



**HAL**  
open science

# Assimilation de données: les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble

Vu Duc Tran

► **To cite this version:**

Vu Duc Tran. Assimilation de données: les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble. Mathématiques [math]. Université de Bretagne Sud, 2009. Français. NNT: . tel-00412447

**HAL Id: tel-00412447**

**<https://theses.hal.science/tel-00412447>**

Submitted on 1 Sep 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD**

**UFR Sciences et Sciences de l'Ingénieur**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

Pour obtenir le grade de :  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD**  
*Mention : Mathématiques, Spécialité: Statistiques appliquées*  
**École Doctorale SICMA**

présentée par

**Vu Duc TRAN**

Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Information,  
de la Communication et de la Connaissance  
CNRS (UMR 3192)

# **Assimilation de données: les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble**

Thèse soutenue le **29 juin 2009**,  
devant la commission d'examen composée de :

**M. Laurent BERTINO**  
Rapporteur

**M. Jian-Feng YAO**  
Rapporteur

**M. Pierre-François MARTEAU**  
Examineur

**M. Étienne MÉMIN**  
Président

**Mme. Valérie MONBET**  
Directrice de thèse

**M. François LE GLAND**  
Directeur de thèse





L'étude de cette thèse a bénéficiée du soutien de la région Bretagne, de l'ACTIMAR, et aussi de l'INRIA dans le cadre de l'Action de Recherche Coopérative ADOQA en 2005.



# Remerciements

En premier lieu, j'aimerais remercier, ma directrice de thèse, Valérie MONBET, pour son aide, sa patience, ses conseils et ses encouragements qu'elle m'a apportés tout au long de la thèse.

Mes sincères remerciements vont également à François LE GLAND, qui a encadré mon travail depuis le D.E.A et pendant ces années de thèse. Son expérience et ses grandes compétences ont permis l'accomplissement de ce travail. Qu'il trouve ici ma reconnaissance et mon respect.

Je suis reconnaissante à monsieur Jian- Feng YAO et monsieur Laurent BERTINO d'avoir acceptés d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie également aux autres membres de mon jury de thèse, monsieur Étienne MÉMIN et monsieur Pierre-François MARTEAU, de me faire l'honneur d'assister à ma soutenance.

Merci enfin à ma famille et mes amis.



# Table des matières

Table des matières	i
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Assimilation de données : les approches existantes</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>7</b>
1.1 Assimilation de données	7
1.2 Notations et hypothèses	7
1.2.1 Modèle de Markov caché	7
1.2.2 Modèle d'état et d'observation	8
1.2.3 Les hypothèses	9
1.3 Inférence	10
1.4 Plan de la partie	13
<b>2 Interpolation statistique</b>	<b>15</b>
2.1 Notations et hypothèses	15
2.2 Estimateur BLUE	16
2.3 Propriétés de l'estimateur BLUE	16
2.4 Commentaires	17
<b>3 Assimilation variationnelle de données</b>	<b>19</b>
3.1 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte	20
3.1.1 Assimilation variationnelle tri-dimensionnelle (3D-Var)	20
3.1.2 Assimilation variationnelle quadri-dimensionnelle (4D-Var)	21
3.2 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible	22
3.2.1 Cas du modèle linéaire	22
3.2.2 Cas du modèle non linéaire	27
3.3 Matrice de covariance de l'erreur d'estimation	27
3.4 Commentaires	28

<b>4</b>	<b>Assimilation séquentielle de données</b>	<b>29</b>
4.1	Approche bayésienne . . . . .	29
4.2	Filtre bayésien optimal . . . . .	30
4.2.1	Les équations . . . . .	30
4.2.2	Commentaires . . . . .	30
4.3	Filtre de Kalman . . . . .	31
4.4	Filtre particulaire . . . . .	33
4.4.1	Algorithme bootstrap . . . . .	35
4.4.2	Algorithme SIR optimal . . . . .	36
4.4.3	La convergence du filtre particulaire . . . . .	37
4.4.4	Commentaires . . . . .	39
4.5	Les extensions du filtre de Kalman . . . . .	40
4.5.1	Filtre de Kalman étendu . . . . .	40
4.5.2	Filtre de Kalman d'ensemble . . . . .	41
	<b>Conclusions</b>	<b>43</b>
<b>II</b>	<b>Les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>Introduction</b>	<b>47</b>
5.1	L'algorithme du filtre de Kalman d'ensemble . . . . .	47
5.2	Motivation de l'utilisation du filtre de Kalman d'ensemble . . . . .	50
5.3	Objectifs . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Convergence du filtre de Kalman d'ensemble</b>	<b>53</b>
6.1	EnKF comme un système d'éléments en interaction de champ moyen . . . . .	53
6.2	Résumé de la démonstration . . . . .	55
6.3	Hypothèses sur le modèle dynamique . . . . .	55
6.4	Existence des moments . . . . .	57
6.5	Continuité lipschitzienne locale du gain de Kalman . . . . .	59
6.6	Contiguïté des matrices de covariance empirique . . . . .	61
6.7	Convergence de la matrice de covariance empirique $\bar{P}_k^N$ . . . . .	62
6.8	Contiguïté des éléments . . . . .	64
6.8.1	Contiguïté presque sûre des éléments . . . . .	67
6.8.2	Contiguïté dans $\mathbb{L}^p$ des éléments . . . . .	68
6.9	Convergence du filtre de Kalman d'ensemble . . . . .	71
6.9.1	Convergence presque sûre de la mesure empirique . . . . .	71
6.9.2	$\mathbb{L}^p$ -convergence et vitesse de convergence . . . . .	73

<b>7</b>	<b>Relation avec le filtre bayésien optimal</b>	<b>77</b>
7.1	Relation avec le filtre bayésien optimal . . . . .	77
7.2	Relation avec le filtre de Kalman . . . . .	78
7.3	Filtre de Kalman d'ensemble pondéré (WEnKF) . . . . .	79
7.4	Comparaison des distributions a posteriori dans le cas où la distribution a priori est un mélange de lois gaussiennes . . . . .	81
7.4.1	Distributions théoriques . . . . .	81
7.4.2	Distributions des particules des filtres à un instant fixé . . . . .	86
	<b>Conclusions</b>	<b>89</b>
	<b>III Simulations</b>	<b>91</b>
<b>8</b>	<b>Introduction</b>	<b>93</b>
8.1	Objectifs . . . . .	93
8.2	Les modèles de test . . . . .	93
8.2.1	Modèle linéaire gaussien simple . . . . .	94
8.2.2	Modèle de Lorenz . . . . .	94
8.3	Les critères de comparaison . . . . .	96
<b>9</b>	<b>Modèle linéaire gaussien</b>	<b>97</b>
9.1	Description des simulations . . . . .	97
9.2	Résultat et interprétation . . . . .	98
9.2.1	Comparaison des estimateurs de la moyenne et de la variance conditionnelles . . . . .	98
9.2.2	Comparaison des distributions a posteriori . . . . .	103
9.2.3	Comparaison des erreurs en moyenne quadratique des estimateurs . . . . .	106
<b>10</b>	<b>Modèle de Lorenz</b>	<b>109</b>
10.1	Description des simulations . . . . .	109
10.2	Résultat et interprétation . . . . .	109
10.2.1	Comparaison des estimateurs de la moyenne conditionnelle . . . . .	109
10.2.2	Comparaison des distributions à posteriori . . . . .	112
10.2.3	Comparaison des erreurs en moyenne quadratique des estimateurs . . . . .	118
	<b>Conclusions</b>	<b>131</b>
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>133</b>
	<b>Formule de Sherman-Morrison-Woodbury</b>	<b>139</b>
	<b>Les inégalités</b>	<b>141</b>

<b>Borne de Cramer-Rao pour le filtrage non linéaire discret</b>	<b>143</b>
Cas général . . . . .	143
Cas d'un modèle à bruit gaussien . . . . .	144
Calcul de la borne de Cramer-Rao . . . . .	144
Borne de Cramer-Rao et les estimateurs . . . . .	145
<b>Test de normalité de Jarque-Bera</b>	<b>147</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>
<b>Liste des symboles et des abréviations</b>	<b>153</b>
<b>Table des figures</b>	<b>155</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>159</b>

# Introduction générale

## Contexte général

L'estimation ou la prédiction de l'état d'un système sont des problèmes cruciaux dans beaucoup de domaines, particulièrement dans les domaines de la météorologie-océanographie et de la télécommunication.

En météorologie et en océanographie, on possède des observations de différentes natures : radio-sondages, stations météorologiques, bouées océaniques, images satellites, etc ... Ces observations sont en général incomplètes, intermittentes et non équi-distribuées, alors que pour la plupart des applications, il est utile d'avoir des données sur une grille régulière en temps et en espace. Ces données peuvent être utilisées pour initialiser les modèles de prévision ou servir aux autres domaines de recherche.

Dans le domaine de la télécommunication, un des axes de recherche essentiel est le débruitage des observations qui sont sous la forme de signaux ou d'images. Ces observations contiennent souvent énormément de perturbations dues aux bruits ou aux erreurs de mesure. On souhaite alors réduire l'espace des solutions, obtenir de meilleures données, éliminer l'effet du bruit, ...

Les phénomènes dont on parle ci-dessus ont une évolution spatio-temporelle dont il faut tenir compte. Comme l'information apportée par les observations est en général incomplète ou imprécise, il faut ajouter une autre source d'information : un modèle dynamique qui modélise l'évolution physique spatio-temporelle de l'état d'intérêt. La question se pose alors naturellement de comment combiner les différentes sources d'information : les observations et le modèle dynamique.

Les méthodes d'**assimilation de données** ont ainsi été proposées. Leur objectif est de combiner les données observées et le modèle dynamique pour estimer le plus précisément possible l'état du système d'intérêt pour tout temps et toute position.

## Méthodologies

Il y a deux façons d'approcher le problème de l'assimilation de données :

- (1) Une approche déterministe où l'estimateur est issu de la théorie du contrôle optimal.
- (2) Une approche bayésienne où l'estimateur est issu de la théorie de l'estimation bayésienne.

La première approche [2, 3] est celle qui est la plus utilisée par les météorologues et les océanographes, notamment car elle conduit à des algorithmes dont le coût de calcul est relativement faible malgré la dimension de l'état des systèmes météorologiques ou océanographiques, qui peut être l'ordre de  $10^5$ . Pourtant, cette approche possède les inconvénients suivants : sa mise en oeuvre peut être compliquée, et cette approche ne permet pas d'estimer la distribution de probabilité de l'état car elle propose une solution déterministe.

La deuxième approche [12, 11] est très utilisée et étudiée dans la communauté du traitement du signal. Cette approche permet de prendre complètement en compte la nature aléatoire de l'état et ainsi de fournir des erreurs d'estimation, mais elle demande un coût de calcul assez important pour atteindre de bonnes estimations.

L'équivalence des deux approches a été montrée dans le cas du modèle linéaire gaussien. Mais dans le cas général, il n'est pas toujours facile de dire quelle approche est la meilleure. En effet, les deux approches sont étudiées par deux communautés dont les applications sont très différentes, elles sont donc développées de deux points de vues différents et il y a peu de communication entre les communautés. Cependant, depuis une dizaine d'années, de plus en plus de travaux réalisent des comparaisons expérimentales entre ces méthodes, et cherchent à mieux comprendre les propriétés et performances des différentes méthodes [31, 14].

Dans ce contexte, on trouve un grand intérêt des chercheurs et aussi des praticiens autour de deux méthodes séquentielles d'assimilation de données : le filtre particulaire et le filtre de Kalman d'ensemble.

Les méthodes de Monte-Carlo ont été introduites dans les années 50, et les méthodes séquentielles de filtrage particulaire au début des années 90. Le filtre particulaire est devenu populaire pendant ces dernières années en statistique et dans les domaines concernés. Par exemple, il a été utilisé pour résoudre le problème d'inférence séquentielle bayésienne dans le traitement du signal et la robotique [34], en analyse d'écoulements fluides à partir de séquences d'images [6]. Le filtre particulaire est proposé comme une approximation séquentielle de type Monte Carlo de l'estimateur bayésien. Il utilise un ensemble de particules pour représenter la distribution de l'état à estimer. La convergence de l'estimateur du filtre particulaire vers l'estimateur bayésien a bien été étudiée dans la littérature des dernières années [4, 5, 9, 26].

Le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF) a été proposé au début des années 90 [18] et il est utilisé dans de nombreuses applications de météorologie, d'océanographie et d'écologie. Le filtre de Kalman d'ensemble a été proposé initialement comme une approximation empirique du filtre de Kalman dans le cas d'un système linéaire gaussien. Ce filtre a ensuite été étendu pour le modèle non linéaire gaussien, et les résultats pratiques ainsi que les recherches expérimentales montrent une bonne performance du filtre de Kalman d'ensemble [33, 15], qui a donc rapidement attiré l'attention des autres communautés.

Le filtre de Kalman d'ensemble se base sur des estimateurs empiriques obtenus à partir d'éléments d'ensemble, et son mécanisme est intuitivement semblable à celui du filtre particulière. Bien que les résultats expérimentaux nous montrent sa bonne performance, il existe peu d'études théoriques complètes. Il est donc nécessaire d'éclaircir quelques points théoriques du filtre de Kalman d'ensemble, notamment la relation avec l'estimateur bayésien et sa performance par rapport à celle du filtre particulière.

## Contributions de la thèse

La première partie de la thèse consiste en une étude bibliographique. Nous avons réalisé une synthèse des méthodes d'assimilation classiques, et des avancées les plus connues des deux approches. Une présentation unifiée des différentes méthodes est proposée en se basant sur des formes de modèles similaires et un même système de notations. Des liens possibles entre les méthodes sont également étudiés, particulièrement entre les deux approches différentes de l'assimilation de données.

La contribution principale de la thèse est une étude théorique sur les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble. Dans le cas du modèle linéaire gaussien, nous avons montré que l'estimateur du filtre de Kalman d'ensemble converge vers l'estimateur bayésien. Mais ce n'est pas vrai dans le cas général. Pour le modèle non linéaire gaussien, nous avons montré que l'estimateur du filtre de Kalman d'ensemble converge vers une limite qui diffère de l'estimateur bayésien. Ce résultat peut être vu comme un point négatif du filtre de Kalman d'ensemble à l'asymptotique, car il a été montré que l'estimateur bayésien est l'estimateur dont l'erreur en moyenne quadratique est minimisée parmi tous les autres estimateurs. Avec ce résultat nous voulons aussi attirer l'attention des praticiens sur le point suivant : dans le cas où on s'intéresse à la distribution de probabilité de l'état, l'utilisation des éléments du filtre de Kalman d'ensemble pour construire l'estimateur empirique de la distribution peut ne pas être pertinent.

Les résultats ci-dessus nous aident à comprendre les comportements asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble. Pourtant, dans les applications, la limitation des temps de calculs numériques ne permet pas d'utiliser un grand nombre de particules pour les méthodes d'assimilation de données, dans le cas du filtre particulière ou du filtre de Kalman d'ensemble. Nous avons donc réalisé des simulations du filtre de Kalman d'ensemble, du filtre particulière et des autres méthodes

sur les modèles de test, en faisant varier le nombre de particules. Ces résultats de simulations nous permettent de voir ce qu'on atteint en pratique.

## **Description du document**

Ce document est organisé en trois parties selon le plan suivant.

### **Partie I : Assimilation de données : les approches existantes.**

La première partie dresse un panorama des méthodes d'assimilation de données existantes et les plus connues. Elle comporte trois chapitres. Le chapitre 1 donne une introduction sur l'assimilation de données, et fixe les notations et les hypothèses utilisées dans le document. Le chapitre 2 présente l'interpolation statistique, la classe des méthodes d'assimilation la plus classique. Le chapitre 3 décrit les méthodes d'assimilation de données variationnelles qui relèvent de la théorie du contrôle optimal. Enfin, dans le chapitre 4, nous présentons les méthodes d'assimilation séquentielles qui relèvent de la théorie bayésienne.

### **Partie II : Propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble.**

Dans cette partie nous présentons les résultats obtenus sur les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble. La partie est découpée en trois chapitres. Le premier chapitre présente le filtre de Kalman d'ensemble. Dans le chapitre 2, nous démontrons la convergence du filtre de Kalman d'ensemble. Dans le chapitre 3, nous présentons une extension du filtre de Kalman d'ensemble : le filtre de Kalman d'ensemble pondéré, et faisons quelques commentaires sur ce filtre.

### **Partie III : Résultats de simulations**

Dans cette partie nous présentons les résultats de simulations de différentes méthodes d'assimilation de données (le filtre de Kalman, le filtre de Kalman d'ensemble, le filtre de Kalman d'ensemble pondéré et le filtre particulaire) sur les modèles de test (un modèle linéaire simple et le modèle de Lorenz).

Enfin, la conclusion générale présente une synthèse de ces études et quelques perspectives liées à ces travaux.

## **Première partie**

# **Assimilation de données : les approches existantes**



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Assimilation de données

L'état d'un système physique ne peut en général qu'être approché par une estimation qui est obtenue après une procédure d'analyse des informations disponibles sur l'état. Les informations sont souvent les observations. Si on utilise en plus un modèle numérique pour l'évolution de l'état, l'information est augmentée. La procédure qui consiste à combiner les données observées et le modèle numérique pour estimer l'état d'un système est appelée *assimilation de données*.

### 1.2 Notations et hypothèses

#### 1.2.1 Modèle de Markov caché

En physique statistique, les modèles markoviens sont très présents pour décrire l'évolution physique d'un système. Nous considérons alors dans le cadre de ce rapport un modèle de Markov caché qui décrit l'évolution physique de l'état en fonction du temps, dont la définition est comme suit.

On appelle  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  (noté  $\{X_k\}$ ) un processus aléatoire à temps discret, où  $X_k$  désigne à l'instant  $k$  le vecteur d'état qui est caché, c'est-à-dire non observable. Ce qui est observé est  $\{Y_k, k \in \mathbb{N}\}$  (noté  $\{Y_k\}$ ), un processus aléatoire où  $Y_k$  désigne l'observation à l'instant  $k$ .

Les vecteurs aléatoires  $X_k, Y_k$  sont définis sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^d$  respectivement. En pratique, ce qu'on observe est toujours moins informatif que ce qu'on veut estimer, on suppose ainsi que  $d < m$ .

Le processus défini par le couple  $\{X_k, Y_k\}$  est appelé modèle à chaîne de Markov cachée dans le cas discret, et modèle à espace d'état dans le cas continu, si les processus  $\{X_k\}$  et  $\{Y_k\}$  vérifient les propriétés markoviennes suivantes :

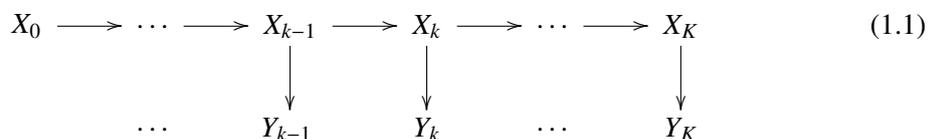
- $\{X_k\}$  est une chaîne de Markov, c'est à dire que l'état présent  $X_k$  ne dépend que de l'état du passé immédiat  $X_{k-1}$ , avec la densité de transition

$$p(x_k|x_0, \dots, x_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-1}) = p(x_k|x_{k-1}) \triangleq \mathbb{P}[X_k = x_k|X_{k-1} = x_{k-1}].$$

- Conditionnellement aux états cachés  $X_1, \dots, X_k$ , les observations  $Y_1, \dots, Y_k$  sont mutuellement indépendantes, et pour tout  $k = 1, \dots, K$ ,  $Y_k$  ne dépend que de  $X_k$ , avec la densité d'émission

$$p(y_k|x_0, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{k-1}) = p(y_k|x_k) \triangleq \mathbb{P}[Y_k = y_k|X_k = x_k].$$

Le modèle de Markov caché peut être présenté par le graphe ci-dessous. L'intervalle de temps  $[0, K]$  sera appelé intervalle d'assimilation. Les flèches indiquent la dépendance entre les variables.



### 1.2.2 Modèle d'état et d'observation

Les relations du graphe (1.1) peuvent être modélisées par le système *discret* suivant

$$X_k = f_k(X_{k-1}) + W_k, \tag{1.2}$$

$$Y_k = h_k(X_k) + V_k, \tag{1.3}$$

où  $f_k$  est la fonction du modèle qui décrit l'évolution de l'état entre deux instants consécutifs,  $h_k$  est l'opérateur d'observation qui relie l'observation  $Y_k$  avec l'état caché  $X_k$ .  $W_k$  et  $V_k$  désignent respectivement l'erreur du modèle et l'erreur d'observation à l'instant  $k$ , ce sont des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^d$  respectivement.

Les équations (1.2-1.3) forment un modèle de Markov caché dans le cas général, où les fonctions ne sont pas nécessairement linéaires et les bruits ne sont pas nécessairement gaussiens. Un modèle sera donc appelé linéaire gaussien si les fonctions du modèle et d'observation sont linéaires et les bruits  $W_k$  et  $V_k$  sont de lois gaussiennes. Sinon, les hypothèses des fonctions et des bruits seront précisées.

#### Cas du modèle d'état continu et des observations discrètes

Dans les applications, notamment en météorologie et en océanographie, le modèle numérique est souvent décrit par une équation différentielle déterministe ou stochastique, et les observations sont disponibles à des instants discrets  $t_k$ . Par exemple, dans le cas de l'équation différentielle stochastique, nous avons

$$dX_t = g(X_t) dt + \sigma dB_t \tag{1.4}$$

$$Y_k = h_k(X_{t_k}) + V_k, \tag{1.5}$$

où  $B_t$  est un mouvement brownien et  $\sigma$  est un scalaire. Pour les calculs numériques, il est souvent nécessaire de discrétiser l'équation différentielle du modèle. Un des schémas numériques simples est le schéma d'Euler

$$X_t = X_{t-1} + g(X_{t-1}) \Delta t + \sigma (B_t - B_{t-1}). \quad (1.6)$$

où  $\Delta t$  désigne le pas de discrétisation, et les incréments  $(B_t - B_{t-1})$  sont des bruits gaussiens indépendants de moyenne 0 et de variance  $\Delta t$ .

On peut toujours transformer cette équation numérique sous la forme d'un système discret (1.2-1.3) en posant

$$\begin{aligned} X_k &= \tilde{g} \circ \dots \circ \tilde{g} \circ \tilde{g}(X_{k-1}) + W_k = f_k(X_{k-1}) + W_k, \\ Y_k &= h_k(X_k) + V_k, \end{aligned}$$

où

- $\Delta t$  est choisi tel que  $(t_k - t_{k-1})$  est un nombre entier de  $\Delta t$ .
- $X_k = X_{t_k}$ .
- $\tilde{g}(u) = u + \Delta t g(u) + \sigma q$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$  et avec  $q$  un bruit gaussien de moyenne 0 et de variance  $\Delta t$ .
- $f_k(X_{k-1}) = \tilde{g} \circ \dots \circ \tilde{g} \circ \tilde{g}(X_{k-1})$ .
- $W_k$  désigne l'erreur du modèle discret à l'instant  $t_k$  qui comporte maintenant l'erreur de modélisation et l'erreur de discrétisation.

Dans le cas de l'équation différentielle déterministe, la discrétisation est réalisée de la même façon sans le terme  $\sigma dB_t$  dans l'équation (1.4).

Nous allons présenter les méthodes d'assimilation de données en se basant sur le système discret (1.2-1.3), sauf les méthodes variationnelles de données qui seront traitées pour le modèle discrétisé (1.6).

### 1.2.3 Les hypothèses

Nous notons

- $\mu_0(dx_0)$  : la distribution de l'état initial  $X_0$ , de moyenne  $\Psi_0$  (sera appelée la condition initiale) et de covariance  $Q_0$ . Cette loi admet une densité notée  $p_0(x_0)$ , c'est-à-dire

$$\mu_0(dx_0) = p_0(x_0) dx_0.$$

- $p_k^W(dw)$  : la distribution de  $W_k$ , de moyenne  $m_k^W$  et de covariance  $Q_k$ . Cette loi admet une densité notée  $p_k^W(w)$ , c'est-à-dire

$$p_k^W(dw) = p_k^W(w) dw.$$

- $p_k^V(dv)$  : la distribution de  $V_k$ , de moyenne  $m_k^V$  et de covariance  $R_k$ . Cette loi admet une densité notée  $p_k^V(v)$ , c'est-à-dire

$$p_k^V(dv) = p_k^V(v) dv.$$

**Remarque 1.2.1.** *Par définition, nous avons*

$$p(x_k|x_{k-1}) = p_k^W(x_k - f(x_{k-1})) \quad \text{et} \quad p(y_k|x_k) = p_k^V(y_k - h(x_k)).$$

En pratique,  $\mu_0(dx_0)$ ,  $p_k^W(w)dw$  et  $p_k^V(v)dv$  sont généralement inconnues. Pourtant, supposons qu'*au moins*, pour tout  $k = 1, \dots, K$

- On peut déterminer, ou approcher, les matrices de covariance  $Q_0$ ,  $Q_k$  et  $R_k$ .
- On peut modéliser le système tel que  $W_k$  et  $V_k$  sont des bruits blancs, indépendants entre eux et indépendants de l'état initial  $X_0$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} m_k^W &= \mathbb{E}[W_k] = 0, \quad \forall k & m_k^V &= \mathbb{E}[V_k] = 0, \quad \forall k \\ E[W_k W_l] &= 0, \quad \forall k, l & E[V_k V_l] &= 0, \quad \forall k, l \\ \mathbb{E}[W_k X_0] &= 0, \quad \forall k & \mathbb{E}[V_k X_0] &= 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

Le fait d'estimer la moyenne, la covariance, et même la densité de distribution des erreurs, est un problème difficile. Pourtant il existe des méthodes permettant de modéliser ces erreurs et ces méthodes peuvent être consultées dans [3] et [7]. Nous considérons alors que les hypothèses ci-dessus peuvent être satisfaites.

Pourtant, chaque méthode d'assimilation de données requiert différentes hypothèses supplémentaires, qui seront précisées lors de la présentation.

### 1.3 Inférence

L'inférence dans les modèles à espace d'état covère, en général, les 3 problèmes principaux

- **Prédiction** : On estime l'état  $X_l$  en sachant les observations  $Y_{1:k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ , où  $l > k$ .
- **Filtrage** : On estime l'état  $X_l$  sachant les observations  $Y_{1:k}$ , où  $l = k$ .
- **Lissage** : On estime l'état  $X_l$  sachant les observations  $Y_{1:k}$ , où  $l < k$ .

Dans le cadre de ce rapport, nous nous concentrons seulement sur le problème de filtrage, où on estime l'état  $X$  à l'instant présent  $k$  sachant toutes les observations disponibles jusqu'à cet instant :  $Y_{1:k}$ .

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre le problème. On peut les classer en trois familles : l'interpolation statistique, l'assimilation de données variationnelle et l'assimilation de données séquentielle.

### Interpolation statistique

C'est une classe de méthodes d'assimilation classiques. L'interpolation statistique est représentée par l'estimateur linéaire sans biais de variance minimale (Best linear unbiased estimator - BLUE), qui est une combinaison linéaire de l'observation et d'une estimation a priori (dite aussi solution de référence ou prédiction) fournie par le modèle numérique. En supposant que l'estimation a priori et les observations sont non biaisées, l'estimateur BLUE est aussi non biaisé et la covariance de l'erreur d'estimation est minimisée. Pourtant, en pratique, l'estimateur BLUE n'est en général pas applicable pour un état de grande dimension, à cause de problèmes de calcul.

### Assimilation de données variationnelle

Les méthodes d'assimilation variationnelle relèvent de la théorie du contrôle optimal, où on cherche une estimation qui minimise une fonction coût  $J$  donnée. Ces méthodes peuvent être classées en deux groupes :

- **Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte** où le modèle dynamique est supposé être parfait. Ce groupe se divise en deux méthodes : assimilation variationnelle tri-dimensionnelle (3D-Var) et assimilation variationnelle quadri-dimensionnelle (4D-Var). La méthode 3D-Var donne une solution équivalente à l'estimateur BLUE, en cherchant à minimiser une fonction coût définie sur l'espace d'état et indépendante du temps  $k$ . Tandis que la méthode 4D-Var cherche à minimiser une fonction coût définie sur l'espace d'état augmenté de la dimension temporelle. Ces deux méthodes sont beaucoup utilisées dans des grands centres de prévision, pourtant l'hypothèse de modèle parfait est rarement satisfaite en pratique.
- **Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible** où on tient compte de l'erreur du modèle dans la procédure d'assimilation de données. Pour un modèle dynamique linéaire, la minimisation peut être résolue par la méthode du représentant. Pourtant, cette méthode requiert des calculs coûteux dus à l'évaluation des équations "forward" et "backward". Pour un modèle fortement non linéaire, la minimisation est délicate et il faut approcher le minimum par une méthode de descente du gradient ou par d'autres algorithmes d'optimisation.

## Assimilation de données séquentielle

Tandis que l'assimilation de données variationnelle est utilisée principalement dans la communauté des océanographes et météorologues, l'assimilation de données séquentielle est étudiée intensivement dans la communauté du traitement du signal.

L'assimilation séquentielle estime l'état successivement dans le temps, de la manière suivante : l'estimation à l'instant précédent ( $k - 1$ ) est utilisée pour construire une estimation a priori (prédiction) de l'état à l'instant présent  $k$  grâce au modèle numérique. Cette prédiction est ensuite couplée avec l'observation  $Y_k$  recueillie à l'instant  $k$  pour produire une estimation a posteriori de l'état à cet instant. La procédure est poursuivie de manière itérative dans l'intervalle d'assimilation.

Relevant de l'estimateur de Bayes, l'objectif de l'assimilation séquentielle est de chercher l'estimateur de Bayes de  $X_k$  sachant les observations  $Y_{1:k}$ . Les équations analytiques de l'estimation sont faciles à obtenir et sont appelées *filtre bayésien optimal*, mais il n'est pas possible les résoudre dans le cas général, sauf dans le cas du modèle linéaire gaussien où elles se ramènent au *filtre de Kalman*. Dans le cas des modèles non linéaires, il faut recourir à des approximations, et le *filtre particulière* s'écrit comme une approximation de type Monte Carlo du filtre bayésien optimal.

Dans les techniques d'assimilation séquentielle, on retrouve aussi un filtre qui retient largement l'attention des praticiens : le *filtre de Kalman d'ensemble* (*Ensemble Kalman Filter - EnKF*). Ce filtre a été proposé initialement comme une approximation du filtre de Kalman pour le modèle linéaire gaussien. Il a été ensuite étendu pour le modèle non linéaire gaussien avec une performance remarquable par rapport aux autres méthodes. Cette performance a été beaucoup étudiée par des expérimentations jusqu'à maintenant. Pourtant, il n'existe pas à notre connaissance d'étude théorique complète sur l'EnKF. Étudier les propriétés de l'EnKF du point de vue théorique est ainsi la contribution principale de la thèse et les résultats seront présentés dans la partie 2.

Dans ce rapport nous nous concentrons particulièrement sur les méthodes d'assimilation de données séquentielles, notamment sur le filtre de Kalman d'ensemble, ses propriétés asymptotiques et la comparaison avec le filtre particulière. En conséquence, les autres méthodes d'assimilation classiques comme : schéma d'analyse de Cressman, méthode de correction successive, interpolation optimale, ... ne seront pas présentées dans cette partie et les méthodes variationnelles seront présentées de manière concise. Le détail de ces méthodes peut être trouvé dans les cours de Bouttier et Courtier [3], de Daget [7], de Elias Valur Holm [20], dans les livres de Daley [8] et de Kalnay [23].

## 1.4 Plan de la partie

Nous présentons dans le chapitre 2 l'interpolation statistique représenté par l'estimateur BLUE et nous commentons cet estimateur.

Ensuite, dans le chapitre 3, les méthodes d'assimilation variationnelles sous contrainte dynamique forte et faible seront présentées avec les approximations correspondantes.

Dans le chapitre 4, nous présentons l'assimilation séquentielle de données avec le filtre bayésien optimal pour le cas général, le filtre de Kalman pour le modèle linéaire gaussien, le filtre particulière comme une approximation de type Monte Carlo, et le filtre de Kalman d'ensemble comme une extension du filtre de Kalman pour le modèle non linéaire gaussien.

Nous présentons ensuite dans le chapitre 5 la borne de Cramer-Rao pour le filtrage non linéaire discret qui est considérée comme la borne inférieure des erreurs en moyenne quadratique des estimateurs.

Nous terminons cette partie par quelques conclusions.



## Chapitre 2

# Interpolation statistique

L'interpolation statistique correspond à l'estimateur linéaire non biaisé de variance minimale BLUE (Best Linear Unbiased Estimator). Cette méthode était utilisée à ECMWF (European Centre for Medium Weather Forecasts) jusqu'en 1996, puis elle a été remplacée par les méthodes variationnelles qui sont plus efficaces pour les modèles complexes [32].

### 2.1 Notations et hypothèses

Considérons un instant  $k$  fixé dans l'intervalle d'assimilation  $[0, K]$ . Notons

- $X_k$  : le vrai vecteur d'état à l'instant  $k$ , qui est inconnu.
- $X_k^f$  : une prédiction de  $X_k$ , fournie par le modèle numérique. C'est la meilleure estimation de l'état en l'absence d'autres informations.
- $Y_k$  : Vecteur d'observation de l'état  $X_k$  à l'instant  $k$ .

L'objectif est de corriger la prédiction  $X_k^f$  quand l'observation  $Y_k$  est disponible, de façon à obtenir une estimation dont l'erreur en moyenne quadratique est minimale. Nous faisons les hypothèses suivantes

- La prédiction  $X_k^f$  est non biaisée, nous avons donc

$$\mathbb{E} [X_k^f - X_k] = 0.$$

- La covariance de l'erreur de prédiction  $P_k^f$ , définie par

$$P_k^f = \mathbb{E} [(X_k - X_k^f)(X_k - X_k^f)^*]$$

est définie positive et déterminable.

- L'observation est reliée à l'état par un opérateur *linéaire*  $H_k$ ,

$$Y_k = H_k X_k + V_k$$

où  $V_k$  est un bruit blanc de matrice de covariance  $R_k$  connue et définie positive.

- L'erreur de prédiction et l'erreur d'observation sont mutuellement indépendantes. Ainsi, en notant  $e_k^f = X_k - X_k^f$  comme l'erreur de prédiction, nous avons

$$\mathbb{E} [e_k^f V_k^*] = 0.$$

## 2.2 Estimateur BLUE

Étant données une prédiction  $X_k^f$  et une observation  $Y_k$ , l'estimateur linéaire sans biais de variance minimale (*Best Linear Unbiased Estimator* - BLUE) est un estimateur linéaire en fonction de la prédiction  $X_k^f$  et de l'innovation  $(Y_k - H_k X_k^f)$

$$X_k^a = X_k^f + M_k (Y_k - H_k X_k^f), \quad (2.1)$$

où la matrice  $M_k \in \mathbb{R}^{m \times d}$  est choisie pour que la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, définie par

$$P_k^a = \mathbb{E} [(X_k - X_k^a)(X_k - X_k^a)^*]$$

soit *minimale*.

On obtient

$$\begin{aligned} X_k^a &= X_k^f + K_k (Y_k - H_k X_k^f), \\ P_k^a &= (I - K_k^* H_k) P_k^f. \end{aligned} \quad (2.2)$$

où

$$K_k = P_k^f H^* (H_k P_k^f H_k^* + R_k)^{-1}$$

est appelé gain optimal.

## 2.3 Propriétés de l'estimateur BLUE

### Estimateur non biaisé de variance minimale

$X_k^a$  défini par (2.1) est un estimateur non biaisé de  $X_k$  quel que soit le choix de la matrice  $M_k$ . En effet, nous avons,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [X_k - X_k^a] &= \mathbb{E} [X_k - X_k^f] + M_k (\mathbb{E} [Y_k - H_k X_k^f]) \\ &= \mathbb{E} [X_k - X_k^f] + M_k (\mathbb{E} [H_k (X_k - X_k^f) + V_k]) \\ &= \mathbb{E} [X_k - X_k^f] + M_k (H_k \mathbb{E} [X_k - X_k^f] + \mathbb{E} V_k). \end{aligned}$$

Parce que  $X_k^f$  est un estimateur sans biais de  $X_k$ , et l'erreur d'observation  $V_k$  est un bruit blanc, nous avons donc  $\mathbb{E}[X_k - X_k^a] = 0$ ,  $X_k^a$  est alors un estimateur non biaisé de  $X_k$ .

La covariance de l'erreur d'estimation  $P_k^a$  définie dans (2.2) est optimale, au sens où elle est la matrice de trace minimale parmi toutes les matrices  $M_k \in \mathbb{R}^{m \times d}$  (voir [3], partie 4.2 pour la démonstration).

### Équivalence avec la solution d'un problème d'optimisation

L'estimateur BLUE est aussi la solution d'un problème d'optimisation

$$X_k^a = \arg \min_x J(x)$$

où

$$J(x) \triangleq (x - X_k^f)^* (P_k^f)^{-1} (x - X_k^f) + (Y_k - H_k x)^* R_k^{-1} (Y_k - H_k x). \quad (2.3)$$

En effet, la solution qui minimise la fonction coût  $J(x)$  est (d'après [3])

$$\arg \min_x J(x) = X_k^f + [(P_k^f)^{-1} + H_k^* R_k^{-1} H_k]^{-1} H_k^* R_k^{-1} (Y_k - H_k X_k^f)$$

D'après la formule de Sherman-Morrison-Woodbury (annexe 10.2.3), nous avons

$$[(P_k^f)^{-1} + H_k^* R_k^{-1} H_k]^{-1} H_k^* R_k^{-1} = P_k^f H_k^* (H_k P_k^f H_k^* + R_k)^{-1} = K_k$$

Alors,

$$\arg \min_x J(x) = X_k^f + K_k (Y_k - H_k X_k^f) = X_k^a.$$

## 2.4 Commentaires

L'avantage de l'estimateur BLUE est que pour le construire, il suffit de connaître les deux premiers moments des erreurs de prédiction et d'observation. Or les erreurs sont de moyenne zéro, il suffit donc de connaître les matrices de covariance  $P_k^f$  et  $R_k$ .

L'estimateur BLUE a les inconvénients suivants

- En pratique, il est difficile de déterminer exactement la covariance de prédiction  $P_k^f$ . Dans les applications, la prédiction  $X_k^f$  est généralement obtenue en laissant évoluer le modèle numérique à partir d'une estimation  $X_{k-1}^a$  de l'état à l'instant précédent, par exemple

$$X_k^f = f_k(X_{k-1}^a) + W_k \quad (2.4)$$

En sachant la covariance de l'erreur d'estimation  $P_{k-1}^a$  de  $X_{k-1}^a$  et la covariance de l'erreur du modèle  $Q_k$ , il est en général impossible d'évaluer numériquement la covariance de l'erreur de prédiction  $P_k^f$ , sauf dans le cas d'un modèle numérique linéaire. En effet, en remplaçant

la fonction non linéaire  $f_k$  par une fonction linéaire  $F_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  dans (2.4), la matrice de covariance de prédiction  $P_k^f$  est déterminée exactement par

$$P_k^f = F_k P_{k-1}^a F_k^* + Q_k.$$

- En pratique, l'opérateur d'observation n'est pas toujours linéaire. Il est possible de linéariser l'opérateur  $H_k$ , cependant ceci entraîne des erreurs et l'estimateur n'est plus optimal.
- Calculer le gain optimal  $K_k$  est en général impossible dans le cas d'un vecteur d'état de grande dimension. Par exemple, pour les modèles météorologiques, la dimension du vecteur d'état est de l'ordre de  $m = 10^7$ , et la dimension du vecteur d'observation est de l'ordre de  $d = 10^5$  [3]. Or le gain optimal est défini par

$$K_k = P_k^f H_k^* (H_k P_k^f H_k^* + R_k)^{-1}.$$

Pour le calculer, il faut d'une part stocker les matrices de dimension très grande, d'autre part inverser la matrice  $(H_k P_k^f H_k^* + R_k)$  de dimension  $d \times d$  et puis évaluer les produits des matrices. Sur un intervalle d'assimilation, le calcul est alors très coûteux.

Pour diminuer les temps de calcul, une méthode, appelée interpolation optimale, est utilisée, où chaque composante du gain optimal est calculée en utilisant seulement les observations locales qui sont importantes pour construire l'estimateur (voir [3] pour plus de détails sur cette méthode).

Une autre façon de réduire le coût de calcul est d'éviter d'évaluer le gain optimal  $K_k$ . Une méthode appelée assimilation variationnelle tri-dimensionnelle (3D-Var) est proposée, qui donne une solution équivalente à celle de l'estimateur BLUE, et qui consiste à chercher le minimum de la fonction coût  $J(x)$  définie dans (2.3), et plus loin dans (3.4).

## Chapitre 3

# Assimilation variationnelle de données

Les méthodes d'assimilation variationnelle de données, proposées par Sasaki [36, 37] dans les années cinquante, sont beaucoup utilisées dans les grands centres de prévisions météorologiques.

Ces méthodes relèvent de la théorie de l'optimisation, et consistent à chercher le minimum d'une fonction coût donnée. Nous séparons les méthodes variationnelles en deux classes : l'assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte, où le modèle est supposé être parfait, et l'assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible, où on tient compte de l'erreur du modèle lors de l'assimilation.

Les méthodes variationnelles (sauf la méthode 3D-Var) sont écrites à l'origine pour un système dynamique en temps continu de la forme (1.4) (voir [18] par exemple). Tandis que la méthode séquentielle qui sera présentée plus loin est basée sur un système dynamique à temps discret de la forme (1.2). De façon à pouvoir comparer les différentes méthodes d'assimilation, nous choisissons de présenter les méthodes variationnelles pour un système discrétisé en se basant sur un article de Uboldi et Kamachi [41]. De plus, comme nous l'avons indiqué dans la section 1.2.2, on effectue toujours les calculs numériques sur le modèle dynamique discrétisé, même s'il est écrit à l'origine à temps continu.

Nous considérons donc le système suivant

$$X_0 = \Psi_0 + A \quad (3.1)$$

$$X_t = f_t(X_{t-1}) + W_t, \quad t \in [1 : T] \quad (3.2)$$

$$Y_k = H_k X_{t(k)} + V_k, \quad k \in [1 : K]. \quad (3.3)$$

où

- $X_0$  représente l'état initial. C'est une variable aléatoire de moyenne  $\Psi_0$  et de covariance  $Q_0$ .  
 $A$  représente l'erreur de l'état initial, de moyenne 0 et de matrice de covariance  $Q_0$ .

- $W_t$  est l'erreur du modèle à l'instant  $t$  correspondant au pas de discrétisation utilisé, de moyenne 0 et de covariance  $Q_t$ .
- $Y_k$  est l'observation à l'instant  $t_k$ , avec l'erreur d'observation  $V_k$  de moyenne 0 et de covariance  $R_k$

Supposons que les matrices de covariance  $Q_0, Q_t, R_k$  sont connues, définies positives et inversibles, l'opérateur d'observation  $H_k$  est linéaire, les erreurs du modèle et d'observation sont des bruits blancs, indépendants entre eux et indépendant de l'état initial  $X_0$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t] &= 0, \quad \forall t & \mathbb{E}[V_k] &= 0, \quad \forall k \\ E[W_t W_{t'}] &= 0, \quad \forall t, t' & E[V_k V_l] &= 0, \quad \forall k, l \\ \mathbb{E}[W_t X_0] &= 0, \quad \forall t & \mathbb{E}[V_k X_0] &= 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

### 3.1 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique forte

Le modèle est supposé être parfait, l'erreur  $W_t$  du modèle est donc supprimée de l'équation (3.2).

