des systèmes hyperboliques dissipatifs concerne le couplage des équations de l'hydrodynamique avec les radiations. De tels modèles se rencontrent notamment en astrophysique pour décrire les phénomènes à haute température. Comme nous l'avons indiqué plus haut, l'opérateur  $b$  intervenant dans le modèle est ici un multiplicateur de Fourier qui provient de la résolution d'une équation elliptique. Le symbole de  $b$  est une fonction négative bornée. Pour ce système, un résultat de Kawashima, Nikkuni et Nishibata [33] assure que des données initiales petites conduisent à des solutions régulières globales en temps, qui convergent asymptotiquement en temps vers un état d'équilibre. La dissipation peut donc être suffisamment forte pour contrecarrer le phénomène d'explosion hyperbolique. Nous nous intéresserons pour ce système au problème des profils de choc, qui sont des ondes progressives reliant deux états définissant une onde de choc solution des équations d'Euler.

Nous montrerons l'existence de telles ondes progressives pour des états asymptotiques voisins ainsi qu'une propriété de stabilité asymptotique en temps. Cette propriété permet d'espérer pouvoir calculer ces ondes progressives par des schémas numériques traitant le couplage entre les termes de convection de l'hydrodynamique et le terme source  $b$  de couplage avec les radiations. Nous construirons un tel schéma numérique et vérifierons qu'il permet effectivement de calculer les profils de choc.

Nous citons maintenant les articles correspondant aux résultats contenus dans ce mémoire. Les résultats du chapitre 2 sur les problèmes aux limites hyperboliques multidimensionnels proviennent des articles suivants :

- [A] J.-F. COULOMBEL, Weak stability of nonuniformly stable multidimensional shocks, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 34 (1) : 142-172, 2002.
- [B] J.-F. COULOMBEL, Weakly stable multidimensional shocks (Chocs multidimensionnels faiblement stables), *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non-linéaire*, 21 (4) : 401-443, 2004.
- [C] J.-F. COULOMBEL, P. SECCHI, The stability of compressible vortex sheets in two space dimensions, *Indiana University Mathematics Journal*, 53 (4) : 941-1012, 2004.
- [D] J.-F. COULOMBEL, A. MORANDO, Stability of contact discontinuities for the nonisentropic Euler equations, *Annali dell'università di Ferrara*, 50 : 79-90, 2004.
- [E] J.-F. COULOMBEL, Well-posedness of hyperbolic Initial Boundary Value Problems, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 84 (6) : 786-818, 2005.
- [F] J.-F. COULOMBEL, P. SECCHI, Nonlinear compressible vortex sheets in two space dimensions, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 2008.

Les résultats du paragraphe 3.1 sur la limite de forte relaxation proviennent des articles suivants :

- [G] J.-F. COULOMBEL, F. GOLSE, Th. GOUDON, Diffusion approximation and entropy based moment closure for kinetic equations, *Asymptotic Analysis*, 45 (1-2) : 1-39, 2005.
- [H] J.-F. COULOMBEL, Th. GOUDON, Entropy based moment closure for kinetic equations : Riemann problem and invariant regions, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 3 (4) : 649-671, 2006.
- [I] J.-F. COULOMBEL, Th. GOUDON, The strong relaxation limit of the multidimensional isothermal Euler equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 359 (2) : 637-648, 2007.
- [J] C. CHALONS, J.-F. COULOMBEL, Relaxation approximation of the Euler equations, Preprint.

Les résultats du paragraphe 3.2 concernant l'étude du transfert radiatif proviennent des articles suivants :

- [K] C. LIN, J.-F. COULOMBEL, Th. GOUDON, Shock profiles for nonequilibrium radiating gases, *Physica D*, 218 (1) : 83-94, 2006.
- [L] C. LIN, J.-F. COULOMBEL, Th. GOUDON, Asymptotic stability of shock profiles in radiative hydrodynamics, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Série Mathématique*, 345 (11) : 625-628, 2007.
- [M] J.-F. COULOMBEL, P. LAFITTE, Computation of shock profiles in radiative hydrodynamics, Preprint.

# Chapitre 2

## Problèmes aux limites hyperboliques multidimensionnels

Ce chapitre expose nos résultats sur les problèmes aux limites hyperboliques multidimensionnels. Un premier paragraphe est consacré aux problèmes linéaires à coefficients constants. Nous y rappelons la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme et introduisons la notion de stabilité faible. Cette notion de stabilité faible conduit à une estimation d'énergie présentant une perte de régularité entre les termes source des équations et la solution. Un second paragraphe est consacré à l'extension de ce premier résultat au cadre des problèmes aux limites linéaires à coefficients variables. Nous étendons la notion de stabilité faible pour de telles équations et montrons comment cela conduit à la même estimation d'énergie que pour des coefficients constants. Nous montrons ensuite comment l'estimation a priori assure le caractère bien-posé du problème aux limites. Dans un troisième paragraphe, nous montrons comment ces résultats sur des problèmes linéaires permettent d'aborder l'étude de problèmes non-linéaires, en particulier l'étude des solutions régulières par morceaux de systèmes de lois de conservation. Après avoir détaillé des exemples issus de modèles physiques, nous définissons la notion de front faiblement stable qui étend les précédentes notions de stabilité faible au cas des systèmes non-linéaires de lois de conservation, et montrons l'existence locale en temps de fronts faiblement stables. Un quatrième paragraphe est consacré à des résultats analogues dans le cas moins favorable d'un front caractéristique. Nous espérons que cette présentation des problèmes par ordre de difficulté croissante permettra au lecteur, malgré certaines répétitions, d'aborder plus aisément les résultats de ce chapitre.

### 2.1 Problèmes linéaires à coefficients constants

Dans ce premier paragraphe, nous allons tout d'abord rappeler les principaux points de l'analyse par modes normaux pour les problèmes aux limites hyperboliques. Nous rappelons la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme et définissons la notion de stabilité faible qui intervient dans les résultats exposés tout au long de ce chapitre. Nous voyons enfin comment la notion de stabilité faible mène à une estimation d'énergie avec perte d'une dérivée. Pour commencer, nous introduisons quelques notations sur les espaces

fonctionnels utilisés dans ce chapitre.

### 2.1.1 Espaces fonctionnels et normes

Nous notons  $\mathbb{R}_+^{1+d} := \{(t, x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{1+d} / x_d > 0\}$ , la frontière de  $\mathbb{R}_+^{1+d}$  étant  $\mathbb{R}^d$ . La première coordonnée dans  $\mathbb{R}^d$  est donc  $t$ , et les coordonnées suivantes  $x_1, \dots, x_{d-1}$ . La norme usuelle de  $L^2(\mathbb{R}_+^{1+d})$ , resp.  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , est notée  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{1+d})}$ , resp.  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ . Pour tout réel  $s$  et tout  $\gamma \geq 1$ , nous définissons l'espace :

$$H_\gamma^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) / \exp(-\gamma t) u \in H^s(\mathbb{R}^d)\}.$$

Cet espace est muni de la norme  $\|u\|_{H_\gamma^s(\mathbb{R}^d)} := \|\exp(-\gamma t)u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ , où  $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$  est la norme usuelle sur  $H^s(\mathbb{R}^d)$  définie à l'aide de la transformée de Fourier. L'espace  $L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^s(\mathbb{R}^d))$  est alors muni de la norme :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^s(\mathbb{R}^d))}^2 := \int_0^{+\infty} \|u(\cdot, x_d)\|_{H_\gamma^s(\mathbb{R}^d)}^2 dx_d.$$

Il s'agit d'un espace de Sobolev anisotrope où nous ne mesurons que la régularité tangentielle par rapport à la frontière  $\{x_d = 0\}$ .

Pour tout réel  $T$  nous notons  $\Omega_T$ , resp.  $\omega_T$ , l'ensemble  $\Omega_T := \mathbb{R}_+^{1+d} \cap \{t < T\}$ , resp.  $\omega_T := \mathbb{R}^d \cap \{t < T\}$ . Pour tout entier  $m$  et pour tout  $\gamma \geq 1$ , nous définissons l'espace de Sobolev à poids  $H_\gamma^m(\Omega_T)$  comme :

$$H_\gamma^m(\Omega_T) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega_T) / \exp(-\gamma t) u \in H^m(\Omega_T) \right\}.$$

La définition de  $H_\gamma^m(\omega_T)$  est similaire. La norme sur  $H_\gamma^m(\Omega_T)$  est définie par :

$$\|u\|_{H_\gamma^m(\Omega_T)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \gamma^{m-|\alpha|} \|\exp(-\gamma t) \partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega_T)},$$

où la sommation a lieu sur les multi-entiers  $\alpha \in \mathbb{N}^{1+d}$  et  $|\alpha|$  désigne la longueur de  $\alpha$ . Cette norme est équivalente à la norme  $\|\exp(-\gamma t) u\|_{H^m(\Omega_T)}$  et la constante dans l'équivalence des normes est indépendante de  $\gamma \geq 1$  et de  $T$ . La norme de  $H_\gamma^m(\omega_T)$  est définie de manière similaire. Ainsi l'espace  $L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^m(\omega_T))$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^m(\omega_T))} := \sum_{|\alpha| \leq m} \gamma^{m-|\alpha|} \|\exp(-\gamma t) \partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega_T)},$$

où cette fois la sommation a lieu sur les multi-entiers  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , les dérivées  $\partial^\alpha u$  ne portant pas sur la variable normale  $x_d$  mais seulement sur les variables tangentielles  $t, x_1, \dots, x_{d-1}$ .

### 2.1.2 Stabilité uniforme et stabilité faible

Nous considérons un problème aux limites dans  $\mathbb{R}_+^{1+d}$  de la forme :

$$\begin{cases} Lu := \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u + Du = f, & \text{dans } \mathbb{R}_+^{1+d}, \\ Bu = g, & \text{sur } \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.1)$$

Les matrices  $A_1, \dots, A_d, D$  appartiennent à  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R})$ , l'inconnue  $u$  étant à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ . Nous faisons l'hypothèse d'hyperbolicité suivante :

**Hypothèse 2.1** (Hyperbolicité à multiplicité constante). *Il existe un entier  $q \geq 1$ , des applications  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  analytiques sur  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , homogènes de degré 1 et à valeurs réelles, et des entiers strictement positifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  tels que :*

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad \det \left( \tau I - \sum_{j=1}^d \xi_j A_j \right) = \prod_{k=1}^q (\tau - \lambda_k(\xi))^{\alpha_k}.$$

*De plus, les valeurs propres  $\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_q(\xi)$  sont semi-simples (leur multiplicité géométrique est égale à leur multiplicité algébrique pour tout  $\xi$ ) et vérifient  $\lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_q(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .*

L'hypothèse 2.1 recouvre notamment le cas des systèmes strictement hyperboliques (les valeurs propres  $\lambda_j$  sont toutes simples), et des systèmes importants de la physique comme les équations d'Euler linéarisées autour d'un état constant. Elle assure par ailleurs que le problème de Cauchy pour l'opérateur  $L$  est globalement bien-posé dans tous les espaces  $H^s(\mathbb{R}^d)$ . Nous faisons maintenant l'hypothèse que le bord  $\{x_d = 0\}$  est non-caractéristique :

**Hypothèse 2.2** (Bord non-caractéristique). *La matrice  $A_d$  est inversible et la matrice  $B$  est de rang maximal, son rang  $p$  étant égal au nombre de valeurs propres strictement positives de  $A_d$  (comptées avec leur multiplicité).*

Supposons pour l'instant que la matrice  $D$  intervenant dans (2.1) est nulle. L'analyse par modes normaux de (2.1) consiste à introduire tout d'abord un poids exponentiel en posant comme nouvelle fonction inconnue  $v := \exp(-\gamma t)u$ , puis à effectuer une transformée de Fourier dans les variables tangentielles  $t, y := (x_1, \dots, x_{d-1})$ . En notant  $\tau, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{d-1})$  les variables duales de  $t, y$  par la transformée de Fourier, et en définissant la matrice :

$$\mathcal{A}(\zeta) := -i A_d^{-1} \left( (\tau - i\gamma) I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right), \quad \zeta := (\tau - i\gamma, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad (2.2)$$

nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{v}}{dx_d} = \mathcal{A}(\zeta) \hat{v} + F, & x_d > 0, \\ B \hat{v} = G, & x_d = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

La remarque cruciale de Hersh [28] est que la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure tant que  $\gamma > 0$ . Son sous-espace stable  $E^s(\zeta)$  est donc de dimension constante égale à  $p$  et dépend analytiquement de  $\zeta$  lorsque  $\zeta$  parcourt  $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ . La condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est définie comme suit :

**Définition 2.1** (Condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme [36]). *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2, nous dirons que le problème (2.1) vérifie la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (CKU en abrégé) s'il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que :*

$$\forall \zeta \in \{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z < 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall V \in E^s(\zeta), \quad |BV| \geq \kappa |V|. \quad (2.4)$$

Si le problème (2.1) vérifie la CKU, nous avons une estimation a priori sans perte :

$$\gamma \|u\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^{1+d}_+)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma} \|Lu\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^{1+d}_+)}^2 + \|B u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Une conséquence importante des hypothèses 2.1 et 2.2 est que le sous-espace stable  $E^s(\zeta)$  admet un prolongement continu en tout point  $\underline{\zeta} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , voir Métivier [50] ou Kreiss [36] dans le cas strictement hyperbolique. Ce prolongement est à comprendre dans la variété grassmannienne des sous-espaces de  $\mathbb{C}^N$  de dimension  $p$ . Si nous continuons de noter  $E^s(\underline{\zeta})$  ce prolongement, la CKU se caractérise de la manière suivante :

**Proposition 2.1.** *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2, le problème (2.1) vérifie la CKU si et seulement si pour tout  $\zeta \in \{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z \leq 0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$  non-nul,  $\text{Ker} B \cap E^s(\zeta) = \{0\}$ .*

Lorsque  $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , le prolongement  $E^s(\zeta)$  contient toujours le sous-espace stable de la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$ , mais en général l'inclusion est stricte car  $E^s(\zeta)$  contient également tout ou partie du sous-espace central de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Dans le cas des équations d'Euler linéarisées, l'inclusion est stricte en tout point  $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .

Remarquons que l'application ( $\zeta \mapsto E^s(\zeta)$ ) est positivement homogène de degré 0, de sorte que nous pouvons nous restreindre dans la proposition 2.1 à des  $\zeta$  de norme 1. Comme nous utiliserons cette propriété par la suite, nous introduisons la demi-sphère :

$$\Sigma := \left\{ \zeta = (z, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} / \text{Im } z \leq 0 \text{ et } |z|^2 + |\eta|^2 = 1 \right\}.$$

La frontière de  $\Sigma$  sera notée  $\Sigma_0$ , de sorte que  $\Sigma_0 = \mathbb{S}^{d-1}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ . L'ensemble des fréquences est  $\Xi := \{s \zeta, s > 0 \text{ et } \zeta \in \Sigma\}$ .

Nous allons maintenant définir la notion de stabilité faible pour le problème aux limites (2.1). Cela nécessite au préalable de définir les points glancing :

**Définition 2.2** (Points glancing). *Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des  $(\underline{\tau}, \underline{\xi}) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  tels qu'il existe un entier  $k \in \{1, \dots, q\}$  vérifiant :*

$$\underline{\tau} - \lambda_k(\underline{\xi}) = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi_d}(\underline{\xi}) = 0.$$

Si  $\pi(\mathcal{G})$  désigne la projection de  $\mathcal{G}$  sur les  $d$  premières coordonnées (autrement dit  $\pi(\tau, \xi) = (\tau, \xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ ), l'ensemble des points glancing  $\Gamma$  est défini comme  $\Gamma := \pi(\mathcal{G}) \cap \mathbb{S}^{d-1}$ .

L'ensemble  $\Gamma$  est un sous-ensemble fermé (donc compact) de  $\Sigma_0$ . D'après [50] nous savons qu'au voisinage de tout point  $\underline{\zeta} \in \Sigma \setminus \Gamma$ , le sous-espace  $E^s(\zeta)$  admet une base qui dépend analytiquement de  $\zeta$ . Notre condition de stabilité faible peut se formuler comme suit :

**Définition 2.3** (Condition de stabilité faible). *Sous les hypothèses 2.1 et 2.2, nous dirons que le problème (2.1) vérifie la condition de stabilité faible si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *Il existe une fonction  $\sigma$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Sigma$  et à valeurs réelles telle que pour tout  $\zeta \in \Sigma$ ,  $\text{Ker}B \cap E^s(\zeta) \neq \{0\}$  si et seulement si  $\zeta \in \Sigma_0$  et  $\sigma(\zeta) = 0$ .*
- *Les ensembles  $\Gamma$  et  $\{\zeta \in \Sigma_0 / \sigma(\zeta) = 0\}$  sont disjoints.*
- *Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\{\zeta \in \Sigma_0 / \sigma(\zeta) = 0\}$  dans  $\Sigma$ , une base  $e_1(\zeta), \dots, e_p(\zeta)$  de  $E^s(\zeta)$  dépendant de manière  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\zeta \in \mathcal{V}$ , et une matrice  $P(\zeta) \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$  dépendant de manière  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\zeta \in \mathcal{V}$ , tels que :*

$$\forall \zeta \in \mathcal{V}, \quad P(\zeta) B \begin{pmatrix} e_1(\zeta) & \dots & e_p(\zeta) \end{pmatrix} = \text{diag} (\gamma + i\sigma(\zeta), 1, \dots, 1).$$

Rappelons que si la CKU est violée dans la région  $\{\gamma > 0\}$ , autrement dit dans  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ , alors le problème (2.1) est mal-posé dans tous les espaces de Sobolev même si nous autorisons une perte arbitrairement grande de dérivées, voir par exemple [7]. C'est la raison pour laquelle dans la définition 2.3 nous n'autorisons la CKU à dégénérer que dans la région  $\Sigma_0$ . Par rapport à l'estimation (2.4), nous autorisons ici la constante  $\kappa$  à s'annuler "comme  $\gamma + |\sigma|$ " en des points non-glancing. Le cas où la CKU dégénère en un point glancing semble hors d'atteinte avec nos techniques, voir par exemple Benzoni et Freistühler [8, appendice C]. Bien entendu, la définition 2.3 ne présente un intérêt que dans le cas où la fonction  $\sigma$  s'annule effectivement en certains points de  $\Sigma_0$ , ce que nous supposons tacitement par la suite. Dans le cas où  $\sigma$  ne s'annule pas sur  $\Sigma_0$  nous sommes ramenés à un problème vérifiant la CKU.

La définition 2.3 s'étend directement au cas où la condition aux limites dans (2.3) est de nature symbolique, c'est-à-dire quand nous remplaçons la condition  $B\widehat{v}(0) = G$  par une condition de la forme  $B(\zeta)\widehat{v}(0) = G$  où la matrice  $B$  est autorisée à dépendre des fréquences  $\zeta$ , en demandant que  $B(\zeta)$  soit une fonction homogène de degré 0 de  $\zeta \in \Xi$ . Nous rencontrerons ce type de conditions aux limites dans l'étude des fronts.

La définition 2.3 permet d'englober la plupart des cas déjà répertoriés dans la littérature de problèmes aux limites hyperboliques ne satisfaisant pas la CKU. En effet, la définition 2.3 englobe tout d'abord la classe de problèmes étudiés par Sablé-Tougeron [57] pour lesquels la CKU n'est pas satisfaite dans la région elliptique de  $\Sigma_0$ , c'est-à-dire qu'en un point  $\zeta \in \Sigma_0$  vérifiant  $\sigma(\zeta) = 0$ , la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure. En un tel point le sous-espace prolongé  $E^s(\zeta)$  coïncide avec le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . La définition 2.3 englobe également la classe dite WR introduite par Benzoni, Rousset, Serre et Zumbrun [6]. Pour ces problèmes, les points où la CKU n'est pas satisfaite se situent dans la région hyperbolique de  $\Sigma_0$ . Le symbole  $\mathcal{A}(\zeta)$  y est diagonalisable de manière analytique par rapport à  $\zeta$  et à valeurs propres imaginaires pures. Cependant, nous verrons plus loin que le modèle des transitions de phase liquide-vapeur étudié par Benzoni [4] ne relève d'aucune de ces deux catégories. L'intérêt d'introduire la définition 2.3 réside donc dans le fait que nous autorisons la coexistence de modes elliptiques et de modes hyperboliques aux points de violation de la CKU. Nous allons voir maintenant comment la notion de stabilité faible mène à une estimation d'énergie a priori pour le problème (2.1).

### 2.1.3 Estimations d'énergie a priori [A]

Nous expliquons à présent comment la condition de stabilité faible définie précédemment permet de montrer une estimation d'énergie a priori pour le problème (2.1). Notre résultat est le suivant :

**Théorème 2.1.** *Soit  $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ . Si les hypothèses 2.1 et 2.2 sont vérifiées et si le problème (2.1) vérifie la condition de stabilité faible, alors il existe  $\gamma_0 \geq 1$  tel que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et tout  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{1+d}})$ , nous avons :*

$$\gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^{1+d})}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^1(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|Bu|_{x_d=0}\|_{H_\gamma^1(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Nous montrons donc ici une estimation avec perte d'une dérivée sur le bord, et une dérivée tangentielle à l'intérieur du domaine. Le point crucial du théorème 2.1 est que les hypothèses 2.1 et 2.2 ainsi que l'hypothèse de stabilité faible ne portent que sur la partie principale de l'opérateur  $L$  et sur la matrice  $B$ . En revanche, le résultat du théorème 2.1 a lieu indépendamment du terme d'ordre 0 que nous incorporons à  $L$ . Ce terme d'ordre 0 ne peut pas être traité comme un terme source à estimer "dans le membre de droite" et à absorber en choisissant  $\gamma$  grand, car l'estimation du théorème 2.1 fait intervenir une perte de dérivée à l'intérieur du domaine. Nous devons donc trouver une procédure pour montrer l'estimation d'énergie avec un terme d'ordre 0 quelconque. Remarquons qu'un terme d'ordre  $-1$  dans les conditions aux limites s'absorbe sans difficulté, donc nous n'ajouterons pas de terme d'ordre inférieur à  $B$ . Cette difficulté liée au terme d'ordre 0 de  $L$  n'est pas présente dans le travail de Sablé-Tougeron [57] où la CKU est violée dans la région elliptique de  $\Sigma_0$ , car dans ce cas Sablé-Tougeron montre une estimation sans perte de dérivée à l'intérieur. Dans le cas où la CKU est violée hors de la région elliptique, il ne semble pas possible de montrer une estimation a priori sans perte à l'intérieur.

Nous esquissons maintenant la preuve du théorème 2.1. Nous suivons la démarche de l'analyse par modes normaux en introduisant le poids  $\exp(-\gamma t)$ , puis en effectuant une transformée de Fourier dans les variables tangentielles. Nous arrivons à un système de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{v}}{dx_d} = \mathcal{A}(\zeta) \hat{v} - A_d^{-1} D \hat{v} + F, & x_d > 0, \\ B \hat{v} = G, & x_d = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec des termes source  $F$  et  $G$  convenables, le symbole  $\mathcal{A}$  étant défini par (2.2). Si  $\underline{\zeta} \in \Sigma$  est un point tel que  $\text{Ker} B \cap E^s(\underline{\zeta}) = \{0\}$ , en particulier si  $\underline{\zeta}$  est glancing, nous pouvons construire un symétriseur de Kreiss pour obtenir une estimation d'énergie sans perte microlocalisée dans un voisinage conique de  $\underline{\zeta}$ . Ce cas relève de l'analyse de Kreiss [36] car nous disposons de la "structure de blocs" qui est une conséquence de l'hypothèse 2.1, voir Métivier [50]. Nous renvoyons également aux ouvrages [7, 15] pour la construction des symétriseurs.

