

,pdfauthor=Benoit Estienne,pdfkeywords=physique statistique, groupe de renormalisation, phénomènes critiques bidimensionnels, électrons fortement corrélés, symétrie conforme étendue, effet Hall quantique fractionnaire, parafermions

,pdfcreator=HAL,pdfproducer=PDFLaTeX,pdfsubject=Physics [physics]



**Étude des systèmes critiques bidimensionnels possédant
des symétries discrètes : les théories conformes
parafermioniques, et leurs applications.**
Benoit Estienne

► **To cite this version:**

Benoit Estienne. Étude des systèmes critiques bidimensionnels possédant des symétries discrètes : les théories conformes parafermioniques, et leurs applications.. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : . tel-00421566

HAL Id: tel-00421566

<https://theses.hal.science/tel-00421566v1>

Submitted on 2 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude des systèmes critiques bidimensionnels possédant des symétries discrètes : les théories conformes parafermioniques, et leurs applications.

Benoit Estienne

1^{er} octobre 2009

Remerciements

Suivant la tradition je vais commencer par remercier mon directeur de thèse, Vladimir Dotsenko. Toujours disponible et extrêmement pédagogue, il m'a soutenu tout au long de ma thèse, n'hésitant jamais à prendre tout le temps nécessaire pour répondre à mes questions, mêmes les plus naïves. Un grand merci pour m'avoir introduit dans le monde passionnant des théories conformes, et aussi pour m'avoir accompagné lors d'une brève incursion en territoire intégrable. Au-delà du chercheur, j'ai aussi beaucoup appris au contact du professeur au cours de l'enseignement effectué dans le cadre de mon monitorat. Enfin et surtout je le remercie pour la gentillesse et la patience qu'il a manifestées à mon égard durant cette thèse.

Hubert Saleur et Kareljan Schoutens ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie, de même que pour leur participation au Jury. Ma reconnaissance va aussi à Jesper Jacobsen, Thierry Jolicœur et Jean-Bernard Zuber qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Je remercie Olivier Babelon, directeur du Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, pour m'avoir accueilli et permis de travailler au sein de cette institution. Je souhaite aussi exprimer toute ma gratitude au laboratoire pour avoir financé nombre de mes expéditions en séminaires ou en écoles d'été. L'école des Houches fut pour moi une expérience formidable, et j'en remercie Leticia Cugliandolo.

Un grand merci à Raoul Santachiara pour ses conseils lors de ma recherche de postdocs, son enthousiasme sans limite pour la physique et son don pour trouver des bonnes pistes. Mes remerciements vont également à Nicolas Regnault pour ses conseils éclairés, sa bonne humeur, et le Descartes.

Je remercie tous ceux qui m'ont accompagné lors du démarrage laborieux de cette entreprise, aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leur soutien ou simplement pour le plaisir de les avoir côtoyés pendant ces années. Je pense en particulier à Bruno Machet, mais aussi aux anciens exilés du deuxième étage : David, Guillaume, Quentin, Alexis, César, Redamy, Clément et Mathieu.

Les relations au sein du laboratoire ont aussi grandement bénéficié de nombreux moments de détente et d'échanges tels que les concours de gâteaux et les séminaires Cognac ; j'en remercie aussi bien les organisateurs que les participants.

Ma profonde reconnaissance pour ceux sans qui les les journées au laboratoire n'auraient pas eu la même saveur : Alberto, Camille, Damien et Monica. Pour tous les petits riens quotidiens, qui font de la vie au bureau un plaisir, pour leur compagnie très agréable et pour toutes les bonnes rigolades que nous avons eues.

Durant ces années de thèse j'ai eu la chance d'être entouré par des colocataires formidables : Antoine, Clémentine, Gim, Julie et Martin. Merci pour tout.

Pour leurs encouragements et leur assistance aussi bien matérielle que morale qui m'ont permis d'en arriver là aujourd'hui, je remercie immensément ma famille : Chantal, Luc et Gilles.

Enfin, en dépit de mes amis logiciens, je remercie toutes les personnes que j'ai oublié de remercier.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Théories conformes des champs	6
2.1	Invariance d'échelle et invariance conforme au point critique	6
2.1.1	Transformations conformes	7
2.1.2	Transformations conformes en 2 dimensions	8
2.1.3	Champs primaires	9
2.2	Tenseur d'énergie-impulsion et algèbre de Virasoro	10
2.2.1	Le tenseur d'énergie-impulsion comme courant de Noether	10
2.2.2	Identités de Ward	11
2.2.3	Algèbre de Virasoro	11
2.3	Modules de Verma et représentations du groupe conforme	12
2.3.1	Module de Verma d'un champ primaire	12
2.3.2	Représentations dégénérées et formule de Kac	13
2.3.3	Equations aux dérivées partielles pour les fonctions de corrélation	13
2.4	Modèles minimaux	14
2.4.1	Développement en produits d'opérateurs	14
2.4.2	Règles de fusion	14
2.4.3	Modèles minimaux et tableau de Kac	15
2.5	Gaz de Coulomb	15
2.5.1	Le boson libre $c = 1$	15
2.5.2	Déformation par insertion d'une charge à l'infini	16
2.5.3	Réalisation des modèles minimaux	17
3	Symétrie étendue \mathbb{Z}_k et théories conformes parafermioniques	18
3.1	Modèles de spins à k états et courants parafermioniques	18
3.1.1	Modèle d'Ising et symétrie \mathbb{Z}_2	19
3.1.2	Modèles de spins à k états	20
3.1.3	Parafermions de Fateev-Zamolodchikov	21
3.2	Théories conformes parafermioniques : symétrie \mathbb{Z}_k et ansatz pour l'algèbre des courants	22
3.2.1	Le groupe cyclique \mathbb{Z}_k et ses représentations	23
3.2.2	Action du groupe \mathbb{Z}_k sur les courants	23
3.2.3	Invariance \mathbb{Z}_k des fonctions de corrélation	24
3.3	Contraintes d'associativité des OPE	24
3.3.1	Contraintes sur les dimensions Δ_n	24
3.3.2	Quelques solutions associatives connues	25
4	Groupe de renormalisation pour les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}$ perturbées	28
4.1	Théories conformes perturbées	28
4.1.1	Approche perturbative du groupe de renormalisation	28
4.1.2	Théorème c de Zamolodchikov	29
4.2	Perturbation des théories parafermioniques unitaires $\mathbb{Z}_N^{(4)}$	30

4.2.1	Présentation des théories unitaires $\mathbb{Z}_N^{(4)}$	30
4.2.2	Choix de la perturbation	31
4.2.3	Calcul des constantes de fusion	32
4.3	Flots non massifs du RG pour les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ perturbées	34
4.3.1	Équation du groupe de renormalisation	34
4.3.2	Flots et points fixes infra-rouges	35
4.3.3	Identification des CFT infra-rouges	35
4.4	Conclusion	36
5	La correspondance entre polynômes de Jack et théories conformes $WA_{k-1}(k+1, k+r)$	38
5.1	Conjecture reliant polynômes de Jack et théories \mathcal{W}	38
5.1.1	Algèbres WA_n et les modèles minimaux $WA_n(p, p')$	39
5.1.2	Les polynômes de Jack (k, r) -admissibles	40
5.2	Analyse des théories $WA_{k-1}(k+1, k+r)$ et preuve de la correspondance	41
5.2.1	Une petite mise en jambes : le cas des modèles minimaux de l'algèbre de Virasoro	41
5.2.2	Preuve de la conjecture : le cas $WA_2(k=3)$	42
5.2.3	Cas général	44
5.3	Conclusion	46
6	Polynômes symétriques et fonctions de corrélation parafermioniques : au-delà des polynômes de Jack	47
6.1	Propriétés de clustering et parafermions	48
6.1.1	Les états de Read-Rezayi et les parafermions $r=2$	48
6.1.2	fonctions d'onde et propriété de <i>clustering</i>	48
6.1.3	Lien avec les théories conformes parafermioniques	49
6.2	Théories parafermioniques unitaires	50
6.2.1	Le cas \mathbb{Z}_2 : les théories WB_n	50
6.2.2	Le cas $\mathbb{Z}_k, k \geq 3$: les parafermions $\mathbb{Z}_k^{(4)}$	53
6.2.3	Structure générale des fonctions à N points et développement en $1/c$	55
6.3	Conclusion	55
7	Conclusion	57
A	algèbres de Lie	64
A.1	Racines simples	64
A.2	Poids fondamentaux	65

Chapitre 1

Introduction

Au cours des dernières décennies, des progrès fantastiques ont été accomplis dans l'étude des phénomènes critiques des systèmes bidimensionnels. Au cœur de ces avancées, la notion d'invariance conforme au point critique a joué un rôle essentiel, et illustre encore une fois la puissance du concept de symétrie en physique théorique. En physique statistique, les théories des champs conformes décrivent les transitions de phase du deuxième ordre. Dans les systèmes bidimensionnels les contraintes de symétries sont tellement fortes qu'elles fournissent des solutions exactes, ce qui explique l'importance de l'invariance conforme dans ce contexte.

Les théories conformes (CFT) ont permis de faire de grandes avancées tant sur le plan conceptuel que technique, et elles constituent un formidable outil pour calculer exactement les quantités universelles telles que les exposants critiques. Une avalanche de résultats nouveaux voire des branches entières de la physique mathématique ont vu le jour suite à l'article fondateur de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [1]. Citons par exemple l'étude des interfaces dans les systèmes critiques et le lien avec l'équation de Schramm Löwner (SLE) [2, 3], qui constitue une extension récente et très active de l'étude des phénomènes critiques bidimensionnels.

Lorsque l'on soulève le problème de la classification des classes d'universalité, *i.e.* des théories conformes, se pose naturellement la question des symétries supplémentaires. Issues de la théorie des cordes, les CFT possédant des symétries additionnelles continues ont été l'objet de nombreuses études : les théories Weis-Zumino-Witten en constituent un exemple typique et possèdent une symétrie d'algèbre de Lie. Cependant beaucoup d'applications à la physique statistique ou à la matière condensée concernent des systèmes possédant des symétries discrètes.

Les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans un projet de recherche visant à mieux comprendre les classes d'universalité des systèmes critiques possédant des symétries discrètes du type \mathbb{Z}_N , en deux dimensions, tels les modèles d'Ising, de Potts à trois états ou encore d'Ashkin-Teller. Cette symétrie discrète additionnelle donne lieu aux théories conformes dites *parafermioniques*. Ces CFT, introduites dans leur version la plus simple par Fateev et Zamolodchikov [4], ont connu ces dernières années un regain d'intérêt, et un certain nombre de généralisations ont vu le jour. En particulier ces théories sont les objets naturels pour décrire le comportement universel des systèmes sur réseau qui possèdent des symétries \mathbb{Z}_N . De plus, le lien avec l'effet Hall quantique fractionnaire est une autre source de motivation pour l'étude de ces théories parafermioniques. Au cours de ma thèse j'ai travaillé sur différents aspects de ces CFT.

Il existe plusieurs généralisations des parafermions de Fateev et Zamolodchikov, notamment la série de modèles unitaires développée par Dotsenko, Jacobsen et Santachiara [5, 6, 7, 8]. Cette série a une structure très riche, et semble décrire les points multicritiques des modèles possédant une symétrie discrète \mathbb{Z}_N . Pendant la première partie de ma thèse, en collaboration avec Vladimir Dotsenko, nous avons étudié l'effet de perturbations faiblement pertinentes pour ces théories parafermioniques. Un système critique étant invariant d'échelle, la CFT correspondante est un point fixe du groupe de renormalisation. Pour aller au-delà et étudier le voisinage du point critique, nous avons perturbé ces théories parafermioniques par des champs faiblement pertinents. En utilisant les techniques issues du Gaz de Coulomb et de la représentation coset de ces CFT, nous avons obtenu perturbativement les équations du groupe de renormalisation. Nous avons analysé la présence de points fixes infra-rouges, qui décrivent un comportement à grande distance invariant d'échelle. Nous avons identifié les théories conformes décrivant ces points fixes en utilisant le théorème *c* de Zamolodchikov, et nous avons ainsi mis en évidence des flots non massifs entre différentes théories pa-

rafermioniques, généralisant les résultats connus par exemple pour les modèles minimaux. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 4.

J'ai travaillé en collaboration avec Raoul Santachiara et Nicolas Regnault sur l'application des théories conformes parafermioniques à l'étude de l'effet Hall quantique fractionnaire (FQHE). L'effet Hall quantique fractionnaire a connu ces dernières années un très fort regain d'intérêt grâce à la possibilité de mettre en évidence des excitations avec des statistiques non-abéliennes. L'utilisation de fonctions d'onde test pour la description de ces états non-abéliens a permis de faire de grands progrès dans la compréhension de ces systèmes. Les théories conformes constituent une approche très fructueuse pour générer ces fonctions d'onde test, qui héritent alors des propriétés topologiques non triviales des blocs conformes : l'action du groupe de tresse sur ces états non abéliens est basée sur les monodromies des blocs conformes correspondants.

Les fonctions d'onde de Read-Rezayi (RR) [9] constituent l'exemple canonique de ces états non abéliens, et les CFT correspondantes sont les parafermions de Fateev et Zamolodchikov. À cause de leur importance, il existe une vive activité autour des généralisations des états de Read-Rezayi. En particulier la classification des fonctions d'onde test possédant des propriétés de clustering est fortement reliée à celle des théories conformes parafermioniques unitaires. Dans ce contexte, il est très naturel de construire et d'étudier les fonctions d'onde test associées à ces nouvelles théories conformes.

Certains polynômes de Jack ont été proposés comme une généralisation naturelle des états de Read-Rezayi \mathbb{Z}_k . Ces polynômes sont reliés aux fonctions de corrélation d'une classe de théories \mathcal{W} basées sur l'algèbre de Lie $SU(k)$. Ces théories peuvent être considérées comme des représentations particulières, non unitaires, d'une algèbre parafermionique plus générale. Partant de l'observation qu'il existe aussi des solutions unitaires, nous montrons, en calculant les fonctions de corrélation correspondantes, que ces théories fournissent des fonctions d'onde test qui satisfont les mêmes propriétés de *clustering* que celles des Jacks, mais permettent de corriger le problème de non-unitarité. Nous avons montré explicitement que, bien que les fonctions d'onde construites à partir des CFT unitaires ne s'expriment pas comme un unique polynôme de Jack, elles ont une structure très intéressante dans laquelle les propriétés des Jacks jouent un rôle majeur. Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec Nicolas Regnault et Raoul Santachiara, et correspondent au chapitre 6.

Enfin le chapitre 5 décrit mon travail le plus récent, effectué en collaboration avec Raoul Santachiara. Nous nous sommes intéressés à un problème de théorie conforme issu de l'effet Hall quantique fractionnaire. Les polynômes de Jack généralisant les états de Read-Rezayi ont été conjecturés comme étant reliés aux corrélateurs de certaines théories conformes parafermioniques non unitaires, qu'il est possible d'identifier avec des théories \mathcal{W} particulières. En utilisant les identités de Ward associées ainsi que les propriétés de dégénérescence des opérateurs parafermioniques, nous avons montré que ces corrélateurs satisfont une équation aux dérivées partielles d'ordre deux. Cette EDP peut être transformée en une équation aux valeurs propres de l'hamiltonien de Calogero-Sutherland, ce qui fournit une preuve de la conjecture reliant les corrélateurs des opérateurs parafermioniques à ces polynômes de Jack.

Dans le premier chapitre je présente rapidement quelques notions essentielles des théories conformes, qui vont servir dans la suite. Le deuxième chapitre constitue une introduction générale aux théories parafermioniques. Enfin les chapitres suivants correspondent aux travaux effectués durant ma thèse, regroupés en trois parties : le chapitre 4 traite des théories conformes perturbées et les chapitres 6 et 5 décrivent respectivement l'application des parafermions unitaires à l'effet Hall quantique fractionnaire et la preuve de la conjecture reliant les Jacks et les théories \mathcal{W} .

Chapitre 2

Théories conformes des champs

Lors d'une transition de phase du deuxième ordre, les fluctuations critiques deviennent corrélées à très grande distance. Cette particularité des systèmes critiques rend leur étude analytique particulièrement difficile. L'introduction de nouveaux outils théoriques a permis de réaliser de grandes avancées dans la compréhension des phénomènes critiques [10, 11, 12, 13]. Le groupe de renormalisation (RG) [14, 15, 16, 17] a fourni un cadre pour expliquer certains concepts issus de l'étude des phénomènes critiques, tel l'hypothèse de *scaling* des quantités thermodynamiques étudiée par Kadanoff et Widom, ou encore la notion de classe d'universalité.

Suite à l'article de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [1], l'invariance conforme a permis d'obtenir des résultats très forts pour les systèmes bidimensionnels. Par exemple, la notion de classes d'universalités ont une origine particulièrement claire à la lumière des théories conformes des champs (CFT) : elles correspondent à une réalisation particulière de l'invariance d'échelle inhérente aux phénomènes critiques. Un des tours de force des CFT est d'avoir obtenu une classification (partielle) des classes d'universalité en deux dimensions [18, 19].

Au cours des dernières décennies les CFT sont devenues un outil essentiel du physicien théorique, avec des retombées aussi bien en théorie des cordes qu'en physique statistique [20, 21, 22] et en matière condensée [23, 24]. Pour une introduction assez exhaustive aux théories conformes, on renvoie à [25]. Ci-dessous, certains résultats importants des théories conformes sont rappelés.

2.1 Invariance d'échelle et invariance conforme au point critique

Un système statistique est caractérisé par une ou plusieurs longueurs de corrélation ξ_i , qui correspondent aux distances typiques sur lesquelles les degrés de liberté locaux sont statistiquement corrélés. De manière plus précise, les fonctions de corrélation correspondantes décroissent exponentiellement à grande distance :

$$\langle \Phi_i(x)\Phi_i(y) \rangle_c \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\sim} \exp\left(-\frac{|x-y|}{\xi_i}\right) \quad (2.1)$$

Si le système est défini à partir d'un modèle sur réseau, la maille du réseau a joue le rôle d'un cutoff ultraviolet, et est aussi une des longueurs caractéristiques du système.

Lors d'une transition de phase du deuxième ordre, les longueurs de corrélation divergent, et les fonctions de corrélation ont alors des comportements dits algébriques (*i.e.* elles décroissent en loi de puissance) aux grandes distances : les fluctuations critiques deviennent corrélées à très grande distance. Au voisinage du point critique, les longueurs de corrélation sont très grandes, et le système devient effectivement invariant d'échelle sur les distances $a \ll R \ll \xi_i$: dans cette région critique, le système n'a aucune longueur caractéristique, et devient auto-similaire : il conserve sa « forme », quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe.

C'est précisément cette invariance d'échelle qui est à l'origine des théories conformes des champs. Un modèle sur réseau n'admet de comportement universel qu'aux distances grandes devant la maille a du réseau : on s'intéresse donc à sa limite continue. Pour décrire les fluctuations critiques d'une classe d'universalité donnée, on construit une théorie des champs (quantique) invariante par translation, rotation et, pour assurer l'auto-similarité, par dilatation :

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad (2.2)$$

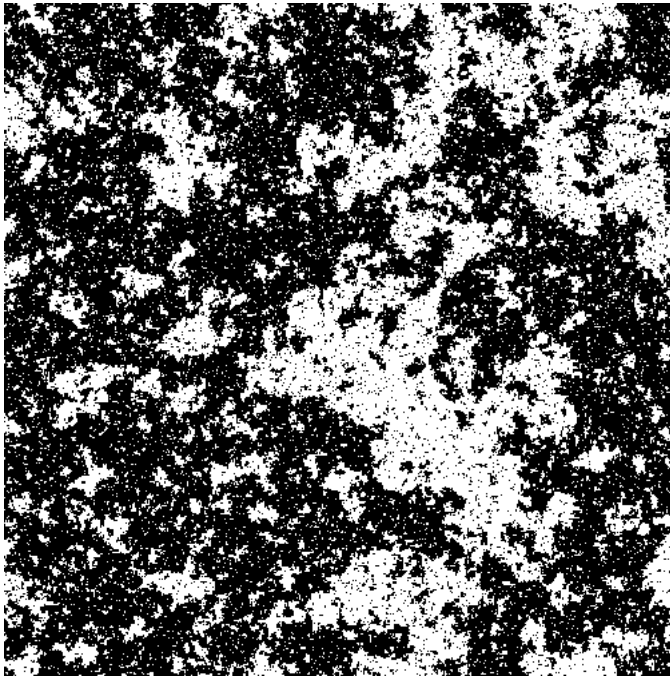


FIG. 2.1 – Configuration typique du modèle d’Ising au point critique : la longueur de corrélation est très grande devant la taille de l’échantillon et les clusters sont auto-similaires.

Toutes ces symétries sont globales, mais en théorie des champs il est naturel de considérer des transformations locales. En effet du moment que les interactions sont locales, le système ne devrait pas être capable de faire la distinction entre une dilatation/rotation/translation globale et une transformation qui possède les mêmes propriétés locales. Les transformations qui localement *ressemblent* à des translations, rotations ou dilatations sont appelées transformations conformes. Plus précisément, ce sont les transformations inversibles telles que :

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = f(x) \quad (2.3)$$

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (2.4)$$

où l’on a introduit la métrique $g_{\mu\nu}$. Ce sont aussi les transformations qui préservent les angles, c’est pourquoi on parle de transformations conformes.

Au niveau classique (c’est-à-dire au niveau de l’action), l’invariance par translation, rotation et dilatation assure automatiquement l’invariance par les transformations conformes. Par contre au niveau quantique, *i.e.* concernant les fluctuations, la situation est plus complexe. Néanmoins, les arguments heuristiques du type « localité », ainsi que les résultats obtenus pour certains modèles intégrables, poussent à postuler l’invariance conforme au niveau des fonctions de corrélation. Utilisée depuis maintenant plus de 25 ans, cette hypothèse n’a jamais été mise en défaut, ni par l’expérience, ni par les simulations numériques. Bien que la preuve de l’invariance conforme des points critiques semble en général extrêmement ardue, il existe dans certains cas des dérivations rigoureuses de sa validité, notamment dans le cas de la percolation critique [26].

2.1.1 Transformations conformes

Une fois postulée l’invariance conforme des systèmes critiques, il convient de classifier l’ensemble des transformations conformes : qu’avons-nous gagné exactement par rapport aux transformations globales ? Pour répondre à cette question, il est pratique de considérer les versions infinitésimales des transformations conformes.

Les transformations conformes sont les versions locales des dilatations (2.2), c’est-à-dire les transformations d’espace $x \rightarrow \tilde{x}$ telles que :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Lambda(x)g_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

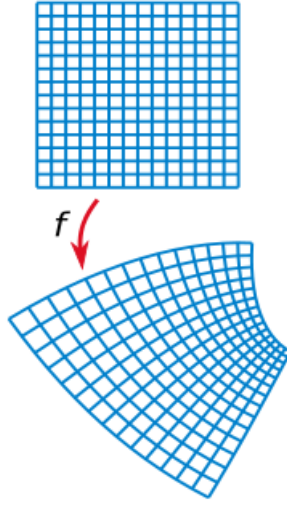


FIG. 2.2 – Déformation conforme d'un réseau carré. Globalement le réseau est déformé, mais localement la transformation est une rotation/dilatation : les angles sont préservés.

Pour une transformation conforme infinitésimale $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ la contrainte (2.5) devient :

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \delta\Lambda(x)g_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

En dimension $d > 2$, les seules transformations infinitésimales nouvelles correspondent à $\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2(b \cdot x)x^\mu$, et le groupe conforme est de dimension finie, isomorphe à $SO(d+1, 1)$. Il contient les translations, rotations, dilatations et les transformations conformes spéciales :

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \quad (2.7)$$

$$x^\mu \rightarrow R^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.8)$$

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad (2.9)$$

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2} \quad (2.10)$$

Nous avons alors affaire au groupe de Poincaré simplement enrichi des transformations spéciales, et ces symétries n'imposent qu'un nombre fini de contraintes. Cela fixe par exemple la forme des fonctions de corrélation à deux et trois points [27, 28, 29], mais c'est insuffisant pour déterminer complètement la théorie.

2.1.2 Transformations conformes en 2 dimensions

En revanche pour un système bidimensionnel, la situation est radicalement différente : les transformations satisfaisant à la contrainte (2.5) sont beaucoup plus nombreuses, et les contraintes issues de l'invariance conforme vont permettre d'aller beaucoup plus loin que dans le cas d générique. Pour voir cela il est pratique de passer en notations complexes :

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.11)$$

où Λ est donné par :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

On note généralement z et \bar{z} les nouvelles coordonnées \tilde{x}^1 et \tilde{x}^2 . Parmi les quatre contraintes (2.6), deux sont satisfaites automatiquement, et les deux autres se résument à :

$$\partial_{\bar{z}}\epsilon = 0 \quad \text{et} \quad \partial_z \bar{\epsilon} = 0, \quad (2.12)$$

i.e. il s'agit des transformations holomorphes infinitésimales :

$$z \rightarrow z + \epsilon(z) \quad \text{et} \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z} + \overline{\epsilon(z)} \quad (2.13)$$

Les transformations finies correspondantes sont donc :

$$z \rightarrow f(z) \quad \text{et} \quad \bar{z} \rightarrow \overline{f(z)} \quad (2.14)$$

où $f(z)$ est une fonction méromorphe : le groupe conforme est de dimension infinie en deux dimensions, et la symétrie conforme impose un nombre infini de contraintes sur la théorie, *i.e.* sur les fonctions de corrélation. L'idée est alors de construire/classifier les théories des champs conformes (CFT), *i.e.* les réalisations possibles de l'invariance d'échelle [20]. À chaque classe d'universalité va correspondre une CFT particulière, qui va prédire la forme analytique des fonctions de corrélation, et en particulier la valeur exacte des exposants critiques.

Il est utile d'observer au passage ce que deviennent les tenseurs à deux indices en notations complexes :

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu A_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu \quad (2.15)$$

i.e. plus explicitement :

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A_{11} - A_{22} - i(A_{12} + A_{21}) & A_{11} + A_{22} + i(A_{12} - A_{21}) \\ A_{11} + A_{22} - i(A_{12} - A_{21}) & A_{11} - A_{22} + i(A_{12} + A_{21}) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

En particulier la métrique plate n'est pas diagonale en notations complexes, et il faut faire attention à bien différencier les indices covariants et contravariants :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur d'énergie-impulsion va jouer un rôle fondamental dans les théories conformes. Comme il s'agit d'un tenseur symétrique pour une théorie isotrope, il s'écrit en notations complexes :

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} T_{11} - T_{22} - 2iT_{12} & \Theta \\ \Theta & T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

où $\Theta = T_{11} + T_{22}$ est la trace du tenseur d'énergie-impulsion, qui est nulle pour une théorie invariante d'échelle. Nous allons voir un peu plus tard quelles sont les conséquences de l'invariance conforme sur la forme du tenseur d'énergie-impulsion.

2.1.3 Champs primaires

L'invariance conforme impose des contraintes sur les fonctions de corrélation de la théorie des champs décrivant le comportement universel au voisinage d'un point critique. Pour savoir comment les fonctions de corrélation changent sous l'effet d'une transformation conforme, il faut spécifier les lois de transformations des champs. Ceci est tout à fait similaire à l'invariance par rotation en trois dimensions, pour laquelle il faut préciser le spin des champs, c'est-à-dire décrire comment se transforment les champs lors d'une rotation.

Dans une théorie conforme bidimensionnelle il existe un ensemble de champs particuliers dits primaires, qui se comportent de manière très simple lors d'une transformation conforme $(z, \bar{z}) \rightarrow (f(z), \overline{f(z)})$:

$$\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{df(z)}{dz} \right)^\Delta \left(\frac{d\overline{f(z)}}{d\bar{z}} \right)^{\bar{\Delta}} \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(f(z), \overline{f(z)}) \quad (2.18)$$

où $(\Delta, \bar{\Delta})$ sont les dimensions conformes du champ $\Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}$. Elles sont reliées à la dimension physique et au spin par :

$$\Delta + \bar{\Delta} = \Delta_{\text{phys}} \quad (2.19)$$

$$\Delta - \bar{\Delta} = s \quad (2.20)$$

En effet, la dimension physique Δ_{phys} et le spin s d'un champ sont liées respectivement aux dilatations et aux rotations :

$$\text{sous une dilatation } z \rightarrow \lambda z : \quad \Phi \rightarrow \lambda^{\Delta_{\text{phys}}} \Phi \quad (2.21)$$

$$\text{sous une rotation } z \rightarrow e^{i\theta} z : \quad \Phi \rightarrow e^{i\theta s} \Phi \quad (2.22)$$

$$(2.23)$$

Il est intéressant de remarquer qu'en deux dimensions le groupe des rotations $SO(2)$ est abélien, et ses représentations unidimensionnelles ; les champs sont caractérisés par leur spin (planaire) s , qui peut être un réel quelconque.