#### 3.1.1 Assimilation variationnelle tri-dimensionnelle (3D-Var)

Considérons un instant  $t$  quelconque dans l'intervalle d'assimilation, choisi normalement au milieu de l'intervalle. Supposons que  $t = t(k)$ , c'est-à-dire qu'on possède une observation  $Y_k$  à l'instant  $t$ . En sachant à cet instant une prédiction  $X_k^f = x_k^f$  de covariance d'erreur de prédiction  $P_k^f$  et une observation  $Y_k = y_k$ , la méthode 3D-Var consiste à chercher le minimum de la fonction coût

$$\mathcal{J}(x) = (x - x_k^f)^* (P_k^f)^{-1} (x - x_k^f) + (y_k - H_k x)^* R_k^{-1} (y_k - H_k x). \quad (3.4)$$

Le minimum est alors non seulement proche de la prédiction  $x_k^f$  mais aussi proche de l'observation  $y_k$  (au sens où l'innovation  $y_k - H_k x$  doit être petite). Les covariances  $(P_k^f)^{-1}$  et  $R_k^{-1}$  jouent le rôle de pondérations et permettent de donner plus ou moins de confiance aux deux sources d'information. Ce minimum est aussi équivalent à une réalisation de l'estimateur BLUE d'après la section 2.3, pour des valeurs fixées de  $X_k^f$  et de  $Y_k$ . Cette estimation à l'instant  $t$  est considérée comme une estimation de l'état dans l'intervalle d'assimilation total.

La fonction coût  $\mathcal{J}(x)$  a une forme quadratique en fonction de  $x$  car l'opérateur d'observation  $H_k$  est supposé linéaire. S'il est non linéaire, à cette étape on le linéarise [20]. En plus, les coefficients de la forme quadratique sont des matrices définies positives, alors la minimisation peut se faire à l'aide de la descente du gradient, dont le principe est peut être décrit comme suit :

- Commencer avec une valeur initiale  $x_{(0)}$ . On choisit souvent  $x_{(0)} = \Psi_0$  en pratique.

- Considérer une séquence  $x_{(0)}, x_{(1)}, \dots$  telle que

$$x_{(n+1)} = x_{(n)} - \gamma_n \mathcal{J}'(x_{(n)}), \forall n \geq 0,$$

où  $\gamma_n > 0$  est un nombre suffisamment petit à choisir et  $\mathcal{J}'(x_{(n)})$  est le gradient de la fonction  $\mathcal{J}$  en  $x_{(n)}$

$$\mathcal{J}'(x) = (P_k^f)^{-1}(x - x_k^f) - H_k^* R_k^{-1}(y_k - H_k x).$$

- Nous avons

$$\mathcal{J}(x_{(0)}) \geq \mathcal{J}(x_{(1)}) \geq \mathcal{J}(x_{(2)}) \geq \dots$$

et alors espérer que  $x_{(n)}$  converge vers le minimum cherché. L'approximation est arrêtée après un nombre d'itération fini [3].

Si  $t \neq t(k)$ , c'est-à-dire qu'on n'a pas d'observation à l'instant  $t$ , il faut interpoler les observations locales. En pratique, les instants d'observations ne se confondent pas toujours avec les instants d'estimation ou de prédiction. Par exemple, les observations satellites sont en général asynchrones et intermittentes. Dans ce cas on utilise la méthode d'assimilation variationnelle quadri-dimensionnelle, où la fonction coût à minimiser est définie sur tout l'intervalle d'assimilation et toutes les observations dans cet intervalle seront utilisées.

### 3.1.2 Assimilation variationnelle quadri-dimensionnelle (4D-Var)

En sachant une condition initiale  $\Psi_0$  et une suite d'observation  $Y_{1:K} = y_{1:K}$  dans l'intervalle de temps  $[0 : T]$ , et en supposant que le modèle est parfait, c'est-à-dire que l'erreur  $W_t$  du modèle dans 3.2 est supprimée, la méthode 4D-Var consiste à chercher le minimum de la fonction coût suivante

$$J(x = x_{0:T}) = (x_0 - \Psi_0)^*(Q_0)^{-1}(x_0 - \Psi_0) + \sum_{k=1}^K (y_k - H_k x_k)^* R_k^{-1}(y_k - H_k x_k). \quad (3.5)$$

sous la contrainte que la suite d'estimation  $x_{0:T}$  doit vérifier l'équation du modèle dynamique

$$\forall t, x_t = \underbrace{f_t \circ f_{t-1} \circ \dots \circ f_1}_{t \text{ fois}}(x_0)$$

où  $f_t, t = 1, \dots, T$ , est l'équation du modèle dynamique. Il suffit donc de minimiser la fonction coût en fonction de  $x_0$ .

Si  $f_t$  est non linéaire, la fonction coût est non linéaire en fonction de  $x_0$  et la minimisation devient délicate. Pour faciliter la minimisation, on linéarise la fonction  $f_k$  pour avoir la fonction coût  $\mathcal{J}(x)$  de la forme quadratique par rapport à  $x_0$ . La minimisation peut ensuite être effectuée en utilisant la descente du gradient ou du gradient conjugué, mais l'évaluation du gradient  $\mathcal{J}'(x)$  est maintenant plus compliquée à cause de la dimension du second terme de (3.5). La minimisation peut être effectuée en utilisant un algorithme plus efficace où on évalue des équations "forward" et "backward". Cette méthode peut être consultée dans [3] et [20].

## 3.2 Assimilation variationnelle sous contrainte dynamique faible

Supposons que le modèle dynamique n'est pas parfait et comporte une erreur  $W_t$  pour chaque instant  $t$  qui est un bruit blanc de covariance  $Q_t$ .

### 3.2.1 Cas du modèle linéaire

On considère un modèle dynamique linéaire en remplaçant la fonction non linéaire  $f_k$  dans (3.2) par une fonction linéaire  $F_k$

$$X_t = F_k X_{t-1} + W_t.$$

#### Fonction coût

Sachant une suite d'observations  $Y_{1:K} = y_{1:K}$  et une condition initiale  $\Psi_0$ , la fonction coût est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x = x_{0:T}) &= \sum_{t=1}^T (x_t - F_k x_{t-1})^* Q_t^{-1} (x_t - F_k x_{t-1}) \\ &+ (x_0 - \Psi_0)^* Q_0^{-1} (x_0 - \Psi_0) \\ &+ \sum_{k=1}^K (y_k - H_k x_{t(k)}) R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)}). \end{aligned}$$

Le problème consiste donc à chercher la trajectoire  $x_{0:T}^a = x_0^a, \dots, x_T^a$  qui minimise globalement la fonction coût  $\mathcal{J}$ , autrement dit à chercher

$$x_{0:T}^a = \arg \min_x \mathcal{J}(x).$$

En remarquant que la fonction coût  $\mathcal{J}(x)$  a une forme quadratique avec des coefficients qui sont des matrices de covariance définies positives, alors l'extremum qui rend le gradient nul est le minimum de la fonction coût. Ainsi le minimum  $x$  de  $\mathcal{J}$  vérifie l'équation suivante

$$\mathcal{J}(x + \delta x) - \mathcal{J}(x) = \mathcal{O}(\delta x^2) \quad \text{quand } \delta x \rightarrow 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(x + \delta x) &= \sum_{t=1}^T (x_t - F_k(x_{t-1} + \delta x_{t-1}) + \delta x_t)^* Q_t^{-1} (x_t - F_k(x_{t-1} + \delta x_{t-1}) + \delta x_t) \\
&\quad + (x_0 - \Psi_0 + \delta x_0)^* Q_0^{-1} (x_0 - \Psi_0 + \delta x_0) \\
&\quad + \sum_{k=1}^K (y_k - H_k x_{t(k)} - H_k \delta x_{t(k)}) R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)} - H_k \delta x_{t(k)}) \\
&= \sum_{t=1}^T (x_t - F_k x_{t-1} - F_k \delta x_{t-1} + \delta x_t)^* Q_t^{-1} (x_t - F_k x_{t-1} - F_k \delta x_{t-1} + \delta x_t) \\
&\quad + (x_0 - \Psi_0 + \delta x_0)^* Q_0^{-1} (x_0 - \Psi_0 + \delta x_0) \\
&\quad + \sum_{k=1}^K (y_k - H_k x_{t(k)} - H_k \delta x_{t(k)}) R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)} - H_k \delta x_{t(k)}) \\
&= \mathcal{J}(x) + 2 \sum_{t=1}^T (\delta x_t - F_k \delta x_{t-1})^* Q_t^{-1} (x_t - F_k x_{t-1}) \\
&\quad + 2 (\delta x_0)^* Q_0^{-1} (x_0 - \Psi_0) \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^K (H_k \delta x_{t(k)})^* R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)}) \\
&\quad + \mathcal{O}(\delta x^2).
\end{aligned}$$

Le minimum de la fonction coût est donc solution de

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^T (\delta x_t - F_k \delta x_{t-1})^* Q_t^{-1} (x_t - F_k x_{t-1}) \\
&\quad + (\delta x_0)^* Q_0^{-1} (x_0 - \Psi_0) \\
&\quad - \sum_{k=1}^K (H_k \delta x_{t(k)})^* R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

### Equations d'Euler-Lagrange

Pour résoudre l'équation (3.6), on introduit la variable adjointe  $\lambda$

$$\lambda(t) = Q_t^{-1} (x_t - F_k x_{t-1}). \tag{3.7}$$

En insérant cette variable adjointe dans (3.6), le premier terme de cette équation devient

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^T (\delta x_t - F_k \delta x_{t-1})^* \lambda(t) \\
= & \sum_{t=1}^T (\delta x_t)^* \lambda(t) - \sum_{t=1}^T (\delta x_{t-1})^* F_k^* \lambda(t) \\
= & \sum_{t=1}^{T-1} (\delta x_t)^* (\lambda(t) - F_k^* \lambda(t+1)) \\
& + (\delta x_T)^* \lambda(T) \\
& - (\delta x_0)^* F_k^* \lambda(1). \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Le troisième terme de (3.6) peut être écrit sous la forme

$$\sum_{t=1}^{T-1} (\delta x_t)^* \sum_{k=1}^K \delta(t-t_k) H_k^* R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)}) \tag{3.9}$$

où  $\delta(t-t_k)$  désigne la mesure de Dirac au point zéro.

En insérant (3.8) et (3.9) dans (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^{T-1} (\delta x_t)^* [\lambda(t) - F_k^* \lambda(t+1) - \sum_{k=1}^K \delta(t-t_k) H_k^* R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)})] \\
& + (\delta x_0)^* [Q_0^{-1} (x_0 - \Psi_0) - F_k^* \lambda(1)] \\
& + (\delta x_T)^* \lambda(T) = 0.
\end{aligned}$$

Du fait que  $\delta x_{0:T}$  dans l'équation ci-dessus est arbitraire, et en multipliant (3.7) par  $Q_t$  à gauche, nous obtenons donc les équations d'Euler-Lagrange pour  $x_t$  et  $\lambda(t)$

$$\begin{cases} x_t & = F_k x_{t-1} + Q_t \lambda(t), \\ x_0 & = \Psi_0 + Q_0 \lambda(0), \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \lambda(t) & = F_k^* \lambda(t+1) + \sum_{k=1}^K \delta(t-t_k) H_k^* R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)}), \\ \lambda(T) & = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Les équations d'Euler-Lagrange comportent une équation "forward" pour  $x_t$  et une équation "backward" pour la variable adjointe  $\lambda(t)$ . La méthode du représentant [2] peut être utilisée pour découper et résoudre ces équations de manière exacte.

### Méthode du représentant

La méthode du représentant propose d'écrire les solutions de (3.10 - 3.11) sous la forme

$$x_t^a = x_t^f + r^*(t) b, \tag{3.12}$$

$$\lambda(t) = s^*(t) b. \tag{3.13}$$

où  $x_t^f$  est la solution de

$$\begin{cases} x_t^f = F_k x_{t-1}^f, \\ x_0^f = \Psi_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

et  $r(t) \in \mathbb{R}^{K \times m}$ ,  $s(t) \in \mathbb{R}^{K \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^K$ .

La trajectoire  $x_{0:T}^f$  qui sera appelée solution de référence peut être calculée à l'avance sans difficulté. La solution à chercher ici est supposée être une combinaison linéaire de la solution de référence avec un terme qui dépend du temps que l'on appelle le représentant  $r^*(t)$ .

Le problème maintenant est de déterminer  $b$ ,  $r(t)$  et  $s(t)$  tels que  $x_t^a$  et  $\lambda(t)$  définis par (3.12 - 3.13) vérifient les équations d'Euler-Lagrange.

En substituant (3.12 - 3.13) dans (3.10 - 3.11), on obtient

$$\begin{cases} r^*(t) b = F_k r^*(t-1) b + Q_t s^*(t) b, \\ r^*(0) b = Q_0 s^*(0) b, \\ \\ s^*(t) b = F_k^* s^*(t+1) b + \sum_{k=1}^K \delta(t-t_k) H_k^* R_k^{-1} (y_k - H_k x_{t(k)}^f - H_k r^*(t(k)) b), \\ s^*(T) = 0. \end{cases}$$

En définissant

$$a(t) = \begin{bmatrix} H_1 \delta(t-t(1)) \\ \vdots \\ H_k \delta(t-t(K)) \end{bmatrix}$$

et en choisissant  $b$  tel que

$$b = R^{-1} [(y - y^f) - S b] \quad (3.15)$$

avec les définitions suivantes

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R_k^{-1} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} H_1 r^*(t(1)) \\ \vdots \\ H_k r^*(t(K)) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} \quad y^f = \begin{bmatrix} H_1 x_{t(1)}^f \\ \vdots \\ H_k x_{t(K)}^f \end{bmatrix},$$

nous avons

$$s^*(t) b = F_k^* s^*(t+1) b + a^*(t) b.$$

On peut réécrire cette équation ainsi que celle de  $r(t)$  en simplifiant par  $b$ , les produits deviennent alors des produits de Kronecker

$$\begin{aligned} F_k^* \otimes s^*(t+1) &= \left[ F_k^* s^1(t+1) \quad \dots \quad F_k^* s^K(t+1) \right] \\ F_k \otimes r^*(t-1) &= \left[ F_k r^1(t-1) \quad \dots \quad F_k r^K(t-1) \right] \end{aligned}$$

$\{r(t)\}$  et  $\{s(t)\}$  sont alors solutions du système

$$\begin{cases} r(t) = F_k \otimes r(t-1) + Q_t s(t), \\ r(0) = Q_0 \otimes s(0), \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} s(t) = F_k^* \otimes s(t+1) + a(t), \\ s(T) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce système peut être résolu d'abord pour  $s(t)$  (backward) et puis pour  $r(t)$  (forward).

On cherche le vecteur  $b$  en analysant l'équation (3.15)

$$b = R^{-1} [(y - y^f) - S b] = R^{-1} (y - y^f) - R^{-1} S b,$$

qui est équivalente à

$$b = (I + R^{-1} S)^{-1} R^{-1} (y - y^f)$$

ou bien

$$b = (R + S)^{-1} (y - y^f)$$

avec

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R_K \end{bmatrix}$$

Revenons à (3.12), nous avons

$$x_t^a = x_t^f + r^*(t) (R + S)^{-1} (y - y^f). \quad (3.18)$$

**En résumé**, la méthode du représentant pour un système linéaire discret peut être écrite suivant le schéma de la table 3.1.

La méthode du représentant fournit le minimum de la fonction coût  $\mathcal{J}(x)$  en résolvant les équations d'Euler-Lagrange, et la solution est unique. Il a été démontré dans [2] qu'en prenant une solution de la forme

$$\tilde{x}_t = x_t^f + r^*(t) b + g(t),$$

où  $g(t)$  est une fonction arbitraire qui est orthogonale à l'espace des représentants  $r(t)$ , alors  $g(t)$  doit être égale à zéro.

- 
- Calculer la solution de référence  $\{x_t^f\}_{t=1,\dots,T}$  selon (3.14).
  - Evaluer  $a(t), R, S, y, y^f$  comme dans les définitions.
  - Calculer  $\{r(t)\}_{t=1,\dots,T}$  et  $\{s(t)\}_{t=1,\dots,T}$  selon (3.16 - 3.17).
  - Calculer  $\{x_t^a\}_{t=1,\dots,T}$  selon (3.18)
- 

TAB. 3.1: Méthode du représentant pour le modèle linéaire

### 3.2.2 Cas du modèle non linéaire

La méthode du représentant est une méthode efficace dans le cas du modèle linéaire. Pour un modèle non linéaire, les équations d'Euler-Lagrange obtenues forment un système dont l'équation "forward" de l'état est non linéaire. La résolution des équations d'Euler-Lagrange devient délicate.

Pourtant, la méthode du représentant est aussi applicable pour approcher le minimum sur un modèle non linéaire dans deux cas

- Si le modèle non linéaire peut être écrit sous la forme d'une séquence convergente d'itérations linéaires. On définit alors une séquence convergente d'équations "forward" linéaires et on utilise la méthode du représentant pour résoudre chaque itération de manière exacte. Cette approximation est présentée par Bennett dans [1].
- Si le minimum de la fonction coût n'est pas trop éloigné de la solution de référence définie dans (3.14). C'est à dire que le modèle dynamique doit avoir une erreur faible et que les observations soient proches de la solution de référence. Dans ce cas, on peut linéariser les équations d'Euler-Lagrange autour la solution de référence pour approcher le minimum de la fonction coût. Cette méthode est introduite par Uboldi et Kamachi dans [41].

Dans le cas général, le problème peut aussi être résolu en utilisant la descente du gradient par exemple, ou d'autres algorithmes d'optimisation [14]. Une bonne synthèse de ces méthodes peut être trouvée dans [18].

## 3.3 Matrice de covariance de l'erreur d'estimation

Dans l'interpolation statistique, la matrice de covariance de l'erreur de l'estimateur BLUE est donnée par

$$P_k^a = (I - K_k^* H_k) P_k^f,$$

avec le gain optimal

$$K_k = P_k^f H_k^* (H P_k^f H^* + R_k)^{-1}.$$

Pour les méthodes variationnelles, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation d'une trajectoire de l'état dans l'intervalle d'assimilation, notée par  $P^a$  est déterminée par l'inverse de la moitié du Hessien de la fonction coût.

$$P^a = \left(\frac{1}{2}\mathcal{J}''\right)^{-1}.$$

Une démonstration est donnée dans [3].

### 3.4 Commentaires

Les méthodes variationnelles sont très utilisées dans les grands centres de météorologie. Comme elles prennent en compte toutes les observations dans l'intervalle d'assimilation et fournissent l'estimation de la trajectoire de l'état dans l'intervalle d'assimilation, elles permettent aussi de résoudre les problèmes de lissage et de prédiction.

Sous certaines hypothèses, les méthodes variationnelles donnent des solutions équivalentes aux autres méthodes. La méthode 3D-Var donne une solution équivalente à l'estimateur BLUE sans évaluer le gain optimal  $K_k$  qui requiert des calculs coûteux. Dans le cas où les erreurs sont supposées suivre des lois gaussiennes, l'argmin de la fonction de coût correspond à l'estimateur du maximum de vraisemblance. On peut aussi montrer que la méthode 4D-var donne une estimation équivalente avec celle du filtre de Kalman à l'instant final de l'intervalle d'assimilation [3].

Les méthodes variationnelles ont aussi certains inconvénients. Si la fonction du modèle et l'opérateur d'observation sont non linéaires, la fonction coût a une forme complexe et possède des minima locaux. Les méthodes variationnelles résolvent ce problème en utilisant la linéarisation pour écrire la fonction coût sous forme quadratique. Ceci peut entraîner des erreurs ou une divergence inattendue. En plus, la linéarisation demande une écriture des gradients ce qui peut être difficile à cause de la grande dimension de l'état et de la complexité de l'équation du modèle dynamique. Même dans le cas d'un modèle linéaire, la méthode du représentant, ainsi que la méthode 4D-var nécessitent déjà des calculs assez coûteux, parce qu'il faut évaluer en même temps les équations "forward" et "backward" dans l'intervalle d'assimilation.

Les méthodes 3D-var et 4D-var reposent sur l'hypothèse d'un modèle parfait, grâce à cette hypothèse la dimension du problème d'optimisation est largement diminuée. Pourtant, cette hypothèse est rarement satisfaite en pratique.

Un autre inconvénient des méthodes variationnelles est que, comme elles proposent les solutions déterministes à partir du problème d'optimisation, on n'obtient pas des informations sur la distribution de probabilité de l'état.

## Chapitre 4

# Assimilation séquentielle de données

Dans ce chapitre nous présentons les méthodes d'assimilation séquentielle de données. L'estimation est calculée récursivement dans l'intervalle d'assimilation, en se basant sur l'estimation bayésienne de  $X_k$  sachant la suite d'observation  $Y_{1:k} = \{Y_1, \dots, Y_K\}$ .

L'approche bayésienne et le filtre bayésien optimal sont présentés dans les sections 4.1 et 4.2. Dans la section 4.3, le filtre de Kalman est présenté comme un cas particulier du filtre bayésien optimal pour des systèmes linéaires et gaussiens. Pour des systèmes non linéaires et (ou) non gaussiens, le filtre particulaire est proposé comme une approximation de type Monte Carlo du filtre bayésien optimal, et sera présentée dans la section 4.4. Dans la section 4.5, nous présentons les extensions du filtre de Kalman pour des systèmes non linéaires et gaussiens comme le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman d'ensemble.

### 4.1 Approche bayésienne

L'approche bayésienne calcule la loi conditionnelle de la variable aléatoire  $X_k$  sachant les observations  $Y_{1:k}$ . On la note

$$\mu_k^a(dx_k) = \mathbb{P}[X_k \in dx_k | Y_{1:k}].$$

On définit également  $\mu_k^f(dx_k)$  la loi de la variable aléatoire  $X_k$  sachant les observations passées  $Y_{1:k-1}$

$$\mu_k^f(dx_k) = \mathbb{P}[X_k \in dx_k | Y_{1:k-1}].$$

Supposons que  $\mu_k^f$  et  $\mu_k^a$  admettent des densités de probabilité notées respectivement  $p(x_k | y_{1:k-1})$  et  $p(x_k | y_{1:k})$ .

L'estimateur bayésien de  $X_k$  sachant  $Y_{1:k}$  est ainsi la moyenne conditionnelle

$$X_k^a = \mathbb{E}[X_k | Y_{1:k}] \triangleq \int_{\mathbb{R}^m} x \mu_k^a(dx_k) = \int_{\mathbb{R}^m} x p(x_k | y_{1:k}) dx.$$

## 4.2 Filtre bayésien optimal

### 4.2.1 Les équations

Le filtre bayésien optimal calcule la densité de probabilité  $p(x_k|y_{1:k})$  de façon récursive.

Supposons que, à l'instant  $k - 1$ ,  $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$  est disponible. Alors  $p(x_k|y_{1:k})$  est calculée à travers deux étapes

- Étape de prédiction : la densité a priori  $p(x_k|y_{1:k-1})$  est calculée par l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}) p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) dx_{k-1}, \quad (4.1)$$

où  $p(x_k|x_{k-1})$  est la densité de transition de la chaîne de Markov  $\{X_k\}$  définie dans le chapitre 1.

- Étape de correction : l'observation  $Y_k = y_k$  est prise en compte pour corriger la densité a priori grâce à la formule de Bayes

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k) p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}, \quad (4.2)$$

où  $p(y_k|x_k)$  est la densité d'émission définie dans le chapitre 1, et le dénominateur est une constante de normalisation qui peut s'écrire sous la forme

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int p(y_k|x_k) p(x_k|y_{1:k-1}) dx_k.$$

Ce schéma de récurrence est initialisé avec  $p(x_0)$ , la densité de probabilité de l'état initial  $X_0$  qui est supposée connue.

### 4.2.2 Commentaires

- L'estimation bayésienne, ou la moyenne conditionnelle

$$m_k^a = \mathbb{E} [X_k|Y_{1:k}]$$

est l'estimateur du minimum de variance parmi tous les estimateurs de  $X_k$  sachant  $Y_{1:k}$ . C'est-à-dire que, si  $\widehat{X}_k$  est un estimateur quelconque de  $X_k$  sachant les observations  $Y_{1:k}$ , alors nous avons

$$\mathbb{E} [|\widehat{X}_k - X_k|^2] \geq \mathbb{E} [|m_k^a - X_k|^2]$$

(voir [25] par exemple pour la démonstration).

- (4.1 - 4.2) forment les équations du filtre bayésien optimal. Elles sont faciles à écrire, mais il est en général impossible de les résoudre, sauf dans le cas particulier des *systèmes linéaires gaussiens*, où elles se ramènent aux équations connues du filtre de Kalman, ou dans le cas d'un espace d'état de dimension fini où la distribution conditionnelle est calculée par l'équation "forward" de Baum. Dans le cas des *systèmes non linéaires et/ou non gaussiens*, on a recours à des approximations numériques de type Monte Carlo, appelées *filtres particuliers*.

### 4.3 Filtre de Kalman

Supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites

- L'état initial suit une loi gaussienne, c'est-à-dire que  $\mu_0(dx_0) = \mathcal{N}(\Psi_0, Q_0)$ .
- $W_k$  suit une loi gaussienne, c'est-à-dire que  $p_k^W(dw) = \mathcal{N}(0, Q_k)$ .
- $V_k$  suit une loi gaussienne, c'est-à-dire que  $p_k^V(dv) = \mathcal{N}(0, R_k)$ .
- $f_k(X_{k-1})$  est une fonction linéaire de  $X_{k-1}$ .
- $h_k(X_k)$  est un opérateur linéaire de  $X_k$ .

Le système dynamique (1.2 - 1.3) devient un système linéaire gaussien de la forme

$$\begin{aligned} X_k &= F_k X_{k-1} + W_k, \\ Y_k &= H_k X_k + V_k, \end{aligned}$$

où  $F_k$  et  $H_k$  sont les matrices de dimensions  $m \times m$  et  $d \times m$  respectivement, désignent les opérateurs linéaires.

**Proposition 4.3.1.** *Pour tout  $k = 1, \dots, K$ , si  $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$  est une densité gaussienne de moyenne  $m_{k-1}^a$  et de covariance  $P_{k-1}^a$ , alors*

- $p(x_k|y_{1:k-1})$  est une densité gaussienne de moyenne et de covariance

$$m_k^f = F_k m_{k-1}^a, \quad (4.3)$$

$$P_k^f = F_k P_{k-1}^a F_k^* + Q_k, \quad (4.4)$$

- $p(x_k|y_{1:k})$  est une densité gaussienne de moyenne et de covariance

$$m_k^a = m_k^f + K_k(y_k - H_k m_k^f), \quad (4.5)$$

$$P_k^a = (I - K_k H_k) P_k^f, \quad (4.6)$$

où  $K_k = P_k^f H_k^* (H_k P_k^f H_k^* + R_k)^{-1}$ , est appelé *gain de Kalman*.

La démonstration de Proposition 4.3.1 est détaillée dans [25].

**Remarque 4.3.1.** Les matrices de covariance  $P_k^f$  et  $P_k^a$  sont par définition

$$P_k^f = \mathbb{E} [(X_k - m_k^f)(X_k - m_k^f)^* | Y_{1:k-1}] \quad \text{et} \quad P_k^a = \mathbb{E} [(X_k - m_k^a)(X_k - m_k^a)^* | Y_{1:k}].$$

Cependant, ces matrices de covariance ne dépendent pas des observations  $Y_{1:k}$  (voir [25] Remarque 1.6), nous pouvons donc écrire

$$P_k^f = \mathbb{E} [(X_k - m_k^f)(X_k - m_k^f)^*] \quad \text{et} \quad P_k^a = \mathbb{E} [(X_k - m_k^a)(X_k - m_k^a)^*].$$

## Commentaires

- (4.3-4.4-4.5-4.6) forment les équations du filtre de Kalman. Elles décrivent l'évolution de la moyenne et de la covariance des distributions gaussiennes  $\mu_{k|k-1}$  et  $\mu_k$  respectivement (dans le cadre gaussien, il suffit d'évaluer la moyenne et la covariance pour caractériser complètement les distributions de  $X_k | Y_{1:k-1}$  et de  $X_k | Y_{1:k}$ ).
- Dans le cas où la dimension du vecteur d'état est grande ( $m = 10^5$  pour les modèles physiques de l'océan par exemple), la mise en oeuvre numérique du filtre de Kalman peut être impossible. En effet,  $P_k^f$  et  $P_k^a$  sont des matrices de grande dimension  $m \times m$ , pour les stocker et les évaluer, il faut avoir un ordinateur équipé d'une mémoire importante. En plus, pour calculer le gain de Kalman  $K_k$ , il est nécessaire effectuer les produits de grandes matrices, cela est encore une fois presque impossible.
- Considérons l'estimateur BLUE du système linéaire gaussien avec la prédiction  $X_k^f$  choisie comme suit

$$X_k^f = F_k X_{k-1}^a \quad \text{où} \quad X_{k-1}^a = m_{k-1}^a = \mathbb{E} [X_{k-1} | Y_{1:k-1}].$$

$X_{k-1}^a$  est un estimateur non biaisé de  $X_{k-1}$  et le modèle dynamique est non biaisé,  $X_k^f$  est donc un estimateur non biaisé de  $X_k$ . L'estimateur BLUE avec la covariance de l'erreur d'estimation sont alors calculés respectivement par

$$\begin{aligned} X_k^a &= X_k^f + K_k (Y_k - H_k X_k^f) \\ P_k^a &= (I - K_k^* H_k) P_k^f \end{aligned}$$

où  $K_k$  est le gain optimal. Alors, l'estimateur BLUE  $X_k^a$  est aussi la moyenne conditionnelle  $m_k^a$ , la covariance  $P_k^a$  est la covariance conditionnelle et le gain optimal est le gain de Kalman, qui sont définis dans (4.3-4.4-4.5-4.6) pour le filtre de Kalman. Autrement dit, dans le cas linéaire gaussien, l'estimateur bayésien est aussi l'estimateur BLUE.

## 4.4 Filtre particulaire

Le filtre particulaire est une approximation de Monte Carlo du filtre bayésien optimal.

Considérons le système dynamique suivant

$$X_k = f_k(X_{k-1}) + W_k, \quad (4.7)$$

$$Y_k = h_k(X_k) + V_k, \quad (4.8)$$

où  $f_k$  et  $h_k$  sont des fonctions pas nécessairement linéaires,  $W_k$  et  $V_k$  sont les erreurs du modèle et de l'observation respectivement, pas nécessairement gaussiennes. La loi initiale n'est pas nécessairement gaussienne. Mais supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites

- Il est facile de simuler un vecteur aléatoire selon la loi  $\mu_0(dx_0)$  de  $X_0$ .
- Il est facile de simuler un vecteur aléatoire selon la loi  $p_k^W(dw)$  de  $W_k$ .
- Il est facile d'évaluer la densité  $p_k^V(v)$  de  $V_k$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ .

L'idée du filtre particulaire est d'approcher la distribution  $\mu_k^a$  par la distribution empirique pondérée  $\mu_k^N$  d'un ensemble des particules  $X_k^1, \dots, X_k^N$  muni des poids d'importance  $\omega_k^1, \dots, \omega_k^N$  correspondants :

$$\mu_k^a \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta_{X_k^i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1, \quad (4.9)$$

Les poids  $\omega_k^i$  sont choisis en utilisant le principe d'échantillonnage d'importance : si les  $X_{0:k}^i$  sont simulés selon une densité d'importance  $q(x_{0:k}|y_{1:k})$ , alors

$$\omega_k^i \propto \frac{p(x_{0:k}^i|y_{1:k})}{q(x_{0:k}^i|y_{1:k})}.$$

Si la densité d'importance  $q(x_{0:k}|y_{1:k})$  est choisie telle que

$$q(x_{0:k}|y_{1:k}) = q(x_k|x_{k-1}, y_k) q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}),$$

alors les poids d'importance peuvent être calculés de façon récursive dans le temps [35]

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i) p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{q(x_k^i|x_{k-1}^i, y_k)} \quad (4.10)$$

On obtient ainsi l'algorithme SIS (Sequential Importance Sampling) où les particules sont soumises à un mécanisme d'évolution en deux étapes :

- Étape de prédiction : les particules explorent l'espace d'état de façon indépendante selon la densité d'importance  $q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)$ .

$$X_k^i \sim q(x_k|x_{k-1}^i, y_k).$$

- Étape de sélection : lorsqu'une observation est disponible, on affecte à chaque particule un poids d'importance selon (4.10). La distribution  $\mu_k$  est approchée par (4.9) et la moyenne conditionnelle est approchée par

$$m_k^a \approx m_k^{N,a} = \sum_{i=1}^N \omega_k^i X_k^i.$$

### Phénomène de dégénérescence des poids

Un problème lié à l'algorithme SIS est le phénomène de dégénérescence des poids, où après quelques itérations, la plupart des particules peuvent être éloignées de l'observation et sont donc couplées à des poids négligeables. Cela a été montré expérimentalement par Van Leeuwen et Evensen dans [42], où ils ont aussi indiqué que pour contrôler la dégénérescence des poids il faut utiliser un grand nombre de particules ( $10^4$ ). Doucet [12] a montré théoriquement que, si la densité d'importance est mal choisie, après quelques itérations, la variance des poids d'importance ne peut qu'augmenter.

Deux solutions ont été proposées [35]

- Redistribuer les particules : une estimation de la mesure de dégénérescence des poids est proposée

$$N_{eff} \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2}.$$

Quand  $N_{eff}$  est inférieur à un seuil  $N_T$  choisi, c'est-à-dire qu'une dégénérescence significative est observée, les particules sont redistribuées de façon à éliminer les particules dont les poids sont faibles et à dupliquer les particules dont les poids sont importants. Les algorithmes de redistribution des particules sont nombreux (voir par exemple dans [24], [35]).

- Choisir une densité d'importance optimale :  $q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)$  est choisie telle que la variance des poids d'importance soit minimale. Doucet [12] a montré que

$$q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)_{opt} = p(x_k|x_{k-1}^i, y_k).$$

Pourtant, il est impossible d'évaluer cette densité d'importance optimale dans le cas général. Cependant, on sait l'écrire dans le cas où  $X_k$  est à valeurs dans un espace fini, et dans le cas où les erreurs du modèle et d'observation sont de loi gaussienne et où la fonction d'observation est linéaire (mais la fonction du modèle peut être non linéaire). Dans le cas du modèle gaussien, la densité d'importance est aussi gaussienne [35].

---

<p><b>Initialisation</b> : pour <math>i = 1, \dots, N</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- générer <math>X_0^{a,i} \sim \mu_0(dx_0)</math>.</li> <li>- <math>\omega_0^i = \frac{1}{N}</math>.</li> </ul>
<p><b>A tout instant <math>k \geq 1</math></b></p> <p><i>Prédiction</i> : pour <math>i = 1, \dots, N</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- générer <math>W_k^i \sim p_k^W(dw)</math></li> <li>- calculer <math>X_k^{f,i} = f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i</math></li> </ul> <p><i>Sélection</i> : pour <math>i = 1, \dots, N</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- calculer <math>\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i q_k^V(y_k - h_k(X_k^{f,i}))</math>.</li> </ul> <p>Si <math>N_{eff} &lt; N_T</math>, alors pour <math>i = 1, \dots, N</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- générer <math>X_k^{a,i} \sim \sum_{j=1}^N \omega_k^j \delta_{X_k^{f,j}}</math>.</li> <li>- <math>\omega_k^i = \frac{1}{N}</math>.</li> </ul>

---

TAB. 4.1: Algorithme bootstrap

Nous allons présenter ensuite les deux algorithmes les plus utilisés dans la pratique : l'algorithme bootstrap et l'algorithme SIR optimal (sera appelé ici algorithme SIR pour simplification).

#### 4.4.1 Algorithme bootstrap

Si on choisit la densité d'importance

$$q(x_k | x_{k-1}, y_k) = p(x_k | x_{k-1}),$$

c'est à dire que dans l'étape de prédiction, les particules explorent l'espace d'état selon l'équation du modèle (1.2), sans tenir compte de l'observation à cet instant.

Dans l'étape de correction, de (4.10), les poids d'importance sont calculés par

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i p(y_k | x_k^i).$$

Quand une dégénérescence des poids est observée, une redistribution des particules est effectuée et les poids des nouvelles particules sont remis à  $1/N$ . L'algorithme bootstrap est détaillé dans la table 4.1.

#### Commentaires

- Ce choix de densité d'importance est très commun à cause de sa facilité d'implémentation, car il suffit dans l'étape de prédiction propager les particules selon le modèle dynamique.

---

**Initialisation** : pour  $i = 1, \dots, N$

- générer  $x_0^{a,i} \sim \mu_0(dx)$ .
- $\omega_0^i = \frac{1}{N}$ .

**A tout instant  $k \geq 1$**

*Prédiction* : pour  $i = 1, \dots, N$

- calculer  $\Sigma_k = (Q_k^{-1} + H_k^* R_k^{-1} H_k)^{-1}$
- calculer  $m_k = \Sigma_k (Q_k^{-1} f_k(X_{k-1}) + H_k^* R_k^{-1} y_k)$
- générer  $x_k^{f,i} \sim \mathcal{N}(m_k^i, \Sigma_k)$

*Sélection* : pour  $i = 1, \dots, N$

- calculer  $\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i p(y_k | x_{k-1}^i)$

Si  $N_{eff} < N_T$ , alors pour  $i = 1, \dots, N$

- générer  $x_k^{a,i} \sim \sum_{j=1}^N \omega_k^j \delta_{x_k^{f,j}}$ .
- $\omega_k^i = \frac{1}{N}$ .

---

TAB. 4.2: Algorithme SIR

#### 4.4.2 Algorithme SIR optimal

L'algorithme SIR, plus précisément l'algorithme SIR optimal (Optimal sequential importance resampling), est écrit pour les modèles dont les bruits sont gaussiens et l'opérateur d'observation est linéaire, où la densité d'importance optimale  $p(x_k | x_{k-1}, y_k)$  est bien déterminée. En effet, considérons le système dynamique (4.7 - 4.8)

$$\begin{aligned} X_k &= f_k(X_{k-1}) + W_k, \\ Y_k &= H_k X_k + V_k, \end{aligned}$$

où  $W_k$  et  $V_k$  sont les bruits blancs gaussiens de covariance  $Q_k$  et  $R_k$  respectivement, et l'opérateur d'observation  $H_k$  est linéaire. Nous avons, d'après la formule de Bayes

$$p(x_k | x_{k-1}, y_k) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | x_{k-1})}{p(y_k | x_{k-1})}.$$

Si les bruits sont gaussiens, il est clair que les densités dans la fraction ci-dessus sont toutes gaussiennes, la densité d'importance optimale  $p(x_k | x_{k-1}, y_k)$  est donc gaussienne, avec la moyenne  $m_k$  et la covariance  $\Sigma_k$  [35] :

$$m_k = f_k(X_{k-1}) + L_k (y_k - H_k f_k(X_{k-1})) \quad (4.11)$$

$$\Sigma_k = (I - L_k H_k) Q_k \quad (4.12)$$

avec

$$L_k = Q_k H_k^* (H_k Q_k H_k^* + R_k)^{-1} = K_k(Q_k)$$

Dans l'étape de prédiction, les particules sont simulées selon la densité d'importance  $p(x_k|x_{k-1}, y_k)$ . On propage les particules en tenant compte non seulement du modèle dynamique mais aussi de l'observation disponible à cet instant.

Dans l'étape de correction, selon l'équation (4.10), les poids d'importance sont calculés par

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i p(y_k|x_{k-1}^i)$$

où  $p(y_k|x_{k-1}^i)$  est une densité gaussienne de moyenne  $H_k f_k(X_{k-1})$  et de covariance  $(H_k Q_k H_k^* + R_k)$ .

Quand une dégénérescence des poids est observée, une redistribution des particules est effectuée et les poids des nouvelles particules sont remis à  $1/N$ . L'algorithme SIR est détaillé dans Tableau 4.2.

### 4.4.3 La convergence du filtre particulaire

La convergence du filtre particulaire a été étudiée de façon très détaillée par Del Moral [9], et une présentation plus accessible est donnée par Crisan et Doucet dans [4] et [5]. Des estimations d'erreur uniformes en temps ont été obtenues par Del Moral et Guionnet dans [10] et par Legland et Oudjane dans [26]. Ces résultats portent sur la convergence de la mesure empirique  $\mu_k^N$  du filtre particulaire vers la mesure théorique  $\mu_k^a$  du filtre bayésien optimal, sous les différentes hypothèses.

Avant de présenter ces résultats de convergence, nous introduisons les notations suivantes

- Le noyau de transition de la chaîne de Markov  $\{X_k\}$ , noté  $K(dx_k|x_{k-1})$ , est défini par

$$K(dx_k|x_{k-1}) = \mathbb{P}[X_k \in dx_k | X_{k-1} = x_{k-1}]$$

Le noyau  $K$  est dit Feller s'il vérifie que, pour toute fonction  $\varphi$  continue bornée définie sur  $\mathbb{R}^m$ ,  $K\varphi$  est aussi une fonction continue bornée

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^m) \implies K\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$$

où  $K\varphi(x) \triangleq \int K(dz|x)\varphi(z)$ .

- Si  $\mu$  est une mesure,  $\varphi$  est une fonction, et  $K$  est un noyau de transition markovien, on note

$$\begin{aligned} (\mu, \varphi) &\triangleq \int \varphi(x)\mu(dx), \\ \mu K(A) &\triangleq \int \mu(dx)K(A|x). \end{aligned}$$

- Soit  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^m$ , sur lequel on définit une topologie faible. Dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ , une séquence de mesures de probabilité  $\{\mu^N\}_{N=1:\infty}$  converge (faiblement) vers la mesure  $\mu$  si, pour toute fonction  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\mu^N, \varphi) = (\mu, \varphi),$$

**Résultats de Crisan et Doucet [5]**

La convergence de la mesure empirique  $\mu_k^N$  vers la mesure théorique  $\mu_k$  est étudiée en deux sens : convergence presque sûre et convergence en moyenne quadratique.

**Théorème 4.4.1** (Convergence presque sûre). *Si le noyau de transition  $K$  est Feller et si la densité d'émission  $p(y_k|\cdot)$  est continue bornée et strictement positive, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\mu_k^N, \varphi) = (\mu_k^a, \varphi),$$

pour toute  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$ .

**Théorème 4.4.2** (Convergence en moyenne quadratique). *Si  $p(y_k|\cdot)$  est bornée, alors pour tout  $k = 1, \dots, K$ , il existe une constante  $c_k$  indépendante de  $N$  telle que, pour toute  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$*

$$\mathbb{E} [((\mu_k^N, \varphi) - (\mu_k^a, \varphi))^2] \leq c_k \frac{\|\varphi\|^2}{N}.$$

où l'espérance est prise sur des réalisations de l'algorithme des filtres.

(Voir [4] et [5] pour les démonstrations.)

Ces résultats de convergence sont vrais pour la classe des fonctions-tests  $\varphi$  bornées. Une restriction est qu'ils n'entraînent pas la convergence des moments empiriques (notamment de la moyenne et de la covariance empirique) des particules vers les moments théoriques de la variable aléatoire conditionnelle  $(X_k|Y_{1:K})$ . Un résultat de convergence pour la classe des fonctions-tests non bornées, notamment de convergence de la moyenne empirique  $m_k^{N,a}$  vers la moyenne conditionnelle  $m_k^a$  a été montrée par Hu et al. [21] en 2007.

Dans la convergence en moyenne quadratique, le coefficient  $c_k$  dépend du temps  $k$  et peut augmenter dans le temps à une vitesse exponentielle (voir [11] - Partie III, chapitre 4). Avec ce résultat de convergence, pour assurer une bonne estimation au temps  $k$ , il faut alors augmenter à une vitesse exponentielle le nombre de particules dans le temps, ceci entraîne alors des simulations et des calculs coûteux.

Les deux résultats suivants donnent une convergence uniforme de la mesure empirique vers la mesure théorique, où le coefficient  $c_k$  ne dépend pas du temps  $k$ , en ajoutant une hypothèse de mélange qui porte sur le noyau de transition du modèle dynamique. Pourtant, en pratique, les hypothèses de la convergence uniforme ne sont pas satisfaites dans de nombreux cas importants.

**Résultat de Del Moral et Guionnet [10]**

Ce résultat est basée sur l'hypothèse que le noyau de transition de la chaîne de Markov cachée  $\{X_k\}$  est mélangeant, qui implique que  $\{X_k\}$  est ergodique. Dans ce cas nous avons

**Théorème 4.4.3.** *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $k$  telle que, pour tout  $k \geq 0$  et pour toute  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$*

$$\mathbb{E} [((\mu_k^N, \varphi) - (\mu_k^a, \varphi))^2] \leq c \frac{\|\varphi\|^2}{N^\alpha}.$$

où  $0 < \alpha \leq 1$ .