Dans un voisinage conique d'un point  $\underline{\zeta} \in \Sigma_0$  où la CKU n'est pas satisfaite, nous disposons d'une matrice inversible  $Q_0$ , homogène de degré 0 par rapport à  $\zeta$ , qui diagonalise le symbole  $\mathcal{A}$  de la façon suivante :

$$Q_0 \mathcal{A} Q_0^{-1} = \text{diag} (\omega_1 I_{n_1}, \dots, \omega_K I_{n_K}, E_+, E_-) =: D_1,$$

où les  $\omega_1, \dots, \omega_K$  sont des nombres complexes deux-à-deux distincts, imaginaires purs pour  $\gamma = 0$ , et où les valeurs propres du bloc  $E_+$ , resp.  $E_-$ , sont de partie réelle strictement positive, resp. négative. Nous pouvons alors construire une matrice  $Q_{-1}$ , homogène de degré  $-1$  par rapport à  $\zeta$ , ainsi qu'une matrice  $D_0$ , homogène de degré  $0$  par rapport à  $\zeta$  et possédant la même structure diagonale par blocs que  $D_1$ , ces matrices vérifiant que la différence :

$$(Q_0 + Q_{-1})(\mathcal{A} - A_d^{-1}D) - (D_1 + D_0)(Q_0 + Q_{-1})$$

est homogène de degré  $-1$  par rapport à  $\zeta$ . En effet nous nous ramenons pour cela à construire une matrice  $\tilde{Q}$ , homogène de degré  $-1$  par rapport à  $\zeta$ , telle que la matrice :

$$\tilde{Q}D_1 - D_1\tilde{Q} - Q_0A_d^{-1}DQ_0^{-1}$$

ait la même structure diagonale par blocs que  $D_1$ , et cela est possible car les blocs diagonaux de  $D_1$  ont leur spectre deux-à-deux disjoints. Signalons que cette technique est utilisée par Sablé-Tougeron dans [56]. Le changement d'inconnue  $w = (Q_0 + Q_{-1})\hat{v}$  réduit donc le système (2.5) à une forme diagonale par blocs qui découple les modes rentrants (les blocs correspondant aux  $\omega_k$  de partie réelle négative ou nulle et le bloc elliptique  $E_-$ ) des modes sortants (les blocs correspondant aux  $\omega_k$  de partie réelle positive ou nulle et le bloc elliptique  $E_+$ ). Nous procédons alors à des estimations d'énergie directes sur chacun des blocs, la trace en  $x_d = 0$  des modes rentrants étant estimée en fonction de la trace des modes sortants en utilisant le comportement de la restriction de  $B$  au sous-espace  $E^s(\zeta)$ . Ce comportement est précisé dans la définition 2.3.

En regroupant les différentes estimations, nous obtenons le résultat du théorème 2.1, le paramètre  $\gamma$  devant être choisi suffisamment grand notamment pour absorber les termes d'ordre  $0$  et  $-1$ . Nous montrons en fait un résultat plus précis que celui du théorème 2.1. Pour des termes source estimés dans  $H_\gamma^1$  par rapport aux variables tangentielles  $(t, y)$ , nous ne perdons le contrôle  $H_\gamma^1$  tangenciel de la solution que sur ses composantes rentrantes et uniquement au voisinage des fréquences qui ne satisfont pas la CKU.

**Remarque 2.1.** *Si nous remplaçons l'hypothèse 2.1 d'hyperbolicité à multiplicité constante par une hypothèse de régularité géométrique sur les valeurs propres de  $\sum_j \xi_j A_j$ , nous disposons toujours de la "structure de blocs" d'après Métivier et Zumbrun [52, appendice C]. Cependant au voisinage des fréquences où la CKU dégénère, les blocs  $\omega_k I_{n_k}$  qui apparaissent dans la réduction de  $\mathcal{A}$  doivent être remplacés par des matrices diagonales  $H_k$  vérifiant  $H_k(\zeta) = \underline{\omega}_k I_{n_k}$ . Il se peut alors que la matrice  $H_k$  mêle des modes sortants et des modes rentrants. Dans la diagonalisation par blocs du terme d'ordre  $0$ , nous garderons donc un couplage entre des modes sortants et des modes rentrants. Dans ce cas de figure, il semble difficile de montrer une estimation d'énergie. C'est la raison pour laquelle nous avons fait l'hypothèse forte 2.1.*

## 2.2 Problèmes linéaires à coefficients variables

### 2.2.1 Estimations d'énergie a priori [B]

Le but de ce paragraphe est d'étendre l'analyse du paragraphe précédent au cas d'équations linéaires à coefficients variables :

$$\begin{cases} Lu = \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(t, x) \partial_{x_j} u + D(t, x) u = f, & \text{dans } \mathbb{R}_+^{1+d}, \\ B(t, y) u = g, & \text{sur } \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.6)$$

et de montrer le caractère bien-posé de telles équations. Nous faisons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.3.** *Les coefficients de (2.6) vérifient :*

- Les matrices  $A_1, \dots, A_d$  appartiennent à  $W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+^{1+d}; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ , la matrice  $D$  appartient à  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^{1+d}; \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ , et la matrice  $B$  appartient à  $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R}))$ .
- Il existe un entier  $q \geq 1$ , des applications  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  définies sur  $\mathbb{R}_+^{1+d} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ , analytiques et homogènes de degré 1 par rapport à  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $W^{2,\infty}$  par rapport à  $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+d}$  et à valeurs réelles, et il existe des entiers strictement positifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  tels que :

$$\forall (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+^{1+d} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \quad \det \left( \tau I - \sum_{j=1}^d \xi_j A_j(t, x) \right) = \prod_{k=1}^q (\tau - \lambda_k(t, x, \xi))^{\alpha_k}.$$

De plus, les valeurs propres  $\lambda_1(t, x, \xi), \dots, \lambda_q(t, x, \xi)$  sont semi-simples et vérifient  $\lambda_1(t, x, \xi) < \dots < \lambda_q(t, x, \xi)$  pour tout  $(t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+^{1+d} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ .

- Il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+d}$ ,  $|\det A_d(t, x)| \geq \kappa$ .
- Pour tout  $(t, y) \in \mathbb{R}^d$ , la matrice  $B(t, y)$  est de rang maximal, son rang  $p$  étant égal au nombre de valeurs propres strictement positives de  $A_d(t, y, 0)$ .
- Les matrices  $A_1, \dots, A_d$ , resp.  $B$ , sont constantes pour  $|t| + |x|$ , resp.  $|t| + |y|$ , suffisamment grand.

L'analyse par modes normaux pour le problème à coefficients variables (2.6) consiste à geler les coefficients en un point  $(\underline{t}, \underline{y})$  du bord, puis à effectuer l'analyse par modes normaux pour le système à coefficients constants obtenu. Cela nous amène tout naturellement à définir l'ensemble des points glancing  $\Gamma(\underline{t}, \underline{y})$ , ainsi que le sous-espace stable  $E^s(\underline{t}, \underline{y}, \zeta)$ , défini en premier lieu pour  $\zeta \in \Sigma \setminus \Sigma_0$  puis prolongé continûment à tout  $\Sigma$ . Remarquons que tous ces ensembles (points glancing, sous-espace stable) peuvent également être définis lorsque les coefficients sont gelés en un point quelconque  $(\underline{t}, \underline{x}) \in \mathbb{R}_+^{1+d}$ .

Notre définition de la condition de stabilité faible pour le problème (2.6) est l'extension de la définition 2.3 au cas de coefficients variables qui sont de "petites perturbations" de coefficients constants :

**Définition 2.4** (Condition de stabilité faible). *Sous l'hypothèse 2.3, nous dirons que le problème (2.6) vérifie la condition de stabilité faible si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- Il existe une fonction  $\sigma$  sur  $\mathbb{R}^d \times \Sigma$  à valeurs réelles, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $\zeta \in \Sigma$  et  $W^{2,\infty}$  par rapport à  $(t, y) \in \mathbb{R}^d$ , telle que pour tout  $(t, y, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \Sigma$ ,  $\text{Ker} B(t, y) \cap E^s(t, y, \zeta) \neq \{0\}$  si et seulement si  $\zeta \in \Sigma_0$  et  $\sigma(t, y, \zeta) = 0$ .

- Il existe un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\Sigma$  tel que pour tout  $(t, y) \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{V}$  contient  $\{\zeta \in \Sigma_0 / \sigma(t, y, \zeta) = 0\}$  mais n'intersecte pas  $\Gamma(t, y)$ . De plus il existe une base  $e_1(t, y, \zeta), \dots, e_p(t, y, \zeta)$  de  $E^s(t, y, \zeta)$  dépendant de manière  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $\zeta$  et  $W^{2,\infty}$  par rapport à  $(t, y)$  pour  $(t, y, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{V}$ , et il existe une matrice  $P(t, y, \zeta) \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$  ayant la même régularité que les vecteurs  $e_1, \dots, e_p$ , tels que :

$$\forall (t, y, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{V},$$

$$P(t, y, \zeta) B(t, y) \begin{pmatrix} e_1(t, y, \zeta) & \dots & e_p(t, y, \zeta) \end{pmatrix} = \text{diag} (\gamma + i \sigma(t, y, \zeta), 1, \dots, 1).$$

Les applications  $\sigma$ , resp.  $e_1, \dots, e_p, P$ , sont étendues en des applications homogènes de degré 1, resp. 0, par rapport à  $\zeta$  sur un ouvert conique de  $\Xi$  encore noté  $\mathcal{V}$ . Définissons maintenant le symbole :

$$\mathcal{A}(t, x, \zeta) := -i A_d(t, x)^{-1} \left( (\tau - i\gamma) I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j(t, x) \right), \quad (t, x, \zeta) \in \mathbb{R}_+^{1+d} \times \Xi.$$

Si le problème (2.6) est faiblement stable, nous pouvons diagonaliser le symbole  $\mathcal{A}(t, y, 0, \zeta)$  sur  $\mathbb{R}^d \times \mathcal{V}$  avec une matrice de passage  $Q_0(t, y, 0, \zeta)$  :

$$\forall (t, y, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{V}, \quad Q_0 \mathcal{A} Q_0^{-1} = \text{diag} (\omega_1 I_{n_1}, \dots, \omega_K I_{n_K}, E_+, E_-) =: D_1. \quad (2.7)$$

Dans la diagonalisation (2.7), nous savons de plus que les valeurs propres  $\omega_1, \dots, \omega_K$  se décomposent sous la forme  $\omega_k = \gamma e_k + i h_k$ , où les fonctions  $e_k, h_k$  sont à valeurs réelles,  $e_k$ , resp.  $h_k$ , étant homogène de degré 0, resp. 1, par rapport à  $\zeta$ . Les symboles  $e_k$  et les blocs  $E_\pm$  sont de plus elliptiques.

Nous avons vu dans le cas linéaire à coefficients constants que pour des termes source  $f$  et  $g$   $H_\gamma^1$  tangentielllement par rapport au bord, nous perdons le contrôle  $H_\gamma^1$  de la solution  $u(\cdot, x_d)$  uniquement sur les fréquences qui font dégénérer la CKU. Ici, nous nous attendons à perdre le contrôle  $H_\gamma^1$  de la trace  $u(\cdot, 0)$  sur l'ensemble  $\Upsilon := \{(t, y, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \Xi / \gamma = 0, \sigma(t, y, \zeta) = 0\}$  où la CKU dégénère mais il nous faut comprendre sur quelles fréquences nous allons perdre le contrôle  $H_\gamma^1$  de  $u(\cdot, x_d)$  pour  $x_d > 0$ , c'est-à-dire à l'intérieur du domaine  $\mathbb{R}_+^{1+d}$ . Nous ne perdrons ce contrôle  $H_\gamma^1$  que sur les courbes bicaractéristiques définies par les symboles réels  $h_1, \dots, h_K$  pourvu que ces symboles soient bien définis à l'intérieur du domaine (et pas seulement en  $x_d = 0$ ) et que les courbes bicaractéristiques soient définies globalement. Nous sommes ainsi amenés à faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.4** (Comportement global des bicaractéristiques). *Il existe un ouvert  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}_+^{1+d} \times \Xi$  conique en  $\zeta$  et vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\mathcal{W}$  contient  $\overline{\mathbb{R}_+^{1+d}} \times \mathcal{V}$ .
- Il existe une matrice de passage  $Q_0(t, x, \zeta)$  définie sur  $\mathcal{W}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et homogène de degré 0 par rapport à  $\zeta$  et de classe  $W^{2,\infty}$  par rapport à  $(t, x)$  telle que la diagonalisation (2.7) ait lieu en tous les points  $(t, x, \zeta) \in \mathcal{W}$ .
- Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , et pour tout  $(\underline{t}, \underline{y}, \underline{\zeta}) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{V}$  avec  $\underline{\zeta} = (\underline{\tau} - i\underline{\gamma}, \underline{\eta})$ , la

solution des équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx_d} &= \frac{\partial h_k}{\partial \tau}(t, y, x_d, \zeta), & \frac{d\tau}{dx_d} &= -\frac{\partial h_k}{\partial t}(t, y, x_d, \zeta), \\ \frac{dy}{dx_d} &= \frac{\partial h_k}{\partial \eta}(t, y, x_d, \zeta), & \frac{d\eta}{dx_d} &= -\frac{\partial h_k}{\partial y}(t, y, x_d, \zeta), \\ (t, y, \tau, \eta)(0) &= (\underline{t}, \underline{y}, \underline{\tau}, \underline{\eta}), \end{aligned}$$

est définie sur  $\mathbb{R}^+$  et prend ses valeurs dans  $\mathscr{W}$ . Cette solution définit une courbe dite courbe bicaractéristique issue de  $(\underline{t}, \underline{y}, \underline{\tau}, \underline{\eta})$ .

Dans le cas d'un problème à coefficients constants, il suffit de prendre  $\mathscr{W} = \overline{\mathbb{R}_+^{1+d}} \times \mathscr{V}$  car les équations différentielles deviennent triviales. C'est pour cette raison que nous n'avons pas vu apparaître l'hypothèse 2.4 dans l'analyse à coefficients constants. Quand les coefficients sont de "petites perturbations" de matrices constantes, l'hypothèse 2.4 peut se vérifier par des arguments d'équations différentielles. Le point crucial de l'hypothèse 2.4 est que les courbes bicaractéristiques issues de l'ensemble  $\Upsilon$  restent dans un ouvert sur lequel le symbole  $\mathscr{A}$  est diagonalisable. En particulier, si  $\underline{\gamma} = 0$ , il ne faut pas que les courbes bicaractéristiques se rapprochent d'un point glancing du symbole.

Sous les hypothèses précédentes, notre estimation a priori pour le problème aux limites (2.6) est l'analogue de l'estimation a priori du théorème 2.1 pour des coefficients constants :

**Théorème 2.2.** *Si le problème (2.6) vérifie l'hypothèse 2.3, la condition de stabilité faible (au sens de la définition 2.4) ainsi que l'hypothèse 2.4, alors il existe  $\gamma_0 \geq 1$  tel que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$  et tout  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{1+d}})$ , nous avons :*

$$\gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^{1+d})}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \|L u\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^1(\mathbb{R}^d))}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|B u|_{x_d=0}\|_{H_\gamma^1(\mathbb{R}^d)}^2.$$

La preuve du théorème 2.2 consiste à "quantifier" l'analyse symbolique du théorème 2.1. Pour traiter des coefficients ayant une régularité limitée ( $W^{2,\infty}$  au lieu de  $\mathcal{C}^\infty$ ), nous utilisons le calcul paradifférentiel de Bony [11] dans une version à paramètre, le paramètre étant ici  $\gamma$  et le calcul symbolique se faisant dans les variables tangentielles  $(t, y)$ . Nous renvoyons à Métivier [51] pour une définition précise des symboles et des opérateurs correspondants.

Modulo les erreurs de microlocalisation, le calcul symbolique ramène essentiellement l'analyse à coefficients variables au cas des coefficients constants. Hors de l'ensemble  $\mathscr{W}$ , nous disposons d'un symétriseur de Kreiss qui conduit à une estimation d'énergie maximale. Sur  $\mathscr{W}$ , nous commençons par diagonaliser simultanément les termes d'ordre 1 et d'ordre 0 dans les équations intérieures. Cela revient, comme dans le paragraphe précédent, à construire un symbole  $Q_{-1}$  homogène de degré  $-1$  par rapport à  $\zeta$ , ainsi qu'un symbole  $D_0$  homogène de degré 0 par rapport à  $\zeta$  et possédant la même structure diagonale par blocs que  $D_1$  tels que le symbole :

$$(Q_0 + Q_{-1}) \# (\partial_{x_d} - \mathscr{A} - A_d^{-1} D) - (\partial_{x_d} - D_1 - D_0) \# (Q_0 + Q_{-1})$$

soit homogène de degré  $-1$  par rapport à  $\zeta$ . Une fois cette diagonalisation effectuée, nous sommes ramenés à des équations découplées sur les modes hyperboliques (correspondant

aux valeurs propres  $\omega_k = \gamma e_k + i h_k$ ) et les modes elliptiques (correspondant aux blocs  $E_{\pm}$ ). Chacun de ces modes est sortant ou rentrant. Pour les modes sortants, l'estimation d'énergie permettant de contrôler la solution à l'intérieur ainsi que sa trace s'obtient directement. Pour chaque mode rentrant hyperbolique  $\omega_k$  correspondant à des composantes  $u_k$  de la solution, nous construisons un poids  $\sigma_k$  nul sur les courbes bicaractéristiques associées à  $h_k$  et issues de  $\Upsilon$ . Ce poids  $\sigma_k$  est la solution de l'équation de transport :

$$\partial_{x_d} \sigma_k + \{\sigma_k, h_k\} = 0, \quad (\sigma_k)|_{x_d=0} = \sigma.$$

L'hypothèse 2.4 est cruciale pour construire le poids  $\sigma_k$  sur  $\mathscr{W}$ . A l'aide de  $\sigma_k$ , nous pouvons contrôler la norme  $H_{\gamma}^1$  de  $u_k$  loin des courbes bicaractéristiques, et une estimation d'énergie directe donne le contrôle de la norme  $L_{\gamma}^2$  de  $u_k$  sur tout  $\mathscr{W}$ . Pour le bloc elliptique rentrant  $E_-$ , l'analyse est un peu plus simple et permet de contrôler la norme  $H_{\gamma}^1$  des composantes  $u_-$  loin de  $\Upsilon$ , et de la norme  $L_{\gamma}^2$  de  $u_-$  sur tout  $\mathscr{W}$ . Par rapport aux modes hyperboliques, nous pouvons nous contenter ici du poids  $\sigma$  ne dépendant pas de  $x_d$  plutôt que d'un poids "transporté" car l'ellipticité de  $E_-$  permet d'absorber tous les termes d'erreur intervenant dans le calcul symbolique.

Il est impératif de contrôler la norme  $H_{\gamma}^1$  de la solution à l'intérieur du domaine et loin des courbes bicaractéristiques car les erreurs de microlocalisation introduites dans le calcul sont précisément supportées loin de ces courbes (et ces erreurs doivent être estimées en norme  $H_{\gamma}^1$ ). Ce phénomène n'est pas visible dans le cas des coefficients constants car tous les opérateurs sont alors des multiplicateurs de Fourier qui commutent. Finalement, le contrôle  $H_{\gamma}^1$  loin des courbes bicaractéristiques fait que nous pouvons absorber toutes les erreurs et montrer le théorème 2.2. Comme dans le cas des coefficients constants, ce résultat est indépendant du terme d'ordre 0 intervenant dans l'opérateur  $L$ .

**Remarque 2.2.** *Dans l'hypothèse 2.3, il est possible de remplacer l'hypothèse que les matrices  $A_1, \dots, A_d, B$  sont constantes hors d'un compact par l'hypothèse que ces matrices tendent vers des matrices constantes à l'infini, en supposant de plus que le problème aux limites définies par ces matrices constantes vérifie les mêmes propriétés de stabilité faible.*

### 2.2.2 Vérification du caractère bien-posé des équations [E]

Notre but maintenant est de résoudre le problème (2.6) pour des termes source  $f$  et  $g$  donnés. Le domaine spatial est  $\mathbb{R}_+^d$  et nous voulons adjoindre à (2.6) une donnée initiale  $u_0$  en  $t = 0$ . Nous utiliserons les ensembles  $\Omega_T$  et  $\omega_T$  définis au paragraphe 2.1.

En plus des hypothèses précédentes nous faisons l'hypothèse de symétrisabilité suivante :

**Hypothèse 2.5** (Symétrisabilité). *Il existe une application  $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+^{1+d})$  à valeurs dans les matrices  $N \times N$  réelles symétriques définies positives telle que pour tout  $j = 1, \dots, d$  et tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+d}$  la matrice  $S(t, x) A_j(t, x)$  est symétrique. De plus la matrice  $S(t, x)$  est uniformément définie positive.*

Notre résultat est alors le suivant :

**Théorème 2.3.** *Supposons que le problème (2.6) soit faiblement stable et vérifie les hypothèses 2.3, 2.4, 2.5. Soit  $T > 0$  et soient  $f$  et  $g$  des fonctions vérifiant :*

$$f, \partial_t f, \nabla_y f \in L^2(\Omega_T), \quad g \in H^1(\omega_T),$$

*et telles que  $f$  et  $g$  soient nulles pour  $t < 0$ . Alors il existe une unique fonction  $u \in L^2(\Omega_T)$  nulle pour  $t < 0$ , dont la trace sur  $\omega_T$  appartient à  $L^2(\omega_T)$ , et solution du système :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(t, x) \partial_{x_j} u + D(t, x) u = f(t, x), & (t, x) \in \Omega_T, \\ B(t, y) u|_{x_d=0} = g(t, y), & (t, y) \in \omega_T. \end{cases}$$

*De plus  $u \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}_+^d))$  et il existe une constante  $\gamma_0 \geq 1$  indépendante de  $T, f, g$  et  $u$  telle que pour tout  $\gamma \geq \gamma_0$ , nous avons :*

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-2\gamma t} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}^2 + \gamma \|u\|_{L_\gamma^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L_\gamma^2(\omega_T)}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma^3} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^1(\omega_T))}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|g\|_{H_\gamma^1(\omega_T)}^2.$$

Le théorème 2.3 montre comment résoudre le problème mixte avec donnée initiale et conditions aux limites pour une donnée initiale nulle. La propriété de continuité en temps de la solution donne un sens clair à la donnée initiale.

Nous détaillons maintenant la démarche permettant d'aboutir au théorème 2.3. En premier lieu, nous devons résoudre le problème (2.6) globalement en temps pour des termes source  $(f, g)$  dans l'espace à poids  $L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^1(\mathbb{R}^d)) \times H_\gamma^1(\mathbb{R}^d)$ . Nous construisons une solution faible  $u$  par dualité à l'aide d'un problème dual vérifiant les mêmes hypothèses de stabilité faible que le problème (2.6). Dans le cas d'un problème aux limites vérifiant la CKU, la construction d'un problème dual vérifiant la CKU est classique, voir par exemple [7, 15]. Si la CKU est remplacée par la stabilité faible définie précédemment, l'analyse faite dans le cas de la CKU montre que la CKU dégénère pour le problème dual de la même manière qu'elle dégénère pour le problème (2.6). Le comportement des courbes bicaractéristiques est identique pour les deux problèmes car les équations à résoudre sont les mêmes. Nous obtenons ainsi une solution faible  $u$  de (2.6) dans  $L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^{1+d})$  dont la trace appartient à  $H_\gamma^{-1/2}(\mathbb{R}^d)$ .

Nous devons maintenant montrer que toute solution faible, par exemple celle construite plus haut, vérifie l'estimation énoncée au théorème 2.2 dont nous savons pour l'instant qu'elle est satisfaite par les solutions suffisamment régulières. Cela impliquera l'unicité des solutions faibles. Nous suivons la démarche usuelle et introduisons un opérateur de régularisation tangentielle  $\Theta_\varepsilon$  convergeant vers l'identité quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous voulons appliquer l'estimation a priori à  $\Theta_\varepsilon u$  et faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. Le lemme de Friedrichs [21] montre que  $L(\Theta_\varepsilon u)$ , resp.  $B \Theta_\varepsilon u|_{x_d=0}$ , converge vers  $f$ , resp.  $g$ , dans  $L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^{1+d})$ , resp.  $L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)$ . Dans le cas où la CKU est satisfaite, cette propriété implique que  $(\Theta_\varepsilon u|_{x_d=0})_\varepsilon$  est de Cauchy dans  $L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)$ . Ces convergences sont connues sous la formule "faible=fort", et impliquent en particulier que la trace de  $u$  appartient à  $L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)$ . Pour un problème (2.6) qui n'est que faiblement stable, le terme source  $Lu$  dans l'estimation a priori est à estimer dans la norme  $L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^1(\mathbb{R}^d))$  et il n'est pas vrai en général que  $L(\Theta_\varepsilon u)$  converge vers  $f$  pour cette norme. Le problème vient des commutateurs  $[A_j \partial_{x_j}, \Theta_\varepsilon]u$  qui ne sont que des termes d'ordre 0 en  $u$  (que nous ne pouvons pas absorber brutalement dans notre

estimation à perte). Suivant la technique de Gérard et Rauch [22], nous écrivons ces commutateurs sous la forme de termes d'ordre 0 en  $\Theta_\varepsilon u$  (et non plus en  $u$ ), l'opérateur  $D_\varepsilon$  d'ordre 0 correspondant étant uniformément borné en  $\varepsilon$ . Cette manipulation n'est pas possible pour n'importe quel opérateur de régularisation  $\Theta_\varepsilon$  mais fonctionne si  $\Theta_\varepsilon$  est défini, comme dans [22], par :

$$\Theta_\varepsilon := (\gamma^2 - \varepsilon \Delta_{t,y})^{-1}.$$

Nous appliquons alors l'estimation du théorème 2.2 à  $\Theta_\varepsilon u$  et à l'opérateur  $L + D_\varepsilon$ , en montrant que  $(L + D_\varepsilon)\Theta_\varepsilon u$  tend vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R}^+; H_\gamma^1(\mathbb{R}^d))$ . Les bornes uniformes en  $\varepsilon$  montrent en particulier que  $(\Theta_\varepsilon u|_{x_d=0})_\varepsilon$  converge faiblement vers un élément  $v \in L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)$ , et par unicité de la limite dans les distributions nous trouvons que  $u|_{x_d=0} = v \in L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)$ . Contrairement au cas de la CKU, nous ne montrons pas que  $\Theta_\varepsilon u|_{x_d=0}$  converge fortement vers  $u|_{x_d=0}$  dans  $L_\gamma^2(\mathbb{R}^d)$ . Nous ne montrons qu'une convergence faible. Cette propriété peut être qualifiée de "faible=semi-fort", mais montre néanmoins que les solutions faibles vérifient l'estimation du théorème 2.2.