La version infinitésimale de la loi de transformation globale (2.18) est :

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) = \left(\Delta \epsilon'(z) + \epsilon(z) \partial_z + \bar{\Delta} \bar{\epsilon}'(\bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \right) \Phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) \quad (2.24)$$

L'invariance sous les transformations conformes globales $SL(2, \mathbb{Z})$ des fonctions de corrélation est suffisante pour fixer la forme des fonctions à 1, 2 et 3 points pour les champs primaires :

$$\langle \Phi_1(z_1) \rangle = C_1 \quad \text{avec } C_1 = 0 \text{ si } \Delta_1 \neq 0 \quad (2.25)$$

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \rangle = \frac{C_{1,2}}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_1}} \quad \text{avec } C_{1,2} = 0 \text{ si } \Delta_1 \neq \Delta_2 \quad (2.26)$$

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \Phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{1,2,3}}{(z_{12})^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} (z_{13})^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} (z_{23})^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}} \quad (2.27)$$

En général on va considérer des théories conformes où le seul opérateur de dimension conforme nulle est l'opérateur identité, noté \mathbb{I} , et dans lesquelles chaque champ primaire Φ_p possède un unique champ conjugué $\Phi_{\bar{p}}$ tel que $C_{p, \bar{p}} \neq 0$. On peut alors choisir la normalisation de champs de telle sorte que :

$$\langle \Phi(z_1) \rangle = \delta_{\Phi, \mathbb{I}} \quad (2.28)$$

$$\langle \Phi_1(z_1) \Phi_2(z_2) \rangle = \frac{\delta_{2, \bar{1}}}{(z_1 - z_2)^{2\Delta_1}} \quad (2.29)$$

2.2 Tenseur d'énergie-impulsion et algèbre de Virasoro

Les conséquences de l'invariance conforme s'expriment naturellement sous forme d'identités de Ward associées à la conservation du tenseur d'énergie-impulsion.

2.2.1 Le tenseur d'énergie-impulsion comme courant de Noether

On s'intéresse aux conséquences de l'invariance conforme au niveau de l'action d'une théorie des champs en d dimensions. Dans une théorie des champs classique la variation de l'action sous une transformation infinitésimale $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$ fait intervenir le tenseur d'énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu \quad (2.30)$$

$$\delta S \propto \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu \quad (2.31)$$

L'invariance de l'action sous les rotations et les translations assure que $T_{\mu\nu}$ est symétrique et conservé, *i.e.* $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

$$\delta S \propto \int d^d x T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \quad (2.32)$$

$$\propto \int d^d x T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

De plus l'invariance d'échelle implique $T^\mu_\mu = 0$. L'action est alors invariante sous toute transformation infinitésimale telle que $\delta g_{\mu\nu}(x) = f(x) g_{\mu\nu}(x)$, c'est-à-dire les transformations conformes infinitésimales.

2.2.2 Identités de Ward

Si on s'intéresse maintenant à une théorie des champs quantique, les symétries continues donnent lieu à des identités de Ward pour les fonctions de corrélation :

$$\delta\langle\Phi_1(x_1)\dots\Phi_N(x_N)\rangle \propto \int d^d x \partial^\mu \epsilon^\nu(x) \langle T_{\mu\nu}(x) \Phi_1(x_1) \dots \Phi_N(x_N) \rangle \quad (2.34)$$

$$\propto \int_\Sigma ds^\mu \epsilon^\nu(x) \langle T_{\mu\nu}(x) \Phi_1(x_1) \dots \Phi_N(x_N) \rangle \quad (2.35)$$

où Σ est une hypersurface qui enclose tous les points x_i , les seuls où des singularités peuvent apparaître, et où on n'a pas pris la peine de fixer la normalisation du tenseur d'énergie-impulsion à ce stade.

Considérons maintenant le cas bidimensionnel. Le tenseur d'énergie-impulsion est donné par (2.17), et les relations classiques de conservation s'expriment alors comme :

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 \quad (2.36)$$

$$\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (2.37)$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \Theta = 0 \quad (2.38)$$

En particulier le terme T_{zz} est purement holomorphe. Dans la suite on va noter :

$$T_{zz} = T(z), \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z}) \quad (2.39)$$

et les identités de Ward (2.35) se découpent explicitement en deux termes, une partie holomorphe et une partie anti-holomorphe (ici on a fixé une normalisation particulière de T) :

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \langle \Phi_1 \dots \Phi_N \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\xi \epsilon(\xi) \langle T(\xi) \Phi_1 \dots \Phi_N \rangle - \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{\xi} \bar{\epsilon}(\bar{\xi}) \langle \bar{T}(\bar{\xi}) \Phi_1 \dots \Phi_N \rangle \quad (2.40)$$

où le contour \mathcal{C} enclose tous les points x_i . Cette identité de Ward peut être interprétée comme la définition de la réponse d'un champ Φ (non nécessairement primaire) à une transformation conforme infinitésimale :

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \Phi(x_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_{x_i}} d\xi \epsilon(\xi) T(\xi) \Phi(x_i) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_{x_i}} d\bar{\xi} \bar{\epsilon}(\bar{\xi}) \bar{T}(\bar{\xi}) \Phi(x_i) \quad (2.41)$$

En comparant avec l'expression (2.24) pour un champ primaire on obtient :

$$(\Delta \epsilon'(z) + \epsilon(z) \partial_z) \Phi_\Delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_z} d\xi \epsilon(\xi) T(\xi) \Phi_\Delta(z) \quad (2.42)$$

et de même pour la partie anti-holomorphe. Dorénavant, on ne va mentionner que la partie holomorphe de l'invariance conforme, en gardant à l'esprit que toutes les identités sont les mêmes dans le secteur anti-holomorphe. La convention adoptée ici est que le contour \mathcal{C}_z enclose le point z et aucun des autres points apparaissant dans la fonction de corrélation où l'on insère l'expansion en produit d'opérateurs correspondante (voir partie 2.4.1).

2.2.3 Algèbre de Virasoro

La partie holomorphe du tenseur d'énergie-impulsion est un champ chiral $T(z)$, et correspond à un courant conservé. L'action de $T(z)$ sur un champ quelconque de la théorie conforme peut être développé en série de Laurent faisant intervenir les modes du tenseur d'énergie-impulsion :

$$T(z) \Phi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-w)^{n+2}} L_n \Phi(w) \quad (2.43)$$

Les modes de Virasoro L_n , $n \in \mathbb{Z}$ sont les générateurs des transformations conformes. Ils peuvent s'exprimer comme une intégrale de contour :

$$L_n \Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_w} dz (z-w)^{n+1} T(z) \Phi(w) \quad (2.44)$$

et obéissent aux relations de commutation suivantes :

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \quad (2.45)$$

De manière équivalente le tenseur d'énergie-impulsion $T(z)$ admet l'expansion en produits d'opérateurs (cf 2.4.1) :

$$T(z)T(0) = \frac{c/2}{z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + O(1) \quad (2.46)$$

Les relations de commutation (2.45) définissent l'algèbre de Virasoro [30] et font intervenir la charge centrale c . Ce paramètre dépend de la théorie conforme que l'on considère : par exemple $c = 1/2$ pour un fermion libre sans masse et $c = 1$ pour un boson libre (sans masse). Elle peut plus ou moins s'interpréter comme une mesure du nombre de degré de libertés dans la théorie en question. En particulier la charge centrale associée au produit tensoriel de deux CFT est la somme des charges centrales.

On peut aussi comparer l'algèbre de Virasoro avec l'algèbre des transformations classiques d'un champ scalaire de dimension nulle φ :

$$z \rightarrow z + \epsilon(z) \quad (2.47)$$

$$\varphi(z) \rightarrow \varphi(z + \epsilon(z)) \quad (2.48)$$

Les modes $l_n = -z^{n+1}\partial_z$ obéissent aux relations de commutation de l'algèbre de Witt :

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m}, \quad (2.49)$$

algèbre qui n'est autre que l'algèbre de Virasoro spécialisée à $c = 0$. On peut aussi interpréter c comme une extension centrale de l'algèbre de Witt, et à ce titre elle joue le rôle d'une anomalie quantique. La charge centrale encode la réaction de la théorie à l'introduction d'une longueur macroscopique dans le système, comme par exemple l'effet d'imposer des conditions aux bords périodiques [31, 32, 33].

2.3 Modules de Verma et représentations du groupe conforme

2.3.1 Module de Verma d'un champ primaire

Les champs primaires introduits en 2.1.3 jouent un rôle particulier dans la construction des théories conformes. La loi de transformation d'un champ primaire (2.24) sous une transformation conforme infinitésimale est équivalente à l'action suivante des modes de Virasoro :

$$L_n\Phi_\Delta = 0 \quad \text{pour } n > 0 \quad (2.50)$$

$$L_0\Phi_\Delta = \Delta\Phi_\Delta \quad (2.51)$$

$$L_{-1}\Phi_\Delta = \partial_z\Phi_\Delta \quad (2.52)$$

Un champ primaire est donc annihilé par les modes de Virasoro positifs. En agissant avec les modes négatifs on crée de nouveaux champs, dont les lois de transformations sont en général différentes de celles des champs primaires et se déduisent de l'algèbre de Virasoro : on parle de champs descendants. Comme $[L_0, L_{-n}] = nL_0$, les modes L_{-n} augmentent la dimension conforme. Plus précisément un descendant de la forme :

$$\Phi_\Delta^{(n_1, \dots, n_p)} \hat{=} L_{-n_1} \dots L_{-n_p} \Phi_\Delta \quad (2.53)$$

a pour dimension conforme $\Delta + (n_1 + \dots + n_p)$. On parle de descendant de niveau $N = (n_1 + \dots + n_p)$. L'ensemble des champs obtenus par action successive des modes de Virasoro sur un champ primaire Φ_Δ est appelé module de Verma V_Δ . L'ensemble des champs ainsi générés est stable par action des modes de Virasoro : il s'agit d'une représentation de l'algèbre de Virasoro, avec pour plus haut poids Φ_Δ . Les relations de commutation (2.45) assurent qu'une base du module de Verma est donnée par :

$$V_\Delta = \text{Vect} (L_{-n_1} \dots L_{-n_p} \Phi_\Delta, \quad 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_p) \quad (2.54)$$

Il est naturellement gradué par la dimension des champs, car on peut classer les descendants par leur niveau N . Voici le tableau donnant les premiers descendants linéairement indépendants du module de Verma V_Δ .

Niveau	Champs	Dimension conforme
0	Φ_Δ	Δ
1	$L_{-1}\Phi_\Delta$	$\Delta + 1$
2	$L_{-2}\Phi_\Delta, L_{-1}^2\Phi_\Delta$	$\Delta + 2$
3	$L_{-3}\Phi_\Delta, L_{-1}L_{-2}\Phi_\Delta, L_{-1}^3\Phi_\Delta$	$\Delta + 3$

Le nombre $p(N)$ de descendants linéairement indépendants au niveau N est donné par le nombre de partitions de l'entier N , dont la fonction génératrice s'exprime simplement en terme de la fonction d'Euler $\varphi(q)$ comme :

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \quad (2.55)$$

2.3.2 Représentations dégénérées et formule de Kac

Pour certaines valeurs de la dimension conforme Δ , qui vont en général dépendre de la charge centrale, le module de Verma correspondant est dégénéré : il apparaît parmi les descendants des états qui sont à leur tour primaires, *i.e.* annihilés par les modes de Virasoro positifs. Toute fonction de corrélation faisant intervenir un tel descendant est identiquement nulle, c'est pourquoi on parle de fantômes. Ces champs découplent de la théorie et peuvent être quotientés.

Un descendant χ est un fantôme lorsque $L_n\chi = 0, \forall n > 0$. Il est équivalent de vérifier $L_n\chi = 0$ pour $n = 1, 2$. En effet l'annulation par l'action des $L_n, n \geq 3$ est alors automatiquement assurée par l'algèbre de Virasoro (2.45).

La formule de Kac [34, 35, 36] donne les dimensions conformes pour lesquelles le module de Verma correspondant est dégénéré au niveau N :

$$\Delta_{n,n'} = \frac{(\alpha_-n + \alpha_+n')^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2}{4} \quad (2.56)$$

avec :

$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}, \quad \alpha_+\alpha_- = -1 \quad (2.57)$$

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \quad (2.58)$$

et les indices n, n' sont des entiers positifs, correspondant à toutes les factorisation possible de $N = n \times n'$. On va noter les champs primaires correspondants $\Phi_{(n|n')}$ ou encore $\Phi_{(\alpha)}$ avec $\alpha = \alpha_-n + \alpha_+n'$.

2.3.3 Equations aux dérivées partielles pour les fonctions de corrélation

Deux champs primaires vont jouer un rôle particulièrement important dans la détermination des règles de fusion (2.4.2). Il s'agit des deux champs qui sont dégénérés au niveau 2 : $\Phi_{(1|2)}$ et $\Phi_{(2|1)}$. Tous deux admettent comme descendant dégénéré le champ :

$$\chi_\Delta^{(2)} = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta + 1)} L_{-1}^2 \right) \Phi_\Delta \quad (2.59)$$

où Δ vaut respectivement $\Delta_{1,2}$ ($\Delta_{2,1}$). Toute fonction de corrélation comprenant un tel champ Φ_Δ vérifie une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{3}{2(2\Delta + 1)} \partial_z^2 \langle \Phi_\Delta(z) \Phi_1(z_1) \dots \Phi_N(z_N) \rangle = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\Delta_k}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{(z - z_k)} \partial_k \right) \langle \Phi_\Delta(z) \Phi_1(z_1) \dots \Phi_N(z_N) \rangle \quad (2.60)$$

qui découle de l'annulation de :

$$\langle \chi_\Delta^{(2)}(z) \Phi_1(z_1) \dots \Phi_N(z_N) \rangle = 0 \quad (2.61)$$

De façon plus générale, une dégénérescence au niveau N va donner lieu à une équation aux dérivées partielles de degré N .

2.4 Modèles minimaux

Avant de présenter les modèles minimaux, il faut introduire certains concepts essentiels pour les théories conformes : l'expansion en produits d'opérateurs (OPE) et les règles de fusion.

2.4.1 Développement en produits d'opérateurs

Une théorie conforme des champs, à la différence d'une théorie des champs au sens habituel, ne repose pas sur une approche lagrangienne pour définir les fonctions de corrélation. L'invariance conforme impose des contraintes si fortes que les identités de Ward permettent une approche alternative.

Les fonctions de corrélation sont encodées dans l'algèbre des opérateurs primaires, qui est décrite par les expansions en produits d'opérateurs :

$$\Phi_1(z)\Phi_2(0) = \sum_p \frac{D_{12}^p}{z^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_p}} \left[\Phi_p + z\beta_p^{(-1)}L_{-1}\Phi_p + z^2\beta_p^{(-1,-1)}L_{-1}^2\Phi_p + z^2\beta_p^{(-2)}L_{-2}\Phi_p + \dots \right] \quad (2.62)$$

où Φ_i sont des champs primaires de dimension conforme Δ_i . La « fusion » de deux champs primaires Φ_1 et Φ_2 se décompose en une somme de blocs conformes $[\Phi_p]$ associés au canal de fusion $\Phi_1 \times \Phi_2 \rightarrow \Phi_p$. L'ensemble des coefficients $\beta_p^{(\dots)}$ qui y apparaissent sont complètement fixés par l'invariance conforme, car les deux membres de l'équation (2.62) doivent avoir le même comportement sous l'action des modes de Virasoro L_n [29].

Finalement les seules inconnues *a priori* dans (2.62) sont les constantes D_{12}^p , appelées constantes de fusion. Pour des champs dégénérés, il existe plusieurs façons de les calculer. La plus naturelle est d'utiliser les équations différentielles issues des dégénérescences. Une autre possibilité consiste à utiliser une réalisation explicite de la théorie conforme, par exemple par des techniques de gaz de Coulomb. (voir partie 2.5).

En utilisant l'OPE (2.62) pour évaluer les fonctions à 2 et 3 points et en comparant avec (2.27)-(2.29), on obtient :

$$D_{12}^3 = C_{1,2,3} \quad (2.63)$$

Ainsi connaître l'ensemble des champs primaires ainsi que les fonctions à 3 points fixe complètement les OPE et est suffisant pour déterminer toutes les fonctions de corrélation d'une théorie conforme.

2.4.2 Règles de fusion

Les règles de fusion précisent seulement quels blocs conformes sont autorisés dans le produit de deux champs primaires. L'OPE (2.62) donne la règle de fusion :

$$\Phi_1 \times \Phi_2 \rightarrow \sum_p \Phi_p \quad (2.64)$$

Si un des deux champs est dégénéré, l'équation aux dérivées partielles associée permet de restreindre les champs susceptibles d'apparaître dans les fusions. Prenons l'exemple de la fusion d'un champ dégénéré au niveau deux $\Phi_{(1|2)}$ (ou $\Phi_{(2|1)}$), et d'un champ primaire quelconque $\Phi_{(\alpha)}$. $\Phi_{(\beta)}$ apparaît dans la fusion $\Phi_{(1|2)} \times \Phi_{(\alpha)}$ si la fonction à 3 points correspondante est non nulle. Or cette fonction de corrélation, de la forme (2.27), doit obéir à l'équation aux dérivées partielles (2.60). On trouve alors pour la dimension de $\Phi_{(\beta)}$ deux solutions, qui correspondent à $\Phi_{(\alpha-\alpha_+)}$ et $\Phi_{(\alpha+\alpha_+)}$. On obtient les règles de fusion suivantes :

$$\Phi_{(1|2)} \times \Phi_{(\alpha)} = \Phi_{(\alpha-\alpha_+)} + \Phi_{(\alpha+\alpha_+)} \quad (2.65)$$

$$\Phi_{(2|1)} \times \Phi_{(\alpha)} = \Phi_{(\alpha-\alpha_-)} + \Phi_{(\alpha+\alpha_-)} \quad (2.66)$$

Cela donne, pour un champ dégénéré $\Phi_{(n|n')}$:

$$\Phi_{(1|2)} \times \Phi_{(n|n')} = \Phi_{(n|n'-1)} + \Phi_{(n|n'+1)} \quad (2.67)$$

$$\Phi_{(2|1)} \times \Phi_{(n|n')} = \Phi_{(n-1|n')} + \Phi_{(n+1|n')} \quad (2.68)$$

Généralement l'algèbre des opérateurs primaires $\Phi_{(n|n')}$ s'enferme selon :

$$\Phi_{(n|n')} \times \Phi_{(m|m')} = \sum_{k=|n-m|+1}^{n+m} \sum_{k'=|n'-m'|+1}^{n'+m'} \Phi_{(k|k')} \quad (2.69)$$

ce qui signifie que l'on peut définir une théorie conforme particulière ne comprenant que ces champs primaires et leurs descendants. Dans une telle théorie on peut en principe évaluer toutes les fonctions de corrélation en utilisant les équations différentielles issues des dégénérescences des champs primaires.

2.4.3 Modèles minimaux et tableau de Kac

Cependant, pour des valeurs spéciales de la charge centrale, données par

$$c = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'} \quad \text{i.e. } \alpha_+^2 = \frac{p}{p'}, \text{ et } p \wedge p' = 1 \quad (2.70)$$

les règles de fusion (2.69) sont tronquées par p et p' . Les champs appartenant au tableau de Kac :

$$1 \leq n \leq p-1 \quad (2.71)$$

$$1 \leq n' \leq p-1 \quad (2.72)$$

forment une algèbre de fusion fermée. On parle des théories conformes minimales, notées $M(p, p')$, car elles ne contiennent qu'un nombre fini d'opérateurs primaires. C'est un cas particulier de théorie conforme rationnelle. Les dimensions conformes sont données par

$$\Delta_{(n|n')} = \frac{(pn - p'n')^2 - (p-p')^2}{4pp'} \quad (2.73)$$

On remarque que le tableau de Kac possède la symétrie suivante :

$$\Delta_{(n|n')} = \Delta_{(p'-n|p-n')} \quad (2.74)$$

et dans les modèles minimaux on identifie les champs correspondants $\Phi_{(n|n')} = \Phi_{(p'-n|p-n')}$.

Une remarque pour finir : les modèles minimaux $M(p, p')$ sont généralement non unitaires. On peut montrer que sont unitaires seulement ceux appartenant à la série $M_p = M(p, p+1)$, $p \geq 3$ [37], avec pour charge centrale

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)} \quad (2.75)$$

2.5 Gaz de Coulomb

Pour pouvoir caractériser complètement une CFT, le spectre des opérateurs n'est pas suffisant. Il faut aussi déterminer les constantes de l'algèbre de fusion.(2.63). En principe il est possible de passer par les équations différentielles issues des dégénérescences, mais en pratique cette approche est assez lourde. Les modèles minimaux $M(p, p')$ admettent une réalisation basée sur la déformation d'un boson libre : le gaz de Coulomb [38]. Cette construction permet en particulier de donner des représentations par des intégrales complexes des constantes de fusion, et ainsi de les évaluer explicitement [39, 40].

2.5.1 Le boson libre $c = 1$

Un boson libre sans masse en $d = 2$ dimensions est décrit par l'action suivante :

$$S[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \int dz d\bar{z} \partial\varphi \bar{\partial}\varphi \quad (2.76)$$

En admettant la transformation $\tilde{\varphi}(\tilde{z}) = \varphi(z)$, cette action est explicitement invariante sous les transformations conformes. De plus comme l'action est quadratique, le théorème de Wick permet de calculer explicitement les fonctions de corrélation en termes de la fonction à 2 points $\langle \varphi(z, \bar{z})\varphi(z', \bar{z}') \rangle = -2\log(|z - z'|^2)$.

L'opérateur d'énergie-impulsion pour cette théorie est :

$$T(z) = -\frac{1}{4} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : \quad (2.77)$$

et en utilisant le théorème de Wick on obtient immédiatement l'OPE :

$$T(z)T(0) = \frac{1/2}{z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + \dots \quad (2.78)$$

On identifie donc une CFT avec une charge centrale $c = 1$. De plus les opérateurs de vertex $V_{(\alpha)}$ donnés par

$$V_{\alpha}(z, \bar{z}) = : \exp(i\alpha\varphi(z, \bar{z})) : \quad (2.79)$$

obéissent aux OPE :

$$T(z)V_{\alpha}(0) = \frac{\alpha^2}{z^2}V_{\alpha}(0) + \frac{1}{z}\partial V_{\alpha}(0) + \dots \quad (2.80)$$

et sont donc des opérateurs primaires de dimension conforme $\Delta_{\alpha} = \alpha^2$. On a donc une infinité de champs primaires, et cette théorie ne constitue pas un modèle minimal. Finalement les fonctions de corrélation composées d'opérateurs de vertex sont données par :

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1)V_{\alpha_2}(z_2, \bar{z}_2)\dots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i\alpha_j} \quad (2.81)$$

avec la condition de neutralité $\sum \alpha_i = 0$.

2.5.2 Déformation par insertion d'une charge à l'infini

Il est possible de déformer la théorie précédente, en ajoutant une charge $-2\alpha_0$ à l'infini. On modifie l'opérateur d'énergie-impulsion en :

$$T(z) = -\frac{1}{4} : \partial\varphi(z)\partial\varphi(z) : + i\alpha_0\partial^2\varphi \quad (2.82)$$

et donc la charge centrale devient :

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \quad (2.83)$$

L'insertion la charge $-2\alpha_0$ à l'infini modifie aussi les fonctions de corrélation de vertex :

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1)\dots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{(-2\alpha_0)} = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{16\alpha_0^2} \langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1)\dots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N)V_{-2\alpha_0}(R) \rangle \quad (2.84)$$

En conséquence la dimension des opérateurs de vertex (2.79) devient :

$$\Delta_{\alpha} = \alpha(\alpha - 2\alpha_0) = (\alpha - \alpha_0)^2 + \alpha_0^2 \quad (2.85)$$

Dans ce contexte deux opérateurs particuliers jouent un rôle privilégié. Il s'agit de :

$$V_{\pm}(z, \bar{z}) = : \exp(i\alpha_{\pm}\varphi(z, \bar{z})) : \quad (2.86)$$

où α_{\pm} sont les deux solutions de $\Delta_{\alpha} = \alpha(\alpha - 2\alpha_0) = 1$. Ces vertex, dits opérateurs d'écrans, ont pour dimension conforme $\Delta_{\pm} = 1$, ce qui permet de modifier l'action tout en conservant l'invariance conforme de la façon suivante :

$$S[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \int dzd\bar{z} \partial\varphi\bar{\partial}\varphi + \mu_+V_+(z, \bar{z}) + \mu_-V_-(z, \bar{z}) \quad (2.87)$$

C'est l'action du Gaz de Coulomb, où le paramètre α_0 est un réel quelconque. Les fonctions de corrélation conformes $\langle \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\dots\Phi_N(x_N) \rangle$ sont représentées par :

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\mu_+)^n}{n!} \frac{(\mu_-)^m}{m!} \langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) V_{\alpha_2}(z_2, \bar{z}_2) \dots V_{\alpha_N}(z_N, \bar{z}_N) \left(\int d^2v V_+(v) \right)^n \left(\int d^2w V_-(w) \right)^m \rangle_{(-2\alpha_0)} \quad (2.88)$$

où la condition de neutralité va annuler tous les termes sauf ceux pour lesquels :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i + n\alpha_+ + m\alpha_- = 2\alpha_0 \quad (2.89)$$

Ceci permet d'obtenir des représentations intégrales des fonctions de corrélation conformes :

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2)\dots\Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle \propto \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i\alpha_j} \int d^2v_1 \dots \int d^2v_n \prod |z_i - v_j|^{4\alpha_i\alpha_+} \prod |v_i - v_j|^{4\alpha_+^2} \quad (2.90)$$

$$\int d^2w_1 \dots \int d^2w_m \prod |z_i - w_j|^{4\alpha_i\alpha_-} \prod |w_i - w_j|^{4\alpha_-^2} \prod_{i<j} |v_i - w_j|^{-4} \quad (2.91)$$

et en particulier il est ainsi possible de donner une représentation intégrale des fonctions à 3 points et donc des constantes de fusion (2.63).

2.5.3 Réalisation des modèles minimaux

Lorsque $\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{p'-p}{\sqrt{pp'}}$, on retrouve les modèles minimaux. En effet on a alors :

$$\alpha_- = -\sqrt{p'/p} \quad \text{et} \quad \alpha_+ = \sqrt{p/p'} \quad (2.92)$$

et la charge centrale du Gaz de Coulomb s'accorde avec celle du modèle minimal $M(p, p')$ (2.70) :

$$c = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'} \quad (2.93)$$

De plus on représente le champ primaire $\Phi_{(n|n')}$ du tableau de Kac par le vertex $V_{(n|n')}$ (ou par son conjugué $V_{(n|n')}^\dagger$) :

$$V_{(n|n')}(z, \bar{z}) =: \exp(i\alpha_{(n|n')}\varphi(z, \bar{z})) : \quad (2.94)$$

$$V_{(n|n')}^\dagger(z, \bar{z}) =: \exp(i\tilde{\alpha}_{(n|n')}\varphi(z, \bar{z})) : \quad (2.95)$$

où :

$$\alpha_{(n|n')} = \left(\frac{1-n}{2}\alpha_+ + \frac{1-n'}{2}\alpha_- \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_{(n|n')} = 2\alpha_0 - \alpha_{(n|n')} = \alpha_{(-n|-n')} \quad (2.96)$$

et on vérifie que les dimensions et les règles de fusion obtenues par cette construction reproduisent bien celles des modèles minimaux. En particulier l'introduction des écrans (2.86) dans l'action est essentielle pour obtenir les bonnes règles de fusion. Cette construction permet d'exprimer les fonctions de corrélation conformes comme des fonctions de corrélation de vertex et ainsi de les calculer explicitement [39, 40].

Cette construction à partir de champs libres se généralise au cas des théories conformes basées sur des cosets SU(2) [41] ainsi qu'au cas des théories \mathcal{W} [42]. Durant ce travail de thèse les Gaz de Coulomb des théories WB_n et WD_n ont été utilisés (au chapitre 4), ainsi que, dans une moindre mesure, celui des théories WA_n (chapitre 5).

Chapitre 3

Symétrie étendue \mathbb{Z}_k et théories conformes parafermioniques

Les théories conformes minimales que nous avons décrites dans le chapitre précédent décrivent les classes d'universalité les plus simples. En effet nous nous sommes limités aux théories comportant un nombre fini d'opérateurs primaires, et ces CFT minimales ne sont pas les plus générales; d'ailleurs les charges centrales correspondantes sont toutes inférieures à un ($c < 1$). Il est possible d'obtenir de nouvelles théories conformes en relâchant cette contrainte, cependant dès que $c > 1$ les CFT contiennent une infinité de champs primaires et elles deviennent difficiles à manipuler.

