



HAL
open science

Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés

Pierre Kerfriden

► **To cite this version:**

Pierre Kerfriden. Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2008. Français. NNT : . tel-00422230

HAL Id: tel-00422230

<https://theses.hal.science/tel-00422230>

Submitted on 6 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2008 N°126



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Pierre KERFRIDEN

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Domaine :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :

**Stratégie de décomposition de domaine à trois
échelles pour la simulation du délaminage dans les
stratifiés**

Thèse soutenue à Cachan le 24 novembre 2008 devant le jury composé de :

Nicolas MOES	École Centrale de Nantes	Rapporteur
Alberto CORIGLIANO	Politecnico di Milano	Rapporteur
Jean-Louis CHABOCHE	ONERA	Examinateur
Serge MAISON-LE-POEC	EADS	Examinateur
Olivier ALLIX	ENS de Cachan	Directeur de thèse
Pierre GOSSELET	ENS de Cachan	Encadrant de thèse

LMT-Cachan

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

À l'approche de mon départ vers de nouveaux horizons professionnels, j'aimerais adresser quelques mots aux personnes qui ont contribué à ce travail et dont, injustement et je le regrette, le nom ne figure pas sur la page de garde de ce mémoire.

En premier lieu, mes remerciements vont à mon encadrement, et tout particulièrement à mon directeur de thèse, Olivier Allix, pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant un sujet d'étude passionnant, et pour la liberté qu'il m'a laissée sur les méthodes à employer pour obtenir le résultat escompté. En outre, par des conseils appuyés aux moments opportuns, il a su me faire sortir progressivement de la béatitude enfantine quasi caractéristique des thésards jeunes. Je remercie également mon encadrant Pierre Gosselet, qui a été pendant ces trois ans d'un soutien considérable, scientifiquement et humainement.

Je souhaiterais en second lieu remercier Nicolas Moës et Alberto Corigliano pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire. Leur remarques bienveillantes m'ont fait prendre conscience de l'intérêt scientifique de mon travail. Je remercie Jean-Louis Chaboche et Serge Maison-Le-Poëc pour leur participation à mon jury de thèse, l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux ainsi que leur jovialité.

Ce travail n'aurait jamais abouti sans le soutien indéfectible de ma famille et de mes amis de longue date. Ces liens m'ont permis de rester lucide dans les moments de doute de ces trois dernières années. Merci à mon amie Nathalie pour m'avoir inspiré et supporté pendant la rédaction. Merci encore pour mon pot de thèse, orchestré magistralement par ma mère Danielle, ma tante Anne et Nathalie : ce fut pour moi un moment exceptionnel.

Quant au labo... Travailler au LMT a été une expérience parfois difficile, souvent plaisante, toujours enrichissante. Je tiens à remercier toutes les personnes du laboratoire pour ces trois belles années, et tout particulièrement la *dream-team* du centre de calcul (Ben, l'homme trop bien sapé, Juju la Gueule d'Ange, J.C. (pas Jean-Claude, l'autre), Etienne dit « le menuiser lubrique », Felipe, consultant pour « C'est pas sorcier », Frisou, celui assis à droite de Dieu, et bien d'autres) avec qui j'ai beaucoup partagé, aussi bien au cours de discussions scientifiques (ou pas), que d'activités ludiques prohibées (tournois de sliding-CD, batailles de boulettes et autres tournois de volley indoor). Je pense que cette expérience restera gravée dans ma mémoire et je soupçonne qu'elle imprégnera à jamais ma personnalité.

Encore une fois, merci à tous ceux qui ont rendu ce travail possible.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
I Revue des modèles numériques pour le délaminage et des techniques de calcul intensif	7
1 Simulation numérique du délaminage	9
1 Modèles pour le délaminage	10
1.1 Description des stratifiés étudiés	10
1.2 Modèles numériques pour le délaminage	11
2 Problème de référence	23
3 Difficultés numériques	25
3.1 Taille des systèmes à résoudre	25
3.2 Nombre de pas de temps de l'analyse	25
3.3 Instabilités globales	26
2 Stratégies de calcul multiéchelles	29
1 Méthodes de résolution sur plusieurs échelles	30
1.1 Méthodes basées sur l'homogénéisation	30
1.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement	33
2 Méthodes de résolution directe	37
2.1 Méthodes multigrilles	38
2.2 Méthodes basées sur les décompositions de domaine	40
3 Méthode de décomposition de domaine mixte	53
1 Sous-structuration	54
1.1 Principe	54
1.2 Notations	55
1.3 Problème sous-structuré	56
1.4 Choix des espaces d'approximation	57
2 Introduction de l'échelle macroscopique	59
2.1 Séparation d'échelles	59
2.2 Base macroscopique	60
2.3 Admissibilité macroscopique des champs d'interface	63
3 Algorithme itératif de résolution	65
3.1 Principe	65

3.2	Etape linéaire	66
3.3	Etape locale	69
3.4	Convergence de la stratégie	71
3.5	Algorithme du code	72
4	Implantation de la méthode pour le calcul parallèle	74
4.1	Parallélisation des itérations LaTIn	74
4.2	Répartition des données	76
 II Proposition d'une stratégie de calcul à trois échelles pour la simulation du délaminage		77
4	Calculs multiéchelle pour le délaminage	79
1	Sous-structuration dans la longueur du stratifié	80
2	Critère d'erreur pour les non-linéarités d'interface	82
2.1	Principe	82
2.2	Résultats	84
2.3	Limites	85
3	Choix des directions de recherche	86
3.1	Généralités	86
3.2	Etude de comportements simples	89
3.3	Cas général	95
3.4	Bilan	101
5	Traitement des non-linéarités localisées	103
1	Enrichissement de la base macroscopique	107
1.1	Enrichissement polynomial	107
1.2	Base macroscopique discontinue	109
1.3	Base macroscopique complète	110
2	Sous-itérations dans les zones à forts gradients	113
2.1	Conditions aux limites du problème extrait	114
2.2	Problème extrait sous-structuré	115
2.3	Construction du problème macroscopique local	115
2.4	Construction adaptative du sous-problème	117
2.5	Parallélisation	118
2.6	Résultats	120
3	Enseignements et utilisation des concepts développés	120
6	Stratégie de calcul à trois échelles	123
1	Méthode BDD pour le problème macroscopique	126
1.1	Problème macroscopique condensé	126
1.2	Résolution du problème condensé	127
2	Approximation de la solution macroscopique	132
3	Extensibilité en mémoire et en temps	132

7	Contrôle du chargement	137
1	Contrôle de l'incrément de chargement	138
1.1	Influence de la discrétisation en temps	138
1.2	Principe de l'indicateur	139
1.3	Application : pas de temps adaptatif	139
2	Résolution de problèmes d'instabilité	140
2.1	Contrôle local du chargement	140
2.2	Algorithme de Newton à longueur d'arc	141
2.3	Intégration dans la stratégie de calcul parallèle	142
2.4	Optimisation de l'algorithme de Newton	143
2.5	Choix de la longueur d'arc	146
2.6	Analyse des résultats	146
	Conclusion	151
	Bibliographie	155

Introduction

Le secteur des transports est à l'origine du quart des émissions de gaz à effets de serre dans le monde. La part la plus importante est due au secteur automobile, dans lequel les industriels se concentrent sur la conception de moteurs moins polluants. Le trafic aérien ne représente qu'environ 3% de ces émissions, mais cette part augmente constamment, ce qui incite les législateurs mondiaux à imposer des quotas d'émissions aux compagnies aériennes. Ces contraintes, couplées à une forte pression économique, obligent les industriels à concevoir des avions moins gourmands en carburant et moins polluants. Outre les efforts consentis sur le rendement et la baisse des émissions de CO₂ des réacteurs, un effort très important est engagé afin d'alléger les aéronefs.

Les matériaux composites, et en particulier les stratifiés, viennent répondre à ce besoin de diminution de masse des appareils. En effet, l'orientation privilégiée de chaque pli composant le stratifié permet une conception spécifique pour chaque cas de chargement, et donc un allègement de masse par rapport à une conception en matériau métallique, dont les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace. Cette orientation est obtenue par agencement de fibres unidirectionnels très rigides, en carbone ou verre, dans une matrice plus souple en polymère (voir Figure 2). De nombreux exemples illustrent le caractère massif du développement de l'utilisation des composites stratifiés. Toujours dans le cadre de l'aéronautique, on pourra citer les 25% en masse de composites dans l'A380 d'Airbus, les 50% annoncés pour le futur Boeing 787 (voir Figure 1). Les deux avionneurs concurrents rivalisent sur leur capacité à alléger leurs futurs aéronefs en augmentant la proportion croissante de matériaux composites utilisés pour leur fabrication.

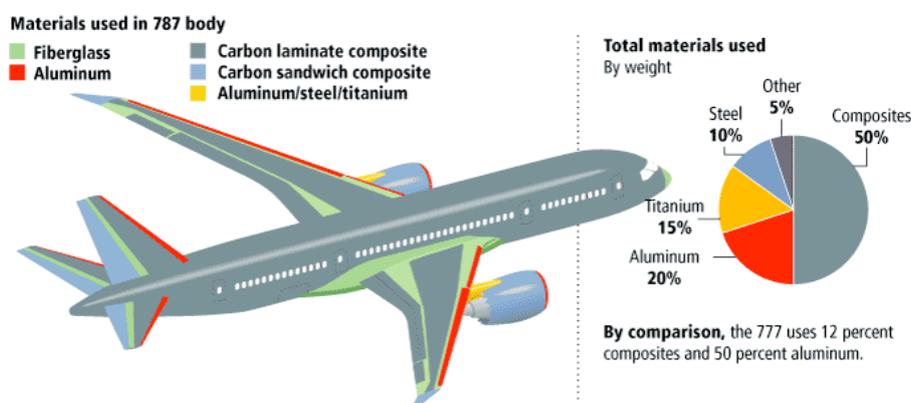


FIG. 1: Augmentation du pourcentage en masse des composites stratifiés utilisés pour la fabrication des avions de ligne

Cependant, l'utilisation de ces matériaux n'est pas sans inconvénient. En effet, la complexité de leur microstructure rend difficile la prédiction de leur comportement sous charge. Cette complexité de conception explique le nombre important d'études expérimentales [Highsmith et Reifsnider, 1982; Talreja, 1985; Guedra-Degeorges, 1993; Allix et al., 1998] et numériques [Hillerborg et al., 1976; Ladevèze et Le Dantec, 1992; Alfano et Crisfield, 2003; De Borst et Remmers, 2006] menées depuis le début des années quatre-vingts dans le but de prédire les limites à rupture des structures stratifiées (une revue de ces travaux peut être trouvée dans [Guedra-Degeorges et Ladevèze, 2008]). Ces études ont permis aux modélisateurs d'acquérir une très bonne connaissance des mécanismes de dégradation de ces matériaux. Pour preuve, des modèles basés sur cette connaissance de la micromécanique des stratifiés ont démontré leur prédictivité dans de nombreux cas d'application.

Les industriels, dans un souci de limitation des coûts, souhaitent remplacer une grande partie des essais matériels nécessaires au dimensionnement et à la certification des structures par des simulations numériques. Ils font donc preuve d'un intérêt croissant pour les calculs dans lesquelles ils ont placé une certaine confiance. Mais le passage de simulations de cas tests aux simulations de cas industriels oblige à relever un nouveau défi scientifique. En effet, l'utilisation des modèles microscopiques évoqués précédemment n'est, à l'heure actuelle, pas envisageable en terme de mémoire et de temps de calculs. La plupart des applications de prédiction du délaminage dans les structures sont donc réalisées grâce à une modélisation plus grossière du matériau, à l'échelle du pli. Notre approche se situe à l'intersection de deux familles de stratégies. La première consiste à représenter les zones interlaminaires par des modèles d'interface cohésive. L'introduction de lois constitutives adoucissantes [Hillerborg et al., 1976; Needleman, 1987; Schellenkens et De Borst, 1993; Alfano et Crisfield, 2001] pour décrire le comportement de ces interfaces permet de retrouver les résultats de la mécanique de la rupture en s'affranchissant de certaines difficultés numériques (remaillages, singularité de contrainte). La seconde propose de modéliser l'ensemble des dégradations dans le stratifié à l'échelle du pli, appelée échelle mésoscopique [Ladevèze et Le Dantec, 1992; Ladevèze et al., 2002]. Le stratifié est alors décrit comme un assemblage de deux constituants endommageables distincts : les plis, entités volumiques, et les interfaces, entités surfaciques séparant chaque couple de plis adjacents. Le comportement de chacune de ces entités est obtenu par homogénéisation du comportement de la microstructure, ce qui permet de s'assurer de la prédictivité des simulations réalisées [Ladevèze et al., 2006a]. Notre étude se focalise sur les dégradations d'interface, et le modèle de zone cohésive proposé par [Allix et Ladevèze, 1992] est retenu pour ce travail, ce qui peut être vu comme une simplification du « méso-modèle » de stratifié. Le problème de référence associé, permettant de simuler l'évolution en quasi-statique de la structure stratifiée au cours du temps, est posé dans le chapitre 1.

Même pour de petits cas tests, la simulation de structures stratifiées modélisées à

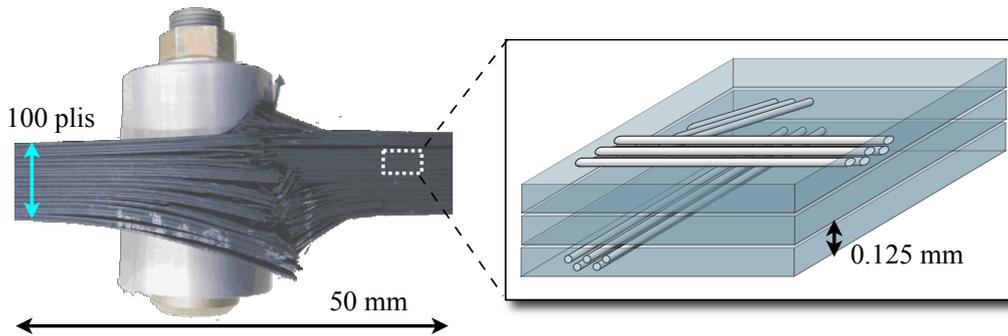


FIG. 2: Problème cible : liaison boulonnée à 100 plis (source :EADS)

cette échelle conduit à la résolution de problèmes non-linéaires de très grande taille, dont la résolution directe est délicate. Les dernières avancées autour des méthodes de décomposition de domaine et des stratégies multiéchelles nous fournissent des outils puissants permettant le calcul de structures stratifiées de taille raisonnable. Deux familles de méthodes adaptées à la résolution de grands problèmes non-linéaires peuvent être distinguées. Les premières s'appuient sur la résolution d'un problème global homogénéisé sur une grille grossière de la structure [Sanchez-Palencia, 1980; Fish et al., 1997; Feyel et Chaboche, 2000], éventuellement couplée à un enrichissement ou une réanalyse locale [Oden et al., 1999; Hughes et al., 1998; Ghosh et al., 2001; Melenk et Babuška, 1996; Moës et al., 1999]. Ces techniques très efficaces conduisent en général à traiter des problèmes complexes d'adaptativité. Le travail présenté ici traite de la résolution de *process zones* dans lesquelles la distinction entre un domaine où la solution évolue lentement, et un domaine où la discrétisation doit être raffinée pour capter les effets locaux, n'est pas forcément adaptée (voir Figure 2). Dans les zones de tailles réduites gouvernées par des effets tridimensionnels, l'utilisation de la deuxième famille de méthodes de calcul intensif, consistant en une résolution itérative exacte du problème à l'échelle fine, est donc justifiée pour simuler l'évolution des dégradations. Cette résolution est effectuée par des algorithmes parallélisables dont l'efficacité est améliorée par une résolution sur deux échelles couplées. Dans le cadre des méthodes basées sur les compléments de Schur, la propagation de l'information grossière est réalisée par introduction d'une contrainte imposée au processus itératif à l'aide d'un projecteur [Mandel, 1993; Farhat et Roux, 1994; Gosselet et Rey, 2006]. L'ensemble des méthodes de calcul précédemment évoquées sont présentées dans le chapitre 2.

La méthode de décomposition de domaine mixte basée sur l'algorithme LaTin [Ladevèze, 1985], introduit un concept original : la structure est divisée en sous-structures volumiques séparées par des interfaces surfaciques possédant un comportement propre. Elle se prête très naturellement à la résolution du problème posé : les comportements cohésifs sont représentés dans les interfaces de la méthode de décomposition de domaine mixte. En outre, la résolution du problème de référence par la stratégie proposée possède alors des attributs numériques intéressants. Grâce à la

sous-structuration retenue, les non-linéarités ne sont traitées que par la résolution de problèmes locaux au cours des itérations du solveur itératif LaTIn. Le nombre d'étapes d'assemblage nécessaires à la résolution du problème d'évolution est alors faible. Une version incrémentale de la stratégie de décomposition de domaine mixte pour le traitement de non-linéarités de surface est présentée dans le chapitre 3.

Une optimisation des paramètres numériques de la méthode pour assurer une convergence suffisamment rapide de la solution à chaque piquet de temps est proposée dans le chapitre 4. Le premier paramètre étudié est la sous-structuration dans la longueur du pli, qui doit être réalisée avec soin. Le deuxième paramètre est le choix de l'ensemble des opérateurs reliant les quantités statique et cinématique d'interface au cours des itérations, qui conditionne la convergence de l'algorithme d'une part, et son taux de convergence d'autre part. Une solution pratique « clés en main » est proposée pour gérer efficacement les différents types d'interfaces utilisées, compromis entre optimal numérique et simplicité d'application. Enfin, un critère d'erreur basé sur la non-vérification du comportement non-linéaire d'interface est défini. L'utilisation de ce critère d'arrêt des itérations du solveur LaTIn permet de contrôler la qualité des solutions obtenues.

La méthode de décomposition de domaine mixte est dotée d'un caractère multi-échelle garantissant son extensibilité numérique. Une séparation de champs microscopiques et macroscopiques est réalisée au niveau des interfaces [Ladevèze et Dureisseix, 2000; Ladevèze et Nouy, 2003]. L'écriture de conditions de raccord entre sous-structures portant sur ces champs macroscopiques d'interface conduit à la construction d'un problème homogénéisé global de la structure, et à sa résolution à chaque itération LaTIn. Ce concept a été appliqué avec succès dans des cas tels que la propagation de fissures dans des milieux homogènes 2D [Guidault et al., 2008] ou la simulation de la ruine de composites stratifiés à l'échelle microscopique [Ladevèze et al., 2006b]. Dans notre cas, la sous-structuration naturellement retenue a pour inconvénient une très mauvaise représentation de la solution en pointe de fissure par les quantités macroscopiques d'interface. Cette mauvaise séparation d'échelle entraîne une perte d'extensibilité numérique. En outre, le modèle utilisé conduit à la résolution de problèmes présentant des non-linéarités fortement localisées. Il en résulte une dégradation supplémentaire du taux de convergence de l'algorithme itératif. Une amélioration de la méthode permettant de recouvrer cette extensibilité est proposée dans le chapitre 5. Elle consiste en une résolution systématique d'un problème localisé autour du front de fissuration à chaque itération du solveur LaTIn.

La sous-structuration naturelle proposée soulève une deuxième difficulté numérique. Le nombre de sous-domaines augmente significativement avec la taille de la structure. En conséquence, la taille du problème homogénéisé portant sur les quantités macroscopiques d'interfaces entre sous-structures devient rapidement très élevée. Ce problème grossier ne peut donc pas être résolu de manière directe pour des cas industriels. On choisit de le résoudre de manière itérative par une méthode de décomposition de domaine primale [Mandel, 1993; Le Tallec, 1994]. Cette stratégie inclut également la résolution d'un problème sur une grille grossière, interprétée

comme une troisième échelle pour la méthode de décomposition de domaine mixte. L'introduction de cette troisième échelle permet une résolution approchée du problème macroscopique et la sélection des seules composantes macroscopiques ayant une influence globale sur la structure stratifiée. Les détails de cette amélioration de la stratégie sont décrits dans le chapitre 6.

Enfin, le chapitre 7 traite du contrôle du pas de chargement du schéma d'intégration temporel implicite. En particulier, le comportement local adoucissant de la structure implique la résolution de problèmes instables. Le passage des points critiques dans le cadre de la stratégie de décomposition de domaine à trois échelles est alors assuré par utilisation d'un algorithme à longueur d'arc permettant d'asservir le chargement global à l'ouverture de fissure.

Les chapitres de ce mémoire sont regroupés en deux grandes parties :

- Dans la première partie, on propose une revue des modèles numériques pour le délaminage et des techniques de calcul intensif aptes à la résolution des problèmes associés.
 - Le chapitre 1 dresse un état de l'art des modèles numériques pour la prévision du délaminage et pose le problème de référence à résoudre.
 - Le chapitre 2 propose une revue des méthodes de calcul intensif pour les problèmes non-linéaires d'évolution.
 - Le chapitre 3 décrit la méthode de décomposition de domaine mixte à deux échelles appliquée à la résolution du problème de référence.

- La seconde partie décrit les études et développements effectués dans cette thèse afin de proposer une stratégie de calcul parallèle adaptée.
 - Le chapitre 4 propose une optimisation des paramètres de la stratégie micro/macro pour les calculs de délaminage.
 - le chapitre 5 décrit la procédure de relocalisation permettant le traitement efficace des non-linéarités sur le front de délaminage.
 - Le chapitre 6 expose la résolution en parallèle du problème grossier de la méthode de décomposition de domaine à deux échelles.
 - Le chapitre 7 propose l'intégration d'un algorithme de résolution à longueur d'arc dans la stratégie à trois échelles obtenue.

Première partie

Revue des modèles numériques pour le délaminage et des techniques de calcul intensif

Simulation numérique du délaminage

Ce chapitre présente succinctement les stratifiés constituant les structures étudiées. Une revue non exhaustive des modèles existants pour la prédiction numérique du délaminage est ensuite proposée. Enfin, le choix d'un modèle de zone cohésive permet de poser le problème de référence à résoudre. Celui-ci sera la base des développements décrits dans les chapitres suivants.

Sommaire

1	Modèles pour le délaminage	10
1.1	Description des stratifiés étudiés	10
1.2	Modèles numériques pour le délaminage	11
2	Problème de référence	23
3	Difficultés numériques	25
3.1	Taille des systèmes à résoudre	25
3.2	Nombre de pas de temps de l'analyse	25
3.3	Instabilités globales	26

1 Modèles pour le délaminage

1.1 Description des stratifiés étudiés

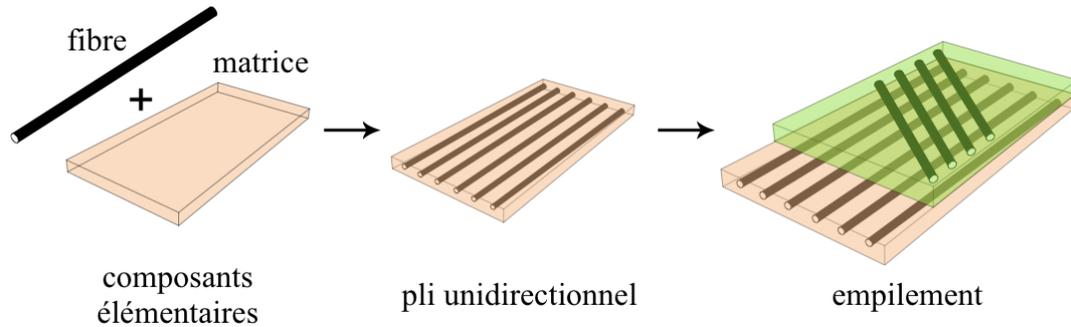


FIG. 1.1: Fibres et matrice composant les plis d'une stratifié

Les stratifiés utilisés sont composés d'un empilement de plis unidirectionnels. Chaque pli, d'une épaisseur de quelques dixièmes de millimètre, est obtenu par arrangement de fibres continues, en carbone ou en verre, dont le diamètre varie de 2 à 200 micromètres, orientées dans la même direction, et d'une matrice répartissant les contraintes entre les fibres (voir Figure 1.1). Le stratifié est défini par la donnée de l'orientation des plis successifs dans la séquence d'empilement (voir Figure 1.2). Ces matériaux sont aujourd'hui très utilisés dans l'industrie. Il est en effet possible d'adapter les propriétés mécaniques globales du stratifié, par le choix de la séquence d'empilement, au type de charge auquel il est soumis. Cependant la structure microscopique complexe de ces matériaux pose des problèmes de prédiction de la charge limite à rupture. Les démarches imposant à la structure de ne subir aucune dégradation en service sont encore largement employées et conduisent un surdimensionnement.

Les modes de dégradation des stratifiés ont donc fait l'objet de nombreuses études expérimentales et sont aujourd'hui bien compris. Parmi eux, le délaminage interlaminaire, c'est-à-dire la décohésion de plis adjacents à l'échelle macroscopique, est probablement le mécanisme de ruine le plus craint. Son étude phénoménologique est complexe. En effet, ce mode de ruine est fortement lié à des modes de dégradation observables à une échelle plus fine (décohésion fibres/matrices conduisant à des fissures transverses dans les plis à 90° , dégradations progressives des zones interlaminaires). Le délaminage conduit rapidement à une chute des propriétés mécaniques de la structure. Il a ainsi une influence considérable sur d'autres modes de ruine : les charges critiques à rupture et les charges critiques de flambage sont réduites, de même que la durée de vie en fatigue.

La section suivante propose une revue des méthodes développées depuis plusieurs dizaines d'années, visant à prédire numériquement l'initiation du délaminage et la propagation des fissures associées.

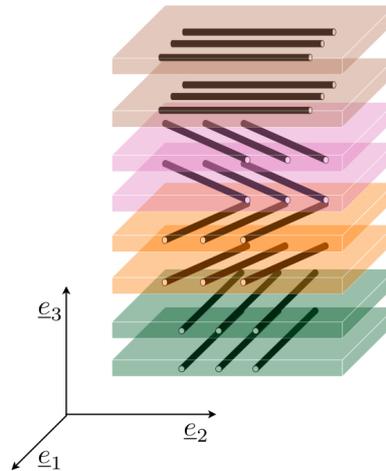


FIG. 1.2: Exemple d'empilement $[0_2 / \pm 45_2 / 90_2]_s$

1.2 Modèles numériques pour le délaminage

La section précédente souligne la nature complexe du délaminage. La simulation numérique de ce phénomène nécessite la conception de modèles permettant sa représentation précise. La validité de ces modèles est en grande partie déterminée par la facilité d'identification, à partir d'essais expérimentaux, des paramètres qu'ils introduisent. Ces essais (*Double Cantilever Beam (DCB)*, *Edge-Notched flexure (ENF)*, *Mixed-mode Bending (MMB)*, ...) sont conçus pour extraire des quantités globales caractérisant la résistance de l'empilement suivant les différents modes de sollicitation des zones interlaminaires (voir Figure 1.3).

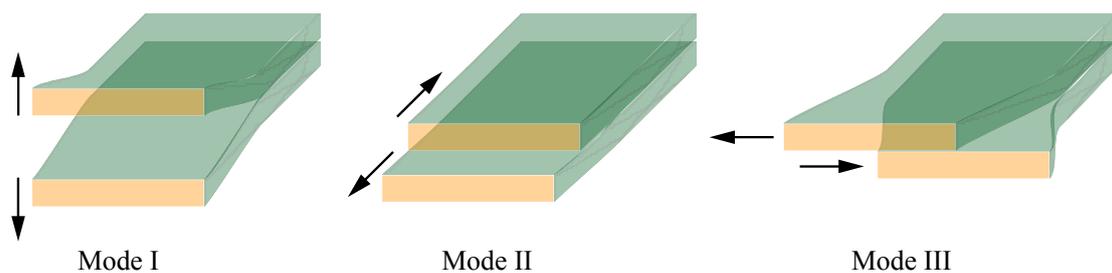


FIG. 1.3: Modes de rupture inter-laminaires

Classiquement, l'initiation et la propagation du délaminage sont traitées de manière distincte. La raison de cette séparation est la différence de nature des critères classiquement associés à l'activation ces deux phénomènes : l'initiation dépend principalement de l'état tridimensionnel des contraintes dans la matière, alors que la propagation est reliée aux quantités d'énergie nécessaires à une avancée élémentaire de la fissure. Naturellement, les premiers modèles numériques pour la simulation du

délaminage s'appuient sur des critères en contrainte. La faible capacité des ces modèles à prédire la propagation a conduit les modélisateurs à adapter la théorie de la mécanique de la rupture aux calculs de délaminage. Enfin, la dernière classe de modèles propose une représentation continue des mécanismes d'endommagement. Ces modèles sont capables de traiter à la fois l'initiation et la propagation des fissures.

1.2.1 Critère en contrainte

Champ de contrainte interlaminaire

Une grande partie des études analytiques et numériques sur l'initiation du délaminage a été menée sur le problème classique d'effet de bord libre [Pipes et Pagano, 1970], sa mise en œuvre expérimentale étant relativement simple. [Wang et Choi, 1982] montre qu'une concentration de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ apparaît dans une couche mince autour du bord libre. L'amplitude des contraintes dans cette zone dépend principalement de la séquence d'empilement et de l'épaisseur des plis. En particulier, les contraintes interlaminaires transverses $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$ (\underline{e}_3 étant la normale au plan du stratifié) sont liées à la différence de modules de Poisson et de modules de rigidités entre deux plis adjacents [Herakovich, 1981].

Dans les modèles usuels des stratifiés à l'échelle méso, les plis sont représentés par un milieu homogène, la zone de transition entre deux plis adjacents étant d'épaisseur nulle. En conséquence, le champ de contrainte dans la couche limite est singulier à l'intersection de la jonction entre deux plis et du bord du stratifié. [Pagano et Rybicki, 1974] proposent de modéliser cette zone de transition à l'échelle microscopique afin de relaxer la singularité et de déterminer le champ de contrainte. Cependant, les discrétisations alors nécessaires pour traiter numériquement le modèle sont trop fines pour permettre le calcul de structures de grande taille.

Contrainte effective

Une autre façon de procéder est d'utiliser le concept de « contrainte effective », introduit par [Withney et Nuismer, 1974]. L'idée est ici de d'obtenir une moyenne de la contrainte entre le bord et une certaine distance l . Les contraintes interlaminaires transverses effectives s'écrivent alors :

$$\underline{\underline{\bar{\sigma}}} \cdot \underline{e}_3 = \frac{1}{l} \int_0^l \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3 dl \quad (1.1)$$

De nombreux critères sont bâtis sur le calcul de la contrainte effective. Le critère introduit par [Brewer et Lagace, 1988] s'écrit par exemple :

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_{13}}{Z_{13}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_{23}}{Z_{23}} \right)^2 + \left(\frac{h_+(\bar{\sigma}_{33})}{Z_{33}^+} \right)^2 + \left(\frac{h_+(-\bar{\sigma}_{33})}{Z_{33}^-} \right)^2 = 1 \quad (1.2)$$

h_+ est la fonction d'extraction de la partie positive. Les constantes $(Z_{i3})_{i \in \{1,2,3\}}$ sont les résistances à l'initiation au délaminage selon les modes de sollicitation élémentaires. Dans la plupart des critères introduits, les parties positive $h_+(\sigma_{33})$ et négative

$h_+(-\sigma_{33})$ des contraintes interlaminaires normales sont traitées différemment. Certains critères proposent un retard de l'initiation du délaminage avec les contraintes interlaminaires normales positives.

La longueur caractéristique l de la couche limite doit être définie *a priori*, selon des considérations plus ou moins arbitraires. Son introduction permet néanmoins de rendre compte de la dépendance de la résistance à l'initiation, expérimentalement observée, à l'épaisseur des plis.

Limites

Les critères en contrainte sont inadaptés au traitement de la propagation des fissures initiées, et ce principalement car ces propagations sont gouvernées par des lois physiques tenant compte de l'énergie dissipée lors de l'avancée de fissure. Plus précisément, l'énergie relâchée par la structure lorsque la fissure croît d'une longueur élémentaire doit être suffisante à la création de la surface libre engendrée par cette propagation. Ce critère énergétique global est le critère de Griffith, base de la mécanique de la rupture.

1.2.2 Modèles basés sur la mécanique de la rupture

Critère de Griffith pour le délaminage

Les approches basées sur la mécanique de la rupture proposent d'assimiler la propagation de fissure interlaminaire à une rupture fragile : tout point de la structure sera donc considéré comme sain ou complètement délaminé.

Le critère de Griffith est appliqué pour déterminer si les taux de restitution d'énergie sont suffisants à la propagation de fissure. Ce critère s'écrit, pour des modes découplés :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad G_i \geq G_{i_c} \quad (1.3)$$

Les $(G_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ (respectivement $(G_{i_c})_{i \in \{1,2,3\}}$) sont les taux de restitution d'énergie (respectivement les taux de restitution d'énergie critiques) selon les modes de délaminage élémentaires.

Le couplage entre les modes peut être réalisé de plusieurs façons. La plus pratiquée consiste à introduire une « loi puissance » :

$$\left(\frac{G_1}{G_{1_c}}\right)^a + \left(\frac{G_2}{G_{2_c}}\right)^b + \left(\frac{G_3}{G_{3_c}}\right)^c \geq 1 \quad (1.4)$$

a , b et c sont des paramètres du modèle, permettant d'affecter plus ou moins de poids aux modes élémentaires pour le calcul de la propagation de fissure en modes mixtes.

Utilisation numérique

Deux familles de méthodes sont utilisées pour calculer les critères énergétiques globaux de la mécanique de la rupture dans un cadre éléments finis. Les premières approches sont globales, comme la méthode *J-Integrals* [Rice, 1968] basée sur le calcul d'intégrales de contour et la méthode dérivée *Equivalent Domain Integral* [Destuynder et al., 1983; Shivakumar et Raju, 1992] permettant de ramener ces intégrales de contour à des intégrales de domaine plus aisées à calculer numériquement, ou encore la méthode *Stiffness Derivative* [Parks, 1974], qui propose d'évaluer la variation de la matrice de rigidité éléments finis lors de la propagation de fissure. La deuxième famille de méthodes s'appuie sur le calcul de quantités locales pour évaluer les taux de restitution d'énergie. La méthode *Virtual Crack Extension* [Hellen, 1975] et la méthode CCT (*Crack Closure Technique*) [Irwin, 1957; Raju, 1987] en font partie. Nous nous concentrons sur les approches CCT, très largement employées dans les codes éléments finis pour leur facilité d'implantation, afin d'illustrer l'utilisation de la mécanique de la rupture pour simuler le délaminage.