Pour finir, nous localisons ce premier résultat en temps en montrant un principe de causalité : des termes source nuls pour  $t < t_0$  produisent une solution nulle pour  $t < t_0$ . Là encore, cette propriété est intimement liée au fait que le théorème 2.2 est vrai pour toute matrice  $D$  dans (2.6). En particulier il est indispensable d'obtenir le résultat du théorème 2.2 pour des matrices  $D$  qui peuvent être arbitrairement grandes dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^{1+d})$ . Pour cela, il est nécessaire que la définition de la notion de stabilité faible ne porte que sur la partie d'ordre 1 de  $L$ , et non sur la partie d'ordre 0. Une fois obtenu le principe de causalité, la continuité en temps de la solution s'obtient à l'aide du symétriseur  $S$  en faisant des estimations d'énergie classiques.

## 2.3 Problèmes non-linéaires non-caractéristiques

### 2.3.1 Deux exemples

Nous allons donner deux exemples de fronts multidimensionnels qui ne vérifient pas l'hypothèse de stabilité uniforme de Majda [43]. Nous commençons tout d'abord par le cas des ondes de choc pour les équations d'Euler isentropiques, en renvoyant à [7] pour l'analyse de stabilité par modes normaux des ondes de choc pour les équations d'Euler complètes. Les équations d'Euler isentropiques s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(\rho) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\rho$  désigne la densité du fluide,  $\mathbf{u}$  son champ de vitesse, et  $p$  la pression. Nous supposons que  $p'(\rho) > 0$  pour tout  $\rho > 0$  de sorte que (2.8) est un système hyperbolique à multiplicité constante dans l'ouvert  $\{\rho > 0, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d\}$ . La vitesse du son  $c(\rho)$  est définie par  $c(\rho) := \sqrt{p'(\rho)}$ . En notant  $x = (y, x_d) \in \mathbb{R}^d$  la variable d'espace dans (2.8) et en décomposant également le champ de vitesse en  $\mathbf{u} = (w, u)$  avec  $w \in \mathbb{R}^{d-1}$  et  $u \in \mathbb{R}$ , une onde de choc

est une solution  $(\rho, \mathbf{u})$  de (2.8) de la forme :

$$(\rho, \mathbf{u})(t, x) = \begin{cases} (\rho_-, \mathbf{u}_-)(t, x), & \text{si } x_d < \varphi(t, y), \\ (\rho_+, \mathbf{u}_+)(t, x), & \text{si } x_d > \varphi(t, y), \end{cases} \quad (2.9)$$

les fonctions  $\rho_{\pm}, \mathbf{u}_{\pm}$  étant régulières jusqu'au "front"  $\{x_d = \varphi(t, y)\}$ . Nous demandons aux fonctions  $(\rho_-, \mathbf{u}_-)$ , resp.  $(\rho_+, \mathbf{u}_+)$ , de vérifier (2.8) dans la région  $\{x_d < \varphi(t, y)\}$ , resp.  $\{x_d > \varphi(t, y)\}$ , ainsi que les relations de saut suivantes sur le front :

$$\rho_- (u_- - w_- \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi) = \rho_+ (u_+ - w_+ \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi) =: j, \quad (2.10a)$$

$$j (\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) + (p(\rho_+) - p(\rho_-)) \begin{pmatrix} -\nabla_y \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.10b)$$

$$j > 0, \quad 0 < \frac{u_+ - w_+ \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi}{c(\rho_+) \sqrt{1 + |\nabla_y \varphi|^2}} < 1 < \frac{u_- - w_- \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi}{c(\rho_-) \sqrt{1 + |\nabla_y \varphi|^2}}. \quad (2.10c)$$

Les relations (2.10a) et (2.10b) sont les relations de saut de Rankine-Hugoniot pour les équations d'Euler (2.8), tandis que les relations (2.10c) sont les inégalités de choc de Lax [38] pour un 1-choc. Le cas  $j < 0$  est totalement similaire. Le front  $\{x_d = \varphi(t, y)\}$  fait partie des inconnues du problème. Pour étudier la stabilité des ondes de choc et leur persistance sur des temps courts, nous suivons Majda [43] et reformulons le problème dans un domaine fixe en ramenant le front (inconnu) à l'hyperplan  $\{x_d = 0\}$ . Nous linéarisons ces équations redressées autour d'une onde de choc plane, c'est-à-dire d'une solution constante par morceaux de (2.8), (2.10). A un changement de référentiel galiléen près, les ondes de choc planes sont de la forme :

$$(\rho, w, u) = \begin{cases} (\rho_\ell, 0, u_\ell), & \text{si } x_d < 0, \\ (\rho_r, 0, u_r), & \text{si } x_d > 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

où :

$$\rho_\ell u_\ell = \rho_r u_r = \sqrt{\rho_r \rho_\ell \frac{p(\rho_r) - p(\rho_\ell)}{\rho_r - \rho_\ell}}, \quad 0 < \frac{u_r}{c(\rho_r)} < 1 < \frac{u_\ell}{c(\rho_\ell)}.$$

Dans les variables redressées, le problème linéarisé autour d'une onde de choc plane s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t v + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} v = f, & x_d > 0, \\ \partial_t \psi b_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi b_j + B v = g, & x_d = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

où le vecteur  $v \in \mathbb{R}^{2d+2}$  représente les "petites perturbations" de  $\rho$  et  $\mathbf{u}$  en amont et en aval du front, la fonction  $\psi$  représente la "petite perturbation" du front,  $b_0, \dots, b_{d-1}$  sont des éléments de  $\mathbb{R}^{1+d}$  et  $B \in \mathcal{M}_{1+d, 2d+2}(\mathbb{R})$ . La matrice  $A_d$  étant inversible, nous pouvons suivre l'analyse par modes normaux du problème (2.1), et définir le sous-espace stable  $E^s(\zeta)$  du symbole  $\mathcal{A}(\zeta)$  correspondant à (2.12). Ce sous-espace stable est à nouveau prolongé continûment aux  $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . La condition de stabilité uniforme au sens de Majda est définie de la manière suivante :

**Définition 2.5** (Condition de stabilité uniforme [43]). *L'onde de choc plane (2.11) est dite uniformément stable s'il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que pour tout  $\zeta = (\tau - i\gamma, \eta) \in \Sigma$ , pour tout  $V \in E^s(\zeta)$  et pour tout  $\chi \in \mathbb{C}$ , l'estimation suivante a lieu :*

$$|\chi b(\zeta) + BV| \geq \kappa (|\chi| + |V|), \quad b(\zeta) := (\tau - i\gamma) b_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j b_j.$$

La définition 2.5 est l'extension naturelle au problème (2.12) de la CKU. La nouveauté est l'apparition de l'inconnue  $\psi$  dans les conditions aux limites de (2.12). Pour un choc uniformément stable, le symbole  $b(\zeta)$  de l'opérateur agissant sur  $\psi$  est elliptique. Pour les équations d'Euler (2.8) et les conditions de saut (2.10), la stabilité uniforme de l'onde de choc (2.11) se caractérise de la manière suivante :

**Proposition 2.2** (Majda [43]). *Si  $d \geq 2$ , l'onde de choc (2.11) est uniformément stable si et seulement si :*

$$\frac{u_r^2}{c(\rho_r)^2} \left( \frac{\rho_r}{\rho_l} - 1 \right) < 1.$$

*Si  $p$  est une fonction convexe de  $\rho$ , cette inégalité a toujours lieu.*

Dans le cas où  $p$  n'est pas une fonction convexe de  $\rho$ , et où l'inégalité stricte opposée :

$$\frac{u_r^2}{c(\rho_r)^2} \left( \frac{\rho_r}{\rho_l} - 1 \right) > 1, \tag{2.13}$$

a lieu, nous montrons que le choc plan (2.11) vérifie les propriétés suivantes :

- Il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que pour tout  $\zeta \in \Sigma$ ,  $|b(\zeta)| \geq \kappa$ .
- En notant  $\Pi(\zeta)$  le projecteur orthogonal sur  $b(\zeta)^\perp$ , la condition au bord  $\Pi(\zeta)B$  vérifie la condition de stabilité faible au sens de la définition 2.3.

Pour le problème linéarisé (2.12) autour du choc plan (2.11) vérifiant la condition de stabilité faible (2.13), la CKU dégénère dans la région hyperbolique de  $\Sigma_0$ . Dans le cas de transition où l'inégalité stricte dans (2.13) est remplacée par une égalité, la CKU dégénère en un point glancing. Il est important dans l'analyse de stabilité des fronts que la dégénérescence de la CKU ne soit pas liée à une perte d'ellipticité du symbole  $b(\zeta)$ . Hormis les cas triviaux pour lesquels  $b$  ne peut être elliptique (quand nous considérons un système de  $N$  lois de conservation en  $d > N$  dimensions d'espace), nous ne connaissons pas d'exemple d'onde de choc qui mette en défaut cette condition d'ellipticité.

Nous détaillons maintenant le modèle de transitions de phase liquide-vapeur étudié par Benzoni dans [4]. Nous considérons toujours les équations d'Euler (2.8) mais supposons désormais que la loi de pression  $p$  est donnée par une équation de van der Waals :

$$p(\rho) = \pi(v) := \frac{R\theta}{v - v_0} - \frac{a}{v^2}, \quad v := 1/\rho,$$

$R$  désignant la constante des gaz parfaits,  $\theta$  la température (supposée constante),  $a$  et  $v_0$  étant des constantes strictement positives. Lorsque la température  $\theta$  est strictement inférieure à la température critique  $8a/(27v_0R)$ , la pression  $p$  est strictement croissante

sur  $]0, \rho_1[ \cup ]\rho_2, 1/v_0[$ , et strictement décroissante sur  $] \rho_1, \rho_2[$ . Le domaine d'hyperbolicité de (2.8) a deux composantes connexes : la phase vapeur  $\{0 < \rho < \rho_1\}$  et la phase liquide  $\{\rho_2 < \rho < 1/v_0\}$ . Nous sommes alors intéressés par la propagation de fronts séparant les deux phases du fluide. Avant de définir ces fronts, nous rappelons la définition des points de Maxwell qui sont l'unique couple  $(v_m, v_M)$  solution de :

$$v_m < v_M, \quad \pi(v_m) = \pi(v_M) = \bar{\pi}, \quad \int_{v_m}^{v_M} (\bar{\pi} - \pi(v)) dv = 0.$$

Si deux états  $(\rho_r, \mathbf{u}_r)$  et  $(\rho_l, \mathbf{u}_l)$  vérifient les relations de Rankine-Hugoniot (2.10a) et (2.10b) pour un front plan  $\{x_d = \sigma t + \nu \cdot y\}$  et un flux de masse  $j \neq 0$ , et si de plus les densités  $\rho_r, \rho_l$  sont suffisamment proches de  $1/v_M, 1/v_m$ , alors les inégalités de Lax (2.10c) ne sont pas satisfaites. Dans ce cas la discontinuité est de nature "subsonique", au sens où les nombres de Mach en amont et en aval du front sont tous deux strictement inférieurs à 1. Si nous nous en tenons à la définition 2.5, nous devrions alors conclure à l'instabilité violente de telles interfaces (la CKU serait violée dans la région  $\{\gamma > 0\}$ ). Cette instabilité vient du fait que les conditions de Rankine-Hugoniot ne fournissent pas suffisamment de conditions aux limites par rapport au nombre de caractéristiques sortant du front. Comme cela a été indiqué par Freistühler [20], l'étude de la stabilité de ces fronts passe par l'ajout de conditions de saut supplémentaires. Dans le cas présent il manque exactement une condition de saut. Celle que nous adopterons ici provient d'un critère visco-capillaire dans lequel nous négligeons les effets de viscosité, voir Benzoni [4] pour une discussion détaillée. Nous renvoyons également à Benzoni [5] pour l'influence de la viscosité sur la stabilité des interfaces, ainsi qu'à Benzoni et Freistühler [8] pour l'influence de la tension de surface.

Suivant Benzoni [4], une transition de phase admissible sera donc une solution de la forme (2.9) des équations d'Euler (2.8), où les fonctions  $\rho_{\pm}, \mathbf{u}_{\pm}$  vérifient les conditions suivantes sur le front  $\{x_d = \varphi(t, y)\}$  :

$$\rho_- (u_- - w_- \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi) = \rho_+ (u_+ - w_+ \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi) =: j, \quad (2.14a)$$

$$j (\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) + (p(\rho_+) - p(\rho_-)) \begin{pmatrix} -\nabla_y \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.14b)$$

$$\int_{v_-}^{v_+} \pi(v) dv = \frac{p(\rho_+) + p(\rho_-)}{2} (v_+ - v_-), \quad (2.14c)$$

$$j > 0, \quad 0 < \frac{u_{\pm} - w_{\pm} \cdot \nabla_y \varphi - \partial_t \varphi}{c(\rho_{\pm}) \sqrt{1 + |\nabla_y \varphi|^2}} < 1. \quad (2.14d)$$

La condition de saut supplémentaire (2.14c) est une condition des aires égales généralisées, cette condition étant satisfaite par les points de Maxwell  $(v_m, v_M)$ . A un changement de référentiel galiléen près, une transition de phase plane est une solution constante par morceaux de la forme :

$$(\rho, w, u) = \begin{cases} (\rho_l, 0, u_l), & \text{si } x_d < 0, \\ (\rho_r, 0, u_r), & \text{si } x_d > 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

où par exemple  $\rho_\ell > 1/v_m$ ,  $\rho_r < 1/v_M$  et :

$$\rho_\ell u_\ell = \rho_r u_r = \sqrt{\rho_r \rho_\ell \frac{p(\rho_r) - p(\rho_\ell)}{\rho_r - \rho_\ell}}, \quad 0 < \frac{u_{r,\ell}}{c(\rho_{r,\ell})} < 1,$$

$$\int_{v_r}^{v_\ell} \pi(v) \, dv = \frac{p(\rho_r) + p(\rho_\ell)}{2} (v_r - v_\ell).$$

Une fois redressé le front inconnu, le problème linéarisé autour d'une transition de phase plane prend à nouveau la forme (2.12), la seule différence étant que les vecteurs  $b_0, \dots, b_{d-1}$  ont désormais  $d + 2$  composantes, et  $B \in \mathcal{M}_{d+2, 2d+2}(\mathbb{R})$ . Les propriétés de stabilité des transitions de phase plane sont données par le résultat suivant :

**Théorème 2.4** (Benzoni [4]). *Si  $d \geq 2$ , la transition de phase plane (2.15) vérifie :*

- *Il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que pour tout  $\zeta \in \Sigma$ ,  $|b(\zeta)| \geq \kappa$ .*
- *En notant  $\Pi(\zeta)$  le projecteur orthogonal sur  $b(\zeta)^\perp$ , la condition au bord  $\Pi(\zeta)B$  vérifie la condition de stabilité faible au sens de la définition 2.3.*

Aux points où la CKU dégénère, les éléments non-nuls de  $E^s(\zeta)$  qui annulent la condition au bord  $\Pi(\zeta)B$  appartiennent au “vrai” sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Nous sommes donc en présence d'ondes de surface analogues aux ondes de Rayleigh qui apparaissent dans le problème d'élastodynamique étudié par Sablé-Tougeron [57]. Néanmoins, dans le cas des transitions de phase le sous-espace stable de  $\mathcal{A}(\zeta)$  ne coïncide pas avec le prolongement  $E^s(\zeta)$  car celui-ci contient une partie du sous-espace central de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Autrement dit, la CKU ne dégénère pas dans la région elliptique de  $\Sigma_0$ . Cette situation est donc moins favorable que le cas de l'élastodynamique, mais elle est en principe plus favorable que celle des ondes de choc détaillée plus haut.

Nous allons voir maintenant comment construire des discontinuités non-caractéristiques faiblement stables, en particulier des ondes de choc pour les équations d'Euler vérifiant (2.13) en tout point de la discontinuité, ou bien des transitions de phase liquide-vapeur vérifiant les conditions de saut (2.14).

### 2.3.2 Persistance des ondes faiblement stables [F]

Nous détaillons à présent notre résultat d'existence des ondes de choc faiblement stables dans un cadre général. Nous considérons un système de lois de conservation :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(u) = 0, \quad (2.16)$$

l'inconnue  $u$  prenant ses valeurs dans un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^N$ , et les flux  $f_j$  étant des fonctions régulières sur  $\mathcal{U}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ . La matrice jacobienne de  $f_j$  en  $u$  sera notée  $A_j(u)$ . Nous faisons l'hypothèse de symétrisabilité et d'hyperbolicité à multiplicité constante :

**Hypothèse 2.6** (Hyperbolicité). • *Il existe une application  $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$  à valeurs dans les matrices réelles  $N \times N$  symétriques définies positives telle que pour tout  $j = 1, \dots, d$ , la matrice  $S(u)A_j(u)$  est symétrique.*

- Il existe un entier  $q \geq 1$ , il existe des applications  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  définies sur  $\mathcal{U} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ , analytiques et homogènes de degré 1 par rapport à  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $u \in \mathcal{U}$  et à valeurs réelles, et il existe des entiers strictement positifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  tels que :

$$\forall (u, \xi) \in \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \quad \det \left( \tau I - \sum_{j=1}^d \xi_j A_j(u) \right) = \prod_{k=1}^q (\tau - \lambda_k(u, \xi))^{\alpha_k}.$$

De plus, les valeurs propres  $\lambda_1(u, \xi), \dots, \lambda_q(u, \xi)$  sont semi-simples et vérifient  $\lambda_1(u, \xi) < \dots < \lambda_q(u, \xi)$  pour tout  $(u, \xi) \in \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ .

Nous voulons construire une solution de (2.16) régulière de part et d'autre d'un front  $\{x_d = \varphi(t, y)\}$ , et définie sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . Soit  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  valant 1 sur  $[0, 1]$  et 0 sur  $[2, +\infty[$ . Le redressement du front inconnu se fait en introduisant les changements de variables :

$$\Phi_{\pm} : (t, y, x_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \mapsto (t, y, \pm \kappa x_d + \chi(x_d) \varphi(t, y)),$$

où  $\kappa$  est une constante ajustée en fonction des données. Dans les variables redressées, nous voulons résoudre le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(u_-, \Phi_-) u_- = L(u_+, \Phi_+) u_+ = 0, & t \in [0, T], x_d > 0, \\ \partial_t \varphi(u_+ - u_-) + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \varphi(f_j(u_+) - f_j(u_-)) = f_d(u_+) - f_d(u_-), & t \in [0, T], x_d = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

où l'opérateur  $L(u, \Phi)$  est défini par :

$$\begin{aligned} L(u, \Phi) &:= \partial_t + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(u) \partial_{x_j} + \widetilde{A}_d(u, \Phi) \partial_{x_d}, \\ \widetilde{A}_d(u, \Phi) &:= \frac{1}{\partial_{x_d} \Phi} \left( A_d(u) - \partial_t \Phi I - \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \Phi A_j(u) \right). \end{aligned}$$

Nous nous donnons une solution de référence constante des équations (2.17) et supposons qu'il s'agit d'un  $p$ -choc de Lax dans la terminologie de [38]. Nous supposons également pour simplifier qu'il s'agit d'un choc stationnaire. Autrement dit, nous nous donnons un couple  $(\underline{u}_\ell, \underline{u}_r) \in \mathcal{U}^2$  et supposons que ce couple satisfait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.7** (Inégalités de Lax). *Les états  $\underline{u}_\ell, \underline{u}_r$  vérifient  $f_d(\underline{u}_\ell) = f_d(\underline{u}_r)$ , et il existe un entier  $p \in \{1, \dots, q\}$  vérifiant  $\alpha_p = 1$  et :*

$$\lambda_{p-1}(\underline{u}_\ell, e_d) < 0 < \lambda_p(\underline{u}_\ell, e_d), \quad \lambda_p(\underline{u}_r, e_d) < 0 < \lambda_{p+1}(\underline{u}_r, e_d),$$

avec  $e_d = (0, \dots, 0, 1)$ . Si  $p = 1$ , resp.  $p = q$ , l'inégalité  $\lambda_{p-1}(\underline{u}_\ell, e_d) < 0$ , resp.  $0 < \lambda_{p+1}(\underline{u}_r, e_d)$ , est à ignorer.

L'hypothèse 2.7 assure que les matrices  $A_d(\underline{u}_\ell)$  et  $A_d(\underline{u}_r)$  sont inversibles. Le théorème des fonctions implicites montre qu'au voisinage de  $(0, 0, \underline{u}_\ell, \underline{u}_r)$ , l'ensemble des couples  $(\sigma, \nu, u_\ell, u_r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathcal{U}^2$  vérifiant les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\sigma(u_r - u_\ell) + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j (f_j(u_r) - f_j(u_\ell)) = f_d(u_r) - f_d(u_\ell),$$

s'écrit sous la forme  $\{(\sigma, \nu, u_\ell, \mathcal{RH}(\sigma, \nu, u_\ell))\}$ , où  $\mathcal{RH}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de ses arguments vérifiant  $\mathcal{RH}(0, 0, \underline{u}_\ell) = \underline{u}_r$ . Par continuité tous les éléments de cet ensemble vérifient les inégalités de Lax pour un  $p$ -choc, et définissent donc des ondes de choc planes. Nous paramétrons ainsi les ondes de choc planes proches de  $(0, 0, \underline{u}_\ell, \underline{u}_r)$  par  $(\sigma, \nu, u_\ell)$ .