Pour contourner ce problème l'approche standard est de considérer des théories conformes possédant des *symétries étendues*, c'est-à-dire dans lesquelles l'algèbre de Virasoro ne constitue qu'une sous-algèbre. Dans ce contexte les champs primaires sont les champs qui sont annihilés par tous les modes positifs (pas seulement par ceux de Virasoro); il est alors possible de construire des théories minimales possédant cette algèbre étendue, c'est-à-dire des CFT possédant un nombre fini de champs primaires, tout en atteignant des charges centrales $c > 1$. Il faut bien garder à l'esprit que ces CFT étendues vont comprendre un nombre infini de primaires de Virasoro dès que $c > 1$. Cependant la symétrie additionnelle permet de réorganiser cette infinité de modules de Verma en un nombre fini de représentations de l'algèbre étendue. Grâce à cette structure supplémentaire ces CFT restent relativement simples à manipuler.

Le cas des symétries additionnelles continues a été énormément étudié. Par exemple il est possible d'étendre l'algèbre de Virasoro par une algèbre de Lie g : on parle alors d'algèbre de Lie affine \hat{g} . Les CFT possédant cette symétrie sont les théories Weis-Zumino-Witten [43, 44, 45].

Cependant beaucoup d'applications à la physique statistique ou à la matière condensée concernent des systèmes possédant des symétries discrètes. Motivés par l'étude de certains modèles sur réseau introduits par Fateev et Zamolodchikov [46], les cas des symétries \mathbb{Z}_k a donné lieu aux premières théories conformes *parafermioniques* [4]. Ces modèles comprennent par exemple les modèles d'Ising, de Potts à trois états ou encore un cas particulier d'Ashkin-Teller.

Après une rapide présentation des parafermions de Fateev et Zamolodchikov, les théories conformes parafermioniques plus générales sont présentées.

3.1 Modèles de spins à k états et courants parafermioniques

Le concept de classe d'universalité est fondamental en physique statistique, et il permet de remplacer l'étude de systèmes avec des interactions réalistes, compliquées, par celle de modèles jouets beaucoup plus simples. De nombreux modèles sont ainsi définis sur réseau, avec des comportements microscopiques extrêmement simplifiés. L'exemple canonique en est le modèle d'Ising, qui est un modèle de spins à deux états sur réseau décrivant le ferromagnétisme. La classe d'universalité dépend assez peu des détails microscopiques du modèle, mais par contre elle est très sensible aux symétries du système. Souvent ces modèles sur réseau présentent des symétries discrètes, comme par exemple l'invariance par l'action du groupe cyclique \mathbb{Z}_k .

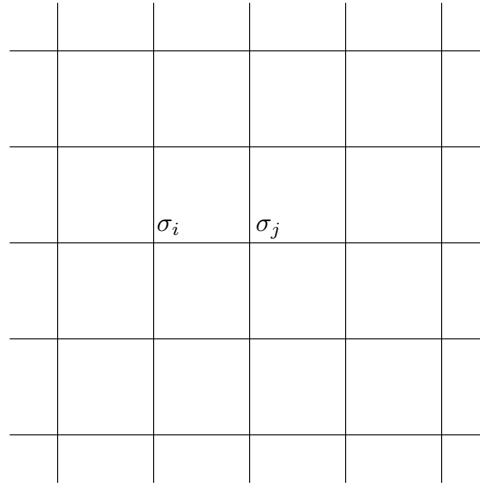


FIG. 3.1 – Deux spins voisins σ_i et σ_j sur un réseau carré bidimensionnel.

3.1.1 Modèle d'Ising et symétrie \mathbb{Z}_2

Le modèle d'Ising est un système défini sur un réseau, que l'on va prendre carré dans la suite (on s'intéresse bien sûr au modèle d'Ising bidimensionnel). Sur chaque site vit une variable de spin $\sigma_i = \pm 1$, et les interactions ont lieu entre plus proches voisins, c'est-à-dire entre sites reliés par un lien (voir figure 3.1) :

$$\mathcal{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} H(\sigma_i, \sigma_j) \quad (3.1)$$

L'interaction locale entre voisins $H(\sigma_i, \sigma_j)$ est l'interaction la plus générale invariante par la transformation globale $\sigma \rightarrow -\sigma$:

$$H(\sigma_i, \sigma_j) = J\sigma_i\sigma_j \quad (3.2)$$

Cette transformation génère le groupe de symétrie \mathbb{Z}_2 , que l'on peut interpréter comme le groupe des rotations d'angle 0 et π . Le système possède un point critique à la valeur $J = J_c$ du couplage, qui sépare une phase ordonnée à basse température ($J > J_c$) où les spins sont polarisés (phase ferromagnétique) d'une phase désordonnée (paramagnétique) à haute température ($J < J_c$). Il existe une dualité de Kramers-Wannier [47] dans ce système, qui échange haute et basse température :

$$J \rightarrow \tilde{J} \quad \text{avec} \quad \sinh(2\tilde{J}) = \frac{1}{\sinh(2J)} \quad (3.3)$$

Le dual de l'opérateur d'ordre (*i.e.* de spin) σ est appelé opérateur de désordre μ , et peut s'écrire comme un opérateur non local en termes des opérateurs de spin [48].

Le point critique est atteint pour l'unique valeur auto-duale du couplage :

$$J_c = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (3.4)$$

Au point critique, la longueur de corrélation diverge, et la limite continue du modèle d'Ising correspond simplement à un fermion libre, réel et sans masse :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\Psi \bar{\partial} \Psi + \bar{\Psi} \partial \bar{\Psi}) \quad (3.5)$$

Cette théorie des champs coïncide avec le modèle minimal unitaire le plus simple $M_3 = M(3, 4)$, de charge centrale $c = 1/2$ (voir chapitre 2), qui contient en particulier un champ primaire fermionique $\Psi = \Phi_{(1|2)}$ de dimension conforme $\Delta = 1/2$ et qui vérifie l'expansion en produits d'opérateurs :

$$\Psi \times \Psi = \mathbb{I} \quad (3.6)$$

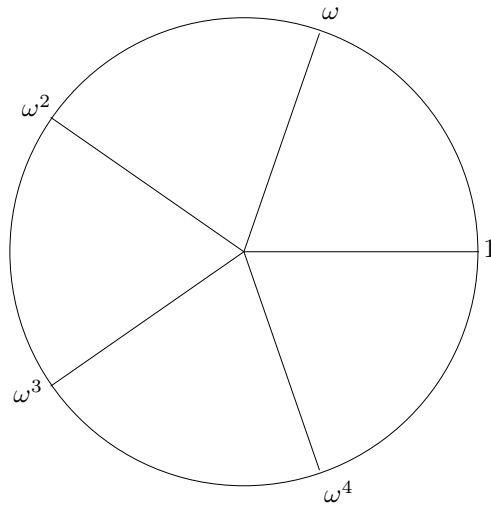


FIG. 3.2 – L’espace des phases pour un spin dans le cas $k = 5$.

Cette OPE peut sembler anodine mais nous allons voir qu’il s’agit de la forme embryonnaire des OPE parafermioniques. Il existe d’ailleurs une unique théorie conforme comprenant un champ de dimension $\Delta = 1/2$ et vérifiant cette OPE, et en ce sens l’OPE (3.6) est suffisante pour fixer une unique classe d’universalité.

3.1.2 Modèles de spins à k états

Le modèle d’Ising bidimensionnel a été résolu par Onsager en 1944 [49]. Il s’agit d’un modèle intégrable car les interactions (3.2) vérifient la relation triangle-étoile [50]. Une généralisation standard du modèle d’Ising est le modèle de Potts à k états, qui est invariant sous le groupe des permutations \mathfrak{S}_k . Malheureusement dès que $k > 4$ la transition de phase est du premier ordre, et il n’y pas de point critique. Il est possible de considérer le cas où le nombre de couleurs k n’est pas entier, et le régime intéressant correspond au cas $0 < k < 4$ [51], cependant lorsque k n’est pas entier il n’y a plus de symétrie discrète évidente.

Le modèle de Potts peut être vu comme un modèle de spin à k états avec une interaction particulière, invariante sous \mathfrak{S}_k . En considérant une interaction plus générale, invariante sous \mathbb{Z}_k seulement, il est possible de trouver des points critiques intéressants [46]. Nous considérons donc un modèle de spin sur réseau, où les spins peuvent prendre k valeurs que l’on choisit conventionnellement comme étant les racines k -ième de l’unité (voir figure 3.2) :

$$\sigma_i \in \left\{ \exp\left(\frac{2in\pi}{k}\right), n = 0 \dots k-1 \right\}. \quad (3.7)$$

Dans la suite on va noter $\omega = \exp(2i\pi/k)$ la racine fondamentale. On choisit une interaction entre plus proches voisins qui soit invariante sous la rotation discrète globale $\Omega : \sigma \rightarrow \omega\sigma$. La forme la plus générale est donnée par :

$$H(\sigma_i, \sigma_j) = \sum_{n=1}^{k-1} J_n (\sigma_i \bar{\sigma}_j)^n \quad (3.8)$$

et il y a donc $k-1$ paramètres d’interaction $J_n \in \mathbb{R}$. On demande de plus l’invariance par conjugaison de charge globale $C : \sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ ce qui impose $J_n = J_{k-n}$. Il reste $\lfloor k/2 \rfloor$ paramètres d’interaction indépendants. De nombreuses propriétés de ces modèles s’expriment plus simplement en termes des poids de Boltzmann, qui s’expriment dans la bonne normalisation ($x_0 = 1$) comme :

$$W(\sigma_i, \sigma_j) = e^{-\beta H(\sigma_i, \sigma_j)} = 1 + \sum_{n=1}^{k-1} x_n (\sigma_i \bar{\sigma}_j)^n \quad (3.9)$$

Tout comme dans le cas d’Ising, cette interaction admet une dualité de Kramers-Wannier [46], et généralement l’ensemble des points auto-duaux forme un sous-espace de dimensions $\lfloor k/4 \rfloor + 1$ dans l’espace des paramètres

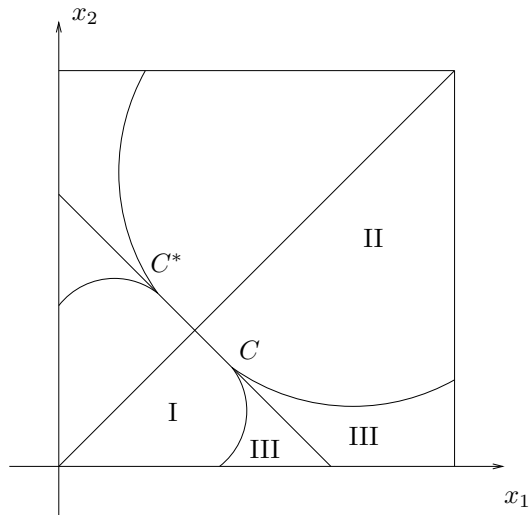


FIG. 3.3 – L’espace des phases pour $k = 5$ est symétrique sous $x_1 \rightarrow x_2$. La droite $x_1 = x_2$ correspond au modèle de Potts à 5 états. Les points de bifurcation C et C^* sont les points critiques et la droite $(C C^*)$ est auto-duale.

de dimension $\lfloor k/2 \rfloor$ [52]. La transformation duale est donnée (à la normalisation près) par la transformée de Fourier discrète :

$$\tilde{x}_i \propto \sum_{n=0}^{k-1} x_n \omega^{ni} \quad (3.10)$$

Cette dualité de Kramers-Wannier est très utile pour analyser les phases de ces modèles. Ces dernières ont été analysées dans les cas $k = 3, \dots, 7$ [53]. Par exemple lorsque $k = 5$ on trouve trois phases distinctes dans l’espace des paramètres (x_1, x_2) (voir figure 3.3) :

- la phase I est ordonnée : $\langle \sigma \rangle \neq 0, \langle \mu \rangle = 0$
- la phase II est la phase duale de I, désordonnée : $\langle \sigma \rangle = 0, \langle \mu \rangle \neq 0$
- enfin la phase III est une phase non-massive : $\langle \sigma \rangle = 0, \langle \mu \rangle = 0$

Sauf pour $k = 2$ - le modèle d’Ising - il n’existe pas de solution exacte pour la forme générale de l’interaction (3.8). Cependant Fateev et Zamolodchikov [46] ont construit une solution auto-duale de l’équation triangle-étoile, qui définit dans le cas isotrope un point particulier, intégrable, de l’espace des paramètres x_n :

$$x_n^{(c)} = \prod_{p=0}^{n-1} \frac{\sin(\pi p/k + \pi/4k)}{\sin(\pi p/k + 3\pi/4k)} \quad (3.11)$$

À ce point a lieu une transition de phase du deuxième ordre : la longueur de corrélation diverge, et la limite continue donne lieu à une théorie conforme qui possède naturellement une symétrie étendue \mathbb{Z}_k .

3.1.3 Parafermions de Fateev-Zamolodchikov

Dans ces modèles possédant à la fois une dualité de Kramers-Wannier et une symétrie abélienne \mathbb{Z}_k , il est possible de construire explicitement sur réseau des champs dits *parafermioniques* qui généralisent le fermion libre du modèle d’Ising (\mathbb{Z}_2). Ces parafermions sont le produit d’une variable d’ordre σ_n et d’une variable de désordre μ_n [54], de même que dans le cas du modèle d’Ising où le champ fermionique est construit à partir des champs d’ordre σ et de désordre μ . Au point critique, il a été montré dans [55] que ces champs parafermioniques définis sur réseau deviennent dans la limite continue des champs chiraux : il s’agit donc de courants.

La théorie conforme décrivant la limite continue au point critique a été étudiée par Fateev et Zamolodchikov

dans [4]. Cette CFT a pour charge centrale :

$$c = \frac{2(k-1)}{k+2} \quad (3.12)$$

Elle contient un ensemble de champs parafermioniques chiraux $\{\Psi^n(z), n = 0 \dots k-1\}$ qui sont les limites continues des parafermions définis sur réseau. Ces courants sont des champs primaires de dimension conforme :

$$\Delta_n = \frac{n(k-n)}{k} \quad (3.13)$$

Ils ont des spins fractionnaires, et les monodromies abéliennes associées généralisent celles des bosons (spin entier) et des fermions (spin demi-entier), d'où le nom de parafermions. Ces champs chiraux forment une algèbre étendue de courants et leurs OPE reproduisent les lois de multiplications du groupe cyclique \mathbb{Z}_k :

$$\Psi^n \times \Psi^m = \Psi^{n+m \bmod k} \quad (3.14)$$

où Ψ^0 est simplement l'identité \mathbb{I} . Ces courants génèrent une algèbre parafermionique contenant l'algèbre de Virasoro : il s'agit bien d'un cas de symétrie étendue. Les champs primaires sont les champs annihilés par les modes positifs des courants parafermioniques, et sont en nombre fini. Parmi eux se trouvent les $k-1$ variables d'ordre σ_n , $n = 1, 2, \dots, k-1$, de dimensions conformes :

$$d_n = \frac{n(k-n)}{2k(k+2)}, \quad (3.15)$$

ainsi que les champs duaux μ_n , de mêmes dimensions. Il existe aussi des opérateurs neutres ϵ_n , $n = 1, 2, \dots, \lfloor k/2 \rfloor$ de dimension :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{k+2}. \quad (3.16)$$

Les cas $k=2$ et $k=3$ ne sont en fait pas nouveaux : ils décrivent les classes d'universalité du modèle d'Ising et du modèle de Potts à trois états, et coïncident avec les modèles minimaux M_3 et M_5 , respectivement. Par contre dès que $k > 3$ ces théories conformes ne sont pas dans la série des modèles minimaux, et les charges centrales sont supérieures à 1. Ces théories conformes sont des représentations de l'algèbre parafermionique générée par les courants $\Psi^n(z)$, $n = 1, \dots, k-1$, qui contient l'algèbre de Virasoro. Cependant il existe une unique théorie conforme compatible avec les règles de fusion (3.14) et les dimensions des courants (3.13) : dans ce cas, pour une symétrie \mathbb{Z}_k donnée, la charge centrale est fixée par l'associativité à la valeur $c = 2(k-1)/(k+2)$.

3.2 Théories conformes parafermioniques : symétrie \mathbb{Z}_k et ansatz pour l'algèbre des courants

Pour obtenir des théories parafermioniques plus riches, l'idée est de considérer les règles de fusion de la forme générale (3.14). En effet ces règles de fusion possèdent une graduation \mathbb{Z}_k qui encode cette symétrie discrète au niveau des courants. En relâchant la contrainte sur les dimensions (3.13), il est possible d'obtenir de nouvelles théories conformes.

On impose donc la symétrie discrète \mathbb{Z}_k en introduisant $k-1$ courants chiraux $\{\Psi^n(z), n = 1, \dots, k-1\}$ dont les fusions reproduisent les lois de multiplication du groupe :

$$\Psi^n \times \Psi^m = \Psi^{n+m \bmod k} \quad (3.17)$$

et où on identifie :

$$\Psi^0 = \Psi^k = \mathbb{I} \quad (3.18)$$

L'associativité des OPE impose de fortes contraintes sur les spins des courants parafermioniques. Nous allons voir que les dimensions conformes les plus simples pour les courants sont de la forme :

$$\Delta_n = \frac{r}{2} \frac{n(k-n)}{k} \quad (3.19)$$

où $r \geq 2$ est un entier. En particulier on retrouve les parafermions de Fateev Zamolodchikov lorsque $r = 2$, et plus r augmente plus les CFT correspondantes vont être riches. Nous notons l'algèbre chirale parafermionique correspondante $\mathbb{Z}_k^{(r)}$.

Dans un premier temps nous allons voir que les OPE possédant une graduation \mathbb{Z}_k du type (3.17) induisent une représentation de \mathbb{Z}_k sur les courants, ainsi que sur leurs fonctions de corrélation.

3.2.1 Le groupe cyclique \mathbb{Z}_k et ses représentations

Les groupes finis les plus simples sont les groupes finis abéliens, dont la brique élémentaire est le groupe $\mathbb{Z}_k = \{\exp(\frac{2i\pi p}{k}), p = 0 \dots k-1\}$, qui est isomorphe au groupe des rotations discrètes d'angle $\frac{2\pi}{k}$. Il s'agit d'un groupe cyclique car engendré par l'élément $\omega_k = \exp(\frac{2i\pi}{k})$. Dans la suite nous allons omettre l'indice k et noter simplement $\omega = \omega_k$ quand cela ne porte pas à confusion.

Les représentations irréductibles de \mathbb{Z}_k sont au nombre de k , indexées par leur « charge » $q = 0, \dots, k-1$. La représentation de charge q , notée V_q , est de dimension 1, et ω agit simplement comme la multiplication par ω^q :

$$\mathbb{Z}_k \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}) \quad (3.20)$$

$$\omega^p \rightarrow \mathcal{R}_q(\omega^p) : x \rightarrow \omega^{qp}x \quad (3.21)$$

3.2.2 Action du groupe \mathbb{Z}_k sur les courants

Implicitement nous avons supposé que le seul courant de dimension conforme nulle est l'identité $\Psi^0 = \mathbb{I}$, et l'invariance sous les dilatations fixe la forme suivante pour les fonctions à 1 point :

$$\langle \Psi^n(z) \rangle = \delta_{n,0 \bmod k} \quad (3.22)$$

Cette relation semble relativement inoffensive, mais associée à la graduation des OPE elle induit une représentation du groupe \mathbb{Z}_k sur les courants. Pour voir cela, explicitons le terme dominant de l'OPE (3.17) :

$$\Psi^n(z)\Psi^m(0) = \frac{C_{n,m}}{z^{\Delta_n+\Delta_m-\Delta_{n+m}}} [\Psi^{n+m}(0) + O(z)] \quad (3.23)$$

où les constantes de structure de l'algèbre des courants sont non nulles $C_{n,m} \neq 0$. Cette OPE détermine les fonctions à deux points :

$$\langle \Psi^n(z)\Psi^m(0) \rangle = \frac{C_{n,m}}{z^{\Delta_n+\Delta_m-\Delta_{n+m}}} \langle \Psi^{n+m} \rangle = \frac{C_{n,k-n}}{z^{\Delta_n+\Delta_m}} \delta_{n+m,0} \quad (3.24)$$

Comme l'invariance conforme impose l'annulation des fonctions à deux points entre deux champs primaires de dimensions différentes, une conséquence immédiate de la règle de fusion $\Psi^n \times \Psi^{k-n} \rightarrow \mathbb{I}$ est que le courant Ψ^n et son conjugué Ψ^{k-n} ont même dimension conforme :

$$\Delta_n = \Delta_{k-n} \quad (3.25)$$

De plus on peut toujours normaliser les courants de telle sorte que $C_{n,k-n} = 1$, *i.e.* :

$$\langle \Psi^n(z)\Psi^m(z') \rangle = \frac{\delta_{n+m,0}}{(z-z')^{2\Delta_n}} \quad (3.26)$$

Dans une théorie conforme habituelle, sans symétrie additionnelle, cette normalisation des fonctions à 2 points fixe celle des champs primaires (au signe près). Ce n'est pas le cas ici, et il reste des libertés dans la normalisation des champs. En effet toute transformation du type :

$$\Psi^n \rightarrow a_n \Psi^n \quad \text{avec } \{a_n\} \text{ vérifiant } a_n a_{k-n} = 1 \quad (3.27)$$

ne modifie pas la normalisation $\langle \Psi^n \Psi^{-n} \rangle = 1$. Par contre les constantes de structures vont être généralement transformées :

$$C_{n,m} \rightarrow \frac{a_n a_m}{a_{n+m}} C_{n,m} \quad (3.28)$$

On remarque qu'il y a exactement k transformations qui préservent les constantes de structures. Il s'agit des $\Omega^p, p = 0 \dots k-1$, définies par :

$$\Omega^p : \Psi^n \rightarrow \omega^{pn} \Psi^n \quad \text{où } \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{k}\right) \quad (3.29)$$

Ces transformations forment une représentation (réductible) du groupe \mathbb{Z}_k sur l'algèbre chirale : le courant Ψ^n (ainsi que tous ses descendants de Virasoro) vit dans la représentation de charge n .

3.2.3 Invariance \mathbb{Z}_k des fonctions de corrélation

La représentation de \mathbb{Z}_k au niveau des courants est compatible avec les OPE, et induit ainsi une représentation sur les fonctions de corrélation des courants. Lors d'une rotation discrète d'angle $\frac{2\pi}{k}$, une fonction de corrélation de courants transforme suivant :

$$\langle \Psi^{m_1}(z_1) \Psi^{m_2}(z_2) \dots \Psi^{m_n}(z_n) \rangle \rightarrow \omega^{m_1 + \dots + m_n} \langle \Psi^{m_1}(z_1) \Psi^{m_2}(z_2) \dots \Psi^{m_n}(z_n) \rangle \quad (3.30)$$

La graduation \mathbb{Z}_k des OPE (3.17) est clairement à l'origine de cette propriété. Or les fonctions à 1 point étant de la forme :

$$\langle \Psi_n(z) \rangle = \delta_{n,0} \quad (3.31)$$

par fusions successives des courants on obtient la condition de neutralité (*i.e.* d'invariance) des fonctions de corrélation :

$$\langle \Psi^{m_1}(z_1) \Psi^{m_2}(z_2) \dots \Psi^{m_n}(z_n) \rangle = 0 \quad \text{si } m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0 \pmod{k} \quad (3.32)$$

Cette condition de *neutralité* est équivalente à l'invariance \mathbb{Z}_k des fonctions de corrélation.

Les OPE parafermioniques (3.17) induisent donc une représentation du groupe \mathbb{Z}_k sur l'algèbre des courants : le parafermion $\Psi^n(z)$ vit dans la représentation de charge n , et les fonctions de corrélation de ces courants sont invariantes sous l'action de \mathbb{Z}_k , comme il se doit pour des observables.

3.3 Contraintes d'associativité des OPE

Les considérations précédentes supposent l'existence d'une théorie conforme comprenant des OPE du type (3.17). Une telle CFT n'est possible que si le système d'OPE est associatif. On va voir dans cette section que cela impose de fortes contraintes sur les paramètres tels que la charge centrale, les constantes de structures et les dimensions des courants. Voici les premiers termes sous dominants des OPE parafermioniques (3.17) :

$$\Psi^n(z) \Psi^m(0) = \frac{C_{n,m}}{z^{\Delta_n + \Delta_m - \Delta_{n+m}}} \left(\Psi^{n+m}(0) + \frac{\Delta_n - \Delta_m + \Delta_{n+m}}{2\Delta_{n+m}} z \partial \Psi^{n+m}(0) + O(z^2) \right) \quad (3.33)$$

$$\Psi^n(z) \Psi^{k-n}(0) = \frac{1}{z^{2\Delta_n}} \left(\mathbb{I} + \frac{2\Delta_n}{c} z^2 T(0) + O(z^3) \right) \quad (3.34)$$

Implicitement nous avons supposé l'absence de courants chiraux de dimension $\Delta = 1$ dans la dernière OPE. La présence de tels courants signifierait l'existence d'une symétrie continue additionnelle. En pratique il va souvent y avoir des champs primaires (au sens de Virasoro) additionnels dans les OPE (3.33) et (3.34). Nous éliminons simplement le cas des courants de dimension 1. Nous allons voir des exemples explicites où des champs primaires additionnels sont présents.

3.3.1 Contraintes sur les dimensions Δ_n

Une première série de contraintes imposées par l'associativité concerne les dimensions Δ_n . Implicitement on suppose que les courants parafermioniques ont des monodromies abéliennes lorsque l'on écrit les OPE (3.33) et (3.34). Cela signifie que des objets du type

$$\langle \Psi^{m_1}(z_1) \dots \Psi^{m_n}(z_n) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{\Delta_{m_i} + \Delta_{m_j} - \Delta_{m_i + m_j}} \quad (3.35)$$

sont simplement des polynômes. Le comportement asymptotique lorsque $z_i \rightarrow \infty$ doit donc être un comportement en loi de puissance $\sim z_i^{N_i}$ où N_i est un entier. En comparant avec les OPE on obtient des contraintes sur les dimensions conformes Δ_n :

$$2\Delta_n + 2\Delta_m = \Delta_{n+m} + \Delta_{n-m} \pmod{1}, \quad (3.36)$$

$$\Delta_n = n^2 \Delta_1 \pmod{1}. \quad (3.37)$$

Il faut bien garder à l'esprit que ces contraintes constituent simplement des conditions nécessaires à l'existence d'une solution associative, et ne sont en aucun cas des conditions suffisantes. La solution générale de ces contraintes est donnée par

$$\Delta_n = \frac{r}{2} \frac{n(k-n)}{k} + M_n, \quad (3.38)$$

où r et $M_n = M_{k-n}$ sont des entiers.

À ma connaissance une classification complète des OPE parafermioniques associatives n'existe pas à ce jour. Cependant dans la littérature un certain nombre de théories parafermioniques ont été étudiées. La plupart correspondent à des dimensions parafermioniques de la forme

$$\Delta_n = \frac{r}{2} \frac{n(k-n)}{k} \quad (3.39)$$

i.e. avec tous les entiers $M_n = 0$ dans (3.38).

C'est la solution la plus simple, à laquelle on va se restreindre dans la suite. On va donc s'intéresser à des théories conformes possédant $k-1$ courants Ψ^n , de dimension conforme

$$\Delta_n = \frac{r}{2} \frac{n(k-n)}{k} \quad r \in \mathbb{N} \quad (3.40)$$

obéissant aux règles de fusion :

$$\Psi^n \times \Psi^m = \Psi^{n+m} \quad \text{où } n, m \text{ et } n+m \text{ sont définis modulo } k \quad (3.41)$$

$$\Psi^n \times \Psi^{-n} = \mathbb{I} \quad (3.42)$$

et invariante par conjugaison de charge. Une telle CFT, quand elle existe, est notée $\mathbb{Z}_k^{(r)}$. Pour caractériser une algèbre chirale de ce type, il faut définir complètement les OPE correspondantes, *i.e.* donner tous les termes singuliers dans :

$$\Psi^n(z)\Psi^m(0) = \frac{C_{n,m}}{z^{\Delta_n+\Delta_m-\Delta_{n+m}}} \left(\Psi^{n+m}(0) + \frac{\Delta_n - \Delta_m + \Delta_{n+m}}{2\Delta_{n+m}} z \partial \Psi^{n+m}(0) + O(z^2) \right) \quad (3.43)$$

$$\Psi^n(z)\Psi^{k-n}(0) = \frac{1}{z^{2\Delta_n}} \left(\mathbb{I} + \frac{2\Delta_n}{c} z^2 T(0) + O(z^3) \right) \quad (3.44)$$

et vérifier leur associativité.

Il est évident que plus la dimension des courants est grande, plus le nombre de termes à connaître dans ces OPE est important. La plupart de ces termes (tous les descendants de Virasoro) sont fixés par l'invariance conforme, mais en général il va rapidement apparaître des nouveaux champs primaires, pour lesquels il faudra aussi donner les OPEs. Ainsi la complexité de la théorie va augmenter rapidement avec r . Une étude exhaustive des solutions associatives n'existe que pour $r \leq 4$.

