



**HAL**  
open science

# Utilisation de méthodes variationnelles en traitement d'image

Jean-François Aujol

► **To cite this version:**

Jean-François Aujol. Utilisation de méthodes variationnelles en traitement d'image. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. tel-00389830

**HAL Id: tel-00389830**

**<https://theses.hal.science/tel-00389830>**

Submitted on 29 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Normale Supérieure de Cachan

Ecole Doctorale Sciences Pratiques

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Jean-François AUJOL

---

**Utilisation de méthodes variationnelles  
en traitement d'image**

---

Soutenue le 27 mai 2009

**-Jury-**

MM. Gilles Aubert	
Giuseppe Buttazzo	<i>Rapporteur</i>
Albert Cohen	<i>Rapporteur</i>
Daniel Cremers	<i>Rapporteur</i>
Henri Maître	
Yves Meyer	<i>Garant</i>
Jean-Michel Morel	



# Remerciements

Je suis extrêmement honoré que Giuseppe Buttazzo, Albert Cohen, et Daniel Cremers aient pris le temps d'étudier attentivement ce manuscrit et de rédiger un rapport. Tous ont accepté spontanément ce travail, et je leur en suis reconnaissant.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Yves Meyer pour avoir bien voulu être mon garant. Discuter avec lui est toujours un moment passionnant, tant son enthousiasme est communicatif.

Gilles Aubert avait co-dirigé ma thèse. Je le remercie pour tout ce qu'il a pu m'apprendre. Collaborer avec lui est toujours un vrai plaisir.

Henri Maître et Jean-Michel Morel m'avaient fait l'honneur d'être rapporteurs sur mon travail de thèse. Je les remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury d'habilitation.

Je remercie tous les chercheurs avec qui j'ai eu la chance de travailler et qui n'ont pas encore été cités : Andrès Almansa, Laure Blanc-Féraud, Vicent Caselles, Antonin Chambolle, Tony Chan, Julie Delon, Jean-Denis Durou, Vincent Duval, Gabriele Facciolo, Jalal Fadili, Guy Gilboa, Jérôme Gilles, Yann Gousseau, Sung Ha Kang, Saïd Ladjal, Bin Luo, Simon Masnou, Basarab Matei, Pierre Maurel, Mila Nikolova, Stanley Osher, Gabriel Peyré, David Strong, Florence Tupin, Luminita Vese. Le travail de recherche est avant tout fait de rencontres, d'échanges, et souvent d'amitiés.

Le CMLA où j'effectue mes recherches depuis novembre 2005 est un cadre particulièrement propice pour travailler. Je tiens à remercier la *dream team* du secrétariat : Véronique Almadovar, Micheline Brunetti, et Virginie Pauchont. Je n'oublie pas non plus Sandra Doucet et Carine Saint-Prix. Indispensable et toujours à l'écoute, je remercie l'équipe informatique : Christophe Labourdette, Pascal Bringas, et Nicolas Pajor.

Tous les membres du CMLA contribuent à la bonne ambiance qui y règne. Je tiens à remercier plus particulièrement pour leur disponibilité et leur bonne humeur Karine Beauchard, Bernard Chalmond, Laurent Desvilletes, Frédéric Pascal, Alain Trouvé, Corinne Vachier, Nicolas Vayatis. Je n'oublie pas tous les thésards du laboratoire sans qui la vie comporterait moins de gâteaux les vendredis.

Je termine par une mention spéciale pour Stéphanie qui m'a apporté son soutien tout au long de ce travail.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Présentation générale</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Curriculum Vitae détaillé</b>	<b>13</b>
1.1	Curriculum Vitae . . . . .	14
1.2	Publications . . . . .	15
1.2.1	Articles soumis . . . . .	15
1.2.2	Articles de revues internationales à comité de lecture . . . . .	15
1.2.3	Conférences invitées dans des congrès . . . . .	16
1.2.4	Actes de Conférences internationales avec comité de lecture . . . . .	16
1.2.5	Conférences sans comité de lecture . . . . .	17
1.3	Financements, participation à des groupes de travail, distinctions . . . . .	18
1.3.1	Financements . . . . .	18
1.3.2	Participation à des projets de recherche . . . . .	19
1.3.3	Distinctions . . . . .	19
1.4	Encadrement scientifique et enseignement . . . . .	20
1.4.1	Encadrement scientifique . . . . .	20
1.4.2	Enseignement . . . . .	22
1.5	Participation à la vie scientifique et responsabilités collectives . . . . .	23
1.5.1	Organisation de conférences, workshops, congrès . . . . .	23
1.5.2	Expertise . . . . .	23
1.5.3	Divers . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Résumé de mon activité de recherche</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.1.1	Rappels sur mon travail de thèse . . . . .	25
2.1.2	Méthodes variationnelles en traitement d'image . . . . .	26
2.1.3	Mobilité géographique et thématique . . . . .	27
2.1.4	Textures . . . . .	28
2.2	Décomposition additive d'image (A7, A8, A9, A11, A17, P1) - [22, 23, 20, 21, 16, 65] . . . . .	28
2.2.1	Présentation du problème . . . . .	29
2.2.2	Principales contributions . . . . .	30
2.3	Décomposition multiplicative (A13) - [13] . . . . .	30
2.4	Echelle des éléments constituant une image (A10, A16) - [118, 85] . . . . .	31
2.4.1	Une première approche (A10) - [118] . . . . .	31
2.4.2	Cartographie d'échelle dans une image (A16) - [85] . . . . .	31
2.4.3	Modèle $TV - L1$ et échelle (P3) - [64] . . . . .	32
2.5	Inpainting (P2) - [24] . . . . .	33

2.6	Applications en imagerie satellitaire (A12, A14, A15, A16) - [88, 86, 67, 85]	34
2.6.1	Traitement de bases d'images satellites (A12, A14) - [88, 86]	34
2.6.2	Restauration d'image dans le cas d'un échantillonnage irrégulier (A15) - [67]	35
2.6.3	Cartographie d'échelle pour l'imagerie satellitaire (A16) - [85]	35
2.7	Détection de structures fines dans les images (A6) - [14]	36

## II Activité de recherche détaillée 37

<b>3</b>	<b>Décomposition additive d'image (A7, A8, A9, A11, A17, P1) - [22, 23, 20, 21, 16, 65]</b>	<b>41</b>
3.1	Présentation du problème	41
3.1.1	Décomposition d'image	41
3.1.2	Quelques modèles de décomposition d'image par méthodes variationnelles	42
3.2	Modèle TV-Hilbert (A11) - [21]	43
3.2.1	Modèle et algorithme de minimisation	43
3.2.2	Débruitage optimal en terme de SNR	45
3.3	Modèle TV-Gabor (A7) - [22]	47
3.3.1	Sélection automatique du paramètre de régularisation	48
3.3.2	Minimisation approchée du modèle $TV - L^1$	49
3.3.3	Modèle TV-Gabor	49
3.4	Cas des images couleurs (A8, P2)- [23, 65]	51
3.5	Application en classification (A9) - [20]	52
3.6	Optimisation (A17, P1) - [16, 65]	53
3.6.1	Minimisation de la variation totale	53
3.6.2	Variation totale régularisée	54
3.6.3	Comparaison avec les algorithmes de Nesterov	55
<b>4</b>	<b>Décomposition multiplicative (A13) - [13]</b>	<b>57</b>
4.1	Modélisation	57
4.1.1	Bruit de chatoiement	57
4.1.2	Modèle	58
4.2	Etude mathématique	58
4.2.1	Rappels sur la variation totale	58
4.2.2	Etude du modèle (4.2)	59
4.2.3	Utilisation d'un modèle additif?	61
<b>5</b>	<b>Echelle des éléments constituant une image (A10, A16, P3) - [118, 85, 64]</b>	<b>63</b>
5.1	Une première approche (A10) - [118]	63
5.1.1	Définition de l'échelle	63
5.1.2	Algorithme automatique	64
5.2	Cartographie d'échelle dans une image (A16) - [85]	64
5.3	Lien entre A10 - [118] et A16 - [85]	67
5.4	Modèle $TV - L1$ et échelle (P3) - [64]	68
5.4.1	Présentation	68
5.4.2	Quelques définitions	68

5.4.3	Equivalence géométrique . . . . .	69
5.4.4	Le problème géométrique . . . . .	70
5.4.5	Interprétation en décomposition d'image . . . . .	71
5.4.6	Cas spatialement adaptatif . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Inpainting (P2) - [24]</b>	<b>75</b>
6.1	Modélisation . . . . .	75
6.2	Ajout de contraintes géométriques . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Applications en imagerie satellitaire (A12, A14, A15, A16) - [88, 86, 67, 85]</b>	<b>81</b>
7.1	Traitement de bases d'images satellites (A12, A14) - [88, 86] . . . . .	81
7.1.1	Motivations . . . . .	81
7.1.2	Echelle caractéristique (A12) - [88] . . . . .	82
7.1.3	Indexation (A114) - [86] . . . . .	83
7.2	Restauration d'image dans le cas d'un échantillonnage irrégulier (A15) - [67]	85
7.2.1	Présentation . . . . .	85
7.2.2	Modélisation . . . . .	87
7.3	Cartographie d'échelle pour l'imagerie satellitaire (A16) - [85] . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Détection de structures fines dans les images (A6) - [14]</b>	<b>91</b>
<b>9</b>	<b>Perspectives</b>	<b>93</b>
9.1	Adaptivité spatiale et fréquentielle . . . . .	93
9.2	Imagerie RSO . . . . .	93
9.3	Imagerie satellitaire . . . . .	94
9.4	Compréhension mathématique de méthodes établies en vision par ordinateur et traitement d'image . . . . .	94





Ce manuscrit tend à présenter mon parcours dans le monde de la recherche depuis ma soutenance de thèse en juin 2004.

La première partie résume ce parcours : le Chapitre 1 présente mon CV détaillé, et le Chapitre 2 concerne mes thèmes de recherche.

La seconde partie du manuscrit (Chapitres 3 à 8) présente de manière plus précise mon activité de recherche (résumée au Chapitre 2). Cette seconde partie se termine par le Chapitre 9 dans lequel je décris mes perspectives de recherche.



Première partie  
Présentation générale



# Chapitre 1

## Curriculum Vitae détaillé

## 1.1 Curriculum Vitae

### Jean-François Aujol

Né le 20/06/1977 à Limoges (87). Nationalité française.

Bureau : 027 (bâtiment Laplace)

Adresse : CMLA, ENS Cachan, CNRS, UniverSud, 61 Av. President Wilson, F-94230 Cachan, FRANCE

Tel : (+33) (0)1 47 40 59 47 - Fax : (+33) (0)1 47 40 59 01

email : Jean-Francois.Aujol@cmla.ens-cachan.fr

URL : <http://www.cmla.ens-cachan.fr/~aujol/>

**Situation professionnelle :** *Chargé de recherche CNRS (CR2) au CMLA (UMR CNRS 8536) depuis novembre 2005.*

#### Formation :

- **En 2004-2005 :**

**Postdoc** (ingénieur de recherche) à l'ENST Paris dans l'équipe du professeur Henri Maître (département TSI) du 01/03/2005 au 31/10/2005.

**Postdoc** (assistant researcher) à UCLA, Los-Angeles, dans l'équipe du professeur Tony Chan (Mathematics department) du 01/09/2004 au 28/02/2005.

- **En 2001-2004 :**

**Thèse** en Mathématiques appliquées à l'Université de Nice-Sophia-Antipolis (laboratoire J.A. Dieudonné) et à l'INRIA Sophia-Antipolis (projet ARIANA), sous la direction de Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud.

Monitorat à l'IUT de Nice Sophia-Antipolis.

- **En 1998-2001 :**

*Scolarité à l'ENS Cachan (section Mathématiques).*

Licence de Mathématiques-Informatique. Maîtrise de Mathématiques.

DEA MVA (Math-Vision-Apprentissage) de l'ENS Cachan.

Agrégation externe de Mathématiques.

Magistère de Mathématiques-Informatique de l'ENS Cachan.

- **En 1995-1998 :**

Classe préparatoire MPSi puis MP\* au lycée Louis Le Grand (Paris).

DEUG MIAS à l'université Paris VII (Jussieu).

- **En 1994-1995 :**

Terminale au lycée Auguste Renoir (Limoges dans le 87).

Baccalauréat général (série S, option Mathématiques) avec mention Très Bien.

## 1.2 Publications

Toutes mes publications sont disponibles à l'adresse :  
<http://www.cmla.ens-cachan.fr/~aujol/publications.html>

### 1.2.1 Articles soumis

- P3 *The TV –  $L^1$  model : a geometric point of view*, Vincent Duval, Jean-François Aujol and Yann Gousseau, soumis.  
P2 *Exemplar-based inpainting from a variational point of view*, Jean-François Aujol, Saïd Ladjal and Simon Masnou, CMLA Preprint 2008-42, soumis.  
P1 *A projected gradient algorithm for color image decomposition*, Vincent Duval, Jean-François Aujol and Luminita Vese, CMLA Preprint 2008-21, soumis.

### 1.2.2 Articles de revues internationales à comité de lecture

- A17 *Some first-order algorithms for total variation based image restoration*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Jean-François Aujol, in press.  
A16 *Local scale measure from the topographic map and application to remote sensing images*, Bin Luo, Jean-François Aujol and Yann Gousseau, SIAM Journal on Multiscale modeling and Simulation, in press.  
A15 *Irregular to regular sampling, denoising and deconvolution*, Gabriele Facciolo, Andrés Almansa, Jean-François Aujol and Vicent Caselles, SIAM Journal on Multiscale modeling and Simulation, in press.  
A14 *Indexing of satellite images with different resolutions by wavelet features*, Bin Luo, Jean-François Aujol, Yann Gousseau and Saïd Ladjal, IEEE Transactions on Image Processing, , volume 17, number 8, pages 1465-1472, August 2008.  
A13 *A Variational Approach to remove Multiplicative Noise*, Gilles Aubert and Jean-François Aujol, SIAM Journal on Applied Mathematics, volume 68, number 4, pages 925-946, January 2008.  
A12 *Resolution independant characteristic scale dedicated to satellite images*, Bin Luo, Jean-François Aujol, Yann Gousseau, Saïd Ladjal and Henri Maître, IEEE Transactions on Image Processing, volume 16, number 10, pages 2503-2514, October 2007.  
A11 *Constrained and SNR-based Solutions for TV-Hilbert Space Image Denoising*, Jean-François Aujol and Guy Gilboa, Journal of Mathematical Imaging and Vision, volume 26, numbers 1-2, pages 217-237, November 2006.  
A10 *Scale recognition, regularization parameter selection, and Meyer's  $G$  norm in total variation regularization*, David Strong, Jean-François Aujol and Tony Chan, SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation, volume 5, number 1, pages 273-303, 2006.  
A9 *Combining geometrical and textured information to perform image classification*, Jean-François Aujol and Tony Chan, Journal of Visual Communication and Image Representation, volume 17, number 5, pages 1004-1023, October 2006.  
A8 *Color image decomposition and restoration*, Jean-François Aujol et Sung Ha Kang, Journal of Visual Communication and Image Representation, volume 17, number 4, pages 916-928, August 2006.  
A7 *Structure-Texture Image Decomposition – Modeling, Algorithms, and Parameter Selection*, Jean-François Aujol, Guy Gilboa, Tony Chan, and Stanley Osher, International



- Journal of Computer Vision, volume 67, number 1, pages 111-136, April 2006.
- A6 *Detecting codimension-two objects in an image with Ginzburg-Landau models*, Gilles Aubert, Jean-François Aujol and Laure Blanc-Féraud, International Journal of Computer Vision, volume 65, numbers 1-2, pages 29-42, November 2005.
- A5 *Dual norms and Image decomposition models*, Jean-François Aujol and Antonin Chambolle, International Journal of Computer Vision, volume 63, number 1, pages 85-104, June 2005.
- A4 *Modeling very oscillating signals. Application to image processing*, Gilles Aubert and Jean-François Aujol, Applied Mathematics and Optimization, volume 51, number 2, pages 163-182, March/April 2005.
- A3 *Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component*, Jean-François Aujol, Gilles Aubert, Laure Blanc-Féraud and Antonin Chambolle, Journal of Mathematical Imaging and Vision, volume 22, number 1, pages 71-88, January 2005.
- A2 *Optimal partitions, regularized solutions, and application to image classification*, Gilles Aubert and Jean-François Aujol, Applicable Analysis, volume 84, number 1, pages 15-35, January 2005.
- A1 *Wavelet-based level set evolution for classification of textured images*, Jean-François Aujol, Gilles Aubert and Laure Blanc-Féraud, IEEE Transactions on Image Processing, volume 12, number 12, pages 1634-1641, December 2003.

### 1.2.3 Conférences invitées dans des congrès

- *Contribution à l'analyse de textures en traitement d'image par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles*, Jean-François Aujol, GRETSI 2005 (invited talk).

### 1.2.4 Actes de Conférences internationales avec comité de lecture

- C14 *Accurate Local Scale Measure for Remote Sensing Images*, Bin Luo, Jean-François Aujol and Yann Gousseau, SSVM 2009.
- C13 *Projected gradient based Color Image Decomposition*, Vincent Duval, Jean-François Aujol and Luminita Vese, SSVM 2009.
- C12 *Extraction de textures localement parallèles par un espace de Hilbert adapté*, Pierre Maurel, Jean-François Aujol and Gabriel Peyré, GRETSI 2009.
- C11 *A nonconvex model to remove multiplicative noise*, Gilles Aubert and Jean-François Aujol, SSVM 2007.
- C10 *Cartographie des échelles d'une image à partir de la carte topographique. Applications aux images satellitaires*, Bin Luo, Jean-François Aujol, Yann Gousseau and Henri Maître, GRETSI 2007.
- C9 *Extrapolation d'attributs ondelettes pour l'indexation de bases d'images satellitaires à différentes résolutions*, Bin Luo, Jean-François Aujol, Yann Gousseau and Saïd Ladjal, GRETSI 2007.
- C8 *Interpolation of wavelet features for satellite images with different resolutions*, Bin Luo, Jean-François Aujol, Yann Gousseau and Saïd Ladjal, IGARSS 2006.
- C7 *Scale Characterization for Satellite Images*, Bin Luo, Jean-François Aujol, Yann Gousseau, Saïd Ladjal and Henri Maître, ICASSP 2006.
- C6 *Structure-Texture Decomposition by a TV-Gabor model*, Jean-François Aujol, Guy

- Gilboa, Tony Chan and Stanley Osher, VLSM 2005, LNCS 3752, pages 85-96.
- C5 *Combined geometric-texture image classification*, Jean-François Aujol and Tony Chan, VLSM 2005, LNCS 3752, pages 161-172.
- C4 *Simultaneous structure and texture compact representation*, Jean-François Aujol and Basarab Matei, ACIVS 04.
- C3 *Décomposition d'images. Application aux images RSO*. Jean-François Aujol, Gilles Aubert, Laure Blanc-Féraud et Antonin Chambolle, GRETSI 2003.
- C2 *Wavelet-based level set evolution for classification of textured images*, Jean-François Aujol, Gilles Aubert and Laure Blanc-Féraud, ICIP 2003, volume 2, pages 1041-1044.
- C1 *Image decomposition. Application to SAR images*. Jean-François Aujol, Gilles Aubert, Laure Blanc-Féraud and Antonin Chambolle, Scale-Space 2003, LNCS 2695, pages 297-312.

### 1.2.5 Conférences sans comité de lecture

1. *Image decomposition by variational methods*, Jean-François Aujol, Workshop on Models and Images for Porous Media, Paris, January 12-16, 2009.
2. *Morphological Segmentation of Remote Sensing Images Based on Scale*, Bin Luo, Jean-François Aujol and Yann Gousseau, SIAM Annual Meeting 2008, San Diego.
3. *A Nonconvex Model for Speckle Noise Removal*, Jean-François Aujol and Gilles Aubert, SIAM Conference on Imaging Science 2008, San Diego.
4. *Echelle et résolution en imagerie de télédétection*, Jean-François Aujol, Colloque "Mathématiques pour l'image", Orléans, 1-3 Avril 2008.
5. *Modélisation des images*, Jérôme Gilles et Jean-François Aujol, Ecole Analyse Multi-résolution pour l'Image, Poitiers, 17-19 Mars 2008.
6. *Variational methods in image processing*, Jean-François Aujol, Inverse Problems in Medical Imaging, Obergurgl, January 22-27, 2008.
7. *A nonconvex model for multiplicative noise removal*, Jean-François Aujol, Mathematical image processing meeting, CIRM, September 3-7, 2007.
8. *Restauration d'images et bruit multiplicatif*, Jean-François Aujol, SMAI 2007 , Praz sur Arly, Juin 2007.
9. *A variational approach for multiplicative noise removal*, Jean-François Aujol, Colloque sur le thème "Mathématiques et Image" , La Rochelle, Mai 2007.
10. *Removing multiplicative noise by a variational approach*, Jean-François Aujol, Journées de Metz 2007 : PDE and variational methods in image analysis, Metz, Mai 2007.
11. *TV-Hilbert model for image denoising and decomposition*, Jean-François Aujol, Workshop "An interdisciplinary approach to Textures and Natural Images Processing", 2007, Paris .
12. *Recent advances in scale recognition and its application in total variation regularization*, David Strong, Jean-François Aujol, and Tony Chan, SIAM Conference on Imaging Science 2006 , Minneapolis .
13. *Color decomposition*, Sung Ha Kang and Jean-François Aujol, SIAM Conference on Imaging Science 2006 , Minneapolis .

14. *Adaptive Structure-Texture Image Decomposition*, Jean-François Aujol, Guy Gilboa, Tony Chan, and Stanley Osher, SIAM Conference on Imaging Science 2006 , Minneapolis.
15. *"Variational methods (I) : Image restoration", "Variational methods (II) : Image decomposition"*, Jean-François Aujol, Optimization Methods in Computer Vision , invited talks, 13-17 March 2006, Les Houches, France.
16. *Filtres de Gabor et décomposition d'images*, Jean-François Aujol, Journées Mathématiques de l'Image , 12-13 January 2006, Nice, France.
17. *Scale Characterization for Remote Sensing Images*, Jean-François Aujol, Bin Luo, Yann Gousseau and Henri Maître, ESA-EUSC 2005 : Image Information Mining - Theory and Application to Earth Observation .

## 1.3 Financements, participation à des groupes de travail, distinctions

### 1.3.1 Financements

**2009-2012 : ANR Natimages, Adaptivity for Natural Images and Textures Representations.** Je suis le responsable du partenaire ENS de Cachan pour cette ANR portée par Gabriel Peyré (Dauphine). Elle correspond à l'appel à projets DEFI. L'objectif du projet est de rendre spatialement adaptatives des méthodes variationnelles et/ou parcimonieuses utilisées en traitement d'images. Les applications visées sont l'imagerie astronomique (le CEA est partenaire de l'ANR), et l'imagerie médicale (le GREYC à Caen est aussi partenaire de l'ANR, et a des contacts très rapprochés avec le CHU de Caen).

Ce projet est lié au travail de thèse de Vincent Duval. Le postdoc de Pierre Maurel est financé par cette ANR, et rentre bien évidemment aussi dans ce projet.

Le CMLA est financé à hauteur de 70 000 euros sur 4 ans pour cette ANR (qui finance 310 000 euros dans 4 laboratoires différents dont le CMLA).

**2009-2010 : Projet REI (DGA), Régularisation d'images radar par minimisation de fonctionnelles.** Ce projet est porté par Florence Tupin (Telecom ParisTech). L'idée du projet est de comparer différentes méthodes récentes proposées pour la restauration d'images RSO (approche variationnelle, minimisation par graph-cut, ...). L'objectif est de faire un état de l'art et un comparatif de ces méthodes récentes, puis une synthèse.

Le CMLA recevra 10 000 euros sur 2 ans dans le cadre de ce projet (financé globalement par la DGA à hauteur de 140 000 euros).

**2009-2010 : Projet PHC (Partenariat Hubert Curien), Total variation based basis pursuit model for image restoration.** Il s'agit d'un échange entre le CMLA et la Baptist University à Honk-Kong. Alain Trouvé est le responsable du projet côté CMLA, et Michael Ng côté Hong-Kong. Le CMLA reçoit 4 000 euros par an pour financer les missions des chercheurs français du projet à Hong-Kong. L'objectif scientifique est de faire collaborer de manière efficace minimisation de la variation totale et approches de type ondelettes en restauration d'image.

### **2008-2010 : ANR FREEDOM, Film : REstauration, Et DONnées Manquantes.**

Il s'agit d'une ANR jeune chercheur, portée par Julie Delon (Telecom ParisTech). L'objectif est de proposer des traitements automatiques et rapides pour la restauration de films anciens. Le projet est actuellement dans sa deuxième année. La totalité du montant du projet (130 000 euros) est affectée à Telecom ParisTech sur 3 ans. Ce financement doit notamment permettre au cours de la dernière année du projet d'engager un ingénieur de recherche afin de mettre sous forme de plugins les algorithmes développés les deux premières années.

### **2007-2009 : ANR DetectFine, Détection et suivi de structures Fines dans des volumes d'images.**

Cette ANR blanche est portée par Laure Blanc-Féraud (laboratoire I3S). J'interviens dans cette ANR comme membre associé au laboratoire I3S à Sophia-Antipolis. L'objectif de ce projet est de développer des modèles mathématiques afin de détecter des structures fines dans les images. Deux types d'applications sont visés : d'une part, l'imagerie microscopique (le laboratoire Pasteur est partenaire de cette ANR) ; d'autre part la détection et le suivi de cible mobile rapide (missile) (la SAGEM est aussi partenaire de cette ANR). L'ANR finance 400 000 euros sur ce projet.

**2007 : Projet jeune chercheur du Gdr ISIS, Représentations parcimonieuses et adaptatives pour les textures naturelles.** Ce projet, porté par Gabriel Peyré (Dauphine), et dont faisait aussi partie Jalal Fadili (Greyc), a permis d'amorcer des travaux qui ont amené au lancement de l'ANR NATIMAGES évoquée précédemment.

Le GDR ISIS avait donné 5 000 euros pour ce projet (le financement était ensuite géré par Dauphine).

**2006 : BQR ENS Cachan, Indexation d'images satellitaires prises à différentes résolutions.** Ce projet m'a permis de continuer de travailler sur l'imagerie satellitaire avec le CNES, travaux commencés lors de mon postdoc à l'ENST Paris.

L'ENS Cachan a donné 3 000 euros au CMLA dans le cadre de ce projet.

## **1.3.2 Participation à des projets de recherche**

Je participe au groupe de travail MISS au sein du CMLA. Le Groupe de travail MISS (Mathématiques de l'Imagerie Satellitaire Spatiale) travaille en collaboration avec le Centre national d'Etudes Spatiales sur des problématiques de traitement d'image. Ce groupe de travail est dirigé par Jean-Michel Morel, professeur à l'ENS Cachan. Ma contribution au projet a essentiellement porté sur l'optimisation rapide d'énergies, et a débouché sur la publication A15.

## **1.3.3 Distinctions**

*Prix de thèse 2005 du club EEA, catégorie "signal et image".*

Le Club EEA a vocation à rassembler l'ensemble des enseignants/chercheurs de la communauté de "l'Électronique", "l'Électrotechnique", "l'Automatique" et du "Signal et de l'Image" organisés autour de ces quatre sections disciplinaires.

Ma thèse s'intitule :

**Contribution à l'analyse de textures en traitement d'image par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles.**

Je l'ai soutenue le 17 juin 2004.

Jury : Gilles Lebeau, Patrick Louis Combettes, Henri Maître, Jean-Michel Morel, Yves Meyer, Gilles Aubert, et Laure Blanc-Féraud.

## 1.4 Encadrement scientifique et enseignement

### 1.4.1 Encadrement scientifique

#### Septembre 2008 -

Co-encadrement (50%) de la thèse de Vincent Duval avec Yann Gousseau.

**Sujet de thèse :** *Adaptivité spatiale et méthodes variationnelles en traitement des images.*

L'idée du sujet de thèse de Vincent Duval est de développer des modèles variationnels en traitement d'image qui soient spatialement adaptatifs. Plus précisément, son sujet a commencé avec l'étude théorique du modèle  $TV - L^1$  et de ses propriétés morphologiques :

$$\inf_u \int_{\Omega} |Du| + \lambda \|f - u\|_{L^1(\Omega)} \quad (1.1)$$

La thèse de Vincent Duval a commencé début septembre 2008, et il a déjà un article de conférence internationale à son actif (C13), et 2 articles de journaux soumis (P1, P3).

#### Janvier 2009 - Décembre 2009

Co-encadrement (50%) du postdoc de Pierre Maurel, avec Gabriel Peyré.

**Sujet de postdoc :** *Adaptivité fréquentielle en décomposition d'image. Applications en imagerie médicale.*

Le postdoc de Pierre Maurel est financé via l'ANR NATIMAGES. L'idée du sujet du postdoc est de reprendre le modèle de décomposition d'images de type  $TV$ -Hilbert que j'avais proposé dans A9. En utilisant les travaux de Gabriel Peyré, il est possible de construire des opérateurs fréquemment adaptatifs (C12). Ils permettront de récupérer des textures allongées. Nous appliquerons ensuite cette méthode en imagerie médicale (IRM taggée).

#### Mars 2005 - Décembre 2007

Participation à l'encadrement du travail de thèse de Bin Luo (directeurs : Henri Maître et Yann Gousseau).

**Sujet de thèse :** *Echelle et résolution en imagerie de télédétection.*

J'ai été membre invité du jury de thèse de Bin Luo. J'ai co-signé toutes les publications de Bin Luo pendant sa thèse (A12, A14, A16, C7, C8, C9, C10, C14).

Bin Luo est actuellement postdoc au GIPSA-lab (Grenoble).

## **Résumé de la thèse de Bin Luo :**

L'une des problématiques actuelles de l'interprétation des images issues des archives satellitaires concerne la multiplication des satellites et des capteurs. Cette diversité est également un facteur de confusion et d'erreur, car les apparences de ces diverses images peuvent rendre plus difficile leur exploitation. Typiquement lors d'une fouille de données, les critères qui permettent de rappeler des scènes d'intérêt peuvent fonctionner pour un capteur mais pas pour un autre et l'on peut ainsi ignorer des informations d'intérêt. La différence la plus importante causée par le changement du capteur est probablement le changement de résolution qui est pris en compte dans la première partie de cette thèse. Le but de cette partie est de concevoir des outils pour caractériser des images provenant de différents capteurs (en prenant notamment en compte leurs résolutions). Il s'agit là d'un travail indispensable afin de pouvoir exploiter les archives d'images satellitaires.

Afin de comparer des images issues de différents capteurs et à différentes résolutions, nous proposons tout d'abord une primitive pertinente qui caractérise la scène capturée : l'échelle caractéristique. Dans la littérature, de nombreuses méthodes sont proposées pour calculer l'échelle caractéristique d'une image. La plupart reposent sur l'espace multi-échelle linéaire et ne sont pas invariantes par changement de résolution. En utilisant le même outil (l'espace multi-échelle linéaire) et en prenant en compte le modèle d'acquisition, l'échelle caractéristique que nous proposons caractérise la taille moyenne des éléments dans la scène. Ainsi, quelle que soit la résolution de l'image sur laquelle nous calculons cette échelle caractéristique, si la scène reste la même, l'échelle calculée doit être la même. Cette invariance est validée sur des images multi-résolutions fournies par le CNES. Ensuite, basée sur la même idée, i.e. en étudiant l'influence du modèle d'acquisition d'image sur l'analyse multi-échelle, nous avons proposé un schéma afin de rendre comparables des primitives extraites à différentes résolutions. Ce schéma est également validé par des expériences de classification et de la mise en correspondance d'images multi-résolutions.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous revenons au problème de l'estimation des échelles dans une image. Pour des images dont les structures varient spatialement, nous avons besoin d'avoir des primitives locales afin de caractériser ces structures séparément. Dans cette partie, nous nous intéressons donc à l'estimation d'échelles locales. Nous calculons ce que nous appelons une carte d'échelle, c'est-à-dire que nous calculons une échelle caractéristique en chaque pixel d'une image, définie comme l'échelle de la structure la plus significative contenant ce pixel. Pour trouver ces structures pertinentes, la précision spatiale pour l'estimation des échelles locales est très importante, c'est pourquoi nous utilisons dans cette partie un espace multi-échelle non-linéaire, la carte topographique d'une image, permettant de bien préserver les contours.