#### Résultat de Le Gland et Oudjane [26]

Le résultat de Le Gland et Oudjane est basé sur une hypothèse plus générale que celle de Del Moral et Guionnet. Au lieu de considérer le noyau de transition  $K(dx_k|x_{k-1})$ , on considère le noyau

$$R(dx_k|x_{k-1}) \triangleq p(y_k|x_k)K(dx_k|x_{k-1}).$$

et on suppose qu'il existe  $\epsilon$  et une mesure positive  $\lambda$  tels que

$$\epsilon\lambda(dx_k) \leq R(dx_k|x_{k-1}) \leq \epsilon^{-1}\lambda(dx_k),$$

pour tout  $x_{k-1} \in \mathbb{R}^m$ , et que

$$\frac{\sup_{x_k \in \mathbb{R}^m} p(y_k|x_k)}{\inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)} (\mu K, p(y_k|\cdot))} < \rho < \infty.$$

Nous avons alors

$$\mathbb{E} [((\mu_k^N, \varphi) - (\mu_k^a, \varphi))^2] \leq c(\epsilon) \frac{\|\varphi\|^2}{N}.$$

#### 4.4.4 Commentaires

- Les filtres particuliers s'appliquent à des systèmes généraux. Ils ne requièrent pas la linéarité de l'équation d'état, ni de l'opérateur d'observation, et les bruits ne sont pas nécessairement gaussiens. La linéarisation du système n'est pas non plus nécessaire.
- Les filtres particuliers sont des approximations du type Monte Carlo du filtre bayésien optimal dont la convergence vers le filtre bayésien optimal, quand le nombre de particules tend vers l'infini, a été montré théoriquement dans la littérature. La moyenne empirique des particules, sous certaines hypothèses, converge vers la moyenne conditionnelle de  $(X_k|Y_{1:K})$ , qui est l'estimateur du minimum de variance parmi tous les estimateurs de  $X_k$ , d'après le résultat de Hu et al. [21].
- Dans tous les résultats de convergence, la vitesse de convergence est  $1/\sqrt{N}$ , et le coefficient  $c_k$  dans la convergence en moyenne quadratique ne dépend pas du nombre  $N$  de particules.
- En utilisant le filtre particulier, avec un nombre de particules suffisamment grand, on peut considérer qu'on obtient une bonne estimation de la distribution de l'état sachant des observations. Cette estimation peut éventuellement servir de référence.

- L'inconvénient principal du filtre particulaire est qu'il faut simuler un assez grand nombre de particules, pour éviter le phénomène de dégénérescence des poids et pour assurer aussi la convergence de l'estimateur dans le cas général, d'après le résultat de convergence de Crisan et Doucet [4].

## 4.5 Les extensions du filtre de Kalman

### 4.5.1 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu est décrit dans Jazwinski [22], pour les systèmes non linéaires avec des bruits gaussiens de la forme

$$X_k = f_k(X_{k-1}) + W_k, \quad (4.13)$$

$$Y_k = h_k(X_k) + V_k, \quad (4.14)$$

où  $f_k$  et  $h_k$  sont les fonctions pas nécessairement linéaires mais *dérivables*,  $W_k$  et  $V_k$  sont les bruits blancs gaussiens, de covariances respectives  $Q_k$  et  $R_k$ .

L'idée est de linéariser la fonction  $f_k$  autour d'un estimateur de  $X_{k-1}$  et la fonction  $h_k$  autour d'un estimateur de  $X_k$  pour obtenir un système linéaire gaussien. Les estimateurs utilisés ici sont l'estimateur corrigé  $X_{k-1}^a$  pour  $X_{k-1}$  et l'estimateur prédit  $X_k^f$  pour  $X_k$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f_k(X_{k-1}) &\approx f_k(X_{k-1}^a) + f'_k(X_{k-1}^a)(X_{k-1} - X_{k-1}^a) \\ h_k(X_k) &\approx h_k(X_k^f) + h'_k(X_k^f)(X_k - X_k^f). \end{aligned}$$

Le système (4.13 - 4.14) est alors approché par

$$\begin{aligned} X_k &= F_k(X_{k-1} - X_{k-1}^a) + f_k(X_{k-1}^a) + W_k, \\ Y_k &= H_k(X_k - X_k^f) + h_k(X_k^f) + V_k, \end{aligned}$$

avec  $F_k = f'_k(X_{k-1}^a)$  et  $H_k = h'_k(X_k^f)$ . En appliquant le filtre de Kalman (4.3-4.4-4.5-4.6) à ce nouveau système, on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned} m_k^f &= f_k(m_{k-1}^a), \\ P_k^f &= F_k P_{k-1}^a F_k^* + Q_k, \\ m_k^a &= m_k^f + K_k(y_k - h_k(m_k^f)), \\ P_k^a &= (I - K_k H_k) P_k^f, \\ K_k &= P_k^f H_k^* (H_k P_k^f H_k^* + R_k)^{-1}. \end{aligned}$$

### Commentaires

- Quand le système est non linéaire, les densités a priori et a posteriori ne sont pas gaussiennes. Alors, les solutions obtenues par le filtre de Kalman étendu ne sont plus optimales, comme on l'a connu, la moyenne conditionnelle est un estimateur optimal, au sens de l'erreur en moyenne quadratique minimale, seulement dans le cadre du modèle linéaire gaussien.
- Parce que les densités a priori et a posteriori ne sont pas gaussiennes, alors les deux premiers moments (moyenne et covariance) calculés ne permettent pas de caractériser complètement la distribution de filtrage.
- Evensen dans une application du filtre de Kalman étendu sur un modèle simulant la circulation de l'océan [13], a identifié que : quand le système entre dans un régime instable (cas où la fonction  $f_k$  est fortement non linéaire), il y a un accroissement non borné de la covariance des estimateurs. Miller et al. [30] ont aussi montré une mauvaise performance du filtre de Kalman étendu sur le modèle de Lorenz quand les observations sont trop clairsemées ou ont des bruits trop forts. Le filtre donne alors les résultats divergents dus à la linéarisation des fonctions du système.
- Un autre inconvénient du filtre de Kalman étendu, qui est aussi celui du filtre de Kalman, est que la mise en oeuvre numérique est impossible dans le cas de vecteurs d'état de grande dimension, car il faut toujours évaluer le gain de Kalman qui a une forme de produit de matrices de grande taille.

#### 4.5.2 Filtre de Kalman d'ensemble

Le filtre de Kalman d'ensemble a été proposé par Geir Evensen en 1994 [15] pour résoudre le problème de calcul du filtre de Kalman dans le cas du système linéaire gaussien. Il a été ensuite étendu pour le modèle non linéaire gaussien, où sa performance remarquable par rapport aux autres méthodes a été montrée par des expérimentations. En possédant des formulations simples et une implémentation facile, l'EnKF est maintenant utilisé largement dans la communauté de l'océanographie et de la météorologie (voir par exemple [18]).

L'EnKF est basé sur un système non linéaire, il ne requière pas la linéarité du modèle, mais il requière la linéarité de l'opérateur d'observation pour former les formulations. Pourtant, d'après Evensen, on peut aussi utiliser l'EnKF pour un système dont l'opérateur d'observation est non linéaire, sans utiliser la linéarisation comme les autres méthodes d'assimilation de données (voir Section 6.2 du rapport pour de plus amples détails).

L'EnKF est proposé initialement comme une approximation du filtre de Kalman dans le cas du modèle linéaire gaussien, où il utilise un ensemble d'éléments dont il construit des estimations

empiriques. Pourtant il n'existe pas à notre connaissance d'étude complète sur la convergence de l'EnKF vers le filtre de Kalman. Nous pouvons faire la même remarque pour le cas non linéaire : est-ce que le filtre de Kalman d'ensemble converge vers le filtre bayésien optimal comme le filtre particulier ? Une étude théorique et expérimentale sur les propriétés du filtre de Kalman d'ensemble sera présentée dans la partie 2.

# Conclusions

Nous avons présenté dans cette partie les principales méthodes d'assimilation de données basées sur un système discret. On peut les classer en trois familles : l'interpolation classique, l'assimilation de données variationnelle et l'assimilation de données séquentielle.

L'interpolation classique appartient à une classe de méthodes simples. Cependant elle ne peut pas être utilisée en pratique en grande dimension à cause du coût de calcul.

Les méthodes variationnelles sont préférées dans ce cas, car dans l'intervalle d'assimilation, elles peuvent estimer en une fois l'état en temps et en espace en résolvant le problème d'optimisation. Pourtant, les méthodes variationnelles requièrent des écritures et des calculs complexes. En plus, comme la solution est déterministe, on n'obtient pas d'information sur la distribution de probabilité de l'état.

Les méthodes séquentielles relevant de l'estimateur bayésien nous permettent d'avoir une inférence complète sur la distribution de probabilité de l'état. La solution optimale peut être écrite dans le cas général sous forme analytique. Mais on ne peut pas la calculer numériquement, sauf dans le cas linéaire gaussien où elle se ramène aux équations du filtre de Kalman. Dans le cas général, la solution est approchée par les estimateurs du type Monte Carlo (filtre particulaire).

L'estimateur du filtre de Kalman dans le cas du modèle linéaire gaussien n'est autre que l'estimateur de l'interpolation classique. Le coût de calcul en pratique dû à la grande dimension est toujours le grand problème, car il faut toujours évaluer le gain de Kalman. Les estimateurs du type Monte Carlo dans le cas général sont plus appréciés. La mise en oeuvre du filtre particulaire est assez simple, et la convergence de son estimateur vers l'estimateur optimal a été montrée. L'inconvénient du filtre particulaire est qu'il faut utiliser un grand nombre de particules pour éviter le phénomène de dégénérescence de poids des particules et pour assurer la convergence de l'estimateur. Cela demande aussi des calculs coûteux en grande dimension.

Le filtre de Kalman d'ensemble a été proposé initialement comme une approximation du filtre de Kalman, ensuite il a été étendu au cas du modèle non linéaire gaussien. Son mécanisme est intuitivement semblable à celui du filtre particulaire : on fait évoluer un ensemble d'éléments et des estimateurs empiriques sont calculés à partir de ces éléments. L'intérêt de l'EnKF est qu'il es-

time bien l'état en utilisant un nombre de particules assez faible par rapport au filtre particulaire. En plus il donne aussi de bons résultats par rapport aux autres méthodes comme les méthodes variationnelles en grande dimension, grâce à son mécanisme de calcul. Pourtant ces conclusions sont tirés seulement à partir des expérimentations, il existe peu de recherche théorique sur les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble.

Nous proposons ainsi une étude sur les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble dans la partie 2.

## **Deuxième partie**

# **Les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble**



## Chapitre 5

# Introduction

Dans ce chapitre nous présentons d'abord l'algorithme du filtre de Kalman d'ensemble. Ensuite, la motivation d'utilisation de l'EnKF en pratique sera précisée. Enfin nous présentons nos objectifs d'études pour les chapitres qui suivent.

### 5.1 L'algorithme du filtre de Kalman d'ensemble

Considérons le système non linéaire gaussien

$$X_k = f_k(X_{k-1}) + W_k, \quad (5.1)$$

$$Y_k = H_k X_k + V_k, \quad (5.2)$$

où  $W_k$  et  $V_k$  sont des bruits blancs gaussiens, de covariances respectives  $Q_k$  et  $R_k$ . L'opérateur d'observation  $H_k$  est linéaire et la fonction  $f_k$  n'est pas nécessairement linéaire. La loi initiale  $\mu_0(dx_0)$  n'est pas nécessairement gaussienne.

L'EnKF estime l'état  $X_k$  en utilisant un ensemble de  $N$  éléments  $X_k^{a,1}, \dots, X_k^{a,N}$ . Dans l'intervalle d'assimilation  $[0, K]$ , les estimations sont calculées d'une manière récursive :

- A l'instant 0 : on simule  $N$  éléments selon la distribution initiale

$$X_0^{a,1}, \dots, X_0^{a,N} \sim \mu_0(dx_0).$$

- A l'instant  $k \geq 1$  : pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,

- prédiction : les éléments explorent l'espace d'état selon l'équation du modèle dynamique, comme dans le filtre de Kalman mais avec des bruits ajoutés à l'équation et on applique cette procédure pour chaque élément,

$$X_k^{f,i} = f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i \quad \text{où} \quad W_k^i \sim \mathcal{N}(0, Q_k). \quad (5.3)$$

---

**Initialisation** : pour  $i = 1, \dots, N$   
- générer  $x_0^{a,i} \sim \mathcal{N}(0, P_0)$ .

**A tout instant  $k \geq 1$**   
*Prédiction* - pour  $i = 1, \dots, N$   
- générer  $w_k^i \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$   
-  $x_k^{f,i} = f_k(x_{k-1}^{a,i}) + w_k^i$   
-  $m_k^N \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k^{f,i}$   
-  $P_k^N \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [(x_k^{f,i} - m_k^N)(x_k^{f,i} - m_k^N)^T]$   
*Correction* - pour  $i = 1, \dots, N$   
- générer  $v_k^i \sim \mathcal{N}(0, R_k)$   
-  $R_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_k^i)(v_k^i)^*$   
-  $K_k(P_k^N) = P_k^N H_k^* (H_k P_k^N H_k^* + R_k^N)^{-1}$   
-  $x_k^{a,i} = x_k^{f,i} + K_k [y_k - H_k x_k^{f,i} + v_k^i]$ .

---

TAB. 5.1: Algorithme EnKF

La moyenne et la matrice de covariance empiriques de ces éléments sont calculées

$$m_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{f,i},$$

$$P_k^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_k^{f,i} - m_k^N)(X_k^{f,i} - m_k^N)^*. \quad (5.4)$$

- correction : quand l'observation  $y_k$  est disponible, chaque élément est corrigé indépendamment des autres selon l'équation qui est semblable à l'équation de correction du filtre de Kalman.

$$X_k^{a,i} = X_k^{f,i} + K_k(P_k^N)(y_k - H_k X_k^{f,i} + V_k^i), \quad (5.5)$$

mais avec le gain de Kalman empirique défini par

$$K_k(P_k^N) = P_k^N H_k^* (H_k P_k^N H_k^* + R_k^N)^{-1}. \quad (5.6)$$

où  $R_k^N$  est la matrice de covariance empirique des  $V_k^i$

$$R_k^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (V_k^i)(V_k^i)^*.$$

L'espérance de  $X_k|Y_{1:K}$  est estimée par la moyenne empirique des éléments d'ensemble

$$m_k^a \approx m_k^{a,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{a,i},$$

et la distribution est approchée par la mesure empirique des éléments

$$\mu_k^a(dx) \approx \mu_k^{a,N}(dx) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_k^{a,i}}(dx).$$

L'algorithme du filtre EnKF est présenté dans la table 5.1

**Remarque 5.1.1.** *On peut formuler le filtre SIR selon une écriture similaire à celle du filtre de Kalman et de l'EnKF. En effet, dans le premier pas de l'étape de prédiction, on peut laisser les particules explorer l'espace d'état selon l'équation du modèle (1.2) et on les note par  $X_k^{f,i}$*

$$X_k^{f,i} = f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i \quad \text{où} \quad W_k^i \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$$

*Dans le second pas de l'étape de prédiction, ces particules sont propagées selon l'équation suivante et notés  $X_k^{a,i}$*

$$X_k^{a,i} = X_k^{f,i} + K_k(Q_k) (y_k - H_k X_k^{f,i} + V_k^i) \quad \text{où} \quad V_k^i \sim \mathcal{N}(0, R_k),$$

et le gain de Kalman défini par

$$K_k(Q_k) = Q_k H_k^* (H_k Q_k H_k^* + R_k)^{-1}.$$

En combinant les deux pas, nous avons

$$\begin{aligned} X_k^{a,i} &= f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i + K_k(Q_k) (y_k - H_k (f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i) + V_k^i) \\ &= (I - K_k(Q_k)H_k) f_k(X_{k-1}^{a,i}) + K_k(Q_k) y_k + (I - K_k(Q_k)H_k) W_k^i + K_k(Q_k) V_k^i. \end{aligned}$$

Alors, en sachant  $X_{k-1}^{a,i}$  et  $Y_k$ , les particules  $X_k^{a,i}$  sont i.i.d d'une loi gaussienne de moyenne

$$m_k = (I - K_k(Q_k)H_k) f_k(X_{k-1}^{a,i}) + K_k(Q_k) y_k,$$

et de covariance

$$\Sigma_k = (I - K_k(Q_k)H_k) Q_k (I - K_k(Q_k)H_k)^* + K_k(Q_k) R_k (K_k(Q_k))^* = Q_k - K_k(Q_k) H_k Q_k.$$

En utilisant le formule de Sherman-Morrison-Woodbury (voir annexe A), on peut montrer que cette moyenne et cette covariance sont égales respectivement à la moyenne et à la covariance données dans (4.12-4.11). Alors, au lieu de simuler directement un ensemble des particules selon la loi gaussienne dont la moyenne et la covariance données par (4.12-4.11), on peut propager les particules selon le schéma à deux pas comme ci-dessus, qui est similaire aux équations du filtre de Kalman, et aussi du filtre de Kalman d'ensemble qu'on verra plus loin. Une différence à noter est que pour finir le filtre SIR, il faut effectuer en plus une étape de correction (pondération) où les poids d'importance  $\omega_k^i$  sont mis à jour selon l'équation

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_k - H_k f_k(X_{k-1}^{a,i}))^* (H_k Q_k H_k^* + R_k)^{-1} (y_k - H_k f_k(X_{k-1}^{a,i}))\right\}.$$

Quand une dégénérescence des poids est observée, la redistribution des particules est nécessaire et les poids des nouvelles particules sont remis à  $1/N$ .

## 5.2 Motivation de l'utilisation du filtre de Kalman d'ensemble

Le filtre de Kalman d'ensemble possède une formulation simple et une implémentation facile. Il résout les deux problèmes liés au filtre de Kalman étendu : la divergence due à la linéarisation de la fonction du modèle et de l'opérateur d'observation, et le coût d'évaluation du gain de Kalman.

L'EnKF ne linéarise pas la fonction du modèle, cela évite donc le problème de divergence du filtre de Kalman étendu. Plus précisément, dans le filtre de Kalman étendu, la covariance de prédiction  $P_k^f$  est approchée en linéarisant la fonction  $f_k$  du modèle. Tandis que dans l'EnKF, la densité de probabilité est représentée par l'ensemble des éléments, la covariance  $P_k^f$  est donc approchée par la covariance empirique des éléments. Quand le nombre d'éléments  $N$  tend vers l'infini, *intuitivement*, l'erreur d'approximation diminue à la vitesse  $1/\sqrt{N}$ . En propageant les éléments  $X_{k-1}^{a,i}$  représentant la distribution de  $X_{k-1}^a$  selon l'équation (5.3), avec les bruits ajoutés  $W_k^i$  simulés selon la loi de  $W_k$ , les éléments prédits  $X_k^{f,i}$  obtenus représentent la densité de probabilité de l'estimation prédite  $X_k^f$ .

Pour le coût de calcul, considérons d'abord le cas du modèle linéaire gaussien en remplaçant la fonction non linéaire  $f_k$  dans (5.1) par une fonction linéaire  $F_k$ . Supposons que la dimension  $m$  du vecteur d'état à estimer est beaucoup plus grande que le nombre d'éléments d'ensemble  $N$  et que la dimension  $d$  de l'observation .

Dans le cas du modèle linéaire gaussien, en supposant que la loi initiale  $\mu_0(dx_0)$  est gaussienne, la distribution de probabilité conditionnelle de l'état caché  $X_k$  sachant les observations  $Y_{1:k} = (Y_1, \dots, Y_k)$  est donc gaussienne, de moyenne et de covariance déterminées par les équations du filtre de Kalman, rappelées ici

- prédiction

$$X_k^f = F_k X_{k-1}^a \quad \text{et} \quad P_k^f = F_k P_{k-1}^a F_k^* + Q_k.$$

- correction

$$X_k^a = X_k^f + K_k(y_k - H_k X_k^f) \quad \text{et} \quad P_k^a = (I - K_k H_k) P_k^f$$

où le gain de Kalman est défini par :  $K_k = P_k^f H_k^* (H_k P_k^f H_k^* + R_k)^{-1}$ .

Si  $m$  est grand, l'évaluation des matrices de covariance  $P_k^f$ ,  $P_k^a$  ainsi que celle du gain de Kalman  $K_k$  est presque impossible. L'idée de l'EnKF est d'évaluer la matrice de covariance empirique d'un ensemble d'éléments, qui est facile à calculer, au lieu d'évaluer la matrice de covariance exacte en calculant les produits des matrices. Ici, la covariance  $P_k^f$  est remplacée par la covariance empirique  $P_k^N$  définie dans (5.4) et le gain de Kalman  $K_k$  est donc remplacé par le gain de Kalman empirique  $K_k(P_k^N)$  défini dans (5.6).

Le problème de calcul est donc résolu de la manière suivante : en pratique, la matrice de covariance empirique  $P_k^N$  n'est jamais calculée ou stockée, même pour évaluer le gain de Kalman

empirique qui est utilisé pour calculer les éléments  $X_k^{a,i}$ . En effet, le gain de Kalman empirique est défini par

$$K_k(P_k^N) = P_k^N H_k^* (H_k P_k^N H_k^* + R_k)^{-1}.$$

Pour le calculer, au lieu d'évaluer  $P_k^N$ , on évalue le produit  $P_k^N H_k^*$ .  $H_k$  est un opérateur linéaire de dimension  $d \times m$ ,  $H_k^*$  est donc une matrice de  $d$  colonnes des vecteurs  $(h_1, \dots, h_d)$  de dimension  $m$ . Pour évaluer le produit  $P_k^N H_k^*$  on évalue  $N \times d$  produits scalaires, parce que :

$$\begin{aligned} P_k^N H_k^* &= \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_k^{f,i} - m_k^N)(X_k^{f,i} - m_k^N)^* \right] H_k^* \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_k^{f,i} - m_k^N) \left[ (X_k^{f,i} - m_k^N)^* H_k^* \right] \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_k^{f,i} - m_k^N) \left[ (X_k^{f,i} - m_k^N)^* h_1 \quad \dots \quad (X_k^{f,i} - m_k^N)^* h_d \right]. \end{aligned}$$

Il suffit donc de stocker dans la mémoire de l'ordinateur  $N$  vecteurs  $(X_k^{f,i} - m_k^N)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , et  $d$  vecteurs  $h_1, \dots, h_d$  de dimension  $m$  pour évaluer le calcul.

Pour les modèles non linéaires gaussiens, pour la même raison, l'EnKF diminue le coût de calcul par rapport à celui du filtre de Kalman étendu.

### Opérateur d'observation non linéaire

Les équations de l'EnKF sont basées sur l'hypothèse linéaire de l'opérateur d'observation  $H_k$ . Pourtant, l'EnKF est aussi utilisé pour les systèmes dont l'opérateur d'observation est non linéaire, sans utiliser la linéarisation, de la manière suivante [17] :

Considérons l'équation d'observation

$$Y_k = h_k(X_k) + V_k$$

où  $h_k$  est une fonction non linéaire de  $\mathbb{R}^m$  à  $\mathbb{R}^d$ . En notant,

$$\widehat{h}_k^i = h_k(X_k^{f,i}) - \bar{h}_k^N \quad \text{où} \quad \bar{h}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_k(X_k^{f,i}),$$

les éléments de correction sont calculées par

$$X_k^{a,i} = X_k^{f,i} + K_k(P_k^N) (y_k - h_k(X_k^{f,i}) + V_k^i),$$

où le gain de Kalman empirique est calculé, sans évaluer la matrice de covariance empirique  $P_k^N$ , par

$$K_k(P_k^N) = \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_k^{f,i} - m_k^N)(\widehat{h}_k^i)^* \right] \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \widehat{h}_k^i (\widehat{h}_k^i)^* + R_k^N \right]^{-1}.$$

Avec ce schéma, l'EnKF est donc applicable pour les systèmes dont l'opérateur d'observation est non linéaire.

### 5.3 Objectifs

Il existe beaucoup d'études de simulation sur la performance de l'EnKF, mais il n'existe pas une étude théorique complète sur ses propriétés asymptotiques, nous posons donc les objectifs suivants à étudier

- La convergence de l'EnKF vers le filtre de Kalman dans le cas linéaire gaussien quand le nombre d'éléments  $N$  tend vers l'infini.
- La convergence presque sûre et la convergence dans  $\mathbb{L}^p$  de la mesure empirique  $\mu_k^{a,N}$  dans le cas général, vers une mesure théorique qui sera précisée, quand le nombre d'éléments  $N$  tend vers l'infini.

## Chapitre 6

# Convergence du filtre de Kalman d'ensemble

### 6.1 EnKF comme un système d'éléments en interaction de champ moyen

Dans l'équation de prédiction de l'EnKF

$$X_k^{f,i} = f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i, \quad (6.1)$$

les  $W_k^i$  sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) selon la loi  $p_k^W(dw)$ . En supposant que les éléments corrigés à l'instant  $k-1$ ,  $X_{k-1}^{a,i}$ , sont aussi i.i.d., les éléments prédits  $X_k^{f,i}$  sont alors i.i.d.

D'après l'équation de correction

$$X_k^{a,i} = X_k^{f,i} + K_k(P_k^N)(y_k - H_k X_k^{f,i} + V_k^i), \quad (6.2)$$

où les  $V_k^i$  sont i.i.d. de loi  $p_k^V(dw)$ , nous constatons que chaque élément  $X_k^{a,i}$  est calculé en fonction de l'ensemble des éléments prédits  $X_k^{f,i}$ . Cette dépendance est au sens en interaction de champ moyen, c'est-à-dire à travers la mesure empirique

$$\mu_k^{N,f} = \frac{1}{N} \sum \delta_{X_k^{f,i}},$$

ou plus précisément, à travers la covariance empirique

$$P_k^N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_k^{f,i} - m_k^N)(X_k^{f,i} - m_k^N)^*.$$

*Intuitivement*, quand le nombre d'éléments  $N$  tend vers l'infini, la loi des grands nombres donne la convergence de  $P_k^N$  vers une covariance déterministe, et en reportant dans (6.2), on voit que les  $X_k^{a,i}$  sont alors i.i.d à la limite. L'indépendance des éléments  $X_{k-1}^{a,i}$  à l'instant  $k-1$  entraîne donc l'indépendance des éléments  $X_k^{f,i}$  à l'instant  $k$ , et la procédure peut être répétée de manière

récurrente, sachant que les  $X_0^{a,i}$  à l'instant initial sont i.i.d. de loi  $\mu_0(dx_0)$ .

Ce phénomène est connu comme la propagation de chaos [29, 38]. Pour étudier le comportement asymptotique des mesures empiriques des éléments

$$\mu_k^{N,f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_k^{f,i}} \quad \text{et} \quad \mu_k^{N,a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_k^{a,i}},$$

l'idée [38] est de considérer un nouveau système d'éléments i.i.d., notés par  $\bar{X}_k^{f,i}$  et  $\bar{X}_k^{a,i}$ , dont l'évolution est comme celle des éléments de l'EnKF, mais on remplace la matrice de covariance empirique  $P_k^N$  par la matrice de covariance exacte, notée  $\bar{P}_k$ . C'est-à-dire que : pour tout  $i = 1, \dots, N$

$$- \bar{X}_0^{a,i} = X_0^{a,i}.$$

- pour tout  $k \geq 1$

$$\bar{X}_k^{f,i} = f_k(\bar{X}_{k-1}^{a,i}) + W_k^i, \quad (6.3)$$

$$\bar{X}_k^{a,i} = \bar{X}_k^{f,i} + K_k(\bar{P}_k)(y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i) \quad (6.4)$$

où  $\bar{P}_k$  désigne la matrice de covariance des vecteurs aléatoires i.i.d  $\bar{X}_k^{f,i}$ , par définition

$$\bar{m}_k^f = \mathbb{E} [\bar{X}_k^{f,1}] \quad \text{et} \quad \bar{P}_k = \mathbb{E} [(\bar{X}_k^{f,1} - \bar{m}_k^f)(\bar{X}_k^{f,1} - \bar{m}_k^f)^*].$$

Pour la démonstration qui suit, la moyenne et la matrice de covariance empirique des éléments  $\bar{X}_k^{f,i}$  sont aussi introduites, définies par

$$\bar{m}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} \quad \text{et} \quad \bar{P}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k^N)(\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k^N)^*.$$

respectivement. Nous remarquons que les bruits  $W_k^i$  et  $V_k^i$  sont exactement les bruits simulés dans l'EnKF.

En résumé, d'une manière intuitive, les éléments  $X_k^{f,i}$  et  $X_k^{a,i}$  sont proches des éléments i.i.d.  $\bar{X}_k^{f,i}$  et  $\bar{X}_k^{a,i}$  respectivement. Le comportement asymptotique des éléments i.i.d  $\bar{X}_k^{f,i}$  et  $\bar{X}_k^{a,i}$  est plus facile à étudier, grâce à leur indépendance, mais la covariance  $\bar{P}_k$  est en général inconnue, donc les éléments et les distributions sont aussi inconnus. A l'inverse, les éléments de l'EnKF sont dépendants, mais la covariance empirique est calculable, les éléments sont alors déterminables.

Les éléments  $\bar{X}_k^{f,i}$  et  $\bar{X}_k^{a,i}$  sont alors les copies indépendantes du processus aléatoire suivant

$$\begin{aligned} \bar{X}_k^f &= f_k(\bar{X}_{k-1}^a) + W_k \\ \bar{X}_k^a &= \bar{X}_k^f + K_k(\bar{P}_k)(y_k - H_k \bar{X}_k^f + V_k). \end{aligned}$$

Nous notons  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$  respectivement la distribution de  $\bar{X}_k^f$  et  $\bar{X}_k^a$ . On espère alors qu'elles soient respectivement la limite des distributions empiriques des éléments de l'EnKF, étant notées respectivement par  $\mu_k^{N,f}$  et  $\mu_k^{N,a}$ .

## 6.2 Résumé de la démonstration

Notre objectif est de montrer la convergence presque sûre et la convergence dans  $\mathbb{L}^p$  des mesures empiriques  $\mu_k^{N,f}$  et  $\mu_k^{N,a}$  vers les mesures théoriques correspondantes,  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$ . Le résultat de convergence est basé sur les deux hypothèses de la fonction du modèle dynamique. L'hypothèse A est que la fonction  $f_k$  du modèle est globalement lipschitzienne, et l'hypothèse B est que la fonction  $f_k$  est localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini.

L'ordre de la démonstration est le suivant :

- Section 6.3 : Énoncé des hypothèses A et B.
- Section 6.4 : Sous les deux hypothèses A et B, nous montrons l'existence des moments des mesures théoriques  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$ .
- Section 6.5 : Nous étudions l'application  $P \rightarrow K_k(P)$  du gain de Kalman et nous montrons que, si la matrice de covariance de l'erreur d'observation est inversible, le gain de Kalman a un accroissement au plus linéaire, en plus, il est continu et localement lipschitzienne.
- Section 6.6 : Nous étudions la contiguïté des matrices de covariance empiriques  $P_k^N$  et  $\bar{P}_k^N$ .
- Section 6.7 : Nous montrons la convergence de la matrice de covariance empirique  $\bar{P}_k^N$  vers la matrice de covariance théorique  $\bar{P}_k$ .
- Section 6.8 : Nous montrons la contiguïté entre les éléments EnKF et les éléments i.i.d indiqués, presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^p$ , quand le nombre d'éléments  $N$  tend vers l'infini.
- Section 6.9 : Nous montrons la convergence presque sûre et la convergence dans  $\mathbb{L}^p$  des mesures empiriques  $\mu_k^{N,f}$  et  $\mu_k^{N,a}$  de l'EnKF vers les mesures théoriques  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$ .

## 6.3 Hypothèses sur le modèle dynamique

Deux hypothèses différentes sont introduites pour la fonction  $f_k$  du modèle. L'hypothèse A est suffisante pour le modèle linéaire, l'hypothèse B est destinée aux cas plus généraux, y compris le modèle de Lorenz discrétisé en temps.

**Hypothèse A** La fonction  $f_k$  est continue et globalement lipschitzienne, c'est-à-dire, il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq L |x - x'|,$$

pour tout  $x, x' \in \mathbb{R}^m$ .

**Hypothèse B** La fonction  $f_k$  est continue et localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini, c'est-à-dire, il existe une constante  $L > 0$  telle que

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq L |x - x'| (1 + |x|^s + |x'|^s), \quad (6.5)$$

pour tout  $x, x' \in \mathbb{R}^m$  et avec  $s \geq 0$ .

**Remarque 6.3.1.** L'hypothèse A est un cas spécial de l'hypothèse B, avec  $s = 0$ .

**Remarque 6.3.2.** Sous l'hypothèse A, la fonction  $f_k$  a un accroissement au plus linéaire à l'infini, c'est-à-dire

$$|f_k(x)| \leq M (1 + |x|),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$  et avec une autre constante  $M$ .

*Preuve.* En écrivant  $|f_k(x)| = |f_k(x) - f_k(0) + f_k(0)|$ , nous avons

$$|f_k(x)| \leq |f_k(x) - f_k(0)| + |f_k(0)| \leq L |x| + |f_k(0)|,$$

En posant  $M = \max(|f_k(0)|, L)$ , nous avons

$$|f_k(x)| \leq M (1 + |x|). \quad \square$$

**Remarque 6.3.3.** Sous l'hypothèse B, la fonction  $f_k$  du modèle a un accroissement au plus polynomial à l'infini, c'est-à-dire

$$|f_k(x)| \leq M (1 + |x|^{s+1}),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $s \geq 0$ , et avec une autre constante  $M$ .

*Preuve.* En écrivant  $|f_k(x)| = |f_k(x) - f_k(0) + f_k(0)|$ , nous avons

$$|f_k(x)| \leq |f_k(x) - f_k(0)| + |f_k(0)| \leq L (|x| + |x|^{s+1}) + |f_k(0)|.$$

D'autre part,

$$|x| \leq \max(1, |x|^{s+1}) \leq 1 + |x|^{s+1}.$$

Alors,

$$|f_k(x)| \leq L (1 + 2 |x|^{s+1}) + |f_k(0)|.$$

En posant  $M/2 = \max(|f_k(0)|, L)$ , nous avons

$$|f_k(x)| \leq M (1 + |x|^{s+1}). \quad \square$$

**Remarque 6.3.4.** Sous l'hypothèse B, nous pouvons aussi écrire l'inégalité (6.5) sous la forme suivante

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq M |x - x'| (1 + |x|^s) + M |x - x'|^{s+1}.$$

*Preuve.* Nous avons,

$$|x'|^s \leq (|x| + |x' - x|)^s \leq 2^{s-1} |x|^s + 2^{s-1} |x' - x|^s \quad (\text{voir annexe 10.2.3}),$$

alors,

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq L |x - x'| (1 + |x|^s + 2^{s-1} |x|^s + 2^{s-1} |x' - x|^s).$$

En posant  $M = L (1 + 2^{s-1})$ , on obtient

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq M |x - x'| (1 + |x|^s) + M |x - x'|^{s+1}. \quad \square$$

□

Nous introduisons les notations suivantes pour les moments des éléments  $\bar{X}_k^{f,i}$  et  $\bar{X}_k^{a,i}$ .

$$\bar{M}_k^{p,f} = (\mathbb{E} |\bar{X}_k^{f,i}|^p)^{1/p} = \left( \int_{\mathbb{R}^m} |x|^p \bar{\mu}_k^f(dx) \right)^{1/p},$$

et

$$\bar{M}_k^{p,a} = (\mathbb{E} |\bar{X}_k^{a,i}|^p)^{1/p} = \left( \int_{\mathbb{R}^m} |x|^p \bar{\mu}_k^a(dx) \right)^{1/p},$$

et aussi pour les moments des différences entre l'observation et des particules perturbées

$$\bar{r}_k^p = (\mathbb{E} |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i|^p)^{1/p},$$

**Remarque 6.3.5.** *Nous avons l'inégalité suivante*

$$\bar{r}_k^p \leq \left( \int_{\mathbb{R}^m} |Y_k - H_k x|^p \bar{\mu}_k^f(dx) \right)^{1/p} + (\mathbb{E} |V_k^i|^p)^{1/p} \leq |Y_k| + \|H_k\| \bar{M}_k^{p,f} + c_p \lambda_{\max}^{1/2}(R_k),$$

où  $\lambda_{\max}(R_k)$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice de covariance de l'erreur d'observation  $R_k$ .

*Preuve.* En utilisant l'inégalité de Minkowski (annexe B1) et l'inégalité de l'annexe B2, nous avons ce qu'il faut démontrer. □

## 6.4 Existence des moments

Nous avons les résultats suivants sur l'existence des moments de  $\bar{X}_k^{f,i}$  et de  $\bar{X}_k^{a,i}$ .

**Proposition 6.4.1.** *Si l'hypothèse A est satisfaite, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments finis d'ordre  $p \geq 2$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les distributions  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$  admettent des moments finis de même ordre  $p$ , et notamment la matrice de covariance  $\bar{P}_k$  est finie.*

*Si l'hypothèse B est satisfaite, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments de tout ordre, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les distributions  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$  admettent des moments finis de tout ordre, et notamment la matrice de covariance  $\bar{P}_k$  est finie.*

*Preuve.* Il s'agit de montrer que, pour tout  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\bar{M}_k^{p,f} < \infty \quad \text{et} \quad \bar{M}_k^{p,a} < \infty$$

pour tout  $p \geq 2$  si l'hypothèse A est vraie et pour tout  $p$  si l'hypothèse B est vraie.

La proposition sera démontrée par récurrence. Supposons que la proposition est vraie pour  $k - 1$ .

Sous l'hypothèse A, nous avons

$$|\bar{X}_k^{f,i}| \leq M (1 + |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|) + |W_k^i|, \quad \text{où on a utilisé la remarque 6.3.2 .}$$

L'inégalité de Minkowski (voir annexe 10.2.3) donne

$$(\mathbb{E} |\bar{X}_k^{f,i}|^p)^{1/p} \leq M (1 + (\mathbb{E} |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^p)^{1/p}) + (\mathbb{E} |W_k^i|^p)^{1/p},$$

donc

$$\bar{M}_k^{p,f} \leq M (1 + \bar{M}_{k-1}^{p,a}) + c_p \lambda_{\max}^{1/2}(Q_k) < \infty .$$

Alors que sous l'hypothèse B

$$|\bar{X}_k^{f,i}| \leq M (1 + |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^{s+1}) + |W_k^i| \quad \text{où on a utilisé la remarque 6.3.3 .}$$

L'inégalité de Minkowski donne

$$(\mathbb{E} |\bar{X}_k^{f,i}|^p)^{1/p} \leq M (1 + (\mathbb{E} |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^{p(s+1)})^{1/p}) + (\mathbb{E} |W_k^i|^p)^{1/p},$$

donc

$$\bar{M}_k^{p,f} \leq M (1 + (\bar{M}_{k-1}^{p(s+1),a})^{s+1}) + c_p \lambda_{\max}^{1/2}(Q_k) < \infty ,$$

où  $\lambda_{\max}(Q_k)$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice de covariance  $Q_k$ .

Notamment, la covariance  $\bar{P}_k$  est finie, en effet, pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$

$$u^* \bar{P}_k u \leq \int_{\mathbb{R}^m} |u^* x|^2 \bar{\mu}_k^f(dx) \leq |u|^2 \int_{\mathbb{R}^m} |x|^2 \bar{\mu}_k^f(dx),$$

donc

$$\|\bar{P}_k\| = \sup_{u \neq 0} \frac{u^* \bar{P}_k u}{|u|^2} \leq \int_{\mathbb{R}^m} |x|^2 \bar{\mu}_k^f(dx) = (\bar{M}_k^{2,f})^2 < \infty .$$

Pour les moments des  $\bar{X}_k^{a,i}$ , nous avons toujours

$$|\bar{X}_k^{a,i}| \leq |\bar{X}_k^{f,i}| + \|K_k(\bar{P}_k)\| |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i| .$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski,

$$(\mathbb{E} |\bar{X}_k^{a,i}|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E} |\bar{X}_k^{f,i}|^p)^{1/p} + \|K_k(\bar{P}_k)\| (\mathbb{E} |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i|^p)^{1/p},$$

donc

$$\bar{M}_k^{p,a} \leq \bar{M}_k^{p,f} + \|K_k(\bar{P}_k)\| \bar{r}_k^p \leq \bar{M}_k^{p,f} + \|K_k(\bar{P}_k)\| (|Y_k| + \|H_k\| \bar{M}_k^{p,f} + c_p \lambda_{\max}^{1/2}(R_k)) < \infty ,$$

où  $\lambda_{\max}(R_k)$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice de covariance  $R_k$ .  $\square$

Introduisons les notations des moments empiriques que nous utiliserons dans les sections suivantes

$$\bar{M}_k^{N,p,f} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{f,i}|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \bar{M}_k^{N,p,a} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{a,i}|^p \right)^{1/p},$$

et aussi pour les résidus

$$\bar{r}_k^{N,p} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i|^p \right)^{1/p}.$$

Or les éléments  $\bar{X}_k^{f,i}$  et  $\bar{X}_k^{a,i}$  sont i.i.d., d'après la loi des grands nombres, nous avons, si le moment  $\bar{M}_k^{p,f}$  est fini, alors

$$\bar{M}_k^{N,p,f} \longrightarrow \bar{M}_k^{p,f} \quad \text{and} \quad \bar{r}_k^{N,p} \longrightarrow \bar{r}_k^p,$$

presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ . Et si le moment  $\bar{M}_k^{p,a}$  est fini, alors

$$\bar{M}_k^{N,p,a} \longrightarrow \bar{M}_k^{p,a},$$

presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

## 6.5 Continuité lipschitzienne locale du gain de Kalman

Dans cette partie nous étudions l'application  $P \mapsto K_k(P)$  de  $\mathbb{R}^{m \times m}$  à  $\mathbb{R}^{m \times d}$  et définie par

$$K_k(P) = PH_k^* (H_k PH_k^* + R_k)^{-1}$$

où  $H_k$  et  $R_k$  sont respectivement l'opérateur d'observation et la matrice de covariance de l'erreur d'observation à l'instant  $k$ .

Nous avons le résultat suivant : si la matrice de covariance  $R_k$  est inversible, alors la fonction  $P \mapsto K_k(P)$  a un accroissement au plus linéaire. En plus, elle est continue et localement lipschitzienne.

**Proposition 6.5.1.** *Si la matrice de covariance  $R_k$  est inversible, alors*

$$\|K_k(P)\| \leq \frac{\|H_k\|}{\lambda_{\min}(R_k)} \|P\|,$$

et

$$\|K_k(P) - K_k(P')\| \leq \|I - K_k(P') H_k\| \frac{\|H_k\|}{\lambda_{\min}(R_k)} \|P - P'\|, \quad (6.6)$$

pour toutes matrices de covariance  $P$  et  $P'$ .

*Preuve.* Nous avons

$$\|K_k(P)\| = \|PH_k^* (H_k PH_k^* + R_k)^{-1}\| \leq \|P\| \|H_k\| \|(H_k PH_k^* + R_k)^{-1}\|$$

où nous avons, avec la norme de matrice associée à la norme euclidienne,  $\|H_k^*\| = \|H_k\|$ .

