



**HAL**  
open science

## Autour de problèmes de plongements de graphes

Laurent Beaudou

► **To cite this version:**

Laurent Beaudou. Autour de problèmes de plongements de graphes. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT: . tel-00401226

**HAL Id: tel-00401226**

**<https://theses.hal.science/tel-00401226>**

Submitted on 2 Jul 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ GRENOBLE I - JOSEPH FOURIER  
INSTITUT FOURIER

# THÈSE

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de Docteur,  
spécialité « Mathématiques / Informatique »

par

Laurent Beaudou

## AUTOUR DE PROBLÈMES DE PLONGEMENTS DE GRAPHS

Thèse dirigée par Sylvain GRAVIER  
soutenue le 22 juin 2009 devant le jury composé de :

M. ADRIAN BONDY	Université Claude Bernard	(Examineur)
M. VICTOR CHEPOI	Université de Marseille	(Rapporteur)
M. JEAN-CLAUDE FERNANDEZ	Université Joseph Fourier	(Président)
M. SYLVAIN GRAVIER	CNRS	(Directeur)
M. SANDI KLAVŽAR	Université de Ljubljana	(Rapporteur)
M. FRÉDÉRIC MAFFRAY	CNRS	(Examineur)
M. ANDRÉ RASPAUD	Université de Bordeaux	(Examineur)



*À la renverse...*



# REMERCIEMENTS

**J**E voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à Sylvain Gravier. En plus d'avoir su guider mes premiers pas dans ce monde impressionnant qu'est la recherche, il m'a toujours laissé la liberté nécessaire à mon épanouissement scientifique. Nos discussions tant mathématiques que de nature plus banale ont joyeusement agrémenté le temps passé à ses côtés. Avec ou sans Veuve, il sera toujours le bienvenu chez moi.

Je souhaite également remercier Sandi Klavžar et Victor Chepoi pour avoir accepté, malgré des emplois du temps chargés, le rôle de rapporteurs pour mon mémoire. Leur légitimité mathématique sur le sujet qu'est le mien n'est pas à démontrer.

De même je tiens à remercier Adrian Bondy, Frédéric Maffray et André Raspaud de m'avoir fait l'honneur d'assister à ma soutenance en tant qu'examineurs. Je ne doute pas que nos routes se recroiseront sous peu (voire même très vite pour certains).

Enfin, je remercie Jean-Claude Fernandez d'avoir bien voulu présider ce jury.

Au cours de ces trois années, j'ai eu l'occasion de collaborer avec plusieurs chercheurs d'horizons différents. Je tiens à les remercier ici : Ehsan Chiniforooshan, Vašek Chvátal et tous les membres du séminaire ConCoCO de l'université Concordia à Montréal, Geňa Hahn du DIRO à l'université de Montréal, Sandi Klavžar, Matjaž Kovše et Drago Bokal de l'université de Maribor en Slovénie et Pranava K. Jha de l'université de St-Cloud aux États-Unis.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers les chercheurs grenoblois qui m'ont aidé à grandir, que ce soit au Leibniz ou à l'Institut Fourier. Je pense en particulier à András Sebő pour son aide concernant mon avenir, Michel Burlet pour avoir accompagné mes premiers pas d'enseignant et Nadia Brauner Vettier pour la tapenade. Je remercie également les chercheurs, doctorants et stagiaires de l'équipe Maths à Modeler : Denise, Michel, Charles, Éric, Paul, Léa, Nicolas, Aline et Marion.

Merci au personnel administratif de l'Institut Fourier, vous nous simplifiez la tâche chaque jour.

La liste commence à être longue mais je ne peux pas passer sous

silence mes compagnons doctorants, en particulier Boris, Bouli, Antoine et Roland. Lors de mon séjour à Montréal, j'ai eu le plaisir de travailler aux côtés de Michaël, David, Hugue, Olivier, Anne, Frédéric et Sébastien. Les jeunes stagiaires de l'équipe Maths à Modeler m'ont aidé à passer les dernières étapes de la rédaction du bon pied, je les remercie.

Une pensée pour les exilés de Seattle, et plus généralement pour tous les habitants du chemin du côteau, ce coin de paradis a accouché d'une belle petite famille et parfois plus.

Parlons-en de la famille ; même depuis l'autre bout du monde, mes parents ont su me prodiguer conseils et réconfort. Pour leur amour et les confits de canard, je les remercie du plus profond de mon coeur. Et parce que pour grandir, il vaut mieux être deux, je remercie Sandra, ma soeur d'un autre bout du monde.

Il va falloir conclure, mais comme j'ai le crachoir, j'en profite pour remercier bien tardivement les professeurs qui m'ont transmis, tout au long de ma scolarité, la fameuse envie d'apprendre : MM. Bourdin, Petitpied, Soyeur, Lafond, et Bernardeau, et M<sup>me</sup> Seris.

Remerciements gastronomiques : Simon pour les macarons, les parents pour les foies gras et le jus de raisin et bien sûr Émilie pour les canelés et le soutien moral...

Simon Modeste a également été d'un soutien indéfectible durant ces 4 derniers mois ; qu'il en soit remercié ici.

Grenoble, le 1<sup>er</sup> juillet 2009.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	ix
PRÉFACE	1
INTRODUCTION	3
1 DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES	7
1.1 GRAPHERS	9
1.1.1 L'objet graphe	9
1.1.2 Opérations de graphes	9
1.1.3 Morphismes de graphe	11
1.1.4 Subdivisions de graphes	12
1.2 DISTANCES ET MÉTRIQUES	13
1.2.1 Espaces métriques	13
1.2.2 Graphes et distance	14
1.3 RUDIMENTS DE TOPOLOGIE	15
1.3.1 Des surfaces	15
1.3.2 Des graphes dans des surfaces	16
1.3.3 Caractérisation par mineurs exclus	18
CONCLUSION	18
2 PLONGEMENTS ISOMÉTRIQUES	19
2.1 HISTOIRE ET LIMINAIRES	21
2.2 PRÉCÉDENTES CARACTÉRISATIONS	22
2.2.1 Une relation d'équivalence sur les arêtes	22
2.2.2 Une opération constructive	24
2.3 CUBES PARTIELS ET CLIQUES SUBDIVISÉES	25
2.3.1 Preuve de la condition suffisante	26
2.3.2 Preuve de la condition nécessaire	27
2.3.3 Implications diverses	38
2.4 DES HYPERCUBES AUX GRAPHERS DE HAMMING	38
2.4.1 Propriétés générales	39
2.4.2 Subdivisions de graphes complets	42
2.4.3 Subdivisions de roues	45
2.5 LA COURTE VIE D'UNE CONJECTURE	49
CONCLUSION	51
3 PLONGEMENTS TOPOLOGIQUES	55
3.1 DESSINS ET PLONGEMENTS	57

3.1.1	Zoologie de la bouteille de Klein . . . . .	57
3.2	REPRÉSENTER UN GRAPHE SUR UNE SOUS-SURFACE . . . . .	59
3.2.1	Retirer un crosscap . . . . .	59
3.2.2	Retirer deux crosscaps sur la bouteille de Klein . . . . .	60
3.3	ESTIMER LE NOMBRE MAXIMUM DE CIRCUITS ARÊTES-DISJOINTS . . . . .	61
3.3.1	Étude des circuits non-orientables . . . . .	61
3.3.2	Étude des $a$ -circuits . . . . .	63
3.4	PREUVE DU THÉORÈME . . . . .	65
	CONCLUSION . . . . .	69
4	NOMBRE DE CROISEMENTS ET PRODUIT ZIPPÉ . . . . .	71
4.1	POSITION DU PROBLÈME . . . . .	73
4.2	DÉFINITIONS : PRODUIT ZIPPÉ ET FIBRES . . . . .	74
4.3	UNE SEULE FIBRE NE SUFFIT PAS . . . . .	75
4.3.1	Deux familles de graphes . . . . .	75
4.3.2	Un écart quadratique . . . . .	77
	CONCLUSION . . . . .	79
5	PLANARITÉ DU PRODUIT DIRECT AVEC $K_2$ . . . . .	83
5.1	POSITION DU PROBLÈME . . . . .	85
5.2	DÉFINITIONS UTILES . . . . .	88
5.3	MOTIFS MAXIMAUX PLANAIRES . . . . .	91
5.4	MOTIFS MINIMAUX NON-PLANAIRES . . . . .	91
5.5	THÉORÈME PRINCIPAL : UNE ÉNUMÉRATION FASTIDIEUSE . . . . .	93
5.5.1	Subdivisions avec moins de 4 sommets principaux . . . . .	94
5.5.2	Subdivisions avec 5 sommets principaux . . . . .	94
5.5.3	Subdivisions avec 6 sommets principaux . . . . .	97
5.5.4	Subdivisions avec 7 sommets principaux . . . . .	101
5.5.5	Subdivisions avec 8 sommets principaux . . . . .	106
5.5.6	Subdivisions avec plus de 9 sommets principaux . . . . .	107
	CONCLUSION . . . . .	108
	CONCLUSION GÉNÉRALE . . . . .	109
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	113

# LISTE DES FIGURES

1.1	Exemples de graphes à 5 sommets	10
1.2	Exemples de roue et d'éventail	11
1.3	Une grille et un hypercube	11
1.4	Subdivisions de graphes	12
1.5	Représentations de cliques sur des surfaces	17
1.6	Représentations du plan projectif et de la bouteille de Klein	17
2.1	$P_3$ isométriquement plongeable dans $C_4$ et pas $P_4$	21
2.2	Utiliser les étiquettes	22
2.3	Une chaîne isométrique	23
2.4	Exemple d'expansion : les sous-graphes sont isométriques.	24
2.5	Illustrations de preuves	28
2.6	Partition des sommets principaux d'un cube partiel	29
2.7	Les différents types possibles des sommets de $K_u$	29
2.8	Si $t$ est à distance $a$ de $y$ , alors il est à distance $a$ de $u$ .	30
2.9	Le sommet $x$ n'a pas le type $\mathcal{R}$	32
2.10	Cas où $G \setminus u \simeq S(K_{n-1})$	33
2.11	Cas où $y$ est de type $\Lambda$	34
2.12	Illustration de preuve	35
2.13	Illustration de preuve	35
2.14	Le sous-graphe $\langle u, a, x, y \rangle$ est isométrique	36
2.15	Le sous-graphe $\langle u, a, b, x, y \rangle$ est isométrique	37
2.16	Expansion à trois sacs	40
2.17	Le graphe $K_4 - e$	42
2.18	Étude de cas.	43
2.19	Le sous-graphe $\langle x, y, u, w \rangle$	44
2.20	Étude de la roue à 4 rayons $W_4$	47
2.21	Contre-exemple	50
2.22	Étude de cas	50
3.1	Courbes essentielles fermées de la bouteille de Klein	58
3.2	Retirer un crosscap	59
3.3	Retirer deux crosscaps : exemple	61
3.4	$e$ -circuit + $m$ -circuit = $a$ circuit + $b$ -circuit	63
3.5	$b$ -circuit + $m$ -circuit = $a$ circuit	65
4.1	Un exemple de produit zippé	74
4.2	Exemple de fibres cohérentes	75
4.3	Le graphe $H_{3,1}$	76
4.4	Le graphe $G_{3,1}$	77
4.5	Le produit $G_{1,1} \odot H_{1,1}$	79

5.1	Un produit non-planaire . . . . .	85
5.2	Un graphe $G$ non-planaire, $G \times K_2$ est planaire . . . . .	87
5.3	Un graphe $H$ non-planaire, $H \times K_2$ est planaire . . . . .	87
5.4	$G \times K_2$ planaire $\Leftrightarrow G' \times K_2$ planaire . . . . .	88
5.5	Utilisation du lemme 5.1 pour simplifier $K_{1,1,4}$ en $C_3$ . . . . .	89
5.6	Illustration de preuve . . . . .	90
5.7	Des graphes denses dont le produit avec $K_2$ est planaire . . . . .	92
5.8	Motifs non-planaires . . . . .	93
5.9	Étude des subdivisions de $K_4$ . . . . .	94
5.10	Étude des subdivisions de $K_{1,2,2}$ . . . . .	95
5.11	Étude de $K_{1,1,1,2}$ . . . . .	96
5.12	Étude de $K_5$ . . . . .	96
5.13	Étude de $K_{3,3}$ . . . . .	97
5.14	Étude de $K_{1,2,3}$ . . . . .	98
5.15	Le graphe $K_{2,2,2}$ . . . . .	98
5.16	Étude de $K_{2,2,2}$ : sous-subdivision isomorphe à 5.10(b) . . . . .	98
5.17	Étude de $K_{2,2,2}$ : sous-subdivision isomorphe à 5.10(d) . . . . .	99
5.18	Étude de $K_{2,2,2}$ : sous-subdivision isomorphe à 5.10(e) . . . . .	99
5.19	Étude de $K_{2,2,2}$ : sous-subdivision isomorphe à 5.10(f) . . . . .	99
5.20	Étude de $K_{2,2,2}$ : sous-subdivision isomorphe à 5.10(g) . . . . .	100
5.21	Étude de $K_{1,1,1,3}$ . . . . .	100
5.22	$K_{1,1,2,2}$ contient $K_{3,3}$ . . . . .	100
5.23	Étude de $K_{1,1,2,2}$ : premier cas . . . . .	100
5.24	Étude de $K_{1,1,2,2}$ : deuxième cas . . . . .	101
5.25	Étude de $K_{1,1,1,1,2}$ . . . . .	102
5.26	Étude de $K_6$ . . . . .	102
5.27	Étude de $K_{3,4}$ . . . . .	102
5.28	Étude de $K_{1,2,4}$ . . . . .	102
5.29	Étude de $K_{1,3,3}$ . . . . .	103
5.30	Étude de $K_{2,2,3}$ . . . . .	104
5.31	Étude de $K_{1,1,1,4}$ . . . . .	104
5.32	Étude de $K_{1,1,2,3}$ . . . . .	104
5.33	Étude de $K_{1,2,2,2}$ . . . . .	105
5.34	Étude de $K_{1,1,1,1,3}$ . . . . .	106
5.35	Étude de $K_{3,5}$ . . . . .	106
5.36	Étude de $K_{4,4}$ . . . . .	107
5.37	Zoologie des subdivisions planaires de $K_6$ . . . . .	108

# PRÉFACE

À l'heure où sont mis en œuvre les moyens les plus aboutis pour écraser les esprits d'informations de plus en plus nombreuses et de moins en moins pertinentes, le temps de la thèse revêt l'allure d'une bulle de paradis. Trois années durant, la liberté de choix, la critique sélective, l'art de dissenter, l'éveil à la raison, se retrouvent à la première personne. La thèse, c'est le temps où l'on passe aux commandes, on forge enfin nos propres outils. Peu importe leur utilité – la majorité d'entre eux ne vivront pas plus loin que ces trois années – ils sont à mon sens la colonne vertébrale de notre formation.

Qu'il me soit permis, au préambule de mes activités de recherche, de faire un point, aussi biaisé soit-il, sur les devoirs du chercheur au sein de la société. En ces temps troublés, ces questions semblent revenir au goût du jour, preuve qu'elles avaient en quelque sorte disparu précédemment au profit d'une routine élevée au rang d'axiome.

Ces questions, pourtant, elles nous sont posées chaque jour que nous sommes confrontés aux autres acteurs de notre vie de citoyen. Parmi elles, celle, redoutée entre toutes, résumée ainsi : « Vous servez à quoi vous les chercheurs ? » Autant la justification des investigations dans le domaine de la biologie moléculaire semble aisée, autant celle des recherches sur la représentation de graphes sur des surfaces hors du commun requiert de notre part des trésors d'ingéniosité. Je n'ose pas même imaginer les turpitudes de certains collègues de sciences sociales ou de lettres.

Alors pourquoi nourrir les bouches de ces chercheurs dont les trouvailles iront vite retrouver celles de leurs prédécesseurs au panthéon des idées inutiles ? Il me semble qu'une société qui apprend est une société qui progresse, non seulement techniquement, mais aussi socialement. Une corrélation est indéniable entre les connaissances d'un peuple et son niveau d'acceptation de l'autre. L'ouverture d'esprit est à ce prix, savoir toujours plus. Au risque de savoir des choses inutiles. Les chercheurs défrichent, trient le bon grain de l'ivraie.

Le progrès technique est indispensable à notre survie à plus ou moins court terme. Mais le progrès scientifique au sens large est nécessaire à notre survie sociale. Sans ce dernier, le premier perd son sens. Voilà les raisons qui me poussent à plonger avec délice dans les méandres de la connaissance inconnue.

Cependant, la recherche, jouissant d'une relative liberté par rapport aux autres secteurs de la vie publique, se doit également de ne pas s'isoler au prétexte que le vulgum pecus n'y entend rien. Au contraire, le statut de chercheur doit être intimement lié au dialogue, à la vulgarisation. Ce va-et-vient permanent entre le milieu scientifique et le reste de la société, permet d'éviter l'assujettissement dans un sens comme dans l'autre. Non,

les thèmes de recherche ne doivent pas être choisis par le peuple. Nous verrions fleurir assez vite des études très utilitaristes tant décriées par les partisans de cette recherche-démocratie. Pour autant, cela ne dispense pas le chercheur de rendre des comptes à ses concitoyens.

À chacun de trouver sa façon de faire. Une chose est sûre, cependant, questionner sa place dans la société devrait être naturel et régulier pour un rôle aussi stratégique qu'est celui de chercheur. Et ce questionnement aurait bien plus sa place dans les bilans d'évaluation quadriennaux, que la pondération des publications selon un classement de journaux mathématisé à outrance.

J'espère ne pas oublier ces lignes au fil de ma carrière.

Grenoble, le 23 mars 2009.

# INTRODUCTION

**C**E mémoire porte sur l'étude de plusieurs problèmes de plongement de graphe. Un plongement peut être illustré par l'envoi point par point d'une structure vers une autre structure en prenant soin de préserver certaines caractéristiques propres au problème étudié.

Nous en faisons l'expérience chaque jour à des degrés plus ou moins conscients. Lorsque vous étudiez le plan du métro pour vous rendre à la soutenance d'Untel, vous avez sous les yeux un plongement. La structure complexe du réseau public a été projetée de façon plus ou moins réaliste sur une feuille de papier. Les informations importantes ont été préservées : deux stations sur une même ligne sont reliées sur le plan par une ligne de couleur. Quittez la ville pour la montagne, vous utiliserez alors une carte détaillée du massif environnant, il s'agit d'un nouveau plongement vers une feuille de papier, mais les éléments importants à préserver ont changé, il s'agit ici que deux points à une même altitude se retrouvent sur une courbe de niveau cohérente. D'une manière générale, dès que nous représentons quelque chose, nous utilisons un plongement naturel qui donne un sens à la représentation considérée.

Bien entendu, et surtout lorsqu'il s'agit d'une représentation visuelle, des questions d'optimisation se posent. Est-il possible de représenter le réseau du métro de façon claire, en évitant les croisements inutiles ? Quels sont ceux que l'on peut représenter sans le moindre croisement ? Ces problématiques sont le cœur des différents problèmes étudiés dans ce manuscrit.

Nous nous restreignons ici aux plongements combinatoires d'un graphe dans un autre et aux plongements topologiques d'un graphe dans une surface.

## **Une unité discutable.**

Un bref survol de la table des matières de ce mémoire permet de réaliser que les différents problèmes étudiés n'ont finalement que peu de lien entre eux. Seule la notion de plongement sous-jacente les rassemble ici.

En effet, j'ai envisagé ce doctorat comme un premier pied dans le milieu de la recherche, un premier pied qui nécessite de mettre en place des collaborations, d'aller vers les autres en apportant son expertise ou ses astuces. J'ai ainsi eu l'occasion de travailler avec de multiples personnes qui toutes m'ont apporté un regard différent sur notre activité, nos modes de travail, etc.

Peut-être aurais-je pu ou dû me concentrer sur l'étude des plongements isométriques qui fut mon premier étrier. Il est de toute façon trop tard, et je dois confesser que je ne regrette absolument pas la diversité de

ce travail.

### **Des preuves aux styles variés.**

Au fil des chapitres, le lecteur sera confronté à des preuves de styles différents qui doivent faire partie de notre bagage scientifique.

Le deuxième chapitre présente deux preuves longues utilisant de nombreux résultats intermédiaires qui finalement s'assemblent comme un puzzle pour aboutir à la conclusion. Dans le troisième chapitre, la preuve est astucieuse, courte, et utilise un résultat très puissant qui nous sauve la mise. Quant au quatrième chapitre, il présente une preuve simple courte et facilement exposable par des dessins ; le travail est alors fait en amont pour avoir l'idée judicieuse. Enfin, le cinquième chapitre révèle le côté parfois laborieux des mathématiques. Deux idées ramènent l'étude d'un nombre infini de graphes à celle d'un nombre fini. Malheureusement, un nombre fini peut être parfois très grand. Il s'en suit une longue énumération requérant surtout du temps pour en venir à bout.

Nous présentons ci-après nos contributions et le plan de ce manuscrit.

### **Premier chapitre**

Le *premier chapitre* présente les définitions usuelles de théorie des graphes et quelques rudiments de topologie nécessaires à la compréhension du reste du manuscrit. Les définitions spécifiques à un point particulier des preuves présentées seront ajoutés en temps voulu pour éviter d'irritants retours répétitifs à ce chapitre.

### **Second chapitre**

Le *deuxième chapitre* concerne les plongements isométriques de graphes. En particulier, nous nous intéressons à la recherche de caractérisations structurelles de certains graphes plongeables isométriquement dans les hypercubes et graphes de Hamming.

En nous appuyant sur les résultats et caractérisations précédents, nous démontrons qu'une subdivision de clique est isométriquement plongeable dans un hypercube que si un des sommets de la clique a toutes ses arêtes incidentes non-subdivisées et que toutes les autres arêtes sont subdivisées un nombre impair de fois. Étrangement, la plus grosse partie de cette preuve correspond à l'étude d'un cas qui ne se présente jamais. Nous supposons qu'aucun sommet ne peut être retiré isométriquement du graphe et par une classification des autres sommets de la clique, nous arrivons à la conclusion qu'un sommet au moins peut être isométriquement retiré.

Nous généralisons ensuite le résultat aux plongements dans les graphes de Hamming. Même si cette famille est plus grande, les seules subdivisions que nous ajoutons sont les cliques non-subdivisées.

Enfin, nous généralisons également une caractérisation structurelle des subdivisions de roues isométriquement plongeables dans les hypercubes au cas des graphes de Hamming.

Ce chapitre contient les travaux réalisés avec Sylvain Gravier et Kahina Meslem [10, 12, 11] ainsi que le résultat obtenu par l'auteur [6].

### **Troisième chapitre**

Le *troisième chapitre* traite des plongements topologiques de graphes dans les surfaces. Plus précisément, nous répondons partiellement à une question de Matt DeVos, Bojan Mohar et Robert Šamal [28] : une représentation optimale (au sens du nombre de croisements) de deux graphes simultanément sur la bouteille de Klein laisse-t-elle les représentations de ces deux graphes disjointes ?

Cette question admet une réponse triviale dans le plan. Matt DeVos et coll. ont répondu par l'affirmative dans le cas du plan projectif. Nous proposons une preuve que la bouteille de Klein permet la même conclusion.

Supposons que l'un des graphes soit représenté en bleu et l'autre en rouge. Après avoir rappelé les quatre familles de courbes essentielles de la famille de Klein, nous calculons le nombre minimum de courbes de chacune de ces familles pour toute représentation du graphe bleu et du graphe rouge. En particulier, ce nombre est atteint lorsque l'on représente les deux graphes simultanément sur la bouteille de Klein. Il se trouve que certaines familles de courbes sont orthogonales (deux représentantes de ces familles se croisent forcément). Nous en déduisons plusieurs bornes inférieures sur le nombre de croisements bleu-rouge de la représentation. Nous proposons alors deux transformations des représentations pour obtenir un nombre de croisements strictement plus petit.

Ce chapitre contient le travail effectué avec Antoine Gerbaud, Roland Grappe et Frédéric Palesi [9].

#### **Quatrième chapitre et cinquième chapitre**

Les deux derniers chapitres abordent des problèmes issus de la théorie topologique des graphes, en utilisant des outils combinatoires, à la différence du chapitre précédent. Le *quatrième chapitre* s'articule autour du comportement du nombre de croisements des graphes vis-à-vis d'un produit de graphes introduit récemment par Drago Bokal [15]. Certaines conditions de connexité très fortes permettent de conclure à la superadditivité du nombre de croisements par rapport à ce produit : le nombre de croisements du produit de deux graphes est alors supérieur à la somme des nombres de croisements des deux graphes séparément. Nous prouvons qu'une certaine relaxation de cette condition de connexité n'est pas suffisante pour avoir la même conclusion. Nous définissons deux familles de graphes vérifiant les hypothèses faibles et montrons que la superadditivité n'est pas assurée.

Ce chapitre est tiré d'un travail réalisé avec Drago Bokal [7].

Le *cinquième chapitre* porte sur la planarité du produit fort des graphes multipartis complets avec le graphe composé d'une seule arête. Le nombre de graphes à étudier est initialement infini. Nous définissons alors des classes d'équivalence qui nous permettent de n'étudier qu'un représentant par classe. Ceci nous permet de nous ramener à un nombre fini de cas. Nous parvenons ainsi à exhiber une liste de sous-graphes interdits pour assurer la planarité du produit d'un graphe multiparti complet subdivisé avec le graphe  $K_2$ .

Ce chapitre contient le travail réalisé avec Paul Dorbec, Sylvain Gravier et Pranava K. Jha [8].



# DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES



## SOMMAIRE

1.1	GRAPHES	9
1.1.1	L'objet graphe	9
1.1.2	Opérations de graphes	9
1.1.3	Morphismes de graphe	11
1.1.4	Subdivisions de graphes	12
1.2	DISTANCES ET MÉTRIQUES	13
1.2.1	Espaces métriques	13
1.2.2	Graphes et distance	14
1.3	RUDIMENTS DE TOPOLOGIE	15
1.3.1	Des surfaces	15
1.3.2	Des graphes dans des surfaces	16
1.3.3	Caractérisation par mineurs exclus	18
	CONCLUSION	18

Ce chapitre introductif rassemble les définitions usuelles qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. Nous abordons les notions de graphe, de métrique, de surface et naturellement de plongement. Les définitions spécifiques à un problème isolé, ou inutiles à la compréhension générale du domaine seront apportées en temps et en heure.

Pour en savoir plus, le lecteur peut se reporter aux livres suivants : la théorie des graphes en générale est très bien introduite dans les livres de Reinhard Diestel [31] ou de J. Adrian Bondy et U. S. R. Murty [20], la référence concernant les plongements de graphes dans les surfaces est sans doute le livre de Bojan Mohar et Carsten Thomassen [62], concernant les métriques dans les graphes et les opérations associées, les livres de Michel Deza et Monique Laurent [30], et de Wilfried Imrich et Sandi Klavžar [45] sont très complémentaires.



## 1.1 GRAPHES

### 1.1.1 L'objet graphe

Un *graphe non-orienté*  $G$  (ou plus simplement *graphe*) est un couple d'ensembles finis  $(V(G), E(G))$  où  $E(G)$  est constitué de paires (non ordonnées) de  $V(G)$ . Les éléments de  $V(G)$  sont appelés *sommets* de  $G$  et ceux de  $E(G)$  *arêtes* de  $G$ . Si aucune confusion n'est possible on note  $V$  et  $E$  au lieu de  $V(G)$  et  $E(G)$ . On utilisera la notation simplifiée  $xy$  ou  $yx$  pour l'arête  $\{x, y\}$ . Une arête de type  $xx$  est appelée *boucle* de  $G$ . Si  $e = xy$  est une arête de  $G$ , on dit que  $x$  et  $y$  sont *voisins*, ou *adjacents* dans  $G$  et qu'ils forment les extrémités de  $e$ .

Une arête  $e$  est dite *incidente* à un sommet  $v$  si  $v$  est une extrémité de  $e$ . Le *degré* d'un sommet  $v \in V$ , noté  $d(v)$  est le nombre d'arêtes incidentes à  $v$ . L'*ordre* d'un graphe est le cardinal de son ensemble de sommets, noté  $|G|$ .

**Sous-graphe.** Soit un graphe  $G = (V, E)$ . Un graphe  $H = (W, F)$  est un *sous-graphe* de  $G$  si  $W \subset V$  et  $F \subset E$ . Étant donné un sous-ensemble  $W$  de  $V$ , le sous-graphe *induit* par  $W$ , noté  $G[W]$ , a  $W$  comme ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes est composé de toutes les arêtes de  $G$  contenues dans  $W$ .

**Graphes importants.** Nous présentons ensuite quelques graphes simples connus et fréquemment utilisés dans ce manuscrit :

- le *graphe complet* (ou *clique*)  $K_n$  a pour ensemble de sommets l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  et comme ensemble d'arêtes l'ensemble des paires possibles  $v_i v_j$  pour  $i \neq j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .
- le *stable*  $S_n$  a pour ensemble de sommets l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  et aucune arête,  $E = \emptyset$ .
- la *chaîne*  $P_n$  a pour ensemble de sommets l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  et comme ensemble d'arêtes l'ensemble des paires  $v_i v_{i+1}$  pour  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .
- le *cycle*  $C_n$  a pour ensemble de sommets l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_n\}$  et comme ensemble d'arêtes l'ensemble des paires  $v_i v_{i+1}$  pour  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  ainsi que  $v_n v_1$ .

**Graphe biparti.** Un graphe  $G$  est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets  $V$  peut être partitionné en deux parties  $V = V_1 \cup V_2$  de sorte que  $G[V_i]$  est un stable pour  $i = 1, 2$ .

**Connexité.** Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets  $(u, v)$ , il existe une chaîne reliant  $u$  à  $v$ , c'est-à-dire une suite de sommets adjacents commençant par  $u$  et terminant par  $v$ .

### 1.1.2 Opérations de graphes

**Union, intersection et joint complet.** Étant donnés deux graphes  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$ , plusieurs opérations courantes permettent de construire d'autres graphes. Commençons par les plus simples.

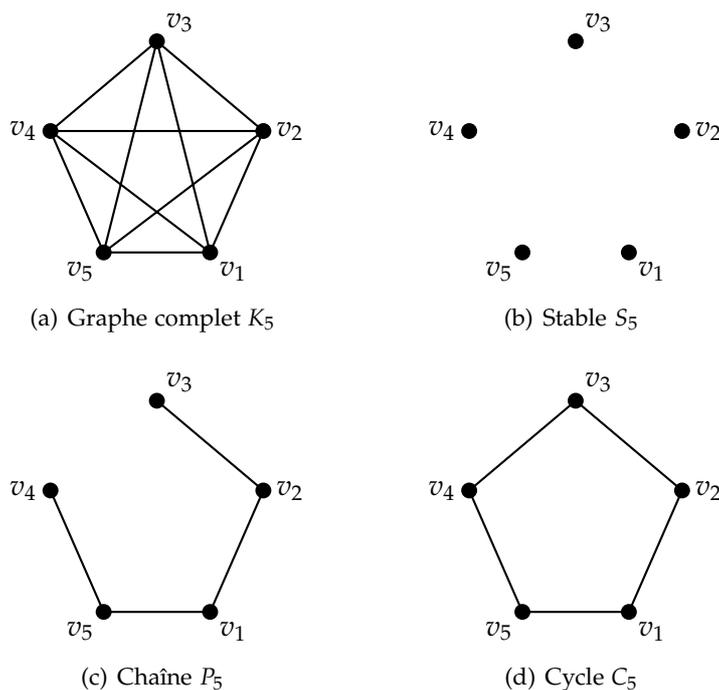


FIG. 1.1 – Exemples de graphes à 5 sommets

L'union des graphes  $G$  et  $H$ , noté  $G \cup H$  est le graphe défini par l'ensemble de sommets  $V \cup V'$  et l'ensemble d'arêtes  $E \cup E'$ . En particulier, si  $V$  et  $V'$  sont disjoints, un tel graphe n'est pas connexe. En effet, il n'existe pas d'arête entre un sommet de  $V$  et un sommet de  $V'$ .

L'intersection des graphes  $G$  et  $H$ , noté  $G \cap H$  est le graphe défini par l'ensemble de sommets  $V \cap V'$  et l'ensemble d'arêtes  $E \cap E'$ .

Le joint complet des graphes disjoints  $G$  et  $H$  est le graphe défini par l'ensemble de sommets  $V \cup V'$  et l'ensemble d'arêtes  $E \cup E' \cup (V \times V')$ . Il s'agit de l'union des graphes  $G$  et  $H$  augmentée de toutes les arêtes possibles entre  $V$  et  $V'$ .

Nous pouvons alors définir deux autres familles de graphes qui nous intéresseront par la suite (plus précisément dans le chapitre 2).

Pour tout  $k \geq 3$ , la roue à  $k$  rayons est le graphe  $W_k$ , joint complet d'un sommet  $u$  et d'un cycle sur  $k$  sommets  $w_1 w_2 \dots w_k$  (voir figure 1.2(a) pour un exemple).

Pour tout  $k \geq 3$ , l'éventail à  $k$  rayons est le graphe  $F_k$ , joint complet d'un sommet  $u$  et d'une chaîne sur  $k$  sommets  $w_1 w_2 \dots w_k$  (voir figure 1.2(b) pour un exemple).

**Produit cartésien.** Étant donnés deux graphes  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$ , le produit cartésien de  $G$  avec  $H$ , noté  $G \square H$  est le graphe défini sur l'ensemble de sommets  $V \times V'$  tel que deux sommets  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont voisins si et seulement si

$$(u_1 = u_2 \text{ et } v_1 v_2 \in E') \text{ ou } (u_1 u_2 \in E \text{ et } v_1 = v_2).$$

Grâce à ce produit, nous pouvons définir plusieurs nouvelles familles de graphes.

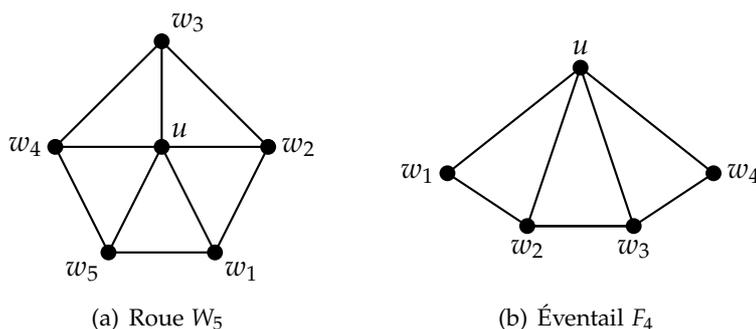


FIG. 1.2 – Exemples de roue et d'éventail

La grille de taille  $m \times n$  est le graphe  $P_m \square P_n$ . La figure 1.3(a) illustre le produit de  $P_3$  par  $P_4$ .

Le tore de taille  $m \times n$  est le graphe  $C_m \square C_n$ .

L'hypercube de dimension 0, noté  $Q_0$  est le graphe  $K_1$ . L'hypercube de dimension  $n \geq 1$ , noté  $Q_n$  est le graphe  $Q_{n-1} \square K_2$ . La figure 1.3(b) illustre l'hypercube de dimension 4. Nous pouvons remarquer que les hypercubes sont des graphes bipartis : la preuve tient au fait que le produit d'un graphe biparti (notons  $A$  et  $B$  la bipartition des sommets) par  $K_2$  (notons  $u_1$  et  $u_2$  ses sommets) est aussi biparti (considérer la bipartition  $A' = \{(x, u_1) | x \in A\} \cup \{(x, u_2) | x \in B\}$  et son complémentaire).

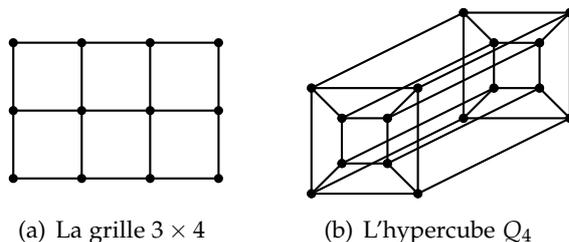


FIG. 1.3 – Une grille et un hypercube

**Produit direct.** Étant donnés deux graphes  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$ , le produit direct de  $G$  par  $H$  noté  $G \times H$  est le graphe défini sur l'ensemble de sommets  $V \times V'$  tel que deux sommets  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont voisins si et seulement si

$$u_1 u_2 \in E \text{ et } v_1 v_2 \in E'.$$

Ce produit sera étudié plus en détail dans le chapitre 5.

**Produit fort.** Il s'agit de l'union des deux produits précédents. On le note  $\boxtimes$ . Étant donnés deux graphes  $G$  et  $H$ ,  $G \boxtimes H$  est le graphe  $(G \square H) \cup (G \times H)$ .

### 1.1.3 Morphismes de graphe

**Morphisme.** Dans un cadre général, un *morphisme* ou *homomorphisme* est une application entre deux ensembles qui « préserve » certaines propriétés.

Soit  $E$  un ensemble muni d'une relation binaire  $\mathcal{S}$  et  $F$  un ensemble muni d'une relation binaire  $\mathcal{R}$ , alors une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est un morphisme de  $(E, \mathcal{S})$  dans  $(F, \mathcal{R})$  si

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{S}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}f(y).$$

**Remarque 1.1** Le terme de plongement est également utilisé. Il a l'avantage d'être plus expressif.

**Morphisme de graphes.** Dans le cadre des graphes, la relation considéré est communément la relation d'adjacence. Soient deux graphes  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$ . Une application de  $V$  dans  $V'$  est un morphisme du graphe  $G$  dans le graphe  $H$  si

$$\forall (u, v) \in V^2, uv \in E \Rightarrow f(u)f(v) \in E'.$$

**Isomorphisme.** Deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : V \rightarrow V'$  telle que

$$\forall (u, v) \in V^2, uv \in E \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E'.$$

Ceci signifie aussi que  $f$  est un morphisme et  $f^{-1}$  est un morphisme. Nous notons  $G \simeq G'$  si  $G$  et  $G'$  sont isomorphes.

#### 1.1.4 Subdivisions de graphes

En remplaçant les arêtes d'un graphe  $G$  par des chaînes disjointes intérieurement, on obtient une *subdivision* de  $G$ . Une subdivision particulière d'un graphe  $G$ , notée  $S(G)$  correspond au graphe subdivisé de  $G$  obtenu en remplaçant chaque arête de  $G$  par un  $P_3$  (chaque arête est subdivisée une fois). La Figure 1.4 donne un exemple d'une subdivision de roue et du graphe  $S(K_4)$ .

Étant donné un graphe  $G$  et une subdivision  $G'$  de  $G$ , nous distinguons les *sommets de subdivisions* qui sont les sommets intérieurs de chaque chaîne remplaçant une arête de  $G$ , et les *sommets principaux* qui sont les extrémités de ces chaînes. Ce sont les sommets qui étaient déjà des sommets de  $G$ . Un sommet principal est dit *universel* si tous ses voisins sont des sommets principaux (aucune des arêtes incidentes n'est subdivisée).

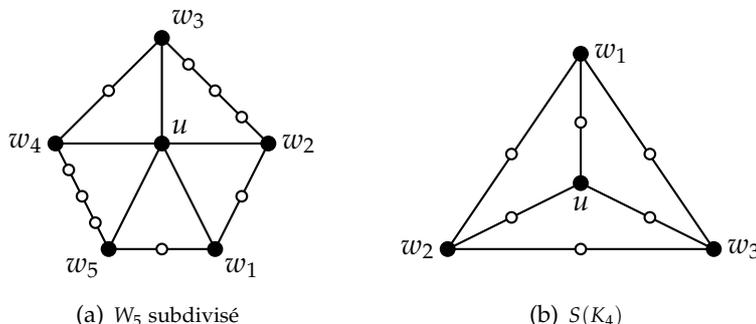


FIG. 1.4 – Subdivisions de graphes

Étant donné une subdivision  $G'$  d'un graphe  $G$  et un sous ensemble  $S$  des sommets principaux, nous notons  $\langle S \rangle$  le sous-graphe induit par les sommets de  $S$  et les sommets de subdivisions entre des sommets de  $S$ .

De plus, une arête qui n'est pas subdivisée est dite *pleine*

## 1.2 DISTANCES ET MÉTRIQUES

Nous introduisons ici les notions et définitions relatives aux distances et aux espaces métriques.

### 1.2.1 Espaces métriques

**Métrie.** Soit  $X$  un ensemble. Une fonction  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée une *distance* sur  $X$  si  $d$  est symétrique, c'est-à-dire que  $d(i, j) = d(j, i)$  pour toute paire d'éléments  $i, j$  de  $X$ , et si  $d(i, i) = 0$  pour tout élément  $i$  de  $X$ . De plus, si  $d$  satisfait l'inégalité suivante :

$$d(i, j) \leq d(i, k) + d(k, j) \quad (1.1)$$

pour tout triplet d'éléments  $i, j, k$  de  $X$ , alors  $d$  est une *semi-métrie* sur  $X$ . Enfin, si  $d(i, j) = 0$  implique  $i = j$ ,  $d$  est une *métrie* sur  $X$ . Alors  $(X, d)$  est appelé un *espace métrique*. L'inégalité (1.1) est communément appelée *l'inégalité triangulaire*.

Posons  $V_n = \{1, \dots, n\}$  et  $E_n = \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n\}$  pour tout  $n$ . Du fait de la symétrie et de la condition que  $d(i, i) = 0$ , une distance sur  $V_n$  peut être vue comme une application de  $E_n$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Désormais nous noterons indistinctement  $d(i, j)$  et  $d_{ij}$ .

Des exemples simples de distance sont obtenus en considérant les distances constantes : étant donné un réel positif  $t$ ,  $d^t$  associe la distance  $t$  entre deux éléments distincts.

Soit un sous-ensemble  $S \subset V_n$ , la *semi-métrie de coupe* associée à  $S$  notée  $\delta(S)$  est telle que  $\delta(S)_{ij} = 1$  si  $i \in S$  et  $j \in V_n \setminus S$ , et 0 sinon. Nous remarquerons que  $\delta(S)$  n'est pas une métrie en général dès que  $n$  est supérieur à 3.

Pour un espace normé quelconque  $(E, \|\cdot\|)$ , une métrie  $d_{\|\cdot\|}$  peut-être définie comme suit

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$$

pour toute paire d'éléments  $x, y$  de  $E$ . La métrie  $d_{\|\cdot\|}$  est appelée *métrie de norme* associée à la norme  $\|\cdot\|$ .