## **Mai 2008 - Septembre 2008 :**

Co-encadrement (50%) du stage de master 2 de Milena Cortes (Ecole Centrale Paris, master MVA) avec Mila Nikolova. Sujet de stage : Dématriçage d'image par méthodes variationnelles. Ce stage de master 2 a été financé via l'ANR Freedom.

## **Mars 2008 - Juin 2008 :**

Encadrement du stage de Master 1 de Quentin Dunstetter (ENS Cachan). Sujet du stage : Comparaison de différents algorithmes pour minimiser la variation totale en traitement d'image.

Quentin Dunstetter prépare actuellement l'agrégation de Mathématiques dans le cadre de sa troisième année à l'ENS Cachan.

## 1.4.2 Enseignement

Depuis mon recrutement au CNRS, j'ai continué à avoir une activité d'enseignement.

- Oraux blancs d'agrégation (analyse et calcul scientifique) depuis 2006 au département de Mathématiques de l'ENS Cachan (16h par an en moyenne).
- Cours/TD/TP d'optimisation (préparation à l'agrégation de mathématiques, option calcul scientifique) depuis 2008 à l'ENS Cachan (12 heures par an).
- Cours et TPs de master 2. Dans le cadre du master MVA de l'ENS Cachan (Mathématiques, Vision, et Apprentissage), je donne un cours intitulé : "Calcul des variations, optimisation, et applications" depuis 2007 avec Mila Nikolova (30 heures de cours par an).
- Formation à la Sagem en traitement d'image (2006 et 2008, 6 heures à chaque séance).
- Correction des écrits (épreuve de Mathématiques) du concours d'entrée aux ENS depuis 2006.
- Examineur à l'épreuve orale de Mathématiques pour le concours d'entrée en première année à l'ENS Cachan, section MP, depuis 2008.
- Mars 2008 : participation à un cours de master 2 (4h) à l'Institut Henri Poincaré : Méthodes variationnelles et parcimonieuses en traitement des signaux et des images
- Janvier-février 2006 : Cours (7h30) ("Traitement d'image par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles") à Supaéro, Toulouse. 2h30 de TP sur le même sujet en mars 2008.
- Avril 2005 : TD (15h) au LAMSIM, Tunis : Travaux pratiques et exercices sur le traitement d'image par EDP et le calcul variationnel.

J'ai obtenu *l'agrégation de Mathématiques* en juillet 2001. J'ai été titularisé en septembre 2004, après 2 ans de monitorat à l'Université de Nice Sophia-Antipolis.

**Supports de cours :** Les documents suivants sont téléchargeables à l'adresse :

<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Membres/aujol/enseignements.html>

- *Traitement d'image par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles (2005)*  
Ce document correspond au cours/TP que j'ai donné à Tunis au printemps 2005. Il a également été la base de mon cours à supaéro en 2006 et 2008. Il s'agit aussi du support principal de mes formations à la Sagem en 2006 et 2008.
- *Calculus of variations in image processing (2008)*  
Ce support de cours correspond au cours de master 2 que j'enseigne dans le master MVA depuis 2007. Il est remis à jour chaque année.
- *Introduction to optimization (2008)*  
Ce document correspond au cours d'optimisation que j'enseigne depuis 2008 aux élèves de l'ENS Cachan du département de Mathématiques préparant l'agrégation avec l'option calcul scientifique.

## 1.5 Participation à la vie scientifique et responsabilités collectives

### 1.5.1 Organisation de conférences, workshops, congrès ...

- Depuis septembre 2006 : responsable du séminaire hebdomadaire du CMLA avec Karine Beauchard.  
Pour plus d'informations, la page web du séminaire est disponible à l'adresse :  
<http://www.cmla.ens-cachan.fr/manifestations/seminaire.html>
- Janvier 2007 : co-organisateur (avec Gabriel Peyré et Jalal Fadili) du Workshop "An interdisciplinary approach to Textures and Natural Images Processing" 8-9 January 2007, Paris, France. Cet évènement a été un succès qui a réuni pendant deux jours plus de 200 participants.  
Pour plus d'informations, la page web du workshop est disponible à l'adresse :  
<http://www.ceremade.dauphine.fr/peyre/workshop-textures/>
- Mars 2008 : co-organisateur (avec Gabriel Peyré et Jalal Fadili) du cours d'école doctorale "Variational and Sparsity Methods in Image and Signal Processing" , IHP Paris. Plus de 120 personnes se sont inscrites pour cet évènement.  
Pour plus d'informations, la page web du cours est disponible à l'adresse :  
<http://www.ceremade.dauphine.fr/peyre/cours-ihp-2008/>
- Juillet 2008 : co-organisateur (avec Mila Nikolova et Otmar Scherzer) de 3 minisymposia à la SIAM Conference on Imaging Science 2008 (MS2, MS13, MS21) : Practical minimization methods for nonconvex energies, General (nonlinear nonconvex) models.

### 1.5.2 Expertise

- Reviewer pour de nombreux journaux de Mathématiques appliquées et de traitement d'image : SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation, SIAM Journal on Applied Mathematics, SIAM Journal on Imaging Sciences, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Mathematical analysis and applications, International Journal on Computer Vision, Journal of Visual Communication and Image Representation, Machine Vision and Application Journal, Contemporary Mathematics, IEEE Transactions on Image Processing, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Signal Processing Letters, IEEE Transactions on Signal Processing, Computer Vision and Image Understanding Registration, EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, Journal of Electronic Imaging, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, ACIVS, ISSPA, CMA.

### 1.5.3 Divers

- Depuis janvier 2007 : Membre titulaire de la commission de spécialistes de l'ENS Cachan (section 26).
- Depuis janvier 2008 : Membre titulaire du conseil du laboratoire (CMLA).





# Chapitre 2

## Résumé de mon activité de recherche

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Rappels sur mon travail de thèse

Mon travail de thèse, soutenue en juin 2004, a porté sur l'étude de la texture par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles. J'ai été encadré par Gilles Aubert (Université de Nice Sophia-Antipolis) et Laure Blanc-Féraud (laboratoire I3S). J'ai également été amené à travailler avec Antonin Chambolle (CMAP). Je me suis principalement intéressé à deux problèmes :

- Le problème de décomposition d'image [94] : étant donnée une image  $f$ , l'objectif est de séparer  $f$  en deux composantes  $u$  et  $v$  sous la contrainte  $f = u + v$ . La composante  $u$  contient l'information géométrique de l'image, il s'agit en quelque sorte d'une esquisse de l'image originale. La composante  $v$  contient les éléments oscillants, et dans le cas où l'image de départ  $f$  est non bruitée,  $v$  correspond en fait à la partie texture (cf Figure 2.1). Cette problématique a été abordée dans les publications [17, 11, 19] au cours de ma thèse. L'idée de ces méthodes est de trouver des espaces adaptés à chaque composante.

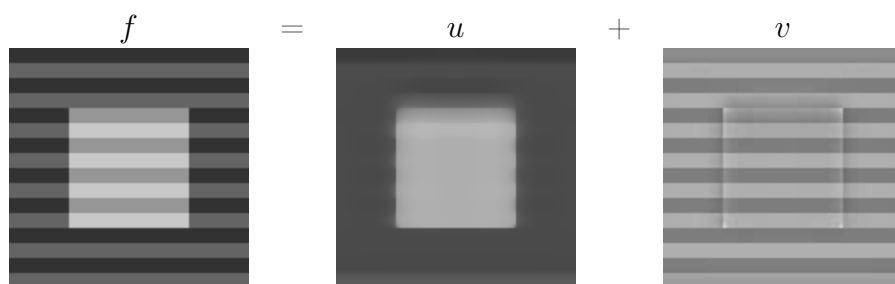


FIG. 2.1 – Décomposition  $f = u + v$  ;  $u$  contient l'information géométrique, et  $v$  l'information texture.

- Le problème de classification d'image (cf Figure 2.2) : on peut voir ce problème comme un problème de partition de l'image. Etant donné un certain nombre de classes caractérisées par certains types d'attributs, l'objectif est d'affecter à chaque pixel une étiquette indiquant à quelle classe il appartient. Cette problématique a été abordée dans les publications [18, 12] au cours de ma thèse.

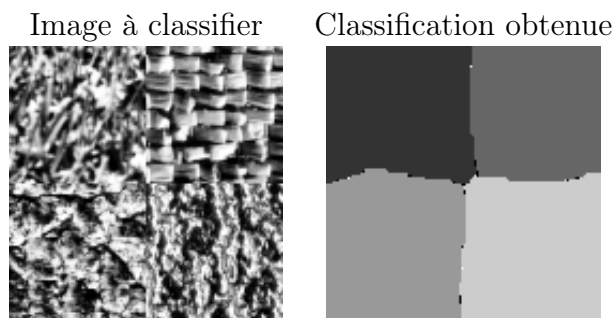


FIG. 2.2 – Exemple de résultat de classification

## 2.1.2 Méthodes variationnelles en traitement d'image

J'ai continué d'effectuer mes recherches en Mathématiques appliquées au traitement d'image. J'ai privilégié les approches de type variationnel. En fonction du problème de traitement d'image considéré, on construit une fonctionnelle dont le minimiseur correspond à l'image recherchée. Outre leur grande flexibilité, l'intérêt de ces approches est de pouvoir connaître des résultats qualitatifs sur les solutions obtenues, et ainsi de pouvoir évaluer l'efficacité des modèles.

On dispose en principe d'une mesure  $f$ , et on cherche à reconstruire une image  $u$  définie sur un ouvert  $\Omega$  inclus dans  $\mathbb{R}^2$ ;  $u$  est vue comme une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  appartenant à un espace de Banach  $E$ . Une étape fondamentale dans la modélisation du problème consiste à proposer une fonctionnelle

$$\inf_{u \in E} \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx \quad (2.1)$$

telle qu'un minimiseur corresponde à une solution du problème de traitement d'image considéré. L'outil essentiel utilisé ensuite, pour caractériser et calculer une solution, est l'équation d'Euler-Lagrange associée [15].

Un exemple typique de fonctionnelle  $F$  considérée en restauration/déconvolution d'image est la suivante :

$$\inf_u (\|f - Au\|^2 + L(u)) \quad (2.2)$$

où  $f$  est le signal observé,  $A$  un opérateur linéaire, et  $L$  une fonction de régularisation. Le critère de régularisation le plus simple est  $L(u) = \|\nabla u\|^2$ . Il est alors très facile de calculer numériquement la solution (avec la transformée de Fourier discrète par exemple), mais une telle régularisation ne permet pas de récupérer les bords de l'image dans la solution  $u$  (en fait toutes les hautes fréquences de l'image  $f$  sont enlevées, et les bords contiennent en particulier des hautes fréquences). Un choix qui a connu un très grand succès dans la communauté traitement d'image pour la régularisation est celui de la variation totale [109], i.e.  $L(u) = \int_{\Omega} |Du|$ , et  $E = BV(\Omega)$  l'espace des fonctions à variation totale bornée. Si un tel choix de régularisation permet effectivement d'obtenir de bons résultats de restauration, il présente néanmoins l'inconvénient d'être un terme non différentiable. Par conséquent, la question de minimiser efficacement de telles énergies à été la source de nombreux travaux.

On montre des exemples de restauration d'images avec différents choix de régularisation sur la Figure 2.3. Un autre axe de recherche important ces dernières années a porté sur le choix de la norme utilisée pour l'attache aux données  $f - Au$  dans (2.2) (nous reviendrons sur ce problème au Chapitre 3).

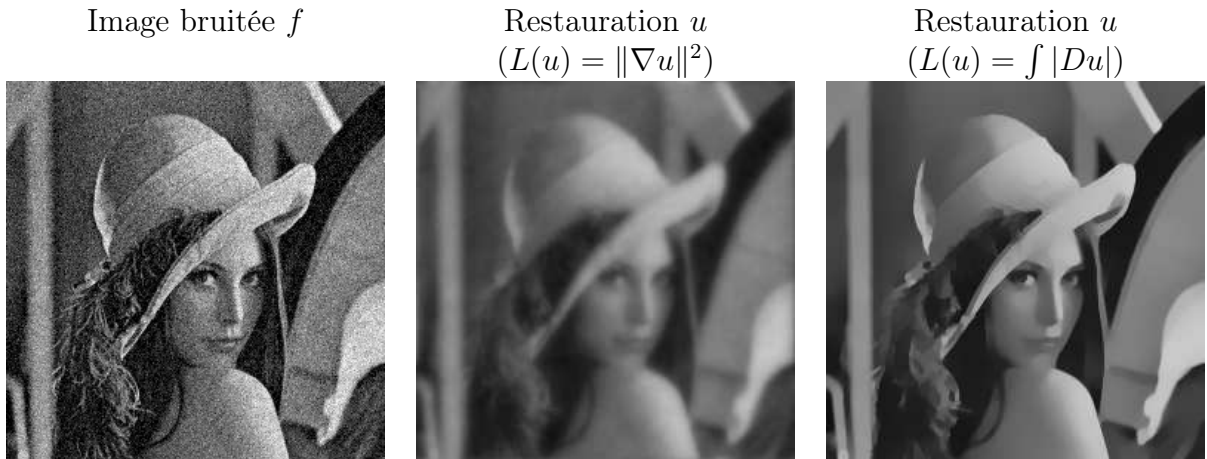


FIG. 2.3 – Exemples de restauration d’image avec la fonctionnelle (2.2) (dans le cas où  $A$  est l’opérateur identité) pour différents choix de régularisations  $L$ .

### 2.1.3 Mobilité géographique et thématique

Depuis la fin de ma thèse, j’ai continué à travailler avec mes anciens directeurs à Nice, Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud [14] via l’ANR DetectFine, sur la détection de structures fines dans les images. Avec Gilles Aubert, je me suis également intéressé aux décompositions multiplicatives dans [13].

J’ai effectué un premier postdoc à UCLA (Los-Angeles) au département de Mathématiques, sous la direction du professeur Tony Chan. J’ai ainsi notamment pu poursuivre mon étude du problème de décomposition d’image. Cela m’a amené à collaborer avec de nombreux chercheurs présents à UCLA pendant mon séjour : Guy Gilboa, Sung Ha Kang, David Strong, Luminita Vese, Stanley Osher, Tony Chan [22, 23, 20, 118, 21], et plus récemment [65].

J’ai ensuite effectué un deuxième postdoc à l’ENST Paris sous la direction du professeur Henri Maître. Cela m’a permis de me familiariser avec les problématiques du CNES en imagerie satellitaire. J’ai ainsi pu commencer des collaborations fructueuses avec des chercheurs de l’ENST : Yann Gousseau, Saïd Ladjal, Bin Luo, Henri Maître [88, 86, 85]. C’est aussi à cette occasion qu’ont pu être jetées les bases de l’ANR Freedom, portant sur la restauration des films. Ce projet a notamment débouché sur une collaboration avec Simon Masnou et Saïd Ladjal [24]. Enfin, je co-encadre avec Yann Gousseau la thèse de Vincent Duval depuis septembre 2008 [64].

J’ai été recruté comme chargé de recherche au CNRS, affecté au CMLA à partir de novembre 2005. Une partie importante de mon activité a consisté à poursuivre mes collaborations avec Nice, UCLA, et l’ENST Paris. J’ai également été naturellement intégré dans le projet MISS (projet commun CMLA/CNES). Ma contribution au projet s’est orientée vers des problèmes d’optimisation au cours d’une collaboration avec Andrés Almansa, Vicent Caselles et Gabriele Facciolo [67]. J’ai également poursuivi de manière indépendante des travaux de recherche en optimisation pour la restauration d’image [16]. Ce travail s’est prolongé naturellement lors d’une collaboration avec Luminita Vese et Vincent Duval [65]. Enfin, via l’ANR Natimages, portant sur la modélisation des textures dans les images naturelles, j’ai commencé une collaboration avec Gabriel Peyré (Dauphine) et Pierre Maurel (CMLA).

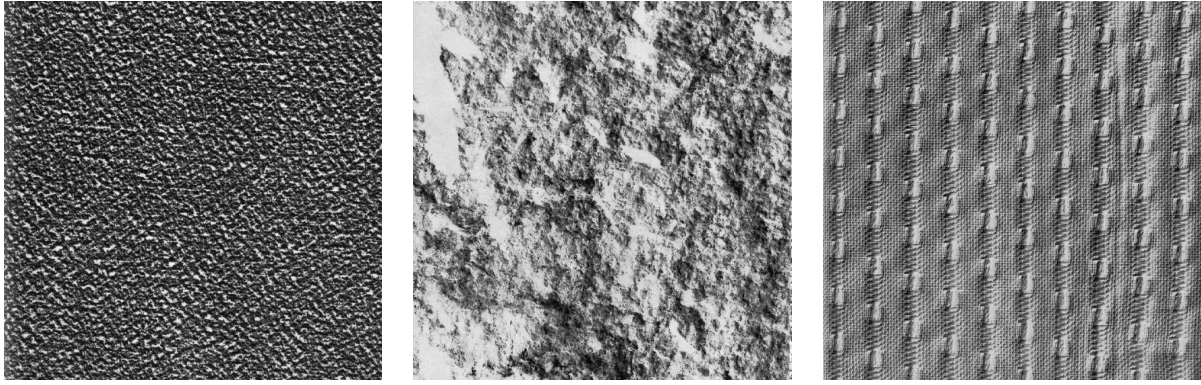


FIG. 2.4 – Exemples de textures fréquemment homogènes

### 2.1.4 Textures

Une partie de mon travail en traitement d'image tourne autour du problème de modélisation mathématique des textures. Une texture est un champ de l'image qui apparaît à un observateur comme un domaine homogène sous certaines conditions. On parle parfois de phénomène pseudo-périodique pour décrire une texture. L'œil humain est très sensible aux textures, et elles jouent un rôle fondamental dans notre compréhension des images. Un problème ouvert est celui de donner une définition mathématique de la texture. Il existe plusieurs approches pour décrire une texture :

1. On peut essayer d'aborder une texture par ses aspects fréquentiels [94] (cf par exemple la Figure 2.4). Grâce à la pseudo périodicité, cette approche permet de bien décrire les textures à faible contenu géométrique. Il s'agit de l'approche que j'étudie dans [22, 23, 20, 21, 65], et qui est présentée au Chapitre 3.
2. Une autre approche consiste à décrire une texture à l'aide de son ou ses motifs de base (cf par exemple la Figure 2.5). On parle de *texton* [78]. On peut alors caractériser une texture à l'aide de l'échelle de ce *texton*. Il s'agit de l'approche que je retiens dans [118, 85, 64], et qui est présentée au Chapitre 5.
3. Une troisième approche consiste à décrire une texture à l'aide de copies de morceaux de textures [66]. Il s'agit d'une approche au départ purement algorithmique. Je considère cette démarche dans [24], comme exposé au Chapitre 6.

Ces trois grands types d'approches constituent trois de mes principaux axes de recherche (les Chapitres 3, 5, et 6 du présent manuscrit).

## 2.2 Décomposition additive d'image (A7, A8, A9, A11, A17, P1) - [22, 23, 20, 21, 16, 65]

La majeure partie de mon travail de thèse était liée au problème de décomposition d'image [17, 11, 19]. De manière naturelle, cette problématique a constitué mon principal thème de recherche lors de mon postdoc à UCLA [21, 22, 23]. J'ai récemment recommencé à m'intéresser au problème de décomposition pour les images couleur [65].

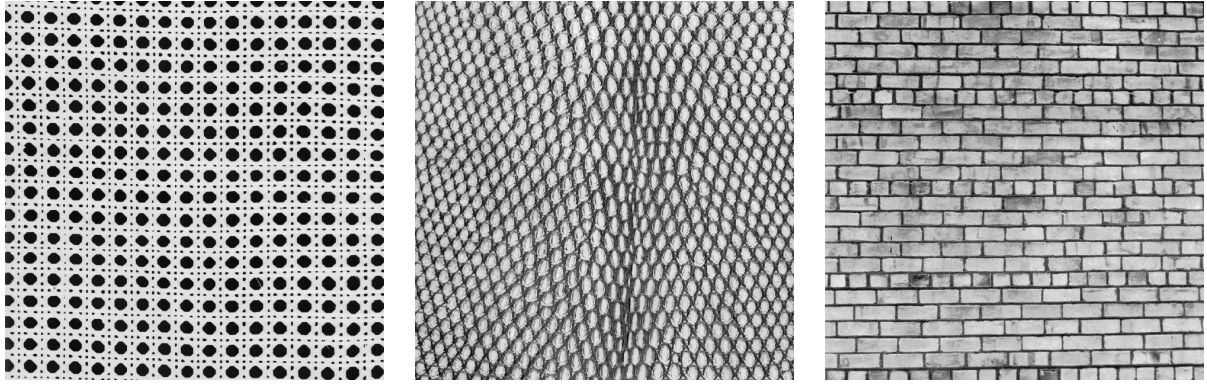


FIG. 2.5 – Exemples de textures à textons

## 2.2.1 Présentation du problème

On suppose qu'une image en niveau de gris correspond à une fonction  $f$  définie sur un domaine  $\Omega$  inclus dans  $\mathbb{R}^2$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (la plupart du temps,  $f$  prendra ses valeurs dans l'intervalle  $[0; 255]$ ).  $\Omega$  est supposé être un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à bord Lipschitz.

Etant donnée une image  $f$ , l'objectif est de la séparer en deux composantes  $u$  et  $v$  sous la contrainte  $f = u + v$ . La composante  $u$  contient l'information géométrique de l'image (on peut parler d'esquisse de l'image initiale), et  $v$  l'information texture (dans le cas où  $f$  n'est pas bruitée). Depuis le livre d'Y. Meyer [94], une méthode pour calculer ce genre de décomposition consiste à minimiser une énergie du type :

$$\inf_{f=u+v} (\|u\|_S + \|v\|_T) \quad (2.3)$$

$\|\cdot\|_S$  est une norme adaptée à la géométrie (aux structures), au sens où elle reste petite si  $u$  ne contient que de l'information géométrique. Un choix typique est  $\|u\|_S = J(u) = \int_{\Omega} |Du|$ .  $\|\cdot\|_T$  est une norme adaptée aux textures, au sens où  $\|v\|_T$  est petite si  $v$  est une texture. Un choix typique pour  $\|\cdot\|_T$  est celui de la norme d'un espace de Sobolev négatif [19]. Dans [94], Y. Meyer montre qu'un choix pertinent pour l'espace des textures est celui de  $G$  défini par :

$$G = \{v = \operatorname{div} g, g \in L^\infty\} \quad (2.4)$$

muni de la norme :

$$\|v\|_G = \inf \{\|g\|_\infty, v = \operatorname{div} g\} \quad (2.5)$$

L'espace  $G$  mesure mieux les oscillations que la norme  $L^2$ .

**Exemple :** Soit  $\Omega = (0, 2\pi)$ , et  $f_n(x) = \cos(nx)$ . Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,  $f_n$  oscille de plus en plus, et dans l'idée d'une décomposition comme dans (2.3), on aimerait avoir  $\|f_n\|_T \rightarrow 0$ .

Or  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{div}(\sin(nx))$ , et donc  $\|f_n\|_G \leq \frac{1}{n}$ . Mais  $\|f_n\|_{L^2}^2 = \pi$ .

Le premier algorithme de décomposition d'image a été introduit par L. Vese et S. Osher [121]. Le choix  $T = H^{-1}$  a ensuite été étudié dans [102]. Dans [17], nous avons proposé une méthode permettant de minimiser plus précisément l'énergie pour  $T = G$ .

## 2.2.2 Principales contributions

Mon travail a porté sur plusieurs points :

1. La modélisation : j'ai proposé différents espaces pour modéliser la partie texture d'une image. Notamment, j'ai proposé d'inclure des a priori de fréquences et/ou de directions pour construire une norme adaptée aux textures.
2. Le choix automatique du paramètre de régularisation : toutes les fonctionnelles proposées contiennent un paramètre qui contrôle l'importance accordée à chacune des deux composantes. (géométrie et texture). La qualité des résultats numériques dépend de manière cruciale du choix du paramètre, et il s'agit d'un verrou particulièrement difficile à traiter de manière efficace. J'ai proposé d'utiliser un critère de corrélation entre la composante géométrie et la composante texture.
3. L'optimisation : tous les modèles utilisés en décomposition d'image sont des fonctionnelles non différentiables. Il se pose donc le problème de savoir les minimiser efficacement. Les outils d'analyse convexe et de dualité s'avèrent précieux pour atteindre cet objectif. J'ai en particulier revisité l'algorithme de projection d'A. Chambolle [43] dans un contexte général introduit il y a près de 30 ans par Bermúdez et Moreno [28].
4. L'extension des modèles aux images couleurs, et l'utilisation des méthodes de décomposition en classification d'images.

## 2.3 Décomposition multiplicative (A13) - [13]

**Présentation :** Dans [13], un type de bruit très particulier est considéré : le bruit de speckle (chatolement) que l'on rencontre dans tous les systèmes d'imagerie active. Il s'agit d'une collaboration avec Gilles Aubert (Université de Nice-Sophia-Antipolis).

Si les modèles additifs de décomposition semblent pertinents en imagerie optique, ils sont par contre à remettre en question pour d'autres types d'images, et notamment en imagerie active (images radar, laser, imagerie microscopique ...). L'idée du travail consiste à utiliser la modélisation classique en imagerie RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture), afin de proposer une décomposition plus satisfaisante pour l'imagerie active. Une approche populaire en imagerie RSO [120] consiste à supposer une décomposition multiplicative de l'image  $f$ , sous la forme  $f = uv$ . La composante  $u$  correspond à la scène à reconstruire, et  $v$  au bruit de chatolement (speckle), i.e. la partie oscillante de  $f$ . L'hypothèse statistique la plus simple, qui soit consistante avec la modélisation multiplicative, est de supposer que  $v$  a une distribution selon une loi gamma.

**Fonctionnelle :** Nous avons utilisé la modélisation suivante : une modélisation multiplicative sous la forme  $f = uv$ , avec des a priori bayésiens sur chacune des composantes. Nous avons choisi un a priori de type Gibbs pour  $u$  en  $\frac{1}{Z} \exp(-\phi(u))$ , avec  $\phi(u) = |Du|$ . Pour la composante  $v$ , nous avons supposé qu'elle suivait une loi gamma. La méthode du maximum de vraisemblance nous a ainsi amené à considérer l'énergie suivante ( $\Omega$  est le domaine de l'image) :

$$\int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} \left( \frac{f}{u} + \log u \right) dx \quad (2.6)$$

La décomposition cherchée est obtenue pour  $u$  fonction à variation bornée minimisant l'énergie ci-dessus sous la contrainte  $u > 0$  (et en supposant  $f > 0$ ).

## Principales contributions apportées dans [13] :

1. On propose une énergie (2.6) consistante avec la physique du problème.
2. Bien que la fonctionnelle (2.6) soit non convexe, on montre l'existence d'une solution, ainsi qu'un principe de comparaison.
3. On montre la convergence d'un schéma aux différences finies vers un minimiseur de (2.6).

## 2.4 Echelle des éléments constituant une image (A10, A16) - [118, 85]

Une manière d'étudier une texture est de s'intéresser à son motif de base, appelé *texton* [78]. Plus simplement, on peut s'intéresser à l'échelle de cet élément. D'une manière plus générale, on voit l'intérêt de connaître l'échelle des éléments dans une image. De plus, il semble bien que pour aller plus loin dans le problème de décomposition d'image en géométrie et texture, afin notamment d'obtenir des algorithmes spatialement adaptatifs, la notion d'échelle soit fondamentale. Toutes ces raisons m'ont poussé à étudier la notion d'échelle des éléments dans une image.

### 2.4.1 Une première approche (A10) - [118]

Dans [118], j'ai proposé une méthode de calcul local d'une échelle basée sur le modèle ROF [109]. L'idée de la méthode est de tirer parti du défaut bien connu du modèle  $TV - L^2$  : celui d'érosion. En effet, lorsqu'on débruite un objet avec ce modèle, son contraste diminue. La perte de contraste de l'objet est essentiellement inversement proportionnelle à son échelle. Si on définit l'échelle d'un objet comme son aire divisée par son périmètre, le résultat devient même exact dans le cas d'un cercle [119]. En mesurant la baisse de contraste local dans l'image, on peut en déduire la taille des objets qui ont été éliminés. L'algorithme proposé dans [118] permet, une échelle d'objet à enlever étant donnée par l'utilisateur, de calculer par dichotomie le bon paramètre de régularisation. Il s'agit en quelque sorte de l'idée duale d'un principe classique utilisé en restauration d'image. Plutôt que de préciser la taille des objets à conserver, on indique la taille des objets à enlever. On obtient par exemple de bons résultats de débruitage en enlevant tous les objets de taille 1.

Bien que très naïve, l'approche proposée dans [118] pour calculer l'échelle des éléments des images a été la source d'inspiration d'un grand nombre de mes travaux ultérieurs [88, 85].

### 2.4.2 Cartographie d'échelle dans une image (A16) - [85]

Dans [85], les limites de notre travail précédent [118] et le lien de ce modèle avec d'autres types de définitions d'échelle par des méthodes variationnelles ont été étudiés. Il s'agit d'une collaboration avec Bin Luo et Yann Gousseau (Telecom ParisTech).

Dans ce travail, nous proposons une méthode permettant de définir une échelle caractéristique en chaque pixel d'une image. Intuitivement, l'échelle d'un pixel est définie comme la taille de l'objet le plus contrasté contenant ce pixel. Formellement, l'approche proposée repose sur la carte topographique, constituée des frontières des ensembles de niveau de l'image. Il s'agit d'une représentation exhaustive, hiérarchique et géométrique du contenu de l'image, [42]. En particulier, nous exploitons la structure d'arbre de la carte topographique [96] pour



nous affranchir des différentes étapes de lissage linéaire requises par les approches classiques de définition de l'échelle caractéristique, ce qui nous permet de définir une carte d'échelle précise. Cela nous permet d'associer une forme  $f(x)$  à chaque pixel  $x$ . L'échelle du pixel  $x$  est alors donnée par la formule :  $E(x) = \frac{|f(x)|}{P(f(x))}$ , i.e. l'aire de la forme divisée par son périmètre.

On montre dans [85] que dans le cas où une image est la fonction caractéristique d'un ensemble convexe de Cheeger en lui-même (cf [6]), alors les définitions d'échelle proposées dans [118] et [85] sont équivalentes. On montre aussi que dès que l'image considérée est bruitée, la méthode naïve proposée dans [118] échoue, contrairement à [85]. Nous avons utilisé avec succès cette approche [85] en imagerie satellitaire.