Or  $H_k P H_k^* + R_k$  est une matrice symétrique, il existe donc une matrice orthogonale  $O$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $H_k P H_k^* + R_k = O D O^*$ , ce qui entraîne  $(H_k P H_k^* + R_k)^{-1} = O D^{-1} O^* = O D^{-1/2} O^* O D^{-1/2} O^* = T^* T$ , avec  $T = O D^{-1/2} O^*$  par définition, et

$$\|(H_k P H_k^* + R_k)^{-1}\| = \sup_{u \neq 0} \frac{u^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} u}{|u|^2} = \sup_{u \neq 0} \frac{|T u|^2}{|u|^2} = \sup_{v \neq 0} \frac{|v|^2}{|T^{-1} v|^2}.$$

On a  $T^{-1} = O D^{1/2} O^*$ , alors

$$|T^{-1} v|^2 = v^* O D^{1/2} O^* O D^{1/2} O^* v = v^* O D O^* v = v^* (H_k P H_k^* + R_k) v,$$

et

$$\|(H_k P H_k^* + R_k)^{-1}\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|v|^2}{v^* (H_k P H_k^* + R_k) v} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{|v|^2}{v^* R_k v} = \frac{1}{\lambda_{\min}(R_k)}.$$

Alors

$$\|K_k(P)\| \leq \frac{\|H_k\|}{\lambda_{\min}(R_k)} \|P\|.$$

Pour toutes matrices de covariance  $P$  et  $P'$ , nous avons

$$\begin{aligned} K_k(P) - K_k(P') &= P H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} - P' H_k^* (H_k P' H_k^* + R_k)^{-1} \\ &= P H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} - P' H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} \\ &\quad + P' H_k^* ((H_k P H_k^* + R_k)^{-1} - (H_k P' H_k^* + R_k)^{-1}) \\ &= (P - P') H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} \\ &\quad - P' H_k^* (H_k P' H_k^* + R_k)^{-1} H_k (P - P') H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} \\ &= (P - P') H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} \\ &\quad - K_k(P') H_k (P - P') H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1} \\ &= (I - K_k(P') H_k) (P - P') H_k^* (H_k P H_k^* + R_k)^{-1}, \end{aligned}$$

alors

$$\|K_k(P) - K_k(P')\| \leq \|I - K_k(P') H_k\| \frac{\|H_k\|}{\lambda_{\min}(R_k)} \|P - P'\|. \quad \square$$

## 6.6 Contiguïté des matrices de covariance empirique

L'objectif de cette partie est d'étudier la contiguïté entre la matrice de covariance empirique des éléments prédits  $X_k^{f,i}$  de l'EnKF, étant notée par  $P_k^N$ , et la matrice de covariance empirique des éléments prédits i.i.d.  $\bar{X}_k^{f,i}$ , étant notée par  $\bar{P}_k^N$ . Nous avons

$$\begin{aligned} P_k^N &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_k^{f,i} - m_k^N)(X_k^{f,i} - m_k^N)^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{f,i} (X_k^{f,i})^* - m_k^N (m_k^N)^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{f,i} (X_k^{f,i})^* - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{f,i} \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{f,i} \right)^*, \end{aligned}$$

et de la même façon,

$$\bar{P}_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} (\bar{X}_k^{f,i})^* - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} \right)^*.$$

Utilisant l'égalité  $a^2 - b^2 = (a - b)^2 + 2b(a - b)$  donne, pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} u^* (P_k^N - \bar{P}_k^N) u &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u^* X_k^{f,i}|^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u^* \bar{X}_k^{f,i}|^2 - \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^* X_k^{f,i} \right|^2 + \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^* \bar{X}_k^{f,i} \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u^* (X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i})|^2 + 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u^* \bar{X}_k^{f,i}) (u^* (X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i})) \\ &\quad - \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^* (X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}) \right|^2 - 2 \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^* \bar{X}_k^{f,i} \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^* (X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}) \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|P_k^N - \bar{P}_k^N\| &= \sup_{u \neq 0} \frac{|u^* (P_k^N - \bar{P}_k^N) u|}{|u|^2} \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^2 + 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{f,i}| |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \\ &\quad + \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{f,i}| \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \right) \\ &\leq 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^2 + 4 \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{f,i}|^2 \right)^{1/2} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En notant

$$\Delta_k^{N,p,f} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec  $p \geq 1$ , nous avons

$$\|P_k^N - \bar{P}_k^N\| \leq 2 |\Delta_k^{N,2,f}|^2 + 4 \bar{M}_k^{N,2,f} \Delta_k^{N,2,f}, \quad (6.7)$$

où la notation

$$\bar{M}_k^{N,2,f} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{f,i}|^2 \right)^{1/2},$$

a été définie dans la section 6.4.

## 6.7 Convergence de la matrice de covariance empirique $\bar{P}_k^N$

Nous étudions ensuite la convergence de la matrice de covariance empirique  $\bar{P}_k^N$  vers la matrice de covariance théorique  $\bar{P}_k$ .

### Proposition 6.7.1.

$$\epsilon_k^N = \|\bar{P}_k^N - \bar{P}_k\| \longrightarrow 0 \quad p.s \text{ quand } N \text{ tend vers l'infini,}$$

et

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \sqrt{N} \left\{ \mathbb{E} |\epsilon_k^N|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad \text{pour tous } p \geq 1.$$

*Preuve.* Par définition

$$\begin{aligned} \bar{P}_k^N &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k^N) (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k^N)^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k - (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k)) (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k - (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k))^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k) (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k)^* - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k \right) (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k)^* \\ &\quad - (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k) \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k \right)^* + (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k) (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k)^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k) (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k)^* - (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k) (\bar{m}_k^N - \bar{m}_k)^*, \end{aligned}$$

donc, pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$

$$u^* (\bar{P}_k^N - \bar{P}_k) u = u^* \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k) (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k)^* - \bar{P}_k \right) u - |u^* \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k \right)|^2,$$

et

$$\begin{aligned} \epsilon_k^N = \|\bar{P}_k^N - \bar{P}_k\| &= \sup_{u \neq 0} \frac{|u^* (\bar{P}_k^N - \bar{P}_k) u|}{|u|^2} \\ &\leq \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k) (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k)^* - \bar{P}_k \right\| + \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k \right|^2. \end{aligned}$$

On remarque que pour toute matrice symétrique  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$|u^* M u| = \left| \sum_{j,j'=1}^m u_j M_{jj'} u_{j'} \right| \leq \max_{j=1,\dots,m} |u_j|^2 \sum_{j,j'=1}^m |M_{jj'}| \leq |u|^2 \sum_{j,j'=1}^m |M_{jj'}|,$$

où  $u_j$  est la  $j$ ème composante du vecteur  $u$ ,  $M_{jj'}$  est l'élément à la  $j$ ème ligne et à la  $j'$ ème colonne de la matrice  $M$ . Donc,

$$\|M\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|u^* M u|}{|u|^2} \leq \sum_{j,j'=1}^m |M_{jj'}|,$$

En affectant

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k) (\bar{X}_k^{f,i} - \bar{m}_k)^* - \bar{P}_k,$$

on a

$$M_{jj'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ([\bar{X}_k^{f,i}]_j - [\bar{m}_k]_j) ([\bar{X}_k^{f,i}]_{j'} - [\bar{m}_k]_{j'}) - [\bar{P}_k]_{j,j'},$$

donc

$$\epsilon_k^N \leq \sum_{j,j'=1}^m \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ([\bar{X}_k^i]_j - [\bar{m}_k]_j) ([\bar{X}_k^i]_{j'} - [\bar{m}_k]_{j'}) - [\bar{P}_k]_{j,j'} \right| + \sum_{j=1}^m \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\bar{X}_k^i]_j - [\bar{m}_k]_j \right|^2.$$

En utilisant la loi forte des grands nombres pour les vecteurs aléatoires  $\bar{X}_k^i$  qui sont i.i.d de moyenne  $\bar{m}_k$  et de covariance  $\bar{P}_k$ , nous avons  $\epsilon_k^N$  converge vers 0 presque sûrement quand  $N$  tend vers l'infini. Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \{\mathbb{E} |\epsilon_k^N|^p\}^{1/p} &\leq \sum_{j,j'=1}^m \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ([\bar{X}_k^i]_j - [\bar{m}_k]_j) ([\bar{X}_k^i]_{j'} - [\bar{m}_k]_{j'}) - [\bar{P}_k]_{j,j'} \right|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\bar{X}_k^i]_j - [\bar{m}_k]_j \right|^{2p} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Minkowski. En utilisant ensuite l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund, nous avons pour tout ordre  $p \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E} |\epsilon_k^N|^p)^{1/p} &\leq \frac{c_p}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^m (\mathbb{E} |(\bar{X}_k^{i,j,f} - \bar{m}_k^j) (\bar{X}_k^{i,j',f} - \bar{m}_k^{j'}) - \bar{P}_k^{j,j'}|^p)^{1/p} \\
&\quad + \frac{c_{2p}^2}{N} \sum_{j=1}^m (\mathbb{E} |\bar{X}_k^{i,j,f} - \bar{m}_k^j|^{2p})^{1/p}.
\end{aligned}$$

Or les moments d'ordre  $p \geq 2$  des éléments  $\bar{X}_k^{f,i}$  sont finis, nous avons donc

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \sqrt{N} \{\mathbb{E} |\epsilon_k^N|^p\}^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad \square$$

## 6.8 Contiguïté des éléments

Dans cette partie nous étudions la contiguïté entre les éléments EnKF et les éléments i.i.d. à la limite. Nous avons, de (6.1-6.3), sous l'hypothèse A

$$|X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \leq L |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|, \quad (6.8)$$

alors que sous l'hypothèse B

$$|X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \leq L |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}| (1 + |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^s) + L |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|^{s+1}. \quad (6.9)$$

Pour les éléments de correction, de (6.2-6.4) nous avons, sous les deux hypothèses

$$\begin{aligned}
X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i} &= X_k^{f,i} + K_k(P_k^N) (Y_k - H_k X_k^{f,i} + V_k^i) - \bar{X}_k^{f,i} - K_k(\bar{P}_k) (Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i) \\
&= (I - K_k(\bar{P}_k) H_k) (X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}) - (K_k(P_k^N) - K_k(\bar{P}_k)) H_k (X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}) \\
&\quad + (K_k(P_k^N) - K_k(\bar{P}_k)) (Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i}| &\leq \|I - K_k(\bar{P}_k) H_k\| |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \\
&\quad + \|K_k(P_k^N) - K_k(\bar{P}_k)\| \|H_k\| |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \\
&\quad + \|K_k(P_k^N) - K_k(\bar{P}_k)\| |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i|.
\end{aligned} \quad (6.10)$$

Nous introduisons maintenant les notations suivantes

$$\Delta_k^{N,p,f} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \Delta_k^{N,p,a} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i}|^p \right)^{1/p},$$

qui sont les mesures de la contiguïté d'ordre  $p$  des éléments EnKF et des éléments i.i.d. à la limite. Sous l'hypothèse A, d'après (6.8)

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p\right)^{1/p} \leq L \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|^p\right)^{1/p},$$

autrement dit

$$\Delta_k^{N,p,f} \leq L \Delta_{k-1}^{N,p,a}, \quad (6.11)$$

alors que sous l'hypothèse B, d'après (6.9), en utilisant l'inégalité de Minkowski, nous avons

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p\right)^{1/p} &\leq L \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|^p (1 + |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^s)^p\right)^{1/p} \\ &\quad + L \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|^{p(s+1)}\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme de cette inégalité, en utilisant l'inégalité de Hölder et ensuite l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|^p (1 + |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^s)^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|^{pr}\right)^{1/pr} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^s)^{pr'}\right)^{1/pr'} \\ &\leq \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_{k-1}^{a,i} - \bar{X}_{k-1}^{i,a}|^{pr}\right)^{1/pr} \left(1 + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_{k-1}^{i,a}|^{s pr'}\right)^{1/pr'}\right), \end{aligned}$$

où  $r, r'$  sont tels que  $1/r + 1/r' = 1$ . On obtient alors

$$\Delta_k^{N,p,f} \leq L \Delta_{k-1}^{N,p,r,a} (1 + |\bar{M}_{k-1}^{N,s pr',a}|^s) + L |\Delta_{k-1}^{N,p(s+1),a}|^{s+1}. \quad (6.12)$$

Pour les éléments de correction, de (6.10) et (6.6), sous les deux hypothèses

$$\begin{aligned}
|X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i}| &\leq \|I - K_k(\bar{P}_k) H_k\| |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \\
&\quad + \|K_k(P_k^N) - K_k(\bar{P}_k)\| \|H_k\| |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \\
&\quad + \|K_k(P_k^N) - K_k(\bar{P}_k)\| |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i| \\
&\leq \|I - K_k(\bar{P}_k) H_k\| |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \\
&\quad + \|I - K_k(\bar{P}_k) H_k\| \frac{\|H_k\|^2}{\lambda_{\min}(R_k)} \|P_k^N - \bar{P}_k\| |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| \\
&\quad + \|I - K_k(\bar{P}_k) H_k\| \frac{\|H_k\|}{\lambda_{\min}(R_k)} \|P_k^N - \bar{P}_k\| |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i| \\
&\leq C_k (|X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| + \|P_k^N - \bar{P}_k\| (|X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}| + |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i|)),
\end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété localement lipschitzienne du gain de Kalman (Proposition 6.5.1), et

$$C_k = \|I - K_k(\bar{P}_k) H_k\| \max\left(1, \frac{\|H_k\|}{\lambda_{\min}(R_k)}, \frac{\|H_k\|^2}{\lambda_{\min}(R_k)}\right),$$

est une constante. En utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i}|^p\right)^{1/p} &\leq C_k \left( \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p\right)^{1/p} \right. \\
&\quad + \|P_k^N - \bar{P}_k\| \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p\right)^{1/p} \\
&\quad \left. + \|P_k^N - \bar{P}_k\| \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Y_k - H_k \bar{X}_k^{f,i} + V_k^i|^p\right)^{1/p} \right),
\end{aligned}$$

autrement dit

$$\Delta_k^{N,p,a} \leq C_k (\Delta_k^{N,p,f} + \|P_k^N - \bar{P}_k\| (\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p})).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et de (6.7), nous avons

$$\|P_k^N - \bar{P}_k\| \leq \|P_k^N - \bar{P}_k^N\| + \|\bar{P}_k^N - \bar{P}_k\| \leq 2|\Delta_k^{N,2,f}|^2 + 4\bar{M}_k^{N,2,f} \Delta_k^{N,2,f} + \epsilon_k^N,$$

alors

$$\Delta_k^{N,p,a} \leq C_k (\Delta_k^{N,p,f} + (2|\Delta_k^{N,2,f}|^2 + 4\bar{M}_k^{N,2,f} \Delta_k^{N,2,f} + \epsilon_k^N) (\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p})). \quad (6.13)$$

### 6.8.1 Contiguïté presque sûre des éléments

Nous rappelons les définitions

$$\Delta_k^{N,p,f} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \Delta_k^{N,p,a} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i}|^p \right)^{1/p}.$$

**Proposition 6.8.1.** *Si l'hypothèse A est satisfaite, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments finis d'ordre  $p \geq 2$ , alors*

$$\Delta_k^{N,p,f} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Delta_k^{N,p,a} \longrightarrow 0,$$

pour le même ordre  $p$ , presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

Si l'hypothèse B est satisfaite, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments de tout ordre, alors

$$\Delta_k^{N,p,f} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Delta_k^{N,p,a} \longrightarrow 0,$$

pour tout ordre  $p$ , presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

*Preuve.* A l'instant 0

$$\Delta_0^{N,p,a} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_0^{i,a} - \bar{X}_0^{i,a}|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Supposons que, sous l'hypothèse A,  $\Delta_{k-1}^{N,p,a} \longrightarrow 0$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$  pour tout ordre  $p \geq 2$ , et sous l'hypothèse B,  $\Delta_{k-1}^{N,p,a} \longrightarrow 0$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$  pour tout ordre  $p$ .

Sous l'hypothèse A, de (6.11) nous avons

$$\Delta_k^{N,p,f} \leq L \Delta_{k-1}^{N,p,a}.$$

Alors,  $\Delta_k^{N,p,f} \longrightarrow 0$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ . Alors que sous l'hypothèse B, nous avons l'inégalité (6.12)

$$\Delta_k^{N,p,f} \leq L \Delta_{k-1}^{N,p,r,a} (1 + |\bar{M}_{k-1}^{N,s,p,r',a}|^s) + L |\Delta_{k-1}^{N,p(s+1),a}|^{s+1}.$$

Or  $\bar{M}_{k-1}^{N,s,p,r',a} \longrightarrow \bar{M}_{k-1}^{s,p,r',a}$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ , avec le moment  $\bar{M}_{k-1}^{s,p,r',a}$  qui est fini (proposition 6.4.1), alors par la récurrence,  $\Delta_k^{N,p,f} \longrightarrow 0$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

Dans les deux cas, nous avons l'inégalité (6.13),

$$\Delta_k^{N,p,a} \leq C_k (\Delta_k^{N,p,f} + (2 |\Delta_k^{N,2,f}|^2 + 4 \bar{M}_k^{N,2,f} \Delta_k^{N,2,f} + \epsilon_k^N) (\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p})).$$

Or  $\bar{M}_k^{N,2,f} \longrightarrow \bar{M}_k^{2,f}$  et  $\bar{r}_k^{N,p} \longrightarrow \bar{r}_k^p$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ , avec les moments finis  $\bar{M}_k^{2,f}$  et  $\bar{r}_k^p$ , et parce que  $\epsilon_k^N \longrightarrow 0$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$  (proposition 6.7.1), alors par la récurrence,  $\Delta_k^{N,p,a} \longrightarrow 0$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .  $\square$

### 6.8.2 Contiguïté dans $\mathbb{L}^p$ des éléments

Nous rappelons les définitions

$$\Delta_k^{N,p,f} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \Delta_k^{N,p,a} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i}|^p \right)^{1/p},$$

et introduisons les nouvelles notations

$$D_k^{N,p,f} = (\mathbb{E} |X_k^{f,i} - \bar{X}_k^{f,i}|^p)^{1/p} \quad \text{et} \quad D_k^{N,p,a} = (\mathbb{E} |X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{a,i}|^p)^{1/p},$$

qui dépendent de  $N$  parce que la distribution d'un élément EnKF dépend du nombre  $N$  d'éléments. Rappelons aussi les notations suivantes pour les moments empiriques

$$\bar{M}_k^{N,p,f} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{f,i}|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \bar{M}_k^{N,p,a} = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{a,i}|^p \right)^{1/p},$$

et pour les moments théoriques

$$\bar{M}_k^{p,f} = (\mathbb{E} |\bar{X}_k^{f,i}|^p)^{1/p} \quad \text{et} \quad \bar{M}_k^{p,a} = (\mathbb{E} |\bar{X}_k^{a,i}|^p)^{1/p}.$$

Le lemme suivant établit les relations entre ces quantités.

#### Lemme 6.8.1.

$$(\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f}|^q)^{1/q} \leq D_k^{N,p \vee q, f} \quad \text{et} \quad (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,a}|^q)^{1/q} \leq D_k^{N,p \vee q, a},$$

et

$$(\mathbb{E} |\bar{M}_k^{N,p,f}|^q)^{1/q} \leq \bar{M}_k^{p \vee q, f} \quad \text{et} \quad (\mathbb{E} |\bar{M}_k^{N,p,a}|^q)^{1/q} \leq \bar{M}_k^{p \vee q, a},$$

où  $p \vee q \triangleq \max(p, q)$ .

*Preuve.* Dans cette démonstration, nous remplaçons temporairement l'indice de prédiction  $f$  et l'indice d'analyse  $a$  par un point  $\bullet$ . Nous avons, si  $q = p$

$$\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,\bullet}|^p = \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i,\bullet} - \bar{X}_k^{i,\bullet}|^p \right) = \mathbb{E} |X_k^{i,\bullet} - \bar{X}_k^{i,\bullet}|^p = |D_k^{N,p,\bullet}|^p,$$

parce que  $(X_k^{i,\bullet}, \bar{X}_k^{i,\bullet})$  ont une même distribution jointe pour tout  $i = 1, \dots, N$ , donc

$$(\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,\bullet}|^p)^{1/p} = D_k^{N,p,\bullet}.$$

Si  $q \geq p$ , alors l'application  $x \mapsto x^{q/p}$  est convexe, et d'après l'inégalité de Jensen nous avons

$$|\Delta_k^{N,p,\bullet}|^q = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i,\bullet} - \bar{X}_k^{i,\bullet}|^p \right)^{q/p} \leq \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i,\bullet} - \bar{X}_k^{i,\bullet}|^q \right) = |\Delta_k^{N,q,\bullet}|^q,$$

ce qui entraîne

$$(\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,\bullet}|^q)^{1/q} \leq (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,q,\bullet}|^q)^{1/q} = D_k^{N,q,\bullet}.$$

Si  $q \leq p$ , alors l'application  $x \mapsto x^{q/p}$  est concave, et d'après l'inégalité de Jensen nous avons

$$\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,\bullet}|^q = \mathbb{E} (|\Delta_k^{N,p,\bullet}|^p)^{q/p} \leq (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,\bullet}|^p)^{q/p} = |D_k^{N,p,\bullet}|^q,$$

donc

$$(\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,\bullet}|^q)^{1/q} \leq D_k^{N,p,\bullet}.$$

De la même façon, si  $q = p$

$$\mathbb{E} |\bar{M}_k^{N,p,\bullet}|^p = \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{i,\bullet}|^p \right) = \mathbb{E} |\bar{X}_k^{i,\bullet}|^p = |\bar{M}_k^{p,\bullet}|^p,$$

parce que les  $\bar{X}_k^{i,\bullet}$  ont la même distribution pour tout  $i = 1, \dots, N$ , donc

$$(\mathbb{E} |\bar{M}_k^{N,p,\bullet}|^p)^{1/p} = \bar{M}_k^{p,\bullet}.$$

Pour les cas où  $q \geq p$  et  $q \leq p$ , la démonstration est répétée avec les même arguments de convexité et de concavité.  $\square$

**Proposition 6.8.2.** *Sous l'hypothèse B, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments finis de tout ordre  $p$ ,*

$$\sup_{N \geq 1} \sqrt{N} D_k^{N,p,f} < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{N \geq 1} \sqrt{N} D_k^{N,p,a} < \infty,$$

pour tout ordre  $p$ .

*Preuve.* A l'instant 0,

$$D_0^{N,p,a} = (\mathbb{E} |X_0^{i,a} - \bar{X}_0^{i,a}|^p)^{1/p} = 0.$$

Supposons que

$$\sup_{N \geq 1} \sqrt{N} D_{k-1}^{N,p,f} < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{N \geq 1} \sqrt{N} D_{k-1}^{N,p,a} < \infty,$$

pour tout ordre  $p$ . Sous l'hypothèse A, nous avons l'inégalité (6.11),

$$\Delta_k^{N,p,f} \leq L \Delta_{k-1}^{N,p,a},$$

donc

$$(\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f}|^p)^{1/p} \leq L (\mathbb{E} |\Delta_{k-1}^{N,p,a}|^p)^{1/p}.$$

Autrement dit,

$$D_k^{N,p,f} \leq L D_{k-1}^{N,p,a}.$$

Ainsi par la récurrence, nous avons  $\sqrt{N} D_k^{N,p,f}$  est bornée uniformément selon  $N$ . Alors que sous l'hypothèse B, nous avons l'inégalité (6.12)

$$\Delta_k^{N,p,f} \leq L \Delta_{k-1}^{N,p,r,a} (1 + |\bar{M}_{k-1}^{N,s,p,r',a}|^s) + L |\Delta_{k-1}^{N,p,(s+1),a}|^{s+1}.$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient,

$$(\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f}|^p)^{1/p} \leq L (\mathbb{E} (|\Delta_{k-1}^{N,p,r,a}|^p (1 + |\bar{M}_{k-1}^{N,s,p,r',a}|^s)^p))^{1/p} + L (\mathbb{E} |\Delta_{k-1}^{N,p(s+1),a}|^{p(s+1)})^{1/p},$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder puis l'inégalité de Minkowski pour le premier terme nous avons,

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E} (|\Delta_{k-1}^{N,p,r,a}|^p (1 + |\bar{M}_{k-1}^{N,s,p,r',a}|^s)^p))^{1/p} \\ & \leq (\mathbb{E} |\Delta_{k-1}^{N,p,r,a}|^{pr})^{1/pr} (\mathbb{E} (1 + |\bar{M}_{k-1}^{N,s,p,r',a}|^s)^{pr'})^{1/pr'} \\ & \leq (\mathbb{E} |\Delta_{k-1}^{N,p,r,a}|^{pr})^{1/pr} (1 + (\mathbb{E} |\bar{M}_{k-1}^{N,s,p,r',a}|^{s pr'})^{1/pr'}), \end{aligned}$$

où  $r, r'$  sont tels que  $1/r + 1/r' = 1$ . Nous obtenons alors,

$$D_k^{N,p,f} \leq L D_{k-1}^{N,p,r,a} (1 + |\bar{M}_{k-1}^{s,p,r',a}|^s) + L |D_{k-1}^{N,p(s+1),a}|^{s+1}.$$

Puisque le moment  $\bar{M}_{k-1}^{s,p,r',a}$  est fini (proposition 6.7.1), alors par la récurrence,  $\sqrt{N} D_k^{N,p,f}$  est borné uniformément selon  $N$ .

Sous les deux hypothèses, nous avons l'inégalité (6.13)

$$\begin{aligned} \Delta_k^{N,p,a} & \leq C_k (\Delta_k^{N,p,f} + (2|\Delta_k^{N,2,f}|^2 + 4\bar{M}_k^{N,2,f} \Delta_k^{N,2,f} + \epsilon_k^N) (\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p})) \\ & \leq C_k \Delta_k^{N,p,f} + 2C_k \Delta_k^{N,2,f} (\Delta_k^{N,2,f} + 2\bar{M}_k^{N,2,f}) (\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}) \\ & \quad + C_k \epsilon_k^N (\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}), \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski nous avons

$$\begin{aligned} (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,a}|^p)^{1/p} & \leq C_k (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f}|^p)^{1/p} \\ & \quad + 2C_k (\mathbb{E} (|\Delta_k^{N,2,f}|^p |\Delta_k^{N,2,f}| + 2\bar{M}_k^{N,2,f} |\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}|^p))^{1/p} \\ & \quad + C_k (\mathbb{E} (|\epsilon_k^N|^p |\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}|^p))^{1/p}, \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et puis l'inégalité de Minkowski pour le deuxième et le troisième terme on obtient

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E} (|\Delta_k^{N,2,f}|^p |\Delta_k^{N,2,f}| + 2\bar{M}_k^{N,2,f} |\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}|^p))^{1/p} \\ & \leq (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,2,f}|^{pr})^{1/pr} (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,2,f} + 2\bar{M}_k^{N,2,f}|^{pr'})^{1/pr'} (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}|^{pr''})^{1/pr''} \\ & \leq (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,2,f}|^{pr})^{1/pr} ((\mathbb{E} |\Delta_k^{N,2,f}|^{pr'})^{1/pr'} + 2(\mathbb{E} |\bar{M}_k^{N,2,f}|^{pr'})^{1/pr'}) \\ & \quad ((\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f}|^{pr''})^{1/pr''} + (\mathbb{E} |\bar{r}_k^{N,p}|^{pr''})^{1/pr''}), \end{aligned}$$

où  $r, r', r''$  sont tels que  $1/r + 1/r' + 1/r'' = 1$ , et

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E} (|\epsilon_k^N|^p |\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}|^p))^{1/p} \\ & \leq (\mathbb{E} |\epsilon_k^N|^{pq})^{1/pq} (\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f} + \bar{r}_k^{N,p}|^{pq})^{1/pq'} \\ & \leq (\mathbb{E} |\epsilon_k^N|^{pq})^{1/pq} ((\mathbb{E} |\Delta_k^{N,p,f}|^{pq'})^{1/pq'} + (\mathbb{E} |\bar{r}_k^{N,p}|^{pq'})^{1/pq'}), \end{aligned}$$

où  $q, q'$  sont tels que  $1/q + 1/q' = 1$ . Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} D_k^{N,p,a} & \leq C_k D_k^{N,p,f} + 2 C_k D_k^{N,2\nu(p r),f} (D_k^{N,2\nu(p r'),f} + 2 \bar{M}_k^{2\nu(p r'),f}) (D_k^{N,p r'',f} + \bar{r}_k^{p r''}) \\ & \quad + C_k (\mathbb{E} |\epsilon_k^N|^{pq})^{1/pq} (D_k^{N,p q',f} + \bar{r}_k^{p q'}), \end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 6.8.1. Parce que les quantités  $\bar{M}_k^{2\nu(p r'),f}$ ,  $\bar{r}_k^{p r''}$  et  $\bar{r}_k^{p q'}$  sont finies, et que  $\sqrt{N} \epsilon_k^N$  est bornée uniformément selon  $N$  dans  $\mathbb{L}^{pq}$  (proposition 6.7.1), alors par la récurrence, nous avons  $\sqrt{N} D_k^{N,p,a}$  est borné uniformément selon  $N$ .  $\square$

## 6.9 Convergence du filtre de Kalman d'ensemble

Nous rappelons ici la notation des mesures empiriques des éléments EnKF

$$\mu_k^{N,f} = \frac{1}{N} \sum \delta_{X_k^{f,i}} \quad \text{et} \quad \mu_k^{N,a} = \frac{1}{N} \sum \delta_{X_k^{a,i}}.$$

Dans les deux sections suivantes nous allons démontrer la convergence presque sûre et la convergence dans  $\mathbb{L}^p$  des mesure empiriques  $\mu_k^{N,f}$  et  $\mu_k^{N,a}$ .

### 6.9.1 Convergence presque sûre de la mesure empirique

**Théorème 6.9.1.** *Soit  $\phi$  une fonction continue et localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $L$  telle que*

$$|\phi(x) - \phi(x')| \leq L |x - x'| (1 + |x|^\sigma + |x'|^\sigma),$$

pour tout  $x, x' \in \mathbb{R}^m$  et avec  $\sigma \geq 0$ .

Sous l'hypothèse A, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments finis d'ordre  $p$  avec un certain  $p \geq \max(2, \sigma + 1)$ , alors

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{f,i}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^f(dx) \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{a,i}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^a(dx),$$

presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

Sous l'hypothèse B, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments finis de tout ordre, alors

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{f,i}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^f(dx) \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{a,i}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^a(dx),$$

presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

*Preuve.* Dans cette partie de démonstration, nous remplaçons temporairement les indices de prédiction  $f$  et d'analyse  $a$  par un point  $\bullet$ . Nous avons

$$|\phi(x)| \leq M (1 + |x|^{\sigma+1}),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$  d'après la remarque 6.3.3. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\phi(x)| \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \leq M (1 + \int_{\mathbb{R}^m} |x|^{\sigma+1} \bar{\mu}_k^\bullet(dx)) = M (1 + |\bar{M}_k^{\sigma+1, \bullet}|^{\sigma+1}) < \infty,$$

d'après la proposition 6.4.1. En utilisant la loi des grands nombres pour les éléments i.i.d.  $\bar{X}_k^{i, \bullet}$ , nous avons

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx), \quad (6.14)$$

presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

D'autre part,

$$|\phi(x) - \phi(x')| \leq L |x - x'| (1 + |x|^\sigma) + L |x - x'|^{\sigma+1},$$

pour tout  $x, x' \in \mathbb{R}^m$ , avec une autre constante  $L$ . En utilisant l'inégalité triangulaire, alors

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i, \bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet})) \right| \\ & \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\phi(X_k^{i, \bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet})| \\ & \leq L \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i, \bullet} - \bar{X}_k^{i, \bullet}| (1 + |\bar{X}_k^{i, \bullet}|^\sigma) + L \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i, \bullet} - \bar{X}_k^{i, \bullet}|^{\sigma+1}. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Hölder et puis l'inégalité de Minkowski pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i, \bullet} - \bar{X}_k^{i, \bullet}| (1 + |\bar{X}_k^{i, \bullet}|^\sigma) \\ & \leq \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i, \bullet} - \bar{X}_k^{i, \bullet}|^r \right)^{1/r} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 + |\bar{X}_k^{i, \bullet}|^\sigma)^{r'} \right)^{1/r'} \\ & \leq \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_k^{i, \bullet} - \bar{X}_k^{i, \bullet}|^r \right)^{1/r} \left( 1 + \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{i, \bullet}|^{\sigma r'} \right)^{1/r'} \right), \end{aligned}$$

où  $r, r'$  sont tels que  $1/r + 1/r' = 1$ . Nous avons alors

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i,\bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i,\bullet})) \right| \leq L \Delta_k^{N,r,\bullet} (1 + |\bar{M}_k^{N,\sigma r',\bullet}|^\sigma) + L |\Delta_k^{N,\sigma+1,\bullet}|^{\sigma+1}. \quad (6.15)$$

Parce que  $\bar{M}_k^{N,\sigma r',\bullet} \rightarrow \bar{M}_k^{\sigma r',\bullet}$  presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ , avec la limite  $\bar{M}_k^{\sigma r',\bullet}$  qui est finie, alors d'après la proposition 6.8.1, nous avons

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i,\bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i,\bullet})) \right| \rightarrow 0, \quad (6.16)$$

presque sûrement quand  $N \uparrow \infty$ .

En combinant (6.14) et (6.16), et en écrivant

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{i,\bullet}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i,\bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i,\bullet})) + \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\bar{X}_k^{i,\bullet}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \right), \end{aligned}$$

nous avons ce qu'il faut démontrer.  $\square$

### 6.9.2 $\mathbb{L}^p$ -convergence et vitesse de convergence

**Théorème 6.9.2.** *Soit  $\phi$  une fonction continue et localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $L$  telle que*

$$|\phi(x) - \phi(x')| \leq L |x - x'| (1 + |x|^\sigma + |x'|^\sigma),$$

pour tout  $x, x' \in \mathbb{R}^m$  et avec  $\sigma \geq 0$ .

Sous l'hypothèse B, et si la distribution initiale  $\mu_0$  admet des moments finis de tout ordre  $p$ , alors

$$\sup_{N \geq 1} \sqrt{N} \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{f,i}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^f(dx) \right|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

et

$$\sup_{N \geq 1} \sqrt{N} \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{a,i}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^a(dx) \right|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

pour tout ordre  $p$ .

*Preuve.* Dans cette partie de démonstration, nous remplaçons temporairement les indices de prédiction  $f$  et d'analyse  $a$  par un point  $\bullet$ . Nous avons

$$|\phi(x)| \leq M (1 + |x|^{\sigma+1}),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$  d'après la remarque 6.3.3. En utilisant l'inégalité de Minkowski et d'après la proposition 6.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |\phi(x)|^p \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \right)^{1/p} &\leq M \left( \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |x|^{\sigma+1})^p \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \right)^{1/p} \\ &\leq M \left( 1 + \left( \int_{\mathbb{R}^m} |x|^{p(\sigma+1)} \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \right)^{1/p} \right) \\ &= M \left( 1 + |\bar{M}_k^{p(\sigma+1), \bullet}|^{\sigma+1} \right) < \infty . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Marcinkiewicz–Zygmund, nous avons

$$\left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \right|^p \right)^{1/p} \leq \frac{C_p}{\sqrt{N}} \left( \mathbb{E} |\phi(\bar{X}_k^{i, \bullet}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx)|^p \right)^{1/p} ,$$

autrement dit,

$$\sup_{N \geq 1} \sqrt{N} \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx) \right|^p \right)^{1/p} < \infty . \quad (6.17)$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski et d'après (6.15), nous avons

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i, \bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet})) \right|^p \right)^{1/p} &\leq L \left( \mathbb{E} (|\Delta_k^{N, r, \bullet}|^p (1 + |\bar{M}_k^{N, \sigma r', \bullet}|^{\sigma p})) \right)^{1/p} \\ &\quad + L \left( \mathbb{E} |\Delta_k^{N, \sigma+1, \bullet}|^{p(\sigma+1)} \right)^{1/p} . \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et puis l'inégalité de Minkowski pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned} &\left( \mathbb{E} (|\Delta_k^{N, r, \bullet}|^p (1 + |\bar{M}_k^{N, \sigma r', \bullet}|^{\sigma p})) \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \mathbb{E} |\Delta_k^{N, r, \bullet}|^{p r} \right)^{1/p r} \left( \mathbb{E} (1 + |\bar{M}_k^{N, \sigma r', \bullet}|^{\sigma p r'}) \right)^{1/p r'} \\ &\leq \left( \mathbb{E} |\Delta_k^{N, r, \bullet}|^{p r} \right)^{1/p r} \left( 1 + \left( \mathbb{E} |\bar{M}_k^{N, \sigma r', \bullet}|^{\sigma p r'} \right)^{1/p r'} \right) , \end{aligned}$$

où  $r, r'$  sont tels que  $1/r + 1/r' = 1$ . Nous avons alors

$$\left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i, \bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet})) \right|^p \right)^{1/p} \leq L D_k^{N, p r, \bullet} (1 + |\bar{M}_k^{\sigma p r', \bullet}|^{\sigma}) + L |D_k^{N, (\sigma+1) p}|^{\sigma+1} ,$$

où on a utilisé le lemme 6.8.1.

Parce que le moment  $\bar{M}_k^{\sigma p r', \bullet}$  est fini, alors d'après la proposition 6.8.2, on a

$$\sup_{N \geq 1} \sqrt{N} \left( \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i, \bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i, \bullet})) \right|^p \right)^{1/p} < \infty . \quad (6.18)$$

En combinant (6.17) et (6.18), et en écrivant

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E} | \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_k^{i,\bullet}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx) |^p)^{1/p} \\ & \leq (\mathbb{E} | \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi(X_k^{i,\bullet}) - \phi(\bar{X}_k^{i,\bullet})) |^p)^{1/p} + (\mathbb{E} | \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\bar{X}_k^{i,\bullet}) - \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_k^\bullet(dx) |^p)^{1/p}, \end{aligned}$$

nous avons ce qu'il faut démontrer.  $\square$



## Chapitre 7

# Relation avec le filtre bayésien optimal

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que, quand le nombre d'éléments d'ensemble tend vers l'infini, chaque élément d'ensemble de l'EnKF tend vers une copie indépendante du processus aléatoire

$$\begin{aligned}\bar{X}_k^f &= f_k(\bar{X}_{k-1}^a) + W_k, \\ \bar{X}_k^a &= \bar{X}_k^f + K_k(\bar{P}_k)(y_k - H_k \bar{X}_k^f + V_k),\end{aligned}$$

où  $W_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ ,  $V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$  et  $\bar{X}_0^a \sim \mathcal{N}(0, P_0)$ .

Nous avons aussi montré la convergence des mesures empiriques  $\mu_k^{N,f}$  et  $\mu_k^{N,a}$  de l'EnKF vers les mesures  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$  des vecteurs aléatoires  $\bar{X}_k^f$  et  $\bar{X}_k^a$  correspondantes. L'objectif maintenant est alors de comparer ces limites avec les mesures correspondantes du filtre bayésien optimal, qui se réduit dans le cas du modèle linéaire gaussien au filtre de Kalman.

### 7.1 Relation avec le filtre bayésien optimal

Soit  $\phi$  une fonction bornée mesurable, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x') \bar{\mu}_k^f(dx') = \mathbb{E} [\phi(\bar{X}_k^{i,f})] = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(f_k(x) + w) \bar{\mu}_{k-1}^a(dx) p_k^W(dw), \quad (7.1)$$

où  $p_k^W(dw)$  désigne la distribution gaussienne du vecteur aléatoire  $W_k$ . Cette expression permet d'écrire la mesure  $\bar{\mu}_k^f$  en fonction de la mesure  $\bar{\mu}_{k-1}^a$ .

Sous les deux hypothèses A et B, la mesure  $\bar{\mu}_k^f$  a le moment d'ordre deux fini, la matrice de covariance  $\bar{P}_k$  est alors finie. Nous avons, pour toute fonction  $\phi$  bornée mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x') \bar{\mu}_k^a(dx') = \mathbb{E} [\phi(\bar{X}_k^{i,a})] = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x + K_k(\bar{P}_k)(Y_k - H_k x + v)) \bar{\mu}_k^f(dx) q_k^V(v) dv, \quad (7.2)$$

où  $q_k^V(v)$  est la densité gaussienne de l'erreur d'observation  $V_k^i$ . Nous avons ainsi une expression de la mesure  $\bar{\mu}_k^a$  en fonction de la mesure  $\bar{\mu}_k^f$ .

D'autre part, nous avons à l'instant initial

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \bar{\mu}_0^a(dx) = \mathbb{E} [\phi(\bar{X}_0^{i,a})] = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \mu_0(dx),$$

pour toute fonction bornée mesurable  $\phi$ , ce qui implique  $\bar{\mu}_0^a = \mu_0$ .

Pour le filtre bayésien optimal, nous avons les équations suivantes qui décrivent l'évolution de  $\mu_{k-1}^a$  à  $\mu_k^f$  et de  $\mu_k^f$  à  $\mu_k^a$  :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x') \mu_k^f(dx') = \mathbb{E} [\phi(X_k) | Y_{0:k-1}] = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(f_k(x) + w) \mu_{k-1}^a(dx) p_k^W(dw), \quad (7.3)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x') \mu_k^a(dx') = \mathbb{E} [\phi(X_k) | Y_{0:k}] = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x') q_k^V(Y_k - H_k x') \mu_k^f(dx')}{\int_{\mathbb{R}^m} q_k^V(Y_k - H_k x') \mu_k^f(dx')}, \quad (7.4)$$

pour toute fonction mesurable bornée  $\phi$ . Et à l'instant initial,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \mu_0^a(dx) = \mathbb{E} [\phi(X_0)] = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \mu_0(dx),$$

ce qui implique  $\mu_0^a = \mu_0$ .

Nous avons alors  $\bar{\mu}_0^a = \mu_0^a$ , et si  $\bar{\mu}_{k-1}^a = \mu_{k-1}^a$ , de (7.1) et (7.3), il est nécessaire que  $\bar{\mu}_k^f = \mu_k^f$ . Pourtant, en général  $\bar{\mu}_k^f = \mu_k^f$  n'implique pas  $\bar{\mu}_k^a = \mu_k^a$ , en regardant la différence entre (7.2) et (7.4).

Autrement dit, les distributions  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$  à la limite de l'EnKF **diffèrent** des distributions  $\mu_k^f$  and  $\mu_k^a$  définies par le filtre bayésien optimal.

## 7.2 Relation avec le filtre de Kalman

Dans le cas du système linéaire gaussien, en remplaçant la fonction nonlinéaire  $f_k$  par la fonction linéaire  $F_k$ , il est clair que  $\bar{X}_k^f$  et  $\bar{X}_k^a$  suivent des lois gaussiennes de moyennes et de matrices de covariance suivantes

$$\begin{aligned} \bar{m}_k^f &= F_k \bar{m}_{k-1}^a, \\ \bar{P}_k &= F_k \bar{P}_{k-1}^a F_k^* + Q_k, \\ \bar{m}_k^a &= \bar{m}_k^f + K_k(\bar{P}_k)(y_k - H_k \bar{m}_k^f), \\ \bar{P}_k^a &= (I - K_k(\bar{P}_k)H_k)\bar{P}_k, \end{aligned}$$

qui sont exactement les moyennes et les covariances conditionnelles fournies par le filtre de Kalman. Autrement dit, les mesures  $\bar{\mu}_k^f$  et  $\bar{\mu}_k^a$  sont les lois gaussiennes dont la moyenne et la covariance sont fournies par les équations ci-dessus. En plus, si  $\bar{\mu}_{k-1}^a = \mu_{k-1}^a$ , alors  $\bar{\mu}_{k-1}^f = \mu_{k-1}^f$ . Et si  $\bar{\mu}_{k-1}^f = \mu_{k-1}^f$ , alors  $\bar{P}_k = P_k^f$ , donc  $K_k(\bar{P}_k) = K_k$ , ce qui entraîne  $\bar{\mu}_k^a = \mu_k^a$ .

Alors, dans le cas du modèle linéaire gaussien, la mesure définie à la limite du filtre de Kalman d'ensemble coïncide avec celle définie par le filtre de Kalman. Nous pouvons aussi montrer la convergence de la moyenne empirique des éléments EnKF vers la moyenne conditionnelle du filtre de Kalman. En effet, nous avons

$$m_k^a = \mathbb{E}(X_k | Y_{1:k}) = \bar{m}_k^a = \mathbb{E}(\bar{X}_k^a).$$

Il suffit donc de démontrer la convergence de la moyenne empirique des éléments EnKF vers la moyenne mathématique  $\bar{m}_k^a = \mathbb{E}(\bar{X}_k^a)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{a,i} - \bar{m}_k^a \right| &\leq \sqrt{N} \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{a,i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{i,a} \right| + \sqrt{N} \mathbb{E} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_k^{i,a} - \bar{m}_k^a \right| \\ &\leq \sqrt{N} \mathbb{E} |X_k^{a,i} - \bar{X}_k^{i,a}| + \sqrt{N} \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{X}_k^{i,a} - \bar{m}_k^a| \right) < \infty \end{aligned}$$

en utilisant la proposition 6.8.1 pour le premier terme et l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund pour le second terme, et en supposant que l'hypothèse B soit satisfaite et que la distribution initiale  $\mu_0(dx_0)$  admet les moments finis d'ordre  $p \geq 1$ . Alors, la moyenne empirique des éléments EnKF converge vers la moyenne conditionnelle du filtre de Kalman avec la vitesse  $1/\sqrt{N}$ .