Soit  $p, m \geq 1$ , alors l'espace  $\mathbb{R}^m$  peut-être vu comme un espace normé par la norme  $\ell_p$ . Nous rappelons la définition de la norme  $\ell_p$ ,

$$\ell_p(x_1 \dots x_m) = \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Plongement isométrique.** Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  deux espaces métriques. Alors  $(X, d)$  est *plongeable isométriquement* dans  $(X', d')$  s'il existe une application  $\phi$  (appelée *plongement isométrique*) de  $X$  vers  $X'$  tel que

$$d(x, y) = d'(\phi(x), \phi(y))$$

pour toute paire d'éléments  $x, y$  dans  $X$ . On dit aussi que  $(X, d)$  est un *sous-espace isométrique* de  $(X', d')$ .

### 1.2.2 Graphes et distance

**Métrie de graphe.** Soit un graphe  $G = (V, E)$ . Pour tout couple de sommets  $u, v$ , notons  $\mathcal{P}_{uv}$  l'ensemble des chaînes reliant  $u$  à  $v$ . Ce sont des suites de sommets adjacents dont le premier élément est  $u$  et le dernier est  $v$ . Pour chaque chaîne  $P$  de  $\mathcal{P}_{uv}$ , nous notons  $l(P)$  la longueur de cette chaîne : il s'agit du nombre de sommets de la chaîne réduit de 1. Par exemple  $l(P_5) = 4$ . Posons  $d$  la fonction suivante :

$$d \begin{cases} V \times V & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (u, v) & \longmapsto \min_{P \in \mathcal{P}_{uv}} l(P). \end{cases}$$

La fonction  $d$  est bien symétrique : pour toute chaîne de  $u$  à  $v$ , il existe une chaîne de même longueur de  $v$  à  $u$  et réciproquement. De plus, il est clair que  $d(i, i) = 0$  pour tout sommet  $i$  de  $V$ .

Une plus courte chaîne entre deux sommets  $i$  et  $j$  ne peut pas être plus long qu'une plus courte chaîne entre  $i$  et un sommet  $k$  augmentée d'une plus courte chaîne entre  $k$  et  $j$ . L'inégalité triangulaire est vérifiée.

Enfin, si  $d(i, j) = 0$  c'est qu'il existe une chaîne de longueur 0 entre  $i$  et  $j$ . Nous en déduisons que  $i = j$ .

En conclusion,  $(V, d)$  est un espace métrique.

**Métriques à valeurs entières.** Nous remarquons que les métriques de graphes prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Est-il possible d'associer un graphe  $G_d$  à toute métrique entière  $d$  tel que la métrique associée à  $G_d$  soit exactement  $d$  ?

La réponse à cette question est négative, il suffit de considérer la métrique  $d^2$ . Elle prend ses valeurs dans  $\{0, 2\}$ , or s'il existe deux sommets à distance 2 dans un graphe, alors il existe deux sommets à distance 1.

Par contre, étant donnée une métrique  $d$  sur  $V_n$ , il est possible de lui associer une subdivision de  $K_n$  telle que la restriction aux sommets principaux de la métrique associée soit égale à  $d$ . Il suffit de subdiviser chaque arête  $v_i v_j$ ,  $d_{ij} - 1$  fois.

**Métrie de Hamming** Considérons les mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ . Nous définissons une distance entre deux mots  $w_1$  et  $w_2$  comme le nombre de coordonnées sur lesquelles les deux mots diffèrent.

L'hypercube de dimension  $n$  correspond cette métrique. Chaque sommet est un  $n$ -uplet de  $\{0, 1\}$  et deux sommets sont adjacents si et seulement si une seule coordonnée les distingue.

La *métrique de Hamming* correspond à la généralisation de cette métrique sur des alphabets plus grands  $\{0, 1 \dots k\}$ . Deux mots sont à distance  $d$  si  $d$  coordonnées diffèrent. Cette métrique correspond au graphe obtenu par le produit cartésien de  $n$  graphes  $K_k$ .

Un *graphe de Hamming* est un produit cartésien de graphes complets. La métrique associée à un graphe de Hamming correspond à une métrique de Hamming.

### 1.3 RUDIMENTS DE TOPOLOGIE

Cette section vise à donner les outils nécessaires à la compréhension du chapitre 3. Il ne s'agit pas ici d'introduire formellement la notion de surface ex nihilo. Pour une approche plus formelle, le lecteur peut se référer au livre de Bojan Mohar et Carsten Thomassen [62] ou à la thèse de doctorat de Nguyen Huy Xuong [63]. Dan Archdeacon [3] a également réalisé un état de l'art très accessible de la théorie topologique des graphes.

Nous cherchons à représenter un graphe  $G = (V, E)$ . Nous lui associons un espace topologique, appelé *réalisation géométrique* de  $G$ , les sommets de  $G$  sont des points distincts et les arêtes de  $G$  sont des sous-espaces homéomorphes au segment  $[0, 1]$ , reliant les sommets correspondants. Considérons un espace topologique  $X$ . Un *plongement* de  $G$  dans  $X$  est un homéomorphisme (une bijection continue dont la réciproque est continue) entre la réalisation géométrique de  $G$  et un sous-espace de  $X$ . Par la suite, le terme de sommet représente de façon indéterminée un sommet de  $G$ , son image dans la réalisation géométrique et son image dans la représentation.

Dans quels espaces peut-on plonger un graphe ? L'idée la plus naturelle est de le représenter dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Un graphe qui admet un plongement dans  $\mathbb{R}^2$  est un *graphe planaire*. Ces graphes ont été l'objet de nombreuses recherches depuis bientôt deux siècles et la conjecture des 4 couleurs de Francis Guthrie en 1852.

Cependant, tous les graphes ne sont pas planaires. Un exemple minimal est le graphe  $K_5$ . Il est impossible de relier cinq villes par des routes sans construire au moins un carrefour.

Comment quantifier la non-planarité d'un graphe ? Peut-être en lui associant le plus petit entier  $n$  tel que  $G$  admet un plongement dans  $\mathbb{R}^n$ . Cette idée est balayée par un constat simple : tous les graphes se plongent dans  $\mathbb{R}^3$ . Il suffit de placer les sommets le long de la courbe paramétrée  $z(t) = t, x(t) = \sin(t), y(t) = \cos(t)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ . Les arêtes sont alors représentées par les segments de droite entre ces sommets. Un rapide calcul montre qu'aucune paire de segment ne se croise.

Nous cherchons alors des espaces topologiques proches de  $\mathbb{R}^2$  mais différents de  $\mathbb{R}^3$ . Nous utilisons la notion de surface.

#### 1.3.1 Des surfaces

Une *surface*  $\Sigma$  est une variété de dimension 2 compacte et connexe sans bord. Nous allons tenter d'expliquer ces quatre caractéristiques.

- variété de dimension 2 sans bord : tout point de  $\Sigma$  possède un voisinage homéomorphe à un ouvert du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Pour une variété de dimension 2 avec bord, les points peuvent avoir un voisinage homéomorphe à un ouvert du demi-plan euclidien  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .
- compacte : formellement, la compacité signifie que de tout recouvrement de la surface  $\Sigma$  par des ouverts, il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini de  $\Sigma$ . Concrètement, cela signifie que la surface n'a pas d'infini. Par exemple le plan euclidien n'est pas compact.

- connexe : quels que soient  $x$  et  $y$  deux points d'une surface  $\Sigma$ , il existe un chemin continu de points de  $\Sigma$  reliant  $x$  et  $y$ .

La sphère est l'exemple canonique d'une telle surface.

**Classification.** Il existe deux façons de construire des surfaces à partir de la sphère. Nous pouvons lui ajouter  $n$  poignées et obtenir la surface  $S_n$ , ou nous pouvons lui ajouter  $m$  crosscaps et obtenir la surface  $\tilde{S}_m$ . Ajouter une poignée consiste à découper deux disques dans la surface et relier les trous par un cylindre. Ajouter un crosscap consiste à faire un trou dans la surface et le boucher avec un ruban de Möbius (qui n'a qu'un seul bord).

Par un théorème de Henry R. Brahana [22] établi en 1922, toute surface est homéomorphe à l'une de ces surfaces  $S_n$  ou  $\tilde{S}_m$ . En particulier, la surface obtenue en ajoutant  $n$  poignées et  $m$  crosscaps à la sphère est homéomorphe à la surface  $\tilde{S}_{2n+m}$ .

**Orientabilité.** Les surfaces  $S_n$  sont dites *orientables*. Cela signifie qu'elles déterminent deux parties de l'espace, l'intérieur et l'extérieur. Formellement, il est possible de définir un sens de rotation pour chaque point de la surface tel qu'il soit cohérent (en se déplaçant sur une courbe continue fermée, un même point conserve la même orientation). À l'inverse, les surfaces  $\tilde{S}_m$  sont dites *non-orientables*. Il est impossible de définir un système de rotation cohérent. En particulier, la notion d'intérieur ou d'extérieur n'a pas de sens.

Nous introduisons ici les surfaces les plus connues. Pour une introduction plus formelle le lecteur peut lire les travaux de John Stillwell [77] de 1980.

La surface  $S_0$  est la sphère.

La surface  $S_1$  est le tore. C'est un cylindre recollé par les extrémités.

La surface  $\tilde{S}_1$  est le plan projectif. On peut le voir comme un disque fermé dont les points antipodaux sont identifiés comme sur les figures 1.5(a) et 1.6(a).

La surface  $\tilde{S}_2$  est la bouteille de Klein, également notée  $K$  par la suite. Nous la représentons comme sur les figures 1.5(b) et 1.6(b). Le disque hachuré est un crosscap, les points opposés sont identifiés.

**Courbes.** Une *courbe simple* sur une surface  $\Sigma$  est un homéomorphisme  $\gamma$  du segment  $[0, 1]$  vers un sous-espace de  $\Sigma$ . Elle est *fermée* si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

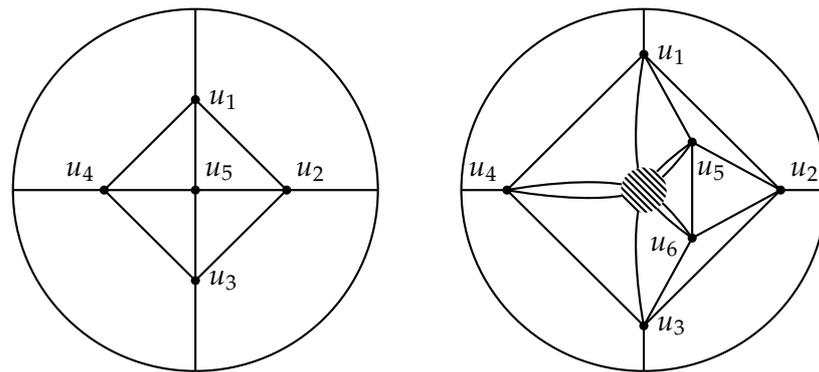
Une courbe simple fermée est dite *contractible* si elle est homotope à un point. C'est-à-dire qu'il est possible de la déformer de façon continue jusqu'à obtenir un point. Une courbe simple fermée non-contractible est dite *essentielle*.

Une courbe  $\gamma$  d'une surface  $\Sigma$  est *séparante* si  $\Sigma \setminus \gamma([0, 1])$  n'est pas connexe.

Remarquons qu'une courbe essentielle peut être séparante.

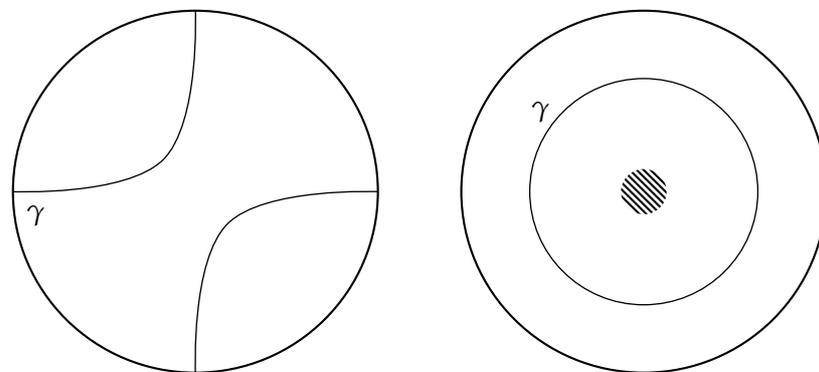
### 1.3.2 Des graphes dans des surfaces

Tout graphe admet un plongement dans une surface. Il suffit de dessiner le graphe sur la sphère et pour chaque croisement, ajouter une poignée et



(a) Le graphe  $K_5$  sur le plan projectif. (b) Le graphe  $K_6$  sur la bouteille de Klein

FIG. 1.5 – Représentations de cliques sur des surfaces



(a) Plan projectif. La courbe  $\gamma$  est fermée et contractible. (b) Bouteille de Klein. La courbe  $\gamma$  est essentielle et séparante.

FIG. 1.6 – Représentations du plan projectif et de la bouteille de Klein

dérivée d'une des arêtes concernées.

**Genre.** Considérons un graphe  $G$ , le *genre orientable* de  $G$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $G$  est plongeable dans  $S_n$ . Le *genre non-orientable* de  $G$  est le plus petit entier  $m$  tel que  $G$  est plongeable dans la surface  $\tilde{S}_m$ . Le terme fait référence à la terminologie des topologues qui parle de genre d'une surface.

**Nombre de croisements.** Une autre façon de quantifier la non-planarité d'un graphe consiste à compter le nombre d'infractions nécessaires pour le représenter sur le plan. Une *représentation* d'un graphe  $G$  est une application continue (pas forcément injective) de la réalisation géométrique de  $G$  vers une surface  $\Sigma$ . Cela revient à dessiner le graphe sur la surface  $\Sigma$  en autorisant des croisements entre les images des arêtes. Une *bonne représentation* d'un graphe  $G$  sur une surface  $\Sigma$  est une représentation telle qu'aucun triplet d'arêtes n'admet un point commun (excepté leurs extrémités), et qu'aucun sommet n'est sur l'intérieur d'une arête.

Alors un point commun à l'intérieur de deux arêtes est un *croisement*. Le *nombre de croisements* d'un graphe  $G$ , noté  $cr(G)$  est le nombre mini-

imum de croisements pris sur toutes les bonnes représentations de  $G$  sur la sphère. Il est bien entendu généralisable à toutes les surfaces. Le nombre de croisements d'un graphe  $G$  sur une surface  $\Sigma$ , noté  $\text{cr}_\Sigma(G)$  est le nombre minimum de croisements pris sur toutes les bonnes représentations de  $G$  sur la surface  $\Sigma$ .

En particulier, si un graphe est de genre orientable  $n$  et de genre non-orientable  $m$ , alors  $\text{cr}_{S_n}(G) = \text{cr}_{\tilde{S}_m}(G) = 0$ .

### 1.3.3 Caractérisation par mineurs exclus

Un concept central concernant la caractérisation des graphes planaires de Klaus Wagner [78], est celui de *mineur*. Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  et une arête  $e$  de  $E$ , une *suppression de l'arête  $e$*  résulte en le graphe  $G - e$  défini par  $V(G - e) = V$  et  $E(G - e) = E \setminus \{e\}$ . De plus, la *contraction de l'arête  $e = uv$*  consiste à unifier les sommets  $u$  et  $v$  dans  $G$  en un seul sommet adjacent à tous les voisins de  $u$  et les voisins de  $v$ , les boucles possibles sont effacées et les arêtes multiples sont simplifiées en une seule arête. La *suppression d'un sommet  $u$*  consiste à retirer  $u$  de l'ensemble des sommets ainsi que toutes les arêtes incidentes à  $u$ .

#### Définition 1.1

*Un graphe  $H$  est un mineur d'un graphe  $G$  si et seulement si  $H$  peut être obtenu de  $G$  par une suite finie de contractions d'arêtes, de suppressions d'arêtes et de suppressions de sommets.*

Le résultat le plus célèbre dans le domaine des graphes planaires fut obtenu dans les années 30.

#### Théorème 1.1 (Kuratowski [52], Wagner [78])

*Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de mineur isomorphe à  $K_{3,3}$  ou  $K_5$ .*

## CONCLUSION DU CHAPITRE 1

Nous sommes à présent armés pour aborder les différents problèmes spécifiques de cette thèse. La notion de graphe est bien entendu présente dans chacun des chapitres suivants. Les métriques sont abordées dans le chapitre 2, tandis que la topologie est impliquée dans les chapitres 3, 4 et 5.

# PLONGEMENTS ISOMÉTRIQUES

# 2

## SOMMAIRE

2.1 HISTOIRE ET LIMINAIRES . . . . .	21
2.2 PRÉCÉDENTES CARACTÉRISATIONS . . . . .	22
2.2.1 Une relation d'équivalence sur les arêtes . . . . .	22
2.2.2 Une opération constructive . . . . .	24
2.3 CUBES PARTIELS ET CLIQUES SUBDIVISÉES . . . . .	25
2.3.1 Preuve de la condition suffisante . . . . .	26
2.3.2 Preuve de la condition nécessaire . . . . .	27
2.3.3 Implications diverses . . . . .	38
2.4 DES HYPERCUBES AUX GRAPHES DE HAMMING . . . . .	38
2.4.1 Propriétés générales . . . . .	39
2.4.2 Subdivisions de graphes complets . . . . .	42
2.4.3 Subdivisions de roues . . . . .	45
2.5 LA COURTE VIE D'UNE CONJECTURE . . . . .	49
CONCLUSION . . . . .	51

DANS ce chapitre, nous considérons une notion de plongement purement combinatoire. Il s'agit d'un morphisme entre deux graphes tels que les distances entre les sommets sont préservées. Ce type de plongement est appelé *isométrique*.

Nous présentons de nouveaux résultats concernant la caractérisation de certains sous-graphes isométriques de l'hypercube et plus généralement des graphes de Hamming. Ces deux types de graphes ont déjà été largement étudiés et de nombreuses caractérisations sont déjà disponibles. La plupart d'entre elles sont algorithmiques au sens où elles nécessitent l'exécution d'opérations constructives ou le calcul d'une relation d'équivalence avant de vérifier la nature du graphe. En revanche, les caractérisations structurelles manquent. Nous proposons ici une caractérisation structurelle des subdivisions de cliques qui se plongent isométriquement dans l'hypercube; le même genre de résultat est donné concernant les graphes de Hamming et les subdivisions de roue dans les graphes de Hamming. Ce travail est basé sur les articles [10, 12].



## 2.1 HISTOIRE ET LIMINAIRES

Dans un premier temps, nous établissons la définition formelle d'un *plongement isométrique* de graphe.

### Définition 2.1

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. Une application  $f : V(H) \rightarrow V(G)$  est un *plongement isométrique* de  $H$  dans  $G$  si pour toute paire de sommets  $u, v$  de  $H$ ,  $d_H(u, v) = d_G(f(u), f(v))$ .

Si une telle application existe, on dit que  $H$  admet un *plongement isométrique* dans  $G$ .

Nous pouvons remarquer que la condition de morphisme du plongement usuel (qui conserve les adjacences) est contenue dans la conservation des distances. Si  $uv$  est une arête dans  $H$  alors  $d_H(u, v) = 1$ . Dès lors,  $d_G(f(u), f(v)) = 1$  et donc  $f(u)f(v)$  est une arête de  $G$ .

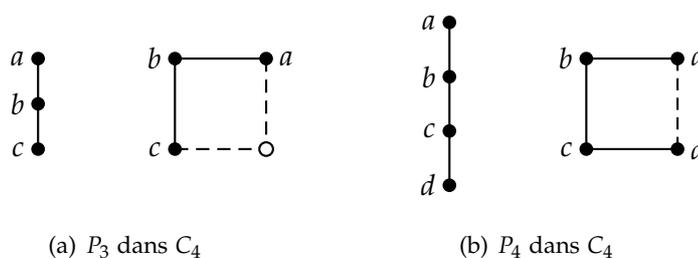


FIG. 2.1 –  $P_3$  isométriquement plongeable dans  $C_4$  et pas  $P_4$

### Définition 2.2

Un graphe  $G$  est un *cube partiel* s'il admet un plongement isométrique dans un hypercube.

Nous pouvons remarquer qu'un tel graphe est un sous-graphe d'un hypercube, il est donc biparti. Il est aussi connexe car d'après la connexité de l'hypercube, toutes les distances sont finies.

L'étude de tels graphes a été initiée en 1971 par Ronald L. Graham et Henry O. Pollak [40] et par Dragomir Ž. Djoković [32] en 1973. Il s'agissait de trouver facilement un plus court chemin dans un réseau. Dans le cas général d'un graphe quelconque, on peut distinguer deux stratégies extrêmes et peu efficaces. Il est ainsi possible d'errer de façon aléatoire dans le graphe jusqu'à trouver le sommet-cible. Cette méthode à l'avantage de demander très peu d'espace-mémoire mais a l'immense défaut de pouvoir durer indéfiniment. Une autre façon de procéder consiste à prendre connaissance de tout le graphe puis de calculer tous les plus courts chemins. Lors de la donnée du sommet-cible, il suffit alors de suivre les indications dans notre catalogue. L'avantage est que le traitement est très rapide. L'inconvénient est la quantité de mémoire requise.

Le cas des cubes partiels est un peu différent. En effet, ces graphes peuvent être étiquetés de sorte que depuis n'importe quel sommet, la simple connaissance des étiquettes du sommet-cible, du sommet courant et des sommets voisins, suffit pour faire le bon choix. C'est-à-dire que nous pouvons nous rapprocher strictement de notre but. Cette méthode est à la fois rapide et requiert peu de mémoire (les étiquettes sont en  $\mathcal{O}(\log_2(n))$  pour les graphes isométriquement plongeables dans  $Q_n$ ). Comme illustré sur la figure 2.2, pour aller du sommet étiqueté 101100 au sommet étiqueté 000101, nous pouvons choisir un des deux sommets étiquetés en gras, sans avoir besoin de connaître la structure exacte de la zone grisée.

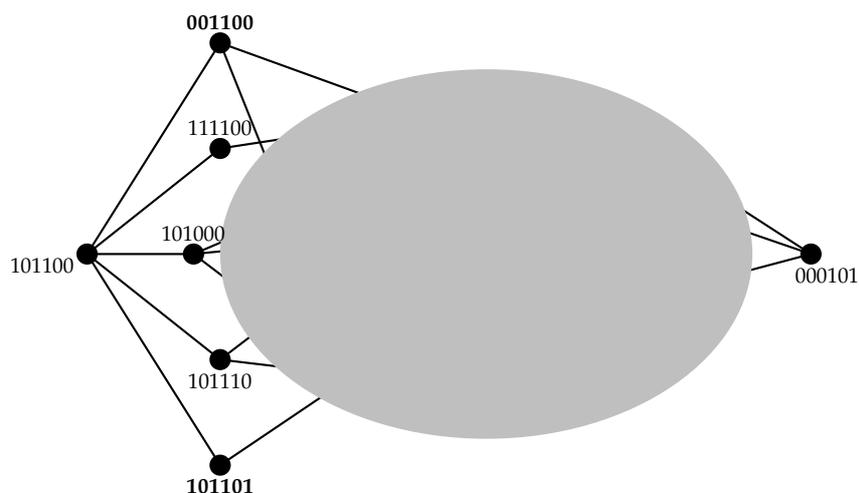


FIG. 2.2 – Utiliser les étiquettes

## 2.2 PRÉCÉDENTES CARACTÉRISATIONS

Dans un premier temps, nous traitons de deux caractérisations existantes. Ce sont celles qui nous seront utiles par la suite. Pour un exposé exhaustif, le lecteur peut se référer au livre de Michel Deza et Monique Laurent [30]. De plus, de récents travaux par David Eppstein [34, 33] et Sandi Klavžar et Alenka Lipovec [51] sont à mentionner.

Encore plus récemment, Sandi Klavžar et son étudiant Matjaž Kovše se sont intéressés à différentes sous-classes des cubes partiels que sont les graphes médians [49, 48].

### 2.2.1 Une relation d'équivalence sur les arêtes

#### Définition 2.3

Soit  $G$  un graphe et  $e = uv$ ,  $f = xy$  deux arêtes de  $G$ . Les arêtes  $e$  et  $f$  sont dites en relation  $\theta$  (noté  $e\theta f$ ) si,

$$d_G(u, x) + d_G(v, y) \neq d_G(u, y) + d_G(v, x).$$

Cette relation fut introduite séparément par Dragomir Ž. Djoković [32] et Peter Winkler [81]. Elle est de ce fait couramment appelée *relation de Djoković-Winkler*.

**Exemple 2.1**

*Soit  $n$  un entier pair plus grand que 4. Alors dans  $C_n$ , chaque paire d'arêtes opposées est en relation  $\theta$ .*

*Soit  $n$  un entier impair plus grand que 3. Alors dans  $C_n$ , chaque arête est en relation  $\theta$  avec ses deux arêtes opposées.*

Remarquons tout d'abord quelques petits résultats utiles.

**Proposition 2.1**

*La relation  $\theta$  est réflexive et symétrique.*

*Démonstration.* Nous démontrons les deux propriétés séparément.

- (a) **Réflexivité** : Considérons une arête  $uv$  dans un graphe  $G$ . Alors la partie gauche de l'inégalité de la définition 2.3 devient  $d_G(u, u) + d_G(v, v) = 0$  tandis que la partie droite se transforme en  $d_G(u, v) + d_G(v, u) = 2$ . En conclusion  $uv\theta uv$ .
- (b) **Symétrie** : elle se déduit de la symétrie de la fonction distance.

□

**Proposition 2.2**

*Soit  $G$  un graphe et  $P$  une sous-chaîne isométrique dans  $G$ , alors aucune paire d'arêtes de  $P$  n'est en relation  $\theta$ .*

*Démonstration.* Soit une paire d'arêtes de  $P$ ,  $uv$  et  $xy$ . Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que  $u, v, x, y$  apparaissent dans cet ordre le long de  $P$  (voir figure 2.3). Posons  $l = d_G(v, x)$  la distance (qui peut être nulle) entre  $v$  et  $x$ . Il suffit alors de retranscrire la formule de la Définition 2.3 :

$$\begin{aligned} d_G(u, x) + d_G(v, y) &= (l + 1) + (l + 1) \\ &= 2l + 2 \\ d_G(u, y) + d_G(v, x) &= l + (l + 2) \\ &= 2l + 2. \end{aligned}$$

Dès lors, les deux arêtes ne sont pas en relation  $\theta$ .

□

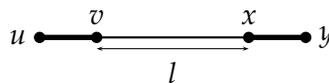


FIG. 2.3 – Une chaîne isométrique

En 1984, Peter Winkler prouve une très belle caractérisation des cubes partiels dans [81].

**Théorème 2.1** (Winkler [81])

*Soit  $G$  un graphe connexe. Alors  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est biparti et  $\theta$  est transitive sur les arêtes de  $G$ .*

Cette caractérisation est non seulement esthétique au sens où elle est formulable en une ligne mais elle est aussi fort utile, entre autre pour les deux raisons qui suivent :

- savoir qu'un graphe est un cube partiel permet désormais de considérer la relation  $\theta$  comme une relation d'équivalence. Cette relation devient ainsi beaucoup plus aisée à manipuler et nous donne énormément d'informations sur la structure du graphe.
- d'un point de vue algorithmique, en notant  $m$  le nombre d'arêtes et  $n$  le nombre de sommets d'un graphe  $G$ , il est facile de déduire de ce théorème un algorithme pour décider si  $G$  est un cube partiel. Cet algorithme s'exécute en temps  $\mathcal{O}(mn)$ . Cette complexité fut ensuite améliorée pour certaines classes de graphes par Bostjan Brešar, Wilfried Imrich et Sandi Klavžar [23] en 2003. David Eppstein [35] a récemment trouvé un algorithme quadratique par rapport au nombre de sommets pour le cas général. Cet algorithme s'exécute donc en un temps  $\mathcal{O}(n^2)$  quel que soit le nombre d'arêtes du graphe considéré.

**2.2.2 Une opération constructive**

Nous introduisons la notion de couverture propre et d'expansion relative à une telle couverture.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe. Une *couverture propre*  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  est une paire de sous-graphes isométriques de  $G$  telle que  $G = G_1 \cup G_2$  et  $G_0 = G_1 \cap G_2$  est un graphe non-vide appelé *l'intersection* de la couverture. De plus, aucune arête ne relie un sommet de  $V_1 \setminus V_2$  à un sommet de  $V_2 \setminus V_1$ . L'*expansion* de  $G$  relative à la couverture propre  $G_1, G_2$  est le graphe  $G'$  obtenu de la façon suivante. Les graphes  $G'_i$  pour  $i = 1, 2$  sont des copies isomorphes de  $G_1$  et  $G_2$ , et, pour chaque sommet  $u$  dans  $G_0$  notons  $u'_i$  le sommet correspondant dans chacune de ces copies  $G'_i$ . Le graphe  $G'$  est alors l'union disjointe de  $G'_1$  et  $G'_2$  à laquelle on ajoute une arête entre chaque paire de sommets  $u'_1, u'_2$  pour les sommets  $u$  de  $G_0$ . La figure 2.4 vaut mieux qu'un long discours.

En 1988, Victor Chepoi [25] prouve la caractérisation suivante.

**Théorème 2.2** (Chepoi [25])

*Les cubes partiels sont exactement les graphes qui sont obtenus de  $K_1$  par des expansions relatives à des couvertures propres successives.*

L'intérêt principal de cette caractérisation apparaît lorsque nous sommes amenés à prouver qu'un graphe donné est un cube partiel. Il suffit alors de donner une suite d'expansions à faire pour obtenir le graphe.

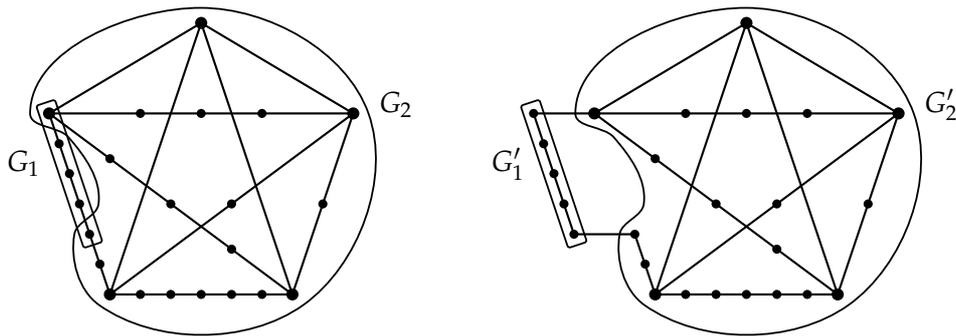


FIG. 2.4 – Exemple d'expansion : les sous-graphes sont isométriques.

Cela se révèle souvent moins fastidieux que calculer la relation  $\theta$  puis la vérification de sa transitivité ou même donner l'image de chaque sommet puis vérifier l'isométrie du plongement dans l'hypercube considéré.

## 2.3 CUBES PARTIELS ET CLIQUES SUBDIVISÉES

Dans cette section, nous présentons le premier véritable résultat de cette thèse.

**Théorème 2.3** (B., Gravier, Meslem [10])

*Soit  $G$  une subdivision de  $K_n$  ( $n \geq 5$ ), alors  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$  ou il existe un sommet dont toutes les arêtes incidentes ne sont pas subdivisées tandis que les autres arêtes sont subdivisées un nombre impair de fois.*

L'origine de cette étude vient d'une question posée par Victor Chepoi et Claude Tardif : les cubes partiels sont-ils les graphes bipartis à intervalles convexes (pour toute paire de sommets  $a$  et  $b$ , l'ensemble des sommets situés sur une plus courte chaîne entre  $a$  et  $b$  est convexe). Une réponse négative fut apportée en 2002 par Boštjan Brešar et Sandi Klavžar [24] utilisant les subdivisions de roues. Un peu plus tard, Sylvain Gravier, Sandi Klavžar et Michel Mollard ont décidé de caractériser toutes les subdivisions de roues qui se plongent isométriquement dans un hypercube [41]. Les graphes peu denses tels que les arbres sont des cas triviaux de cubes partiels, les subdivisions de roues s'attaquaient à des graphes de densité moyenne ; notre étude porte sur les graphes les plus denses, à savoir les graphes complets.

La preuve qui suit s'appuie sur plusieurs résultats antérieurs que nous rappelons.

**Proposition 2.3** (Klavžar, Lipovec [50])

*Soit un entier  $n \geq 1$ ,  $S(K_n)$  est un cube partiel.*

**Proposition 2.4** (Aïder, Gravier, Meslem [1])

Soit  $G$  une subdivision de  $K_n$  ( $n \geq 4$ ) tel que chaque arête de  $K_n$  subdivisée est une chaîne isométrique dans  $G$ . Alors  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$ , ou  $G$  contient un sommet universel  $u$  et toutes les autres arêtes de  $K_n$  ont été subdivisées une seule fois.

### 2.3.1 Preuve de la condition suffisante

Nous prouvons ici que les graphes décrits dans le Théorème 2.3 sont des cubes partiels. Pour ce faire, nous utiliserons la caractérisation des graphes partiels due à Victor Chepoi (voir Théorème 2.2).

Soit  $n \geq 4$ , et soit  $G$  une subdivision de  $K_n$  isomorphe à  $S(K_n)$ , ou telle qu'il existe un sommet universel  $u$  et que toutes les arêtes non-incidentes à  $u$  sont subdivisées un nombre impair de fois. Montrons que c'est un cube partiel.

Grâce à la Proposition 2.3, le cas où est  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$  est réglé. Il ne reste plus qu'à traiter l'autre cas.

Le graphe  $G$  contient  $n$  sommets principaux que nous pouvons énumérer de  $w_1$  à  $w_n$ . Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que  $w_n$  est le sommet universel. Pour toute paire d'entiers  $1 \leq i < j \leq n-1$ ,  $m_{ij}$  représente le nombre de sommets de subdivision ajoutés à l'arête  $w_i w_j$ . Alors toutes ces quantités sont impaires par hypothèse. De plus, elles définissent entièrement le graphe  $G$ . Nous allons prouver que  $G$  est un cube partiel par récurrence sur la somme  $\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} m_{ij}$ .

Tout d'abord, si  $m_{ij} = 1$  pour toute paire  $i, j$ , il s'agit du graphe avec un sommet universel et toutes les autres arêtes subdivisées exactement une fois. Par la Proposition 2.4, nous savons que ce graphe est un cube partiel.

Considérons une famille de  $m_{ij}$  telle qu'au moins l'un d'entre eux est supérieur ou égal à 3. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $m_{12} \geq 3$ . Considérons le graphe  $G'$  subdivision de  $K_n$  décrite par la famille  $m'_{ij}$  égale à la famille  $m_{ij}$  exception faite de  $m'_{12} = m_{12} - 2$ . Par l'hypothèse d'induction,  $G'$  est un cube partiel. Nous allons utiliser une expansion de  $G'$  pour retrouver le graphe  $G$  et conclure que c'est un cube partiel. Notons  $w'_1, w'_{1,1}, w'_{1,2} \dots w'_{1,m'_{12}}, w'_2$ , les sommets le long de l'arête subdivisée  $w'_1 w'_2$ . Alors  $G'$  admet une couverture propre :  $G'_1$  la chaîne induite par les sommets  $w'_1, w'_{1,1}, \dots, w'_{1,(m'_{12}+1)/2+1}$  et  $G'_2$  le reste du graphe augmenté des sommets  $w'_1$  et  $w'_{1,(m'_{12}+1)/2+1}$  et des arêtes incidentes correspondantes. Notons que si  $m'_{12} = 1$ , alors le sommet  $w'_{1,(m'_{12}+1)/2+1}$  représente le sommet  $w'_2$ . Les deux sous-graphes  $G'_1$  et  $G'_2$  sont isométriques dans  $G$  et il n'existe pas d'arête entre  $G'_1 \setminus G'_2$  et  $G'_2 \setminus G'_1$ . Le graphe obtenu par l'expansion relative à cette couverture est le graphe  $G$  dont l'arête  $w'_1 w'_2$  a été subdivisée deux fois de plus (voir un exemple quand  $n = 5$  et  $m_{12} = 5$  figure 2.4). C'est exactement le graphe  $G$ . Par le Théorème 2.2,  $G$  est donc un cube partiel.

Nous avons démontré la condition suffisante du Théorème 2.3.

Par ailleurs, chaque expansion revient à augmenter de 1 la dimension de l'hypercube dans lequel le graphe est plongé isométriquement. Dans [1], Meziane Aïder, Sylvain Gravier et Kahina Meslem prouvent que le graphe dont tous les  $m_{ij}$  sont égaux à 1, se plonge isométriquement

dans  $Q_{n-1}$ . Dès lors, un graphe  $G$  défini par une famille  $m_{ij}$  de nombres impairs se plonge isométriquement dans un hypercube de dimension  $n - 1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (m_{ij} - 1) / 2$ .

### 2.3.2 Preuve de la condition nécessaire

Cette partie de la preuve est basée sur une induction par rapport à  $n$ , l'ordre de la clique subdivisée. Nous nous appuyons sur les deux résultats suivants qui traitent des cas de base.

**Théorème 2.4** (Gravier, Klavžar, Mollard [41])

*Soit  $k \geq 3$  et  $G$  une subdivision de la roue  $W_k$ . Alors  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $S(W_3)$  ou les rayons de la roue ne sont pas subdivisés et les autres arêtes sont subdivisées un nombre impair de fois chacune.*

Obtenu en 2003, le théorème 2.4 contient le cas des subdivisions de  $K_4$ . En effet,  $W_3$  est isomorphe à  $K_4$ . Deux ans plus tard, Meziane Aïder et coll. [1] ont démontré que le théorème 2.3 est vérifié pour les subdivisions de  $K_5$ .

**Proposition 2.5** (Aïder, Gravier, Meslem [1])

*Soit  $G$  une subdivision de  $K_5$ .  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $S(K_5)$  ou  $G$  admet un sommet universel  $u$  et toutes les arêtes non-incidentes à  $u$  sont subdivisées un nombre impair de fois.*

### D'utiles outils

Nous présentons ici quelques lemmes très spécifiques que nous utilisons à plusieurs reprises dans la preuve qui suit. Nous avons choisi de les séparer pour ne pas entraver plus que de raison la lecture de la preuve.

**Proposition 2.6**

*Soit  $G$  une subdivision de  $K_n$  plongeable isométriquement dans un hypercube. Alors une géodésique entre deux sommets principaux de  $G$  passe au plus par un sommet principal supplémentaire.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'une géodésique entre deux sommets principaux de  $G$ ,  $x$  et  $y$ , passe par au moins quatre sommets principaux ( $x$  et  $y$  inclus). Considérons les quatre premiers sommets de cette  $xy$ -géodésique :  $x, x_1, x_2, x_3$ . Le sous-graphe de  $G$  induit par ces quatre sommets principaux  $\langle x, x_1, x_2, x_3 \rangle$  est isométrique dans  $G$ , c'est donc un cube partiel. De plus, ce sous-graphe est une subdivision de  $K_4$  (voir figure 2.5(a)). Alors par le théorème 2.4,  $\langle x, x_1, x_2, x_3 \rangle$  est isomorphe à  $S(K_4)$ , ou il contient un sommet universel.

Si le sous-graphe est isomorphe à  $S(K_4)$ , alors la chaîne de  $x$  à  $x_3$  passant par  $x_1$  et  $x_2$  n'est pas une géodésique, ce qui contredit nos hypothèses.

Si le sous-graphe admet un sommet universel, alors forcément, l'arête  $xx_2$  ou  $x_1x_3$  est pleine. Dans les deux cas, cela contredit l'hypothèse que la chaîne passant par  $x, x_1, x_2, x_3$  est une géodésique.  $\square$

Désormais, étant donnés  $x, y$  et  $z$  trois sommets principaux d'un cube partiel  $G$ , subdivision d'un graphe complet, nous noterons  $x \rightarrow y$  si la subdivision de l'arête  $xy$  est une géodésique dans  $G$ , et  $x \xrightarrow{z} y$  si la chaîne passant par  $x, z$  puis  $y$  est une géodésique. Par la proposition 2.6, pour toute paire de sommets principaux  $x, y$  d'un tel graphe, il existe un sommet principal  $z$  tel que  $x \xrightarrow{z} y$ , ou  $x \rightarrow y$ .

Pour les illustrations des preuves qui suivent, nous choisissons la représentation suivante. Les sommets principaux sont représentés par des cercles pleins tandis que les sommets de subdivisions sont représentés par de simples cercles. Une arête pleine entre deux sommets principaux est représentée par un segment épais tandis qu'une arête subdivisée est représentée par un segment normal. Les arêtes dont le statut est indéterminé sont représentées par des segments pointillés.

**Proposition 2.7**

*Soit  $G$  une subdivision de  $K_n$  plongeable isométriquement dans un hypercube, et  $x, y, v$  trois sommets principaux de  $G$ . Si l'arête  $xy$  n'est pas subdivisée dans  $G$  et  $y \rightarrow v$ , alors le sous-graphe  $\langle x, y, v \rangle$  contient une  $xv$ -géodésique.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde ; supposons qu'il existe un autre sommet principal  $w$  différent de  $x, y$  ou  $v$  tel que  $x \xrightarrow{w} v$ ,  $x \not\rightarrow v$  et  $x \not\xrightarrow{y} v$ . Notons  $a$  la distance entre  $y$  et  $v$ , et  $b$  la distance entre  $x$  et  $v$  (voir figure 2.5(b)).

Si  $b \geq a + 1$ , nous aurions  $x \xrightarrow{y} v$  contredisant nos hypothèses.

Si  $b \leq a - 1$ , la chaîne passant par  $y, x, w$  puis  $v$  serait une géodésique passant par 4 sommets principaux, ce qui est impossible en vertu de la proposition 2.6.