### 2.4.3 Modèle $TV - L1$ et échelle (P3) - [64]

Dans ce travail, on s'intéresse au modèle :

$$\inf_{u \in BV(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} |Du| + \lambda \|f - u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \quad (2.7)$$

Ce modèle a d'abord été introduit pour les signaux 1D dans [1]. M. Nikolova l'a ensuite proposé dans [101] pour faire de la restauration d'image dans le cas du bruit impulsionnel. La norme  $L^1$  ne vérifie évidemment pas la propriété d'être faible pour les éléments oscillants, mais il a pourtant été montré qu'il s'agissait d'un bon choix pour faire de la décomposition d'image [54, 126]. L'existence d'une solution pour (2.7) est standard. Il n'y a par contre pas forcément unicité (cf par exemple [48]).

DÉFINITION 2.4.1 (ENSEMBLES DE CHEEGER [6])

Soit  $\Omega$  un ouvert. La constante de Cheeger de  $\Omega$  est :

$$\lambda_\Omega = \min_{A \subset \Omega} \frac{\text{Per}(A)}{|A|} \quad (2.8)$$

Un ensemble de Cheeger de  $\Omega$  est un ensemble  $F$  solution du problème de minimisation ci-dessus. On dira que  $\Omega$  est Cheeger en lui-même s'il est lui-même solution de (2.8).

**Équivalence géométrique :** L'une des contributions de [64] est de montrer précisément l'équivalence entre le problème (2.7) et le problème géométrique suivant ( $F \subset \mathbb{R}^2$  est un ensemble donné) :

$$\inf_{U \subset \mathbb{R}^2} E_G(U) := \text{Per}U + \lambda |U \Delta F| \quad (2.9)$$

Le résultat d'équivalence dit que  $u$  est solution de (2.7) si et seulement si pour presque tout  $\mu \in \mathbb{R}$ , l'ensemble de niveau  $U_\mu$  de  $u$  est solution de (2.9) avec  $F = F_\mu$  ensemble de niveau de  $f$ , où  $U_\mu = \{x, u(x) > \mu\}$  et  $F_\mu = \{x, f(x) > \mu\}$ .

**Comportement des solutions pour une donnée convexe :**

DÉFINITION 2.4.2 (EROSION ET OUVERTURE)

Soit  $C \subset \mathbb{R}^2$ . On définit respectivement l'érodée et l'ouverture de rayon  $r > 0$  de  $C$  par :

$$C_r := C \ominus B(0, r) := \{x \in C, B(x, r) \subset C\}$$

$$C^r := C_r \oplus B(0, r) = \bigcup_{B(x, r) \in C} B(x, r)$$

### THÉORÈME 2.4.3 ([64])

Soit  $C$  un ensemble borné convexe. Il existe  $\lambda^* > 0$  tel que :

- Pour  $\lambda > \lambda^*$ , l'ensemble  $C^{1/\lambda}$  est l'unique solution du problème géométrique (2.9) (avec  $F = C$ ).
- Pour  $\lambda = \lambda^*$ , l'ensemble des solutions du problème géométrique (2.9) (avec  $F = C$ ) est exactement  $\{C^{1/\lambda^*}, \emptyset\}$ , et  $C^{1/\lambda^*}$  est l'ensemble de Cheeger de  $C$ .
- Pour  $\lambda < \lambda^*$  l'unique solution du problème géométrique (2.9) (avec  $F = C$ ) est  $\emptyset$ .

Ce résultat explique le comportement étonnamment bon du modèle  $TV - L^1$  (2.7) pour le problème de la séparation géométrie-texture  $u + v$ . De manière informelle, l'action de  $TV - L^1$  sur les images consiste en fait à détruire les petits détails et les grandes courbures, action renforcée par un seuillage sur le rapport périmètre/aire. Lorsque le paramètre de fidélité  $\lambda$  varie, les objets sont altérés par des ouvertures ou fermetures et disparaissent lorsque leur rapport périmètre sur aire est trop petit. La partie  $v$  regroupe donc les objets d'échelle fine tandis que la partie  $u$  regroupe les objets d'échelle grossière, plus proches de ce que l'on attend d'une partie géométrie.

Une autre contribution [64] est de proposer un algorithme géométrique rapide permettant de minimiser (2.7). Enfin, on étudie le cas où  $\lambda$  n'est plus une constante mais une fonction à variation bornée, ce qui constitue un pas vers l'adaptivité spatiale.

## 2.5 Inpainting (P2) - [24]

Une approche intéressante en synthèse de texture est celle des algorithmes de type copier-coller. Mon étude des textures dans les images m'a naturellement amené à étudier ce genre de méthode. C'est pourquoi je me suis intéressé à la méthode de copier-coller d'un point de vue variationnel dans [24]. Cette étude a eu lieu dans le cadre de l'ANR Freedom. Il s'agit ici d'une collaboration avec Simon Masnou (Paris 6) et Saïd Ladjal (Telecom ParisTech).

L'inpainting consiste à retrouver une partie manquante de l'image (vieille photographie, retouche d'image, ...). On peut formuler le problème de la manière suivante. Etant donné un domaine  $A$  à reconstruire, on utilise l'information valide autour de  $A$  pour synthétiser l'image la plus plausible dans  $A$ . Plusieurs classes de méthodes ont été proposées au cours des dix dernières années, et parmi elles celle basée sur l'idée du copier-coller [66, 68, 122]. L'hypothèse sous-jacente de ces méthodes est la localité et la stationnarité à une certaine échelle d'une texture. L'idée de base est d'utiliser la notion de patch/échantillon.

Notre motivation pour étudier les méthodes de type copier-coller d'un point de vue analyse est double :

1. d'une part, proposer une interprétation variationnelle générale dans le domaine continu.
2. d'autre part, expliquer d'un point de vue variationnel, la capacité de ces méthodes à reconstruire la géométrie, et à caractériser le type de géométrie reconstruite.

On part d'un modèle proposé dans [57]. L'idée est de proposer un modèle qui imite le principe des algorithmes de copier-coller (les versions ou des morceaux entiers de patch sont copiés [81, 104, 53]). On s'intéresse donc à trouver une application  $T$  qui prend les patches de  $\Omega \setminus A$ , les translate et les tourne dans  $A$ .  $T$  sera une roto-translation par morceaux de  $A$  dans  $\Omega \setminus A$ . On note  $B_r(x)$  la boule de centre  $x$  de rayon  $r$ . Une fois  $T$  donnée,  $u_0$  peut être

définie sur  $A$  par la formule  $u_0(x) = u_0(T(x))$  pour tout  $x \in A$ . Le principal critère que nous proposons dans [24] est le suivant :

$$\mathcal{E}_1(T) = \int_{x \in A+B_r} \int_{y \in B_r} |u_0(T(x+y)) - u_0(T(x) + \nabla T(x) y)|^2 dy dx$$

avec les contraintes

- $u_0$  donné sur  $\Omega \setminus A$  ;
- $T(A + B_r) \subset \Omega \setminus (A + B_r)$  ;
- $T = \text{Id}$  sur  $\Omega \setminus (A + B_r)$  ;

On montre que  $\mathcal{E}_1$  peut être minimisée dans la classe des roto-translations de  $\Omega$  dans lui-même.

On propose également plusieurs variantes dans lesquelles la géométrie de l'image reconstruite est plus ou moins contrainte. Pour chaque modèle, on montre l'existence d'une solution. Enfin, on montre sur des exemples simples (images binaires) que ces fonctionnelles peuvent constituer des alternatives intéressantes par rapport aux algorithmes de type copier-coller proposés dans la littérature.

## 2.6 Applications en imagerie satellitaire (A12, A14, A15, A16) - [88, 86, 67, 85]

Lors de mon postdoc au département TSI à l'ENST Paris, puis ensuite au sein du projet MISS au CMLA, je me suis intéressé aux applications du traitement d'image en imagerie satellitaire. Les travaux présentés ici trouvent tous leur origine dans des questions posées par le CNES (par l'intermédiaire d'Alain Giros à l'ENST Paris, et Bernard Rougé au CMLA). Une spécificité de ces travaux est de prendre en compte explicitement, de manière plus ou moins précise, le système d'acquisition, et donc de traiter le problème de l'échantillonnage. Notons enfin que pour nous permettre de réaliser ces travaux, le CNES nous a fourni de nombreuses données.

### 2.6.1 Traitement de bases d'images satellites (A12, A14) - [88, 86]

Ces travaux ont été initiés lors de mon postdoc à l'ENST Paris. Ils se sont poursuivis dans le cadre de la thèse de Bin Luo. Il s'agit de collaborations avec Bin Luo, Yann Gousseau, Saïd Ladjal, et Henri Maître. Ils font partie des projets développés par le COC (Centre de Compétence) créé par le DLR, le CNES, et TELECOM ParisTech.

Ces dernières années, de très grosses bases d'images satellites ont été créées (bases dont la taille augmente chaque jour de plusieurs giga-bits). Ces bases sont constituées d'images provenant de différents satellites, et possédant donc des résolutions différentes. Dans le but de pouvoir utiliser ces bases, il est crucial de savoir indexer de manière efficace les images qui les composent. La solution passe par le développement d'attributs invariants par changement de résolution. Il s'agit ici de la spécificité du travail. La littérature est en effet riche en méthodes pour construire des attributs invariants par changement d'échelles, mais ces méthodes ne sont pas directement applicables à notre problème.

Notre travail consiste dans un premier temps à modéliser de manière suffisamment précise le processus d'acquisition des images satellitaires. Cela nous permet d'obtenir une formalisation mathématique du changement de résolution.

1. Dans [88], nous proposons une échelle caractéristique (i.e. une taille spatiale) invariante par changement de résolution. On étudie le problème d’extraire une échelle caractéristique dans une image satellite. Cet attribut est défini de manière à ce qu’il ne dépende pas de la résolution spatiale de l’image. Pour cela, on utilise conjointement l’espace multi-échelle linéaire, et la variation totale. L’échelle critique est définie comme celle pour laquelle la variation totale normalisée atteint son maximum.
2. Dans [86], nous adaptons la méthode précédente à l’interpolation d’attributs d’ondelettes, afin de pouvoir effectuer une classification invariante par changement de résolution des images satellites. En plus du soutien du CNES, j’ai également obtenu un financement BQR de l’ENS Cachan pour mener à bien ce projet. Nous indexons les images à l’aide d’attributs de texture. Afin de ne pas se limiter à des changements de résolution dyadiques, nous utilisons une transformée en ondelettes continue pour calculer les attributs.

### 2.6.2 Restauration d’image dans le cas d’un échantillonnage irrégulier (A15) - [67]

Dans [67], j’ai considéré le problème de restauration des images satellites dans le cadre d’un échantillonnage irrégulier (dans les deux travaux précédents, on prenait en compte l’échantillonnage, mais il était supposé parfaitement régulier). Il s’agit d’une collaboration avec Gabriele Facciolo, Andrés Almansa et Vicent Caselles, via le projet MISS.

On propose un algorithme de restauration pour des images à bande limitée dans le cas de l’échantillonnage irrégulier (perturbé), du débruitage, et de la déconvolution. On étudie l’application d’une famille de régularisateurs qui permettent de contrôler le comportement spectral de la solution, combinée aux algorithmes permettant de passer d’un échantillonnage irrégulier à un échantillonnage régulier proposés dans [74]. De plus, les contraintes dues au système d’acquisition sont prises en compte comme un ensemble de contraintes locales. L’analyse de ces contraintes conduit à un critère d’arrêt rapide, ce qui permet d’améliorer la vitesse de l’algorithme. Enfin, on présente des expériences de restauration d’images satellites, dans lesquelles les micro-vibrations sont responsables du type de distorsions observées.

### 2.6.3 Cartographie d’échelle pour l’imagerie satellitaire (A16) - [85]

Dans [85], nous proposons une méthode de calcul de carte d’échelle : à chaque pixel de l’image est associée une échelle spatiale. Il s’agit d’une collaboration avec Bin Luo et Yann Gousseau. De nombreux travaux traitent de l’extraction d’échelles caractéristiques à partir d’images numériques. Ces échelles sont liées aux tailles des structures (objets) constituant l’image. L’approche la plus classique, introduite par Lindeberg, consiste à étudier les extrema d’opérateurs différentiels dans un espace-échelle linéaire, voir [82]. Les travaux de [83] démontrent la pertinence de l’échelle pour l’extraction de zones urbaines sur des images satellitaires.

Pour utiliser la méthode présentée dans [85] (cf section 2.4.2) en imagerie satellitaire, il faut tenir compte du fait que toutes les images acquises par les satellites sont floues. Cela implique en effet qu’un contour net peut être transformé en une accumulation de lignes de niveau par l’opérateur de flou. La solution retenue dans [85] consiste à tenir compte de ce phénomène dans le calcul du contraste dans l’algorithme (les contrastes des lignes de niveau

d'un bord flou sont cumulés). Numériquement, nous obtenons ainsi des cartes d'échelle très précises spatialement.

## 2.7 Détection de structures fines dans les images (A6) - [14]

Dans [14], nous avons développé un modèle de détection de singularités de co-dimension 2 dans les images. Ce modèle est basé sur la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Il s'agit d'une collaboration avec Gilles Aubert (Université de Nice Sophia-Antipolis) et Laure Blanc-Féraud (laboratoire I3S). Ces travaux ont été poursuivis dans le cadre de l'ANR DetectFine.

Nous proposons un nouveau modèle mathématique pour détecter dans une image les singularités de codimension supérieure ou égale à deux. Cela signifie que nous voulons détecter des points dans des images 2-D, ou des points et des courbes dans des images 3-D. Nous nous inspirons des modèles de Ginzburg-Landau. Ces derniers se sont révélés efficaces pour modéliser de nombreux phénomènes physiques singuliers. Pour la détection de points dans une image 2D, la fonctionnelle considérée est la suivante :

$$F_\epsilon(u) = \mu \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - u_0|^2 \quad (2.10)$$

La donnée  $u_0$  est un champs vectoriel construit à partir de l'image ;  $u$  est un champs de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Les points singuliers recherchés correspondent aux zéros de  $u$ .

## Deuxième partie

### Activité de recherche détaillée



Le plan de cette deuxième partie est le suivant.

Dans le Chapitre 3, je présente mes contributions au problème de décomposition additive d'image. Cela correspond aux publications (A7, A8, A9, A11, A17, P1) - [22, 23, 20, 21, 16, 65]. Il s'agit de collaborations avec Tony Chan, Vincent Duval, Guy Gilboa, Sung Ha Kang, Stanley Osher, et Luminita Vese.

Le Chapitre 4 traite de mon travail relatif au problème de décomposition multiplicative d'image, travail qui a été publié dans (A13) - [13] (collaboration avec Gilles Aubert).

Au Chapitre 5, j'expose mes travaux traitant d'échelle dans les images. Cela correspond aux publications (A10, A16, P3) - [118, 85, 64]. Il s'agit de collaborations avec Tony Chan, Vincent Duval, Yann Gousseau, Bin Luo et David Strong.

Le Chapitre 6 concerne mon étude d'un point de vue variationnel des méthodes de type copier-coller pour l'inpainting (désoccultation d'image), étude publiée dans (P2) - [24] (collaboration avec Saïd Ladjal et Simon Masnou).

Dans le Chapitre 7, je présente mes contributions sur des problèmes concrets d'imagerie satellitaire. Cela correspond aux publications (A12, A14, A15, A16) - [88, 86, 67, 85]. Il s'agit de collaborations avec Andrés Almansa, Vicent Caselles, Gabriele Facciolo, Yann Gousseau, Saïd Ladjal, Bin Luo et Henri Maître.

Le Chapitre 8 rappelle mes travaux sur la détection de structures fines dans les images, travaux publiés dans (A6) - [14] (collaboration avec Gilles Aubert et Laure Blanc-Féraud).

Enfin, le Chapitre 9 présente mes perspectives de recherche.





# Chapitre 3

## Décomposition additive d'image (A7, A8, A9, A11, A17, P1) - [22, 23, 20, 21, 16, 65]

La majeure partie de mon travail de thèse était liée au problème de décomposition d'image [17, 11, 19]. De manière naturelle, cette problématique a constitué mon principal thème de recherche lors de mon postdoc à UCLA [21, 22, 23, 20]. J'ai récemment recommencé à m'intéresser au problème [65].

### 3.1 Présentation du problème

#### 3.1.1 Décomposition d'image

On suppose qu'une image en niveaux de gris correspond à une fonction  $f$  définie sur un domaine  $\Omega$  inclu dans  $\mathbb{R}^2$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (la plupart du temps,  $f$  prendra ses valeurs dans l'intervalle  $[0; 255]$ ). On suppose  $\Omega$  être un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à bord Lipschitz.

Le problème de décomposition d'image est le suivant : étant donnée une image  $f$ , l'objectif est de la séparer en deux composantes  $u$  et  $v$  sous la contrainte  $f = u + v$ . La composante  $u$  contient l'information géométrique de l'image (on peut parler d'esquisse de l'image initiale), et  $v$  l'information texture (dans le cas où  $f$  n'est pas bruitée). Depuis le livre d'Y. Meyer [94], une méthode pour calculer ce genre de décomposition consiste à minimiser une énergie du type :

$$\inf_{f=u+v} (\|u\|_S + \|v\|_T) \quad (3.1)$$

$\|\cdot\|_S$  est une norme adaptée à la géométrie (aux structures), au sens où elle reste petite si  $u$  ne contient que de l'information géométrique. Un choix typique est  $\|u\|_S = J(u) = \int_{\Omega} |Du|$ .  $\|\cdot\|_T$  est une norme adaptée aux textures, au sens où  $\|v\|_T$  est petite si  $v$  est une texture. Un choix typique pour  $\|\cdot\|_T$  est celui de la norme d'un espace de Sobolev négatif [19]. Dans [94], Y. Meyer montre qu'un choix pertinent pour l'espace des textures est celui de  $G$  défini par :

$$G = \{v = \operatorname{div} g, g \in L^\infty\} \quad (3.2)$$

muni de la norme :

$$\|v\|_G = \inf \{\|g\|_\infty, v = \operatorname{div} g\} \quad (3.3)$$

On considère souvent la famille de boules suivante dans  $G$  :

$$G_\lambda = \{v \in G, \|v\|_G \leq \lambda\} \quad (3.4)$$

L'espace  $G$  mesure mieux les oscillations que la norme  $L^2$ .

**Exemple :** Soit  $\Omega = (0, 2\pi)$ , et  $f_n(x) = \cos(nx)$ . Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,  $f_n$  oscille de plus en plus, et dans l'idée d'une décomposition comme dans (3.1), on aimerait avoir  $\|f_n\|_T \rightarrow 0$ .

Or  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{div}(\sin(nx))$ , et donc  $\|f_n\|_G \leq \frac{1}{n}$ . Mais  $\|f_n\|_{L^2}^2 = \pi$ .

Le premier algorithme de décomposition d'image a été introduit par L. Vese et S. Osher [121]. Le choix  $T = H^{-1}$  a ensuite été étudié dans [102]. Dans [17], nous avons proposé une méthode permettant de minimiser plus précisément l'énergie pour  $T = G$ .

### 3.1.2 Quelques modèles de décomposition d'image par méthodes variationnelles

Nous présentons ici différents modèles désormais classiquement utilisés en décomposition d'image, et auxquels nous ferons référence au cours du manuscrit.

**$TV - L^2$  (ROF) :** Ce modèle a été introduit dans [109] en restauration d'image, et a connu une nouvelle jeunesse en décomposition d'image depuis le livre d'Y. Meyer [94]. L'énergie considérée est la suivante :

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.5)$$

**$TV - H^{-1}$  (OSV) :** Ce modèle a été introduit dans [102] en décomposition d'image. L'énergie considérée est la suivante :

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{2\lambda} \|f - u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \quad (3.6)$$

**$TV - G$  :** Ce modèle a été introduit dans [94] en décomposition d'image. L'énergie considérée est la suivante :

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \|f - u\|_{G(\Omega)} \quad (3.7)$$

**$TV - L^1$  :** Ce modèle a d'abord été introduit pour les signaux 1D dans [1]. M. Nikolova l'a ensuite proposé en traitement d'image dans [101] pour faire de la restauration d'image dans le cas du bruit impulsif. L'énergie considérée est la suivante :

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \|f - u\|_{L^1(\Omega)} \quad (3.8)$$

La norme  $L^1$  ne vérifie évidemment pas la propriété d'être faible pour les éléments oscillants, mais il a pourtant été montré qu'il s'agissait d'un bon choix pour faire de la décomposition d'image [54, 126].

**Modèles de décomposition utilisant des critères de parcimonie :** Nous ne développerons pas ce genre d'approches ici, mais une méthode intéressante en décomposition d'image correspond à celle développée par exemple dans [116, 56]. L'idée de ce genre de modèle consiste à chercher une base, et même plus généralement un dictionnaire (une famille génératrice redondante) qui représente bien chaque composante. Dans [116], la composante géométrie est modélisée comme ayant une représentation creuse dans le domaine de la transformée curvelet. Suivant le type de texture, différentes transformations sont utilisées pour la composante texture (transformée en cosinus locale, transformée en paquets d'ondelettes, ...). Dans les modèles variationnels de décomposition d'image que nous étudions ici, l'idée est de proposer des normes faibles pour chaque composante, ce qui correspond dans les modèles parcimonieux à chercher des représentations creuses pour chaque composante.

## 3.2 Modèle TV-Hilbert (A11) - [21]

### 3.2.1 Modèle et algorithme de minimisation

**Discrétisations :** Dans [21], nous avons introduit un modèle particulier de décomposition. Le cadre considéré dans ce travail est le cas de la dimension finie. Une image est vue comme un vecteur de  $\mathbb{R}^{N \times N}$ . On considère le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_{i,j} v_{i,j} \quad (3.9)$$

et la norme :

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L^2}} \quad (3.10)$$

On pose aussi  $\|u\|_{L^1} = \sum_{1 \leq i, j \leq N} |u_{i,j}|$ .

On utilise les discrétisations suivantes pour l'opérateur gradient : Si  $u$  est un élément de  $\mathbb{R}^{N \times N}$ , alors son gradient  $\nabla u$  est un élément de  $\mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N}$  donné par :

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j}^1, (\nabla u)_{i,j}^2) \quad (3.11)$$

avec

$$(\nabla u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < N \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases} \quad (3.12)$$

et

$$(\nabla u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < N \\ 0 & \text{si } j = N \end{cases} \quad (3.13)$$

Remarquons qu'avec un tel choix de notation, la norme de l'opérateur gradient vérifie :  $\|\nabla\|^2 \leq 8$ . Cette borne interviendra de manière explicite dans les résultats de convergence des algorithmes utilisés.

La variation totale de  $u$  est alors définie par :

$$J(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} |(\nabla u)_{i,j}| \quad (3.14)$$

On introduit une version discrète de l'opérateur divergence. Par analogie avec la cas continue, on pose

$$\text{div} = -\nabla^* \quad (3.15)$$

où  $\nabla^*$  est l'opérateur adjoint de  $\nabla$ , i.e. on a pour tout  $p = (p^1, p^2)$  et  $u$  :

$$\langle -\operatorname{div} p, u \rangle_{L^2} = \langle p^1, (\nabla u)^1 \rangle_{L^2} + \langle p^2, (\nabla u)^2 \rangle_{L^2} \quad (3.16)$$

On obtient ainsi la discrétisation suivante pour l'opérateur divergence :

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(p))_{i,j} &= \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{si } 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & \text{si } i=1 \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{si } i=N \end{cases} \\ &+ \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{si } 1 < j < N \\ p_{i,j}^2 & \text{si } j=1 \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{si } j=N \end{cases} \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Modèle :** On considère une famille d'espaces de Hilbert définis à partir d'un opérateur  $K$  tel que :

1.  $K$  est un opérateur linéaire symétrique.
2.  $\ker(K) \cap X_0 = \{0\}$  où  $\ker(K) = \{x \in X / K(x) = 0\}$  et  $X_0 = \{x \in X / \sum_{i,j} x_{i,j} = 0\}$ .
3.  $X_0 \subset \operatorname{dom}(K)$  où  $\operatorname{dom}(K) = \{x \in X / \|K(x)\|_{L^2} < +\infty\}$ .

Si  $f$  et  $g$  sont dans  $X_0$ , alors on définit :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, Kg \rangle_{L^2} \quad (3.18)$$

Cela définit un produit scalaire sur  $X_0 = \{x \in X / \sum_{i,j} x_{i,j} = 0\}$ .

On propose dans [21] de minimiser l'énergie suivante :

$$\inf_u \left( J(u) + \frac{\lambda}{2} \|f - u\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \quad (3.19)$$

Ce nouveau modèle (3.19), a été baptisé par la suite **TV-Hilbert**. Si  $K = Id$ , alors  $\mathcal{H} = L^2$  et on retrouve le modèle ROF (3.5) [109]. Si  $K = -\Delta^{-1}$ , alors  $\mathcal{H} = H^{-1}$  et on retrouve le modèle OSV (3.6) [102].

L'existence et l'unicité de la solution  $\hat{u}$  pour le problème (3.19) sont standards. En considérant le problème dual, on montre que la solution  $\hat{u}$  du problème (3.19) est donnée par :  $\hat{u} = f - P_{K^{-1}G_{1/\lambda}}^{\mathcal{H}}(f)$ .  $P_{K^{-1}G_{1/\lambda}}^{\mathcal{H}}(f)$  est la projection orthogonale (pour le produit scalaire de  $\mathcal{H}$ ) de  $f$  sur  $G_{1/\lambda}$  (cf définition (3.4)). On peut adapter l'algorithme de projection introduit dans [43] à ce cas là (par rapport à [43], on utilise le produit scalaire de  $\mathcal{H}$  au lieu de celui de  $L^2$ ) :  $p^0 = 0$  et

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(K^{-1}\operatorname{div}(p^n) - \lambda f))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(K^{-1}\operatorname{div}(p^n) - \lambda f))_{i,j}|} \quad (3.20)$$

On peut montrer le résultat de convergence suivant :

**THÉORÈME 3.2.1** ([21])

Si  $\tau \leq \frac{1}{8\|K^{-1}\|_{L^2}}$ , alors  $f - \frac{1}{\lambda}K^{-1}\operatorname{div} p^n \rightarrow \hat{u}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $\hat{u}$  est la solution du problème (3.19).

**Commentaires :** Ce résultat a été montré de manière indépendante dans [4], dans un méthode de restauration d'image satellite. Cet algorithme a le mérite d'être très simple à coder, et de minimiser exactement la variation totale. Bien évidemment, la vitesse de convergence dépend de l'opérateur  $K$  considéré. Avec les discrétisations présentées précédemment, la borne donnée pour  $\tau$  dans le théorème est  $1/8$  dans le cas du modèle ROF (3.5), et  $1/64$  dans le cas du modèle OSV (3.6). De plus, cet algorithme ne s'adapte malheureusement pas directement au cas de la déconvolution (cf [25, 55, 16] pour une méthode itérative permettant de considérer le cas d'un opérateur non inversible). Il est d'autre part possible d'accélérer la vitesse de convergence de l'algorithme en considérant une version gradient projeté comme dans [16], ou en utilisant une approche de type Nesterov [124, 16].

### 3.2.2 Débruitage optimal en terme de SNR

Dans cette section, on s'intéresse au cas particulier du débruitage avec le modèle (3.19). On suppose que l'image  $f$  observée provient d'un signal idéal  $s$  perturbé par un bruit  $n$ . On a :

$$f = s + n = u + v \quad (3.21)$$

où  $u$  est la solution donnée en minimisant (3.19), et  $v = f - u$ . Idéalement, on veut avoir  $u = s$ , et  $v = n$ .

Afin de pouvoir utiliser efficacement le modèle (3.19) en restauration d'image, il convient de savoir calculer automatiquement un bon paramètre de régularisation  $\lambda$ . On suppose que le bruit est blanc gaussien, d'écart-type  $\sigma$  connu. De nombreuses approches statistiques ont été proposées (cf [62, 15] et les références données), mais ici on s'intéresse aux approches déterministes. La manière la plus classique pour choisir  $\lambda$  remonte à Morozov [97], et dans le cas du problème  $TV - L^2$ , on parle souvent de formulation contrainte [109]. Le problème contraint associé à (3.19) est le suivant :

$$\min_u \{ J(u) / \|u - f\|_{\mathcal{H}}^2 = N^2 \rho^2 \} \quad (3.22)$$

où  $N^2 \rho^2$  est la norme  $\mathcal{H}$  de l'image (de taille  $N^2$ ) d'un bruit blanc gaussien  $n$  d'écart type  $\sigma$ . L'hypothèse sous-jacente est que le procédé de débruitage fonctionne bien, i.e. que la partie filtrée est essentiellement du bruit :  $v \approx n$ . Une condition naturelle est alors d'imposer  $\text{var}(v) = \text{var}(n) = \sigma^2$ . Dans le cas où l'image est texturée, des morceaux de textures sont aussi filtrés et  $v$  contient à la fois du bruit et des textures. Gilboa-Sochen-Zeevi ont considéré ce problème dans [70, 71] récemment, et proposé un critère de sélection du paramètre  $\lambda$  pour (3.19) dans le cas  $\mathcal{H} = L^2$  basé sur le SNR. Nous étendons ici leur méthode à (3.19).

**Notations :** On définit  $\mathcal{I}(\cdot, \cdot)$  ( $\bar{p}$  désigne la moyenne de  $p$ ) :

$$\mathcal{I}(p, q) \doteq \frac{1}{|\Omega|} \langle p - \bar{p}, q - \bar{q} \rangle_{\mathcal{H}} \quad (3.23)$$

et on définit la *norme* associée  $\mathcal{N}(\cdot)$  par :

$$\mathcal{N}(p) \doteq \mathcal{I}(p, p) = \frac{1}{|\Omega|} \|p - \bar{p}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.24)$$

Ces mesures deviennent les notions de *covariance* et *variance* pour  $\mathcal{H} = L^2$ .

Dans la suite, par souci de clarté, on appelle  $\mathcal{N}$  “norme” et non “le carré de la norme normalisée”. On rappelle que  $|\Omega| = N^2$ . Le problème (3.19) se réécrit sous la forme :

$$\inf_{(u,v) / f=u+v} \left( J(u) + \frac{\lambda}{2} \mathcal{N}(v) \right) \quad (3.25)$$

La solution de (3.25) est notée  $(u_\lambda, v_\lambda)$ .

Le  $\mathcal{H}$  Signal-to-Noise Ratio ( $SNR^{\mathcal{H}}$ ) (rapport signal à bruit) de l’image reconstruite  $u$  est défini par :

$$SNR^{\mathcal{H}}(u) \doteq 10 \log \frac{\mathcal{N}(s)}{\mathcal{N}(u-s)} = 10 \log \frac{\mathcal{N}(s)}{\mathcal{N}(n-v)}, \quad (3.26)$$

où  $\log \doteq \log_{10}$ . On ne notera plus nécessairement l’indice  $\mathcal{H}$ . Pour  $\mathcal{H} = L^2$ , on obtient la définition standard de SNR.

On est intéressé par le SNR optimal pour une image d’entrée  $f$  donné par :

$$SNR_{opt} \doteq \max_{\lambda} SNR(u_\lambda) \quad (3.27)$$

**Condition d’optimalité :** On regarde le  $SNR$  comme un fonction  $SNR(\mathcal{N}(v))$  qu’on suppose régulière. Une condition nécessaire pour avoir un maximum dans l’intervalle  $\mathcal{N}(v) \in (0, \mathcal{N}(f))$  est :

$$\frac{\partial SNR}{\partial \mathcal{N}(v)} = 0. \quad (3.28)$$

On arrive à la condition suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{I}(n, v)}{\partial \mathcal{N}(v)} = \frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

(et plus précisément le SNR augmente tant que  $\frac{\partial \mathcal{I}(n, v)}{\partial \mathcal{N}(v)} > \frac{1}{2}$ ).