### 7.3 Filtre de Kalman d'ensemble pondéré (WEnKF)

Nous avons montré que

- Pour le système linéaire gaussien, la moyenne empirique des éléments EnKF converge vers la moyenne conditionnelle du filtre de Kalman.
- Pour le système non linéaire gaussien, la distribution empirique des éléments EnKF ne converge pas vers la distribution du filtre bayésien optimal. Cela peut être vu comme un résultat négatif du filtre de Kalman d'ensemble.

L'idée naturelle est qu'il est nécessaire de modifier le filtre de Kalman d'ensemble pour que sa distribution empirique des éléments converge vers la distribution du filtre bayésien optimal. Papadakis [31] a proposé en 2007 une version modifiée de l'EnKF pour réaliser cette idée, qui s'appelle le filtre de Kalman d'ensemble pondéré (Weighted Ensemble Kalman Filter-WEnKF).

Le WEnKF reprend le principe d'échantillonnage du filtre particulière : dans l'étape de prédiction, si les éléments d'ensemble explorent selon une loi de propagation  $q(x_k | x_{k-1}^i, y_k)$ , alors dans l'étape

de correction, chaque élément doit être pondéré avec un poids défini itérativement par :

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i) p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{q(x_k^i|x_{k-1}^i, y_k)} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1 .$$

Les éléments EnKF sont propagés selon les deux équations (5.3) et (5.5) que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} X_k^{a,i} &= f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i + K_k(P_k^N) [y_k - H_k (f_k(X_{k-1}^{a,i}) + W_k^i) + V_k^i] \\ &= [I - K_k(P_k^N) H_k] f_k(X_{k-1}^{a,i}) + K_k(P_k^N) y_k + K_k(P_k^N) V_k^i + [I - K_k(P_k^N) H_k] W_k^i \\ &= \mu_k^i + \gamma_k^i , \end{aligned}$$

où

$$\mu_k^i = [I - K_k(P_k^N) H_k] f_k(X_{k-1}^{a,i}) + K_k(P_k^N) y_k , \quad (7.5)$$

et

$$\gamma_k^i = K_k(P_k^N) V_k^i + [I - K_k(P_k^N) H_k] W_k^i . \quad (7.6)$$

$\gamma_k^i$  est une variable aléatoire gaussienne centrée, de matrice de covariance

$$P_{\gamma_k} = K_k(P_k^N) R_k [K_k(P_k^N)]^* + [I - K_k(P_k^N) H_k] Q_k [I - K_k(P_k^N) H_k]^* . \quad (7.7)$$

Autrement dit, les éléments EnKF sont propagés selon une loi gaussienne de moyenne  $\mu_k^i$  et de covariance  $P_{\gamma_k}$ . D'après le principe d'échantillonnage, chaque élément EnKF doit être affecté un poids défini par

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i \frac{p(y_k|X_k^{a,i}) p(X_k^{a,i}|x_{k-1}^i)}{\mathcal{N}(X_k^{a,i} - \mu_k^i; 0, P_{\gamma_k})} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1 . \quad (7.8)$$

Parce que les éléments sont à présent pondérés, la moyenne et la covariance empirique des éléments pour le pas de temps suivant sont modifiées

$$m_{k+1}^N = \sum_{i=1}^N \omega_k^i X_{k+1}^{i,f} \quad \text{et} \quad P_{k+1}^N = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_k^i (X_{k+1}^{i,f} - m_{k+1}^N) (X_{k+1}^{i,f} - m_{k+1}^N)^*}{1 - \sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2} \quad (7.9)$$

### Convergence du filtre WEnKF

En principe, le filtre WEnKF converge vers le filtre bayésien optimal selon le principe d'échantillonnage d'importance. Pourtant, il y a une remarque suivante de notre part : d'après les équations (7.5) et (7.6), la moyenne  $\mu_k^i$  et la matrice de covariance  $P_{\gamma_k}$  dépendent de la covariance empirique  $P_k^N$  des

éléments prédits  $X_k^{f,i}$ , qui est **aléatoire**. C'est-à-dire que, la loi de propagation des éléments EnKF n'est pas vraiment gaussienne de moyenne  $\mu_k^i$  et de covariance  $P_{\gamma_k}$  indiquées.

Pourtant, grâce aux résultats obtenus sur la convergence de l'EnKF, quand  $N$  tend vers l'infini, les éléments EnKF sont contigus aux éléments indépendants et la covariance empirique  $P_k^N$  converge vers la covariance déterministe  $\bar{P}_k$ . Ainsi, intuitivement, les éléments  $X_k^{a,i}$  sont les éléments i.i.d de loi gaussienne à l'asymptotique, on peut donc affecter les poids aux éléments par les formulations indiquées et l'estimateur peut être calculé par le principe d'échantillonnage.

La convergence du filtre de Kalman d'ensemble pondéré n'est pas encore justifiée et nécessite encore une démonstration.

## 7.4 Comparaison des distributions a posteriori dans le cas où la distribution a priori est un mélange de lois gaussiennes

Dans cette section, nous comparons les distributions a posteriori de la limite du filtre de Kalman d'ensemble et du filtre bayésien optimal, dans le cas où la distribution a priori est un mélange de lois gaussiennes. Le modèle est considéré à un pas de temps, l'état initial  $X_0$  prend un nombre fini de valeurs et sa distribution est un mélange fini de masses de Dirac. Cette discussion servira notamment à comparer la distribution des particules du filtre de Kalman d'ensemble à la limite et du filtre particulaire à un pas de temps, en fixant les valeurs des particules de l'instant précédent.

Considérons le modèle à un pas de temps suivant :

$$X_1 = f(X_0) + W_1 \quad \text{et} \quad y_1 = H X_1 + V_1 ,$$

où les bruits additifs  $W_1$  et  $V_1$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de matrices de covariances  $Q$  et  $R$  respectivement ( $R$  étant inversible), et où l'état initial  $X_0$  peut prendre un nombre fini de valeurs, i.e. sa distribution

$$\mu_0 = \sum_{i \in I} p_0^i \delta_{x_0^i} \quad \text{avec des poids positifs, et} \quad \sum_{i \in I} p_0^i = 1 ,$$

est un mélange fini de masses de Dirac.

### 7.4.1 Distributions théoriques

#### Distribution a priori

La distribution a priori, i.e. la distribution de probabilité du premier état  $X_1$ , est un mélange fini de lois gaussiennes, un cas particulier de distribution multimodale, avec des poids  $p_1^i = p_0^i$ , des moyennes  $x_1^i = f(x_0^i)$  transportées par l'application  $f$ , et des matrices de covariances égales à  $Q$ , i.e.

$$\mu_1^f = \sum_{i \in I} p_1^i \Gamma(\cdot, x_1^i, Q) ,$$

où on note  $\Gamma(\cdot, m, \Sigma)$  la distribution gaussienne de moyenne  $m$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ . En effet, par définition

$$\begin{aligned} \mu_1^f(\phi) &= \mathbb{E}[\phi(X_1)] = \mathbb{E}[\phi(f(X_0) + W_1)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(f(x) + w) \mu_0(dx) \Gamma(dw, 0, Q) \\ &= \sum_{i \in I} p_0^i \int_{\mathbb{R}^m} \phi(f(x_0^i) + w) \Gamma(dw, 0, Q) \\ &= \sum_{i \in I} p_0^i \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \Gamma(dx, f(x_0^i), Q). \end{aligned}$$

La moyenne a priori  $m_1^f$ , i.e. la moyenne de la distribution a priori  $\mu_1^f$ , est définie par

$$m_1^f = \int_{\mathbb{R}^m} x \mu_1^f(dx) = \sum_{i \in I} p_1^i \int_{\mathbb{R}^m} x \Gamma(dx, x_1^i, Q) = \sum_{i \in I} p_1^i x_1^i,$$

et la matrice de covariance a priori  $P_1^f$ , i.e. la matrice de covariance de la distribution a priori  $\mu_1^f$ , est définie par

$$P_1^f = \int_{\mathbb{R}^m} (x - m_1^f)(x - m_1^f)^* \mu_1^f(dx) = \sum_{i \in I} p_1^i \int_{\mathbb{R}^m} (x - m_1^f)(x - m_1^f)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q),$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^m} (x - m_1^f)(x - m_1^f)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (x - x_1^i)(x - x_1^i)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q) + \int_{\mathbb{R}^m} (x_1^i - m_1^f)(x_1^i - m_1^f)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} (x - x_1^i)(x_1^i - m_1^f)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q) + \int_{\mathbb{R}^m} (x_1^i - m_1^f)(x - x_1^i)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q) \\ &= Q + (x_1^i - m_1^f)(x_1^i - m_1^f)^*, \end{aligned}$$

comme les produits croisés

$$\int_{\mathbb{R}^m} (x - x_1^i)(x_1^i - m_1^f)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^m} (x_1^i - m_1^f)(x - x_1^i)^* \Gamma(dx, x_1^i, Q),$$

sont nuls, alors

$$P_1^f = \sum_{i \in I} p_1^i [Q + (x_1^i - m_1^f)(x_1^i - m_1^f)^*] = Q + \sum_{i \in I} p_1^i (x_1^i - m_1^f)(x_1^i - m_1^f)^*.$$

**Distribution a posteriori : limite de l'EnKF quand le nombre particules tend vers l'infini**

Par définition

$$\bar{\mu}_1^a(\phi) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x + K(\bar{P}_1)(y_1 - Hx - v)) \bar{\mu}_1^f(dx) \Gamma(dv, 0, R),$$

où  $\bar{P}_1 = P_1^f$  and  $\bar{\mu}_1^f = \mu_1^f$  comme défini précédemment. De manière équivalente, en utilisant des fonctions caractéristiques

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i u^* x\} \bar{\mu}_1^a(dx) &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i u^* (x + K(\bar{P}_1)(y_1 - Hx - v))\} \bar{\mu}_1^f(dx) \Gamma(dv, 0, R) \\ &= \exp\{i u^* K(\bar{P}_1) y_1\} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x\} \bar{\mu}_1^f(dx) \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-i u^* K(\bar{P}_1) v\} \Gamma(dv, 0, R) \\ &= \exp\{i u^* K(\bar{P}_1) y_1\} \exp\{-\frac{1}{2} u^* K(\bar{P}_1) R K^*(\bar{P}_1) u\} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x\} \bar{\mu}_1^f(dx), \end{aligned}$$

et comme  $\bar{\mu}_1^f = \mu_1^f$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x\} \bar{\mu}_1^f(dx) = \sum_{i \in I} p_1^i \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x\} \Gamma(dx, x_1^i, Q),$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x\} \Gamma(dx, x_1^i, Q) \\ &= \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x_1^i - \frac{1}{2} u^* (I - K(\bar{P}_1) H) Q (I - K(\bar{P}_1) H)^* u\} \\ &= \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x_1^i\} \exp\{-\frac{1}{2} u^* (I - K(\bar{P}_1) H) Q (I - K(\bar{P}_1) H)^* u\}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i u^* x\} \bar{\mu}_1^a(dx) &= \exp\{i u^* K(\bar{P}_1) y_1\} \exp\{-\frac{1}{2} u^* K(\bar{P}_1) R K^*(\bar{P}_1) u\} \\ &\quad \exp\{-\frac{1}{2} u^* (I - K(\bar{P}_1) H) Q (I - K(\bar{P}_1) H)^* u\} \\ &\quad \sum_{i \in I} p_1^i \exp\{i u^* (I - K(\bar{P}_1) H) x_1^i\}. \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\bar{\mu}_1^a = \sum_{i \in I} p_1^i \Gamma(\cdot, x_1^{i,a}, P),$$

avec  $x_1^{i,a} = x_1^i + K(\bar{P}_1)(y_1 - H x_1^i)$  et

$$\begin{aligned} P &= K(\bar{P}_1) R K^*(\bar{P}_1) + (I - K(\bar{P}_1) H) Q (I - K(\bar{P}_1) H)^* \\ &= K(\bar{P}_1) R K^*(\bar{P}_1) + (I - K(\bar{P}_1) H) \bar{P}_1 (I - K(\bar{P}_1) H)^* \\ &\quad - (I - K(\bar{P}_1) H) (\bar{P}_1 - Q) (I - K(\bar{P}_1) H)^*, \end{aligned}$$

et en remarquant que

$$K(\bar{P}_1) R K^*(\bar{P}_1) + (I - K(\bar{P}_1) H) \bar{P}_1 (I - K(\bar{P}_1) H)^* = (I - K(\bar{P}_1) H) \bar{P}_1,$$

et

$$(I - K(\bar{P}_1) H) (\bar{P}_1 - Q) (I - K(\bar{P}_1) H)^* = \sum_{i \in I} p_1^i u_1^i (u_1^i)^*,$$

où  $u_1^i = (I - K(\bar{P}_1) H) (x_1^i - m_1^f)$ , ainsi

$$P = (I - K(\bar{P}_1) H) \bar{P}_1 - \sum_{i \in I} p_1^i u_1^i (u_1^i)^*.$$

### Distribution a posteriori : filtre Bayésien

Par définition

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \mu_1(dx) = \frac{\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) q(y_1 - H x, R) \mu_1^f(dx)}{\int_{\mathbb{R}^m} q(y_1 - H x, R) \mu_1^f(dx)}.$$

On remarque que

$$q(y - H x, R) \mu_1^f(dx) dy = \sum_{i \in I} p_1^i q(y - H x, R) \Gamma(dx, x_1^i, Q) dy,$$

et

$$q(y - H x, R) \Gamma(dx, x_1^i, Q) dy,$$

représente la distribution de probabilité jointe de  $X$  et  $Y$  dans le modèle linéaire gaussien

$$Y = H X + V$$

où  $X$  et  $V$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de moyenne  $x_1^i$  et zéro, et de matrices de covariance  $Q$  et  $R$ , respectivement. De manière équivalente, on peut exprimer cette

densité de probabilité jointe comme le produit de la densité de probabilité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$ , et la densité de probabilité de  $Y$ , i.e.

$$q(y - Hx, R) \Gamma(dx, x_1^i, Q) dy = \Gamma(dx, \widehat{x}_1^i(y), P_1) q(y - Hx_1^i, HQH^* + R) dy$$

où  $\widehat{x}_1^i(y) = x_1^i + K(Q)(y - Hx_1^i)$  et  $P_1 = (I - K(Q)H)Q$ . En conséquence

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) q(y_1 - Hx, R) \mu_1^f(dx) = \sum_{i \in I} p_1^i q(y_1 - Hx_1^i, HQH^* + R) \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \Gamma(dx, \widehat{x}_1^i, P_1),$$

où  $\widehat{x}_1^i = \widehat{x}_1^i(y_1) = x_1^i + K(Q)(y_1 - Hx_1^i)$ , et en particulier pour  $\phi \equiv 1$

$$\int_{\mathbb{R}^m} q(y_1 - Hx) \mu_1^f(dx) = \sum_{i \in I} p_1^i q(y_1 - Hx_1^i, HQH^* + R),$$

ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \mu_1(dx) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) q(y_1 - Hx, R) \mu_1^f(dx)}{\int_{\mathbb{R}^m} q(y_1 - Hx, R) \mu_1^f(dx)} \\ &= \frac{\sum_{i \in I} p_1^i q(y_1 - Hx_1^i, HQH^* + R) \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \Gamma(dx, \widehat{x}_1^i, P_1)}{\sum_{i \in I} p_1^i q(y_1 - Hx_1^i, HQH^* + R)} \\ &= \sum_{i \in I} \widehat{p}_1^i \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x) \Gamma(dx, \widehat{x}_1^i, P_1), \end{aligned}$$

ou de façon équivalente

$$\mu_1 = \sum_{i \in I} \widehat{p}_1^i \Gamma(\cdot, \widehat{x}_1^i, P_1),$$

où les poids a posteriori sont définis par

$$\widehat{p}_1^i = \frac{p_1^i q(y_1 - Hx_1^i, HQH^* + R)}{\sum_{i \in I} p_1^i q(y_1 - Hx_1^i, HQH^* + R)}.$$

### Filtre de Kalman d'ensemble pondéré

Par construction

$$\mu_1^w(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \frac{\sum_{i \in I} p_0^i q(y_1 - hx, R) \Gamma(x, x_0^i, Q)}{\Gamma(x, m_1^a(x_k^i), P)} \mu_1^a(dx)$$

où  $m_1^a(x_k^i) = (1 - K(\bar{P}_1)H)x_k^i + K(\bar{P}_1)y_1$  car

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \mu_1(dx) \propto \phi(x) \sum_{i \in I} p_0^i q(y_1 - hx, R) \Gamma(dx, x_0^i, Q)$$

$$\mu_1^w(\phi) \propto \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \frac{\mu_1(x)}{\Gamma((1 - K(\bar{P}_1)H)v - K(\bar{P}_1)w, 0, P)} \mu_1^a(dx) \Gamma(dv, 0, R) \Gamma(dw, 0, Q).$$

Ici,  $\Gamma(\cdot, m_1(\cdot), P)$  représente l'approximation gaussienne de  $\mu_1^a$  et  $\mu_1^w$  peut donc être considérée comme une approximation de  $\mu_1$ .

#### 7.4.2 Distributions des particules des filtres à un instant fixé

Considérons le modèle non linéaire gaussien suivant

$$X_k = f(X_{k-1}) + W_k \quad \text{et} \quad Y_k = H X_k + V_k$$

où les bruits  $W_k$  et  $V_k$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariances  $Q_k$  et  $R_k$  respectivement ( $R_k$  étant inversible), et où la distribution de l'état initial  $X_0$  est approchée par un mélange de masses de Dirac

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^N p_0^i \delta_{x_0^i} \quad \text{avec} \quad p_0^i = 1/N \quad \text{pour tout } i.$$

Considérons l'instant  $k \geq 1$ . En fixant les valeurs des particules à l'instant  $k-1$ ,  $X_{k-1}^{a,i} = x_{k-1}^{a,i}$ , d'après la section précédente, nous avons :

##### Distribution des particules de la limite du filtre de Kalman d'ensemble

*Distribution a priori* : la distribution a priori des particules à l'instant  $k$ , selon le filtre de Kalman d'ensemble à la limite, est un mélange fini de lois gaussiennes, avec des poids identiques  $p_k^i = 1/N$ , des moyennes  $x_k^{f,i} = f(x_{k-1}^{a,i})$  et des matrices de covariances  $Q_k$ .

$$\bar{\mu}_k^{N,f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Gamma(\cdot, x_k^{f,i}, Q_k).$$

*Distribution a posteriori* : la distribution a posteriori des particules de la limite du filtre de Kalman d'ensemble est un mélange de loi gaussiennes

$$\bar{\mu}_k^{N,a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Gamma(\cdot, x_k^{a,i}, P_k),$$

avec  $x_k^{a,i} = x_k^{f,i} + K(\bar{P}_k)(Y_k - H x_k^{f,i})$  et  $P_k = K(\bar{P}_k)R_k K^*(\bar{P}_k) + (I - K(\bar{P}_k)H)Q_k(I - K(\bar{P}_k)H)^*$ , où  $\bar{P}_k$  est la matrice de covariance à l'instant  $k$  de la distribution a priori  $\bar{\mu}_k^f$  du filtre de Kalman d'ensemble à la limite.

##### Distribution des particules du filtre bootstrap

*Distribution a priori* : la distribution a priori des particules à l'instant  $k$ , selon le filtre bootstrap, est un mélange fini de lois gaussiennes, avec des poids prenant des valeurs différentes  $p_k^i = \hat{p}_{k-1}^i$ , des moyennes  $x_k^{f,i} = f(x_{k-1}^{a,i})$  et des matrices de covariances  $Q_k$ .

$$\mu_k^{N,f} = \sum_{i=1}^N p_k^i \Gamma(\cdot, x_k^{f,i}, Q_k).$$

*Distribution a posteriori* : la distribution a posteriori des particules du filtre bootstrap est un mélange de lois gaussiennes

$$\mu_k^{N,a} = \sum_{i=1}^N \hat{p}_k^i \Gamma(\cdot, x_k^{f,i}, Q_k),$$

où les poids a posteriori sont définis par

$$\hat{p}_k^i = \frac{p_k^i q(y_k - H x_k^{f,i}, R_k)}{\sum_{i=1}^N p_k^i q(y_k - H x_k^{f,i}, R_k)}$$

### Distribution des particules du filtre SIR

*Distribution a priori* : la distribution a priori des particules à l'instant  $k$ , selon le filtre SIR, est un mélange fini de lois gaussiennes, avec des poids prenant des valeurs différentes  $p_k^i = \hat{p}_{k-1}^i$

$$\mu_k^{N,f} = \sum_{i=1}^N p_k^i \Gamma(\cdot, x_k^{f,i}, P_k).$$

où  $x_k^{f,i} = f(x_{k-1}^{a,i}) + K(Q_k)(Y_k - H f(x_{k-1}^{a,i}))$  et  $P_k = K(Q_k) R_k K^*(Q_k) + (I - K(Q_k) H) Q_k (I - Q_k) H^*$ .

*Distribution a posteriori* : la distribution a posteriori des particules du filtre SIR est un mélange de lois gaussiennes

$$\mu_k^{N,a} = \sum_{i=1}^N \hat{p}_k^i \Gamma(\cdot, x_k^{f,i}, P_k),$$

où les poids a posteriori sont définis par

$$\hat{p}_k^i = \frac{p_k^i q(y_k - H x_k^{f,i}, H Q_k H^* + R_k)}{\sum_{i=1}^N p_k^i q(y_k - H x_k^{f,i}, H Q_k H^* + R_k)}$$

### Distribution des particules du filtre WEnKF

*Distribution a priori* : la distribution a priori des particules à l'instant  $k$ , selon le filtre WEnKF, est un mélange fini de lois gaussiennes, avec des poids prenant de valeurs différentes  $p_k^i = \hat{p}_{k-1}^i$

$$\mu_k^{N,f} = \sum_{i=1}^N p_k^i \Gamma(\cdot, x_k^{f,i}, P_k).$$

où  $x_k^{f,i} = f(x_{k-1}^{a,i}) + K(\bar{P}_k)(Y_k - H f(x_{k-1}^{a,i}))$  et  $P_k = K(\bar{P}_k) R_k K^*(\bar{P}_k) + (I - K(\bar{P}_k) H) \bar{P}_k (I - \bar{P}_k) H^*$ .

*Distribution a posteriori* : la distribution a posteriori des particules du filtre WEnKF est un mélange de lois gaussiennes

$$\mu_k^{N,a} = \sum_{i=1}^N \hat{p}_k^i \Gamma(\cdot, x_k^{f,i}, P_k),$$

où les poids a posteriori sont définis par

$$\hat{p}_k^i = \frac{p_k^i \omega_k^i}{\sum_{i=1}^N p_k^i \omega_k^i} \quad \text{avec} \quad \omega_k^i = \frac{p(y_k | x_k^{a,i}) p(x_k^{a,i} | x_{k-1}^i)}{\Gamma(x_k^{a,i}, x_k^{f,i}, P_k)}.$$

# Conclusions

Nous avons montré théoriquement que, quand le nombre d'éléments  $N$  tend vers l'infini, les éléments du filtre de Kalman d'ensemble, qui sont initialement dépendants, convergent vers les éléments d'ensemble indépendants et identiquement distribués selon une loi qui diffère de la loi a posteriori du filtre bayésien optimal dans le cas général. Dans le cas du modèle linéaire gaussien, cette loi asymptotique est gaussienne et n'est autre que la loi a posteriori du filtre de Kalman. Nous démontrons la convergence presque sûre et dans  $\mathbb{L}^p$  de la mesure empirique des particules du filtre de Kalman d'ensemble, avec la vitesse de convergence usuelle  $1/\sqrt{N}$ .

Ce résultat peut être vu comme un inconvénient du filtre de Kalman d'ensemble par rapport au filtre particulaire, dans le cas où on utilise ses éléments pour estimer la distribution de probabilité de l'état. Pourtant, dans le cas où on utilise peu de particules, comme le filtre particulaire ne donne pas une bonne estimation quand les particules ne sont pas suffisantes pour bien représenter la distribution a posteriori bayésienne, l'EnKF peut fournir un meilleur estimateur. Cela peut expliquer la performance de l'EnKF obtenue par expérimentation.

Un papier de Jan Mandel et al. [28] paru en janvier 2009 démontre théoriquement la convergence du filtre de Kalman d'ensemble vers le filtre de Kalman dans le cas du modèle linéaire gaussien. L'idée de la preuve est relativement similaire à la notre : le gain de Kalman empirique de l'EnKF est borné par une constante qui ne dépend pas du nombre d'éléments  $N$ . Les éléments dépendants de l'EnKF sont ainsi échangeables avec les éléments indépendants et identiquement distribués selon la distribution a posteriori du filtre de Kalman, et la contiguïté des éléments est montrée dans  $\mathbb{L}^p$ . Et la démonstration dans nos travaux est plus générale au point où nous avons montré la convergence de l'EnKF pour la classe des modèles non linéaires gaussien dont la fonction du modèle est continue et localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini.

Nous présentons dans la partie suivante quelques résultats de simulations afin de discuter la performance du filtre particulaire et du filtre de Kalman d'ensemble en pratique.



**Troisième partie**

**Simulations**



## Chapitre 8

# Introduction

Dans cette partie nous proposons de valider par simulation des méthodes d'assimilation de données séquentielles dans des cas test.

### 8.1 Objectifs

Les objectifs sont les suivants :

1. **Comparer les performances des filtres dans le cadre où l'on utilise "peu de particules"**. Dans les applications, le coût des calculs numériques ne permet pas d'utiliser un grand nombre de particules pour les méthodes d'assimilation\*. Notre objectif est donc de comparer la performance des filtres quand on dispose de peu de particules. Ces résultats de simulations vont nous permettre de voir quelle qualité d'estimation on atteint en pratique.
2. **Comparer les performances des filtres dans le cadre asymptotique**. L'étude théorique sur les propriétés asymptotiques de l'EnKF montre que : dans le cas du modèle linéaire gaussien, l'EnKF et le filtre particulaire convergent avec la même vitesse vers le filtre bayésien optimal quand le nombre  $N$  des particules tend vers l'infini. Dans le cas général (modèle non linéaire gaussien), l'EnKF converge vers une limite qui diffère du filtre bayésien optimal. Par des simulations, nous voulons illustrer cette différence en comparant la performance des filtres, quand on utilise un nombre suffisamment grand de particules.

### 8.2 Les modèles de test

Nous choisissons deux modèles de test : un modèle linéaire gaussien simple et le modèle de Lorenz qui appartient à une classe de modèles non linéaires chaotiques.

---

\*Par exemple pour les modèles physiques de l'océan, la dimension du vecteur d'état peut être de l'ordre de  $m = 10^5$ .

### 8.2.1 Modèle linéaire gaussien simple

Nous proposons le modèle suivant

$$\begin{cases} X_0 \sim \mathcal{N}(0, Q_0) \\ X_t = X_{t-1} + W_t \end{cases}$$

où  $W_t$  représente l'erreur du modèle. L'état  $X_t$  est défini dans l'espace réel  $\mathbb{R}$  et on va l'estimer à partir des observations  $Y_{1:t}$ , reliées à l'état par l'équation

$$Y_t = X_t + V_t,$$

où  $V_t$  représente l'erreur d'observation. Nous supposons,

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, Q) \quad \text{et} \quad V_t \sim \mathcal{N}(0, R)$$

où les variances  $Q_0$ ,  $Q$  et  $R$  sont connues, et la matrice  $R$  est inversible.

### 8.2.2 Modèle de Lorenz

L'oscillateur (8.1) introduit par Lorenz en 1963 [27] est un modèle numérique qui représente un écoulement de fluide particulier. La figure 8.1 donne une visualisation a priori de la trajectoire du modèle de Lorenz. Le système de Lorenz s'écrit en temps continu comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_t = \sigma(y_t - x_t) + \dot{w}_t^x \\ \dot{y}_t = \rho x_t - y_t - x_t z_t + \dot{w}_t^y \\ \dot{z}_t = x_t y_t - \beta z_t + \dot{w}_t^z \end{cases} \quad (8.1)$$

où  $\dot{x}_t$  désigne la dérivée de  $x$  par rapport au temps  $t$ .  $[x_t, y_t, z_t] \in \mathbb{R}^3$  représente le vecteur d'état à l'instant  $t$ . On choisit habituellement pour les coefficients :  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $\beta = 8/3$ . Les bruits  $\{w_t = [w_t^x, w_t^y, w_t^z]\}_t$  sont i.i.d. et tels que

$$\text{pour tout } a, b, \quad \int_a^b \dot{w}_t dt = (b - a)W$$

avec  $W \in \mathbb{R}^3$  un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance  $Q$ .

**Discrétisation du modèle de Lorenz :** Pour appliquer les filtres, il est nécessaire de discrétiser le système (8.1). Pour cela différents schémas numériques peuvent être utilisés. Ici, nous avons choisi un schéma d'Euler pour sa simplicité mais aussi parce que ce schéma se parallélise facilement ce qui permet de réduire les coûts de calcul. Un point délicat dans la discrétisation est la prise en compte des bruits aléatoires  $\{\dot{w}_t\}$ .

Nous choisissons de résoudre l'équation de Lorenz ordinaire (i.e. sans bruit) entre deux temps d'observation successifs  $t_k = k\Delta t$  et  $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$  avec un pas de temps  $\Delta\tau \ll \Delta t$  et d'ajouter, à chaque temps  $t_k$ , un bruit gaussien à la solution numérique. Ce bruit gaussien est centré et de

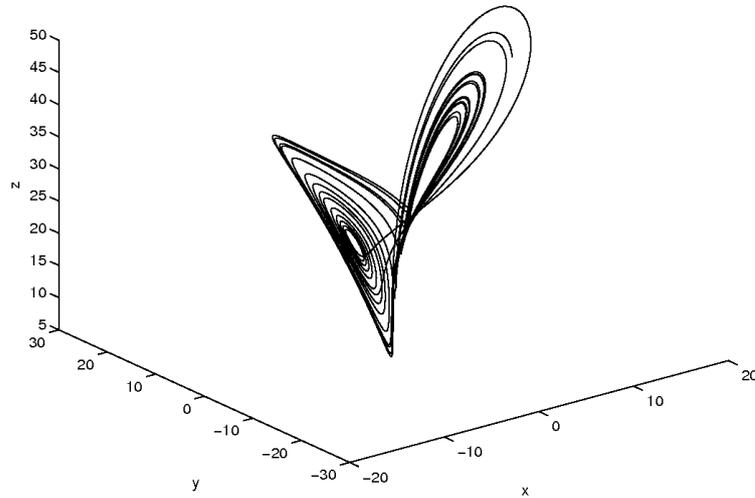


FIG. 8.1: Une trajectoire du modèle de Lorenz résolue par le schéma d'Euler dans l'intervalle de temps  $[0; 20]$ , avec le pas de temps 0.005.

covariance  $Q(\Delta t)^2$ .

Le modèle de Lorenz constitue un cas test intéressant car c'est un oscillateur chaotique et fortement non linéaire. Il est souvent utilisé dans la littérature pour tester les méthodes d'assimilation de données. Pour un historique complet de l'utilisation du modèle de Lorenz en assimilation de données séquentielles, on peut se reporter à [16]. Les articles les plus marquants sont [30] qui compare les propriétés du filtre de Kalman étendu et de la méthode variationnelle, [16] qui reprend le même exemple pour évaluer les performances du filtre de Kalman d'ensemble (EnKF), du lisseur de Kalman d'ensemble et d'une méthode d'optimisation, [33] qui compare le filtre bootstrap, le filtre EnKF, le filtre EnKF du second ordre et le filtre *singular evolutive interpolated Kalman* (SEIK) pour reconstruire la trajectoire d'état du système de Lorenz dans  $\mathbb{R}^3$  quand on ne dispose que d'une observation bruitée dans  $\mathbb{R}$ , et dans [40], nous avons comparé le filtre de Kalman d'ensemble, le filtre bootstrap et le filtre SIR avec les différents scénarios pour le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation.

Ici, nous proposons de comparer le filtre EnKF avec le filtre particulière (algorithme SIR) et le filtre de Kalman d'ensemble pondéré (WEnKF) avec deux scénarios : quand toutes les trois composantes de l'état sont observées et quand une seule composante  $x$  est observée. Nous considérons aussi dans des simulations les différents scénarios pour le rapport entre l'erreur du modèle et l'erreur d'observation.

### 8.3 Les critères de comparaison

#### Comparer les estimateurs de la moyenne et (ou) de la variance de $(X_k|Y_{1:k})$

Dans le cas du modèle linéaire, on peut calculer exactement la moyenne et la covariance de  $(X_k|Y_{1:k})$ , en utilisant le filtre de Kalman, et ce sont les solutions optimales au sens de l'erreur en moyenne quadratique. L'EnKF et le filtre particulaire approchent cette moyenne et cette covariance par la moyenne et la variance empirique obtenues à partir des particules. Nous allons comparer ces estimateurs empiriques aux estimateurs du filtre de Kalman.

Pour le modèle de Lorenz, on est dans le cadre non linéaire, la loi a posteriori n'est plus gaussienne, les deux premiers moments ne suffisent pas à caractériser la loi a posteriori. Nous considérons dans ce cas seulement l'estimation de la moyenne. Comme dans le cas non linéaire, on ne peut pas évaluer exactement la valeur de la moyenne de  $(X_k|Y_{1:k})$ , les estimations empiriques de la moyenne à partir des particules vont ainsi être comparées à une solution de référence, qui est simulée et considérée comme une vraie trajectoire de l'état à estimer.

#### Comparer les distributions a posteriori des particules

Dans le cas du modèle linéaire, on sait que la loi a posteriori de  $(X_k|Y_{1:k})$  est gaussienne de moyenne et de variance fournies par le filtre de Kalman. Nous vérifions la normalité de la distribution des particules et puis nous la comparons avec la loi gaussienne de la solution du filtre de Kalman.

Dans le cas du modèle de Lorenz, nous comparons les distributions empiriques bivariées des particules à celles du filtre bootstrap à 20000 particules, qui sont considérées comme de bonnes approximations des marges de la loi a posteriori de  $(X_k|Y_{1:k})$ .

#### Comparer les erreurs en moyennes quadratiques des estimateurs

Les erreurs en moyenne quadratique des estimateurs vont être comparées entre elles. Pour le modèle de Lorenz, la borne de Cramer-Rao sera calculée. C'est une borne inférieure des erreurs en moyenne quadratique des estimateurs.

## Chapitre 9

# Modèle linéaire gaussien

### 9.1 Description des simulations

$$\begin{cases} X_0 \sim \mathcal{N}(0, Q_0) \\ X_k = X_{k-1} + W_k \\ Y_k = X_k + V \end{cases} \quad (9.1)$$

Nous considérons la solution du modèle linéaire gaussien (9.1) sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$  avec le pas de temps 0.04. La vraie trajectoire est supposée d'être déterministe et égale à 0 pour tout temps  $k = 1 : 25$ . L'observation est donc générée à chaque pas de temps, selon la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, R)$ . La condition initiale  $x_0$  est égale à 0.

Les covariances de l'état initial  $Q_0$ , de l'erreur du modèle  $Q$  et de l'erreur d'observation  $R$  prennent les valeurs reportées dans la table 9.1. Nous choisissons de considérer le problème avec les 3 scénarios différents :

- **Scénario A1** : on a une faible confiance dans le modèle dynamique.
- **Scénario A2** : on a une faible confiance dans les observations recueillies.
- **Scénario A3** : on a une faible confiance dans le modèle dynamique et aussi dans les observations.

On estime l'état  $X_k$  à partir des observations  $Y_{1:k}$  en utilisant le filtre de Kalman, le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulière (algorithme SIR).

Scénario	$Q_0$	$Q$	$R$
<b>A1</b>	I	25I	I
<b>A2</b>	I	I	25I
<b>A3</b>	I	25I	25I

TAB. 9.1: Les variances des erreurs du modèle linéaire gaussien selon les scénarios de simulation,  $I = 0.25$  ;  $Q_0$  : variance de l'état initial ;  $Q$  : variance de l'erreur du modèle ;  $R$  variance de l'erreur d'observation.

## 9.2 Résultat et interprétation

### 9.2.1 Comparaison des estimateurs de la moyenne et de la variance conditionnelles

Pour étudier la dispersion des estimateurs de la moyenne et de la variance, nous calculons 100 fois les estimateurs en répétant les algorithmes des filtres pour une observation fixée. Des boîtes à moustache sont utilisées pour représenter la dispersion des estimateurs. Les filtres EnKF et SIR sont évalués avec 50, 200 et 1000 éléments ou particules.

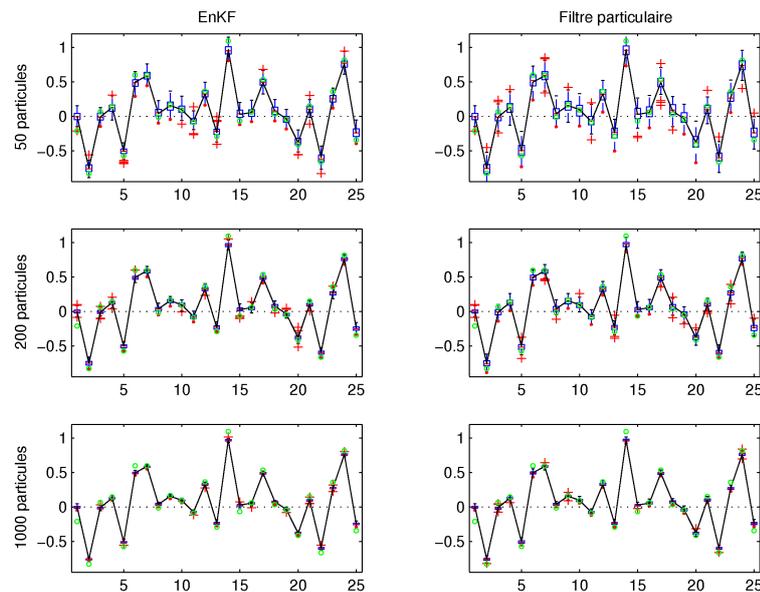


FIG. 9.1: Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 ( $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Dispersion des estimateurs de la moyenne conditionnelle pour l'EnKF et le filtre particulaire en fonction du temps ; - - - : solution de référence ; — : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ;  $\circ$  : observation.

Les figures 9.1, 9.2 et 9.3 représentent la dispersion des estimateurs de la moyenne conditionnelle de  $(X_k|Y_{1:k})$  pour 25 pas de temps et pour les 3 scénarios A1, A2 et A3. Nous constatons que les estimateurs des deux filtres, EnKF et filtre particulaire, sont centrés autour de la moyenne conditionnelle du filtre de Kalman dans les 3 scénarios. Les estimateurs peuvent être considérés comme non biaisés. La variance des estimateurs diminue quand on augmente le nombre de particules. Pourtant, les variances des estimateurs des deux filtres sont légèrement différentes, particulièrement dans le scénario A2 où le rapport de l'erreur d'observation sur l'erreur du modèle est fort, la variance de l'estimateur de l'EnKF est relativement plus faible que celle de l'estimateur SIR. Avec peu de particules (50 particules), l'estimateur EnKF possède une dispersion plus faible que celle du filtre particulaire dans les 3 scénarios.

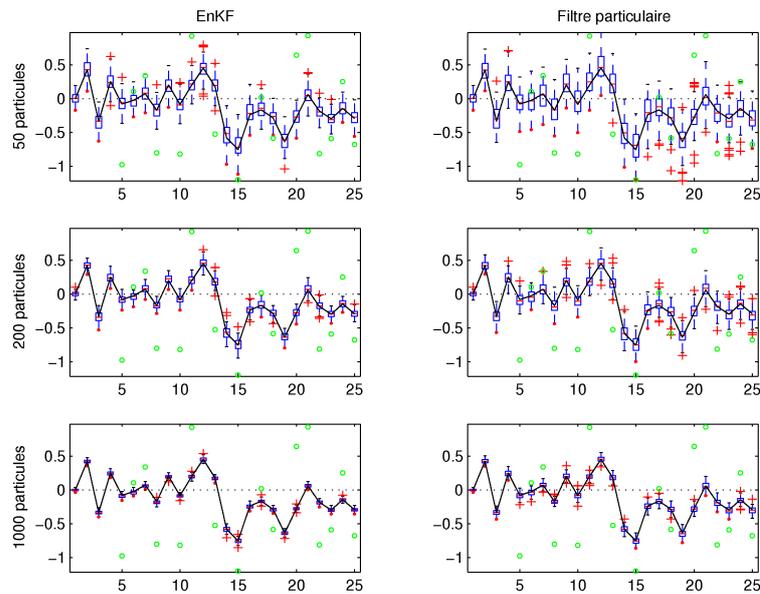


FIG. 9.2: Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 ( $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la moyenne conditionnelle pour l'EnKF et le filtre particulaire en fonction du temps ; - - - : solution de référence ; — : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ;  $\circ$  : observation.

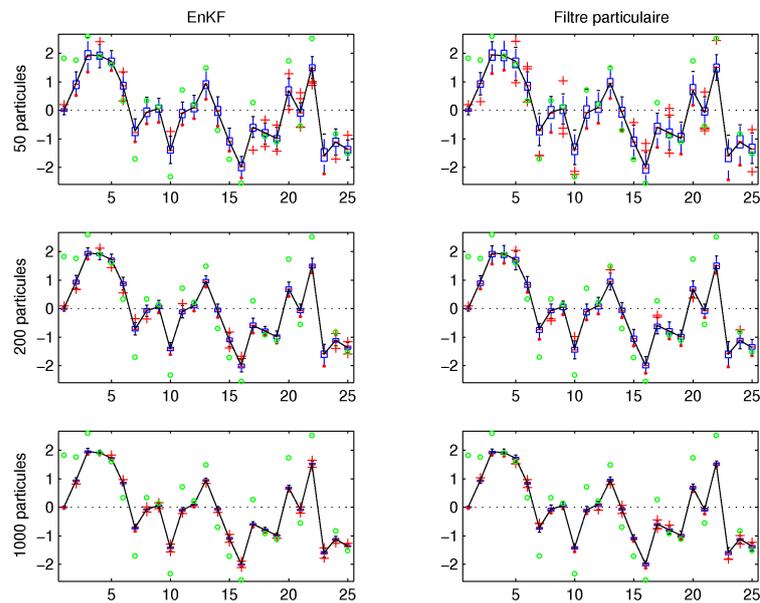


FIG. 9.3: Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 ( $Q=R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la moyenne conditionnelle pour l'EnKF et le filtre particulaire en fonction du temps ; - - - : solution de référence ; — : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ;  $\circ$  : observation.

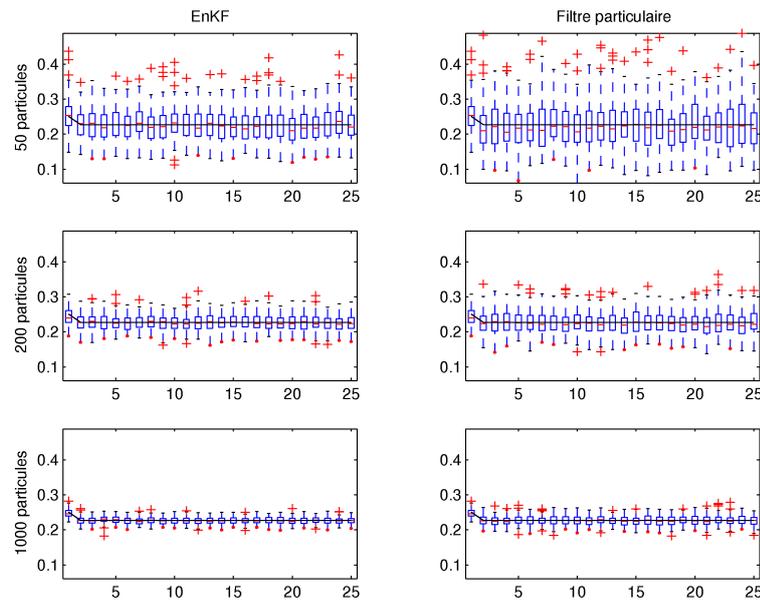


FIG. 9.4: Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 ( $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Dispersion des estimateurs de la variance conditionnelle pour l'EnKF (à gauche) et le filtre particulaire (à droite) en fonction du temps, avec 50, 200 et 1000 particules ; — : variance conditionnelle du filtre de Kalman.