Le linéarisé de (2.17) autour d'une onde de choc plane  $(\sigma, \nu, u_\ell, u_r)$  s'écrit :

$$\begin{cases} L(u_\ell, \Phi_\ell) u_- = f_-, & x_d > 0, \\ L(u_r, \Phi_r) u_+ = f_+, & x_d > 0, \\ \partial_t \psi(u_r - u_\ell) + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi (f_j(u_r) - f_j(u_\ell)) + B(\sigma, \nu, u_\ell) (u_-, u_+) = g, & x_d = 0, \end{cases}$$

où  $\Phi_\ell = -x_d - \sigma t - \nu \cdot y$ ,  $\Phi_r = x_d - \sigma t - \nu \cdot y$ , et :

$$B(\sigma, \nu, u_\ell) (u_-, u_+) := (A_d(u_\ell) - \sigma I - \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j A_j(u_\ell)) u_- - (A_d(u_r) - \sigma I - \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j A_j(u_r)) u_+.$$

Les opérateurs  $L(u_\ell, \Phi_\ell)$  et  $L(u_r, \Phi_r)$  sont hyperboliques à multiplicité constante et à coefficients constants. Nous pouvons donc procéder comme au paragraphe 2.1 et définir le sous-espace stable  $E^s(\sigma, \nu, u_\ell, \zeta)$  prolongé continûment aux  $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , ainsi que les points glancing  $\Gamma(\sigma, \nu, u_\ell)$ . Sous les hypothèses 2.6 et 2.7, le sous-espace stable  $E^s(\sigma, \nu, u_\ell, \zeta)$  est de dimension  $N - 1$ . Notre définition de front faiblement stable est la suivante :

**Définition 2.6** (Onde de choc faiblement stable). *Sous les hypothèses 2.6 et 2.7, nous dirons que l'onde de choc plane  $(0, 0, \underline{u}_\ell, \underline{u}_r)$  est faiblement stable si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *Il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $(0, 0, \underline{u}_\ell)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathcal{U}$  et il existe une constante  $\kappa > 0$  tels que pour tout  $U = (\sigma, \nu, u_\ell) \in \mathcal{O}$ , en notant  $u_r = \mathcal{RH}(U)$ , l'estimation suivante est satisfaite :*

$$\forall \zeta \in \Sigma, \quad |b(U, \zeta)| \geq \kappa, \quad b(U, \zeta) := (\tau - i\gamma) (u_r - u_\ell) + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j (f_j(u_r) - f_j(u_\ell)).$$

*Nous noterons  $\Pi(U, \zeta)$  le projecteur orthogonal sur  $b(U, \zeta)^\perp$ .*

- *Il existe une fonction  $\sigma$  sur  $\mathcal{O} \times \Sigma$  à valeurs réelles de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que pour tout  $(U, \zeta) \in \mathcal{O} \times \Sigma$ , nous avons  $\text{Ker}(\Pi(U, \zeta) B(U)) \cap E^s(U, \zeta) \neq \{0\}$  si et seulement si  $\zeta \in \Sigma_0$  et  $\sigma(U, \zeta) = 0$ .*
- *Il existe un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\Sigma$  tel que pour tout  $U \in \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{V}$  contient  $\{\zeta \in \Sigma_0 / \sigma(U, \zeta) = 0\}$  mais n'intersecte pas  $\Gamma(U)$ . De plus il existe une base  $e_1(U, \zeta), \dots, e_p(U, \zeta)$  de*

$E^s(U, \zeta)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{O} \times \mathcal{V}$ , et il existe une matrice  $P(U, \zeta) \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{O} \times \mathcal{V}$  tels que :

$$\forall (U, \zeta) \in \mathcal{O} \times \mathcal{V}, \\ P(U, \zeta) \Pi(U, \zeta) B(U) (e_1(U, \zeta) \ \dots \ e_p(U, \zeta)) = \text{diag} (\gamma + i \sigma(U, \zeta), 1, \dots, 1).$$

Notre définition de front faiblement stable implique en particulier que toute onde de choc plane  $(\sigma, \nu, \underline{u}_\ell, \underline{u}_r)$  suffisamment proche de  $(0, 0, \underline{u}_\ell, \underline{u}_r)$  est également faiblement stable. Cette propriété est nécessaire en vue d'établir un résultat de stabilité non-linéaire. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal :

**Théorème 2.5.** *Soit  $(0, 0, \underline{u}_\ell, \underline{u}_r)$  une onde de choc faiblement stable au sens de la définition 2.6, et soit  $T > 0$ . Considérons des données initiales pour (2.17) de la forme  $(u_{\pm,0}, \varphi_0)$  où  $(u_{-,0}, u_{+,0}) = (\underline{u}_\ell + \dot{u}_{-,0}, \underline{u}_r + \dot{u}_{+,0})$ . Il existe deux entiers  $\mu_0, \mu_1$  et il existe  $\delta > 0$  tels que pour tout entier  $\mu \geq \mu_0$ , pour toutes fonctions  $(\dot{u}_{-,0}, \dot{u}_{+,0}, \varphi_0) \in H^{\mu+\mu_1+1/2}(\mathbb{R}_+^d)^2 \times H^{\mu+\mu_1+1}(\mathbb{R}^{d-1})$  vérifiant :*

$$\|\dot{u}_{-,0}\|_{H^{\mu+\mu_1+1/2}(\mathbb{R}_+^d)} + \|\dot{u}_{+,0}\|_{H^{\mu+\mu_1+1/2}(\mathbb{R}_+^d)} + \|\varphi_0\|_{H^{\mu+\mu_1+1}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \delta,$$

et définissant des données initiales  $(u_{\pm,0}, \varphi_0)$  compatibles à l'ordre  $\mu + \mu_1$ , alors il existe une solution  $(u_\pm, \varphi)$  de (2.17) sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ , égale à  $(u_{\pm,0}, \varphi_0)$  en  $t = 0$ , et de la forme  $(u_-, u_+) = (\underline{u}_\ell + \dot{u}_-, \underline{u}_r + \dot{u}_+)$  avec  $(\dot{u}_-, \dot{u}_+, \varphi) \in H^\mu(]0, T[ \times \mathbb{R}_+^d)^2 \times H^{\mu+1}(]0, T[ \times \mathbb{R}^{d-1})$ .

Les relations de compatibilité sur la donnée initiale assurent que la discontinuité initiale n'engendre qu'une seule onde en temps positif. L'indice  $\mu_0$  précise la régularité minimale des solutions que nous pouvons construire, tandis que l'indice  $\mu_1$  indique la perte de régularité entre les données initiales et la solution. Dans le cas des fronts uniformément stables au sens de la définition 2.5, nous pouvons choisir  $\mu_1 = 0$ . Pour des fronts faiblement stables, nous avons  $\mu_1 > 0$ .

Nous indiquons maintenant la méthode de preuve conduisant au théorème 2.5. Le principe est de résoudre les équations non-linéaires (2.17) par une suite de problèmes linéarisés. Les problèmes linéarisés vérifieront une estimation à perte analogue à celle du théorème 2.3. Cette perte de régularité rend inutilisable un schéma itératif de type Picard, et nous sommes conduits à utiliser un schéma itératif de type Nash-Moser. Pour faire fonctionner ce type de schéma, deux ingrédients sont nécessaires : un contrôle "doux" de l'inverse du linéarisé, et un contrôle "doux" du linéarisé à l'ordre 2. Comme nous avons affaire à des opérateurs différentiels d'ordre 1 ou 0, le contrôle "doux" du linéarisé à l'ordre 2 est fastidieux mais immédiat. Nous nous concentrons donc sur le contrôle "doux" de l'inverse du linéarisé, en nous appuyant sur les résultats obtenus au paragraphe 2.2.

Nous considérons le linéarisé de (2.17) autour de ce que nous appelons une solution approchée  $(u_-, u_+, \varphi)$ , les perturbations étant notées  $(v_-, v_+, \psi)$ . A la perturbation  $\psi$  de  $\varphi$  correspondent des perturbations  $\Psi_\pm$  des relèvements  $\Phi_\pm$ . La structure du linéarisé est donnée par Alinhac [1] et nécessite l'introduction des "bonnes inconnues" :

$$w_\pm := v_\pm - \Psi_\pm \partial_{x_d} u_\pm / \partial_{x_d} \Phi_\pm.$$

Modulo des termes d'ordre 0 en  $\Psi$  et  $\psi$  que nous omettons, le linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} L(u_-, \Phi_-) w_- + D_- w_- = f_-, & x_d > 0, \\ L(u_+, \Phi_+) w_+ + D_+ w_+ = f_+, & x_d > 0, \\ \partial_t \psi (u_+ - u_-) + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi (f_j(u_+) - f_j(u_-)) \\ \quad + B(\partial_t \varphi, \nabla_y \varphi, u_-) (w_-, w_+) = g, & x_d = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

les matrices  $D_{\pm}$  se calculant explicitement à partir de  $u_{\pm}, \varphi$  et de leurs dérivées. Nous voulons appliquer les résultats du paragraphe 2.2 au problème (2.18). L'introduction du front  $\psi$  dans les conditions aux limites fait que le système (2.18) ne rentre pas exactement dans le cadre du problème (2.6). Cependant le symbole associé à  $\psi$  est elliptique en vertu de l'hypothèse 2.7, donc nous pouvons isoler  $\psi$  dans une condition aux limites, les  $N - 1$  conditions aux limites restantes et les équations intérieures permettant de déterminer  $w_-, w_+$ . Nous nous permettons donc d'appliquer les théorèmes 2.2 et 2.3 au système (2.18). L'hypothèse 2.3 est clairement satisfaite si nous considérons une solution approchée  $(u_-, u_+, \varphi)$  qui est une petite perturbation de  $(\underline{u}_\ell, \underline{u}_r, 0)$  dans  $W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+^{1+d})^2 \times W^{3,\infty}(\mathbb{R}^{d-1})$ . Pour vérifier la condition de stabilité faible, nous sommes naturellement amenés à formuler l'hypothèse :

**(H)** Les fonctions  $(u_-, u_+, \varphi)$  vérifient les conditions de Rankine-Hugoniot sur  $\{x_d = 0\}$ , autrement dit  $(u_+)|_{x_d=0} = \mathcal{RH}(\partial_t \varphi, \nabla_y \varphi, (u_-)|_{x_d=0})$ .

La fonction  $\sigma(t, y, \zeta)$  de la définition 2.4 n'est alors rien d'autre que  $\sigma(U(t, y), \zeta)$  avec  $U = (\partial_t \varphi, \nabla_y \varphi, (u_-)|_{x_d=0})$ . L'hypothèse 2.4 est satisfaite pour de petites perturbations de l'onde de choc plane. Nous pouvons ainsi en supposant **(H)**, appliquer le théorème 2.3 et obtenir le caractère bien-posé de (2.18) pour des termes source  $(f_-, f_+, g) \in L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\omega_T))^2 \times H^1(\omega_T)$ , la solution correspondante  $(w_-, w_+, \psi)$  appartenant à  $L^2(\Omega_T)^2 \times H^1(\omega_T)$ .

En vue d'utiliser un schéma de type Nash-Moser, il nous faut maintenant étendre le résultat du théorème 2.3 à des termes source  $f_-, f_+, g$  dans des espaces de Sobolev d'ordre arbitrairement grand. Dans le cas des problèmes aux limites vérifiant la CKU ou la condition de stabilité uniforme de Majda, les estimations dans  $H^m$  sont obtenues d'abord en estimant les dérivées tangentielles  $\partial_t^\alpha \nabla_y^\beta$ , puis en estimant les dérivées normales en fonction des dérivées tangentielles (ici intervient de manière cruciale l'hypothèse de bord non-caractéristique). Pour estimer les dérivées tangentielles, il suffit de commuter les équations avec l'opérateur  $\partial_t^\alpha \nabla_y^\beta$  et de traiter les commutateurs comme des termes source. Cette procédure fonctionne pour les problèmes vérifiant la CKU car les termes d'ordre 0 dans les équations intérieures peuvent être absorbés en choisissant  $\gamma$  suffisamment grand. Pour des fronts faiblement stables, cette procédure ne fonctionne plus aussi directement car les commutateurs apparaissant quand nous commutons (2.18) avec une dérivée tangentielle  $\partial_t^\alpha \nabla_y^\beta$  font intervenir toutes les dérivées d'ordre  $\alpha + |\beta|$  de  $w_-, w_+$ . Néanmoins si nous nous donnons un entier  $k$ , le système satisfait par toutes les dérivées tangentielles d'ordre  $k$  s'écrit sous la même forme que (2.18) et nous pouvons appliquer le théorème 2.3. Les dérivées normales sont directement estimées grâce aux équations (2.18) qui permettent d'écrire  $\partial_{x_d} w_{\pm}$  comme une combinaison de dérivées tangentielles et de  $f_{\pm}$ . Nous obtenons ainsi une estimation "douce" pour le problème linéarisé (2.18) si la solution approchée  $(u_-, u_+, \varphi)$  autour de laquelle nous linéarisons les équations vérifie l'hypothèse **(H)** ci-dessus.

Notre schéma itératif de type Nash-Moser consiste alors à résoudre une suite de problèmes linéarisés de la forme (2.18) où nous régularisons les coefficients à chaque pas d'itération, et forçons les conditions de Rankine-Hugoniot de sorte que l'hypothèse **(H)** soit satisfaite. Plus précisément, si au  $n$ -ième pas d'itération du schéma nous avons construit une solution approchée  $u_{\pm}^n, \varphi^n$ , nous allons définir  $u_{\pm}^{n+1}, \varphi^{n+1}$  de la manière suivante. Tout d'abord, nous régularisons les fonctions  $u_{\pm}^n, \varphi^n$  par un opérateur  $S_n$  convergeant vers l'identité quand  $n$  tend vers l'infini. A ce stade, il n'y a aucune raison pour que  $S_n u_{\pm}^n, S_n u_{\pm}^n, S_n \varphi^n$  vérifient les conditions de Rankine-Hugoniot. Nous définissons donc un état intermédiaire  $u_{\pm}^{n+1/2}, \varphi^{n+1/2}$  vérifiant les conditions de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{aligned} u_{-}^{n+1/2} &:= S_n u_{-}^n, & \varphi^{n+1/2} &:= S_n \varphi^n, \\ u_{+}^{n+1/2} &:= S_n u_{+}^n + \mathbf{R} \left( \mathcal{RH}(\partial_t \varphi^{n+1/2}, \nabla_y \varphi^{n+1/2}, (u_{-}^{n+1/2})|_{x_d=0}) - (S_n u_{+}^n)|_{x_d=0} \right), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{R}$  est un opérateur de relèvement de trace. Le problème linéarisé autour des états  $u_{\pm}^{n+1/2}, \varphi^{n+1/2}$  doit permettre de définir, comme dans l'algorithme de Newton, les différences  $u_{\pm}^{n+1} - u_{\pm}^n, \varphi^{n+1} - \varphi^n$ . Nous commençons par résoudre le problème linéaire :

$$\begin{cases} L(u_{-}^{n+1/2}, \Phi_{-}^{n+1/2}) w_{-}^n + D_{-}^{n+1/2} w_{-}^n = f_{-}^n, & x_d > 0, \\ L(u_{+}^{n+1/2}, \Phi_{+}^{n+1/2}) w_{+}^n + D_{+}^{n+1/2} w_{+}^n = f_{+}^n, & x_d > 0, \\ \partial_t \psi^n (u_{+}^{n+1/2} - u_{-}^{n+1/2}) + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi^n (f_j(u_{+}^{n+1/2}) - f_j(u_{-}^{n+1/2})) \\ \quad + B(\partial_t \varphi^{n+1/2}, \nabla_y \varphi^{n+1/2}, u_{-}^{n+1/2}) (w_{-}^n, w_{+}^n) = g^n, & x_d = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

que nous savons bien-posé grâce à l'analyse précédente. A la solution  $\psi^n$  correspondent des fonctions  $\Psi_{\pm}^n$ . Nous retrouvons finalement les fonctions  $u_{\pm}^{n+1}, \varphi^{n+1}$  à l'aide des relations :

$$\begin{aligned} \psi^n &= \varphi^{n+1} - \varphi^n, \\ w_{\pm}^n &= u_{\pm}^{n+1} - u_{\pm}^n - \Psi_{\pm}^n \partial_{x_d} u_{\pm}^{n+1/2} / \partial_{x_d} \Phi_{\pm}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Les opérateurs de régularisation  $S_n$  et les termes source  $f_{\pm}^n, g^n$  dans les équations linéarisées sont définis en suivant la procédure détaillée par Alinhac et Gérard [2], à la différence près que nous devons ici incorporer les erreurs dues à l'introduction de l'état intermédiaire  $u_{\pm}^{n+1/2}, \varphi^{n+1/2}$  qui n'apparaissent pas dans un schéma de Nash-Moser standard. Nous montrons que ces nouvelles erreurs ont le même ordre de grandeur que les erreurs usuelles du schéma de Nash-Moser, ce qui nous permet de montrer la convergence de la suite  $(u_{\pm}^n, \varphi^n)$  vers une solution  $(u_{\pm}, \varphi)$  de (2.17) ayant toutes les propriétés requises.

**Remarque 2.3.** *Le théorème 2.5 montre la persistance des ondes de choc faiblement stables pour les équations d'Euler isentropiques. Les transitions de phase décrites précédemment ne relèvent pas directement du théorème 2.5 car elles ne vérifient pas les inégalités de Lax, mais nous pouvons adopter une démarche analogue et montrer un résultat en tous points similaire dans ce cas.*

## 2.4 Un problème caractéristique : les discontinuités de contact

### 2.4.1 Le critère de stabilité faible [D]

Nous nous intéressons ici aux équations d'Euler incluant l'équation de conservation de l'énergie :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

En plus des notations déjà utilisées au paragraphe 2.4,  $E = e + |\mathbf{u}|^2/2$  désigne l'énergie totale par unité de masse avec  $e$  l'énergie interne du fluide par unité de masse. L'entropie spécifique  $s$  étant définie par la seconde loi de la thermodynamique  $de = -p dv + \theta ds$  où  $v = 1/\rho$  est le volume spécifique et  $\theta$  est la température, nous supposons que  $\rho$  est donnée comme fonction de  $p$  et de  $s$  (ce qui est toujours le cas si nous faisons des hypothèses de convexité adéquates sur  $p$ , voir par exemple [7]). Les fonctions inconnues sont donc  $(p, \mathbf{u}, s)$ . Si  $\partial_p \rho > 0$ , le système (2.20) vérifie l'hypothèse 2.6. La vitesse du son est notée  $c(p, s)$ .

Nous nous intéressons ici à des solutions de (2.20) régulières de part et d'autre d'une interface  $\{x_d = \varphi(t, y)\}$ , les relations de saut sur l'interface étant :

$$\partial_t \varphi + w_- \cdot \nabla_y \varphi - u_- = \partial_t \varphi + w_+ \cdot \nabla_y \varphi - u_+ = 0, \quad (2.21a)$$

$$p_+ = p_-. \quad (2.21b)$$

Dans la terminologie de Lax [38], de telles solutions sont des discontinuités de contact. Le tourbillon  $\nabla \wedge \mathbf{u}$  est régulier de part et d'autre de l'interface et possède une mesure de simple couche sur l'interface. Nous parlerons donc également de nappes de tourbillon. Les relations (2.21a) montrent que l'interface est caractéristique par rapport aux états "gauche" et "droit" (dans ce cas il n'y a pas de transfert de masse à travers l'interface et nous ne pouvons plus parler d'amont et d'aval). Seules la vitesse tangentielle et l'entropie ont un saut à travers l'interface.

L'analyse de stabilité des discontinuités de contact suit la même démarche que pour les discontinuités non-caractéristiques. Nous commençons par redresser le front inconnu, puis nous linéarisons les équations autour d'une discontinuité de contact constante par morceaux. A un changement de référentiel galiléen près, une discontinuité de contact constante par morceaux est de la forme :

$$(p, w, u, s) = \begin{cases} (\underline{p}, -\underline{w}, 0, s_\ell), & \text{si } x_d < 0, \\ (\underline{p}, \underline{w}, 0, s_r), & \text{si } x_d > 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Le problème linéarisé est à nouveau de la forme (2.12), mais ici la matrice  $A_d$  n'est plus inversible. Quitte à effectuer des changements de fonctions inconnues, cette matrice peut être mise sous la forme  $A_d = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ . Après introduction du poids  $\exp(-\gamma t)$  et transformée de Fourier en  $(t, y)$ , nous pouvons éliminer les fonctions intervenant dans

les premières lignes du système (ces fonctions vérifient des identités algébriques) et nous obtenons un système d'équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{V}}{dx_d} = \mathcal{A}(\zeta)\widehat{V} + F, & x_d > 0, \\ \widehat{\psi}b(\zeta) + B\widehat{V} = G, & x_d = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Le symbole  $\mathcal{A}(\zeta)$  est homogène de degré 1 par rapport à  $\zeta$  et n'a pas de valeur propre imaginaire pure pour  $\gamma > 0$ . Le bord étant caractéristique,  $\mathcal{A}(\zeta)$  a maintenant des pôles sur  $\Sigma_0$ . Néanmoins, nous pouvons montrer facilement dans ce cas particulier que le sous-espace stable  $E^s(\zeta)$  se prolonge continûment à  $\Sigma_0$ , malgré la présence des pôles de  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Nous pouvons alors définir la notion de stabilité uniforme et de stabilité faible pour la discontinuité de contact (2.22). Les définitions sont en tout point analogues aux définitions 2.5 et 2.6. Dans le cas d'un fluide vérifiant la loi d'état des gaz parfaits polytropiques :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \exp\left(-\frac{(\gamma-1)(s-s_0)}{\gamma R}\right),$$

où  $\rho_0, p_0, s_0, R, \gamma$  sont des constantes strictement positives ( $\gamma > 1$ ), nous caractérisons la stabilité de (2.22) de la manière suivante :

**Théorème 2.6.** *Supposons  $d = 3$ . Alors la discontinuité de contact (2.22) est violemment instable si  $\underline{w} \neq 0$ .*

*Supposons  $d = 2$ . Alors la discontinuité de contact (2.22) est violemment instable si :*

$$2|\underline{w}| \in \left]0, \left(c(\underline{p}, s_r)^{2/3} + c(\underline{p}, s_\ell)^{2/3}\right)^{3/2}\right[ ,$$

*et faiblement stable si :*

$$2|\underline{w}| > \left(c(\underline{p}, s_r)^{2/3} + c(\underline{p}, s_\ell)^{2/3}\right)^{3/2} .$$

Dans le cas isentropique  $s_r = s_\ell = \underline{s}$  bidimensionnel, nous retrouvons le critère de stabilité faible  $|\underline{w}| > \sqrt{2}c(\underline{p}, \underline{s})$ . Le résultat du théorème 2.6 remonte à Miles et Fejer [54, 18]. La preuve de ces résultats reposait sur des arguments d'analyse complexe. Nous retrouvons ce résultat en utilisant uniquement des arguments algébriques simples sur les polynômes réels de degré 3 ou 4. Notre preuve étend ainsi au cas non-isentropique l'analyse du cas isentropique, voir l'ouvrage [60]. Notre analyse explicite également le cas des modes neutres dans le cas des discontinuités de contact faiblement stables. La CKU dégénère alors dans la région hyperbolique de  $\Sigma_0$ , le symbole de l'opérateur agissant sur le front étant elliptique.

Nous voulons maintenant montrer l'existence de discontinuités de contact faiblement stables, dans le cas bidimensionnel. Nous nous restreindrons pour simplifier au cas isentropique, et renvoyons à Morando et Trebeschi [55] pour l'analyse du cas non-isentropique.