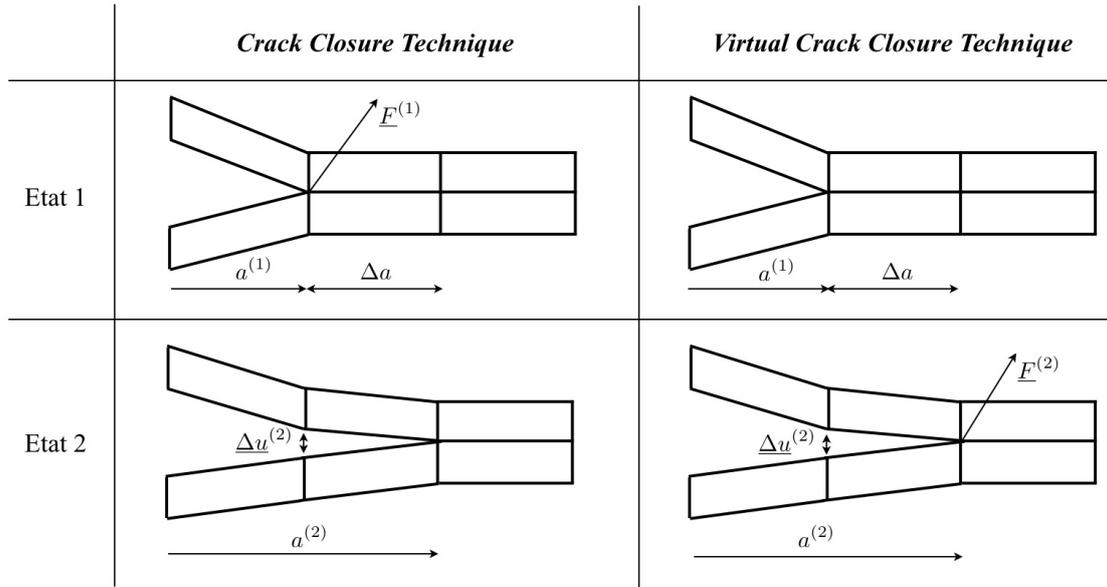


FIG. 1.4: Principe de la *Crack Closure Technique*

La méthode CCT est basée sur l'hypothèse que l'énergie libérée lorsque la fissure avance d'une longueur Δa est l'énergie $E_{\Delta a}$ nécessaire à refermer la fissure sur cette même longueur. Cette énergie est écrite comme un produit de réactions nodales pour une fissure fermée (état noté 1), par le saut de déplacement nodal observé lorsque la fissure est ouverte (état noté 2). En 2D, $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ étant la base de référence du plan, et en utilisant les notations définies sur la figure 1.4 :

$$E_{\Delta a} = \frac{1}{2} \underline{F}^{(1)} \cdot \underline{\Delta u}^{(2)} \quad (1.5)$$

Le taux de restitution d'énergie total est simplement évalué comme le rapport entre l'énergie calculée et la longueur de progression Δa supposée de la fissure. L'extraction des contributions modales du taux de restitution d'énergie est réalisée en calculant les énergies nécessaires à refermer la fissure selon les trois modes de dégradation élémentaires :

$$\forall i \in \{1, 3\}, \quad E_{\Delta a i} = \frac{1}{2} (\underline{F}^{(1)} \cdot \underline{e}_i) (\underline{\Delta u}^{(2)} \cdot \underline{e}_i) \quad (1.6)$$

La méthode VCCT (*Virtual Crack Closure Technique*) propose d'ajouter une hypothèse supplémentaire afin de n'effectuer qu'un des deux calculs nécessaires à la détermination du taux de restitution d'énergie : la fissure progresse de façon auto-similaire (ce qui signifie que les champs déplacement et contrainte en pointe de fissure gardent la même « forme » au cours de la propagation). L'équation (1.5) s'écrit alors directement sur la configuration ouverte de la fissure :

$$E_{\Delta a} = \frac{1}{2} \underline{F}^{(2)} \cdot \underline{\Delta u}^{(2)} \quad (1.7)$$

Après calcul des taux de restitution d'énergie élémentaires, le critère de Griffith en modes couplés est appliqué. Si nécessaire, la propagation est simulée en « déboutonnant » les noeuds du domaine fissuré.

L'écriture du champ de contrainte en pointe de fissure interlaminaire entre deux plis de caractéristiques mécaniques différentes fait apparaître un terme oscillant et évanescent. *A priori*, le critère de Griffith étant global, il est toujours applicable. Cependant, il est difficile d'extraire les contributions modales du taux de restitution d'énergie, qui demandent de s'appuyer sur la solution oscillante dans une zone proche de la pointe de fissure. Pour résoudre ce problème, de nombreuses solutions ont été proposées. Dans le cadre des méthodes CCT, une longueur caractéristique est introduite, en dessous de laquelle la fissure ne peut pas se propager.

Limites

Bien que son succès soit indéniable dans de nombreux cas d'application, la mécanique linéaire de la rupture présente certaines limites dans le cadre de la prédiction du délaminage :

- L'hypothèse de rupture fragile en pointe de fissure implique que la taille de la zone dans laquelle s'initie les mécanismes d'endommagement soit très faible devant celle de la zone dominée par la singularité de contraintes.
- L'initiation de fissure dans la partie saine du matériau n'est pas permise, la propagation ayant lieu à partir de défauts initiaux.
- Le calcul de problèmes de multi-fissuration est difficilement réalisable, le critère de propagation nécessitant une évaluation énergétique globale.
- La propagation de fissure dans le cadre des éléments finis classiques nécessite le remaillage régulier du front de fissure. L'utilisation de la méthode de partition de l'unité (voir Chapitre 2) peut permettre de s'affranchir de cet effort numérique important.

1.2.3 Modèles de zones cohésives

Afin de résoudre les difficultés liées à l'application directe de la mécanique de la rupture pour simuler le délaminage, deux types d'approches ont été développées. Les premières méthodes consistent en l'utilisation des modèles de zone cohésive [Dugdale, 1960; Barenblatt, 1962] pour décrire le comportement de l'interface entre deux plis [Hillerborg et al., 1976; Needleman, 1987; Tvergaard, 1990]. Les secondes approches, basées sur l'homogénéisation à l'échelle du pli des caractéristiques microscopiques du stratifié, sont étudiées dans la section suivante.

Principe

L'utilisation des modèles de zone cohésive suppose que les mécanismes dissipatifs sont circonscrits à certaines zones critiques, ici les jonctions entre les plis du stratifié. Une loi constitutive discrète est utilisée pour représenter le comportement adoucissant de ces interfaces (voir Figure 1.5). Celle-ci est composée en général de deux phases : une première phase élastique pendant laquelle l'interface ne subit pas de dégradation, et une seconde phase représentant la zone de transition entre une interface saine et une interface délaminée. Le caractère adoucissant du comportement est obtenu par un utilisation de modèles de plasticité à écrouissage négatif [Schellenkens et De Borst, 1993; Xu et Needleman, 1994] ou de modèles d'endommagement [Mi et al., 1998; Alfano et Crisfield, 2001]. Les liens établis avec la mécanique de la rupture et les critères d'initiation en contrainte permettent de simuler à la fois l'initiation et la propagation du délaminage.

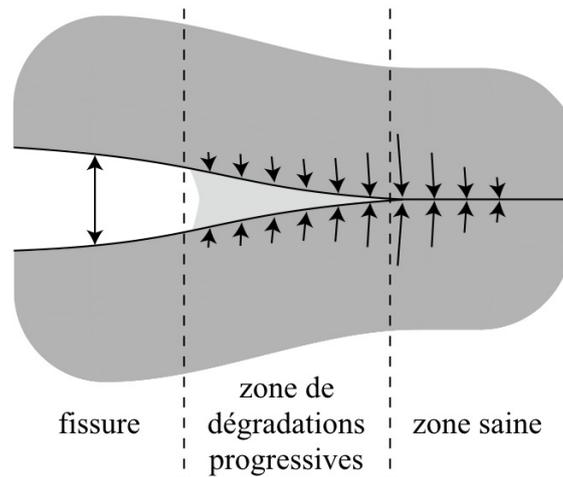


FIG. 1.5: Modèles de zone cohésive

L'équation constitutive discrète de l'interface relie les contraintes transverses $\underline{\sigma} = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3$ au saut de déplacement $\underline{\delta}$ entre les deux plis adjacents. De manière très

générale, elle peut être exprimée de la façon suivante :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\delta}, \underline{\sigma}^{\max}, \underline{\delta}^0, \underline{\delta}^{\max}) \quad (1.8)$$

Les paramètres définissant cette loi cohésive sont le pic de contrainte $\underline{\sigma}^{\max}$ associé au saut de déplacement $\underline{\delta}^0$, définissant l'initiation des dégradations, et le saut de déplacement final $\underline{\delta}^{\max}$, correspondant à une rigidité nulle de l'interface et donc à la rupture.

L'équivalence énergétique des modèles de zone cohésive et de la mécanique de la rupture est obtenue en spécifiant que l'énergie totale Γ_c dissipée en chaque point complètement endommagé de la zone cohésive est égale au taux de restitution d'énergie critique total G_c :

$$G_c = \Gamma_c = \int_{\underline{\delta}=0}^{\underline{\delta}^{\max}} \underline{\sigma} \cdot d\underline{\delta} \quad (1.9)$$

L'initiation des dégradations est obtenue lorsque les contraintes transverses dépassent le pic de contrainte. Ce paramètre doit donc être choisi avec soin afin d'éviter une dissipation d'énergie prématurée.

Une loi bilinéaire très utilisée, introduite par [Hillerborg et al., 1976] est représentée pour des modes de délaminage découplés sur la figure 1.6. [Alfano, 2006] montre que seuls le pic de traction et la quantité d'énergie dissipée localement ont une influence sur la solution obtenue par utilisation de différentes lois cohésives. On s'intéresse donc plus particulièrement à la loi cohésive bilinéaire reprise et développée par de nombreux auteurs [Schellenkens et De Borst, 1993; Alfano et Crisfield, 2001; Camanho et al., 2003] pour décrire les caractéristiques principales des modèles de zone cohésive.

Un modèle particulier

L'interface cohésive à loi constitutive bilinéaire décrite ici est basée sur l'utilisation d'un modèle d'endommagement. Par souci de clarté, ce modèle est tout d'abord décrit pour des modes de délaminage découplés. Les idées permettant d'obtenir un modèle traduisant le couplage de modes seront données dans un second temps.

L'irréversibilité des processus dissipatifs est d'abord prise en compte en « mémorisant » le chargement maximum local de l'interface sur l'histoire, dans les différents modes de dégradation. A un piquet de temps t_n donné du schéma d'intégration :

$$\begin{cases} \delta_3^{\max} = \max_{\tau \leq t_n} \{\delta_3, 0\} \\ \forall i \in \{1, 2\}, \quad \delta_i^{\max} = \max_{\tau \leq t_n} \{|\delta_i|\} \end{cases} \quad (1.10)$$

La loi de constitution de l'interface s'écrit alors, pour chaque mode de dégradation de l'interface :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \sigma_i = \begin{cases} k_i^0 \delta_i & \text{si } \delta_i^{\max} \leq \delta_i^0 \\ (1 - d_i) k_i^0 \delta_i & \text{si } \delta_i^0 \leq \delta_i^{\max} \leq \delta_i^f \\ 0 & \text{si } \delta_i^f \leq \delta_i^{\max} \end{cases} \quad (1.11)$$

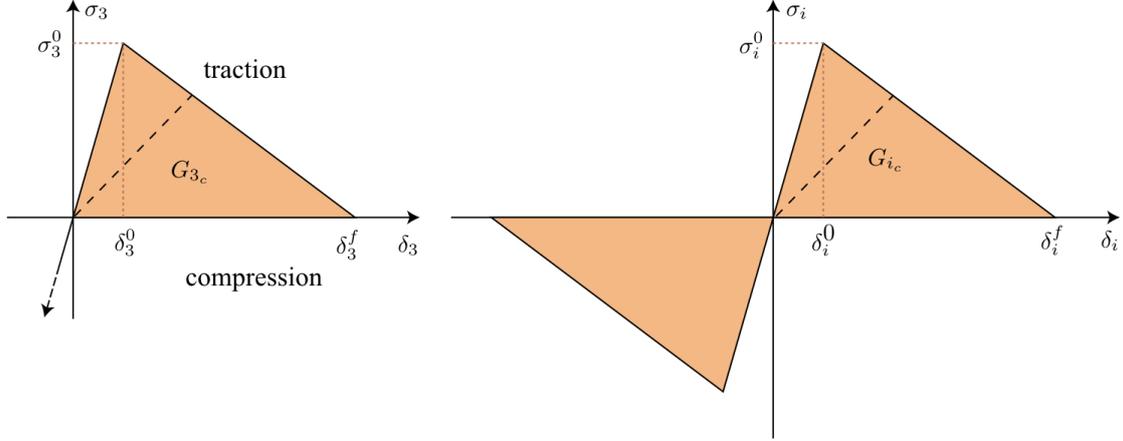


FIG. 1.6: Loi cohésive bilinéaire pour des modes élémentaires découplés. Traction/compression à gauche, cisaillement à droite ($i \in \{1, 2\}$)

où les indicateurs d'endommagement sont une fonction de l'histoire des sauts de déplacement selon chaque mode de dégradation :

$$d_i = \frac{\delta_i^f (\delta_i^{\max} - \delta_i^0)}{\delta_i^{\max} (\delta_i^f - \delta_i^0)} \quad (1.12)$$

Le couplage des modes pour l'initiation des dégradations est réalisé par évaluation d'une combinaison $\bar{\delta}$ des sauts de déplacement modaux :

$$\bar{\delta} = \sqrt{\delta_3^2 + \beta^2 \delta_s^2} \quad \text{où} \quad \delta_s^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 \quad (1.13)$$

L'écriture d'un critère en contrainte similaire à celui défini par l'équation (1.2) permet d'obtenir la valeur de $\bar{\delta}^0$ de $\bar{\delta}$ pour laquelle les mécanismes d'endommagement sont activés.

L'équivalence énergétique du modèle de zone cohésive avec la mécanique de la rupture pour la propagation de fissure en modes couplés est assurée en utilisant une loi de couplage similaire au critère défini par l'équation (1.4). Cette pratique permet d'obtenir la valeur $\bar{\delta}^f$ de $\bar{\delta}$ correspondant à la rupture complète du point considéré et respectant le critère de Griffith (1.9).

L'introduction de ces deux critères de couplage nécessite la réécriture de la relation de constitution (1.11) et des lois d'évolution (1.12). Cette étape fastidieuse n'est pas détaillée ici.

Le paramètre de rigidité initiale $(k_i^0)_{i \in \{1,2,3\}}$ est difficile à interpréter. Il est en général considéré comme un simple coefficient de pénalisation. Une valeur trop faible de ce paramètre change la répartition de contrainte en pointe de fissure, et entraîne une dissipation d'énergie prématurée. Il en résulte une perte d'équivalence

entre le modèle de zone cohésive et la mécanique de la rupture. Une valeur trop forte entraîne des problèmes de conditionnement liés à la discrétisation d'une solution quasi-singulière en pointe de fissure [De Borst et Remmers, 2006]. Ce mauvais conditionnement se traduit par l'apparition d'oscillations numériques sur le front de fissuration. Une étude du raffinement nécessaire en pointe de fissure en fonction de la rigidité initiale des interfaces cohésives utilisées est proposée dans [Alfano et Crisfield, 2001].

Localisation de l'endommagement

Lors de leur utilisation dans un cadre éléments finis, les modèles de zones cohésives souffrent d'un problème de dépendance de la solution au maillage. [De Borst, 2004] montre mathématiquement que l'utilisation d'une formulation en endommagement indépendante de la vitesse de chargement conduit à la construction d'un opérateur tangent non-défini positif. Il en résulte une perte d'ellipticité du problème d'évolution quasi-statique. Ce problème possède alors un nombre infini de solutions. En pratique, lorsque le chargement croît, on observe la concentration de l'endommagement dans les éléments déjà endommagés lors des pas de temps précédents.

Différentes techniques de régularisation sont proposées pour surmonter cette difficulté. [De Borst, 2004] propose d'ajouter une longueur caractéristique à la description de la zone cohésive. Une autre possibilité est d'utiliser une formulation basée sur un développement de degré supérieur du tenseur des déformations [Lasry et Belytschko, 1988]. Certains auteurs proposent de définir des lois constitutives non-locales pour caractériser le comportement des zones cohésives [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987]. En dynamique, la formulation de lois cohésives dépendant de la vitesse de chargement introduit naturellement une longueur caractéristique régularisante. Cette idée est à la base de la technique dénommée « effet retard » [Allix et Blanchard, 2006; Ladevèze et al., 2000], qui limite le taux d'endommagement maximum dans la structure. Ce taux est relié à une vitesse physique de coalescence de fissures à l'échelle microscopique dans le stratifié.

1.2.4 Modèle basé sur la mésomécanique des stratifiés

Ces méthodes offrent une alternative plus ancrée dans la mécanique que les techniques de zones cohésives, d'inspiration très numérique, pour pallier les difficultés de la mécanique de la rupture. Elles consistent en une homogénéisation des propriétés microscopiques du stratifié permettant de rapporter la description du comportement à l'échelle du pli, appelée échelle mésoscopique.

Mésoconstituants

Le modèle présenté dans [Ladevèze et Lubineau, 2002], initialement développé dans [Ladevèze, 1986], propose d'homogénéiser, à l'échelle mésoscopique, les dégradations microscopiques dans deux types d'entité « méso » : les plis, entités volu-

miques, et les interfaces entre plis, modélisées comme des milieux d'épaisseur nulle. Chacun de ces milieux peut subir des dégradations. La modélisation de leur comportement est formulée dans le cadre de la théorie des processus irréversibles (voir par exemple [Lemaître et Chaboche, 1985]) et est basée sur une théorie de l'endommagement anisotrope développée par [Ladevèze et Le Dantec, 1992]. Le but de cette modélisation est l'obtention d'un comportement *ad hoc* des deux constituants introduits, permettant par la suite la réalisation de simulations numériques valides, indépendamment de la structure étudiée. On se référera aux travaux de [Lévêque, 1998] pour l'identification des paramètres du « méso-modèle » sur des résultats d'essais expérimentaux.

Dégradation dans les plis à l'échelle « méso »

Le comportement des plis est gouverné par une loi constitutive anisotrope. L'introduction d'indicateurs d'endommagement et de plasticité, et des lois d'évolution les régissant permet de prendre en compte, à l'échelle du pli, des mécanismes de dégradation tels que les décohésions fibres/matrices, les microfissurations dans la matrice parallèlement aux fibres, et les ruptures de fibres.

Modélisation du délaminage interlaminaire dans les interfaces

La description de la dégradation dans les interfaces, selon le même formalisme que pour les plis, est proposée initialement dans [Allix, 1987] puis développée dans [Allix et Ladevèze, 1992; Allix et Corigliano, 1996] où une forme particulière de loi constitutive est retenue. Le modèle d'endommagement anisotrope proposé initialement introduit trois variables d'endommagement distinctes (une par mode de délaminage élémentaire). Le problème de l'identification en mode mixte amène [Allix et al., 1998] à proposer un modèle d'endommagement isotrope, piloté par une seule variable thermodynamique. L'utilisation d'un potentiel non-associé permet d'obtenir des taux de restitution d'énergie différents dans les trois modes. Les caractéristiques mécaniques de l'interface sont obtenues par homogénéisation dans l'épaisseur, supposée très faible devant les dimensions de la structure, de la zone interlaminaire constituée principalement de matrice [Daudeville et Ladevèze, 1993]. Une démarche d'homogénéisation asymptotique similaire pour obtenir une loi constitutive discrète d'interface est également effectuée dans [Schellenkens et De Borst, 1993; Billoët et al., 1994].

Pour certaines séquences d'empilement et certains cas de chargement, concentrer les dégradations sur les interfaces ne permet pas de représenter fidèlement la physique [Lévêque, 1998]. Il est non seulement nécessaire de prendre en compte les dégradations dans les plis [Guinard et al., 2002], mais également de coupler les endommagements des plis et des interfaces. Cette démarche conduit à l'écriture de lois d'évolution non-locales [Ladevèze et al., 2006a].

Nous présentons maintenant le modèle d'interface à endommagement isotrope

décrit dans [Allix et al., 1998] et utilisé pour les simulations présentées dans ce mémoire.

La dépendance du comportement de l'interface à l'orientation des plis adjacents, notés P et P' , est obtenue en décrivant ce comportement dans la base d'orthotropie donnée sur le schéma 1.7 (sur cette figure, $\underline{n}_P = \underline{e}_3$, ces notations étant précisées dans la section 2).

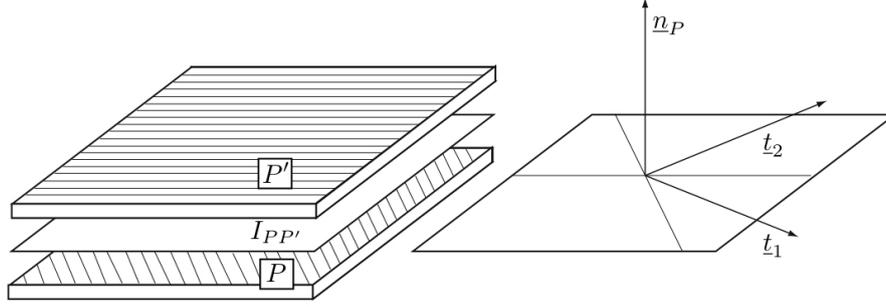


FIG. 1.7: Base d'orthotropie des interfaces cohésives

L'énergie surfacique de l'interface endommagée est écrite, dans sa base d'orthotropie ($\underline{e}_3, \underline{t}_1, \underline{t}_2$) :

$$e_d = \frac{1}{2} \left(\frac{h_+(-\sigma_{33})^2}{k_3^0} + \frac{h_+(\sigma_{33})^2}{k_3^0(1-d_3)} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_1^0(1-d_1)} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0(1-d_2)} \right) \quad (1.14)$$

Le traitement séparé des contraintes de traction et de compression suivant \underline{e}_3 permet de représenter l'évolution unilatérale des dégradations de l'interface en mode I. k_3^0 , k_1^0 et k_2^0 sont les rigidités de l'interface non-endommagée, respectivement en traction/compression suivant \underline{e}_3 et en cisaillement selon \underline{t}_1 et \underline{t}_2 . Comme évoqué dans la section précédente, ces rigidités sont reliées à des grandeurs physiques de la zone interlaminaire, constituée principalement de matrice. Trois indicateurs d'endommagement sont introduits pour représenter les dégradations de l'interface dans les différents modes de délaminage sollicités.

L'évolution des indicateurs d'endommagement est gouvernée par les forces thermodynamiques associées à chaque mode d'endommagement :

$$Y_i = -\frac{\partial e_d}{\partial d_i} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} Y_3 &= \frac{1}{2} \frac{h_+(\sigma_{33})^2}{k_3^0(1-d_3)^2} \\ Y_1 &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_{31}^2}{k_1^0(1-d_1)^2} \\ Y_2 &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0(1-d_2)^2} \end{cases} \quad (1.15)$$

Ces variables représentent l'énergie dissipée par un endommagement élémentaire de l'interface. La dissipation volumique, nécessairement positive pour respecter le

second principe de la thermodynamique, s'écrit alors :

$$\phi = Y_3 \dot{d}_3 + Y_1 \dot{d}_1 + Y_2 \dot{d}_2 \quad (1.16)$$

L'irréversibilité des processus de dissipation est pris en compte en reliant les variables d'endommagement au maximum Y_t sur l'histoire d'une combinaison des forces thermodynamiques $(Y_{i|\tau})_{i \in \{1,2,3\}}$ pour $\tau \leq t_n$:

$$Y_t = \max_{(\tau \leq t_n)} (Y_{3|\tau}^\alpha + \gamma_1 Y_{1|\tau}^\alpha + \gamma_2 Y_{2|\tau}^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.17)$$

Les lois d'évolution usuelles sont introduites :

$$d_1 = d_2 = d_3 = \min(w(Y_t), 1) \quad (1.18)$$

$$\text{où } w(Y_t) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{h_+(Y_t - Y_0)}{Y_c - Y_0} \right)^n$$

Ces lois d'évolution rendent la formulation de l'endommagement de l'interface isotrope. Les paramètres α , γ_1 et γ_2 permettent l'identification des poids relatifs des énergies en mode 1, 2 et 3 pour la propagation en modes couplés. Y_0 définit la charge à partir de laquelle les dégradations sont initiées dans l'interface. Le paramètre n confère à l'interface son caractère plus ou moins fragile.

De même que pour les modèles de zone cohésive décrits précédemment, les paramètres introduits doivent être identifiés pour l'initiation du délaminage et la propagation en modes couplés. En particulier, le critère de Griffith doit être vérifié pour chaque mode de délaminage, afin d'obtenir l'équivalence énergétique du modèle d'interface cohésive et de la mécanique de la rupture :

$$\begin{cases} G_{3c} = Y_c \\ \forall i \in \{1, 2\}, \quad G_{ic} = \frac{Y_c}{\gamma_i} \end{cases} \quad (1.19)$$

L'équivalence en modes couplés est obtenue sous la forme d'une « loi puissance » similaire à celle décrite par l'équation (1.4). Plus de détails sur l'identification des paramètres du modèle peuvent être trouvés dans [Lévêque, 1998].

Il a été supposé ici que les rigidités d'interfaces traitées sont suffisamment élevées pour représenter correctement la concentration de contraintes en pointe de fissure pour $Y_c = 0$. On prendra de plus une valeur usuelle de 0,5 pour le paramètre n . Ces deux choix de paramètre conduisent à l'utilisation de lois cohésives quadratiques selon chacun des modes de dégradation de l'interface.

■ Remarque 1.1 *Comme nous l'avons évoqué précédemment, la validité des simulations de délaminage pour lesquelles les dégradations sont concentrées dans les interfaces peut être remise en cause dans certains cas de charge et de séquence d'empilement. Notre travail est donc une première étude permettant de démontrer la faisabilité des calculs tridimensionnels de délaminage sur des structures stratifiées de taille importante.*

2 Problème de référence

La structure étudiée \mathbf{E} , occupant un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, est composée d'un empilement de N_P plis P occupant un domaine Ω_P tel que $\bigcup_P \Omega_P = \Omega$ (voir Figure 1.8). La frontière de ce domaine est notée $\partial\Omega_P$. Les champs déplacement \underline{u}_P de chaque pli P sont recherchés dans l'espace \mathcal{U}_P . \mathcal{U}_P^0 est l'espace vectoriel associé à \mathcal{U}_P . La contrainte de Cauchy dans P , recherchée dans l'espace \mathcal{S}_P , est notée $\underline{\underline{\sigma}}_P$ et la partie symétrique du gradient du déplacement est notée $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_P)$. La normale à la frontière $\partial\Omega_P$ de P , extérieure à P , est notée \underline{n}_P .

Pour chaque couple de plis adjacents P et P' , on définit une interface $I_{PP'}$ telle que $I_{PP'} = \partial\Omega_P \cap \partial\Omega_{P'}$. L'ensemble des plis adjacents au plis P est noté \mathbf{V}_P .

Une distribution d'efforts \underline{F}_d est imposée sur la partie $\partial\Omega_F$ de $\partial\Omega$. Sur le complémentaire $\partial\Omega_u = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_f$, on impose une distribution de déplacements \underline{U}_d . Les efforts de volume sont notés \underline{f}_d .

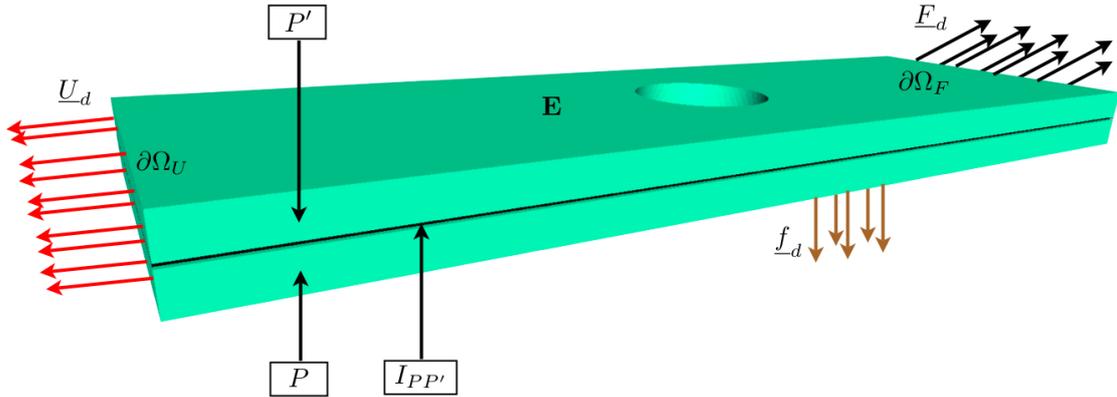


FIG. 1.8: Problème de référence

La structure est étudiée sous l'hypothèse des petites perturbations. Son évolution est supposée quasi-statique et isotherme. Le problème d'évolution est résolu pas à pas, en utilisant un schéma d'intégration temporelle implicite. A chaque piquet de temps de l'analyse t_n , où $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ le problème de référence à résoudre est le suivant :

Trouver $s_{ref} = (s_P)_{P \in \mathbf{E}}$, où $s_P = (\underline{\sigma}_P, \underline{u}_P) \in \mathcal{S}_P \times \mathcal{U}_P$, vérifiant les équations suivantes :

- Admissibilité cinématique de la structure :

$$\forall P \in \mathbf{E}, \text{ en tout point de } \partial\Omega_P \cap \partial\Omega_u, \quad \underline{u}_P = \underline{U}_d \quad (1.20)$$

- Equilibre global de la structure \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} & \forall (\underline{u}_P^*)_{P \in \mathbf{E}} \in \prod_{P \in \mathbf{E}} \mathcal{U}_P^0, \\ & \sum_{P \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_P} \text{Tr} \left(\underline{\sigma}_P \underline{\epsilon}(\underline{u}_P^*) \right) d\Omega - \sum_{P \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_P} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_P^* d\Omega \\ & - \sum_{P \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_P \cap \partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_P^* d\Gamma + \sum_{P \in \mathbf{E}} \sum_{\substack{P < P' \\ P' \in \mathbf{V}_P}} \int_{I_{PP'}} \underline{\sigma}_P \underline{n}_P \cdot [\underline{u}]_P^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

- Comportement orthotrope linéaire des plis :

$$\forall P \in \mathbf{E}, \text{ en tout point de } \Omega_P, \quad \underline{\sigma}_P = \mathbf{K}_P \underline{\epsilon}(\underline{u}_P) \quad (1.22)$$

- Equation constitutive des interfaces cohésives :

$$\begin{aligned} & \forall P \in \mathbf{E}, \forall P' \in \mathbf{V}_P, \text{ en tout point de } I_{PP'} \\ & \mathcal{A}_{PP'}([\underline{u}]_P, \underline{\sigma}_P \underline{n}_P) = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

La notation $P < P'$ signifie que le numéro associé au pli P' est plus grand que celui associé au pli P dans la numérotation globale de la séquence d'empilement du stratifié. Le saut de déplacement \underline{u}_P sur l'interface $I_{PP'}$ est défini par : $[\underline{u}]_P = \underline{u}_{P'} - \underline{u}_P$. La relation $\mathcal{A}_{PP'}$ établit un lien entre la variable primale d'interface $[\underline{u}]_P$, et la variable duale $\underline{\sigma}_P \underline{n}_P$. Elle dépend de l'histoire du chargement local, et s'écrit explicitement :

$$\underline{\sigma}_P \cdot \underline{n}_P - \mathbf{K}_{PP'} \cdot [\underline{u}]_P = 0 \quad (1.24)$$

Dans la base $(\underline{n}_P, \underline{t}_1, \underline{t}_2)$ définie sur la figure 1.7, l'opérateur de rigidité local s'exprime en fonction des variables internes introduites dans le modèle d'interface cohésive :

$$\mathbf{K}_{PP'} = \begin{pmatrix} \left(1 - h_+([\underline{u}]_P \cdot \underline{n}_P) d_3\right) k_n^0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - d_1) k_1^0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - d_2) k_2^0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

La dépendance de cet opérateur à l'histoire du chargement est induite par les lois d'évolutions des indicateurs d'endommagement $(d_i)_{i \in \{1,2,3\}}$. Ces lois sont données dans la section 1.2.

3 Difficultés numériques

Les difficultés numériques évoquées dans l'introduction de ce travail peuvent être précisées. On supposera que le problème non-linéaire d'évolution est résolu, de manière très classique, par un schéma incrémental implicite d'intégration en temps, associé à un algorithme de résolution de problèmes non-linéaires de type Newton-Raphson.

3.1 Taille des systèmes à résoudre

La figure 1.9 présente un exemple de calcul limitant pour un solveur direct sur une machine conventionnelle possédant 2 Go de mémoire. La structure, de dimensions $7,5 \times 2,5 \times 0,5$ mm est composée de quatre plis de 0,125 mm d'épaisseur et de séquence d'empilement $[0/90]_s$. La discrétisation du problème est homogène : on n'effectue pas de raffinement local *a priori*, les fronts de fissures étant libres de se propager dans l'ensemble de la structure. Trois à cinq éléments sont utilisés pour représenter l'évolution du déplacement dans l'épaisseur du pli. Un opérateur de rigidité linéarisé et assemblé de cette structure occupe environ 1,8 Go en mémoire, pour 540 000 degrés de liberté.

Pour la *process zone* cible représentée Figure 2, de dimensions $50 \times 50 \times 12,5$ mm, en utilisant la même finesse de maillage que celle du cas test à quatre plis, on évalue le nombre de degrés de liberté nécessaires à la discrétisation du problème de délaminage à 180.10^6 . Trois mille cœurs de 2 Go de mémoire seraient nécessaires pour effectuer ce calcul. Compte-tenu de l'augmentation spectaculaire des puissances des architectures de calcul parallèle, la résolution d'un tel problème est tout à fait envisageable à court terme.