Les figures 9.4, 9.5 et 9.6 représentent la dispersion des estimateurs de la variance conditionnelle de  $(X_k|Y_{1:k})$  pour 25 pas de temps et pour les 3 scénarios A1, A2 et A3. L'estimateur du filtre de Kalman est représenté par le trait plein en noir. Les figures du haut sont obtenues avec 50 particules pour chaque filtre, celles du milieu avec 200 particules et celles du bas avec 1000 particules.

Dans la plupart des cas, avec 1000 particules, les estimateurs de la variance sont relativement bien centrés autour de la variance conditionnelle du filtre de Kalman. Mais avec peu de particules, l'estimateur du filtre particulaire est légèrement plus biaisé que celui de l'EnKF. Et pour les 3 scénarios, la variance d'estimation de l'EnKF est toujours plus faible que celle du filtre particulaire.

Avec le modèle linéaire gaussien proposé, dans le cas où on utilise peu de particules, l'EnKF fournit alors des estimateurs de la moyenne et de la variance conditionnelle qui sont meilleurs que ceux du filtre particulaire, au sens de l'erreur par rapport à la moyenne et à la variance conditionnelles du filtre de Kalman. Avec plus de particules (ici 1000), ils ont des performances qui sont relativement semblables.

Dans le cas où le nombre de particules est faible, la performance de l'EnKF peut être expliquée comme suit : le filtre particulaire déplace et puis redistribue les particules selon la distribution pondérée pour approcher la distribution bayésienne. Dans l'étape de redistribution, seules

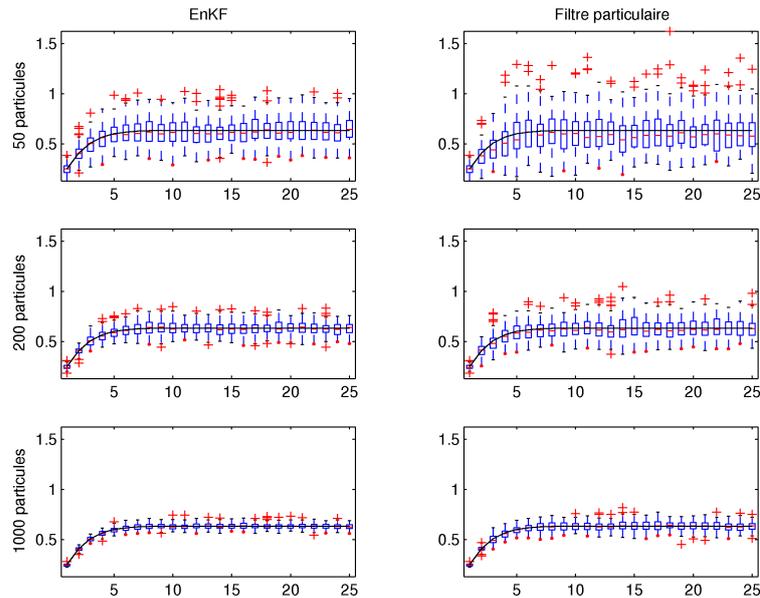


FIG. 9.5: Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 ( $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la variance conditionnelle pour l'EnKF (à gauche) et le filtre particulaire (à droite) en fonction du temps, avec 50, 200 et 1000 particules ; — : variance conditionnelle du filtre de Kalman.

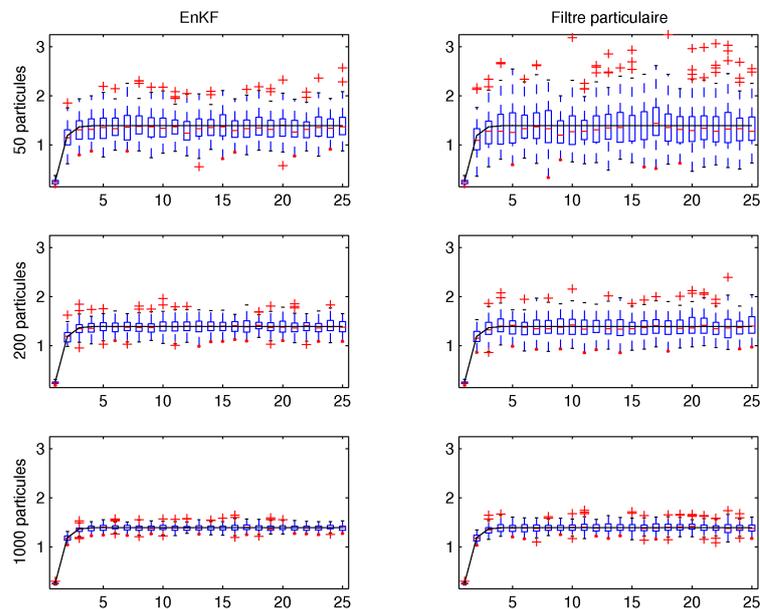


FIG. 9.6: Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 ( $Q=R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la variance conditionnelle pour l'EnKF (à gauche) et le filtre particulaire (à droite) en fonction du temps, avec 50, 200 et 1000 particules ; — : variance conditionnelle du filtre de Kalman.

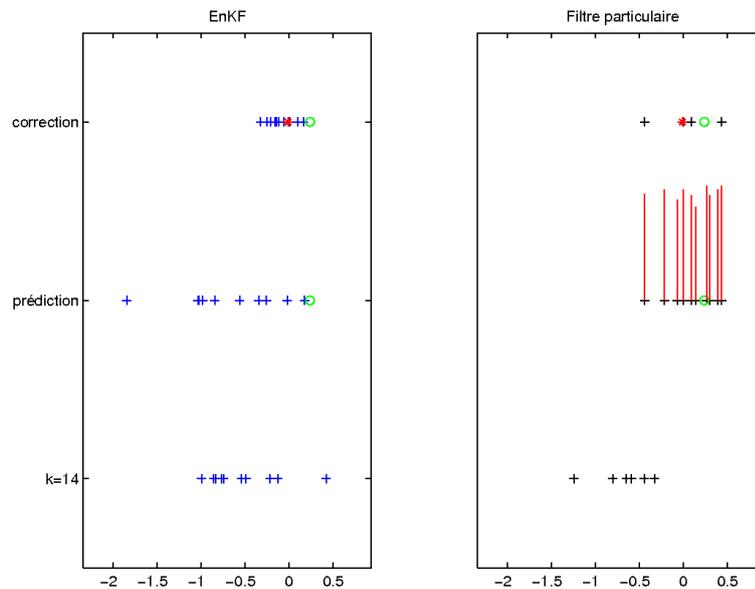


FIG. 9.7: Modèle linéaire gaussien - Évolution des particules des filtres EnKF et SIR, avec 10 particules, de l'instant  $k = 14$  à l'instant  $k = 15$ ; + : EnKF ; + : filtre particulaire ; o : observation ; \* : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ; — : poids des particules.

les particules dont le poids est important sont dupliquées, et les particules dont le poids est faible sont supprimées. Comme le nombre de particules est faible, les particules redistribuées ne sont pas suffisantes pour bien représenter la distribution. Alors que le filtre de Kalman d'ensemble déplace chaque particule vers l'observation, elles ne sont pas supprimées ou dupliquées, et prennent des valeurs différentes, elles représentent donc en général mieux la distribution a posteriori.

A titre d'exemple, nous avons simulé les deux filtres avec seulement 10 particules et nous représentons dans la figure 9.7 la distribution des particules EnKF et SIR à 3 étapes, à l'instant  $k = 14$ , à l'étape de prédiction et à l'étape de correction ( $k=15$ ). Le cercle vert représente l'observation et l'étoile rouge représente la moyenne conditionnelle du filtre de Kalman. On constate qu'à l'étape de prédiction, les particules explorent l'espace d'état selon l'équation du modèle pour l'EnKF et selon la fonction d'importance optimale pour le filtre particulaire. Les particules du filtre particulaire sont ensuite pondérées et dans la figure le poids de chaque particule est représenté par la droite rouge dont la hauteur proportionne au poids. Les poids des particules, dans ce cas, sont proches les uns des autres, ce phénomène peut être expliqué par l'utilisation de la densité d'importance optimale à l'étape de prédiction qui conduit une variation des poids minimisée. Pourtant, à l'étape de correction, seulement 5 particules sont gardées. En fait, le nombre de particules du filtre particulaire est toujours 10 mais avec seulement 5 valeurs différentes. Cette "mauvaise" redistribution conduit une mauvaise estimation de la moyenne conditionnelle. Alors que pour l'EnKF, les particules sont toutes déplacées vers l'observation, et la moyenne empirique des particules approche bien la moyenne conditionnelle du filtre de Kalman. Dans ce cas, il faut

considérer deux solutions pour le filtre SIR : soit on ne fait pas l'étape de redistribution et remplace les estimateurs empiriques par les estimateurs empiriques pondérés, soit on augmente le nombre de particules pour avoir une meilleure distribution a posteriori des particules.

Si on utilise un nombre de particules suffisamment grand, les particules du filtre particulaire explorent mieux l'espace d'état et proposent donc de bons estimateurs pour la moyenne et la variance conditionnelle. On voit dans les figures 9.1 à 9.6 que dans ce cas, la performance des estimateurs de l'EnKF et du filtre particulaire est semblable, car les estimateurs des deux filtres convergent vers les mêmes limites (moyenne et variance conditionnelle du filtre de Kalman) quand le nombre de particules tend vers l'infini.

### 9.2.2 Comparaison des distributions a posteriori

Nous traçons les histogrammes des particules que nous comparons à la loi gaussienne du filtre de Kalman. Le test de normalité de Jarque-Bera (voir annexe 10.2.3) sur les particules des filtres sont aussi réalisés. Les estimateurs sont évalués 50 fois et les moyennes des degrés de signification (p-value) des tests sont calculées. Nous considérons dans cette simulation des nombres de particules de 50, 200 et 1000.

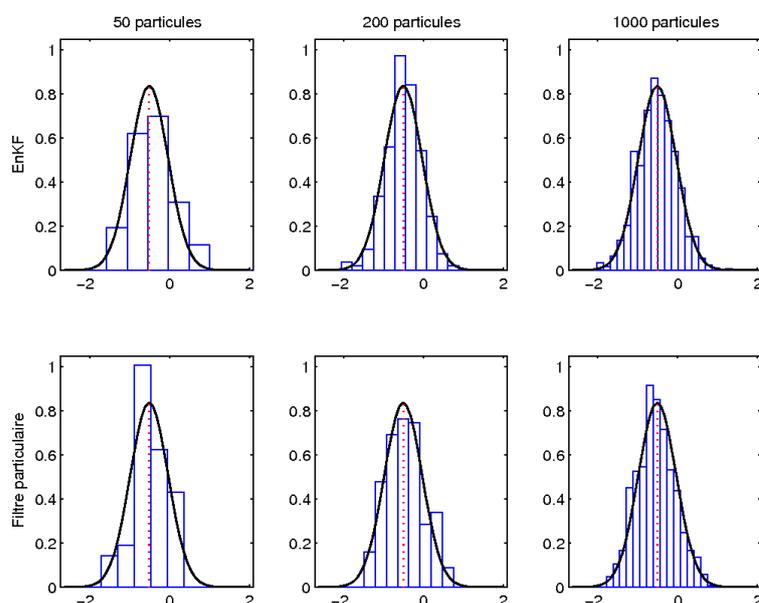


FIG. 9.8: Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 ( $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Histogramme des particules à l'instant  $k = 15$  pour l'EnKF et le filtre particulaire avec 50, 200 et 1000 particules ; — : loi a posteriori du filtre de Kalman ; - - - : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman.

Les figures 9.8, 9.9 et 9.10 représentent la loi a posteriori gaussienne du filtre de Kalman et l'histogramme des particules de l'EnKF et du filtre particulaire à l'instant  $k = 15$  avec 50, 200

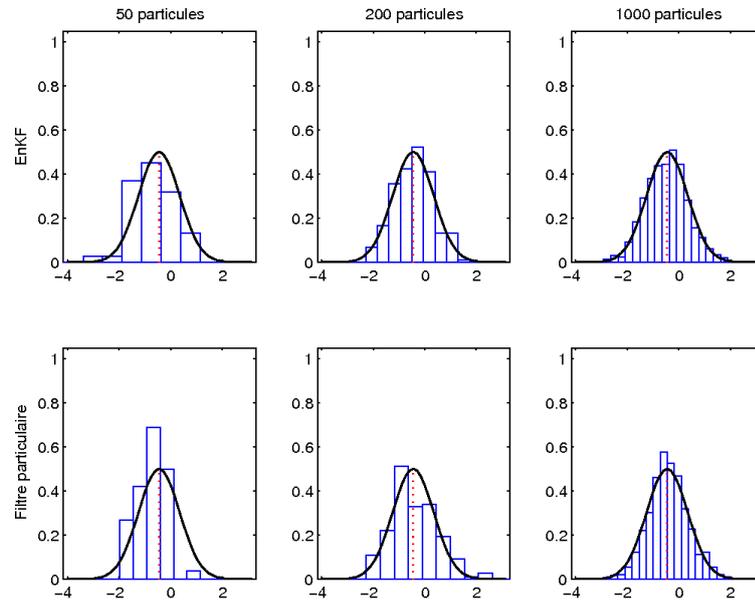


FIG. 9.9: Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 ( $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Histogramme des particules à l'instant  $k = 15$  pour l'EnKF et le filtre particulaire avec 50, 200 et 1000 particules ; — : loi a posteriori du filtre de Kalman ; - - - : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman.

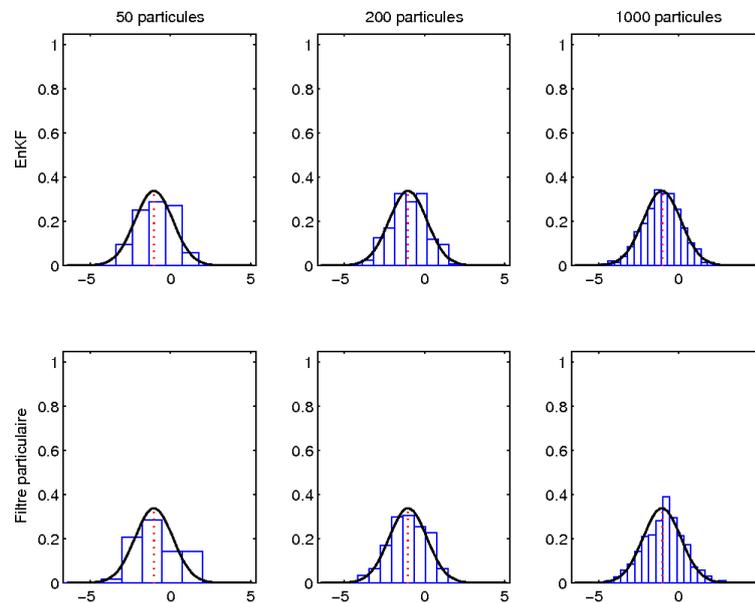


FIG. 9.10: Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 ( $Q=R=25I$ ) - Histogramme des particules à l'instant  $k = 15$  pour l'EnKF et le filtre particulaire avec 50, 200 et 1000 particules ; — : loi a posteriori du filtre de Kalman ; - - - : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman.

	A1		A2		A3	
	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF	PF
⋮						
6	0.50	0.39	0.49	0.40	0.45	0.33
7	0.53	0.30	0.48	0.34	0.58	0.31
8	0.53	0.38	0.56	0.35	0.51	0.36
9	0.44	0.29	0.45	0.34	0.55	0.42
10	0.57	0.40	0.47	0.28	0.42	0.29
11	0.53	0.35	0.51	0.30	0.52	0.36
12	0.55	0.25	0.51	0.35	0.46	0.32
13	0.53	0.32	0.50	0.35	0.47	0.39
14	0.43	0.34	0.46	0.33	0.42	0.30
15	0.48	0.41	0.50	0.33	0.45	0.35
⋮						

TAB. 9.2: Modèle linéaire gaussien - moyenne des degrés de signification du test de normalité de la distribution de 1000 particules de l'EnKF et du filtre particulaire, avec 50 répétitions, du pas de temps 6<sup>ème</sup> au pas de temps 15<sup>ème</sup>. Test utilisé : Test de Jarque-Bera.

et 1000 particules (nous avons vérifié que pour d'autres temps nous obtenons le même type de résultats). La moyenne conditionnelle du filtre de Kalman est représentée par la droite en tirets rouge. On observe que la distribution des particules de l'EnKF et du filtre particulaire approche de mieux en mieux la loi gaussienne quand le nombre de particules  $N$  augmente. La table 9.2 donne les degrés de signification du test de normalité des particules de l'EnKF et du filtre particulaire à 1000 particules. Si on accepte un risque de se tromper à 5%, les degrés de signification du test sont alors assez élevés et on accepte donc l'hypothèse de conformité à la loi gaussienne de la distribution des particules des deux filtres EnKF et SIR. Cela concorde avec les résultats théoriques que nous avons obtenus.

Nous faisons une autre remarque sur la variance de la distribution a posteriori. Si le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est fort, la variance de  $(X_k|Y_{1:k})$  est relativement faible (figure 9.8). Si le rapport de l'erreur d'observation sur l'erreur du modèle est fort, la variance de  $(X_k|Y_{1:k})$  augmente (figure 9.9). Cette variance est plus élevée si les variances de l'erreur du modèle et de l'erreur d'observation sont toutes les deux élevées (figure 9.10). La qualité du modèle dynamique et de l'observation influe donc sur la qualité des estimateurs. Une observation de bonne qualité conduit un meilleur estimateur qu'un modèle de bonne qualité.

### 9.2.3 Comparaison des erreurs en moyenne quadratique des estimateurs

Comme l'état  $X$  est supposé déterministe, l'erreur en moyenne quadratique d'un estimateur  $\hat{X}_k(y)$  est définie par

$$\mathbb{E} (\hat{X}_k - x_k)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{X}_k(y) - x_k)^2 p_k^y(dy|x_k)$$

où  $p_k^y(dy|x_k)$  est la distribution du vecteur d'observation  $y$  à l'instant  $k$  sachant le vrai état  $x_k$ . Dans la simulation, cette erreur va être estimée par

$$\mathbb{E} (\hat{X}_k - x_k)^2 \approx \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} (\hat{x}_k(y^i) - x_k)^2$$

Nous répétons ainsi le calcul des estimateurs 500 fois correspondant à 500 observations générées selon la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, R)$ . Dans cette simulation, nous utilisons successivement 50, 200 et 1000 particules pour chaque estimateur.

Les figures 9.11, 9.12 et 9.13 représentent l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps, avec 50, 200 et 1000 particules.

Dans les 3 scénarios, avec peu de particules, l'EnKF conduit à une erreur en moyenne quadratique légèrement plus faible que celle du filtre particulaire. Pourtant, avec 1000 particules, les erreurs en moyenne quadratique des deux estimateurs sont proches. On retrouve bien le résultat théorique selon lequel les deux estimateurs convergent vers la moyenne conditionnelle du filtre de Kalman quand le nombre de particules tend vers l'infini dans le cas du modèle linéaire gaussien.

Dans la figure 9.14, l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs au 15ème instant d'observation est représentée en fonction du nombre des particules, de 10 à 5000. Les erreurs en moyenne quadratique des deux estimateurs décroissent vers une même valeur quand le nombre de particules augmente, et l'EnKF est toujours plus performant que le filtre particulaire dans le cas où on utilise peu de particules.

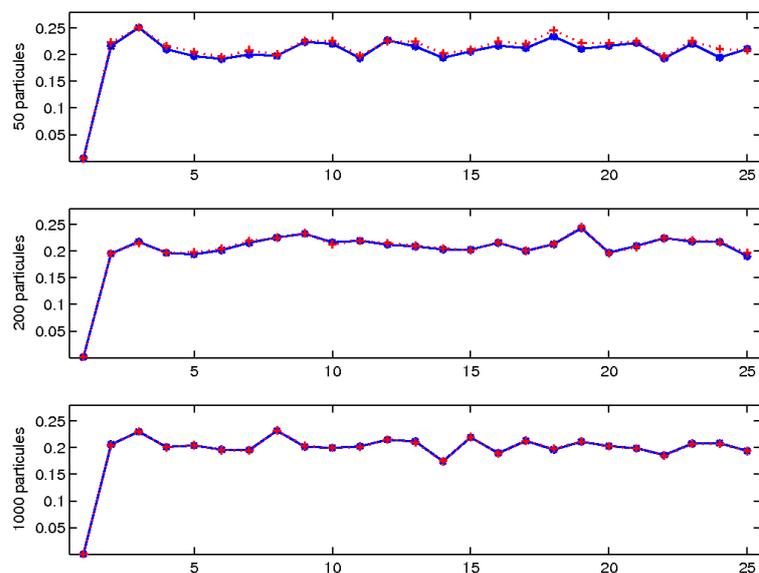


FIG. 9.11: Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 ( $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*-$  : EnKF ;  $- - +$  : filtre particulaire.

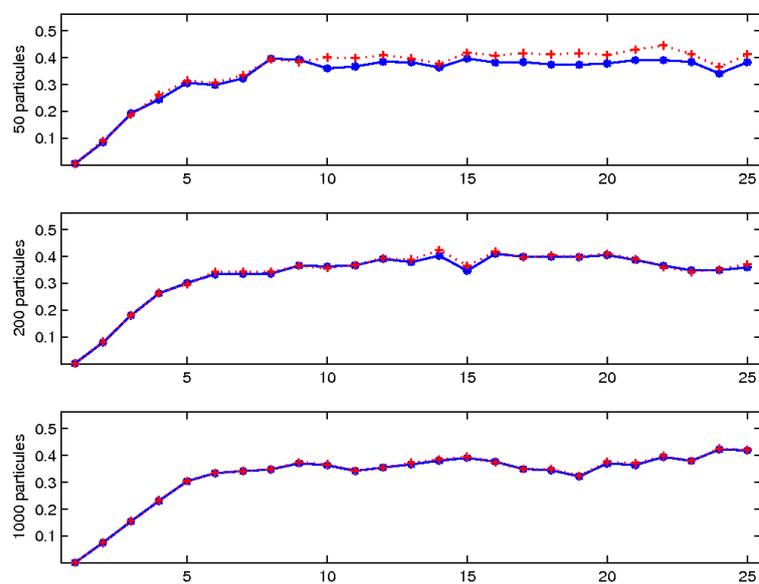


FIG. 9.12: Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 ( $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*-$  : EnKF ;  $- - +$  : filtre particulaire.

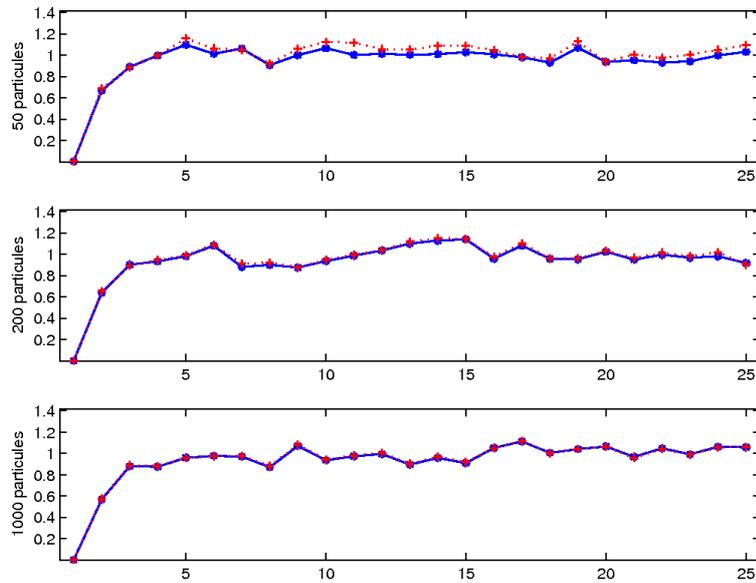


FIG. 9.13: Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 ( $Q=R=25I$ ) - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*-$  : EnKF ;  $--+$  : filtre particulaire.

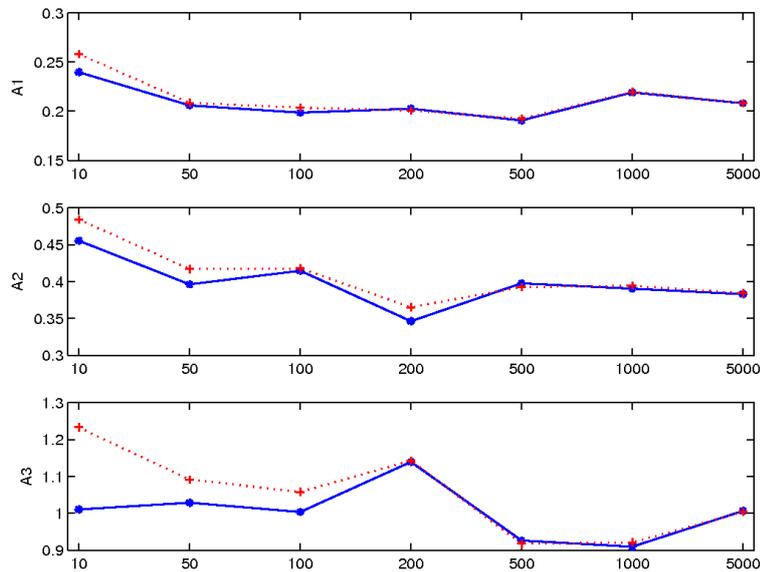


FIG. 9.14: Modèle linéaire gaussien - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules (de 10 à 5000), à l'instant  $k=15$  pour les 3 scénarios A1 ( $Q=25I, R=I$ ), A2 ( $Q=I, R=25I$ ), A3 ( $Q=R=25I$ ) ;  $-*-$  : EnKF ;  $--+$  : filtre particulaire

## Chapitre 10

# Modèle de Lorenz

### 10.1 Description des simulations

Les simulations sont réalisées dans l'intervalle de temps  $[0, 20]$ . Le modèle de Lorenz est discrétisé selon le schéma d'Euler avec un pas de temps  $\Delta\tau = 0.005$ . On génère 40 observations réparties régulièrement dans l'intervalle de temps  $[0, 20]$ , i.e. tous les 100 pas de temps de discrétisation du modèle de Lorenz, ce qui correspond au pas de temps  $\Delta t = 0.5$ . L'état à l'instant initial est choisi suivant la loi gaussienne  $\mathcal{N}(x_0, Q_0)$  où

$$x_0 = (1.508870, -1.531271, 25.46091).$$

Les covariances de l'état initial  $Q_0$ , de l'erreur du modèle  $Q$  et de l'erreur d'observation  $R$  varient selon les scénarios de la table 10.1.

Les observations sont simulées de la façon suivante : nous simulons une trajectoire de référence selon le modèle de Lorenz ordinaire et ajoutons à chaque instant d'observation un bruit gaussien de moyenne 0 et de covariance  $Q(\Delta t)^2$ . Cette trajectoire est considérée comme une réalisation de la vraie trajectoire de l'état à estimer. Une suite d'observations est simulée en ajoutant des bruits gaussiens de moyenne 0 et de covariance  $R$  à cette trajectoire de référence. Les observations sont simulées selon 2 scénarios :

- **Scénario B1** : on possède une observation complète de l'état, le vecteur d'observation est donc de dimension 3 et les trois composantes  $x, y, z$  sont observées.
- **Scénario B2** : on possède une observation partielle de l'état, le vecteur d'observation est donc de dimension 1 et une seule composante  $x$  de l'état est observée. L'objectif est de comparer la capacité des filtres à estimer ou prédire les composantes non observées.

### 10.2 Résultat et interprétation

#### 10.2.1 Comparaison des estimateurs de la moyenne conditionnelle

Les figures 10.1 et 10.2 représentent une réalisation de l'estimateur de la moyenne conditionnelle, du filtre particulaire et de l'EnKF, pour les scénarios B1 et B2. L'estimateur EnKF est

Scénario	$Q_0$	$Q$	$R$
<b>A1</b>	I	25I	I
<b>A2</b>	I	I	25I
<b>A3</b>	I	25I	25I

Tab. 10.1: Les variances des erreurs du modèle et de l'observation selon les scénarios de simulation pour le modèle de Lorenz,  $I = 1$ ;  $Q_0$  : variance de l'erreur de l'état initial;  $Q$  : variance de l'erreur du modèle;  $R$  variance de l'erreur d'observation.

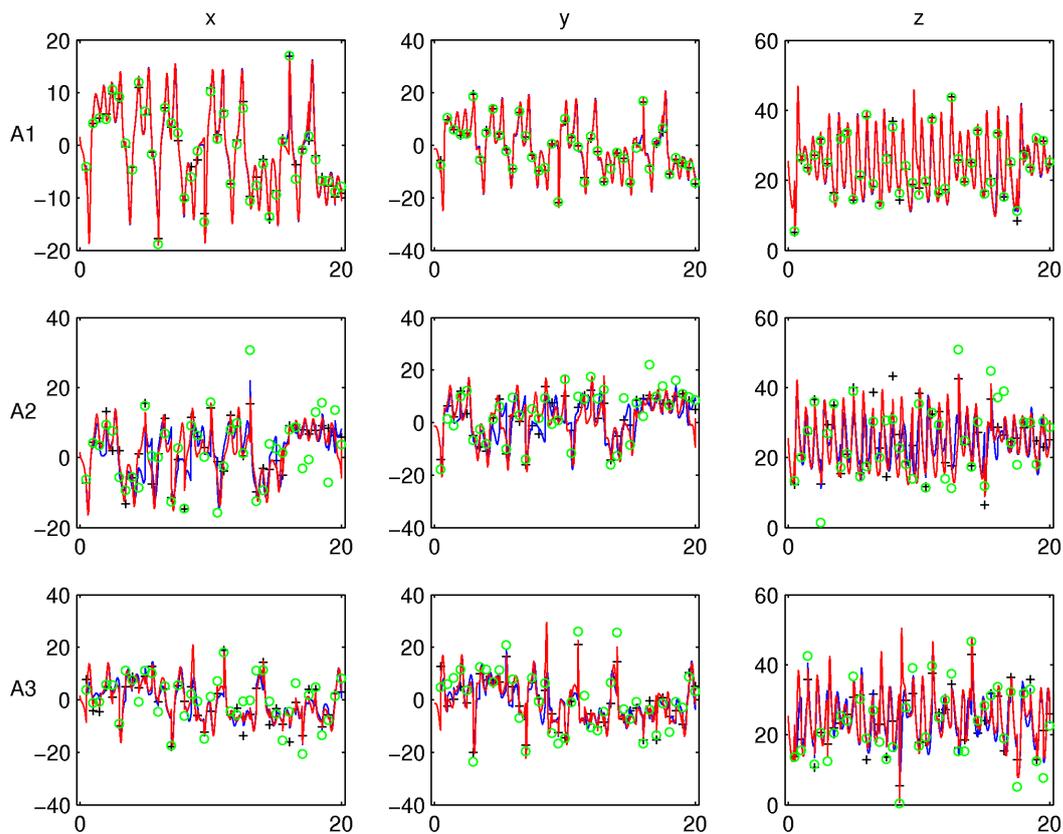


FIG. 10.1: Modèle de Lorenz - Scénario B1 (trois composantes observées) - Les estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps; 50 particules; — : EnKF; — : filtre particulaire; + : solution de référence; o : observation.

représenté par le trait plein en bleu et celui du filtre particulaire par le trait plein en rouge. La solution de référence à chaque instant d'observation est représentée par une croix noire, et les observations par des cercles verts. Nous présentons séparément les estimateurs des trois composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction du temps  $t$ .

On remarque dans le scénario B1 (figure 10.1), où les 3 composantes sont observées, qu'on

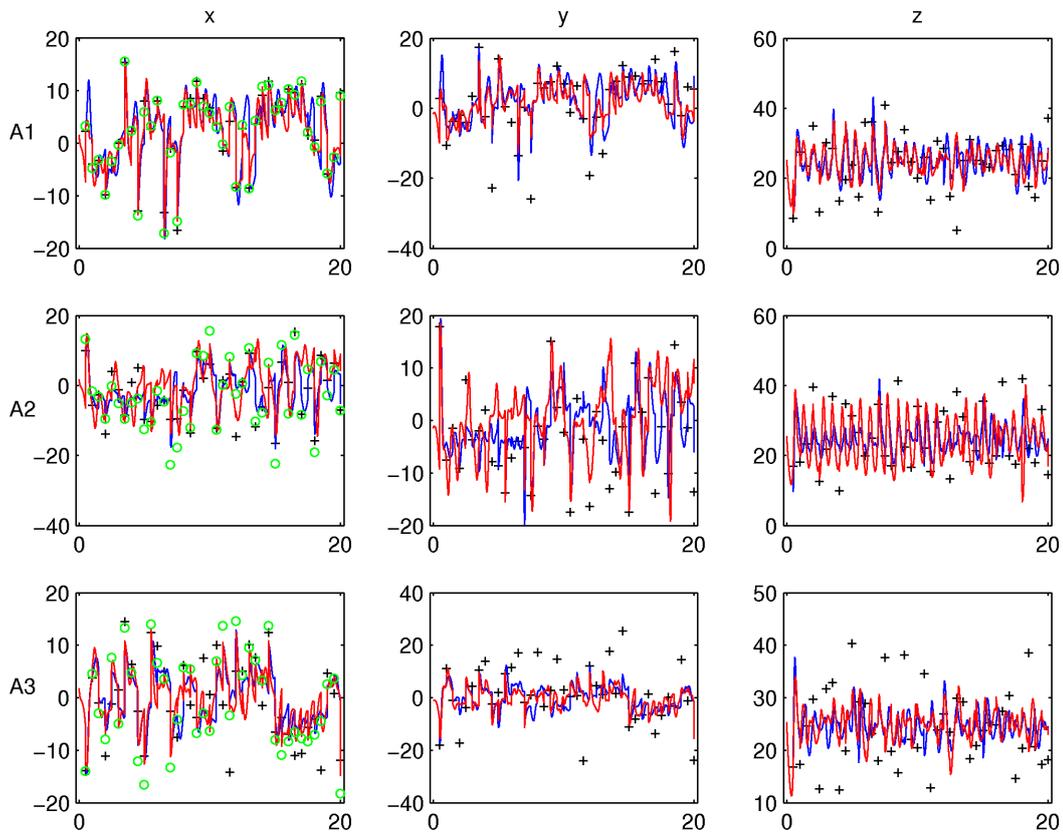


FIG. 10.2: Modèle de Lorenz - Scénario B2 (une composante observée) - Les estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; 50 particules ; — : EnKF ; — : filtre particulaire ; + : solution de référence ; o : observation.

obtient en général de bonnes estimations pour les 3 composantes de l'état, les estimations sont relativement proches de la solution de référence. Dans le scénario A1, l'EnKF et le filtre particulaire ont la même performance, on ne voit pas la différence entre les estimations. Dans le scénario A2, aux instants d'observation, le filtre particulaire fournit plus souvent de bonnes estimations que l'EnKF. Par exemple, à l'instant de la 9<sup>ème</sup> observation pour la composante  $x$ , on voit que l'estimation du filtre particulaire approche la solution de référence, alors que celle de l'EnKF a tendance à être plus proche de l'observation, ceci est dû au mécanisme d'évolution des particules de l'EnKF : on déplace les particules selon le modèle de prédiction et puis vers l'observation. Comme l'observation a une forte erreur, l'EnKF tend à proposer de mauvaises estimations. Alors que pour le filtre particulaire, si l'erreur d'observation est très grande, toutes les particules doivent avoir à peu près les mêmes poids. Ainsi le filtre particulaire est peu influencé par l'observation dans ce cas. On voit encore ce phénomène à la 3<sup>ème</sup> observation pour la composante  $y$ , et aux autres instants où l'observation est fortement éloignée de la solution de référence. A l'inverse, aux instants où l'observation est proche de la solution de référence, l'EnKF est meilleur que le filtre particulaire. Dans ce cas, l'EnKF a bien déplacé les particules vers l'observation qui n'est pas très

éloignée de la solution de référence, alors que le filtre particulaire propose une mauvaise moyenne pondérée, car le nombre de particules est insuffisant pour bien échantillonner le régime complexe du système à cet instant. On peut faire les mêmes remarques pour le scénario A3.

Dans la figure 10.2 du scénario B2 (une seule composante est observée), on voit que pour les composantes non observées, dans les scénarios A1 et A3 (l'erreur du modèle est supérieure ou égale à l'erreur d'observation), l'EnKF donne de meilleures estimations que le filtre particulaire. Dans le scénario A2 (l'erreur d'observation est importante), on observe l'inverse, les estimations du filtre particulaire pour  $y$  et  $z$  sont meilleures que celles de l'EnKF. On voit encore une fois que, si l'erreur d'observation est importante, l'EnKF propose de mauvaises estimations, surtout pour les composantes non observées.

### 10.2.2 Comparaison des distributions à posteriori

Nous présentons dans les figures 10.3 à 10.10 les distributions jointes bivariées de  $(x,y)$  et de  $(y,z)$  des particules du filtre bootstrap, de l'EnKF, du WEnKF et du filtre particulaire (SIR) pour les différents scénarios. Les filtres sont évalués avec 1000 particules sauf le filtre bootstrap qui est évalué avec 20000 particules et la distribution des particules bootstrap est considérée comme une distribution de référence, qui doit être proche de la distribution a posteriori du filtre bayésien optimal. Chaque ligne dans les figures représente la distribution jointe bivariée aux 10 instants d'observation consécutifs, de l'instant  $k = 16$  à l'instant  $k = 25$ .

Pour le scénario B1A1 (figures 10.3 et 10.4), où l'erreur du modèle est supérieure à l'erreur d'observation, on observe que la distribution de référence, de l'EnKF et du filtre SIR approchent des lois gaussiennes. Ceci peut être expliqué comme suit.

La distribution de référence, qui est en fait la distribution des particules du filtre bootstrap, d'après la section 7.4.2, est un mélange de lois gaussiennes de moyennes  $f(x_{k-1}^{a,i})$  et de covariances  $Q_k$

$$\mu_k^{N,a} = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \Gamma(\cdot, f(x_{k-1}^{a,i}), Q_k),$$

où

$$\omega_k^i \propto \omega_{k-1}^i p(y_k | x_k^{f,i}).$$

Comme les variances  $Q_k$  sont grandes, le mélange de lois gaussiennes est presque uni modal et proche d'une loi gaussienne de grande variance. Les particules échantillonnées selon le principe d'échantillonnage d'importance, dont le poids est proportionnel à la densité  $p(y_k | x_k^{f,i})$ , sont distribuées selon une loi très proche de la loi gaussiennes centrée sur l'observation  $y_k$  et de covariance  $R_k$ .

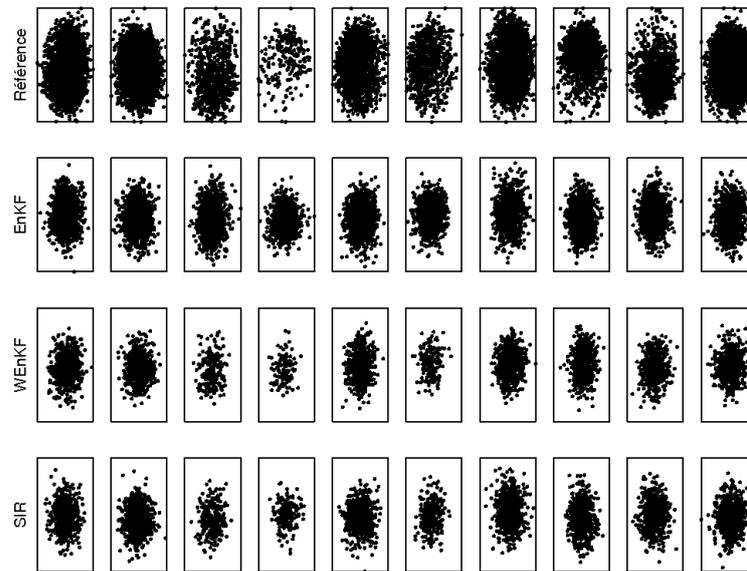


FIG. 10.3: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(x,y)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B1A1 (3 composantes observées,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ).

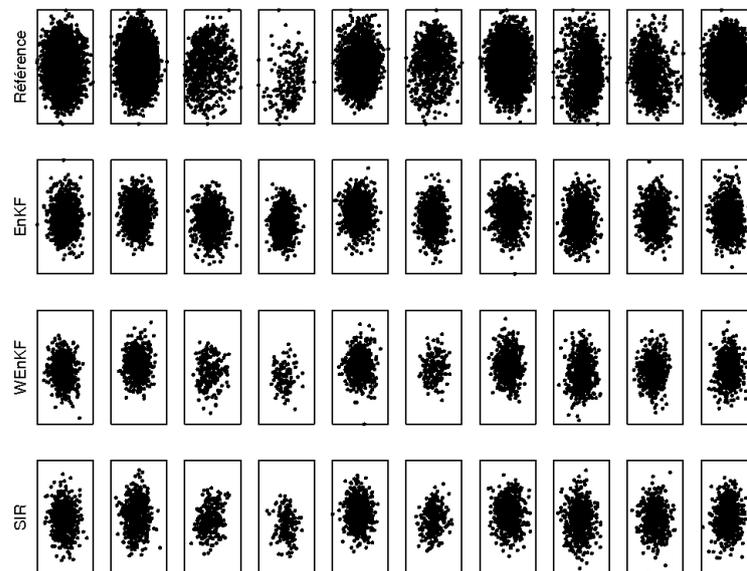


FIG. 10.4: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(y,z)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B1A1 (3 composantes observées,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ).

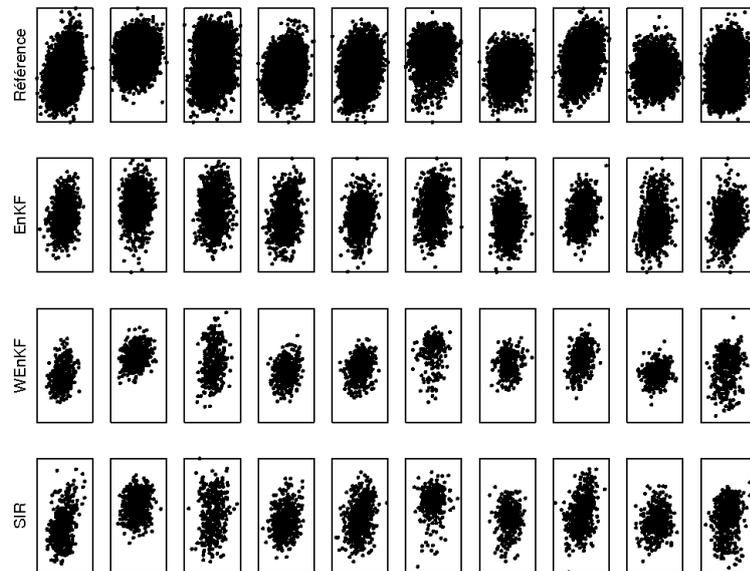


FIG. 10.5: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(x,y)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B2A1 (une composante observée,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ).

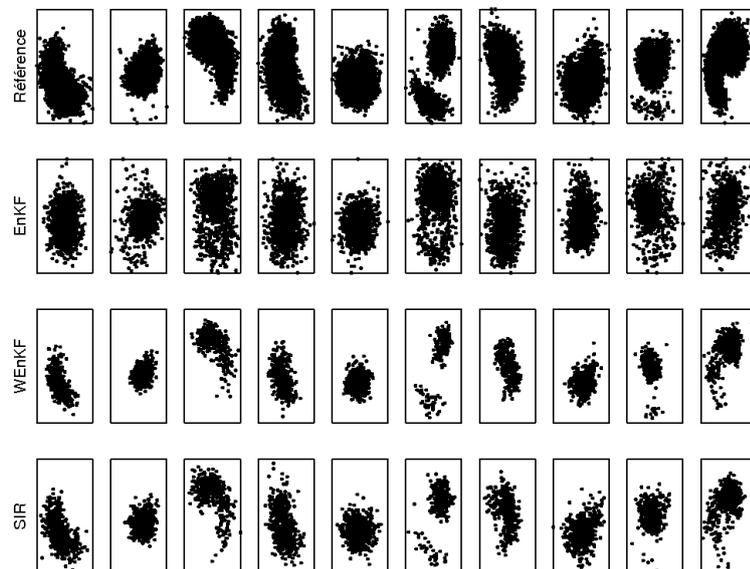


FIG. 10.6: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(y,z)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B2A1 (une composante observée,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ).