**Algorithme :** Supposons qu’on sache estimer  $\mathcal{I}(n, v)$ , on peut alors proposer l’algorithme suivant :

1. Poser  $\mathcal{I}^0(n, v) = 0, \mathcal{N}^0(v) = 0, i = 1$ .
2.  $\mathcal{N}^i(v) \leftarrow \mathcal{N}^{i-1}(v) + d\mathcal{N}(v)$ . Calculer  $\mathcal{I}^i(n, v)$ .
3. Si  $\frac{\mathcal{I}^i(n, v) - \mathcal{I}^{i-1}(n, v)}{d\mathcal{N}(v)} \leq \frac{1}{2}$  alors arrêter.
4.  $i \leftarrow i + 1$ . Et retourner à l’étape 2.

Il ne reste donc plus qu’à savoir estimer  $\mathcal{I}(n, v)$ . Notre observation est que le filtrage d’un bruit additif gaussien, par rapport au paramètre de régularisation  $\lambda$ , n’est en général pas trop affecté par l’image idéale  $s$ . Le phénomène qui affecte de manière prépondérante la qualité du débruitage est le filtrage lui-même. Dans le cas linéaire, le découplage entre le filtrage de l’image  $s$  et du bruit  $n$  est clair :  $h * f = h * (s + n) = h * s + h * n$ , où  $h$  est le noyau du filtre. Le filtrage de  $n$  dépend seulement du noyau  $h$ , et pas de  $s$ . Il a été observé dans [71] que cette propriété de découplage est relativement bien respectée pour une attache aux données de type  $L^2$  dans (3.19). Dans [21], on étend cette observation au modèle (3.19) en général (et on vérifie numériquement que c’est effectivement le cas).

Maintenant, il nous suffit de calculer les “statistiques” d’un échantillon de bruit blanc  $\tilde{n}$  et de mesurer  $\mathcal{I}(\tilde{n}, v)$  en fonction de  $\lambda$ . Pour un niveau de bruit  $\rho$  fixé, on peut tabuler par avance ces valeurs. On utilise ensuite la relation :

$$\frac{\partial \mathcal{I}(n, v)}{\partial \mathcal{N}(v)} = \frac{\partial \mathcal{I}(n, v)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{N}(v)} \approx \frac{\partial \mathcal{I}(\tilde{n}, v)}{\partial \lambda} \Big|_{f=\tilde{n}} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathcal{N}(v)} \Big|_{f=s+n}. \quad (3.30)$$

On montre un exemple de restauration obtenue avec cet algorithme sur la Figure 3.1 avec le modèle (3.19) dans le cas où  $\mathcal{H} = H^{-1}$  (modèle OSV [102]).

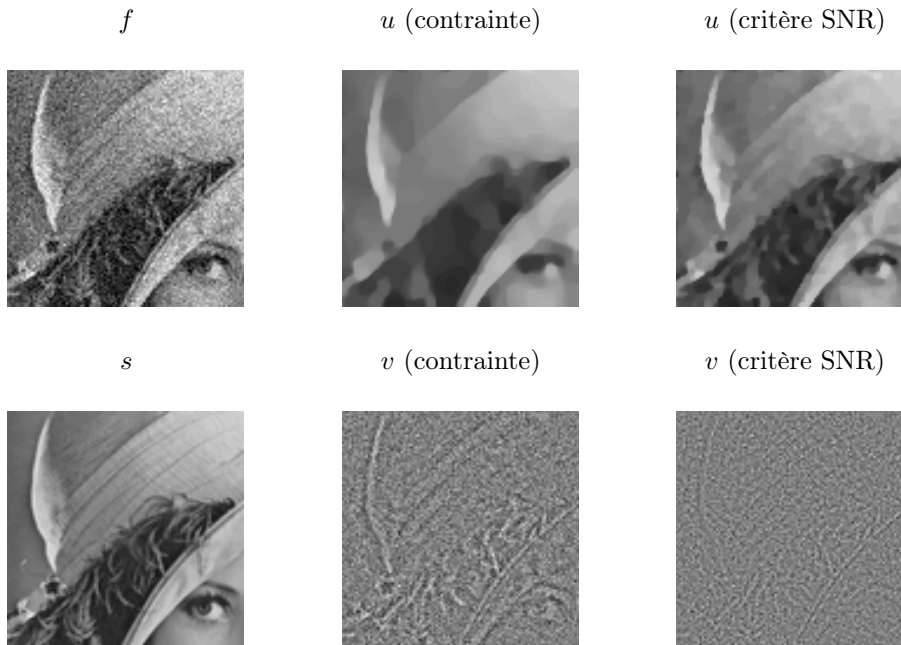


FIG. 3.1 – Débruitage de l’image Lenna ( $\sigma = 20$ ) [21]. Colonne du milieu : solution du problème sous contrainte  $\mathcal{N}(v) = \rho^2$ . Colonne de droite : solution obtenue avec le critère sur le SNR.

**Commentaires :** La méthode proposée dans ce travail a le mérite d’être complètement automatique, et de donner de bons résultats numériques. Elle présente par contre l’inconvénient d’avoir pré-calculé les “statistiques” du bruit, et surtout d’être coûteuse en temps de calcul : il est en effet nécessaire de calculer la solution du problème (3.19) pour un grand nombre de valeurs du paramètre  $\lambda$ . D’autre part, ce temps de calcul ne permet pas d’envisager une version locale de l’algorithme (où on chercherait à calculer la meilleure image localement, en utilisant par exemple un découpage de l’image de départ en sous-fenêtres). Enfin, il reste toujours la question de la pertinence d’un critère tel que le SNR pour évaluer la qualité du débruitage.

### 3.3 Modèle $TV$ -Gabor (A7) - [22]

**Présentation :** Nous avons ensuite utilisé le modèle (3.19) dans [22] en décomposition d’image. Un intérêt de (3.19) réside dans le fait qu’il est possible d’introduire de l’information



sur les textures que l'on veut récupérer via l'opérateur  $K$ . Ainsi dans [22], nous avons proposé d'incorporer des informations sur la fréquence et l'orientation des textures recherchées en construisant  $K$  à partir de filtres de Gabor.

Dans [22], plusieurs contributions au problème de décomposition ont été apportées :

1. Une méthode automatique pour calculer la décomposition d'une image en géométrie et texture.
2. Un algorithme de seuillage pour minimiser de manière approchée les énergies de la forme :  $\inf_u (\int |Du| + \|f - u\|_1)$  (modèle  $TV - L^1$ ).
3. Un nouveau modèle de décomposition, appelé TV-Gabor, dans lequel la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  est construite en fonction des textures que l'utilisateur veut séparer du reste de l'image.

Il s'agit d'une collaboration avec Guy Gilboa, Tony Chan, et Stanley Osher (UCLA).

### 3.3.1 Sélection automatique du paramètre de régularisation

Le bon paramètre est calculé en minimisant la corrélation entre composante géométrie et composante texture. Cette approche, inspirée de [103] pour le débruitage, donne des résultats satisfaisants sur des images simples (essentiellement avec deux échelles différentes).

Considérons un modèle général de décomposition sous la forme :

$$\inf_{(u,v) / f=u+v} E_{Structure}(u) + \lambda E_{Texture}(v) \quad (3.31)$$

Pour simplifier, on suppose qu'il existe une unique solution, notée  $(u_\lambda, v_\lambda)$ . Pour le problème de débruitage, pour fixer le paramètre de régularisation  $\lambda$ , on peut penser utiliser une information comme l'écart-type du bruit, ou optimiser un critère comme le SNR (comme par exemple dans la section précédente). Dans le cas du problème décomposition en géométrie-texture, on ne dispose plus de ces outils. On peut définir de manière empirique les notions de moyenne, variance, et covariance pour une image discrète de taille  $N \times N$ . La moyenne est  $\bar{q} \doteq \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i,j \leq N} q_{i,j}$ , la variance  $V(q) \doteq \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i,j \leq N} (q_{i,j} - \bar{q})^2$ , et la covariance  $\text{cov}(q, r) \doteq \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i,j \leq N} (q_{i,j} - \bar{q})(r_{i,j} - \bar{r})$ . On voudrait en quelque sorte mesurer "l'orthogonalité" entre les composantes géométrie et texture. Pour cela, on peut penser à utiliser la corrélation, i.e. la covariance normalisée par l'écart-type de chaque signal :

$$\text{corr}(q, r) \doteq \frac{\text{cov}(q, r)}{\sqrt{V(q)V(r)}}.$$

Pour guider un bon choix du paramètre  $\lambda$ , on peut donc utiliser l'hypothèse suivante : *Les composantes géométrie et texture d'une image sont décorréliées.* On peut relaxer cette hypothèse en demandant à ce que les composantes géométrie et texture soient faiblement corrélées. Ce critère de corrélation peut être vu comme une version simplifiée de la notion de paire extrémale développée par Y. Meyer dans [94]. Cette hypothèse sur la corrélation est très discutable ; notamment, dans les images naturelles, les bords de la géométrie coïncident souvent avec les bords des textures. Néanmoins, elle donne des résultats satisfaisants pour des images simples, et il n'existe pour le moment pas d'autres méthodes permettant de calculer automatiquement un bon paramètre  $\lambda$ .

### 3.3.2 Minimisation approchée du modèle $TV - L^1$

On propose dans [22] un algorithme de seuillage itératif pour minimiser de manière approchée les énergies de la forme :  $\inf_u (\int |Du| + \|f - u\|_1)$  (modèle  $TV - L^1$ ).

La fonctionnelle approchée introduite dans [22] est la suivante :

$$\inf_{u,v} \left\{ J(u) + \frac{1}{2\alpha} \|f - u - v\|_{L^2}^2 + \lambda \|v\|_{L^1} \right\} \quad (3.32)$$

Le paramètre  $\alpha$  est choisi petit afin d'avoir quasiment  $f = u + v$ . On minimise cette fonctionnelle, en la minimisant successivement par rapport à chacune de ses variables. A  $v$  fixé, il s'agit du problème classique de régularisation par variation totale (modèle  $TV - L^2$ ), et à  $u$  fixé, la solution est obtenue immédiatement par un seuillage doux de  $v$ .

Il est intéressant de regarder la fonctionnelle suivante :

$$\inf_{u,v} \left\{ \|u\|_{\dot{B}_{1,1}^1} + \frac{1}{2\alpha} \|f - u - v\|_{L^2}^2 + \lambda \|v\|_{L^1} \right\} \quad (3.33)$$

où  $\dot{B}_{1,1}^1$  désigne l'espace de Besov homogène usuel [94, 46, 19]. Il est en effet montré dans [117] qu'en dimension 1, la régularisation par variation totale est équivalente à la régularisation par  $\dot{B}_{1,1}^1$  (qui s'obtient par un seuillage doux de la transformée en ondelettes). Même si l'équivalence n'est plus vraie en dimension 2, la fonctionnelle (3.33) permet effectivement d'obtenir rapidement une solution approchée du modèle  $TV - L^1$  en itérant des seuillages (cf [51] pour un lien plus précis entre l'espace  $BV$  et la représentation en ondelettes d'une fonction).

**Commentaires :** Il faut bien voir que l'approche proposée dans [22] n'est qu'une approximation du modèle  $TV - L^1$  (3.8). D'autre part, concernant les vitesses des algorithmes, il est difficile de donner un avis définitif, tant la communauté du traitement d'image et celle de la vision par ordinateur sont actives sur ce sujet. La fonctionnelle (3.33) a permis d'avoir un algorithme extrêmement compétitif pendant quelques mois. Il a depuis été proposée une approche beaucoup plus rapide basée sur les méthodes de coupures de graphes (graph-cut) dans [54] : il est ainsi possible de minimiser très rapidement (3.8) (en choisissant une norme anisotrope pour le gradient). Cet algorithme est devenu la référence pour le problème (3.8) pendant deux courtes années. En effet, dans [107] paru en 2008, les auteurs utilisent la fonctionnelle (3.32) pour calculer de manière approchée la solution de (3.8) avec l'algorithme proposé dans [22]. Par rapport au programme que j'avais écrit dans [22], la différence fondamentale est que les auteurs de [107] codent sur carte graphique (GPU). Et les comparaisons effectuées dans [107] sont clairement en faveur de (3.32) et de l'algorithme que j'avais introduit dans [22], mais avec une implémentation sur carte graphique. Il est néanmoins certain que l'histoire ne s'arrêtera pas là ...

### 3.3.3 Modèle $TV$ -Gabor

On propose dans [22] un nouveau modèle de décomposition, appelé  $TV$ -Gabor, dans lequel la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  est construite en fonction des textures que l'utilisateur veut séparer du reste de l'image. Il s'agit d'un cas particulier du modèle  $TV$ -Hilbert (3.19) introduit dans [21]. L'idée de ce modèle est partie d'une critique du modèle  $OSV$  [102]. En effet, dans le modèle  $TV - H^{-1}$ , l'opérateur  $K$  dans (3.19) est alors  $-\Delta^{-1}$ . Si on regarde la transformée

de Fourier de cet opérateur, on voit qu'elle explose aux basses fréquences (en  $1/x^2$ ) et qu'elle décroît très rapidement vers 0 aux hautes fréquences. Avec un tel modèle, on ne peut donc pas récupérer de basses fréquences dans la partie texture, ce qui peut s'avérer gênant. Une solution consiste à prendre un opérateur qui pénalise peu la fréquence des textures d'intérêt. Comme dans l'algorithme (3.20) on se sert uniquement de  $K^{-1}$ , on construit directement  $K^{-1}$  comme un filtre passe-bande au voisinage des fréquences des textures (cf Figure 3.3). On montre un exemple de décomposition obtenue sur la Figure 3.2. Cette méthode est très proche (dans l'esprit) des approches parcimonieuses développées par exemple dans [116]. On peut la considérer comme une version simplifiée de ces méthodes.

L'adaptivité spectrale du modèle  $TV$ -Hilbert a commencé à être explorée dans le cadre d'un projet jeune chercheur du GDR Isis. Ce travail s'est poursuivi par le postdoc de Pierre Maurel via l'ANR Natimages (co-encadré avec Gabriel Peyré). La méthodologie proposée pour construire l'opérateur  $K$  permet de le rendre spatialement et fréquentiellement adaptatif [105, 106].

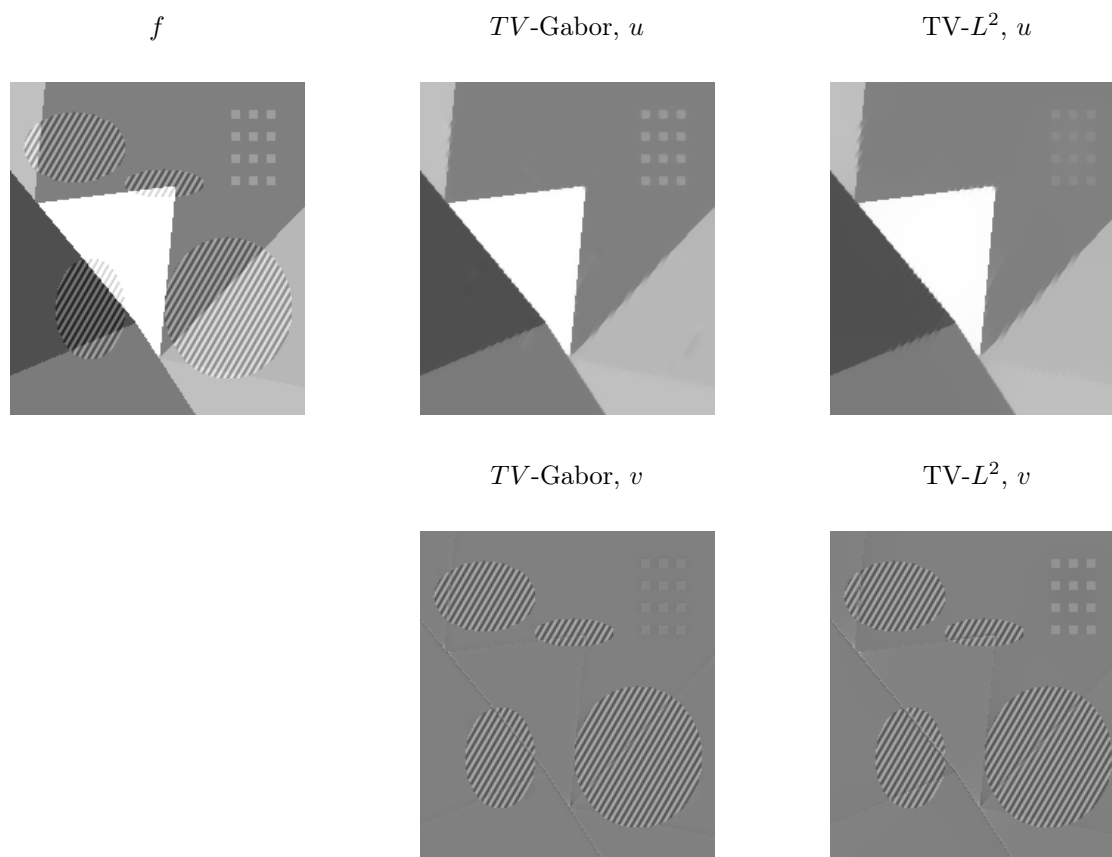


FIG. 3.2 – Décomposition d'une image synthétique  $f$  [22]. On montre les composantes géométriques  $u$  et textures  $v$  obtenues avec respectivement les modèles  $TV$ -Gabor et  $TV-L^2$ . Pour le modèle  $TV$ -Gabor, l'opérateur  $K$  a été construit afin de récupérer les textures diagonales rayées (et pas les petits carrés).

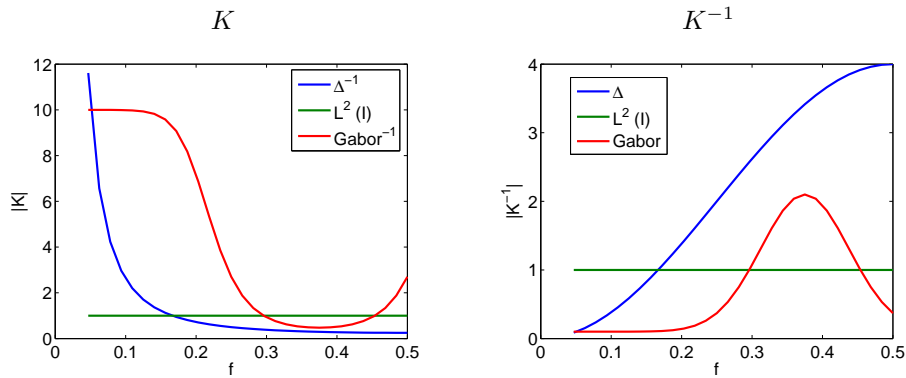


FIG. 3.3 – L’opérateur  $K$  et son inverse  $K^{-1}$  pour les modèles OSV, ROF,  $TV$ -Gabor.

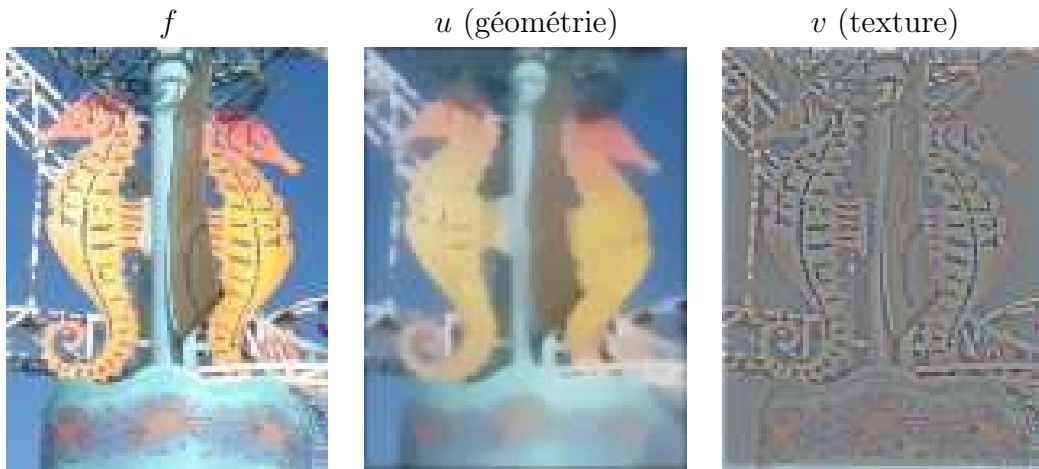


FIG. 3.4 – Décomposition d’image couleur [23].

### 3.4 Cas des images couleurs (A8, P2)- [23, 65]

Dans [23], nous avons considéré le problème de décomposition des images couleurs. Il s’agit d’une collaboration avec Sung Ha Kang (Georgia Institute of Technology, Atlanta). Nous avons à l’époque considéré le cas du modèle  $TV - G$  approché comme dans [17]. En utilisant l’approche de [47] relative à la minimisation de la variation totale pour les images couleurs, nous avons proposé un algorithme de décomposition performant pour les images couleurs (cf Figure 3.4). La spécificité de ce travail est d’utiliser la représentation des images couleurs sous forme Chromaticité et Brillance. D’après [47], cette représentation permet un meilleur contrôle des couleurs qu’une méthode utilisant directement les trois canaux Rouge, Vert, et Bleu (RGB). Si on considère un vecteur  $I$  dans l’espace couleur RGB, la norme de  $I$  correspond à la Brillance, et le vecteur unitaire  $I/\|I\|$  à la Chromaticité.

Ce travail a récemment été poursuivi dans [65], avec l’extension du modèle  $TV$ -Hilbert à la couleur (cf Figure 3.5), ainsi qu’une étude mathématique plus précise de l’espace  $G$  (cf définition (3.3)) dans le cas couleur. Il s’agit d’une collaboration avec Luminita Vese (UCLA), et Vincent Duval (Telecom Paris Tech). D’un point de vue algorithmique, l’approche proposée dans [65] permet de minimiser exactement la variation totale (alors que dans [23] on considérait une version régularisée de la variation totale). Nous reviendrons sur l’algorithme de projection (gradient projeté) utilisé dans [65] dans la Section 3.6.1.

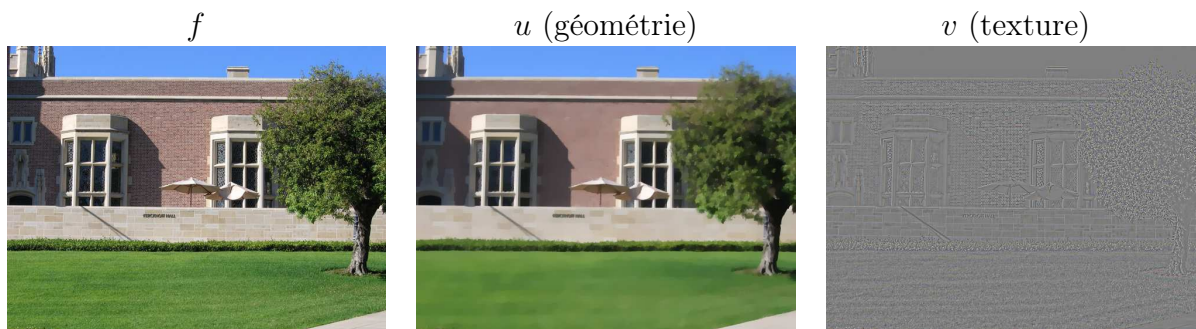


FIG. 3.5 – Décomposition d’image couleur [65]

L’évaluation des résultats de décomposition est plus difficile avec les images couleurs qu’avec les images en niveaux de gris. En effet, le critère d’évaluation d’une décomposition en géométrie et texture est visuel. Or la couleur cache beaucoup de défauts à l’oeil. Les travaux [23] et [65] montrent qu’on peut effectivement utiliser les méthodes de décomposition sur des images couleurs. Néanmoins, il ne faut les voir que comme des extensions au cas couleur des travaux précédents sur les images en niveaux de gris. Pour aller plus loin, il faudrait travailler sur des critères prenant en compte la perception visuelle de chacun d’entre nous.

### 3.5 Application en classification (A9) - [20]

Dans [20], nous avons développé une application de la décomposition d’image au problème de classification. L’idée est de décomposer une image en géométrie et texture. Il est ensuite plus facile d’utiliser des attributs de classification adaptés à la géométrie ou à la texture. On peut alors effectuer une classification combinant de manière efficace des combinaisons logiques d’attributs texture ou géométrie. Ce travail a constitué un prolongement naturel de ma thèse, car il utilise notamment de manière essentielle les résultats présentés dans [18, 12, 17, 19].

On propose un algorithme qui permet de réaliser la classification d’images contenant à la fois des zones texturées et des zones non texturées. La classification consiste à attribuer une étiquette à chaque pixel d’une image, cette étiquette indiquant à quelle classe appartient le pixel. Elle peut être vue comme un problème de partition. C’est un des objectifs de base du traitement d’image. Elle intervient dans de nombreuses applications, comme par exemple la télédétection. La classification est un problème très proche de celui de la segmentation, dans le sens où le but visé consiste à obtenir une partition de l’image en régions homogènes. Dans la classification, chaque sous ensemble de la partition obtenue représente une classe.

L’approche utilisée ici est issue de [111, 128, 49] et est basée sur les contours actifs [15, 37]. Chaque classe  $k$  est caractérisée par une fonction  $\Phi_k$ . La partition cherchée correspond au minimum d’une fonctionnelle de la forme :

$$F_\alpha(\Phi_1, \dots, \Phi_K) = \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^I H_\alpha(\Phi_i) - 1 \right)^2 + \sum_{i=1}^I \int_\Omega \delta_\alpha(\Phi_i) |\nabla \Phi_i| + \sum_{i=1}^I \int_\Omega B H_\alpha(\Phi_i) \quad (3.34)$$

où  $B$  est une fonction des données du problème, et où  $\delta_\alpha$  et  $H_\alpha$  sont respectivement des approximations de la mesure de Dirac et de la fonction d’Heaviside. On résout le système d’EDP associé. Ces EDP guident les interfaces (courbes de niveau zéro) vers les frontières de la partition optimale (cf [12] pour une étude théorique).

Nous utilisons la fonctionnelle (3.34) introduite dans [111], mais nous modifions le terme d'attache aux données. Etant donné une image à classifier, on commence par utiliser l'algorithme de décomposition  $u + v$  introduit dans [17] (dans le cas où l'image de départ est bruitée, on utilise alors l'algorithme de décomposition  $u + v + w$  proposé dans [19]). On obtient ainsi la composante géométrique  $u$  ainsi que la composante texturée  $v$  de l'image. Le terme d'attache aux données de Samson et al [111] est adapté à  $u$ , alors que celui que nous avons développé pour les images texturées dans [18] est adapté à  $v$ . On construit un nouveau terme d'attache aux données à partir des deux précédents en utilisant le formalisme proposé par Chan et Sandberg dans [112]. De cette manière, avec ce nouvel algorithme, une classe peut être caractérisée simultanément par des critères de textures et des critères géométriques (cf Figure 3.6). Il s'agit d'une collaboration avec Tony Chan (University of California Los Angeles).

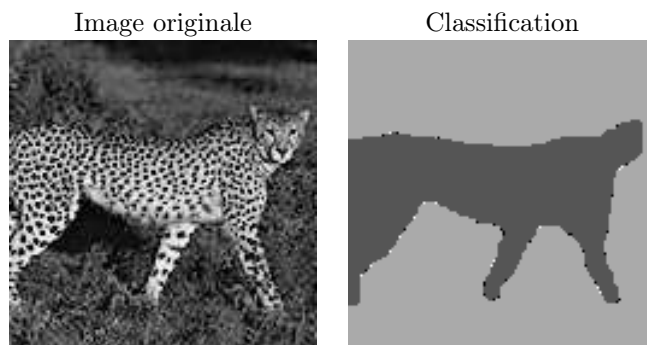


FIG. 3.6 – Classification (critères texturés et non texturés) [20]

Un travail comme [20] est une application possible des modèles de décomposition d'image. Une autre application considérée dans la littérature est celle de l'inpainting comme dans [30]. Néanmoins, il ne s'agit pour le moment que de premières approches dans cette direction. En effet, pour vraiment pouvoir utiliser ces méthodes en pratique, il convient de mieux comprendre les interactions entre géométrie et texture. Ainsi, dans l'algorithme de classification proposé dans [20], les résultats dépendent de manière essentielle de l'importance respective accordée aux composantes texture et géométrie.

## 3.6 Optimisation (A17, P1) - [16, 65]

### 3.6.1 Minimisation de la variation totale

J'ai été particulièrement fasciné par l'algorithme de projection d'A. Chambolle, et une partie importante de mon travail a consisté à étudier cet algorithme ou des variantes. Il s'agit d'un outil algorithmique fondamental pour minimiser les énergies dont nous avons discuté jusqu'ici. Il a été introduit par A. Chambolle dans [43] pour résoudre le problème de Rudin-Osher-Fatemi [109]. Il s'agit de minimiser :

$$\inf_u \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{2\mu} \|f - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.35)$$

Comme il l'avait déjà remarqué dans [45], la solution de ce problème est donnée par  $u = f - P_{G_{\mu}}(u)$  (en considérant le problème dual). Il suffit donc de savoir calculer la projection sur

$G_\mu$  (cf définition (3.3)). Il s'agit d'un opérateur de projection non linéaire, mais A. Chambolle a proposé dans [43] un algorithme de point fixe qui permet de calculer efficacement cette projection. Il s'agit en effet de trouver :

$$\min \{ \|\mu \operatorname{div}(p) - f\|_X^2 : p / |p_{i,j}| \leq 1 \ \forall i, j = 1, \dots, N \} \quad (3.36)$$

Une méthode de point fixe donne alors :  $p^0 = 0$ , et

$$\begin{cases} v^m = \frac{f}{\mu} + \operatorname{div} p^m \\ p_{i,j}^{m+1} = \frac{p_{i,j}^m + \tau(\nabla v^m)_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla v^m)_{i,j}|} \end{cases} \quad (3.37)$$

THÉORÈME 3.6.1 ([43])

Si  $\tau$  dans (3.37) vérifie  $\tau < 1/8$ , alors  $\mu v^m$  converge vers  $P_{G_\mu}(f)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Au lieu d'utiliser (3.37), A. Chambolle suggère dans [44] un algorithme de gradient projeté pour calculer  $P_{G_\mu}(f)$  :

$$\begin{cases} v^m = \frac{f}{\mu} + \operatorname{div} p^m \\ p_{i,j}^{m+1} = \frac{p_{i,j}^m + \tau(\nabla v^m)_{i,j}}{\max\{1, |p_{i,j}^m + \tau(\nabla v^m)_{i,j}|\}} \end{cases} \quad (3.38)$$

Dans [16], on montre qu'en fait cet algorithme de gradient projeté est un cas particulier d'une méthode plus générale proposée il y a près de 30 ans par Bermúdez et Moreno [28] (cette méthode est elle-même un cas particulier de Forward Backward Splitting sur le problème dual, cf la remarque 3.2 dans [28]). Cela donne une preuve de convergence pour l'algorithme (3.38) pour  $\tau < 1/4$ . Il s'agit en fait d'un cas particulier des algorithmes de type *proximal forward backward splitting* (cf [52] pour une présentation détaillée de ce genre d'approches). Dans le cas du modèle  $\inf_u (\int |Du| + \|f - u\|_2^2)$ , il s'agit simplement d'utiliser un algorithme de gradient projeté sur le problème dual.

J'ai proposé une preuve élémentaire de la convergence de cet algorithme (3.38) dans [65].