■ **Remarque 3.1** *La discrétisation fixée dans l'épaisseur du pli nous semble raisonnable pour représenter l'effet des concentrations de contrainte en pointe de fissure. L'influence de ce choix sur la qualité des solutions obtenues en fonction des rigidités relatives des interfaces cohésives utilisées et des plis du modèle de stratifié n'est pas discutée dans ce travail.*

3.2 Nombre de pas de temps de l'analyse

Outre la quantité imposante de données à stocker pour résoudre des problèmes de délaminage de structures modélisées à l'échelle mésoscopique sur des cas industriels, les temps de calcul nécessaires pour effectuer ces résolutions posent une nouvelle difficulté. En effet, les algorithmes de résolution de problèmes non-linéaires classiques ne convergent que si la solution recherchée est relativement proche de l'initialisation. Un nombre de pas de temps très conséquent est donc nécessaire pour résoudre les problèmes de délaminage. Plus précisément, le comportement local adoucissant de la structure doit être représenté par une discrétisation fine en temps afin de capter les

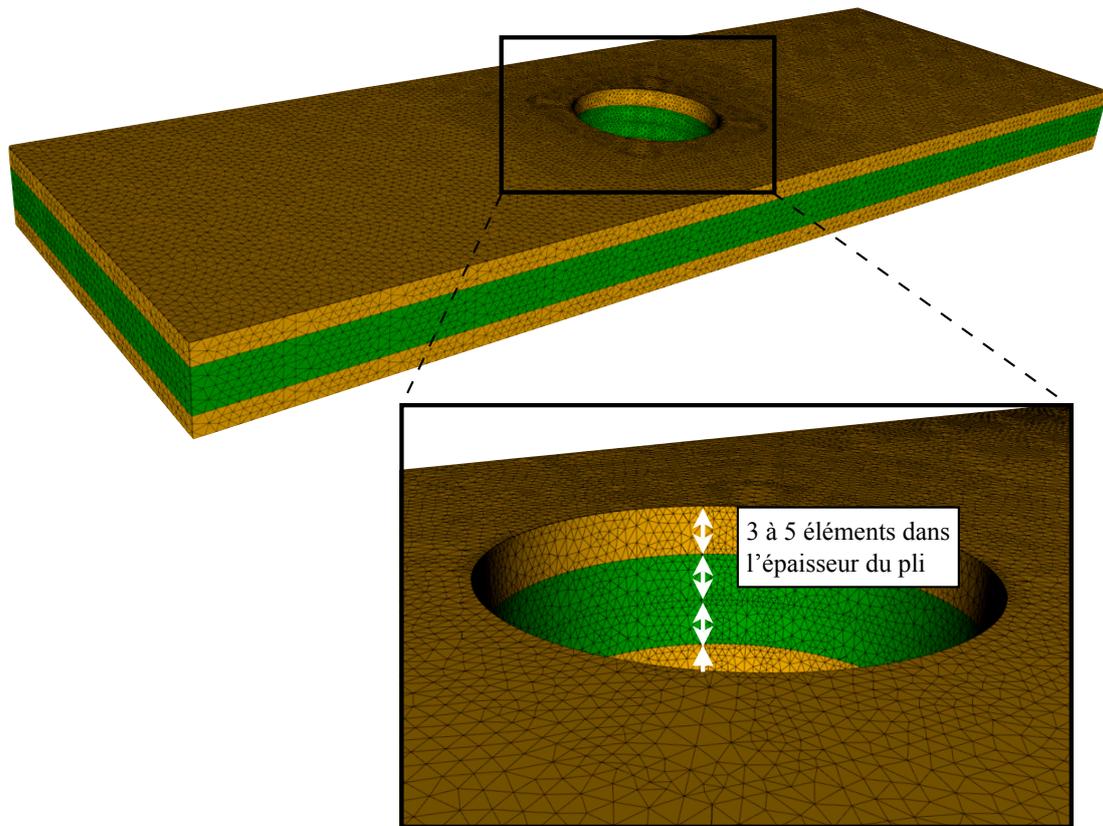


FIG. 1.9: Problème limitant sur une machine de calcul conventionnelle

états d'équilibre locaux de la structure. En supposant que quatre pas de temps sont nécessaires pour capter d'une part le pic de contrainte, et d'autre part la dissipation d'énergie associés à la loi cohésive locale de chaque élément d'interface, et que le front de fissure progresse d'élément en élément, la simulation d'une avancée de fissure sur toute la longueur du problème cible représenté sur la figure 2 nécessiterait cinq mille pas de temps.

La représentation de ces nombreux états par l'algorithme de résolution implique une importante quantité d'opérations de réassemblage d'opérateurs de rigidité globaux, ce qui conduit à des temps de calculs prohibitifs.

3.3 Instabilités globales

Le comportement localement adoucissant de la structure implique la résolution de problèmes d'instabilités globales (*snap-back*, *snap-trough*) et de bifurcations de solutions. Ces instabilités n'apparaissent pas que dans certains cas pathologiques. En fait, il est même difficile de trouver une séquence d'empilement et un cas de chargement conduisant à un problème de suivi de fissure stable. Le cas test à quatre plis présenté dans le paragraphe précédent, chargé en traction, présente très rapide-

ment un comportement global de type *snap-back*. Cette instabilité correspond à une rupture locale de la structure qui ne conduit pas directement à la ruine complète du stratifié (voir Chapitre 7). Elle doit donc être traitée de manière appropriée afin de quantifier la charge limite à rupture du stratifié.

La non-unicité de la solution des problèmes de délaminage est un problème difficile à résoudre, auquel on essaiera de répondre, au moins partiellement, au cours des développements décrits dans ce mémoire (Chapitres 4, 5 et 7).

Stratégies multiéchelles et solveurs parallèles

On dresse dans ce chapitre un état de l'art non exhaustif des méthodes multiéchelles potentiellement adaptées au calcul de délaminage de composites stratifiés modélisés à l'échelle mésoscopique.

Sommaire

1	Méthodes de résolution sur plusieurs échelles	30
1.1	Méthodes basées sur l'homogénéisation	30
1.2	Méthodes de superposition et d'enrichissement	33
2	Méthodes de résolution directe	37
2.1	Méthodes multigrilles	38
2.2	Méthodes basées sur les décompositions de domaine	40

1 Méthodes de résolution sur plusieurs échelles

Les méthodes présentées dans cette section ont pour base la résolution d'un problème grossier sur la structure, appelé problème macroscopique, construit par homogénéisation locale de la microstructure. Ces problèmes grossiers ont l'avantage de représenter le comportement global de la structure par un nombre réduit de degrés de liberté. Cependant, si les phénomènes d'intérêt interviennent à une échelle inférieure à l'échelle macroscopique, il est nécessaire de redescendre, au moins localement, aux propriétés microstructurales. Chacune des méthodes décrites dans cette section apporte des réponses originales, éventuellement complémentaires, au problème complexe du dialogue entre les échelles macroscopique et microscopique de la structure.

1.1 Méthodes basées sur l'homogénéisation

La plupart des stratégies multiéchelles reposent sur le principe d'homogénéisation. Les méthodes d'homogénéisation les plus utilisées sont les techniques d'analyse de Volumes Elémentaires Représentatifs (VER). Elles consistent en une série d'essais numériques sur un échantillon représentatif de la microstructure, ayant pour but la construction d'un comportement moyenné de cet échantillon. Le problème posé à l'échelle macroscopique sur des champs inconnus moyens est résolu en utilisant le modèle macroscopique construit, supposé représenter les propriétés de la structure à l'échelle fine. Le retour aux propriétés locales de la structure est effectué en résolvant des problèmes sur le VER, avec pour chargement la solution du problème macroscopique au point du domaine considéré.

1.1.1 Théorie de l'homogénéisation périodique

La théorie de l'homogénéisation asymptotique propose un cadre mathématique strict permettant de définir les transferts entre les deux échelles considérées dans le cadre des techniques d'analyse sur VER.

Principe

On restreint l'étude à la résolution d'un problème d'élasticité linéaire. La microstructure consiste en la répétition ϵY -périodique d'un VER noté E . Le VER est agrandi par une homothétie θ de rapport ϵ^{-1} , permettant de passer de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique (voir Figure 2.1). La variable de position \underline{x} décrit l'échelle macroscopique tandis que \underline{y} décrit l'échelle microscopique. La relation entre ces deux variables s'écrit :

$$\underline{x} = \epsilon(\underline{y} + \mathbf{A}\underline{Y}) \quad \text{où } \mathbf{A} \in \mathbb{Z}^d \quad (2.1)$$

Le paramètre d'homothétie étant supposé infiniment petit, le déplacement solution est une fonction des variables supposées indépendantes \underline{x} et \underline{y} et vérifie la

\underline{Y} -périodicité par rapport à \underline{y} :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{u}(\underline{x}, \underline{y} + \mathbf{A}\underline{Y}) \quad (2.2)$$

La solution du problème est alors recherchée sous la forme d'un développement asymptotique en ϵ , tous les termes étant \underline{Y} -périodiques en \underline{y} :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \underline{u}_i(\underline{x}, \underline{y}) \quad (2.3)$$

La résolution des équations du problème d'élasticité linéaire nécessite la différenciation du déplacement solution, qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{u}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \underline{y}} \underline{u}(\underline{x}, \underline{y}) \quad (2.4)$$

La résolution des équations locales d'équilibre et de comportement conduit ainsi à différents problèmes en puissances de ϵ distinctes.

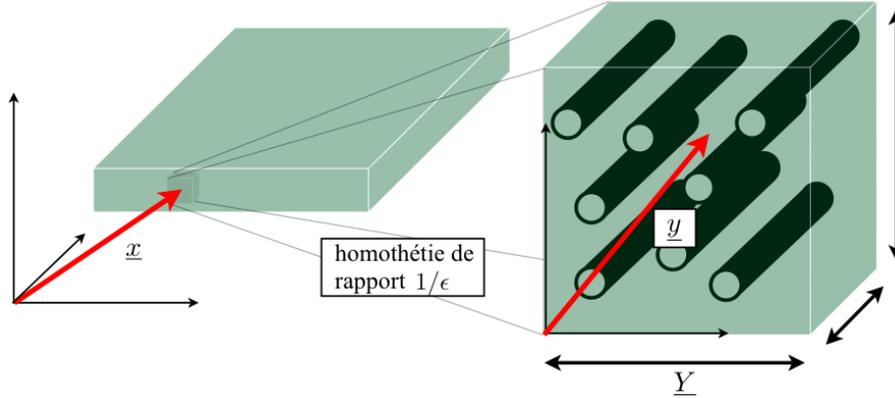


FIG. 2.1: Coordonnées macroscopiques sur la structure et microscopiques sur le VER

Problèmes aux différentes échelles

■ **Problème en ϵ^{-1} :** $\text{div}_{\underline{y}}(\mathbf{K}_{\underline{\epsilon}_{\underline{y}}}(u_0)) = 0$. Ce problème montre que le déplacement macroscopique \underline{u}_0 est indépendant de \underline{y} . On notera $\underline{\epsilon}_0 = \underline{\epsilon}_{\underline{x}}(u_0)$

■ **Problème en ϵ :** $\text{div}_{\underline{y}}(\mathbf{K}_{\underline{\epsilon}_{\underline{y}}}(u_1)) = -\text{div}_{\underline{y}}(\mathbf{K}_{\underline{\epsilon}_0})$. Ce problème est posé sur le VER E et consiste en la détermination d'un champ déplacement microscopique \underline{u}_1 \underline{Y} -périodique sous le chargement $\underline{\epsilon}_0$ uniforme :

$$\text{Trouver } \underline{u}_1 \text{ } \underline{Y} \text{ - périodique sur } E \text{ tel que } \forall \underline{u}^* \text{ } \underline{Y} \text{ - périodique sur } E : \quad (2.5)$$

$$\int_E \text{Tr} \left(\underline{\epsilon}_{\underline{y}}(\underline{u}_1) \mathbf{K}_{\underline{\epsilon}_{\underline{y}}}(\underline{u}^*) \right) d\Omega = - \int_E \text{Tr} \left(\underline{\epsilon}_0 \mathbf{K}_{\underline{\epsilon}_{\underline{y}}}(\underline{u}^*) \right) d\Omega$$

On construit alors par linéarité un opérateur de localisation $\mathbf{H}(\underline{y})$ reliant la déformation locale à la déformation macroscopique :

$$\underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1) = \mathbf{H}(\underline{y})\underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (2.6)$$

■ **Problème en** ϵ^{-1} : $\text{div}_x(\mathbf{K}\underline{\underline{\epsilon}}_0) + \text{div}_y(\mathbf{K}(\underline{\underline{\epsilon}}_x(\underline{u}_1) + \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_2))) + \underline{f}_d = 0$. Seule la condition d'existence d'une solution \underline{u}_2 à ce problème est exploitée et conduit à la définition du problème macroscopique portant sur des quantités moyennées sur le VER. En notant la déformation à l'ordre 0 : $\underline{\underline{\epsilon}}^m = \underline{\underline{\epsilon}}_0 + \underline{\underline{\epsilon}}_x(\underline{u}_1)$ et la contrainte à l'ordre 0 : $\underline{\underline{\sigma}}^m = \mathbf{K}\underline{\underline{\epsilon}}^m$:

$$\int_E (\text{div}_x(\underline{\underline{\sigma}}^m) + \underline{f}_d) d\Omega = 0 \quad (2.7)$$

On note, $\langle \cdot \rangle_E = \frac{1}{\text{vol}(E)} \int_E \cdot d\Omega$ la moyenne sur le VER. D'où l'expression de l'équilibre macroscopique moyenné sur E :

$$\langle \text{div}_x(\underline{\underline{\sigma}}^m) \rangle_E + \langle \underline{f}_d \rangle_E = 0 \quad (2.8)$$

soit en notant $\underline{\underline{\sigma}}^M = \langle \underline{\underline{\sigma}}^m \rangle_E$,

$$\text{div}_x(\underline{\underline{\sigma}}^M) + \langle \underline{f}_d \rangle_E = 0 \quad (2.9)$$

Le comportement macroscopique est également obtenu en moyenne sur E :

$$\underline{\underline{\sigma}}^M = \langle \mathbf{K}\underline{\underline{\epsilon}}^m \rangle_E = \langle \mathbf{K}(\mathbf{I}_d + \mathbf{H}(\underline{y}))\underline{\underline{\epsilon}}_0 \rangle_E = \langle \mathbf{K}(\mathbf{I}_d + \mathbf{H}(\underline{y})) \rangle_E \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (2.10)$$

ce qui permet de fermer le problème macroscopique global portant sur les inconnues $(\underline{\underline{\sigma}}^M, \underline{u}_0)$.

La théorie proposée fournit donc un cadre mathématique aux méthode d'homogénéisation sur VER. Elle repose cependant sur des hypothèses très contraignantes de périodicité et de rapport d'échelle élevé. En particulier, ces hypothèses ne sont pas respectées dans les zones de bord. Des traitements spécifiques de ces « couches limites » ont été proposés par [Auriel et al., 1982; Dumontet, 1986].

1.1.2 Homogénéisation périodique pour les problèmes non-linéaires

Deux types d'extension permettent l'utilisation de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques pour résoudre des problèmes non-linéaires. Les premières proposent de réaliser le développement asymptotique de toutes les variables du problème : déformations anélastiques [Suquet, 1987; Devries et al., 1989], variables d'endommagement [Fish et al., 1997].

Les autres types d'extension permettent de réaliser des calculs microscopiques non-linéaires sur le VER ou sur un ensemble de VER afin de déterminer le comportement homogénéisé en chaque point d'intégration du maillage grossier (dans le

cas d'une résolution du problème macroscopique par une technique éléments finis). Les problèmes sur les cellules élémentaires peuvent être résolus par des techniques éléments finis standards [Smit et al., 1998; Feyel et Chaboche, 2000], ou par d'autres méthodes telles que la *Voronoi Cell Finite Element Method* [Ghosh et al., 1995].

1.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement

Les approches décrites dans cette section peuvent être utilisées de manière complémentaire aux méthodes d'homogénéisation pour traiter les problèmes de délaminage. Elles consistent à superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique local dans les zones à forts gradients.

1.2.1 Méthode de projection de Dirichlet hiérarchique

La méthode de projection de Dirichlet hiérarchique est introduite par [Zohdi et al., 1996; Oden et al., 1999] pour résoudre des problèmes fortement hétérogènes. Deux niveaux de discrétisation sont définis. Au niveau macroscopique, le problème à résoudre est obtenu par une technique d'homogénéisation (par exemple la méthode d'homogénéisation asymptotique). Au niveau microscopique, des problèmes fins représentant les hétérogénéités structurelles sont résolus de manière indépendante sur un ensemble de zones extraites $(\Omega_i^m)_{i \in [1, N]}$ de la structure. Les problèmes microscopiques sont résolus en imposant des conditions de type Dirichlet sur le bord, correspondant au prolongement des champs macroscopiques \underline{u}^M obtenus au premier niveau sur $\partial\Omega_i^m$. La solution macroscopique corrigée localement est alors obtenue par restriction des solutions microscopiques $(\underline{u}_i^m)_{i \in [1, N]}$ au maillage macroscopique. Pour les problèmes non-linéaires, le comportement macroscopique homogénéisé est recalculé en chaque point d'intégration de la zone d'intérêt.

Une stratégie adaptative basée sur un estimateur d'erreur *a posteriori* [Oden et al., 2006] confère à la méthode un caractère systématique. Si le niveau de cet estimateur, après une première itération de la méthode, n'est pas satisfaisant localement, un recalage des comportements homogénéisés est effectué. Si, en suivant ce principe, plusieurs itérations successives s'avèrent infructueuses, la taille des zones sur lesquelles sont effectuées les ré-analyses locales est augmentée.

Cette stratégie offre un cadre intéressant pour la résolution de problèmes multi-échelles. Alors que, dans les approches adaptatives traditionnelles, on raffine localement la discrétisation du problème de départ, on préfère ici adapter l'échelle de représentation du matériau.

1.2.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, introduite par [Ben Dhia, 1998; Ben Dhia et Rateau, 2001] est une méthode générale de décomposition de modèles avec recouvrement. Dans le

cadre de l'analyse de problèmes multiéchelles, elle permet de superposer à un problème macroscopique une analyse plus fine dans les zones d'intérêt. Conceptuellement, cette approche permet de faire dialoguer des modèles différents tant au niveau de la discrétisation que de la nature des équations qui le régissent. Le couplage est obtenu de manière faible dans le volume des zones de jonction. Techniquement, il est obtenu en recherchant le minimum d'une somme pondérée des énergies potentielles associées à chacun des modèles. Le raccord est imposé en moyenne par introduction d'un multiplicateur de Lagrange.

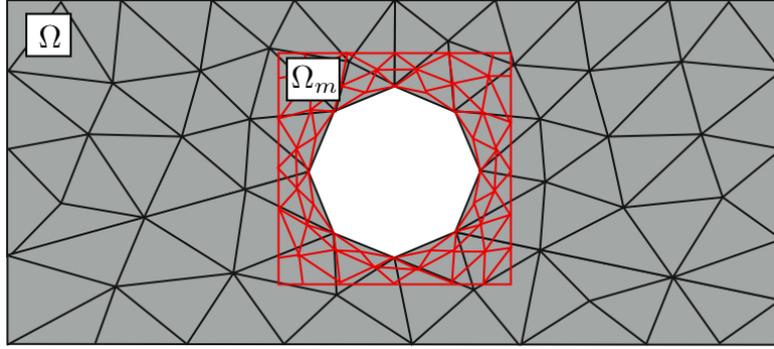


FIG. 2.2: Domaines macroscopiques et microscopiques couplés par la méthode Arlequin

Précisons ces idées dans le cadre de l'élastostatique. Le domaine associé au problème microscopique de la zone d'intérêt, noté Ω^m , est strictement inclu, pour simplifier l'écriture, dans le domaine d'étude Ω (voir Figure 2.2). La solution recherchée est notée $\tilde{u} = (\underline{u}^M, \underline{u}^m)$. Le problème de couplage est alors posé sur un couple $(\tilde{u}, \lambda) \in \tilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}^m$, où $\mathcal{U}^m = H^1(\Omega^m)$, $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}^m$ avec $\mathcal{U} = H^1(\Omega)$, tel que :

$$\forall (\tilde{u}^*, \lambda^*) \in \tilde{\mathcal{U}}^0 \times \mathcal{U}^m, \quad \begin{cases} a_\alpha(\tilde{u}, \tilde{u}^*) + b(\underline{\lambda}, \tilde{u}^*) = l_\alpha(\tilde{u}^*) \\ b(\underline{\lambda}^*, \tilde{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} a_\alpha(\tilde{u}, \tilde{u}^*) &= \int_{\Omega} \alpha \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^M) \mathbf{K} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^{M^*}) \, d\Omega + \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^m) \mathbf{K} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^{m^*}) \, d\Omega \\ b(\underline{\lambda}^*, \tilde{u}) &= \langle \underline{\lambda}^*, \underline{u}^M - \underline{u}^m \rangle_{H^1(\Omega^m)} \\ l_\alpha(\tilde{u}^*) &= \int_{\Omega} \alpha \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{M^*} \, d\Omega + \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{m^*} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_u} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^{M^*} \, d\Omega \end{aligned}$$

Le facteur de pondération $\alpha \in [0, 1]$, potentiellement variable dans Ω^m est un paramètre de la méthode. La recherche d'un multiplicateur de Lagrange défini dans $H^1(\Omega^m)$ et l'utilisation de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega^m)}$ de $H^1(\Omega^m)$ donne un cadre mathématique rigoureux à la stratégie de couplage. Sous certaines conditions, il est

possible d'utiliser d'autres espaces et produits scalaires.

Cette méthode est particulièrement séduisante pour réaliser des analyses locales lorsque la position des zones d'intérêt varie au cours du temps, le problème de départ n'étant jamais remaillé. Cependant, le problème global résultant du couplage des modèles macroscopiques et microscopiques est, pour le moment, résolu de manière monolithique. Des approches itératives permettant d'éviter le réassemblage du problème complet sont en cours d'étude [Helkhodja et al., 2007]. Par ailleurs l'extension de la méthode pour traiter des problèmes microscopiques non-linéaires fait également l'objet de développements.

1.2.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité

Les espaces d'approximation composés de fonctions polynomiales se révèlent inaptes à la représentation de phénomènes non-réguliers. Pour ce type de problèmes, des techniques de raffinement locaux sont également inopérantes. Les méthodes basées sur la partition de l'unité, initiées par [Melenk et Babuška, 1996], apportent une réponse à ce problème en proposant de construire des espaces d'approximation quelconques. Pour cela, on définit sur le domaine d'étude un ensemble de fonctions $(\underline{\psi}_j)_{j \in J}$ possédant les propriétés d'approximation désirées. Ces fonctions sont pondérées par des fonctions $(\phi_i)_{i \in I}$ formant une partition de l'unité du domaine d'étude Ω , c'est-à-dire telles que :

$$\sum_{i \in I} \phi_i(\underline{M}) = 1 \quad (2.12)$$

En général, les fonctions $(\phi_i)_{i \in I}$ sont des fonctions de forme éléments finis, l'indice i étant alors le numéro du nœud du maillage associé à Ω .

L'approximation de la solution recherchée sur le domaine Ω s'écrit alors :

$$\underline{u}_h = \sum_{i \in I} \phi_i(\underline{M}) \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \underline{\psi}_j(\underline{M}) \right) \quad (2.13)$$

Les coefficients a_j sont les inconnues (nodales si les fonctions de pondérations sont des fonctions de forme éléments finis) du problème. On remarquera que cette approximation permet de reproduire n'importe quelle fonction. En particulier, si on note \underline{u}_s la solution du problème non discrétisé, en choisissant $(\underline{\psi}_j)_{j \in J} = \underline{u}_s$ et un jeu de d'inconnues $(a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ unitaires, on obtient :

$$\underline{u}_h = \sum_{i \in I} \phi_i \underline{u}_s = \underline{u}_s \quad (2.14)$$

GFEM, XFEM

La méthode des éléments finis généralisés GFEM [Strouboulis et al., 2001] et la méthode des éléments finis étendus XFEM [Moës et al., 1999] proposent de combiner une approche éléments finis standard avec la partition de l'unité. L'espace éléments finis est enrichi par des fonctions provenant d'une connaissance du problème à traiter. Le champ solution approché s'écrit alors

$$\underline{u}_h = \sum_{i \in I} \phi_i(\underline{M}) \underline{u}_i + \sum_{i \in I} \phi_i(\underline{M}) \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \underline{\psi}_j(\underline{M}) \right) \quad (2.15)$$

La GFEM propose de construire les fonctions d'enrichissement en résolvant numériquement un certain nombre de problèmes à l'échelle microscopique (fonctions *handbook*). Ces fonctions sont construites de manière indépendante pour chaque élément du maillage grossier de départ. On résout pour cela une série de problèmes élémentaires à l'échelle microscopique sur un domaine englobant les hétérogénéités de l'élément considéré.

La XFEM propose un choix de fonctions d'enrichissement permettant de représenter des solutions discontinues. La description géométrique des surfaces de discontinuité est effectuée par la technique des *level-set*, qui consiste à représenter une surface par l'iso-zéro d'une fonction (par exemple la fonction distance signée). Pour les calculs de suivi de fissure en mécanique de la rupture fragile, deux types de fonctions d'enrichissement sont proposés : des fonctions représentant la solution analytique en pointe de fissure sur les noeuds des éléments contenant une pointe de fissure, et des fonctions représentant la discontinuité de déplacement sur les noeuds des éléments traversés par une fissure (voir Figure 2.3). La méthode permet alors de s'affranchir, dans une certaine mesure, des problèmes de remaillage en pointe de fissure.

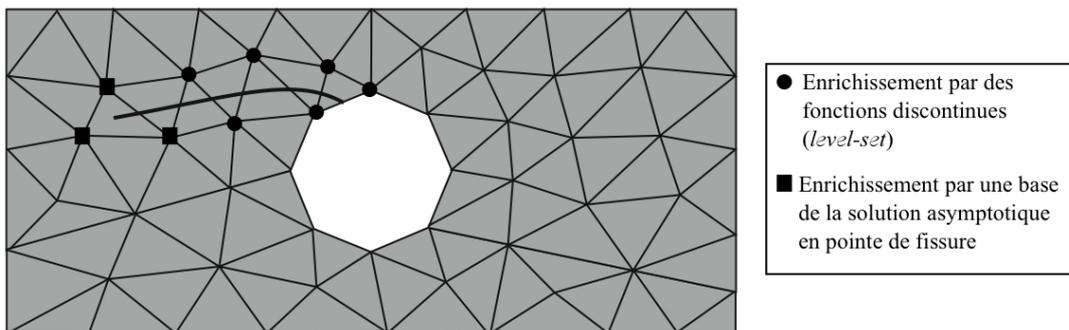


FIG. 2.3: Enrichissements nodaux pour le traitement de la fissuration par la XFEM

La XFEM a également été utilisée par [Moës, 2002] pour traiter des problèmes de propagations de fissures cohésives. Les champs des bords des fissures initiés par utilisation du critère global de Griffith sont liés par une loi de constitution adoucissante

telle que celles étudiées dans le chapitre 1. L'utilisation de ces zones cohésives en pointe de fissure permet de « lisser » la singularité de contrainte, non physique. Les enrichissements pratiqués en pointe de fissure pour la rupture fragile (voir Figure 2.3) ne sont dès lors plus efficaces. Les auteurs choisissent de les remplacer par les solutions asymptotiques obtenues analytiquement par [Planas et Elices, 2000b; Planas et Elices, 2000a] pour des fissures cohésives dans un milieu infini. L'idée d'introduire la discontinuité induite par la propagation de fissures cohésives par la XFEM est reprise dans les travaux de [De Borst et Remmers, 2006].

2 Méthodes de résolution directe

Les systèmes résultant de la discrétisation fine de problèmes naturellement multi-échelles ne peuvent être résolus par des solveurs directs (décompositions LU, QR ou factorisation de Cholesky). En effet, ces derniers sont trop coûteux en temps de calcul et en mémoire requise. Les algorithmes itératifs tels que ceux de Jacobi, de Gauss-Seidel, du gradient conjugué ou d'Uzawa, sont alors une alternative envisageable pour inverser ces systèmes.

Les solveurs itératifs souffrent néanmoins d'une lacune à capter rapidement les composantes à grande longueur de variation des solutions aux problèmes traités. Pour combler cette lacune, les méthodes de calcul basées sur ces algorithmes proposent une résolution sur deux échelles couplées. La partie de la solution à grande longueur d'onde est traitée à chaque itération du solveur par résolution d'un problème posé sur une grille grossière qui force la propagation de cette information et améliore le taux de convergence global. Les techniques de construction des problèmes varient d'une méthode à l'autre. On distingue les stratégies suivantes :

- Une construction arbitraire du problème grossier, s'appuyant sur une discrétisation grossière du problème fin et la construction d'opérateurs de restriction et de prolongement permettant de transférer des champs d'une échelle de discrétisation à l'autre. Ces idées sont retrouvées dans les méthodes multigrilles.
- Une construction algébrique du problème grossier associé à une sous-structuration préalable du problème et l'écriture de conditions d'auto-équilibre des sous-domaines flottants. Ces techniques sont proposées par les méthodes de décomposition de domaine basées sur les compléments de Schur
- Une construction du problème grossier basée sur une partition du domaine et le calcul pour chacun des sous-domaines d'un comportement homogénéisé, en suivant les idées décrites dans la section 1. Cette caractéristique est utilisée dans le cadre de la méthode micro/macro de décomposition de domaine mixte.

Afin de comparer les possibilités de ces méthodes pour notre cas d'étude, on sera attentif à leur extension au cadre fortement non-linéaire, et à leur aptitude à la parallélisation.

2.1 Méthodes multigrilles

2.1.1 Principe

Les méthodes multigrilles (voir les ouvrages de référence [Brandt, 1977; Briggs, 1987]) sont particulièrement étudiées depuis la fin des années soixante-dix et trouvent des applications multiples, en particulier en mécanique des fluides. Elles permettent une résolution itérative de systèmes d'équations de grande taille, pour lesquels une résolution directe n'est plus envisageable. Elles partent du constat que les algorithmes itératifs classiques (Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation, ...) traitent efficacement les composantes à faible longueur de variation du résidu au cours des itérations, mais peinent à prendre en compte les composantes à grande longueur de variation. L'idée est alors d'effectuer des résolutions incomplètes sur une hiérarchie de grilles de degrés de raffinement distincts. Chacune de ces résolutions permet de diminuer la part du résidu dont la longueur de variation correspond à la discrétisation de la grille sur laquelle le système initial est transféré. En conséquence, le nombre d'évaluations à l'échelle fine nécessaires à la convergence de la solution est indépendant du nombre de degrés de liberté N du problème à résoudre, c'est-à-dire que le coût global de la méthode est seulement en $\mathcal{O}(N)$.

2.1.2 Résolution de systèmes non-linéaires sur deux niveaux

La résolution sur deux niveaux de problèmes non-linéaires peut être effectuée de deux façons :

- Par l'application d'un algorithme multigrille linéaire aux étapes de prédiction linéaires d'un schéma de Newton.
- Par l'utilisation d'un schéma multigrille de type FAS (Full Approximation Scheme), décrit par [Brandt, 1982], extension des algorithmes multigrilles classiques pour la résolution de problèmes non-linéaires.

On décrit ici l'algorithme FAS à deux niveaux, dont la méthode bigrille pour les systèmes linéaires est un cas dégénéré. On considère la résolution d'un problème non-linéaire discret $\mathbf{K}(U) = F$. L'indice f dénote les quantités calculées sur l'échelle fine, l'indice c les quantités de l'échelle grossière. On introduit les opérateurs de restriction \mathbf{I}^U et \mathbf{I}^F permettant de transférer respectivement les champs inconnus et les second membres de la grille fine à la grille grossière. Un opérateur de prolongement $\hat{\mathbf{I}}$ permet de transférer les quantités de la grille grossière à la grille fine. Une itération k de la méthode est réalisée en trois étapes :

- **Une étape de lissage sur la grille fine.** La solution lissée \bar{U}_f^k de l'initialisation $U_{f,0}^k$ est obtenue en effectuant un faible nombre α^k d'itérations d'un algorithme itératif de résolution de systèmes non-linéaires, analogue aux algorithmes itératifs de résolutions de systèmes linéaires tels que Jacobi ou Gauss-

Seidel. Le résidu du problème non-linéaire à l'échelle fine obtenu est alors :

$$R_f^k = F - \mathbf{K}(\bar{U}_f^k) \quad (2.16)$$

Le résidu et le champ solution sont restreints à la grille grossière :

$$R_c^k = \mathbf{I}^F R_f^k \quad U_c^k = \mathbf{I}^U \bar{U}_f^k \quad (2.17)$$

- **Une étape de correction sur la grille grossière.** Le problème non-linéaire de correction sur la grille grossière s'écrit :

$$\mathbf{K}_c(U_c^k + E_c^k) = R_c^k + \mathbf{K}_c(U_c^k) \quad (2.18)$$

Le problème non-linéaire sur la grille grossière est en général le même que le problème initial. Seul l'écart obtenu par résolution du problème (2.18) est prolongé sur la grille grossière :

$$E_f^k = \hat{\mathbf{I}} E_c^k \quad (2.19)$$

- **Une étape de mise à jour de la solution.** La solution à l'échelle fine est finalement obtenue par correction à l'échelle grossière :

$$U_f^{k+1} = \bar{U}_f^k + \bar{E}_f^k \quad (2.20)$$

2.1.3 Algorithme multiniveau

Classiquement, le problème (2.18) peut être résolu par un algorithme multigrille à deux niveaux. Cette idée peut être généralisée à un nombre quelconque de niveaux (voir Figure 2.4).

Différents cycles de résolution multiniveau peuvent alors être utilisés. Ces cycles définissent l'ordre dans lequel les problèmes aux différentes échelles sont résolus. Leur efficacité respective est difficile à évaluer et dépend du problème à traiter.

2.1.4 Algorithme multiniveau parallèle

La parallélisation des algorithmes multigrilles est moins naturelle que celle des méthodes basées sur les décompositions de domaine, construites dans ce but. Cependant, elle est tout à fait envisageable, et fait l'objet de nombreux travaux spécifiques. On pourra se référer à une revue des différentes techniques envisageables dans [Jones et McCormick, 1997; Douglas, 1996].

2.1.5 Algorithme multiniveau pour les milieux fortement hétérogènes

Les opérateurs de prolongement et de restriction classiques ont été montrés insuffisants par [Fish et Belsky, 1995a; Fish et Belsky, 1995b] pour garantir l'extensibilité

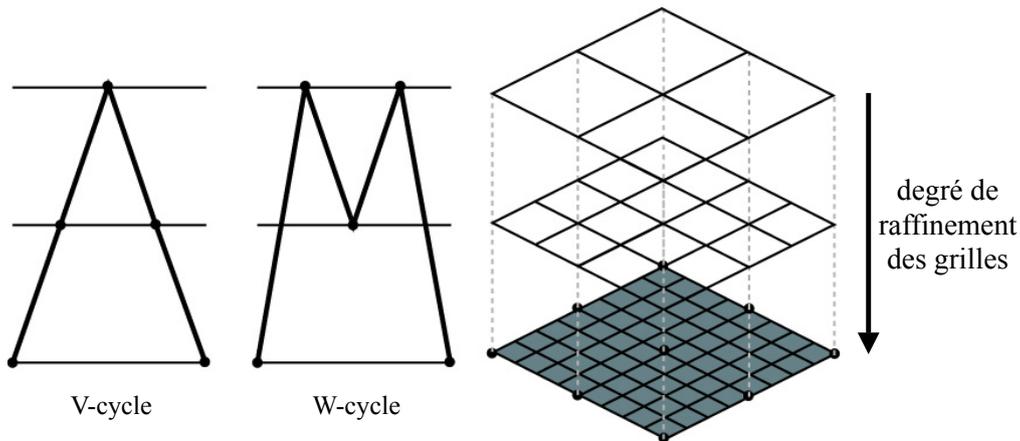


FIG. 2.4: Hiérarchie de grilles de degré raffinement croissant (à droite) et cycles usuels de résolution multiniveau (à gauche)

de la méthode multigrille à deux niveaux appliquée à un matériau fortement hétérogène. Les auteurs proposent alors de calculer ces opérateurs par une approche basée sur la théorie de l'homogénéisation périodique. Le problème grossier obtenu devient un problème homogénéisé de la structure, et la correction grossière apportée donne une bien meilleure représentation des composantes à grande longueur d'onde de la solution à chaque itération de la méthode.