Alors  $b = a$ , et nous obtenons un cycle impair de longueur  $2a + 1$ . En conclusion,  $G$  n'est pas biparti ; or c'est un cube partiel, il est donc biparti. Cette dernière contradiction achève la preuve de la proposition 2.7.  $\square$

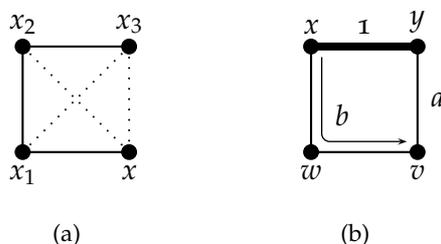


FIG. 2.5 – Illustrations de preuves

Nous pouvons maintenant définir le formalisme suivant. Étant donné un cube partiel  $G$ , subdivision d'un graphe complet, et  $u$  un sommet principal de  $G$ , nous définissons  $K_u$  comme l'ensemble des sommets princi-

paux de  $G$  différents de  $u$ ,  $x$  tels que  $u \rightarrow x$ . En outre, nous définissons  $L_u$  les autres sommets principaux de  $G$  différents de  $u$ . Par la proposition 2.6, soit  $a$  un sommet de  $L_u$ , il existe un sommet principal  $x$  de  $K_u$  tel que  $u \xrightarrow{x} a$ . Nous noterons  $K$  et  $L$  lorsque le contexte ne prête pas à confusion. La figure 2.6 illustre cette partition.

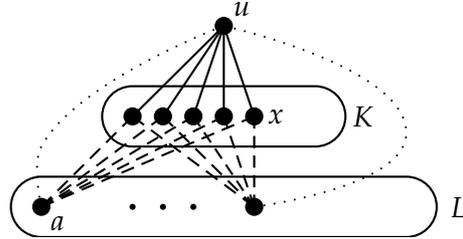


FIG. 2.6 – Partition des sommets principaux d'un cube partiel

#### Définition 2.4

Nous définissons des types relatifs à  $u$  pour les sommets de  $K_u$ , comme suit (voir aussi figure 2.7) :

- $x$  est de type  $\mathcal{L}$  s'il existe  $y$  dans  $K_u$  tel que  $u \xrightarrow{x} y$ .
- $x$  est de type  $\mathcal{I}$  s'il existe  $y$  dans  $L_u$  tel que  $u \xrightarrow{x} y$ .
- $x$  est de type  $\mathcal{C}$  s'il existe  $y, z$  dans  $K_u$  tels que  $y \xrightarrow{x} z$ .
- $x$  est de type  $\Lambda$  s'il existe  $y, z$  dans  $L_u$  tels que  $y \xrightarrow{x} z$ .
- $x$  est de type  $\mathcal{R}$  s'il existe  $y$  dans  $K_u$  et  $z$  dans  $L_u$  tels que  $y \xrightarrow{x} z$ .

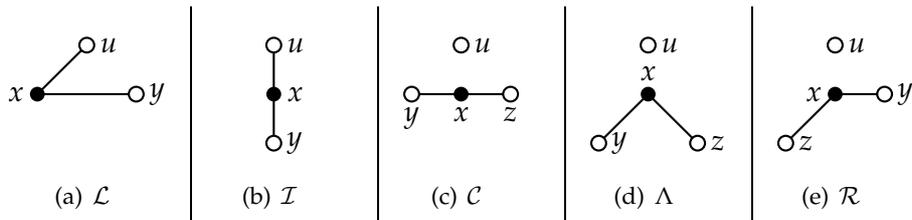


FIG. 2.7 – Les différents types possibles des sommets de  $K_u$

#### Remarque 2.1

Lorsqu'il est impossible de retirer un sommet isométriquement (pour tout sommet principal  $v$ ,  $G \setminus v$  n'est pas isométrique dans  $G$ ), alors chaque sommet de  $K_u$  est utilisé pour une plus courte chaîne. De ce fait, tous les sommets de  $K_u$  ont au moins l'un des types définis précédemment.

De plus, dans ce cas, un sommet  $x$  de  $K_u$  ne peut pas avoir uniquement le type  $\mathcal{L}$  sinon  $G \setminus x$  serait isométrique dans  $G$ .

Nous pouvons maintenant énoncer un lemme important de la preuve.

**Lemme 2.1**

*S'il n'existe pas de sommet principal  $v$  tel que  $G \setminus v$  est isométrique dans  $G$ , alors pour tout sommet principal  $u$  dans  $G$ , aucun sommet de  $K_u$  n'a le type  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Soit  $u$  un sommet principal de  $G$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un sommet  $x$  dans  $K_u$  de type  $\mathcal{C}$ . Par définition, il existe deux sommets  $y, z$  dans  $K_u$  tels que  $y \xrightarrow{x} z$ . Le sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$  est isométrique dans  $G$ . C'est donc un cube partiel, mais aussi une subdivision de  $K_4$ . Ce sous-graphe n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  car  $y \xrightarrow{x} z$ . Il existe donc un sommet universel parmi  $u, x, y$  et  $z$ . La relation  $y \xrightarrow{x} z$  nous permet d'affirmer que  $y$  et  $z$  ne sont pas universels. De même, si  $u$  est universel, alors les deux arêtes  $yx$  et  $xz$  sont subdivisées (un nombre impair de fois), et par conséquent  $y \not\xrightarrow{x} z$ , contredisant notre hypothèse. Nous pouvons donc affirmer que  $x$  est le sommet universel du sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$ . La définition de  $K_u$  nous permet d'ajouter que les arêtes  $uz$  et  $uy$  sont subdivisées exactement une fois chacune.

**Affirmation 2.1**

*Pour tout sommet  $t$  dans  $K$  différent de  $x, y$  et  $z$ , si  $y \rightarrow t$ , alors l'arête  $xt$  est pleine.*

- Soit  $t$  un tel sommet, notons  $a$  la distance dans  $G$  entre  $y$  et  $t$ . D'une part, nous pouvons affirmer que  $a - 2 < d_G(u, t) < a + 2$ , sinon une  $ut$ -géodésique ou une  $yt$ -géodésique passerait par quatre sommets principaux, c'est impossible par la proposition 2.6. D'autre part,  $d_G(u, t) \notin \{a - 1, a + 1\}$ , sinon cela impliquerait la présence d'un cycle impair dans  $G$  qui est un cube partiel. Nous en déduisons que  $d_G(u, t) = a$  (voir figure 2.8).

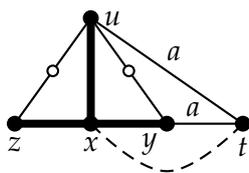


FIG. 2.8 – Si  $t$  est à distance  $a$  de  $y$ , alors il est à distance  $a$  de  $u$ .

Considérons une  $xt$ -géodésique. Elle ne passe pas par  $y$ , sinon  $y$  serait de type  $\mathcal{C}$  et l'arête  $uy$  serait pleine ; or nous savons que cette arête est subdivisée exactement une fois. Il s'en suit que  $d_G(x, t) \leq a$ . De plus, une telle géodésique est au moins longue de  $a - 1$ , sinon, il existerait une chaîne plus courte de  $y$  à  $t$  passant par  $x$ , or  $y \rightarrow t$  par hypothèse. Comme  $G$  ne contient pas de cycle impair,  $d_G(x, t) \neq a$ . Nous pouvons alors affirmer que  $d_G(x, t) = a - 1$ . Nous pouvons ajouter que  $x \rightarrow t$ . Dans le cas contraire, il existerait une  $yt$ -géodésique passant par quatre sommets principaux, contredisant la proposition 2.6. Ainsi, le sous-graphe  $\langle x, y, t, u \rangle$  est isométrique dans  $G$ . C'est donc un cube partiel et une subdivision de  $K_4$  qui n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  car l'arête  $xy$  est pleine. En conclusion, il existe

un sommet universel qui est forcément le sommet  $x$  ; l'arête  $xt$  est donc pleine et l'affirmation 2.1 est prouvée.

Considérons maintenant les types envisageables pour le sommet  $y$ .

- Le sommet  $y$  n'a pas le type  $\mathcal{C}$  sinon, l'arête  $uy$  serait pleine, or nous savons qu'elle est subdivisée exactement une fois.
- Supposons que le sommet  $y$  a le type  $\mathcal{I}$ , alors par définition, il existe un sommet  $v$  dans  $L$  tel que  $u \xrightarrow{y} v$ . Par la proposition 2.7, une  $xv$  géodésique est contenue dans le sous-graphe  $\langle x, y, v \rangle$ . Ainsi, le sous-graphe  $\langle u, x, y, v \rangle$  est isométrique dans  $G$ . C'est donc un cube partiel, en même temps qu'une subdivision de  $K_4$ . Comme il contient une arête pleine, il ne peut pas être isomorphe à  $S(K_4)$ . Il possède donc un sommet universel qui ne peut pas être  $u$  ou  $v$  puisque  $u \xrightarrow{y} v$ . Pour la même raison,  $x$  n'est pas universel. Enfin,  $y$  n'est pas universel puisque l'arête  $uy$  est subdivisée exactement une fois. Le sous-graphe  $\langle u, x, y, v \rangle$  n'est donc pas un cube partiel. Cette contradiction nous permet de conclure que le sommet  $y$  n'a pas le type  $\mathcal{I}$ .
- Supposons que le sommet  $y$  a le type  $\Lambda$ . Alors par définition, il existe deux sommets  $v$  et  $w$  dans  $L$  tels que  $v \xrightarrow{y} w$ . Par la proposition 2.7, une  $xv$ -géodésique (respectivement, une  $xw$ -géodésique) est contenue dans le sous-graphe  $\langle x, v, y \rangle$  (respectivement,  $\langle x, w, y \rangle$ ). Ainsi, le sous-graphe  $\langle x, v, w, y \rangle$  est une subdivision de  $K_4$  isométrique dans  $G$ . C'est donc un cube partiel. Il n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  car  $v \xrightarrow{y} w$ . Il admet donc un sommet universel. Ce sommet ne peut pas être  $v$  ou  $w$  pour la même raison. Cela ne peut pas être  $x$  non plus, sinon, les arêtes  $yu$  et  $yv$  seraient subdivisées et nous n'aurions pas  $v \xrightarrow{y} w$ . Enfin, si le sommet principal est  $y$ , alors il existe une chaîne de longueur 3 entre  $u$  et  $v$ . La distance entre ces deux sommets dans  $G$  est donc inférieure à 3. Si elle vaut exactement 3, il existe une  $uv$ -géodésique passant par 4 sommets principaux ce qui est impossible d'après la proposition 2.6. S'il existe une chaîne de longueur 2 entre  $u$  et  $v$ , alors  $G$  contient un cycle impair, et n'est pas biparti ce qui contredit nos hypothèses. La distance est alors égale à 1, contredisant l'appartenance de  $v$  à  $L$ . Nous pouvons donc conclure que  $y$  n'a pas le type  $\Lambda$ .
- Enfin, supposons que le sommet  $y$  a le type  $\mathcal{R}$ . Par définition, il existe un sommet  $v$  dans  $L$  et un sommet  $t$  dans  $K$  tel que  $t \xrightarrow{y} v$ . Ce sommet  $t$  est forcément différent de  $y$ . Mais il est aussi différent de  $z$  ; dans le cas contraire, une  $zv$ -géodésique passerait par quatre sommets principaux  $z, x, y$  puis  $v$ . De plus, si ce sommet  $t$  est également différent de  $x$ , nous sommes dans le cas de l'affirmation 2.1 et nous pouvons alors exhiber une  $tv$ -géodésique passant par les quatre sommets principaux  $t, x, y$  puis  $v$  (voir figure 2.9(a)). Finalement, nous pouvons supposer que  $t = x$ . Alors il est impossible que  $u \xrightarrow{y} v$ , sinon,  $y$  aurait le type  $\mathcal{I}$  déjà traité. De même la chaîne entre  $u$  et  $v$  ne passe pas par  $z$ . D'autre part, il est impossible que  $u \xrightarrow{x} v$  sinon, il existerait une  $uv$ -géodésique passant par quatre sommets principaux  $u, x, y, v$  (en effet,  $x \xrightarrow{y} v$  par hypothèse). Alors il existe

un sommet  $s$  dans  $K$  tel que  $u \xrightarrow{s} v$  (voir illustration figure 2.9(b)). Notons  $a$  la distance entre  $v$  et  $y$ , et  $b$  la distance entre  $u$  et  $v$ . Alors  $b \leq a + 1$ , sinon il existerait une  $uv$ -géodésique passant par  $y$  ce qui contredirait nos conclusions précédentes,  $y$  aurait le type  $\mathcal{I}$ . De plus,  $a - 1 \leq b$ , sinon il existerait une  $yv$ -géodésique passant par quatre sommets principaux  $y, u, s, v$ . Enfin, comme  $G$  est biparti, la seule possibilité est que  $b = a$ . Alors  $d_G(x, v) = a + 1$  et donc une  $xv$ -géodésique passe par les quatre sommets principaux  $x, u, s$  puis  $v$ . En vertu de la proposition 2.6 nous pouvons conclure que  $y$  n'a pas le type  $\mathcal{R}$ .

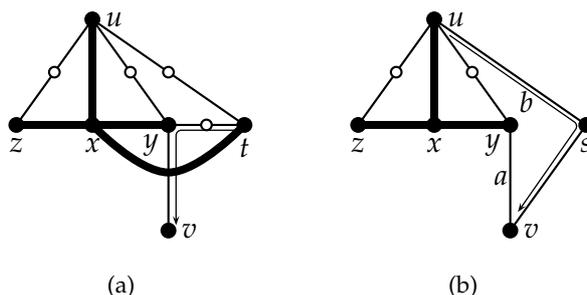


FIG. 2.9 – Le sommet  $x$  n'a pas le type  $\mathcal{R}$

En conclusion, le sommet  $y$  n'a aucun des types  $\mathcal{C}, \mathcal{I}, \mathcal{A}, \mathcal{R}$ . Ceci contredit la remarque 2.1. En conclusion, le sommet  $x$  ne peut pas avoir le type  $\mathcal{C}$ . Le lemme 2.1 est maintenant prouvé.  $\square$

### Passage à l'induction

Nous basons notre induction sur le nombre de sommets principaux  $n$  du graphe  $G$ . Considérons donc un graphe  $G$ , subdivision d'un graphe complet  $K_n$ , tel que  $n \geq 6$ . Supposons que  $G$  est un cube partiel et que le théorème est vérifié pour toutes les subdivisions de graphes complets  $K_m$ , où  $m < n$ .

Par la proposition 2.3, le cas d'un graphe  $G$  isomorphe à  $S(K_n)$  est vérifié. Nous supposons désormais que  $G$  n'est pas isomorphe à  $S(K_n)$ .

*Cas 1.* Il existe un sommet principal  $u$  dans  $G$  tel que  $G \setminus u$  est isométrique.

Le graphe  $G \setminus u$  est alors une subdivision du graphe complet  $K_{n-1}$ . De plus c'est un sous-graphe isométrique d'un cube partiel. Nous pouvons donc appliquer notre hypothèse d'induction. Le graphe  $G \setminus u$  est isomorphe à  $S(K_{n-1})$ , ou il contient un sommet universel.

Considérons tout d'abord le cas où  $G \setminus u$  est isomorphe à  $S(K_{n-1})$ .

- Supposons que  $u \rightarrow v$  pour tout sommet principal  $v$  dans  $G \setminus u$ . Comme  $G$  n'est pas isomorphe à  $S(K_n)$ , il existe un sommet  $v$  dans  $G \setminus u$  tel que l'arête  $uv$  n'est pas subdivisée exactement une fois. Soient  $y$  et  $z$  deux sommets principaux de  $G \setminus \{u, v\}$ . Alors le sous-graphe  $\langle u, v, y, z \rangle$  est isométrique dans  $G$ . C'est donc un cube partiel qui n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  puisque l'arête  $uv$  n'est pas subdivisée exactement une fois. Il admet donc un sommet universel qui ne peut être que le sommet  $u$  (voir figure 2.10(a)). Ainsi, les arêtes

$uy$ ,  $uz$  et  $uv$  sont pleines. Ceci est valable pour n'importe quelle paire de sommets  $y, z$  dans  $G \setminus u$ . Finalement, le graphe  $G$  admet  $u$  comme sommet universel et le théorème 2.3 est vérifié dans le cas présent.

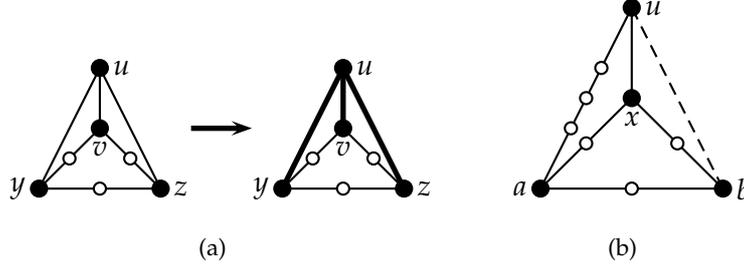


FIG. 2.10 – Cas où  $G \setminus u \simeq S(K_{n-1})$

- À l'inverse, supposons qu'il existe un sommet principal  $a$  dans  $G$  tel que  $u \not\rightarrow a$ . Soit  $x$  un sommet principal de  $G \setminus u$  minimisant la distance  $d_G(u, x)$ . Par cardinalité ( $n \geq 6$ ), il existe un sommet principal  $b$  distinct de  $a, x$  et  $u$ . Comme  $G \setminus u$  est isomorphe à  $S(K_{n-1})$ , nous pouvons affirmer que  $u \xrightarrow{x} a$ . De plus,  $u \rightarrow b$  ou  $u \xrightarrow{x} b$ . Ces quatre sommets principaux induisent donc un sous-graphe isométrique dans  $G$ . Il s'agit donc d'un cube partiel. Par hypothèse,  $u \not\rightarrow a$ , donc l'arête  $ua$  est subdivisée au moins trois fois (voir figure 2.10(b)). Ainsi, le sous-graphe n'a pas de sommet universel et n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$ . Ce n'est donc pas un graphe partiel. Par cette contradiction, nous pouvons conclure que ce cas n'apparaît pas.

Considérons maintenant le cas où  $G \setminus u$  admet un sommet universel  $x$ .

Montrons que  $x$  est également un sommet universel de  $G$ . Soient  $y$  et  $z$  deux sommets principaux de  $G \setminus u$  les plus proches de  $u$  et différents de  $x$ . Ils existent par la cardinalité  $n \geq 6$  des sommets principaux de  $G$ . Alors une  $uz$ -géodésique et une  $uy$ -géodésique sont contenues dans le sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$ . Il est donc isométrique dans  $G$  et c'est un cube partiel. Comme l'arête  $xz$  est pleine, il ne s'agit pas d'une copie isomorphe à  $S(K_4)$ . Le seul sommet universel possible est alors  $x$ . Nous pouvons conclure que  $ux$  est une arête pleine. Comme  $G$  est biparti, les arêtes partant de  $u$  vers d'autres sommets de  $G \setminus u$  sont subdivisées un nombre impair de fois. Le sommet  $x$  est donc universel dans  $G$  et le théorème 2.3 est valable pour ce cas précis.

*Cas 2. Pour tout sommet principal  $u$  de  $G$ ,  $G \setminus u$  n'est pas isométrique.*

Soit  $v_K$  un sommet principal de  $G$ . Par hypothèse,  $G \setminus v_K$  n'est pas isométrique dans  $G$ , donc il existe deux sommets principaux  $u$  et  $v_L$  tels que  $u \xrightarrow{v_K} v_L$ , et  $u \not\rightarrow v_L$ . Nous notons désormais  $K$  pour  $K_u$  et  $L$  pour  $L_u$ . Ces deux ensembles sont clairement non-vides puisque  $v_K \in K$  et  $v_L \in L$ .

### Lemme 2.2

*Aucune paire de sommets  $x, y$  dans  $K$  n'est telle que les arêtes  $ux$  et  $xy$  sont pleines.*

*Démonstration.* Pour une démonstration par l'absurde, supposons qu'une telle paire existe. Comme  $y$  est dans  $K$ , l'arête  $uy$  est une géodésique. Comme il existe une chaîne de  $u$  à  $y$  de longueur 2 passant par  $x$ , l'arête

$uy$  est subdivisée exactement une fois. Considérons alors les types possibles de  $y$ . D'après le lemme 2.1, nous savons que  $y$  n'a pas le type  $\mathcal{C}$ .

Le sommet  $y$  est de type  $\mathcal{I}$  : alors il existe un sommet  $b$  dans  $L$  tel que  $u \xrightarrow{y} b$ . La distance entre  $u$  et  $b$  est ainsi égale à  $d_G(y, b) + 2$ . Ainsi, la chaîne passant par  $u, x, y, b$  est également une géodésique passant par quatre sommets principaux. D'après la proposition 2.6, ceci entre en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle  $G$  est un cube partiel. Donc  $y$  n'a pas le type  $\mathcal{I}$ .

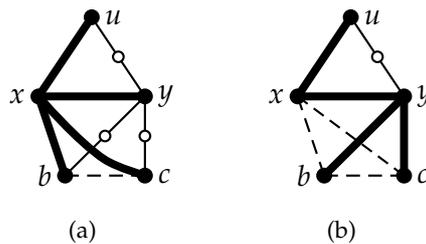


FIG. 2.11 – Cas où  $y$  est de type  $\Lambda$

Le sommet  $y$  est de type  $\Lambda$  : alors par définition, il existe deux sommets  $b$  et  $c$  dans  $L$  tels que  $b \xrightarrow{y} c$ . D'après la proposition 2.7, une  $xb$ -géodésique et une  $xc$ -géodésique sont contenues dans le sous-graphe  $\langle x, y, b, c \rangle$ . Ce sous-graphe est donc isométrique dans  $G$ , il s'agit donc d'un cube partiel. Il n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  puisque  $b \xrightarrow{y} c$ . Il doit alors contenir un sommet universel. Il ne peut pas s'agir de  $b$  ou  $c$ , car cela aboutirait à la présence d'un triangle. Si le sommet  $x$  est universel, alors les arêtes  $yb$  et  $yc$  sont toutes deux subdivisées au moins une fois, contredisant l'hypothèse selon laquelle  $b \xrightarrow{y} c$  (voir figure 2.11(a)). Si le sommet  $y$  est universel dans ce sous-graphe (voir figure 2.11(b)), alors la distance dans  $G$  entre  $u$  et  $b$  est d'au plus 3. Si cette distance vaut 3, il existe une  $ub$ -géodésique passant par  $u, x, y$  puis  $b$ . Si elle vaut 2, alors, le graphe  $G$  contient un cycle impair, or c'est un graphe biparti. Enfin, si cette distance vaut 1, nous aurions naturellement  $u \rightarrow b$  et  $b$  appartiendrait à l'ensemble  $K$ . Le sommet  $y$  ne peut donc pas avoir le type  $\Lambda$ .

Le sommet  $y$  est de type  $\mathcal{R}$  : alors par définition, il existe un sommet  $t$  dans  $K$  et un sommet  $b$  dans  $L$  tels que  $t \xrightarrow{y} b$ . Nous distinguons alors deux cas.

- Si  $t$  est le sommet  $x$ , alors nous notons  $l$  la distance entre  $y$  et  $b$ . Ainsi,  $d_G(x, b) = l + 1$  puisque  $x \xrightarrow{y} b$ . Aucune  $ub$ -géodésique ne passe par  $x$ , car elle passerait par quatre sommets principaux. De même, aucune  $ub$ -géodésique ne passe par  $y$ , car ce sommet serait alors du type  $\mathcal{I}$  déjà traité précédemment. Il existe donc un sommet  $z$  dans  $K$  différent de  $x$  et  $y$  tel que  $u \xrightarrow{z} b$  (voir figure 2.12). Notons  $p$  la distance entre  $u$  et  $b$ . Alors  $p > l$  sinon la chaîne passant successivement par  $x, u, z$  puis  $b$  serait une géodésique passant par quatre sommets principaux. De plus,  $p \leq l + 1$  sinon la chaîne passant par  $u, x, y$  puis  $b$  serait une géodésique passant par quatre sommets principaux. Ainsi, nous avons forcément l'égalité  $p = l + 1$



Chaque sommet  $v$  de  $L$  voit exactement un sommet de  $K$ .

*Démonstration.* Soit  $v$  un sommet de  $L$ . Montrons qu'il existe un unique sommet  $x$  de  $K$  tel que  $v \rightarrow x$ .

*Existence :* il suffit de considérer une  $uv$ -géodésique. Elle passe par un sommet  $x$  de  $K$  tel que  $u \xrightarrow{x} v$ . A fortiori,  $v \rightarrow x$ .

*Unicité :* pour une preuve par l'absurde, supposons que  $v$  voit deux sommets  $x_v$  et  $y_v$  dans  $K$ . Nous pouvons les choisir tels que  $u \xrightarrow{x_v} v$ . Considérons alors un quadruplet  $(a, u, x, y)$  tel que  $u \xrightarrow{x} a$  et  $y \rightarrow a$ , minimisant la somme  $d_G(u, x) + d_G(x, a) + d_G(a, y)$ .

### Affirmation 2.2

Le sous-graphe  $\langle u, a, x, y \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

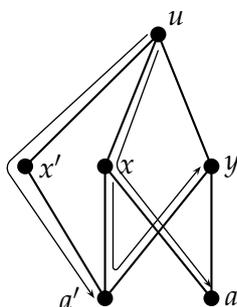


FIG. 2.14 – Le sous-graphe  $\langle u, a, x, y \rangle$  est isométrique

*Démonstration.* Supposons le contraire, alors il existe un sommet principal  $a'$  dans  $G$  différent de  $u$  et  $a$  tel que  $x \xrightarrow{a'} y$ . D'après le lemme 2.1,  $a'$  est un sommet de  $L$  sinon il serait de type  $\mathcal{C}$ . De plus,  $d_G(u, x) + d_G(x, a') + d_G(a', y) < d_G(u, x) + d_G(x, a) + d_G(a, y)$ . Comme le quadruplet  $(a, u, x, y)$  a été choisi de façon à minimiser cette quantité, cela signifie que le quadruplet  $(a', u, x, y)$  n'est pas de cette famille ; donc aucune  $ua'$ -géodésique ne passe par  $x$  ou  $y$ . Alors il existe un sommet principal  $x'$  dans  $K$  différent de  $x$  et  $y$  tel que  $u \xrightarrow{x'} a'$  (voir figure 2.14). Nous avons alors les conditions suivantes :  $u \xrightarrow{x'} a'$ ,  $a' \rightarrow y$  et  $d_G(u, x') + d_G(x', a') + d_G(a', y) < d_G(u, x) + d_G(x, a) + d_G(a, y)$ . Ceci contredit la minimalité de cette quantité pour le quadruplet  $(a, u, x, y)$ . L'affirmation 2.2 est ainsi prouvée.  $\square$

Le sous-graphe  $\langle u, a, x, y \rangle$  est donc un cube partiel. Comme  $u \not\rightarrow a$ , ce n'est pas une copie isomorphe de  $S(K_4)$ . Il admet donc un sommet universel qui peut être  $x$  ou  $y$ . Si  $x$  est universel, alors les arêtes  $ux$  et  $xy$  sont pleines. C'est impossible d'après le lemme 2.2. Le même raisonnement fonctionne si  $y$  est le sommet universel. Il est donc impossible pour le sommet  $v$  de voir deux sommets de  $K$ .

Ceci clôt la preuve de la proposition 2.8.  $\square$

Nous poursuivons en prouvant que  $K$  est en réalité un singleton.

Supposons au contraire qu'il existe deux sommets distincts  $x$  et  $y$  dans  $K$ . D'après la remarque 2.1 et le lemme 2.1, chacun doit avoir au moins un

type parmi  $\mathcal{R}, \mathcal{I}$  et  $\Lambda$ . Pour chacun de ces types, les sommets  $x$  et  $y$  voient au moins un sommet de  $L$  par définition. Notons  $a$  un sommet de  $L$  tel que  $x \rightarrow a$ . Puis considérons une  $ay$ -géodésique. D'après la proposition 2.8,  $a$  ne voit pas  $y$ . Ainsi il existe un sommet principal  $b$  tel que  $a \xrightarrow{b} y$ . Si  $b$  est le sommet  $x$ , alors le sous-graphe  $\langle a, y, u, x \rangle$  est isométrique. Il ne peut pas être une copie de  $S(K_4)$  car l'arête subdivisée  $ua$  n'est pas une géodésique ; de plus,  $x$  et  $y$  ne peuvent pas être des sommets universels d'après le lemme 2.2. Ainsi,  $b$  n'est pas le sommet  $x$ . D'après la proposition 2.8,  $b$  est alors un sommet de  $L$  et toujours d'après cette proposition, une  $ub$ -géodésique passe par  $y$ . Considérons alors un quadruplet  $(a, b, x, y)$  tel que  $x, y \in K$ ,  $a, b \in L$ ,  $u \xrightarrow{x} a$ ,  $u \xrightarrow{y} b$ ,  $a \xrightarrow{b} y$  et qui minimise la somme  $d_G(x, a) + d_G(a, b) + d_G(b, y)$ .

### Affirmation 2.3

*Le sous-graphe  $\langle u, a, b, x, y \rangle$  est isométrique dans  $G$ .*

*Démonstration.* Supposons que cette subdivision de  $K_5$  ne soit pas isométrique. D'après nos hypothèses, les seules géodésiques qui peuvent ne pas être contenue dans le sous-graphe sont les géodésiques reliant  $x$  à  $y$  et  $x$  à  $b$ . Considérons une  $xy$ -géodésique telle que  $x \xrightarrow{t} y$ . Alors  $t$  n'est pas un sommet de  $K$  sinon il aurait le type  $\mathcal{C}$  interdit par le lemme 2.1. De même,  $t$  n'est pas un sommet de  $L$  car il verrait alors deux sommets de  $K$ , contredisant la proposition 2.8. Alors forcément  $t$  est égal au sommet  $u$  et cette  $xy$ -géodésique est contenue dans le sous-graphe  $\langle u, a, b, x, y \rangle$ . Comme nous avons supposé que ce sous-graphe n'est pas isométrique, cela signifie qu'il ne contient aucune  $xb$ -géodésique. D'après la proposition 2.8,  $b$  voit un unique sommet de  $K$ . Il s'agit de  $y$ . Par conséquence, une  $xb$ -géodésique passe par un sommet  $a'$  dans  $L$ . Toujours d'après la même proposition,  $a'$  voit uniquement  $x$  comme sommet de  $K$ . La seule  $ua'$ -géodésique possible est donc la chaîne passant par  $x$ . Pour récapituler nous avons  $u \xrightarrow{x} a'$ ,  $u \xrightarrow{y} b$ ,  $b \xrightarrow{a'} x$  et  $d_G(y, b) + d_G(b, a') + d_G(a', x) < d_G(x, a) + d_G(a, b) + d_G(b, y)$ . Nous exhibons ainsi un quadruplet  $(b, a', y, x)$  contredisant la minimalité de la somme pour le quadruplet précédemment introduit. L'affirmation 2.3 est donc prouvée.  $\square$

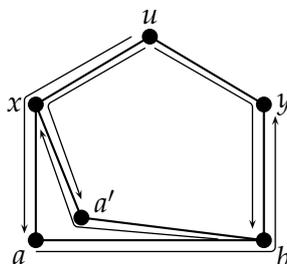


FIG. 2.15 – Le sous-graphe  $\langle u, a, b, x, y \rangle$  est isométrique

Ce sous-graphe est donc un cube partiel. Et comme le théorème 2.3 est valable pour les subdivisions de  $K_5$ , c'est une copie de  $S(K_5)$  ou il

admet un sommet universel. Comme l'arête subdivisée  $ua$  n'est pas une géodésique, ce n'est pas une copie isomorphe de  $S(K_5)$ . Il admet donc un sommet universel. Ce sommet ne peut pas être  $u$  qui ne voit pas le sommet  $a$ , ni  $a$  ou  $b$  qui ne voient pas  $u$ , ni  $x$  ou  $y$  car cela engendrerait une situation interdite par le lemme 2.2. Nous aboutissons donc à une absurdité. Nous pouvons ainsi conclure que  $|K| = 1$ .

Nous finissons alors de traiter le cas 2, comme  $K$  est un singleton,  $u$  ne voit qu'un seul autre sommet principal de  $G$ . Le graphe  $G \setminus u$  est donc isométrique dans  $G$ , contredisant notre hypothèse de départ. Le cas 2 est donc impossible.

Ceci conclut la preuve du théorème 2.3.

### 2.3.3 Implications diverses

Le théorème 2.3 permet ainsi de caractériser de façon très spécifique l'ensemble des subdivisions de cliques admettant un plongement isométrique dans un hypercube.

Entre autres choses, nous pouvons remarquer que nous sommes en mesure d'exhiber des cubes partiels contenant n'importe quel sous-graphe induit. Ce corollaire est déjà connu mais mérite d'être cité.

#### Corollaire 2.1

*Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et  $G'$  une subdivision impaire (chaque arête est subdivisée un nombre impair de fois) de  $G$ . Posons  $K$  le graphe obtenu de  $G'$  en ajoutant un sommet  $u$  relié à tous les sommets principaux de  $G'$ , alors  $K$  est un cube partiel.*

*Démonstration.* Notons  $D$  la longueur d'une arête la plus subdivisée dans  $G'$ .

Il suffit de compléter le graphe  $G'$  en une subdivision de  $K_n$  en ajoutant les arêtes manquantes et en les subdivisant un grand nombre de fois, par exemple  $2Dn + 1$  fois. Les distances entre les sommets ne sont pas changées. En ajoutant un sommet  $u$  universel, nous obtenons une subdivision de  $K_{n+1}$  qui est un cube partiel d'après le théorème 2.3. Nous pouvons alors retirer les arêtes auxiliaires que nous avons rajoutées précédemment, les distances sont conservées et le graphe  $K$  est un cube partiel.  $\square$

Il est ainsi possible de construire des cubes partiels admettant n'importe quel graphe arbitraire comme mineur. Une caractérisation par mineur exclu est donc inenvisageable. La propriété d'être un cube partiel n'étant pas conservé par l'opération de contraction d'arête ou de sommet, cette remarque n'est pas une réelle surprise.

Deux perspectives naturelles se présentent après cette étude. Nous pouvons au choix : plonger isométriquement les graphes dans d'autres types de structure, ou relâcher la condition d'isométrie. Durant ce doctorat, nous nous sommes intéressés aux deux pistes mais n'avons eu de résultats probants que pour la première.

## 2.4 DES HYPERCUBES AUX GRAPHES DE HAMMING

Dans la section précédente, nous avons exhibé une caractérisation structurelle des subdivisions de cliques qui se plongent isométriquement dans un hypercube. Nous nous proposons de voir dans quelle mesure nous pouvons étendre cette dernière aux plongements isométriques dans les graphes de Hamming.

### Définition 2.5

*Un graphe  $G$  est un graphe de Hamming partiel s'il admet un plongement isométrique dans un graphe de Hamming.*

Nous allons montrer qu'une subdivision non triviale d'un graphe complet qui se plonge isométriquement dans un graphe de Hamming est forcément un cube partiel.

De plus, nous généralisons également le résultat de Sylvain Gravier, Sandi Klavžar et Michel Mollard [41] sur les subdivisions de roue (voir théorème 2.4).

### 2.4.1 Propriétés générales

Nous revenons ici sur les résultats déjà connus qui nous seront utiles pour les preuves qui suivent.

Dans leur travaux concernant les subdivisions de roues isométriquement plongeables dans les hypercubes [41], Sylvain Gravier et coll. font usage d'une propriété très utile pour conclure à l'impossibilité d'un tel plongement.

**Proposition 2.9** (Gravier, Klavžar, Mollard [41])

*Soit  $G$  un graphe et  $K$  un sous-graphe isométrique de  $G$ , isomorphe à une subdivision d'un éventail  $F_k$  ( $k \geq 3$ ) telle qu'un rayon interne parmi  $uw_2, uw_3 \dots uw_{k-1}$  est subdivisé au moins une fois. Alors  $G$  n'est pas un cube partiel.*

Plus anciennement, Elke Wilkeit a prouvé en 1990 qu'un graphe de Hamming partiel est biparti si et seulement si c'est un cube partiel.

### Théorème 2.5 (Wilkeit [80])

*Soit  $G$  un graphe de Hamming partiel. Alors  $G$  est biparti si et seulement si  $G$  est un cube partiel.*

Dans [25], Victor Chepoi introduit en réalité une expansion un peu plus large que celle définie dans la première section de ce chapitre. Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  avec  $V = \{x^1, x^2 \dots x^m\}$ , choisissons une couverture de l'ensemble  $V$  par  $n$  ensembles  $W_1, W_2 \dots W_n$  tels que les conditions (i)-(iii) sont vérifiées pour tout couple d'entiers  $i, j$  entre 1 et  $n$  :

$$(i) \ W_i \cap W_j \neq \emptyset,$$

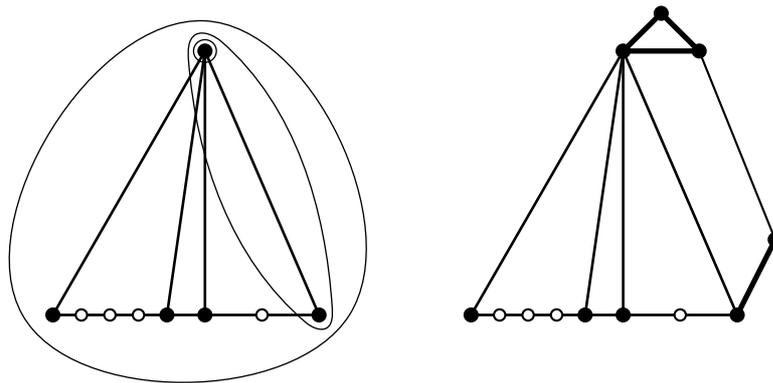


FIG. 2.16 – Expansion à trois sacs

- (ii) il n'y a pas d'arête entre  $W_i \setminus W_j$  et  $W_j \setminus W_i$ ,
- (iii) les sous-graphes induits par  $W_i, W_j$  et  $W_i \cup W_j$  sont isométriques dans  $G$ .

$W_1 \dots W_n$  est appelé une *couverture correcte* de  $G$ . Nous pouvons alors effectuer une expansion relative à cette couverture. Nous associons à chaque sommet  $x$  de  $V$  la suite  $(i_1 \dots i_k)$  de tous les indices  $i_j$  tels que  $x$  est dans  $W_{i_j}$ . Le graphe  $G' = (V', E')$  est appelé l'*expansion isométrique* de  $G$  relativement à la couverture s'il est obtenu de la façon suivante :

- si  $(i_1 \dots i_k)$  est la suite d'indices associée au sommet  $x^j$  de  $G$ , nous le remplaçons par  $k$  sommets distincts dans  $V'$ ,  $x_{i_1}^j \dots x_{i_k}^j$  ;
- si l'indice  $i$  appartient aux deux suites  $(i_1^x \dots i_{k_x}^x)$  et  $(i_1^y \dots i_{k_y}^y)$  associées aux sommets  $x$  et  $y$  tels que l'arête  $xy$  est dans  $E$ , alors nous ajoutons l'arête  $x_i y_i$  dans  $E'$ .

Un exemple est illustré sur la figure 2.16. Nous pouvons remarquer qu'en limitant la couverture à seulement deux ensembles, nous obtenons la définition de l'expansion isométrique définie dans la section 1. Il s'agit donc d'une généralisation qui permet d'énoncer la caractérisation suivante.

**Théorème 2.6** (Chepoi [25])

*Un graphe  $G$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si on peut l'obtenir par une succession d'expansions isométriques à partir du graphe à un seul sommet  $K_1$ .*

Nous utilisons également une notation pratique rapportée par Sergey V. Shpectorov [74] ; cette notation donne des étiquettes à chaque arête d'un graphe de Hamming partiel selon la direction qui lui est attribuée dans un plongement spécifique. Il s'agit en fait des classes d'équivalence de la relation  $\theta$ . Il est cependant parfois plus naturel d'utiliser ce formalisme.

Soit  $G$  un graphe de Hamming partiel, et  $\phi$  un plongement isométrique de  $G$  dans un graphe de Hamming  $H$ . L'*étiquetage naturel* de  $G$  relativement à  $\phi$  est obtenu comme suit. Soit  $e$  une arête reliant deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , alors la distance dans  $G$  entre  $u$  et  $v$  est égale à 1. Comme

le plongement est isométrique, la distance entre  $\phi(u)$  et  $\phi(c)$  dans  $H$  est la même, ces deux sommets sont donc voisins et diffèrent sur une et une seule coordonnée  $i$ . Nous étiquetons alors l'arête  $e$  par  $\text{dir}(e) = i$ . Par la suite,  $x^i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée d'un sommet  $x$  dans un graphe de Hamming.

Commençons par démontrer quelques propositions faciles.

**Proposition 2.10**

*Étant donné un graphe de Hamming partiel  $G$ , un plongement isométrique  $\phi$  et l'étiquetage naturel correspondant, si deux arêtes distinctes  $e$  et  $f$  de  $G$  sont sur une même chaîne géodésique dans  $G$ , alors  $\text{dir}(e) \neq \text{dir}(f)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de prouver qu'une géodésique dans un graphe de Hamming n'utilise pas deux fois la même direction. Pour une preuve par l'absurde, supposons l'existence d'une telle géodésique passant par les sommets  $x_1 \dots x_p$  avec  $\text{dir}(x_1x_2) = \text{dir}(x_{p-1}x_p) = i$ . Distinguons alors deux cas :

- si  $x_1^i = x_p^i$ , alors il existe une chaîne strictement plus courte passant par les sommets  $x_1, x'_3 \dots x'_{p-2}x_p$  où pour chaque  $j$  entre 3 et  $p-2$ ,  $x_j^i = x_1^i$  et  $x_j^k = x_j^k$  pour  $k \neq i$ .
- si  $x_1^i \neq x_p^i$ , alors il existe une chaîne strictement plus courte passant par les sommets  $x_1, x'_2 \dots x'_{p-2}x_p$  où pour chaque  $j$  entre 2 et  $p-2$ ,  $x_j^i = x_p^i$  et  $x_j^k = x_j^k$  pour  $k \neq i$ .

La chaîne n'est donc pas une géodésique, ceci contredit notre hypothèse. □

**Proposition 2.11**

*Étant donné un graphe de Hamming partiel  $G$ , un plongement isométrique  $\phi$ , l'étiquetage naturel correspondant et un cycle élémentaire  $C$  dans  $G$ , alors une étiquette apparaissant dans  $C$  apparaît au moins deux fois. De plus, si  $C$  est isométrique dans  $G$  et n'est pas isomorphe à  $C_3$ , alors l'étiquette apparaît exactement deux fois et le cycle est de longueur paire.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un cycle  $(x_0, x_1 \dots x_k, x_0)$  tel que  $\text{dir}(x_0x_1) = 1$  et qu'aucune autre arête n'est portée par la première direction. Alors  $x_0^1 \neq x_1^1$ , et pour tout arête  $x_i x_{i+1}$ ,  $x_i^1 = x_{i+1}^1$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ). De même,  $x_k^1 = x_0^1$ , cela implique que  $x_0^1 = x_1^1$  ce qui est une contradiction.