### 2.4.2 Persistance des discontinuités de contact [C] [F]

Nous considérons les équations d'Euler isentropiques (2.8) en dimension  $d = 2$  d'espace, et souhaitons construire des solutions régulières de part et d'autre du front  $\{x_2 = \varphi(t, x_1)\}$ , vérifiant les conditions de saut (2.21) sur le front. Si nous supposons que la pression  $p$  vérifie  $p'(\rho) > 0$  pour tout  $\rho > 0$ , la condition de saut (2.21b) est équivalente à  $\rho_+ = \rho_-$ . Nous nous donnons donc une discontinuité de contact plane qui, à un changement de référentiel galiléen près, s'écrit :

$$(\rho, w, u) = \begin{cases} \underline{U}_\ell := (\underline{\rho}, -\underline{w}, 0), & \text{si } x_2 < 0, \\ \underline{U}_r := (\underline{\rho}, \underline{w}, 0), & \text{si } x_2 > 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Nous supposons que (2.24) vérifie le critère de stabilité faible :

$$|\underline{w}| > \sqrt{2p'(\underline{\rho})}, \quad (2.25)$$

et souhaitons construire des discontinuités de contact proches de cette solution constante. Pour cela, nous reformulons les équations dans un domaine fixe en redressant le front inconnu. Nous introduisons deux fonctions  $\Phi_\pm$  définies sur  $[0, T] \times \mathbb{R}_+^2$  et vérifiant :

$$(\Phi_-)_{|x_2=0} = (\Phi_+)_{|x_2=0} = \varphi, \quad \pm \partial_{x_2} \Phi_\pm \geq \kappa > 0,$$

où  $\kappa > 0$  désigne une constante ajustée en fonction des données. Le problème étant caractéristique, le redressement du front utilisé au paragraphe précédent ne convient plus, comme nous l'expliquerons plus loin. A la place, nous proposons de lever l'indétermination sur les fonctions  $\Phi_\pm$  en leur imposant de vérifier :

$$\partial_t \Phi_- + w_- \partial_{x_1} \Phi_- - u_- = \partial_t \Phi_+ + w_+ \partial_{x_1} \Phi_+ - u_+ = 0, \quad (2.26)$$

dans tout le domaine  $[0, T] \times \mathbb{R}_+^2$ . En redressant le front, nous pouvons reformuler notre problème sous la forme :

$$\begin{cases} L(U_-, \Phi_-) U_- = L(U_+, \Phi_+) U_+ = 0, & t \in [0, T], x_d > 0, \\ \partial_t \varphi + w_- \partial_{x_1} \varphi - u_- = \partial_t \varphi + w_+ \partial_{x_1} \varphi - u_+ = 0, & t \in [0, T], x_d = 0, \\ \rho_+ = \rho_-, & t \in [0, T], x_d = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $U_\pm$  désigne le vecteur  $(\rho_\pm, w_\pm, u_\pm)$ , et où l'opérateur  $L(U, \Phi)$  est défini comme au paragraphe précédent. Les équations (2.26) assurent que la matrice normale des opérateurs  $L(U_\pm, \Phi_\pm)$  est de rang constant dans tout le domaine  $[0, T] \times \mathbb{R}_+^2$ . Cette propriété est cruciale pour effectuer la construction des symétriseurs de Kreiss pour un problème caractéristique, voir Majda et Osher [46]. Notre résultat principal est le suivant :

**Théorème 2.7.** *Soit  $T > 0$  et soit (2.24) une discontinuité de contact plane vérifiant (2.25). Considérons des données initiales pour (2.27) de la forme  $(U_{\pm,0}, \varphi_0)$  où  $U_{-,0} = \underline{U}_\ell + \dot{U}_{-,0}$  et  $U_{+,0} = \underline{U}_r + \dot{U}_{+,0}$ . Il existe deux entiers  $\mu_0, \mu_1$  et il existe  $\delta > 0$  tels que pour tout entier  $\mu \geq \mu_0$ , pour toutes fonctions  $(\dot{U}_{-,0}, \dot{U}_{+,0}, \varphi_0) \in H^{\mu+\mu_1+1/2}(\mathbb{R}_+^2)^2 \times H^{\mu+\mu_1+1}(\mathbb{R})$  vérifiant :*

$$\|\dot{U}_{-,0}\|_{H^{\mu+\mu_1+1/2}(\mathbb{R}_+^2)} + \|\dot{U}_{+,0}\|_{H^{\mu+\mu_1+1/2}(\mathbb{R}_+^2)} + \|\varphi_0\|_{H^{\mu+\mu_1+1}(\mathbb{R})} \leq \delta,$$

et définissant des données initiales  $(U_{\pm,0}, \varphi_0)$  compatibles à l'ordre  $\mu + \mu_1$ , alors il existe une solution  $(U_{\pm}, \Phi_{\pm}, \varphi)$  de (2.27), (2.26) sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  telle que  $(U_{\pm}, \varphi)$  prenne la valeur  $(U_{\pm,0}, \varphi_0)$  en  $t = 0$ ,  $\Phi_-$  et  $\Phi_+$  ont pour trace commune  $\varphi$  en  $x_2 = 0$ ,  $(U_{\pm}, \Phi_{\pm})$  se décomposent sous la forme  $(U_-, U_+) = (\underline{U}_\ell + \dot{U}_-, \underline{U}_r + \dot{U}_+)$ ,  $\Phi_{\pm} = \pm x_2 + \dot{\Phi}_{\pm}$ . Cette solution satisfait  $\dot{U}_{\pm}, \dot{\Phi}_{\pm} \in H^{\mu}([0, T] \times \mathbb{R}_+^2)$  et  $\varphi \in H^{\mu+1}([0, T] \times \mathbb{R})$ .

La preuve du théorème 2.7 suit la démarche adoptée pour le théorème 2.5 en incluant quelques spécificités des problèmes caractéristiques. Nous indiquons les modifications essentielles.

Comme nous l'avons détaillé précédemment, l'analyse par modes normaux peut s'effectuer de la même façon que pour les problèmes non-caractéristiques car le sous-espace stable  $E^s(\zeta)$  du symbole  $\mathcal{A}(\zeta)$  se prolonge continûment à tout  $\Sigma_0$ . Pour notre problème, ce prolongement se fait de manière explicite. Le symbole associé au front est elliptique, donc nous pouvons isoler le front dans une condition aux limites et nous ramener à un problème aux limites standard. Sous la condition (2.25), nous montrons que les fréquences pour lesquelles la CKU dégénère ne coïncident pas avec les pôles du symbole  $\mathcal{A}(\zeta)$ . Nous pouvons donc employer au voisinage de ces fréquences la même technique que celle employée pour les problèmes non-caractéristiques. Les estimations au voisinage des pôles relève de Majda et Osher [46], voir également l'ouvrage [7]. La seule différence dans les estimations est le contrôle de la trace de la solution ; ici nous ne contrôlons que certaines composantes de la trace car le problème est caractéristique.

Pour montrer l'estimation "douce" dans les espaces de Sobolev, nous suivons la même méthode que celle indiquée au paragraphe précédent pour contrôler les dérivées tangentielles. Ici les dérivées normales ne sont pas toutes données par les équations car le problème est caractéristique. Si nous examinons en détail la matrice normale du problème linéarisé, nous nous apercevons que les dérivées normales "manquantes" sont celles des vitesses tangentielles  $w_{\pm}$ . Pour estimer ces dérivées normales, nous utilisons l'équation satisfaite par la vorticité. Rappelons en effet que si  $(\rho, \mathbf{u})$  est une solution régulière des équations d'Euler (2.8) en 2 dimensions d'espace, alors la vorticité  $\omega := \partial_{x_2} w - \partial_{x_1} u$  satisfait :

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega + \omega \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

L'analogie de cette équation dans les variables redressées conduit aux estimations des dérivées normales de  $w_{\pm}$ , et nous montrons ainsi une estimation "douce" dans les espaces de Sobolev. Cette propriété particulière des équations d'Euler nous évite d'introduire des espaces de Sobolev   régularité conormale comme cela est nécessaire pour certains problèmes caractéristiques.

Dans le schéma itératif de type Nash-Moser, nous devons prendre en compte les équations (2.26) qui doivent être satisfaites à chaque étape de l'itération. La différence par rapport au paragraphe précédent est que nous ne disposons pas ici de formule explicite définissant les relèvements  $\Phi_{\pm}$  en fonction de leur trace  $\varphi$ . Dans la procédure itérative, nous commençons comme dans le paragraphe précédent par résoudre un problème linéarisé analogue à (2.19) qui détermine les bonnes inconnues  $W_{\pm}^n$  et le front  $\psi^n$ , ce front  $\psi^n$  étant la trace commune supposée des fonctions  $\Psi_{\pm}^n$  qu'il nous reste à déterminer. Ces fonctions sont ici déterminées en adoptant un schéma de Nash-Moser pour résoudre (2.26), les termes source étant choisis tels que la trace de  $\Psi_-^n$  et de  $\Psi_+^n$  coïncident avec la fonc-

tion  $\psi^n$  calculée en résolvant le problème linéarisé (2.19). Une fois déterminées  $\Psi_{\pm}^n$ , nous définissons  $U_{\pm}^{n+1}, \Phi_{\pm}^{n+1}$  par les relations :

$$W_{\pm}^n = U_{\pm}^{n+1} - U_{\pm}^n - (\Phi_{\pm}^{n+1} - \Phi_{\pm}^n) \partial_{x_d} U_{\pm}^{n+1/2} / \partial_{x_d} \Phi_{\pm}^{n+1/2}, \quad \Psi_{\pm}^n = \Phi_{\pm}^{n+1} - \Phi_{\pm}^n.$$

Pour le traitement du problème lié au relèvement du front, notre procédure suit la technique initiée par Francheteau et Métivier [19]. Hors mis cette difficulté supplémentaire, la preuve de convergence du schéma se fait comme dans le cas des fronts non-caractéristiques.

## 2.5 Perspectives

Les résultats de ce chapitre montrent que les problèmes faiblement stables sont bien posés dans les espaces fonctionnels adéquats. Pour les systèmes de lois de conservation, nous répondons à la question de la persistance des ondes de choc faiblement stables et pour les équations d'Euler isentropiques nous montrons la persistance de discontinuités de contact en dimension deux. D'une certaine manière, cette analyse clôt le programme initié par Majda pour les solutions régulières par morceaux ne présentant qu'une seule onde. Plusieurs questions viennent naturellement à la suite de notre travail.

Tout d'abord, nous pouvons nous intéresser au problème de la prolongation (en temps) des fronts faiblement stables. Pour les ondes de choc uniformément stables, Métivier [51] montre un critère d'explosion analogue à celui connu pour le problème de Cauchy. Pour les fronts faiblement stables, des développements (formels) d'optique géométrique ont été obtenus par Majda et Rosales [45] puis par Artola et Majda [3] pour expliquer la formation de singularités dans les fronts : les "Mach stems" dans les ondes de choc en dynamique des gaz réactifs [45], et les "kink modes" dans les discontinuités de contact [3]. Maintenant que nous disposons d'une théorie d'existence locale pour les fronts faiblement stables, nous souhaitons pouvoir justifier ces développements asymptotiques qui expliqueraient la formation de structures particulières dans ces fronts.

Pour progresser dans la compréhension du problème de Cauchy pour les équations d'Euler, ou de manière plus générale pour les systèmes de lois de conservation, l'étape suivante est d'étudier les interactions entre différents types d'ondes. Métivier [47] a étudié le cas de l'interaction entre deux ondes de choc uniformément stables et notre travail débouche naturellement sur l'étude de l'interaction entre deux ondes qui sont l'une uniformément stable et l'autre faiblement stable. Le but ultime serait de résoudre le problème de Cauchy pour les équations d'Euler avec une donnée initiale régulière de part et d'autre d'une interface et donnant lieu à l'interaction d'une onde de détente, d'une discontinuité de contact et d'une onde de choc. Une question préliminaire est de comprendre la stabilité de tels motifs vis-à-vis de perturbations des données initiales.

Enfin, la meilleure compréhension que nous avons maintenant des problèmes aux limites doit permettre d'étudier la stabilité des schémas numériques pour approcher les solutions de ces problèmes. Les travaux existants pour les schémas aux différences finies, citons notamment les travaux de Gustafsson, Kreiss et Sundström [25] et de Michelson [53], sont souvent restreints aux schémas dissipatifs ce qui limite beaucoup les applications. L'extension des résultats pour les problèmes "continus" aux problèmes "discrets" est une perspective importante du point de vue des applications.

# Chapitre 3

## Systèmes hyperboliques avec dissipation

Ce chapitre expose nos résultats concernant les systèmes hyperboliques en présence de termes dissipatifs. Dans tout ce chapitre, nous nous intéressons à des problèmes posés sur tout l'espace  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d = 1$  le plus souvent. Un premier paragraphe est consacré à l'asymptotique de forte relaxation pour des systèmes hyperboliques avec des forces de rappel. Nous étudions plusieurs problèmes dans cette direction. Tout d'abord nous étudions le système des moments obtenu par la procédure de minimisation d'entropie et montrons que ce système est consistant avec l'asymptotique de diffusion. Nous étudions ensuite la limite de forte relaxation dans les équations d'Euler avec friction et justifions la convergence des solutions vers un régime de diffusion dans une échelle de temps convenable. Pour finir ce premier paragraphe, nous étudions le système dit de relaxation en pression et justifions que ce système est consistant avec les équations d'Euler. Nos résultats sont étayés par des simulations numériques montrant bien la convergence des solutions du problème relaxé vers la solution des équations d'Euler. Un second paragraphe est consacré à l'étude d'un modèle de transfert radiatif couplant les équations d'Euler avec une équation elliptique décrivant les radiations. Après avoir rappelé les propriétés de dissipation de ce système, nous étudions l'existence d'ondes progressives de type "profils de choc". Nous montrons l'existence de telles ondes, ainsi qu'une propriété de stabilité asymptotique en temps. Nous développons ensuite un schéma numérique permettant le calcul de ces ondes progressives.

### 3.1 Systèmes hyperboliques avec une forte relaxation

#### 3.1.1 Système des moments avec minimisation d'entropie [G] [H]

Nous considérons une équation cinétique de la forme :

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \partial_x f_\varepsilon = \frac{\rho_\varepsilon - f_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

où  $f_\varepsilon(t, x, v)$  désigne la densité de particules situées au point  $x \in \mathbb{R}$  et ayant la vitesse  $v \in V$  au temps  $t$ ,  $\varepsilon > 0$  est un paramètre mesurant le "libre parcours moyen" des

particules, et  $\rho_\varepsilon$  désigne la densité macroscopique de particules définie par :

$$\rho_\varepsilon(t, x) := \int_V f_\varepsilon(t, x, v) d\mu(v),$$

la mesure  $\mu$  et l'ensemble des vitesses  $V$  vérifiant l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.1** (Ensemble des vitesses). *L'ensemble  $V$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[-v_M, v_M]$ . La mesure  $\mu$  est une mesure de probabilité borélienne sur  $V$ , vérifiant :*

- *Le second moment de  $\mu$  est strictement positif :  $d := \int_V v^2 d\mu(v) > 0$ ,*
- *Pour toute fonction  $h$  continue sur  $V$  et impaire,  $\int_V h(v) d\mu(v) = 0$ ,*
- *Le maximum du support de  $\mu$  est  $v_M$  :  $\max \text{Supp}\mu = v_M$ .*

Sous l'hypothèse 3.1, les premiers termes du développement de Hilbert de  $f_\varepsilon$  sont :

$$f_\varepsilon(t, x, v) = \varrho(t, x) - \varepsilon v \partial_x \varrho(t, x) + O(\varepsilon^2), \quad (3.2)$$

où  $\varrho$  est solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t \varrho - d \partial_{xx}^2 \varrho = 0. \quad (3.3)$$

Le développement de Hilbert (3.2) peut être justifié rigoureusement y compris pour des situations bien plus complexes que (3.1), voir par exemple [23]. En particulier  $f_\varepsilon$  converge en un sens convenable vers  $\varrho$ . Pour des régimes intermédiaires du paramètre  $\varepsilon$ , l'asymptotique de diffusion  $\varrho$  présente deux inconvénients. Tout d'abord l'équation de la chaleur (3.3) propage l'information à vitesse infinie tandis que (3.1) propage l'information à la vitesse (grande, mais finie)  $v_M/\varepsilon$ . De plus l'asymptotique  $\varrho$  perd toute dépendance par rapport à la variable de vitesse. Pour garder une trace de  $v$ , nous pourrions considérer comme meilleure approximation de  $f_\varepsilon$  les deux premiers termes du développement (3.2). Cependant la quantité  $\varrho - \varepsilon v \partial_x \varrho$  n'est pas nécessairement positive pour  $\varepsilon > 0$ .

Notre but est de construire un système "intermédiaire" entre l'équation cinétique (3.1) et l'équation de la chaleur (3.3), les solutions de ce nouveau système permettant de construire une densité de particules approchée  $\tilde{f}_\varepsilon(t, x, v)$  positive, ayant le même comportement asymptotique que  $f_\varepsilon$ , la quantité  $\tilde{f}_\varepsilon$  étant a priori plus facile à calculer que  $f_\varepsilon$ . Le coût numérique pour résoudre l'équation cinétique (3.1) n'est pas prohibitif car nous étudions ici une situation simplifiée, mais notre démarche se justifie pleinement pour des situations tridimensionnelles en espace et en vitesse où le coût de résolution d'une équation cinétique devient élevé. Le système intermédiaire que nous étudions a été proposé par Levermore [40, 41]. Il est obtenu en considérant le système vérifié par les deux premiers moments en vitesse  $\rho_\varepsilon, J_\varepsilon$  de  $f_\varepsilon$  :

$$\rho_\varepsilon(t, x) := \int_V f_\varepsilon(t, x, v) d\mu(v), \quad J_\varepsilon(t, x) := \int_V \frac{v}{\varepsilon} f_\varepsilon(t, x, v) d\mu(v).$$

L'hypothèse 3.1 implique que  $\rho_\varepsilon$  et  $J_\varepsilon$  vérifient la contrainte, dite de flux limité,  $\varepsilon |J_\varepsilon| \leq v_M \rho_\varepsilon$ . Les moments  $(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon)$  vérifient le système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x J_\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t J_\varepsilon + \partial_x P_\varepsilon = -J_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $P_\varepsilon$  est le moment d'ordre 2 de  $f_\varepsilon$  :

$$P_\varepsilon := \int_V v^2 f_\varepsilon(t, x, v) d\mu(v).$$

Le système (3.4) n'est pas fermé car le second moment  $P_\varepsilon$  ne peut a priori pas s'exprimer en fonction de  $(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon)$ . La fermeture par minimisation d'entropie de Levermore consiste à remplacer le terme  $P_\varepsilon$  dans (3.4) par la quantité  $\mathcal{P}_\varepsilon(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon)$  définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varepsilon(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon) &:= \int_V v^2 \tilde{f}_\varepsilon(v) d\mu(v), \\ \tilde{f}_\varepsilon &:= \operatorname{argmin} \left\{ \int_V f(v) \ln f(v) d\mu(v) / f \geq 0, \int_V \left( \frac{1}{v/\varepsilon} \right) f(v) d\mu(v) = \left( \frac{\rho_\varepsilon}{J_\varepsilon} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Le minimiseur  $\tilde{f}_\varepsilon$  se calcule de manière explicite. En introduisant la transformée de Laplace  $\mathbb{F}$  de la mesure  $\mu$  :

$$\mathbb{F}(\beta) := \int_V \exp(\beta v) d\mu(v),$$

l'hypothèse 3.1 permet de montrer que la fonction  $\mathbb{G} := \mathbb{F}'/\mathbb{F}$  est un  $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $] -v_M, v_M[$ , et le minimiseur  $\tilde{f}_\varepsilon$  est donné par l'expression :

$$\tilde{f}_\varepsilon = \rho_\varepsilon \frac{\exp(v \mathbb{G}^{-1}(\varepsilon J_\varepsilon / \rho_\varepsilon))}{\mathbb{F} \circ \mathbb{G}^{-1}(\varepsilon J_\varepsilon / \rho_\varepsilon)}. \quad (3.5)$$

Cette expression est bien définie si  $\rho_\varepsilon, J_\varepsilon$  vérifient la condition stricte de flux limité  $\varepsilon |J_\varepsilon| < v_M \rho_\varepsilon$ . Le moment d'ordre 2 de  $\tilde{f}_\varepsilon$  donne l'expression de  $\mathcal{P}_\varepsilon(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon)$  qui nous permet de fermer le système (3.4). Nous obtenons :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x J_\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t J_\varepsilon + \partial_x \left( \rho_\varepsilon \psi \left( \frac{\varepsilon J_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \right) \right) = -J_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.6)$$

où la fonction numérique  $\psi$  est définie par :

$$\forall u \in ] -v_M, v_M[, \quad \psi(u) := \frac{\mathbb{F}''}{\mathbb{F}}(\mathbb{G}^{-1}(u)).$$

Le système (3.6) est défini dans l'ouvert  $\{\rho > 0, \varepsilon |J| < \rho\}$ . Si  $(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon)(t, x)$  est solution de (3.6), la densité de particules  $\tilde{f}_\varepsilon(t, x, v)$  définie par (3.5) est positive et vérifie la contrainte de flux limité. La définition de  $\psi$  donne  $\psi(0) = d$  donc l'asymptotique formelle de (3.6) quand  $\varepsilon$  tend vers 0 est :

$$\partial_t \varrho + \partial_x J = 0, \quad d \partial_x \varrho = -J,$$

ce qui n'est rien d'autre que l'équation de la chaleur (3.3). Le système (3.6) se présente donc comme un système intermédiaire entre l'équation cinétique (3.1) et l'équation de la chaleur (3.3). C'est un système non-linéaire, posé dans un espace ayant une variable de moins que l'équation cinétique (3.1). Notre but est de justifier rigoureusement la convergence des solutions de (3.6) vers la solution de l'équation de la chaleur. Notre résultat principal est le suivant :

**Théorème 3.1.** *Supposons l'hypothèse 3.1 satisfaite, et soit  $\underline{\rho} > 0$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , pour toutes données initiales  $\rho_0, J_0$  vérifiant  $\|\rho_0 - \underline{\rho}\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq \delta$  et  $\|\varepsilon J_0\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq \delta$ , il existe une unique solution  $(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; \underline{\rho} + H^2(\mathbb{R})) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; H^2(\mathbb{R}))$  de (3.6) prenant les valeurs initiales  $(\rho_0, J_0)$  et cette solution vérifie l'estimation (uniforme en  $\varepsilon$ ) :*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} (\|\rho_\varepsilon(t) - \underline{\rho}\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^2 \|J_\varepsilon(t)\|_{H^2(\mathbb{R})}^2) \\ & + \int_0^{+\infty} \|J_\varepsilon(t)\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_x \rho_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt \lesssim \|\rho_0 - \underline{\rho}\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 + \|\varepsilon J_0\|_{H^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

De plus, en notant  $\varrho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; \underline{\rho} + H^2(\mathbb{R}))$  la solution de l'équation de la chaleur (3.3) prenant la donnée initiale  $\rho_0$ , nous avons :

$$\|\rho_\varepsilon - \varrho\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})} \lesssim \varepsilon.$$

Le théorème 3.1 montre que le système (3.6) est consistant avec la limite de diffusion (3.3). Par ailleurs, les estimations du théorème 3.1 montrent que la densité microscopique  $\tilde{f}_\varepsilon$  définie par (3.5) converge également vers la solution  $\varrho$  de l'équation de la chaleur quand  $\varepsilon$  tend vers 0, avec l'estimation :

$$\|\tilde{f}_\varepsilon - \varrho\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times V)} \lesssim \varepsilon.$$

Nous détaillons maintenant les principales étapes de la preuve du théorème 3.1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'existence globale de solutions régulières pour le système (3.6) repose sur un résultat d'Hanouz et Natalini [26] car (3.6) est un système hyperbolique possédant une entropie strictement convexe. Cette entropie est donnée par :

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\rho_\varepsilon, J_\varepsilon) := \int_V \tilde{f}_\varepsilon(v) \ln \tilde{f}_\varepsilon(v) d\mu(v),$$

le minimiseur  $\tilde{f}_\varepsilon$  étant défini par (3.5). De plus, le système (3.6) vérifie la condition de couplage, dite condition de Shizuta-Kawashima, définie dans [26]. Notre principal problème est de montrer que pour le système (3.6) le résultat de [26] peut être rendu indépendant de  $\varepsilon$ . En particulier nous voulons montrer que la condition de petitesse de [26] sur les données initiales ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Nous reprenons donc la méthode de [26] et expliquons pourquoi la structure particulière de (3.6) permet d'obtenir un résultat uniforme en  $\varepsilon$ . Nous commençons par effectuer un changement d'échelle en temps en introduisant  $\tau := \varepsilon t$ . Le système obtenu dans les variables  $(\tau, x)$  possède une entropie strictement convexe  $\mathbb{H}$ , ce qui nous permet de le symétriser en introduisant les variables entropiques  $W := \nabla \mathbb{H}$ . Dans les variables  $W = (W_1, W_2)$ , le nouveau système s'écrit :

$$A_0(W_2) \partial_\tau W + A_1(W_2) \partial_x W = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{G}(W_2) \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $A_0(W_2)$  et  $A_1(W_2)$  sont symétriques,  $A_0(W_2)$  étant définie positive. Le point crucial pour la suite est que ces matrices ne dépendent que de la quantité  $W_2$  qui est

l'inconnue sur laquelle porte l'opérateur de relaxation (qui tend à ramener  $W_2$  vers 0). Pour montrer l'existence de solutions régulières globales à ce dernier système, nous introduisons la fonctionnelle d'énergie :

$$N_\varepsilon(T)^2 := \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|W(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \|W_2(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 d\tau + \varepsilon \int_0^T \|\partial_x W_1(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 d\tau.$$

En adaptant la méthode de [26] afin de tenir compte du paramètre  $\varepsilon$ , nous montrons qu'il existe une fonction croissante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  et de  $T$  telle que la fonctionnelle d'énergie  $N_\varepsilon(T)$  vérifie :

$$N_\varepsilon(T)^2 \leq C(\|W\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R})}) \left\{ N_\varepsilon(0)^2 + N_\varepsilon(T)^3 + N_\varepsilon(T)^4 \right\}.$$

Cette estimation repose tout d'abord sur la procédure usuelle d'estimation d'énergie pour les systèmes symétriques hyperboliques, voir par exemple [7, 44]. Cette procédure nous permet de contrôler les deux premiers termes intervenant dans la définition de  $N_\varepsilon(T)$ . Il nous reste à contrôler  $\sqrt{\varepsilon} \partial_x W_1$  dans la norme  $L^2([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ , ce que nous faisons en exploitant la condition de couplage dite de Shizuta-Kawashima. Le point important est de montrer que toutes les estimations sont indépendantes du paramètre  $\varepsilon$ . Une fois obtenue l'estimation a priori pour la fonctionnelle  $N_\varepsilon$ , l'existence d'une solution régulière globale devient un argument classique. Il suffit ensuite de revenir aux variables originales  $\rho_\varepsilon, J_\varepsilon$  et au temps  $t = \tau/\varepsilon$  pour obtenir la première partie du théorème 3.1. La condition de petitesse sur les données initiales est indépendante de  $\varepsilon$  car  $N_\varepsilon(0)$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ .

Pour estimer l'écart entre  $\rho_\varepsilon$  et la solution de l'équation de la chaleur  $\varrho$ , nous adaptons la méthode de Junca et Rascle [30] qui était introduite pour le système des équations d'Euler isothermes avec friction. Cette méthode, propre à la dimension 1 d'espace, consiste à introduire une fonction de courant  $z_\varepsilon(t, x)$  vérifiant  $\partial_x z_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \varrho$  et  $\partial_t z_\varepsilon = -J_\varepsilon - d \partial_x \varrho$ , puis à effectuer des estimations d'énergie sur  $z_\varepsilon$  en multipliant la seconde équation de (3.6) par  $z_\varepsilon$  et en intégrant par parties convenablement. Le système (3.6) étant d'une structure voisine de celle des équations d'Euler isothermes, la démarche de Junca et Rascle peut être adaptée au système (3.6).

**Remarque 3.1.** *Si nous faisons tendre formellement  $\varepsilon$  vers 0 dans l'estimation du théorème 3.1, nous trouvons l'estimation usuelle pour l'équation de la chaleur :*

$$\sup_{t \geq 0} \|\varrho(t) - \underline{\rho}\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 + \int_0^{+\infty} \|\partial_x \varrho(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 dt \lesssim \|\rho_0 - \underline{\rho}\|_{H^2(\mathbb{R})}^2.$$

*L'estimation du théorème 3.1 est donc également consistante avec l'asymptotique de diffusion.*

Le théorème 3.1 ne justifie l'asymptotique de diffusion pour le système (3.6) que pour des solutions loin du vide. Cependant, l'équation cinétique (3.1) et l'équation de la chaleur (3.3) peuvent être résolues pour des données initiales contenant des zones de vide. Il est donc légitime de vouloir résoudre (3.6) pour des données initiales  $(\rho_0, J_0)$  pouvant contenir des zones de vide et de justifier l'asymptotique de diffusion pour les solutions correspondantes. Dans certains cas particuliers, ce problème a déjà été résolu. Par exemple,

pour le modèle “à deux vitesses” où  $V = [-1, 1]$  et  $\mu = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ , le système (3.6) se réécrit comme l'équation dite du télégraphe :

$$\varepsilon^2 \partial_{tt}^2 \rho_\varepsilon + \partial_t \rho_\varepsilon - \partial_{xx}^2 \rho_\varepsilon = 0.$$

Le comportement asymptotique quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de la solution de cette dernière équation peut s'étudier dans un cadre de solutions faibles, voir Kac [31]. Pour le modèle “maxwellien” où  $V = \mathbb{R}$  et  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité  $\exp(-v^2/2)/\sqrt{2\pi}$ , le système (3.6) est exactement le système des équations d'Euler isothermes avec friction :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x J_\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t J_\varepsilon + \partial_x \left( \frac{\varepsilon^2 J_\varepsilon^2}{\rho_\varepsilon} + \rho_\varepsilon \right) = -J_\varepsilon. \end{cases}$$

L'existence de solutions faibles à ce système contenant des zones de vide relève de l'analyse de LeFloch et Shelukhin [39], le comportement asymptotique s'obtenant en suivant les arguments de Junca et Rascle [30]. Nous nous concentrons ici sur le cas où  $V = [-1, 1]$  et où la mesure  $\mu$  est la mesure de Lebesgue normalisée. Dans ce cas, nous avons  $\mathbb{F}(\beta) = \sinh(\beta)/\beta$ , et  $\mathbb{G}(\beta) = \coth(\beta) - 1/\beta$ . Nous souhaitons montrer l'existence de solutions faibles globales en temps de (3.6) pour des données initiales bornées vérifiant  $\rho_0 \geq 0$  et  $\varepsilon |J_0| \leq \rho_0$ . L'approche usuelle pour construire des solutions faibles globales bornées est d'utiliser l'approximation par viscosité évanescence et la compacité par compensation. Une étape cruciale dans cette procédure est de trouver des zones positivement invariantes pour l'approximation par viscosité évanescence. Nous montrons l'existence de telles zones positivement invariantes et résolvons également la question “voisine” du problème de Riemann pour le système homogène obtenu à partir de (3.6) en oubliant le terme de relaxation. Notre résultat s'énonce ainsi :

**Théorème 3.2.** *Supposons que  $\mu$  soit la mesure de Lebesgue normalisée sur  $V = [-1, 1]$ . Soient  $\rho_\ell, \rho_r > 0$  et soient  $J_\ell, J_r$  satisfaisant  $\varepsilon |J_\ell| < \rho_\ell$ ,  $\varepsilon |J_r| < \rho_r$ . Alors le problème de Riemann :*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x J = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t J + \partial_x \left( \rho \psi \left( \frac{\varepsilon J}{\rho} \right) \right) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec donnée initiale :

$$(\rho, J)|_{t=0} = \begin{cases} (\rho_\ell, J_\ell), & \text{si } x < 0, \\ (\rho_r, J_r), & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

admet une unique solution autosimilaire ne contenant pas de zone de vide. Le problème de Riemann avec donnée initiale :

$$(\rho, J)|_{t=0} = \begin{cases} (0, 0), & \text{si } x < 0, \\ (\rho_r, J_r), & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

possède une unique solution qui consiste en une onde de détente reliant  $(0, 0)$  à  $(\rho_r, J_r)$ . Le cas où l'état droit est le vide et l'état gauche a une densité strictement positive est analogue.

De plus, pour tout  $\underline{\rho} > 0$  et tout  $\nu > 0$ , la région  $\mathcal{S}_{\underline{\rho}}$  définie par (3.8) est positivement invariante pour le système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x J = \nu \partial_{xx}^2 \rho, \\ \varepsilon^2 \partial_t J + \partial_x \left( \rho \psi \left( \frac{\varepsilon J}{\rho} \right) \right) = -J + \nu \partial_{xx}^2 J. \end{cases}$$

Afin de résoudre le problème de Riemann et calculer des zones positivement invariantes, nous devons calculer les champs caractéristiques du système (3.7) pour paramétrer les courbes de détente. Les courbes de choc seront paramétrées en analysant les relations de Rankine-Hugoniot. Les deux vitesses caractéristiques du système (3.7) s'écrivent sous la forme  $\lambda_{1,2}(\varepsilon J/\rho)/\varepsilon$ , où les applications  $\lambda_{1,2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, 1[$  et vérifient :

$$\forall u \in ] - 1, 1[, \quad \lambda_1(u) < u < \lambda_2(u).$$

De plus les deux champs caractéristiques de (3.7) sont vraiment non-linéaires au sens de Lax [38]. En notant  $\Lambda_{1,2}(u)$  des primitives de  $1/(\lambda_{1,2}(u) - u)$ , nous montrons que les applications :

$$Z_{1,2}(\rho, J) := -\ln \rho + \Lambda_{1,2} \left( \frac{\varepsilon J}{\rho} \right),$$

sont des invariants de Riemann pour le système (3.7). Cela nous permet de paramétrer globalement les courbes de détente, et pas uniquement au voisinage de tout point. Les courbes de choc peuvent également être paramétrées globalement en analysant les relations de Rankine-Hugoniot. Nous montrons que tout élément sur la courbe de choc est admissible au sens où il vérifie les inégalités de Lax. Le recollement des courbes de choc et des courbes de détente fournit les courbes de Lax. En suivant la résolution du problème de Riemann pour les équations d'Euler, nous montrons une propriété de stricte monotonie pour ces courbes ce qui nous permet de résoudre globalement le problème de Riemann. Le cas où l'un des états est le vide se résout explicitement à l'aide d'une onde de détente.

Les régions positivement invariantes s'obtiennent en utilisant les invariants de Riemann  $Z_{1,2}$ . Pour  $\underline{\rho} > 0$ , la région  $\mathcal{S}_{\underline{\rho}}$  définie par :

$$\mathcal{S}_{\underline{\rho}} := \{(\rho, J) \in ]0, \underline{\rho}] \times \mathbb{R} / \varepsilon |J| < \rho, \quad Z_i(\rho, J) \geq Z_i(\underline{\rho}, 0) \quad i = 1, 2\}, \quad (3.8)$$

est convexe. En utilisant la théorie de Chueh, Conley et Smoller [16], nous obtenons son invariance pour l'approximation par viscosité évanescence. La région  $\mathcal{S}_{\underline{\rho}}$  est également invariante pour le problème de Riemann de (3.7).

L'existence de régions positivement invariantes pour l'approximation par viscosité évanescence fournit des bornes  $L^\infty$  a priori qui sont indispensables pour montrer la convergence de l'approximation lorsque  $\nu$  tend vers 0. Nous n'avons pas justifié cette convergence, mais le résultat analogue [39] pour les équations d'Euler isothermes est une indication forte que l'approximation par viscosité évanescence devrait aussi pouvoir se justifier pour construire des solutions faibles globales du système (3.6). L'équation à résoudre pour calculer les entropies de (3.7) est toutefois plus complexe que celle pour les équations d'Euler isothermes car le système (3.7) ne possède pas l'invariance galiléenne.

### 3.1.2 Equations d'Euler isothermes avec friction [I]

Nous nous intéressons aux équations d'Euler isothermes avec friction :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \partial_t \mathbf{m} + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{\rho} \right) + a^2 \nabla \rho = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{m}, \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $\rho > 0$  désigne la densité du fluide,  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$  sa quantité de mouvement,  $a > 0$  est la vitesse du son (constante) dans le fluide, et  $\varepsilon \in ]0, 1]$  représente un temps de relaxation. Le système (3.9) est posé dans tout l'espace  $\mathbb{R}^d$ , et nous prescrivons des données initiales  $(\rho_0, \mathbf{m}_0)$ . Dans le cas  $d = 1$ , la convergence des solutions de (3.9) vers la solution de l'équation de la chaleur quand  $\varepsilon$  tend vers 0 a été montrée par Junca et Rascle [30] pour des données initiales loin du vide et arbitrairement grandes dans  $BV(\mathbb{R})$ . Junca et Rascle obtiennent également un taux de convergence vers la solution de l'équation de la chaleur, comme nous l'avons vu au théorème 3.1. Notre but est d'étendre ce résultat de convergence au cas  $d \geq 2$ . Le problème analogue pour les équations d'Euler isentropiques a été résolu par Sideris, Thomases et Wang [61]. Notre résultat principal est le suivant :

**Théorème 3.3.** *Soit  $\rho > 0$  et soit  $k \in \mathbb{N}$  avec  $k > d/2 + 1$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , pour toutes données initiales  $\rho_0, \mathbf{m}_0$  vérifiant  $\|\rho_0 - \underline{\rho}\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$  et  $\|\mathbf{m}_0\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \leq \delta$ , il existe une unique solution  $(\rho_\varepsilon, \mathbf{m}_\varepsilon) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; \underline{\rho} + H^k(\mathbb{R}^d)) \times \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; H^k(\mathbb{R}^d))$  de (3.9) prenant les valeurs initiales  $(\rho_0, \mathbf{m}_0)$  et cette solution vérifie l'estimation (uniforme en  $\varepsilon$ ) :*

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} (\|\rho_\varepsilon(t) - \underline{\rho}\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\mathbf{m}_\varepsilon(t)\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \|\mathbf{m}_\varepsilon(t)\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\ + \varepsilon \int_0^{+\infty} \|\nabla \rho_\varepsilon(t)\|_{H^{k-1}(\mathbb{R}^d)}^2 dt \lesssim \|\rho_0 - \underline{\rho}\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\mathbf{m}_0\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Le théorème 3.3 permet de considérer des données initiales  $(\rho_0, \mathbf{m}_0)$  indépendantes de  $\varepsilon$  et d'étudier le comportement asymptotique des solutions lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Notre résultat suivant explicite le comportement asymptotique de  $\rho_\varepsilon$  :

**Corollaire 3.1.** *Sous les hypothèses du théorème 3.3, si nous définissons l'application  $\varrho_\varepsilon$  par :*

$$\forall (\tau, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \varrho_\varepsilon(\tau, x) := \rho_\varepsilon(\tau/\varepsilon, x),$$

*et si nous notons  $\varrho \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; \underline{\rho} + H^k(\mathbb{R}^d))$  la solution de l'équation de la chaleur :*

$$\partial_\tau \varrho - a^2 \Delta \varrho = 0,$$

*prenant la donnée initiale  $\rho_0$ , alors pour tout  $T > 0$  et tout  $\sigma \in [0, k[$ ,  $\varrho_\varepsilon$  converge vers  $\varrho$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; H_{\text{loc}}^\sigma(\mathbb{R}^d))$ .*

La preuve du théorème 3.3 suit d'assez près les arguments de la preuve du théorème 3.1. Nous montrons tout d'abord que la quantité :

$$\rho \ln \rho + \frac{|\mathbf{m}|^2}{2\rho},$$

est une entropie strictement convexe dissipée par (3.9). Le gradient de cette entropie fournit les variables entropiques dans lesquelles le système (3.9) se réécrit sous la forme d'un système hyperbolique symétrique. Ce nouveau système prend la forme :

$$A_0(V) \partial_t W + \sum_{j=1}^d A_j(V) \partial_{x_j} W = -\frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix},$$

où  $W = (U, V) \in \mathbb{R}^{d+1}$  et  $V \in \mathbb{R}^d$ . Comme dans la preuve du théorème 3.1, le point important est que les matrices  $A_0, \dots, A_d$  intervenant dans le système ci-dessus ne dépendent que de la quantité relaxée  $V$ . Dans les variables entropiques, nous montrons une estimation a priori pour la fonctionnelle d'énergie :

$$N_\varepsilon(T)^2 := \sup_{0 \leq t \leq T} \|W(t)\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \|V(t)\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}^2 dt + \varepsilon \int_0^T \|\nabla U(t)\|_{H^{k-1}(\mathbb{R}^d)}^2 dt.$$

Cette estimation a priori, analogue à celle montrée dans le cadre du théorème 3.1, assure l'existence globale de solutions régulières pour des données initiales petites. La condition de petitesse est indépendante de  $\varepsilon$  car  $N_\varepsilon(0)$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ . L'estimation a priori s'obtient à nouveau en combinant les estimations usuelles pour les systèmes hyperboliques symétriques et la condition dite de Shizuta-Kawashima qui permet de contrôler le terme  $\sqrt{\varepsilon} \nabla U$  dans  $L^2([0, T]; H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$ .

Pour montrer le corollaire 3.1, nous procédons en trois temps. Dans un premier temps, les bornes uniformes du théorème 3.3 assurent que  $\partial_\tau \varrho_\varepsilon - a^2 \Delta \varrho_\varepsilon$  converge vers 0 dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ . Dans un second temps, nous montrons que  $\varrho_\varepsilon$  converge vers  $\varrho$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ . Nous utilisons pour cela l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur dans l'espace  $\mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ . Un résultat de compacité permet de conclure que la convergence de  $\varrho_\varepsilon$  vers  $\varrho$  a lieu dans tous les espaces  $\mathcal{C}^0([0, T]; H_{\text{loc}}^\sigma(\mathbb{R}^d))$ ,  $T > 0$ ,  $\sigma < k$ , et pas uniquement au sens des distributions. Il ne semble a priori pas immédiat de montrer un taux de convergence de  $\varrho_\varepsilon$  vers  $\varrho$ , comme cela était possible en dimension  $d = 1$ .

**Remarque 3.2.** *Le choix des variables dans lesquelles nous obtenons une écriture symétrique des équations joue un rôle central. En effet, nous aurions pu directement travailler dans les variables  $(\rho, \mathbf{m})$  et symétriser le système (3.9) à la main. Mais dans ce cas, nous n'aurions pas trouvé une écriture comme ci-dessus où les matrices ne dépendent que de la quantité relaxée. Le choix des variables entropiques est donc déterminant.*

### 3.1.3 Relaxation en pression des équations d'Euler [J]

Les schémas de type volumes finis pour la résolution numérique des systèmes de lois de conservation sont basés sur l'approximation des flux aux interfaces de chaque "cellule de contrôle". Pour définir les flux aux interfaces, la méthode de Godunov s'appuie sur la résolution du problème de Riemann entre les états de part et d'autre de l'interface. Cette méthode, quoique précise, est fort coûteuse numériquement car elle nécessite de résoudre des systèmes d'équations non-linéaires. Un grand nombre de méthodes numériques se basent donc sur une résolution "approchée" du problème de Riemann afin de définir les flux numériques aux interfaces. La méthode de Roe en est un exemple. Une autre

classe de solveurs de Riemann approchés provient des méthodes dites de relaxation. Ces méthodes consistent à construire un système “augmenté” avec un opérateur de relaxation, de sorte que dans la limite où le coefficient de relaxation tend vers l’infini les solutions du système augmenté convergent vers la solution du système original. Cette classe de méthodes remonte à Jin et Xin [29] qui, pour approcher le système de lois de conservation non-linéaire :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0,$$

proposent de résoudre le système semi-linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + a^2 \partial_x v = \frac{f(u) - v}{\varepsilon}, \end{cases}$$

le paramètre  $a$  étant ajusté en fonction des données. Le système augmenté possède ici deux fois plus d’inconnues que le problème original. Par ailleurs, le système augmenté permet de résoudre numériquement le système non-linéaire de départ en mettant en place une stratégie de type splitting. La méthode numérique se divise en deux pas : le premier pas résout uniquement les termes convectifs (ces termes sont extrêmement simples ici car la partie d’ordre 1 du système augmenté est linéaire à coefficients constants), et le second pas résout les termes de relaxation. Plus précisément, ce second pas résout les équations différentielles ordinaires :

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{v} = \frac{f(u) - v}{\varepsilon},$$

ce qui se fait à l’aide de formules explicites. Le régime asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$  correspond à “projeter” sur la variété d’équilibre  $\{v = f(u)\}$ . La méthode de Jin et Xin est toutefois assez diffusive.

Nous allons détailler maintenant le système dit de “relaxation en pression” pour approcher les équations d’Euler. Ce système augmenté, introduit par Chalons et Coquel [14], permet de construire un solveur de Riemann approché dans l’esprit de la méthode de Jin et Xin. Ce nouveau solveur, facile à implémenter numériquement y compris pour des lois d’état complexes, produit une diffusion numérique moins importante que le solveur de Jin et Xin. Nous justifierons ensuite la convergence des solutions du système augmenté vers la solution des équations d’Euler lorsque le paramètre de relaxation tend vers l’infini.

Nous sommes intéressés par l’approximation des solutions des équations d’Euler :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p)u) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

où nous gardons les mêmes notations qu’au paragraphe 2.4. En particulier,  $E = e + u^2/2$  désigne l’énergie totale spécifique et  $e$  est l’énergie interne spécifique. L’entropie spécifique  $s$  est définie par la loi de la thermodynamique  $de = -p dv + \theta ds$ ,  $v = 1/\rho$  désignant le volume spécifique. Nous supposons que le fluide est muni d’une loi d’état “complète”, c’est-à-dire que l’énergie interne  $e$  est une fonction du volume spécifique  $v$  et de l’entropie  $s$ , et que cette loi d’état vérifie les propriétés usuelles de la thermodynamique :

**Hypothèse 3.2** (Inégalités de Bethe-Weyl et Smith). *La fonction  $e(v, S)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  et vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} p := -\frac{\partial e}{\partial v} > 0, \quad \theta := \frac{\partial e}{\partial s} > 0, \quad \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 e}{\partial v \partial s} < 0, \\ \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} > \left( \frac{\partial^2 e}{\partial v \partial s} \right)^2, \quad \frac{\partial^3 e}{\partial v^3} < 0, \quad -\frac{\partial^2 e}{\partial v \partial s} < \frac{2\theta}{p} \frac{\partial^2 e}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse 3.2, le système (3.10) est strictement hyperbolique, les deux champs caractéristiques extrêmes sont vraiment non-linéaires et le champ caractéristique intermédiaire est linéairement dégénéré. De plus, la quantité  $-\rho s$  est une entropie strictement convexe et les solutions faibles physiquement admissibles de (3.10) doivent vérifier l'inégalité d'entropie :

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s u) \geq 0. \quad (3.11)$$

Le système de relaxation en pression s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s u) = \frac{1}{\varepsilon} \rho (v - \tau)^2 (a^2 + \partial_v p(\tau, s)), \\ \partial_t(\rho \tau) + \partial_x(\rho \tau u) = \frac{1}{\varepsilon} \rho (v - \tau) (\theta(\tau, s) + (\tau - v) \partial_s p(\tau, s)), \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $a > 0$  est un paramètre ajusté en fonction des données, et où la pression relaxée  $\pi$  est définie de la façon suivante :

$$\pi := p(\tau, s) + a^2 (\tau - v). \quad (3.13)$$

Dans (3.12) et (3.13), les fonctions  $\theta, p, \partial_v p, \partial_s p$  sont toutes évaluées en  $(\tau, s)$  et non pas en  $(v = 1/\rho, s)$ . Une quantité importante pour la suite est l'énergie totale relaxée  $\Sigma$  définie par :

$$\Sigma := \frac{u^2}{2} + e(\tau, s) + \frac{\pi^2 - p(\tau, s)^2}{2a^2}. \quad (3.14)$$

Sur l'ensemble  $\{\tau = v\}$  que nous appellerons la variété d'équilibre, la pression relaxée  $\pi$ , resp. l'énergie relaxée  $\Sigma$ , coïncide avec  $p(v, s)$ , resp.  $E$ . Par ailleurs, les solutions régulières de (3.12) vérifient la loi de conservation :

$$\partial_t(\rho \Sigma) + \partial_x((\rho \Sigma + \pi) u) = 0, \quad (3.15)$$

donc formellement le système (3.12) approche les équations d'Euler (3.10) lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Le système (3.12) est compatible avec l'inégalité d'entropie (3.11) sous la condition  $a^2 + \partial_v p(\tau, s) \geq 0$ . Cette condition, dite condition sous-caractéristique, joue un rôle central dans nos résultats de convergence.

Le solveur de Riemann approché pour (3.10) introduit par Chalons et Coquel [14] consiste à résoudre le problème de Riemann pour le système augmenté (3.12) homogène (c'est-à-dire sans termes de relaxation) puis à projeter sur la variété d'équilibre  $\{\tau = v\}$ . Cette procédure s'appuie sur la résolution explicite du problème de Riemann pour

(3.12), ce qui est possible car tous les champs caractéristiques de (3.12) sont linéairement dégénérés. Les courbes de discontinuité de contact peuvent se paramétrer à la main et les états intermédiaires dans le problème de Riemann sont donnés par des formules explicites. L'étape de projection sur la variété d'équilibre s'appuie sur le fait que la limite (formelle) du système (3.12) quand le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0 est le système (3.10) avec l'inégalité d'entropie (3.11). Nous précisons rigoureusement cette convergence pour deux types de solutions. Notre premier résultat concerne les solutions régulières locales en temps et périodiques en espace :

**Théorème 3.4.** *Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Supposons l'hypothèse 3.2 satisfaite et considérons des données initiales  $(\rho_0, u_0, s_0, \tau_0) \in H^{k+2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  prenant ses valeurs dans un compact de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2 \times ]0, +\infty[$  et vérifiant  $\rho_0 \tau_0 = 1$ . Alors il existe une constante  $a > 0$  et il existe un temps  $T > 0$  tels que :*

- *Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , le système (3.12) admet une unique solution  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, s_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  prenant les valeurs initiales  $(\rho_0, u_0, s_0, \tau_0)$ .*
- *Les équations d'Euler (3.10) possèdent une unique solution  $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  prenant les valeurs initiales  $(\rho_0, u_0, s_0)$ , et  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, s_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  converge vers  $(\rho, u, s, 1/\rho)$  dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; H^k(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0.*

Il est possible d'obtenir un résultat analogue dans l'espace entier mais l'énoncé du théorème 3.4 est plus simple dans le cas périodique. Il n'y a pas ici de phénomène de couche limite en temps car les données initiales sont bien-préparées. Autrement dit, le terme de relaxation dans (3.12) est nul à  $t = 0$  car  $v_0 = \tau_0$ . Dans le cas isentropique, il est possible de construire un système augmenté similaire à (3.12) pour lequel nous pouvons traiter des données initiales mal-préparées.