3.3.2 Quelques solutions associatives connues

Dans cette partie on présente un certain nombre de théories conformes parafermioniques, dont la plupart seront utilisées dans les chapitres suivants.

Théories parafermioniques de Fateev-Zamolodchikov

Historiquement, Fateev et Zamolodchikov ont introduit les premières théorie parafermioniques pour décrire les points critiques auto-duaux des modèles à k spins présentés en 3.1.2. Ces CFT correspondent dans nos notations au cas $r = 2$, et les dimensions des parafermions sont données par

$$\Delta_n = \frac{n(k-n)}{k}. \quad (3.45)$$

C'est le cas le plus simple de la discussion précédente ($r = 1$ n'est pas possible), dans le sens où les dimensions Δ_n prennent les valeurs minimales parmi celles de la série considérée. En fait il y a tellement peu de liberté dans les OPE qu'il existe une unique solution associative pour un k donné. Les constantes de structure sont alors :

$$(C_{n,m})^2 = \frac{\Gamma(n+m+1)\Gamma(k-n+1)\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(k-n-m+1)\Gamma(k+1)} \quad (3.46)$$

$$= \frac{(n+m)!(k-n)!(k-m)!}{n!m!(k-n-m)!k!}, \quad (3.47)$$

et la charge centrale est :

$$c = \frac{2(k-1)}{k+2}. \quad (3.48)$$

Il est facile de vérifier que ces valeurs sont les seules compatibles avec l'associativité. Cependant vérifier complètement l'associativité, *i.e.* écrire complètement les OPE et calculer toutes les fonctions à 4 points constitue déjà un problème non trivial. Pour prouver l'associativité de cette algèbre, il est beaucoup plus simple de considérer le coset

$$\frac{\text{SU}(2)_k}{\text{U}(1)}, \quad (3.49)$$

et d'y reconnaître la théorie de Fateev et Zamolodchikov. En effet ce coset contient des champs Ψ^n , de dimension $n(k-n)/k$ et qui obéissent aux OPE parafermioniques \mathbb{Z}_k . L'associativité de cette algèbre est donc automatiquement assurée.

Ces CFT, que l'on va noter $\mathbb{Z}_k^{(2)}$, ont été énormément étudiées dans la littérature. Ce sont sans doute les plus connues et couramment utilisées.

Théories parafermioniques unitaires pour $r = 4$

Lorsque $r = 4$, il existe une infinité d'algèbres parafermioniques associatives, paramétrées par un réel λ [4]. Les courants ont pour dimension

$$\Delta_n = 2\frac{n(k-n)}{k}, \quad (3.50)$$

et les constantes de structure sont données par

$$(C_{n,m})^2 = \frac{\Gamma(n+m+1)\Gamma(k-n+1)\Gamma(k-m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(k-n-m+1)\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(n+m+\lambda)\Gamma(k-n+\lambda)\Gamma(k-m+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)\Gamma(m+\lambda)\Gamma(k-n-m+\lambda)\Gamma(k+\lambda)}. \quad (3.51)$$

Cette algèbre est associative pour la charge centrale

$$c = \frac{4(k-1)(k+\lambda-1)\lambda}{(k+2\lambda)(k+2\lambda-2)}. \quad (3.52)$$

On peut former un algèbre associative quelle que soit la valeur de la charge centrale. En ce sens, elle n'est pas fixée par l'associativité de l'algèbre. Les modèles minimaux unitaires possédant cette algèbre sont obtenus lorsque $2\lambda = l$ est un entier positif, et correspond au coset [56] :

$$\frac{\text{SO}(k)_l \times \text{SO}(k)_2}{\text{SO}(k)_{l+2}} \quad (3.53)$$

Les représentations dégénérées correspondantes ont été étudiées en grand détail dans [57] lorsque $k = 3$ et [5, 6, 7, 8] pour $k \geq 5$.

Théories $WA_{k-1}(k+1, k+r)$

Les théories WA_{k-1} sont des CFT dont l'algèbre chirale est composée de $k-2$ courants $W^{(s)}(z)$, $s = 2, \dots, k-1$ de spin entier $\Delta_{(s)} = s$. Les modèles minimaux correspondants $WA_{k-1}(p, p')$ sont paramétrés par deux entiers p et p' premiers entre eux et ne sont unitaires que pour $p' = p+1$ (voir chapitre 5).

Parmi ces modèles minimaux les théories $WA(k+1, k+r)$ sont assez particulières : dans le tableau de Kac on trouve $k-1$ champs parafermioniques Ψ^n de dimension conforme

$$\Delta_n = \frac{r n(k-n)}{2k}. \quad (3.54)$$

On a donc affaire à une solution associative particulière de $\mathbb{Z}_k^{(r)}$, pour une valeur de la charge centrale donnée par

$$c = -(k(r-2) - 1) \frac{r(k-1)}{k+r}. \quad (3.55)$$

De plus amples détails sur ces théories sont donnés dans le chapitre 5. Le cas $r = 2$ n'est pas nouveau et coïncide avec les parafermions de Fateev et Zamolodchikov. Dès que $r > 2$ ces modèles ne sont pas unitaires, comme en témoigne la valeur négative de la charge centrale. Lorsque $r = 4$ ces courants parafermioniques forment un cas particulier de (3.52) pour $\lambda = (-2k+1)/3$ (ou $\lambda = (-k+2)/3$), et cette théorie constitue alors une représentation non unitaire de l'algèbre $\mathbb{Z}_k^{(4)}$.

Théorie $\mathbb{Z}_3^{(8)}$

Dans [58], Dotsenko et Santachiara ont construit une troisième solution pour les algèbres associatives de type \mathbb{Z}_3 . Ces solutions correspondent à $(k, r) = (3, 8)$. Dans ce cas les courants parafermioniques $\Psi(z)$ et $\Psi^\dagger(z)$ ont pour dimension conforme

$$\Delta = \frac{8}{3} \quad (3.56)$$

L'associativité de l'algèbre parafermionique impose la présence de champs primaires (au sens de Virasoro) supplémentaires $\tilde{\Psi}(z)$ et $\tilde{\Psi}^\dagger(z)$ de dimension $\tilde{\Delta} = \Delta + 2$ ainsi qu'un champ primaire neutre $B(z)$ de spin $\Delta_B = 4$. Les règles de fusion possèdent toujours une graduation \mathbb{Z}_3 :

$$\Psi \times \Psi \rightarrow \lambda \Psi^\dagger + \xi \tilde{\Psi}^\dagger, \quad (3.57)$$

$$\Psi \times \tilde{\Psi} \rightarrow \xi \Psi^\dagger + \eta \tilde{\Psi}^\dagger, \quad (3.58)$$

$$\Psi \times \Psi^\dagger \rightarrow \mathbb{I} + \gamma B, \quad (3.59)$$

$$\Psi \times \tilde{\Psi}^\dagger \rightarrow \mu B, \quad (3.60)$$

$$\Psi \times B \rightarrow \gamma \Psi + \mu \tilde{\Psi}, \quad (3.61)$$

...

et les constantes de structure λ^2, μ^2, \dots sont des fonctions rationnelles de la charge centrale. Par exemple :

$$\xi = \frac{8}{27} \sqrt{30} \sqrt{\frac{(c+56)(11c+14)}{c(784+57c)}}. \quad (3.62)$$

On renvoie à [58] pour l'ensemble des valeurs de ces constantes.

Dans ce cas seule l'algèbre chirale de la théorie conforme est connue, et l'étude des représentations reste à faire. Très certainement il existe une série discrète de valeurs de la charge centrale pour lesquelles les CFT sont unitaires et contiennent un nombre fini de primaires dégénérés.

Chapitre 4

Groupe de renormalisation pour les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}$ perturbées

Dans ce chapitre on étudie les perturbations de théories unitaires $\mathbb{Z}_N^{(4)}$ par deux champs faiblement pertinents. Les équations du groupe de renormalisation sont évaluées perturbativement, et les points fixes infra-rouges sont identifiés. On obtient des flots non-massifs entre théories parafermioniques, généralisant ainsi les résultats connus dans le cas des modèles minimaux. Ce chapitre constitue une synthèse des travaux [59, 60, 61].

4.1 Théories conformes perturbées

4.1.1 Approche perturbative du groupe de renormalisation

Une théorie conforme est une théorie des champs décrivant le point critique d'un système statistique, et est par définition invariante d'échelle. À ce titre elle correspond à un point fixe du groupe de renormalisation. Pour étudier le voisinage de ce point critique, une approche possible est de perturber la CFT correspondante par des champs pertinents, et d'étudier les flots du groupe de renormalisation (RG) [62, 63, 64, 65]. En général, il est difficile d'obtenir des résultats exacts dès que l'on brise l'invariance conforme. Cependant dans certains cas des méthodes robustes sont à disposition : tout d'abord il existe toute une technologie dédiée à l'étude des perturbations intégrables. On peut ainsi étudier certains flots, massifs ou non, du groupe de renormalisation, à condition de choisir une perturbation qui préserve l'intégrabilité. Un autre cas bien connu, et il va s'agir du cas qui nous intéresse particulièrement ici, est l'étude des perturbations faiblement pertinentes pour les modèles minimaux [62] : on perturbe avec des champs possédant des dimensions anormales $\Delta_{\text{phys}} = 2 - \epsilon$, avec $\epsilon \ll 1$, ce qui fournit un paramètre perturbatif ϵ que l'on contrôle parfaitement.

L'action de la théorie perturbée prend alors la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \sum_i g_i \int d^2x \Phi_i(x) \quad (4.1)$$

où l'on note \mathbf{A}_0 l'action de la théorie conforme non perturbée décrivant les propriétés ultra-violettes du système, et où les constantes de couplage $g = g(\xi)$ dépendent de l'échelle ξ . Cette expression formelle en terme d'une action est simplement un guide, puisqu'en général on ne connaît pas l'action d'une théorie conforme, mais seulement les fonctions de corrélation. Mais cela est suffisant pour dériver perturbativement les équations du RG. Comme cette méthode est perturbative, elle ne va fonctionner *a priori* que si les constantes de couplage restent d'ordre ϵ : cela va être le cas lorsque les équations du RG flottent vers un nouveau point fixe, situé dans la région perturbativement bien maîtrisée. On va alors décrire des flots non massifs d'une CFT décrivant les propriétés aux courtes distances vers une autre CFT, qui décrit le comportement aux grandes distances. L'objectif d'une telle approche est de prédire quelle sera la CFT dans l'infrarouge (IR) connaissant celle dans l'ultraviolet (UV).

Pour mener à bien ce programme, il faut d'abord identifier un ensemble de champs faiblement pertinents Φ_i dont l'algèbre de fusion se referme. En particulier il ne faut pas que leurs fusions engendrent des champs fortement pertinents (hormis l'identité), ce qui rendrait caduque l'approche perturbative. Par contre ils peuvent générer des champs non pertinents, ceci ne pose aucun problème. On introduit les fonctions β qui quantifient la variation des constantes de couplage lorsque l'on change l'échelle $x \rightarrow (1 + \delta\xi/2)x$:

$$\delta g_i = \beta_i(g)\delta\xi/2 \quad (4.2)$$

À l'ordre dominant en ϵ les équations du groupe de renormalisation s'obtiennent directement à partir des OPE des champs faiblement pertinents. Considérons un ensemble de champs Φ_i faiblement pertinents de dimension conforme $\Delta_i = 1 - \epsilon_i$, avec $\epsilon_i \sim \epsilon$, et admettant les règles de fusion générales suivantes :

$$\Phi_i \times \Phi_j = \sum_k C_{i,j,k} \Phi_k \quad (4.3)$$

où l'on a omis les champs non pertinents de dimension $\Delta > 1$, ainsi que l'identité qui ne va pas participer au RG. Les fonctions β sont alors données à l'ordre dominant en $g_i \sim \epsilon$:

$$\beta_i = 2\epsilon_i g_i - 2 \sum_{j,k} C_{i,j,k} g_j g_k + O(\epsilon^3) \quad (4.4)$$

Ces équations dérivent d'un potentiel, *i.e.* on peut écrire $\beta_i = \partial_{g_i} V(g)$, avec :

$$V(g) = \sum_i \epsilon_i g_i^2 - \frac{2}{3} \sum_{i,j,k} C_{i,j,k} g_i g_j g_k + O(\epsilon^4) \quad (4.5)$$

Une conséquence immédiate est que ce potentiel ne peut qu'augmenter le long des flots du groupe de renormalisation :

$$\frac{dV(g)}{d\xi} = \sum_i \beta_i \partial_{g_i} V = \left(\vec{\nabla} V \right)^2 > 0 \quad (4.6)$$

Ceci est une marque d'irréversibilité des flots du RG. En effet, lorsque l'on renormalise la théorie, on moyenne sur les fluctuations de courte portée, et on perd des degrés de liberté. Ceci constitue un cas particulier, perturbatif, du fameux théorème *c* de Zamolodchikov.

4.1.2 Théorème *c* de Zamolodchikov

Considérons une théorie des champs unitaire en deux dimensions : le théorème *c* de Zamolodchikov [62] prouve le caractère irréversible des flots du groupe de renormalisation, en construisant une fonction des couplages $c(\{g_i\})$ qui possède les propriétés suivantes :

- $c(\{g_i\})$ est décroissante le long des flots du groupe de renormalisation,
- Lorsqu'un point fixe se présente, la fonction $c(\{g_i\})$ coïncide avec la charge centrale de la CFT correspondante.

Lorsqu'un point fixe du RG est atteint, la théorie développe une symétrie infinie et devient une CFT. En particulier la trace du tenseur d'énergie-impulsion Θ s'annule. En dehors d'un point critique, la trace $\Theta = T^\mu_\mu$ ne s'annule plus, car la théorie des champs n'est plus invariante d'échelle. Mais l'isotropie et l'homogénéité imposent toujours les relations de conservation de $T^{\mu\nu}$:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (4.7)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (4.8)$$

ce qui donne en notations complexes :

$$\bar{\partial} T = -\partial \Theta \quad (4.9)$$

$$\partial \bar{T} = -\bar{\partial} \Theta \quad (4.10)$$

Zamolodchikov a introduit la fonction c suivante, qui ne dépend que de l'échelle $\xi = \ln(z\bar{z})$ puisque T est de spin 2 et Θ de spin 0 :

$$c(\xi) = 2z^4 \langle T(z, \bar{z})T(0, 0) \rangle + 4z^3 \bar{z} \langle T(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle - 6z^2 \bar{z}^2 \langle \Theta(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle \quad (4.11)$$

Les équations de conservation du tenseur d'énergie-impulsion impliquent directement :

$$\frac{dc}{d\xi} = -12z^2 \bar{z}^2 \langle \Theta(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle \quad (4.12)$$

Le caractère unitaire de la théorie des champs assure que la fonction de corrélation $\langle \Theta(z, \bar{z})\Theta(0, 0) \rangle$ est positive, et la fonction $c(\xi)$ est une fonction décroissante de l'échelle ξ , ce qui prouve le premier point. Le deuxième point découle naturellement de la définition de la fonction $c(\xi)$: comme la trace Θ s'annule aux points fixes, on a alors $c(g) = 2z^4 \langle T(z)T(0) \rangle$ qui n'est autre que la charge centrale.

Pour une théorie conforme perturbée de la forme (4.1), la trace du tenseur d'énergie-impulsion Θ est donnée explicitement par :

$$\Theta(z, \bar{z}) = \sum_i \beta_i(g) \Phi_i(z, \bar{z}). \quad (4.13)$$

En comparant avec l'équation (4.12), on découvre que la fonction $c(g)$ est directement reliée au potentiel dont dérivent les fonctions β :

$$c(g) = c_0 - \frac{V(g)}{24} = c_0 - \frac{1}{24} \sum_i \epsilon_i g_i^2 + \frac{1}{36} \sum_{i,j,k} C_{i,j,k} g_i g_j g_k + O(\epsilon^4) \quad (4.14)$$

Perturbativement on connaît les fonctions β à l'ordre ϵ^2 , et donc la fonction c à l'ordre ϵ^3 . Il suffit alors de chercher, à cet ordre, la présence de points fixes g_i^* , c'est-à-dire des valeurs des constantes de couplages pour lesquelles les fonctions β s'annulent. On peut alors estimer la charge centrale correspondante en utilisant (4.14).

Pour identifier la CFT décrivant un point-fixe il est aussi possible d'évaluer la modification de la dimension anormale des opérateurs primaires le long du flot, en calculant les fonctions γ correspondantes. Cette approche donne accès au spectre de la théorie infra-rouge, en particulier elle permet de comparer les dimensions conformes des opérateurs avec le tableau de Kac prédit par la CFT.

Historiquement cette approche a d'abord été appliquée aux modèles minimaux unitaires M_p présentés au chapitre 2. Lorsque $p \gg 1$ la perturbation par le champ $\Phi_{(1|3)}$ est faiblement pertinente, et génère un flot du groupe de renormalisation du modèle M_p vers le modèle M_{p-1} [62].

4.2 Perturbation des théories parafermioniques unitaires $\mathbb{Z}_N^{(4)}$

Nous souhaitons appliquer ces idées aux théories parafermioniques unitaires $\mathbb{Z}_N^{(4)}$ introduites par Dotsenko, Jacobsen et Sanatachiara [5]-[8] et présentées au chapitre 3, pour obtenir des flots non-massifs entre CFT parafermioniques.

4.2.1 Présentation des théories unitaires $\mathbb{Z}_N^{(4)}$

Les courants parafermioniques Ψ^p des théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}$, $N \geq 3$ ont pour dimension.

$$\Delta_p = \Delta_{N-p} = \frac{2p(N-p)}{N} \quad (4.15)$$

On ne considère pas le cas $N = 2$, car alors le « parafermion » possède une dimension $\Delta = 1$ non fractionnaire, qui correspond à une symétrie continue $U(1)$. Le cas $N = 3$ est un peu particulier, et les CFT possédant l'algèbre chirale $\mathbb{Z}_3^{(4)}$ ont été construites dans [57]. L'effet de perturbations faiblement pertinentes a été traité dans [66, 67]. Enfin les théories pour $N = 4$ factorisent en deux copies du modèle $N = 1$ superconforme. On se concentre donc sur le cas $N \geq 5$. Les parafermions forment une algèbre de courants associative quelle que

soit la valeur de la charge centrale c [4]. Cependant les représentations de cette algèbre ne donnent lieu à des théories unitaires que pour une série discrète de valeurs de c [5, 6, 7, 8] :

$$c(p) = (N-1) \left(1 - \frac{N(N-2)}{p(p+2)} \right) \quad p \geq N-1 \quad (4.16)$$

qui correspondent aux cosets symétriques [56] :

$$\frac{\mathrm{SO}(N)_l \otimes \mathrm{SO}(N)_2}{\mathrm{SO}(N)_{l+2}} \quad \text{avec } p = l + N - 2 \quad (4.17)$$

et les champs primaires sont indexés par le réseau de poids de l'algèbre de Lie $\mathrm{SO}(N)$, c'est-à-dire :

- $B_{(N-1)/2}$ si N est impair
- $D_{N/2}$ si N est pair

On va noter génériquement r le rang de l'algèbre de Lie : $r = \lfloor N/2 \rfloor$, et $\vec{\omega}_i$, $i = 1, \dots, r$, les poids fondamentaux. Les champs primaires $\Phi_{(\vec{n}|\vec{n}')}$ sont indexés par deux vecteurs \vec{n}, \vec{n}' appartenant au réseau des poids de l'algèbre de Lie X_r correspondante. Leurs dimensions conformes sont données par :

$$\Delta_{(\vec{n}|\vec{n}')} = \frac{((p+2)\vec{n} - p\vec{n}')^2 - 4\vec{\rho}^2}{2p(p+2)} + B_Q \quad (4.18)$$

où B_Q est un terme qui dépend du secteur de la théorie, c'est-à-dire de la charge \mathbb{Z}_N du champ primaire, qui à son tour ne dépend que de la position dans le tableau de Kac du champ primaire. La dépendance en la charge Q du terme de bord est simplement donnée par :

$$B_Q = \frac{Q(N-2Q)}{4N}, \quad Q = 0, 1, \dots, r \quad (4.19)$$

4.2.2 Choix de la perturbation

Nous voulons perturber la théorie minimale unitaire $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ par des champs faiblement pertinents. Dans le but de préserver l'invariance \mathbb{Z}_N , nous allons nous limiter à des perturbations neutres vis-à-vis de cette symétrie. En effet l'idée ici est d'obtenir des flots sans masse d'une théorie minimale $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ vers une autre du même type $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p')$, généralisant les résultats connus pour les modèles $M(p, p+1)$. Il est donc essentiel que le terme de perturbation ne brise pas l'invariance \mathbb{Z}_N de l'action. Lorsque $p \gg 1$, la théorie possède naturellement un paramètre perturbatif $\epsilon \sim 1/p$ que l'on contrôle parfaitement. L'approche est tout à fait similaire à celle du groupe de renormalisation des modèles minimaux basés sur l'algèbre de Virasoro [62].

Dans ce domaine, *i.e.* lorsque $p \gg 1$, nous allons voir que l'on trouve dans le bas du tableau de Kac (4.18) de la théorie $\mathbb{Z}_N(p)$ deux champs neutres, faiblement pertinents, et qui forment une algèbre de fusion fermée. Le type d'algèbre de Lie sous-jacente à la théorie $\mathbb{Z}_N^{(4)}$ dépend de la parité de N , et cela donne lieu à quelques différences dans l'analyse des perturbations. Cependant les résultats pour les cas pair et impair sont très similaires, et il est possible d'unifier les deux cas au niveau des équations du RG. En particulier le diagramme de phase obtenu ne dépend pas de la parité de N . Dans un souci de simplicité, nous allons considérer en détail le cas impair. Lorsque $N = 2r + 1$, les champs primaires sont naturellement indexés par le réseau de racines de B_r . Les détails de ces CFT ont été donnés dans [5, 6], et l'analyse des perturbations faiblement pertinentes a été l'objet des publications [59, 60]. Le cas N pair a été traité dans [61].

Dans un premier temps, nous allons rechercher un ensemble de champs neutres appropriés pour perturber la théorie $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$. Les champs neutres, *i.e.* de charge \mathbb{Z}_N nulle, sont de deux sortes : les champs primaires neutres, ou singlets, et les descendants neutres de champs primaires chargés (doublets).

Singlets

Les champs neutres les plus naturels sont les singlets : ce sont les champs primaires de charge nulle qui apparaissent dans le tableau de Kac. Un champ primaire $\Phi_{(\vec{n}|\vec{n}')}$ est neutre lorsque (d'après [6]) :

$$n_i - n'_i = 0 \pmod{2} \quad i = 1 \dots r - 1 \quad (4.20)$$

$$n_r - n'_r = 0 \pmod{4} \quad (4.21)$$

La formule de Kac de $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ (4.18) donne leur dimension conforme. En particulier le terme de bord B_Q est nul dans le secteur correspondant aux singlets :

$$\begin{aligned}\Delta_{(\vec{n}|\vec{n}')}^S &= \frac{((p+2)\vec{n} - p\vec{n}')^2 - 4\rho^2}{4p(p+2)} \\ &\sim \frac{(\vec{n} - \vec{n}')^2}{4} - \frac{\vec{n}'^2 - \vec{n}^2}{2}\epsilon + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (4.22)$$

Dans le domaine $p \gg 1$, on trouve dans le bas du tableau de Kac de la théorie \mathbb{Z}_5 le singlet faiblement pertinent suivant :

$$S = S_{(1,1,\dots,1|3,1,1,\dots,1)} \quad (4.23)$$

$$\Delta_S = 1 - N\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (4.24)$$

Ce n'est bien sûr pas l'unique singlet faiblement pertinent du tableau de Kac, mais celui-ci possède la propriété de ne pas générer un très grand nombre d'autres champs pertinents par fusion, ce qui est essentiel dans cette approche. D'après les règles de fusion issues du Gaz de Coulomb, ce champ $S(x)$ ne peut générer qu'un seul nouveau champ pertinent $A(x)$, qui est un descendant d'un doublet (4.25). Nous allons voir dans la partie 4.2.3 que c'est effectivement le cas, c'est-à-dire que les règles de fusion du champ $S(x)$ sont $S \times S \rightarrow A$.

Descendants neutres

L'autre type de champs neutres pertinents correspond à certains descendants de champs chargés. Les détails de l'analyse des candidats sont donnés dans [60]. Il existe un champ particulier A qui forme une algèbre de fusion fermée (*i.e.* $A \times A \rightarrow A$). Plus précisément il s'agit de :

$$A = \begin{cases} A_{-\frac{1}{2}}^{-1} \Phi_{(11|13)} & \text{pour } N = 5 \\ A_{-\frac{1}{N}}^{-1} \Phi_{(111\dots|121\dots)} & \text{pour } N \geq 7 \end{cases} \quad (4.25)$$

qui a pour dimension conforme

$$\Delta_A = 1 - (N-2)\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (4.26)$$

Comme ce champ ne génère aucun autre opérateur pertinent, il serait cohérent d'étudier les effets de la perturbation suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + g \int d^2x A(x) \quad (4.27)$$

En termes de la construction GKO [68], ce champ $A(x)$ correspond au branchement $[(k, id) \otimes (l, id) / (k+l, ad)]$ du coset $G_k \otimes G_l / G_{k+l}$, dans le cas particulier des théories $\mathbb{Z}_{2r+1}^{(4)}$. Il s'agit du champ standard lors de ce genre de considérations, et en ce sens $A(x)$ est l'équivalent du champ $\Phi_{(1|3)}(x)$ pour les modèles minimaux.

Dans le cadre plus général des cosets symétriques de la forme $(G_k \otimes G_l) / G_{k+l}$, pour G simplement lacée, Fateev [69] a étudié les flots du groupe de renormalisation obtenus en perturbant avec ce champ, généralisant ainsi les résultats des modèles minimaux. Comme il s'agit d'une perturbation intégrable, il a pu étudier aussi bien les flots non massifs que les flots massifs.

Cependant il est intéressant d'analyser les effets d'une perturbation par les champs A et S , et ce pour plusieurs raisons :

- d'une part le cas N impair est nouveau car il correspond à une algèbre de Lie non simplement lacée ;
- d'autre part la perturbation par deux champs est plus générale, et permet d'atteindre de nouveaux points fixes infra-rouges.

4.2.3 Calcul des constantes de fusion

Nous considérons la théorie conforme $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ perturbée par les champs $S(x)$ et $A(x)$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \frac{2g}{\pi} \int d^2x S(x) + \frac{2h}{\pi} \int d^2x A(x) \quad (4.28)$$

où les champs perturbatifs $S(x)$ et $A(x)$ sont faiblement pertinents, et forment un anneau de fusion fermé :

$$S \times S \rightarrow D_1 A \quad (4.29)$$

$$A \times A \rightarrow D_2 A \quad (4.30)$$

$$S \times A \rightarrow D_1 S \quad (4.31)$$

Les fonctions β_g et β_h (4.4) sont données au premier ordre non trivial par (4.4) :

$$\beta_g = \frac{dg}{d\xi} = 2(1 - \Delta_S)h - 4D_1gh \quad (4.32)$$

$$\beta_h = \frac{dh}{d\xi} = 2(1 - \Delta_A)g - 2D_2h^2 - 2D_1g^2 \quad (4.33)$$

Pour analyser les flots du groupe de renormalisation, il faut calculer les quatre constantes de fusion D_1 et D_2 . Une méthode efficace pour obtenir les OPE des champs $A(x)$ et $S(x)$ et calculer les constantes de fusion correspondantes est de passer par un Gaz de Coulomb. Mais cette approche n'est pas aisée pour les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}$ car l'ansatz pour le Gaz de Coulomb fait intervenir des parafermions de Gepner [70] $\text{SO}(2r+1)/\text{U}(1)^r$, pour lesquels les fonctions de corrélation ne sont pas connues. Nous avons contourné ce problème en utilisant la représentation coset des théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}$. En particulier nous avons généralisé les méthodes développées dans [66, 67] pour les cosets $\text{SU}(2)$.