De plus, si le cycle est isométrique, différent de  $C_3$ , et qu'une étiquette apparaît trois fois, alors il existe une géodésique passant par deux arêtes de même étiquette ; c'est interdit par la proposition 2.10. Ainsi, chaque étiquette apparaît exactement deux fois et le cycle a forcément une taille paire. □

**Proposition 2.12**

*Soit  $G$  un graphe de Hamming partiel. Si  $G$  n'est pas biparti, alors il contient un triangle.*

*Démonstration.* Comme  $G$  n'est pas biparti, il contient un cycle impair. Considérons  $C$  un cycle impair de taille minimale. Le cycle  $C$  est isométrique dans  $G$  sinon, il existerait une chaîne le découpant en deux cycles plus petit dont un impair. D'après la proposition 2.11,  $C$  est de longueur pair ou isomorphe à  $C_3$ . Comme  $C$  est de longueur impaire par hypothèse, c'est un triangle.  $\square$

**Proposition 2.13**

Soit  $G$  une subdivision d'un éventail  $F_k$  pour un entier  $k \geq 3$ . Si  $G$  est un graphe de Hamming partiel, alors les rayons internes de l'éventail ne sont pas subdivisés.

*Démonstration.* Considérons tous les triangles de  $G$  (il peut n'y en avoir aucun), ils séparent l'éventail subdivisé en éventails subdivisés isométriques dans  $G$ . Soit  $i$  un entier entre 2 et  $k - 1$ , si l'arête  $uw_i$  de  $F_k$  est subdivisée, elle ne fait pas partie d'un triangle de  $G$ . Elle est donc une arête interne d'un des éventails subdivisés. Cet éventail est isométrique dans  $G$ , c'est donc un cube partiel. Comme il ne contient pas de triangle, il est biparti (proposition 2.12). D'après le théorème 2.5 c'est un cube partiel. Nous pouvons alors utiliser la proposition 2.9 et conclure que l'arête  $uw_i$  n'est pas subdivisée.  $\square$

**Proposition 2.14**

Le graphe  $K_4 - e$  (voir figure 2.17) n'est pas un graphe de Hamming partiel.

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons qu'il existe un plongement isométrique de ce graphe dans un graphe de Hamming. Les images des sommets  $x$  et  $y$  (référence à la figure 2.17) diffèrent sur une seule coordonnée, par exemple la première. On peut donc supposer que  $x^1 = 0$  et  $y^1 = 1$ . Par conséquent les sommets à distance 1 de  $x$  et de  $y$  sont également différents de ces sommets sur cette même coordonnée. Ainsi, les images de  $z$  et de  $t$  sont à distance 1 l'une de l'autre, or ces sommets ne sont pas reliés par une arête. C'est une contradiction.  $\square$

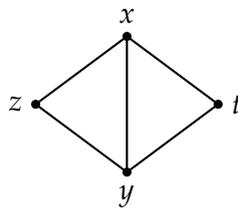


FIG. 2.17 – Le graphe  $K_4 - e$

Munis de ces outils, nous pouvons aborder le cas des graphes denses, les subdivisions de graphes complets.

### 2.4.2 Subdivisions de graphes complets

Bien que la famille de graphes dans laquelle nous nous autorisons de plonger isométriquement nos graphes soit bien plus grande que les simples hypercubes, le gain est minime. Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant.

**Théorème 2.7** (B., Gravier, Meslem [12])

*Soit  $G$  une subdivision d'une clique  $K_n$  pour  $n$  quelconque,  $G$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si  $G$  est un cube partiel ou  $G$  est isomorphe à  $K_n$ .*

*Démonstration.* La condition suffisante est triviale. Nous nous intéressons donc à la condition nécessaire.

Si le graphe  $G$  est biparti, d'après le théorème 2.5, c'est un cube partiel. Le théorème 2.7 est donc valide dans ce cas.

Supposons maintenant que le graphe  $G$  n'est pas biparti. Nous devons alors prouver qu'il est isomorphe à  $K_n$ . D'après la proposition 2.12,  $G$  contient au moins un triangle.

Considérons alors une clique maximale de  $G$  (au sens de l'inclusion) contenant ce triangle. Nous notons cette clique  $K$ . Toutes les arêtes de  $K$  sont forcément portées par la même direction. Ainsi, elles ont toute la même étiquette que l'on peut supposer égale à 1. Si  $K$  est isomorphe à  $K_n$ , alors il s'agit de tout le graphe  $G$  et le théorème est valide.

Supposons donc que  $K$  n'est pas une copie de  $K_n$ . Alors il existe un sommet principal de  $G$  en dehors de  $K$ . Notons  $u$  un sommet principal de  $G$  le plus proche de  $K$ , et  $x$  un sommet de  $K$  le plus proche de  $u$ .

S'il existe un sommet  $y$  de  $K$  distinct de  $x$  tel que l'arête  $uy$  n'est pas subdivisée, alors forcément l'arête  $ux$  est également pleine. Le sous-graphe  $\langle u, x, y \rangle$  est donc un triangle. Ainsi, les trois arêtes sont portées par la même direction et ont la même étiquette. Comme  $\text{dir}(xy) = 1$ , nous en déduisons que  $\text{dir}(ux) = 1$  et  $u$  est donc à distance 1 de tous les sommets de  $K$ . C'est une contradiction puisque  $K$  a été choisie maximale.

Nous pouvons alors considérer que pour n'importe quel sommet  $y$  de  $K$  distinct de  $x$ , l'arête  $uy$  est subdivisée au moins une fois.

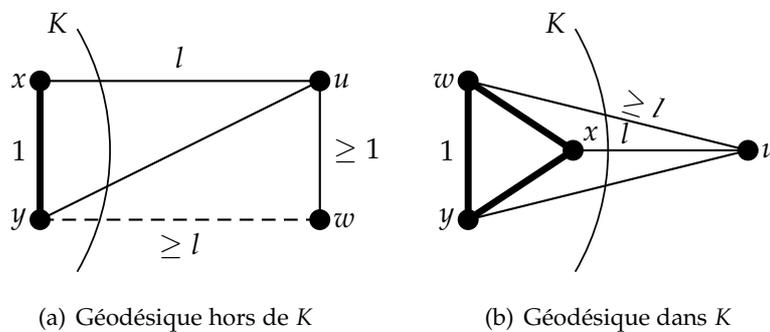


FIG. 2.18 – Étude de cas.

**Affirmation 2.4**

Pour tout sommet  $y$  dans  $K$  distinct de  $x$ , le sous-graphe  $\langle u, x, y \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

*Démonstration.* Pour une preuve par l'absurde, supposons qu'un sommet  $y$  existe tel que  $\langle u, x, y \rangle$  n'est pas isométrique. Comme  $ux$  est la chaîne la plus courte entre  $u$  et  $K$ , c'est forcément une géodésique. De plus,  $xy$  est une arête pleine. La seule possibilité est donc qu'aucune  $uy$  géodésique n'est contenue dans  $\langle u, x, y \rangle$ . Notons  $l$  la distance entre  $u$  et  $x$  et considérons une  $uy$ -géodésique elle doit être de longueur strictement inférieure à  $l + 1$ .

- *Cas 1* : si elle passe par un sommet principal  $w \notin K$  (voir figure 2.18(a)), comme  $u$  est un sommet le plus proche de  $K$ , l'arête  $wy$  est au moins de longueur  $l$ . De plus, la distance entre  $u$  et  $w$  est au moins 1. Cette géodésique est donc de longueur au moins  $l + 1$ , or il existe déjà une chaîne de cette longueur dans  $\langle u, x, y \rangle$ , c'est donc une contradiction.
- *Cas 2* : si elle passe par un sommet  $w \in K$  (voir figure 2.18(b)), comme  $x$  est un sommet le plus proche de  $u$ , l'arête  $wu$  est au moins de longueur  $l$ . Ainsi, cette géodésique a une longueur supérieure ou égale à  $l + 1$  ce qui est encore une contradiction.

L'affirmation 2.4 est donc prouvée. □

Considérons maintenant deux sommets de  $K$  distincts de  $x$ , et nommons-les  $y$  et  $w$ . Ils existent puisque  $|K| \geq 3$ . D'après l'étude précédente, les arêtes  $ux$  et  $uw$  sont subdivisées au moins une fois chacune et les sous-graphes  $\langle u, x, y \rangle$  et  $\langle u, x, w \rangle$  sont isométriques dans  $G$ . Ce sont des cycles, qui ne peuvent pas être de longueur 3. D'après la proposition 2.11 ils sont donc de longueurs paires et les étiquettes apparaissent exactement deux fois. Considérons alors le sous-graphe  $\langle u, x, y, w \rangle$  (voir figure 2.19). Il est clairement isométrique dans  $G$ .

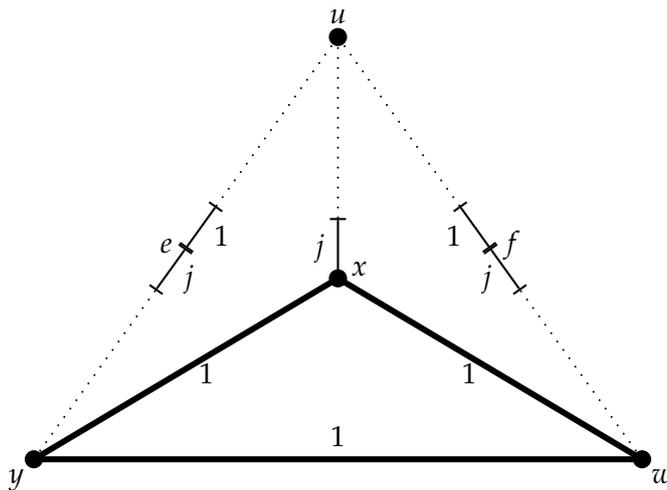


FIG. 2.19 – Le sous-graphe  $\langle x, y, u, w \rangle$

En considérant le cycle extérieur  $\langle u, y, w \rangle$ , nous pouvons affirmer d'après la proposition 2.11 qu'il existe une arête étiquetée 1 le long de

la chaîne entre  $w$  et  $y$  passant par  $u$ . Nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il s'agit d'une arête entre  $u$  et  $y$ . Comme le cycle  $\langle u, x, y \rangle$  est isométrique et contient déjà deux arêtes étiquetées avec la direction  $\mathbf{1}$ , l'étiquette  $\mathbf{1}$  n'apparaît pas une autre fois sur ce cycle. Ainsi, aucune arête entre  $u$  et  $x$  n'est étiquetée  $\mathbf{1}$ . Concentrons-nous alors sur le cycle  $\langle u, x, w \rangle$ . Comme l'arête  $xw$  est dans la direction  $\mathbf{1}$ , il existe une autre arête étiquetée de la même façon. Cette arête ne peut pas être entre  $u$  et  $x$ . Il existe donc une arête entre  $u$  et  $w$  étiquetée  $\mathbf{1}$ .

Notons  $j$  l'étiquette de la première arête entre  $x$  et  $u$ . Dans un cycle qui est un cube partiel, les arêtes de même étiquette se font face. Ainsi, les arêtes opposées dans  $\langle u, x, w \rangle$  et  $\langle u, x, y \rangle$  sont étiquetées de la même façon. Notons  $e$  et  $f$  les sommets opposés à  $x$  dans ces deux cycles. N'importe quelle chaîne entre  $e$  et  $f$  passe par deux arêtes qui ont la même étiquette. C'est absurde, car une  $ef$ -géodésique n'a pas cette propriété.

Nous concluons alors que ce cas n'a pas lieu d'être. Le graphe complet maximal est donc exactement  $K_n$ . Le théorème 2.7 est prouvé.  $\square$

Il suffit alors d'utiliser le théorème 2.3 de la section précédente pour obtenir le corollaire suivant.

#### Corollaire 2.2

*Soit  $G$  une subdivision d'une clique  $K_n$  ( $n > 3$ ). Le graphe  $G$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si il est isomorphe à  $K_n$  ou  $S(K_n)$ , ou s'il est biparti et admet un sommet universel.*

#### 2.4.3 Subdivisions de roues

L'étude des roues est plus technique en ce sens qu'elle requiert l'étude de cas plus particuliers. Nous pouvons cependant écarter le cas de la roue à 3 rayons  $W_3$  qui est isomorphe à  $K_4$  traité précédemment. Concentrons-nous plutôt sur les subdivisions de roues  $W_n$  telles que  $n \geq 4$ . Le théorème est le suivant.

#### **Théorème 2.8** (B., Gravier, Meslem [12])

*Soit  $W$  une subdivision de  $W_n$  ( $n \geq 4$ ). Alors  $W$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si :*

- (i) les rayons de  $W_n$  ne sont pas subdivisés,*
- (ii) si les autres arêtes sont subdivisées, elle le sont un nombre impair de fois,*
- (iii) deux arêtes extérieures non-subdivisées ne sont pas adjacentes,*
- (iv) si  $n = 4$ , alors  $W$  contient au plus un triangle.*

#### Condition nécessaire

Considérons  $W$ , une subdivision de  $W_n$  ( $n \geq 4$ ) isométriquement plongeable dans un graphe de Hamming. Si  $W$  est un graphe biparti, alors c'est

un cube partiel d'après le théorème 2.5. Nous pouvons alors utiliser le théorème 2.4 pour vérifier les conditions (i)-(iv).

Dans le cas où  $W$  n'est pas un graphe biparti, nous utilisons le lemme suivant.

**Lemme 2.3**

*Si deux rayons  $uw_i$  et  $uw_j$  de la roue ne sont pas subdivisés avec  $|i - j| \not\equiv 1 \pmod{k}$  (ils ne sont pas consécutifs), alors aucun rayon de la roue n'est subdivisé.*

*Démonstration.* Nous pouvons considérer que  $i = 1$  sans perte de généralité, et donc  $j \notin \{2, k\}$ . Alors  $\langle u, w_1, w_2 \dots w_j \rangle$  et  $\langle u, w_i, w_{i+1} \dots w_k, w_1 \rangle$  sont deux sous-graphes isométriques. Ce sont donc des graphes de Hamming partiels. De plus, ce sont tous deux des subdivisions d'éventails. D'après la proposition 2.13, aucun de leurs rayons internes n'est subdivisé. Nous concluons qu'aucun rayon de la roue n'est subdivisé.  $\square$

D'après la proposition 2.12, comme  $W$  n'est pas un graphe biparti, il contient un triangle. Un tel triangle ne peut être obtenu que si trois arêtes  $uw_i$ ,  $uw_{i+1}$  et  $w_iw_{i+1}$  ne sont pas subdivisées. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ces sommets sont  $u, w_1$  et  $w_2$ . Nous distinguons alors deux cas selon le nombre de rayons  $n$ .

**Cas 1 :**  $n \geq 5$ . Considérons une  $w_1w_4$ -géodésique. Elle est contenue dans un des deux sous-éventails,  $\langle u, w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ , ou  $\langle u, w_1, w_n, w_{n-1} \dots w_5, w_4 \rangle$ . Dans les deux cas, cela implique que le sous-éventail considéré est isométrique dans  $W$  et donc que c'est un graphe de Hamming partiel. D'après la proposition 2.13, le rayon  $uw_3$  ou le rayon  $uw_5$  n'est pas subdivisé. Ainsi nous obtenons un couple de rayon ( $uw_1$  et  $uw_3$ , ou  $uw_2$  et  $uw_5$ ) qui ne sont pas subdivisés. D'après le lemme 2.3, aucun rayon de  $W$  n'est subdivisé. La condition (i) est alors vérifiée. Cela implique entre autre que n'importe quel cycle  $\langle u, w_i, w_{i+1} \rangle$  ( $i + 1$  est considéré modulo  $n$ ) est isométrique dans  $W$ . Ce sont donc des graphes partiels de Hamming qui d'après la proposition 2.11 sont des cycles pairs ou des triangles. La condition (ii) est ainsi vérifiée. Il est enfin facile de vérifier que deux triangles ne peuvent partager une arête, ils induiraient un sous-graphe isométrique isomorphe à  $K_4 - e$ , contredisant la proposition 2.14. La condition (iii) est donc prouvée et la condition (iv) n'a pas besoin d'être prouvée dans le cas où  $n \geq 5$ .

**Cas 2 :**  $n = 4$ . Si une  $w_1w_3$ -géodésique (respectivement  $w_2w_4$ -géodésique) est contenue dans  $\langle u, w_1, w_4, w_3 \rangle$  (respectivement  $\langle u, w_2, w_3, w_4 \rangle$ ), la preuve précédente du cas où  $n \geq 5$  est valide et les trois conditions (i)-(iii) sont vérifiées.

Le cas restant correspond à celui où l'unique  $w_1w_3$ -géodésique passe par  $w_2$  et l'unique  $w_2w_4$  géodésique passe par  $w_1$ . Nous allons prouver que ce cas est impossible par l'absurde. Supposons donc une telle subdivision de  $W_4$ . Nous pouvons considérer un étiquetage naturel des arêtes de  $W$ . Les trois arêtes non-subdivisées  $uw_1, uw_2$  et  $w_1w_2$  font partie de la même

clique et portent donc la même étiquette 1. Intéressons-nous au cycle passant par  $w_1, w_2, w_3$  puis  $w_4$ . D'après la proposition 2.11, l'étiquette 1 est répétée au moins une autre fois sur ce cycle. Mais comme la chaîne de  $w_1$  à  $w_3$  passant par  $w_2$  est une géodésique, elle n'y apparaît pas. De même, elle n'apparaît pas entre  $w_1$  et  $w_4$ . Ainsi, il existe une arête  $ab$  entre  $w_3$  et  $w_4$  telle que  $\text{dir}(ab) = 1$ . En considérant les cycles  $\langle u, w_1, w_4 \rangle$  et  $\langle u, w_2, w_3 \rangle$ , nous pouvons affirmer de même qu'il existe deux arêtes  $cd$  entre  $w_4$  et  $u$ , et  $ef$  entre  $u$  et  $w_3$  telles que  $\text{dir}(cd) = \text{dir}(ef) = 1$  (voir figure 2.20(a) pour les notations).

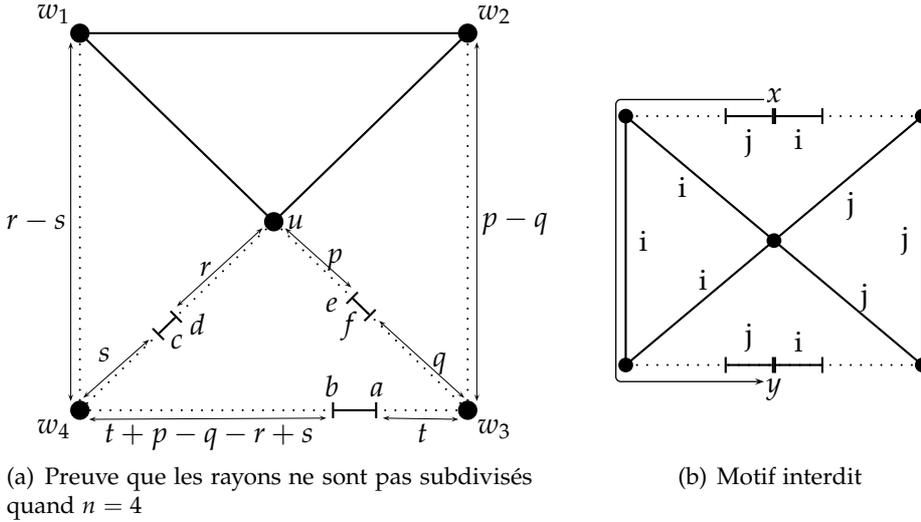


FIG. 2.20 – Étude de la roue à 4 rayons  $W_4$

Comme aucune géodésique ne peut passer par deux arêtes de même étiquette, les cycles  $\langle u, w_1, w_4 \rangle$ ,  $\langle u, w_2, w_3 \rangle$  et  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$  sont isométriques dans  $W$ . Le cycle extérieur ne peut pas être triangle (il est de longueur au moins 4). Les deux autres cycles non plus car ils induiraient avec  $\langle u, w_1, w_2 \rangle$  une copie de  $K_4 - e$  isométrique dans  $W$ . Alors d'après la proposition 2.11, ce sont des cycles de longueurs paires et les arêtes de même étiquette sont opposées. Notons  $p$  la distance entre  $u$  et  $e$ ,  $q$  la distance entre  $f$  et  $w_3$ ,  $r$  la distance entre  $u$  et  $d$ ,  $s$  la distance entre  $c$  et  $w_4$  et  $t$  la distance entre  $w_3$  et  $a$  (se référer à la figure 2.20(a)). Alors forcément, le cycle  $\langle u, w_2, w_3 \rangle$  est de longueur  $2p + 2$ , de même le cycle  $\langle u, w_1, w_4 \rangle$  est de longueur  $2r + 2$ . Enfin, le cycle extérieur est de longueur  $2(t + p - q) + 2$ .

Considérons une  $ad$ -géodésique. Afin de ne pas passer par deux arêtes étiquetées 1, elle passe par  $w_3, w_2$  puis  $u$  (la chaîne passant de  $w_3$  directement à  $u$  est plus long). Elle est donc de longueur  $r + t + p - q + 1$ . De plus, en considérant le cycle  $\langle u, w_1, w_4 \rangle$ , nous savons que  $2s + 1 < 2r$ . La chaîne de  $a$  à  $d$  passant par  $w_4$  est de longueur

$$\begin{aligned} 1 + t + p - q - r + s + s + 1 &= 1 + t + p - q - r + (2s + 1) \\ &< 1 + t + p - q - r + 2r \\ &< 1 + t + p - q + r. \end{aligned}$$

Cette chaîne est donc plus courte que la géodésique. C'est une contra-

diction. Le cas considéré n'intervient donc pas, les conditions (i)-(iii) sont donc toujours vérifiées.

Nous devons encore prouver que la condition (iv) est vérifiée. Pour une démonstration par l'absurde, supposons que  $W$  contient deux triangles. Puisque la condition (ii) est vérifiée, ils sont nécessairement opposés (voir figure 2.20(b)). Chaque triangle est inclus dans une clique du graphe de Hamming dans lequel  $W$  se plonge. Les étiquettes sont alors  $i$  et  $j$  respectivement. Les deux cycles passant par  $u$  et les chaînes en points de la figure 2.20(b) sont isométriques dans  $G$ . De plus, ce ne sont pas des triangles, ils sont donc de longueurs paires et les étiquettes sont portées par des couples d'arêtes opposées. Notons  $x$  et  $y$  les sommets opposés à  $u$ . Ils sont tous deux entourés par des arêtes étiquetées  $i$  et  $j$ . Il suffit alors de remarquer que n'importe quelle chaîne entre  $x$  et  $y$  doit passer par deux arêtes de même étiquette, ce qui est une absurdité. La condition (iv) est donc vérifiée.

Nous avons fini de prouver la condition nécessaire.

### Condition suffisante

#### Lemme 2.4

*Soit  $W$  une subdivision d'une roue  $W_n$  dont les rayons ne sont pas subdivisés telle que  $W$  est un graphe de Hamming partiel. Si une des arêtes extérieures  $w_i w_{i+1}$  est subdivisée un nombre impair de fois, alors le graphe  $W'$  obtenu en ajoutant deux sommets de subdivision sur l'arête  $w_i w_{i+1}$  est aussi un graphe de Hamming partiel.*

*Démonstration.* Notons  $w_i = x_1, x_2 \dots w_{2k+1} = w_{i+1}$  les sommets le long de l'arête subdivisée. Notons  $G_1$  le sous-graphe de  $W$  induit par les sommets  $x_1, x_2 \dots x_{k+2}$  et  $G_2$  le sous-graphe induit par les autres sommets de  $W$ ,  $x_1$  et  $x_{k+2}$ . Comme les rayons de  $W$  ne sont pas subdivisés, ces deux sous-graphes sont isométriques dans  $W$ . De plus, leur intersection est non-vidée et il n'y a pas d'arête entre  $G_1 \setminus G_2$  et  $G_2 \setminus G_1$ . Nous pouvons alors effectuer une expansion relativement à cette couverture propre. Nous obtenons alors le graphe  $W'$  de l'énoncé. D'après le théorème 2.2, le lemme est prouvé.  $\square$

D'après ce lemme, il suffit de prouver la condition suffisante pour les subdivisions de roues telles que les arêtes extérieures sont subdivisées 0 ou 1 fois.

Nous utiliserons le lemme suivant qui traite des éventails.

#### Lemme 2.5

*Soit  $G$  un éventail subdivisé vérifiant les propriétés (i)-(iii) :*

- (i) les rayons ne sont pas subdivisés,*
- (ii) les arêtes de la chaîne sont subdivisées 0 ou 1 fois,*
- (iii) aucune paire de triangles ne partage une arête.*

*Alors  $G$  est un graphe de Hamming partiel.*

*Démonstration.* Le résultat est aisément vérifié pour les subdivisions de  $F_1$  et  $F_2$ .

Pour une démonstration par l'absurde, considérons un contre-exemple minimal (au sens du nombre de rayons)  $G$  à  $k$  rayons. Intéressons-nous au sous-graphe  $\langle u, w_{k-1}, w_k \rangle$  (possible car  $k > 1$ ).

- Si ce sous-graphe n'est pas un triangle, alors l'arête  $w_{k-1}w_k$  est subdivisée une fois. Considérons la subdivision d'éventail  $G' = \langle u, w_1 \dots w_{k-1} \rangle$ . Comme  $G$  a été choisi minimal,  $G'$  est un graphe de Hamming partiel. Or  $G$  est obtenu de  $G'$  par une expansion relativement à la couverture propre  $W_1 = \{u, w_{k-1}\}$  et  $W_2 = V(G')$ . D'après le théorème 2.2,  $G$  est un graphe de Hamming partiel. C'est une contradiction.
- Si ce sous-graphe est un triangle. Comme  $K_3$  est un graphe de Hamming partiel, nous savons que  $k > 2$ . De plus, comme deux triangles ne peuvent pas être adjacents, l'arête  $w_{k-2}w_{k-1}$  est subdivisée 1 fois. Le graphe  $G' = \langle u, w_1 \dots w_{k-2} \rangle$  est un graphe de Hamming partiel car  $G$  a été choisi minimal. Posons  $W_1 = \{u\}$ ,  $W_2 = \{u, w_{k-2}\}$  et  $W_3 = V(G')$ . C'est une couverture correcte, et l'expansion de  $G'$  relativement à cette couverture résulte en le graphe  $G$ . D'après le théorème 2.6,  $G$  est un graphe de Hamming partiel, ce qui contredit nos hypothèses.

Le lemme est ainsi prouvé.  $\square$

Considérons  $W$  une subdivision d'une roue  $W_n$  ( $n \geq 4$ ) vérifiant les conditions (i)-(iv) du théorème 2.8 et telle que les arêtes extérieures sont subdivisées 0 ou 1 fois. Nous distinguons deux cas.

*Un rayon  $uw_i$  ne fait pas partie d'un triangle.* Alors les arêtes  $w_iw_{i+1}$  et  $w_{i-1}w_i$  sont toutes deux subdivisées une fois. Posons  $G = \langle u, w_{i+1} \dots w_n, w_1 \dots w_{i-1} \rangle$ . C'est un éventail subdivisé. Comme  $W$  vérifie les conditions (i)-(iii) du théorème 2.8,  $G$  vérifie les conditions (i)-(iii) du lemme 2.5. C'est donc un graphe de Hamming partiel. Posons  $W_1 = \{u, w_{i-1}, w_{i+1}\}$  et  $W_2 = V(G)$ . C'est une couverture propre de  $G$ . En appliquant une expansion relativement à cette dernière, nous obtenons le graphe  $W$ . D'après le théorème 2.2,  $W$  est un graphe de Hamming partiel.

*Tout rayon  $uw_i$  fait partie d'un triangle.* Alors d'après la condition (iv),  $n \geq 5$ . Considérons un triangle  $\langle u, w_i, w_{i+1} \rangle$ . Les arêtes  $w_{i-1}w_i$  et  $w_{i+1}w_{i+2}$  sont toutes deux subdivisées une fois (sinon deux triangles seraient adjacents). Posons  $G = \langle u, w_{i+2} \dots w_n, w_1 \dots w_{i-1} \rangle$ . Similairement au paragraphe précédent, nous pouvons affirmer en vertu du lemme 2.5 que  $G$  est un graphe de Hamming partiel. Posons  $W_1 = \{u, w_{i-1}\}$ ,  $W_2 = \{u, w_{i+2}\}$  et  $W_3 = V(G)$ . C'est une couverture correcte de  $G$  (comme  $n \geq 5$ ,  $w_{i-1}$  et  $w_{i+2}$  ne sont pas voisins dans  $W$  de sorte qu'il n'y a pas d'arête entre  $W_1 \setminus W_2$  et  $W_2 \setminus W_1$ ). L'expansion relative à cette couverture résulte en  $W$ . D'après le théorème 2.6, c'est un graphe de Hamming partiel.

Ceci termine la preuve du théorème 2.8.

## 2.5 LA COURTE VIE D'UNE CONJECTURE

Il nous est apparu durant nos recherches autour des plongements isométriques dans les hypercubes qu'un argument central revenait

régulièrement comme pilier de nos preuves. Il s'agissait du fait qu'aucune subdivision de  $K_{2,3}$  ne peut être plongée isométriquement dans un hypercube. Ce graphe nous semblait donc être un candidat pour une caractérisation esthétique des cubes partiels par sous-graphes isométriques interdits. Pouvait-il être seul ?

Il s'avère que non.

**Proposition 2.15** (B. [6])

*Il existe un graphe biparti qui ne contient aucune subdivision de  $K_{2,3}$  comme sous-graphe isométrique et qui n'est pas un cube partiel.*

*Démonstration.* Nous allons montrer que le graphe  $G$  représenté sur la figure 2.21 est un tel graphe.

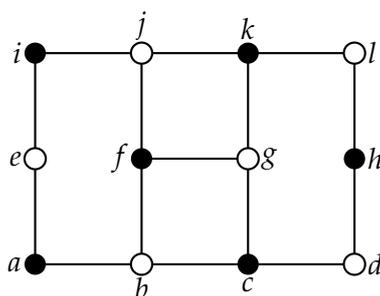


FIG. 2.21 – Contre-exemple

Le coloriage des sommets en noir et en blanc nous permet d'affirmer que ce graphe est bien biparti.

Considérons les arêtes  $e_1 = ae$ ,  $e_2 = fj$  et  $e_3 = dh$ . En calculant les distances concernées, entre les extrémités de ces arêtes, nous obtenons les relations suivantes :  $e_1\theta e_2$  et  $e_2\theta e_3$  mais  $e_1$  n'est pas en  $\theta$ -relation avec  $e_3$ . Ainsi, la relation  $\theta$  n'est pas transitive. D'après le théorème 2.1,  $G$  n'est pas un cube partiel.

Il suffit alors de prouver que  $G$  ne contient pas une subdivision de  $K_{2,3}$  comme sous-graphe isométrique. Si tel était le cas, il existerait 2 sommets  $v_1$  et  $v_2$  de degré au moins 3 et trois chaînes intérieurement disjointes les reliant tels que chacun d'eux soit de longueur au moins 2 et que le tout forme un sous-graphe isométrique.

Comme ils sont de degré au moins 3, les sommets  $v_1$  et  $v_2$  doivent être choisis parmi  $\{b, c, f, g, j, k\}$ . Comme  $d_G(v_1, v_2) \geq 2$ , ils ne peuvent pas être tous deux choisis dans  $\{f, g\}$ . Par des symétries évidentes, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $v_1 = j$ . Il reste alors trois possibilités pour  $v_2$ , qui sont  $g, b$  et  $c$ .

**Cas I.** Si  $v_2 = g$ , comme  $j$  et  $g$  sont tous deux de degré 3, tous leurs voisins font partie de la subdivision de  $K_{2,3}$  (voir figure 2.22(a)). Cela donne deux chaînes  $jfg$  et  $jk g$ . La troisième chaîne doit passer par  $i$  et  $c$ , cela implique qu'il passe par  $b$ . Ainsi, le sous graphe n'est pas isométrique car  $b$  est à distance 1 de  $f$  dans  $G$ .

**Cas II.** Si  $v_2 = b$ , comme  $j$  et  $b$  sont tous deux de degré 3, tous leurs voisins font partie de la subdivision de  $K_{2,3}$  (voir figure 2.22(b)). Cepen-

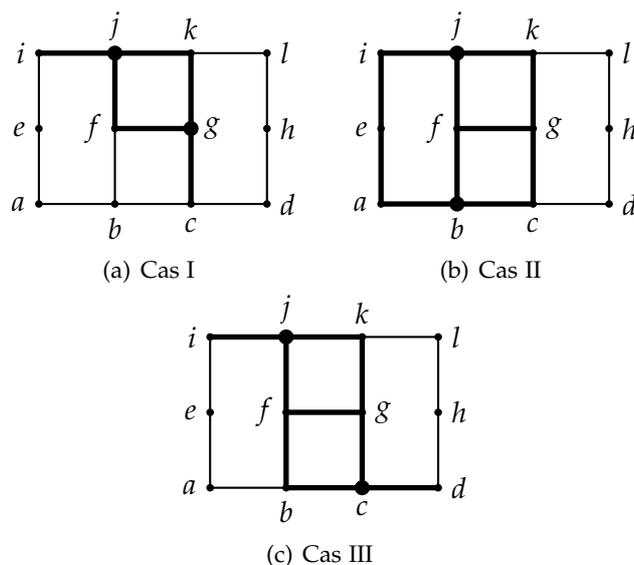


FIG. 2.22 – Étude de cas

nant, la clôture isométrique de  $\{a, b, c, f, i, j, k\}$  est  $\{ab, b, c, e, f, g, g, i, j, k\}$  qui ne peut pas être un sous-graphe d'une subdivision de  $K_{2,3}$ .

**Cas III.** Si  $v_2 = c$ , comme  $j$  et  $c$  sont tous deux de degré 3, tous leurs voisins font partie de la subdivision de  $K_{2,3}$  (voir figure 2.22(c)). Cependant, la clôture isométrique de  $\{b, c, d, f, g, i, j, k\}$  est lui-même et ne peut pas être un sous-graphe d'une subdivision de  $K_{2,3}$ .

Le graphe  $G$  est donc un contre-exemple valide. □

## CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons exhibé une caractérisation structurelle des subdivisions de cliques qui sont des cubes partiels. Nous en avons déduit une caractérisation similaire pour les graphes de Hamming partiels. Il est à noter que nous avons obtenu également des résultats sur les subdivisions d'enveloppes dans [11]. Plusieurs perspectives s'ouvrent à partir de ces résultats. Nous en donnons trois ci-après.

**Une caractérisation par motifs interdits.** Nous savons qu'un graphe quelconque peut être un mineur d'un cube partiel. Il semble donc plus judicieux de s'orienter vers la détermination des sous-graphes isométriques interdits. Notons  $\mathcal{F}$  la famille des graphes bipartis qui ne sont pas des graphes partiels. Notons  $\tilde{\mathcal{F}}$  l'ensemble des graphes de  $\mathcal{F}$  minimaux au sens des sous-graphes isométriques.

L'étude de la troisième partie de ce chapitre nous permet d'affirmer que  $K_{2,3}$  est un élément de  $\tilde{\mathcal{F}}$  et qu'il n'est pas le seul.

### Perspective 2.1

*La famille  $\tilde{\mathcal{F}}$  est-elle finie ?*

*Si  $\tilde{\mathcal{F}}$  est infinie, peut-on en trouver une caractérisation satisfaisante ?*

Une caractérisation en termes de sous-espaces isométriques interdits a déjà été prouvée par Robert L. Roth et Peter M. Winkler [71] en 1986. L'interdiction de sous-graphes isométriques est légèrement différente et pourrait apporter de nouveaux résultats.

**Les graphes  $\ell_1$ .** Dans ses travaux de 1993, Sergey V. Shpectorov [75] introduit la notion de *graphe  $\ell_1$* . Il s'agit des graphes  $G = (V, E)$  tels que l'espace métrique  $(V, d_G)$  est isométriquement plongeable dans  $(\mathbb{R}^n, \ell_1)$ , où  $n$  est un entier,  $d_G$  la métrique associée au graphe  $G$  et  $\ell_1$  la métrique de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\ell_1(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ .

Il est clair que les cubes partiels sont des graphes  $\ell_1$ . Si  $G$  se plonge isométriquement dans  $Q_n$ , alors on peut le plonger isométriquement dans  $(\mathbb{R}^n, \ell_1)$ . Il suffit de placer les sommets de  $G$  sur les points dont les coordonnées sont l'étiquette de l'image du sommet dans l'hypercube de dimension  $n$ .

Ces graphes ont depuis fait l'objet de recherches poussées, entre autre par Michel Deza, Viatcheslav Grishukhin et Mikhail Shtogrin [29].

En particulier, les *demi-cubes* sont les graphes  $G$  tel qu'il existe un plongement de  $G$  dans un hypercube de dimension  $n$  avec

$$2d_G(x, y) = d_{Q_n}(\phi(x), \phi(y)).$$

Ces graphes sont des graphes  $\ell_1$ , il suffit de placer les sommets de  $G$  sur les points de  $\mathbb{R}^n$  dont les coordonnées sont celles de l'image dans l'hypercube divisées par 2.

Ces graphes semblent paradoxalement être les plus difficiles à caractériser correctement. Dans le cadre de cette thèse, une suite possible serait de donner une caractérisation des subdivisions de cliques qui sont des demi-cubes.

### Perspective 2.2

*Donner une caractérisation intéressante des subdivisions de cliques qui sont des demi-cubes. Le sens du mot «intéressant» est à choisir et à justifier.*

Le lecteur peut également se référer au livre de Patrice Assouad et Michel Deza [5].

**Distorsion de plongement.** Victor Chepoi a récemment porté à mon attention les travaux menés entre autre par Yuri Rabinovich concernant la distorsion d'un plongement entre deux espaces métriques [68, 69].

Soit  $\phi$  un plongement d'un espace métrique  $(X, d_X)$  dans un espace métrique  $(Z, d_Z)$ . Le plongement  $\phi$  a une distorsion  $D$  si pour toute paire  $(x, y)$  de  $X$ ,

$$\frac{1}{D}d_Z(\phi(x), \phi(y)) \leq d_X(x, y) \leq d_Z(\phi(x), \phi(y)).$$

Si un graphe  $G$  n'est pas un cube partiel, il est alors naturel de se demander quelle est la distorsion minimale d'un plongement de  $G$  dans un hypercube.

**Perspective 2.3**

*Étudier le comportement de la distorsion des plongements dans les hypercubes. Il serait intéressant en particulier de :*

- trouver des bornes inférieures ou supérieures,*
- trouver des algorithmes efficaces minimisant la distorsion*
- donner des caractérisation des graphes admettant une distorsion bornée,*
- trouver des familles infinies de graphes admettant une distorsion minimum arbitrairement grande.*

Toutes ces questions peuvent être considérée dans un cadre de général ou pour certaines familles de graphes comme les cliques subdivisées.



# PLONGEMENTS TOPOLOGIQUES

# 3

## SOMMAIRE

3.1	DESSINS ET PLONGEMENTS	57
3.1.1	Zoologie de la bouteille de Klein	57
3.2	REPRÉSENTER UN GRAPHE SUR UNE SOUS-SURFACE	59
3.2.1	Retirer un crosscap	59
3.2.2	Retirer deux crosscaps sur la bouteille de Klein	60
3.3	ESTIMER LE NOMBRE MAXIMUM DE CIRCUITS ARÊTES-DISJOINTS	61
3.3.1	Étude des circuits non-orientables	61
3.3.2	Étude des $a$ -circuits	63
3.4	PREUVE DU THÉORÈME	65
	CONCLUSION	69

Ce chapitre s'intéresse à une notion de plongement topologique. La planarité des graphes a donné lieu à une recherche approfondie et florissante depuis de nombreuses années : nous pouvons oser citer la publication de la formule d'Euler [36] en 1758, ou plus récemment le théorème de Kuratowski-Wagner [52, 78] dans les années trente. Elle a donné naissance à deux sous-domaines qui sont la théorie des nombres de croisements et celle des plongements dans les surfaces plus complexes. Cependant, l'union naturelle de ces deux domaines qu'est l'étude des nombres de croisements de graphes plongés dans des surfaces complexes est apparue plus tardivement. Vraisemblablement introduite par Jozef Širáň [76] en 1983, puis étudiée plus avant par Dan Archdeacon, C. Paul Bonnington et Jozef Širáň [4] en 2001, la notion de séquence de croisements de graphes a mené Matt DeVos, Bojan Mohar et Robert Šamal [28] à conjecturer que le nombre minimal de croisements de l'union de deux graphes connexes sur une surface quelconque est atteint seulement si ces deux graphes sont représentés de façon disjointe.

Nous nous proposons de confirmer cette conjecture dans le cas où la surface est la bouteille de Klein. Ce chapitre est basé sur le travail réalisé avec Antoine Gerbaud, Roland Grappe et Frédéric Palesi [9] au sein du groupe de travail GraS de l'Institut Fourier.



### 3.1 DESSINS ET PLONGEMENTS

La conjecture de Matt DeVos et coll. [28] peut être formulée comme suit.

**Conjecture 3.1** (DeVos, Mohar, Šamal [28])

*Soit  $G$  l'union disjointe de deux graphes connexes  $H$  et  $K$ . Pour une représentation optimale de  $G$  sur une surface  $\Sigma$ , les restrictions de cette représentation à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.*

Cette conjecture est clairement vérifiée dans le cas du plan (ou la sphère). En effet, en représentant les deux graphes côte à côte, nous atteignons le nombre de croisement  $\text{cr}_{S_0}(H) + \text{cr}_{S_0}(K)$ . Si nous faisons en sorte que les représentations restreintes à  $H$  et  $K$  se croisent au moins une fois, le nombre de croisements internes de  $H$  et  $K$  restent malgré tout supérieur à  $\text{cr}_{S_0}(H) + \text{cr}_{S_0}(K)$  auquel on ajoute au moins un croisement mutuel. Ce n'est donc pas une représentation optimale.