La preuve du théorème 3.4 suit l'analyse de Yong [62] et repose sur un développement asymptotique de  $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, s_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$ . Ce développement asymptotique s'écrit :

$$(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, s_\varepsilon, \tau_\varepsilon)(t, x) = \sum_{j=0}^J \varepsilon^j (U_j(t, x) + V_j(t/\varepsilon, x)).$$

Le premier terme  $U_0$  du développement n'est rien d'autre que la solution  $(\rho, u, s, 1/\rho)$  des équations d'Euler (3.10), et les termes suivants s'obtiennent en identifiant formellement les puissances de  $\varepsilon$  dans (3.12). Nous vérifions que pour un paramètre  $a$  vérifiant la condition sous-caractéristique, le système (3.12) satisfait les hypothèses de dissipativité de [62] ce qui fournit des bornes uniformes en  $\varepsilon$  pour les différents termes du développement asymptotique. Ces bornes assurent la convergence énoncée au théorème 3.4.

Notre second résultat concerne l'approximation des ondes de choc pour les équations d'Euler (3.10). Nous considérons une solution constante par morceaux de (3.10) :

$$(\rho, u, s) = \begin{cases} (\rho_\ell, u_\ell, s_\ell), & \text{si } x < \sigma t, \\ (\rho_r, u_r, s_r), & \text{si } x > \sigma t, \end{cases} \quad (3.16)$$

cette solution vérifiant l'inégalité d'entropie (3.11). Sous l'hypothèse 3.2, cette dernière inégalité est équivalente aux inégalités de Lax [38]. Notre résultat est le suivant :

**Théorème 3.5.** *Si l'hypothèse 3.2 est satisfaite et si (3.16) vérifie l'inégalité d'entropie (3.11), alors il existe une constante  $a > 0$  et il existe une onde progressive  $(\rho, u, s, \tau)((x - \sigma t)/\varepsilon)$  appelée profil de choc, solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de (3.12) et telle que :*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\rho, u, s, \tau)(\xi) = (\rho_\ell, u_\ell, s_\ell, 1/\rho_\ell), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\rho, u, s, \tau)(\xi) = (\rho_r, u_r, s_r, 1/\rho_r).$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 l'onde progressive  $(\rho, u, s, \tau)((x - \sigma t)/\varepsilon)$  converge bien vers l'onde de choc (3.16). Nous justifions donc bien l'approximation de (3.16) par des solutions de (3.12). Les profils de choc de petite amplitude relèvent de l'analyse de Yong et Zumbrun [63]. L'intérêt du théorème 3.5 est qu'il ne fait, comme le théorème 3.4, aucune hypothèse de petitesse sur les données. Nous détaillons les éléments principaux de la preuve du théorème 3.5. Après quelques simplifications, nous nous ramenons à montrer l'existence d'une orbite hétérocline pour un système d'équations différentielles :

$$\dot{X} = F(X), \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} X(\xi) = X_\ell, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} X(\xi) = X_r,$$

où  $F$  est un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ouvert  $\mathcal{O}$  du plan  $\mathbb{R}^2$ . La conservation de l'énergie (3.15) permet de trouver une intégrale première  $H$  pour ce système d'équations différentielles. La matrice jacobienne de  $F$  au point  $X_\ell$  possède une valeur propre nulle et une valeur propre strictement positive. Le théorème de la variété instable permet alors de construire une solution de l'équation différentielle définie sur un intervalle de la forme  $] -\infty, \xi[$  et convergeant exponentiellement vite vers  $X_\ell$  lorsque  $\xi$  tend vers  $-\infty$ . En ajustant convenablement le paramètre  $a$ , nous pouvons construire un ensemble compact  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Pour tout  $\xi$  dans un voisinage de  $-\infty$   $X(\xi)$  appartient à l'intérieur de  $\mathcal{K}$ .
- Le bord de  $\mathcal{K}$  est constitué de points qui sont soit des solutions stationnaires de l'équation différentielle, soit des points où l'intégrale première  $H$  diffère de  $H(X_\ell)$ .

Par conséquent, la solution  $X(\xi)$  ne peut toucher le bord de  $\mathcal{K}$ . Elle est donc définie sur tout  $\mathbb{R}$  et prend ses valeurs dans  $\mathcal{K}$ . A l'aide de l'intégrale première  $H$  il est aisé de montrer la convergence de  $X(\xi)$  vers  $X_r$  lorsque  $\xi$  tend vers  $+\infty$ , ce qui conclut l'analyse.

Les théorèmes 3.4 et 3.5 laissent ouverte la justification de la convergence des solutions de (3.12) quand  $\varepsilon$  tend vers 0 pour des données initiales présentant des discontinuités. Nous examinons ce problème du point de vue numérique en construisant pour tout  $\varepsilon > 0$  un schéma numérique résolvant (3.12). Ce schéma est basé sur une procédure de type splitting en deux étapes, similaire à la procédure de Jin et Xin. Dans une première étape nous résolvons les termes convectifs de (3.12) au moyen du schéma de Godunov. Cela est possible car la résolution du problème de Riemann homogène pour (3.12) est explicite. Nous résolvons dans une seconde étape les termes de relaxation de (3.12). Dans le cas général d'une loi d'état vérifiant l'hypothèse 3.2 cela nécessite un solveur d'équations différentielles raides, mais dans le cas de la loi d'état des gaz parfaits polytropiques l'équation différentielle peut se résoudre à la main.

Nous montrons à la figure 3.1 les résultats obtenus pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda = 1/\varepsilon$  dans le cas test du tube à choc de Sod. Le schéma numérique pour

$\lambda = +\infty$  correspond au schéma de Chalons et Coquel [14]. Les simulations sont réalisées avec une grille uniforme de 300 points. Lorsque le paramètre  $\lambda$  devient grand, la solution numérique obtenue converge vers une solution approchée du problème de Riemann pour (3.10). L'approximation s'améliore si nous augmentons le nombre de points sur la grille. Le choix de la loi d'état des gaz parfaits polytropiques permet de comparer les solutions numériques avec la solution exacte du problème de Riemann. Les résultats numériques sont similaires dans le cas de solutions du problème de Riemann présentant deux ondes de choc ou deux ondes de détente.

En conclusion, le solveur de Riemann approché construit à partir du système augmenté (3.12) donne des résultats comparables au schéma de Godunov mais avec un coût en temps de calcul bien moindre.

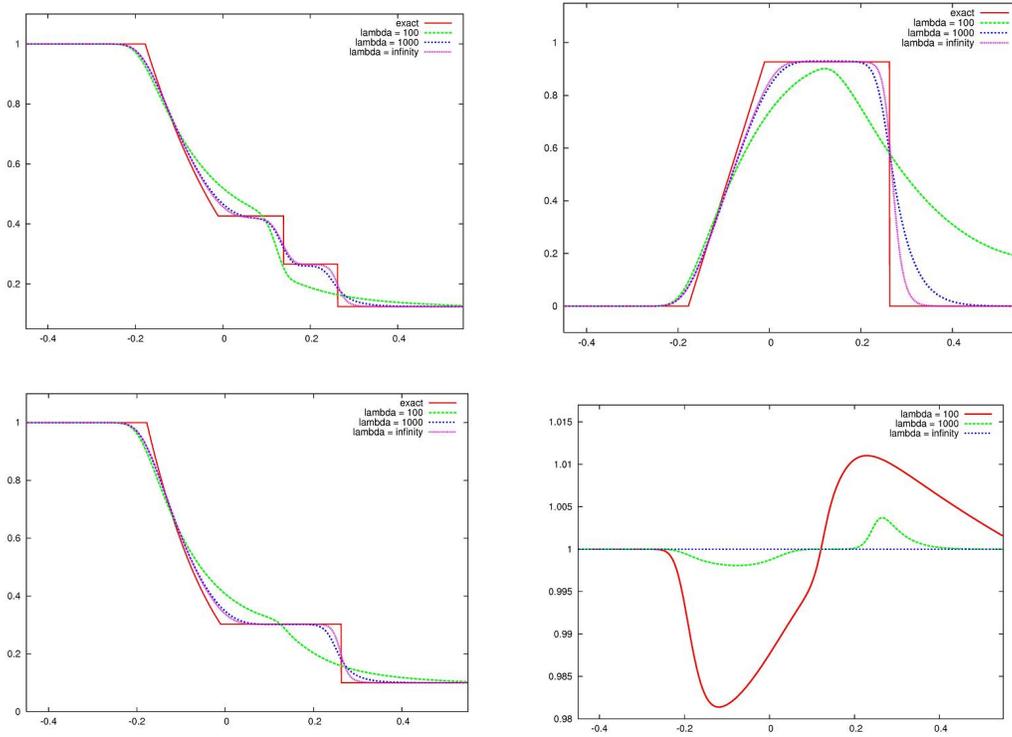


FIG. 3.1 – Tube à choc de Sod pour différentes valeurs de  $\lambda = 1/\varepsilon$  :  $\rho$  (en haut à gauche),  $u$  (en haut à droite),  $p$  (en bas à gauche) et  $\rho\tau$  (en bas à droite).

## 3.2 Etude d'un modèle d'hydrodynamique radiative

### 3.2.1 Existence et stabilité asymptotique de profils de choc [K] [L]

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à un modèle d'hydrodynamique radiative décrivant l'interaction entre un fluide compressible et des photons. Les interactions

décrivent ici l'émission et l'absorption de photons par le fluide, l'émission se faisant suivant la loi de Stefan-Boltzmann. En une dimension d'espace, l'évolution du fluide et de la densité d'énergie des photons est donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x((\rho E + p)u) = n - \theta^4, \\ -\partial_{xx}^2 n = \theta^4 - n, \end{cases} \quad (3.17)$$

où nous gardons les mêmes notations que dans les paragraphes précédents pour les variables décrivant le fluide,  $n$  désignant la densité d'énergie des photons. Pour simplifier, nous avons écrit le système (3.17) dans des variables adimensionnées, les constantes étant prises égales à 1. Le système (3.17) traduit uniquement des échanges d'énergie entre le fluide et les photons. Les modèles plus sophistiqués tiennent également compte des échanges d'impulsion mais nous nous en tiendrons ici au modèle (3.17). Pour fermer (3.17), nous supposons que le fluide suit la loi d'état des gaz parfaits polytropiques :

$$p = R \rho \theta = (\gamma - 1) \rho e,$$

avec  $R > 0$  et  $\gamma > 1$  des constantes caractérisant le fluide. Nous choisirons les quantités  $\rho, u, \theta$  comme inconnues de (3.17). La densité d'énergie des photons est donnée par la formule :

$$n(t, x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-|x - y|) \theta(t, y)^4 dy.$$

Il est aussi possible d'exprimer  $n$  en fonction de  $\theta^4$  au moyen d'un multiplicateur de Fourier, l'équation elliptique vérifiée par  $n$  étant linéaire à coefficients constants.

Le système (3.17) est un système hyperbolique-elliptique de lois de conservation. Kawashima, Nikkuni et Nishibata [33] ont montré que le couplage avec les radiations induit une dissipation suffisamment forte pour permettre l'existence globale de solutions régulières :

**Théorème 3.6** (Kawashima, Nikkuni, Nishibata [33]). *Soient  $\underline{\rho} > 0, \underline{\theta} > 0$ , et considérons des données initiales pour (3.17) de la forme  $(\rho_0, u_0, \theta_0) = (\underline{\rho} + \tilde{\rho}_0, u_0, \underline{\theta} + \tilde{\theta}_0)$  avec  $(\tilde{\rho}_0, u_0, \tilde{\theta}_0) \in H^s(\mathbb{R})$ ,  $s \geq 2$ . Il existe une constante  $\delta > 0$  telle que si la condition :*

$$\|\tilde{\rho}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\tilde{\theta}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \delta,$$

*est satisfaite, alors il existe une unique solution  $(\rho, u, \theta)$  de (3.17) avec  $(\rho - \underline{\rho}, u, \theta - \underline{\theta}) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; H^s(\mathbb{R}))$  et prenant les données initiales  $(\rho_0, u_0, \theta_0)$ . De plus, cette solution vérifie :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|\rho(t) - \underline{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\theta(t) - \underline{\theta}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) = 0.$$

Notre but est d'étudier l'influence du couplage avec les radiations sur la structure et la stabilité des ondes de choc. Nous considérons donc une onde de choc solution des équations d'Euler (3.10) :

$$(\rho, u, \theta) = \begin{cases} (\rho_\ell, u_\ell, \theta_\ell), & \text{si } x < \sigma t, \\ (\rho_r, u_r, \theta_r), & \text{si } x > \sigma t. \end{cases} \quad (3.18)$$

En particulier nous supposons que (3.18) vérifie l'inégalité d'entropie (3.11) comme au paragraphe précédent. Notre premier résultat établit l'existence d'ondes progressives régulières solutions de (3.17) reliant les états  $(\rho_\ell, u_\ell, \theta_\ell)$  et  $(\rho_r, u_r, \theta_r)$  :

**Théorème 3.7.** *Supposons que la constante  $\gamma$  vérifie  $1 < \gamma < (\sqrt{7} + 1)/(\sqrt{7} - 1)$ , et soit  $(\rho_\ell, u_\ell, \theta_\ell)$  un état fixé avec  $\rho_\ell > 0$ ,  $\theta_\ell > 0$ . Alors il existe une constante  $\delta > 0$  telle que pour tout état  $(\rho_r, u_r, \theta_r)$  vérifiant :*

- $|\rho_r - \rho_\ell| + |u_r - u_\ell| + |\theta_r - \theta_\ell| \leq \delta$ ,
- la fonction (3.18) est une onde de choc pour les équations d'Euler (3.10),

*il existe une onde progressive  $(\rho, u, \theta)(x - \sigma t)$  solution de classe  $\mathcal{C}^2$  de (3.17) et vérifiant :*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\rho, u, \theta)(\xi) = (\rho_\ell, u_\ell, \theta_\ell), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\rho, u, \theta)(\xi) = (\rho_r, u_r, \theta_r).$$

*Les fonctions  $\rho, u, \theta$  sont monotones sur  $\mathbb{R}$ . Une telle onde progressive sera appelée un profil de choc.*

La condition  $1 < \gamma < (\sqrt{7} + 1)/(\sqrt{7} - 1)$  n'est probablement pas nécessaire mais uniquement suffisante pour obtenir le résultat du théorème 3.7. Cette condition permet toutefois de simplifier beaucoup une des étapes de la preuve. De plus cette condition autorise les valeurs usuelles  $\gamma \in ]1, 2]$  car  $(\sqrt{7} + 1)/(\sqrt{7} - 1) \simeq 2,215$ .

Le théorème 3.7 est l'analogue pour le système (3.17) du résultat de Kawashima et Nishibata [35] qui traitait le système simplifié :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(u^2/2) = q - u, \\ -\partial_{xx}^2 q = u - q. \end{cases} \quad (3.19)$$

Pour le système (3.19), Kawashima et Nishibata montrent l'existence de profils de choc réguliers de petite amplitude, et montrent également que les ondes de choc de grande amplitude admettent des profils qui ne sont que réguliers par morceaux. Kawashima et Nishibata montrent également que la régularité du profil augmente quand l'amplitude du choc diminue. Nous obtenons un résultat analogue pour le système (3.17) :

**Théorème 3.8.** *Supposons que la constante  $\gamma$  vérifie  $1 < \gamma < (\sqrt{7} + 1)/(\sqrt{7} - 1)$ , et soit  $(\rho_\ell, u_\ell, \theta_\ell)$  un état fixé avec  $\rho_\ell > 0$ ,  $\theta_\ell > 0$ . Alors il existe une suite décroissante de nombres strictement positifs  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout entier  $n$  et pour tout état  $(\rho_r, u_r, \theta_r)$  vérifiant :*

- $|\rho_r - \rho_\ell| + |u_r - u_\ell| + |\theta_r - \theta_\ell| \leq \delta_n$ ,
- la fonction (3.18) est une onde de choc pour les équations d'Euler (3.10),

*il existe une onde progressive  $(\rho, u, \theta)(x - \sigma t)$  solution de classe  $\mathcal{C}^{n+2}$  de (3.17) vérifiant :*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\rho, u, \theta)(\xi) = (\rho_\ell, u_\ell, \theta_\ell), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\rho, u, \theta)(\xi) = (\rho_r, u_r, \theta_r).$$

Mentionnons qu'indépendamment de notre travail, Lattanzio, Mascia et Serre [37] ont obtenu des résultats comparables aux théorèmes 3.7 et 3.8 pour des systèmes hyperboliques-elliptiques généraux avec un couplage linéaire. Le système (3.17) ne rentre donc pas dans la classe des systèmes étudiée dans [37] mais en est toutefois très proche.

Nous détaillons maintenant la preuve des théorèmes 3.7 et 3.8. Après quelques simplifications, le théorème 3.7 revient à montrer l'existence d'une orbite hétérocline pour un système de deux équations différentielles dans le plan. Plus précisément, nous devons montrer l'existence d'une solution du système :

$$\begin{cases} \dot{v} = w, \\ v \dot{w} = f(v, w), \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  vérifiant  $f(a, 0) = f(-a, 0) = 0$  pour un certain  $a > 0$ . Le paramètre  $a$  mesure l'amplitude du choc (3.18). La fonction  $f$  se calcule explicitement à partir des états amont et aval du choc (3.18). Nous devons construire une solution d'une solution  $(v, w)$  de (3.20) définie sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (v, w)(\xi) = (a, 0), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (v, w)(\xi) = (-a, 0).$$

La fonction  $v$  doit donc s'annuler au moins en un point, de sorte que (3.20) ne s'écrit pas comme un système d'équations différentielles ordinaires. Pour contourner cette difficulté, nous introduisons le système auxiliaire :

$$\begin{cases} \dot{V} = V W, \\ \dot{W} = f(V, W), \end{cases} \quad (3.21)$$

obtenu formellement à partir de (3.20) en multipliant le champ de vecteurs par  $v$ . Pour le système (3.21), nous montrons l'existence de deux solutions  $(V_b, W_b)$  et  $(V_\sharp, W_\sharp)$  définies sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant les conditions asymptotiques :

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow -\infty} (V_b, W_b)(\eta) &= (a, 0), & \lim_{\eta \rightarrow +\infty} (V_b, W_b)(\eta) &= (0, w_0), \\ \lim_{\eta \rightarrow -\infty} (V_\sharp, W_\sharp)(\eta) &= (-a, 0), & \lim_{\eta \rightarrow +\infty} (V_\sharp, W_\sharp)(\eta) &= (0, w_0), \end{aligned}$$

où  $w_0$  est une constante se calculant à partir des données. La construction de  $(V_b, W_b)$  et  $(V_\sharp, W_\sharp)$  ne peut se faire que dans le cas où l'onde de choc (3.18) est d'amplitude suffisamment petite. A l'aide des solutions  $(V_b, W_b)$  et  $(V_\sharp, W_\sharp)$  de (3.21), nous construisons un  $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphisme croissant  $\Xi_b$  de  $\mathbb{R}$  sur  $] -\infty, 0[$  et un  $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphisme décroissant  $\Xi_\sharp$  de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, +\infty[$ , telle que la fonction :

$$(v, w)(\xi) := \begin{cases} (V_b, W_b) \circ \Xi_b^{-1}(\xi), & \text{si } \xi < 0, \\ (0, w_0), & \text{si } \xi = 0, \\ (V_\sharp, W_\sharp) \circ \Xi_\sharp^{-1}(\xi), & \text{si } \xi > 0, \end{cases}$$

est une solution du système original (3.20) sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Cette fonction est par ailleurs continue sur  $\mathbb{R}$ . Pour une onde de choc (3.18) d'amplitude suffisamment petite, nous montrons que  $w$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui nous permet de construire une onde progressive  $(\rho, u, \theta)$  solution de (3.17) de classe  $\mathcal{C}^2$  et d'obtenir le théorème 3.7.

Nous détaillons maintenant la méthode pour montrer la régularité supplémentaire du profil lorsque l'amplitude de l'onde de choc (3.18) est suffisamment petite. Pour établir ce résultat, nous montrons par récurrence sur  $n$  que si l'amplitude du choc est assez petite, le profil de choc construit précédemment vérifie  $v \in \mathcal{C}^{n+2}(\mathbb{R})$ ,  $w \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$  et  $w$  admet un développement asymptotique en  $\xi = 0$  de la forme :

$$w(\xi) = w_0 + w_1 v(\xi) + \cdots + w_{n+1} v(\xi)^{n+1} + o(v(\xi)^{n+1}),$$

où les nombres  $w_k$  se calculent de manière récursive. Pour montrer que  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+3}$  en supposant l'hypothèse de récurrence vraie au rang  $n$ , nous commençons par écrire les fonctions  $W_b$  et  $W_\#$  sous la forme :

$$W_b = w_0 + w_1 V_b + \cdots + w_n V_b^n + W_{b,n+1} V_b^{n+1}, \quad W_\# = w_0 + w_1 V_\# + \cdots + w_n V_\#^n + W_{\#,n+1} V_\#^{n+1}.$$

En analysant le système d'équations différentielles vérifié par  $(V_b, W_{b,n+1})$  et  $(V_\#, W_{\#,n+1})$ , nous obtenons le comportement de ces deux orbites au voisinage de  $\eta = +\infty$ . Il suffit alors de retranscrire ce comportement sur les fonctions  $(v, w)$  obtenues après composition avec les difféomorphismes  $\Xi_b^{-1}$  et  $\Xi_\#^{-1}$ . L'analyse, fastidieuse mais relativement élémentaire, permet de montrer que si l'amplitude du choc est suffisamment petite alors  $w$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+2}$  et  $v$  de classe  $\mathcal{C}^{n+3}$ . Nous pouvons de plus montrer un développement asymptotique de  $w$  en  $\xi = 0$  au rang suivant :

$$w(\xi) = w_0 + w_1 v(\xi) + \cdots + w_{n+2} v(\xi)^{n+2} + o(v(\xi)^{n+2}),$$

ce qui conclut la récurrence.

Nous allons maintenant étudier la stabilité des profils de choc vis-à-vis de petites perturbations. Le théorème 3.6 assure la stabilité asymptotique des états constants vis-à-vis de petites perturbations dans l'espace  $H^2(\mathbb{R})$  et nous souhaitons étendre ce résultat aux profils de choc. Remarquons tout de suite que contrairement aux états constants, les profils de choc ne sont pas invariants par translation. Pour des perturbations générales, les profils de choc ne peuvent donc être au mieux qu'orbitalement stables. Pour simplifier l'analyse nous nous limiterons à des perturbations "de masse nulle", c'est-à-dire que les perturbations des variables conservatives seront d'intégrale nulle sur  $\mathbb{R}$ . Nous montrerons notre résultat de stabilité dans les coordonnées lagrangiennes car les estimations seront plus simples à établir dans ce cadre (l'analyse d'existence est plus simple dans les coordonnées eulériennes car l'équation elliptique pour la densité des radiations  $n$  se résout explicitement).

Dans les variables lagrangiennes, le système (3.17) se réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_y u = 0, \\ \partial_t u + \partial_y p = 0, \\ \partial_t E + \partial_y(pu) = -\partial_y q, \\ -\partial_y \left( \frac{\partial_y q}{v} \right) + v q = \partial_y(\theta^4), \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $y$  est la nouvelle variable "d'espace",  $v = 1/\rho$  est le volume spécifique et  $q$  désigne le flux d'énergie radiative. L'analogue de la quantité  $q$  pour le système (3.17) serait  $-\partial_x n$ .