### 3.6.2 Variation totale régularisée

L'algorithme de Bermúdez et Moreno peut aussi permettre de traiter la variation totale régularisée :

$$\inf_u \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} dx + \frac{1}{2\mu} \|f - u\|^2 \quad (3.39)$$

On peut obtenir un schéma rapide à partir du travail de Bermúdez et Moreno. On obtient ainsi le schéma suivant :

$$\begin{cases} v^m = \frac{f}{\mu} + \operatorname{div} p^m \\ w^{m+1} = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^2 \tau^2}{\mu^2} + |w^{m+1}|^2}} \right)^{-1} (\tau \nabla v^m + p^m) \\ p^{m+1} = \tau \nabla v^m + p^m - w^{m+1} \end{cases} \quad (3.40)$$

On peut résoudre la deuxième équation par une méthode de point fixe. On montre qu'en pratique une seule itération suffit, et la deuxième ligne du schéma (3.40) devient alors simplement :

$$w^{m+1} = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^2 \tau^2}{\mu^2} + |w^m|^2}} \right)^{-1} (\tau \nabla v^m + p^m) \quad (3.41)$$

Dans [16], on montre la convergence de cet algorithme.

### 3.6.3 Comparaison avec les algorithmes de Nesterov

Dans [16], on effectue des comparaisons avec une classe optimale d'algorithmes du premier ordre récemment proposés par Nesterov [100]. Ces algorithmes ont été introduits en traitement d'image par P. Weiss et al dans [124].

Y. Nesterov s'intéresse dans [100] à des problèmes de la forme :

$$\inf_{u \in Q} E(u) \tag{3.42}$$

où  $E$  est une fonction convexe Lipschitz, et  $Q$  un ensemble convexe fermé. On cherche à résoudre ce problème par des méthodes itératives. Dans le cas où  $E$  est non différentiable, on peut montrer [98] (Théorème 3.2.1 page 138) qu'il n'existe pas d'algorithme (utilisant uniquement les valeurs de  $E$  et son gradient) avec un taux de convergence plus rapide que  $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$  uniformément sur tous les problèmes de la forme (3.42) (avec  $k$  le nombre d'itérations de l'algorithme). Il est également prouvé dans [100] (cf aussi [123] Théorème 3.12 page 36) que la méthode du gradient projeté pour minimiser une fonction convexe différentiable sur un ensemble convexe fermé est d'ordre  $O\left(\frac{1}{k}\right)$ . Le schéma (3.38) est donc un algorithme d'ordre  $O\left(\frac{1}{k}\right)$  pour résoudre le problème ROF (sur lequel un algorithme direct de sous gradient ne ferait pas mieux que  $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ ).

Dans le cas où  $E$  est différentiable, on peut montrer [98] (Théorème 2.1.7 page 61) qu'il n'existe pas d'algorithme (utilisant uniquement les valeurs de  $E$  et son gradient) avec un taux de convergence plus rapide que  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  uniformément sur tous les problèmes de la forme (3.42) (avec  $k$  le nombre d'itérations de l'algorithme). De plus, dans [99] est proposé un algorithme en  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  pour résoudre le problème (3.42) dans le cas où  $E$  est différentiable (un tel algorithme est alors optimal au sens de Nesterov).

Notons que les résultats de Nesterov [98] en terme de vitesse de convergence concernent la vitesse de convergence des valeurs de la fonctionnelle à minimiser, et non des minimiseurs. Il faudrait en effet rajouter une hypothèse supplémentaire de coercivité sur la fonctionnelle. Néanmoins, comme constaté dans [124, 16], la relation d'ordre établie au sens de Nesterov entre deux algorithmes est vérifiée numériquement.

Pour obtenir une bonne précision, les algorithmes proposés par Y. Nesterov [98] s'avèrent effectivement plus performants que les algorithmes (3.38), (3.40), et (3.37). Néanmoins, pour obtenir une bonne approximation de la solution (ce qui est en fait le but recherché la plupart du temps en traitement d'image), on montre numériquement dans [16] que (3.38) et (3.40) sont des alternatives intéressantes.

**Commentaires :** Il faut être conscient que les chercheurs de la communauté math-image ont mis de nombreuses années pour retrouver des résultats bien connus de la communauté optimisation de la fin des années 70. Le modèle ROF a été introduit dans [109] en 1992. La remarque sur le fait que la solution peut être calculée par une projection apparaît dans [45] en 1997. Le premier algorithme qui minimise la variation totale et non pas une version régularisée est celui d'A. Chambolle dans [43] paru en 2004, et le premier article proposant d'utiliser une méthode de gradient projeté est [44] en 2005. Et pourtant, l'algorithme de Bermúdez Moreno proposé à la fin des années 70, ou les approches proximales [52] également



étudiées à la même époque, donnaient immédiatement l'algorithme de gradient projeté pour résoudre (3.35).

# Chapitre 4

## Décomposition multiplicative (A13) - [13]

### 4.1 Modélisation

Dans [13], un tout autre type de bruit est considéré : le bruit de speckle (chatoiement) que l'on rencontre dans tous les systèmes d'imagerie active. Il s'agit d'une collaboration avec Gilles Aubert (Université de Nice-Sophia-Antipolis).

#### 4.1.1 Bruit de chatoiement

Si les modèles additifs de décomposition semblent pertinents en imagerie optique, ils sont par contre à remettre en question pour d'autres types d'images, et notamment en imagerie active (images radar, laser, imagerie microscopique . . .). L'idée du travail consiste à utiliser la modélisation classique en imagerie RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture), afin de proposer une décomposition plus satisfaisante pour l'imagerie active. Une approche populaire en imagerie RSO [120] consiste à supposer une décomposition multiplicative de l'image  $f$ , sous la forme  $f = uv$ . La composante  $u$  correspond à la scène à reconstruire, et  $v$  au bruit de chatoiement (speckle), i.e. la partie oscillante de  $f$ . L'hypothèse statistique la plus simple, qui soit consistante avec la modélisation multiplicative, est de supposer que  $v$  a une distribution selon une loi gamma :

$$g(x) = \left(\frac{L}{\mu}\right)^L \frac{x^{L-1}}{(L-1)!} \exp\left(-\frac{Lx}{\mu}\right) \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \quad (4.1)$$

où  $L$  est un nombre entier.

Pour illustrer la difficulté du débruitage dans le cas d'un bruit de chatoiement, on montre sur la Figure 4.1 (a) et (b) un signal 1D non bruité, et le signal correspondant bruité selon la loi (4.1) avec une moyenne égale à 1. On peut voir que la majeure partie de l'information est perdue (il faut notamment remarquer que l'échelle verticale est entre 40 et 120 pour le signal non bruité, et entre 0 et 800 pour le signal bruité). A titre de comparaison, on montre également sur la Figure 4.1 (c) le signal bruité par un bruit gaussien additif d'écart type  $\sigma = 15$  (l'échelle verticale est alors entre 20 et 140).

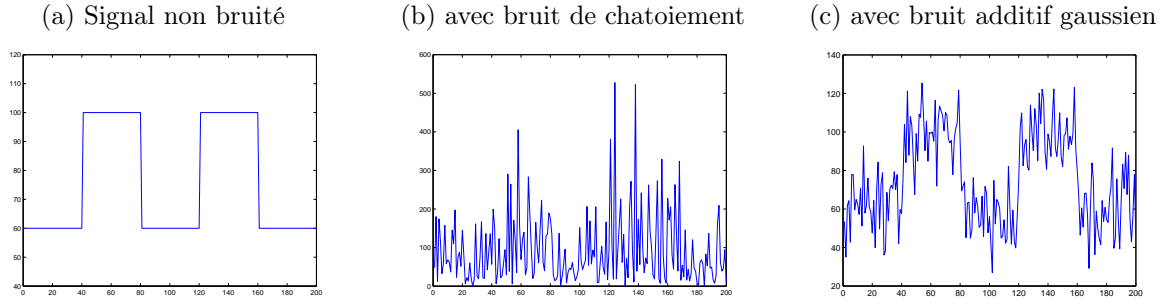


FIG. 4.1 – Bruit de chatoisement en dimension 1 : l'échelle verticale n'est pas la même sur les 3 images (échelle entre 40 et 120 pour (a), 0 et 800 pour (b), 20 et 140 pour (c)). (a) Signal 1D  $f$ ; (b)  $f$  dégradé par un bruit de chatoisement de moyenne 1; (c)  $f$  dégradé par un bruit additif gaussien ( $\sigma = 15$ ). Le bruit de chatoisement est en général beaucoup plus fort qu'un bruit additif gaussien.

## 4.1.2 Modèle

Nous avons finalement utilisé la modélisation suivante : une modélisation multiplicative sous la forme  $f = uv$ , avec des a priori bayésiens sur chacune des composantes. Nous avons choisi un a priori de type Gibbs pour  $u$  en  $\frac{1}{Z} \exp(-\phi(u))$ , avec  $\phi(u) = |Du|$ . Pour la composante  $v$ , nous avons supposé qu'elle suivait une loi gamma. La méthode du maximum de vraisemblance nous a ainsi amené à considérer l'énergie suivante ( $\Omega$  est le domaine de l'image) :

$$\int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} \left( \frac{f}{u} + \log u \right) dx \quad (4.2)$$

La décomposition cherchée est obtenue pour  $u$  strictement positif minimisant l'énergie ci-dessus.

## 4.2 Etude mathématique

### 4.2.1 Rappels sur la variation totale

On rappelle que  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à bord Lipschitz.

$BV(\Omega)$  est le sous-espace des fonctions  $u \in L^1(\Omega)$  telles que la quantité suivante est finie :

$$J(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}(\xi(x)) dx / \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \|\xi\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)} \leq 1 \right\} \quad (4.3)$$

Si  $u \in BV(\Omega)$ , la dérivée au sens des distributions  $Du$  est une mesure de Radon bornée, et (4.3) correspond à la variation totale, i.e.  $J(u) = \int_{\Omega} |Du|$ .

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , si  $1 \leq p \leq 2$ , on a :  $BV(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ . Pour plus de détails sur  $BV(\Omega)$ , on renvoie le lecteur à [8].

Comme  $BV(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , on peut étendre la fonction  $J$  (qu'on note encore  $J$ ) à  $L^2(\Omega)$  :

$$J(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |Du| & \text{si } u \in BV(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega) \end{cases} \quad (4.4)$$

On peut alors définir la sous-différentielle  $\partial J$  de  $J$  [108] :  $v \in \partial J(u)$  si et seulement si pour tout  $w \in L^2(\Omega)$ , on a  $J(u + w) \geq J(u) + \langle v, w \rangle_{L^2(\Omega)}$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  désigne le produit scalaire habituel de  $L^2(\Omega)$ .

## 4.2.2 Etude du modèle (4.2)

La difficulté dans l'étude de (4.2) provient du fait que la fonctionnelle n'est pas convexe.

Une hypothèse raisonnable d'un point de vue modélisation, et nécessaire d'un point de vue mathématique, est de supposer la donnée  $f$  dans  $L^\infty$ , i.e. bornée, et  $\inf f > 0$ . On peut alors montrer l'existence d'une solution dans l'espace  $BV$  des fonctions à variation bornée.

THÉORÈME 4.2.1 ([13])

Soit  $f$  dans  $L^\infty(\Omega)$  avec  $\inf_\Omega f > 0$ , alors le problème (4.2) possède au moins une solution  $u$  dans  $BV(\Omega)$  satisfaisant :

$$0 < \inf_\Omega f \leq u \leq \sup_\Omega f \quad (4.5)$$

On dispose également d'un principe de comparaison.

PROPOSITION 4.2.2 ([13])

Soient  $f_1$  et  $f_2$  dans  $L^\infty(\Omega)$  avec  $\inf_\Omega f_1 > 0$  et  $\inf_\Omega f_2 > 0$ . On suppose que  $f_1 < f_2$ . On note  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) une solution de (4.2) pour  $f = f_1$  (resp.  $f = f_2$ ). On a alors  $u_1 \leq u_2$ .

On montre enfin qu'une solution  $u$  est caractérisée par l'inclusion sous-différentielle suivante :

$$0 \in \partial J(u) + \lambda \frac{f - u}{u^2} \quad (4.6)$$

Pour calculer numériquement une solution, nous effectuons alors une descente de gradient. Cela correspond à amener à l'équilibre l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in \partial J(u) + \lambda \frac{f - u}{u^2} \quad (4.7)$$

On montre la convergence d'un schéma aux différences finies vers un point d'équilibre :

$$0 \in \frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} + \partial J(u_{n+1}) + h'(u_{n+1}) \quad (4.8)$$

où  $h(u) = \frac{f}{u}$ . On passe ensuite à la limite  $\delta t \rightarrow 0^+$ , et on montre l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation limite (4.7).

**Commentaires :** On présente un résultat numérique sur la Figure 4.2. Dans le cadre d'un projet REI DGA, des comparaisons entre cette approche et d'autres algorithmes récemment proposés (notamment basés sur des méthodes graph-cut [54, 58]), ainsi que des algorithmes plus classiques, vont être effectuées.

Il faut bien comprendre que le problème de restauration d'images radar reste pour le moment un problème ouvert. Actuellement, pour être utilisées, les images radar sont soumises à des spécialistes qui interprètent le contenu des images. On est encore très loin d'un traitement automatique de ces images. Notamment, le bruit de chatoiement lui-même contient de l'information (rugosité de la scène), et il est certainement pertinent d'essayer de le prendre en compte de manière constructive (et pas seulement de chercher à l'éliminer).

Depuis [13], les modèles multiplicatifs sont à nouveau à la mode dans la communauté math-image. Ils sont notamment considérés dans [10, 76, 63].

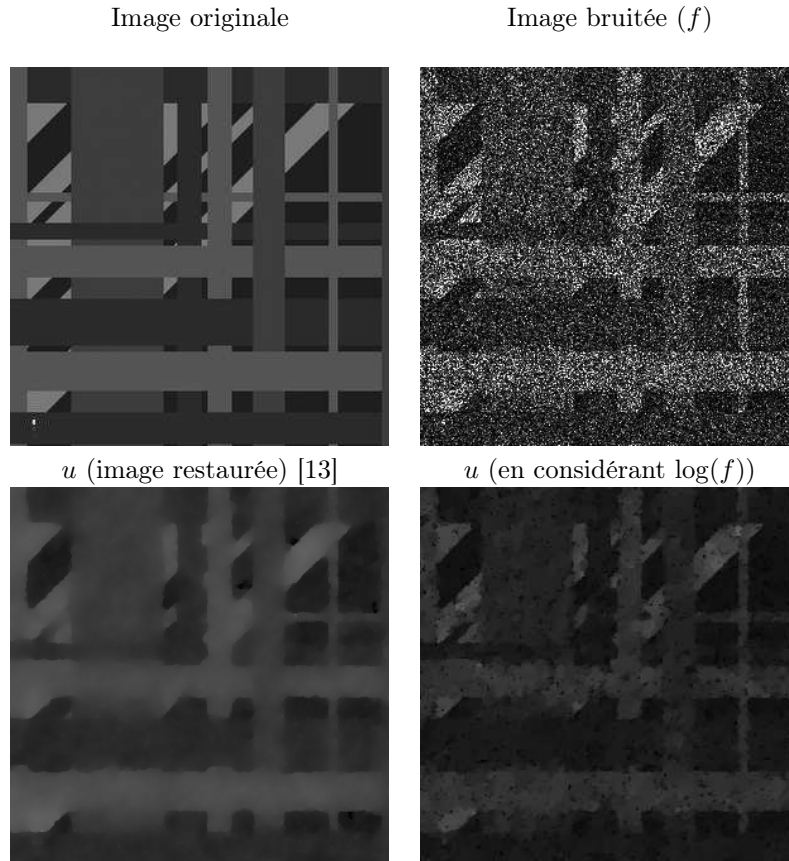


FIG. 4.2 – Exemple de décomposition multiplicative [13]. L'image  $f$  a été dégradée par un bruit de loi gamma de moyenne 1 ;  $u$  est l'image débruitée. Pour l'image en bas à gauche,  $u$  est obtenue avec l'algorithme proposé dans [13]. Pour l'image en bas à droite,  $u$  est obtenue en considérant comme donnée  $\log(f)$  et en utilisant le modèle ROF (3.5) (puis en prenant l'exponentielle de la solution).

### 4.2.3 Utilisation d'un modèle additif?

Il est naturel de se demander si on ne pourrait pas remplacer le modèle (4.2) par un modèle additif; il s'agit d'ailleurs de la première question que l'on m'a posée lorsque j'ai présenté ce travail. L'idée la plus simple est alors de considérer le logarithme de l'image originale  $f$ , puis d'utiliser un modèle de décomposition additif pour restaurer  $\log(f)$ , avant de repasser à l'exponentielle.

Le modèle original considéré ici est multiplicatif de la forme  $f = uv$ , sous l'hypothèse que  $u$  et  $v$  sont des variables aléatoires indépendantes (on obtient le modèle (4.2) en utilisant la méthode du maximum a posteriori), et  $E(v) = 1$  (i.e.  $v$  est de moyenne égale à un). On a donc en particulier  $E(f) = E(u)$ .

Maintenant, si on prend le logarithme, et qu'on note  $x = \log(f)$ ,  $y = \log(u)$ , et  $z = \log(v)$ , on obtient le modèle additif  $x = y + z$ . Pour reconstruire  $y$  à partir de  $x$ , l'hypothèse classique est  $E(z) = 0$  (c'est le cas pour toutes les méthodes additive de restauration [34, 15], e.g. minimisation de la variation totale, diffusion non linéaire, seuillage en ondelettes, moyennes non locales, équation de la chaleur, ...). Mais, on sait d'après l'inégalité de Jensen que :  $\exp(E(z)) \leq E(\exp(z))$ , i.e.  $1 \leq E(v)$ . Dès qu'il y a du bruit, on n'est plus dans le cas d'égalité (pour l'inégalité de Jensen), ce qui implique  $E(v) > 1$ . On a alors  $E(u) < E(f)$  (par exemple, dans la Figure 4.2,  $E(u) \approx E(f)/2$ , et l'image obtenue ainsi est beaucoup plus sombre que l'image de départ).

Il n'est donc pas possible d'appliquer directement une méthode additive. Il est indispensable de tenir compte de la spécificité du modèle multiplicatif.



# Chapitre 5

## Echelle des éléments constituant une image (A10, A16, P3) - [118, 85, 64]

Comme rappelé dans l'introduction du présent manuscrit, une manière d'étudier une texture est de s'intéresser à son motif de base, appelé *texton* [78]. Plus simplement, on peut s'intéresser à l'échelle de cet élément. D'une manière plus générale, on voit l'intérêt de connaître l'échelle des éléments dans une image. De plus, il semble bien que pour aller plus loin dans le problème de décomposition d'image en géométrie et texture, afin notamment d'obtenir des algorithmes spatialement adaptatifs, la notion d'échelle soit fondamentale. Toutes ces raisons m'ont poussé à étudier la notion d'échelle des éléments dans une image.

### 5.1 Une première approche (A10) - [118]

#### 5.1.1 Définition de l'échelle

Dans [118], j'ai proposé une méthode de calcul local d'une échelle basée sur le modèle ROF (3.5). L'idée de la méthode est de tirer parti du défaut bien connu du modèle  $TV - L^2$  : celui d'érosion. En effet, lorsqu'on débruite un objet avec ce modèle, son contraste diminue. La perte de contraste de l'objet est essentiellement inversement proportionnelle à son échelle. Si on définit l'échelle d'un objet comme son aire divisée par son périmètre, le résultat devient même exact dans le cas d'un cercle.

Plus précisément, Strong et Chan ont proposé dans [119] de définir les échelles des objets dans une image à l'aide du modèle de Rudin-Osher-Fatemi [109] (ou modèle de régularisation de la variation totale) :

$$\inf_u \left( \int |Du| + \frac{1}{2T} \|f - u\|_{L^2}^2 \right) \quad (5.1)$$

Il est montré dans [119] que si l'échelle de  $E$  est définie par  $\frac{|E|}{P(E)}$  (i.e. l'aire de  $E$  divisée par la périmètre de  $E$ ), et si  $f$  est l'image binaire d'un disque (tout le travail de [119] est fait dans le cas d'objets à symétrie radiale), alors le changement d'intensité  $\delta$  entre  $u$  et  $f$  à l'intérieur du disque est inversement proportionnel à son échelle (*scale*), i.e. :

$$\delta = \frac{T}{\text{scale}}. \quad (5.2)$$

L'idée que nous proposons dans [118] est de définir les échelles dans une image à l'aide



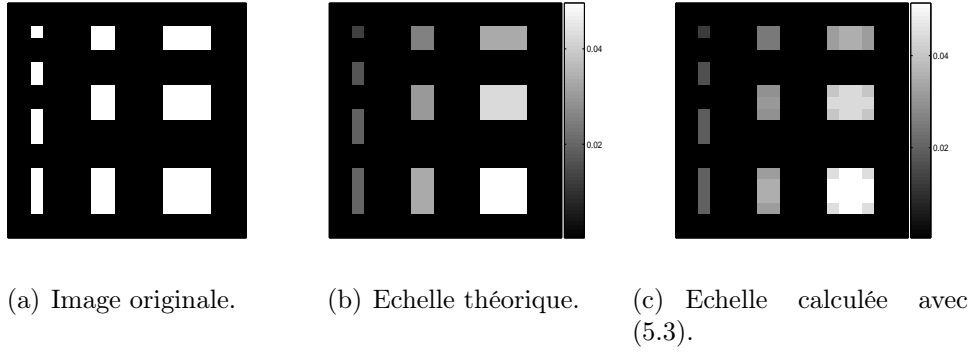


FIG. 5.1 – Calcul de l'échelle dans une image [118]

du changement de niveau de gris entre  $u$  et  $f$ . L'échelle au pixel  $x$  est définie comme :

$$\text{scale}(x) = T \cdot |u(x) - f(x)|^{-1}. \quad (5.3)$$

La notion d'échelle proposée dans [118] est en fait liée à celle de norme  $G$  introduite par Y. Meyer dans [94]. En effet, une définition équivalente à (3.3) est :

$$\|f\|_G = \sup_{E \subset \Omega} \frac{\int_E f}{P(E, \Omega)} \quad (5.4)$$

où  $P(E, \Omega)$  désigne le périmètre de  $E$ . La figure 5.1 illustre bien cette définition d'échelle.

### 5.1.2 Algorithme automatique

En mesurant la baisse de contraste local dans l'image après minimisation du modèle  $TV - L^2$ , on peut en déduire la taille des objets qui ont été éliminés. C'est cette idée très simple qu'on exploite dans [118] pour minimiser le modèle ROF (5.1) de manière automatique. L'utilisateur donne une échelle correspondant aux éléments qu'il souhaite enlever de l'image. Dans le cas du débruitage, l'utilisateur demande typiquement à l'algorithme d'enlever les objets de taille 1 (la Figure 5.2 montre un exemple de débruitage automatique ainsi obtenu). Par dichotomie (en mesurant à chaque fois la baisse de contraste dans l'image), on arrive ainsi à trouver le bon paramètre  $T$  dans (5.1). Il s'agit en quelque sorte de l'idée duale d'un principe classique utilisé en restauration d'image. Plutôt que de préciser la taille des objets à conserver, on indique la taille des objets à enlever.

Bien que très naïve, l'approche proposée dans [118] pour calculer l'échelle des éléments des images a été la source d'inspiration d'un grand nombre de mes travaux ultérieurs [88, 85].

## 5.2 Cartographie d'échelle dans une image (A16) - [85]

Dans [85], les limites de notre travail précédent [118] et le lien de ce modèle avec d'autres types de définitions d'échelle par des méthodes variationnelles ont été étudiés. Il s'agit d'une collaboration avec Bin Luo et Yann Gousseau (Telecom ParisTech).

Dans ce travail, nous proposons une méthode permettant de définir une échelle caractéristique en chaque pixel d'une image. Intuitivement, l'échelle d'un pixel est définie comme

la taille de l'objet le plus contrasté contenant ce pixel. Formellement, l'approche proposée repose sur la carte topographique, constituée des frontières des ensembles de niveau de l'image. Il s'agit d'une représentation exhaustive, hiérarchique et géométrique du contenu de l'image, [42]. En particulier, nous exploitons la structure d'arbre de la carte topographique [96] pour nous affranchir des différentes étapes de lissage linéaire requises par les approches classiques de définition de l'échelle caractéristique, ce qui nous permet de définir une carte d'échelle précise. La carte topographique [42] d'une image  $u$  est constituée des frontières topologiques des ensembles de niveau supérieurs :

$$\Psi_\lambda = \{x \in R^2, u(x) \geq \lambda\}$$

pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  (les ensembles de niveau inférieurs pourraient de façon équivalente être considérés). Ces frontières sont appelées *lignes de niveau*. Une transformation rapide permettant de passer de l'image numérique à l'ensemble de ses lignes, la FLST (pour Fast Level Set Transform) a été proposée dans [96]. Il s'agit d'une représentation de l'image par un arbre dont les noeuds sont les composantes connexes des lignes de niveau (cf Figure 5.3). Ces composantes connexes sont des courbes de Jordan (courbes fermées et qui ne se coupent pas), dont l'intérieur est appelé une *forme*. On peut montrer que l'image  $u$  peut être reconstruite à partir de son arbre en utilisant la relation

$$u(x) = \sup\{\lambda | x \in \Psi_\lambda\} \quad (5.5)$$

Outre son caractère géométrique, deux propriétés importantes de cette représentation sont les invariances par changements de contrastes locaux et par l'opération  $u \rightarrow 255 - u$ . Cette dernière propriété implique que les objets clairs et sombres sont traités de manière équivalente. La FLST a notamment été utilisée avec succès dans [60, 61] pour minimiser le flot de la variation totale.

L'idée de départ de notre travail est d'associer à chaque pixel de l'image la forme (au sens noeud de la FLST) la plus pertinente, puis d'utiliser cette forme pour associer à un pixel une échelle caractéristique.

Une notion de forme significative définie à partir de la carte topographique a été introduite dans [59]. Il s'agit de sélectionner les formes que leur périmètre et leur contraste rendent improbables dans une image de bruit, par une méthode *a contrario*. Pour le but que nous nous sommes fixés, associer à chaque point une échelle caractéristique, nous proposons un filtrage alternatif très simple de la carte topographique. D'une part, ce filtrage associe bien une forme à chaque point et, d'autre part, il ne repose que sur un critère de contraste de manière à pouvoir associer n'importe quelle échelle à un point. On définit les formes les plus pertinentes comme les formes les plus contrastées de l'image. Pour un pixel  $x$  d'une image  $u$ , on note  $\{f_i(x)\}_{i \in A(x)}$  toutes les formes qui contiennent  $x$ ,  $A(x)$  étant un ensemble d'indices tels que  $f_i \subset f_{i+1}$ . Pour chaque forme, on définit  $|f_i|$  la surface de la forme,  $P(f_i)$  son périmètre et  $I(f_i)$  le niveau de gris associé à  $f_i$ . On définit alors le contraste de la forme  $f_i$  comme la valeur absolue de la différence entre les niveaux de gris associés respectivement à  $f_i$  et  $f_{i+1}$  :

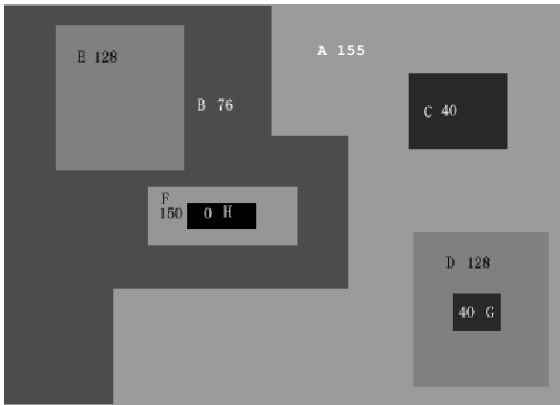
$$C(f_i) = |I(f_{i+1}) - I(f_i)| \quad (5.6)$$

La forme la plus contrastée contenant le pixel  $x$  est définie comme :

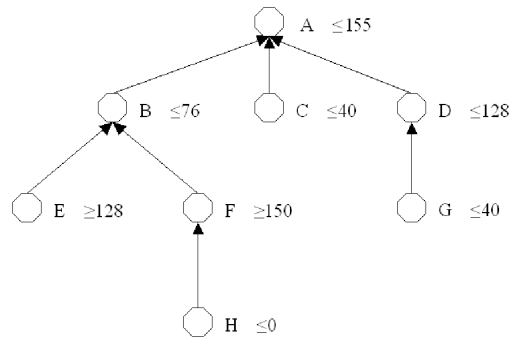
$$\hat{f}(x) = f_{\arg \max_{i \in A(x)} C(f_i)} \quad (5.7)$$



FIG. 5.2 – Restauration d’image automatique par minimisation de la variation totale avec la méthode proposée dans [118] (à gauche, l’image bruitée; à droite, l’image restaurée). L’échelle des objets à enlever était fixée à 1 pixel.



(a)



(b)

FIG. 5.3 – Exemple de FLST : (a) Image synthétique; (b) Arbre d’inclusion obtenu par FLST.

La dernière étape consiste à associer une échelle au pixel  $x$ . Inspiré par [118], nous choisissons de définir l'échelle  $E(x)$  comme

$$E(x) = |\hat{f}(x)|/P(\hat{f}(x)) \quad (5.8)$$

On montre un exemple de carte d'échelle obtenue avec cette méthode sur la Figure 7.3 dans la Section 7.7.

### 5.3 Lien entre A10 - [118] et A16 - [85]

On peut montrer que la définition d'échelle proposée dans [118] coïncide avec celle de [85] dans certains cas particuliers. On peut aussi relier ces définitions à celle proposée dans [32, 33]. Dans ces deux derniers travaux, l'échelle est définie en utilisant les propriétés du flot de la variation totale :

$$\begin{cases} u(., 0) = f \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{Du}{|Du|} \right) \end{cases} \quad (5.9)$$

Dans [69], les auteurs montrent l'équivalence en dimension 1 de ce problème avec celui de la régularisation par variation totale. Ils montrent notamment que la vitesse d'évolution du niveau de gris d'un pixel dépend de l'échelle de l'objet auquel il appartient. Les auteurs de [32, 33] proposent alors de définir l'échelle  $m$  d'un pixel par la formule ( $u$  étant la solution de (5.9)) :

$$\frac{1}{m} = \frac{\int_0^T |\partial_t u| dt}{T}. \quad (5.10)$$

Notons l'importance du paramètre  $T$  dans cette définition.

Dans une récente série de papiers [26, 27, 40, 6], V. Caselles et ses collaborateurs ont montré des résultats particulièrement intéressants pour mieux comprendre les liens entre échelle et variation totale. En particulier, il est montré que, si  $f$  est l'image d'une fonction caractéristique d'un ensemble convexe  $C$ , i.e.  $f = \mathbf{1}_C$ , alors la régularisation par variation totale est équivalente au flot de la variation totale. Dans les deux cas, la vitesse d'évolution pour un convexe  $C$  est  $\frac{P(E)}{|E|}$  où  $E$  est l'ensemble de Cheeger de  $C$  (cf Définition 5.4.4 dans la Section 5.4), i.e.,  $E$  est solution de  $\min_{K \subset C} \frac{P(K)}{|K|}$ . L'ensemble  $C$  est dit Cheeger en lui-même s'il est solution de ce problème de minimisation. En dimension 2, une condition nécessaire et suffisante pour que  $C$  convexe soit un Cheeger en lui-même est que  $C$  soit  $C^{1,1}$ , et la courbure de  $C$  bornée par la quantité  $\frac{P(C)}{|C|}$ . Un disque est donc en particulier un Cheeger en lui-même.