Pour le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre SIR, d'après la section 7.4.2, le gain du filtre de Kalman d'ensemble à la limite est défini par

$$K(\bar{P}_k) = \bar{P}_k H^* (H \bar{P}_k H^* + R_k)^{-1},$$

et celui du filtre SIR par

$$K(Q_k) = Q_k H^* (H Q_k H^* + R_k)^{-1}.$$

Sachant  $X_{k-1}^{a,i} = x_{k-1}^{a,i}$ , chaque particule de l'EnKF suit la loi gaussienne de moyenne et de covariance

$$\begin{aligned} \bar{m}_k^i &= [I - K(\bar{P}_k)H] f(x_{k-1}^{a,i}) + K(\bar{P}_k) y_k \\ \bar{\Sigma}_k &= [I - K(\bar{P}_k)H] Q_k [I - K(\bar{P}_k)H]^* + K(\bar{P}_k) R_k [K(\bar{P}_k)]^*. \end{aligned}$$

Sachant  $\tilde{X}_{k-1}^{a,i} = \tilde{x}_{k-1}^{a,i}$ , chaque particule du filtre SIR suit la loi gaussienne de moyenne et de covariance

$$\begin{aligned} m_k^i &= [I - K(Q_k)H] f(\tilde{x}_{k-1}^{a,i}) + K(Q_k) y_k \\ \Sigma_k &= [I - K(Q_k)H] Q_k [I - K(Q_k)H]^* + K(Q_k) R_k [K(Q_k)]^*. \end{aligned}$$

Quand le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand, les gains  $K(\bar{P}_k)$  et  $K(Q_k)$  sont très proches de la matrice d'identité  $I$ . Les matrices  $[I - K(\bar{P}_k)H]$  et  $[I - K(Q_k)H]$  sont donc presque nulles. L'effet du modèle dynamique sur les particules est faible, et la distribution de chaque particule de l'EnKF et du filtre SIR est très proche de la loi gaussienne de moyenne  $y_k$  et de covariance  $R_k$ . Ainsi, dans les cas extrêmes, où le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand, les deux filtres EnKF et SIR conduisent à la même distribution a posteriori, qui n'est autre que la distribution des particules du filtre bootstrap dans ce cas.

Dans les figures 10.5 et 10.6, qui correspondent au scénario B2A1 (seule la composante  $x$  est observée et le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand), on constate que la distribution de référence est complexe, notamment pour les composantes non observées  $y$  et  $z$  (figure 10.6). Les particules du filtre SIR reconstruisent bien la distribution de référence, alors que celles de l'EnKF se déplacent toutes vers l'observation en fonction du gain calculé, elles sont ainsi distribuées selon une loi proche d'une loi gaussienne. Dans ce cas, on voit la différence entre la distribution des particules de l'EnKF et la distribution a posteriori bayésienne.

Dans les scénarios B1A3 (figure 10.23) et B2A3 (figure 10.25), où l'erreur du modèle est du même ordre que l'erreur d'observation, l'EnKF reconstruit aussi bien la distribution de référence que le filtre SIR si la distribution de référence approche une loi gaussienne (à la plupart des instants), et il la reconstruit moins bien si la distribution de référence s'éloigne d'une loi gaussienne, voir par exemple à l'instant  $k = 14$ -distribution jointe  $(x, y)$  et à l'instant  $k = 7$ -distribution jointe  $(y, z)$  du scénario B1A3.

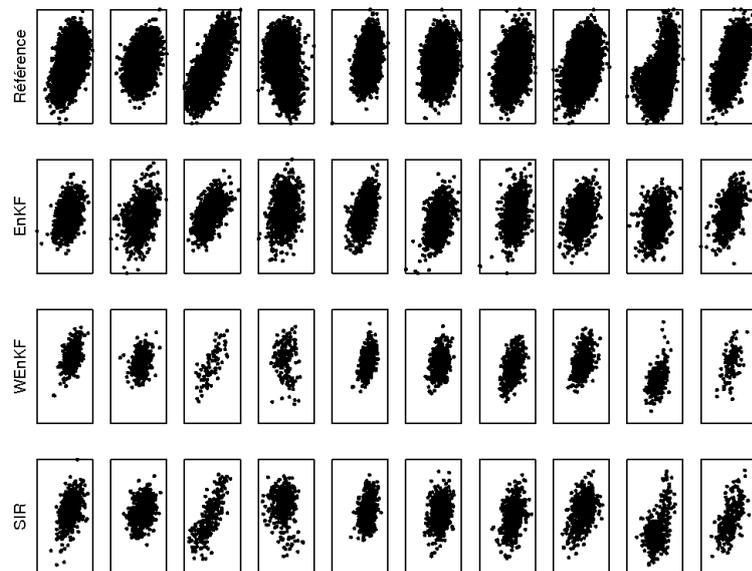


FIG. 10.7: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(x,y)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B1A3 (3 composantes observées,  $Q=R=25I$ ).

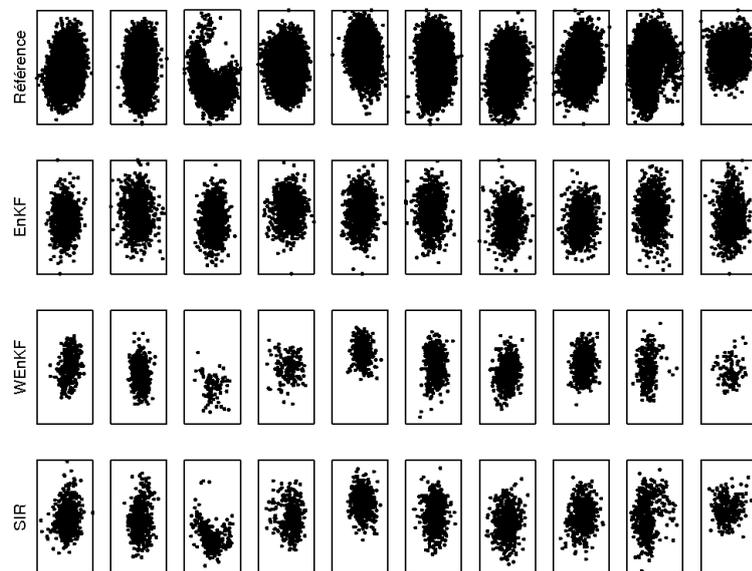


FIG. 10.8: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(y,z)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B1A3 (3 composantes observées,  $Q=R=25I$ ).

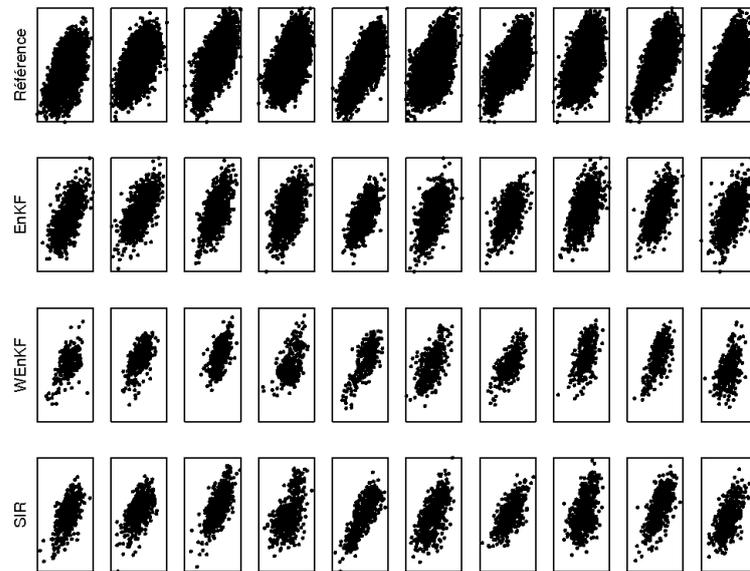


FIG. 10.9: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(x,y)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B2A3 (une composante observée,  $Q=R=25I$ ).

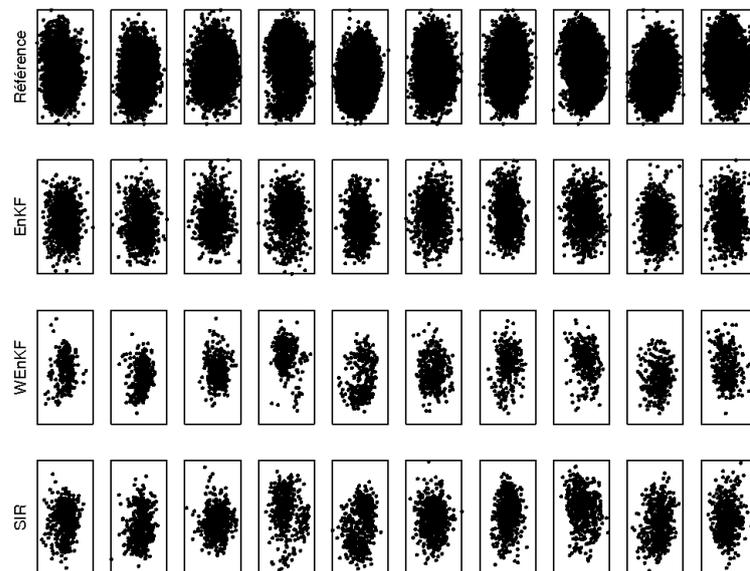


FIG. 10.10: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(y,z)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B2A3 (une composante observée,  $Q=R=25I$ ).

Nous faisons les remarques suivantes pour les scénarios B1A2 et B2A2, où l'erreur d'observation est plus importante que l'erreur du modèle. Dans les figures 10.11, 10.12, 10.13 et 10.14, on observe que la distribution de référence diffère fortement de la loi gaussienne. Comme l'observation a une grande erreur, le filtre bayésien optimal conduit à une distribution a posteriori guidée par le comportement du modèle dynamique, qui a une erreur plus faible. On observe ainsi que la distribution de référence a une forme ressemblant à la trajectoire du modèle dynamique. Comme le modèle est fortement non linéaire, la distribution des particules devient complexe.

Le filtre particulaire dans ce cas estime mieux la distribution de référence grâce à son mécanisme d'échantillonnage d'importance, alors que pour le filtre de Kalman d'ensemble, à cause de son mécanisme qui consiste à déplacer toutes les particules vers l'observation selon le gain calculé, la distribution des particules approche toujours une loi gaussienne.

Ce qu'on observe dans ces cas correspond aux résultats théoriques obtenus : la distribution des particules du filtre particulaire converge vers la distribution du filtre bayésien optimal, alors que la distribution du filtre de Kalman d'ensemble converge vers une distribution de probabilité différente.

Nous avons aussi présenté dans les figures la distribution des particules du filtre de Kalman d'ensemble pondéré (WEnKF). On voit que, dans tous les scénarios, la distribution de particules du WEnKF est proche de celle du filtre bootstrap. Mais on observe aussi un important phénomène de dégénérescence des poids des particules WEnKF qui conduit une performance plus faible que le filtre particulaire avec le même nombre de particules dans les cas où la distribution de référence est complexe (figures 10.11, 10.12, 10.13 et 10.14). On peut expliquer ce phénomène comme suit, dans le cas du modèle non linéaire gaussien, le filtre SIR utilise la densité d'importance optimale, qui minimise la variance des poids des particules. Le WEnKF utilise la densité d'importance définie par les équations du filtre de Kalman d'ensemble, la dispersion des poids peut être ainsi plus élevée, qui conduit au fait que après quelques instants, certaines particules sont éliminées et le WEnKF n'est plus capable de reconstruire la distribution bayésienne.

A l'inverse, dans le cas où la distribution de référence approche une loi gaussienne (le cas où le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand par exemple), le WEnKF approche aussi bien la distribution de référence que le filtre EnKF et le filtre SIR.

### 10.2.3 Comparaison des erreurs en moyenne quadratique des estimateurs

Comme l'état  $X$  est aléatoire, l'erreur en moyenne quadratique d'un estimateur  $\hat{X}_k(y)$  est définie par

$$\mathbb{E} |\hat{X}_k - X_k|^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{X}_k(y) - x)^* (\hat{X}_k(y) - x) p_k^y(dy|x) p_k^x(dx)$$

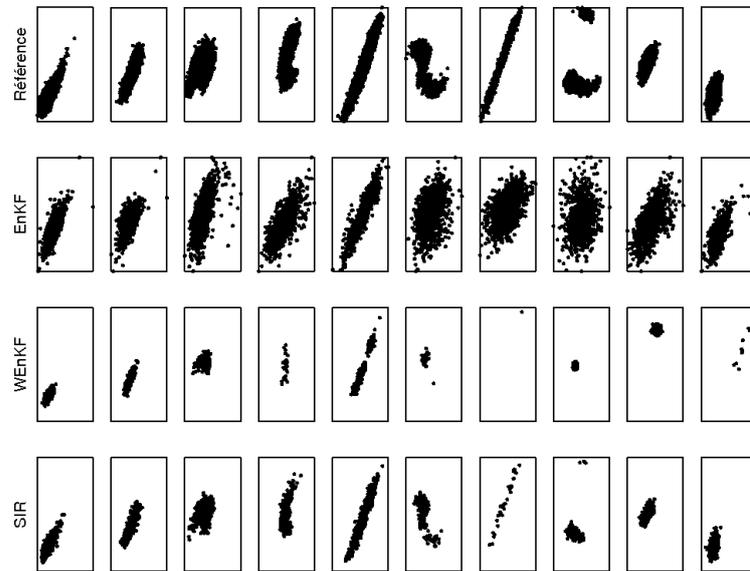


FIG. 10.11: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(x,y)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B1A2 (3 composantes observées,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ).

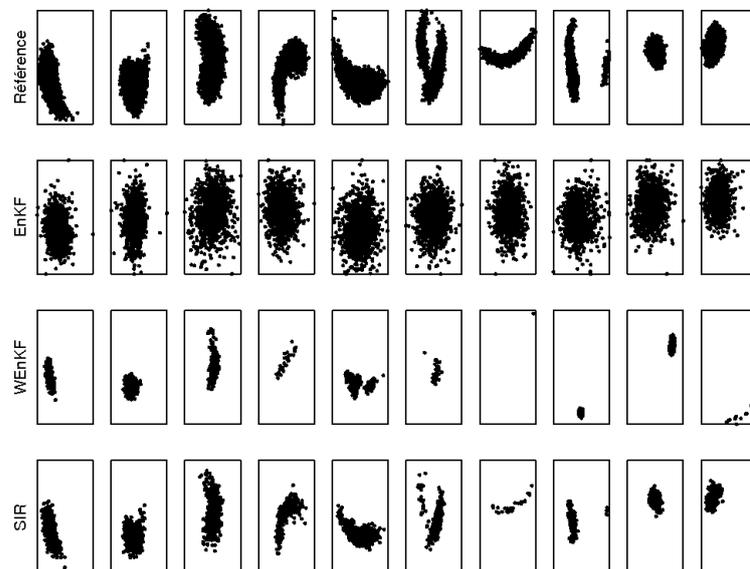


FIG. 10.12: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(y,z)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B1A2 (3 composantes observées,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ).

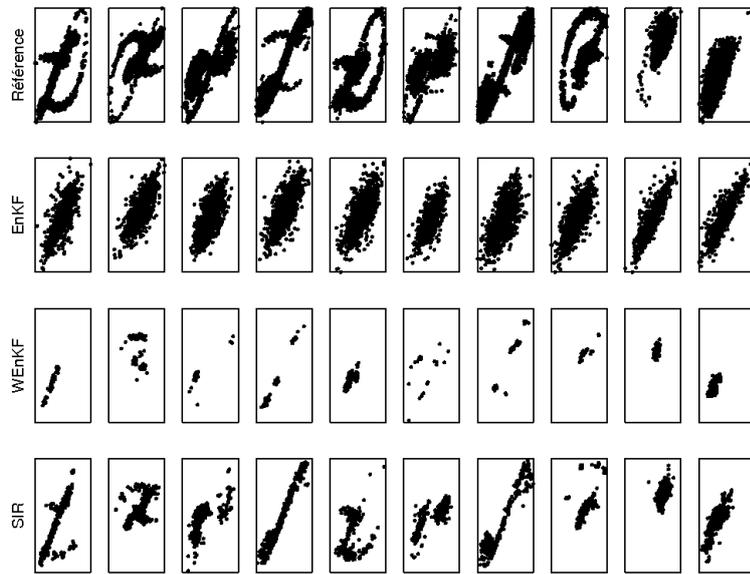


FIG. 10.13: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(x,y)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B2A2 (une composante observée,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ).

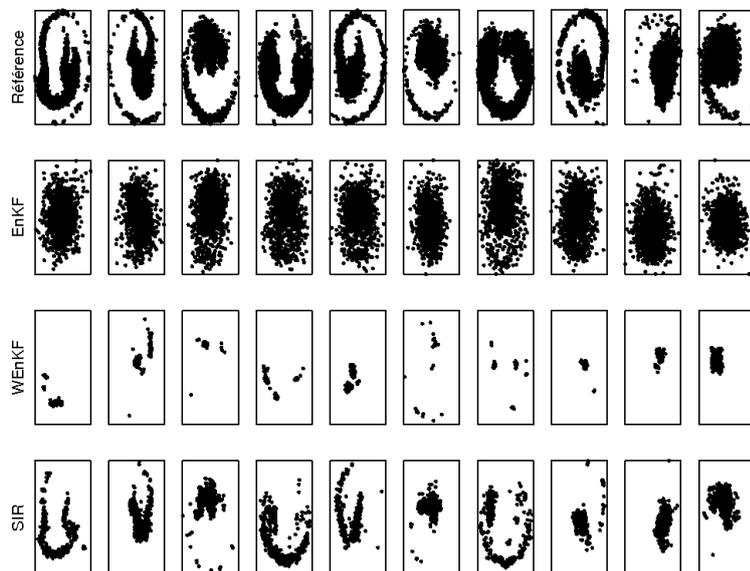


FIG. 10.14: Modèle de Lorenz - distribution jointe  $(y,z)$  des filtres avec 1000 particules, de l'instant  $k=6$  à l'instant  $k=15$ , scénario B2A2 (une composante observée,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ).

où  $p_k^y(dy|x)$  est la distribution à l'instant  $k$  de l'observation  $y$  sachant le vrai état  $x$ , et  $p_k^x(dx)$  est la distribution du vrai état  $X$  à l'instant  $k$ . Dans notre simulation, cette erreur va être estimée par

$$\mathbb{E} |\widehat{X}_k - X_k|^2 \approx \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\widehat{x}_k(y^i) - x_k^i)^* (\widehat{x}_k(y^i) - x_k^i)$$

Nous répétons ainsi la simulation 1000 fois, chaque fois, une trajectoire de référence  $\{x_k^i\}$  est simulée, une suite d'observation  $y^i$  correspondante est générée selon la loi  $\mathcal{N}(Hx_k^i, R)$  et les estimateurs  $\widehat{x}_k(y^i)$  sont évalués. Dans cette simulation, le nombre de particules varie de 50 à  $10^4$ .

Le choix de 1000 répétitions dans l'estimation de l'erreur en moyenne quadratique vient du fait que le vrai état  $X_k$  est un processus aléatoire. L'espérance mathématique dans la définition de l'erreur en moyenne quadratique est prise par rapport à l'observation  $Y_k$  et au vrai état  $X_k$ . Il faut utiliser un assez grand nombre de répétitions pour que l'estimateur empirique de l'erreur en moyenne quadratique converge.

L'erreur en moyenne quadratique des estimateurs est comparée à la borne de Cramer Rao, qui est une borne inférieure pour tous les estimateurs de  $\mathbb{E}(X_k|Y_{1:k})$ . Le calcul de la borne de Cramer Rao pour le modèle de Lorenz est décrit dans l'annexe.

Les figures 10.15 à 10.25 représentent la racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle, des filtres EnKF, WEnKF et le filtre SIR, pour les différents scénarios. Pour chaque scénario, nous présentons dans une figure l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs en fonction du temps pour trois nombres de particules (50, 200 et 1000 particules) et dans l'autre figure cette erreur en moyenne quadratique à l'instant  $k = 10$  en fonction du nombre de particules, qui varie de 50 à 10000. Nous avons vérifié aux autres instants qu'on obtient les mêmes comportements des erreurs en moyenne quadratique. Nous faisons les remarques suivantes.

Avec un nombre faible de particules, dans tous les scénarios, l'erreur en moyenne quadratique de l'EnKF est toujours plus faible que celle du filtre SIR et du filtre WEnKF, l'EnKF est donc plus performant que le filtre particulaire dans ce cas. On peut expliquer ce phénomène par le fait que, avec un nombre faible de particules, les particules du filtre SIR et du WEnKF ne sont pas suffisantes pour bien représenter la distribution a posteriori du filtre bayésien optimal, ceci entraîne un mauvais estimateur de la moyenne conditionnelle. Le nombre de particules du SIR et du WEnKF peut être encore diminué à cause de l'étape de redistribution où certaines particules dont le poids est faible sont supprimées.

Dans le scénario B1A1 (figures 10.15 et 10.16), où les trois composantes sont observées et le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand, la distribution a priori des particules du filtre SIR, qui est un mélange de lois gaussiennes, approche une loi gaussienne centrée sur  $y_k$  et de covariance  $R_k$ . Ensuite, d'après la section 4.4.2, les poids des particules du

filtre SIR sont calculés par

$$\hat{p}_k^i \propto p_k^i q(y_k - Hx_k^{f,i}, HQ_kH^* + R_k)$$

Quand le rapport de  $Q_k$  sur  $R_k$  est grand, et les particules de prédiction  $x_k^{f,i}$  sont centrées sur  $y_k$  et de covariance  $R_k$ , les particules de prédiction sont affectées de poids à peu près identiques les uns aux autres. Ainsi, dans le cas où on utilise peu de particules, et si le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand, il est préférable de ne pas réaliser l'étape de redistribution, pour ne pas faire diminuer le nombre de particules qui est déjà faible.

Dans le scénario B2A1 (figures 10.17 et 10.18), où une seule composante est observée et le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand, on constate que l'écart entre l'erreur en moyenne quadratique du filtre SIR (et du filtre WEnKF) et celle de l'EnKF est relativement faible (entre 8.8 et 10 avec 50 particules). Cet écart diminue rapidement et l'erreur en moyenne quadratique du filtre SIR est plus faible que celle de l'EnKF si le nombre de particules est supérieur à 100 (à peu près 200 pour le WEnKF). Dans ce cas, comme la distribution bayésienne s'éloigne d'une loi gaussienne et devient complexe, les particules de l'EnKF approchent mal la distribution bayésienne, l'estimateur de la moyenne est aussi moins bon. Alors que le filtre SIR et le filtre WEnKF fournissent de meilleurs estimateurs car la distribution de leurs particules estime mieux la distribution bayésienne. Nous faisons les mêmes remarques pour les scénarios B1A2, B2A2 et B2A3, où la distribution bayésienne est fortement complexe.

Asymptotiquement, quand on utilise un très grand nombre de particules (ici 10000), dans tous les scénarios sauf le B1A1, l'erreur en moyenne quadratique du filtre SIR et du WEnKF est toujours inférieure à celle de l'EnKF. Ceci correspond au résultat théorique que nous avons obtenu : l'estimateur du filtre particulaire en général converge vers la moyenne conditionnelle de  $(X_k|Y_{1:k})$  dont l'erreur en moyenne quadratique est minimisée par rapport aux autres estimateurs de  $(X_k|Y_{1:k})$ . Comme le filtre de Kalman d'ensemble ne converge pas vers le filtre bayésien optimal, son estimateur de la moyenne conduit à une erreur en moyenne quadratique plus importante asymptotiquement. Pourtant, dans le scénario B1A1 (voir figures 10.15 et 10.16), où les trois composantes sont observées et le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand, comme la distribution des particules de l'EnKF, du WEnKF et du filtre SIR approchent la même distribution bayésienne qui est proche de la loi gaussienne de moyenne  $y_k$  et de covariance  $R_k$ , les estimateurs de la moyenne sont ainsi identiques. On voit ainsi qu'asymptotiquement, que les erreurs en moyenne quadratique des estimateurs diminuent vers la même valeur, et qu'elles atteignent la borne de Cramer-Rao dans ce cas.

On voit aussi dans les figures que le filtre WEnKF est toujours moins performant que le filtre SIR au niveau de l'erreur en moyenne quadratique de l'estimateur de la moyenne conditionnelle. Comme nous l'avons expliqué dans la partie de comparaison des distributions a posteriori, le WEnKF est réalisé avec une densité d'importance qui conduit une dispersion importante des poids des particules. La population de particules a tendance à s'appauvrir dans le temps et le WEnKF

propose donc de mauvaises estimations de la moyenne par rapport au filtre SIR. On observe dans la plupart des cas qu'il faut un très grand nombre de particules pour que l'erreur en moyenne quadratique du filtre WEnKF atteigne celle du filtre SIR.

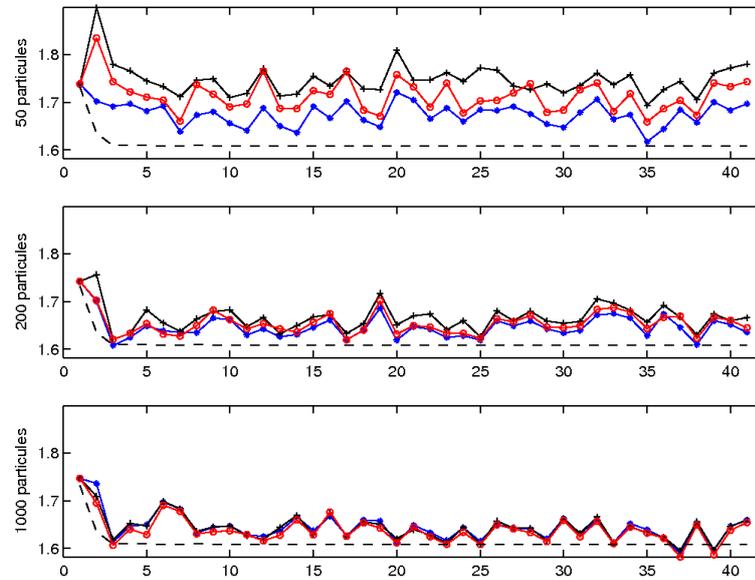


FIG. 10.15: Modèle de Lorenz - Scénario B1A1 (trois composantes observées,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

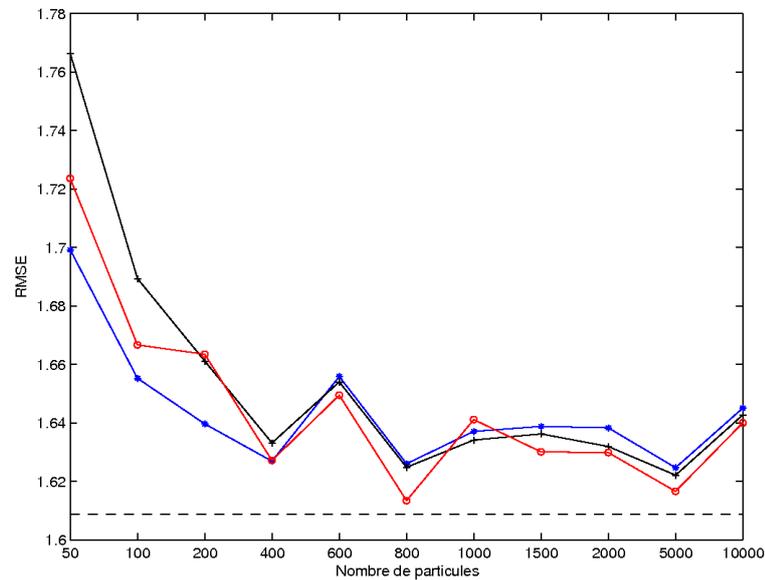


FIG. 10.16: Modèle de Lorenz - Scénario B1A1 (trois composantes observées,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant  $k = 10$  ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

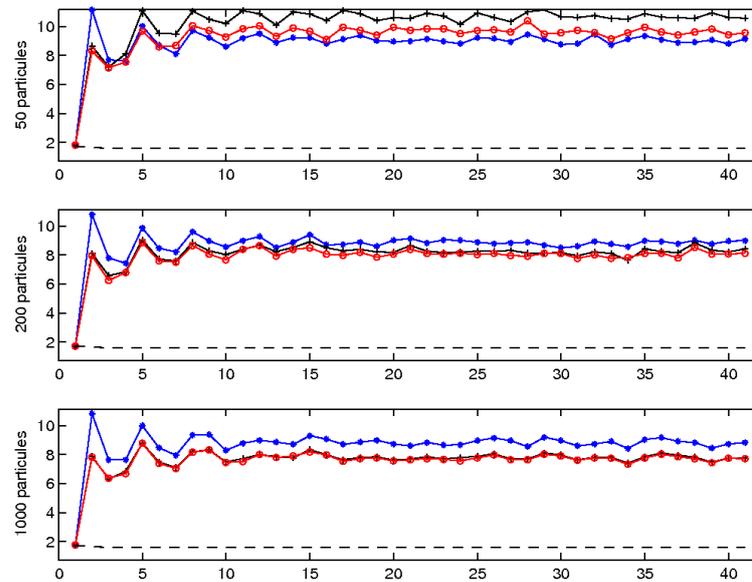


FIG. 10.17: Modèle de Lorenz - Scénario B2A1 (une composante observée,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

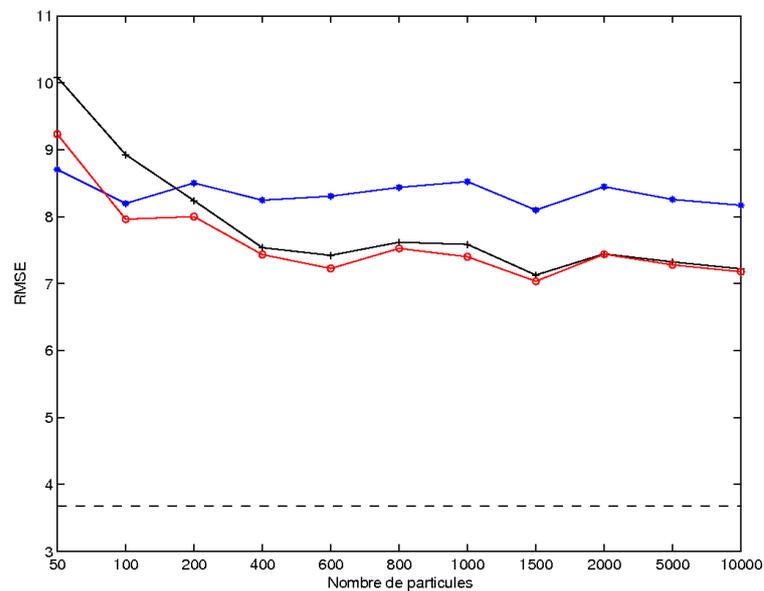


FIG. 10.18: Modèle de Lorenz - Scénario B2A1 (une composante observée,  $Q=25I$ ,  $R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant  $k = 10$  ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

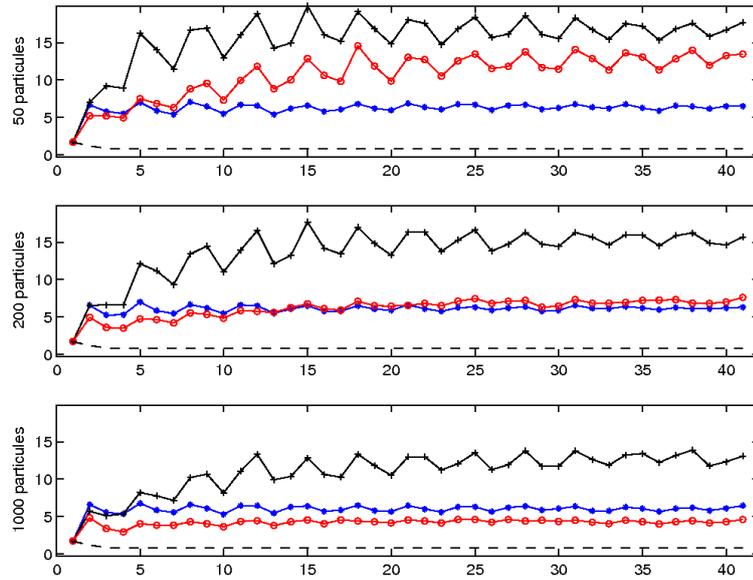


FIG. 10.19: Modèle de Lorenz - Scénario B1A2 (trois composantes observées,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

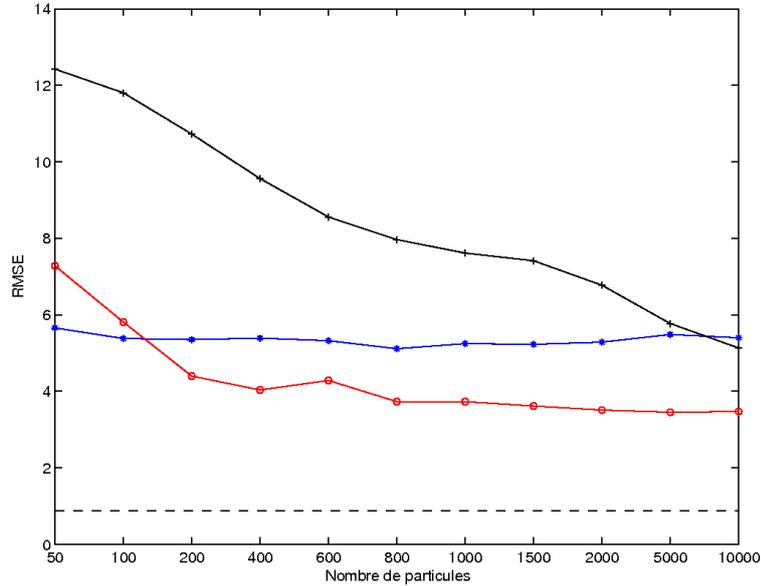


FIG. 10.20: Modèle de Lorenz - Scénario B1A2 (trois composantes observées,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant  $k = 10$  ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

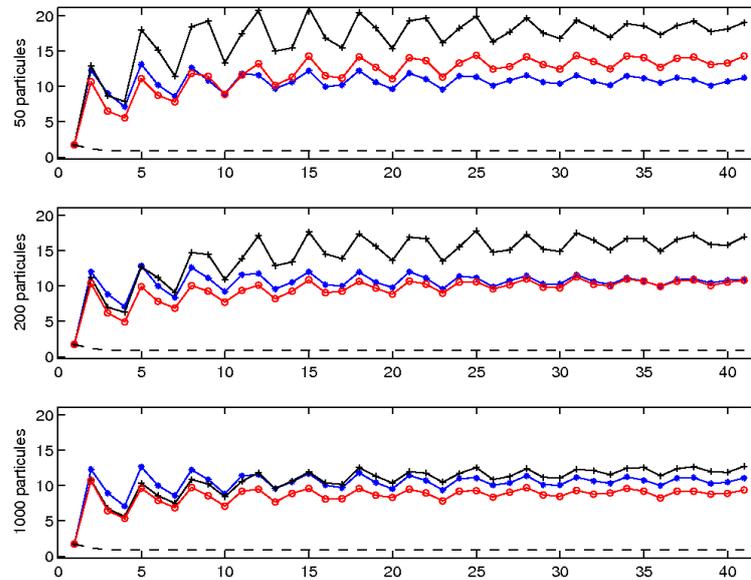


FIG. 10.21: Modèle de Lorenz - Scénario B2A2 (une composante observée,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; -\* : EnKF ; +- : WEnKF ; -o : SIR ; - - - : borne de Cramer-Rao.

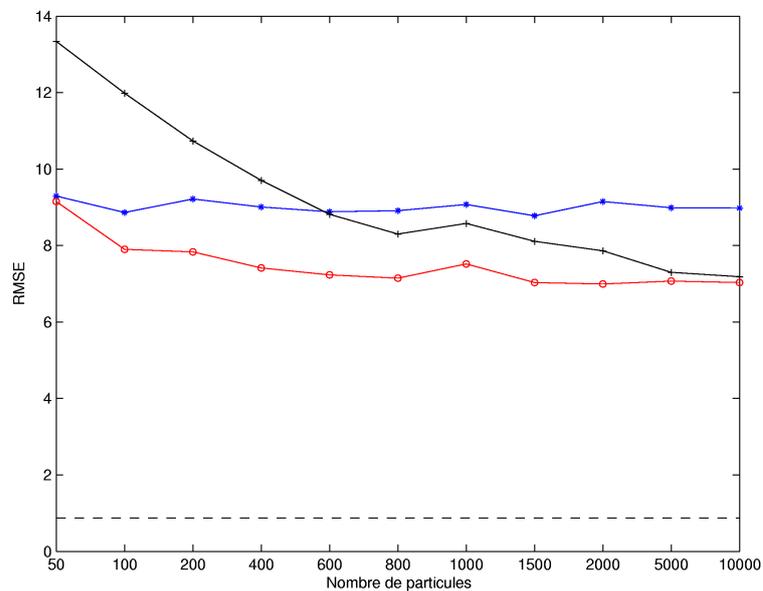


FIG. 10.22: Modèle de Lorenz - Scénario B2A2 (une composante observée,  $Q=I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant  $k = 10$  ; -\* : EnKF ; +- : WEnKF ; -o : SIR ; - - - : borne de Cramer-Rao.

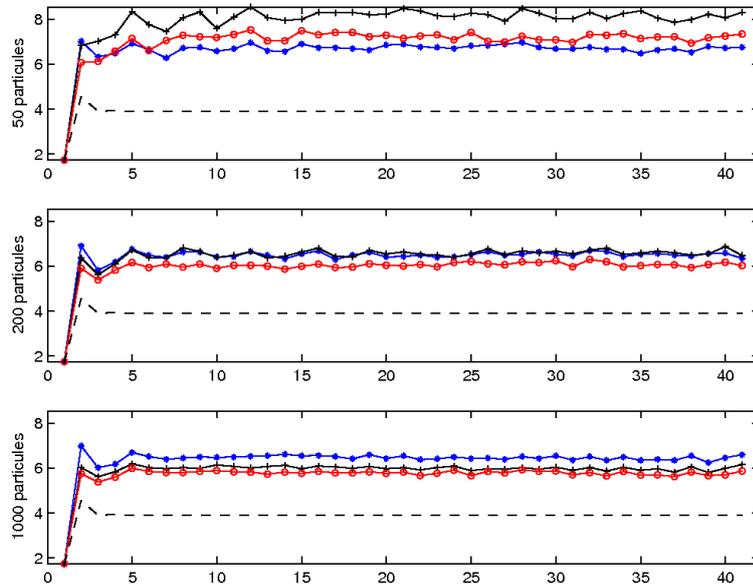


FIG. 10.23: Modèle de Lorenz - Scénario B1A3 (trois composantes observées,  $Q=25I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

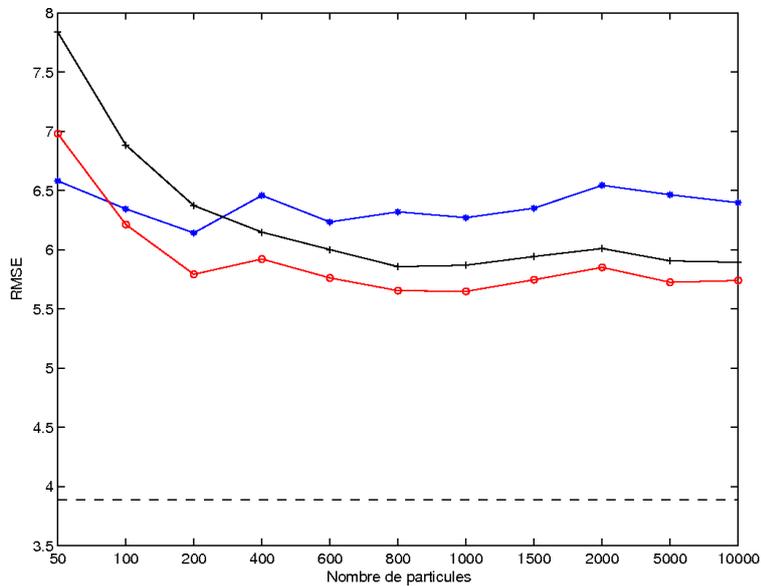


FIG. 10.24: Modèle de Lorenz - Scénario B1A3 (trois composantes observées,  $Q=25I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant  $k = 10$  ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

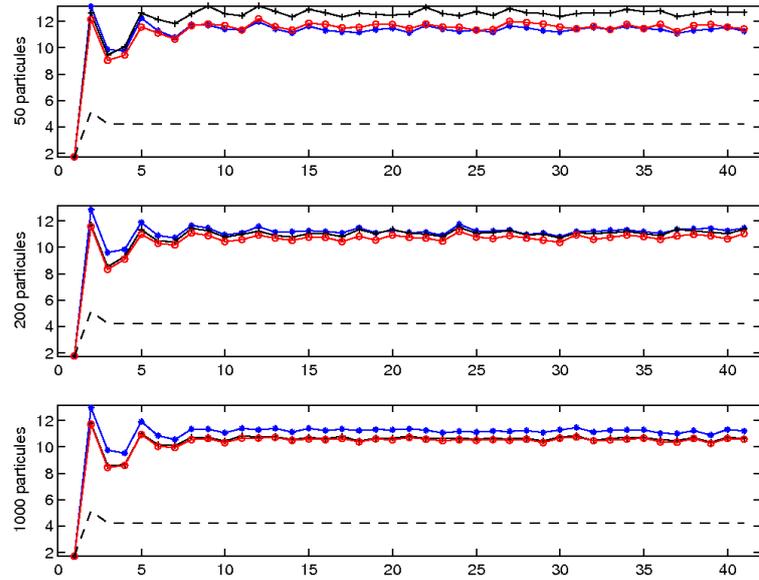


FIG. 10.25: Modèle de Lorenz - Scénario B2A3 (une composante observée,  $Q=25I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.

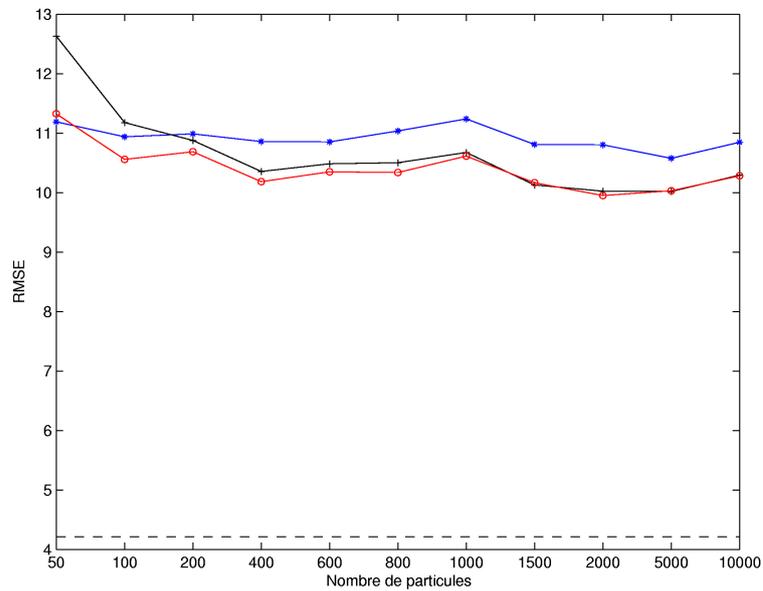


FIG. 10.26: Modèle de Lorenz - Scénario B2A3 (une composante observée,  $Q=25I$ ,  $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant  $k = 10$  ;  $-*$  : EnKF ;  $-+$  : WEnKF ;  $-o-$  : SIR ;  $- - -$  : borne de Cramer-Rao.



# Conclusions

Nous avons réalisé dans cette partie des simulations numériques des méthodes d'assimilation séquentielle de données sur les modèles de test. L'objectif principal est de comparer la performance du filtre de Kalman d'ensemble et du filtre particulaire, pour les différents scénarios du modèle.