Le cas du plan projectif a été traité dans la publication initiale de Matt DeVos et coll. [28].

Dans ce chapitre, nous vérifions le cas de la bouteille de Klein.

**Théorème 3.1** (B., Gerbaud, Grappe, Palesi [9])

*Soit  $G$  l'union de deux graphes connexes  $H$  et  $K$ . Pour une représentation optimale de  $G$  sur la bouteille de Klein, les restrictions de cette représentation à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.*

#### 3.1.1 Zoologie de la bouteille de Klein

D'après un résultat de Serge Lawrenceko et Seiya Negami [53], il existe quatre familles de courbes fermées simples essentielles sur la bouteille de Klein. Notons  $a$  une courbe non-orientable de la bouteille de Klein. Cela revient à déterminer un des crosscaps de la surface. Il existe alors une autre courbe non-orientable  $b$  qui n'est pas librement homotope à  $a$ . Elle passe par l'autre crosscap. Toute courbe fermée non-orientable est alors librement homotope à  $a$  ou  $b$ . Ce sont les deux premières familles. Les courbes orientables essentielles peuvent être séparées en deux familles selon qu'elles coupent la bouteille de Klein en deux parties disjointes (courbes homotopes à  $e$  sur la figure 3.1) ou qu'elles la transforme en un cylindre (courbes homotopes à  $m$  sur la figure 3.1).

Pour toute courbe  $c$  d'une surface  $\Sigma$ ,  $[c]$  représente l'ensemble des courbes librement homotopes à  $c$ . Cela signifie qu'elles peuvent être transformées de façon continue en  $c$ . Pour chaque couple de courbe  $(c, d)$ , le nombre  $\text{cr}([c], [d])$  représente le nombre minimum de croisements, avec multiplicité, pris sur l'ensemble des couples de  $[c] \times [d]$ . Plus généralement, pour un ensemble de courbes  $I$ ,  $\text{cr}(c, I)$  représente le nombre de croisements entre  $c$  et  $I$ ,  $\text{cr}([c], I)$  représente le nombre minimum de croisement entre un représentant de  $[c]$  et  $I$ . Lorsque  $I$  est la représentation d'un

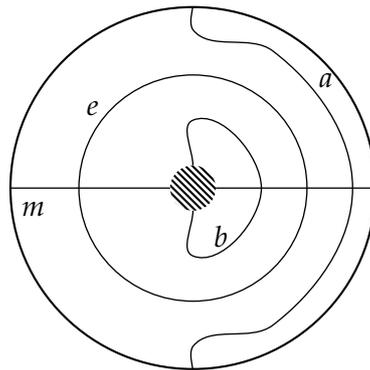


FIG. 3.1 – Courbes essentielles fermées de la bouteille de Klein

graphe  $G$ , le minimum est considéré pour les courbes de  $[c]$  qui ne passent pas par les sommets de  $G$ .

Les quatre familles de courbes essentielles de la bouteille de Klein sont donc  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[m]$  et  $[e]$ . Deux familles  $[c]$  et  $[d]$  sont dites *orthogonales* si  $cr([c], [d]) \geq 1$ . Dans le cas contraire, elle sont dites *disjointes*. Cette définition diffère légèrement de celle proposée par Feng Luo dans [60]. Soit  $\Psi$  un dessin sur la bouteille de Klein. Les circuits  $c$  de  $\Psi$  orthogonaux à  $[a]$  et disjoints de  $[b]$  sont appelés les *a-circuits*. Les circuits orthogonaux à  $[b]$  et disjoints de  $[a]$  sont appelés *b-circuits*. Les circuits orthogonaux à  $[a]$  et à  $[b]$  sont appelés les *m-circuits*. Enfin, les circuits orthogonaux à  $[m]$  et disjoints de  $[a]$  et  $[b]$  sont appelés les *e-circuits*.

Nous ferons grand usage d'un résultat puissant obtenu par Maurits de Graaf et Alexander Schrijver [39] en 1997.

**Théorème 3.2** (de Graaf, Schrijver [39])

Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien  $G$  sur une surface  $\Sigma$ . Alors  $\Psi$  peut-être décomposé en une famille de circuits  $I$  telle que pour toute courbe fermée  $c$  de  $\Sigma$ ,

$$cr([c], \Psi) = \sum_{d \in I} cr([c], [d]).$$

Décomposer une représentation  $\Psi$  d'un graphe  $G$  en une famille  $I$  signifie que chaque arête de  $G$  dans  $\Psi$  est visitée exactement une fois par un seul élément de  $I$ . Un résultat semblable avait été obtenu précédemment par Sóstenes Lins [58] pour le plan projectif en 1981, puis généralisé par Alexander Schrijver [73] pour la bouteille de Klein en 1991 : le nombre maximum de circuits non-orientables deux à deux arêtes-disjoints est égal au cardinal minimum d'un ensemble d'arête intersectant tous les circuits non-orientables de  $\Psi$ .

### 3.2 REPRÉSENTER UN GRAPHE SUR UNE SOUS-SURFACE

Dans cette section, étant donnée une représentation d'un graphe  $G$  sur une surface quelconque (de genre non-orientable suffisant), nous définissons de nouvelles représentations de ce même graphe  $G$  sur des surfaces de genre strictement inférieur. Nous calculons aussi le nombre de croisements de ces nouvelles représentations.

#### 3.2.1 Retirer un crosscap

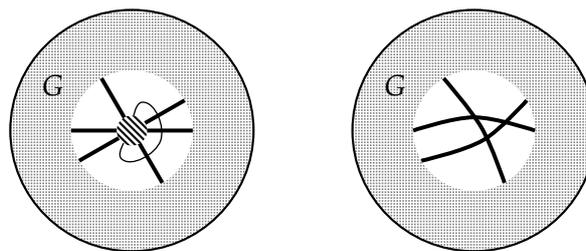
Soit  $\Sigma$  une surface non-orientable de genre  $g$  et  $\Sigma'$  la surface non-orientable de genre  $g - 1$  ( $\Sigma'$  peut être la sphère si  $g = 1$ ).

##### Proposition 3.1

Soit  $\Psi$  une représentation de  $G$  sur  $\Sigma$ , et  $c$  une courbe simple non-orientable de  $\Sigma$  ne passant pas par l'image d'un sommet de  $G$ . Alors il existe une représentation  $\Psi'$  de  $G$  sur  $\Sigma'$  telle que

$$cr(\Psi') = cr(\Psi) + \frac{1}{2}cr(\Psi, c) \times (cr(\Psi, c) - 1).$$

*Démonstration.* Nous découpons la surface  $\Sigma$  le long de la courbe  $c$ . Nous obtenons la surface  $\Sigma'$  avec un trou. Nous collons alors un disque sur la frontière de ce trou pour obtenir la surface  $\Sigma$ . Soit  $\Psi'$  la représentation de  $G$  sur  $\Sigma'$  obtenue en gardant intacte la restriction de  $\Psi$  à  $\Sigma \setminus c$  et en ajoutant les arêtes passant par  $c$  sur le disque  $D$  de sorte qu'elles se croisent toutes une fois deux à deux (voir figure 3.2). Le nombre de croisements de cette représentation est exactement celui de l'énoncé de la proposition 3.1.  $\square$



(a)  $G$  représenté localement sur un plan projectif (b)  $G$  représenté localement sur le plan

FIG. 3.2 – Retirer un crosscap

Nous rappelons que la surface non-orientable de genre  $g$  peut être vue comme une sphère sur laquelle  $g$  crosscaps ont été ajoutés. L'ajout d'un crosscap à une surface  $\Sigma$  revient à découper un disque ouvert  $D$  de la surface et d'identifier les points opposés de la frontière de  $D$ .

Nous sommes alors en mesure de prouver le cas particulier du plan projectif. Ceci a été fait précédemment par Matt DeVos et coll. [28]. Nous l'énonçons car la preuve est simple.

**Corollaire 3.1**

Soit  $G$  l'union disjointe de deux graphes eulériens connexes  $H$  et  $K$ . Si  $G$  admet une représentation sur le plan projectif telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  sont des plongements et que ces derniers se croisent, alors il existe une représentation de  $G$  avec un nombre de croisements strictement inférieur telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.

*Démonstration.* Notons  $\Psi$  une représentation de  $G$  sur le plan projectif telle que  $\Psi_H$  et  $\Psi_K$  sont des plongements qui se croisent ( $\Psi(H) \cap \Psi(K) \neq \emptyset$ ).

Toutes les courbes fermées simples non-orientables du plan projectif sont homotopes deux à deux. Soit  $c$  une telle courbe. D'après un théorème de Sóstenes Lins [58] de 1981, le nombre maximum de circuits non-orientables arêtes-disjoints de  $\Psi_H$  (respectivement  $\Psi_K$ ) est égal à  $\text{cr}([c], \Psi_H)$  (respectivement  $\text{cr}([c], \Psi_K)$ ). Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\text{cr}([c], \Psi_H)$  est inférieur ou égal à  $\text{cr}([c], \Psi_K)$ .

Deux circuits non-orientables se croisent au moins une fois. Ainsi, chaque circuit non-orientable de  $\Psi_H$  croise chaque circuit non-orientable de  $\Psi_K$ , et

$$\text{cr}(\Psi) \geq \text{cr}([c], \Psi_H) \times \text{cr}([c], \Psi_K).$$

Soit  $c'$  une courbe fermée non-orientable du plan projectif réalisant le nombre de croisement  $\text{cr}([c], \Psi_H)$ . D'après la proposition 3.1, il existe une représentation de  $H$  sur le plan euclidien  $\Psi'_{H'}$  telle que

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi'_{H'}) &= \frac{1}{2} \text{cr}(c', \Psi_H) \times (\text{cr}(c', \Psi_H) - 1) \\ &< \text{cr}([c], \Psi_H) \times \text{cr}([c], \Psi_K) \\ &< \text{cr}(\Psi). \end{aligned}$$

Notons  $\Psi'$  la représentation de  $G$  sur le plan projectif obtenue par l'union disjointe de  $\Psi'_{H'}$  et  $\Psi_K$ . Alors les deux sous-représentations ne se croisent pas et, comme  $\Psi_K$  est un plongement, les seuls croisements de  $\Psi'$  sont des croisements internes à  $\Psi'_{H'}$ . Alors le nombre de croisements de  $\Psi'$  est strictement inférieur au nombre de croisements de la représentation initiale  $\Psi$ . □

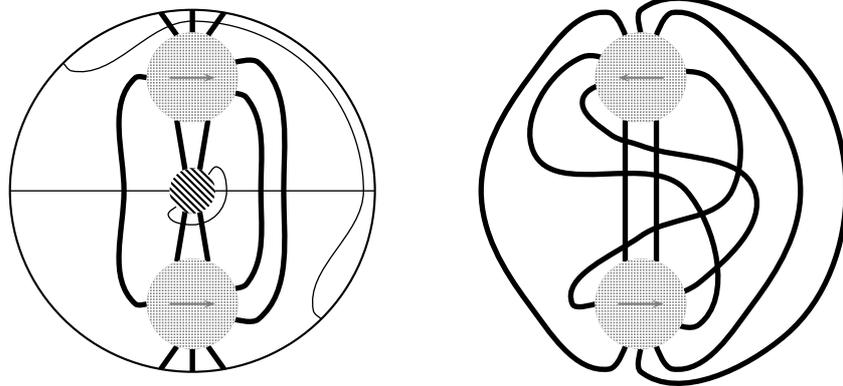
**3.2.2 Retirer deux crosscaps sur la bouteille de Klein****Proposition 3.2**

Soit  $\Psi$  une représentation d'un graphe  $G$  sur la bouteille de Klein. Soit  $a'$  une courbe simple homotope à  $a$  et  $m'$  une courbe simple homotope à  $m$  telles qu'aucune ne contient l'image par  $\Psi$  d'un sommet de  $G$ , et telles qu'elles ne se croisent qu'une fois. Alors il existe une représentation  $\Psi'$  de  $G$  sur le plan euclidien telle que

$$\text{cr}(\Psi') = \text{cr}(\Psi) + \text{cr}(a', \Psi) \times \text{cr}(m', \Psi) + \frac{1}{2} \text{cr}(m', \Psi) \times (\text{cr}(m', \Psi) - 1).$$

*Démonstration.* Nous coupons la bouteille de Klein selon la courbe  $m'$ . Ainsi, nous déconnectons  $cr(m', \Psi)$  arêtes de  $G$ . Par la définition de la courbe  $m$ , la surface résultant de cette découpe est un cylindre. Nous reconnectons alors les arêtes précédemment découpées de façon à ce qu'elles restent dans le voisinage de  $a'$ , créant de la sorte  $cr(a', \Psi)$  croisements pour chacune d'entre elles. De plus, nous pouvons représenter ces  $cr(m', \Psi)$  arêtes de façon à ce qu'elles ne se croisent qu'une seule fois deux à deux.

Finalement nous obtenons une représentation de  $G$  sur le cylindre avec le nombre de croisements voulu. Nous déduisons aisément une représentation  $\Psi'$  de  $G$  sur le plan euclidien avec le même nombre de croisements (voir figure 3.3).  $\square$



(a) Une représentation de  $G$  sur la bouteille de Klein

(b) Une représentation de  $G$  avec le bon nombre de croisements

FIG. 3.3 – Retirer deux crosscaps : exemple

### 3.3 ESTIMER LE NOMBRE MAXIMUM DE CIRCUITS ARÊTES-DISJOINTS

Dans cette section, nous estimons le nombre de circuits essentiels d'une représentation  $\Psi$  d'un graphe  $G$  sur la bouteille de Klein.

#### 3.3.1 Étude des circuits non-orientables

##### Proposition 3.3

*Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien  $G$  dans la bouteille de Klein. Alors le nombre maximum de circuits non-orientables deux à deux arêtes-disjoints est égal à*

$$\min \{ cr([a], \Psi) + cr([b], \Psi), cr([m], \Psi) \}.$$

*De plus, il est possible de décomposer  $\Psi$  en une famille  $I$  de tels circuits qui atteint ce nombre maximum et qui contient un nombre de  $m$ -circuits égal à*

$$\frac{1}{2} (cr([a], \Psi) + cr([b], \Psi) - \min \{ cr([a], \Psi) + cr([b], \Psi), cr([m], \Psi) \}).$$

*Démonstration.* Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien  $G$  dans la bouteille de Klein. Considérons une collection  $I$  de circuits non-orientables deux à deux arêtes-disjoints dans  $\Psi$ . Chaque circuit non-orientable croise  $a$  ou  $b$ . Ainsi, pour chaque circuit  $c$  dans  $I$ ,  $\text{cr}([a], c) \geq 1$  ou  $\text{cr}([b], c) \geq 1$ . Et donc,

$$\text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) \geq \sum_{c \in I} (\text{cr}([a], [c]) + \text{cr}([b], [c])) \geq |I|.$$

De la même façon, chaque circuit non-orientable intersecte  $m$ . Ainsi,

$$\text{cr}([m], \Psi) \geq \sum_{c \in I} \text{cr}([m], [c]) \geq |I|.$$

Nous en déduisons que le nombre maximum de circuits non-orientables deux à deux arêtes-disjoints est plus petit que  $\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}$ .

Pour compléter la preuve de la proposition 3.3, il reste à décomposer  $\Psi$  en une famille de circuits qui contient

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}$$

circuits non-orientables et

$$\frac{1}{2} \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}$$

$m$ -circuits.

Soit  $I$  une collection de circuits donnée par le théorème 3.2. Notons  $n_a$  le nombre de  $a$ -circuits dans  $I$ ,  $n_b$  le nombre de  $b$ -circuits,  $n_m$  le nombre de  $m$ -circuits et  $n_e$  le nombre de  $e$ -circuits. Par définition (voir énoncé du théorème 3.2), les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{cr}([a], \Psi) &= n_a + n_m, \\ \text{cr}([b], \Psi) &= n_b + n_m, \\ \text{cr}([m], \Psi) &= n_a + n_b + 2n_e. \end{aligned} \tag{3.1}$$

- Si  $n_m = 0$ , alors ces égalités se transforment en

$$\begin{aligned} \text{cr}([a], \Psi) &= n_a, \\ \text{cr}([b], \Psi) &= n_b, \\ \text{cr}([m], \Psi) &= n_a + n_b + 2n_e. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi)$$

qui correspond bien au nombre de circuits non-orientables de  $I$ . De plus

$$\frac{1}{2} \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = 0$$

qui correspond bien au nombre de  $m$ -circuits.

- Si  $n_e = 0$ , les égalités précédentes deviennent

$$\begin{aligned} \text{cr}([a], \Psi) &= n_a + n_m, \\ \text{cr}([b], \Psi) &= n_b + n_m, \\ \text{cr}([m], \Psi) &= n_a + n_b. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = \text{cr}([m], \Psi) = n_a + n_b$$

qui correspond au nombre de circuits non-orientables de  $I$ . De plus

$$\frac{1}{2} \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \} = n_m$$

qui correspond bien au nombre de  $m$ -circuits.

Nous pouvons donc supposer que  $n_m$  et  $n_e$  sont strictement positifs. Posons  $r = \min \{ n_m, n_e \}$ . Considérons alors  $r$   $m$ -circuits distincts  $m_1 \dots m_r$  et  $r$   $e$ -circuits distincts  $e_1 \dots e_r$  dans  $I$ . Pour tout entier  $i$  entre 1 et  $r$ , les circuits  $m_i$  et  $e_i$  s'intersectent et peuvent être recomposés (voir figure 3.4) en une union d'un  $a$ -circuit  $a_i$  et d'un  $b$ -circuit  $b_i$ . Ainsi nous obtenons une nouvelle famille  $I'$  de circuits avec  $n_a + r$   $a$ -circuits,  $n_b + r$   $b$ -circuits,  $n_m - r$   $m$ -circuits et  $n_e - r$   $e$ -circuits. D'après les égalités précédentes,

$$(n_a + r) + (n_b + r) = \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \},$$

et

$$2(n_m - r) = \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi) - \min \{ \text{cr}([a], \Psi) + \text{cr}([b], \Psi), \text{cr}([m], \Psi) \}.$$

$I'$  correspond donc à la famille de circuits recherchée.  $\square$

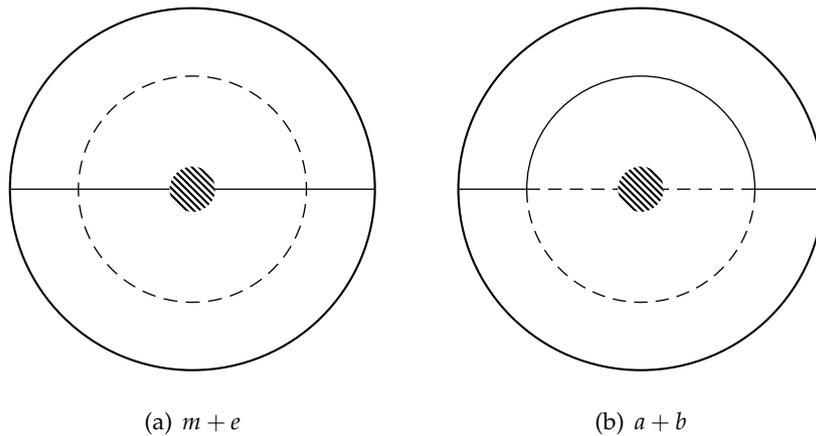


FIG. 3.4 –  $e$ -circuit +  $m$ -circuit =  $a$  circuit +  $b$ -circuit

### 3.3.2 Étude des $a$ -circuits

**Proposition 3.4**

Soit  $\Psi$  un plongement d'un graphe eulérien sur la bouteille de Klein.  
alors le nombre maximum de  $a$ -circuits arêtes-disjoints est égal à

$$\min \{cr([a], \Psi), cr([m], \Psi)\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\Psi$  un tel plongement. Considérons alors une famille  $I$  quelconque de  $a$ -circuits arêtes-disjoints de  $\Psi$ . Chaque  $a$ -circuit intersecte la courbe  $a$ . Ainsi,

$$cr([a], \Psi) \geq \sum_{c \in I} cr([a], c) \geq |I|.$$

De même, chaque  $a$ -circuit intersecte la courbe  $m$ . Nous obtenons donc,

$$cr([m], \Psi) \geq \sum_{c \in I} cr([m], c) \geq |I|.$$

Le nombre maximum de  $a$ -circuits arêtes-disjoints est donc bien inférieur au minimum de ces deux quantités.

Pour compléter la preuve de la proposition 3.4, il nous faut exhiber autant de  $a$ -circuits dans  $\Psi$ . Nous utilisons la même méthode que pour la proposition 3.3.

Soit  $I$  une collection de circuits de  $\Psi$  donnée par le théorème 3.2,  $n_a, n_b, n_m$  et  $n_e$  représentent les nombres de circuits de chaque type.

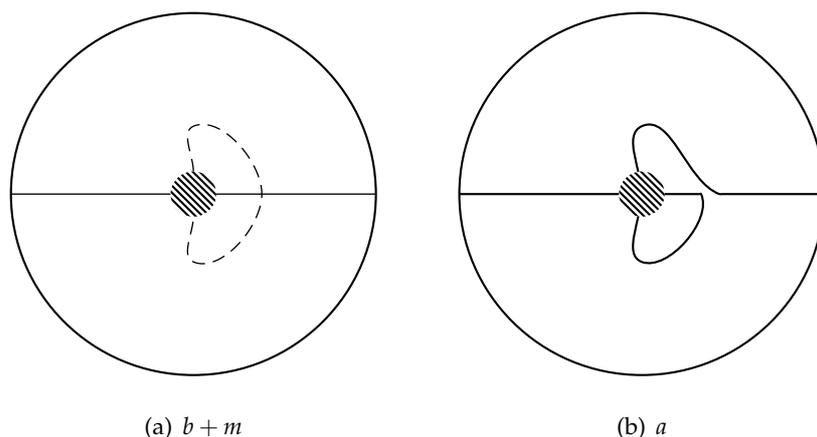
Posons  $r = \min\{n_m, n_e\}$ . Considérons alors  $r$  paires constituées chacune d'un  $m$ -circuit de  $I$  et d'un  $e$ -circuit de  $I$ . Comme illustré dans la figure 3.4, chacune de ces paires peut être transformée en une paire formée d'un  $a$ -circuit et d'un  $b$ -circuit. Cette nouvelle famille  $I'$  contient  $n_a + r$   $a$ -circuits,  $n_b + r$   $b$ -circuits,  $n_m - r$   $m$ -circuits et  $n_e - r$   $e$ -circuits.

Posons ensuite  $s = \min\{n_m - r, n_b + r\}$ . Considérons alors  $s$  paires constituées chacune d'un  $m$ -circuit de  $I'$  et d'un  $b$ -circuit de  $I'$ . Comme illustré dans la figure 3.5, chacune de ces paires peut-être transformée en un  $a$ -circuit. Nous obtenons alors une nouvelle famille de circuits  $I''$  contenant  $n_a + r + s$   $a$ -circuits,  $n_b + r - s$   $b$ -circuits,  $n_m - r - s$   $m$ -circuits et  $n_e - r$   $e$ -circuits.

$$\begin{aligned} n_a + r + s &= n_a + r + \min\{n_m - r, n_b + r\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2r\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2 \min\{n_m, n_e\}\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2n_m, n_b + 2n_e\} \\ &= n_a + \min\{n_m, n_b + 2n_e\} && \text{car } n_m \geq 0 \\ &= \min\{n_a + n_m, n_a + n_b + 2n_e\} \\ &= \min \{cr([a], \Psi), cr([m], \Psi)\} && \text{par les égalités (3.1).} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le bon nombre de  $a$ -circuits.  $\square$

Bien entendu, la proposition 3.4 peut être énoncée de la même manière pour les  $b$ -circuits.

FIG. 3.5 –  $b$ -circuit +  $m$ -circuit =  $a$  circuit

### 3.4 PREUVE DU THÉORÈME

Dans cette section, nous prouvons le théorème 3.1. Nous commençons par traiter le cas spécifique des graphes plongeables et eulériens.

#### Lemme 3.1

*Soit le graphe  $G$ , union disjointe de deux graphes connexes eulériens  $H$  et  $K$ . Si  $G$  admet une représentation sur la bouteille de Klein telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  sont des plongements qui se croisent, alors il existe une autre représentation de  $G$  sur la bouteille de Klein avec strictement moins de croisements et telle que les sous-représentations associées à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.*

*Démonstration.* Soit  $\Psi$  une représentation de  $G$  sur la bouteille de Klein telle que les restrictions  $\Psi_H$  à  $H$  et  $\Psi_K$  à  $K$  sont des plongements.

Pour prouver le lemme 3.1, il suffit de trouver deux représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$  de  $H$  et  $K$  sur deux sous-surfaces disjointes de la bouteille de Klein, telles que la somme des nombres de croisements de  $\Psi'_H$  et de  $\Psi'_K$  est strictement inférieure au nombre de croisement de  $\Psi$ . En effet, si nous trouvons de telles représentations, il suffit de considérer  $\Psi'$  la représentation de  $G$  sur la bouteille de Klein obtenue par l'union des représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$ . Le nombre de croisements de  $\Psi'$  est exactement la somme des nombres de croisements de  $\Psi'_H$  et de  $\Psi'_K$ , et ces deux restrictions ne se croisent pas.

Pour des raisons de lisibilité, nous posons  $h_a = \text{cr}([a], \Psi_H)$ ,  $h_b = \text{cr}([b], \Psi_H)$  et  $h_m = \text{cr}([m], \Psi_H)$ . Les notations  $k_a, k_b$  et  $k_m$  sont définies de façon similaire pour le sous-graphe  $K$ .

D'après la proposition 3.3, il existe une décomposition de  $\Psi_H$  en une famille de circuits deux à deux arêtes-disjoints composée de  $\min\{h_m, h_a + h_b\}$  circuits non-orientables et  $(h_a + h_b - \min\{h_m, h_a + h_b\})/2$   $m$ -circuits. D'après la définition de  $k_a$  et  $k_b$ , chacun de ces circuits non-orientable croise la représentation de  $\Psi_K$  au moins  $\min\{k_a, k_b\}$  fois. De plus, chaque  $m$ -circuit de cette décomposition croise  $\Psi_K$  au moins  $k_m$  fois. Nous en déduisons une borne inférieure sur le nombre de croisements entre  $\Psi_H$  et  $\Psi_K$ , et par extension de  $\Psi$ .

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{h_m, h_a + h_b\} \times \min\{k_a, k_b\} + \frac{1}{2}(h_a + h_b - \min\{h_m, h_a + h_b\}) \times k_m. \quad (3.2)$$

En échangeant les rôles de  $H$  et  $K$ , nous obtenons

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{k_m, k_a + k_b\} \times \min\{h_a, h_b\} + \frac{1}{2}(k_a + k_b - \min\{k_m, k_a + k_b\}) \times h_m. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, d'après la proposition 3.4, il existe  $\min\{k_a, k_m\}$   $a$ -circuits arêtes-disjoints dans  $\Psi_K$ . Chacun d'eux croise  $\Psi_H$  au moins  $h_a$  fois, ainsi

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{k_a, k_m\} \times h_a. \quad (3.4)$$

De façon similaire en considérant les  $b$ -circuits, nous avons

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{k_b, k_m\} \times h_b. \quad (3.5)$$

Cette dernière inégalité peut être obtenue de la même manière en inversant les rôles de  $H$  et  $K$ ,

$$\text{cr}(\Psi) \geq \min\{h_b, h_m\} \times k_b. \quad (3.6)$$

Notons  $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4$  l'ordre des nombre  $h_a, h_b, k_a$  et  $k_b$ . Nous distinguons alors les cas suivants.

**(Cas 1)** Si  $k_m \geq m_2$ , alors nous appliquons la transformation de la proposition 3.1 sur le graphe concerné par  $m_1$ , puis nous appliquons cette même transformation sur le graphe concerné par  $m_2$ . Nous obtenons deux nouvelles représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$  sur des sous-surfaces disjointes de la bouteille de Klein et telles que

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) &= \frac{1}{2}m_1 \times (m_1 - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times (m_2 - 1) \\ &< m_2 \times m_2. \end{aligned}$$

Quelque soit l'ordre des  $m_i$ , et comme  $k_m \geq m_2$ , nous pouvons affirmer que

$$m_2 \times m_2 \leq \max\{\min\{k_a, k_m\} \times h_a, \min\{k_b, k_m\} \times h_b\}.$$

En effet, les  $m_i$  sont tous utilisés dans cette formule, il suffit de vérifier qu'au moins un des deux produits est supérieur à  $m_2 \times m_2$ .

Il reste alors à invoquer les inégalités (3.4) et (3.5) pour conclure que

$$\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) < \text{cr}(\Psi).$$

Notons que ce cas 1 est traité de la même façon si  $h_m \geq 2$ .

(Cas 2) Si  $k_m < m_2$  et  $h_m < m_2$ , alors

$$h_m < m_1 + m_2 \leq h_a + h_b.$$

L'inégalité (3.2) devient donc

$$\text{cr}(\Psi) \geq h_m \times \min\{k_a, k_b\} + \frac{1}{2}(h_a + h_b - h_m) \times k_m. \quad (3.7)$$

De même,  $k_m < m_1 + m_2 \leq k_a + k_b$ , et nous pouvons supposer que  $h_a \leq h_b$  l'inégalité (3.3) se transforme en

$$\text{cr}(\Psi) \geq k_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times h_m. \quad (3.8)$$

Supposons sans perte de généralité que  $k_m \geq h_m$ .

(Cas 2.1) Si  $h_m \leq k_a + k_b - k_m$ , alors d'après la proposition 3.2, il existe une représentation  $\Psi'_H$  de  $H$  sur le plan euclidien telle que

$$\text{cr}(\Psi'_H) = h_m \times h_a + \frac{1}{2}h_m \times (h_m - 1).$$

D'après l'inégalité (3.8),

$$\begin{aligned} \text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi_K) &= h_m \times h_a + \frac{1}{2}h_m \times (h_m - 1) \\ &\leq h_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times (h_m - 1) \\ &\leq k_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times (h_m - 1) && \text{car } k_m \geq h_m \\ &< k_m \times h_a + \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times h_m && \text{car } k_a + k_b - k_m > 0 \\ &< \text{cr}(\Psi) && \text{par (3.8).} \end{aligned}$$

(Cas 2.2) Si  $h_m > k_a + k_b - k_m$ , alors, sachant que  $k_m < m_2$ , nous pouvons en déduire que

$$h_m + \max\{k_a, k_b\} \geq h_m + k_m > k_a + k_b.$$

Alors  $h_m > \min\{k_a, k_b\} = m_i$ . Comme  $h_m < m_2$ , nous en déduisons que  $i = 1$ . Alors forcément,  $h_a, h_b \geq m_2 > k_m$

(Cas 2.2.1) Si  $\min\{k_a, k_b\} < k_m/2$ , alors  $k_m \geq 1$ ; nous appliquons la transformation adéquate décrite dans la proposition 3.2 sur le graphe  $K$ . Nous obtenons une représentation  $\Psi'_K$  de ce dernier sur le plan euclidien telle que

$$\text{cr}(\Psi'_K) = k_m \times \min\{k_a, k_b\} + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1).$$

Nous concluons grâce aux inégalités suivantes,

$$\begin{aligned}
\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi_K) &= k_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1) \\
&\leq h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + (k_m - h_m) \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1) \\
&< h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + (k_m - h_m) \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}k_m \times k_m && \text{car } k_m \geq 1 \\
&< h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + (2k_m - h_m) \times \frac{1}{2}k_m && \text{car } \min\{k_a, k_b\} < k_m/2 \\
&< h_m \times \min\{k_a, k_b\} \\
&\quad + \frac{1}{2}(h_a + h_b - h_m) \times k_m && \text{car } h_a, h_b \geq k_m \\
&< \text{cr}(\Psi) && \text{d'après (3.7).}
\end{aligned}$$

**(Cas 2.2.2)** Si  $\min\{k_a, k_b\} \geq k_m/2$  et  $m_2 < 2k_m$ , alors nous transformons les représentations de  $H$  et de  $K$  comme indiqué dans la proposition 3.1 en considérant les crosscaps et les graphes impliqués par  $m_1$  et  $m_2$ . Nous rappelons que  $\min\{k_a, k_b\} = m_1$ . Nous obtenons deux représentations  $\Psi'_H$  et  $\Psi'_K$  sur deux sous-surfaces disjointes de la bouteille de Klein telles que

$$\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) = \frac{1}{2}m_1 \times (m_1 - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times (m_2 - 1).$$

Or nous savons que

$$m_1 < h_m, \quad m_2 > k_m, \quad m_2 \leq h_a \quad \text{et} \quad m_1 + m_2 \leq k_a + k_b.$$

Nous pouvons alors conclure

$$\begin{aligned}
\text{cr}(\Psi'_H) + \text{cr}(\Psi'_K) &= \frac{1}{2}m_1 \times (m_1 - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times (m_2 - 1) \\
&< \frac{1}{2}m_1 \times (h_m - 1) + \frac{1}{2}m_2 \times 2k_m && \text{car } 2k_m \geq m_2 \\
&< \frac{1}{2}(m_1 + m_2 - k_m) \times h_m + h_a \times k_m \\
&< \frac{1}{2}(k_a + k_b - k_m) \times h_m + h_a \times k_m \\
&< \text{cr}(\Psi) && \text{d'après (3.8).}
\end{aligned}$$

**(Cas 2.2.3)** Si  $\min\{k_a, k_b\} \geq k_m/2$  et  $m_2 \geq 2k_m$ , nous transformons le graphe  $K$  comme dans la proposition 3.2. Nous obtenons une représentation  $\Psi'_K$  de  $K$  sur le plan euclidien telle que

$$\begin{aligned}
\text{cr}(\Psi'_K) &= k_m \times \min\{k_a, k_b\} + \frac{1}{2}k_m \times (k_m - 1) \\
&< k_m \times (m_1 + \frac{1}{2}k_m) \\
&< k_m \times 2m_1 \\
&< m_1 \times m_2.
\end{aligned}$$

Nous pouvons supposer que  $m_1 = k_a$ . Ainsi nous savons que  $m_1 < h_m$ ,  $k_b \geq m_2$  et bien entendu  $h_b \geq m_2$ . Nous obtenons alors en utilisant l'inégalité 3.6,

$$\begin{aligned}
\text{cr}(\Psi'_K) &< m_1 \times m_2 \\
&< \min(h_b, h_m) \times k_b \\
&< \text{cr}(\Psi).
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du lemme 3.1. □

Il ne reste plus qu'à généraliser ce lemme au cas général pour obtenir le théorème.

**Preuve du théorème 3.1.** Soit  $G$  l'union disjointe de deux graphes connexes  $H$  et  $K$ . Soit  $\Psi$  une représentation optimale de  $G$  sur la bouteille de Klein.

Pour une démonstration par l'absurde, supposons que les restrictions de  $\Psi$  à  $H$  et  $K$  se croisent.

Tout d'abord, supposons que les restrictions de  $\Psi$  à  $H$  et  $K$  sont des plongements. Doublons chaque arête de  $G$  et notons  $G'$ ,  $H'$  et  $K'$  les graphes eulériens ainsi obtenus. La représentation  $\Psi'$  possède  $4\text{cr}(\Psi)$  croisements. Comme  $G'$ ,  $H'$ , et  $K'$  sont eulériens, nous pouvons appliquer le lemme 3.1 et obtenir une représentation  $\Psi''$  de  $G'$  admettant strictement moins de  $4\text{cr}(\Psi)$  croisements, et telle que les restrictions à  $H'$  et  $K'$  ne se croisent pas. De plus, nous pouvons supposer que chaque arête et sa parallèle sont représentées suffisamment proches l'une de l'autre pour avoir les mêmes croisements. Ainsi, chaque couple de paire d'arêtes parallèles se croise 0 ou 4 fois. En retirant une arête de chacune de ces paires, nous obtenons une nouvelle représentation de  $G$  avec strictement moins de  $\text{cr}(\Psi)$  croisements et telle que les restrictions à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas. C'est absurde car  $\Psi$  est optimale par hypothèse.

Enfin, si les restrictions de  $\Psi$  à  $H$  et  $K$  ne sont pas des plongements (alors il existe des croisements internes), nous pouvons considérer les graphes  $H''$  et  $K''$  obtenus en ajoutant un sommet à chaque croisement de  $\Psi$ . Nous avons alors des plongements dans la bouteille de Klein. Le paragraphe précédent nous permet de trouver une meilleure représentation de  $H''$  et  $K''$ . Nous remplaçons alors les sommets ajoutés par les croisements initiaux et le théorème 3.1 est prouvé.

## CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons abordé la notion de plongement d'un graphe d'un point de vue topologique. De plus, nous avons utilisé les outils de la topologie des surfaces pour répondre partiellement à une question soulevée par Matt DeVos et coll. [28].

Malheureusement, notre approche fait un usage très important du fait qu'un circuit essentiel de la bouteille de Klein appartient à une des quatre familles présentées. Dès que l'on passe au tore, le nombre de ces familles devient infini (il est alors en bijection avec  $\mathbb{N}^2$ , selon le nombre de tours effectués sur l'axe des abscisses et le nombre de tours effectués sur l'axe des ordonnées). Une idée neuve s'impose donc. Il est à noter que le groupe de Simon Fraser University a prouvé le cas spécifique du tore récemment. À notre connaissance, les autres surfaces demeurent des problèmes ouverts. Nous rappelons donc la question principale de ce chapitre toujours à l'ordre du jour.

**Problème 3.1**

*Soit  $G$  le graphe union de deux graphes connexes  $G_1$  et  $G_2$  et  $\Sigma$  une surface (différente de  $S_0, S_1, \tilde{S}_1$  et  $\tilde{S}_2$ ). Est-il vrai que toute représentation optimale de  $G$  sur  $\Sigma$  laisse les sous-représentations de  $G_1$  et  $G_2$  disjointes ?*

# NOMBRE DE CROISEMENTS ET PRODUIT ZIPPÉ

## SOMMAIRE

4.1	POSITION DU PROBLÈME	73
4.2	DÉFINITIONS : PRODUIT ZIPPÉ ET FIBRES	74
4.3	UNE SEULE FIBRE NE SUFFIT PAS	75
4.3.1	Deux familles de graphes	75
4.3.2	Un écart quadratique	77
	CONCLUSION	79

Ce chapitre et le suivant abordent des problèmes de plongement topologique avec des outils combinatoires. Après avoir déterminé les opérations importantes en étudiant le problème, nous pouvons nous abstraire de l'aspect topologique pour nous concentrer sur les effets génériques de nos opérations.

Dans ce chapitre, nous traitons plus précisément le cas du produit zippé de deux graphes. Ce produit a été introduit par Drago Bokal [15, 16] très récemment et a permis de nombreuses avancées dans le domaine des nombres de croisements de graphes.

Sous certaines conditions, ce produit se révèle super-additif relativement au nombre de croisements. C'est-à-dire que le nombre de croisements du produit de deux graphes est supérieur à la somme des nombres de croisements de chaque graphe.

Nous cherchons ici à voir dans quelle mesure ces conditions sont nécessaires. Les questions en suspens sont répertoriées à la fin du chapitre. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Drago Bokal [7] et initié par une conversation matinale lors de mon séjour à Montréal.



## 4.1 POSITION DU PROBLÈME

Le nombre de croisements dans le plan de graphes a fait l'objet de nombreuses études durant les trente dernières années, et demeure un problème notoire de la théorie des graphes. En 1983, Michael R. Garey et David S. Johnson [38] ont prouvé que déterminer le nombre de croisements d'un graphe quelconque est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet. Alors que l'objectif des premières études était de déterminer le nombre de croisements de certaines familles graphes, l'intérêt se porte désormais sur les aspects structurels de ce problème, comme l'étude de variantes du nombre de croisements [18, 27, 61, 66, 65, 67], celle des graphes critiques pour les nombres de croisements [43, 70, 72], ou encore les propriétés des représentations avec un nombre de croisements borné pour chaque arête [64].

Très tôt dans le développement de la théorie des nombres de croisements, Frank T. Leighton s'est rendu compte de l'importance des coupes de graphes pour déterminer le nombre de croisements d'un graphe. En combinant ces coupes avec le théorème du séparateur planaire de Lipton-Tarjan [59], il a pu fournir des bornes supérieures (voir son article coécrit avec Sandeep N. Bhatt [14] en 1984), tandis qu'en utilisant la méthode de bissection [55, 56], il a obtenu des bornes inférieures en s'appuyant sur la structure de ces coupes. Certains résultats ont été obtenus indépendamment par Miklós Ajtai, Vašek Chvátal, Monroe M. Newborn et Endre Szemerédi en 1982 [2].

Supérieures ou inférieures, les bornes obtenues grâce aux coupes dans les graphes sont certes très générales (les méthodes s'appliquent à tous les graphes), mais aucune d'entre elles n'est suffisamment serrée pour donner lieu à des résultats exacts. Ce problème a été partiellement comblé par l'introduction du produit zippé par Drago Bokal [15, 16] en 2007 ; ce produit a permis d'obtenir des résultats exacts concernant le nombre de croisements de plusieurs familles de graphes à deux paramètres, la famille la plus générale étant le produit cartésien de n'importe quel arbre sous-cubique avec n'importe quelle étoile  $K_{1,n}$ . Cette famille contient comme sous-ensemble le produit d'un chemin quelconque avec une étoile, le résultat démontre ainsi une ancienne conjecture de Stanislav Jendroľ et Mária Ščerbová [46] formulée en 1982. Par ailleurs ce nouveau produit combinatoire s'est révélé utile dans d'autres travaux concernant les nombres de croisements [57, 79], ou les graphes critiques [17, 44]. Il est naturel d'étudier le comportement d'une telle opération par rapport aux invariants de graphe.

L'approche du produit zippé suppose une condition technique sur les graphes multipliés : l'existence de deux fibres dans chaque graphe (nous donnerons une définition formelle par la suite). Dans cette section, nous nous intéressons à une possible relaxation de cette condition et prouvons que l'existence d'une seule fibre par graphe ne suffit pas pour conclure sur la superadditivité du nombre de croisements par rapport au produit zippé.

De plus, nous sommes en mesure d'établir une différence quelconque entre les deux quantités, cette différence peut croître quadratiquement avec le nombre d'arêtes impliquées dans le produit.