Si  $f = \mathbf{1}_C$ , avec  $C$  convexe Cheeger en lui-même, alors il est montré dans [27] que la solution du flot de la variation totale, Equation (5.9), ou de manière équivalente la solution du problème de régularisation par variation totale, Equation (5.1), est donnée par

$$u(x, T) = \max \left( \left( 1 - T \frac{P(C)}{|C|} \right), 0 \right) \mathbf{1}_C \quad (5.11)$$

La vitesse d'évolution de  $C$  est donc  $\frac{P(C)}{|C|}$  (dans le cas où  $C$  est un disque, on retrouve le résultat de Chan et Strong dans [119]).

En conséquence, lorsque l'image  $f$  est la fonction caractéristique d'un ensemble convexe de Cheeger dans lui-même, les définitions d'échelle (5.2), (5.10), et (5.8), sont équivalentes.

Par contre, dès que l'évolution du niveau de gris n'est pas monotone (ce qui est le cas dès qu'une image est bruitée), la définition (5.2) ne fonctionne plus. Et on vérifie expérimentalement dans [86] que (5.8) s'avère beaucoup plus robuste que (5.10).

L'approche que nous avons introduit dans [85] permet de calculer une échelle spatialement précise en chaque pixel de l'image. Néanmoins, elle s'avère plus compliquée à mettre en place que les définitions (5.2) et (5.10). Elle nécessite en effet l'utilisation de l'outil FLST. Afin de ne pas avoir à reprogrammer la FLST, nous avons utilisé l'environnement de programmation libre *Megawave*.

## 5.4 Modèle $TV - L^1$ et échelle (P3) - [64]

### 5.4.1 Présentation

Dans ce travail, on s'intéresse au modèle :

$$\inf_{u \in BV(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} |Du| + \lambda \|f - u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \quad (5.12)$$

Ce modèle a d'abord été introduit pour les signaux 1D dans [1]. M. Nikolova l'a ensuite proposé en traitement d'image dans [101] pour faire de la restauration d'image dans le cas du bruit impulsional. La norme  $L^1$  ne vérifie évidemment pas la propriété d'être faible pour les éléments oscillants, mais il a pourtant été montré qu'il s'agissait d'un bon choix pour faire de la décomposition d'image [54, 126].

L'existence d'une solution pour (5.12) est standard. Il n'y a par contre pas forcément unicité (cf par exemple [48]).

Notre motivation pour l'étude du modèle (5.12) trouve sa source dans le succès qu'a rencontré l'utilisation de la notion d'ensemble de Cheeger (cf Définition 5.4.4 ci-après) pour l'étude du modèle ROF (3.5). L'idée est de décrire aussi précisément que possible le comportement du modèle (5.12), d'abord sur des fonctions caractéristiques, puis sur des fonctions quelconques.

### 5.4.2 Quelques définitions

On utilisera l'espace [9] suivant :

$$X_\infty(\Omega) = \{z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) / \operatorname{div} z \in L^\infty(\Omega)\} \quad (5.13)$$

**Ensembles calibrables :** La notion d'ensemble calibrable est étudiée dans [27], [7], [38] [5].

#### DÉFINITION 5.4.1

Soit  $E$  borné de périmètre fini. On dit que  $E$  est calibrable s'il existe un champ de vecteurs  $\xi \in X_\infty$  avec  $\|\xi\|_\infty \leq 1$  tel que  $(\xi, D\chi_E) = |D\chi_E|$  (égalité en tant que mesures de  $\mathbb{R}^2$ ), et  $-\operatorname{div} \xi = \lambda_E \chi_E$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  pour une certaine constante  $\lambda_E$ . Dans ce cas, on a  $\lambda_E = \frac{\operatorname{Per} E}{|E|}$ .

#### PROPOSITION 5.4.2

Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  borné de périmètre fini.  $E$  est calibrable ssi  $\lambda_E \chi_E \in \partial J(\chi_E)$  où  $\partial J$  désigne la sous-différentielle de la variation totale.

PROPOSITION 5.4.3

Soit  $E$  borné de périmètre fini. On suppose  $E$  convexe de classe  $C^{1,1}$ . Il y a équivalence entre :

- (i)  $E$  est calibrable
- (ii)  $E$  minimise  $P(X) - \lambda_E|X|$  pour  $X \subset E$  de périmètre fini.

**Ensembles de Cheeger :** Concernant les ensembles de Cheeger, on renvoie le lecteur à [39], [36],[35], [41].

DÉFINITION 5.4.4

Soit  $\Omega$  un ouvert. La constante de Cheeger de  $\Omega$  est :

$$\lambda_\Omega = \min_{A \subset \Omega} \frac{\text{Per}(A)}{|A|} \tag{5.14}$$

Un ensemble de Cheeger de  $\Omega$  est un ensemble  $F$  solution du problème de minimisation ci-dessus. On dira que  $\Omega$  est Cheeger en lui même s'il est lui même solution de (5.14).

PROPOSITION 5.4.5

$G$  est un ensemble de Cheeger de  $\Omega$  si et seulement si  $G$  est solution de :

$$\min_{F \subset \Omega} \text{Per}F - \lambda_G|F|$$

où  $\lambda_G = \frac{\text{Per}G}{|G|}$ .

Autrement dit, pour un ensemble convexe :

$\Omega$ convexe Cheeger en lui même $\Leftrightarrow \Omega$ convexe calibrable
--

### 5.4.3 Equivalence géométrique

Etant donnée  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , on considère la famille de problèmes :

$$\inf_{U \subset \mathbb{R}^2} \text{Per}U + \lambda|U \Delta F_\mu| \quad (P_\mu) \tag{5.15}$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $F_\mu = \{x, f(x) > \mu\}$ .

Comme pour (5.12), l'existence d'une solution est standard [48].

Dans [48], les auteurs ont montré que tout ensemble de niveau d'une solution de (5.12) associé à la fonction caractéristique d'un ensemble était solution du problème géométrique (5.15). Dans [127], il a été montré qu'en empilant des solutions du problème géométrique (5.15), on obtenait une solution de (5.12). Pourtant, afin de montrer des propriétés comme l'invariance par changement de contraste, il faut établir de manière plus précise l'équivalence entre les problèmes géométrique et fonctionnel. A notre connaissance, la formulation suivante est nouvelle (le résultat serait standard si la fonctionnelle dans (5.12) était différentiable) :

THÉORÈME 5.4.6 (EQUIVALENCE GÉOMÉTRIQUE [64])

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Il y a équivalence entre :

- (i)  $u$  est solution de (5.12)
- (ii) Les ensembles de niveaux  $U_\mu$  de  $u$  sont presque tous solutions de (5.15), et vérifient la condition de reconstruction :

$$U_\mu \subset \bigcap_{\nu < \mu} U_\nu$$

#### 5.4.4 Le problème géométrique

L'équivalence géométrique (Théorème 5.4.6) nous conduit à étudier le problème :

$$\inf_U E_G(U) := \text{Per}U + \lambda|U \triangle F| \quad (5.16)$$

et ainsi d'étudier le modèle TVL1 au moyen de considérations géométriques.

**Etude de la disparition brutale :** A la suite de [48], on peut s'intéresser aux ensembles qui disparaissent brutalement. On montre dans [64] que ce sont nécessairement des ensembles de Cheeger en eux-même.

PROPOSITION 5.4.7 ([64])

Soit  $F \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble non vide (pas nécessairement convexe). On suppose que  $F$  disparaît brutalement, c'est-à-dire qu'il existe  $\tilde{\lambda} > 0$  tel que :

- $F$  est solution du problème géométrique (5.16) pour  $\lambda > \tilde{\lambda}$
- $\emptyset$  est solution du problème géométrique (5.16) pour  $0 < \lambda < \tilde{\lambda}$

Alors  $F$  est Cheeger en lui-même, et  $\tilde{\lambda} = \lambda_F := \frac{\text{Per}F}{|F|}$ .

La réciproque est vrai dans le cas convexe, mais néanmoins fausse en général [64], i.e. il existe des ensembles de Cheeger qui ne possèdent pas la propriété de disparition brutale (considérer par exemple la forme d'un L).

La proposition suivante donne néanmoins une condition suffisante pour satisfaire la propriété de disparition brutale :

PROPOSITION 5.4.8 ([64])

Soit  $F \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble calibrable. Alors  $F$  vérifie la propriété de seuil, c'est-à-dire :

- $F$  est l'unique solution du problème géométrique (5.16) pour  $\lambda > \lambda_F$
- $\emptyset$  et  $F$  sont solutions du problème géométrique (5.16) pour  $\lambda = \lambda_F$ .
- $\emptyset$  est l'unique solution du problème géométrique (5.16) pour  $\lambda < \lambda_F$

La réciproque de ce résultat est en général fausse, i.e. il existe des ensembles qui possèdent la propriété de disparition brutale, mais qui ne sont pas calibrables (considérer par exemple le cas d'un anneau).

**Commentaires :** Les résultats des deux propositions précédentes illustrent bien la différence de comportement fondamental entre le modèle (5.12) et le modèle ROF (3.5). En effet, il est bien connu que si on considère un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^2$  et  $f = \mathbf{1}_E$  comme donnée pour le modèle (3.5), alors la solution  $u$  du problème (3.5) aura un contraste moins élevé que  $f$  (cf par exemple la formule (5.11) [9]). Dans le cas du modèle  $TV - L^1$  (5.12), il existe par contre des ensembles  $E$  tels que que si  $f = \mathbf{1}_E$ , alors la solution  $u$  du problème (5.12) est exactement  $u = f$  (sans perte de contraste).

**Reformulation de l'énergie pour une donnée convexe :** Commençons par remarquer que si  $F$  est convexe, l'énergie se simplifie.

PROPOSITION 5.4.9 ([64])

On suppose  $F$  convexe. Alors le problème géométrique (5.16) associé à  $F$  se reformule de la manière suivante :

$$\inf_{U \subset F} \mathcal{G}(U) := \text{Per}U - \lambda|U| \quad (5.17)$$

PROPOSITION 5.4.10 ([64])

Soit  $F \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble convexe. Alors  $F$  disparaît brutalement si et seulement si il est calibrable. De plus, lorsque  $\lambda = \lambda_F$ ,  $\{\emptyset, F\}$  est exactement l'ensemble des solutions

THÉORÈME 5.4.11 ([7], THÉORÈME 9))

Soit  $C$  un ensemble borné convexe de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^{1,1}$ . Soit  $\Lambda = \text{ess sup}_{x \in \partial C} |\kappa(x)|$  ( $\kappa(x)$  désigne la courbure sur  $\partial C$  en  $x$ ). Alors  $C$  est solution du problème géométrique (5.16) associé à  $C$  si et seulement si  $\lambda \geq \max(\lambda_C, \Lambda)$ .

Remarquons que ce théorème nous décrit donc toutes les solutions convexes de TVL1 : **un ensemble convexe  $C$  est solution de TVL1 pour un certain  $F$  ssi  $\lambda \geq \max(\lambda_C, \Lambda)$ .**

**Comportement des solutions pour une donnée convexe :**

DÉFINITION 5.4.12

Soit  $C \subset \mathbb{R}^2$ . On définit respectivement l'érodée et l'ouverture de rayon  $r > 0$  de  $C$  par :

$$C_r := C \ominus B(0, r) := \{x \in C, B(x, r) \subset C\}$$

$$C^r := C_r \oplus B(0, r) = \bigcup_{B(x, r) \subset C} B(x, r)$$

THÉORÈME 5.4.13 ([64])

Soit  $C$  un ensemble borné convexe. Il existe  $\lambda^* > 0$  tel que  $|C_{1/\lambda^*}| = \frac{\pi}{\lambda^{*2}}$ ,  $\frac{\text{Per}C^{1/\lambda^*}}{|C^{1/\lambda^*}|} = \lambda^*$ , et :

- Pour  $\lambda > \lambda^*$ , l'ensemble  $C^{1/\lambda}$  est l'unique solution du problème géométrique (5.16) (avec  $F = C$ ).
- Pour  $\lambda = \lambda^*$ , l'ensemble des solutions du problème géométrique (5.16) (avec  $F = C$ ) est exactement  $\{C^{1/\lambda^*}, \emptyset\}$ , et  $C^{1/\lambda^*}$  est l'ensemble de Cheeger de  $C$ .
- Pour  $\lambda < \lambda^*$  l'unique solution du problème géométrique (5.16) (avec  $F = C$ ) est  $\emptyset$ .

Dans le cas convexe, on connaît finalement complètement le comportement des solutions du problème (5.16).

### 5.4.5 Interprétation en décomposition d'image

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 5.4.13.

COROLLAIRE 5.4.14 ([64])

Soit  $C$  un ensemble borné convexe, et  $\lambda > 0$ . Soit  $C^{1/\lambda}$  l'ouverture de  $C$  de rayon  $\frac{1}{\lambda}$ . Alors :

- Si  $\frac{\text{Per}C^{1/\lambda}}{|C^{1/\lambda}|} > \lambda$ , la solution de (5.16) est  $C^{1/\lambda}$ .
- Si  $\frac{\text{Per}C^{1/\lambda}}{|C^{1/\lambda}|} < \lambda$ , la solution de (5.16) est  $\emptyset$ .
- Si  $\frac{\text{Per}C^{1/\lambda}}{|C^{1/\lambda}|} = \lambda$ ,  $C^{1/\lambda}$  et  $\emptyset$  sont solutions de (5.16).

Ce résultat est à rapprocher du célèbre théorème de Matheron en morphologie mathématique [115]. Dans [64], on utilise le corollaire 5.4.14 pour proposer un algorithme géométrique minimisant le modèle TVL1 (5.12). Cet algorithme combine les éléments suivants : ouverture, fermeture (pour traiter les parties concaves), et seuillage selon le rapport périmètre/aire. Une version rapide est obtenue en utilisant la FLST (Fast Level Set Transform) [96].



Notre motivation première lors de l'étude du modèle TVL1 était de comprendre l'action d'un modèle de débruitage sur les petits objets des images. Le Théorème 5.4.13 et le corollaire 5.4.14 montrent que le comportement de TVL1 dépend de manière cruciale de leur échelle. Il est intéressant de rapprocher ce résultat de la notion de granulométrie utilisée en morphologie mathématique pour étudier la taille des objets :

#### DÉFINITION 5.4.15

Une granulométrie est une famille :

- d'ouvertures  $\{\gamma_\mu\}$  dépendant d'un paramètre positif  $\mu$ ,
- et fonctions décroissantes de  $\mu : \mu_2 \geq \mu_1 > 0 \Rightarrow \gamma_{\mu_2} \leq \gamma_{\mu_1}$ .

La fonction de distribution granulométrique d'un ensemble  $F$  est  $\mu \mapsto 1 - \frac{|\gamma_\mu F|}{|F|}$ . Sa dérivée est appelée spectre granulométrique :  $-\frac{1}{|F|} \frac{d}{d\mu} |\gamma_\mu F|$ .

A la condition portant sur le rapport périmètre/aire du Corollaire 5.4.14 près, on constate que le modèle TVL1 fournit une granulométrie sur la famille des ensembles convexes ( $\gamma_\mu F = F^\mu$  si  $\mu \leq \frac{1}{\lambda^*}$ ,  $\emptyset$  sinon).

Dans le cadre de la morphologie mathématique, les spectres granulométriques sont utilisés notamment pour l'analyse des textures : une texture dont le spectre granulométrique est concentré sur de petites valeurs de  $\lambda$  est une texture "rugueuse" (c'est-à-dire composée de petits objets), tandis que si le spectre granulométrique est concentré sur les grandes valeurs de  $\lambda$ , la texture est plus lisse, avec des objets de plus grande échelle (voir par exemple [115]).

Ceci pourrait expliquer le comportement étonnamment bon du modèle TVL1 pour le problème de la séparation géométrie-texture  $u + v$ . De manière informelle, l'action de TVL1 sur les images consiste en une granulométrie (qui détruit les petits détails et les grandes courbures) renforcée par un seuillage sur le rapport périmètre sur aire. Lorsque le paramètre de fidélité  $\lambda$  varie, les objets sont altérés en fonction de leur granulométrie et disparaissent lorsque leur rapport périmètre sur aire est trop petit. La partie  $v$  regroupe donc les objets de fine granulométrie tandis que la partie  $u$  regroupe les objets de granulométrie grossière, plus proches de ce que l'on attend d'une partie géométrie.

Il nous semble remarquable que, tandis que la communauté travaillant sur la séparation géométrie-texture [94, 75, 121, 102, 17, 19, 22] a longtemps cherché à utiliser des normes favorisant les oscillations dans le terme texture, un des meilleurs modèles de décomposition soit fourni par une norme qui ne tient aucun compte des oscillations. Les critères utilisés par TVL1, plus simples, ont néanmoins fait leurs preuves expérimentalement dans l'étude des textures à l'aide de la morphologie mathématique (cf les critères de complexité et simplicité utilisés par exemple dans [110]). La Figure 5.4 illustre l'efficacité du modèle TVL1.

### 5.4.6 Cas spatialement adaptatif

L'idée est de remplacer le terme  $\lambda$  par un terme variable, et d'interpréter la quantité  $\lambda(x)dx = d\lambda$  comme une nouvelle mesure. On considère le problème :

$$\inf_u E(u) := \int_{\mathbb{R}^2} |Du| + \int_{\mathbb{R}^2} |u - f| d\lambda \quad (5.18)$$

En pratique, on suppose la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :  $d\lambda = \lambda(x)dx$  avec  $\lambda \in BV_{loc}$ . De plus, pour assurer l'existence au problème ci-dessus on suppose que

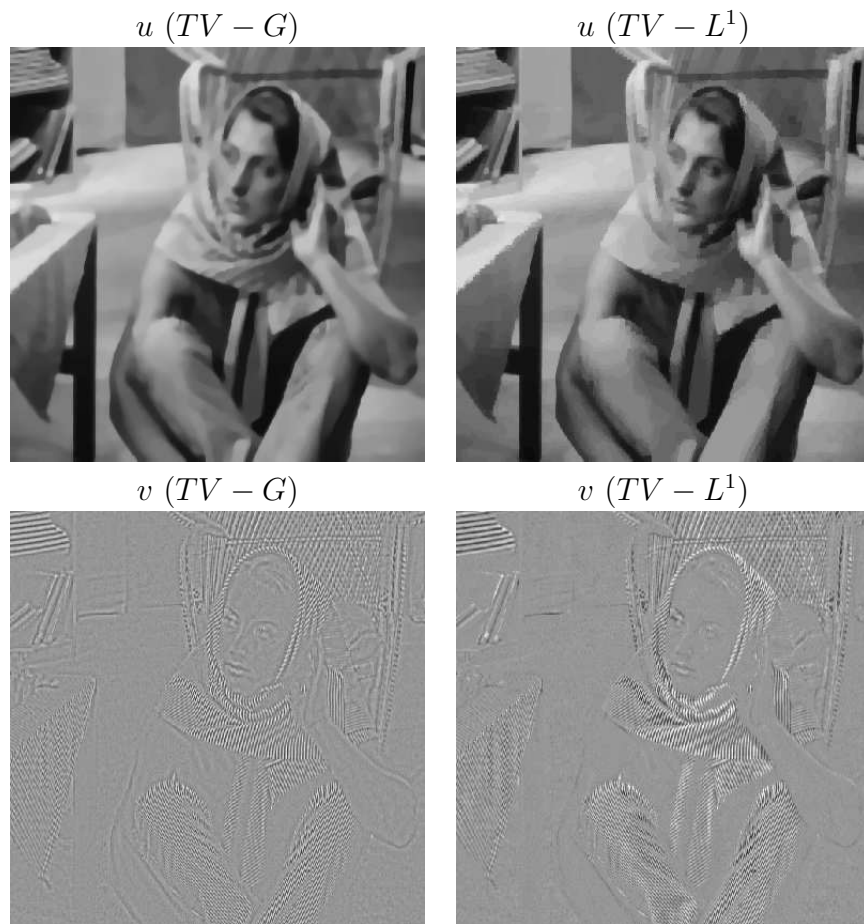


FIG. 5.4 – Exemple de décomposition avec le modèle  $TV - G$  (colonne de gauche) et le modèle  $TV - L^1$  (colonne de droite). D'après [126], le résultat de droite serait légèrement meilleur.

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \forall x, \lambda(x) \geq c > 0 \quad (5.19)$$

On montre alors dans [64] que de nombreuses propriétés du cas  $\lambda$  constant sont conservées. Cette étude pourrait se révéler utile en imagerie médicale, dans les applications où l'on sait pertinemment qu'il ne faut pas toucher à certaines parties de l'image.

# Chapitre 6

## Inpainting (P2) - [24]

### 6.1 Modélisation

Comme rappelé dans l'introduction, une méthode intéressante en synthèse de texture est celle des algorithmes de type copier-coller. Mon étude des textures dans les images m'a naturellement amené à étudier ce genre d'approche. C'est pourquoi je me suis intéressé à la méthode de copier-coller d'un point de vue variationnel dans [24]. Cette étude a eu lieu dans le cadre de l'ANR Freedom. Il s'agit ici d'une collaboration avec Simon Masnou (Paris 6) et Saïd Ladjal (Telecom ParisTech).

L'inpainting consiste à retrouver une partie manquante de l'image (vieux photographie, retouche d'image, ...). On peut formuler le problème de la manière suivante : étant donné un domaine  $A$  à reconstruire, on utilise l'information valide autour de  $A$  pour synthétiser l'image la plus plausible dans  $A$ . Plusieurs classes de méthodes ont été proposées au cours des dix dernières années.

1. La première catégorie est celle mettant l'accent sur la reconstruction de la géométrie, comme initialement proposé dans [92] (cf aussi [91]). Les auteurs parlaient alors de désoccultation d'image. Le mot *inpainting* est apparu pour la première fois dans ce contexte dans [29], où un modèle sous forme d'EDP est proposé. De très nombreux travaux ont suivi, tous avec le même défaut principal : celui de ne pas pouvoir reconstruire les textures.
2. En parallèle à ces approches orientées géométrie, une autre classe de méthode est apparue à la fin des années 90 dans le cadre de la synthèse de texture. Les méthodes copier-coller, proposées initialement dans [66, 68, 122], apparaissent comme extrêmement efficaces (cf par exemple la Figure 6.1). L'hypothèse sous-jacente de ces méthodes est la localité et la stationnarité à une certaine échelle d'une texture. L'idée de base est d'utiliser la notion de patch (échantillon).

Les performances des algorithmes de type copier-coller ont été étudiées dans [80] d'un point de vue statistique par Levina et Bickel. Ces derniers montrent que si un échantillon de texture est vu comme un chaîne de Markov, et si sa taille tend vers l'infini, alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées pour un algorithme de type copier-coller :

1. la distribution jointes des pixels dans toute fenêtre  $r \times r$
2. et la distribution conditionnelle du pixel en bas à droite de toute fenêtre  $r \times r$  par rapport aux autres pixels de la fenêtre

convergent vers les distributions de la texture observée.

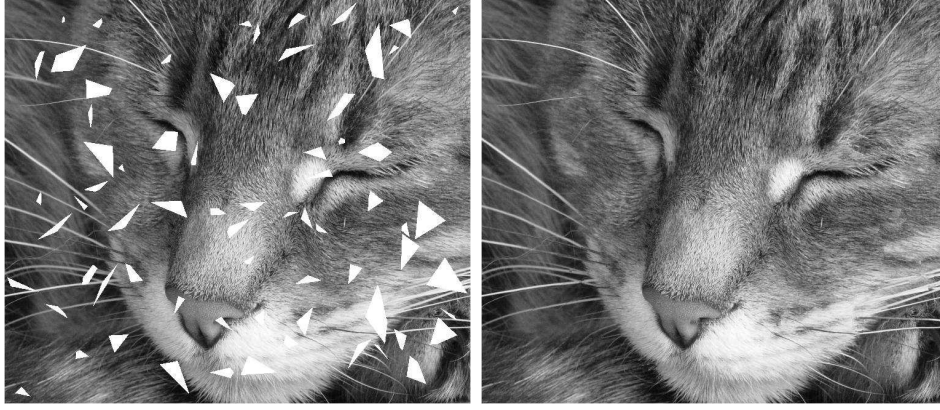


FIG. 6.1 – Une image avec plusieurs parties manquantes, et la reconstruction avec la méthode de [104].

Notre motivation pour étudier les méthodes de type copier-coller d'un point de vue analyse est double :

1. d'une part, proposer une interprétation variationnelle générale dans le domaine continu.
2. d'autre part, expliquer d'un point de vue variationnel, la capacité de ces méthodes à reconstruire la géométrie, et à caractériser le type de géométrie reconstruite.

Les méthodes de type copier-coller peuvent être vues comme un problème variationnel, dans la mesure où trouver un patch qui minimise une distance à un autre patch est déjà une tâche variationnelle.

On part d'un modèle introduit dans [57]. L'idée est de proposer un modèle qui imite le principe des algorithmes de copier-coller (les versions ou des morceaux entiers de patch sont recopiés [81, 104, 53]). Il est alors question de translation et éventuellement de rotations de patches. On s'intéresse donc à trouver une application  $T$  qui prend les patches de  $\Omega \setminus A$ , les translate et les tourne dans  $A$ .  $T$  est une roto-translation par morceaux de  $A$  dans  $\Omega \setminus A$ , i.e.  $T$  peut s'écrire

$$T(x) = \sum_{i \in I} R_i(x - c_i) \mathbf{1}_{A_i}$$

où  $\{A_i\}_{i \in I}$  est une partition de  $A$  et, pour tout  $i \in I$ ,  $R_i$  est une matrice de rotation et  $c_i$  un vecteur de translation.

On note  $B_r(x)$  la boule de centre  $x$  de rayon  $r$ . Si l'image interpolée dans  $A$  est définie par  $u_0(x) = u_0(T(x))$  pour tout  $x \in A$ , alors une mesure globale de la distance en chaque point  $x$  entre un patch  $B_r(x)$  et son image  $B_r(T(x))$  peut s'écrire

$$\int_A \int_{B_r(0)} |u_0(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx$$

En effet, si on note  $T_x$  la valeur de  $T$  en  $x$  et  $R_x, c_x$  la matrice rotation et le vecteur translation associés, on a  $T_x(x+y) = R_x(x+y - c_x) = T_x(x) + R_x y = T_x(x) + \nabla T_x y$ . Maintenant, considérons la situation où  $u_0$  n'est connue qu'en dehors de  $A$ . Une fois  $T$  donnée,  $u_0$  peut être définie sur  $A$  par la formule  $u_0(x) = u_0(T(x))$  pour tout  $x \in A$ . On a alors le critère

$$\int_A \int_{B_r(0)} |u_0(T(x+y)) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx$$

Il faut empêcher  $T$  d'être une translation globale pour éviter les minimiseurs triviaux. On rajoute la connaissance de la donnée dans une bande autour de  $A$  (et pas seulement à la frontière  $\partial A$ ). Le principal critère que nous proposons dans [24] est le suivant :

( **Modèle I** )

$$\mathcal{E}_1(T) = \int_{x \in A+B_r} \int_{y \in B_r} |u_0(T(x+y)) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx$$

avec les contraintes

- $u_0$  donné sur  $\Omega \setminus A$  ;
- $T(A + B_r) \subset \Omega \setminus (A + B_r)$  ;
- $T = \text{Id}$  sur  $\Omega \setminus (A + B_r)$  ;

On montre que  $\mathcal{E}_1$  peut être minimisée dans la classe des roto-translations de  $\Omega$  dans lui-même.

## 6.2 Ajout de contraintes géométriques

On introduit plusieurs variantes de ce modèle, afin notamment de rajouter des contraintes sur la géométrie reconstruite. Pour cela, on ne demande plus que l'image reconstruite dans  $A$  soit exactement une copie de  $u_0$ . On introduit à la place une fonction interpolatrice  $u$ , sous la contrainte que  $u$  coïncide avec  $u_0$  à l'extérieur de  $A$ . Cela donne le nouveau critère :

$$\tilde{\mathcal{E}}_2(u, T) = \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx$$

qui peut être minimisé dans l'espace  $\{(u, T) : u \in L^\infty(\Omega), \|u\|_\infty \leq C_1, T \in V_1\}$ .

Afin d'éviter les effets de blocs, on pénalise les variations locales de  $u$  dès qu'elle sont plus importantes que celles de  $u_0$  : Si  $u_0, u \in L^\infty(\Omega) \cap \text{BV}(\Omega)$ , on définit alors le critère :

( **Modèle II** )

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(u, T) = & \frac{1}{r^N} \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx \\ & + \frac{1}{r^{N-1}} \int_{A+B_r} \left( |Du|(B_r(x)) - |Du_0|(B_r(T(x))) \right)^+ dx \end{aligned}$$

où  $(\cdot)^+$  désigne  $\max(\cdot, 0)$  et les coefficients  $\frac{1}{r^N}$  et  $\frac{1}{r^{N-1}}$  assurent l'homogénéité de l'énergie.

**Minimisation du Modèle II :** Supposons que  $u_0 \in \text{BV}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et définissons

$V_2 = \left\{ (u, T), u \in \text{BV}(\Omega), \|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty, u = u_0 \text{ sur } \Omega \setminus A, T \in \text{SBV}(\Omega, \mathbb{R}^N), T \text{ et une roto-translation par morceaux associée à la partition de Caccioppoli } \{E_i\}_{i \in I_T} \text{ telle que } \sum_{i \in I_T} P(E_i, \Omega) \leq \frac{C}{r^{N-1}}, T = \text{Id sur } \Omega \setminus (A + B_r), T(A + B_r) \subset (\Omega \setminus [(A + B_r) \cup (\partial\Omega + B_r)]) \right\}$

On peut alors montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 6.2.1 ([24])

La fonctionnelle  $\mathcal{E}_2$  admet un minimiseur  $(u, T) \in V_2$ .

Cependant, il a été montré par exemple dans [73] que certaines textures (dans le domaine continu) ont une variation totale infinie. Il paraît donc plus pertinent d'un point de vue modélisation de pénaliser la variation totale de la "partie géométrique" de l'image. Nous avons choisi d'utiliser un modèle de décomposition de type  $TV - L^1$  (3.8), modèle pour lequel il est facile de montrer l'existence d'un principe du maximum.

DÉFINITION 6.2.2 (PARTIE GÉOMÉTRIQUE D'UNE DÉCOMPOSITION TV-L<sup>1</sup>)

Soit  $v \in L^\infty(\Omega)$ . On appelle *partie géométrique* de  $v$  une solution  $v^g$  de

$$\text{Min}_{v^g \in L^\infty(\Omega) \cap \text{BV}(\Omega)} |Dv^g|(\Omega) + \|v - v^g\|_{L^1(\Omega)} \quad (6.1)$$

On définit une fois pour toute  $u_0^g$  une solution de (5.12) avec  $v = u_0$  et telle que  $\|u_0^g\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ .

DÉFINITION 6.2.3 (PARTIE GÉOMÉTRIQUE CONTRAINTÉ PAR  $u_0$ )

Soit  $u \in L^\infty(\Omega)$  telle que  $u = u_0$  sur  $\Omega \setminus A$ . On appelle *partie géométrique  $u$  contrainte par  $u_0$*  une solution  $u^g$  de

$$\text{Min}_{\substack{u^g \in L^\infty(\Omega) \cap \text{BV}(\Omega) \\ u^g = u_0^g \text{ sur } \Omega \setminus A}} |Du^g|(\Omega) + \|u - u^g\|_{L^1(\Omega)} \quad (6.2)$$

telle que  $\|u^g\|_\infty \leq \|u\|_\infty$ .