L'idée ici est de décomposer la théorie $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ en termes de CFT plus simples à manipuler, en particulier qui admettent une représentation par un Gaz de Coulomb simple. En partant de la représentation coset :

$$\mathbb{Z}_N^{(4)}(p) = \frac{\text{SO}(N)_k \otimes \text{SO}(N)_2}{\text{SO}(N)_{k+2}}, \quad p = N - 2 + k, \quad (4.34)$$

on peut décomposer formellement ces théories parafermioniques comme :

$$\mathbb{Z}_N^{(4)}(p) \otimes \frac{\text{SO}(N)_1 \otimes \text{SO}(N)_1}{\text{SO}(N)_2} = \frac{\text{SO}(N)_k \otimes \text{SO}(N)_1}{\text{SO}(N)_{k+1}} \otimes \frac{\text{SO}(N)_{k+1} \otimes \text{SO}(N)_1}{\text{SO}(N)_{k+2}} \quad (4.35)$$

Les trois cosets qui apparaissent dans l'équation (4.35) sont des théories minimales unitaires WB_r pour N impair :

$$\text{WB}_r(p) = \frac{\text{SO}(2r+1)_k \otimes \text{SO}(2r+1)_1}{\text{SO}(2r+1)_{k+1}}, \quad p = 2r - 1 + k, \quad (4.36)$$

et la décomposition formelle (4.35) devient simplement :

$$\mathbb{Z}_N^{(4)}(p) \otimes \text{WB}_r(2r) = \text{WB}_r(p) \otimes \text{WB}_r(p+1) \quad (4.37)$$

Cette équation relie les représentations des algèbres correspondantes, et peut être réexprimée en termes de relations au niveau des caractères. Mais cela permet aussi d'établir des identifications entre les blocs conformes, *i.e.* de relier la partie holomorphe des champs primaires et des descendants entre les différentes théories. Une fois que cette relation est établie au niveau des champs holomorphes, il est très facile d'accéder aux constantes de structure en comparant les fonctions à trois points par exemple. Cette approche a été développée et analysée en grand détail dans le cas de $\text{SU}(2)$ [66, 67].

Généralisée au cas des cosets $\text{SO}(N)$, cette méthode permet l'identification des champs neutres de $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ avec certains champs dans $\text{WB}_r(p) \otimes \text{WB}_r(p+1)$. En effet, le terme $\text{WB}_r(2r)$ dans (4.35) n'intervient pas dans la décomposition des champs neutres, qui appartiennent au secteur le plus simple de $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$. Les détails de cette identification sont assez techniques et sont l'objet de [60]. Plutôt que de reproduire cette analyse ici, nous allons simplement donner cette identification, et pour être spécifique nous allons nous cantonner à $N = 5$. Dans ce cas la partie holomorphe des champs $A(x)$ et $S(x)$ s'exprime comme :

$$S = \Phi_{(11|21)}^{(p)} \otimes \Phi_{(21|31)}^{(p+1)} \quad (4.38)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{(11|11)}^{(p)} \otimes \Phi_{(11|13)}^{(p+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{(11|13)}^{(p)} \otimes \Phi_{(13|13)}^{(p+1)} \quad (4.39)$$

Les champs $\Phi^{(p)}$ appartiennent à la théorie $WB_2(p)$ et leurs règles de fusion ainsi que leurs constantes de fusion se déduisent du Gaz de Coulomb des théories WB_2 . En particulier on obtient [59] :

$$\begin{aligned}
D_{(11|13)(11|13)(11|13)} &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \\
D_{(11|13)(13|13)(13|13)} &= \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\epsilon^2, \\
D_{(11|21)(11|21)(11|13)} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \\
D_{(21|31)(21|31)(11|13)} &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \\
D_{(13|13)(13|13)(13|13)} &= 1, \\
D_{(21|31)(21|31)(13|13)} &= \frac{5}{8}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Ce sont les seules constantes nécessaires à nos calculs, et elles sont données à l'ordre dominant en ϵ . En utilisant ces valeurs et en les injectant dans les identifications (4.38)-(4.39) on obtient les règles de fusions suivantes pour les champs $S(x)$ et $A(x)$:

$$S \times S \rightarrow D_1 A \tag{4.41}$$

$$A \times A \rightarrow D_2 A \tag{4.42}$$

$$S \times A \rightarrow D_1 S \tag{4.43}$$

avec

$$D_1 = \sqrt{\frac{5}{2}} + O(\epsilon) \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} + O(\epsilon) \tag{4.44}$$

Cette approche se généralise sans problème au cas N quelconque (même pair [61]), en particulier on obtient à l'ordre dominant en ϵ :

$$D_1 = \sqrt{2} \frac{N}{\sqrt{N(N-1)}} + O(\epsilon) \quad \text{et} \quad D_2 = \sqrt{2} \frac{N-2}{\sqrt{N(N-1)}} + O(\epsilon) \tag{4.45}$$

À partir d'ici l'analyse des cas pair et impair est identique, et on considère le cas générique (*i.e.* $N \geq 5$).

4.3 Flots non massifs du RG pour les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ perturbées

Nous considérons la théorie conforme $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ perturbée par les champs $S(x)$ et $A(x)$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \frac{2g}{\pi} \int d^2x S(x) + \frac{2h}{\pi} \int d^2x A(x) \tag{4.46}$$

où l'action \mathbf{A}_0 symbolise celle de la théorie conforme ultraviolette $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$, et les champs $A(x)$ et $S(x)$ ont pour dimensions conformes :

$$\begin{aligned}
\Delta_A &= 1 - (N-2)\epsilon \\
\Delta_S &= 1 - N\epsilon
\end{aligned} \tag{4.47}$$

4.3.1 Équation du groupe de renormalisation

À partir des OPE des champs $A(x)$ et $S(x)$ on obtient les équations du groupe de renormalisation pour les constantes de couplage :

$$\beta_g = \frac{dg}{d\xi} = 2(1 - \Delta_S)h - 4D_1gh \tag{4.48}$$

$$\beta_h = \frac{dh}{d\xi} = 2(1 - \Delta_A)g - 2D_1g^2 - 2D_2h^2 \tag{4.49}$$

Elles sont données au premier ordre non trivial en g et h . Toute cette analyse n'est valide que pour $\epsilon \ll 1$, c'est-à-dire pour les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ avec $p \gg 1$. Comme on a la liberté choisir p arbitrairement grand, on contrôle parfaitement le paramètre perturbatif ϵ . Les équations ci-dessus restent valables lorsque g et h restent dans la région perturbativement bien contrôlée $g, h \sim \epsilon$ et cette approche permet de décrire d'éventuels flots non massifs reliant la théorie $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ dans l'ultraviolet à une autre CFT dans l'infrarouge. La présence de CFT infrarouges dans le diagramme des phases se traduit par des points fixes des équations du RG. Il est donc essentiel d'analyser la présence de tels points fixes.

4.3.2 Flots et points fixes infra-rouges

Les points fixes sont des points (g, h) de l'espace des phases qui sont stables sous les flots du RG, *i.e.* qui annulent toutes les fonctions β (4.48)-(4.49). En injectant les valeurs (4.47)-(4.45) dans les fonctions β , on obtient dans le diagramme de phase les points fixes suivants (voir Fig. 4.1) :

- le point fixe UV trivial $g_0^* = h_0^* = 0$, qui est décrit par la CFT $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$
- un point fixe IR sur l'axe h :

$$(g_1^*, h_1^*) = \left(0, \sqrt{\frac{N(N-1)}{2}}\epsilon \right) \quad (4.50)$$

qui est décrit par $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-2)$ (cf partie 4.3.3)

- deux point fixes IR additionnels, qui coïncident avec $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-1)$ (cf 4.3.3) :

$$(g_2^*, h_2^*) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(N-2)(N-1)}{2}}\epsilon, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N(N-1)}{2}}\epsilon \right), \quad (4.51)$$

$$(g_3^*, h_3^*) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(N-2)(N-1)}{2}}\epsilon, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N(N-1)}{2}}\epsilon \right). \quad (4.52)$$

4.3.3 Identification des CFT infra-rouges

Les points fixes du RG sont décrits par des théories des champs invariantes d'échelle, et donc très certainement par des théories conformes. Pour identifier ces nouvelles CFT, l'approche la plus directe consiste à utiliser la fonction c de Zamoldchikov (4.14), ce qui permet d'évaluer perturbativement, à l'ordre ϵ^3 , la valeur de la charge centrale de ces théories.

Tout a été fait dans cette analyse des perturbations des théories parafermioniques $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ pour ne pas briser la symétrie discrète \mathbb{Z}_N , et on s'attend à retrouver dans l'infra-rouge une théorie $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-\delta)$ avec un shift δ entier positif. En effet le théorème c impose une décroissance de la charge centrale le long des flots du groupe de renormalisation. En comparant la valeur de la charge centrale prédite par la fonction c (4.14) avec l'ansatz $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-\delta)$ pour les points fixes IR, on obtient la correspondance suivante :

- la charge centrale du point fixe (g_1^*, h_1^*) coïncide avec celle de $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-2)$
- celle des points fixes (g_2^*, h_2^*) et (g_3^*, h_3^*) avec $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-1)$

Cette classification des points fixes peut être vérifiée au niveau des dimensions conformes des champs primaires, qui doivent correspondre dans l'infra-rouge avec le nouveau tableau de Kac. Les fonctions γ donnent l'évolution des dimensions des champs :

$$\gamma_i = \frac{d2\Delta_i}{d\xi} \quad (4.53)$$

Exactement comme dans le cas des modèles minimaux ([62]), cette analyse est plus simple dans le cas des champs primaires de la forme $\Phi_{(\bar{n}|\bar{n})}$. En particulier les fonctions γ correspondantes sont simplement données au premier ordre non trivial en ϵ par :

$$\frac{d2\Delta_{(\bar{n}|\bar{n})}}{d\xi} = \gamma_{(\bar{n}|\bar{n})} = -4h\mathcal{D}_{A(\bar{n}|\bar{n})}(\bar{n}|\bar{n}) - 4g\mathcal{D}_{S(\bar{n}|\bar{n})}(\bar{n}|\bar{n}) \quad (4.54)$$

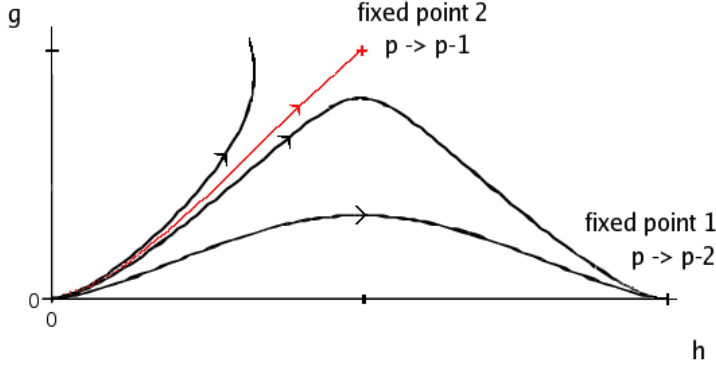


FIG. 4.1 – Flots non massifs du groupe de renormalisation. Les flots sont invariants par $g \rightarrow -g$, et seule la partie $g \geq 0$ est montrée .

Les mêmes techniques permettent d'évaluer les constantes $\mathcal{D}_{A(\bar{n}|\bar{n})(\bar{n}|\bar{n})}$ et $\mathcal{D}_{S(\bar{n}|\bar{n})(\bar{n}|\bar{n})}$. Cette vérification n'a été faite que dans le cas $N = 2r + 1$ correspondant à B_r , où les fonctions γ des champs $\Phi_{(1,n,\dots|1,n,\dots)}$ et $\Phi_{(n,1,\dots|n,1,\dots)}$ ont été évaluées pour tout $n \geq 1$. La forme particulière de ces champs a été choisie pour permettre de calculer facilement les constantes dans les théories WB_r qui interviennent dans la décomposition (4.37). On obtient :

$$\begin{aligned} - \gamma_{(n11\dots|n11\dots)} &= -8h\epsilon^2 \frac{(n-1)(2r+n-2)}{\sqrt{r(2r+1)}} \\ - \gamma_{(1n1\dots|1n1\dots)} &= -8h\epsilon^2 \frac{2(n-1)(2r+n-3)}{\sqrt{r(2r+1)}} \end{aligned}$$

Ces valeurs sont en accord parfait (à cet ordre des perturbations) avec le flot du champ primaire UV $\Phi_{(\bar{n}|\bar{n})}^{(p)}$ vers le champ $\Phi_{(\bar{n}|\bar{n})}^{(p-\delta)}$ dans l'infrarouge :

$$\Phi_{(\bar{n}|\bar{n})}^{(p)} \rightarrow \Phi_{(\bar{n}|\bar{n})}^{(p-\delta)} \quad (4.55)$$

où le shift δ est précisément celui annoncé :

- $\delta = 2$ pour le point fixe (g_1^*, h_1^*) : la CFT IR coïncide avec $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-2)$
- aux points fixes (g_2^*, h_2^*) et (g_3^*, h_3^*) on a $\delta = 1$, et la CFT est $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-1)$

4.4 Conclusion

Dans cette partie nous avons étudié l'effet de deux perturbations faiblement pertinentes pour les théories parafermioniques unitaires $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$, et nous avons obtenu trois points fixes. Les théories conformes correspondantes ont été identifiées par l'évaluation des charges centrales ainsi que par les dimensions anormales de certains champs à ces points fixes. L'un deux est décrit par la théorie $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-2)$, et correspond au point fixe attendu. En effet cela confirme l'observation faite sur les cosets $SU(2)$ [66, 67] et plus généralement sur les cosets sur des algèbres de Lie simplement lacées [69] que la perturbation d'un coset par un champ approprié donne lieu à un flot $p \rightarrow p - \delta$, où δ est le shift du coset $(G_k \otimes G_\delta)/G_{k+\delta}$. On notera que dans le cas N impair, l'algèbre de Lie $SO(N)$ n'est pas simplement lacée, et ce travail étend les résultats obtenus dans [69].

D'un autre côté l'apparition des deux points fixes additionnels pour $N \geq 5$, décrits par $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-1)$, est assez surprenante. En effet pour $N = 3$, ces points sont absents [66, 67]. De plus, contrairement au point fixe précédent, ces deux points fixes restent invisibles si l'on considère la perturbation par le champ $A(x)$ uniquement.

Pour le cas N pair, l'effet de la perturbation par le champ A a été traitée dans le cadre plus général des cosets symétriques sur des algèbres de Lie simplement lacées [69]. Nos résultats dans le cas A pur sont en parfait accord, et généralisent les flots sans masse obtenus en perturbant avec les champs A et S simultanément. Un point clé de l'analyse de Fateev dans [69] est le caractère intégrable de la perturbation

par le champ A . Cela reste certainement vrai dans le cas non simplement lacé (*i.e.* N impair), mais il serait très intéressant de regarder ce qu'il en est de la perturbation plus générale par les champs A et S à la fois : si jamais elle préserve un nombre suffisant d'intégrales du mouvement, toute une nouvelle technologie s'offre à nous, ce qui permettrait d'étudier par exemple les flots massifs [71].

Chapitre 5

La correspondance entre polynômes de Jack et théories conformes

$\text{WA}_{k-1}(k+1, k+r)$

Dans [72, 73] on a conjecturé que les polynômes de Jack dits (k, r) -admissibles pouvaient s'exprimer à l'aide de certains corrélateurs d'une famille de CFT : les théories WA_{k-1} . Il s'agit de théories conformes possédant une symétrie étendue \mathcal{W} : en plus de la symétrie conforme, engendrée par le tenseur d'énergie-impulsion $T(z)$, les théories WA_{k-1} contiennent des courants chiraux additionnels $\{W^{(s)}(z), s = 3, \dots, k\}$ de spin $s = 3 \dots k$ [74, 75, 76, 77]. L'algèbre de la théorie WA_1 coïncide avec celle de Virasoro. Les représentations de l'algèbre WA_{k-1} sont naturellement associées à l'algèbre de Lie A_{k-1} et la série des modèles minimaux $\text{WA}_{k-1}(p, p')$ est indexée par deux entiers p et p' premiers entre eux. En particulier lorsque $k = 1$ on retrouve les modèles minimaux $\text{WA}_1(p, p') = M(p, p')$. Cependant pour k général les théories WA_{k-1} sont beaucoup plus compliquées. Ceci est en partie dû aux courants additionnels dont les modes ne possèdent pas d'interprétation géométrique contrairement aux modes de Virasoro. Ainsi les fantômes caractérisant une représentation dégénérée ne donnent en général pas lieu à une équation aux dérivées partielles pour les fonctions de corrélation. Pour cette raison, elles sont difficiles à calculer [78, 79].

Ainsi, la conjecture que certaines fonctions de corrélation des théories WA_{k-1} s'expriment simplement à l'aide d'un polynôme de Jack est assez remarquable. Ceci était déjà connu dans le cas de l'algèbre de Virasoro, qui correspond au cas $k = 2$ [80]. Pour k général, de nombreux indices en faveur de ce résultat ont été mis en évidence dans différents travaux ([81, 82, 83, 84]), mais jusqu'ici il n'y avait pas de preuve de cette correspondance.

Dans cette partie on considère les fonctions à N points des opérateurs parafermioniques dans les théories $\text{WA}_{k-1}(k+1, k+r)$. En utilisant l'approche décrite dans [78], on montre que ces fonctions de corrélation vérifient une équation différentielle particulière d'ordre deux, qui peut être reliée à l'hamiltonien de Calogero-Sutherland. Ceci fournit une preuve de la correspondance entre les polynômes de Jack (k, r) -admissibles et les théories conformes $\text{WA}_{k-1}(k+1, k+r)$. Ce travail est l'objet de la publication [85].

5.1 Conjecture reliant polynômes de Jack et théories \mathcal{W}

Les théories conformes $\text{WA}_{k-1}(k+1, k+r)$ sont une réalisation particulière des théories parafermioniques $\mathbb{Z}_k^{(r)}$, et contiennent donc un champ parafermionique $\Psi(z)$ de dimension $\Delta = r(k-1)/2k$. Dans [72, 73] il a été conjecturé que les fonctions à N points de ce courant parafermionique s'expriment simplement à l'aide d'un polynôme de Jack :

$$\langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) \rangle = J_\lambda^{-(k+1)/(r-1)}(\{z_i\}) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{-r/k} \quad (5.1)$$

où $J_\lambda^{-(k+1)/(r-1)}(\{z_i\})$ est le polynôme de Jack à N variables $J_\lambda^\alpha(\{z_i\})$ pour $\alpha = -(k+1)/(r-1)$ et pour une partition λ dite (k, r) -admissible, donnée par :

$$\lambda = [\underbrace{N_\phi, \dots, N_\phi}_{k \text{ times}}, \underbrace{N_\phi - r, \dots, N_\phi - r}_{k \text{ times}}, \dots, \underbrace{r, \dots, r}_{k \text{ times}}] \quad (5.2)$$

Les notations issues de l'effet Hall quantique fractionnaire ont été adoptées ici. En particulier N_ϕ désigne le flux magnétique :

$$N_\phi = \frac{r(N-k)}{k} \quad (5.3)$$

Ils'agit d'un entier, car N doit être un multiple de k pour que la fonction de corrélation parafermionique (5.1) ne s'annule pas. Le polynôme $J_\lambda^{-(k+1)/(r-1)}$ constitue une fonction d'onde test pour l'état fondamental de N particules dans le niveau de Landau le plus bas à une fraction de remplissage $\nu = k/r$.

Avant de donner la preuve de cette conjecture, une introduction rapide aux théories conformes WA_n et aux polynômes de Jack est présentée, ce qui permet de rappeler leurs principales propriétés et de fixer un certain nombre de notations.

5.1.1 Algèbres WA_n et les modèles minimaux $WA_n(p, p')$

Les modèles minimaux $M(p, p')$ correspondent aux représentations de l'algèbre de Virasoro comprenant un nombre fini d'opérateurs primaires. L'algèbre de Virasoro est issue des lois de transformation d'un courant conservé de dimension 2 : le tenseur d'énergie-impulsion. Une des nombreuses généralisations possibles est obtenue en introduisant des courants supplémentaires de dimensions entières (ou demi-entières). On parle dans la littérature de théories \mathcal{W} , dont [77] fournit une revue. Les théories WA_n en sont un cas particulier : elles comprennent n courants chiraux $\{W^{(s)}(z), s = 2, \dots, n+1\}$ indexés par leur dimension/spin $\Delta_s = s = 2 \dots n+1$. En particulier le tenseur d'énergie-impulsion est le courant de spin 2 : $T(z) = W^{(2)}(z)$. Les relations de commutation des modes de ces courants définissent une algèbre, dont l'algèbre de Virasoro constitue une sous-algèbre : on parle de CFT avec symétrie étendue. Ces algèbres sont en général non linéaires et permettent de définir les modèles minimaux correspondants, c'est-à-dire comprenant un nombre fini de champs primaires (*i.e.* annihilés par *tous* les modes positifs, pas seulement par ceux de Virasoro). Lorsque $n = 1$, on retrouve les modèles minimaux $M(p, p')$ introduits dans le chapitre 2 :

$$WA_1(p, p') = M(p, p') \quad (5.4)$$

Les modèles minimaux $WA_n(p, p')$, avec p et p' premiers entre eux, ont une structure très similaire au cas $n = 1$ [74]. Il existe une manière très compacte de formuler leur spectre, associée à l'algèbre de Lie A_n . On note $\vec{\omega}_i, i = 1, \dots, n$ les poids fondamentaux de A_n , et $\vec{\epsilon}_i, i = 1, \dots, n$ les racines simples, et on adopte les conventions de [25].

La charge centrale de la théorie $WA_n(p, p')$ est donnée par :

$$c_n(p, p') = n \left(1 - \frac{(n+1)(n+2)(p-p')^2}{pp'} \right) \quad (5.5)$$

et les dimensions des opérateurs primaires :

$$\Delta_{(\vec{n}|\vec{n}')} = \frac{(p\vec{n} - p'\vec{n}')^2 - \vec{\rho}^2(p-p')^2}{2pp'} \quad (5.6)$$

où les labels \vec{n} et \vec{n}' des champs primaires vivent sur le réseau des poids de A_n :

$$\vec{n} = \sum_i n_i \vec{\omega}_i \quad (5.7)$$

$$\vec{n}' = \sum_i n'_i \vec{\omega}_i \quad (5.8)$$

et le tableau de Kac est borné par :

$$1 \leq n_i, n'_i \quad (5.9)$$

$$\sum_i n_i \leq p' - 1 \quad (5.10)$$

$$\sum_i n'_i \leq p - 1 \quad (5.11)$$

Ces champs primaires correspondent à des représentations dégénérées de l'algèbre WA_n . En particulier l'opérateur primaire $\Delta_{(\vec{n}|\vec{n}'')}$ est dégénéré aux niveaux $N_i = n_i n'_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Les règles de fusion généralisent celles des modèles minimaux, entre autres (2.65) devient :

$$\Phi_{(2,1,\dots,1|1,1,\dots,1)} \times \Phi_{(\vec{\alpha})} = \sum_{i=1}^{n+1} \Phi_{(\vec{\alpha} + \alpha_i \vec{h}_i)} \quad (5.12)$$

où les \vec{h}_i , $i = 1 \dots n + 1$ sont les poids de π_1 , la première représentation fondamentale de A_n , de plus haut poids $\vec{\omega}_1$. Explicitement les \vec{h}_i sont donnés par :

$$\vec{h}_i = \vec{\omega}_1 - \vec{e}_1 - \dots - \vec{e}_{i-1} \quad (5.13)$$

Comme pour les modèles minimaux $M(p, p')$, il existe un Gaz de Coulomb pour les théories $WA_n(p, p')$, à la différence près que n bosons sont nécessaires à sa construction [74].

Les théories $WA_{k-1}(p, p')$ contiennent des champs parafermioniques \mathbb{Z}_k lorsque $p = k + 1$. En effet les champs primaires :

$$\Psi^1 = \Phi_{(1,1,\dots,1|2,1,1,\dots,1)} \quad (5.14)$$

$$\Psi^2 = \Phi_{(1,1,\dots,1|1,2,1,\dots,1)} \quad (5.15)$$

$$\vdots \quad (5.16)$$

$$\Psi^{k-1} = \Phi_{(1,1,\dots,1|1,1,1,\dots,2)} \quad (5.17)$$

possèdent des OPE de type parafermionique (3.41). En paramétrant $q = k + r$, ils ont pour dimension conforme :

$$\Delta_i = \frac{r}{2} \frac{i(k-i)}{k} \quad (5.18)$$

On peut donc réinterpréter la théorie $WA_{k-1}(k+1, k+r)$ comme une représentation particulière des parafermions $\mathbb{Z}_k^{(r)}$ [84, 86, 87, 88, 89]. Ceci n'est possible que pour $(k+1) \wedge (r-1) = 1$, car les théories $WA_n(p, p')$ ne sont définies que pour p et p' premiers entre eux. Ces théories ne sont unitaires que lorsque $r = 2$, et dans ce cas on retrouve les parafermions de Fateev-Zamolodchikov, qui admettent une unique représentation. On remarque que dans ce cas $k+1 \wedge r-1 = 1$ est satisfait pour tout k .

5.1.2 Les polynômes de Jack (k, r) -admissibles

Les polynômes de Jack $J_\lambda^\alpha(z_1, \dots, z_N)$ sont des polynômes symétriques de N variables dont les monômes sont des fonctions rationnelles d'un paramètre α . Ils sont indexés par les partitions $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_N]$ où les λ_i sont des entiers positifs vérifiant $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Pour plus de détails sur les Jacks voir [90]. Les fonctions monomiales m_λ , elles aussi indexées par les partitions, forment une base des polynômes symétriques à N variables :

$$m_\lambda(\{z_i\}) = \mathcal{S} \left(\prod_i^N z_i^{\lambda_i} \right) \quad (5.19)$$

où \mathcal{S} signifie que l'on symétrise sur les N variables, *i.e.* on somme sur le groupe des permutations quotienté par le sous groupe qui laisse invariant la partition λ . Le développement d'un polynôme de Jack sur la base des m_λ prend la forme :

$$J_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu}(\alpha) m_\mu. \quad (5.20)$$

et fait intervenir seulement les partitions $\mu \leq \lambda$. Cette relation d'ordre (partiel) sur les partitions $\mu \leq \lambda$ est définie par $\mu_1 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i$ ($1 \leq i \leq N$).

Les Jacks sont les états propres de l'hamiltonien de Calogero-Sutherland [91, 92, 93, 94] :

$$\mathcal{H}^{\text{CS}}(\alpha) J_\lambda^\alpha(z_1, \dots, z_n) = \varepsilon_\lambda^\alpha J_\lambda^\alpha(z_1, \dots, z_n) \quad (5.21)$$

où l'hamiltonien de CS est donné par

$$\mathcal{H}^{\text{CS}}(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^N (z_i \partial_i)^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{i < j} \frac{z_i + z_j}{z_i - z_j} (z_i \partial_i - z_j \partial_j) \right] \quad (5.22)$$

et les valeurs propres $\varepsilon_\lambda^\alpha$ par

$$\varepsilon_\lambda^\alpha = \sum_i^N \lambda_i \left[\lambda_i + \frac{1}{\alpha} (N + 1 - 2i) \right]. \quad (5.23)$$

Les coefficients $u_{\lambda\mu}(\alpha)$ dans (5.20) sont des fractions rationnelles en α . En particulier pour α négatif, il peut y avoir des pôles, et le polynôme de Jack est alors singulier. Dans [72], il a été prouvé que pour une partition λ dite (k, r) -admissible, *i.e.* qui vérifie

$$\lambda_i - \lambda_{i+k} \geq r \quad \text{pour } i = 1, \dots, N - k, \quad (5.24)$$

le polynôme de Jack J_λ^α n'est pas singulier pour $\alpha = -(k+1)/r - 1$, avec $k+1$ et $r-1$ premiers entre eux. On va nommer ces polynômes des Jack (k, r) -admissibles. Ce sont précisément les polynômes symétriques qui interviennent dans la correspondance qui nous intéresse dans ce chapitre.

5.2 Analyse des théories $\text{WA}_{k-1}(k+1, k+r)$ et preuve de la correspondance

5.2.1 Une petite mise en jambes : le cas des modèles minimaux de l'algèbre de Virasoro

Pour le cas $k = 2$, la théorie $\text{WA}_1(p, p')$ n'est autre que le modèle minimal $M(p, p')$. Dans ce cas l'opérateur (para)fermionique est réalisé par le champ $\Phi_{(1|2)}$, et correspond à une représentation dégénérée au niveau 2 de l'algèbre de Virasoro. La fonction de corrélation symétrique obéit donc naturellement à une équation aux dérivées partielles de degré 2 qui, après manipulation, permet de retrouver l'hamiltonien de Calogero-Sutherland. Bien que ce résultat soit bien connu ([80]), il est intéressant de discuter ce cas avant de s'attaquer aux cas plus compliqués des algèbres étendues WA_{k-1} .

Les modèles minimaux $M(3, 2+r)$ coïncident avec une théorie $\mathbb{Z}_2^{(r)}$ particulière, correspondant à la charge centrale $c = 1 - 2(r-1)^2/(2+r)$ [86, 87]. Le courant $\Psi = \Phi_{(1|2)}$ a pour dimension conforme $\Delta = \Delta_{(1|2)} = r/4$, et ses règles de fusion reproduisent l'algèbre parafermionique $\mathbb{Z}_2 : \Psi \times \Psi = \mathbb{I}$.