2.2 Méthodes basées sur les décompositions de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine, initialement conçues avec recouvrement [Schwarz, 1869], ont connu un regain d'intérêt vers la fin des années 80 avec la révolution informatique et l'avènement du calcul parallèle. Les méthodes non-recouvrantes ont été privilégiées pour leur facilité d'implantation et leur adéquation avec les concepts d'ingénierie (assemblage de composants). Une première version de la stratégie de sous-structuration mixte basée sur l'algorithme de résolution LaTIn est proposée dans [Ladevèze, 1985]. Dans [Farhat et Roux, 1991] l'approche duale est adaptée au calcul de structure par éléments finis.

Ces méthodes souffrent néanmoins d'un manque d'extensibilité. Afin de traiter efficacement les grands nombres de sous-domaines, [Mandel, 1993] propose, dans le cadre de la méthode primale BDD, de construire un problème grossier associé à la vérification de l'orthogonalité des chargements locaux avec les déplacements de solide rigide des sous-structures flottantes. La restauration de l'extensibilité pour la méthode duale FETI est assurée de la même manière par [Farhat et Roux, 1994]. Les singularités de coin pour les problèmes de plaques et coques conduisent à l'ajout de contraintes supplémentaires de régularité, d'abord imposées à l'aide d'un gradient conjugué augmenté [Le Tallec et al., 1998; Farhat et Mandel, 1998] puis à l'aide d'algorithmes reconcondensés FETI-DP [Farhat et al., 2000b] et BDDC [Dohrmann,

2003].

Une construction hiérarchique d'un problème grossier pour la méthode de décomposition de domaine mixte basée sur l'algorithme LaTIn est décrite dans [Ladevèze et Dureisseix, 1998]. Une vision multiéchelle de cet algorithme (dite approche micro/macro), en rupture avec les visions précédentes, est proposée dans [Ladevèze et Dureisseix, 2000]. Cette dernière impose la continuité systématique de grandeurs moyennes aux interfaces. Celles-ci sont choisies en accord avec le principe de Saint-Venant, de manière à ce que seules les composantes à faible longueur de variation restent à trouver itérativement par des échanges entre sous-structures voisines. La continuité moyenne est assurée par la résolution d'un problème macroscopique, qui peut être considéré comme l'assemblage d'opérateurs homogénéisés par sous-domaine. Des travaux récents exploitent une idée similaire dans le cadre de FETI-DP [Klawonn et Rheinbach, 2005] et BDDC.

2.2.1 Méthodes basées sur les compléments de Schur

Les méthodes basées sur les compléments de Schur ([Gosselet et Rey, 2006] propose une revue détaillée de ces méthodes dans un formalisme unique) sont probablement les méthodes de résolution de problèmes de grande taille les plus utilisées en mécanique des structures. Ce succès est dû à deux ingrédients majeurs : une écriture algébrique de ces méthodes, très proche de l'implémentation numérique, et l'utilisation d'algorithmes de résolution itératifs robustes, dont les propriétés sont largement connues des mathématiciens. Ces stratégies sont initialement écrites pour résoudre des problèmes linéaires, mais on évoquera les récentes extensions au cadre non-linéaire.

Les méthodes de décomposition de domaine basées sur les compléments de Schur consistent en un partitionnement de la structure \mathbf{E} en sous-structures E . Chaque sous-structure est vue par les sous-structures voisines comme une boîte noire, les quantités statiques et cinématiques d'interface étant reliées par un opérateur de rigidité ou de souplesse condensé, appelé complément de Schur. Les conditions d'admissibilité des quantités d'interface, couplées aux équilibres locaux des sous-structures, donnent un problème global d'interface, résolu de manière itérative par un gradient conjugué préconditionné projeté.

On décrit ici plus particulièrement la méthode FETI, qui introduit les principaux éléments de ces stratégies de la façon naturelle. Les similitudes et différences avec les autres stratégies de décomposition de domaine seront ensuite évoquées.

On considère la résolution d'un système linéaire $\mathbf{K}U = F$. L'équilibre local de chaque sous-structure s'écrit :

$$\mathbf{K}^{(E)}U^{(E)} = \lambda^{(E)} + F^{(E)} \quad (2.21)$$

$\lambda^{(E)}$ est le vecteur des réactions nodales imposées par les voisins de E , non-nuls uniquement sur le bord $\partial\Omega_E$ du sous-domaine. L'équilibre des réactions d'interface

s'écrit alors :

$$\sum_E \mathbf{A}^{(E)} \mathbf{t}^{(E)} \lambda^{(E)} = 0 \quad (2.22)$$

La continuité des déplacements d'interface s'écrit :

$$\sum_E \mathbf{B}^{(E)} \mathbf{t}^{(E)} U^{(E)} = 0 \quad (2.23)$$

$\mathbf{t}^{(E)}$ est un opérateur booléen de trace. $\mathbf{A}^{(E)}$ est un opérateur booléen de localisation, $\mathbf{B}^{(E)}$ est un opérateur booléen signé de localisation, qui vérifient :

$$\sum_E \mathbf{A}^{(E)} \mathbf{B}^{(E)T} = 0 \quad (2.24)$$

Les différentes méthodes de décomposition de domaine basées sur les compléments de Schur proposent de résoudre ce système d'équations en condensant les problèmes locaux sur l'interface, puis en les injectant dans les équations (2.23) et (2.22).

On note $X_b^{(E)}$ la trace sur $\partial\Omega_E$ d'un vecteur quelconque $X^{(E)}$ défini sur E , et $X_i^{(E)}$ la restriction de $X^{(E)}$ aux noeuds intérieurs de E .

$$X_b^{(E)} = \mathbf{t}^{(E)} X^{(E)} \quad X_i^{(E)} = (\mathbf{I}_d - \mathbf{t}^{(E)}) X^{(E)} \quad (2.25)$$

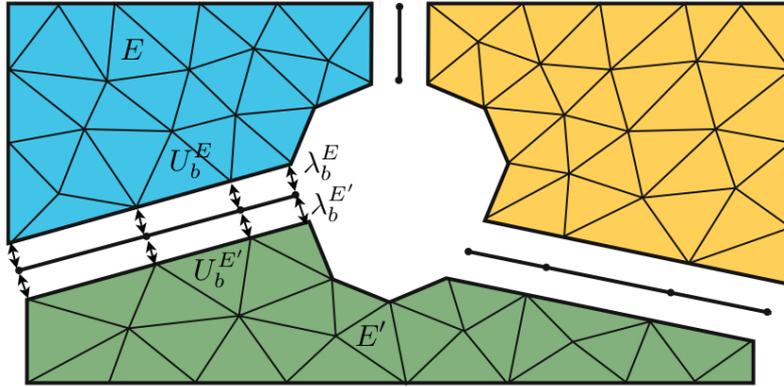


FIG. 2.5: Décomposition de la structure en sous-structures, déplacements et réactions nodaux d'interface

Finite Element Tearing and Interconnecting method

La méthode duale décrite dans [Farhat et Roux, 1991] repose sur l'écriture d'un unique vecteur de réaction nodale $\lambda_b = \mathbf{B}^{(E)T} \lambda_b^{(E)}$, ce qui assure automatiquement la vérification de l'admissibilité des réactions nodales d'interface (2.22). La solution du problème global est alors recherchée en injectant les problèmes locaux (2.35),

condensés sur les interfaces, dans l'équation d'admissibilité cinématique d'interface (2.23). La solution des équilibres locaux n'est cependant pas accessible directement, puisqu'il s'agit de résoudre des problèmes à conditions de Neumann sur le bord. On utilisera alors une inverse généralisée $\mathbf{K}^{(E)+}$ telle que :

$$\forall X \in \text{Im}(\mathbf{K}^{(E)}), \quad \mathbf{K}^{(E)}\mathbf{K}^{(E)+}X = X \quad (2.26)$$

Celle-ci permet de calculer la partie déformante du champ déplacement en l'absence de conditions de Dirichlet, la partie correspondant aux modes à énergie nulle étant alors ajoutée à la précédente :

$$U^{(E)} = \mathbf{K}^{(E)+} (\lambda^{(E)} + F^{(E)}) + \mathbf{R}^{(E)}\alpha^{(E)} \quad (2.27)$$

Cette écriture n'a évidemment de sens que si le chargement $\lambda^{(E)} + F^{(E)}$ n'excite pas le noyau $\mathbf{R}^{(E)}$ de $\mathbf{K}^{(E)}$, c'est-à-dire les mouvements de corps rigide de la sous-structure E , ce qui se traduit par l'équation d'admissibilité suivante :

$$\mathbf{R}^{(E)T} (\lambda^{(E)} + F^{(E)}) = 0 \quad (2.28)$$

L'équilibre local (2.27) de E est condensé sur le bord $\partial\Omega_E$ en introduisant l'opérateur $\mathbf{S}_d^{(E)}$, complément de Schur dual de la sous-structure E :

$$U_b^{(E)} = \mathbf{S}_d^{(E)} \lambda_b^{(E)} + U_c^{(E)} + \mathbf{R}_b^{(E)}\alpha^{(E)} \quad (2.29)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_d^{(E)} = \mathbf{t}^{(E)}\mathbf{K}^{(E)+} \mathbf{t}^{(E)T} \\ U_c^{(E)} = \mathbf{t}^{(E)}\mathbf{K}^{(E)+} F^{(E)} \\ \mathbf{R}_b^{(E)} = \mathbf{t}^{(E)}\mathbf{R}^{(E)} \end{cases}$$

L'injection des équilibres locaux condensés (2.29) dans l'équation d'admissibilité cinématique des quantités d'interface (2.23), couplée à la condition d'auto-équilibre (2.28) portant sur les réactions nodales d'interface de chaque sous-structure, donne le problème condensé global à résoudre :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_d & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_b \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ -e \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_d = \sum_E \mathbf{B}^{(E)} \mathbf{S}_d \mathbf{B}^{(E)T} \\ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \dots & \mathbf{B}^{(E)} \mathbf{R}_b^{(E)} & \dots \end{pmatrix} \\ F = \sum_E \mathbf{B}^{(E)} U_c^{(E)} \\ e = \begin{pmatrix} \dots & F_b^{(E)T} \mathbf{B}^{(E)} \mathbf{R}_b^{(E)} & \dots \end{pmatrix}^T \end{cases} \quad (2.31)$$

Il n'est en général pas raisonnable d'inverser ce système de manière directe. Le calcul explicite des inverses généralisées des opérateurs de rigidité de chaque sous-structure est en effet une opération coûteuse. En outre, pour des problèmes de grande taille, le problème condensé possède encore un nombre élevé de degrés de liberté, et ne peut être assemblé. Pour ces deux raisons, la résolution est effectuée par un algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté, aisément parallélisable.

La connaissance de bons préconditionneurs, impliquant des résolutions de problèmes locaux sur chaque sous-structure, permet d'accélérer la convergence de cet algorithme. Le préconditionneur optimal $\tilde{\mathbf{S}}_d^{-1}$ au sens des décompositions de domaine, appelé préconditionneur de Dirichlet, est l'assemblage pondéré des compléments de Schur primaux locaux $\mathbf{S}_p^{(E)}$ (qui seront explicités dans le paragraphe suivant) :

$$\tilde{\mathbf{S}}_d^{-1} = \sum_E \tilde{\mathbf{B}}^{(E)} \mathbf{S}_p \tilde{\mathbf{B}}^{(E)T} \quad (2.32)$$

Plusieurs approximations efficaces de \mathbf{S}_p opérateur peuvent être utilisées (*lumped*, *superlumped*). L'opérateur d'assemblage pondéré est généralement écrit sous la forme $\tilde{\mathbf{B}}^{(E)} = \mathbf{M}^{(E)} \mathbf{B}^{(E)}$. L'opérateur diagonal de *scaling* $\mathbf{M}^{(E)}$ permet de donner un sens mécanique au préconditionneur [Rixen et Farhat, 1999] et est alors choisi en fonction du problème à traiter et de la discrétisation spatiale retenue :

- Pour les problèmes homogènes : $\mathbf{M}^{(E)} = \text{diag} \left(\frac{1}{\text{multiplicité nodale}} \right)$
- Pour les problèmes hétérogènes, on adopte une écriture de $\mathbf{M}^{(E)}$ permettant de rendre compte, en plus de la multiplicité des noeuds d'interface, de la différence de raideur entre les deux sous-structures voisines.

Une interprétation mécanique du préconditionneur de Neumann sera développée pour notre cas d'application de la méthode primale dans le chapitre 6.

Une opération de projection permet de traiter efficacement la condition d'admissibilité des réactions nodales d'interface (2.28). Les réactions nodales d'interface sont recherchées sous la forme :

$$\lambda_b = \lambda_0 + \mathbf{P}\lambda^* \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{G}^T \lambda_0 = -e \\ \mathbf{G}^T \mathbf{P} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Usuellement, ces conditions sont respectées en choisissant l'initialisation λ_0 et le projecteur \mathbf{P} tels que :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} e \\ \mathbf{P} &= \mathbf{I}_d - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \end{aligned} \quad (2.34)$$

L'initialisation $\lambda_0 = \mathbf{G}\beta$ avec $\beta = -(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} e$ est ainsi recherchée comme l'assemblage d'une combinaison des résultantes et moments des réactions nodales des interfaces de chaque sous-structure en équilibre avec les résultantes et moments des efforts extérieurs imposés. La partie de la solution λ^* , calculée au cours des itérations du gradient conjugué, est recherchée dans l'espace complémentaire à celui de λ_0 .

Cette résolution est donc à deux échelles : l'initialisation donne, par un calcul direct sur un problème grossier, la partie à grande longueur de variation des réactions nodales d'interface et la partie complémentaire, à longueur de variation plus faible, est recherchée itérativement au cours des itérations du gradient conjugué. L'opération de projection permet ainsi d'assurer l'extensibilité de la méthode.

Balancing Domain Decomposition method

La méthode primale décrite dans [Mandel, 1993; Le Tallec, 1994] est semblable sur de nombreux points à la méthode duale. Elle repose sur les mêmes techniques et son efficacité est comparable à celle de FETI. BDD repose sur l'écriture d'un unique vecteur de déplacement d'interface $U_b = \mathbf{A}^T U_b^{(E)}$, ce qui assure automatiquement la vérification de (2.23). La vérification de (2.22) est recherchée en condensant les problèmes locaux (2.35) sur les interfaces.

En renumérotant les noeuds de façon à faire apparaître explicitement les quantités de bords et les quantités intérieures, l'équation (2.35) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{(E)} & \mathbf{K}_{ib}^{(E)} \\ \mathbf{K}_{bi}^{(E)} & \mathbf{K}_{bb}^{(E)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i^{(E)} \\ U_b^{(E)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_i^{(E)} \\ F_b^{(E)} + \lambda_b^{(E)} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

La condensation de ce problème fait apparaître le complément de Schur primal $\mathbf{S}_p^{(E)}$ de la sous-structure E :

$$\mathbf{S}_p^{(E)} U_b^{(E)} = \lambda_b^{(E)} + F_c^{(E)} \quad (2.36)$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathbf{S}_p^{(E)} = \mathbf{K}_{bb}^{(E)} - \mathbf{K}_{bi}^{(E)} \mathbf{K}_{ii}^{(E)-1} \mathbf{K}_{ib}^{(E)} \\ F_c^{(E)} = F_b^{(E)} - \mathbf{K}_{bi}^{(E)} \mathbf{K}_{ii}^{(E)-1} F_i^{(E)} \end{cases}$$

Le problème d'équilibre global à résoudre devient donc :

$$\mathbf{S}_p U_b = F_c \quad \text{où } \begin{cases} \mathbf{S}_p = \sum \mathbf{A}^{(E)} \mathbf{S}^{(E)} \mathbf{A}^{(E)T} \\ F_c = \sum_E \mathbf{A}^{(E)} F_c^{(E)} \end{cases} \quad (2.37)$$

De même que pour la méthode FETI, ce problème est résolu par un gradient conjugué préconditionné projeté. L'écriture du projecteur est cette fois associée à la résolution des problèmes locaux de Neumann résultant du préconditionnement qui utilise les compléments de Schur duaux $\mathbf{S}_d^{(E)} = \mathbf{S}_p^{(E)+}$. Cette méthode, retenue pour résoudre des problèmes linéaires de grande taille dans le cadre du travail exposé ici, sera détaillée dans le chapitre 6.

Méthode de décomposition de domaine hybride

L'approche hybride des méthodes de décomposition de domaine basées sur les compléments de Schur, proposée par [Gosselet et al., 2004], propose un cadre permettant d'unifier les méthodes primales et duales. Le principe consiste à assujettir une partie des degrés de liberté d'interface à une condition d'équilibre des efforts, en introduisant une variable unique de déplacement, et la partie complémentaire à une condition de continuité des déplacements, en introduisant une variable unique d'effort. Le système condensé résultant de cette écriture, dans le cas général, est non-symétrique, et doit être résolu par un algorithme de type GMRes. Cette approche permet d'adapter les inconnues d'interface à la nature du problème mécanique à résoudre. Elle est typiquement adaptée aux problèmes multichamps où les inconnues mécaniques n'ont pas les mêmes dimensions physiques (déplacement/pression dans les problèmes incompressibles ou multiphysiques).

Méthodes de décomposition de domaine recondensées

Les approches FETI-DP [Farhat et al., 2000b] et BDDC [Dohrmann, 2003] ont été développées de manière à éviter le calcul des inverses généralisées rencontré dans FETI (dans la définition du problème condensé) et BDD (au niveau du préconditionneur). L'idée est d'assurer en permanence la continuité du déplacement en un petit nombre de nœuds d'interface. Ces nœuds sont, typiquement les « coins » de sous-structures plaques et coques ou trois nœuds par face de sous-structures tridimensionnelles. Le problème grossier associé à cette contrainte de continuité se traduit également par l'introduction d'un projecteur au sein du gradient conjugué.

En 3D, la pertinence du problème grossier, et donc la vitesse de convergence de la méthode, dépend fortement des nœuds sur lesquelles la contrainte de continuité est *a priori* imposée. [Klawonn et Rheinbach, 2005] propose une approche basée sur la transmission de quantités dotées d'un sens mécanique plus prononcé : un changement de base sur les sous-domaines permet d'imposer non-plus une continuité ponctuelle mais une continuité en moyenne sur les interfaces. Ce changement de base entraîne néanmoins une certaine complexité algorithmique.

Méthode de décomposition de domaine mixte

Les méthodes de décomposition de domaine mixtes proposent de rechercher une combinaison des déplacements et des réactions nodales d'interface. Différentes approches peuvent être envisagées pour poser de tels problèmes. On se réfère ici à la méthode FETI-2LM proposée par [Farhat et al., 2000a]. Une alternative est proposée dans la section 2.2.2. Les équations d'admissibilité cinématique (2.23) et statique (2.22) d'interface sont alors couplées par introduction d'une nouvelle variable d'interface $\mu_b^{(E)} = \lambda_b + \mathbf{k}^{(E)}U_b$. Les problèmes locaux condensés de chaque sous-structure deviennent :

$$\left(\mathbf{S}_p^{(E)} + \mathbf{k}^{(E)} \right) U_b^{(E)} = \mu_b^{(E)} + F_c^{(E)} \quad (2.38)$$

Dans le cas simplifié du traitement de deux sous-structures E et E' , les conditions d'admissibilité d'interface deviennent :

$$\begin{cases} \mu_b^{(E)} + \mu_b^{(E')} - \left(\mathbf{k}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E')} \right) U_b^{(E)} = 0 \\ \mu_b^{(E)} + \mu_b^{(E')} - \left(\mathbf{k}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E')} \right) U_b^{(E')} = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Les problèmes locaux sont inversés sous réserve de régularisation de $S_p^{(E)}$ par $k^{(E)}$, et les solutions obtenues sont injectées dans l'admissibilité d'interface réécrite en termes de variables mixtes :

$$\mathbf{S}_m \mu_b = F_m \quad (2.40)$$

où l'on a introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_m &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d - \left(\mathbf{k}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E')} \right) \left(\mathbf{S}_p^{(E')} + \mathbf{k}^{(E')} \right)^{-1} \\ \mathbf{I}_d - \left(\mathbf{k}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E')} \right) \left(\mathbf{S}_p^{(E)} + \mathbf{k}^{(E)} \right)^{-1} & \mathbf{I}_d \end{pmatrix} \\ \mu_b &= \begin{pmatrix} \mu_b^{(E)} \\ \mu_b^{(E')} \end{pmatrix} \\ F_m &= \begin{pmatrix} \left(\mathbf{k}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E')} \right) \left(\mathbf{S}_p^{(E')} + \mathbf{k}^{(E')} \right)^{-1} F_c^{(E)} \\ \left(\mathbf{k}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E')} \right) \left(\mathbf{S}_p^{(E)} + \mathbf{k}^{(E)} \right)^{-1} F_c^{(E')} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

L'originalité de ces méthodes est l'introduction de paramètres $\mathbf{k}^{(E)}$ régularisant les problèmes locaux par sous-structure. Ces paramètres conditionnent la convergence de la méthode, et doivent être choisis avec soin. En effet tel qu'il est posé, le problème d'interface est résolu itérativement sans préconditionnement. Il apparaît ici clairement qu'en choisissant $\mathbf{k}^{(E)} = \mathbf{S}_p^{(E')}$ et $\mathbf{k}^{(E')} = \mathbf{S}_p^{(E)}$, l'opérateur \mathbf{S}_m devient l'identité et la solution est trouvée de manière immédiate. En généralisant à un nombre quelconque de sous-structures, on peut montrer que le choix optimal pour $\mathbf{k}^{(E)}$ est le complément de Schur de \bar{E} (où $\bar{E} = \mathbf{E} \setminus E$) sur l'interface de E . Ce choix n'est évidemment pas réaliste puisqu'il ne respecte pas la localisation des données, ce qui implique de faibles performances parallèles. Plusieurs approximations peuvent être choisies, revenant à approximer cet opérateur optimal par un calcul local dans un voisinage de E .

On remarque enfin que, les problèmes locaux étant régularisés, le problème grossier nécessaire à la transmission rapide de la partie à grande longueur d'onde de la solution au cours des itérations du solveur itératif doit être introduit artificiellement. En pratique, on utilise le même type de problème grossier que pour les méthodes FETI ou BDD. La méthode décrite dans la section 2.2.2 propose la construction d'un problème grossier basé sur une technique d'homogénéisation, dont la résolution implique également la recherche de modes de déformation à énergie non nulle des sous-structures.

Résolution de problèmes non-linéaires

Les problèmes non-linéaires de grande taille peuvent être résolus par un algorithme de Newton, les étapes de prédictions linéaires faisant alors appel à une inversion du problème tangent par une des méthodes de décomposition de domaine citées dans les paragraphes précédents [Farhat et al., 2000b],[Barboteu et al., 2001].

Les étapes de prédiction linéaire d'un même pas de temps de Newton présentant des similitudes numériques, les bases de solution construites lors de la résolution d'un problème tangent condensé par un algorithme du gradient conjugué peuvent être réutilisées pour la résolution des problèmes tangents ultérieurs. Cette idée est utilisée pour construire les « solveurs à mémoire » basés sur la réutilisation des sous-espaces de Krylov, comme GIRKS (*Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces*) [Risler et Rey, 2000], GKC (*Generalized Krylov Correction*) [Rey, 1996] ou SRKS (*Selective Reuse of Krylov Subspaces*) [Gosselet, 2003].

Ces méthodes, dénommées méthodes de Newton-Krylov-Schur, sont très efficaces dans le cadre de la résolution de problèmes aux non-linéarités diffuses. Pour le traitement de non-linéarités localisées dans certaines sous-structures, [Cresta et al., 2007; Pebrel et al., 2008] proposent d'effectuer des itérations non-linéaires locales indépendantes sur chaque sous-domaine, après chaque prédiction linéaire de Newton (voir Figure 2.6).

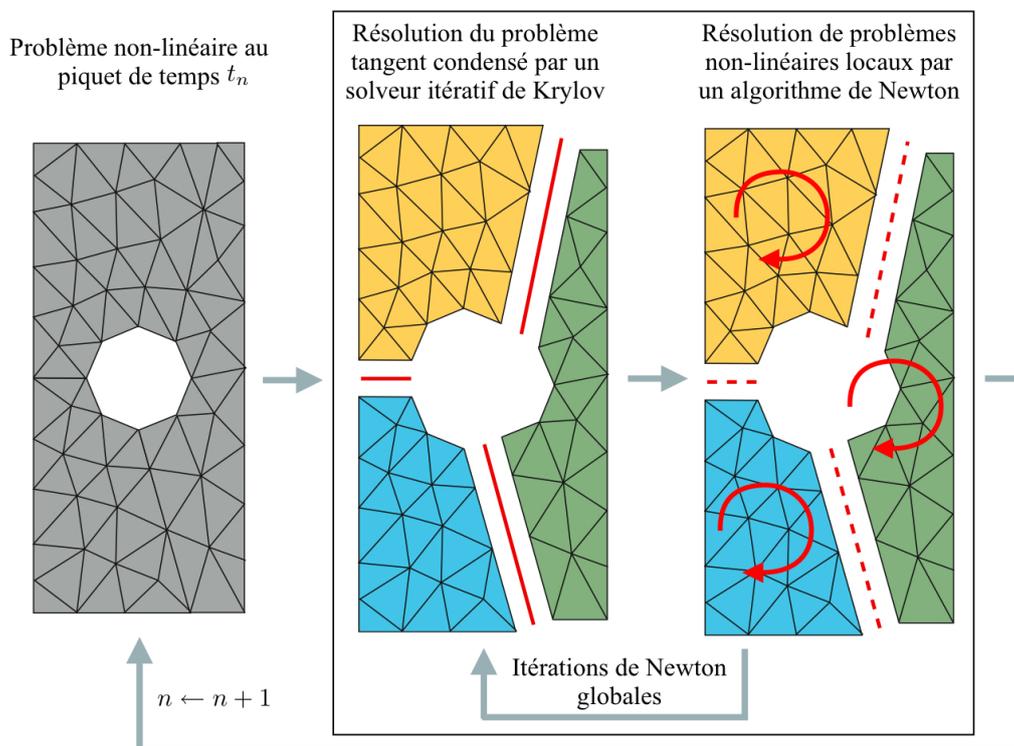


FIG. 2.6: Décomposition du domaine en sous-structures et interfaces

2.2.2 Stratégie LaTIn micro/macro

La méthode multiéchelle de décomposition de domaine mixte décrite dans [Ladevèze et Nouy, 2003] propose de décomposer la structure en sous-structures séparées par des interfaces. L'originalité de cette sous-structuration réside dans l'écriture de champs d'effort et de déplacement de surface pour chacun des deux côtés d'une interface. Il est alors tout à fait possible d'attribuer à cette interface, entité mécanique à part entière, des comportements complexes liant les champs introduits. La recherche simultanée des champs statiques et cinématiques d'interface et, dans le cas général, de sous-structures, confère à la stratégie son caractère mixte.

Un algorithme itératif de résolution LaTIn est utilisé pour résoudre le problème sous-structuré. Cet algorithme a originellement été introduit pour résoudre des problèmes non-linéaires d'évolution, en recherchant à chaque itération une solution sur tout l'intervalle de temps. Des approximations espace-temps de la solution peuvent être utilisées afin de résoudre efficacement les problèmes posés sur un grand intervalle de temps et nécessitant des discrétisations temporelles fines [Nouy et Ladevèze, 2004; Passieux et al., 2007]. On ne s'intéressera dans la suite qu'à la capacité de la LaTIn à résoudre de façon incrémentale des problèmes non-linéaires successifs.

Contrairement à l'approche mixte décrite dans la section précédente, on n'impose pas l'écriture du problème d'interface en termes de variables mixtes $\mu_b^{(E)} = \lambda_b^{(E)} + \mathbf{k}^{(E)} U_b^{(E)}$. Ces dernières apparaissent naturellement lors de la résolution du problème d'interface par l'algorithme de résolution non-linéaire LaTIn. Ce processus itératif est ici décrit de manière très simplifiée afin de respecter les notations algébriques utilisées pour les méthodes de décomposition de domaine détaillées précédemment. Les justifications mathématiques de cet algorithme, basées sur une écriture variationnelle des équations de la mécanique des milieux continus, seront données dans le chapitre suivant. On supposera ici que le comportement des sous-structures est linéaire, les non-linéarités étant concentrées dans les interfaces, et que les discrétisations des champs de sous-structure et d'interface sont compatibles. Une itération n de l'algorithme LaTIn appliqué à la résolution du problème sous-structuré décrit précédemment se compose alors de deux étapes :

- Une étape de résolution de problèmes indépendants par sous-structure, effectuée en parallèle. On introduit pour cela une rigidité artificielle $\mathbf{k}^{(E)}$ liant les champs cinématiques et statiques des interfaces de la sous-structure E à ceux issus de l'itération précédente :

$$\lambda_{b_n}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E)} U_{b_n}^{(E)} = \lambda_{b_{n-1/2}}^{(E)} + \mathbf{k}^{(E)} U_{b_{n-1/2}}^{(E)} \quad (2.42)$$

Les équilibres locaux condensés de chaque sous-structure (2.36) peuvent alors être résolus localement en injectant l'équation précédente de façon à éliminer les réactions nodales d'interfaces :

$$(\mathbf{S}_P^{(E)} + \mathbf{k}^{(E)}) U_{b_n}^{(E)} = F_c^{(E)} + \lambda_{b_{n-1/2}}^E + \mathbf{k}^{(E)} U_{b_{n-1/2}}^{(E)} \quad (2.43)$$

- Une étape locale sur les champs d'interface. Les champs cinématiques et statiques sont cette fois reliés par une rigidité négative, conjuguée de la rigidité introduite à l'étape précédente pour assurer la convergence de l'algorithme :

$$\begin{cases} \lambda_{b_{n+1/2}}^{(E)} - \mathbf{k}^{(E)} U_{b_{n+1/2}}^{(E)} = \lambda_{b_n}^E - \mathbf{k}^{(E)} U_{b_n}^{(E)} \\ \lambda_{b_{n+1/2}}^{(E')} - \mathbf{k}^{(E')} U_{b_{n+1/2}}^{(E')} = \lambda_{b_n}^{(E')} - \mathbf{k}^{(E')} U_{b_n}^{(E')} \end{cases} \quad (2.44)$$

Le comportement local, éventuellement non-linéaire en chaque point de l'interface, est un ensemble de deux équations vectorielles (6 équations scalaires en 3D) s'écrivant formellement :

$$\mathcal{R} \left(U_{b_{n+1/2}}^{(E)}, U_{b_{n+1/2}}^{(E')}, \lambda_{b_{n+1/2}}^{(E)}, \lambda_{b_{n+1/2}}^{(E')} \right) = 0 \quad (2.45)$$

Le système éventuellement non-linéaire composé de (2.44) et (2.45) est résolu localement sur chaque interface.

Comme pour les méthodes de décomposition de domaine basées sur les compléments de Schur sans résolution de problème grossier, les communications entre sous-structures ne sont réalisées qu'entre voisins immédiats au cours d'une itération. L'effet d'une perturbation n'est donc ressenti par les sous-structures lointaines qu'après un nombre important d'itérations LaTin. Dans [Ladevèze et al., 2002], l'extensibilité est rétablie par construction d'un problème grossier, global sur toute la structure, et par sa résolution à chaque itération du solveur. Le problème grossier est obtenu en imposant systématiquement la continuité d'une moyenne de champs d'interface entre chaque couple de sous-structures adjacentes, et par le calcul et l'assemblage d'opérateurs homogénéisés des sous-structures au sens de ces quantités. Les moyennes des champs d'interface, appelées composantes macroscopiques, sont les parties à grande longueur de variation de la solution.

Cette stratégie s'est montrée efficace dans de nombreux domaines. On pourra citer les travaux de [Ladevèze et Dureisseix, 2000] pour l'étude de structures possédant de fortes hétérogénéités matérielles, ceux de [Nouy et Ladevèze, 2004] pour le traitement des non-linéarités de type contact traitées dans les interfaces de la stratégie, ceux de [Guidault et al., 2008] pour les calculs de fissuration en fatigue avec intégration de la XFEM, ou encore les travaux de [Violeau, 2007] pour la résolution de problèmes de composites stratifiés modélisés à l'échelle microscopique, seules les interfaces de la méthode présentant une aptitude à la rupture.

2.2.3 Bilan concernant les méthodes de calcul exact

Les trois types d'approche présentés ici pour résoudre des problèmes industriels de délaminage sont tous envisageables. Cependant, les méthodes basées sur les décompositions de domaine paraissent beaucoup plus aisées à mettre en oeuvre sur des architectures parallèles. De plus, ces méthodes proposent une vision très « mécanique » de la résolution de systèmes de grande taille, ce qui explique leur succès dans le domaine du calcul de structure.

Les méthodes de décomposition de domaine décrites précédemment ont démontré leur efficacité pour résoudre des problèmes non-linéaires de grande taille. [Germain et al., 2007] traitent par exemple des problèmes de fissuration dans les composites, avec un modèle d'endommagement non-local, en résolvant les prédictions linéaires d'un schéma de Newton par la méthode FETI. Les travaux de [Violeau, 2007] sur l'utilisation de la méthode de décomposition de domaine mixte basée sur l'algorithme LaTIn pour simuler les dégradations à l'échelle microscopique dans les stratifiés démontrent également la capacité de cette stratégie pour résoudre les problèmes à grand nombre de degrés de liberté. La méthode micro/macro a été retenue pour nos travaux, et ce pour deux raisons principales. Tout d'abord, la sous-structuration proposée en entités mécaniques 2D et 3D semble très appropriée à la résolution des problèmes de stratifiés modélisés comme assemblage de plis élastiques et d'interfaces endommageables. D'autre part, les travaux précédemment cités démontrent une certaine maturité de la compréhension de cette stratégie dans le cadre du traitement de non-linéarités de surface. L'application de cette méthode aux problèmes de délaminage résolus de manière incrémentale fait l'objet de la prochaine partie.

Méthode de décomposition de domaine mixte pour les non-linéarités de surface

La stratégie de décomposition de domaine mixte à deux échelles basée sur l'algorithme de résolution de problèmes non-linéaires LaTIn est ici décrite dans le cadre du traitement de non-linéarités de surface, à chaque piquet de temps d'un schéma d'intégration implicite.

Sommaire

1	Sous-structuration	54
1.1	Principe	54
1.2	Notations	55
1.3	Problème sous-structuré	56
1.4	Choix des espaces d'approximation	57
2	Introduction de l'échelle macroscopique	59
2.1	Séparation d'échelles	59
2.2	Base macroscopique	60
2.3	Admissibilité macroscopique des champs d'interface	63
3	Algorithme itératif de résolution	65
3.1	Principe	65
3.2	Etape linéaire	66
3.3	Etape locale	69
3.4	Convergence de la stratégie	71
3.5	Algorithme du code	72
4	Implantation de la méthode pour le calcul parallèle	74
4.1	Parallélisation des itérations LaTIn	74
4.2	Répartition des données	76

La stratégie multiéchelle de décomposition de domaine mixte décrite dans [Ladevèze et Nouy, 2003] est ici directement appliquée au traitement du problème de référence posé dans le chapitre 1. Dans la version proposée ici, cette méthode repose sur trois points fondamentaux :

- Une décomposition de la structure en sous-structures, entités mécaniques volumiques, et en interfaces, entités surfaciques permettant d’assurer la transmission des efforts et des déplacements entre les sous-structures.
- Une séparation d’échelle réalisée sur les interfaces. Les champs macroscopiques d’interface, quantités ayant une influence globale sur la structure, sont extraits par projection des champs d’interface sur une base macroscopique.
- Un algorithme de résolution itératif à deux étapes. On cherche successivement des solutions vérifiant les équations d’admissibilité des sous-structures et les conditions de raccord en moyenne (c’est-à-dire le raccord de quantités macroscopiques) sur les interfaces (étape linéaire), et des solutions vérifiant les conditions de raccord complet aux interfaces (étape locale).