**Modèle III : pénalisation des variations locales de la composante géométrique seulement.** On propose finalement le critère suivant :

( **Modèle III** )

$$\mathcal{E}_3(u, u^g, T) = \frac{1}{r^N} \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)y)|^2 dy dx + \frac{1}{r^{N-1}} \int_{A+B_r} \left( |Du^g|(B_r(x)) - |Du_0^g|(B_r(T(x))) \right)^+ dx$$

où on suppose que  $u^g$  est une partie géométrique de  $u$  contrainte par  $u_0$ . Soit  $\tilde{C}$  telle que :

$$V_3 = \left\{ (u, u^g, T), u \in \text{BV}(\Omega), \|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty, |Du|(\Omega) \leq \frac{\tilde{C}}{r^{N-1}}, u = u_0 \text{ sur } \Omega \setminus A, \right. \\ \left. \begin{array}{l} u^g \text{ partie géométrique de } u \text{ contrainte par } u_0, \\ T \in \text{SBV}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ est une roto-translation par morceaux} \\ \text{associée à une partition de Caccioppoli } \{E_i\}_{i \in I_T} \text{ telle que } \sum_{i \in I_T} P(E_i, \Omega) \leq \frac{C}{r^{N-1}}, \\ T = \text{Id sur } \Omega \setminus (A + B_r), T(A + B_r) \subset (\Omega \setminus [(A + B_r) \cup (\partial\Omega + B_r)]) \end{array} \right\}$$

soit non vide. On peut alors montrer :

THÉORÈME 6.2.4 ([24])

$\mathcal{E}_3$  possède au moins un minimiseur  $(u, u^g, T) \in V_3$ .

En étudiant des configurations élémentaires, on montre l'intérêt de ces fonctionnelles (qui semblent mieux pouvoir récupérer la géométrie que les approches classiques par copier-coller).

**Commentaires :** Dans [24], nous montrons qu'il est possible d'améliorer les algorithmes de copier-coller en cherchant à minimiser un critère global sur toute l'image (les algorithmes de copier-coller sont en fait des algorithmes de type glouton pour minimiser ces critères). Nous montrons aussi le type de géométrie que l'on peut espérer reconstruire selon le modèle considéré. Néanmoins, nous ne sommes pas capables pour le moment de proposer des algorithmes minimisant les énergies que nous avons introduites, ce qui limite la portée de [24]. Il s'agit d'un obstacle particulièrement difficile à lever.





# Chapitre 7

## Applications en imagerie satellitaire (A12, A14, A15, A16) - [88, 86, 67, 85]

Lors de mon postdoc au département TSI à l'ENST Paris, puis au sein du projet MISS au CMLA, je me suis intéressé aux applications du traitement d'image en imagerie satellitaire. Les travaux présentés ici trouvent tous leur origine dans des questions posées par le CNES (par l'intermédiaire d'Alain Giros à l'ENST Paris, et Bernard Rougé au CMLA). Une spécificité de ces travaux est de prendre en compte explicitement, de manière plus ou moins précise, le système d'acquisition, et donc de traiter le problème de l'échantillonnage. Notons enfin que pour nous permettre de réaliser ces travaux, le CNES nous a fourni de nombreuses données.

### 7.1 Traitement de bases d'images satellites (A12, A14) - [88, 86]

#### 7.1.1 Motivations

Ces travaux ont été initiés lors de mon postdoc à l'ENST Paris. Ils se sont poursuivis dans le cadre de la thèse de Bin Luo. Il s'agit de collaborations avec Bin Luo, Yann Gousseau, Saïd Ladjal, et Henri Maître. Ils font partie des projets développés par le COC (Centre de Compétence) lancé par le DLR, le CNES, et TELECOM ParisTech.

Ces dernières années, de très grosses bases d'images satellites ont été créées (bases dont la taille augmente chaque jour de plusieurs giga-bits). Ces bases sont constituées d'images provenant de différents satellites, et possédant donc des résolutions différentes. Dans le but de pouvoir utiliser ces bases, il est crucial de savoir indexer de manière efficace les images qui les composent. La solution passe par le développement d'attributs invariants par changement de résolution. Il s'agit ici de la spécificité du travail. La littérature est en effet riche en méthodes pour construire des attributs invariants par changement d'échelles, mais ces méthodes ne sont pas directement applicables à notre problème.

Notre travail consiste dans un premier temps à modéliser de manière suffisamment précise le processus d'acquisition des images satellitaires. Cela nous permet d'obtenir une formalisation mathématique du changement de résolution.

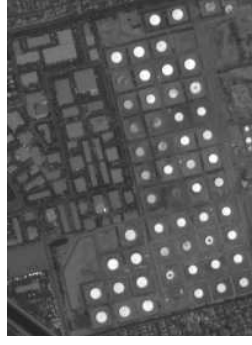


FIG. 7.1 – Une image SPOT5 (5m) prise à Los Angeles, exemple typique de région homogène en imagerie satellitaire.

**Schéma d'acquisition simplifié :** On suppose que la scène à étudier est représentée par une fonction continue  $f$ , et que l'image discrète  $f_r$  à la résolution  $r$  est obtenue par convolution et échantillonnage. On suppose de plus que le noyau de convolution est gaussien, d'écart type  $\sigma = rp$  proportionnel à la résolution ( $p$  est un paramètre caractéristique du système d'acquisition). On arrive ainsi au modèle :

$$f_r = \Pi_r \cdot (f * k_\sigma), \quad (7.1)$$

où :

$$k_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7.2)$$

et  $\Pi_r$  est le peigne de Dirac sur  $\mathbb{Z}^2$ , i.e.,

$$\Pi_r = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \delta_{(ir, jr)}.$$

L'équation (7.1) est une approximation grossière du vrai procédé d'acquisition, mais elle permet déjà de tenir compte du capteur.

### 7.1.2 Echelle caractéristique (A12) - [88]

Dans [88], nous proposons une échelle caractéristique invariante par changement de résolution. On étudie le problème d'extraire une échelle caractéristique dans une image satellite (cf la Figure(7.1)). Cet attribut est défini de manière à ce qu'il ne dépende pas de la résolution spatiale de l'image. Pour cela, on utilise conjointement l'espace multi-échelle linéaire, et la variation totale. L'échelle critique est définie comme celle pour laquelle la variation totale normalisée atteint son maximum.

Pour une image  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ , sa représentation dans l'espace multi-échelle linéaire est :  $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  avec :

$$L(x, y; t) = k_t * f(x, y), \quad (7.3)$$

où  $k_t$  est donné par la formule (7.2).

On définit la variation totale normalisée  $NTV(f; t)$ , et on note  $t_{\max}$  l'élément qui la maximise :

$$NTV(f; t) = tTV(k_t * f) = t \int |\nabla k_t * f|, \quad (7.4)$$

et

$$t_{\max} = \operatorname{argmax}_{\mathbb{R}_+^*} NTV(f; t). \quad (7.5)$$

Il s'agit d'un cas particulier de normalisation proposé par Lindeberg [82] pour les opérateurs différentiels. On arrive finalement à :

$$TV(f_{r,t}) \approx \frac{1}{r} TV(k_{rt} * k_\sigma * f) = \frac{1}{r} TV(k_{\sqrt{r^2 t^2 + \sigma^2}} * f). \quad (7.6)$$

On définit :

$$G_r(t) = h(t) TV(f_{r,t}), \quad (7.7)$$

et

$$t_{\max_r} = \operatorname{argmax}_{\mathbb{R}_+^*} G_r(t). \quad (7.8)$$

PROPOSITION 7.1.1 ([88])

Si on choisit dans l'équation (7.7) :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + p^2} \quad (7.9)$$

(avec  $p = \sigma/r$  caractéristique du système d'acquisition), on a alors la relation suivante :

$$t_{\max} \approx \sqrt{r^2 t_{\max_r}^2 + \sigma^2} \approx r \sqrt{t_{\max_r}^2 + p^2}. \quad (7.10)$$

Comme illustré sur les Figures 7.2 et 7.3, une telle approche permet bien d'obtenir une échelle indépendante de la résolution (c'est la quantité  $t_{\max_r}$  qui est mesurée sur les images discrètes).

### 7.1.3 Indexation (A114) - [86]

Dans [86], nous adaptons la méthode précédente à l'interpolation d'attributs d'ondelettes, afin de pouvoir effectuer une classification invariante par changement de résolution des images satellites. En plus du soutien du CNES, j'ai également obtenu un financement BQR de l'ENS Cachan pour mener à bien ce projet. Nous indexons les images à l'aide d'attributs de texture. Afin de ne pas se limiter à des changements de résolution dyadiques, nous utilisons une transformée en ondelettes continue [90] pour calculer les attributs.

On note  $\tilde{k}_t$  la version discrète d'un noyau gaussien ( $t$  est donné en pixels). On utilise comme ondelettes des dérivées de gaussiennes. On définit les coefficients en ondelettes discrets par :

$$w_{q,r,t} = \tilde{\delta}_q \tilde{k}_t \tilde{*} f_r = \tilde{k}_t \tilde{*} \tilde{\delta}_q f_r \quad (7.11)$$

où  $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\tilde{\delta}_q$  désigne les différences entre pixels adjacents dans les directions horizontale ( $q = 0$ ), verticale ( $q = 1$ ), ou diagonale ( $q = 2, 3$ ),  $\tilde{*}$  désigne la convolution discrète. On note  $\partial_q$  la dérivée continue dans la direction  $q$ . Après quelques calculs [86], on obtient :

$$\frac{w_{q,r,t}}{r} \approx \Pi_r(k_{r\sqrt{t^2+p^2}} * \partial_q f). \quad (7.12)$$

Supposons maintenant qu'on dispose de deux images  $f_{r_1}$  et  $f_{r_2}$  de la même scène aux résolutions  $r_1$  et  $r_2$ . De (7.12), on voit que si on choisit les échelles  $t_1$  et  $t_2$  telles que

$$r_1 \sqrt{t_1^2 + p^2} = r_2 \sqrt{t_2^2 + p^2}, \quad (7.13)$$

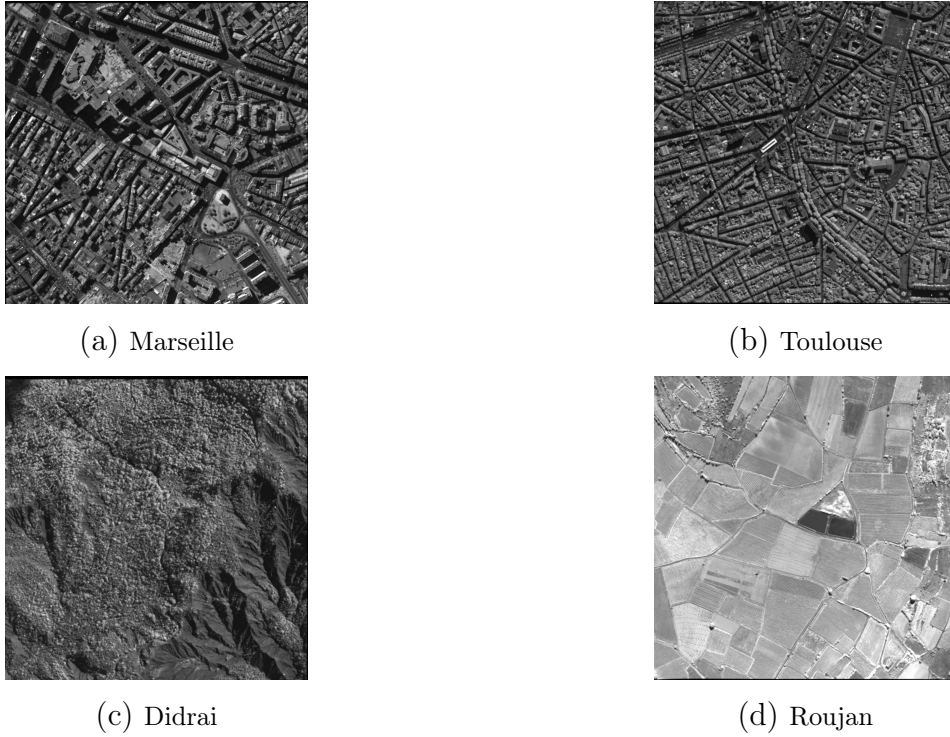


FIG. 7.2 – Images aériennes à résolution 25 cm ©CNES : (a) et (b) deux villes avec des densités urbaines différentes, (c) une forêt, (d) des champs agricoles.

alors

$$m_1(q, r_1, t_1)/r_1 \approx m_1(q, r_2, t_2)/r_2 \quad (7.14)$$

$$m_2(q, r_1, t_1)/r_1^2 \approx m_2(q, r_2, t_2)/r_2^2 \quad (7.15)$$

avec

$$m_1(q, r, t) = \frac{1}{n_r} \sum |w_{q,r,t}|, \quad m_2(q, r, t) = \frac{1}{n_r} \sum |w_{q,r,t}|^2, \quad (7.16)$$

où  $n_r$  est la taille de l'image discrète  $f_r$ , et la somme est effectuée sur tout le domaine de l'image (comme on utilise une transformée en ondelettes continue,  $w$  possède la même taille que  $f_r$ ). Ces égalités (Formules (7.14) et (7.15)) permettent de comparer des attributs ondelettes de  $f_1$  avec  $f_2$ . On vérifie la validité de ces formules sur la Figure 7.4.

Les moments  $m_1$  et  $m_2$  sont des attributs classiques en classification/indexation d'images (cf par exemple [90, 89, 18]). On montre dans [86] qu'une telle approche permet effectivement d'améliorer sensiblement les résultats d'indexation d'images prises à différentes résolutions.

**Commentaires :** Dans [88, 86], nous avons proposé des attributs invariants par changement de résolution. Nous avons montré sur des images fournies par le CNES la validité des schémas. Il convient cependant de modérer les conclusions. D'une part, l'invariance par changement d'échelle n'est pas infinie. Si la résolution est trop faible pour qu'un type d'objet apparaisse dans l'image, sa signature (attributs ondelettes [86] ou échelle caractéristique [88]) disparaît. D'autre part, les attributs ondelettes proposés dans [86] demeurent des attributs ondelettes utilisant comme ondelette mère une dérivée de gaussienne. Si dans les expériences présentées dans [86], ils s'avèrent suffisants pour distinguer différents types d'images, ils ne

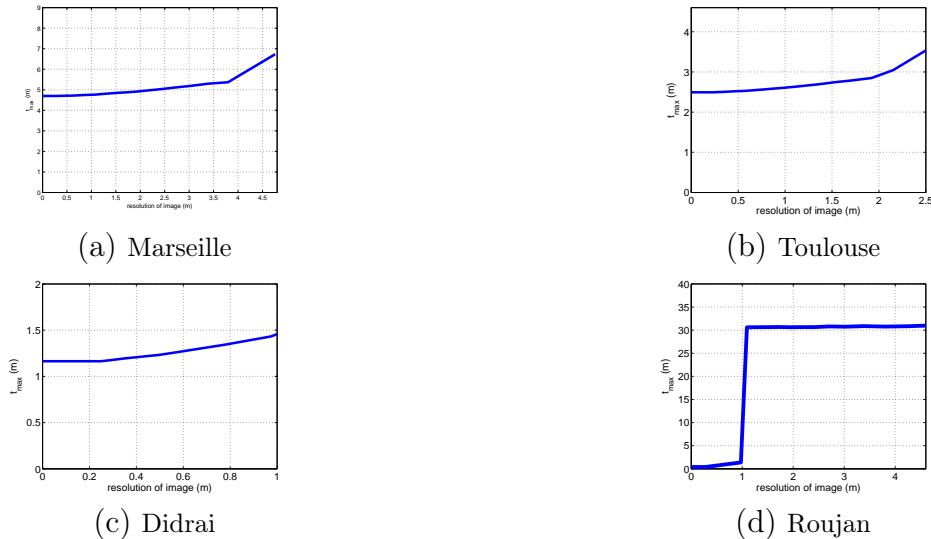


FIG. 7.3 – Echelle caractéristique  $t_{\max}$  en fonction de la résolution sur 4 scènes différentes. pour les 4 scènes montrées dans la Figure 7.2 [88].

sont par contre certainement pas assez discriminants pour répondre à n’importe quelle requête d’un utilisateur (par exemple, dans une grande base d’images satellitaires, trouver toutes celles contenant un aéroport).

## 7.2 Restauration d’image dans le cas d’un échantillonnage irrégulier (A15) - [67]

### 7.2.1 Présentation

Dans [67], j’ai considéré le problème de restauration des images satellites dans le cadre d’un échantillonnage irrégulier (dans les deux travaux précédents, on prenait en compte l’échantillonnage, mais il était supposé parfaitement régulier). Il s’agit d’une collaboration avec Gabriele Facciolo, Andrés Almansa et Vicent Caselles, via le projet MISS.

Contrairement aux images photographiques digitales, les images satellites ne sont pas acquises par la grille d’un capteur, mais par le balayage d’un capteur appelé TDI (Time Delay Integrator) [113]. Ce type de système d’acquisition est désormais appliqué de manière standard à l’imagerie satellitaire, et il fournit les meilleures résolutions actuelles. À cause du procédé d’acquisition, les micro-vibrations du satellite, ainsi que les irrégularités du capteur, sont à l’origine d’un échantillonnage perturbé des images. Cela résulte dans des perturbations de la grille d’échantillonnage de l’ordre du dixième de pixel (on parle d’ailleurs plutôt d’échantillonnage perturbé). Cela pose de gros problèmes dans les applications nécessitant des précisions sous-pixelliques (mise en correspondance, stéréoscopie, ...).

On propose un algorithme de restauration pour des images à bande limitée dans le cas de l’échantillonnage irrégulier (perturbé), du débruitage, et de la déconvolution. On étudie l’application d’une famille de régularisateurs qui permettent de contrôler le comportement spectral de la solution, combinée aux algorithmes permettant de passer d’un échantillonnage irrégulier à un échantillonnage régulier proposés dans [74]. De plus, les contraintes dues au système d’acquisition sont prises en compte comme un ensemble de contraintes locales.

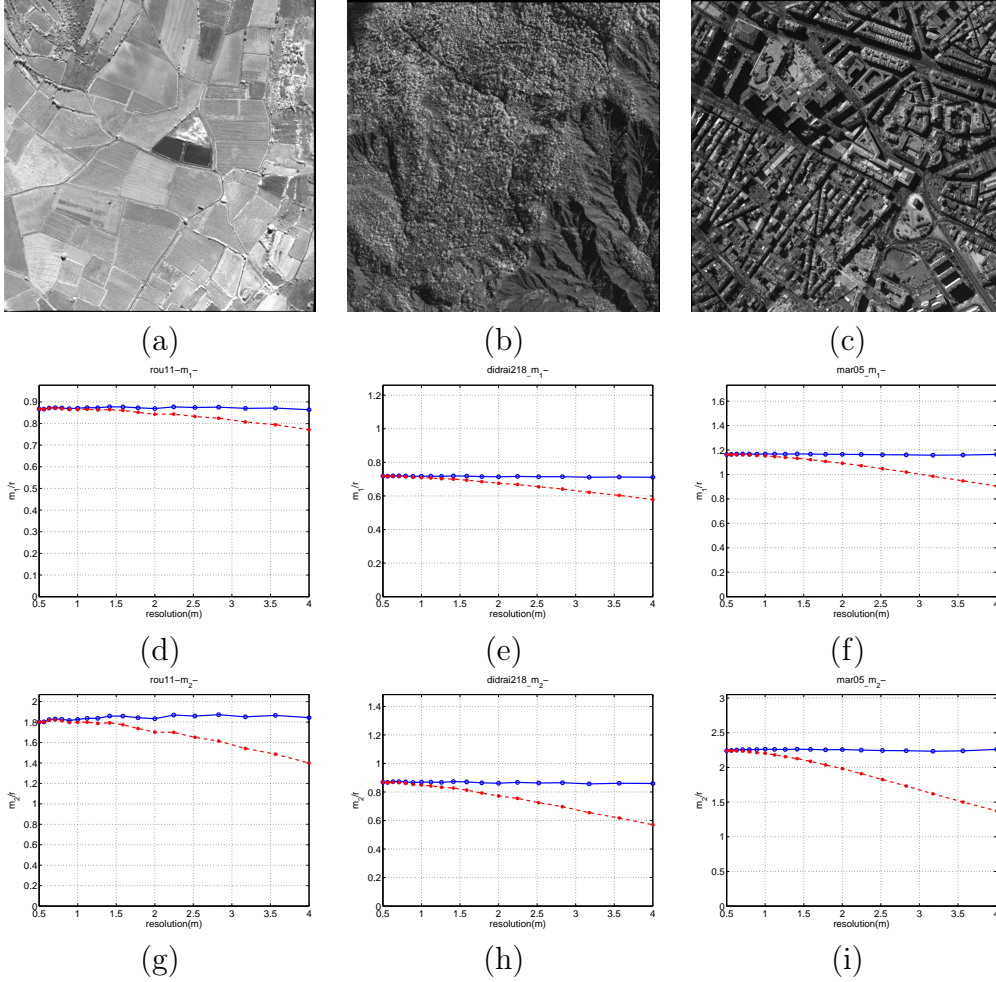


FIG. 7.4 – (a)-(c) Trois images (©CNES); (d)-(f) graphes de  $m_1(q, r, t)/r$  (avec  $q = 0$ ) en fonction de  $r$ ; (g)-(i) graphes de  $m_2(q, r, t)/r^2$  (avec  $q = 0$ ) en fonction de  $r$ . Sur tous ces graphes, les lignes continues correspondent au cas où  $r\sqrt{t^2 + p^2}$  est gardé constant (avec  $p = 1.3$ ), et les lignes pointillées au cas où  $rt$  est gardé constant (invariance par changement d'échelle sans tenir compte de l'échantillonnage). On observe que l'Equation (7.13) donne des valeurs bien constantes [86].

L'analyse de ces contraintes conduit à un critère d'arrêt rapide, ce qui permet d'améliorer la vitesse de l'algorithme. Enfin, on présente des expériences de restauration d'images satellites, dans lesquelles les micro-vibrations sont responsables du type de distorsions observées ici.

## 7.2.2 Modélisation

Plus précisément, un système d'acquisition général peut être modélisé par :

$$z(\xi_k) = (h * u)(\xi_k) + n_{\xi_k}, \quad \xi_k \in \Xi, \quad (7.17)$$

où  $\Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{N^2} \subseteq \mathbb{R}^2$  est un ensemble fini d'échantillons réguliers ou irréguliers,  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est l'image idéale,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  le noyau de flou dont la transformée de Fourier  $\hat{h}$  possède la majorité de son énergie concentrée dans le support spectral de  $u$ ,  $z$  est l'image échantillonnée observée,  $z$  est représentée comme une fonction  $z : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $n_{\xi_k}$  est un bruit blanc gaussien d'écart type  $\sigma$ .

**Choix de la régularisation :** On considère la classe suivante de régularisateur :

$$J_A(u) = \int_{\Omega_N} |A(D)u| \quad (7.18)$$

où  $A(D)u$  est défini par ses coefficients de Fourier  $\mathcal{F}(A(D)u)(\omega) = A(i\omega)\hat{u}(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{Z}^2$ , et  $\Omega_N = [0, N]^2$ . La contrainte  $J_A(u) < \infty$  impose une pénalisation de fréquence selon le profil de  $A(i\omega)$ . En pratique, on choisit  $A(i\omega)$  de sorte que  $|A(i\omega)| \sim |\frac{2\pi}{N}\omega|^p$  pour  $|\omega|$  grand,  $1 \leq p \leq 2$ . Le choix  $p = 1$  correspond à la régularisation par variation totale classique. L'intérêt de la nouvelle formulation est de pouvoir rajouter un a priori sur la vitesse de décroissance des coefficients de Fourier de l'image à reconstruire. Il a été observé dans [2] que le choix  $p = 1,6$  était bien adapté à de nombreuses images satellites.

**Modèle :** On utilise comme contrainte :

$$G * |\Delta_{\Xi}(h * u) - z|^2(\xi_k) \leq \sigma^2, \quad \forall \xi_k \in \Xi, \quad (7.19)$$

où l'opérateur d'échantillonnage  $\Delta_{\Xi} : C(\mathbb{R}^2) \rightarrow \ell^2(\Xi)$  est donné par  $\Delta_{\Xi}(v) = \{v(\xi_k)\}_{k=1}^{N^2}$  et  $G$  est un noyau de convolution discret tel que  $G(\xi) > 0$  pour tout  $\xi \in \Xi$  et  $\sum_k G(\xi_k) = 1$ .

On propose finalement le modèle variationnel contraint suivant pour restaurer  $u$  :

$$\min_u \int_{\Omega} |A(D)u|, \quad (7.20)$$

$$\text{tel que } [G * |\Delta_{\Xi}(h * u) - z|^2](\xi_k) \leq \sigma^2 \quad \forall \xi_k \in \Xi.$$

La formulation contrainte (7.20) peut être résolue en considérant la formulation sans contrainte suivante :

$$\min_u \max_{(\lambda_k) \geq 0} \int_{\Omega} |A(D)u| + \frac{1}{2} \sum_{\xi_k \in \Xi} \lambda_k \{ [G * |\Delta_{\Xi}(h * u) - z|^2](\xi_k) - \sigma^2 \} \quad (7.21)$$

où  $\lambda_k \geq 0$  est un multiplicateur de Lagrange qui doit être choisi en sorte que les contraintes (7.19) soient satisfaites.

Précisons que le noyau de flou  $h$  et la grille d'échantillonnage  $\Xi$  sont supposés connus exactement. Les seules informations connues sur le bruit  $n_{\xi_k}$  sont qu'il s'agit d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, et d'écart type  $\sigma^2$ . Il existe plusieurs méthodes pour estimer ces paramètres [77] pour un appareil d'acquisition donné.



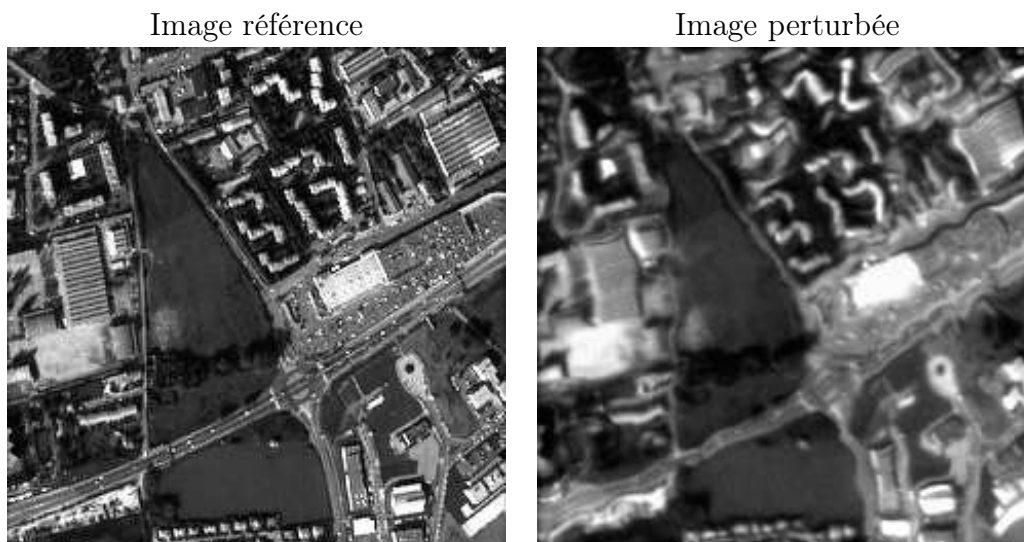


FIG. 7.5 – Image originale non perturbée, et l’image perturbée.

**Minimisation :** Pour minimiser (7.21), on utilise l’algorithme d’Uzawa [50]. Les poids  $\lambda_k$  étant fixé, on minimise (7.21) par rapport à  $u$ . Cette étape est effectuée à l’aide d’un algorithme de type quasi-Newton. Les poids  $\lambda_k$  sont ensuite remis à jour selon le principe de l’algorithme d’Uzawa, et on itère jusqu’à convergence. Dans [67], on montre d’une part la convergence de l’algorithme de type quasi-Newton lors de la minimisation par rapport à  $u$ , et on prouve aussi la convergence de l’algorithme d’Uzawa.

On présente des résultats obtenus sur les Figures 7.5 et 7.6.

**Lien avec les travaux antérieurs :** Le problème de reconstruire une image irrégulièrement échantillonnée a déjà été considéré dans [2], mais avec des hypothèses restrictives sur le noyau de flou  $h$ . Le problème de restauration (7.20) a été étudié dans [4] dans le cas où la régularisation est la variation totale. Le modèle d’acquisition était alors incorporé comme un ensemble de contraintes locales sur une partition de l’image obtenue à l’aide d’un algorithme de segmentation. L’utilisation de contraintes locales (7.19) était recommandée dans [3].

**Commentaires :** La méthode que nous proposons dans [67] donne de très bons résultats de restauration. Néanmoins, le temps de calcul (de l’ordre de 2 minutes pour une image  $512 \times 512$ ) s’avère pour l’instant prohibitif pour le CNES. La solution actuellement retenue par le CNES est moins précise mais beaucoup plus rapide (critère de régularisation quadratique sur la norme du gradient de l’image, et approximation de l’image par des splines).

### 7.3 Cartographie d’échelle pour l’imagerie satellitaire (A16) - [85]

Dans [85], nous proposons une méthode de calcul de carte d’échelle spatialement précise. Il s’agit d’une collaboration avec Bin Luo et Yann Gousseau. (Telecom Paris Tech). Nous avons présenté le cadre théorique de la méthode dans la Section 5.2. Nous expliquons ici son application en imagerie satellitaire.



FIG. 7.6 – Restauration de l’image perturbée présentée sur la Figure 7.5 (cas de l’échantillonnage irrégulier) [67]. On obtient effectivement des meilleurs résultats en utilisant des contraintes locales.

De nombreux travaux traitent de l’extraction d’échelles caractéristiques à partir d’images numériques. Ces échelles sont liées aux tailles des structures (objets) constituant l’image. L’approche la plus classique, introduite par Lindeberg, consiste à étudier les extrema d’opérateurs différentiels dans un espace-échelle linéaire, voir [82]. De nombreuses méthodes alternatives ont été proposées, voir par exemple [33, 79, 125]. L’extraction d’une échelle caractéristique constitue une brique élémentaire de la plupart des méthodes de reconnaissance de structure, voir [84, 95], et est également un attribut efficace en discrimination ou classification d’image, voir [33, 83, 87]. En particulier les travaux de [83] démontrent la pertinence de l’échelle pour l’extraction de zones urbaines sur des images satellitaires.

Pour utiliser la méthode présentée dans [85] (cf section 5.2) en imagerie satellitaire, il faut tenir compte du fait que toutes les images acquises par les satellites sont floues.

Or le contraste défini par l’équation (5.6) (dans la section 5.2)) suppose que l’on n’associe qu’une seule ligne à chaque objet. Cependant, dans une image naturelle, les contours des objets sont toujours lissés en raison des filtrages dus à la formation de l’image. Ceci se manifeste sous la forme de paquets de lignes associées aux contours, conduisant le plus souvent à un contraste égal à 1. Nous intéressant aux images satellites pour lesquelles le flou est uniforme sur l’image et connu, nous choisissons pour pallier ce problème de cumuler le contraste (au sens de (5.6)) des lignes correspondant aux mêmes contours en utilisant la structure de la carte topographique.