Le point essentiel dont découle toute la suite est que le champ $\Psi = \Phi_{(1|2)}$ possède un descendant dégénéré au niveau deux [1, 25] :

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{r+2} L_{-1}^2 \right) \Psi = 0 \quad (5.25)$$

La présence du vecteur nul (5.25) impose une équation différentielle d'ordre 2 à toute fonction de corrélation faisant intervenir un champ Ψ . En particulier la fonction à N points $\langle \Psi(z_1) \Psi(z_2) \cdots \Psi(z_N) \rangle$ satisfait la relation :

$$\sum_{i=1}^N z_i^2 \partial_i^2 \langle \Psi(z_1) \Psi(z_2) \cdots \Psi(z_N) \rangle = \frac{r+2}{3} \sum_{i=1}^N z_i^2 L_{-2}^{(i)} \langle \Psi(z_1) \Psi(z_2) \cdots \Psi(z_N) \rangle \quad (5.26)$$

où $L_{-2}^{(i)}$ agit sur le i -ème champ. Après des manipulations un peu fastidieuses, cela peut se mettre sous la forme d'une équation aux dérivées partielles, que voici :

$$\mathcal{H}^{\text{WA}_1}(r) \langle \Psi(z_1) \Psi(z_2) \cdots \Psi(z_N) \rangle = 0 \quad (5.27)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\text{WA}_1} &= \sum_i (z_i \partial_i)^2 + \gamma_1(r) \sum_{i \neq j} \frac{z_j^2}{(z_j - z_i)^2} + \gamma_2(r) \sum_{i \neq j} \frac{z_i z_j (\partial_j - \partial_i)}{(z_j - z_i)} + N \gamma_3(r) \\ \gamma_1 &= -\frac{r(r+2)}{12}, \quad \gamma_2 = \frac{r+2}{6} \quad \text{et} \quad \gamma_3 = -\frac{r(r-1)}{12} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Introduisons la fonction $\phi^{(r,k)}(\{z_i\})$:

$$\phi^{(r,k)}(\{z_i\}) := \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{r/k} \quad (5.29)$$

Après quelques manipulations algébriques, on retrouve l'équation aux valeurs propres pour l'hamiltonien de Calogero-Sutherland $\mathcal{H}^{\text{CS}}(\alpha)$:

$$[\phi^{(r,2)}(\{z_i\})] \mathcal{H}^{\text{WA}_1} [\phi^{(r,2)}(\{z_i\})]^{-1} = \mathcal{H}^{\text{CS}}(\alpha) - E(r) \quad (5.30)$$

avec

$$\alpha = -\frac{3}{r-1} \quad \text{et} \quad E(r) = \frac{1}{36} r N (N-2) [2 + N + r(2N-5)] \quad (5.31)$$

Il est alors facile de comparer les équations (5.30) et (5.31) et les équations (5.21)-(5.23) et de vérifier que l'on retrouve (5.1) et (5.2) pour $k=2$. Il est important de noter que la solution de (5.21) donnée par le Jack est la seule compatible avec les monodromies de l'opérateur Ψ . Cette équation aux valeurs propres prouve donc la correspondance qui nous intéresse dans le cas $k=2$.

5.2.2 Preuve de la conjecture : le cas WA_2 ($k=3$)

Ce qui se passe lorsque $k > 2$ est moins clair, car le tenseur d'énergie-impulsion n'est plus le seul courant, et les modes des courants supplémentaires W_n , $n=3, \dots, k$ n'ont pas d'interprétation géométrique simple comme ceux de Virasoro : les vecteurs nuls ne donnent plus systématiquement lieu à des équations différentielles.

On va considérer dans un premier temps le cas $k=3$, où une approche pédestre permet de comprendre comment fonctionne la généralisation vers $k > 2$. L'algèbre chirale de la théorie WA_2 contient deux courants $W^{(2)}(z) = T(z)$ et $W^{(3)}(z) = W(z)$ de spins 2 et 3 respectivement. Leurs OPE sont données par :

$$T(z)T(0) = \frac{c/2}{z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots \quad (5.32)$$

$$T(z)W(0) = \frac{3}{z^2} W(0) + \frac{1}{z} \partial W(0) + \dots \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} W(z)W(0) &= \frac{c/3}{z^6} + \frac{2}{z^4} T(0) + \frac{1}{z^3} \partial T(0) + \frac{1}{z^2} \left(\frac{3}{10} \partial^2 T(0) + \frac{32}{22+5c} \right) \\ &+ \frac{1}{z} \left(\frac{1}{15} \partial^3 T(0) + \frac{16}{22+5c} \partial \Lambda(0) \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

avec $\Lambda =: TT : -\frac{3}{10} \partial^2 T$. Un champ primaire $\Phi_{\Delta, \omega}$ se comporte sous cette symétrie étendue comme :

$$T(z)\Phi_{\Delta, \omega}(0) = \frac{\Delta \Phi(0)}{z^2} + \frac{\partial \Phi(0)}{z} + \dots \quad (5.35)$$

$$W(z)\Phi_{\Delta, \omega}(0) = \frac{\omega \Phi(0)}{z^3} + \frac{W_{-1} \Phi(0)}{z^2} + \frac{W_{-2} \Phi(0)}{z} + \dots \quad (5.36)$$

et leurs fonctions à deux points sont de la forme :

$$\langle \Phi_1(z) \Phi_2(0) \rangle = \frac{\delta_{\Delta_1, \Delta_2} \delta_{\omega_1, -\omega_2}}{z^{2\Delta_1}} \quad (5.37)$$

L'algèbre WA_2 est produite par les modes de $T(z)$ et $W^{(3)}(z)$. Leurs relations de commutation se déduisent, de manière habituelle, des OPE des courants [77] :

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \quad (5.38)$$

$$[L_n, W_m] = (2n-m)W_{n+m} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} [W_n, W_m] &= \frac{16}{22+5c}(n-m)\Lambda_{n+m} + \frac{c}{360}n(n^2-1)(n^2-4)\delta_{n+m,0} \\ &+ (n-m) \left[\frac{1}{15}(n+m+2)(n+m+3) - \frac{1}{6}(n+2)(m+2) \right] L_{n+m} \end{aligned} \quad (5.40)$$

avec

$$\Lambda_n = d_n L_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} : L_m L_{n-m} : \quad (5.41)$$

$$d_{2m} = \frac{(1-m^2)}{5} \quad \text{et} \quad d_{2m-1} = \frac{(1+m)(2-m)}{5} \quad (5.42)$$

Les représentations de cette algèbre sont indexées par les valeurs propres de L_0 et W_0 : Δ et ω respectivement. En utilisant les relations de commutation (5.38)-(5.40), on peut montrer que le champ primaire $\Phi_{\Delta,\omega}$ admet les vecteurs nuls suivants :

$$\chi_1 = \left(W_{-1} - \frac{3\omega}{2\Delta} L_{-1} \right) \Phi_{\Delta,\omega} = 0 \quad (5.43)$$

$$\chi_2 = \left(W_{-2} - \frac{12\omega}{\Delta(5\Delta+1)} L_{-1}^2 + \frac{6\omega(\Delta+1)}{\Delta(5\Delta+1)} L_{-2} \right) \Phi_{\Delta,\omega} = 0 \quad (5.44)$$

à condition que les nombres quantiques Δ et ω soient reliés à la charge centrale c par :

$$c = 2\Delta \frac{7-9\Delta}{\Delta+1} \quad (5.45)$$

$$\omega^2 = \frac{2\Delta^2}{9} \left(\frac{32}{22+5c} \left(\Delta + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \right) \quad (5.46)$$

On remarque que si un champ $\Phi_{\Delta,\omega}$ vérifie ces relations, alors son conjugué $\Phi_{\Delta,-\omega}$ aussi.

La théorie minimale $WA_2(3+1, 3+r)$ peut être identifiée à une théorie $\mathbb{Z}_3^{(r)}$. Les courants parafermioniques Ψ sont réalisés par les champs primaires :

$$\Psi^1 = \Phi_{(1,r+1|1,1)} = \Phi_{(1,1|2,1)} \quad (5.47)$$

$$\Psi^{-1} = \Phi_{(r+1,1|1,1)} = \Phi_{(1,1|1,2)} \quad (5.48)$$

$$(5.49)$$

En effet, ces champs ont pour dimension $\Delta = r/3$, et leurs OPE reproduisent celles des parafermions $\mathbb{Z}_3^{(r)}$. L'associativité est automatiquement assurée. Or ce sont précisément ces champs qui admettent les vecteurs nuls de la forme (5.43) et (5.44) : les parafermions Ψ (et Ψ^{-1}) possèdent donc les descendants dégénérés suivants :

$$\chi_1 = \left(W_{-1} - \frac{3\omega}{2\Delta} L_{-1} \right) \Psi = 0 \quad (5.50)$$

$$\chi_2 = \left(W_{-2} - \frac{12\omega}{\Delta(5\Delta+1)} L_{-1}^2 + \frac{6\omega(\Delta+1)}{\Delta(5\Delta+1)} L_{-2} \right) \Psi = 0 \quad (5.51)$$

où ω est donné par (5.46). Nous avons maintenant une dégénérescence au niveau 2, comme attendu. Cependant, pour en tirer une équation aux dérivées partielles, il faut encore éliminer les modes non « géométriques » W_n . Pour ce faire, il suffit d'utiliser le comportement asymptotique de $W(z)$:

$$W(z) = \sum_n \frac{W_n}{z^{n+3}} \quad \text{et} \quad W(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z^6} \quad (5.52)$$

et de voir les conséquences de ce comportement à l'infini pour les fonctions de corrélation entre opérateurs primaires. En explicitant la structure des pôles en z de $\langle W(z)\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\rangle$ on obtient :

$$\langle W(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\rangle = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\omega_j}{(z-z_j)^3} + \frac{W_{-1}^{(j)}}{(z-z_j)^2} + \frac{W_{-2}^{(j)}}{(z-z_j)} \right) \langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\rangle \quad (5.53)$$

En comparant le comportement asymptotique (5.52) et le développement (5.53), on obtient cinq relations linéaires entre fonctions de corrélation, dont voici les premières :

$$\sum_{j=1}^N W_{-2}^{(j)} \langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\rangle = 0 \quad (5.54)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(z_j W_{-2}^{(j)} + W_{-1}^{(j)} \right) \langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\rangle = 0 \quad (5.55)$$

$$\sum_{j=1}^N \left(z_j^2 W_{-2}^{(j)} + 2z_j W_{-1}^{(j)} + \omega_j \right) \langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\rangle = 0 \quad (5.56)$$

En particulier, en insérant les vecteurs nuls (5.43) et (5.44) dans la relation (5.56), on élimine tous les modes de $W(z)$, et on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante pour les fonctions de corrélation $\langle \Psi(z_1)\Psi(z_2)\cdots\Psi(z_N)\rangle$:

$$\mathcal{H}^{\text{WA}_2} \langle \Psi(z_1)\cdots\Psi(z_n)\rangle = 0, \quad (5.57)$$

où $\mathcal{H}^{\text{WA}_2}$ est l'opérateur différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\text{WA}_2} &= \sum_{j=1}^N (z_j \partial_j)^2 + \gamma_1(r) \sum_{i \neq j} \frac{z_j^2}{(z_j - z_i)^2} + \gamma_2 \sum_{i \neq j} \frac{z_i z_j (\partial_j - \partial_i)}{(z_j - z_i)} + N\gamma_3(r) \\ \gamma_1(r) &= -\frac{r(r+3)}{18}, \quad \gamma_2(r) = \frac{r+3}{12} \quad \text{et} \quad \gamma_3 = -\frac{r(4r-3)}{27} \end{aligned} \quad (5.58)$$

De même que dans le cas $k=2$, il est alors facile d'obtenir l'équation aux valeurs propres de Calogero-Sutherland pour le polynôme $P_N(z_i) = \langle \Psi(z_1)\cdots\Psi(z_N)\rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{r/3}$. En conjuguant avec la fonction $\phi^{(r,3)}(\{z_i\})$ définie en (5.29), on retrouve \mathcal{H}^{CS} :

$$[\phi^{(r,3)}(\{z_i\})] \mathcal{H}^{\text{WA}_2}(r) [\phi^{(r,3)}(\{z_i\})]^{-1} = \mathcal{H}^{\text{CS}}(\alpha, -E(r)) \quad (5.59)$$

avec :

$$\alpha = -\frac{4}{r-1} \quad \text{et} \quad E(r) = \frac{Nr}{216} (N-3)(9-21r+N(3+5r)). \quad (5.60)$$

Il suffit alors de vérifier que la valeur propre $E(r)$ coïncide avec $\epsilon_\lambda(\alpha)$ pour $\alpha = -\frac{3+1}{r-1}$ et la partition :

$$\lambda = \underbrace{[N_\Phi, N_\Phi, N_\Phi]}_3, \underbrace{[N_\Phi - r, N_\Phi - r, N_\Phi - r]}_3, \dots, \underbrace{[r, r, r]}_3, \quad (5.61)$$

dans laquelle on note $N_\Phi = r \left(\frac{N-3}{3} \right)$. Il s'agit donc du polynôme de Jack attendu : on a prouvé la conjecture dans le cas $k=3$.

5.2.3 Cas général

Dans le cas général, l'approche algébrique directe utilisée pour $k=3$ se heurte très vite à la complexité des OPE des courants et de l'algèbre associée. Comme il y a $k-1$ courants, il y a $(k-1)(k-2)/2$ OPE à écrire, pour lesquelles certains coefficients ne peuvent être fixés que par des considérations d'associativité. Pis, les dimensions des courants additionnels sont de plus en plus grandes, ce qui nécessite de considérer de

plus en plus de termes dans les OPE. Enfin, le nombre $p(n)$ de descendants linéairement indépendants au niveau n dans un module non dégénéré est donné par la fonction génératrice $\Phi_k(x)$:

$$\Phi_k(x) = \left(\frac{1}{\varphi(x)} \right)^{k-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^n} \right)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \quad (5.62)$$

et le nombre de descendants au niveau 2 est génériquement $(k-1)(k+2)/2$.

Niveau n	Nombre de champs $p(n)$	champs
0	1	Φ
1	$k-1$	$W_{-1}^{(2)}\Phi, W_{-1}^{(3)}\Phi, \dots, W_{-1}^{(k)}\Phi$
2	$(k-1)(k+2)/2$	$W_{-2}^{(i)}\Phi$, pour $i = 2, \dots, k-1$ et $W_{-1}^{(i)}W_{-1}^{(j)}\Phi$, pour $i \leq j$

Pour contourner ce foisonnement, les caractères des représentations de l'algèbre WA_{k-1} constituent un outil très puissant [77]. En particulier ils permettent d'obtenir le résultat suivant : pour tout $k > 2$ les champs primaires $\Phi_{(1,1,\dots,1|2,1,1,\dots,1)}$ et $\Phi_{(1,1,\dots,1|1,1,1,\dots,2)}$ des théories minimales $WA_{k-1}(p, p')$ admettent un unique descendant au niveau 1, et seulement deux descendants au niveau deux. Cela signifie que les deux premiers niveaux du module sont générés uniquement par les modes de Virasoro. Ceci assure automatiquement l'existence de vecteurs nuls du type (5.43) et (5.44) :

$$\chi_1 = \left(W_{-1}^{(3)} + \beta L_{-1} \right) \Psi = 0 \quad (5.63)$$

$$\chi_2 = \left(W_{-2}^{(3)} + \mu L_{-1}^2 + \nu L_{-2} \right) \Psi = 0 \quad (5.64)$$

Pour fixer les inconnues β, μ et ν il suffit d'agir avec les modes de Virasoro L_1 et L_2 et d'imposer $L_n \chi_i = 0$. On obtient immédiatement :

$$\beta = -\frac{3\omega^{(3)}}{2\Delta} \quad (5.65)$$

$$\mu = \beta \frac{2(2\Delta + c)}{(-10\Delta + 16\Delta^2 + 2c\Delta + c)} = \beta \frac{2k(1+k)}{(rk^2 + k^2 - 2k - 4r)} \quad (5.66)$$

$$\nu = \beta \frac{16\Delta(\Delta - 1)}{(-10\Delta + 16\Delta^2 + 2c\Delta + c)} = -\mu \frac{2(k+r)}{k(1+k)} \quad (5.67)$$

À partir de là, la méthode est exactement la même que pour le cas $k = 3$, et on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante pour la fonction à N points :

$$\mathcal{H}^{WA_{k-1}} \langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) \rangle = 0 \quad (5.68)$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{H}^{WA_{k-1}}$, dont les coefficients dépendent de r et k , est donné par :

$$\mathcal{H}^{WA_{k-1}} = \sum_j (z_j \partial_j)^2 + \gamma_1(k, r) \sum_{i \neq j} \frac{z_j^2}{(z_j - z_i)^2} + \gamma_2(k, r) \sum_{i \neq j} \frac{z_i z_j (\partial_j - \partial_i)}{(z_j - z_i)} + N \gamma_3(k, r)$$

avec $\gamma_1 = -\frac{r(rk - r + k^2 - k)}{k^2(k+1)}$, $\gamma_2 = \frac{r+k}{k(k+1)}$ et $\gamma_3 = -\frac{r(k-1)(2rk - k - 2r)}{6k^2}$ (5.69)

Cette équation aux dérivées partielles généralise (5.28) et (5.58) qui correspondent respectivement aux cas $k = 2$ et $k = 3$. On obtient alors de manière similaire la preuve de la conjecture, à savoir que le polynôme suivant :

$$\langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{r/k} \quad (5.70)$$

est bien un vecteur propre de l'hamiltonien de Calogero-Sutherland pour $\alpha = -\frac{k+1}{r-1}$ et pour la partition λ :

$$\lambda = \underbrace{[N_\Phi, \dots, N_\Phi]}_k, \underbrace{[N_\Phi - r, \dots, N_\Phi - r]}_k, \dots, \underbrace{[r, \dots, r]}_k, \quad (5.71)$$

avec $N_\Phi = r(N - k)/k$. L'unique solution polynomiale de cette équation aux valeurs propres est le polynôme de Jack $J_\lambda^{-(k+1)/(r-1)}$, ce qui termine la preuve de la conjecture dans le cas général.

5.3 Conclusion

Dans cette partie, on a calculé les fonctions à N points des champs $\Psi = \Phi_{(1, \dots, 1|2, 1 \dots, 1)}$ et $\Psi^{-1} = \Phi_{(1, \dots, 1|1, 1 \dots, 2)}$ appartenant au tableau de Kac des théories $WA_{k-1}(k+1, k+r)$. En utilisant les identités de Ward associées au courant de spin 3 $W^{(3)}(z)$ et les dégénérescences des modules de Ψ et Ψ^{-1} , on a montré que ces corrélateurs satisfont une équation aux dérivées partielles d'ordre deux. Cette EDP peut être transformée en une équation aux valeurs propres de l'hamiltonien de Calogero-Sutherland pour une valeur négative de la constante de couplage $\alpha = -(k+1)/(r-1)$. Ceci fournit une preuve de la conjecture reliant les fonctions à N points des opérateurs parafermioniques Ψ et Ψ^{-1} aux polynômes de Jack.

Comme nous allons le voir dans le chapitre 6, ces polynômes constituent des fonctions d'onde test pour un état fondamental bosonique au remplissage $\nu = k/r$ dans l'effet Hall quantique fractionnaire. Dans ce contexte il est intéressant de considérer aussi les états excités, obtenus en insérant des quasi-trous : les fonctions d'onde correspondantes devraient aussi pouvoir s'exprimer comme des corrélateurs dans les théories $WA_{k-1}(k+1, k+r)$, en insérant des opérateurs de quasi-trou conjecturés comme étant $\sigma = \Phi_{(2, 1, \dots, 1|1, 1 \dots, 1)}$ [83] dans les fonctions de corrélation $\langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) \rangle$. Ceci est encore un problème ouvert d'un point de vue des théories conformes, mais l'approche développée ici devrait permettre de résoudre ce point.

Chapitre 6

Polynômes symétriques et fonctions de corrélation parafermioniques : au-delà des polynômes de Jack

Les résultats de CFT présentés dans cette partie ont été inspirés et motivés par l'étude des fonctions d'onde non abéliennes dans l'effet Hall quantique fractionnaire (FQHE), et ont été publiés dans [88].

Depuis le succès des états de Laughlin [95], l'utilisation de fonctions d'onde test dans l'effet Hall quantique fractionnaire (FQHE) a permis de faire de grands progrès dans la compréhension de ces systèmes, en particulier dans la description des états non abéliens [9, 96, 97, 98]. Au cours des dernières années, il y a eu un regain d'intérêt pour ces états non abéliens [99, 100, 101, 102], principalement à cause de leur lien avec le calcul quantique topologique [103, 104]. Les fonctions d'onde test décrivant ces états peuvent être construites en utilisant les blocs conformes des CFT. Une grande partie de la théorie décrivant ces états non abéliens est basée sur les monodromies des blocs conformes des théories parafermioniques.

Il a été observé dans [81] que les fonctions d'onde Read-Rezayi \mathbb{Z}_k , de même que d'autres propositions pour décrire les états non abéliens [105], peuvent être exprimées en termes d'un polynôme de Jack, pour un paramètre négatif $\alpha = -(k+1)/(r-1)$. Cela a naturellement conduit à essayer de décrire les fonctions d'onde du FQHE en termes de Jacks. Cette approche a été le sujet de travaux récents [82, 84, 83, 106], dans lesquels les liens entre les polynômes de Jack et le FQHE ont été étudiés en détail.

Il a été conjecturé que ces Jacks pouvaient être exprimés comme certaines fonctions de corrélation des théories $WA_{k-1}(k+1, k+r)$ ([72, 74, 82]). Nous avons traité ce cas en détail et donné une preuve de ce résultat dans le chapitre 5.

Un point crucial est que pour $r > 2$, les modèles $WA_{k-1}(k+1, k+r)$ ne sont pas unitaires. Or il existe de solides arguments [107, 108] indiquant que les fonctions d'onde construites à partir de CFT non unitaires ne peuvent pas décrire des phases quantiques topologiques gappées. Il est donc crucial de rechercher des CFT candidates qui soient unitaires. On mentionne qu'il existe dans certains cas une approche différente visant à corriger les fonctions d'onde obtenues par des CFT non-unitaires, notamment dans le cas du Gaffnien [109].

Il existe pour $r \geq 4$ des algèbres de courants $\mathbb{Z}_k^{(r)}(c)$ qui sont associatives pour toutes les valeurs de la charge centrale c . Comme pour la séquence unitaire des modèles minimaux $M(p, p+1)$, ces algèbres parafermioniques admettent des représentations unitaires pour une série de valeurs discrètes de la charge centrale. Dans cette partie, nous allons voir quels types de fonctions d'onde sont attachés à ces théories parafermioniques unitaires, en particulier dans deux cas : les théories WB_n , qui possèdent une symétrie $\mathbb{Z}_2^{(4n+2)}$, et les parafermions $\mathbb{Z}_k^{(4)}$. Nous allons voir que les fonctions d'onde correspondantes constituent *a priori* des candidates aussi pertinentes que les polynômes de Jack, et de plus qu'elles possèdent des propriétés de *clustering* étendues. Ce chapitre correspond à l'article [88].

6.1 Propriétés de clustering et parafermions

Les CFT parafermioniques permettent de construire certains polynômes symétriques, dits polynômes de clusters, qui ont la propriété de s'annuler lorsque $k + 1$ particules sont au même point. Ces polynômes sont naturellement liés à la symétrie \mathbb{Z}_k , et il y a un parallèle intéressant entre la classification de ces fonctions d'ondes et celle des théories parafermioniques [110, 111].

6.1.1 Les états de Read-Rezayi et les parafermions $r = 2$

Les états de Read-Rezayi (RR), dont il est admis que certains sont pertinents expérimentalement, sont un exemple typique d'états non abéliens [96, 9]. Ces états sont décrits par les blocs conformes d'une famille particulière de CFT : les parafermions \mathbb{Z}_k de Fateev-Zamolodchikov [4]. Les OPE (3.33) et (3.34) des parafermions déterminent des propriétés de *clustering* spécifiques pour les fonctions d'onde qui sont décrites par des fonctions de corrélation des courants. En particulier on peut montrer que, à un terme de jauge près, les états fondamentaux (bosoniques) \mathbb{Z}_k RR sont des polynômes symétriques qui s'annulent lorsque $k + 1$ (ou plus) particules sont au même point. Cette propriété de k -*clustering* fait des états \mathbb{Z}_k RR l'unique état fondamental d'un hamiltonien à $k + 1$ corps décrivant un coût énergétique associé au rapprochement de $k + 1$ particules au même point [9, 112]. Dans le cas d'une interaction à deux corps ($k = 1$), l'état du vide est l'état de Laughlin à la fraction de remplissage $\nu = 1/2$ pour les bosons. Il est couramment admis que les hamiltoniens modèles de ce type capturent la physique des systèmes bidimensionnels en fort champ magnétique où l'hamiltonien effectif est réduit aux interactions entre particules dans le niveau de Landau le plus bas.

À cause de l'importance des fonctions d'onde de RR, il y a eu beaucoup d'activité en direction des généralisations de ces fonctions, et donc des théories parafermioniques de FZ. En plus de la propriété de k -*clustering*, les polynômes symétriques sont caractérisés par la puissance r avec laquelle ces polynômes s'annulent lorsque la $k + 1$ -ième particule arrive. En termes de CFT, la valeur de r détermine la dimension conforme des courants générant la symétrie \mathbb{Z}_k . En particulier les états de Read-Rezayi correspondent à $r = 2$.

6.1.2 fonctions d'onde et propriété de *clustering*

Dans cette section on rappelle quelques propriétés générales des états fondamentaux de l'effet Hall provenant de simples arguments physiques. Il est pratique de considérer un système de N particules sur une sphère de rayon R soumise à un champ magnétique radial uniforme et un flux total N_ϕ [113]. La particule i est paramétrée par la variable complexe z_i qui est la projection stéréographique de sa position sur la sphère. Chaque particule dans le niveau de Landau le plus bas possède un moment angulaire orbital $N_\phi/2$, et une base pour une unique particule est donnée par $z^m \mu(z, \bar{z})$ où m est le nombre quantique correspondant à L_z et $\mu(z, \bar{z})$ est la mesure sur la sphère, donnée par $\mu(z, \bar{z}) = 1/(1 + (|z|/R)^2/4)^{1+N_\phi/2}$. Il s'ensuit qu'une fonction d'onde décrivant un état à N particules dans le niveau de Landau le plus bas prend la forme

$$f(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N) = P_N(z_1, \dots, z_N) \prod_{i=1}^N \mu(z_i, \bar{z}_i), \quad (6.1)$$

où $P_N(\{z_i\})$ est un polynôme (anti)symétrique pour des bosons (fermions). Il est suffisant de traiter uniquement le cas bosonique, les fonctions d'onde fermioniques s'obtenant simplement en introduisant un facteur de Jastrow $\prod_{i < j} (z_i - z_j)$. En effet ce facteur divise tout polynôme antisymétrique, et le quotient est un polynôme symétrique, *i.e.* bosonique. Dans la suite on considère donc des polynômes $P_N(\{z_i\})$ symétriques dans les variables z_i .

Pour décrire un état fondamental de l'effet Hall quantique, le polynôme $P_N(\{z_i\})$ doit être homogène ainsi qu'invariant par translation et rotation. Enfin il doit être de degré N_ϕ en chaque variable. Un tel polynôme vérifie donc

$$\sum_{i=1}^N \partial_i P_N(\{z_i\}) = 0, \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i^2 \partial_i P_N(\{z_i\}) = -N_\phi \left(\sum_i z_i \right) P_N(\{z_i\}), \quad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i \partial_i P_N(\{z_i\}) = \frac{NN_\phi}{2} P_N(\{z_i\}), \quad (6.4)$$

où les conditions (6.2) et (6.3) sont appelées respectivement conditions de plus haut poids (HW) et de plus bas poids (LW). Sur la sphère, N_ϕ et N sont reliés à la fraction de remplissage ν et au décalage δ par

$$N_\phi = \nu^{-1}N - \delta. \quad (6.5)$$

Comme mentionné dans l'introduction, on s'intéresse aux polynômes $P_N(\{z_i\})$ qui sont les états fondamentaux d'hamiltoniens à $k+1$ corps. En utilisant les notations de [105], on peut définir ces hamiltoniens sur la sphère comme les projecteurs \mathcal{P}_k^r qui annulent les états comprenant des clusters de $k+1$ particules avec un moment angulaire relatif inférieur à r . En d'autres termes pas plus de k particules ne peuvent occuper r orbitales consécutives. Ceci revient à imposer la propriété dite de k -clustering pour le polynôme $P_N(\{z_i\})$:

$$P_N^{(k,r)}(z_i = z_2 = \dots = z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_N) = 0. \quad (6.6)$$

Un autre paramètre important est la puissance r avec laquelle ce polynôme s'annule lorsque l'on forme un cluster de $k+1$ particules, par exemple en approchant une $k+1$ -ième particule d'un cluster de k particules :

$$P_N^{(k,r)}(\underbrace{z_i = z_2 = \dots = z_k}_{=Z}, z_{k+1}, \dots, z_N) = \prod_{i=k+1}^N (Z - z_i)^r P_{N-k}^{(k,r)}(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_N). \quad (6.7)$$

Comme indiqué dans [105, 112], l'état fondamental le plus dense possédant les propriétés ci-dessus est obtenu pour :

$$N_\phi = \frac{r(N-k)}{k}. \quad (6.8)$$

Ces polynômes décrivent des états de Hall quantiques (bosoniques) à la fraction de remplissage $\nu = k/r$, avec un décalage $\delta = r$. On va noter de tels polynômes $P_n^{(k,r)}$.