Dans un premier temps, nous définissons formellement la notion de

produit zippé et de fibre dans un graphe, et nous rappelons les résultats connus. Ensuite, nous exhibons deux familles de graphes qui nous permettent d'atteindre cette différence quadratique. Enfin, nous montrons une contradiction entre notre résultat et certains arguments employés par Marcus Chimani, Carsten Gutwenger et Petra Mutzel [26]. Cette contradiction n'infirme pas leur résultat mais rend leur preuve incorrecte.

## 4.2 DÉFINITIONS : PRODUIT ZIPPÉ ET FIBRES

**Produit zippé.** Nous commençons par définir le produit zippé de deux graphes. Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes et deux sommets  $v_1$  de  $G_1$  et  $v_2$  de  $G_2$  de même degré  $d$ . Notons  $N_i = N_{G_i}(v_i)$  le voisinage du sommet  $v_i$  dans le graphe  $G_i$  pour  $i = 1, 2$ . Soit  $\sigma : N_1 \rightarrow N_2$  une bijection. Nous appelons  $\sigma$  une *zip-fonction* des graphes  $G_1$  et  $G_2$  aux sommets  $v_1$  et  $v_2$ . Le *produit zippé* de  $G_1$  et  $G_2$  relativement à  $\sigma$  est le graphe  $G_1 \odot_{\sigma} G_2$  obtenu comme l'union disjointe des graphes  $G_1 - v_1$  et  $G_2 - v_2$  à laquelle on ajoute les arêtes  $u\sigma(u)$  pour tous les sommets  $u$  de  $N_1$  (voir un exemple figure 4.1). Nous notons  $G_1 \odot_{v_1, v_2} G_2$  l'ensemble des graphes que l'on peut obtenir pour toutes les bijections entre  $N_1$  et  $N_2$ . Par un abus de notation, nous notons parfois de la même façon un représentant de cette famille, en omettant de spécifier la bijection  $\sigma$  considérée.

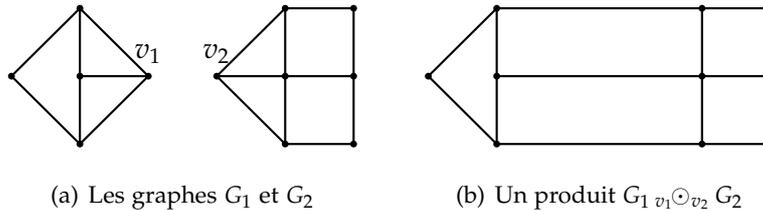


FIG. 4.1 – Un exemple de produit zippé

**Fibre.** Soit  $v$  un sommet de degré  $d$  dans un graphe  $G$ . Une *fibre* de  $v$  est un ensemble  $B$  de  $d$  chemins arêtes-disjoints reliant  $v$  à un sommet  $u$  de  $V(G) - v$ . Le sommet  $v$  est la *source* de la fibre et le sommet  $u$  en est le *puits*. Les autres sommets des chemins de  $B$  sont les *sommets internes* de la fibre. Notons  $\check{E}(B) = E(B) \cap E(G - v)$  l'ensemble des arêtes de  $B$  qui ne sont pas incidentes à  $v$ . Ce sont les *arêtes distantes* de  $B$ . Deux fibres  $B_1$  et  $B_2$  d'un même sommet  $v$  sont dites *cohérentes* si leurs arêtes distantes forment deux ensemble disjoints.

Drago Bokal [16] a prouvé le résultat suivant en 2007.

### Théorème 4.1 (Bokal [16])

Soient deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ , et deux sommets  $v_1$  de  $G_1$  et  $v_2$  de  $G_2$ , tous deux de degré  $d$ . Notons  $N_i = N_{G_i}(v_i)$ . Si  $v_i$  admet deux fibres cohérentes dans  $G_i$  pour  $i = 1, 2$ , alors  $cr(G_1 \odot_{\sigma} G_2) \geq cr(G_1) + cr(G_2)$  pour toute bijection  $\sigma : N_1 \rightarrow N_2$ .

Remarquons que le produit zippé est défini sur des graphes qui n'ont pas d'arête multiple. Il est aisé de généraliser les définitions et résultats

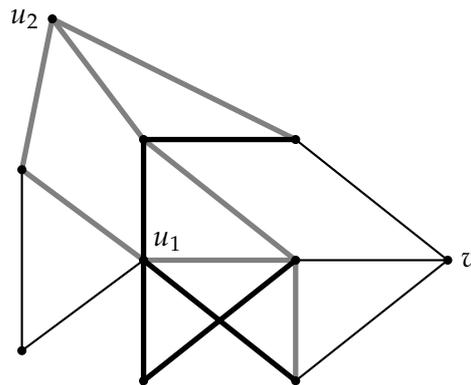


FIG. 4.2 – Exemple de fibres cohérentes

précédents au cas des arêtes multiples : en subdivisant une fois chaque instance d'une arête multiple, le nombre de croisement d'un graphe est inchangé. Le résultat peut ainsi s'appliquer. Il suffit alors de lisser les arêtes précédemment subdivisée pour obtenir le résultat désiré.

### 4.3 UNE SEULE FIBRE NE SUFFIT PAS

Dans cette partie, nous montrons que la condition du théorème 4.1 d'avoir deux fibres cohérentes dans chaque graphe ne peut pas être réduite à une seule fibre par graphe. Nous exhibons des paires de graphes ne respectant pas la conclusion du théorème 4.1, le degré des sommets zippés est arbitrairement grand.

#### 4.3.1 Deux familles de graphes

Dans cette partie, nous définissons deux familles de graphes dont le nombre de croisement est déterminé. Dans chacun de ces graphes, un sommet spécifique admet une fibre (et une seule).

##### Définition 4.1

Soit  $k$  un entier non nul et  $r$  un entier plus petit que 4. Considérons le graphe  $K_{2,4}$  muni de la bipartition  $a_i, i = 1, 2$  et  $b_j, j = 1, 2, 3, 4$ .

Nous définissons le graphe  $H_{k,r}$  obtenu à partir de  $K_{2,4}$  par les étapes suivantes :

1. ajouter un cycle  $C = b_1b_2b_3b_4$ ,
2. subdiviser l'arête  $a_1b_i$  avec un sommet  $x_i, i = 1, 3$ ,
3. ajouter l'arête  $x_1x_3$ ,
4. remplacer chaque arête par  $k$  arêtes parallèles,
5. ajouter  $r$  arêtes supplémentaires à la multi-arête  $a_i b_4, i = 1, 2$ .

La figure 4.3 représente le graphe  $H_{3,1}$ .

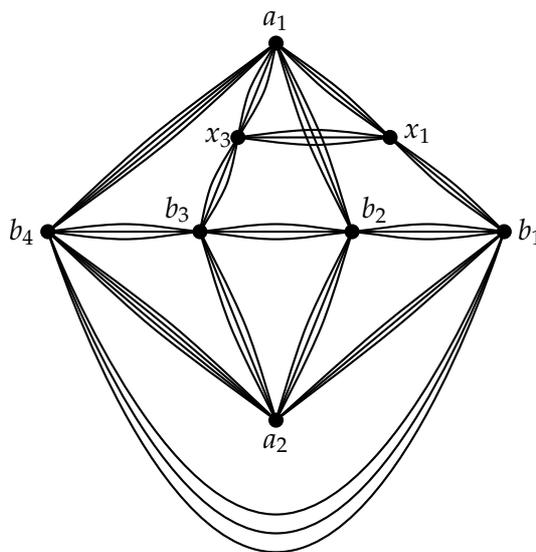


FIG. 4.3 – Le graphe  $H_{3,1}$

**Lemme 4.1**

Pour  $k \geq 1$  et  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $cr(H_{k,r}) = k^2$ .

*Démonstration.* On peut trouver aisément un  $K_{3,3}$  comme mineur du graphe  $H_{1,0} : [a_1][b_1][b_3, x_3](x_1)(b_4)(b_2)$ . Ainsi,  $cr(H_{1,0}) \geq 1$ .

De plus, le dessin de la figure 4.3 induit une façon naturelle de représenter le graphe  $H_{1,0}$  qui ne nécessite qu'un seul croisement. Nous pouvons donc conclure que  $cr(H_{1,0}) = 1$ .

En multipliant les arcs  $k$  fois, nous obtenons sans problème le nombre de croisement suivant :  $cr(H_{k,0}) = k^2 cr(H_{1,0}) = k^2$ . Comme  $H_{k,0}$  est un sous-graphe de  $H_{k,r}$ , nous pouvons écrire  $cr(H_{k,r}) \geq cr(H_{k,0})$ .

Enfin, toujours en se référant à la figure 4.3, il est aisé de modifier une représentation optimale de  $H_{k,0}$  en une représentation de  $H_{k,r}$  avec le même nombre de croisements.

En conclusion,  $cr(H_{k,r}) = cr(H_{k,0}) = k^2$ .  $\square$

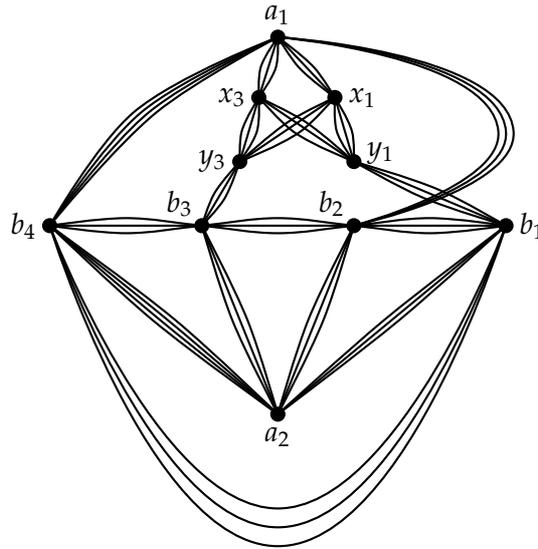
Nous définissons maintenant la deuxième famille de graphes utiles à notre démonstration.

**Définition 4.2**

Soit  $k$  un entier non nul et  $r$  un entier plus petit que 4. Considérons le graphe  $K_{2,4}$  muni de la bipartition  $a_i, i = 1, 2$  et  $b_j, j = 1, 2, 3, 4$ .

Nous définissons le graphe  $G_{k,r}$  obtenu à partir de  $K_{2,4}$  par les étapes suivantes :

1. ajouter un cycle  $C = b_1 b_2 b_3 b_4$ ,
2. subdiviser l'arête  $a_1 b_i$  deux fois avec les sommets  $x_i, y_i, i = 1, 3$ ,

FIG. 4.4 – Le graphe  $G_{3,1}$ 

3. ajouter les arêtes  $x_1y_3$  et  $x_3y_1$ ,
4. remplacer chaque arête par  $k$  arêtes parallèles,
5. ajouter  $r$  arêtes supplémentaires à la multi-arête  $a_i b_4$ ,  $i = 1, 2$ .

La figure 4.4 représente le graphe  $G_{3,1}$ .

#### Lemme 4.2

Pour  $k \geq 1$  et  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $cr(G_{k,r}) = 2k^2$ .

*Démonstration.* On peut trouver un  $K_{4,3}$  comme mineur du graphe  $G_{1,0}$  :  $[a_1, b_4][b_1, y_1][b_3, y_3](x_1)(x_3)(b_2)(a_1)$ . Or  $cr(K_{3,4}) = 2$  (voir les récents travaux de Drago Bokal, Bogdan Oporowski, Bruce Richter et Gelasio Salazar [19] sur les graphes 2-critiques). Ainsi,  $cr(G_{1,0}) \geq 2$ .

Le dessin de la figure 4.4 induit une représentation naturelle de  $G_{1,0}$  qui atteint ce nombre de croisements, et donc  $cr(G_{1,0}) = 2$ .

Par construction, en multipliant les arêtes par  $k$ , nous obtenons  $cr(G_{k,0}) = k^2 cr(G_{1,0}) = 2k^2$ . De plus, la représentation de  $G_{k,0}$  de la figure 4.4 peut être facilement modifiée en une représentation de  $G_{k,r}$  avec le même nombre de croisements. Comme  $G_{k,r}$  contient  $G_{k,0}$  comme sous-graphe, nous pouvons conclure que  $cr(G_{k,r}) = cr(G_{k,0}) = 2k^2$ .  $\square$

### 4.3.2 Un écart quadratique

#### Proposition 4.1

Soient deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ , et deux sommets  $v_1$  de  $G_1$  et  $v_2$  de  $G_2$ , tous deux de degré  $d$  et tels que chacun admet une fibre  $B_i$  dans  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ). Soit une bijection  $\sigma$  entre les voisinages de  $v_1$  et  $v_2$ .

*S'il existe une représentation optimale  $D$  de  $G_1 \odot_\sigma G_2$  telle qu'aucune arête de  $G_1 - v_1$  ne croise une arête de  $G_2 - v_2$ , alors  $cr(G_1 \odot_\sigma G_2) \geq cr(G_1) + cr(G_2)$ .*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont connexes (seules les composantes contenant  $v_1$  et  $v_2$  sont importantes). En raison de la présence des fibres, les graphes  $G_1 - v_1$  et  $G_2 - v_2$  sont également connexes.

Notons  $D_i$  (pour  $i = 1, 2$ ), la représentation obtenue de la restriction de  $D$  au graphe  $(G_i - v_i) \cup B_{3-i}$  dans laquelle nous contractons chaque face dont la frontière contient seulement des arêtes de  $B_{3-i}$ . Alors  $D_i$  est une représentation de  $G_i$ ; les zones contractées représentant le sommet  $v_i$ .

Chaque croisement de  $D_i$  est issu d'un croisement dans  $D$ . De plus, par hypothèse, aucun croisement de  $D$  n'apparaît à la fois dans  $D_1$  et  $D_2$ . Nous pouvons alors conclure  $cr(G_1 \odot_\sigma G_2) = cr(D) \geq cr(D_1) + cr(D_2) \geq cr(G_1) + cr(G_2)$ . □

Le théorème suivant établit que dans le cas général, une fibre pour chaque sommet utilisé dans le produit zippé ne suffit pas pour préserver le nombre de croisements :

**Théorème 4.2 (B., Bokal [7])**

*Pour tout  $n \geq 4$ , il existe deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  tels que chacun de ces graphes  $G_i$  contient un sommet  $v_i$  qui admet une fibre dans  $G_i$ , avec  $d_{G_i}(v_i) = n$ , et tels qu'il existe un représentant  $G$  de  $G_1 \odot_{v_1 \odot v_2} G_2$  satisfaisant  $cr(G) < cr(G_1) + cr(G_2)$ .*

*Démonstration.* Notons  $n = 4k + r$  la division euclidienne de  $n$  par 4. Posons alors  $G_1 = H_{k,r}$  et  $G_2 = G_{k,r}$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_2$  sont les sommets  $a_1$  des définitions respectives des graphes  $H_{k,r}$  et  $G_{k,r}$ . Nous pouvons d'ores et déjà vérifier aisément que ces deux sommets sont de degré  $n$  dans leurs graphes respectifs.

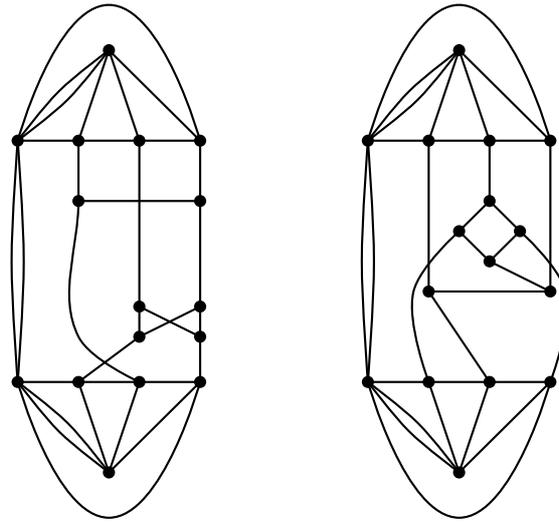
De plus, d'après les lemmes 4.1 et 4.2, nous connaissons les nombres de croisements de  $G_1$  et  $G_2$ ,  $cr(G_1) = k^2$  et  $cr(G_2) = 2k^2$ .

Le graphe  $G$  représenté sur la figure 4.5(a) est clairement un représentant de  $G_1 \odot_{v_1 \odot v_2} G_2$  (pour améliorer la lisibilité nous nous sommes restricts au cas où  $k = 1$  et  $r = 1$ ). Sa représentation illustrée sur la figure 4.5(b) nous montre que  $cr(G) \leq 2k^2 < 3k^2 = cr(G_1) + cr(G_2)$ . □

En utilisant le théorème 4.2 et la proposition 4.1, nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1**

*Pour tout  $n \geq 4$ , il existe deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  tels que chacun de ces graphes  $G_i$  contient un sommet  $v_i$  qui admet une fibre dans  $G_i$ , avec  $d_{G_i}(v_i) = n$ , et un représentant  $G$  de  $G_1 \odot_{v_1 \odot v_2} G_2$  tel que pour toute représentation optimale de  $G$ , une arête de  $G_1 - v_1$  croise une arête de  $G_2 - v_2$ .*

(a) Le produit  $G_{1,1} \odot H_{1,1}$ 

(b) Une meilleure représentation

FIG. 4.5 – Le produit  $G_{1,1} \odot H_{1,1}$ 

Nous qualifions deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  de  $n$ -compatibles si chacun d'eux contient un sommet  $v_i$  de degré  $n$  qui admet une fibre  $B_i$ . Nous définissons alors

$$g(n) = \max_{G_1, G_2} [\text{cr}(G_1) + \text{cr}(G_2) - \text{cr}(G)],$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des paires  $G_1, G_2$   $n$ -compatibles et tous les graphes  $G$  de  $G_1 v_1 \odot v_2 G_2$ .

La preuve du théorème 4.2 implique le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2**

Soit  $g$  la fonction définie ci-dessus, alors  $g(n) = \Omega(n^2)$ .

## CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous disposons donc d'une borne inférieure sur l'écart possible entre les nombres de croisements des graphes impliqués dans le produit zippé et celui du graphe produit, en fonction du nombre d'arêtes impliquées dans le produit.

À l'inverse, nous ne connaissons pas de borne supérieure. En effet, les arêtes des fibres peuvent se croiser de façon arbitraire dans une représentation optimale du produit, et les représentations optimales des graphes initiaux peuvent avoir une structure complètement différente des sous-représentations induites par la représentation du produit.

Nous pouvons synthétiser cette question comme suit :

**Problème 4.1**

*Trouver une borne supérieure pour  $g(n)$ . En particulier, est-il vrai que  $g(n) = O(n^2)$  ?*

Le théorème 4.1 établit que si les sommets impliqués dans le produit zippés admettent deux fibres cohérentes, alors le nombre de croisement est préservé. Inversement, le théorème 4.2 montre que si leur degré est au moins 4, une seule fibre par sommet ne suffit pas. On remarque facilement que si  $n = 1$ , alors  $cr(G_1 \circ_{v_1, v_2} G_2) = cr(G_1) + cr(G_2)$ . Pour  $n = 2$ , Jesús Leañós et Gelasio Salazar [54] sont parvenus au même résultat en 2008. Nous proposons donc deux problèmes ouverts.

**Problème 4.2**

*Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes avec deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  de degré 3, et admettant chacun une fibre. Est-il vrai que  $cr(G_1 \circ_{v_1, v_2} G_2) \geq cr(G_1) + cr(G_2)$  ?*

**Problème 4.3**

*Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes avec deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  de degré  $d$  tels que  $v_1$  admet deux fibres cohérentes dans  $G_1$  et  $v_2$  admet une seule fibre dans  $G_2$ . Est-il vrai que*

$$cr(G_1 \circ_{v_1, v_2} G_2) \geq cr(G_1) + cr(G_2).$$

Marcus Chimani, Carsten Gutwenger et Petra Mutzel affirment dans [26] avoir prouvé que si  $C \subseteq E(G)$  est une  $s, t$ -coupe minimum de  $G - C$ , alors il existe une représentation optimale de  $G$  telle qu'aucune arête de  $G_s$  ne croise une arête de  $G_t$ . Comme  $C$  est minimum,  $G$  peut être vu comme le produit zippé des graphes  $G_s^x$  et  $G_t^y$  respectivement obtenus de  $G_s$  et  $G_t$  par l'ajout d'un sommet  $x$  ou  $y$  connectés aux extrémités des arêtes de  $C$ . D'après le théorème de Menger, il existe une fibre pour  $x$  et  $y$  dans ces graphes. Ceci contredit le corollaire 4.1. Après un examen rigoureux, nous avons réalisé que ce résultat dépend d'une preuve qui contient des arguments invalides. Le corollaire 4.1 se trouve être un contre-exemple du résultat sus-mentionné.

Cependant, le travail incriminé [26] contient plusieurs idées originales qui pourraient mener à une réponse aux problèmes 4.2 ou 4.3. De plus, notre contre-exemple indique seulement que la preuve du résultat principale de Marcus Chimani et coll. est invalide. Les résultats principaux de leurs travaux ne sont pas infirmés pour autant. Ils partagent en quelque sorte, le sort de certains anciens résultats dans le domaine des nombres de croisements comme la conjecture de Zarankiewicz [42, 82]. Par souci de complétude, nous énonçons ce nouveau problème ouvert.

Une *planarisation* d'un graphe  $G$  est un graphe obtenu à partir d'une représentation de  $G$  en remplaçant chaque croisement par un sommet.

Une *planarisation croisements-minimum* est une planarisation obtenue à partir d'une représentation. En particulier, c'est une planarisation d'ordre minimum.

**Problème 4.4** (Chimani, Gutwenger, Mutzel [26])

*Soit  $G$  un graphe connexe,  $s$  et  $t$  deux sommets distincts dans  $G$ . Alors il existe une planarisation croisements-minimum  $P$  de  $G$ , telle que la taille d'une  $s, t$ -coupe minimum dans  $P$  est égale à la taille d'une  $s, t$ -coupe minimum dans  $G$ . De plus, toute planarisation croisements-minimum de  $G$  peut être transformée en une telle planarisation croisements-minimum de  $G$  en un temps linéaire.*

Le produit zippé peut aussi être étudié et pose des questions auxquelles il est sans doute possible de répondre facilement. Les graphes obtenus par un produit zippé ont toujours une coupe qui est aussi un couplage. Que peut-on dire des éléments de base de cette opération, qui ne peuvent pas être obtenus par un produit zippé de deux graphes ?



# PLANARITÉ DU PRODUIT DIRECT AVEC $K_2$

## SOMMAIRE

5.1	POSITION DU PROBLÈME	85
5.2	DÉFINITIONS UTILES	88
5.3	MOTIFS MAXIMAUX PLANAIRES	91
5.4	MOTIFS MINIMAUX NON-PLANAIRES	91
5.5	THÉORÈME PRINCIPAL : UNE ÉNUMÉRATION FASTIDIEUSE	93
5.5.1	Subdivisions avec moins de 4 sommets principaux	94
5.5.2	Subdivisions avec 5 sommets principaux	94
5.5.3	Subdivisions avec 6 sommets principaux	97
5.5.4	Subdivisions avec 7 sommets principaux	101
5.5.5	Subdivisions avec 8 sommets principaux	106
5.5.6	Subdivisions avec plus de 9 sommets principaux	107
	CONCLUSION	108

**C**E chapitre, traite également d'un problème essentiellement topologique avec des outils combinatoires. Pour toute opération sur les graphes, il est intéressant d'étudier le comportement de certaines caractéristiques vis-à-vis de celle-ci.

Dans le cas du produit direct de deux graphes, la planarité a été étudiée partiellement par M. Farzan et Derek A. Waller [37] en 1977. Le cas le plus difficile est le produit par le graphe à une seule arête.

Nous apportons une réponse, également partielle, à cette question en étudiant le produit de toute subdivision d'un graphe multiparti complet avec  $K_2$ . La question d'un graphe quelconque multiplié par  $K_2$  reste ouverte.

Ce travail est issu d'une collaboration menée à l'Institut Fourier avec Paul Dorbec, Sylvain Gravier et Pranava K. Jha [8].



## 5.1 POSITION DU PROBLÈME

Sans forcément pousser jusqu'à l'étude du nombre de croisements du produit de deux graphes, il est naturel de se demander dans quel mesure un tel produit est planaire ou non. Selon les produits considérés, la question a été l'objet d'attentions par différents groupes de recherche. Par exemple, Mehdi Behzad et Ebadollah S. Mahmoodian [13] ont donné en 1969 une caractérisation complète pour la planarité du produit cartésien de deux graphes. Plus tard, Pranava K. Jha et Giora Slutzki [47] ont donné en 1993 une caractérisation analogue pour le produit fort de deux graphes.

Le problème correspondant autour du produit direct semble être plus délicat à traiter. La figure 5.1 donne un exemple du produit direct de  $K_3$  par  $K_4$ . Le résultat n'est clairement pas planaire. En 1977, M. Farzan et Derek A. Waller [37] ont donné une caractérisation partielle. De façon assez peu intuitive, les cas les plus difficiles se trouvent être le produit d'un graphe quelconque  $G$  avec le graphe à une seule arête  $K_2$ .

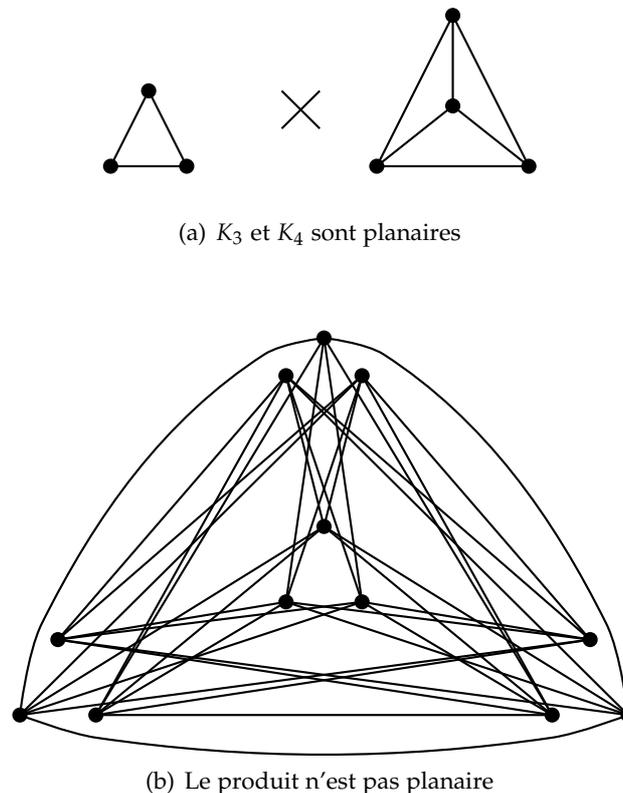


FIG. 5.1 – Un produit non-planaire

Une question naturelle concernant un produit est de savoir si un graphe  $G$  est un mineur de son produit avec  $K_2$ . La réponse est triviale pour les produits cartésien et fort, puisque  $G$  est forcément un sous-graphe du produit. Dans leurs travaux de 1993, Pranava K. Jha et Giora Slutzki [47] ont conjecturé le résultat suivant.

**Conjecture 5.1** (Jha, Slutzki [47])

*Pour tout graphe  $G$ ,  $G$  est un mineur du graphe produit  $G \times K_2$ .*

Cette conjecture fut infirmée 5 ans plus tard par Anne Bottreau et Yves Métivier [21]. Plus précisément, ils ont exhibé un contre-exemple obtenu de  $K_{3,3}$  par des subdivisions d'arêtes. En tant que subdivision de  $K_{3,3}$ , ce graphe  $G$  (voir figure 5.2) n'est pas planaire, mais son produit avec  $K_2$  l'est. En particulier,  $G \times K_2$  ne peut pas contenir un graphe non-planaire comme mineur. Nous mentionnons aussi un autre graphe  $H$  subdivision de  $K_5$  satisfaisant la même propriété (voir figure 5.3). Ces deux exemples renforcent l'idée que le comportement du produit direct n'est pas aisé à comprendre.

Nous allons par la suite étudier le produit de  $K_2$  avec les subdivisions des graphes multiparti complets.

Un graphe  $r$ -parti complet  $K_{p_1, p_2, \dots, p_r}$  est un graphe dont l'ensemble des sommets est  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$  ou chaque ensemble  $V_i$  est un ensemble de cardinal  $p_i$  pour  $1 \leq i \leq r$ , tel que deux sommets de  $V$  sont adjacents si et seulement si ils appartiennent à deux ensembles  $V_i$  et  $V_j$  différents ( $i \neq j$ ). Les ensembles  $V_i$  sont disjoints ; en particulier, le graphe  $K_{p_1, p_2, \dots, p_r}$  possède  $p_1 + p_2 + \dots + p_r$  sommets.

Soit  $G$  un graphe et notons  $G'$  le graphe obtenu en supprimant tous les sommets de degré 1 dans  $G$ . Alors  $G'$  est appelé la  $1$ -contraction de  $G$ . Nous pouvons ainsi énoncer le résultat de M. Farzan et Derek A. Waller [37] sur la planarité du produit direct.

**Théorème 5.1** (Farzan, Waller [37])

*Soient  $G$  et  $H$  deux graphes connexes avec plus de 4 sommets chacun. Alors  $G \times H$  est planaire si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (a)  *$G$  ou  $H$  est une chaîne et la  $1$ -contraction de l'autre graphe est une chaîne ou un cycle.*
- (b)  *$G$  ou  $H$  est un cycle et la  $1$ -contraction de l'autre graphe est une chaîne.*

*De plus,*

- *Les graphes  $G \times K_4$  et  $G \times (K_4 - e)$  sont planaires si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $K_2$ ,*
- *$G \times (K_3 + x)$  est planaire si et seulement si  $G$  est une chaîne,*
- *$G \times K_{1,3}$  est planaire si et seulement si  $G$  est une chaîne ou un cycle,*
- *$G \times C_4$  est planaire si et seulement si  $G$  est un arbre.*
- *$G \times C_3$  est planaire si et seulement si la  $1$ -contraction de  $G$  est une chaîne.*

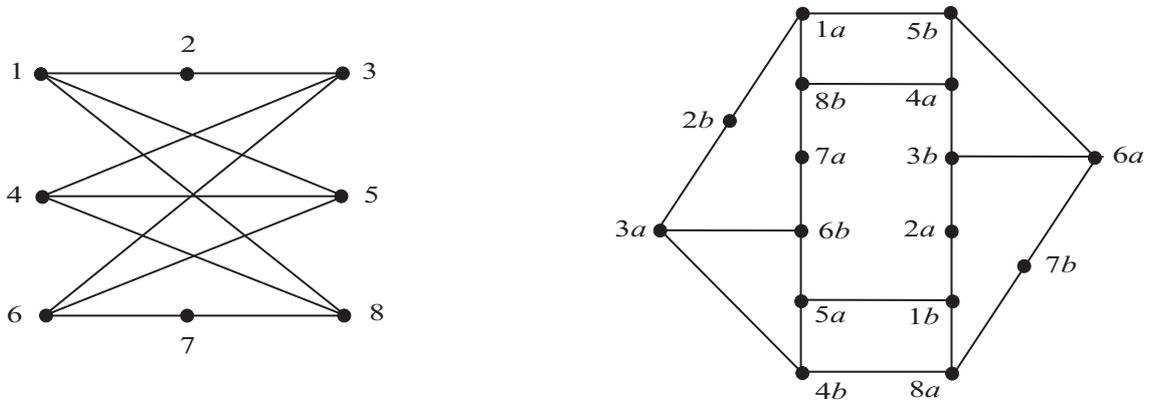


FIG. 5.2 – Un graphe  $G$  non-planaire,  $G \times K_2$  est planaire

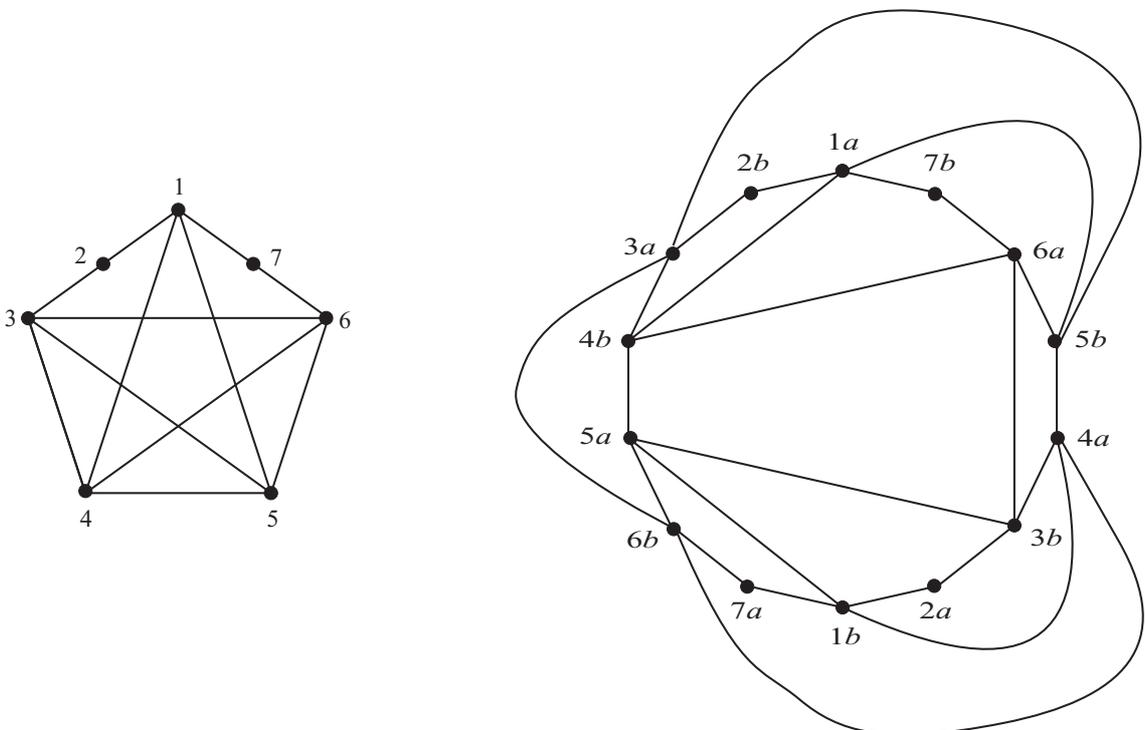


FIG. 5.3 – Un graphe  $H$  non-planaire,  $H \times K_2$  est planaire

## 5.2 DÉFINITIONS UTILES

Dans tout le reste de cette section, nous étudions le produit direct d'un graphe avec  $K_2$ . Nous notons  $a$  et  $b$  les sommets de  $K_2$ , et si  $u$  est un sommet d'un graphe  $G$ ,  $u_a$  et  $u_b$  représentent respectivement les sommets  $(u, a)$  et  $(u, b)$  du graphe  $G \times K_2$ .

**Remarque 5.1**

Dans le graphe  $G \times K_2$ , il n'y pas d'arête entre un sommet  $u_a$  et un sommet  $v_a$ . De façon similaire aucune arête ne relie un sommet  $u_b$  avec un sommet  $v_b$ . Nous avons donc deux stables  $A = \{u_a | u \in V(G)\}$  et  $B = \{u_b | u \in V(G)\}$  et le graphe est biparti.

**Lemme 5.1**

Soit  $G$  un graphe et  $G'$  un graphe obtenu en subdivisant deux fois une arête de  $G$ . Alors  $G \times K_2$  est planaire si et seulement si  $G' \times K_2$  est planaire.

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est illustrée dans la figure 5.4. Notons  $uv$  l'arête de  $G$  deux fois subdivisée. À partir d'une représentation planaire de  $G \times K_2$ , nous obtenons aisément une représentation planaire de  $G' \times K_2$  en subdivisant deux fois les arcs représentant les arêtes  $u_a v_b$  et  $u_b v_a$ .

La réciproque se montre de la même façon en effaçant les images des sommets de subdivision.  $\square$

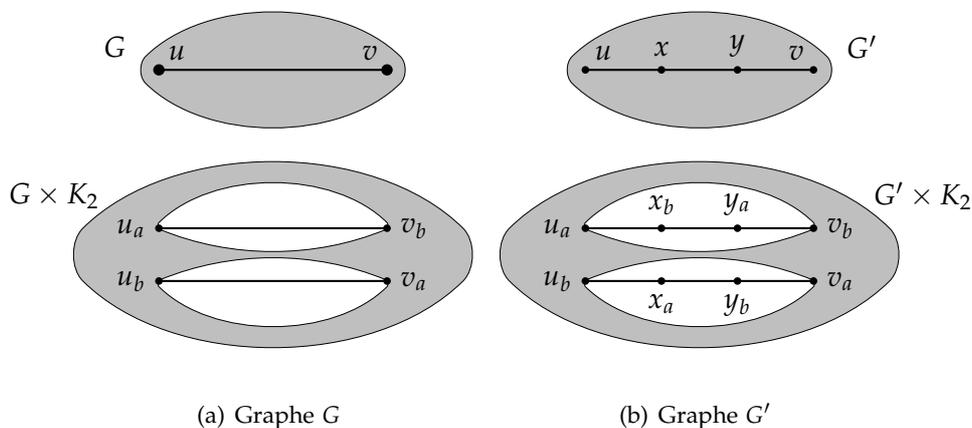


FIG. 5.4 –  $G \times K_2$  planaire  $\Leftrightarrow G' \times K_2$  planaire

Par ce lemme, pour toute subdivision d'un graphe  $G$ , nous pouvons nous contenter de considérer la parité du nombre de subdivisions par arête. Désormais, nous considérons des subdivisions telles que les arêtes sont subdivisées 1 fois ou 0 fois. Nous les appelons des *subdivisions 0-1*.

Soit  $G'$  une subdivision 0-1 d'un graphe  $G$ . Nous utilisons le vocabulaire de sommet principal, sommet de subdivision, et d'arête subdivisée ou pleine défini dans le chapitre 1. De plus, nous dirons que deux sommets principaux de  $G'$  sont *directement adjacents* si l'arête qui les relie est pleine, *indirectement adjacents* si l'arête qui les relie est subdivisée. Nous

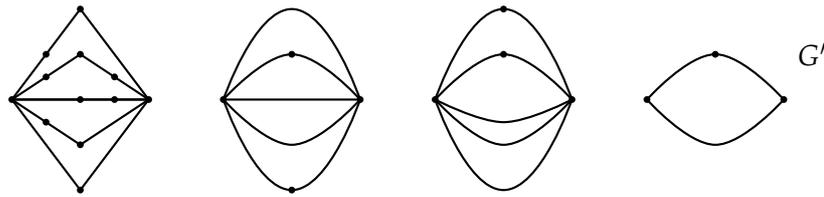


FIG. 5.5 – Utilisation du lemme 5.1 pour simplifier  $K_{1,1,4}$  en  $C_3$ .

utilisons la même nomenclature pour les sommets et arêtes d'un graphe  $G' \times K_2$ .

Pour bien appréhender la suite du traitement de ce problème, il est primordial de remarquer ce qui suit.

**Remarque 5.2**

*Dans le graphe  $G' \times K_2$ , une arête pleine relie deux sommets principaux  $u_a$  et  $v_b$ , tandis qu'une arête subdivisée relie deux sommets principaux  $u_a$  et  $v_a$ , ou  $u_b$  et  $v_b$  (le sommet de subdivision étant alors  $x_b$  ou  $x_a$ ).*

**Proposition 5.1**

*Soit  $n$  un entier et  $G$  une subdivision 0-1 de  $K_{1,n}$ ,  $K_{1,1,n}$  ou  $K_{2,n}$ . Alors  $G \times K_2$  est un graphe planaire.*

*Démonstration.* Le graphe  $K_{1,n}$  est un arbre, ainsi, toutes ses subdivisions sont également des arbres. Ce sont en particulier des graphes planaires bipartis. Le produit d'un graphe  $G$  biparti par  $K_2$  correspond à deux copies disjointes de  $G$ . Nous obtenons donc dans ce cas deux copies d'un arbre. Il s'agit bien d'un graphe planaire.

Soit  $G$  une subdivision 0-1 de  $K_{2,n}$  (respectivement  $K_{1,1,n}$ ). Le graphe  $G$  peut être vu comme deux sommets reliés par  $n$  (respectivement  $n + 1$ ) chemins disjoints. La figure 5.5 montre comment l'utilisation du lemme 5.1 permet de conclure que la planarité du graphe  $G \times K_2$  est équivalente à la planarité du graphe  $C_3 \times K_2$ . Ce dernier graphe n'est autre que le cycle de longueur 6  $C_6$ . C'est un graphe planaire, ceci conclut la preuve de la proposition 5.1.  $\square$

Nous introduisons maintenant une opération de *commutation* sur les subdivisions 0-1 visant à simplifier l'étude qui suit.

**Définition 5.1**

*Étant donné une subdivision 0-1  $G'$  d'un graphe  $G$  et  $u$  un sommet principal de  $G'$ , le commuté de  $G'$  par rapport à  $u$  noté  $S(G', u)$ , est le graphe obtenu de  $G'$  en changeant le statut de toutes les arêtes incidentes à  $u$  : les arêtes pleines deviennent subdivisées et les arêtes subdivisées deviennent pleines.*

La commutation d'une subdivision 0-1 d'un graphe n'affecte pas la planarité du produit avec  $K_2$ .

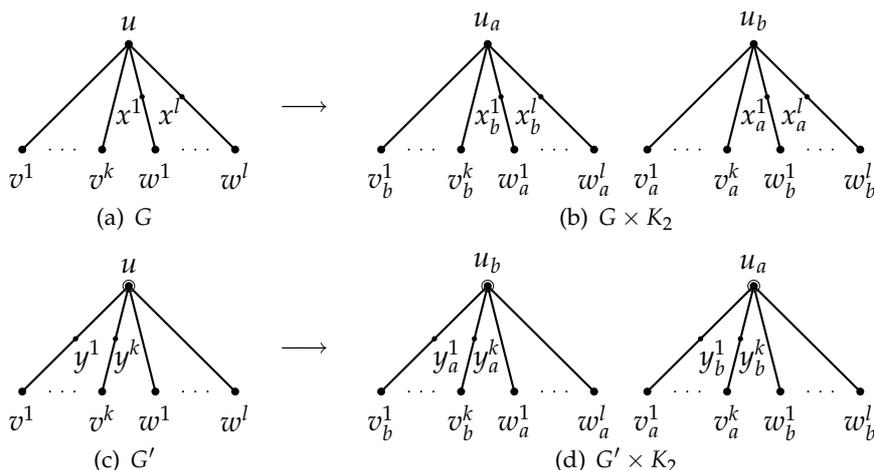


FIG. 5.6 – Illustration de preuve

**Proposition 5.2**

Soit  $G'$  une subdivision 0-1 d'un graphe  $G$ . Soit  $u$  un sommet principal de  $G'$ . Alors  $S(G', u) \times K_2$  est planaire si et seulement si  $G' \times K_2$  est planaire.