1 Sous-structuration

1.1 Principe

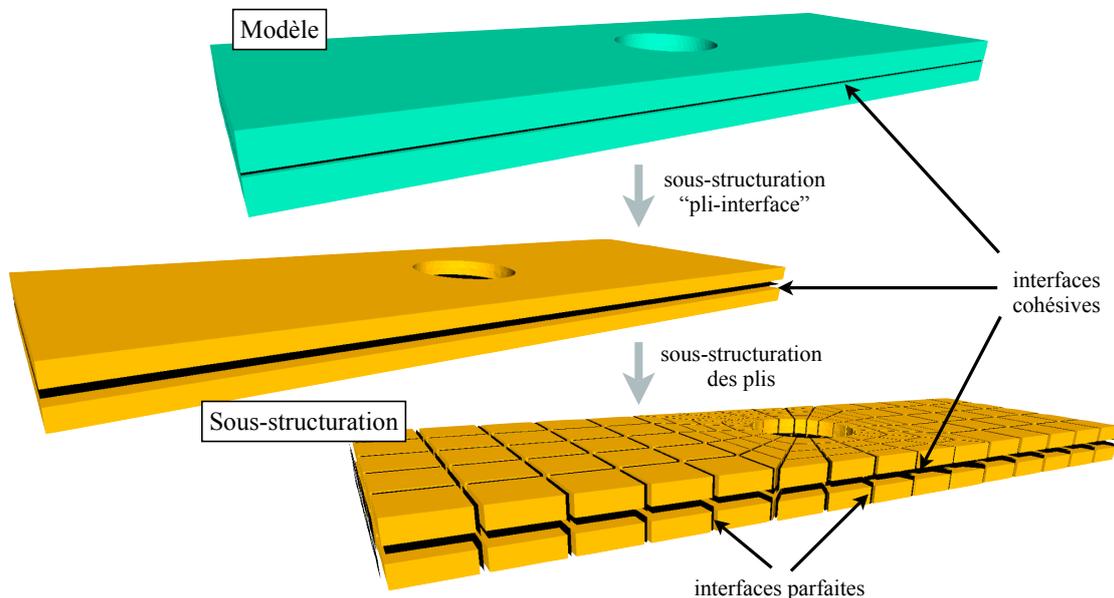


FIG. 3.1: Décomposition du domaine en sous-structures et interfaces

Classiquement, la décomposition en sous-domaines d’un problème de mécanique de grande taille permet de répartir les opérateurs de chaque sous-structure sur les processeurs d’une architecture parallèle. Dans ce cadre, la sous-structuration est

généralement réalisée de manière automatique afin d'équilibrer les charges sur ces processeurs. Un autre type de sous-structuration, plutôt pratiquée dans une optique d'optimisation de conception, consiste en une décomposition du domaine en différentes pièces d'un assemblage, les conditions d'interaction étant gérées aux interfaces entre sous-domaines. Ici, nous choisissons une démarche intermédiaire en réalisant la sous-structuration en deux étapes (voir Figure 3.2) :

- Une première décomposition consiste à définir chacun des plis comme sous-structure, le comportement cohésif des interfaces physiques entre plis voisins étant alors traité comme une interaction entre sous-structures.
- Une seconde décomposition consiste à découper chacun des plis en sous-structures afin d'obtenir une répartition optimale des charges sur les processeurs de l'architecture parallèle d'une part, et d'optimiser l'efficacité de l'algorithme itératif de résolution d'autre part (voir Chapitre 4).

L'originalité de la méthode de décomposition de domaine mixte est d'introduire des entités mécaniques surfaciques aux interfaces entre sous-structures, permettant de traiter efficacement les lois d'interaction, appelées par suite comportement d'interface.

1.2 Notations

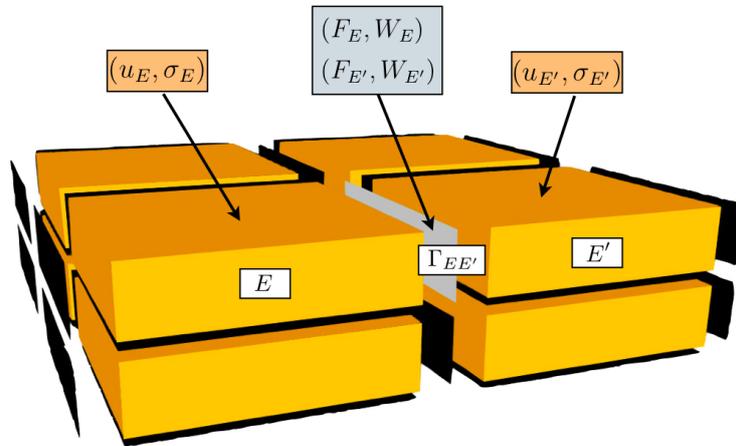


FIG. 3.2: Sous-structures et interfaces

La structure \mathbf{E} est décomposée en sous-structures. Une sous-structure E , définie sur un domaine Ω_E tel que $\bigcup_E \Omega_E = \Omega$, est connectée à une sous-structure adjacente E' par l'intermédiaire d'une interface $\Gamma_{EE'}$ occupant le domaine $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{E'}$ (voir Figure 3.2). On note \mathbf{V}_E l'ensemble des structures E' telles que $\Omega_E \cap \Omega_{E'} \neq \{0\}$.

Les champs \underline{u}_E , $\underline{\sigma}_E$ et $\underline{\epsilon}(\underline{u}_E)$ définis sur la sous-structure E représentent respectivement le déplacement, le tenseur des contraintes de Cauchy et la partie symétrique

du gradient du déplacement. Les champs \underline{u}_E et $\underline{\sigma}_E$ sont recherchés dans les espaces respectifs \mathcal{U}_E et \mathcal{S}_E .

L'entité surfacique $\Gamma_{EE'}$, où $E' \in \mathbf{V}_E$ impose des distributions d'effort $\underline{F}_E, \underline{F}_{E'}$ et de déplacement $\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}$ à E et E' respectivement. Ces distributions sont recherchées dans les espaces respectifs $\mathcal{W}_{EE'}$ et $\mathcal{F}_{EE'}$. Sur E telle que $\partial\Omega_E \cap (\partial\Omega_f \cup \partial\Omega_u) \neq \{0\}$, les conditions aux limites sont transmises par introduction d'une interface particulière Γ_{E_d} . On note $\Gamma_E = \bigcup_{E' \in \mathbf{V}_E} \Gamma_{EE'} \cup \Gamma_{E_d}$ l'ensemble des interfaces de la sous-structure E . Les champs cinématiques et statiques des interfaces de E sont respectivement recherchés dans les espaces $\mathcal{W}_E = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{W}_{EE'}$ et $\mathcal{F}_E = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{F}_{EE'}$. On notera finalement $\mathbf{\Gamma}$ l'ensemble des interfaces de la structure.

1.3 Problème sous-structuré

Avec la sous-structuration définie dans la section 1.1, le problème de délaminage s'écrit alors à chaque pas de temps du schéma d'intégration implicite :

Trouver la solution $s = (s_E)_{E \in \mathbf{E}}$, où $s_E = (\underline{u}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{W}_E, \underline{F}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{S}_E \times \mathcal{W}_E \times \mathcal{F}_E$, vérifiant :

- Admissibilité cinématique de chaque sous-structure E :

$$\text{En tout point de } \Gamma_E, \quad \underline{u}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E|_{\Gamma_E} \quad (3.1)$$

- Admissibilité statique de E :

$$\forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E^0 \times \mathcal{W}_E^0 \quad \text{tels que} \quad \underline{u}_E^*|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E^*|_{\Gamma_E} \\ \int_{\Omega_E} \text{Tr} \left(\underline{\sigma}_E \underline{\epsilon}(\underline{u}_E^*) \right) d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \quad (3.2)$$

- Comportement de E :

$$\text{En tout point de } E, \quad \underline{\sigma}_E = \mathbf{K} \underline{\epsilon}(\underline{u}_E) \quad (3.3)$$

- Comportement des interfaces entre sous-structures adjacentes :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{EE'} \text{ tel que } E' \in \mathbf{V}_E, \quad \mathcal{R}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) = 0 \quad (3.4)$$

- Comportement des interfaces transmettant les conditions aux limites :

$$\text{Si } \Gamma_E \cap \partial\Omega \neq \{0\}, \text{ En tout point de } \Gamma_{E_d}, \quad \mathcal{R}_d(\underline{W}_E, \underline{F}_E) = 0 \quad (3.5)$$

L'opérateur \mathbf{K} est l'opérateur de comportement orthotrope linéaire \mathbf{K}_P de l'unique pli P auquel appartient la sous-structure E , c'est-à-dire :

$$\text{Si } E \in P, \quad \underline{\sigma}_E = \mathbf{K}_P \underline{\epsilon}(\underline{u}_E) \quad (3.6)$$

L'admissibilité statique (3.2) de chaque sous-structure est donc un problème linéaire.

La relation de comportement écrite de manière formelle $\mathcal{R}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) = 0$ regroupe l'équation constitutive et l'équilibre local des interfaces entre sous-structures

adjacentes. On utilise dans notre cas deux types de comportement pour ces interfaces :

- Interfaces parfaites entre sous-structures. Le comportement local d'une interface parfaite $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures E et E' de \mathbf{E} et appartenant à un même pli s'écrit alors :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad \begin{cases} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \\ \underline{W}_E - \underline{W}_{E'} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

- Interfaces cohésives entre plis. Le comportement local d'une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures E et E' de \mathbf{E} telles que $E \in P$ et $E' \in P'$, en se rapportant aux notations introduites pour écrire le problème de référence posé au chapitre 1, s'écrit :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad \begin{cases} \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \\ \mathcal{A}_{PP'}(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E, \underline{F}_E) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Son traitement dans la stratégie itérative de résolution est détaillé dans la section 3.3.

Les conditions aux limites extérieures exercées sur E sont appliquées par l'intermédiaire d'interfaces Γ_{E_d} de deux types :

- Si $\Gamma_{E_d} \in \partial\Omega_f$ la relation $\mathcal{R}_d = 0$ s'écrit :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{E_d}, \quad \underline{F}_E - \underline{F}_d = 0 \quad (3.9)$$

- Si $\Gamma_{E_d} \in \partial\Omega_u$ la relation $\mathcal{R}_d = 0$ s'écrit :

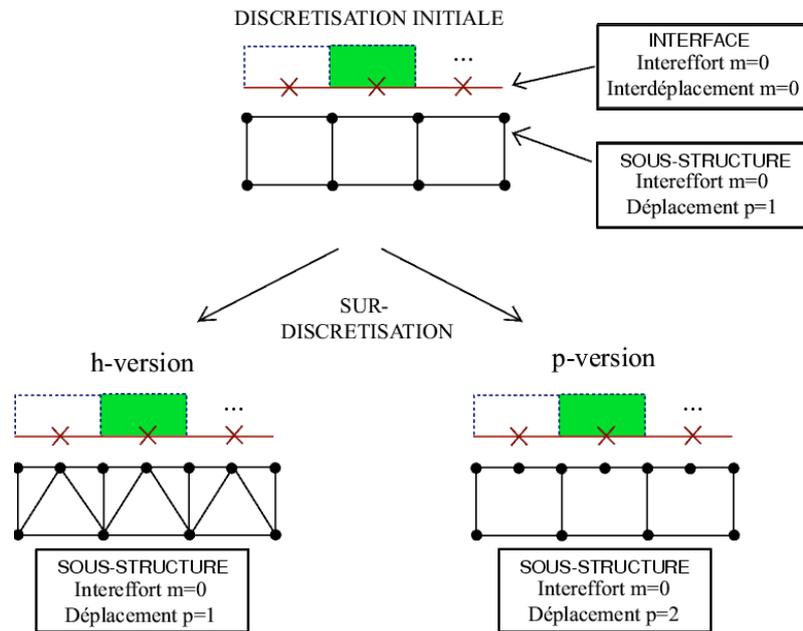
$$\text{En tout point de } \Gamma_{E_d}, \quad \underline{W}_E - \underline{U}_d = 0 \quad (3.10)$$

D'autres types de conditions aux limites (symétrie, ...) peuvent être imposés au problème en réécrivant le comportement des interfaces particulières Γ_{E_d} .

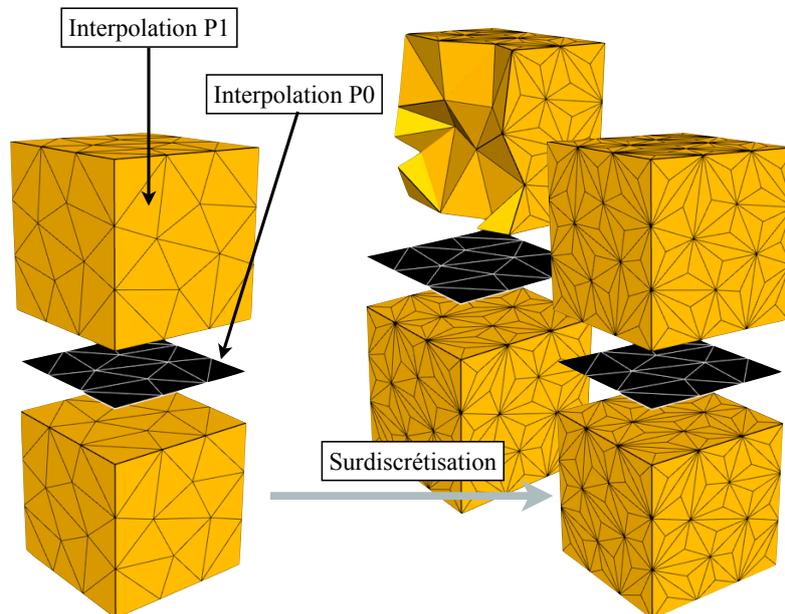
■ **Remarque 1.1** *Cette façon pratique de traiter les conditions aux limites n'est pas une nécessité. On pourrait raisonnablement utiliser les méthodes classiques de multiplicateur de Lagrange ou de pénalisation pour résoudre les problèmes posés sur chaque sous-structure de bord sous conditions extérieures imposées. Dans les faits, on introduit des interfaces sur le bord de la structure pour imposer les déplacements extérieurs (nuls ou non) et les efforts extérieurs non nuls.*

1.4 Choix des espaces d'approximation

Les problèmes sur les sous-structures et les interfaces sont classiquement résolus numériquement en utilisant une discrétisation éléments finis standard. Ainsi, le déplacement \underline{u}_E appartient à \mathcal{U}_E^h , espace des déplacements linéaires par morceaux sur E . Les éléments utilisés pour discrétiser les sous-structures dans les cas 3D traités



(a) Choix des espaces d'approximation



(b) Structure 3D discrétisée

FIG. 3.3: Discrétisation des champs d'interface et de sous-structure

sont des tétraèdres à 4 noeuds (voir Figure 1.4 (b)).

Dans le cadre de la méthode de décomposition de domaine mixte, une attention particulière doit être portée à la discrétisation des champs d'interface. Il s'agit d'une part de vérifier les conditions de stabilité « inf-sup » associées aux problèmes mixtes [Fortin et Brezzi, 1991], d'autre part d'écrire une relation discrète locale entre les champs statiques et cinématiques d'interface (voir l'introduction des directions de recherche de l'algorithme LaTIn dans la section 3), et enfin d'utiliser une représentation mécaniquement satisfaisante des efforts d'interface. La démarche usuellement retenue pour respecter ces conditions dans le cadre de la méthode micro/macro est de choisir les champs \underline{F}_E et \underline{W}_E dans le même espace $\mathcal{W}_E^h = \mathcal{F}_E^h$ de fonctions constantes par morceaux sur Γ_E et de pratiquer une surdiscrétisation des champs déplacement de sous-structures [Ladevèze et Nouy, 2002]. Deux solutions sont proposées pour effectuer cette dernière étape. On peut choisir soit de raffiner localement, près des bords, le maillage des sous-structures (solution de type « h »), soit d'augmenter le degré d'interpolation des fonctions de forme des éléments de bord des sous-structures (solution de type « p ») (voir Figure 1.4 (a)). On utilise, pour les travaux présentés dans ce mémoire, le raffinement de type « h » (voir Figure 1.4 (b)).

2 Introduction de l'échelle macroscopique

Les premières résolutions de problèmes sous-structurés par l'algorithme LaTIn [Ladevèze, 1999] proposent de chercher itérativement des solutions vérifiant l'admissibilité des sous-structures, puis les conditions de raccord aux interfaces. Dans [Ladevèze et Dureisseix, 2000], les auteurs montrent que le taux de convergence de cette stratégie se dégrade lorsque le nombre de sous-structures augmente, l'information n'étant propagée que d'une sous-structure à ses voisins immédiats au cours d'une itération.

Pour rétablir l'extensibilité numérique de la méthode, [Ladevèze et Dureisseix, 2000] proposent d'imposer systématiquement, lors de la résolution des problèmes sur chaque sous-structure, la vérification partielle des comportements d'interface. Comme nous le verrons dans la section 3.2, la vérification de cette condition de raccord implique la résolution d'un problème homogénéisé global de la structure à chaque itération du solveur.

2.1 Séparation d'échelles

Sur chaque interface $\Gamma_{EE'}$ sur les interfaces de bord Γ_{E_a} , les champs cinématiques et statiques sont séparés en une partie macroscopique notée M et une partie microscopique notée m .

$$\forall(\underline{F}, \underline{W}) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}, \text{ en tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad \begin{cases} \underline{F} = \underline{F}^M + \underline{F}^m \\ \underline{W} = \underline{W}^M + \underline{W}^m \end{cases} \quad (3.11)$$

Les parties macroscopiques sont recherchées dans des sous-espaces de dimension finie $\mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_{EE'}^M$ de $\mathcal{F}_{EE'}$ et $\mathcal{W}_{EE'}$ respectivement. Les parties microscopiques sont par suite recherchées dans les espaces $\mathcal{F}_{EE'}^m$ et $\mathcal{W}_{EE'}^m$ définis par les relations de complémentarité $\mathcal{F}_{EE'}^M \oplus \mathcal{F}_{EE'}^m = \mathcal{F}_{EE'}$ et $\mathcal{W}_{EE'}^M \oplus \mathcal{W}_{EE'}^m = \mathcal{W}_{EE'}$.

Le découplage entre les parties macroscopiques et microscopiques est réalisé au sens des travaux d'interface : les parties macroscopiques (respectivement microscopiques) des efforts d'interface ne travaillent pas dans les déplacements microscopiques (macroscopiques) d'interface. Mathématiquement, cette définition s'écrit :

$$\forall(\underline{F}, \underline{W}) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}, \quad (3.12)$$

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m \, d\Gamma$$

■ **Remarque 2.1** Cette relation peut s'interpréter comme une relation d'orthogonalité au sens du produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Gamma_{EE'})$ des espaces $\mathcal{W}_{EE'}^M$ et $\mathcal{F}_{EE'}^m$ d'une part, et des espaces $\mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_{EE'}^m$ d'autre part. Le choix d'un espace commun $\mathcal{W}_{EE'} = \mathcal{F}_{EE'}$ a été détaillé dans la section 1.4. Une façon de respecter la relation de découplage est alors de choisir un espace macroscopique commun $\mathcal{W}_{EE'}^M = \mathcal{F}_{EE'}^M$ pour les quantités statiques et cinématiques macroscopiques d'interface.

On définit l'espace $\mathcal{W}_E^M = \Pi_{E' \in \mathbf{v}_E} \mathcal{W}_{EE'}^M$ (respectivement $\mathcal{F}_E^M = \Pi_{E' \in \mathbf{v}_E} \mathcal{F}_{EE'}^M$), sous-espace de \mathcal{W}_E (respectivement de \mathcal{F}_E), dans lequel sont recherchés les champs cinématiques (respectivement statiques) macroscopiques des interfaces de E .

2.2 Base macroscopique

2.2.1 Projecteur macroscopique

On définit $\Pi_{EE'}^M$, projecteur des champs d'une interface $\Gamma_{EE'}$ dans l'espace d'approximation macroscopique de dimension finie $\mathcal{W}_{EE'}^M$. Son expression est obtenue par introduction d'une base orthonormée $B_{EE'}^M = (\underline{e}_{EE',i}^M, \dots, \underline{e}_{EE',N_M}^M)$ de $\mathcal{W}_{EE'}^M$.

$$\forall(\underline{F}, \underline{W}) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}, \text{ en tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \underline{F}^M = \Pi_{EE'}^M \underline{F} = \sum_{i=1}^{N_M} \langle \underline{e}_{EE',i}^M, \underline{F} \rangle \underline{e}_{EE',i}^M \\ \underline{W}^M = \Pi_{EE'}^M \underline{W} = \sum_{i=1}^{N_M} \langle \underline{e}_{EE',i}^M, \underline{W} \rangle \underline{e}_{EE',i}^M \end{cases}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant le produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Gamma_{EE'})$. Une opération similaire sur les interfaces de E telles que $\Gamma_E \cap \partial\Omega \neq \{0\}$ permet de définir le projecteur macroscopique $\Pi_{E_d}^M$ des interfaces de conditions aux limites.

Pour assurer l'extensibilité de la stratégie, les quantités macroscopiques d'interface, transmises systématiquement entre les sous-structures à chaque itération du solveur, doivent contenir toute l'information à grande longueur de variation des champs d'interface. Cependant, la dimension des espaces macroscopiques doit rester faible. En effet, le problème global homogénéisé qui découle des contraintes de transmission de champs macroscopiques aux interfaces porte sur les degrés de liberté macroscopiques à chaque itération du solveur LaTin.

Des études numériques proposées dans [Ladevèze et al., 2002] montrent que l'extraction des parties linéaires des champs d'interface permet d'obtenir l'extensibilité de la méthode pour un problème macroscopique de taille raisonnable (12 degrés de liberté par interface en 3D). Nous verrons dans la section 5 que pour des problèmes présentant des solutions à très forts gradients sur les interfaces, les quantités microscopiques (comprendre orthogonale aux quantités extraites par le projecteur macroscopique linéaire) peuvent avoir une influence non locale sur la solution, ce qui résulte en une perte d'extensibilité numérique et une baisse significative du taux de convergence.

2.2.2 Construction de la base macroscopique linéaire

Les détails de la construction de la base macroscopique linéaire [Ladevèze et Dureisseix, 2000] pour des interfaces quelconques dans le cadre de la résolution de problèmes tridimensionnels peuvent être trouvés dans [Violeau, 2007]. Les grandes idées de cette construction sont rappelées ici.

On construit usuellement la base macroscopique $B_{EE'}^M$ d'une interface $\Gamma_{EE'}$ en utilisant les vecteurs propres $(\underline{N}_{EE',i})_{i \in \{1,2,3\}}$ de la matrice d'inertie $\mathbf{I}_{EE'}$ définie par :

$$\mathbf{I}_{EE'} = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{G}_{EE'} M \otimes \underline{G}_{EE'} M d\Gamma \quad (3.14)$$

où $\underline{G}_{EE'}$ (respectivement M) est le centre de gravité (respectivement un point courant) de l'interface $\Gamma_{EE'}$. Cette pratique permet de donner un sens mécanique à chacun des vecteurs de la base macroscopique.

Les vecteurs de $B_{EE'}^M$ permettant d'extraire les résultantes des efforts d'interface et les translations des déplacements d'interface sont alors définis par :

$$\begin{aligned} \underline{e}_{EE',1}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} \underline{N}_{EE',1} \\ \underline{e}_{EE',2}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} \underline{N}_{EE',2} \\ \underline{e}_{EE',3}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} \underline{N}_{EE',3} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Les vecteurs de base permettant d'extraire les moments et rotations des champs

d'interface s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\underline{e}_{EE',4}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} (\underline{N}_{EE',1} \wedge \underline{G}_{EE'} M) \\
\underline{e}_{EE',5}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} (\underline{N}_{EE',2} \wedge \underline{G}_{EE'} M) \\
\underline{e}_{EE',6}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} (\underline{N}_{EE',3} \wedge \underline{G}_{EE'} M)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ces six vecteurs de base sont, par construction, orthogonaux entre eux au sens de $\mathcal{L}^2(\Gamma_{EE'})$.

Extraire la partie linéaire des champs d'interface consiste à considérer celle-ci comme un milieu déformable. On rajoute alors aux six vecteurs de base précédemment définis ceux permettant d'extraire les modes d'extension de l'interface $\Gamma_{EE'}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{e}}_{EE',7}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} (\underline{N}_{EE',1} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',1} \\
\tilde{\underline{e}}_{EE',8}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} (\underline{N}_{EE',2} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',2} \\
\tilde{\underline{e}}_{EE',9}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} (\underline{N}_{EE',3} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',3}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

et les modes de cisaillement de l'interface $\Gamma_{EE'}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{e}}_{EE',10}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} ((\underline{N}_{EE',2} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',1} + (\underline{N}_{EE',1} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',2}) \\
\tilde{\underline{e}}_{EE',11}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} ((\underline{N}_{EE',1} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',3} + (\underline{N}_{EE',3} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',1}) \\
\tilde{\underline{e}}_{EE',12}^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} ((\underline{N}_{EE',3} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',2} + (\underline{N}_{EE',2} \cdot \underline{G}_{EE'} M) \underline{N}_{EE',3})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ces six derniers vecteurs de bases ne sont pas orthogonaux entre eux (au sens du produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Gamma_{EE'})$) ni orthogonaux aux six premiers. Les vecteurs $(\underline{e}_{EE',i}^M)_{i \in \{7,8,9,10,11,12\}}$ effectivement utilisés pour construire la base macroscopique de $\Gamma_{EE'}$ sont déduits de $(\tilde{\underline{e}}_{EE',i}^M)_{i \in \{7,8,9,10,11,12\}}$ et de $(\underline{e}_{EE',i}^M)_{i \in \{1,2,3,4,5,6\}}$ par une procédure d'orthonormalisation de Schmidt.

■ **Remarque 2.2** *Pour une interface $\Gamma_{EE'}$ plane, le produit scalaire $\underline{N}_E \cdot \underline{G}_{EE'} M$, où \underline{N}_E est la normale à l'interface extérieure à E , est nul. \underline{N}_E est ici colinéaire au vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice d'inertie $\mathbf{I}_{EE'}$. Des six fonctions de base macroscopique correspondant à des modes de déformation de l'interface, trois sont nulles. La base macroscopique d'une interface plane est donc composée de seulement neuf vecteurs (voir Figure 2.2.3 (a)).*

2.2.3 Exemple

Un exemple de calcul sur une poutre fissurée en flexion (voir Figure 2.2.3 (b)) permet de visualiser la partie macroscopique des champs d'interface, correspondant à la reconstruction 3D d'une solution issue d'un modèle de poutre, et la partie microscopique, ayant une influence localisée autour de chaque interface, et de niveau peu significatif en dehors des zones à forts gradients.

2.3 Admissibilité macroscopique des champs d'interface

Le dernier point nécessaire à la définition du problème grossier de l'approche micro/macro est la définition des conditions d'admissibilité des champs macroscopiques d'interface que doivent vérifier, à chaque itération du solveur, les solutions équilibrées sur les sous-structures.

La condition la plus naturelle est d'imposer aux champs macroscopiques de vérifier le comportement d'interface. Pour une interface parfaite $\Gamma_{EE'}$, cette relation s'écrit :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad \begin{cases} \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = 0 \\ \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Cependant, il n'est pas toujours possible de définir un comportement macroscopique. Considérons par exemple la cas d'une interface élastique non homogène dont la loi constitutive s'écrit :

$$\forall M \in \Gamma_{EE'}, \quad \underline{F}_E - \mathbf{k}(M)(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) = 0 \quad (3.20)$$

L'écriture sous forme variationnelle de cette relation, en prenant des champs test dans l'espace macroscopique, et en notant $[\underline{W}]_E = \underline{W}_{E'} - \underline{W}_E$, donne :

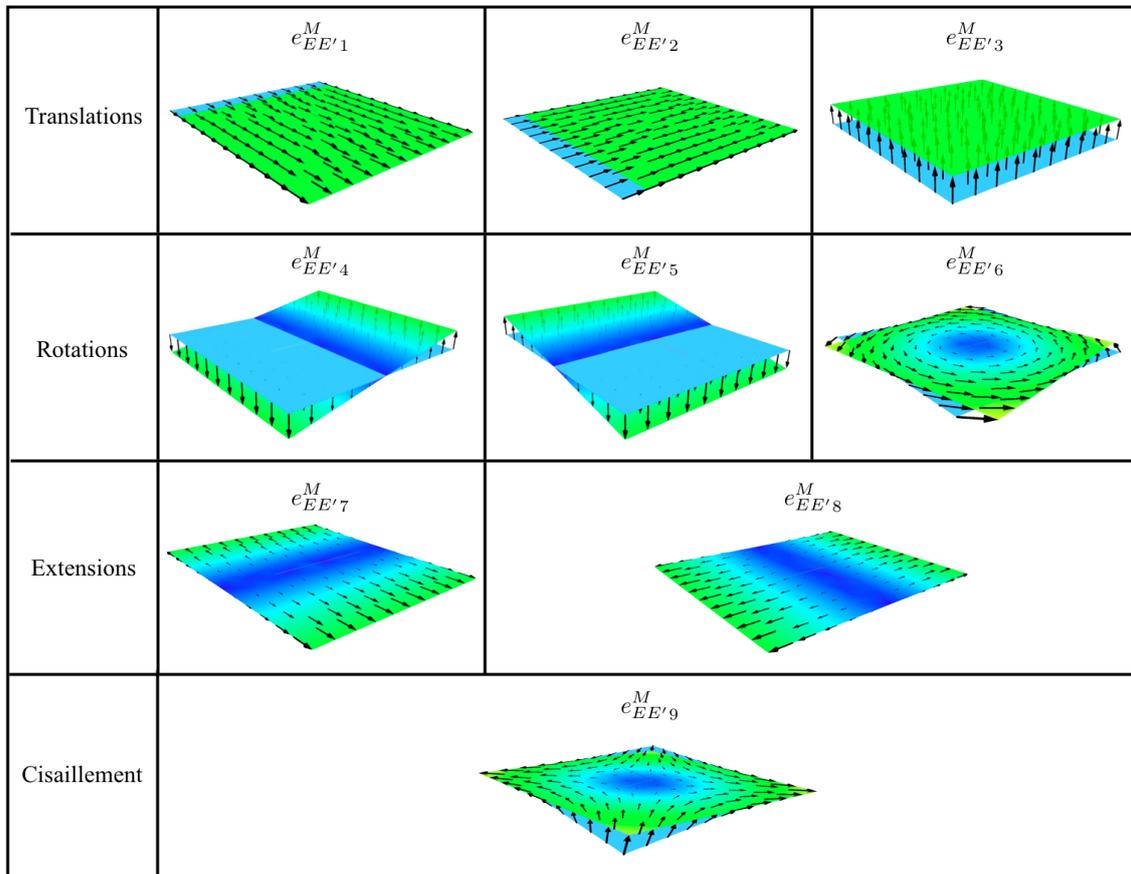
$$\forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \left(\underline{F}_E - \mathbf{k}(M)[\underline{W}]_E \right) \cdot \underline{W}^{M*} d\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

Par orthogonalité, on obtient :

$$\forall \underline{W}^* \in \mathcal{W}_{EE'}, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \left(\underline{F}_E^M - \mathbf{\Pi}_{EE'}^M \mathbf{k}(M)([\underline{W}]_E^M + [\underline{W}]_E^m) \right) \cdot \underline{W}^* d\Gamma = 0 \quad (3.22)$$

La relation de découplage (3.12) impose une orthogonalité des champs macroscopiques et microscopiques d'interface au sens du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et non au sens du comportement d'interface, le terme $\int_{\Gamma_{EE'}} \left(\mathbf{\Pi}_{EE'}^M \mathbf{k}(M)[\underline{W}]_E^m \right) \cdot \underline{W}^* d\Gamma$ n'est *a priori* pas nulle. Par suite, la projection du comportement dans l'espace macroscopique n'a pas forcément de sens mécanique.

En outre, et dans le cas où cette relation existe, pour un comportement non-linéaire d'interface, une linéarisation des conditions de raccord macroscopique serait requise à chaque itération du solveur. Il serait alors nécessaire de reconstruire le problème homogénéisé global à chaque itération du solveur LaTin.



(a) Base macroscopique linéaire en 3D pour une interface plane

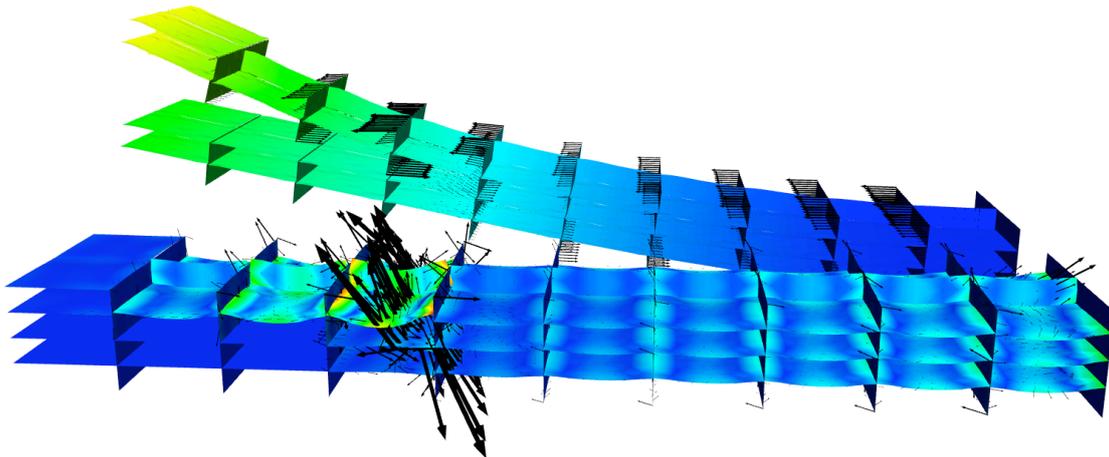
(b) Champs macroscopiques linéaires et microscopiques (déformée $\times 10$) sur une poutre fissurée en flexion

FIG. 3.4: Base macroscopique

[Nouy et Ladevèze, 2004] proposent de n'imposer que la vérification de l'équilibre des efforts macroscopiques, relation linéaire et toujours vérifiée quel que soit le comportement d'interface. On recherchera donc les efforts macroscopiques d'interface dans l'espace d'admissibilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{ad}}^M = \{ & (\underline{F}_E^M)_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{F}_E^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \\ & (\forall E' \in \mathbf{V}_E, \text{ sur } \Gamma_{EE'}, \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0) \\ & \text{et (si } \Gamma_E \cap \partial\Omega_f \neq \{0\}, \text{ sur } \Gamma_{E_d}, \underline{F}_E^M + \Pi_{E_d}^M F_d = 0) \} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ces conditions d'admissibilité macroscopiques statiques sont suffisantes pour rétablir l'extensibilité dans le cas linéaire. Pour des problèmes non-linéaires, l'absence de contrainte macroscopique portant sur les déplacements macroscopiques d'interface implique des difficultés numériques. Des solutions à ces problèmes sont détaillées dans le chapitre 4.