L'existence de profils de choc réguliers pour le système (3.22) s'obtient directement en réécrivant les profils de choc pour (3.17) dans les coordonnées lagrangiennes. Nous nous donnons donc un profil de choc  $(V, U, \Theta)(y - \sigma t)$  solution de (3.22) reliant des états  $(v_\ell, u_\ell, \theta_\ell)$  et  $(v_r, u_r, \theta_r)$ , et nous considérons des données initiales  $(v_0, u_0, \theta_0)$  pour (3.22) vérifiant :

$$v_0 = V + \Phi'_0, \quad u_0 = U + \Psi'_0, \quad \theta_0 = \Theta + \frac{\gamma - 1}{2R} (u_0^2 - U^2) + \frac{\gamma - 1}{R} \Upsilon'_0. \quad (3.23)$$

L'écriture (3.23) exprime le fait que les perturbations initiales des variables conservatives  $(v, u, E)$  sont les dérivées de fonctions  $(\Phi_0, \Psi_0, \Upsilon_0)$ . L'intégrale sur  $\mathbb{R}$  des perturbations est donc formellement égale à 0. Notre résultat de stabilité asymptotique est le suivant :

**Théorème 3.9.** *Supposons que  $\gamma$  vérifie  $1 < \gamma < (\sqrt{7} + 1)/(\sqrt{7} - 1)$ , et soit  $(v_\ell, u_\ell, \theta_\ell)$  un état fixé avec  $v_\ell > 0$ ,  $\theta_\ell > 0$ . Alors il existe une constante  $\delta > 0$  telle que pour tout profil de choc  $(V, U, \Theta)(y - \sigma t)$  solution de (3.22) reliant des états  $(v_\ell, u_\ell, \theta_\ell)$  et  $(v_r, u_r, \theta_r)$  avec :*

$$|\rho_r - \rho_\ell| + |u_r - u_\ell| + |\theta_r - \theta_\ell| \leq \delta,$$

et pour toutes données initiales  $(v_0, u_0, \theta_0)$  de la forme (3.23) avec  $(\Phi_0, \Psi_0, \Upsilon_0) \in H^3(\mathbb{R})$  et :

$$\|\Phi_0\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|\Psi_0\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|\Upsilon_0\|_{H^3(\mathbb{R})} \leq \delta,$$

alors le système (3.22) admet une unique solution  $(v, u, \theta)$  vérifiant :

$$t \mapsto (v(t) - V(\cdot - \sigma t), u(t) - U(\cdot - \sigma t), \theta(t) - \Theta(\cdot - \sigma t)) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; H^2(\mathbb{R})).$$

De plus cette solution satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}} (|v(t, y) - V(y - \sigma t)| + |u(t, y) - U(y - \sigma t)| + |\theta(t, y) - \Theta(y - \sigma t)|) = 0.$$

La preuve du théorème 3.9 utilise la méthode de Kawashima et Matsumura [34] qui consiste à montrer des estimations d'énergie pour le système (3.22) intégré par rapport à la variable  $y$ . En effet la forme du système (3.22) et des données initiales (3.23) permet de chercher les perturbations du profil comme des dérivées par rapport à  $y$  de nouvelles inconnues  $(\Phi, \Psi, \Upsilon)$ . Les propriétés de monotonie du profil de choc induisent une dissipation sur le système vérifié par les inconnues  $(\Phi, \Psi, \Upsilon)$ . Cette dissipation est toutefois plus faible dans notre étude que dans le cas des équations de Navier-Stokes traité par Kawashima et Matsumura [34]. En particulier, nous devons considérer des données initiales  $(\Phi_0, \Psi_0, \Upsilon_0)$  dans  $H^3(\mathbb{R})$  car nous devons contrôler la norme  $L_t^\infty(W_y^{1,\infty})$  de la solution, tandis que dans le cas des équations de Navier-Stokes seul un contrôle de la norme  $L_t^2(W_y^{1,\infty})$  de la solution est nécessaire ce qui permet d'abaisser la régularité des données initiales. Cette faible dissipation nous oblige en outre à travailler directement sur le système quasilinéaire (3.22) tandis que Kawashima et Matsumura montraient des estimations sur le linéarisé des équations autour du profil. Nous montrons donc des estimations d'énergie en symétrisant les équations quasilinéaires. L'existence globale de la solution ainsi que sa décroissance asymptotique en temps s'obtient en montrant une estimation d'énergie a priori qui assure un contrôle uniforme en temps de la solution. Cette estimation d'énergie est comparable à celles que nous avons établies au paragraphe précédent pour montrer l'existence globale de solutions régulières.

**Remarque 3.3.** *Il est malaisé de reformuler le théorème 3.9 dans les coordonnées eulériennes car l’hypothèse de masse nulle dans les coordonnées lagrangiennes n’équivaut pas à une hypothèse de masse nulle pour les variables conservatives dans les coordonnées eulériennes.*

### 3.2.2 Calcul numérique des profils de choc [M]

Notre but est de construire un schéma numérique permettant de calculer les profils de choc dont nous avons montré l’existence au théorème 3.7. Les expériences numériques peuvent également indiquer l’aspect des profils de choc de grande amplitude. Nous travaillons dans les coordonnées eulériennes et nous concentrons donc sur le système (3.17). Notre schéma s’appuie sur une stratégie de splitting en deux étapes, la première étape résolvant les termes convectifs des équations d’Euler et la seconde étape résolvant le couplage avec les radiations.

Etant donné un intervalle de calcul  $[-L, L]$ , un pas d’espace  $\Delta x = 2L/M$  avec  $M$  un entier, et un pas de temps  $\Delta t$ , nous initialisons la solution numérique  $(\rho_j^0, u_j^0, \theta_j^0)_{1 \leq j \leq M}$  par des fonctions en escaliers du type (3.18). Pour des profils de choc de petite amplitude, l’onde de choc plane (3.18) est une petite perturbation non-régulière du profil cherché, et nous espérons que la solution numérique convergera asymptotiquement en temps vers le profil cherché (malgré l’absence de régularité de la perturbation initiale). Pour des profils de grande amplitude, (3.18) est a priori une perturbation de grande amplitude du profil mais il n’y a pas nécessairement d’initialisation plus intuitive pour le schéma. Là encore, nous espérons que la solution numérique convergera asymptotiquement en temps vers le profil cherché.

Une fois initialisé, le schéma s’écrit formellement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\rho_j^{n+1}, u_j^{n+1}, \theta_j^{n+1})_{1 \leq j \leq M} = X^{\Delta t} Y^{\Delta t} (\rho_j^n, u_j^n, \theta_j^n)_{1 \leq j \leq M},$$

où  $Y^{\Delta t}$  est l’approximation au temps  $\Delta t$  du flot des équations d’Euler (3.10) et  $X^{\Delta t}$  est l’approximation au temps  $\Delta t$  du flot des équations intégral-différentielles :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 0, \\ (\dot{\rho} u) = 0, \\ (\dot{\rho} E) = K \star \theta^4 - \theta^4, \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $K$  désigne le noyau  $\exp(-|x|)/2$  et  $\star$  la convolution par rapport à la variable d’espace.

Comme nous souhaitons calculer des profils de choc qui sont éventuellement discontinus, il est important de calculer les termes convectifs avec un schéma présentant une très faible diffusion numérique. Nous utiliserons donc pour l’approximation  $Y^{\Delta t}$  du flot des équations d’Euler soit le schéma appelé ‘‘Lagrange-projection’’ introduit par Després et Lagoutière [17], soit le schéma de Godunov qui est peu diffusif lorsque nous ne calculons qu’une onde de choc (le schéma de Godunov est moins efficace pour calculer des discontinuités de contact).

Nous détaillons maintenant l’approximation  $X^{\Delta t}$  du flot de (3.24). Modulo des constantes que nous n’écrivons pas, le système (3.24) se ramène à la résolution de l’équation :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{\rho} (K \star \theta(t)^4 - \theta(t)^4), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x),$$

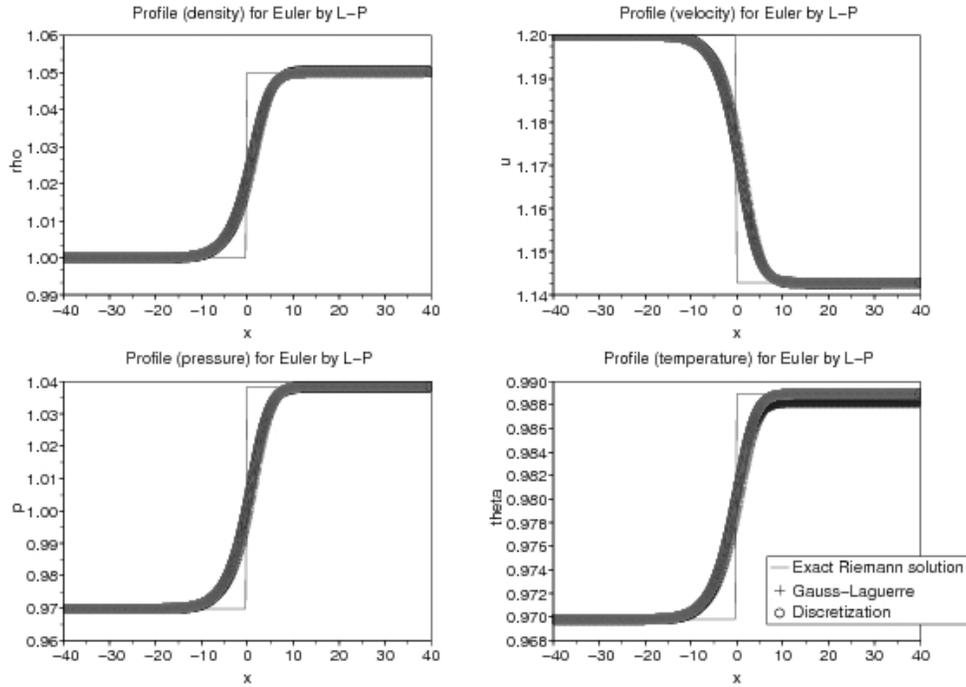


FIG. 3.2 – Profil de choc régulier obtenu au moyen du schéma Lagrange-projection :  $\rho$  (en haut à gauche),  $u$  (en haut à droite),  $p$  (en bas à gauche) et  $\theta$  (en bas à droite).

où  $\rho$  est une fonction donnée ne dépendant que de  $x$  et pas de  $t$ . La variable d'espace  $x$  n'est pas un paramètre car l'opérateur de convolution est non-local. Pour approcher la solution de cette dernière équation au temps  $\Delta t$ , nous proposons l'approximation :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{\rho} (K \star \theta_0^4 - \theta(t)^4), \quad \theta(0, x) = \theta_0(x),$$

pour laquelle  $x$  est désormais un paramètre. Cette équation différentielle ordinaire est calculée numériquement à l'aide d'un schéma d'Euler implicite (qui demande la résolution d'une équation polynômiale de degré 4). Si nous souhaitons monter en ordre il est possible de remplacer le schéma d'Euler implicite par un schéma de Crank-Nicholson. Pour calculer numériquement la convolution  $K \star \theta_0^4$ , nous pouvons nous rappeler que cette fonction est la solution d'une équation elliptique et discrétiser cette équation elliptique par une méthode de différences finies. Nous pouvons également ramener la convolution  $K \star \theta_0^4$  à une intégrale sur  $\mathbb{R}^+$  d'une fonction bornée pour la mesure  $\exp(-x) dx$  dont les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Laguerre. La convolution est alors approchée par une formule de quadrature de Gauss-Laguerre d'un ordre suffisamment élevé. Les points et les poids de ces formules de quadrature sont, jusqu'à un certain ordre, disponibles dans la littérature.

En résumé le flot des équations d'Euler sans couplage est approché par le schéma "Lagrange-projection" ou par le schéma de Godunov. Le flot de (3.24) est approché par une méthode semi-implicite où l'opérateur de convolution est traité de manière explicite soit par une discrétisation de l'équation elliptique soit par une formule de quadrature, et où le terme  $-\theta^4$  est traité de manière implicite.

Nous présentons à la figure 3.2 les résultats obtenus pour un profil de petite amplitude en utilisant le schéma “Lagrange-projection” pour discrétiser les termes convectifs. Les figures représentent les résultats obtenus en utilisant la méthode de discrétisation de l’équation elliptique et la méthode de quadrature pour calculer l’opérateur de convolution. Les deux méthodes donnent des résultats extrêmement proches et les courbes sont pratiquement superposées. Le profil obtenu est régulier et monotone. L’ordre de grandeur des erreurs numériques est comparable pour les deux méthodes.

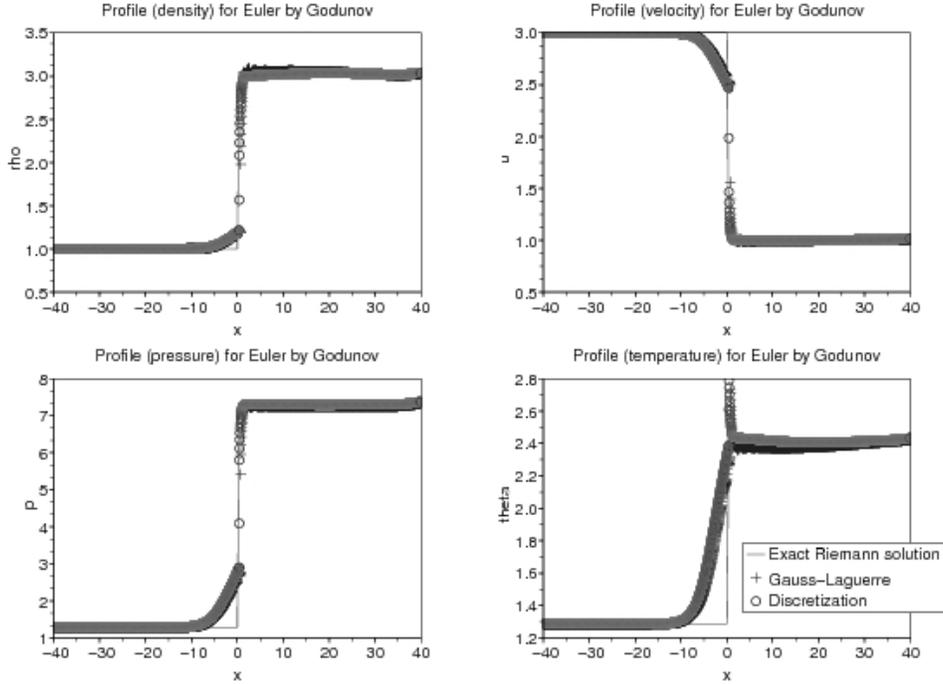


FIG. 3.3 – Profil de choc discontinu obtenu au moyen du schéma de Godunov :  $\rho$  (en haut à gauche),  $u$  (en haut à droite),  $p$  (en bas à gauche) et  $\theta$  (en bas à droite).

Nous présentons à la figure 3.3 les résultats obtenus pour un profil de grande amplitude en utilisant cette fois le schéma de Godunov pour discrétiser les termes convectifs. Les deux méthodes de discrétisation et de quadrature donnent des résultats assez proches, mais le calcul des erreurs numériques montre ici que la méthode de discrétisation donne des erreurs moins importantes que la méthode de quadrature. Le profil est régulier par morceaux, et la température n’est plus monotone. Ce phénomène a déjà été observé numériquement dans d’autres modèles d’hydrodynamique radiative.

### 3.3 Perspectives

La modèle de transfert radiatif (3.17) est le couplage le plus simple entre les équations de l’hydrodynamique et les radiations. Les modèles les plus complets couplent les équations d’Euler avec une équation cinétique décrivant l’évolution de la densité de photons (ce niveau de modélisation tient compte de la direction des photons tandis que le modèle (3.17) est un modèle isotrope). Les interactions entre le fluide et les photons se font par échange

d'impulsion et d'énergie. A un niveau de modélisation intermédiaire, l'équation cinétique est remplacée par une asymptotique de diffusion obtenue formellement en supposant que le fluide a un mouvement bien plus lent que les photons qui se déplacent à la vitesse de la lumière. Le lien entre les différents niveaux de modélisation est pour l'instant formel, et il serait important de justifier rigoureusement les différentes analyses asymptotiques par un résultat dans l'esprit du théorème 3.3 (stabilité des états constants uniforme par rapport à un petit paramètre et justification du comportement asymptotique). Un tel résultat justifierait la construction de schémas numériques "asymptotic preserving" permettant de traiter différents niveaux de modélisation.

La procédure de fermeture du système des moments par minimisation d'entropie étudiée au paragraphe 3.1 a également été utilisée dans la théorie du transfert radiatif pour remplacer l'équation cinétique décrivant l'évolution de la densité de photons par un système hyperbolique. Nos résultats sur le système des moments peuvent permettre de justifier la cohérence de cette approximation dans un régime de diffusion.

Enfin, il serait intéressant de trouver une caractérisation des systèmes hyperboliques avec relaxation pour lesquels l'existence globale de solutions régulières peut être rendue uniforme par rapport au paramètre de relaxation. Les résultats du paragraphe 3.1 donnent deux exemples, le premier en une dimension d'espace, le second en dimension arbitraire. Une caractérisation complète permettrait de justifier de manière systématique des résultats asymptotiques.

# Bibliographie

- [1] S. ALINHAC. Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. *Comm. Partial Differential Equations*, 14(2) :173–230, 1989.
- [2] S. ALINHAC, P. GÉRARD. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. InterEditions, 1991.
- [3] M. ARTOLA, A. MAJDA. Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets. I. *Phys. D*, 28(3) :253–281, 1987.
- [4] S. BENZONI-GAVAGE. Stability of multi-dimensional phase transitions in a van der Waals fluid. *Nonlinear Anal.*, 31(1-2) :243–263, 1998.
- [5] S. BENZONI-GAVAGE. Stability of subsonic planar phase boundaries in a van der Waals fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 150(1) :23–55, 1999.
- [6] S. BENZONI-GAVAGE, F. ROUSSET, D. SERRE, K. ZUMBRUN. Generic types and transitions in hyperbolic initial-boundary value problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A*, 132 :1073–1104, 2002.
- [7] S. BENZONI-GAVAGE, D. SERRE. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations. First order systems and applications*. Oxford University Press, 2006.
- [8] S. BENZONI-GAVAGE, H. FREISTÜHLER. Effects of surface tension on the stability of dynamical liquid-vapor interfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 174(1) :111–150, 2004.
- [9] A. BLOKHIN. Estimation of the energy integral of a mixed problem for gas dynamics equations with boundary conditions on the shock wave. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 22(4) :23–51, 1981.
- [10] A. BLOKHIN. Uniqueness of the classical solution of a mixed problem for gas dynamics equations with boundary conditions on the shock wave. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 23(5) :17–30, 1982.
- [11] J.-M. BONY. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2) :209–246, 1981.
- [12] P. BRENNER. The Cauchy problem for symmetric hyperbolic systems in  $L_p$ . *Math. Scand.*, 19 :27–37, 1966.
- [13] A. BRESSAN. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Oxford University Press, 2002.

- [14] C. CHALONS, F. COQUEL. Navier-Stokes equations with several independent pressure laws and explicit predictor-corrector schemes. *Numerisch. Math.*, 101(3) :451–478, 2005.
- [15] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*. Gauthier-Villars, 1981.
- [16] K. N. CHUEH, C. C. CONLEY, J. A. SMOLLER. Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(2) :373–392, 1977.
- [17] B. DESPRÉS, F. LAGOUTIÈRE. Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *J. Sci. Computing*, 16(4) :479–524, 2001.
- [18] J. A. FEJER, J. W. MILES. On the stability of a plane vortex sheet with respect to three-dimensional disturbances. *J. Fluid Mech.*, 15 :335–336, 1963.
- [19] J. FRANCHETEAU, G. MÉTIVIER. Existence de chocs faibles pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. *Astérisque*, 268 :1–198, 2000.
- [20] H. FREISTÜHLER. Some results on the stability of non-classical shock waves. *J. Partial Differential Equations*, 11(1) :25–38, 1998.
- [21] K. O. FRIEDRICHS. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 :345–392, 1954.
- [22] P. GÉRARD, J. RAUCH. Propagation de la régularité locale de solutions d'équations hyperboliques non linéaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 37(3) :65–84, 1987.
- [23] F. GOLSE. From kinetic to macroscopic models. In *Kinetic equations and asymptotic theory*, pages 41–126. Gauthier-Villars, 2000.
- [24] O. GUÈS, J. RAUCH. Hyperbolic  $L^p$  multipliers are translations. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(3) :431–443, 2006.
- [25] B. GUSTAFSSON, H. O. KREISS, A. SUNDSTRÖM. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II. *Math. Comp.*, 26 :649–686, 1972.
- [26] B. HANOZET, R. NATALINI. Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 169(2) :89–117, 2003.
- [27] E. HARABETIAN. A convergent series expansion for hyperbolic systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 294(2) :383–424, 1986.
- [28] R. HERSH. Mixed problems in several variables. *J. Math. Mech.*, 12 :317–334, 1963.
- [29] S. JIN, Z. XIN. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimension. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48 :235–276, 1995.
- [30] S. JUNCA, M. RASCLE. Strong relaxation of the isothermal euler system to the heat equation. *Z. Angew. Math. Phys.*, 53(2) :239–264, 2002.
- [31] M. KAC. A stochastic model related to the telegrapher's equation. *Rocky Mountain J. Math.*, 4 :497–509, 1974.
- [32] T. KATO. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58(3) :181–205, 1975.

- [33] S. KAWASHIMA, A. MATSUMURA. Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion. *Comm. Math. Phys.*, 101(1) :97–127, 1985.
- [34] S. KAWASHIMA, Y. NIKKUNI, S. NISHIBATA. The initial value problem for hyperbolic-elliptic coupled systems and applications to radiation hydrodynamics. In *Analysis of systems of conservation laws (Aachen, 1997)*, pages 87–127. Chapman & Hall, 1999.
- [35] S. KAWASHIMA, S. NISHIBATA. Shock waves for a model system of the radiating gas. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(1) :95–117, 1999.
- [36] H. O. KREISS. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :277–298, 1970.
- [37] C. LATTANZIO, C. MASCIA, D. SERRE. Shock waves for radiative hyperbolic-elliptic systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(5) :2601–2640, 2007.
- [38] P. D. LAX. Hyperbolic systems of conservation laws. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 :537–566, 1957.
- [39] P. G. LEFLOCH, V. SHELUKHIN. Symmetries and global solvability of the isothermal gas dynamics equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 175(3) :389–430, 2005.
- [40] C. D. LEVERMORE. Moment closure hierarchies for kinetic theories. *J. Statist. Phys.*, 83(5-6) :1021–1065, 1996.
- [41] C. D. LEVERMORE. Entropy-based moment closure hierarchies for kinetic equations. *Transport Theory Statist. Phys.*, 26 :591–606, 1997.
- [42] A. MAJDA. The existence of multi-dimensional shock fronts. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 43(281), 1983.
- [43] A. MAJDA. The stability of multi-dimensional shock fronts. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 41(275), 1983.
- [44] A. MAJDA. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*. Springer-Verlag, 1984.
- [45] A. MAJDA, R. ROSALES. A theory for spontaneous Mach stem formation in reacting shock fronts, I. The basic perturbation analysis. *SIAM J. Appl. Math.*, 43 :1310–1334, 1983.
- [46] A. MAJDA, S. OSHER. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(5) :607–675, 1975.
- [47] G. MÉTIVIER. Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d’espace. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(2) :431–479, 1986.
- [48] G. MÉTIVIER. Stability of multi-dimensional weak shocks. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(7) :983–1028, 1990.
- [49] G. MÉTIVIER. Ondes soniques. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 70(2) :197–268, 1991.
- [50] G. MÉTIVIER. The block structure condition for symmetric hyperbolic systems. *Bull. London Math. Soc.*, 32(6) :689–702, 2000.
- [51] G. MÉTIVIER. Stability of multidimensional shocks. In *Advances in the theory of shock waves*. Birkhäuser, 2001.
- [52] G. MÉTIVIER, K. ZUMBRUN. Hyperbolic boundary value problems for symmetric systems with variable multiplicities. *J. Differential Equations*, 211(1) :61–134, 2005.

- [53] D. MICHELSON. Stability theory of difference approximations for multidimensional initial boundary value problems. *Math. Comp.*, 40(161) :1–45, 1983.
- [54] J. W. MILES. On the disturbed motion of a plane vortex sheet. *J. Fluid Mech.*, 4 :538–552, 1958.
- [55] A. MORANDO, P. TREBESCHI. Two-dimensional vortex sheets for the nonisentropic euler equations : linear stability. *Preprint*, 2007.
- [56] M. SABLÉ-TOUGERON. Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 36(1) :39–82, 1986.
- [57] M. SABLÉ-TOUGERON. Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(3) :261–292, 1988.
- [58] M. SABLÉ-TOUGERON. Ondes de gradient multi-dimensionnelles. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 106(511), 1993.
- [59] D. SERRE. *Systems of conservation laws. 1*. Cambridge University Press, 1999.
- [60] D. SERRE. *Systems of conservation laws. 2*. Cambridge University Press, 2000.
- [61] T. C. SIDERIS, B. THOMASES, D. WANG. Long time behavior of solutions to the 3D compressible Euler equations with damping. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(3–4) :795–816, 2003.
- [62] W. A. YONG. Singular perturbations of first-order hyperbolic systemes with stiff source terms. *J. Differential Equations*, 155(1) :89–132, 1999.
- [63] W. A. YONG, K. ZUMBRUN. Existence of relaxation shock profiles for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(5) :1565–1575, 2000.