*Démonstration.* Notons  $v^1 \dots v^k$  les sommets principaux de  $G'$  directement adjacents à  $u$  et  $w^1 \dots w^l$  les sommets principaux de  $G'$  indirectement adjacents à  $u$ . Alors dans le graphe  $S(G', u)$ , le nouveau sommet  $u$  est directement adjacent aux sommets  $w^1 \dots w^l$  et indirectement adjacent aux sommets  $v^1 \dots v^k$ .

Une représentation planaire de  $S(G', u) \times K_2$  peut alors être obtenue à partir d'une représentation planaire de  $G' \times K_2$ . Il suffit d'échanger les rôles de  $u_a$  et  $u_b$  comme illustré par la figure 5.6. Les sommets de subdivisions sont modifiés de façon concordante. La planarité est clairement conservée.

Comme l'opération de commutation par rapport à un sommet  $u$  est une involution (la composée de deux telles commutations est l'identité), la réciproque de l'équivalence est prouvée.  $\square$

Par la suite, deux subdivisions 0-1  $G'$  et  $G^\dagger$  d'un graphe  $G$  qui peuvent être obtenues l'une de l'autre par une suite de commutations seront appelées *S-équivalentes*. Il est aisé de vérifier que la relation de *S-équivalence* est une relation d'équivalence. De plus, d'après la proposition 5.2, les éléments d'une classe d'équivalence se comportent de la même façon vis-à-vis de la planarité du produit avec  $K_2$ . Il suffit donc de répondre pour un représentant de chaque classe.

Nous allons être amenés à représenter des graphes très denses. Afin d'éviter des figures trop lourdes, nous utiliserons les normes suivantes qui bien qu'incongrues au départ, améliorent la lisibilité du manuscrit. Les arêtes non-subdivisées ne sont pas représentées. Les arêtes subdivisées sont représentées par des traits pleins. Les non-arêtes sont représentées par des traits pointillés.

Les seules exceptions à cette règle sont les représentations planaires de la figure 5.7. Dans cette figure, les graphes de gauches respectent la con-

vention précédente tandis que les représentations planaires des produits avec  $K_2$  sont des représentations usuelles des graphes considérés.

### 5.3 MOTIFS MAXIMAUX PLANAIRES

Dans cette partie, nous proposons une liste de graphes le plus dense possible dont le produit avec  $K_2$  reste planaire (voir figure 5.7). Dans la preuve du théorème principal, nous ferons souvent référence à ces graphes pour prouver la planarité du produit de certains graphes avec  $K_2$ .

#### Lemme 5.2

*Les graphes  $A_1$  à  $A_7$  admettent une représentation planaire de leurs produits avec  $K_2$ .*

Afin de prouver la planarité de toutes ces configurations, nous proposons dans la figure 5.7 une représentation planaire de chacun de ces produits.

Par souci de lisibilité, nous avons ajouté quelques simplifications que nous détaillons ici. Le sommet  $7_b$  n'a pas été représenté pour les graphes  $A_1 \times K_2$ ,  $A_2 \times K_2$  et  $A_3 \times K_2$ . De plus, pour toutes les représentations de  $A_i \times K_2$  (sauf celle de  $A_4 \times K_2$  représentée entièrement), nous avons omis de représenter les arêtes sur la face extérieure de notre représentation. Toutes les arêtes contenues à l'intérieur de la face intérieure doivent ainsi être recopiées en échangeant les rôles de  $a$  et  $b$  sur la face extérieure de façon symétrique. Nous obtenons ainsi des représentations planaires pour chacun de ces produits.

Le graphe  $A_4 \times K_2$  est entièrement représenté car il n'admet pas de telle symétrie.

### 5.4 MOTIFS MINIMAUX NON-PLANAIRES

La figure 5.8 dresse une liste de subdivisions 0-1 de graphes, dont le produit avec  $K_2$  n'est pas planaire. Ainsi, n'importe quelle subdivision 0-1 de graphe qui contient l'un de ces motifs comme sous-graphe partiel, est forcément non-planaire.

Afin de prouver la non-planarité de chacun de ces produits nous précisons les sommets que nous contractons pour obtenir un graphe isomorphe à  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  comme mineur.

Nous rappelons que les arêtes pleines ne sont pas représentées, les arêtes subdivisées sont représentées par un trait plein, et les non-arêtes sont représentées par un trait pointillé.

#### Preuves

- $B_1$  :  $(1_b)(5_b)(4_b)[2_a][3_a][1_a, 2_b, 3_b, 4_a, 5_a]$  induit un mineur  $K_{3,3}$ .
- $B_2$  :  $(1_a)(2_a)(3_a)(4_b)(5_a, 3_b, 4_a, 5_b)$  induit un mineur  $K_5$ .
- $B_3$  : c'est un graphe biparti. Son produit avec  $K_2$  correspond donc à deux copies isomorphe de lui-même. Comme  $B_3$  n'est pas planaire, son produit avec  $K_2$  ne l'est pas non plus.
- $B_4$  : c'est aussi un graphe biparti. Comme il n'est pas planaire, son produit avec  $K_2$  ne l'est pas non plus.

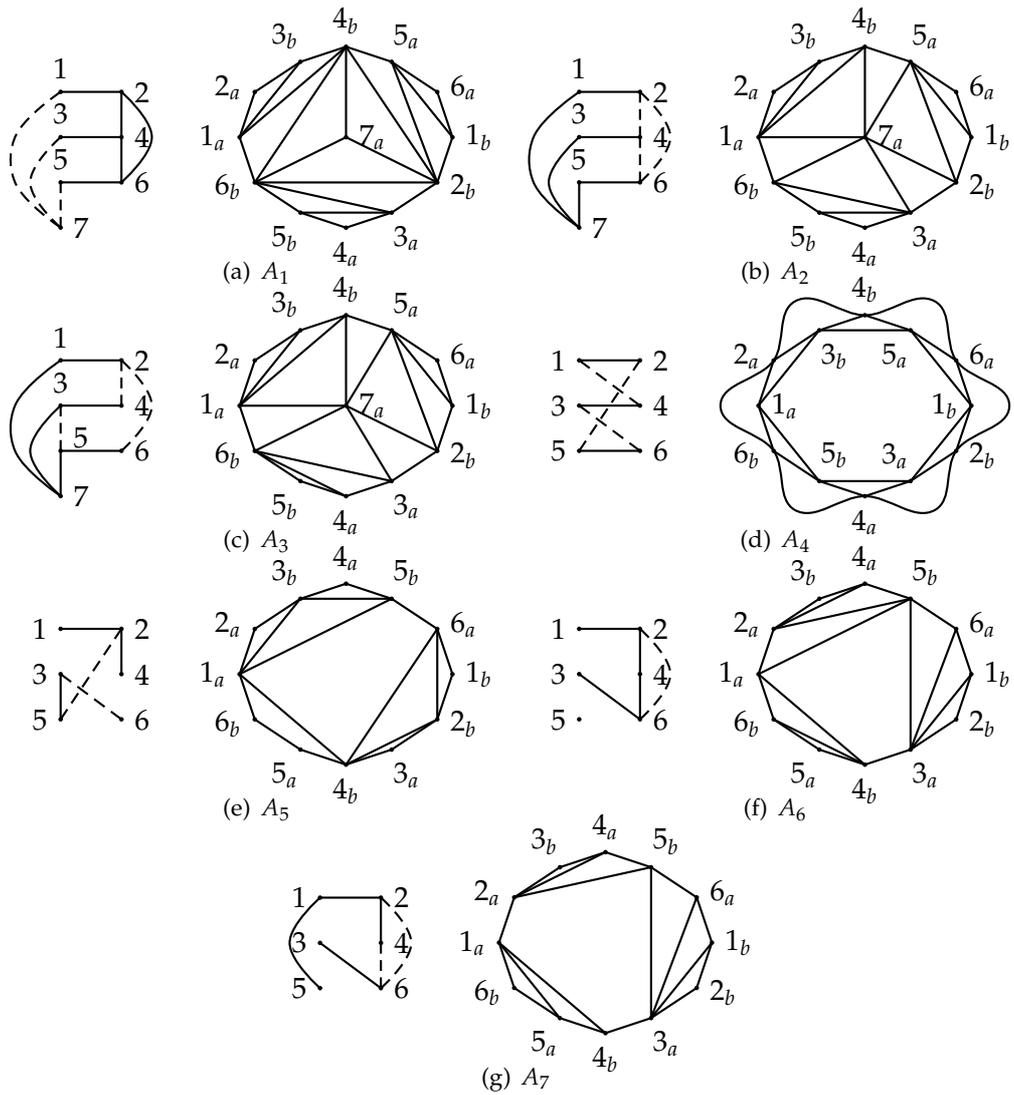


FIG. 5.7 – Des graphes denses dont le produit avec  $K_2$  est planaire

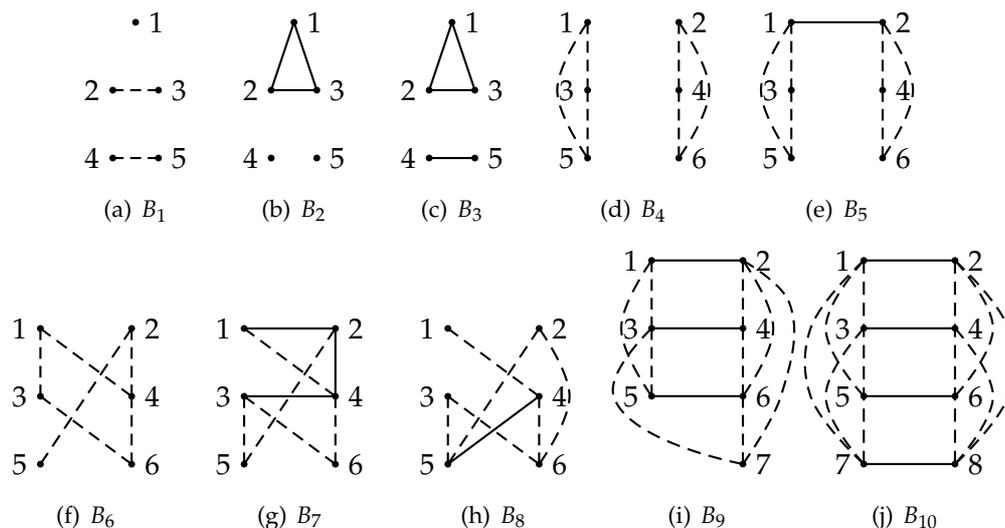


FIG. 5.8 – Motifs non-planaires

- $B_5$  :  $(2_a)(4_a)(6_a)[3_b][5_b][1_a, 1_b, 2_b, 3_a, 4_b, 5_a, 6_b]$  induit un mineur  $K_{3,3}$ .
- $B_6$  :  $(1_a)(3_a)(6_a)[2_b][5_b][2_a, 3_b, 5_a, 4_b, 6_b]$  induit un mineur  $K_{3,3}$ .
- $B_7$  :  $(1_b)(2_b)(3_a, 4_a)(6_a, 5_b)(1_a, 2_a, 3_b, 4_b, 6_b, 5_a)$  induit un mineur  $K_5$ .
- $B_8$  :  $(4_a, 5_a)(3_b, 2_a)(6_b, 1_a)(1_b, 6_a, 5_b)(2_b, 3_a, 4_b)$  induit un mineur  $K_5$ .
- $B_9$  :  $(1_b)(5_b)(4_b)[7_a][4_a, 7_b, 5_a][2_a, 1_a, 6_b, 3_a, 2_b]$  induit un mineur  $K_{3,3}$ .
- $B_{10}$  :  $(1_a, 4_a, 5_b, 6_b)(1_a)(2_a, 3_b)(8_b, 7_b)(4_b, 5_a, 6_a)$  induit un mineur  $K_5$ .

## 5.5 THÉORÈME PRINCIPAL : UNE ÉNUMÉRATION FASTIDIEUSE

### Théorème 5.2 (B., Dorbec, Gravier, Jha [8])

Soit  $G$  une subdivision d'un graphe multiparti complet. Notons  $G'$  sa subdivision 0-1 correspondante. Alors  $G \times K_2$  est planaire si et seulement si  $G'$  ne contient pas de sous-graphe partiel  $S$ -équivalent à l'un des graphes  $B_i$  ( $1 \leq i \leq 10$ ).

Afin de prouver ce théorème, nous allons énumérer tous les graphes multipartis complets à moins de 8 sommets, et leurs subdivisions 0-1. Pour réduire l'ampleur de ce travail, nous disposons de la proposition 5.2 qui nous permet de ne considérer qu'un seul représentant de chaque classe d'équivalence pour la relation de  $S$ -équivalence.

Chacun des cas étudiés est traité dans une figure. Le légende de ces figures nous renseigne sur la planarité ou non du produit du graphe considéré avec  $K_2$ . La numérotation des sommets nous renseigne sur le morphisme qui nous permet de conclure. Certains sommets sont entourés d'un cercle, ils servent aux opérations de commutation pour vérifier le morphisme.

Nous avons trois types de légende.

- P(biparti) : dans ce cas, le graphe est biparti et son produit avec  $K_2$  correspond à deux copies isomorphes de lui-même. Comme le graphe est planaire, son produit l'est également.

- $P(A_i)$  : dans ce cas, le produit avec  $K_2$  est planaire. La numérotation des sommets indique un morphisme des sommets principaux de la subdivision 0-1 considérée vers le graphe  $A_i$ . En tant que sous-graphe partiel de  $A_i$ , le graphe considéré admet bien une représentation planaire de son produit avec  $K_2$ .
- $NP(B_i)$  : dans ce cas, le produit avec  $K_2$  n'est pas planaire. La numérotation des sommets indique un morphisme de  $B_i$  vers la subdivision 0-1 étudiée.

Dans les deux derniers cas, certains sommets cerclés doivent être commutés car le morphisme concerne une subdivision  $S$ -équivalente.

### 5.5.1 Subdivisions avec moins de 4 sommets principaux

Nous commençons par prouver que toutes les subdivisions 0-1 de  $K_4$  admettent une représentation planaire de leurs produits avec  $K_2$ .

Considérons une telle subdivision. Pour chaque sommet principal, nous pouvons commuter les sommets qui ont plus de deux arêtes subdivisées incidentes. Ceci fait décroître le nombre total d'arêtes subdivisées. Ainsi toute classe d'équivalence contient un représentant dont tous les sommets principaux sont incidents à au plus une arête subdivisée.

Toute subdivision 0-1 de  $K_4$  peut alors être réduite à une des 3 subdivisions étudiées dans la figure 5.9.

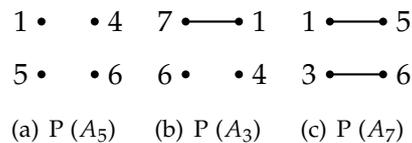


FIG. 5.9 – Étude des subdivisions de  $K_4$

Comme toutes les subdivisions 0-1 de  $K_4$  ont leurs produits avec  $K_2$  planaires, cette propriété est également vérifiée pour toute subdivision 0-1 d'un graphe d'ordre plus petit ou égal à 4.

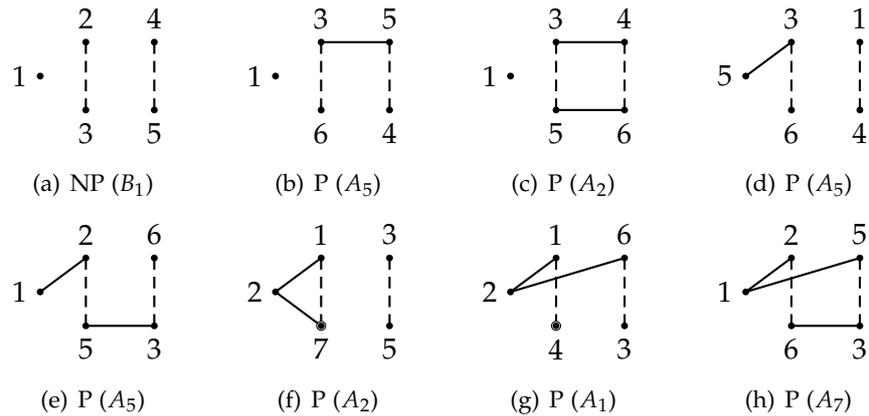
Lorsque le contexte le permet, nous parlerons de subdivision et de subdivision 0-1 indifféremment.

### 5.5.2 Subdivisions avec 5 sommets principaux

D'après la proposition 5.1, les subdivisions de  $K_{1,4}$ ,  $K_{2,3}$  et  $K_{1,1,3}$  ont toutes leurs produits avec  $K_2$  planaires.

Il reste à étudier les subdivisions de  $K_{1,2,2}$ ,  $K_{1,1,1,2}$  et  $K_5$ .

**Subdivisions de  $K_{1,2,2}$ .** Commençons par l'étude des subdivisions de  $K_{1,2,2}$ . Toute subdivision de ce graphe est  $S$ -équivalente à une subdivision dont les sommet de degré 3 sont incidents à au plus une arête subdivisée. Un telle subdivision peut alors se réduire à une subdivision dont le sommet principal de degré 4 est incident à au plus deux arêtes subdivisées, et dont les sommets de degré 3 sont toujours incidents à au plus une arête subdivisée.

FIG. 5.10 – Étude des subdivisions de  $K_{1,2,2}$ 

Ces subdivisions sont énumérées dans la figure 5.10. Remarquons que par exemple dans le cas 5.10(b), la non-arête entre les sommets 4 et 5 est envoyée sur une arête de  $A_5$ . Ceci ne va pas à l'encontre de la preuve car il suffit de trouver un morphisme du graphe vers  $A_5$ .

Enfin nous rappelons une fois de plus que les sommets encerclés doivent être commutés pour obtenir le morphisme satisfaisant.

Nous pouvons remarquer que la subdivision de la figure 5.10(c) est S-équivalente à celle de la figure 5.10(g) : il suffit de commuter les sommets numérotés 3 et 6 par exemple. De la même façon, les subdivisions illustrées par les figures 5.10(h) et 5.10(e) sont S-équivalentes : il suffit de commuter les sommets 1 et 3. Nous en déduisons la remarque suivante.

**Remarque 5.3**

*Toutes les classes d'équivalences des subdivisions de  $K_{1,2,2}$  ont un représentant parmi les subdivisions illustrées par les figures 5.10(a), 5.10(b), 5.10(d), 5.10(e), 5.10(f) et 5.10(g).*

**Subdivisions de  $K_{1,1,1,2}$ .** Nous nous intéressons maintenant aux subdivisions de  $K_{1,1,1,2}$ . Nous nous référons à la figure 5.11(a) pour les noms des sommets. Nous pouvons supposer que le sous-graphe induit par  $a, b$  et  $c$  a au plus une arête subdivisée : sinon, nous pouvons commuter un sommet incident à 2 arêtes subdivisées.

De plus, nous pouvons commuter les sommets  $d$  et  $e$  de sorte qu'ils ont au plus une arête incidente subdivisée. Ainsi, il nous suffit d'énumérer les subdivisions de la figure 5.11.

Remarquons que pour les cas (b) et (c), aucune arête ne relie les sommets 2 et 3 dans  $B_1$ . Comme nous cherchons à démontrer la non-planarité, il suffit d'exhiber un morphisme de  $B_1$  dans le graphe considéré. Le statut des non-arêtes de  $B_1$  importe peu.

**Subdivisions de  $K_5$ .** Nous pouvons maintenant étudier les subdivisions de  $K_5$ . Le même argument de commutation nous permet de considérer uniquement les subdivisions telles que chaque sommet est incident à au plus 2 arêtes subdivisées. Nous en déduisons l'énumération de la figure 5.12.

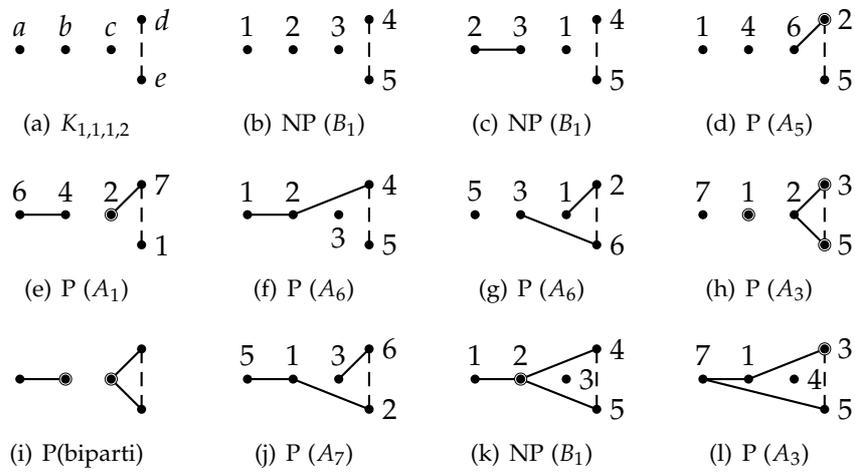


FIG. 5.11 – Étude de  $K_{1,1,1,2}$

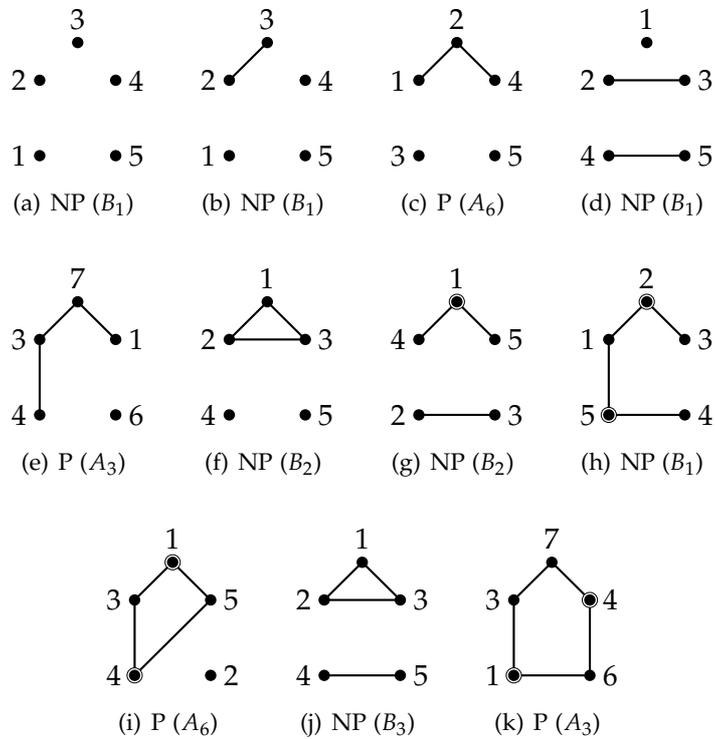
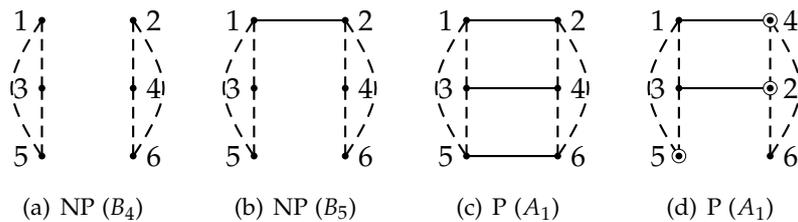


FIG. 5.12 – Étude de  $K_5$

FIG. 5.13 – Étude de  $K_{3,3}$ 

### 5.5.3 Subdivisions avec 6 sommets principaux

D'après la proposition 5.1, les subdivisions de  $K_{1,5}$ ,  $K_{2,4}$ , et  $K_{1,1,4}$  admettent une représentation planaire de leurs produits avec  $K_2$ .

**Subdivisions de  $K_{3,3}$ .** Concernant les subdivisions du graphe  $K_{3,3}$ , nous pouvons toujours nous ramener, par une suite de commutations des sommets incidents à deux arêtes subdivisées, à une subdivision telle que chaque sommet est incident à au plus une arête subdivisée. L'énumération de la figure 5.13 est donc complète.

Comme la subdivision de la figure 5.13(d) est  $S$ -équivalente à celle de la figure 5.13(c) par les commutations des sommets indiqués, nous pouvons faire la remarque suivante.

**Remarque 5.4**

*Étant donnée une subdivision de  $K_{3,3}$ , son produit avec  $K_2$  est planaire si et seulement si elle est  $S$ -équivalente à la subdivision de la figure 5.13(c).*

**Subdivisions de  $K_{1,2,3}$ .** Le graphe  $K_{1,2,3}$  contient  $K_{3,3}$  comme sous-graphe, comme illustré sur la figure 5.14(a). La bipartition considérée est  $\{a, b, c\}$  et  $\{d, e, f\}$ .

D'après la remarque 5.4, toute subdivision dont la sous-subdivision induite de ce  $K_{3,3}$  n'est pas  $S$ -équivalente à la subdivision de la figure 5.13(c), n'admet pas de représentation planaire de son produit avec  $K_2$ . Nous considérons donc uniquement les subdivisions dérivées de la figure 5.14(b) où les arcs en points  $ac$  et  $ab$  représentent des arêtes au statut indéterminé.

L'énumération de ces configurations est réalisée sur la figure 5.14. Elles ont toutes leurs produits avec  $K_2$  planaires.

**Subdivisions de  $K_{2,2,2}$ .** Considérons le graphe  $K_{2,2,2}$  représenté sur la figure 5.15.

Le sous-graphe induit par les sommets  $\{a, b, c, d, e\}$  est isomorphe à  $K_{1,2,2}$ . Si la sous-subdivision correspondante n'est pas planaire lorsqu'elle est multipliée par  $K_2$ , alors la subdivision complète subit le même sort.

Nous pouvons donc nous restreindre aux subdivisions de  $K_{2,2,2}$  telles que cette sous-subdivision fait partie des configurations dont le produit avec  $K_2$  est planaire : il s'agit des subdivisions illustrées sur les figures 5.10(b), 5.10(d), 5.10(e), 5.10(f) et 5.10(g). Les autres configurations satisfaisantes sont  $S$ -équivalentes à l'une d'entre elles d'après la remarque 5.3.

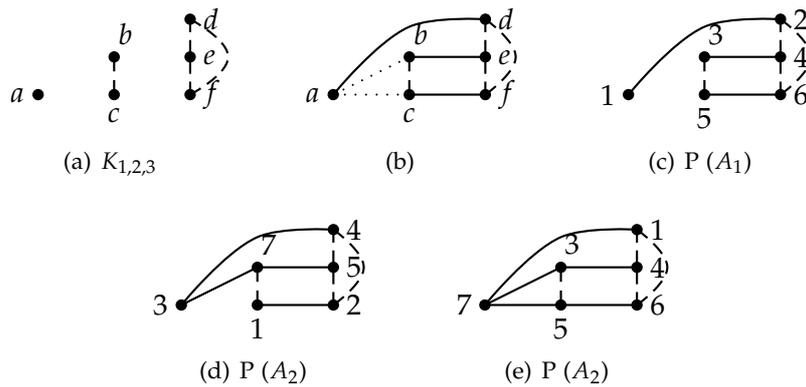


FIG. 5.14 – Étude de  $K_{1,2,3}$

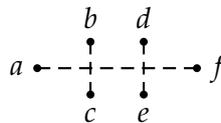


FIG. 5.15 – Le graphe  $K_{2,2,2}$

De plus, nous pouvons supposer que le sommet restant  $f$  est incident à au plus deux arêtes subdivisées (toujours par l'argument de commutation). Et s'il est incident à exactement deux arêtes subdivisées, nous pouvons le supposer adjacent au sommet  $d$  par une ou zéro commutation.

Une fois ces simplifications admises, les configurations restantes sont celles des figures 5.16 à 5.20.

**Subdivisions de  $K_{1,1,1,3}$ .** Pour l'étude de  $K_{1,1,1,3}$ , nous remarquons que ce graphe contient  $K_{3,3}$  comme sous graphe induit : il suffit de considérer la bipartition  $\{a, b, c\}$  et  $\{d, e, f\}$  de la figure 5.21(a).

Comme pour l'étude de  $K_{2,2,2}$ , nous pouvons utiliser la remarque 5.4 pour se restreindre à l'énumération de la figure 5.21.

**Subdivisions de  $K_{1,1,2,2}$ .** Soit une subdivision de  $K_{1,1,2,2}$  dont le produit avec  $K_2$  est planaire. Comme elle contient une sous-subdivision isomorphe à une subdivision de  $K_{3,3}$ , il existe une suite de commutations qui mène à l'une des subdivisions des figures 5.22(a) et 5.22(b).

Les énumérations correspondantes se trouvent respectivement aux figures 5.23 et 5.24.

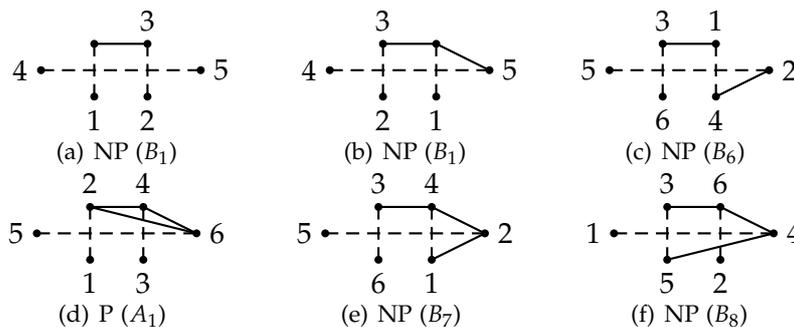


FIG. 5.16 – Étude de  $K_{2,2,2}$  : sous-subdivision isomorphe à 5.10(b)

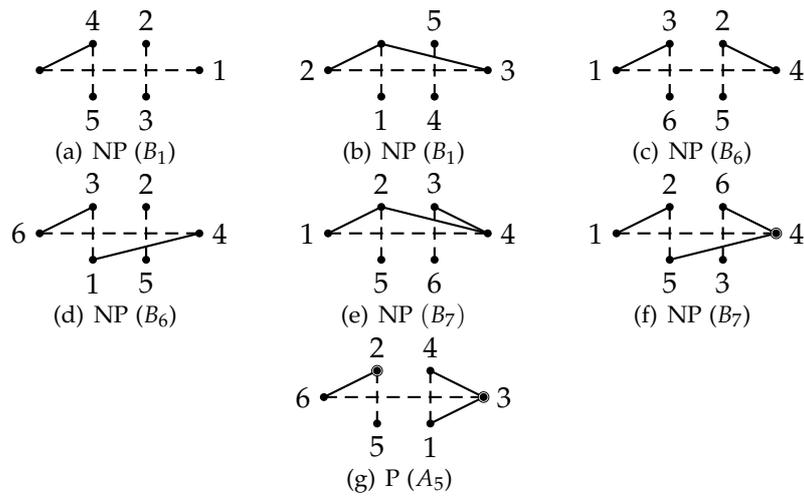


FIG. 5.17 – Étude de  $K_{2,2,2}$  : sous-subdivision isomorphe à 5.10(d)

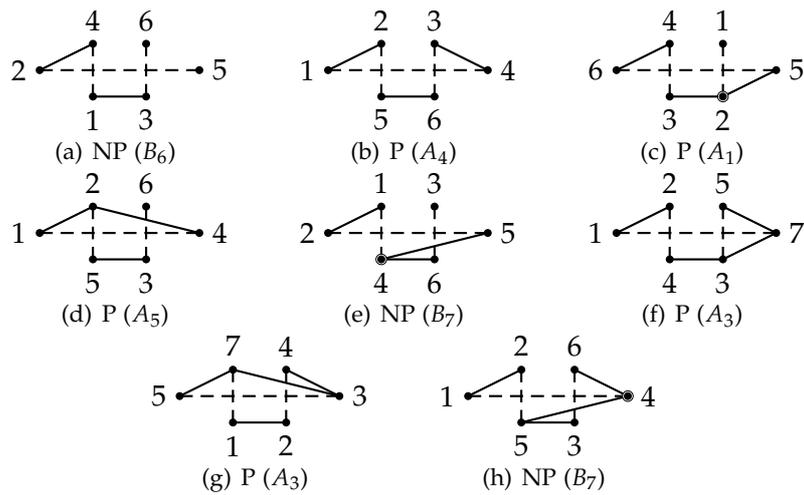


FIG. 5.18 – Étude de  $K_{2,2,2}$  : sous-subdivision isomorphe à 5.10(e)

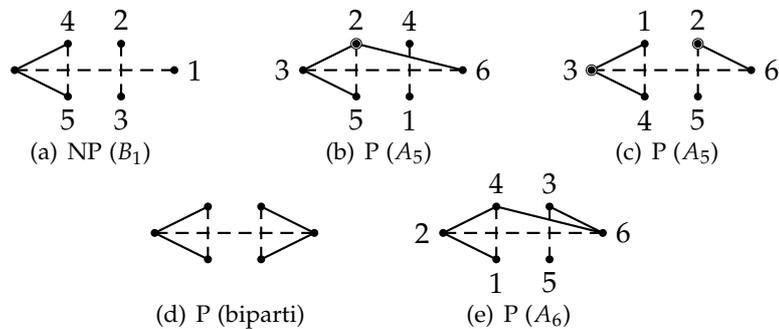


FIG. 5.19 – Étude de  $K_{2,2,2}$  : sous-subdivision isomorphe à 5.10(f)

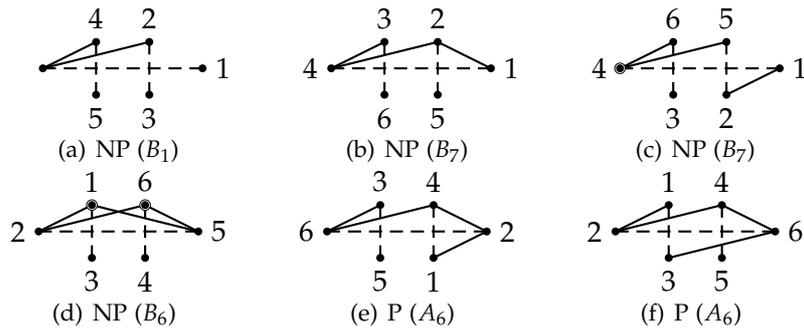


FIG. 5.20 – Étude de  $K_{2,2,2}$  : sous-subdivision isomorphe à 5.10(g)

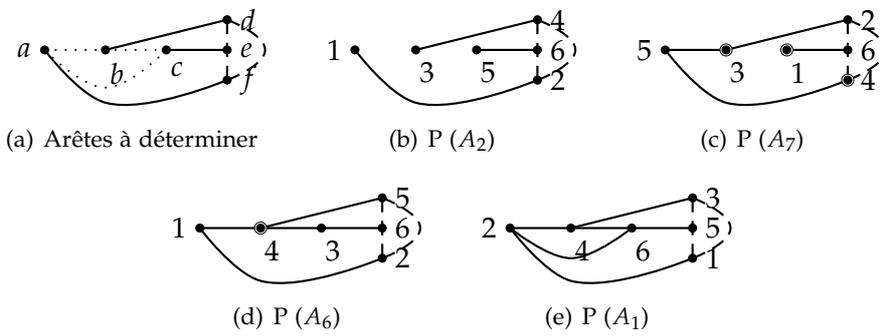


FIG. 5.21 – Étude de  $K_{1,1,1,3}$

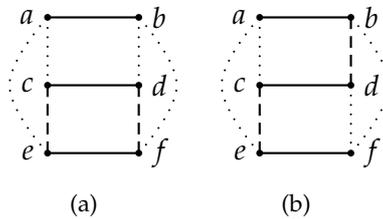


FIG. 5.22 –  $K_{1,1,2,2}$  contient  $K_{3,3}$

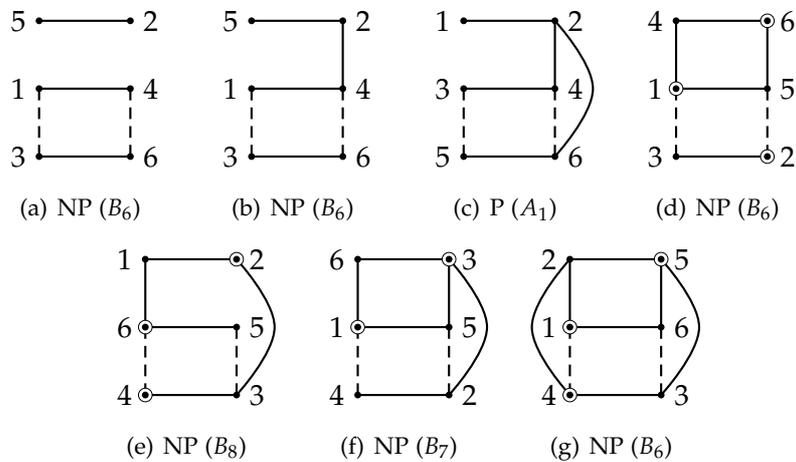
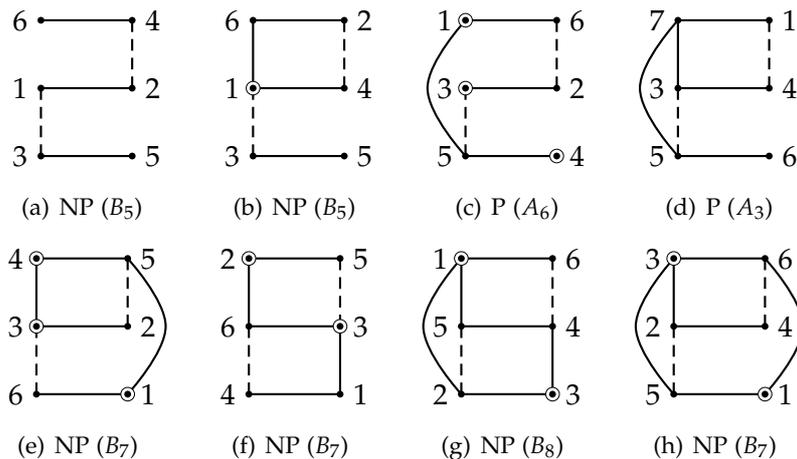


FIG. 5.23 – Étude de  $K_{1,1,2,2}$  : premier cas

FIG. 5.24 – Étude de  $K_{1,1,2,2}$  : deuxième cas

**Subdivisions de  $K_{1,1,1,1,2}$ .** Le graphe  $K_{1,1,1,1,2}$  admet  $K_{1,1,2,2}$  comme sous-graphe induit. Toute subdivision de  $K_{1,1,2,2}$  admettant une représentation planaire de son produit avec  $K_2$  est  $S$ -équivalent à l'une des subdivisions illustrées sur les figures 5.23(c), 5.24(c) et 5.24(d).

Il suffit donc de décider du statut de l'arête manquante (subdivisée ou non) pour énumérer toutes les configurations dont le produit avec  $K_2$  peut être planaire. Ceci est effectué sur la figure 5.25.

**Subdivisions de  $K_6$ .** Le graphe complet à 6 sommets contient en particulier un sous-graphe partiel isomorphe à  $K_{1,1,1,1,2}$ . Ainsi toute subdivision de  $K_6$  dont le produit avec  $K_2$  est planaire admet une suite de commutations la réduisant à l'une des subdivisions des figures 5.25(a) et 5.25(b) augmentée d'une arête subdivisée ou non.

L'énumération est réalisée dans la figure 5.26.

#### 5.5.4 Subdivisions avec 7 sommets principaux

D'après la proposition 5.1, les subdivisions des graphes  $K_{1,6}$ ,  $K_{2,5}$  et  $K_{1,1,5}$  ont toutes leurs produits avec  $K_2$  planaires.

**Subdivisions de  $K_{3,4}$ .** Afin d'étudier les subdivisions de  $K_{3,4}$ , nous pouvons remarquer que ce graphe contient  $K_{3,3}$  comme sous-graphe. D'après la remarque 5.4, la sous-subdivision correspondante peut être réduite à celle de la figure 5.13(c).

De plus, le quatrième sommet du stable d'ordre 4 peut être commuté de sorte qu'il est incident à au plus une arête subdivisée. Nous obtenons l'énumération de la figure 5.27.

**Subdivisions de  $K_{1,2,4}$ .** Nous considérons la sous-subdivision de  $K_{3,4}$  qui doit admettre une représentation planaire de son produit avec  $K_2$ . Elle est donc  $S$ -équivalente à la subdivision de la figure 5.27(a).

Nous énumérons alors les graphes de la figure 5.28.