3 Algorithme itératif de résolution

3.1 Principe

Le problème non-linéaire sous-structuré à résoudre à chaque pas de temps du schéma d'intégration temporelle implicite est résolu par un algorithme itératif LaTIn. Le principe de ce solveur consiste en une séparation des équations du problème en deux groupes distincts, et une recherche de solutions successives vérifiant alternativement ces deux groupes d'équations :

- Equations linéaires sur les sous-structures et conditions linéaires de raccord macroscopique aux interfaces :
 - admissibilité statique des sous-structures
 - admissibilité cinématique des sous-structures
 - comportement linéaire des sous-structures
 - équilibre des efforts macroscopiques d'interface
- Equations locales (éventuellement non-linéaires) sur les interfaces :
 - comportement des interfaces

Les champs d'interface $s = (s_E)_{E \in \mathbf{E}} = (\underline{W}_E, \underline{F}_E)_{E \in \mathbf{E}}$ vérifiant le premier groupe d'équations sont cherchés dans l'espace d'admissibilité \mathbf{A}_d , alors que les champs d'interface $\hat{s} = (\hat{s}_E)_{E \in \mathbf{E}} = (\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)_{E \in \mathbf{E}}$ vérifiant le deuxième groupe d'équations appartiennent à l'espace Γ . La solution exacte s_{ref} est à l'intersection de ces deux espaces :

$$s_{ref} \in \mathbf{A}_d \cap \Gamma \quad (3.24)$$

La solution s_{ref} est alors cherchée itérativement dans ces deux espaces : on calcule successivement des solutions s_n dans \mathbf{A}_d et $\hat{s}_{n+\frac{1}{2}}$ dans Γ (voir Figure 3.5). Pour fermer ces deux types de problème, des directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- liant les solutions s et \hat{s} au cours des itérations sont introduites.

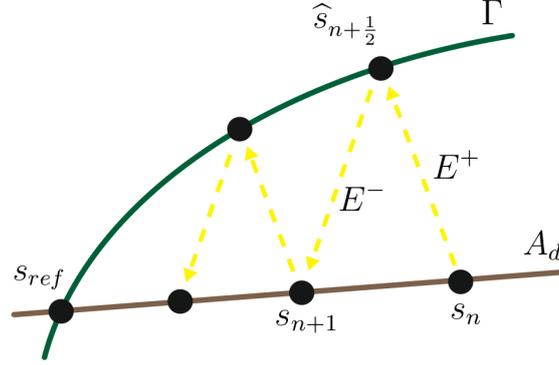


FIG. 3.5: Algorithme de résolution de problèmes non-linéaires LaTIn

Le schéma de résolution est donc constitué de deux étapes :

- une étape locale :

$$\text{Trouver } \widehat{s}_{n+\frac{1}{2}} \in \Gamma \text{ tel que } \left(\widehat{s}_{n+\frac{1}{2}} - s_n \right) \in \mathbf{E}^+ \quad (3.25)$$

- une étape linéaire :

$$\text{Trouver } s_{n+1} \in \mathbf{A}_d \text{ tel que } \left(s_{n+1} - \widehat{s}_{n+\frac{1}{2}} \right) \in \mathbf{E}^- \quad (3.26)$$

Dans la suite du chapitre, afin d'alléger l'écriture, les indices n sont omis.

3.2 Étape linéaire

3.2.1 Système linéaire à résoudre

L'étape linéaire consiste en la résolution de problèmes linéaires sur la structure, afin de résoudre le système d'équations constitué de :

- l'admissibilité statique de chaque sous-structure
- l'admissibilité cinématique de chaque sous-structure
- le comportement linéaire des sous-structures
- l'admissibilité des efforts macroscopiques des interfaces
- la direction de recherche \mathbf{E}^- portant sur les quantités d'interface

La direction de recherche \mathbf{E}^- s'écrit localement sur les interfaces d'une sous-structure E :

$$\text{En tout point de } \Gamma_E, \quad (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + k_E^-(\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) = 0 \quad (3.27)$$

où le paramètre de direction de descente k_E^- est un opérateur local symétrique défini positif.

La prise en compte de l'admissibilité macroscopique des efforts d'interface est incompatible avec cette équation. [Nouy et Ladevèze, 2004] proposent de vérifier \mathbf{E}^-

au mieux sous la contrainte d'admissibilité des efforts macroscopiques d'interface. On cherche pour cela le point selle dans $(\Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{F}_E) \times \mathcal{W}_{\text{ad}}^M$ du Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} \Phi \left((\underline{F}_E)_{E \in \mathbf{E}}, (\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}} \right) &= \sum_{E \in \mathbf{E}} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_E} k_E^{-1} (\underline{F}_E - \widehat{F}_E)^2 d\Gamma \\ &+ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_E} (\underline{W}_E - \widehat{W}_E) \cdot (\underline{F}_E - \widehat{F}_E) d\Gamma \\ &- \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \widetilde{W}_E^M d\Gamma - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_E \cap \partial\Omega_f} (\underline{F}_E - \underline{F}_d) \cdot \widetilde{W}_E^M d\Gamma \end{aligned} \quad (3.28)$$

L'introduction du multiplicateur de Lagrange $(\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}}$, recherché dans l'espace $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$, permet d'imposer les conditions de continuité d'efforts macroscopiques d'interface et de transmission de conditions aux limites macroscopiques sur $\partial\Omega_f$.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{ad}}^M &= \{ (\underline{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} \mathcal{W}_E^M, \forall E \in \mathbf{E}, \\ &(\forall E' \in \mathbf{V}_E, \text{ sur } \Gamma_{EE'}, \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = 0) \\ &\text{et (si } \Gamma_E \cap \partial\Omega_u \neq \{0\}, \text{ sur } \Gamma_{E_d}, \underline{W}_E^M = 0) \} \end{aligned} \quad (3.29)$$

La recherche d'extremum de ce Lagrangien, par rapport à $(\underline{F}_E)_{E \in \mathbf{E}}$ d'une part, et $(\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}}$ d'autre part, donne respectivement une équation locale de direction de recherche modifiée (3.30), et une équation (3.31) traduisant les conditions d'admissibilité macroscopique :

Trouver $((\underline{W}_E, \underline{F}_E))_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}} (\mathcal{W}_E \times \mathcal{F}_E)$ tel que :

$$\forall E \in \mathbf{E}, \forall \underline{W}_E^* \in \mathcal{W}_E^0, \int_{\Gamma_E} \left((\underline{F}_E - \widehat{F}_E) + k_E^- (\underline{W}_E - \widehat{W}_E) - k_E^- \widetilde{W}_E^M \right) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

$$\forall (\widetilde{W}_E^{M*})_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{\text{ad}}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma \quad (3.31)$$

Une façon de résoudre ce problème consiste à calculer une relation couplant \underline{F}_E^M et \widetilde{W}_E^M , par l'intermédiaire de résolution de problèmes sur chaque sous-structure, et de l'injecter dans (3.31), de façon à obtenir un problème macroscopique formulé en variable primale.

Afin d'obtenir cette relation, l'équation (3.30), le comportement des sous-structures ainsi que l'admissibilité cinématique des sous-structures sont injectés dans l'admissibilité statique des sous-structures. En adoptant la notation $\widehat{\underline{F}}_E = \widehat{F}_E + k_E^- \widehat{W}_E$, on obtient le problème suivant, posé sur chaque sous-structure E :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } (\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \\
& \text{tels que } \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E^0 \times \mathcal{W}_E^0 \text{ vérifiant } \underline{u}_E^*|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E^*|_{\Gamma_E}, \\
& \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_E) \underline{K} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\Gamma_E} k_E^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \\
& = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega + \int_{\Gamma_E} (\widehat{\underline{F}}_E + k_E^- \widetilde{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.32}$$

La direction de recherche \mathbf{E}^- permet de régulariser les problèmes par sous-structure 3.32, appelés problèmes microscopiques. \mathbf{K} et k_E^- étant définis positifs, la solution de ces problèmes microscopiques est unique. La linéarité de 3.32 permet d'écrire une relation affine reliant la trace sur le bord du déplacement solution aux efforts d'interface :

$$\forall \underline{W}_E^* \in \mathcal{W}_E^0, \quad \int_{\Gamma_E} \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \left(\mathbb{H}_E (\widehat{\underline{F}}_E + k_E^- \widetilde{\underline{W}}_E^M) + \underline{W}_{E_d}^c \right) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \tag{3.33}$$

L'opérateur \mathbb{H}_E est le complément de Schur dual de la sous-structure E augmenté par la direction de recherche. Le champ d'interface $\underline{W}_{E_d}^c$ résulte de la condensation duale des efforts volumiques de E sur Γ_E .

Les inter-efforts sont alors obtenus par la partie locale de la direction de recherche (3.30) et projetés dans l'espace macroscopique :

$$\forall \underline{W}_E^{M*} \in \mathcal{W}_E^{M0}, \quad \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E^{M*} d\Gamma = \int_{\Gamma_E} (\mathbb{L}_E^M \widetilde{\underline{W}}_E^M + \widetilde{\underline{F}}_E^M) \cdot \underline{W}_E^{M*} d\Gamma \tag{3.34}$$

où les notations définitions suivantes ont été adoptées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{W}_E^{M*} \in \mathcal{W}_E^{M0}, \quad \int_{\Gamma_E} \mathbb{L}_E^M \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{W}_E^{M*} d\Gamma = \int_{\Gamma_E} (k_E^- - k_E^- \mathbb{H}_E k_E^-) \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{W}_E^{M*} d\Gamma \\ \forall \underline{W}_E^{M*} \in \mathcal{W}_E^{M0}, \quad \int_{\Gamma_E} \widetilde{\underline{F}}_E^M \cdot \underline{W}_E^{M*} d\Gamma = \int_{\Gamma_E} \left(\widehat{\underline{F}}_E - k_E^- (\mathbb{H}_E \widehat{\underline{F}}_E + \underline{W}_{E_d}^c) \right) \cdot \underline{W}_E^{M*} d\Gamma \end{array} \right.$$

\mathbb{L}_E^M est classiquement interprété comme un opérateur homogénéisé de la sous-structure E . Il est calculé explicitement pour chaque sous-structure en résolvant une série de problèmes (3.32), en prenant les vecteurs de la base macroscopique comme chargement sur $\partial\Omega_E$.

La relation (3.34) est finalement introduite dans l'équation traduisant l'admissibilité des efforts macroscopiques (3.31) afin d'obtenir le problème macroscopique

formulé en termes de variable primale :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{\text{ad}}^M \text{ tel que } \forall (\widetilde{W}_E^{M^*})_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{\text{ad}}^M, \\
 & \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_E} \mathbb{L}_E^M \widetilde{W}_E^M \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma - \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_E} \widetilde{F}_E \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ce problème global sur toute la structure admet une solution unique si $\text{mes}(\partial\Omega_u) \neq 0$. Sa résolution requiert la résolution de problèmes indépendants sur chaque sous-structure afin de calculer le second membre, qui peut être interprété comme un défaut d'équilibre macroscopique aux interfaces.

Après résolution du problème macroscopique, les problèmes par sous-structure (3.32) peuvent finalement être résolus, avec pour chargement sur les interfaces les quantités issues de l'étape locale précédente, ainsi que le multiplicateur calculé par résolution de 3.35. Ces problèmes étant linéaires, les opérateurs de rigidité correspondants sont assemblés et factorisés au début de l'analyse. Le réassemblage de ces opérateurs n'est nécessaire, *a priori*, ni au cours des itérations LaTIn, ni au cours de l'analyse temporelle, ce qui donne son efficacité à l'approche proposée. Le problème homogénéisé (3.35) étant lui aussi linéaire et construit par assemblage de contributions issues de calculs locaux de type (3.32), il peut également n'être assemblé et factorisé qu'une fois, au début de la simulation. Le traitement des non-linéarités du modèle est local et fait l'objet de la section suivante.

3.3 Etape locale

3.3.1 Système local à résoudre

L'étape locale consiste en la résolution de problèmes locaux, éventuellement non-linéaires, en chaque point d'intégration des interfaces. Le système d'équations locales à résoudre se compose des relations suivantes :

- comportement des interfaces intérieures $\mathcal{R} = 0$ et des interfaces de conditions aux limites $\mathcal{R}_d = 0$.
- direction de recherche \mathbf{E}^+ , qui s'écrit localement sur les interfaces d'une sous-structure E :

$$\text{En tout point de } \Gamma_E, \quad (\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E) + k_E^+(\widehat{W}_E - W_E) = 0 \tag{3.36}$$

où le paramètre de direction de remontée k_E^+ est un opérateur local symétrique défini positif.

On détaille dans la section suivante les calculs nécessaires pour traiter le système d'équations obtenu pour les interfaces cohésives, les traitements classiques des interfaces parfaites et des conditions aux limites pouvant être obtenus dans [Ladevèze, 1999].

3.3.2 Cas des interfaces cohésives

Le système à résoudre en chaque point de Gauss d'une interface cohésive $\Gamma_{EE'}$ s'écrit :

<p>Trouver $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) \in \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'} \times \mathcal{F}_{EE'} \times \mathcal{W}_{EE'}$ tels que :</p> <p>En tout point de $\Gamma_{EE'}$,</p> $\begin{cases} R(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) = 0 \\ (\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E) - k_E^+ (\widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) = 0 \\ (\widehat{\underline{F}}_{E'} - \underline{F}_{E'}) - k_{E'}^+ (\widehat{\underline{W}}_{E'} - \underline{W}_{E'}) = 0 \end{cases} \quad (3.37)$

La relation $R = 0$ s'écrit, en introduisant le saut de déplacement $\widehat{[\underline{W}]}_{EE'} = \widehat{\underline{W}}_{E'} - \widehat{\underline{W}}_E$:

$$\begin{cases} \underline{F}_E - \mathbf{K}_{EE'} \left((\widehat{[\underline{W}]}_{EE'})_{\tau \leq t_n} \right) \cdot \widehat{[\underline{W}]}_{EE'} = 0 \\ \widehat{\underline{F}}_E + \widehat{\underline{F}}_{E'} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

où $\mathbf{K}_{EE'} \left((\widehat{[\underline{W}]}_{EE'})_{\tau \leq t_n} \right)$ est l'opérateur de rigidité locale d'interface au piquet de temps t_n du schéma d'intégration temporelle, dépendant de l'histoire du chargement local. En utilisant l'indicateur local d'endommagement,

$$K_{EE'} = \begin{pmatrix} k_n^0 \left(1 - h_+ \left((\widehat{[\underline{W}]}_{EE'})_{\tau \leq t_n} \cdot n_E \right) \cdot d \right) & 0 & 0 \\ 0 & k_t^0 (1 - d) & 0 \\ 0 & 0 & k_t^0 (1 - d) \end{pmatrix}_{(\underline{n}_E), \underline{t}_{E_1}, \underline{t}_{E_2}} \quad (3.39)$$

dans la base $(\underline{n}_E, \underline{t}_{E_1}, \underline{t}_{E_2})$, \underline{n}_E étant la normale à l'interface $\Gamma_{EE'}$ extérieure à E au point considéré, \underline{t}_{E_1} et \underline{t}_{E_2} formant une base orthonormale quelconque du plan de normale n_E . La variable d'endommagement d est reliée à l'histoire des déplacements locaux d'interface $(\widehat{[\underline{W}]}_{EE'})_{\tau \leq t_n}$ par la loi d'évolution décrite dans le chapitre 1.

On considère que les paramètres de direction de recherche sont les mêmes des deux côtés de l'interface : $k_E^+ = k_{E'}^+ = k_{EE'}^+$. L'utilisation de paramètres différents ne présente pas de difficulté de compréhension ou d'implantation particulière, mais alourdit l'écriture. En soustrayant les deux équations de direction de recherche, puis en injectant l'équilibre local dans le résultat, on obtient une équation reliant les efforts d'interface $\widehat{\underline{F}}_E$ au saut de déplacement $\widehat{[\underline{W}]}_{EE'}$. Cette équation permet d'éliminer l'inconnue statique dans l'équation de comportement local pour obtenir

un système non linéaire portant sur le saut de déplacement local :

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{K}}_{EE'} \cdot [\widehat{W}]_{EE'} = \tilde{F}_{EE'} \quad (3.40) \\ \text{où} \quad & \begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_{EE'} = \left[K_{EE'} \left(([\widehat{W}]_{EE'})_{\tau \leq t_n} \right) + \frac{1}{2} k_{EE'}^+ \right] \cdot [\widehat{W}]_{EE'} \\ \tilde{F}_{EE'} = \frac{1}{2} \left((F_E - F_{E'} - k_{EE'}^+ (W_E - W_{E'})) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système est résolu par un algorithme de Newton modifié. Le résidu $r = \tilde{F}_{EE'} - \tilde{\mathbf{K}}_{EE'} \cdot [\widehat{W}]_{EE'}$ est initialisé par les quantités locales convergées à t_{n-1} , soit $r_0 = \tilde{F}_{EE'} - \tilde{\mathbf{K}}_{EE'} \left(([\widehat{W}]_{EE'})_{\tau \leq t_{n-1}} \right) \cdot ([\widehat{W}]_{EE'})_{\tau \leq t_{n-1}}$. Les solutions issues des étapes locales précédentes du solveur LaTIn au pas de temps t_n , non convergées, sont rejetées. Les itérations de Newton sont stoppées en dessous d'un certain seuil portant sur la norme du résidu. On remonte ensuite aux quantités locales $(\widehat{F}_E, \widehat{W}_E, \widehat{F}_{E'}, \widehat{W}_{E'})$ par les équations du système (3.37).

Les résolutions de problèmes portant sur les interfaces cohésives à l'étape locale de la stratégie peuvent être coûteuses dans le cadre des calculs parallèles. La quantité absolue de calculs réalisés est relativement faible devant celle engendrée par l'étape linéaire : les systèmes non-linéaires à inverser sont locaux, et le délaminage n'évolue que localement dans la structure. Cependant, cette localisation des fronts de fissure soulève une difficulté. Les quelques points d'intégration d'interface nécessitant un nombre important d'itérations de Newton à l'étape locale sont traités sur un nombre réduit de processeurs de l'architecture de calcul parallèles (les principes de parallélisation de la méthodes sont décrits dans la section 4.1). Ainsi, l'étape locale est généralement mal équilibrée en temps CPU, et sa durée peut devenir du même ordre de grandeur que celle de l'étape linéaire. Nous verrons dans le chapitre 4 une façon d'obtenir une résolution directe des problèmes non-linéaires locaux, permettant d'éviter ces problèmes de répartitions de charge à l'étape locale.

3.4 Convergence de la stratégie

[Ladevèze, 1999] démontre la convergence de la méthode, pour des directions de recherche conjuguées, et pour le traitement de matériaux présentant certaines propriétés mathématiques.

L'utilisation d'une phase de relaxation à la fin de l'étape linéaire est en général nécessaire à la convergence de la stratégie. En renommant \tilde{s}_{n+1} la solution de \mathbf{A}_d calculée à l'itération $n + 1$ du solveur LaTIn, on définit s_{n+1} par la relation :

$$s_{n+1} = \mu \tilde{s}_{n+1} + (1 - \mu) s_n \quad (3.41)$$

En pratique, le paramètre μ est pris égal à 0,8, ce qui correspond à une convergence optimale pour des comportements d'interface simples. Dans le cas de comportements

plus complexes, et lorsqu'une stagnation de l'algorithme est observée, ce paramètre peut être diminué afin de retrouver la convergence souhaitée. Il est également notable qu'une relaxation forte (c'est-à-dire μ faible) amoindrit l'influence des paramètres des directions de recherche sur le taux de convergence de la stratégie.

On notera que pour le cas des interfaces cohésives utilisées et introduites dans le chapitre 1, la convergence n'est pas assurée.

Usuellement, un indicateur calculé localement sur les interfaces est utilisé pour estimer le résidu du problème d'interface à une itération de l'algorithme LaTIn donné. Cet indicateur s'écrit :

$$\nu_{\text{ddr}}^2 = \frac{\sum_{E \in \mathbf{E}} \left(\| \underline{W}_E - \widehat{W}_E \|_E^W + \| \underline{F}_E - \widehat{F}_E \|_E^F \right)}{\sum_{E \in \mathbf{E}} \left(\| \underline{W}_E + \widehat{W}_E \|_E^W + \| \underline{F}_E + \widehat{F}_E \|_E^F \right)} \quad (3.42)$$

où les normes utilisées sont définies par :

$$\begin{cases} \| \cdot \|_E^W = \int_{\Gamma_E} \cdot^T k_E^- \cdot d\Gamma \\ \| \cdot \|_E^F = \int_{\Gamma_E} \cdot^T k_E^{-1} \cdot d\Gamma \end{cases} \quad (3.43)$$

Cet indicateur s'interprète comme la distance entre les espaces \mathbf{A}_d et $\mathbf{\Gamma}$, dans la direction \mathbf{E}^- , à une itération LaTIn donnée.

3.5 Algorithme du code

L'algorithme LaTIn micro/macro pour la résolution de non-linéarités d'interface par un schéma d'intégration implicite en temps est décrit par la procédure (1). Les notations données dans les paragraphes suivants ont été utilisées.

Le problème microscopique (3.32) posé sur une sous-structure E est écrit après discrétisation :

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) u_E = \widehat{F}_E + \widetilde{W}_E^M + f_{dE} \quad (3.44)$$

où \mathbf{K}_E est la matrice de rigidité éléments finis de E , \mathbf{k}_E , la matrice de rigidité correspondant à l'intégration du terme d'augmentation, u_E , le vecteur de déplacements nodaux inconnus sur E , \widehat{F}_E (respectivement \widetilde{W}_E^M), le vecteur second membre résultant de l'intégration des champs d'interface \widehat{F}_E et \widehat{W}_E (respectivement du champ d'interface \widetilde{W}_E^M), et f_{dE} le vecteur des efforts nodaux résultant de l'intégration des efforts volumiques sur E .

La base macroscopique discrétisée d'une interface $\Gamma_{EE'}$ est notée $\mathbf{B}_{EE'}^M$. $(\mathbf{L}_E^M)_{E \in \mathbf{E}}$ est l'expression de l'opérateur homogénéisé de E dans la base macroscopique. Le

Algorithme 1 : Algorithme LaTIn micro/macro incrémental

- 1: **Construction des opérateurs**
 - Lecture des maillages de $(E)_{E \in \mathbf{E}}$
 - $\forall E \in \mathbf{E}$, calculer \mathbf{K}_E et \mathbf{k}_E et assembler $\mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E$
 - $\forall E \in \mathbf{E}$, $\forall E' \in \mathbf{V}_E$ tel que $E < E'$, détermination de $\mathbf{B}_{EE'}^M$
 - $\forall E \in \mathbf{E}$, calculer $(\mathbf{L}_E^M)_{E \in \mathbf{E}}$
 - Assembler \mathbf{L}^M
 - 2: **for** $t = t_1, \dots, t_N$ **do**
 - 3: **Initialisation des quantités d'interface**
 - $\forall E \in \mathbf{E}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega \neq \{0\}$,
en tout point d'intégration de Γ_{Ed} , initialiser $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$
 - $\forall E \in \mathbf{E}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega = \{0\}$, $\forall E' \in \mathbf{V}_E$ tel que $E < E'$,
en tout point d'intégration de $\Gamma_{EE'}$, initialiser $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_{E'})$
 - 4: **for** $n = 0, \dots, N$ **do**
 - 5: **Etape linéaire**
 - Etape macro**
 - $\forall E \in \mathbf{E}$, résoudre $(\mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) \bar{u}_E = \widehat{F}_E + f_{dE}$
 - $\forall E \in \mathbf{E}$, extraire \widetilde{F}_E^M
 - Assembler \widetilde{F}^M
 - Résoudre $\mathbf{L}^M \widetilde{W}^M = \widetilde{F}^M$
 - Etape micro**
 - $\forall E \in \mathbf{E}$, résoudre $(\mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) u_E = \widehat{F}_E + f_{dE} + \widetilde{W}_E^M$
 - $\forall E \in \mathbf{E}$, extraire W_E et F_E
 - 6: **Relaxation**
 - Si $n > 0$, $W_E \leftarrow \mu W_E + (1 - \mu) W_{E_{n-1}}$
 $F_E \leftarrow \mu F_E + (1 - \mu) F_{E_{n-1}}$
 - 7: **Etape locale**
 - $\forall E \in \mathbf{E}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega \neq \{0\}$,
en tout point d'intégration de Γ_{Ed} , calculer $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$
 - $\forall E \in \mathbf{E}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega = \{0\}$, $\forall E' \in \mathbf{V}_E$ tel que $E < E'$,
en tout point d'intégration de $\Gamma_{EE'}$, calculer $(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_E, \widehat{F}_{E'})$
 - 8: **Calcul d'erreur**
 - 9: **end for**
 - 10: **end for**
-

problème macroscopique global à résoudre, portant sur les degrés de liberté macroscopiques, est noté :

$$\mathbf{L}^M \widetilde{W}^M = \widetilde{F}^M \quad (3.45)$$

où \mathbf{L}^M est l'opérateur de rigidité macroscopique assemblé, \widetilde{W}^M le vecteur d'inconnues macroscopiques d'interface, et \widetilde{F}^M le vecteur second membre macroscopique exprimé dans la base macroscopique globale.

Il est ici utile de préciser l'initialisation retenue pour la solution recherchée à chaque piquet de temps de l'analyse de manière incrémentale. L'idée est ici d'initialiser les champs d'interface par une solution de l'espace Γ . Pour cela les champs statiques et cinématiques initiaux des interfaces de bord sont choisis de façon à respecter les conditions aux limites imposées. Les efforts et déplacements des interfaces entre sous-structures de \mathbf{E} sont initialisés par les quantités convergées du pas de temps précédent. Cette pratique sera discutée dans le chapitre 7.

4 Implantation de la méthode pour le calcul parallèle

4.1 Parallélisation des itérations LaTIn

L'implantation parallèle de la stratégie multiéchelle de décomposition de domaine a été réalisée par différents acteurs dans une plate-forme logicielle développée au LMT Cachan par H. Leclerc. Celle-ci consiste en une série d'outils permettant la génération de matrices de rigidité à partir de la formulation de lois de comportement. Les opérateurs ainsi générés sont utilisés par un code C++ de la stratégie micro/macro. La base algorithmique de ce code a été réalisée par D. Violeau dans le cadre de sa thèse. A. Caignot, également dans le cadre de sa thèse, a utilisé les outils de la bibliothèque MPI pour réaliser en parallèle les itérations du solveur LaTIn.

Le principe de la parallélisation de ces opérations est illustré sur la figure (6.4). Les maillages et opérateurs des sous-structures sont répartis par un algorithme METIS sur les différents processeurs de l'architecture parallèle. Les maillages et opérateurs des interfaces des sous-structures d'un même processeur sont également stockés sur ce processeur. Ce principe permet de réduire à son minimum la quantité de données échangée entre processeurs au cours des itérations. Hormis les phases de communication de l'étape macroscopique, sur lesquelles on reviendra, les seules informations nécessitant un transfert par le réseau sont ainsi des champs des interfaces communes à deux processeurs. Le choix de traiter toutes les interfaces des sous-structures d'un processeur sur ce processeur implique des calculs redondants à l'étape locale. Cependant, il permet de n'effectuer des transferts de champs d'interface qu'à une des deux étapes du schéma de résolution itératif.

L'assemblage du second membre macroscopique, ainsi que l'extraction des solutions macroscopiques locales impliquent des communications globales de type « tous

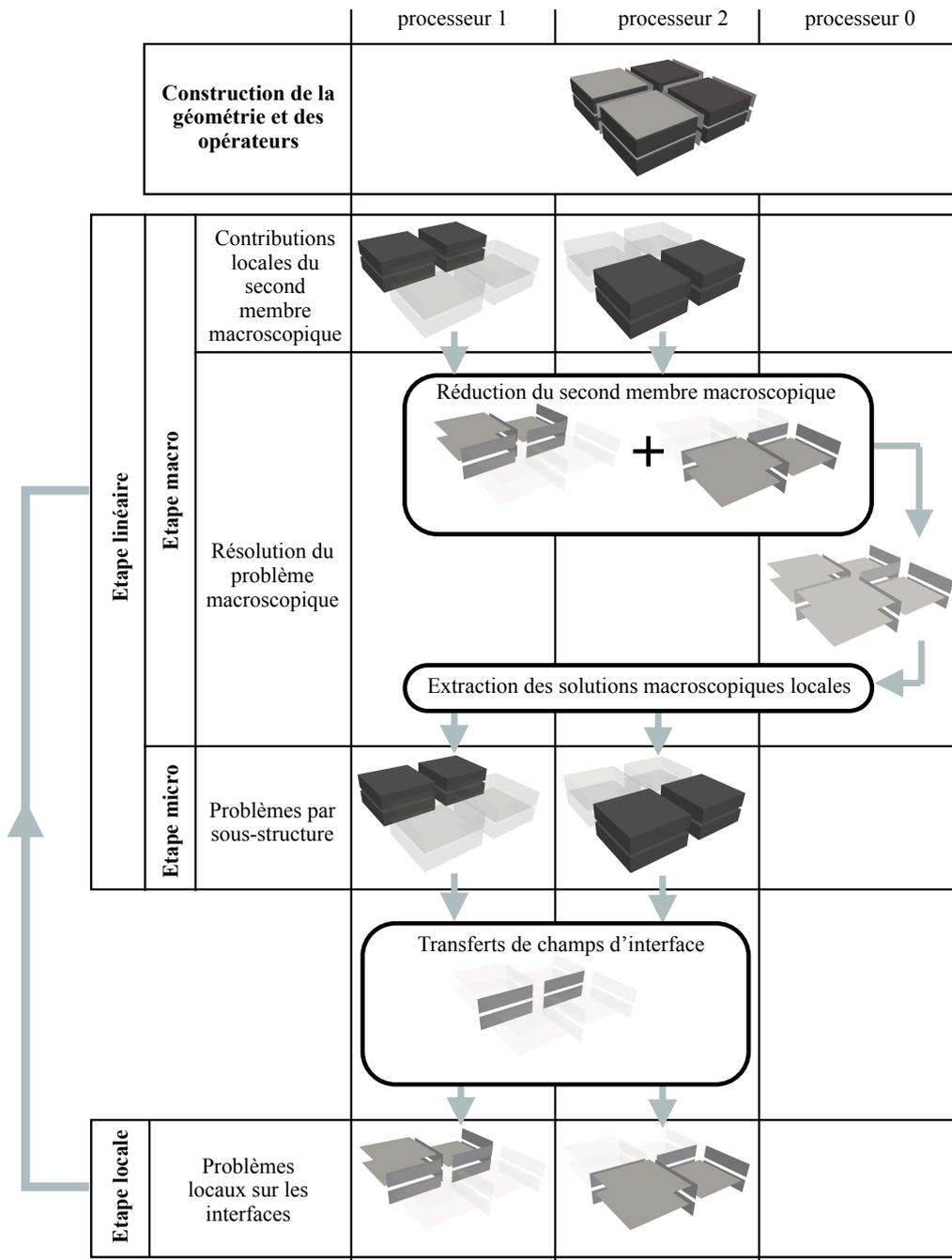


FIG. 3.6: Principe de parallélisation de la stratégie micro/macro

vers un » (tous les processeurs envoient des données au processeur maître, et réciproquement). Nous verrons dans le chapitre 6 que ces communications non optimisables peuvent être évitées par la résolution en parallèle du problème macroscopique.

4.2 Répartition des données

Les développements initiaux du code étant basés sur une conception monoprocesseur, la localité des données du code initial n'est pas suffisante pour résoudre les problèmes de grande taille ciblés dans ce travail. Un effort particulier a été réalisé pour assurer une bonne répartition des charges dès la création des maillages et opérateurs de la structure. Ces opérations ont ainsi été repensées afin d'éviter le stockage multiple des données, ce qui a permis l'obtention d'une certaine extensibilité en mémoire de la stratégie implantée. Les résultats de ce travail, couplés à la parallélisation du problème macroscopique, sont donnés dans le chapitre 6.

Deuxième partie

Proposition d'une stratégie de calcul à trois échelles pour la simulation du délamination

L'utilisation directe de la méthode de décomposition de domaine mixte pour traiter le modèle de stratifié à interfaces cohésives soulève certaines difficultés numériques. Un choix judicieux des paramètres de cette méthode permet d'obtenir une stratégie de résolution à deux échelles robuste et efficace. Ce chapitre présente ainsi le choix raisonné de la discrétisation macroscopique adoptée, le développement d'un critère d'erreur adapté à l'évaluation de solutions présentant des non-linéarités localisées aux interfaces, ainsi que l'optimisation des paramètres de direction de recherche.

Sommaire

1	Sous-structuration dans la longueur du stratifié	80
2	Critère d'erreur pour les non-linéarités d'interface	82
2.1	Principe	82
2.2	Résultats	84
2.3	Limites	85
3	Choix des directions de recherche	86
3.1	Généralités	86
3.2	Etude de comportements simples	89
3.3	Cas général	95
3.4	Bilan	101

1 Sous-structuration dans la longueur du stratifié

Nous avons montré dans le chapitre 3 qu'une résolution du problème de délaminage par la stratégie de décomposition de domaine mixte en utilisant une sous-structuration respectant l'intégrité des entités mécaniques du stratifié permet de limiter les opérations de réassemblage au cours de la simulation. Cependant, il est également nécessaire de décomposer chaque pli du modèle en sous-structures afin d'améliorer les performances de la méthode. Différentes sous-structurations sont proposées sur la figure 4.1. Ces sous-structurations de plus en plus fines correspondent à un problème macroscopique de plus en plus fin. Le problème traité est le cas test à quatre plis de séquence d'empilement $[0/90]_s$ décrit dans le chapitre 1 (Figure 1.9 page 26).