Comme nous allons le voir, des polynômes $P_n^{(k,r)}$ qui satisfont aux conditions (6.2)-(6.7) peuvent être construits en utilisant les CFT parafermioniques $\mathbb{Z}_k^{(r)}$.

6.1.3 Lien avec les théories conformes parafermioniques

Une caractérisation des polynômes symétriques possédant la propriété de k -clustering (6.6) a été commencée dans le travail de Feigin et al. [72]. Dans ce cadre les polynômes qui apparaissent naturellement sont les polynômes de Jack (k, r) -admissibles (voir partie 5.1.2) qui généralisent les états de Read-Rezayi. Comme vu au chapitre 5, ces polynômes correspondent aux théories conformes $\text{WA}_{k-1}(k+1, k+r)$, qui sont non unitaires pour $r > 2$, et donc inaptes à décrire des phases quantiques topologiques gappées. Il semble donc que les Jacks ne constituent pas une bonne généralisation des états de Read-Rezayi.

Une autre approche pour générer des polynômes possédant les propriétés (6.2)-(6.7) est basée sur les fonctions de corrélation des courants parafermioniques d'une théorie $\mathbb{Z}_k^{(r)}$. En effet en utilisant $\Psi(z) \hat{=} \Psi^1(z)$ le champ parafermionique fondamental de cette CFT, on peut définir le polynôme $P_N^{(k,r)}(\{z_i\})$ suivant :

$$\begin{aligned} P_N^{(k,r)}(\{z_i\}) &\hat{=} \langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2\Delta_1 - \Delta_2} \\ &= \langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{r/k}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ce polynôme satisfait automatiquement toutes les propriétés (6.2)-(6.7). Les conditions de HW et LW (6.2) et (6.3) sont une conséquence directe de l'invariance conforme globale, tandis que les propriétés de k -clustering découlent des OPE parafermioniques (3.33) et (3.34), c'est-à-dire de la symétrie \mathbb{Z}_k de l'algèbre des courants [96].

Évidemment cette approche nécessite l'existence d'une algèbre chirale associative de type $\mathbb{Z}_k^{(r)}$ pour assurer que les fonctions de corrélation soient bien définies. L'étude des polynômes symétriques possédant la propriété de k -clustering est donc fortement reliée à celle des algèbres chirales $\mathbb{Z}_k^{(r)}$ associatives. Pour certaines valeurs de k et r , il n'existe de solution associative que pour une unique valeur de la charge centrale : c'est le cas par exemple des parafermions de Fateev et Zamolodchikov ($r = 2$) [4] qui forment les états de Read-Rezayi [9], et aussi des parafermions $r = 3$ [86] qui sont utilisés pour construire l'état *Gaffnien* [105] ($k = 2$ et $r = 3$). Les polynômes symétriques correspondants sont alors des polynômes de Jack.

En revanche, les solutions associatives connues pour $r \geq 4$ ont toutes en commun de ne pas fixer la charge centrale c , qui peut prendre n'importe quelle valeur. Intuitivement, en augmentant r , le spin des parafermions augmente, ainsi que le nombre de termes singuliers dans leurs OPE, ce qui permet d'avoir suffisamment de liberté pour que la charge centrale reste libre. Souvent, le prix à payer est l'introduction de champs primaires additionnels (au sens de Virasoro) dont le cas WB_2 est un exemple typique (voir partie 6.2.1). Cette liberté permet d'obtenir des solutions unitaires. Et en bonus on va voir que cela implique des propriétés de *clustering* généralisées tout à fait intéressantes pour les polynômes symétriques associés.

6.2 Théories parafermioniques unitaires

Certains polynômes de Jack ont été proposés comme une généralisation naturelle des états de Read-Rezayi \mathbb{Z}_k . Ces polynômes sont liés aux fonctions de corrélation d'une classe de théories \mathcal{W} basées sur l'algèbre de Lie $SU(k)$, comme vu au chapitre 5.

Ces théories peuvent être considérées comme des représentations particulières, non unitaires, de l'algèbre parafermionique $\mathbb{Z}_k^{(r)}$. Partant de l'observation qu'il existe aussi des solutions unitaires, nous montrons, en calculant les fonctions de corrélation correspondantes, que ces théories fournissent des fonctions d'onde test qui satisfont les mêmes propriétés de *clustering* que celles des Jacks, mais permettent de corriger le problème de non-unitarité. Nous avons montré explicitement que, bien que les fonctions d'onde construites à partir des CFT unitaires ne s'expriment pas comme un unique polynôme de Jack, elles ont une structure très intéressante dans laquelle les propriétés des Jacks jouent un rôle majeur.

6.2.1 Le cas \mathbb{Z}_2 : les théories WB_n

Dans un premier temps nous allons considérer en détail les théories possédant une symétrie \mathbb{Z}_2 , qui sont liées aux polynômes symétriques ayant des propriétés de $k = 2$ clustering. Les théories $\mathbb{Z}_2^{(r)}$ possèdent un courant « parafermionique » Ψ de spin $\Delta = r/4$.

Un cas particulier correspond aux théories WB_n , $n \geq 1$, qui possèdent un courant fermionique Ψ de dimension $\Delta = n + 1/2$, et dont les OPE reproduisent $\Psi \times \Psi = \mathbb{I}$: il s'agit d'une réalisation des théories $\mathbb{Z}_2^{(r)}$ pour $r = 4n + 2$. Cette série de valeurs de r est la plus *naturelle* pour la symétrie \mathbb{Z}_2 , car on a alors affaire à des courants fermioniques. Le cas WB_1 (*i.e.* $r = 6$) a été abondamment étudié dans la littérature, car il coïncide avec les théories $N = 1$ superconformes, qui contiennent un champ chirale de dimension $3/2$. Lorsque l'on augmente r , de plus en plus de termes sont à considérer dans l'OPE $\Psi \times \Psi = \mathbb{I}$, car elle contient $r/2$ termes singuliers. En général, des champs primaires additionnels, de spin entier, vont apparaître dans cette OPE. WB_2 en est l'exemple typique. Dans ce cas le courant fermionique est de spin $5/2$, et l'ansatz pour l'OPE est le suivant :

$$\Psi \times \Psi \rightarrow \mathbb{I}. \quad (6.10)$$

Si on impose l'absence de courants supplémentaires, l'associativité n'est possible que pour une valeur précise de la charge centrale $c = -13/14$ [114], et on a affaire à une CFT non unitaire. Une forme plus générale de cette OPE, compatible avec le graduation \mathbb{Z}_2 , est obtenue en ajoutant un courant (neutre) $W(z)$ de spin $\Delta_W = 4$:

$$\Psi \times \Psi \rightarrow \mathbb{I} + W. \quad (6.11)$$

Il est alors possible de refermer l'algèbre des trois courants $T(z), W(z)$ et $\Psi(z)$ et d'obtenir une forme associative pour toute valeur de la charge centrale c : il s'agit de l'algèbre des courants de WB_2 . La forme explicite de la règle de fusion (6.11) est [115] :

$$\begin{aligned} \Psi(z)\Psi(w) &= \frac{1}{(z-w)^5} + \frac{1}{(z-w)^3} \frac{5}{c} T(w) + \frac{5}{2c(z-w)^2} \partial T(w) + \dots \\ &+ \frac{1}{z-w} \left(\frac{135}{2c(22+5c)} \Lambda(w) + \frac{3}{4c} \partial^2 T(w) + \gamma W(w) \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

où $\Lambda(z)$ est un descendant de Virasoro de l'identité défini par $\Lambda =: T^2 : -3/10 \partial^2 T$ et où la constante γ est donnée par

$$\gamma = \frac{75(13+14c)}{c(22+5c)}. \quad (6.13)$$

En particulier lorsque $c = -14/17$, le champ additionnel $W(z)$ se découple de la théorie et on retombe sur la solution associative de Zamolodchikov [114].

Pour le cas général WB_n , il y a en plus du courant fermionique $\Psi(z)$ de spin $n + 1/2$, n courants bosoniques (*i.e.* de spins entiers) $\{W^{(2i)}, i = 1, \dots, n\}$ de dimension $\Delta_{2i} = 2i$ dont le tenseur d'énergie-impulsion $T(z) = W^{(2)}(z)$. Ces $n + 1$ champs chiraux forment une algèbre associative quelle que soit la valeur de la charge centrale.

Le cas $r = 2$ est simplement un fermion libre et les états de Hall correspondants sont les états de Moore-Read [96]. On présente ici les résultats obtenus dans les cas $r = 6$ et $r = 10$ qui correspondent aux théories WB_1 et WB_2 respectivement.

Les théories $N = 1$ superconformes : $\mathbb{Z}_2^{(6)}$

On considère les CFT $N = 1$ superconformes, dont l'algèbre des courants est formée du tenseur d'énergie-impulsion $T(z)$ et de son superpartenaire fermionique $\Psi(z)$ de spin $3/2$. On s'intéresse ici au polynôme défini en (6.9) :

$$P_N^{(2,6)}(\{z_i\}) = \langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_N) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3. \quad (6.14)$$

On a choisi la normalisation de Ψ de telle sorte que :

$$\Psi(z)\Psi(0) = \frac{1}{z^3} + \frac{3/c}{z} T(0) + \dots \quad (6.15)$$

Cette OPE, ainsi que les OPE habituelles pour T :

$$T(z)T(0) = \frac{c/2}{z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots, \quad (6.16)$$

$$T(z)\Psi(0) = \frac{3/2}{z^2} \Psi(0) + \frac{1}{z} \partial \Psi(0) + \dots, \quad (6.17)$$

sont associatives pour toute valeur de la charge centrale c . Pour certaines valeurs de la charge centrale, on obtient des théories particulières :

- la séquence de modèles minimaux unitaires de l'algèbre $N = 1$ superconforme correspond aux charges centrales :

$$c = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{8}{m(m+2)} \right), \quad m = 3, 4, \dots; \quad (6.18)$$

- lorsque $c = -21/4$ on retrouve le modèle minimal non unitaire $M(3, 8)$, et le polynôme P_N est un Jack $(2, 6)$ admissible (ceci est un cas particulier du chapitre 5);
- pour $c = 7/10$, il s'agit du modèle $M(4, 5)$ qui décrit la classe d'universalité du modèle d'Ising tricritique;
- enfin lorsque $c = 3/2$, la théorie factorise en 3 fermions libres indépendants.

Lorsque $c = -21/4$, nous avons vu que $Z_2^{(6)} = M(3, 8)$ et que la fonction à N points est simplement un polynôme de Jack. En particulier la fonction à 4 points est donnée par :

$$P_4^{(2,6)}(\{z_i\}) = J_{[6,6]}^{-3/5}(\{z_i\}). \quad (6.19)$$

Nous allons voir explicitement que ce n'est plus le cas pour une valeur de c générique. L'OPE (6.15) permet de calculer par itération les fonctions à N points :

$$\langle \prod_{i=1}^N \Psi(z_i) \rangle = \sum_{m=2}^N \frac{(-1)^m}{(z_1 - z_m)^3} \left(1 + \frac{3}{c}(z_1 - z_m)^2 \sum_{i \neq 1, m} \left(\frac{3/2}{(z_1 - z_i)^2} + \frac{\partial_i}{z_1 - z_i} \right) \right) \langle \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1, m}}^N \Psi(z_i) \rangle \quad (6.20)$$

Cette relation rend explicite la dépendance en c des corrélateurs. Les polynômes associés

$$P_{2n}^{(2,6)}(\{z_i\}) = \langle \Psi(z_1) \dots \Psi(z_{2n}) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 \quad (6.21)$$

admettent un développement en puissances de $1/c$ de la forme :

$$P_{2n}^{(2,6)}(\{z_i\}) = P_{2n}^{(2,6)(1)}(\{z_i\}) + \frac{1}{c} P_{2n}^{(2,6)(2)}(\{z_i\}) + \frac{1}{c^2} P_{2n}^{(2,6)(3)}(\{z_i\}) + \dots + \frac{1}{c^{n-1}} P_{2n}^{(2,6)(n)}(\{z_i\}). \quad (6.22)$$

Par exemple un calcul direct donne pour la fonction à 4 points :

$$\langle \Psi(z_1) \Psi(z_2) \Psi(z_3) \Psi(z_4) \rangle = \frac{1}{(z_{12} z_{34})^3} - \frac{1}{(z_{13} z_{24})^3} + \frac{1}{(z_{14} z_{23})^3} + \frac{9}{2c} \prod_{i < j} \frac{1}{z_{ij}}, \quad (6.23)$$

i.e.

$$P_4^{(2,6)}(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_{13} z_{24} z_{14} z_{23})^3 - (z_{12} z_{34} z_{14} z_{23})^3 + (z_{12} z_{34} z_{13} z_{24})^3 + \frac{9}{2c} (z_{12} z_{34} z_{13} z_{24} z_{14} z_{23})^2. \quad (6.24)$$

On observe explicitement dans l'équation ci-dessus que le polynôme $P_4^{(2,6)}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ s'annule lorsque 3 particules s'agrègent. De plus il contient un terme en $1/c$ qui s'annule lorsque seulement 2 particules sont au même point. Ceci aurait pu se déduire directement de la propriété de 2-clustering (6.7) :

$$P_4^{(2,6)}(\underbrace{z_1, z_2, z_3, z_4}_{=Z}) = (Z - z_3)^6 (Z - z_4)^6 P_2^{(2,6)}(z_3, z_4) \quad (6.25)$$

$$= (Z - z_3)^6 (Z - z_4)^6 \quad (6.26)$$

qui implique la disparition du terme en $1/c$ dès lors que deux particules sont au même point.

Cette structure se généralise sans peine au cas des fonctions à $2n$ -points. En comparant le développement en $1/c$ (6.22) et la propriété de 2-clustering (6.7), on obtient des propriétés de clustering pour les polynômes $P_{2n}^{(2,6)(i)}$:

$$P_N^{(2,6)(i)}(\underbrace{z_1, z_2, z_3, \dots, z_N}_{=Z}) = \prod_{j=3}^N (Z - z_j)^i P_{N-2}^{(2,6)(i)}(z_3, z_4, \dots, z_N), \quad (6.27)$$

i.e., tout comme $P_4^{(2,6)}$, les polynômes $P_{2n}^{(2,6)(i)}$ apparaissant dans le développement héritent de la propriété de 2-clustering. Mais ce n'est pas tout. Comme le développement (6.22) est fini, tronqué par $P_{2n}^{(2,6)(i)} = 0$ pour $i > n$, on obtient des propriétés supplémentaires : le polynôme $P_{2n}^{(2,6)(i)}$ possède toujours la propriété de 2-clustering, à savoir qu'il s'annule dès qu'un cluster de 3 particules apparaît, mais il possède en plus la propriété de s'annuler quand on forme $n + 1 - i$ clusters de 2 particules.

Comme les polynômes de Jack $(k, 2)$ -admissibles forment une base des polynômes symétriques possédant la propriété de k -clustering [72], le polynôme $P_4^{(2,6)}$ peut se développer en Jacks :

$$P_4^{(2,6)}(z_1, z_2, z_3, z_4) = J_{[6,6]}^{-3/5}(\{z_i\}) + \frac{3(21 + 4c)}{14c} J_{[6,4,2]}^{-2}(\{z_i\}). \quad (6.28)$$

En particulier on retrouve le Jack du chapitre 5 lorsque $c = -21/4$. La forme de ce développement est très suggestive : on peut voir le second terme du membre de droite comme une correction au cas du polynôme de Jack pur. Ce terme préserve les propriétés de $k = 2$ clustering, mais restaure l'unitarité pour les valeurs de c données par (6.18). Les fonctions d'onde test construites à partir de la théorie conforme WB_1 possèdent donc toutes les bonnes propriétés des Jacks $(2, 6)$ -admissibles, tout en corrigeant la non-unitarité.

Nous allons voir maintenant ce que devient cette structure dans le cas suivant, à savoir $r = 10$.

Les théories $WB_2 : \mathbb{Z}_2^{(10)}$

Nous considérons maintenant le cas des théories WB_2 , où le champ fermionique $\Psi(z)$ est de dimension $\Delta_1 = 5/2$. Cela correspond à $r = 10$. Les OPE du champ fermionique avec lui-même ont la forme suivante [115] :

$$\begin{aligned} \Psi(z)\Psi(w) &= \frac{1}{(z-w)^5} + \frac{1}{(z-w)^3} \frac{5}{c} T(w) + \frac{5}{2c(z-w)^2} \partial T(w) + \frac{3}{4c(z-w)} \partial^2 T(w) \\ &+ \frac{1}{z-w} \frac{15}{c(22+5c)} \left(\frac{9}{2} \Lambda(w) + 5(13+14c)W(w) \right) + \dots \end{aligned} \quad (6.29)$$

Les théories WB_2 sont unitaires pour les charges centrales appartenant à la séquence :

$$c = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{12}{m(m+1)} \right), \quad m = 4, 5, \dots \quad (6.30)$$

Un calcul direct pour la fonction à 4 points $P_4^{(2,10)}$ donne :

$$P_4^{(2,10)}(\{z_i\}) = J_{[10,10]}^{-1/3}(\{z_i\}) + \frac{25(22+5c)}{44c} P^{(2)}(\{z_i\}), \quad (6.31)$$

où

$$P^{(2)}(\{z_i\}) = J_{[10,8,2]}^{-2}(\{z_i\}) - \frac{3}{10} J_{[10,7,3]}^{-2} + \frac{7}{39} J_{[10,6,4]}^{-2} + \frac{25}{546} J_{[9,7,3,1]}^{-2} - \frac{125}{5148} J_{[9,6,4,1]}^{-2} + \frac{5}{567} J_{[8,6,4,2]}^{-2}. \quad (6.32)$$

Comme dans le cas des théories $N = 1$ superconformes, on peut décomposer $P_4^{(2,10)}$ en deux polynômes indépendants :

$$P_4^{(2,6)}(\{z_i\}) = P_4^{(2,10)(1)}(\{z_i\}) + \frac{1}{c} P_4^{(2,10)(2)}(\{z_i\}). \quad (6.33)$$

Ces deux polynômes sont des états homogènes sur la sphère, *i.e.* ils satisfont aux conditions HW (6.2) et LW (6.3), mais leurs propriétés de clustering diffèrent : $P_4^{(2,10)(1)}(\{z_i\})$ s'annule quand au moins 3 particules se rencontrent, tandis que $P_4^{(2,10)(2)}(\{z_i\})$ est nul dès lors que 2 particules coïncident. L'expression (6.32) montre que $P_4^{(2,10)(2)}(\{z_i\})$ peut être écrit comme un état de Laughlin $\nu = 1/2$ avec 4 quasi-trous.

Mais le cas WB_2 est *a priori* plus complexe. En effet, il y a dans l'OPE (6.29) non seulement des termes en $1/c$, mais aussi des termes en $1/(22+5c)$, qui pourraient apparaître dans les fonctions de corrélation. Or on observe l'absence de tels termes additionnels dans la fonction à 4 points (6.31). De même nous avons vérifié que la fonction à 6 points ne contient pas de tels termes. La structure du cas $r = 6$, en particulier le développement en $1/c$ du type (6.22), semble se généraliser. Il serait intéressant d'enquêter sur ce point, et s'il se confirme que cette structure reste valable, d'en comprendre l'origine.

6.2.2 Le cas $\mathbb{Z}_k, k \geq 3$: les parafermions $\mathbb{Z}_k^{(4)}$

Lorsque $r = 4$, il a été montré dans [4] qu'il existe une algèbre parafermionique associative pour c arbitraire. La séquence des représentations unitaires ont été étudiées dans [57, 5, 6, 7, 8]. D'autres résultats sur les modèles $\mathbb{Z}_k^{(4)}$ on été obtenus dans [116].

Nous allons regarder les fonctions à $2k$ points de $\mathbb{Z}_k^{(4)}$ dans deux cas : $k = 3$ et $k = 5$, et voir que là encore la structure semble être la même que dans (6.22).

Étude pour $k = 3, r = 4$

Dans le paragraphe précédent nous avons analysé les fonctions d'onde associées à certaines algèbres de courants parafermioniques \mathbb{Z}_2 . On considère maintenant la symétrie \mathbb{Z}_3 et les fonctions d'onde satisfaisant les propriétés de $k = 3$ clustering. Dans le cas $\mathbb{Z}_3^{(4)}$ il y a deux courants parafermioniques $\Psi(z)$ et $\Psi^\dagger(z)$ de dimension $\Delta = 4/3$, et ayant pour OPE :

$$\Psi(z)\Psi(w) = \frac{\gamma}{(z-w)^{4/3}} (\Psi^\dagger(w) + (z-w)\partial_w\Psi^\dagger(w) + \dots), \quad (6.34)$$

$$\Psi(z)\Psi^\dagger(w) = \frac{1}{(z-w)^{8/3}} \left(1 + (z-w)^2 \frac{8}{3c} T(w) + \dots \right), \quad (6.35)$$

où la constante de structure $\gamma = 4/3\sqrt{2/c - 1/4}$ est une constante fixée par l'associativité, et la charge centrale c est libre. En particulier les représentations de cette algèbre sont unitaires pour la séquence [57] :

$$c = 2 \left(1 - \frac{12}{m(m+4)} \right), \quad m = 3, 4, \dots \quad (6.36)$$

La première théorie unitaire ($m = 3$) coïncide avec le modèle minimal $M(6, 7)$ de charge centrale $c = 6/7$ qui décrit la classe d'universalité du point tri-critique du modèle de Potts à 3 états.

On s'intéresse à la fonction :

$$P_6^{(3,4)}(\{z_i\}) = \langle \Psi(z_1)\Psi(z_2)\Psi(z_3)\Psi(z_4)\Psi(z_5)\Psi(z_6) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{4/3}. \quad (6.37)$$

Un calcul explicite à partir des OPE donne

$$P_6^{(3,4)}(\{z_i\}) = J_{[4,4,4]}^{-4/3}(\{z_i\}) + \frac{4(40+7c)}{45c} J_{[4,4,2,2]}^{-3}(\{z_i\}). \quad (6.38)$$

Pour $c = -40/7$, on retrouve le cas du polynôme de Jack non unitaire du chapitre 5, car la théorie $\mathbb{Z}_3^{(4)}$ coïncide alors avec $\text{WA}_2(3, 7)$. De même que dans le cas $\mathbb{Z}_2^{(6)}$ (voir partie 6.2.1) on a un terme additionnel, correctif, qui permet de rétablir l'unitarité. Le polynôme $P_6^{(3,4)}$ s'annule lorsque 4 particules sont au même point, tandis que le terme correctif disparaît dès lors que seulement 3 particules coïncident. Là encore, on retrouve une structure similaire à (6.22).

Étude pour $k = 5, r = 4$

Le cas $k = 5, r = 4$ constitue un exemple particulièrement intéressant et illustre l'efficacité de l'approche par les théories parafermioniques. En effet $r - 1 = 3$ et $k + 1 = 6$ ne sont pas premiers entre eux, et la théorie minimale correspondante $\text{WA}_4(3, 9)$ n'est pas définie : l'approche par les Jacks n'est tout simplement pas possible dans ce cas ! Cependant la théorie $\mathbb{Z}_5^{(4)}$ est une théorie conforme parfaitement définie, qui possède une algèbre chirale associative quelle que soit la charge centrale, et cette CFT est unitaire pour la séquence de charges centrales [5] :

$$c = 4 \left(1 - \frac{15}{m(m+2)} \right), \quad m = 4, 5, \dots \quad (6.39)$$

On peut donc fabriquer des fonctions d'onde test sans difficulté. Par exemple la fonction à dix points

$$P_{10}^{(5,4)}(\{z_i\}) = \langle \Psi(z_1)\Psi(z_2)\dots\Psi(z_{10}) \rangle \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{4/5} \quad (6.40)$$

est donnée explicitement par :

$$P_{10}^{(5,4)} = \left(J_{[2,2,2,2,2]}^{-6} \right)^2 + \frac{128}{25} \left(\frac{1}{c} - \frac{7}{16} \right) \left(J_{[4,4,4,4,2,2]}^{-5} - \frac{3}{8} J_{[4,4,4,3,2,2,1]}^{-5} + \frac{18}{7} J_{[4,4,4,2,2,2,2]}^{-5} + \frac{3}{11} J_{[4,4,3,3,2,2,1,1]}^{-5} \right). \quad (6.41)$$

Là encore on obtient un développement en $1/c$, mais par contre on ne peut pas comparer ce résultat avec l'équation (6.41), puisque le Jack $J_{[4,4,4,4]}^\alpha$ est singulier pour $\alpha = -(k+1)/r - 1 = -2$. Ceci est cohérent avec l'absence de théories minimales $\text{WA}_4(3, 9)$.

6.2.3 Structure générale des fonctions à N points et développement en $1/c$

Nous avons calculé explicitement les fonctions symétriques $P_{N=2k}^{(k,r)}(\{z_i\})$ générées par plusieurs exemples de théories parafermioniques dans lesquelles la charge centrale est un paramètre libre. Dans tous les cas que nous avons étudiés, une structure similaire semble apparaître.

Nous conjecturons que dans les cas ($k = 2, r = 6, 10, \dots$) et ($k \geq 3, r = 4$) les polynômes construits à partir de la théorie parafermionique $\mathbb{Z}_k^{(r)}(c)$ admettent un développement en $1/c$ de la forme :

$$P_{lk}^{(k,r)}(\{z_i\}) = P_{lk}^{(k,r)(1)}(\{z_i\}) + \frac{1}{c} P_{lk}^{(k,r)(2)}(\{z_i\}) + \frac{1}{c^2} P_{lk}^{(k,r)(3)}(\{z_i\}) + \dots + \frac{1}{c^{l-1}} P_{lk}^{(k,r)(l)}(\{z_i\}), \quad (6.42)$$

où les l polynômes indépendants $P_{lk}^{(k,r)(i)}(\{z_i\})$ ($i = 1, \dots, l$) possèdent les propriétés suivantes :

- $P_{lk}^{(k,r)(i)}(\{z_i\})$, $i = 1, \dots, l$, sont symétriques et satisfont aux propriétés HW (6.2) et LW (6.3);
- $P_{lk}^{(k,r)(1)}(\{z_i\})$ s'annulent dès qu'un cluster de $k + 1$ particules apparaît;
- $P_{lk}^{(k,r)(i)}(\{z_i\})$, $i = 2, \dots, l$, s'annulent lorsqu'on forme $l - i + 1$ clusters de k particules :

$$\begin{aligned} P_{lk}^{(k,r)(i)}(\underbrace{z_1 = \dots = z_k}_{Z_1}, \dots, \underbrace{z_{(l-i-1)k+1} = \dots = z_{(l-i)k}}_{Z_{l-i}}, z_{(l-i)k+1}, z_{(l-i)k+2}, \dots) \\ = \prod_{1=i < j}^{l-i} (Z_i - Z_j)^{kr} \prod_{i=1}^{l-i} \prod_{j \geq (l-i)k+1}^{l-i} (Z_i - z_j)^r P_{ik}^{(k,r)(i)}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} P_{lk}^{(k,r)(i)}(\underbrace{z_1 = \dots = z_k}_{Z_1}, \dots, \underbrace{z_{(l-i-1)k+1} = \dots = z_{(l-i)k}}_{Z_{l-i}}, \underbrace{z_{(l-i)k+1} = \dots = z_{(l-i+1)k}}_{Z_{l-i+1}}, \dots) \\ = 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Nous avons prouvé explicitement ce résultat dans le cas ($k = 2, r = 6$), et nous l'avons testé pour des fonctions à faible nombre de particules dans les autres cas. Les propriétés de clustering étendues qui émergent du développement en $1/c$ sont très intéressantes, et pourraient servir dans la classification des polynômes symétriques pertinents pour l'effet Hall quantique fractionnaire.

Mise à part cette conjecture sur la structure générale des fonctions à N points, nous avons montré que les théories parafermioniques unitaires générales constituent *a priori* de bonnes candidates pour construire des fonctions d'onde test, car elles possèdent exactement les mêmes propriétés de clustering que les polynômes de Jack, tout en restaurant l'unitarité de la CFT sous-jacente.