Dans le cas du modèle linéaire simple, si on utilise peu de particules pour calculer les estimateurs, le filtre de Kalman d'ensemble est plus performant que le filtre particulaire. La variance et l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne et de la variance conditionnelles du filtre de Kalman d'ensemble est plus faible que celle des estimateurs du filtre particulaire. A l'asymptotique (quand le nombre de particules tend vers l'infini), le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulaire ont des performances similaires, car ces deux estimateurs convergent vers la moyenne et la variance conditionnelles du filtre de Kalman. La variance et l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs à l'asymptotique sont identiques, et la distribution des particules du filtre de Kalman d'ensemble et de ceux du filtre particulaire conforme à la distribution gaussienne du filtre de Kalman.

Dans le cas du modèle non linéaire gaussien de Lorenz, la performance des filtres dépend du scénario.

Si on considère l'erreur en moyenne quadratique de l'estimateur de la moyenne conditionnelle, avec peu de particules, le filtre de Kalman d'ensemble est plus performant que le filtre particulaire en général. Mais à l'asymptotique, le filtre particulaire conduit à une erreur en moyenne quadratique moindre. L'erreur en moyenne quadratique de l'estimateur de l'EnKF n'atteint celle de l'estimateur du filtre SIR que dans le cas où on a une très bonne confiance dans l'observation (toutes les composantes de l'état sont observées et le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand).

Si on considère la distribution a posteriori des particules des filtres, le filtre particulaire approche mieux la distribution bayésienne que le filtre de Kalman d'ensemble. La distribution des particules du filtre de Kalman d'ensemble approche toujours une loi gaussienne à cause de son mécanisme d'évolution des particules, elle approche bien la distribution bayésienne seulement dans le cas où la distribution bayésienne est proche d'une loi gaussienne. Dans nos simulations,

Observation complète		Erreur du modèle	
		fort	faible
Erreur d'observation	fort	EnKF	SIR
	faible	SIR	EnKF/SIR

Observation incomplète		Erreur du modèle	
		fort	faible
Erreur d'observation	fort	SIR	SIR
	faible	SIR	SIR

TAB. 10.2: Propositions d'utilisation de l'EnKF et du filtre SIR selon le rapport entre l'erreur du modèle et l'erreur d'observation, dans le cas où on utilise un nombre faible d'éléments d'ensemble, pour le modèle non linéaire gaussien à faible dimension.

on retrouve ce cas si le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand et toutes les composantes de l'état sont observées.

Par des simulations, on voit aussi que le filtre de Kalman d'ensemble pondéré converge vers le filtre bayésien à l'asymptotique. Pourtant, il est en général moins performant que le filtre SIR et il nécessite souvent un très grand nombre de particules pour atteindre la performance du filtre de SIR.

Les résultats de simulation obtenus confirment aussi ce que nous avons démontré sur la convergence du filtre de Kalman d'ensemble : l'estimateur du filtre de Kalman d'ensemble et du filtre particulière convergent vers l'estimateur du filtre de Kalman dans le cas du modèle linéaire gaussien. Dans le cas du modèle non linéaire gaussien, les deux estimateurs convergent vers les deux limites différentes.

En résumé, nous proposons dans la table 10.2 des préconisations de choix entre le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre SIR dans le cas où on utilise un nombre faible de particules, pour le modèle non linéaire gaussien à faible dimension. Ces propositions correspondent aux différents scénarios de l'erreur d'observation et de l'erreur du modèle. Dans le cas où il est possible d'utiliser un grand nombre de particules, le filtre SIR est toujours le meilleur choix.

# Conclusion générale et perspectives

## Synthèse des travaux

### Méthodes variationnelles et séquentielles de données

Les méthodes d'assimilation de données peuvent être classées en trois familles : l'interpolation classique, l'assimilation de données variationnelle et l'assimilation de données séquentielle.

L'interpolation classique est une méthode simple mais elle est délicate à utiliser en pratique en grande dimension à cause du coût de calcul. Les méthodes variationnelles relèvent de la théorie du contrôle optimal. Elles peuvent estimer en une fois l'état en temps et en espace. Le coût de calcul en grande dimension est faible par rapport aux méthodes séquentielles. Cependant, les méthodes variationnelles requièrent des écritures et des calculs complexes. De plus, comme la solution est déterministe, on n'obtient pas d'information sur la distribution de probabilité de l'état.

Les méthodes séquentielles relevant de l'estimateur bayésien fournissent une inférence complète sur la distribution de probabilité de l'état. La solution optimale peut être écrite dans le cas général sous forme analytique. Mais on ne peut pas la calculer numériquement, sauf dans le cas linéaire gaussien où elle se ramène aux équations du filtre de Kalman. Dans le cas général, la solution est approchée par des estimateurs de type Monte Carlo (filtre particulaire).

### Filtre de Kalman d'ensemble et les propriétés asymptotiques

Le filtre de Kalman d'ensemble a été proposé initialement comme une approximation du filtre de Kalman, il a ensuite été étendu au cas du modèle non linéaire gaussien. Son mécanisme d'évolution des particules est intuitivement semblable à celui du filtre particulaire. Il existe très peu de résultats théoriques sur les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble, alors qu'il est connu que le filtre particulaire converge vers le filtre bayésien optimal quand le nombre de particules tend vers l'infini.

Nous avons montré théoriquement que, quand le nombre d'éléments  $N$  tend vers l'infini, les éléments du filtre de Kalman d'ensemble, qui sont initialement dépendants, convergent vers des éléments indépendants et identiquement distribués selon une loi qui diffère de la loi a posteriori du filtre bayésien optimal dans le cas général. Dans le cas du modèle linéaire gaussien, cette loi asymptotique est gaussienne et n'est autre que la loi a posteriori du filtre de Kalman. Nous

démontrons la convergence presque sûre et dans  $\mathbb{L}^p$  de la mesure empirique des particules du filtre de Kalman d'ensemble, avec la vitesse de convergence usuelle  $1/\sqrt{N}$ .

Un papier de Jan Mandel et al. [28] paru en janvier 2009 démontre théoriquement la convergence du filtre de Kalman d'ensemble vers le filtre de Kalman dans le cas du modèle linéaire gaussien. L'idée de la preuve est relativement similaire à la notre : le gain de Kalman empirique de l'EnKF est borné par une constante qui ne dépend pas du nombre d'éléments  $N$ . Les éléments dépendants de l'EnKF sont ainsi échangeables avec les éléments indépendants et identiquement distribués selon la distribution a posteriori du filtre de Kalman, et la contiguïté des éléments est montrée dans  $\mathbb{L}^p$ . Et la démonstration dans nos travaux est plus générale au point où nous avons montré la convergence de l'EnKF pour la classe des modèles non linéaires gaussien dont la fonction du modèle est continue et localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini.

### **Comparaison entre le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulaire par des simulations**

Nous avons réalisé des simulations sur deux modèles de test : un modèle linéaire gaussien simple et le modèle de Lorenz qui appartient à une classe de modèles non linéaires gaussiens.

Pour le modèle linéaire gaussien, si on utilise peu de particules, le filtre de Kalman d'ensemble est plus performant que le filtre particulaire, au sens où la variance de l'estimateur et de l'erreur en moyenne quadratique sont plus faibles. Si le nombre de particules est suffisamment grand, le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulaire ont une performance semblable, car les deux estimateurs convergent vers la moyenne et la variance conditionnelles du filtre de Kalman.

Dans le cas du modèle de Lorenz, au niveau de l'erreur en moyenne quadratique de l'estimateur de la moyenne, si on utilise peu de particules, le filtre de Kalman d'ensemble est toujours plus performant que le filtre particulaire. Si on utilise un grand nombre de particules, l'estimateur du filtre particulaire conduit à une erreur en moyenne quadratique plus faible que celle du filtre de Kalman d'ensemble. L'erreur en moyenne quadratique de l'estimateur du filtre de Kalman d'ensemble atteint celle du filtre particulaire et la borne de Cramer-Rao, si on est dans le cas où le rapport de l'erreur du modèle sur l'erreur d'observation est grand et toutes les composantes de l'état sont observées. Au niveau de la distribution a posteriori, la distribution des particules du filtre de Kalman d'ensemble a tendance à approcher une loi gaussienne, alors que celle des particules du filtre particulaire approche bien la distribution bayésienne a posteriori. Les deux filtres conduisent à des distributions proches seulement dans le cas où la distribution bayésienne a posteriori est proche d'une loi gaussienne.

Comme le filtre particulaire requiert un grand nombre de particules pour pouvoir fournir un bon estimateur et éviter le phénomène de dégénérescence de poids des particules, l'EnKF peut fournir un meilleur estimateur si on utilise peu de particules et si la distribution bayésienne opti-

male est proche d'une loi gaussienne. Cela explique le succès rencontré par le filtre de Kalman d'ensemble dans les applications opérationnelles.

## **Perspectives**

Les perspectives immédiates de ces travaux de thèse portent sur un certain nombre de points.

### **Étude de la convergence du filtre de Kalman d'ensemble**

Dans nos travaux, la convergence du filtre de Kalman d'ensemble est montrée sous l'hypothèse que la fonction du modèle est continue et localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini. Cette hypothèse pourrait être encore relaxée et il serait intéressant d'obtenir une démonstration pour les cas plus généraux.

### **Étude du filtre de Kalman d'ensemble pondéré (WEnKF)**

L'idée du WEnKF est de modifier le filtre de Kalman d'ensemble de telle sorte que son estimateur converge vers l'estimateur bayésien quand le nombre de particules tend vers l'infini. On ajoute donc une étape de pondération des particules et les particules sont redistribuées selon un principe d'échantillonnage d'importance.

L'algorithme du filtre WEnKF avec la formulation des poids des particules est disponible dans la thèse de Papadakis [31]. Pourtant, d'après notre remarque de la section 7.3, cette formulation de calcul de poids des particules n'est qu'une approximation de la formulation exacte. Une étude théorique sera nécessaire pour confirmer la convergence du WEnKF vers le filtre bayésien optimal. Cette étude sera rédigée dans le cadre du projet PREVASSEMBLE (programme Conception et Simulation, ANR, coordinateur : Olivier Talagrand).

Pourtant, grâce aux résultats de simulation sur le modèle de Lorenz, on constate que le filtre de Kalman d'ensemble pondéré converge bien vers le filtre bayésien optimal.

D'un point de vue pratique, comme le filtre WEnKF utilise les équations du filtre de Kalman d'ensemble pour l'étape de prédiction, il peut être utilisé pour les modèles à grande dimension. Pourtant, à partir des résultats de simulation de la thèse, on voit que le filtre WEnKF a encore une performance limitée par un problème de dégénérescence rapide des poids. L'algorithme du filtre WEnKF pourrait être amélioré par l'utilisation d'autres techniques de redistribution et en faisant varier le nombre d'éléments d'ensemble. Mais ceci dépasse le cadre de cette thèse.

### **Mise en oeuvre des comparaisons sur les modèles réels en grande dimension**

Nous avons effectué des comparaisons des estimateurs sur des modèles de test simples à faible dimension, et les résultats tirés ne peuvent pas être généralisés pour les modèles réels, surtout pour des modèles de grande dimension. Comme nous avons remarqué au début de ces travaux, un des

points délicats dans l'assimilation de données est le problème de grande dimension du vecteur d'état, qui conduit à des calculs coûteux. La performance du filtre de Kalman d'ensemble par rapport au filtre particulaire en grande dimension n'est pas encore étudiée, à notre connaissance, dans la littérature et une telle étude pourrait être utile dans le futur.

# **Annexes**



# Formule de Sherman-Morrison-Woodbury

Si les matrices  $P$  et  $R$  sont inversibles, alors

$$PH^*(HPH^* + R)^{-1} = (P^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}H^*R^{-1}.$$

*Démonstration.* On vérifie d'abord

$$[P - PH^*(HPH^* + R)^{-1}HP](P^{-1} + H^*R^{-1}H) = I.$$

En effet,

$$\begin{aligned} & [P - PH^*(HPH^* + R)^{-1}HP](P^{-1} + H^*R^{-1}H) \\ = & I + PH^*R^{-1}H - PH^*(HPH^* + R)^{-1}H - PH^*(HPH^* + R)^{-1}HPH^*R^{-1}H \\ = & I + PH^*R^{-1}H - PH^*(HPH^* + R)^{-1}H \\ & - PH^*(HPH^* + R)^{-1}(HPH^* + R - R)R^{-1}H \\ = & I + PH^*R^{-1}H - PH^*(HPH^* + R)^{-1}H \\ & - PH^*R^{-1}H + PH^*(HPH^* + R)^{-1}H \\ = & I. \end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$(P^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1} = [P - PH^*(HPH^* + R)^{-1}HP].$$

et alors,

$$\begin{aligned} & (P^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}H^*R^{-1} \\ = & [P - PH^*(HPH^* + R)^{-1}HP]H^*R^{-1} \\ = & PH^*[I - (HPH^* + R)^{-1}(HPH^* + R - R)]R^{-1} \\ = & PH^*[I - I + (HPH^* + R)^{-1}R]R^{-1} \\ = & PH^*(HPH^* + R)^{-1} \end{aligned}$$

□



# Les inégalités

## Annexe B1 : Inégalité de Minkowski

Soit  $(S, \mu)$  un espace mesuré et soit  $p \in [1, +\infty[$ . Alors pour tout  $(f, g) \in L_p(S)^2$ , où  $L_p(S)^2$  est l'espace de fonctions définies sur  $S$  dont la puissance  $p$ -ième de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue, on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

c'est-à-dire

$$\left( \int_S |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_S |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_S |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

## Annexe B2

Soit  $U \in \mathbb{R}^m$  un vecteur aléatoire gaussien centré, de matrice de covariance  $\Sigma$ , et soit  $p \geq 1$ . Alors,

$$(\mathbb{E} |U|^p)^{1/p} \leq c_p \lambda_{\max}^{1/2}(\Sigma),$$

où  $c_p$  est une constante et  $\lambda_{\max}^{1/2}(\Sigma)$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice  $\Sigma$ .

*Preuve.* Comme  $\Sigma$  est une matrice symétrique semi-définie positive, il existe une matrice orthogonale  $O$  et une matrice diagonale  $D$  avec des coefficients diagonaux positifs ou nuls, telles que  $\Sigma = ODO^*$ . On vérifie que si  $X$  est un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance identité, alors le vecteur aléatoire  $U = \Sigma^{1/2}X$ , où  $\Sigma^{1/2} = OD^{1/2}O^*$ , est gaussien centré, de matrice de covariance  $\Sigma$ . Alors,

$$|U|^2 = U^*U = X^*\Sigma X \leq \lambda_{\max}(\Sigma) |X|^2$$

de sorte que

$$\mathbb{E} |U|^p = \mathbb{E} (|U|^2)^{p/2} \leq \lambda_{\max}^{p/2}(\Sigma) \mathbb{E} |X|^p \leq c_p^p \lambda_{\max}^{p/2}(\Sigma)$$

d'où

$$(\mathbb{E} |U|^p)^{1/p} \leq c_p \lambda_{\max}^{1/2}(\Sigma).$$

□

### Annexe B3 : Inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund [19]

Suppose que  $X, X_1, X_2, \dots, X_n$  soient des variables aléatoires indépendantes centrées et  $\mathbb{E} |X|^p < \infty \quad \forall p \geq 1$ . En posant  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $n \geq 1$ , alors il existe une constante  $B_p$  telle que

$$\mathbb{E} |S_n|^p \leq B_p \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{p/2}.$$

En divisant par  $n^p$ , on obtient

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{n} S_n \right|^p \leq \frac{B_p}{n^{p/2}} \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{p/2},$$

et

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} S_n \right|^p \right\}^{1/p} &\leq \frac{B_p^{1/p}}{\sqrt{n}} \left\{ \mathbb{E} |X|^p \right\}^{1/p} < \infty \quad \forall p \geq 2, \\ \left\{ \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} S_n \right|^p \right\}^{1/p} &\leq \frac{B_p^{1/2}}{\sqrt{n}} \left\{ \mathbb{E} |X|^2 \right\}^{1/2} < \infty \quad 1 \leq \forall p \leq 2. \end{aligned}$$

# Borne de Cramer-Rao pour le filtrage non linéaire discret

Pour évaluer les performances des filtres, dans les cas d'école où le système (1.2-1.3) est parfaitement connu, il est classique de comparer les erreurs en moyenne quadratique des estimateurs de l'état induit par chacun des filtres. Il est alors intéressant de comparer ces erreurs à la borne de Cramer-Rao (CR) qui est une borne inférieure pour l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs.

## Cas général

Considérons le système (1.2-1.3). Si  $\widehat{X}_k$  est un estimateur du vecteur d'état  $X_k$  sachant les observations  $Y_{1:k}$ , alors la matrice de covariance de l'estimateur  $\widehat{X}_k$  admet une borne inférieure  $J_k^{-1}$

$$\mathbb{E} [(\widehat{X}_k - X_k)(\widehat{X}_k - X_k)^*] \geq J_k^{-1} \quad (1)$$

La matrice  $J_k$  est la matrice d'information, de dimension  $m \times m$ . Elle peut être calculée de manière récursive comme suit [39]

$$J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21}(J_k + D_k^{11})^{-1}D_k^{12} \quad (2)$$

où

$$\begin{aligned} D_k^{11} &= -\mathbb{E} \{ \nabla_{x_k} [\nabla_{x_k} \log p(x_{k+1}|x_k)]^* \} \\ D_k^{21} &= -\mathbb{E} \{ \nabla_{x_k} [\nabla_{x_{k+1}} \log p(x_{k+1}|x_k)]^* \} \\ D_k^{12} &= [D_k^{21}]^* \\ D_k^{22} &= -\mathbb{E} \{ \nabla_{x_{k+1}} [\nabla_{x_{k+1}} \log p(x_{k+1}|x_k)]^* \} \\ &\quad -\mathbb{E} \{ \nabla_{x_{k+1}} [\nabla_{x_{k+1}} \log p(y_{k+1}|x_{k+1})]^* \}. \end{aligned}$$

où  $\mathbb{E} \{.\}$  représente l'espérance en fonction de  $x_k, x_{k+1}$  et  $y_{k+1}$ .  $\nabla_{x_k}$  est la dérivée partielle d'ordre 1 en fonction de  $x_k$ . Le schéma (2) démarre avec la matrice d'information initiale

$$J_0 = \mathbb{E} \{ [\nabla_{x_0} \log p_0(x_0)] [\nabla_{x_0} \log p_0(x_0)]^* \}$$

où  $\mathbb{E} \{.\}$  représente l'espérance en fonction de  $x_0$ .

## Cas d'un modèle à bruit gaussien

Lorsque les bruits  $W_k$ ,  $V_k$  et l'état initial  $X_0$  du système (1.2-1.3) sont de loi gaussienne, c'est-à-dire

$$\mu_0(dx_0) = \mathcal{N}(0, Q_0), \quad p_k^W(dw) = \mathcal{N}(0, Q_k) \quad \text{et} \quad q_k^V(dv) = \mathcal{N}(0, R_k)$$

avec  $Q_0$ ,  $Q_k$  et  $R_k$  inversibles, alors l'écriture de  $D_k^{11}$ ,  $D_k^{21}$ ,  $D_k^{22}$  et  $J_0$  se simplifie et on obtient [34]

$$J_0 = Q_0^{-1} \tag{3}$$

$$D_k^{11} = \mathbb{E} \{F_{k+1}^* Q_{k+1}^{-1} F_{k+1}\} \tag{3}$$

$$D_k^{12} = -\mathbb{E} \{F_{k+1}^*\} Q_{k+1}^{-1} \tag{4}$$

$$D_k^{22} = Q_{k+1}^{-1} + \mathbb{E} \{H_{k+1}^* R_{k+1}^{-1} H_{k+1}\}$$

où  $F_{k+1} = f'_{k+1}(X_k)$  est la matrice jacobienne de  $f_{k+1}(x_k)$  évaluée au point  $x_k = X_k$  et où  $H_{k+1} = h'_{k+1}(X_{k+1})$  est la matrice jacobienne de  $h_{k+1}(x_{k+1})$  évaluée au point  $x_{k+1} = X_{k+1}$ .

## Calcul de la borne de Cramer-Rao

En pratique, calculer la borne de Cramer-Rao revient à évaluer les espérances dans (3) et (4). Une approximation Monte Carlo est nécessaire dans le cas d'un modèle  $f_k$  non linéaire. Des réalisations du vecteur d'état sont simulées et notées  $\{x_k^i, i = 1, \dots, M\}$ , puis les espérances dans (3) et (4) sont approchées par les moyennes empiriques

$$D_k^{11} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (F_k^i)^* Q_k^{-1} F_k^i$$

$$D_k^{12} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (F_k^i)^* Q_k^{-1}$$

avec  $F_k^i = [\nabla_{x_k} f^*(x_k^i)]^*$  le jacobien de  $f_k(x_k)$  évalué en  $x_k^i$ .

De la même façon, la matrice de covariance de l'estimateur  $\widehat{X}_k$  dans l'équation (1) est estimée empiriquement à partir de  $M$  réalisations  $\widehat{x}_k^i$  et  $x_k^i$  :

$$\mathbb{E} [(\widehat{X}_k - X_k)(\widehat{X}_k - X_k)^*] \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\widehat{x}_k^i - x_k^i)(\widehat{x}_k^i - x_k^i)^*$$

Pour comparer, l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs avec la borne de Cramer-Rao, on est amené à comparer deux matrices. Pour simplification, on choisit de comparer les traces des matrices

$$C(\widehat{X}_k) \triangleq \mathbb{E} [|\widehat{X}_k - X_k|^2] = \mathbb{E} [(\widehat{X}_k - X_k)^*(\widehat{X}_k - X_k)] \geq \text{Tr}(J_k^{-1}) \tag{5}$$

où  $\text{Tr}(\cdot)$  désigne l'opération trace de la matrice.

## Borne de Cramer-Rao et les estimateurs

D'après Section 4.2.2, l'estimateur bayésien  $m_k^a = \mathbb{E} [X_k | Y_{1:k}]$  est l'estimateur du minimum de variance parmi tous les estimateurs de  $X_k$  sachant  $Y_{1:k}$ , nous avons donc, pour un estimateur quelconque  $\widehat{X}_k$

$$C(\widehat{X}_k) \geq C(m_k^a) \geq \text{Tr}(J_k^{-1}).$$

La moyenne empirique  $m_k^{N,a}$  du filtre particulaire est une estimation de la moyenne conditionnelle  $m_k^a$ , nous avons donc

$$C(m_k^{N,a}) \geq C(m_k^a) \geq \text{Tr}(J_k^{-1}).$$

Dans le cas *linéaire gaussien*, en notant  $X_k^a$  l'estimateur BLUE défini par (2.1), d'après Section 4.3 nous avons

$$C(X_k^a) = C(m_k^a) \geq \text{Tr}(J_k^{-1}).$$



# Test de normalité de Jarque-Bera

Le test de Jarque-Bera est un test d'hypothèse qui cherche à déterminer si des données suivent une loi normale. La statistique de test est définie par :

$$JB = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

où  $n$  est le nombre d'observations,  $S$  est l'estimateur du coefficient d'asymétrie et  $K$  est l'estimateur du kurtosis, qui sont définis par

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}}$$
$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}$$

Sous l'hypothèse nulle que les données suivent une loi normale, la statistique  $JB$  suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté.



# Bibliographie

- [1] A. F. Bennett, B. Chua, and L. Leslie. Generalized inversion of a global numerical weather prediction model. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 60 :165–178, 1996. [cited at p. 27]
- [2] A.F. Bennett. *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge University Press, 1992. [cited at p. 2, 24, 26]
- [3] F. Bouttier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. *Meteorological Training Course Lecture Series (ECMWF)*, 1999. [cited at p. 2, 10, 12, 17, 18, 21, 28]
- [4] D. Crisan and A. Doucet. Convergence of sequential Monte Carlo methods. Technical report, Cambridge University, 2000. Technical Report, CUED/FINFENG /TR381. [cited at p. 2, 37, 38, 40]
- [5] D. Crisan and A. Doucet. A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(3) :736–746, 2002. [cited at p. 2, 37, 38]
- [6] A. Cuzol. *Analyse d'écoulements fluides à partir de séquences d'images : estimation de champs de vitesses et suivi temporel par filtrage stochastique non linéaire*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2006. [cited at p. 2]
- [7] N. Daget. Revue des méthodes d'assimilation. Technical report, European Centre for Research and Advanced Training in Scientific Computation, 2007. [cited at p. 10, 12]
- [8] R. Daley. *Atmospheric data analysis*. Cambridge University Press, 1991. [cited at p. 12]
- [9] P. Del Moral. *Feynman-Kac Formulae. Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*. Springer, 2004. [cited at p. 2, 37]
- [10] P. Del Moral and A. Guionnet. On the stability of measure valued processes. applications to nonlinear filtering and interacting particle system, 1998. Publication du Laboratoire de Statistique et Probabilités 3–98. [cited at p. 37, 38]
- [11] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Statistics for Engineering and Information Science. Springer–Verlag, New York, 2001. [cited at p. 2, 38]
- [12] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for bayesian filtering. *Statist. Comput.*, 10(3) :197–208, 1999. [cited at p. 2, 34]

- [13] G. Evensen. Using the extended Kalman filter with a multilayer quasi-geostrophic ocean model. *Geophys. Res.*, 97(C11) :17905–17924, 1992. [cited at p. 41]
- [14] G. Evensen. Inverse methods and data assimilation in nonlinear ocean models. *Physica D*, 77 :108–129, 1994. [cited at p. 2, 27]
- [15] G. Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *Geophys. Res.*, 99 :17143–10162, 1994. [cited at p. 3, 41]
- [16] G. Evensen. Advanced data assimilation for strongly nonlinear dynamics. *Month. Weather Rev.*, 125 :1342–1354, 1997. [cited at p. 95]
- [17] G. Evensen. Ensemble Kalman filter : theoretical formulation and practical implementations. *Ocean Dynamics*, 53(4) :343–367, November 2003. [cited at p. 51]
- [18] G. Evensen. *Data Assimilation. The Ensemble Kalman Filter*. Springer, Berlin, 2006. [cited at p. 3, 19, 27, 41]
- [19] A. Gut. *Probability : A Graduate Course*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2005. [cited at p. 142]
- [20] Elias Valur Holm. Lecture notes on assimilation algorithms. Reading, UK, European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, 2003. [cited at p. 12, 20, 21]
- [21] Xiao-Li Hu, T. B. Schon, and L. Ljung. A basic convergence result for particle filtering. *Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on]*, 56(4) :1337–1348, 2008. [cited at p. 38, 39]
- [22] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, 1970. [cited at p. 40]
- [23] E. Kalnay. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge University Press, 2003. [cited at p. 12]
- [24] F. Le Gland. Filtrage particulaire. Actes du 19ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, Paris, September 8-10, 2003, Volume II, pp. 1-8. [cited at p. 34]
- [25] F. Le Gland. Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés. Lecture notes, DEA STIR, Université de Rennes 1. [cited at p. 30, 32]
- [26] F. Le Gland and N. Oudjane. Stability and uniform approximation of nonlinear filterings using the hilbert metric, and application to particle filters. *Ann. Appl. Probab.*, 14(1) :144–187, 2004. [cited at p. 2, 37, 39]
- [27] E. Lorenz. Deterministic non periodic flow. *JAS*, 1963. [cited at p. 94]
- [28] J. Mandel, L. Cobb, and J. Beezley. On the convergence of the Ensemble Kalman Filter, 2009. <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:0901.2951>. [cited at p. 89, 134]

- [29] Henry P. McKean. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. *Lectures Series in Differential Equations*, Volume 2, Volume 19 of Van Nostrand Mathematical Studies :177–194, 1969. Vans Nostrand Reinhold, NewYork. [cited at p. 54]
- [30] R. N. Miller, M. Ghil, and F. Gauthiez. Advanced data assimilation in strongly nonlinear dynamical systems. *Atmos. Sci.*, 51 :1037–1056, 1994. [cited at p. 41, 95]
- [31] N. Papadakis. *Assimilation de données images : Application au suivi de Courbes et de Champs de Vecteurs*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Novembre 2007. [cited at p. 2, 79, 135]
- [32] A. Persson. *User Guide to ECMWF forecast products*. Meteorological Bulletin M3.2, 2001. Designed, edited and printed by ECMWF. [cited at p. 15]
- [33] D.T. Pham. Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems. *Month. Weather Rev.*, (129) :1194–1207, 2001. [cited at p. 3, 95]
- [34] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter : Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, 2004. [cited at p. 2, 144]
- [35] M. Sanjeev Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50 :174–188, February 2002. [cited at p. 33, 34, 36]
- [36] Y. K. Sasaki. A fundamental study of the numerical prediction based on the variational principle. *J. Met. Soc. Japan*, 33 :262–275, 1955. [cited at p. 19]
- [37] Y. K. Sasaki. An objective analysis based on the variational method. *J. Met. Soc. Japan*, 2(36) :77–88, 1958. [cited at p. 19]
- [38] Alain-Sol Sznitman. Topics in propagation of chaos. In Paul-Louis Hennequin, editor, *Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX, 1989*, volume 1464 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 165–251. Springer–Verlag, Berlin, 1991. [cited at p. 54]
- [39] P. Tichavsky, C. Muravchik, and A. Nehorai. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(5) :1386–1396, 1998. [cited at p. 143]
- [40] V. D. Tran, F. Le Gland, and V. Monbet. Filtre de Kalman d’ensemble et filtres particuliers pour le modèle de lorenz. In *Actes de la Manifestation des Jeunes Chercheurs STIC (MajecSTIC’06)*, Lorient, November 22-24, 2006. [cited at p. 95]
- [41] F. Uboldi and M. Kamachi. Time-space weak-constraint data assimilation for nonlinear models. *Tellus A*, 52, August 2000. [cited at p. 19, 27]
- [42] P. J. Van Leeuwen and G. Evensen. Data assimilation and inverse methods in terms of a probabilistic formulation. *Monthly weather review*, 124(12) :2898–2913, 1996. [cited at p. 34]



# Liste des symboles et des abréviations

Abbreviation	Description	Definition
3D-Var	Assimilation variationnelle tri-dimensionnelle	page 20
4D-Var	Assimilation variationnelle quadri-dimensionnelle	page 21
$C_b(\mathbb{R}^m)$	Ensemble des fonctions continues bornées définies sur $\mathbb{R}^m$	page 37
BLUE	Best Linear Unbiased Estimator	page 15
CR	Borne de Cramer-Rao	page 143
EnKF	Ensemble Kalman Filter	page 41
i.i.d.	indépendant et identiquement distribué	page 53
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$	Ensemble des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^m$	page 37
SIR	Sequential Importance Resampling	page 36
WEnKF	Weighted Ensemble Kalman Filter	page 79



# Table des figures

8.1	Une trajectoire du modèle de Lorenz résolue par le schéma d'Euler dans l'intervalle de temps $[0; 20]$ , avec le pas de temps 0.005. . . . .	95
9.1	Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 ( $Q=25I$ , $R=I$ ) - Dispersion des estimateurs de la moyenne conditionnelle pour l'EnKF et le filtre particulaire en fonction du temps ; - - - : solution de référence ; — : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ; $\circ$ : observation. . . . .	98
9.2	Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 ( $Q=I$ , $R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la moyenne conditionnelle pour l'EnKF et le filtre particulaire en fonction du temps ; - - - : solution de référence ; — : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ; $\circ$ : observation. . . . .	99
9.3	Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 ( $Q=R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la moyenne conditionnelle pour l'EnKF et le filtre particulaire en fonction du temps ; - - - : solution de référence ; — : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ; $\circ$ : observation. . . . .	99
9.4	Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 ( $Q=25I$ , $R=I$ ) - Dispersion des estimateurs de la variance conditionnelle pour l'EnKF (à gauche) et le filtre particulaire (à droite) en fonction du temps, avec 50, 200 et 1000 particules ; — : variance conditionnelle du filtre de Kalman. . . . .	100
9.5	Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 ( $Q=I$ , $R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la variance conditionnelle pour l'EnKF (à gauche) et le filtre particulaire (à droite) en fonction du temps, avec 50, 200 et 1000 particules ; — : variance conditionnelle du filtre de Kalman. . . . .	101
9.6	Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 ( $Q=R=25I$ ) - Dispersion des estimateurs de la variance conditionnelle pour l'EnKF (à gauche) et le filtre particulaire (à droite) en fonction du temps, avec 50, 200 et 1000 particules ; — : variance conditionnelle du filtre de Kalman. . . . .	101
9.7	Modèle linéaire gaussien - Évolution des particules des filtres EnKF et SIR, avec 10 particules, de l'instant $k = 14$ à l'instant $k = 15$ ; + : EnKF ; + : filtre particulaire ; $\circ$ : observation ; * : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman ; — : poids des particules.	102

9.8	Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 (Q=25I, R=I) - Histogramme des particules à l'instant $k = 15$ pour l'EnKF et le filtre particulaire avec 50, 200 et 1000 particules ; — : loi a posteriori du filtre de Kalman ; - - - : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman. . . . .	103
9.9	Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 (Q=I, R=25I) - Histogramme des particules à l'instant $k = 15$ pour l'EnKF et le filtre particulaire avec 50, 200 et 1000 particules ; — : loi a posteriori du filtre de Kalman ; - - - : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman. . . . .	104
9.10	Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 (Q=R=25I)- Histogramme des particules à l'instant $k = 15$ pour l'EnKF et le filtre particulaire avec 50, 200 et 1000 particules ; — : loi a posteriori du filtre de Kalman ; - - - : moyenne conditionnelle du filtre de Kalman. . . . .	104
9.11	Modèle linéaire gaussien - Scénario A1 (Q=25I, R=I) - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; -* : EnKF ; - - + : filtre particulaire. . . . .	107
9.12	Modèle linéaire gaussien - Scénario A2 (Q=I, R=25I) - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; -* : EnKF ; - - + : filtre particulaire. . . . .	107
9.13	Modèle linéaire gaussien - Scénario A3 (Q=R=25I) - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; -* : EnKF ; - - + : filtre particulaire. . . . .	108
9.14	Modèle linéaire gaussien - Erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules (de 10 à 5000), à l'instant $k=15$ pour les 3 scénarios A1 (Q=25I, R=I), A2 (Q=I, R=25I), A3 (Q=R=25I) ; -* : EnKF ; - - + : filtre particulaire . . . . .	108
10.1	Modèle de Lorenz - Scénario B1 (trois composantes observées) - Les estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; 50 particules ; — : EnKF ; — : filtre particulaire ; + : solution de référence ; o : observation. . . . .	110
10.2	Modèle de Lorenz - Scénario B2 (une composante observée) - Les estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; 50 particules ; — : EnKF ; — : filtre particulaire ; + : solution de référence ; o : observation. . . . .	111
10.3	Modèle de Lorenz - distribution jointe (x,y) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B1A1 (3 composantes observées, Q=25I, R=I). . . . .	113
10.4	Modèle de Lorenz - distribution jointe (y,z) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B1A1 (3 composantes observées, Q=25I, R=I). . . . .	113
10.5	Modèle de Lorenz - distribution jointe (x,y) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B2A1 (une composantes observée, Q=25I, R=I). . . . .	114
10.6	Modèle de Lorenz - distribution jointe (y,z) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B2A1 (une composantes observée, Q=25I, R=I). . . . .	114
10.7	Modèle de Lorenz - distribution jointe (x,y) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B1A3 (3 composantes observées, Q=R=25I). . . . .	116

10.8	Modèle de Lorenz - distribution jointe (y,z) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B1A3 (3 composantes observées, $Q=R=25I$ ). . .	116
10.9	Modèle de Lorenz - distribution jointe (x,y) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B2A3 (une composante observée, $Q=R=25I$ ). . .	117
10.10	Modèle de Lorenz - distribution jointe (y,z) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B2A3 (une composante observée, $Q=R=25I$ ). . .	117
10.11	Modèle de Lorenz - distribution jointe (x,y) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B1A2 (3 composantes observées, $Q=I, R=25I$ ). . .	119
10.12	Modèle de Lorenz - distribution jointe (y,z) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B1A2 (3 composantes observées, $Q=I, R=25I$ ). . .	119
10.13	Modèle de Lorenz - distribution jointe (x,y) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B2A2 (une composante observée, $Q=I, R=25I$ ). . .	120
10.14	Modèle de Lorenz - distribution jointe (y,z) des filtres avec 1000 particules, de l'instant $k=6$ à l'instant $k=15$ , scénario B2A2 (une composante observée, $Q=I, R=25I$ ). . .	120
10.15	Modèle de Lorenz - Scénario B1A1 (trois composantes observées, $Q=25I, R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; <b>-*-</b> : EnKF ; <b>-+-</b> : WEnKF ; <b>-o-</b> : SIR ; <b>- - -</b> : borne de Cramer-Rao. . . . .	124
10.16	Modèle de Lorenz - Scénario B1A1 (trois composantes observées, $Q=25I, R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant $k = 10$ ; <b>-*-</b> : EnKF ; <b>-+-</b> : WEnKF ; <b>-o-</b> : SIR ; <b>- - -</b> : borne de Cramer-Rao. . . . .	124
10.17	Modèle de Lorenz - Scénario B2A1 (une composante observée, $Q=25I, R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; <b>-*-</b> : EnKF ; <b>-+-</b> : WEnKF ; <b>-o-</b> : SIR ; <b>- - -</b> : borne de Cramer-Rao. . . . .	125
10.18	Modèle de Lorenz - Scénario B2A1 (une composante observée, $Q=25I, R=I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant $k = 10$ ; <b>-*-</b> : EnKF ; <b>-+-</b> : WEnKF ; <b>-o-</b> : SIR ; <b>- - -</b> : borne de Cramer-Rao. . . . .	125
10.19	Modèle de Lorenz - Scénario B1A2 (trois composantes observées, $Q=I, R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; <b>-*-</b> : EnKF ; <b>-+-</b> : WEnKF ; <b>-o-</b> : SIR ; <b>- - -</b> : borne de Cramer-Rao. . . . .	126
10.20	Modèle de Lorenz - Scénario B1A2 (trois composantes observées, $Q=I, R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant $k = 10$ ; <b>-*-</b> : EnKF ; <b>-+-</b> : WEnKF ; <b>-o-</b> : SIR ; <b>- - -</b> : borne de Cramer-Rao. . . . .	126
10.21	Modèle de Lorenz - Scénario B2A2 (une composante observée, $Q=I, R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; <b>-*-</b> : EnKF ; <b>-+-</b> : WEnKF ; <b>-o-</b> : SIR ; <b>- - -</b> : borne de Cramer-Rao. . . . .	127

10.22	Modèle de Lorenz - Scénario B2A2 (une composante observée, $Q=I$ , $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant $k = 10$ ; <i>-*-</i> : EnKF ; <i>-+-</i> : WEnKF ; <i>-o-</i> : SIR ; <i>---</i> : borne de Cramer-Rao. . . . .	127
10.23	Modèle de Lorenz - Scénario B1A3 (trois composantes observées, $Q=25I$ , $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; <i>-*-</i> : EnKF ; <i>-+-</i> : WEnKF ; <i>-o-</i> : SIR ; <i>---</i> : borne de Cramer-Rao. . . . .	128
10.24	Modèle de Lorenz - Scénario B1A3 (trois composantes observées, $Q=25I$ , $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant $k = 10$ ; <i>-*-</i> : EnKF ; <i>-+-</i> : WEnKF ; <i>-o-</i> : SIR ; <i>---</i> : borne de Cramer-Rao. . . . .	128
10.25	Modèle de Lorenz - Scénario B2A3 (une composante observée, $Q=25I$ , $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du temps ; <i>-*-</i> : EnKF ; <i>-+-</i> : WEnKF ; <i>-o-</i> : SIR ; <i>---</i> : borne de Cramer-Rao. . . . .	129
10.26	Modèle de Lorenz - Scénario B2A3 (une composante observée, $Q=25I$ , $R=25I$ ) - Racine de l'erreur en moyenne quadratique des estimateurs de la moyenne conditionnelle en fonction du nombre de particules ; à l'instant $k = 10$ ; <i>-*-</i> : EnKF ; <i>-+-</i> : WEnKF ; <i>-o-</i> : SIR ; <i>---</i> : borne de Cramer-Rao. . . . .	129

# Liste des tableaux

3.1	Méthode du représentant pour le modèle linéaire . . . . .	27
4.1	Algorithme bootstrap . . . . .	35
4.2	Algorithme SIR . . . . .	36
5.1	Algorithme EnKF . . . . .	48
9.1	Les variances des erreurs du modèle linéaire gaussien selon les scénarios de simulation, $I = 0.25$ ; $Q_0$ : variance de l'état initial ; $Q$ : variance de l'erreur du modèle ; $R$ variance de l'erreur d'observation. . . . .	97
9.2	Modèle linéaire gaussien - moyenne des degrés de signification du test de normalité de la distribution de 1000 particules de l'EnKF et du filtre particulaire, avec 50 répétitions, du pas de temps 6 <sup>ème</sup> au pas de temps 15 <sup>ème</sup> . Test utilisé : Test de Jarque-Bera. . . . .	105
10.1	Les variances des erreurs du modèle et de l'observation selon les scénarios de simulation pour le modèle de Lorenz, $I = 1$ ; $Q_0$ : variance de l'erreur de l'état initial ; $Q$ : variance de l'erreur du modèle ; $R$ variance de l'erreur d'observation. . . . .	110
10.2	Propositions d'utilisation de l'EnKF et du filtre SIR selon le rapport entre l'erreur du modèle et l'erreur d'observation, dans le cas où on utilise un nombre faible d'éléments d'ensemble, pour le modèle non linéaire gaussien à faible dimension. . . . .	132

## Résumé

Cette thèse porte sur les méthodes d'assimilation de données, qui consistent à combiner des informations provenant d'un modèle dynamique avec des observations. Nous présentons des méthodes d'assimilation les plus connues : l'interpolation statistique, les méthodes variationnelles d'assimilation de données et les méthodes séquentielles d'assimilation de données. Nous nous intéressons particulièrement au filtre de Kalman d'ensemble qui est de plus en plus utilisé dans les applications océanographiques. Le filtre de Kalman d'ensemble a été proposé initialement comme une approximation du filtre de Kalman pour les modèles linéaires gaussiens de grande dimension, il a ensuite été étendu au cas du modèle non linéaire gaussien. Il existe très peu de résultats théoriques sur les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble, alors qu'il est connu que le filtre particulaire converge vers le filtre bayésien optimal quand le nombre de particules tend vers l'infini. Nous démontrons dans cette thèse que, quand le nombre d'éléments tend vers l'infini, dans le cas où la fonction du modèle dynamique est continue et localement lipschitzienne avec un accroissement au plus polynomial à l'infini, les éléments du filtre de Kalman d'ensemble convergent vers les éléments indépendants et identiquement distribués selon une loi qui diffère de la loi a posteriori du filtre bayésien optimal dans le cas général. Dans le cas du modèle linéaire gaussien, cette loi asymptotique n'est autre que la loi a posteriori du filtre de Kalman. Nous présentons aussi des résultats de simulations du filtre de Kalman d'ensemble et du filtre particulaire sur un modèle linéaire gaussien simple et sur le modèle de Lorenz afin de comparer la performance des deux filtres à l'asymptotique et aussi dans le cas où le nombre d'éléments d'ensemble est faible.

**Mots-clés** : assimilation de données, filtre de Kalman d'ensemble, filtre particulaire, convergence du filtre de Kalman d'ensemble, système d'éléments en interaction de champs moyen.

## Abstract

This thesis is concerned with the data assimilation methods which combine the dynamical model with the observations. We present the well-known methods : statistical interpolation, variational data assimilation methods and sequential data assimilation methods. We particularly interested in the Ensemble Kalman Filter (EnKF) which is more and more used in the oceanographic applications. The Ensemble Kalman Filter has been initially proposed as approximation of the Kalman filter in the case of linear Gaussian model of huge dimension, it has been then extended for the nonlinear Gaussian models. Very little is known about its asymptotic behaviour, whereas the particle filters have a well understood convergence to the Bayesian filter. We prove the convergence of the EnKF, as the number of ensemble elements increases to infinity. In the linear case, the limit of the empirical distribution of the ensemble elements is the usual (Gaussian distribution associated with the) Kalman filter. In the more general case where the state equation is locally Lipschitz continuous with at most polynomial growth at infinity, this limit differs from the usual Bayesian filter. We present the simulation results on a simple linear Gaussian model and on the Lorenz model, where we compare the performance of the EnKF et the particle filter, as the number of ensemble elements is small and as it increases to infinity.

**Keywords** : data assimilation, Ensemble Kalman Filter, particle filter, convergence of the Ensemble Kalman Filter, particle system with mean-field interactions.