L'amélioration des performances de la stratégie par un raffinement macroscopique dans les plis du modèle est guidée par trois idées :

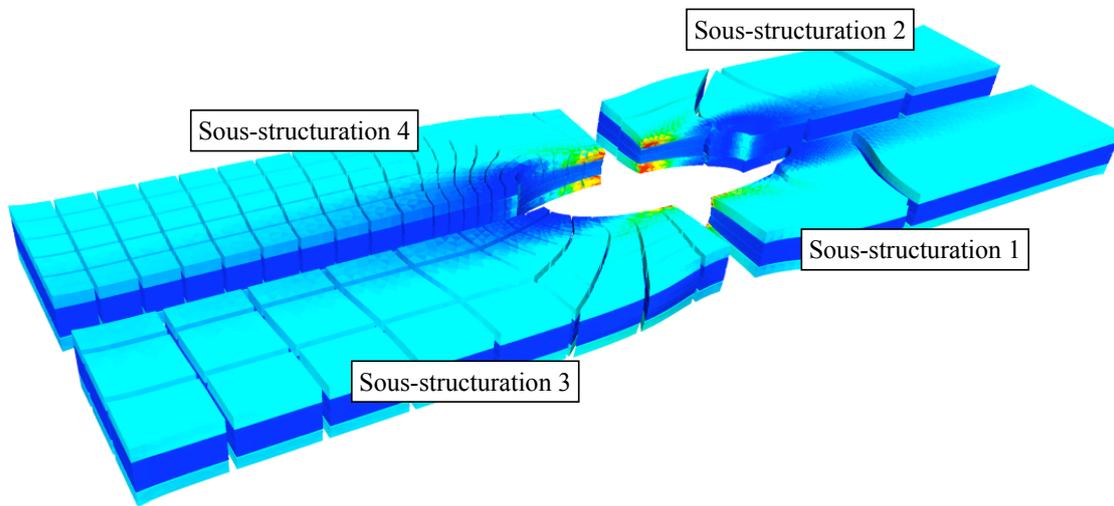
- Un élancement trop important des sous-structures signifie la construction d'un problème macroscopique de taille très réduite lors d'une résolution par la stratégie multiéchelle, et donc l'obtention d'une solution macroscopique trop grossière pour représenter pertinemment la partie à grande longueur de variation de la solution. Le taux de convergence du solveur s'en trouve fortement dégradé. A l'inverse, une sous-structuration trop fine aboutit à la construction d'un problème macroscopique très lourd en mémoire, dont la résolution est coûteuse en temps CPU.
- Le nombre de processeurs utilisés lors d'une résolution en parallèle est au maximum égal au nombre de sous-structures définies. Dans le cas d'un faible raffinement macroscopique des plis, la répartition des charges sur les processeurs de l'architecture parallèle n'est pas optimale.
- Pour une sous-structuration fine des plis, les champs et opérateurs d'interface de la méthode de décomposition de domaine peuvent représenter une part importante de l'occupation mémoire. On s'éloigne alors de l'idée initiale des méthodes de décomposition de domaine, qui consiste à condenser le problème complet sur un nombre réduit de degrés de liberté d'interface entre sous-domaines.

Ces idées sont illustrées par les résultats fournis dans le tableau 4.1. On ne résout que le problème posé au premier piquet de temps du problème non-linéaire d'évolution. La discrétisation microscopique est fixée pour les quatre tests proposés. La convergence est atteinte pour une erreur en résidu de 0,1% (ce critère d'erreur sera décrit dans la section 2), et le calcul est lancé sur cinq processeurs.

Le problème macroscopique du test à 24 sous-structures est trop grossier. On perd l'extensibilité numérique apportée par les résolutions de problèmes homogénéisés globaux au cours des itérations. En conséquence, le nombre d'itérations à convergence n'est pas satisfaisant.

La dernière sous-structuration (1760 sous-structures) aboutit à la construction d'un problème macroscopique trop fin, et à une redondance de données d'interface importante. La quantité de mémoire utilisée par processeur est élevée, et la construction des opérateurs est coûteuse en temps de calcul.

Les sous-structurations du stratifié en 96 et 520 sous-structures offrent les meilleures performances en terme de temps de calcul, tout en limitant la quantité de données redondantes aux interfaces et donc l'occupation mémoire par processeur. Pour la suite, la sous-structuration du test 3 est retenue. Elle est préférée à celle du test 2 pour la latitude qu'elle offre lors de la répartition des charges sur les processeurs du calculateur parallèle.



Sous-structuration	Nombre de sous-structures	Taille du problème sous-structuré (ddl)	Taille du problème macro (ddl)	Nombre d'itérations à convergence	Mémoire moyenne utilisée par CPU (Mo)	Temps CPU (secondes)
1	24	196 500	450	20	97	270
2	96	213 300	2088	12	101	125
3	520	203 700	12 150	10	97	135
4	1760	237 900	46 080	10	164	607

FIG. 4.1: Choix de la sous-structuration dans la longueur du stratifié

2 Critère d'erreur pour les non-linéarités d'interface

L'indicateur d'erreur LaTIn classique décrit dans le chapitre 3 mesure la variation des quantités d'interface entre les étapes linéaires et locales de la stratégie. Il s'agit d'un indicateur de distance entre les espaces \mathbf{A}_d et Γ suivant une des deux directions de recherche. Son utilisation comme critère d'arrêt des itérations LaTIn n'est, dans notre cadre d'étude, pas raisonnable, et ce pour trois raisons principales :

- Le niveau d'erreur atteint pour une solution non convergée donnée dépend fortement des directions de recherche utilisées.
- Les erreurs commises localement sont très mal évaluées lorsque la taille du problème augmente. Ceci se traduit par une dépendance du niveau d'erreur à la taille de la structure lorsque l'on traite des problèmes où les zones à forts gradients sont localisées.
- Les niveaux d'erreur obtenus sont difficilement interprétables.

2.1 Principe

On propose l'utilisation d'un nouvel indicateur, très proche de l'évaluation de la norme des résidus dans les méthodes de décomposition de domaine primales ou duales. On mesure ici la non-vérification des équations de comportement des interfaces par les solutions issues de l'étape linéaire, appartenant à l'espace \mathbf{A}_d (voir la représentation schématique proposée Figure 4.2).

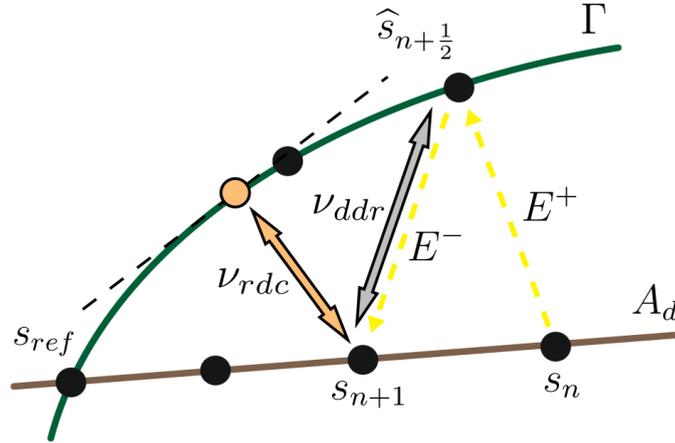


FIG. 4.2: Critère d'erreur sur la non-vérification du comportement d'interface par les solutions de \mathbf{A}_d

En d'autres termes, on cherche à obtenir une norme sur la structure des relations locales d'interface $\mathcal{R}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$. On appelle q le nombre de types d'interfaces différents utilisés (c'est-à-dire le nombre de relations $\mathcal{R} = 0$ et $\mathcal{R}_d = 0$ distinctes sur les interfaces de la structure). On note Γ_i l'ensemble des interfaces

possédant le comportement i . La relation $\mathcal{R}_i = 0$ pour $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ est composée de p équations vectorielles $\mathcal{R}_{ij} = 0$ (correspondant, en 3D, à 6 équations scalaires pour les interface intérieures, et 3 pour les interfaces de conditions aux limites). On évalue la vérification des équations vectorielles élémentaires par le nouveau critère d'erreur ν_{rdc} :

$$\nu_{rdc}^2 = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p \nu_{ij}^2 \quad \text{où} \quad \nu_{ij}^2 = \frac{\sum_{\Gamma \in \Gamma_i} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_{ij}^T \mathcal{R}_{ij} d\Gamma}{\sum_{\Gamma \in \Gamma_i} \int_{\Gamma} \tilde{\mathcal{R}}_{ij}^T \tilde{\mathcal{R}}_{ij} d\Gamma} \quad (4.1)$$

■ **Interface parfaite** $\Gamma_{EE'} \in \Gamma_1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= \underline{F}_E + \underline{F}_{E'} & \tilde{\mathcal{R}}_{11} &= \underline{F}_E - \underline{F}_{E'} \\ \mathcal{R}_{12} &= \underline{W}_E - \underline{W}_{E'} & \tilde{\mathcal{R}}_{12} &= \underline{W}_E + \underline{W}_{E'} \end{aligned} \quad (4.2)$$

■ **Interface cohésive** $\Gamma_{EE'} \in \Gamma_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{21} &= \underline{F}_E - \mathbf{K}_{EE'} (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) & \tilde{\mathcal{R}}_{21} &= \underline{F}_E + \mathbf{K}_{EE'} (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \\ \mathcal{R}_{22} &= \underline{F}_{E'} - \mathbf{K}_{EE'} (\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) & \tilde{\mathcal{R}}_{22} &= \underline{F}_{E'} + \mathbf{K}_{EE'} (\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'opérateur de rigidité $\mathbf{K}_{EE'}$ de l'équation constitutive est mis à jour à partir de la donnée du saut de déplacement à l'interface $\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E$ issu de l'étape linéaire.

On notera ici que cette formulation permet effectivement de mesurer la non-vérification du comportement local par les variables issues de l'étape linéaire, et ce quelle que soit la valeur des indicateurs d'endommagement. Pour une interface saine ou partiellement délaminée, cette écriture est en effet équivalente à la vérification de l'équation constitutive et de l'équilibre des inter-efforts. Lorsque certains points de l'interface sont complètement endommagés, on vérifie la nullité des efforts tangentiels à l'interface et, suivant le cas de chargement, l'élasticité en compression (cas du contact) ou la nullité des efforts normaux (cas du décollement).

■ **Interface de condition limite de Neumann** $\Gamma_{E_d} \in \Gamma_3$:

$$\mathcal{R}_{31} = \underline{F}_E - \underline{F}_d \quad \tilde{\mathcal{R}}_{31} = \underline{F}_E + \underline{F}_d \quad (4.4)$$

■ **Interface de condition limite de Dirichlet** $\Gamma_{E_d} \in \Gamma_4$:

$$\mathcal{R}_{41} = \underline{W}_E - \underline{W}_d \quad \tilde{\mathcal{R}}_{41} = \underline{W}_E + \underline{W}_d \quad (4.5)$$

2.2 Résultats

Les résultats présentés sur la figure 4.3 démontrent la capacité de l'indicateur ν_{rdc} à estimer la qualité d'une solution non convergée. On considère un cas test de type DCB à quatre plis. Dans ce cas très simple, la qualité d'une solution non convergée est très facilement analysable, en évaluant l'avancée de la fissure pour un chargement donné.

On stoppe les itérations LaTIn après un nombre restreint d'itérations, en fixant les paramètres de direction de recherche. Les valeurs des erreurs ν_{ddr} et ν_{rdc} sont relevées. On relance le calcul avec des paramètres de direction de recherche différents (multipliés par 1/10 dans le premier test (première ligne) et par 10 dans le second (troisième ligne)). Les itérations sont bloquées, dans un cas par estimation du critère ν_{ddr} (première colonne), dans le second cas par estimation du critère ν_{rdc} (deuxième colonne), leurs valeurs étant celles relevées pour le calcul avec paramètres de directions de recherches initiaux.

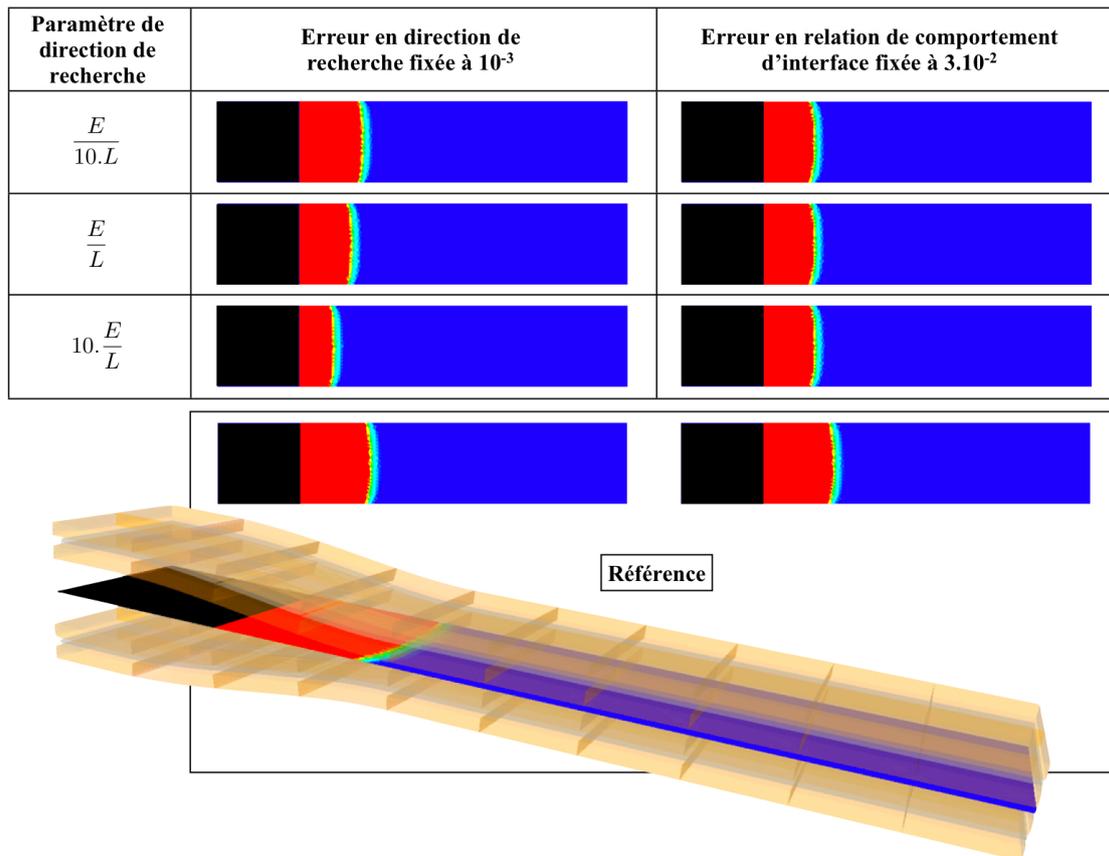


FIG. 4.3: Validation du critère d'erreur sur la non-vérification du comportement d'interface par les solutions de \mathbf{A}_d

Il apparaît très clairement que pour un niveau d'erreur ν_{ddr} fixé, la qualité de

la solution obtenue dépend fortement de l'algorithme de résolution. L'utilisation de ν_{rdc} fournit des résultats qualitatifs beaucoup plus satisfaisants.

2.3 Limites

Des précautions doivent être prises pour l'utilisation de ce critère. Les dénominateurs des indicateurs ν_{ij} peuvent devenir très faibles localement et perturber le calcul d'erreur. Ce cas de figure se présente, par exemple, si l'on cherche à résoudre un problème où les seuls déplacements imposés sur $\partial\Omega_u$ sont nuls. La solution retenue ici est de négliger la contribution de la relation d'interface présentant un dénominateur nul, et de l'évaluer séparément, de manière absolue. En pratique, ce type de problème disparaît lorsque la complexité du cas testé et le nombre d'interfaces augmentent.

Une autre difficulté d'utilisation de ce critère réside dans la dépendance de la qualité de la solution obtenue à la taille de la structure pour un niveau d'erreur ν_{rdc} donné, lorsque de forts gradients localisés sont calculés. En effet, les dénominateurs des quantités ν_{ij} résultant d'une somme globale sur la structure, ils augmentent linéairement avec l'aire cumulée des interfaces mises en jeu. À l'inverse, les numérateurs ne sont significatifs que dans les zones à forts gradients, dont, conceptuellement, la taille peut rester fixe lorsque les dimensions de la structure augmentent. En conséquence, pour une même qualité de la solution dans ces zones, la valeur de ν_{rdc} diminue lorsque la taille du problème augmente.

On propose donc une version locale ν_{rdc}^{loc} de ν_{rdc} , qui consiste à rechercher l'interface présentant la moins bonne vérification du comportement par les quantités issues de l'étape linéaire :

$$\nu_{rdc}^{loc2} = \max_{i \in]0, q[} \max_{\Gamma \in \Gamma_i} \sum_{j=1}^p \alpha \frac{\int_{\Gamma \in \Gamma_i} \mathcal{R}_{ij}^T \mathcal{R}_{ij} d\Gamma}{\sum_{\Gamma \in E'} \int_{\Gamma \in E'} \tilde{\mathcal{R}}_{ij}^T \tilde{\mathcal{R}}_{ij} d\Gamma} \quad (4.6)$$

α est un coefficient de pondération défini pour chaque interface $\Gamma \in \Gamma$. Il permet de tenir compte de l'aire relative des interfaces :

$$\alpha = \frac{1}{\frac{\text{mes}(\Gamma)}{\sum_{\Gamma} \text{mes}(\Gamma)}} \quad (4.7)$$

■ **Remarque 2.1** *Les indicateurs proposés ici ne sont pas plus coûteux que l'indicateur usuel. Leur évaluation consiste simplement en une somme de contributions calculées localement sur les interfaces.*

3 Choix des directions de recherche

Le choix des paramètres reliant les quantités statiques et cinématiques dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine avec conditions de raccord mixtes aux interfaces est un problème complexe, encore ouvert. Ce problème se pose bien évidemment pour la stratégie basée sur l'algorithme LaTIn. Le choix des paramètres des directions de recherche \mathbf{E}^+ et \mathbf{E}^- conditionne fortement le taux de convergence du solveur. En outre, pour la résolution de problèmes non-linéaires adoucissants, la convergence elle-même de la méthode peut être remise en cause par un mauvais choix de ces paramètres.

D'autre part, dans le cas de la résolution de problèmes sans unicité de solution, une utilisation avancée de la stratégie permet, par un choix judicieux des paramètres de direction de recherche, de piloter l'algorithme vers le minimum local souhaité. Cependant, cette caractéristique soulève une nouvelle difficulté pour un utilisateur non averti, puisque la stratégie ne converge pas *a priori* vers la solution physiquement attendue. L'interprétation des résultats alors obtenus n'est pas triviale. Cette idée est illustrée par le cas test à quatre plis représenté sur la figure 4.4. L'interface cohésive inférieure a été affaiblie de 10% par rapport aux deux autres, ce qui conduit en général un algorithme de Newton sécant (résultat intitulé « solution de référence ») vers une solution pour laquelle une fissure s'initie et se propage dans cette interface. Les deux résultats suivants présentent deux solutions obtenues par une résolution LaTIn avec des jeux de paramètres de direction de recherche différents. Le second calcul converge vers un minimum local « non-physique ».

De ces différentes idées peuvent être déduites un cahier des charges qui guide l'étude proposée dans cette section :

- Un compromis doit être trouvé entre vitesse de convergence, temps d'évaluation des paramètres de direction de recherche, et difficulté d'implantation numérique.
- Les paramètres de direction de recherche doivent permettre la convergence sans condition de la méthode lors de la résolution de problèmes de délaminage.
- Dans le cas de non-unicité de solution, le choix des paramètres de direction de recherche doit *pouvoir* conduire à la solution physiquement attendue.

3.1 Généralités

De manière classique, pour des méthodes de décomposition de domaine mixtes sans résolution de problème grossier, les opérateurs optimaux liant les déplacements d'interface aux efforts d'interface d'une sous-structure E assurent une représentation exacte du problème posé sur le complémentaire \bar{E} de E par les champs de Γ_E . Ces idées ont été illustrées dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine mixtes basées sur les compléments de Schur (voir Chapitre 2). Elles peuvent également être retrouvées dans les travaux de [Nataf et al., 1994], où cet optimum est recherché pour les méthodes de Schwartz mixtes [Lions, 1990]. Conceptuellement,

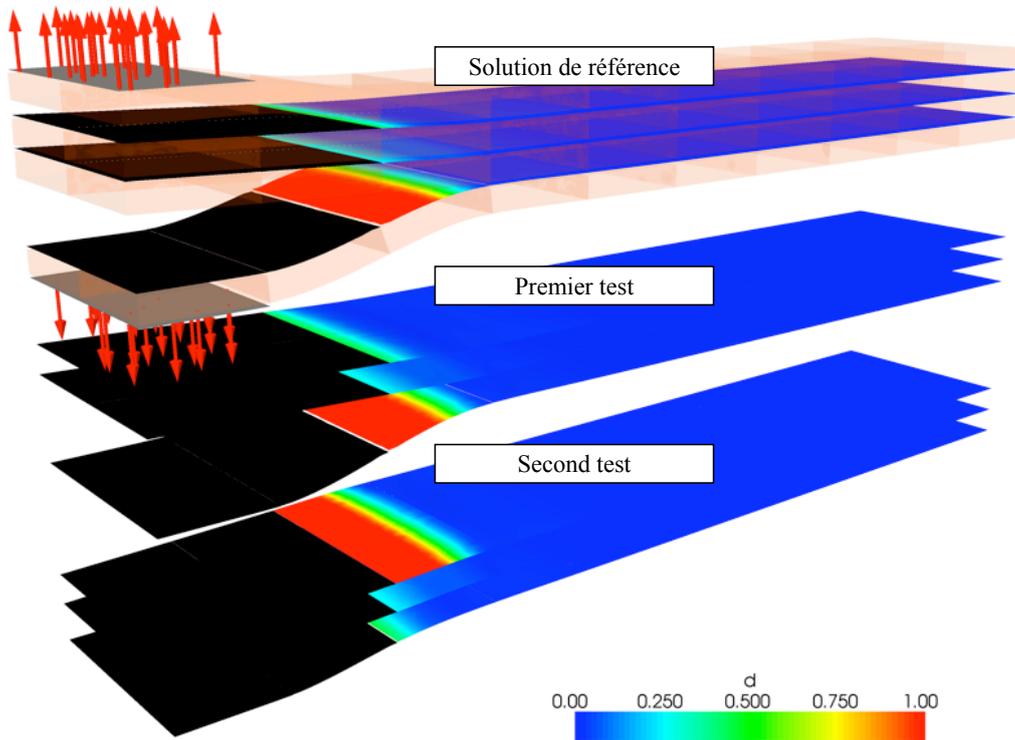


FIG. 4.4: Cas de convergence vers un minimum local « non-physique »

l'utilisation de cet optimum nécessite des calculs globaux, ce qui entraîne une perte d'efficacité de la méthode de résolution parallèle.

Dans la stratégie de décomposition de domaine mixte basée sur l'algorithme LaTIn, la résolution du problème grossier, transmettant l'information à grande longueur de variation dans toute la structure, permet de répondre efficacement à ce dilemme. Concrètement, à l'étape linéaire du solveur, les parties macroscopiques sont astreintes au respect d'un certain équilibre global sur toute la structure. Par conséquent, seules les parties microscopiques des champs d'interface doivent être reliées par un opérateur représentant au mieux le problème posé sur \bar{E} . Le principe de Saint-Venant stipulant que ces champs microscopiques, à résultantes et moments nuls sur le bord $\partial\Omega_E$, n'ont qu'une influence localisée autour de cette sous-structure, l'opérateur optimal liant ces quantités peut être approximé et calculé localement.

Il est donc très clair que l'interprétation mécanique des opérateurs de direction de descente \mathbf{E}^- nécessite leur séparation en contributions microscopiques et macroscopiques. Cette séparation est réalisée en réécrivant la direction de descente :

Trouver $(\underline{W}_E, \underline{F}_E)_{E \in \mathbf{E}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}}(\mathcal{W}_E \times \mathcal{F}_E)$ tel que :

$$\begin{aligned} & \forall E \in \mathbf{E}, \forall \underline{W}_E^{M^*} \in \mathcal{W}_E^M, \\ & \int_{\Gamma_E} (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma + \int_{\Gamma_E} k_E^{-M} (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E - \widetilde{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{W}_E^{M^*} d\Gamma = 0 \\ & \forall E \in \mathbf{E}, \forall \underline{W}_E^{m^*} \in \mathcal{W}_E^m, \\ & \int_{\Gamma_E} (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) \cdot \underline{W}_E^{m^*} d\Gamma + \int_{\Gamma_E} k_E^{-m} (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{W}_E^{m^*} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\forall (\widetilde{\underline{W}}_E^{M^*})_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{\text{ad}}^M, \quad \sum_E \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^{M^*} d\Gamma = \sum_E \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \widetilde{\underline{W}}_E^{M^*} d\Gamma \quad (4.9)$$

Les études précédemment menées sur la méthode de décomposition de domaine mixte ont montré que $(k_E^{-m})_{E \in \mathbf{E}}$ dépend des propriétés de rigidité locales de E et des sous-structures voisines. On montrera que, pour des cas d'interfaces non parfaites, la rigidité physique de Γ_E intervient également de manière significative dans la détermination des directions de recherche optimales. Des études théoriques pour rechercher cet optimum ont été menées dans des cas simplifiés mais restent insuffisantes. On propose ici d'obtenir, par une étude paramétrique, la robustesse souhaitée pour la stratégie de résolution.

Le choix optimal de $(k_E^{-m})_{E \in \mathbf{E}}$ et $(k_E^{-M})_{E \in \mathbf{E}}$ est d'abord détaillé pour des interfaces présentant des comportements simples pour lesquels les relations de comportement macroscopiques sont explicites (interfaces parfaites, élastiques homogènes ou cohésives totalement endommagées). L'interprétation mécanique et algorithmique des directions de recherche pour ces différents cas nous permet dans un second temps de choisir ces paramètres dans le cas général des comportements d'interface rencontrés au cours de ces travaux.

■ **Remarque 3.1** *La stratégie micro/macro utilisant une séparation des paramètres de direction de recherche est aisément dérivable de celle décrite dans le chapitre 3. A l'étape linéaire, les problèmes par sous-structure modifiés s'écrivent :*

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \\ & \text{tels que } \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \text{ vérifiant } \underline{u}_E^*|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E^*|_{\Gamma_E}, \\ & \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_E) K \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\Gamma_E} (k_E^{-M} \Pi_E^M + k_E^{-m} (\mathbf{I}_d - \Pi_E^M)) \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \\ & \quad = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega + \int_{\Gamma_E} (\widehat{\underline{F}}_E^m + \widehat{\underline{F}}_E^M + k_E^{-M} \widetilde{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le problème macroscopique est alors construit de manière classique en utilisant les relations modifiées (4.8), (4.9) et (4.10).

L'étape locale devient globale sur chaque interface, les directions de recherche de \mathbf{E}^+ s'écrivant alors pour les interfaces intérieures à la structure :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\widehat{\underline{F}}_E, \widehat{\underline{W}}_E) \in \mathcal{F}_E \times \mathcal{W}_E \text{ tel que } \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \\ & \forall \underline{W}^{M^*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_E} \left(\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E - k_E^{+M} (\widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) \right) \cdot \underline{W}^{M^*} d\Gamma = 0 \\ & \forall \underline{W}^{m^*} \in \mathcal{W}_{EE'}^m, \quad \int_{\Gamma_E} \left(\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E - k_E^{+m} (\widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) \right) \cdot \underline{W}^{m^*} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Des développements similaires permettent l'obtention de l'expression des directions de remontée macroscopiques et microscopiques pour les interfaces de bord.

3.2 Etude de comportements simples

Pour simplifier l'écriture, on supposera dans cette étude que les paramètres de direction de recherche sont égaux des deux côtés d'une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures E et E' adjacentes.

$$\text{Sur } \Gamma_{EE'}, \quad \begin{cases} k_E^{-M} = k_{E'}^{-M} = k_{EE'}^{-M} \\ k_E^{-m} = k_{E'}^{-m} = k_{EE'}^{-m} \end{cases} \quad (4.12)$$

3.2.1 Interface parfaite

Les directions de recherche locales (4.8) des sous-structures E et E' sont soustraites sur $\Gamma_{EE'}$:

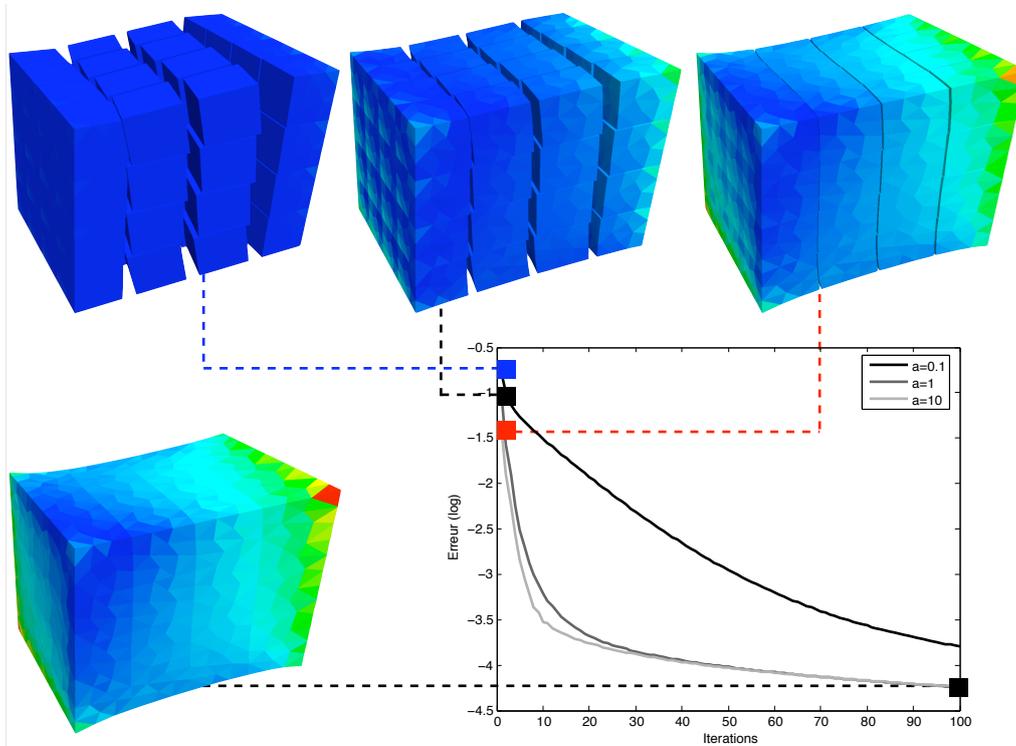
$$\begin{aligned} \forall \underline{W}^{M^*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad & \int_{\Gamma_{EE'}} \left((\underline{F}_E - \underline{F}_{E'}) - (\widehat{\underline{F}}_E - \widehat{\underline{F}}_{E'}) \right) \cdot \underline{W}^{M^*} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_{EE'}} k_{EE'}^{-M} \left((\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) - (\widehat{\underline{W}}_E - \widehat{\underline{W}}_{E'}) \right) \cdot \underline{W}^{M^*} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant les équations d'admissibilité des quantités $\widehat{\cdot}$ issues de l'étape locale, on obtient :

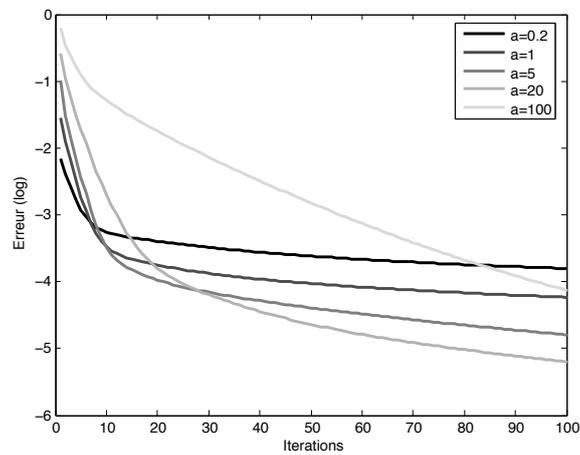
$$\forall \underline{W}^{M^*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \left((\underline{F}_E - \underline{F}_{E'}) - 2 \widehat{\underline{F}}_E + k_{EE'}^{-M} (\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) \right) \cdot \underline{W}^{M^*} d\Gamma = 0 \quad (4.14)$$

L'équation d'admissibilité macroscopique des efforts d'interface donne finalement :

$$\forall \underline{W}^{M^*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \left(2 (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + k_{EE'}^{-M} (\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) \right) \cdot \underline{W}^{M^*} d\Gamma = 0 \quad (4.15)$$



(a) Directions de recherche macroscopiques pour des interfaces parfaites



(b) Directions de recherche microscopiques pour des interfaces parfaites

FIG. 4.5: Paramètres de direction de recherche optimaux pour des interfaces parfaites

Afin d'assurer la continuité des déplacements macroscopiques d'interface, et donc la résolution à chaque étape linéaire du problème macroscopique complet, les opérateurs $(k_E^{-M})_{E \in \mathbf{E}}$ doivent être rejeté à l'infini. Si le paramètre de direction de recherche est un scalaire, on obtient bien une relation de comportement sur des quantités macroscopiques uniquement :

$$\forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) \cdot \underline{W}^{M*} d\Gamma = 0 \quad (4.16)$$

Cette idée est illustrée par des résultats sur un cas test cubique à 64 sous-structures au comportement linéaire isotrope, sous un chargement en déplacement imposé, sur deux faces opposées, excitant les différents modes de déformation des interfaces. La figure 4.5 (a) montre l'influence de la multiplication des paramètres de directions de recherche macroscopiques par un scalaire noté a , sur l'initialisation du calcul d'une part, et sur le taux de convergence d'autre part.

La figure 4.5 (b) montre l'influence d'une variation du paramètre de direction de recherche microscopique sur le taux de convergence de la méthode, à paramètre de direction de recherche macroscopique optimal fixé. $(k_E^{-m})_{E \in \mathbf{E}}$ dépendant des propriétés locales de la structure, on prendra, pour une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures E et E' adjacentes, $k_{EE'}^{-m} = a \frac{Y}{L}$ où Y est une moyenne des modules de Young des sous-structures E et E' , et L une longueur caractéristique locale, typiquement $L = \sqrt{(\text{mes}(\Gamma_{EE'}))}$. Ces résultats sont difficiles à interpréter. On notera cependant que, à paramètre de direction de recherche macroscopique optimal, la variation du taux de convergence avec les paramètres de direction de recherche microscopique est peu significative.

3.2.2 Cas des interfaces élastiques homogènes

Un travail identique au précédent peut être réalisé pour des interfaces au comportement élastique isotrope et homogène. La loi constitutive d'une interface élastique $\Gamma_{EE'}$ s'écrit alors :

$$\forall \underline{W}^* \in \mathcal{W}_{EE'}, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \left(\widehat{\underline{F}}_E - k^0 (\widehat{\underline{W}}_{E'} - \widehat{\underline{W}}_E) \right) \cdot \underline{W}^* d\Gamma = 0 \quad (4.17)$$

où k^0 est un scalaire constant sur l'interface. En projetant le champ test dans l'espace des quantités macroscopiques d'interfaces, on obtient :

$$\forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \left(\widehat{\underline{F}}_E - k^0 (\widehat{\underline{W}}_{E'} - \widehat{\underline{W}}_E) \right) \cdot \underline{W}^{M*} d\Gamma = 0 \quad (4.18)$$

De part la définition du découplage micro/macro des quantités d'interface, cette équation est une relation entre quantités statiques et cinématiques macroscopiques uniquement, donc une loi constitutive macroscopique.