6.3 Conclusion

Dans cette partie, des polynômes $P_N^{(k,r)}(\{z_i\})$ qui sont symétriques dans les N variables z_i et qui correspondent aux polynômes les plus denses satisfaisant aux propriétés de (k, r) -clustering ont été considérés. L'intérêt porté à ces polynômes est issu de leur lien potentiel avec les états non abéliens bosoniques dans l'effet Hall quantique fractionnaire, à la fraction de remplissage $\nu = k/r$. Récemment certains polynômes de Jack correspondant à des théories conformes non unitaires ont été considérés; cependant il y a de solides arguments indiquant que les états issus de CFT non unitaires ne peuvent pas décrire des phases topologiquement gappées.

Nous avons présenté une étude systématique de l'approche par les CFT pour générer de tels polynômes. Ce problème est directement lié à la classification des algèbres parafermioniques (associatives). Une attention particulière a été portée aux algèbres chirales associatives où la charge centrale c est un paramètre libre. Dans deux cas particuliers, les théories WB_n et les théories $\mathbb{Z}_k^{(4)}$, nous avons calculé certaines fonctions de corrélation et donné un développement explicite en terme de Jacks. Pour des valeurs particulières (négatives) de la charge centrale, les résultats coïncident avec ceux de la partie 5 : on retrouve le polynôme de Jack (k, r) -admissible correspondant à la CFT non unitaire $WA_{k-1}(k+1, k+r)$. En revanche pour une valeur générique de la charge centrale, incluant la séquence unitaire, nous avons développé ces polynômes en une série de Jacks possédant des propriétés de clustering généralisées.

À notre connaissance, beaucoup de ces CFT unitaires n'ont jamais été considérées dans l'étude des états non abéliens de l'effet Hall quantique fractionnaire. Les polynômes $P_n^{(k,r)}$ sont les états du vide du pseudo hamiltonien \mathcal{P}_k^r mais, pour $k = 2, r > 4$ et pour $k > 3, r > 2$, ils ne sont pas uniques. Nous n'avons pas trouvé d'hamiltonien qui admette ces états comme unique état du vide. Cependant, il est possible d'en construire un dans le cas $\mathbb{Z}_3^{(4)}$ [117], ce qui doit sûrement pouvoir se généraliser au cas $\mathbb{Z}_k^{(4)}$.

Il serait très intéressant de vérifier les prédictions de ces CFT et de vérifier si les fonctions d'onde test $P_n^{(k,r)}$ que nous avons calculées sont de bonnes candidates pour décrire ces états non abéliens. Côté CFT, un premier effort à faire dans ce sens serait de calculer explicitement les fonctions d'onde pour l'état du vide à N particules, *i.e.* les fonctions de corrélation à N parafermions Ψ . Il serait aussi intéressant de calculer les états excités correspondants et d'analyser le type de statistique des excitations.

Chapitre 7

Conclusion

L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire s'inscrit dans un projet de recherche visant à mieux comprendre les classes d'universalité des systèmes critiques possédant des symétries discrètes du type \mathbb{Z}_N , en deux dimensions. Les théories conformes sont un outil très puissant pour étudier les phénomènes critiques bidimensionnels et la symétrie étendue \mathbb{Z}_N donne lieu aux théories conformes dites parafermioniques. Ces CFT sont les objets naturels pour décrire le comportement universel des systèmes sur réseau du type du modèle d'Ising, de Potts à trois états ou encore d'Ashkin-Teller.

Bien qu'une classification exhaustive soit encore manquante, il existe des généralisations naturelles des parafermions de Fateev et Zamolodchikov, pour lesquelles on retrouve une structure très proche des modèles minimaux unitaires : les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$. Un système critique décrit par la théorie $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ correspond à un point fixe du groupe de renormalisation. Pour aller au-delà et étudier le voisinage de ce point critique, nous avons étudié les perturbations de ces théories par deux champs faiblement pertinents. Nous avons considéré le cas $p \gg 1$ qui permet d'étudier perturbativement le groupe de renormalisation, et nous avons montré qu'il existe des flots non massifs vers une limite infra-rouge décrite par $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-2)$, généralisant ainsi les résultats connus dans le cas des CFT correspondant à des cosets symétriques. De manière tout à fait inattendue, nous avons découvert un point fixe additionnel, correspondant à une limite infra-rouge différente : $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p-1)$. Ces théories parafermioniques possèdent donc un riche diagramme de phase, avec une structure de flots non massifs très intéressante. Ces différentes CFT infra-rouges ont été identifiées d'une part en utilisant le théorème c pour évaluer leur charge centrale, et d'autre part en vérifiant la dimension conforme de certains opérateurs primaires.

Un autre aspect très intéressant des théories conformes parafermioniques réside dans leur lien avec l'effet Hall quantique fractionnaire. Depuis le succès des états de Laughlin, l'utilisation de fonctions d'onde test a permis de faire de grands progrès dans la compréhension de ces systèmes, en particulier dans la description des états non abéliens. Dans ce contexte, les blocs conformes des CFT parafermioniques permettent de construire des fonctions d'onde test possédant certaines propriétés de clustering. En particulier les états de Read-Rezayi en FQHE sont basés sur les parafermions de Fateev et Zamolodchikov. Au cours des dernières années, il y a eu un regain d'intérêt pour les états non abéliens, principalement à cause de leur lien avec le calcul quantique topologique, et de nombreuses généralisations des états de Read-Rezayi ont été proposées dans la littérature. En particulier il existe une approche basée sur les propriétés de clustering de certains polynômes de Jack pour tenter de classifier ces fonctions d'onde test, et il était conjecturé que ces Jacks peuvent s'exprimer comme des fonctions de corrélation dans les théories WA_n . Ces théories conformes possèdent des symétries étendues, dont en particulier un courant de spin 3. En utilisant les identités de Ward associées à ce courant ainsi que les dégénérescences des champs primaires, nous avons montré que ces corrélateurs satisfont à une équation aux dérivées partielles d'ordre deux. Cette EDP peut être transformée en une équation aux valeurs propres de l'hamiltonien de Calogero-Sutherland pour une valeur particulière de la constante de couplage, ce qui fournit une preuve de cette conjecture.

Malheureusement ces généralisations correspondent à des CFT non unitaires et sont donc inaptes à décrire des phases quantiques topologiques gappées. Les théories parafermioniques unitaires constituent par conséquent des candidates naturelles pour la construction de fonctions d'onde test décrivant des états non abéliens dans l'effet Hall quantique fractionnaire. Le travail que nous avons effectué dans cette direction est

simplement une première analyse des propriétés des états fondamentaux produits par ce type de CFT. Nous avons montré en particulier que les théories $\mathbb{Z}_N^{(4)}(p)$ permettent de construire des polynômes symétriques possédant les mêmes propriétés de clustering que les Jacks, tout en assurant l'unitarité de ces théories. Cependant il reste beaucoup à faire pour tester la pertinence de ces CFT parafermioniques pour l'effet Hall quantique fractionnaire et vérifier si les fonctions d'onde test que nous avons calculées sont de bonnes candidates pour décrire certains états non abéliens. Un premier effort à faire dans ce sens serait de calculer explicitement les fonctions d'onde pour l'état du vide à N particules, *i.e.* les fonctions de corrélation à N parafermions Ψ , pour pouvoir les comparer avec les calculs numériques. Il est aussi nécessaire de considérer les excitations du système, soit en calculant explicitement les états excités, soit par l'approche des spectres d'intrications proposée par Li et Haldane [118].

Bibliographie

- [1] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241 :333–380, 1984.
- [2] Karl Löwner. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. *Mathematische Annalen*, 89 :103–121, 1923.
- [3] Oded Schramm. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Isr.J.Math.* :221-288,2000, 2000.
- [4] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov. Parafermionic Currents in the Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory and Selfdual Critical Points in $Z(N)$ Invariant Statistical Systems. *Sov. Phys. JETP*, 62 :215–225, 1985.
- [5] Vladimir S. Dotsenko, Jesper Lykke Jacobsen, and Raoul Santachiara. Parafermionic theory with the symmetry $Z(5)$. *Nucl. Phys.*, B656 :259–324, 2003.
- [6] Vladimir S. Dotsenko, Jesper Lykke Jacobsen, and Santachiara Raoul. Parafermionic theory with the symmetry $Z(N)$, for N odd. *Nucl. Phys.*, B664 :477–511, 2003.
- [7] Vladimir S Dotsenko, Jesper Lykke Jacobsen, and Raoul Santachiara. Parafermionic theory with the symmetry $Z(N)$, for N even. *Nucl. Phys.*, B679 :464–494, 2004.
- [8] Vladimir S Dotsenko, Jesper Lykke Jacobsen, and Raoul Santachiara. Conformal field theories with $Z(N)$ and Lie algebra symmetries. *Phys. Lett.*, B584 :186–191, 2004.
- [9] N. Read and E. Rezayi. Beyond paired quantum Hall states : Parafermions and incompressible states in the first excited Landau level. *Phys. Rev. B*, 59(12) :8084–8092, Mar 1999.
- [10] A . Amit. *Field theory, the renormalization group and critical phenomena*. World scientific, Singapore, 1984.
- [11] M. L. Bellac. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*. Interedition, Paris, 1988.
- [12] G. Parisi. *Statistical field theory*. Addison-Wesley, Red-wood city, CA, 1988.
- [13] C. Itzykson and J.-M. Drouffe. *Statistical field theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [14] L. P. Kadanoff. Scaling laws for Ising models near $T(c)$. *Physics*, 2 :263–272, 1966.
- [15] B. Widom. Equation of State in the Neighborhood of the Critical Point. *The Journal of Chemical Physics*, 43(11) :3898–3905, 1965.
- [16] K. G. Wilson and John B. Kogut. The Renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rept.*, 12 :75–200, 1974.
- [17] Kenneth G. Wilson. The Renormalization Group : Critical Phenomena and the Kondo Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 47 :773, 1975.
- [18] Andrea Cappelli, C. Itzykson, and J. B. Zuber. The ADE Classification of Minimal and $A_1^{(1)}$ Conformal Invariant Theories. *Commun. Math. Phys.*, 113 :1, 1987.
- [19] J. B. Zuber. Classification of Modular Invariant Partition Functions. Presented at the 10th Johns Hopkins workshop, Bonn, Germany, 1-3 Sep 1986.
- [20] (Ed.) Itzykson, C., (Ed.) Saleur, H., and (Ed.) Zuber, J. B. Conformal invariance and applications to statistical mechanics. SINGAPORE, SINGAPORE : WORLD SCIENTIFIC (1988) 979p.

- [21] Jerome Dubail, Jesper Lykke Jacobsen, and Hubert Saleur. Conformal two-boundary loop model on the annulus. 2008.
- [22] Jerome Dubail, Jesper Lykke Jacobsen, and Hubert Saleur. Conformal boundary conditions in the critical $O(n)$ model and dilute loop models. 2009.
- [23] H. Saleur. Lectures on Non Perturbative Field Theory and Quantum Impurity Problems. *arXiv :9812110*, 1998.
- [24] H. Saleur. Lectures on Non Perturbative Field Theory and Quantum Impurity Problems : Part II. *arXiv.org :0007309*, 2000.
- [25] P. Mathieu P. Di Francesco and D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer New York, 1997.
- [26] Federico Camia and Charles M. Newman. The full scaling limit of two-dimensional critical percolation. 2005.
- [27] Alexander M. Polyakov. Conformal symmetry of critical fluctuations. *JETP Lett.*, 12 :381–383, 1970.
- [28] C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum field theory*. McGraw-Hill, New York, USA, 1980.
- [29] Vladimir Dotsenko. *Séries de cours sur la théorie conforme*. <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092929/en/>.
- [30] M. S. Virasoro. Subsidiary conditions and ghosts in dual resonance models. *Phys. Rev.*, D1 :2933–2936, 1970.
- [31] John L. Cardy. Conformal Invariance. In *Domb, L. (Ed.), Lebowitz, J.I. (Ed.) : Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 11*, 55-126.
- [32] John L. Cardy. Conformal Invariance and Statistical Mechanics.
- [33] John Cardy. Conformal Field Theory and Statistical Mechanics. 2008.
- [34] V.G.Kac. Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras. *Lecture Notes in Physics*, 94 :441–445, 1979.
- [35] B. L. Feigin and D. B. Fuks. Invariant skew symmetric differential operators on the line and verma modules over the Virasoro algebra. *Funct. Anal. Appl.*, 16 :114–126, 1982.
- [36] B. L. Feigin and D. B. Fuks. Verma modules over the Virasoro algebra. *Funct. Anal. Appl.*, 17 :241–241, 1983.
- [37] Daniel Friedan, Zong-an Qiu, and Stephen H. Shenker. Conformal Invariance, Unitarity and Two-Dimensional Critical Exponents. *Phys. Rev. Lett.*, 52 :1575–1578, 1984.
- [38] P. di Francesco, H. Saleur, and J. B. Zuber. Relations between the Coulomb Gas Picture and Conformal Invariance of Two-Dimensional Critical Models. SACLAY-SPH-T-87-031.
- [39] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev. Four Point Correlation Functions and the Operator Algebra in the Two-Dimensional Conformal Invariant Theories with the Central Charge $c < 1$. *Nucl. Phys.*, B251 :691, 1985.
- [40] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev. Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models. *Nucl. Phys.*, B240 :312, 1984.
- [41] P. Di Francesco, H. Saleur, and J. B. Zuber. Generalized Coulomb Gas Formalism for Two-Dimensional Critical Models based on $Su(2)$ Coset Construction. *Nucl. Phys.*, B300 :393, 1988.
- [42] Sergei L. Lukyanov and V. A. Fateev. Physics reviews : Additional symmetries and exactly soluble models in two-dimensional conformal field theory. *Soviet Scientific Reviews A, Physics*, 15.2, 1990. Chur, Switzerland : Harwood (1990) 117 p. (Soviet Scientific Reviews A, Physics : 15.2).
- [43] A. Polyakov and P. B. Wiegmann. Theory of nonabelian goldstone bosons in two dimensions. *Physics Letters B*, 131(1-3) :121 – 126, 1983.
- [44] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov. Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions. *Nuclear Physics B*, 247(1) :83 – 103, 1984.
- [45] Edward Witten. Non-abelian bosonization in two dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 92 :455–472, 1985.

- [46] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov. Selfdual solutions of the star triangle relations in $Z(N)$ models. *Phys. Lett.*, A92 :37–39, 1982.
- [47] H. A. Kramers and G. H. Wannier. Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I. *Phys. Rev.*, 60(3) :252–262, Aug 1941.
- [48] Leo P. Kadanoff and Horacio Ceva. Determination of an Operator Algebra for the Two-Dimensional Ising Model. *Phys. Rev. B*, 3(11) :3918–3939, Jun 1971.
- [49] Lars Onsager. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Phys. Rev.*, 65(3-4) :117–149, Feb 1944.
- [50] Rodney J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Elsevier Science & Technology Books, 1982.
- [51] H. Saleur. The antiferromagnetic Potts model in two dimensions : Berker-Kadanoff phase, antiferromagnetic transition, and the role of Beraha numbers. *Nuclear Physics B*, 360(2-3) :219 – 263, 1991.
- [52] J L Cardy. General discrete planar models in two dimensions : Duality properties and phase diagrams. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 13(4) :1507–1515, 1980.
- [53] F C Alcaraz and R Koberle. Duality and the phases of $Z(N)$ spin systems. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 13(5) :L153–L160, 1980.
- [54] Eduardo Fradkin and Leo P. Kadanoff. Disorder variables and para-fermions in two-dimensional statistical mechanics. *Nuclear Physics B*, 170(1) :1 – 15, 1980.
- [55] M. A. Rajabpour and John Cardy. Discretely Holomorphic Parafermions in Lattice $Z(N)$ Models. 2007.
- [56] Peter Goddard and Adam Schwimmer. Unitary construction of extended conformal algebras. *Physics Letters B*, 206(1) :62 – 70, 1988.
- [57] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov. Representations of the algebra of 'parafermion currents' of spin $4/3$ in two-dimensional conformal field theory. Minimal models and the tricritical Potts $Z(3)$ model. *Theor. Math. Phys.*, 71 :451–462, 1987.
- [58] Vladimir S. Dotsenko and Raoul Santachiara. The third parafermionic chiral algebra with the symmetry $Z(3)$. *Phys. Lett.*, B611 :189–192, 2005.
- [59] Vladimir S. Dotsenko and Benoit Estienne. Renormalization group flows for \mathbb{Z}_5 parafermionic field theory. *Physics Letters B*, 643 :362, 2006.
- [60] Vladimir S. Dotsenko and Benoit Estienne. Renormalization group flows for the second \mathbb{Z}_N parafermionic field theory for N odd. *Nuclear Physics B*, 775 :341, 2007.
- [61] Benoit Estienne. Renormalization group flows for the second \mathbb{Z}_N parafermionic field theory for N even. *arXiv :0812.3074*, 2008.
- [62] A. B. Zamolodchikov. Renormalization Group and Perturbation Theory Near Fixed Points in Two-Dimensional Field Theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 46 :1090, 1987.
- [63] Andreas W. W. Ludwig and John L. Cardy. Perturbative evaluation of the conformal anomaly at new critical points with applications to random systems. *Nuclear Physics B*, 285 :687 – 718, 1987.
- [64] Viktor Dotsenko, Vladimir Dotsenko, Marco Picco, and Pierre Pujol. Renormalization Group Solution for the Two-Dimensional Random Bond Potts Model with Broken Replica Symmetry. 1995.
- [65] Vladimir Dotsenko, Marco Picco, and Pierre Pujol. Renormalisation group calculation of correlation functions for the 2D random bond Ising and Potts models. *Nuclear Physics B*, 455 :701, 1995.
- [66] C. Crnkovic, G. M. Sotkov, and M. Stanishkov. Renormalization group flow for general $SU(2)$ coset models. *Phys. Lett.*, B226 :297, 1989.
- [67] C. Crnkovic, R. Paunov, G. M. Sotkov, and M. Stanishkov. Fusions of conformal models. *Nucl. Phys.*, B336 :637, 1990.
- [68] P. Goodard, A. Kent, and D. Olive. Virasoro algebras and coset space models. *Physics Letters B*, 152(1-2) :88 – 92, 1985.

- [69] V. A. Fateev. The exact relations between the coupling constants and the masses of particles for the integrable perturbed conformal field theories. *Physics Letters B*, 324(1) :45 – 51, 1994.
- [70] Doron Gepner. New Conformal Field Theories Associated with Lie Algebras and their Partition Functions. *Nucl. Phys.*, B290 :10, 1987.
- [71] A. B. Zamolodchikov. Higher Order Integrals of Motion in Two-Dimensional Models of the Field Theory with a Broken Conformal Symmetry. *JETP Lett.*, 46 :160–164, 1987.
- [72] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin. A differential ideal of symmetric polynomials spanned by Jack polynomials at $\beta = -(r-1)/(k+1)$. *International Mathematics Research Notices*, 2002(23) :1223–1237, 2002.
- [73] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin. Symmetric polynomials vanishing on the shifted diagonals and Macdonald polynomials. *Int Math Res Notices*, 2003(18) :1015–1034, 2003.
- [74] V. A. Fateev and S. L. Lukyanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $Z(N)$ symmetry. *International Journal of Modern Physics A*, 3 :507, 1988.
- [75] F. A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, and K. Schoutens. Extensions of the Virasoro Algebra Constructed from Kac- Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invariants. *Nucl. Phys.*, B304 :348–370, 1988.
- [76] F. A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, and K. Schoutens. Coset Construction for Extended Virasoro Algebras. *Nucl. Phys.*, B304 :371–391, 1988.
- [77] P. Bouwknegt and K. Schoutens. W -symmetry in Conformal Field Theory. *Physics Reports*, 223 :183, 1993.
- [78] V. A. Fateev and A. V. Litvinov. Correlation functions in conformal Toda field theory I. *JHEP*, 0711 :002, 2007.
- [79] V. A. Fateev and A. V. Litvinov. Correlation functions in conformal Toda field theory II. *JHEP*, 0901 :033, 2009.
- [80] John Cardy. Calogero-Sutherland model and bulk-boundary correlations in conformal field theory. *Physics Letters B*, 582 :121, 2004.
- [81] B. Andrei Bernevig and F. D. M. Haldane. Fractional Quantum Hall States and Jack Polynomials. *Physical Review Letters*, 100 :246802, 2008.
- [82] B. Andrei Bernevig and F. D. M. Haldane. Properties of Non-Abelian Fractional Quantum Hall States at Filling $\nu = \frac{k}{r}$. *Physical Review Letters*, 101 :246806, 2008.
- [83] B. Andrei Bernevig, Victor Gurarie, and Steven H. Simon. Central Charge and Quasihole Scaling Dimensions From Model Wavefunctions : Towards Relating Jack Wavefunctions to W -algebras. *Mathematical Systems Theory*, 42 :245206, 2009.
- [84] Eddy Ardonne. Domain walls, fusion rules and conformal field theory in the quantum Hall regime. *Physical Review Letters*, 102 :180401, 2009.
- [85] Benoit Estienne and Raoul Santachiara. Relating Jack wavefunctions to WA_{k-1} theories. *arXiv :0906.1969*, 2009.
- [86] P. Jacob and P. Mathieu. The $Z(k)(SU(2), 3/2)$ parafermions. *Phys. Lett.*, B627 :224–232, 2005.
- [87] P. Jacob and P. Mathieu. A quasi-particle description of the $M(3, p)$ models. *Nucl. Phys.*, B733 :205–232, 2006.
- [88] Benoit Estienne, Nicolas Regnault, and Raoul Santachiara. Clustering properties, Jack polynomials and unitary conformal field theories. *arXiv :0904.3702*, 2009.
- [89] P. Mathieu. The W_k structure of the $Z_k^{(3/2)}$ models. *arXiv :0906.0949*, 2009.
- [90] I. G. MacDonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed. Oxford University Press, 1999.
- [91] Bill Sutherland. Quantum Many-Body Problem in One Dimension : Ground State. *Journal of Mathematical Physics*, 12 :246, 1971.
- [92] Bill Sutherland. Quantum Many-Body Problem in One Dimension : Thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 12 :251, 1971.

- [93] Bill Sutherland. Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. *Phys. Rev. A*, 4(5) :2019–2021, Nov 1971.
- [94] Bill Sutherland. Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II. *Phys. Rev. A*, 5(3) :1372–1376, Mar 1972.
- [95] R. B. Laughlin. Anomalous Quantum Hall Effect : An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50(18) :1395–1398, May 1983.
- [96] Gregory Moore and Nicholas Read. Nonabelions in the fractional quantum hall effect. *Nuclear Physics B*, 360(2-3) :362 – 396, 1991.
- [97] Thierry Jolicoeur. Non-Abelian states with negative flux : a new series of quantum Hall states. 2007.
- [98] N. Regnault, M. O. Goerbig, and Th Jolicoeur. Bridge between Abelian and Non-Abelian Fractional Quantum Hall States. *Physical Review Letters*, 101 :066803, 2008.
- [99] Sathya Guruswamy and Kareljan Schoutens. Non-abelian Exclusion Statistics. *Nuclear Physics B*, 556 :530, 1999.
- [100] E. Ardonne, P. Bouwknegt, and K. Schoutens. Non-abelian quantum Hall states - exclusion statistics, K -matrices and duality. *Journal of Statistical Physics*, 102 :421, 2001.
- [101] Eytan Grosfeld and Kareljan Schoutens. Non-Abelian anyons : when Ising meets Fibonacci. 2008.
- [102] Roni Ilan, Eytan Grosfeld, Kareljan Schoutens, and Ady Stern. Experimental signatures of non-Abelian statistics in clustered quantum Hall states. *Physical Review B*, 79 :245305, 2009.
- [103] Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman, and Sankar Das Sarma. Non-Abelian anyons and topological quantum computation. *Reviews of Modern Physics*, 80(3) :1083, 2008.
- [104] Eddy Ardonne and Kareljan Schoutens. Wavefunctions for topological quantum registers. *Annals Phys.*, 322 :201–235, 2007.
- [105] Steven H. Simon, E. H. Rezayi, N. R. Cooper, and I. Berdnikov. A $\nu = 2/5$ Paired Wavefunction. *Physical Review B*, 75 :075317, 2007.
- [106] B. Andrei Bernevig and F. D. M. Haldane. Clustering Properties and Model Wavefunctions for Non-Abelian Fractional Quantum Hall Quasielectrons. *Physical Review Letters*, 102 :066802, 2009.
- [107] N. Read. Conformal invariance of chiral edge theories. *Physical Review B*, 79 :245304, 2009.
- [108] N. Read. Quasiparticle spin from adiabatic transport in quantum Hall trial wavefunctions. *arXiv :0807.3107*, 2008.
- [109] I. Vidanović M.V. Milovanović, Th. Jolicoeur. Healing non-unitary conformal field theories and related fractional quantum Hall states. *arXiv :0902.1719*, 2009.
- [110] Maissam Barkeshli and Xiao-Gang Wen. Structure of Quasiparticles and Their Fusion Algebra in Fractional Quantum Hall States. *arXiv :0807.2789*, 2008.
- [111] Maissam Barkeshli and Xiao-Gang Wen. Classification of Abelian and Non-Abelian Multilayer Fractional Quantum Hall States Through the Pattern of Zeros. *arXiv :0906.0337*, 2009.
- [112] Steven H. Simon, E. H. Rezayi, and Nigel R. Cooper. Pseudopotentials for Multi-particle Interactions in the Quantum Hall Regime. *Physical Review B*, 75 :195306, 2007.
- [113] F. D. M. Haldane. Fractional Quantization of the Hall Effect : A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States. *Phys. Rev. Lett.*, 51(7) :605–608, Aug 1983.
- [114] A. B. Zamolodchikov. Infinite additional symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 65 :1205–1213, 1985.
- [115] Chang-hyun Ahn. $c = 5/2$ free fermion model of $WB(2)$ algebra. *Int. J. Mod. Phys.*, A7 :6799–6812, 1992.
- [116] P. Furlan, R. R. Paunov, and I. T. Todorov. Extended $U(1)$ conformal field theories and $Z(k)$ parafermions. *Fortsch. Phys.*, 40 :211–271, 1992.
- [117] Steven H. Simon and E. H. Rezayi. S_3 quantum hall wavefunctions. 2009.
- [118] Hui Li and F. D. M. Haldane. Entanglement Spectrum as a Generalization of Entanglement Entropy : Identification of Topological Order in Non-Abelian Fractional Quantum Hall Effect States. *Physical Review Letters*, 101 :010504, 2008.

Annexe A

algèbres de Lie

A.1 Racines simples

Pour tout ce qui concerne les algèbres de Lie A_n , B_n et D_n , les notations adoptées sont celles de [25], en particulier les conventions de normalisation des racines et des poids. Les racines longues sont de norme $(e_j, e_j) = 2$, et les racines simples $e_i, i = 1, \dots, n$ sont données par la matrice de Cartan $A_{ij} = (e_i, e_j^\vee)$, où $e_j^\vee = 2e_j/(e_j, e_j)$ est la coracine de e_j . Ci-dessous une liste des matrices de Cartan pour les cas qui nous concernent :

– pour A_n :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

– pour B_n :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

– pour D_n :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

En particulier B_n n'est pas simplement lacée, puisque elle possède $n - 1$ racines simples longues $(e_i, e_i) = 2$ pour $i = 1 \dots n - 1$, et une racine courte $(e_n, e_n) = 1$.

A.2 Poids fondamentaux

Les poids fondamentaux ω_i forment une base duale à celle des coracines simples : $(\omega_i, e_j) = \delta_{ij}$, et la matrice de Cartan n'est autre que la matrice de passage entre la base des racines simples et celle des poids fondamentaux :

$$e_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \omega_j \quad (\text{A.4})$$

Le produit scalaire des poids s'écrit sous la forme de la forme quadratique ω_{ij} :

$$\omega_{ij} = \omega_i \cdot \omega_j \quad (\text{A.5})$$

où :

– pour A_n

$$\omega_{ij} = \frac{i(n+1-j)}{n+1} \quad \text{pour } i \leq j \quad (\text{A.6})$$

soit encore :

$$\omega = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \dots & 4 & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \dots & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

– pour B_n

$$\omega_{ij} = i, \quad i \leq j < n; \quad (\text{A.8})$$

$$\omega_{in} = \frac{i}{2}, \quad i < n; \quad (\text{A.9})$$

$$\omega_{nn} = \frac{n}{4} \quad (\text{A.10})$$

i.e.

$$\omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2(n-1) & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n/2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

– et enfin pour D_n :

$$\omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 6 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2(n-2) & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n/2 & (n-2)/2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & (n-2)/2 & n/2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

On introduit aussi le vecteur de Weyl :

$$\rho = \sum_i \omega_i = (1, 1, \dots, 1) \quad (\text{A.13})$$

et le nombre de Coxeter dual :

$$g = \begin{cases} n + 1 & \text{pour } A_n \\ 2n - 1 & \text{pour } B_n \\ 2n - 2 & \text{pour } D_n \end{cases} \quad (\text{A.14})$$