Pour ce faire, sont cumulés les contrastes des formes  $f_i$  telles que  $|f_{i+1}| - |f_i| < \lambda P(f_i)$ , où  $\lambda$  est une constante. Ce critère repose sur l’hypothèse que les lignes de niveau correspondant à un contour flou sont régulièrement espacées d’une distance  $\lambda$ . On définit alors récursivement le contraste cumulé comme :

$$\bar{C}_x(f_i(x)) = \begin{cases} \bar{C}_x(f_{i-1}(x)) + C(f_i(x)), & \text{si } |f_i| - |f_{i-1}| < \lambda P(f_{i-1}) \\ C(f_i(x)), & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.22)$$

La forme la plus contrastée associée à  $x$  est ainsi définie par :

$$\hat{f}(x) = f_{\arg \max_{i \in N} \bar{C}_x(f_i(x))} \quad (7.23)$$

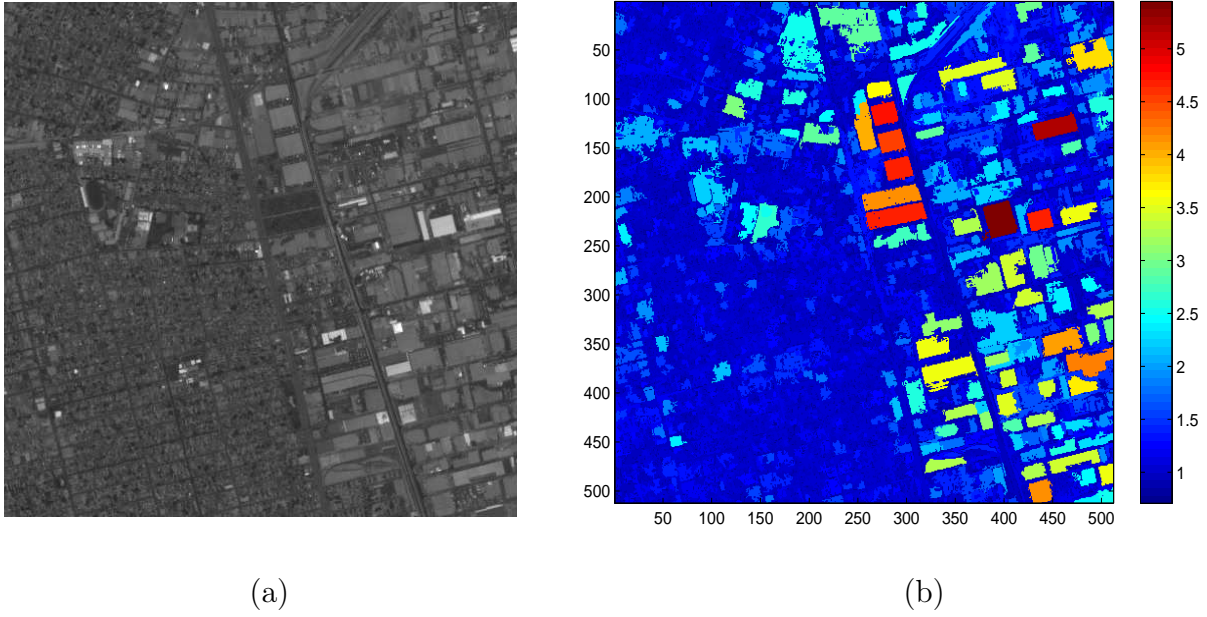


FIG. 7.7 – (a) Image de Los Angeles, SPOT5 (5m)©CNES; (b) Carte d'échelle correspondante [85].

Et c'est cette forme qui est considérée pour le calcul de l'échelle via la formule (5.8).

On montre un exemple de carte d'échelle obtenue sur la Figure 7.7.

**Commentaires :** Les cartes d'échelle obtenues avec la méthode de [85] sont spatialement extrêmement précises. Contrairement aux approches reposant sur des critères ondelettes ou des statistiques de l'image, il n'y a pas d'utilisation d'une fenêtre locale de moyennage, ce qui explique la précision spatiale. En contrepartie, il n'est pas possible d'intégrer le schéma d'acquisition de l'image comme nous l'avons fait dans [88] (Section 7.1.2), et de rendre ces cartes d'échelle invariantes par changement de résolution.

# Chapitre 8

## Détection de structures fines dans les images (A6) - [14]

Dans [14], nous avons développé un modèle de détection de singularités de codimension 2 dans les images. Ce modèle est basé sur la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Il s'agit d'une collaboration avec Gilles Aubert (Université de Nice Sophia-Antipolis) et Laure Blanc-Féraud (laboratoire I3S). Ces travaux ont été poursuivis dans le cadre de l'ANR DetectFine.

Nous proposons un nouveau modèle mathématique pour détecter dans une image les singularités de codimension supérieure ou égale à deux. Cela signifie que nous voulons détecter des points dans des images 2-D, ou des points et des courbes dans des images 3-D. Nous nous inspirons des modèles de Ginzburg-Landau. Ces derniers se sont révélés efficaces pour modéliser de nombreux phénomènes physiques singuliers. Pour la détection de points dans une image 2D, la fonctionnelle considérée est la suivante :

$$F_\epsilon(u) = \mu \int a(x) |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \int (1 - |u|^2)^2 + \frac{\lambda}{2} \int |u - u_0|^2 \quad (8.1)$$

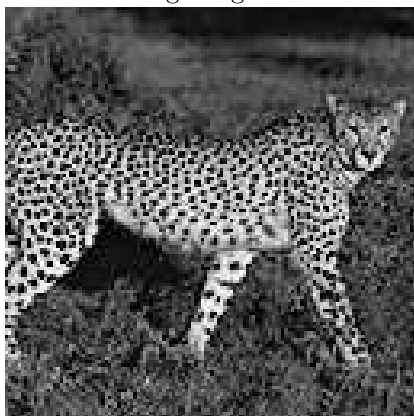
$a(x)$  est un coefficient de diffusion. Il est de la forme :  $a(x) = W(\Delta f)$ , avec  $W(t) = \frac{1}{1+(t/\alpha)^2}$ . Formellement,  $a(x)$  est proche de 1 au voisinage des singularités ponctuelles, et proche de 0 sinon.

La donnée  $u_0$  est un champs vectoriel construit à partir de l'image ;  $u$  est un champs de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Les points singuliers recherchés correspondent aux zéros de  $u$ .

Nous introduisons le modèle, nous énonçons ses propriétés mathématiques, et nous donnons des résultats expérimentaux illustrant les performances du modèle. La Figure 8.1 présente un résultat obtenu avec cette approche.

**Commentaires :** La méthode introduite dans [14] donne de bons résultats numériques. Néanmoins, elle est d'une utilisation pratique délicate, car il faut régler à la main de nombreux paramètres dans la fonctionnelle.

Image originale



Détection des points

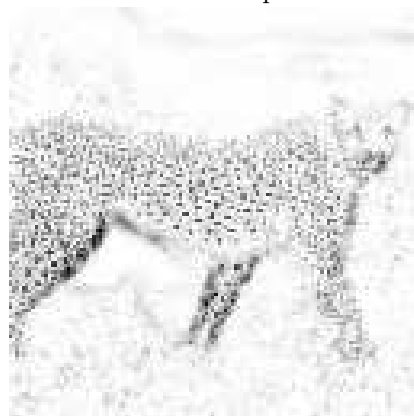


FIG. 8.1 – Détection de points dans une image [14]

# Chapitre 9

## Perspectives

### 9.1 Adaptivité spatiale et fréquentielle

En décomposition d'image, très peu de travaux concernent l'adaptivité spatiale ou fréquentielle. C'est actuellement la piste suivie dans le cadre du postdoc de Pierre Maurel (financé sur l'ANR Natimages, et co-encadré par Gabriel Peyré). Plus précisément, on s'intéresse aux textures localement parallèles, et on cherche à construire une norme qui soit bien adaptée. Pour cela, on effectue une construction locale de l'opérateur  $K$  dans le modèle (3.19). La fréquence et la direction des textures sont estimées localement, et ces informations sont prises en compte dans l'opérateur  $K$ . On montre un premier résultat de décomposition obtenue par cette approche dans [93] sur la Figure 9.1. On veut ensuite appliquer cette méthode en imagerie médicale (IRM taggée).

Une conclusion générale liée aux différents modèles de décomposition d'images est que finalement l'oeil humain est peut-être plus sensible à un critère d'échelle spatiale que d'échelle fréquentielle. En effet, il semblerait [126] que les meilleurs résultats de décomposition soit obtenues avec le modèle  $TV - L^1$  (5.12), ce dernier modèle reposant finalement sur un critère d'échelle spatiale [64]. Le conditionnel est de rigueur, car le seul critère d'évaluation est visuel. Cette piste est actuellement explorée dans la thèse de Vincent Duval, en lien avec le problème général d'adaptivité spatiale dans les images.

La suite logique est d'étudier la combinaison des deux types d'échelle (spatiale et fréquentielle). Suivant le type d'images considérées (et surtout selon le type de textures), on sait qu'il est plus pertinent d'utiliser une description spatiale ou fréquentielle de l'image. Dans le cadre du problème de décomposition d'image par exemple, il semble probable de pouvoir obtenir de meilleurs résultats en prenant en compte ces deux descriptions simultanément.

### 9.2 Imagerie RSO

L'imagerie RSO constitue un défi pour les traiteurs d'image. Le bruit de chatoiement est tellement important que les méthodes classiquement développées pour des bruits additifs gaussiens ne donnent plus de résultats satisfaisants. L'intérêt de l'imagerie RSO par rapport aux images optiques est certain (notamment, la qualité des images RSO n'est pas altérée par un ciel nuageux). Une première approche a été proposée dans [13]. Je compte m'investir d'avantage dans ce type de problèmes, notamment via le projet REI DGA.



FIG. 9.1 – Image de départ  $f$ , composante géométrique extraite  $u$ , texture extraite  $v$

### 9.3 Imagerie satellitaire

Je compte poursuivre mon activité au sein du projet MISS dirigé par Jean-Michel Morel au CMLA. Mon expertise en méthodes variationnelles doit encore pouvoir être utile à l'équipe. Les progrès technologiques et scientifiques permettent maintenant d'envisager la construction de satellites à résolution centimétrique ou métrique. De telles caractéristiques pour les systèmes d'acquisition sont à l'origine de problèmes passionnants : prise en compte des vibrations du satellite dans l'échantillonnage, compression des données sans dégradation des mesures effectuées sur celles-ci, prise en compte explicite de la géométrie des paysages urbains, reconstruction précise du relief, ...

### 9.4 Compréhension mathématique de méthodes établies en vision par ordinateur et traitement d'image

Une partie important de mon activité s'est déjà située dans ce domaine, comme par exemple [24] dans lequel on s'intéresse à l'interprétation variationnelle des algorithmes d'inpainting basés sur des méthodes de type copier-coller. Je compte notamment m'intéresser aux méthodes suivantes qui ont désormais fait leurs preuves :

- L'algorithme des moyennes non locales (NL means) [34, 31] s'est rapidement imposé comme l'un des meilleurs algorithmes de débruitage. L'étude complète des propriétés de ses minimiseurs restent cependant à faire.
- La méthode des détecteurs SIFT (Scale-invariant Image FeaTures) [84] est désormais considérée en vision par ordinateur comme *la* solution au problème d'indexation d'images. Il me semble qu'une meilleure compréhension mathématique de la méthode permettrait de mieux en cerner les performances.
- En vision par ordinateur, des méthodes de calcul rapide d'approximation du squelette d'une forme via des EDPs ont été proposées [72, 114]. Là aussi, il semble possible d'apporter une meilleure compréhension mathématique de ces modèles, et ainsi mieux pouvoir en saisir les performances. Un résultat préliminaire est montré sur la Figure 9.2 (on résout  $\Delta u = -1$  à l'intérieur de la forme considérée avec des conditions de Dirichlet).

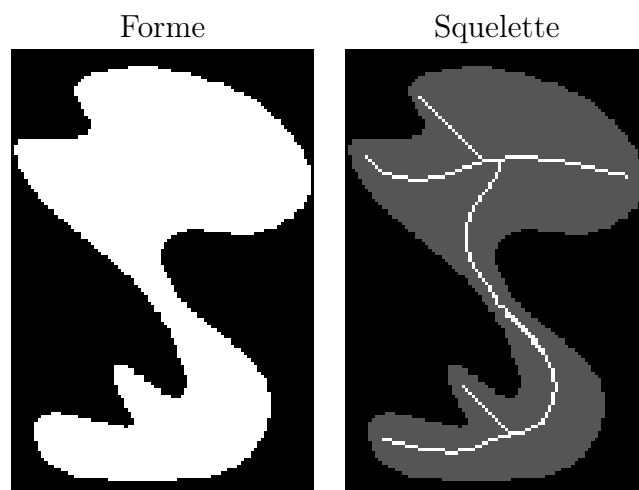


FIG. 9.2 – Calcul du squelette intérieur d'une forme compliquée

D'une manière plus générale, les chercheurs de la communauté vision par ordinateur explorent très rapidement de très nombreuses pistes. Il s'agit d'une communauté extrêmement active et réactive, qui développe des méthodes extrêmement performantes. En contrepartie, les résultats obtenus reposent parfois sur des fondations relativement fragiles. Il convient donc de reprendre certains de ces travaux, et de les placer dans un formalisme mathématique permettant pleinement d'en saisir les performances et les limites. La principale difficulté de ce type de démarche provient de l'écart entre les hypothèses nécessaires à la modélisation mathématique, et celles utilisées en pratique dans les algorithmes.





# Bibliographie

- [1] S. Aliney. A property of the minimum vectors of a regularizing functional defined by means of the absolute norm. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 45(4) :913–917, 1997.
- [2] A. Almansa. *Echantillonnage, Interpolation et Détection. Applications en Imagerie Satellitaire*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2002.
- [3] A. Almansa, C. Ballester, V. Caselles, and G. Haro. A TV based restoration model with local constraints. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34 :209–236, 2008.
- [4] A. Almansa, V. Caselles, G. Haro, and B. Rougé. Restoration and zoom of irregularly sampled, blurred and noisy images by accurate total variation minimization with local constraints. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 5 :235–272, 2006.
- [5] F. Alter. *Variation totale : théorie et applications*. PhD thesis, ENS Cachan, janvier 2008.
- [6] F. Alter and V. Caselles. Uniqueness of the cheeger set of a convex body. *Preprint, submitted*, 2007.
- [7] F. Alter, V. Caselles, and A. Chambolle. A characterization of convex calibrable sets in  $\mathbb{R}^n$ . *Math. Ann.*, 332 :329–366, 2005.
- [8] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 2000.
- [9] F. Andreu-Vaillo, V. Caselles, and J. M. Mazón. *Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals*, volume 223 of *Progress in Mathematics*. Birkhauser, 2002.
- [10] J. Shi and S. Osher. A nonlinear inverse scale space method for a convex multiplicative noise model. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3, 2008.
- [11] G. Aubert and J-F. Aujol. Modeling very oscillating signals. Application to image processing. *Applied Mathematics and Optimization*, 51(2), March/April 2005.
- [12] G. Aubert and J-F. Aujol. Optimal partitions, regularized solutions, and application to image classification. *Applicable Analysis*, 84(1) :15–35, 2005.
- [13] G. Aubert and J-F. Aujol. A variational approach to remove multiplicative noise. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 68(4) :925–946, 2008.
- [14] G. Aubert, J-F. Aujol, and L. Blanc-Féraud. Detecting codimension-two objects in an image with Ginzburg-Landau models. *International Journal on Computer Vision*, 65(1-2) :29–42, 2005.
- [15] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2002.

- [16] J-F. Aujol. Some first-order algorithms for total variation based image restoration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2009. in press.
- [17] J-F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle. Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(1) :71–88, 2005.
- [18] J-F. Aujol, G. Aubert, and L. Blanc-Féraud. Wavelet-based level set evolution for classification of textured images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(12) :1634–1641, 2003.
- [19] J-F. Aujol and A. Chambolle. Dual norms and image decomposition models. *International Journal of Computer Vision*, 63(1) :85–104, 2005.
- [20] J-F. Aujol and T.F. Chan. Combining geometrical and textured information to perform image classification. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 17(5) :1004–1023, 2006.
- [21] J-F. Aujol and G. Gilboa. Constrained and snr-based solutions for TV-Hilbert space image denoising. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26(1-2) :217–237, 2006.
- [22] J-F. Aujol, G. Gilboa, T. Chan, and S. Osher. Structure-texture image decomposition - modeling, algorithms, and parameter selection. *International Journal of Computer Vision*, 67(1) :111–136, 2006.
- [23] J-F. Aujol and S.H. Kang. Color image decomposition and restoration. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 17(4) :916–928, 2006.
- [24] J-F. Aujol, S. Masnou, and S. Ladjal. Exemplar-based inpainting from a variational point of view. *CMLA Preprint*, 2008-42, 2008.
- [25] J. Bect, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and A. Chambolle. A 11-unified variational framework for image restoration. In *ECCV 04*, volume 3024 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 1–13, 2004.
- [26] G. Bellettini, V. Caselles, and M. Novaga. The total variation flow in  $R^n$ . *Journal of differential equation*, 184(2) :475–525, 2002.
- [27] G. Bellettini, V. Caselles, and M. Novaga. Explicit solutions of the eigenvalue problem  $-\operatorname{div} \left( \frac{Du}{|Du|} \right) = u$  in  $R^2$ . *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 36(4) :1095–1129, 2005.
- [28] A. Bermúdez and C. Moreno. Duality methods for solving variational inequalities. *Comp. and Maths. with Appls.*, 7 :43–58, 1981.
- [29] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester. Image inpainting. In *Proc. ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH), New Orleans, USA*, pages 417–424, 2000.
- [30] M. Bertalmio, L. Vese, G. Sapiro, and S. Osher. Simultaneous structure and texture image inpainting. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8) :882–889, 2003.
- [31] T. Brox, O. Kleinschmidt, and D. Cremers. Efficient nonlocal means for denoising of textural patterns. *IEEE Transactions on Image Processing*, 17 :1083–1092, 2008.
- [32] T. Brox and J. Weickert. A TV flow based local scale measure for texture discrimination. In *ECCV 04*, volume 2, pages 578–590, May 2004.
- [33] T. Brox and J. Weickert. A TV flow based local scale estimate and its application to texture discrimination. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 17(5) :1053–1073, October 2006.

- [34] A. Buades, B. Coll, and J-M. Morel. A review of image denoising algorithms, with a new one. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 4(2) :490–530, 2005.
- [35] G. Buttazzo, G. Carlier, and M. Comte. On the selection of maximal cheeger sets. *Differential and Integral Equations*, 20(9) :991–1004, 2007.
- [36] G. Carlier, M. Comte, and G. Peyré. Approximation of maximal cheeger sets by projection. 2008.
- [37] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66 :1–31, 1993.
- [38] V. Caselles, A. Chambolle, S. Moll, and M. Novaga. A characterization of convex calibrable sets in  $\mathbb{R}^n$  with respect to anisotropic norms. 2005.
- [39] V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga. Uniqueness of the cheeger set of a convex body. 2006.
- [40] V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga. The discontinuity set of solutions of the TV denoising problem and some extensions. *SIAM Journal on Multiscale Modelling and Simulation*, 6(3) :879–894, 2007.
- [41] V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga. Some remarks on uniqueness and regularity of cheeger sets. 2008.
- [42] V. Caselles, B. Coll, and J.M. Morel. Scale space versus topographic map for natural images. In *First International Conference on Scale-Space Theory in Computer Vision*, pages 29–49, 1997.
- [43] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *JMIV*, 20 :89–97, 2004.
- [44] A. Chambolle. Total variation minimization and a class of binary MRF models. In *EMMCVPR 05*, volume 3757 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 136–152, 2005.
- [45] A. Chambolle and P.L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, 76(3) :167–188, 1997.
- [46] A. Chambolle, R.A. DeVore, N. Lee, and B.J. Lucier. Nonlinear wavelet image processing : Variational problems, compression, and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :319–335, March 1998.
- [47] T.̃F. Chan, S.̃H. Kang, and J. Shen. Total variation denoising and enhancement of color images based on the CB and HSV color models. *J. Visual Comm. Image Rep.*, 12(4) :422–435, 2001.
- [48] T.F. Chan and S. Esedoglu. Aspects of total variation regularized  $L^1$  function approximation. *SIAM Journal of Applied Math.*, 65(5) :1817–1837, 2005.
- [49] T.F. Chan and L.A. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–77, February 2001.
- [50] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1982.
- [51] A. Cohen, W.Dahmen, I. Daubechies, and R. DeVore. Harmonic analysis of the space BV. *Revista Mathematica Iberoamericana*, 19 :235–263, 2003.
- [52] P.L. Combettes and V. Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 4(4) :1168–1200, 2005.

- [53] A. Criminisi, P. Pérez, and K. Toyama. Object removal by exemplar-based inpainting. In *IEEE Int. Conf. Comp. Vision and Pattern Recog.*, volume 2, pages 721–728, 2003.
- [54] J. Darbon and M. Sigelle. Image restoration with discrete constrained total variation part I : Fast and exact optimization. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26(3) :277–291, 2006.
- [55] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 57 :1413–1457, 2004.
- [56] I. Daubechies and G. Teschke. Variational image restoration by means of wavelets : simultaneous decomposition, deblurring and denoising. *App. Comp. Harm. An.*, 19 :1–16, 2005.
- [57] L. Demanet, B. Song, and T. Chan. Image inpainting by correspondence maps : A deterministic approach. *UCLA CAM Report 03-40*, 2003.
- [58] L. Denis, F. Tupin, J. Darbon, and M. Sigelle. Joint filtering of SAR interferometric phase and amplitude data in urban areas by TV minimization. In *IGARSS 08*, 2008.
- [59] A. Desolneux, L. Moisan, and J.M. Morel. Edge detection by helmholtz principle. *Int. J. of Computer Vision*, 14(3) :271–284, 2001.
- [60] F. Dibos and G. Koepfler. Total variation minimization by the fast level sets transform. In *Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pages 179–185, 2001.
- [61] F. Dibos, G. Koepfler, and P. Monasse. Total variation minimization for scalar/vector regularization. In S. Osher and N. Paragios, editors, *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*, pages 121–140, 2003.
- [62] Y. Dodge. *Statistical Data Analysis based on L1-norm and Related Methods*. North-Holland, 1987. Amsterdam.
- [63] S. Durand, J. Fadili, and M. Nikolova. Multiplicative noise removal using  $L^1$  fidelity on frame coefficients. *CMLA Report*, 08-40, 2008.
- [64] V. Duval, J-F. Aujol, and Y. Gousseau. The  $TV - L^1$  model : a geometric point of view. *submitted*, 2009.
- [65] V. Duval, J-F. Aujol, and L. Vese. Projected gradient based color image decomposition. In *SSVM 09*, 2009.
- [66] A. Efros and T.K. Leung. Texture synthesis by non-parametric sampling. In *ICCV*, pages 1033–1038, 1999.
- [67] G. Facciolo, A. Almansa, J-F. Aujol, and V. Caselles. Irregular to regular sampling, denoising and deconvolution. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and simulation*, 2009. in press.
- [68] W.T. Freeman, E.C. Pasztor, and O.T. Carmichael. Learning low-level vision. *IJCV*, 40(1) :25–47, 2000.
- [69] I. Galić, J. Weickert, M. Welk, A. Bruhn, A. Belyaev, and H.-P. Seidel. Image compression with anisotropic diffusion. *J. Math. Imaging and Vision*, 31 :255–269, 2008.
- [70] G. Gilboa, N. Sochen, and Y.Y. Zeevi. Estimation of optimal PDE-based denoising in the SNR sense, 2004. CCIT report No. 499, Technion, August.
- [71] G. Gilboa, N. Sochen, and Y.Y. Zeevi. Estimation of optimal PDE-based denoising in the SNR sense. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006.

- [72] L. Gorelick, M. Galun, E. Sharon, R. Basri, and A. Brandt. Shape representation and classification using the poisson equation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(12) :1991–2005, 2006.
- [73] Y. Gousseau and J-M. Morel. Are natural images of bounded variation ? *SIAM Journal of Math. Anal.*, 33(3) :634–648, 2001.
- [74] K. Gröchenig and T. Strohmer. *Numerical and theoretical aspects of non-uniform sampling of band-limited images*. Theory and Practice of Nonuniform Sampling. Kluwer/Plenum, 2000.
- [75] A. Haddad and Y. Meyer. Variational methods in image processing. *UCLA CAM Report*, 04-52, 2004.
- [76] Y. Huang, M. Ng, and Y. Wen. A new total variation method for multiplicative noise removal. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2 :20–40, 2009.
- [77] A. Jalobeanu, L. Blanc-Feraud, and J. Zerubia. Estimation of blur and noise parameters in remote sensing. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 249–256, 2002.
- [78] B. Julesz. Texton gradients : The texton theory revisited. *Biological Cybernetics*, 54 :245–251, 1986.
- [79] T. Kadir and M. Brady. Scale, saliency and image description. *Int. J. of Computer Vision*, 45(2) :83–105, 2001.
- [80] E. Levina and P. Bickel. Texture synthesis and non-parametric resampling of random fields. *Annals of Statistics*, 34(4) :1751–1773, 2006.
- [81] L. Liang, C. Liu, Y.-Q. Xu, B. Guo, and H. Shum. Real-time texture synthesis by patch-based sampling. *ACM Trans. on Graphics*, 20(3) :127–150, 2001.
- [82] T. Lindeberg. Feature detection with automatic scale selection. *Int. J. of Computer Vision*, 30 :79–116, 1998.
- [83] A. Lorette, X. Descombes, and J. Zerubia. Texture analysis through a markovian modelling and fuzzy classification : Application to urban area extraction from satellite images. *International Journal of Computer Vision*, 36(3) :221–236, 2000.
- [84] D.G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2) :91–110, 2004.
- [85] B. Luo, J-F. Aujol, and Y. Gousseau. Local scale measure from the topographic map and application to remote sensing images. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and simulation*, 2009. in press.
- [86] B. Luo, J-F. Aujol, Y. Gousseau, and S. Ladjal. Indexing of satellite images with different resolutions by wavelet features. *IEEE Transactions on Image Processing*, 17(8) :1465–1472, 2008.
- [87] B. Luo, J-F. Aujol, Y. Gousseau, S. Ladjal, and H. Maître. Characteristic scale in satellite images. In *ICASSP 2006*, volume 2, pages 809–812, 2006.
- [88] B. Luo, J-F. Aujol, Y. Gousseau, S. Ladjal, and H. Maitre. Resolution independant characteristic scale dedicated to satellite images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(10) :2503–2514, 2007.
- [89] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7) :674–693, July 1989.

- [90] S.G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [91] S. Masnou. Disocclusion : a variational approach using level lines. *IEEE Trans. Image Processing*, 11 :68–76, 2002.
- [92] S. Masnou and J.-M. Morel. Level lines based disocclusion. In *ICIP*, volume 3, pages 259–263, 1998.
- [93] P. Maurel, J-F. Aujol, and G. Peyré. Extraction de textures localement parallèles par un espace de Hilbert adapté. In *GRETSI 09*, 2009.
- [94] Yves Meyer. Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations, March 2001. The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures.
- [95] K. Mikolajczyk and C. Schmid. Scale and affine invariant interest point detectors. *IJCV*, 60(1) :63–86, 2004.
- [96] P. Monasse and F. Guichard. Fast computation of a contrast-invariant image representation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(5) :860–872, may 2000.
- [97] V. A. Morosov. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Math. Dokl.*, 7 :414–417, 1966.
- [98] Y. Nesterov. *Introductory lectures on convex optimization : a basic course*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [99] Y. Nesterov. Smooth minimization of non-smooth functions. *Mathematical Programming (A)*, 103(1) :127–152, 2005.
- [100] Y. Nesterov. Gradient methods for minimizing composite objective function. *Core discussion paper*, 2007.
- [101] M. Nikolova. A variational approach to remove outliers and impulse noise. *JMIV*, 20(1-2) :99–120, 2004.
- [102] S.J. Osher, A. Sole, and L.A. Vese. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm. *Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal*, 1(3) :349–370, 2003.
- [103] M. Navara P. Mrázek. Selection of optimal stopping time for nonlinear diffusion filtering. *IJCV*, 52(2/3) :189–203, 2003.
- [104] P. Pérez, M. Gangnet, and A. Blake. PatchWorks : Example-based region tiling for image editing. *Research Report Microsoft Research, MSR-TR-2004-04*, 2004.
- [105] G. Peyré. Image processing with non-local spectral bases. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 7(2) :703–730, 2008.
- [106] G. Peyré. Texture processing with grouplets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009. To appear.
- [107] T. Pock, M. Unger, D. Cremers, and H. Bischof. Fast and exact solution of total variation models on the GPU. In *CVPR Workshop on Visual Computer Vision on GPU's*, June 2008.
- [108] T. Rockafellar. *Convex Analysis*, volume 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Princeton University Press, second edition, 1983.
- [109] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.

- [110] P. Salembier, A. Oliveras, and L. Garrido. Anti-extensive connected operators for image and sequence processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(4) :550–570, 1998.
- [111] C. Samson, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and J. Zerubia. A level set method for image classification. *IJCV*, 40(3) :187–197, 2000.
- [112] B. Y. Sandberg and T. F. Chan. A logic framework for active contours on multi-channel images, 2002. UCLA CAM Report 02-12.
- [113] J.R. Schott. *Remote Sensing : The Image Chain Approach*. Oxford University Press, 1997.
- [114] J. Shah. Gray skeletons and segmentation of shapes. *Computer Vision and Image Understanding*, 99(1) :96–109, 2005.
- [115] P. Soille. *Morphological Image Analysis : Principles and Applications*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2003.
- [116] J.L. Starck, M. ELad, and D.L. Donoho. Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach. *IEEE Trans. On Image Processing*, 14(10) :1570–1582, 2005.
- [117] G. Steidl, J. Weickert, T. Brox, P. Mrazek, and M. Welk. On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and sides. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42 :686–658, 2004.
- [118] D. Strong, J-F. Aujol, and T.F. Chan. Scale recognition, regularization parameter selection, and Meyer’s  $G$  norm in total variation regularization. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 5(1) :273–303, 2006.
- [119] D. Strong and T. Chan. Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization. *Inverse Problems*, 19 :165–187, 2003.
- [120] M. Tur, C. Chin, and J.W. Goodman. When is speckle noise multiplicative? *Applied Optics*, 21(7) :1157–1159, April 1982.
- [121] L.A. Vese and S.J. Osher. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. *Journal of Scientific Computing*, 19 :553–572, 2003.
- [122] L.Y. Wei and M. Levoy. Fast texture synthesis using tree-structured vector quantization. In *ACM Trans. On Graphics (SIGGRAPH’00)*, pages 479–488, 2000.
- [123] P. Weiss. *Algorithmes rapides d’optimisation convexe. Applications à la restauration d’images et à la détection de changement*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, December 2008.
- [124] P. Weiss, G. Aubert, and L. Blanc-Feraud. Efficient schemes for total variation minimization under constraints in image processing. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009. in press.
- [125] A. Winter, H. Maître, N. Cambou, and E. Legrand. An Original Multi-Sensor Approach to Scale-Based Image Analysis for Aerial and Satellite Images. In *IEEE-ICIP-97*, volume II, pages 234–237, Santa Barbara, CA, USA, 1997.
- [126] W. Yin, D. Goldfarb, and S. Osher. A comparison of three total variation based texture extraction models. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 18(3) :240–252, 2007.



- [127] W. Yin, D. Goldfarb, and S. Osher. The total variation regularized  $L^1$  model for multiscale decomposition. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 6(1) :190–211, 2007.
- [128] Song Chu Zhu and A.Yuille. Region competition : unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multi-band image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9), 1996.