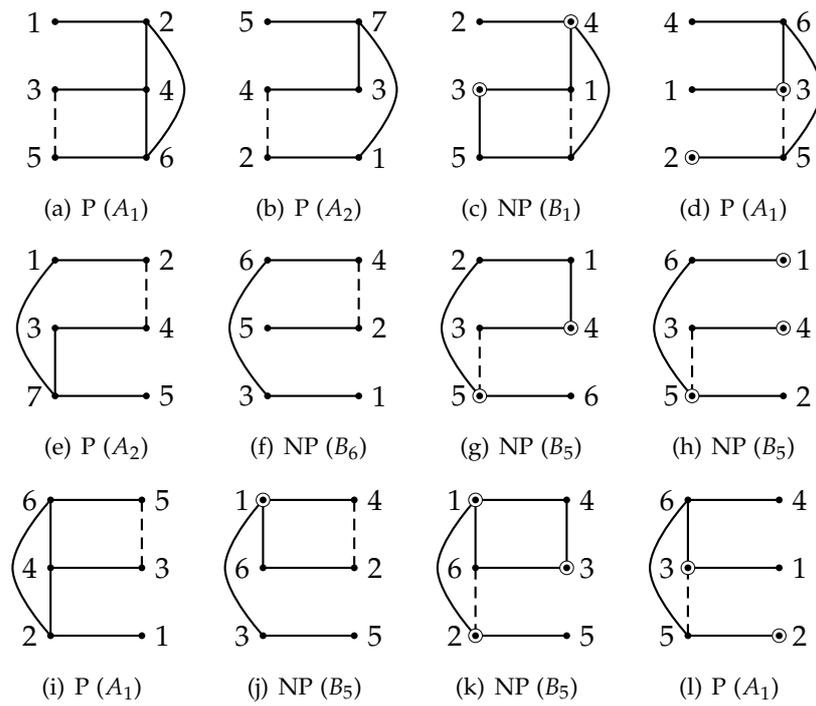


FIG. 5.25 – Étude de  $K_{1,1,1,1,2}$

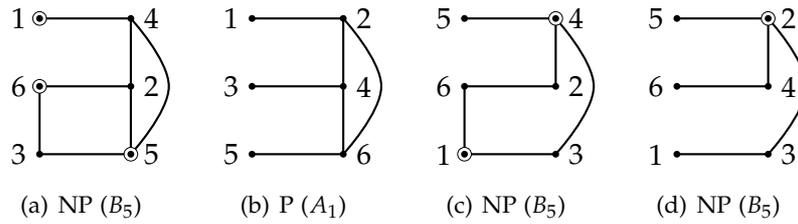


FIG. 5.26 – Étude de  $K_6$

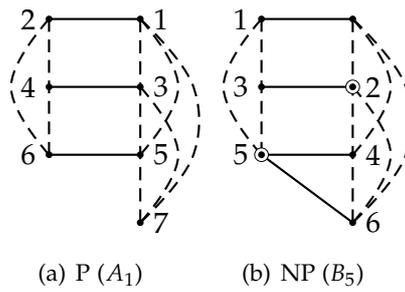


FIG. 5.27 – Étude de  $K_{3,4}$

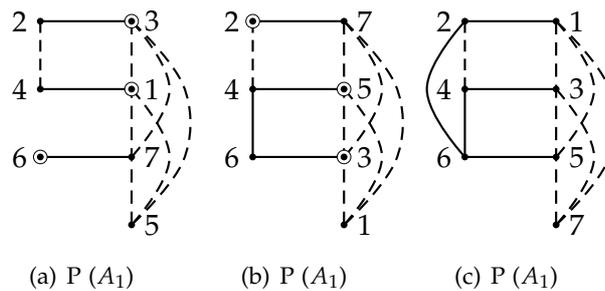
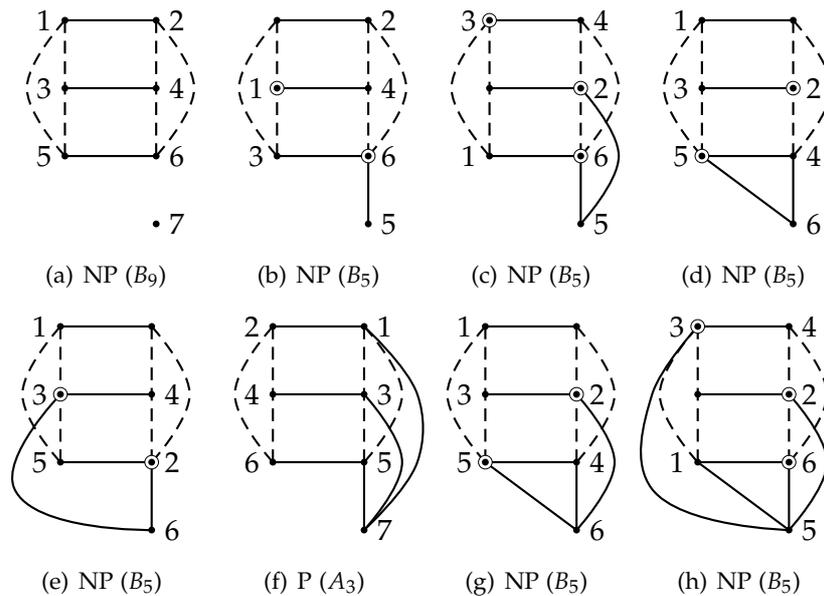


FIG. 5.28 – Étude de  $K_{1,2,4}$

FIG. 5.29 – Étude de  $K_{1,3,3}$ 

**Subdivisions de  $K_{1,3,3}$ .** Le graphe  $K_{1,3,3}$  contient  $K_{3,3}$  comme sous-graphe. Ainsi, nous pouvons énumérer les classes à partir de la figure 5.13(c). De plus, le sommet supplémentaire peut être commuté de sorte qu'il soit incident à au plus 3 arêtes subdivisées.

L'étude de ces subdivisions est résumée sur la figure 5.29.

**Subdivisions de  $K_{2,2,3}$ .** Considérons le sous-graphe  $K_{3,4}$  de  $K_{2,2,3}$ . Une subdivision de  $K_{2,2,3}$  dont le produit avec  $K_2$  est planaire est alors  $S$ -équivalente à une configuration compatible avec celle de la figure 5.30(a). Les arêtes au statut indéterminé sont représentées par des arcs en points.

Si nous fixons zéro ou une arête inconnue comme subdivisée, nous obtenons  $B_9$  comme sous-graphe. Le produit avec  $K_2$  est alors non-planaire. Nous pouvons supposer qu'au moins deux d'entre elles sont subdivisées.

Si elles sont exactement au nombre de deux et qu'une d'entre elle est l'arête  $df$  ou  $bf$ , alors nous pouvons aussi retrouver la subdivision  $B_9$  comme sous-structure.

En conclusion, l'énumération de la figure 5.30 est complète.

**Subdivisions de  $K_{1,1,1,4}$ .** Nous trouvons encore  $K_{3,4}$  comme sous-graphe. Il suffit donc d'énumérer les subdivisions qui généralisent celle de la figure 5.27(a). Ceci est fait à la figure 5.31.

**Subdivisions de  $K_{1,1,2,3}$ .** Dans ce cas, nous nous appuyons sur la seule classe de subdivisions de  $K_{2,2,3}$  qui admet un produit avec  $K_2$  planaire, représentée sur la figure 5.30(b). Il suffit ensuite de déterminer le statut de l'arête supplémentaire. Notons que cette arête supplémentaire a deux positions possibles. Nous obtenons alors quatre cas à étudier.

L'étude est effectuée sur la figure 5.32.

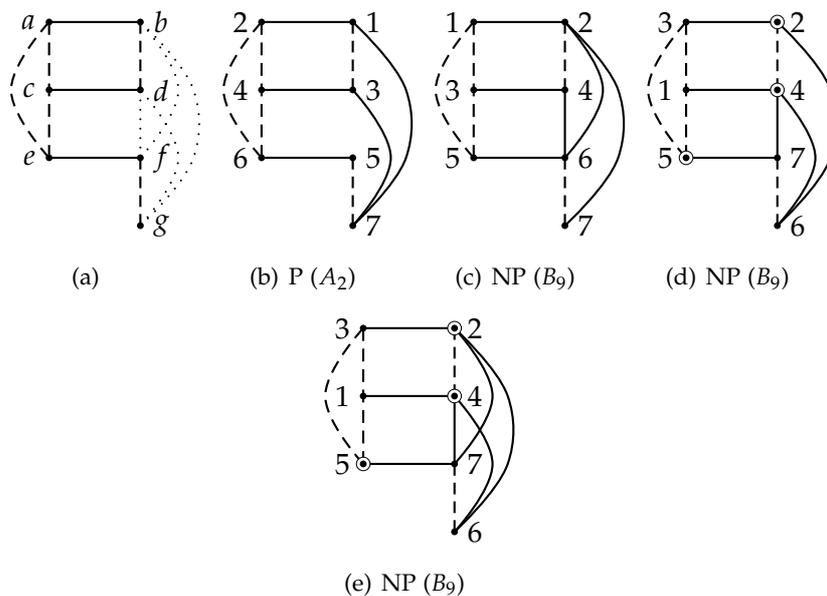


FIG. 5.30 – Étude de  $K_{2,2,3}$

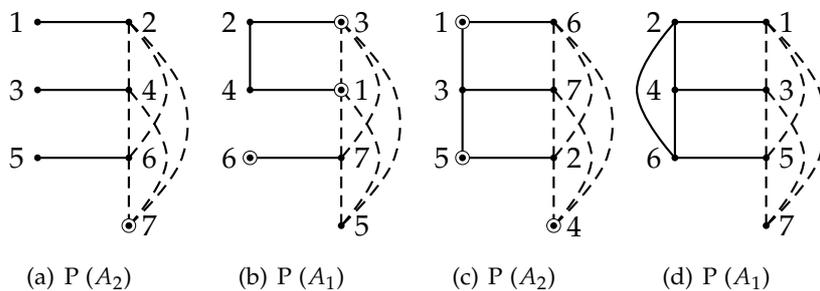


FIG. 5.31 – Étude de  $K_{1,1,1,4}$

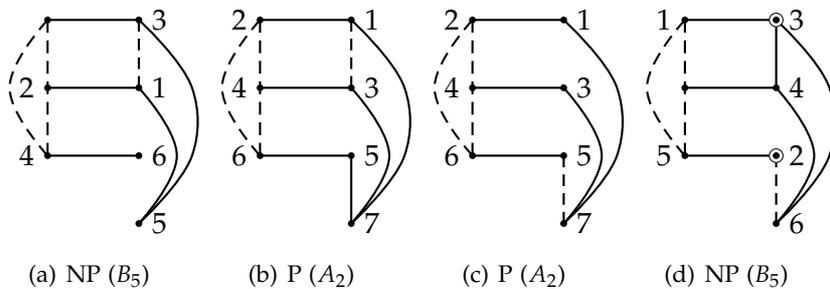


FIG. 5.32 – Étude de  $K_{1,1,2,3}$

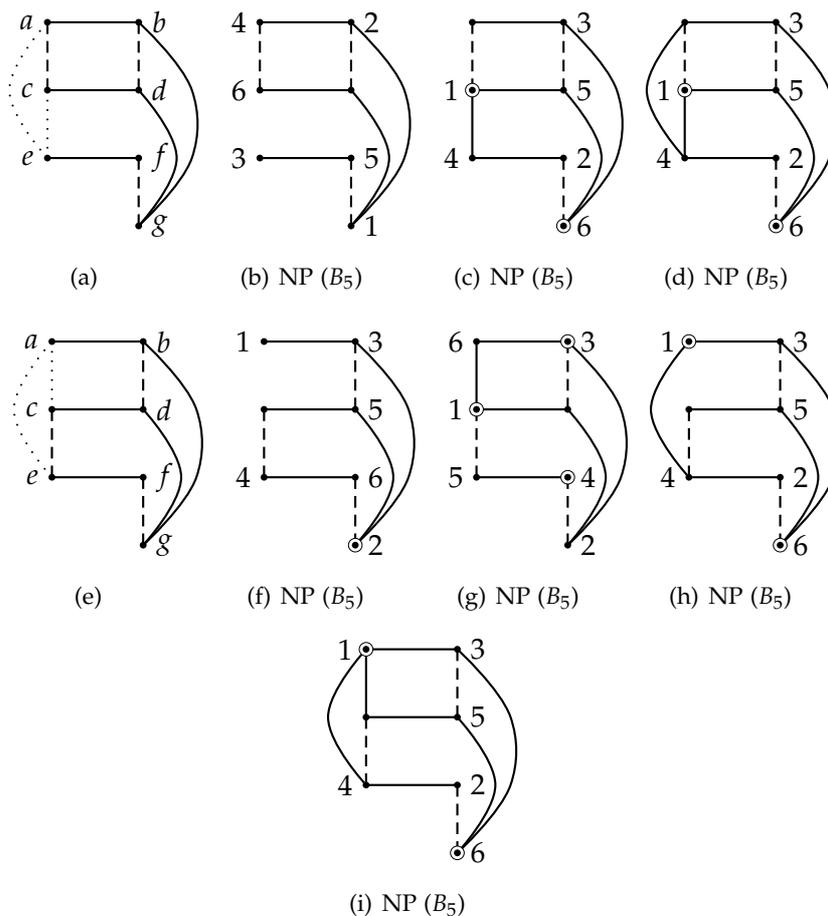


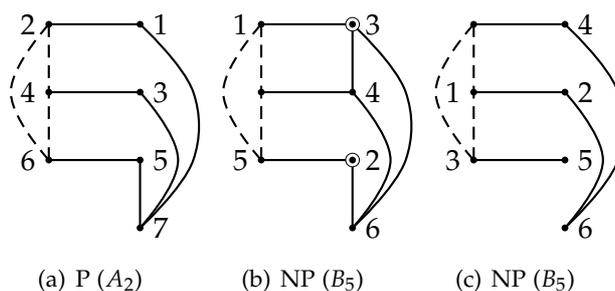
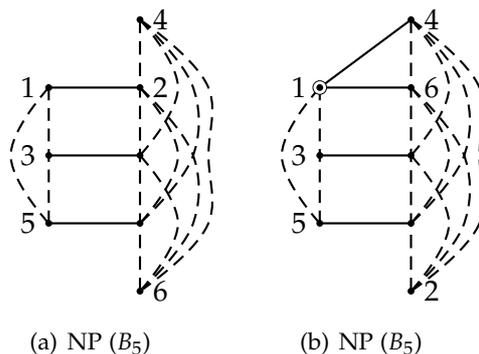
FIG. 5.33 – Étude de  $K_{1,2,2,2}$

**Subdivisions de  $K_{1,2,2,2}$ .** Nous nous appuyons également sur la seule configuration possible pour la sous-subdivision de  $K_{2,2,3}$ . Deux non-arêtes sont alors fixées. La troisième non-arête du graphe  $K_{1,2,2,2}$  peut correspondre à chacune des arêtes du stable de taille 3 dans  $K_{2,2,3}$ . Par des considérations de symétrie, nous nous ramenons aux deux configurations possibles des figures 5.33(a) et 5.33(e).

Nous pouvons alors énumérer les subdivisions de la figure 5.33. Nous concluons que toute subdivision de  $K_{1,2,2,2}$  a son produit avec  $K_2$  non planaire.

**Subdivisions de  $K_{1,1,1,1,3}$ .** En partant des configurations possibles pour la sous-subdivision de  $K_{1,1,2,3}$  illustrées sur les figures 5.32(b) et 5.32(c), nous nous restreignons à l'étude des trois configurations de la figure 5.34.

**Autres subdivisions à 7 sommets principaux** Toute subdivision de  $K_{1,1,1,2,2}$ ,  $K_{1,1,1,1,1,2}$  ou  $K_7$  admet une sous-subdivision de  $K_{1,2,2,2}$  dont le produit avec  $K_2$  n'est pas planaire. A fortiori, son produit avec  $K_2$  n'est pas planaire non plus.

FIG. 5.34 – Étude de  $K_{1,1,1,1,3}$ FIG. 5.35 – Étude de  $K_{3,5}$ 

### 5.5.5 Subdivisions avec 8 sommets principaux

D'après la proposition 5.1, les subdivisions de  $K_{1,7}$ ,  $K_{2,6}$  ou  $K_{1,1,6}$  ont toutes leurs produits avec  $K_2$  planaires.

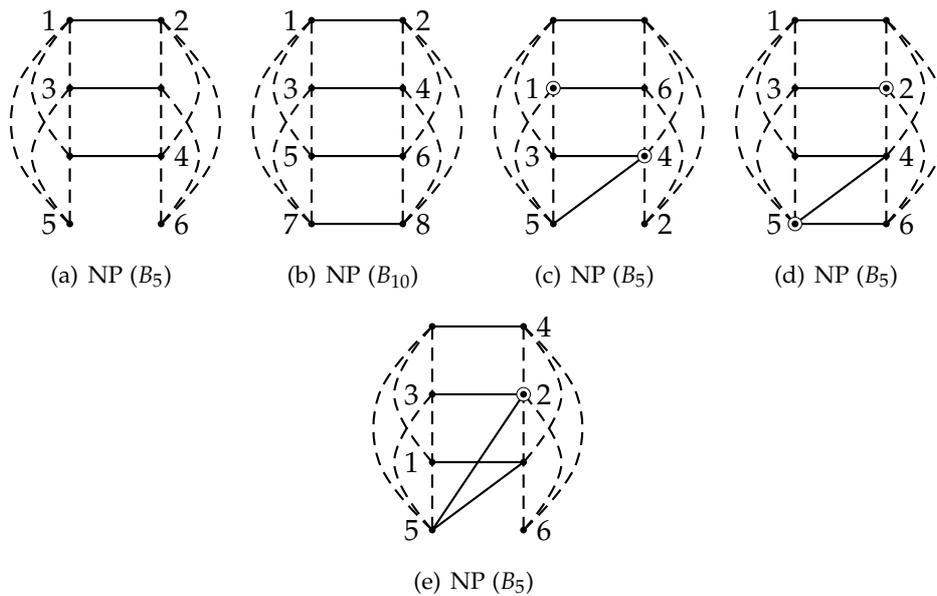
**Subdivisions de  $K_{3,5}$ .** Nous nous intéressons à la subdivision de  $K_{3,4}$  incluse dans toute subdivision de  $K_{3,5}$ . De plus, le sommet supplémentaire du stable de taille 5 peut être commuté de sorte qu'il soit adjacent à au plus une arête subdivisée. Nous énumérons les graphes sur la figure 5.35. Aucune n'admet un produit avec  $K_2$  planaire.

**Subdivisions de  $K_{4,4}$ .** Pour l'étude de  $K_{4,4}$ , nous nous appuyons également sur le sous-graphe  $K_{3,4}$ . Le sommet ajouté peut être commuté de sorte qu'il soit incident à au plus deux arêtes subdivisées.

L'énumération se trouve sur la figure 5.36. Nous remarquons qu'aucune subdivision de  $K_{4,4}$  n'a son produit avec  $K_2$  planaire.

**Autres subdivisions avec 8 sommets principaux.** Tous les autres graphes multipartis complets à 8 sommets contiennent  $K_{3,5}$  ou  $K_{4,4}$ . Alors aucune subdivision de ces graphes ne peut avoir son produit avec  $K_2$  planaire.

Les seuls graphes multipartis complets à 8 sommets dont certaines subdivisions ont leurs produits avec  $K_2$  planaires sont les graphes  $K_{1,7}$ ,  $K_{2,6}$  et  $K_{1,1,6}$ .

FIG. 5.36 – Étude de  $K_{4,4}$ 

### 5.5.6 Subdivisions avec plus de 9 sommets principaux

D'après la proposition 5.1, le cas des graphes  $K_{1,n-1}$ ,  $K_{2,n-2}$  et  $K_{1,1,n-2}$  est déjà réglé.

Considérons une subdivision 0-1 de  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Nous pouvons supposer que  $k \geq 2$  sinon le graphe n'a pas d'arête. Supposons que les  $n_i$  sont ordonnés du plus petit au plus grand.

S'il existe un sous ensemble  $S \subset \{1 \dots n\}$  tel que  $\sum_{i \in S} n_i = 3$  ou  $4$ , nous pouvons exhiber un sous-graphe partiel isomorphe à  $K_{4,4}$  ou  $K_{3,5}$  car  $\sum_i n_i \geq 9$ . Ces deux graphes n'admettent pas de subdivision de le produit avec  $K_2$  est planaire. Nous pouvons donc conclure dans ce cas qu'aucune subdivision de  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  n'admet de représentation planaire de son produit avec  $K_2$ .

Supposons alors qu'il n'y a pas de tel sous-ensemble  $S$ . Alors forcément  $n_1 \geq 5$ , ou  $n_1 = 2$  et  $n_2 \geq 5$ , ou  $n_1 = n_2 = 1$  et  $n_3 \geq 5$ .

Si  $n_1 \geq 5$ , alors  $n_2 \geq n_1 \geq 5$  et nous obtenons un sous-graphe isomorphe à  $K_{3,5}$ .

Si  $n_1 = 2$  et  $n_2 \geq 5$ , alors  $k \geq 3$  puisque  $K_{2,n-2}$  a été étudié plus haut. Ainsi,  $n_3 \geq n_2 \geq 5$  et nous trouvons encore un sous-graphe isomorphe à  $K_{3,5}$ .

Enfin, si  $n_1 = n_2 = 1$  et  $n_3 \geq 5$ , alors  $k \geq 4$  puisque  $K_{1,1,n-2}$  a été étudié plus haut. Ainsi,  $n_4 \geq n_3 \geq 5$  et nous trouvons encore un sous-graphe isomorphe à  $K_{3,5}$ .

Dans ces trois derniers cas, aucune subdivision ne peut donc avoir son produit avec  $K_2$  planaire.

Pour clore la preuve du théorème 5.2 il suffit de réaliser que toutes les preuves de non-planarité se repose sur l'exhibition d'un morphisme entre un graphe  $B_i$  et le graphe considéré.

## CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce dernier chapitre, nous avons pu donner une caractérisation des subdivisions de graphes multipartis dont le produit direct avec  $K_2$  est planaire.

Dès lors, il ne reste plus qu'une question à élucider pour faire le tour de la question de la planarité du produit direct de deux graphes. C'est la suivante.

**Problème 5.1**

*Donner une caractérisation des graphes  $G$  dont le produit direct avec  $K_2$  est planaire.*

Des considérations esthétiques nous amènent à présenter les seules subdivisions de  $K_6$  dont le produit direct avec  $K_2$  est planaire. En respectant les règles de représentation, nous faisons apparaître la roue à 5 sommets, son complémentaire ( $C_5 \cup K_1$ ), le graphe de Hajós et son complémentaire.

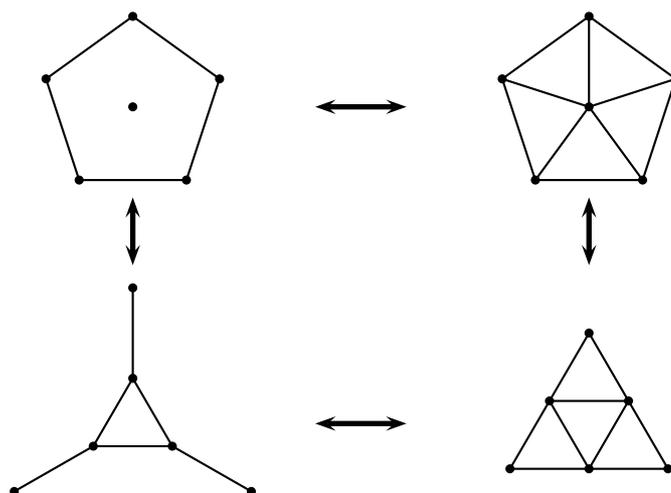


FIG. 5.37 – Zoologie des subdivisions planaires de  $K_6$

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Au terme de ce manuscrit, nous rassemblons les résultats obtenus et les ouvertures possibles en une synthèse accessible.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés aux plongements de graphes subdivisés dans les hypercubes et les graphes de Hamming. Nous avons étendu l'étude déjà menée pour les subdivisions de roues dans les hypercubes, en généralisant un résultat obtenu pour les subdivisions de  $K_5$  aux subdivisions de n'importe quelle clique  $K_n$ .

**Théorème (B., Gravier, Meslem [10])**

*Soit  $G$  une subdivision de  $K_n$  ( $n \geq 5$ ), alors  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$  ou il existe un sommet dont toutes les arêtes incidentes ne sont pas subdivisées tandis que les autres arêtes sont subdivisées un nombre impair de fois.*

Nous avons ensuite étudié les plongements isométriques dans les graphes de Hamming et obtenus des résultats similaires pour les subdivisions de roues et de cliques.

**Théorème (B., Gravier, Meslem [12])**

*Soit  $G$  une subdivision d'une clique  $K_n$  pour  $n$  quelconque,  $G$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si  $G$  est un cube partiel ou  $G$  est isomorphe à  $K_n$ .*

**Théorème (B., Gravier, Meslem [12])**

*Soit  $W$  une subdivision de  $W_n$  ( $n \geq 4$ ). Alors  $W$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si :*

- (i) les rayons de  $W_n$  ne sont pas subdivisés,*
- (ii) si les autres arêtes sont subdivisées, elle le sont un nombre impair de fois,*
- (iii) deux arêtes extérieures non-subdivisées ne sont pas adjacentes,*
- (iv) si  $n = 4$ , alors  $W$  contient au plus un triangle.*

Il semble judicieux de s'intéresser ensuite aux graphes plongeables à un coefficient 2 dans les hypercubes. Ce problème est toujours ouvert.

**Perspective**

*Donner une caractérisation structurelle des subdivisions de cliques qui se plongent isométriquement dans un demi-cube.*

Il est également possible de garder le coefficient 1 de l'isométrie et d'aborder la question de la distorsion d'un graphe plongé dans un autre.

**Perspective**

*Étudier le comportement de la distorsion des plongements dans les hypercubes. Il serait intéressant en particulier de :*

- trouver des bornes inférieures ou supérieures,*
- trouver des algorithmes efficaces minimisant la distorsion*
- donner des caractérisation des graphes admettant une distorsion bornée,*
- trouver des familles infinies de graphes admettant une distorsion minimum arbitrairement grande.*

Dans le troisième chapitre, nous avons répondu positivement à un cas d'une question de Matt DeVos et coll.

**Théorème (B., Gerbaud, Grappe, Palesi [9])**

*Soit  $G$  l'union de deux graphes connexes  $H$  et  $K$ . Pour une représentation optimale de  $G$  sur la bouteille de Klein, les restrictions de cette représentation à  $H$  et  $K$  ne se croisent pas.*

Un long chemin reste à parcourir pour généraliser (ou infirmer) ce résultat.

**Problème**

*Soit  $G$  le graphe union disjointe de deux graphes connexes  $G_1$  et  $G_2$  et  $\Sigma$  une surface (différente de  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $\tilde{S}_1$  et  $\tilde{S}_2$ ). Est-il vrai que toute représentation optimale de  $G$  sur  $\Sigma$  laisse les sous-représentations de  $G_1$  et  $G_2$  disjointes ?*

Dans le quatrième chapitre, nous avons partiellement montré la nécessité d'une condition de connexité locale pour assurer la superadditivité du nombre de croisements par rapport au produit zippé.

**Théorème (B., Bokal [7])**

*Pour tout  $n \geq 4$ , il existe deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  tels que chacun de ces graphes  $G_i$  contient un sommet  $v_i$  qui admet une fibre dans  $G_i$ , avec  $d_{G_i}(v_i) = n$ , et tels qu'il existe un représentant  $G$  de  $G_1 \vee_{v_1 \odot v_2} G_2$  satisfaisant  $cr(G) < cr(G_1) + cr(G_2)$ .*

La suite naturelle à ce résultat serait de répondre si une fibre d'un côté et deux fibres cohérentes de l'autre sont suffisantes ou non.

**Problème**

*Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes avec deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  de degré  $d$  tels que  $v_1$  admet deux fibres cohérentes dans  $G_1$  et  $v_2$  admet une seule fibre dans  $G_2$ . Est-il vrai que  $cr(G_1 \circledast_{v_1, v_2} G_2) \geq cr(G_1) + cr(G_2)$  ?*

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons déterminé quelles subdivisions de graphes multipartis complets admettent une représentation planaire de leur produit direct avec  $K_2$ .

La question de la planarité du produit direct d'un graphe quelconque avec  $K_2$  reste ouverte.



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Meziane AÏDER, Sylvain GRAVIER et Kahina MESLEM : Isometric embeddings of subdivided connected graphs in the hypercube. *Discrete Math.*, 2008. À paraître.
- [2] Miklós AJTAL, Vašek CHVÁTAL, Monroe M. NEWBORN et Endre SZEMERÉDI : Crossing-free subgraphs. In *Theory and practice of combinatorics*, volume 60 de *North-Holland Math. Stud.*, pages 9–12. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [3] Dan ARCHDEACON : Topological graph theory : a survey. [en ligne] [http : //www.emba.uvm.edu/~archdeac/papers/survey.ps](http://www.emba.uvm.edu/~archdeac/papers/survey.ps).
- [4] Dan ARCHDEACON, C. Paul BONNINGTON et Jozef ŠIRÁŇ : Trading crossings for handles and crosscaps. *J. Graph Theory*, 38(4):230–243, 2001.
- [5] Patrice ASSOUD et Michel DEZA : *Metric subspaces of  $L^1$* , volume 3 de *Publications Mathématiques d'Orsay 82*. Université de Paris-Sud Département de Mathématique, Orsay, 1982.
- [6] Laurent BEAUDOU : On a conjecture about partial cube recognition. Rapport technique, Institut Fourier, 2008.
- [7] Laurent BEAUDOU et Drago BOKAL : On the sharpness of some results relating cuts and crossing numbers. Soumis.
- [8] Laurent BEAUDOU, Paul DORBEC, Sylvain GRAVIER et Pranava K. JHA : On planarity of direct product of multipartite complete graphs. *Discrete Math. Algorithms Appl.*, 1:85–104, 2009.
- [9] Laurent BEAUDOU, Antoine GERBAUD, Roland GRAPPE et Frédéric PALESI : Drawing disconnected graphs on the Klein bottle. *Graphs Combin.*, 2009. Accepté.
- [10] Laurent BEAUDOU, Sylvain GRAVIER et Kahina MESLEM : Isometric embeddings of subdivided complete graphs in the hypercube. *SIAM J. Discrete Math.*, 22:1226–1238, 2008.
- [11] Laurent BEAUDOU, Sylvain GRAVIER et Kahina MESLEM : Isometric embeddings of subdivided generalized envelopes into hypercubes. Soumis, 2008.
- [12] Laurent BEAUDOU, Sylvain GRAVIER et Kahina MESLEM : Subdivided graphs as isometric subgraphs of Hamming graphs. *European J. Combinatorics*, 30:1062–1070, 2009.

- [13] Mehdi BEHZAD et Ebadollah S. MAHMOODIAN : On topological invariants of the product of graphs. *Canad. Math. Bull.*, 12:157–166, 1969.
- [14] Sandeep N. BHATT et Frank T. LEIGHTON : A framework for solving VLSI graph layout problems. *J. Comput. System Sci.*, 28(2):300–343, 1984.
- [15] Drago BOKAL : On the crossing number of Cartesian products with paths. *J. Combin. Theory Ser. B*, 97:381–384, 2007.
- [16] Drago BOKAL : On the crossing numbers of cartesian products with trees. *J. Graph Theory*, 56:287–300, 2007.
- [17] Drago BOKAL : Infinite families of crossing-critical graphs with prescribed average degree and crossing number. *J. Graph Theory*, 2009. Accepté.
- [18] Drago BOKAL, Gašper FIJAVŽ et Bojan MOHAR : The minor crossing number. *SIAM J. Discrete Math.*, 20(2):344–356, 2006.
- [19] Drago BOKAL, Bogdan OPOROWSKI, R. Bruce RICHTER et Gelasio SALAZAR : Characterization of 2-crossing-critical graphs I : Low connectivity or no  $V_8$ -minor. En préparation.
- [20] J. Adrian BONDY et U. S. R. MURTY : *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London, 1976.
- [21] Anne BOTTREAU et Yves MÉTIVIER : Some remarks on the Kronecker product of graphs. *Inform. Process. Lett.*, 68(2):55–61, 1998.
- [22] Henry R. BRAHANA : Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *Ann. of Math.*, 23:144–168, 1922.
- [23] Boštjan BREŠAR, Wilfried IMRICH et Sandi KLAVŽAR : Fast recognition algorithms for classes of partial cubes. *Discrete Math.*, 131:51–61, 2003.
- [24] Boštjan BREŠAR et Sandi KLAVŽAR : On partial cubes and graphs with convex intervals. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 43(3):537–545, 2002.
- [25] Victor CHEPOI : Isometric subgraphs of Hamming graphs and  $d$ -convexity. *Cybernet. Systems Anal.*, 1:6–11, 1988.
- [26] Markus CHIMANI, Carsten GUTWENGER et Petra MUTZEL : On the minimum cut of planarizations. In *6th Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications*, volume 28 de *Electron. Notes Discrete Math.*, pages 177–184. Elsevier, Amsterdam, 2007.
- [27] Éva CZABARKA, Ondrej SÝKORA, László A. SZÉKELY et Imrich VRĚO : Biplanar crossing numbers. I. A survey of results and problems. In *More sets, graphs and numbers*, volume 15 de *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 57–77. Springer, Berlin, 2006.
- [28] Matt DeVos, Bojan MOHAR et Robert ŠAMAL : Unexpected behaviour of crossing sequences. *Electron. Notes Discrete Math.*, 2008.

- [29] Michel DEZA, Viatcheslav GRISHUKHIN et Mikhail SHTOGRIN : *Scale-isometric polytopal graphs in hypercubes and cubic lattices*. Imperial College Press, London, 2004.
- [30] Michel DEZA et Monique LAURENT : *Geometry of Cuts and Metrics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.
- [31] Reinhard DIESTEL : *Graph Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2005.
- [32] Dragomir Ž. DJOKOVIĆ : Distance preserving subgraphs of hypercubes. *J. Combin. Theory Ser. B*, 14:263–267, 1973.
- [33] David EPPSTEIN : The lattice dimension of a graph. *European J. Combin.*, 26:585–592, Jul 2005.
- [34] David EPPSTEIN : Cubic partial cubes from simplicial arrangements. *Electron. J. Combin.*, 13(1):1–14, Sep 2006.
- [35] David EPPSTEIN : Recognizing partial cubes in quadratic time. In *SODA '08 : Proceedings of the nineteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 1258–1266, Philadelphia, PA, USA, 2008. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [36] Leonhard EULER : *Elementa doctrinae solidorum. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 4:109–140, 1758. Réimprimé dans *Opera Omnia Series I*, 26 :71–93, 1953.
- [37] M. FARZAN et Derek A. WALLER : Kronecker products and local joins of graphs. *Canad. J. Math.*, 29(2):255–269, 1977.
- [38] Michael R. GAREY et David S. JOHNSON : Crossing number is NP-complete. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 4(3):312–316, 1983.
- [39] Maurits DE GRAAF et Alexander SCHRIJVER : Decomposition of graphs on surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70:157–165, 1997.
- [40] Ronald L. GRAHAM et Henry O. POLLAK : On the addressing problem for loop switching. *Bell System Tech. J.*, 50:2495–2519, 1971.
- [41] Sylvain GRAVIER, Sandi KLAUŽAR et Michel MOLLARD : Isometric embeddings of subdivided wheels in hypercubes. *Discrete Math.*, 269:287–293, 2003.
- [42] Richard K. GUY : The decline and fall of Zarankiewicz's theorem. In *Proof Techniques in Graph Theory (Proc. Second Ann Arbor Graph Theory Conf., Ann Arbor, Mich., 1968)*, pages 63–69. Academic Press, New York, 1969.
- [43] Petr HLINĚNÝ : Crossing-number critical graphs have bounded path-width. *J. Combin. Theory Ser. B*, 88(2):347–367, 2003.
- [44] Petr HLINĚNÝ : New infinite families of almost-planar crossing-critical graphs. *Electron. J. Combin.*, 15(1):Research Paper 102, 12, 2008.
- [45] Wilfried IMRICH et Sandi KLAUŽAR : *Product Graphs : Structure and Recognition*. Wiley, New-York, 2000.

- [46] Stanislav JENDROŮL et Mária ŠČERBOVÁ : On the crossing numbers of  $S_m \times P_n$  and  $S_m \times C_n$ . *Časopis Pěst. Mat.*, 107(3):225–230, 307, 1982.
- [47] Pranava K. JHA et Giora SLUTZKI : A note on outerplanarity of product graphs. *Zastos. Mat.*, 21(4):537–544, 1993.
- [48] Sandi KLAVŽAR et Matjaž KOVŠE : On  $\Theta$ -graphs of partial cubes. *Discuss. Math. Graph Theory*, 27(2):313–321, 2007.
- [49] Sandi KLAVŽAR et Matjaž KOVŠE : Partial cubes and their  $\tau$ -graphs. *European J. Combin.*, 28(4):1037–1042, 2007.
- [50] Sandi KLAVŽAR et Alenka LIPOVEC : Partial cubes as subdivision graphs and as generalized Petersen graphs. *Discrete Math.*, 263:157–165, 2003.
- [51] Sandi KLAVŽAR et Alenka LIPOVEC : Edge-critical isometric subgraphs of hypercubes. *Ars Combin.*, 70:139–147, 2004.
- [52] Kazimierz KURATOWSKI : Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.
- [53] Serge LAWRENCEKO et Seiya NEGAMI : Irreducible triangulations of the Klein bottle. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70:265–291, 1997.
- [54] Jesús LEAÑOS et Gelasio SALAZAR : On the additivity of crossing numbers of graphs. *J. Knot Theory Ramifications*, 17(9):1043–1050, 2008.
- [55] Frank T. LEIGHTON : *Complexity issues in VLSI : optimal layouts for the shuffle-exchange graph and other networks*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1983.
- [56] Frank T. LEIGHTON : New lower bound techniques for VLSI. *Math. Systems Theory*, 17(1):47–70, 1984.
- [57] Tang LING, Lv SHENGXIANG et Huang YUANQIU : The crossing number of Cartesian products of complete bipartite graphs  $K_{2,m}$  with paths  $P_n$ . *Graphs Combin.*, 23(6):659–666, 2007.
- [58] Sóstenes LINS : A minimax theorem on circuits in projective graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 30:253–262, 1981.
- [59] Richard J. LIPTON et Robert E. TARJAN : A separator theorem for planar graphs. *SIAM J. Appl. Math.*, 36(2):177–189, 1979.
- [60] Feng LUO : On non-separating simple closed curves in a compact surface. *Topology*, 36:381–410, 1997.
- [61] Bojan MOHAR : The genus crossing number. Soumis.
- [62] Bojan MOHAR et Carsten THOMASSEN : *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2001.
- [63] Xuong NGUYEN HUY : *Sur quelques problèmes d'immersion d'un graphe dans une surface*. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, 1977.

- [64] János PACH et Géza TÓTH : Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica*, 17(3):427–439, 1997.
- [65] János PACH et Géza TÓTH : Which crossing number is it anyway? *J. Combin. Theory Ser. B*, 80(2):225–246, 2000.
- [66] János PACH et Géza TÓTH : Degenerate crossing numbers. In *Computational geometry (SCG'06)*, pages 255–258. ACM, New York, 2006.
- [67] Michael J. PELSMAJER, Marcus SCHAEFER et Daniel ŠTEFANOVIČ : Odd crossing number is not crossing number. In *Graph Drawing*, volume 3843 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 386–396. Springer, Berlin, 2006.
- [68] Yuri RABINOVICH : On average distortion of embedding metrics into the line. *Discrete Comput. Geom.*, 39(4):720–733, 2008.
- [69] Yuri RABINOVICH et Ran RAZ : Lower bounds on the distortion of embedding finite metric spaces in graphs. *Discrete Comput. Geom.*, 19(1):79–94, 1998.
- [70] R. Bruce RICHTER et Carsten THOMASSEN : Minimal graphs with crossing number at least  $k$ . *J. Combin. Theory Ser. B*, 58(2):217–224, 1993.
- [71] Robert L. ROTH et Peter M. WINKLER : Collapse of the metric hierarchy for bipartite graphs. *European J. Combin.*, 7(4):371–375, 1986.
- [72] Gelasio SALAZAR : Infinite families of crossing-critical graphs with given average degree. *Discrete Math.*, 271(1-3):343–350, 2003.
- [73] Alexander SCHRIJVER : Decomposition of graphs on surfaces and a homotopic circulation theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 51:161–210, 1991.
- [74] Sergey V. SHPECTOROV : Communication personnelle.
- [75] Sergey V. SHPECTOROV : On scale embeddings of graphs into hypercubes. *European J. Combin.*, 14:117–130, 1993.
- [76] Jozef ŠIRÁŇ : The crossing function of a graph. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 53:131–133, 1983.
- [77] John STILLWELL : *Classical topology and combinatorial group theory*, chapitre 1, pages 62–67. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [78] Klaus WAGNER : Über eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski. *Deutsche Mathematik*, 2:280–285, 1937. en allemand.
- [79] Zheng WENPING, Lin XIAOHUI et Yang YUANSHEG : The crossing number of  $K_{2,m} \times P_n$ . *Discrete Math.*, 308:6639–6644, 2008.
- [80] Elke WILKEIT : Isometric embeddings in Hamming graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 50:179–197, 1990.
- [81] Peter WINKLER : Isometric embeddings in products of complete graphs. *Discrete Appl. Math.*, 7:221–225, 1984.

- [82] Kazimierz ZARANKIEWICZ : On a problem of P. Turán concerning graphs. *Fund. Math.*, 41:137–145, 1954.



**Titre** Autour de problèmes de plongements de graphes

**Résumé** Cette thèse s'articule autour de la notion de plongement de graphe. Un *plongement* de graphe consiste à envoyer les sommets d'un graphe dans une autre structure par une application qui conserve certaines propriétés à déterminer. Nous pouvons distinguer deux grandes familles de plongements. D'une part les plongements purement *combinatoires* qui envoient les éléments d'un graphe  $G$  dans un autre graphe  $H$ . La propriété la plus naturelle à conserver est la notion d'adjacence entre les sommets. Nous nous intéressons à la conservation d'une propriété supplémentaire : la distance entre les sommets. Nous caractérisons plusieurs familles de graphes se plongeant de cette façon dans les hypercubes ou les graphes de Hamming.

Les plongements *topologiques* visent à représenter un graphe  $G$  sur une surface quelconque. Les sommets sont envoyés vers des points d'une surface et les arêtes vers des courbes continues entre ces points. Comment représenter un graphe afin de minimiser le nombre de croisements d'arêtes ? Nous nous posons ces questions à travers l'étude de la planarité et des nombres de croisements de certains graphes.

**Mots-clés** métriques de graphes, plongement topologique, nombre de croisements

**Title** On some problems of graphs embeddings

**Abstract** This Ph.D. manuscript is built around the notion of graph embedding. An *embedding* of a graph  $G$  is an application mapping the vertices of  $G$  to elements of another structure, and preserving some properties of  $G$ . There are two types of embeddings. The *combinatorial* embeddings map the vertices of a graph  $G$  to the vertices of a graph  $H$ . The usual property that is preserved is the adjacency between vertices. In this thesis, we consider the isometric embeddings, preserving in addition the distances between vertices. We give some structural characterizations for families of graphs isometrically embeddable in hypercubes or Hamming graphs.

The *topological* embeddings aim at drawing a graph  $G$  on some surface. Vertices are mapped to distinct points of the surface and the edges are represented by continuous curves linking these points. Is it possible to draw a graph  $G$  so that the edges do not cross each other ? If not, what is the minimum number of crossings of a drawing of  $G$  ? We deal with these questions on different surfaces, or in relation with some graph operations as direct product or zip product.

**Keywords** distances in graphs, topological embeddings, crossing number