En utilisant l'équation (4.13) issue de la soustraction des directions de recherche de chaque côté de l'interface, en y injectant l'admissibilité des quantités $\widehat{\cdot}$ d'interface,

ainsi que l'admissibilité statique des efforts macroscopiques d'interface recherchés à l'étape linéaire, imposée par le problème macroscopique, on obtient la relation :

$$\forall \underline{W}^{M^*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \left(2 \underline{F}_E + k_{EE'}^{-M} (\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) \right) \cdot \underline{W}^{M^*} d\Gamma = 0 \quad (4.19)$$

En choisissant $k_{EE'}^{-M} = 2k^0$, on assure donc la vérification du comportement macroscopique d'interface complet par les champs recherchés à l'étape linéaire. La validation numérique de cette démonstration est donnée sur la figure 4.6 (a). Le paramètre de direction de recherche macroscopique est multiplié par un scalaire a (on écrit que $k_{EE'}^{-M} = a 2k^0$). a prend successivement les valeurs 1/10, 10 et 100.

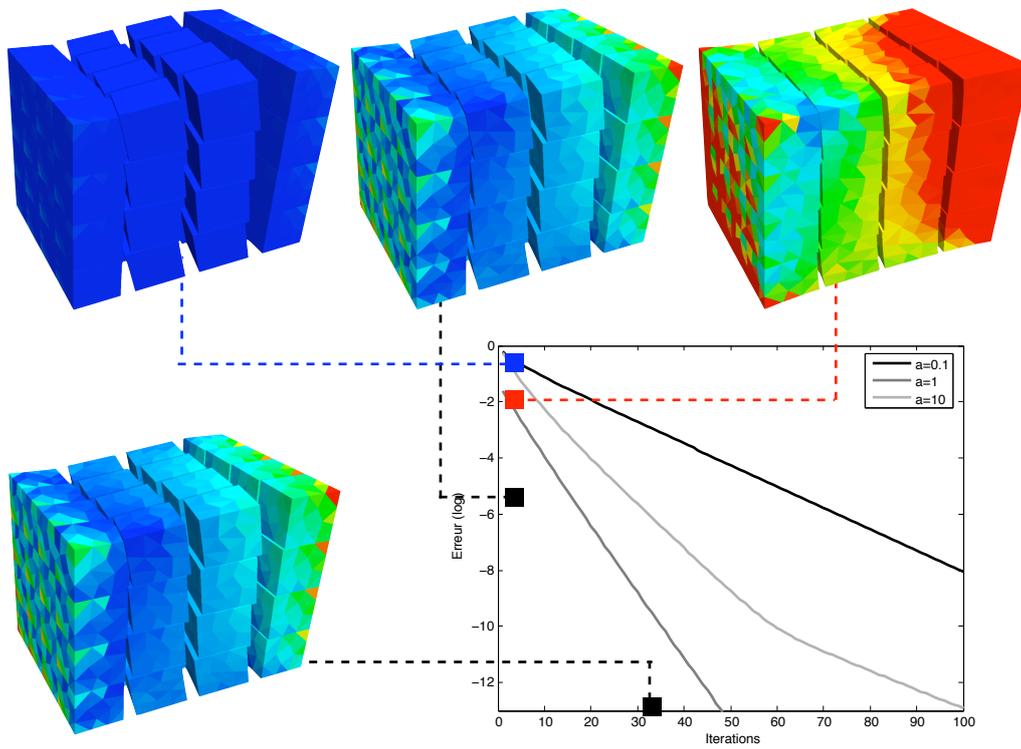
Une étude paramétrique similaire (voir Figure 4.6 (b)) est menée pour quantifier l'influence de la direction de recherche microscopique, la direction de recherche macroscopique étant l'optimum trouvé précédemment. Le test de gauche est un cas où la rigidité d'interface est très faible devant la rigidité en traction d'une sous-structure (le rapport de ces rigidités est de 100), tandis que sur le test de droite, l'étude inverse est menée. Le paramètre de rigidité microscopique est défini sur une interface $\Gamma_{EE'}$ par $k_{EE'}^{-m} = a 2k^0$. Dans le premier cas testé, les sous-structures E' adjacentes à une sous-structure E sont vues comme « des solides rigides » par E , les déformations étant concentrées dans les interfaces élastiques. Par suite, les opérateurs de direction de recherche microscopique optimaux sont proches des rigidités élastiques de l'interface. Dans le second cas, on retrouve la difficulté d'interprétation évoquée pour le cas des interfaces parfaites. En outre la dépendance du taux de convergence à une variation des paramètres de direction de recherche microscopiques est ici relativement élevée.

3.2.3 Cas des interfaces cohésives complètement endommagées

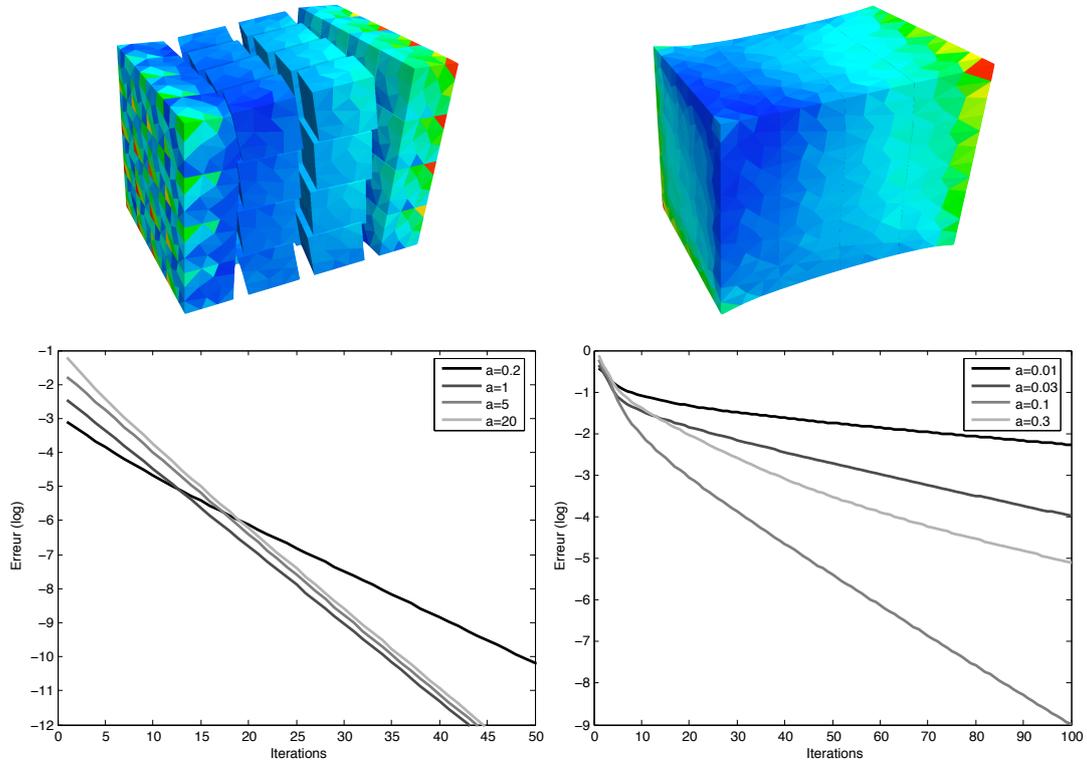
Les dernières interfaces rencontrées au cours de nos travaux et possédant des comportements macroscopiques et microscopiques dissociés sont les interfaces cohésives complètement endommagées sous un chargement de traction. En fait, ce cas très simple à étudier ne nécessite pas la séparation micro/macro du comportement. La direction de recherche \mathbf{E}^- sur l'interface Γ_E d'une sous-structure E s'écrivant :

$$\forall \underline{W}_E^* \in \mathcal{W}_E, \quad \int_{\Gamma_E} \left((\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + k_E^- (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E - \widetilde{\underline{W}}^M) \right) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = 0 \quad (4.20)$$

il est évident que, les quantités $\widehat{\cdot}$ vérifiant la nullité des efforts d'interfaces sur la partie cohésive délaminée de Γ_E , un paramètre k_E^- proche de zéro permet d'imposer la vérification du comportement d'interface aux quantités macroscopiques recherchées à l'étape linéaire sur cette partie de Γ_E . Cette affirmation est illustrée sur la figure 4.7 où des interfaces parfaites ont été utilisées en association avec 8 interfaces fissurées, les paramètres de ces seules interfaces variant au cours de l'étude paramétrique. De même que pour les études précédentes, a est un coefficient multiplicateur des directions de recherche macro (a) et micro (b).



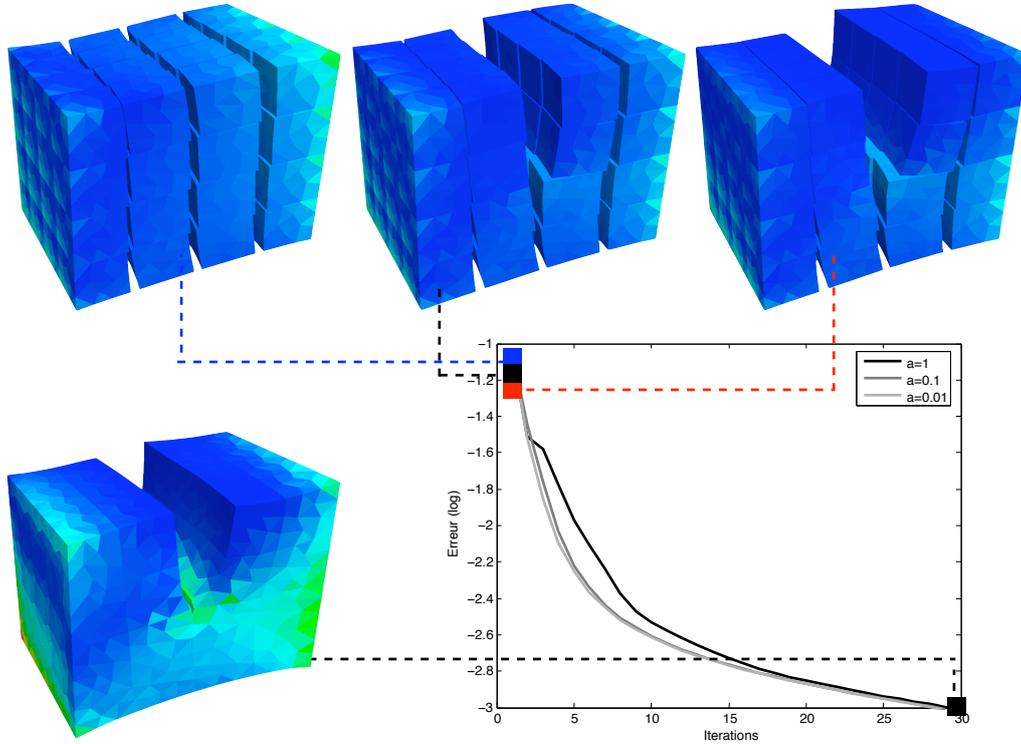
(a) Directions de recherche macroscopiques pour des interfaces élastiques



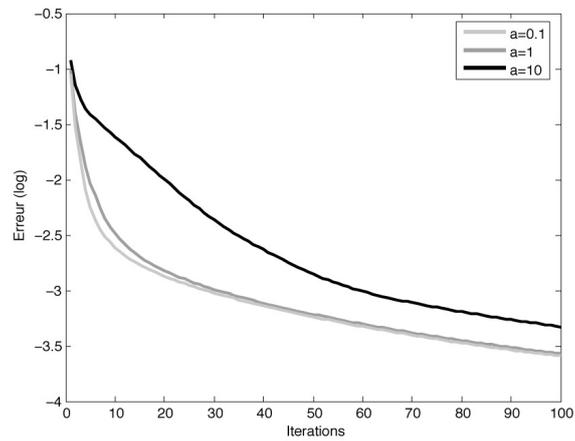
(b) Directions de recherche microscopiques pour des interfaces élastique

FIG. 4.6: Paramètres de direction de recherche optimaux pour des interfaces élastiques

Stratégie de calcul à trois échelles pour la prédiction du délaminage



(a) Directions de recherche macroscopiques pour des interfaces cohésives endommagées



(b) Directions de recherche microscopiques pour des interfaces cohésives endommagées

FIG. 4.7: Paramètres de direction de recherche optimaux pour des interfaces cohésives fissurées en ouverture

3.2.4 Enseignements

Deux résultats principaux de cette étude d'optimisation de l'algorithme LaTIn pour des comportements d'interface simples doivent être retenus :

- A l'étape linéaire de la stratégie, le paramètre de direction de recherche macroscopique permet d'imposer la vérification du comportement macroscopique complet par les quantités d'interface. Un choix judicieux de ce paramètre permet donc d'obtenir un équilibre macroscopique global à la fin de chaque étape linéaire.
- L'optimisation des paramètres de direction de recherche macroscopique permet de diminuer le résidu d'équilibre global obtenu après chaque étape linéaire, en particulier lorsque le niveau d'erreur est élevé.

3.3 Cas général

Dans le cas général, la projection du comportement d'interface dans la base macroscopique n'a pas de sens physique (voir Chapitre 3), le découplage des quantités microscopiques et macroscopiques n'étant réalisé qu'au sens du produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Gamma_{EE'})$. L'identification théorique des paramètres macroscopiques de direction de recherche optimaux n'est donc pas envisageable. En outre, la séparation micro/macro des directions de recherche introduit certaines difficultés numériques supplémentaires :

- Les étapes de projection nécessaires à la construction des opérateurs de rigidité augmentée des sous-structures (voir l'expression des problèmes par sous-structures modifiés (4.10)) sont coûteuses et alourdissent le calcul.
- L'étape locale devient globale sur chaque interface, ce qui peut rendre délicate la résolution des étapes locales pour des interfaces au comportement complexe.
- Les paramètres de direction de recherche microscopiques optimaux sont particulièrement difficiles à identifier, même pour des cas très simples de comportement d'interface, comme cela a été montré dans la section précédente.

On utilise donc par la suite une direction de recherche commune pour les quantités microscopiques et macroscopiques d'interface.

Les interfaces traitées possèdent de manière générale des rigidités normales et tangentielles potentiellement très différentes. Pour l'interface Γ_E d'une sous-structure E , on introduira une séparation entre les directions normales et tangentielles dans la définition locale de l'opérateur de direction de recherche :

$$\text{En tout point de } \Gamma_E, \quad k_E^- = \begin{pmatrix} k_{nE}^- & 0 & 0 \\ 0 & k_{tE}^- & 0 \\ 0 & 0 & k_{tE}^- \end{pmatrix}_{(\underline{n}_E, \underline{t}_{E_1}, \underline{t}_{E_2})} \quad (4.21)$$

3.3.1 Cas des interfaces cohésives

Interface non délaminée ou en cours de délaminage

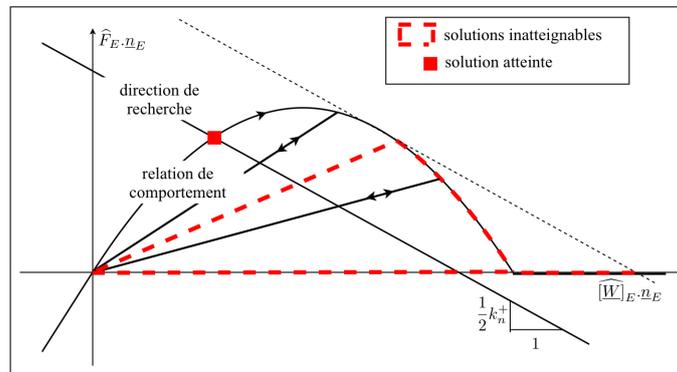
Les premiers calculs de délaminage effectués pendant ces travaux ont mis en évidence qu'une valeur trop faible des paramètres de direction de recherche sur les interfaces cohésives entraîne une divergence du processus incrémental.

La figure 4.8 (a) montre le système à résoudre à l'étape locale en chaque point de Gauss d'une interface cohésive, dans la direction normale à l'interface. La solution recherchée est à l'intersection de la direction de recherche et de la relation de comportement. Le problème est également représenté dans une direction tangentielle sur la figure 4.8 (b). Il apparaît clairement que pour des paramètres de direction de recherche tels que $k_{nE}^- < 2k_n^0$ ou $k_{tE}^- < 2k_t^0$, l'algorithme de Newton local ne peut pas converger vers des solutions pour lesquelles les indicateurs d'endommagement se rapprochent de 1. En conséquence, une stagnation peut apparaître au cours des itérations LaTIn. L'algorithme oscille entre deux états distincts ne correspondant pas au minimum global recherché (voir Figure 4.8 (b)). Pour éviter ce phénomène, on choisira des directions de recherche « plus rigides » que l'interface non endommagée.

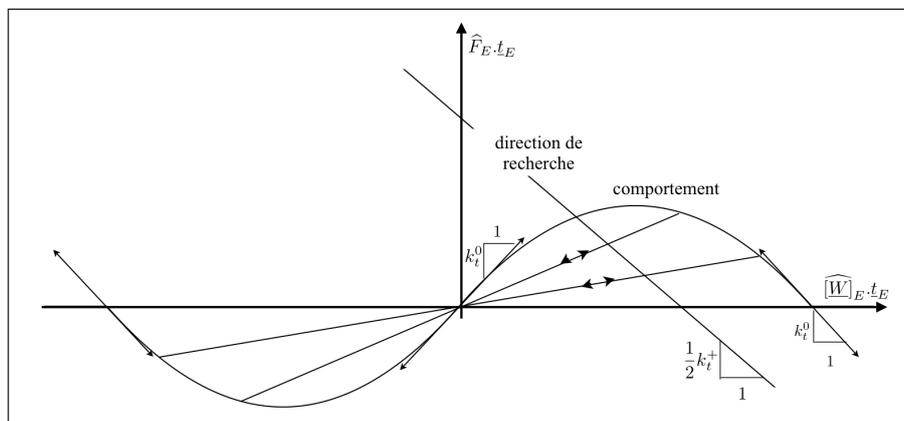
Cependant, même en prenant ces précautions, des stagnations du même type que celles évoquées précédemment ont été observées. Trois solutions ont été testées pour résoudre ce problème :

- Augmenter le facteur de relaxation de l'algorithme LaTIn, celui-ci permettant de diminuer la dépendance de la convergence globale aux paramètres des directions de recherche. Bien que la convergence puisse être recouvrée, le taux de convergence est affecté par ce procédé.
- Augmenter les paramètres de direction de recherche, ce qui signifie rigidifier artificiellement les interfaces cohésives au cours des itérations. L'algorithme converge mais son taux de convergence est encore une fois affecté. De plus, le coefficient multiplicateur à appliquer pour retrouver la convergence est purement empirique.
- Prendre une direction de recherche infinie à l'étape locale, la direction de recherche de l'étape linéaire restant paramétrable. Cette pratique a peu d'influence sur le taux de convergence. Ce dernier est alors exclusivement conditionné par la direction de recherche E^- . De plus, à l'étape locale, le problème posé en chaque point de Gauss des interfaces cohésives est résolu explicitement à partir de la donnée des déplacements d'interface issus de l'étape linéaire. La durée de cette étape est donc fortement diminuée, en particulier dans le cadre du calcul parallèle (les points de Gauss affectés par une variation d'endommagement sont localisés sur un nombre réduit de processeurs). Cette idée est systématiquement mise en oeuvre dans les développements ultérieurs.

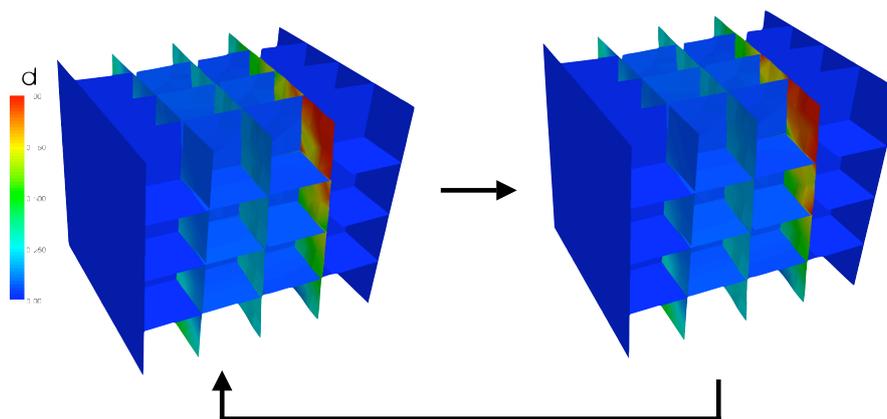
Le choix de direction de recherche \mathbf{E}^+ infiniment rigide nous place dans un cadre où l'interprétation de la direction de recherche \mathbf{E}^- est plus aisée. Les variables ma-



(a) Problème à résoudre dans la direction normale à l'interface à l'étape locale



(b) Problème à résoudre dans la direction tangentielle à l'interface à l'étape locale



(c) Oscillations entre deux états au cours des itérations LaTIn

FIG. 4.8: Recherche d'un paramètre de direction de recherche stabilisant pour les interfaces cohésives

croscopiques d'interface issues d'une étape linéaire vérifient en effet le comportement d'une interface élastique de rigidité $k_{n\bar{E}}$ en traction et $k_{t\bar{E}}$ en cisaillement, comme expliqué dans la section 3.2.2. L'algorithme portant sur les variables macroscopiques est donc très proche d'un algorithme de Newton sécant pour lequel l'opérateur de rigidité sécante n'est pas remis à jour au cours des itérations. On retrouve alors les mêmes propriétés de convergence que pour un schéma de Newton modifié utilisant le comportement initial du problème pour effectuer les étapes de prédiction linéaire. On choisira donc, de manière classique, des paramètres de direction de descente \mathbf{E}^- permettant d'assurer la vérification par les quantités macroscopiques d'interface du comportement initial complet des interfaces cohésives (c'est-à-dire l'équilibre et la loi constitutive élastique) à chaque étape linéaire. Sur l'interface $\Gamma_{EE'}$ cohésive entre deux sous-structures E et E' , on choisira ainsi :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad k_{EE'}^- = \begin{pmatrix} 2k_n^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k_t^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_t^0 \end{pmatrix}_{(\underline{n}_E, \underline{t}_{E_1}, \underline{t}_{E_2})} \quad (4.22)$$

Interface délaminée

Les interfaces complètement délaminées sont, dans notre cas d'étude, les plus complexes à traiter. Leur rigidité est nulle en cisaillement et en traction mais est en revanche très élevée en compression. Les algorithmes de Newton avec remise à jour de l'opérateur de rigidité sécante peinent à converger lorsque l'on se rapproche du contact.

Dans le cadre de la méthode LaTIn, souvent utilisée par le passé pour résoudre des problèmes de contact, des directions de recherche optimales au sens d'un comportement en compression, constantes au cours des itérations, sont utilisées quel que soit le statut de l'interface. La convergence est assurée mais le taux de convergence se dégrade fortement lorsque les interfaces sont sollicitées en traction. Dans le cas des calculs de délaminage, rigidifier artificiellement les interfaces délaminées au cours des itérations LaTIn peut également forcer la convergence vers une solution non-physique (voir Figure 4.4 page 87).

On propose donc une procédure de mise à jour des directions de recherche, au cours des itérations LaTIn, en fonction du statut (tous les points d'intégration d'une interface sont en contact ou tous sont en ouverture) des interfaces cohésives délaminées. Le statut des interfaces est vérifié après une étape locale. Si une variation de ce statut est repérée, les directions de recherche sont mises à jour. Si tous les points de Gauss de l'interface cohésive $\Gamma_{EE'}$ sont chargés en compression, on prendra :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad k_{EE'}^- = \begin{pmatrix} 2k_n^0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}_{(\underline{n}_E, \underline{t}_{E_1}, \underline{t}_{E_2})} \quad (4.23)$$

Si tous les points de Gauss de l'interface sont chargés en traction, en prendra :

$$\text{En tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad k_{EE'}^- = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}_{(\underline{n}_E, \underline{t}_{E1}, \underline{t}_{E2})} \quad (4.24)$$

Pour la sous-structuration « pli-interface » retenue, ϵ peut être fixé à 0. Dans d'autres cas, pour lesquels toutes les interfaces d'une sous-structure présentent une aptitude au délaminage, ou possèdent un comportement de type contact, une valeur trop faible de ϵ peut entraîner des difficultés numériques, les systèmes à résoudre à l'étape linéaire sur chaque sous-structure étant potentiellement singuliers.

■ **Remarque 3.2** *Changer les directions de recherche signifie également réassembler et factoriser les opérateurs locaux par sous-structure ainsi que l'opérateur de rigidité macroscopique. La première opération est peu coûteuse, les interfaces dont le statut change étant en général en nombre réduit. Elle est de plus traitée en parallèle. En ce qui concerne la factorisation du problème macroscopique, celle-ci peut être onéreuse car usuellement effectuée sur un seul processeur. Cette méthode n'est donc efficace que si la taille du problème macroscopique est réduite, ou si ce dernier est assemblé et résolu en parallèle (voir Chapitre 6).*

Mettre à jour les directions de recherche à chaque itération LaTIn nécessite une augmentation du facteur de relaxation afin de stabiliser le schéma numérique. On choisit ici d'utiliser des valeurs élevées du facteur de relaxation, mais de ne réaliser le test sur les sauts locaux aux interfaces cohésives, et éventuellement la mise à jour des directions de recherche, que toutes les N_{mj} itérations LaTIn.

Les résultats de cette procédure effectuée avec $N_{mj} = 5$ sont donnés sur la figure 4.9. Toutes les interfaces du cas test cubique à 64 sous-structures sont cohésives, leur rigidité initiale étant faible de façon à obtenir une fissuration sur certaines des interfaces sans provoquer d'instabilité globale. Le chargement extérieur de type « charge/décharge/charge dans la direction opposée », appliqué de manière quasi-statique en 10 pas de temps, permet de créer les fissures, de les ouvrir puis de les refermer. Le gain en nombre d'itérations LaTIn nécessaires à la convergence (critère d'erreur ν_{rdc} à 0.1%) est fortement diminué par la procédure proposée, en particulier lors des pas de temps pour lesquels la plupart d'interfaces fissurées sont chargées en traction (pas de temps 3, 4, 5 et 6).

■ **Remarque 3.3** *Les tentatives pour établir un lien entre le comportement local des interfaces (c'est-à-dire en chaque point de Gauss des interfaces et non globalement sur chaque interface) et les opérateurs de direction de recherche locaux sont restées infructueuses. Cependant, nous supposons que la sous-structuration retenue est suffisamment fine pour que les procédures décrites dans cette section permettent une bonne représentation du comportement linéarisé de la structure par les quantités macroscopiques au cours des itérations LaTIn.*

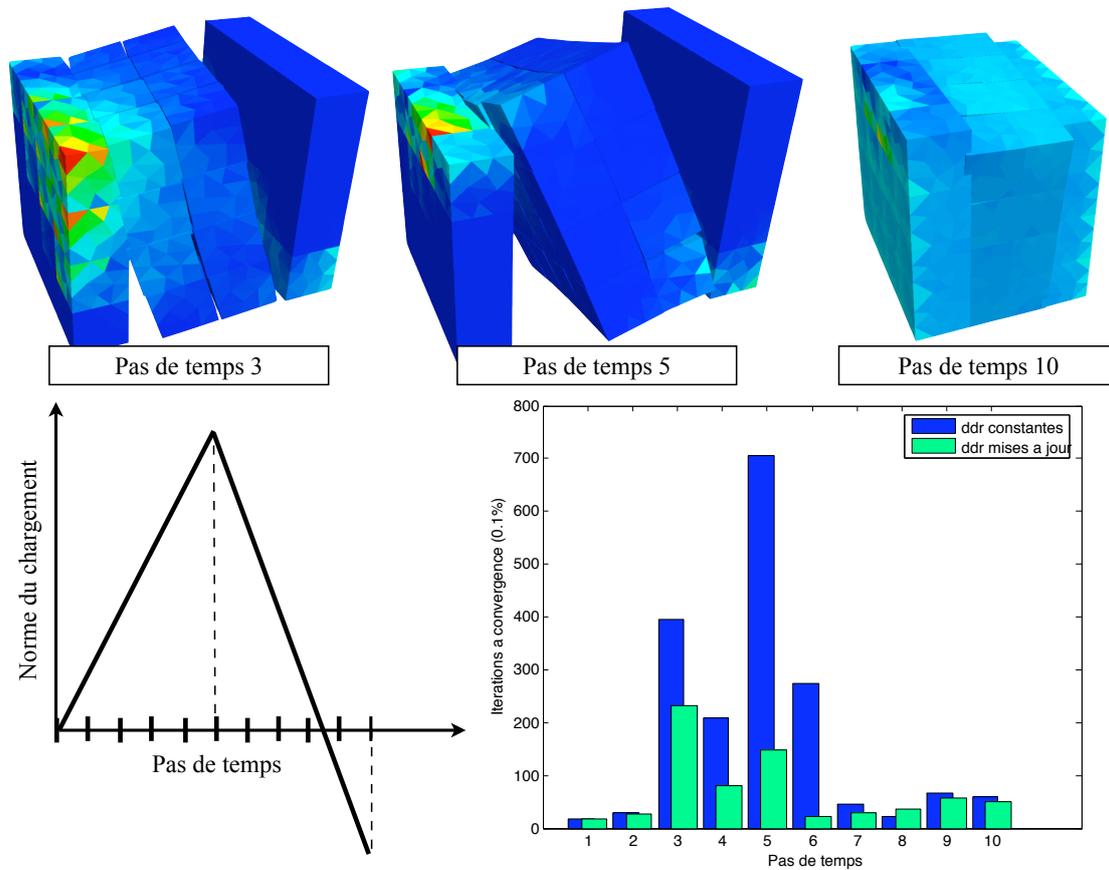


FIG. 4.9: Traitement des ouvertures et refermetures de fissures

3.3.2 Cas des interfaces parfaites

Dans le cas de l'utilisation d'une direction de recherche \mathbf{E}^- unique, imposer la vérification du comportement macroscopique des interfaces parfaites à l'étape linéaire implique la non-convergence des quantités microscopiques. En effet, la direction de descente macroscopique optimale est infinie et donc parallèle au comportement.

Une première solution, coûteuse, est de séparer les directions de recherche macroscopiques et microscopiques uniquement pour les interfaces parfaites (voir Section 3.2). Une seconde est l'utilisation de la direction de recherche unique optimale au sens des quantités microscopiques. Cette pratique ne pose pas de difficulté si les sous-structures sont très rigides par rapport aux interfaces cohésives du modèle. Dans le cas contraire, il est nécessaire de pénaliser les directions de recherche des interfaces parfaites afin de limiter leur influence sur la solution obtenue au problème de délaminage.

3.3.3 Cas des interfaces de conditions aux limites

Classiquement, les paramètres de direction de recherche des interfaces permettant d'imposer des conditions de Dirichlet (respectivement de Neuman) sur $\partial\Omega$ sont choisis élevés (respectivement faibles) [Violeau, 2007]. Cette pratique revient à imposer les conditions aux limites directement dans la formulation faible de l'équilibre des sous-structures (3.32) (page 68), par pénalisation.

3.4 Bilan

La méthode de décomposition de domaine mixte à deux échelles décrite dans le chapitre 3 a été adaptée à la résolution robuste du problème de délaminage de référence posé dans le chapitre 1. Dans la version proposée ici, l'algorithme utilisé pour résoudre le problème non-linéaire posé à chaque piquet de temps de l'analyse est très proche d'un schéma de Newton-Raphson sécant à opérateur de prédiction linéaire initial. Cependant, la résolution du problème linéarisé correspondant aux étapes de prédiction de Newton est réalisée de manière approchée : seules les quantités macroscopiques des étapes linéaires de l'algorithme LaTIn vérifient l'équilibre linéarisé global sur la structure.

Une procédure de mise à jour du « problème sécant » par modification des paramètres de direction de recherche est également effectuée lorsqu'un changement de statut est observé au niveau des interfaces cohésives, correspondant à une variation importante de la rigidité d'interface.

Traitement des non-linéarités localisées

Les non-linéarités d'interface très localisées du problème sous-structuré provoquent une dégradation du taux de convergence de la stratégie itérative. Des solutions, basées soit sur un enrichissement du problème, soit sur la pratique de calculs supplémentaires dans les zones à forts gradients, sont proposées.

Sommaire

1	Enrichissement de la base macroscopique	107
1.1	Enrichissement polynomial	107
1.2	Base macroscopique discontinue	109
1.3	Base macroscopique complète	110
2	Sous-itérations dans les zones à forts gradients	113
2.1	Conditions aux limites du problème extrait	114
2.2	Problème extrait sous-structuré	115
2.3	Construction du problème macroscopique local	115
2.4	Construction adaptative du sous-problème	117
2.5	Parallélisation	118
2.6	Résultats	120
3	Enseignements et utilisation des concepts développés	120

Les premiers essais numériques réalisés pendant ces travaux ont montré une baisse significative du taux de convergence du solveur LaTIn lors des calculs de propagation de fissure. Le cas test de type DCB représenté Figure 5.1 est résolu en 10 pas de temps : les deux premiers correspondent à l'initiation du délaminage, les suivants à la propagation des fissures. A partir du troisième pas de temps, le nombre d'itérations LaTIn nécessaires pour obtenir une solution convergée explose (voir sur la figure 5.11 page 121) les colonnes intitulées « procédure classique »). Cette augmentation significative apparaît dans tous les problèmes de délaminage simulés au cours de nos travaux. Son amplitude dépend notamment de la raideur des interfaces cohésives et du pas de temps de l'analyse.

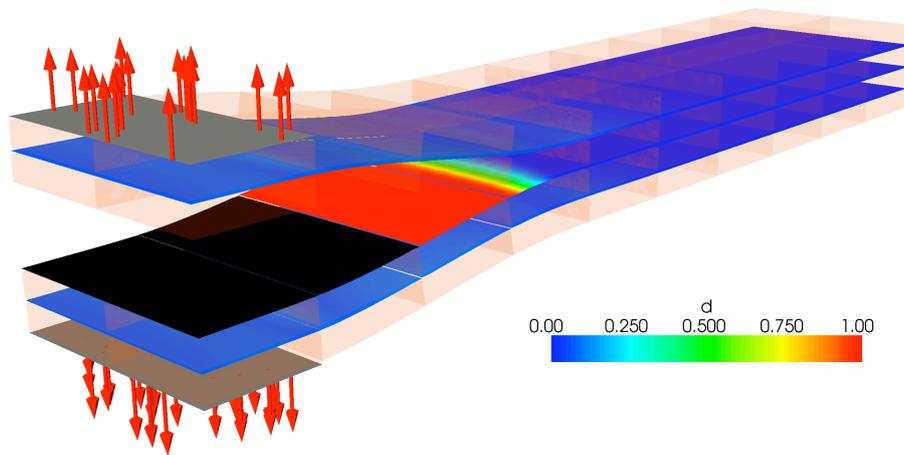


FIG. 5.1: Cas test de type DCB à quatre plis

Plusieurs causes expliquant la chute du taux de convergence ont été identifiées :

- Nous avons montré dans le chapitre 4 que la représentation macroscopique du comportement des interfaces à l'étape linéaire du solveur LaTIn dépend fortement du choix des paramètres de direction de recherche. Une mauvaise représentation de ce comportement, en particulier pour des interfaces cohésives, a pour conséquence une dégradation du taux de convergence. Des solutions ont été proposées pour pallier cette difficulté.
- Dans les zones à fort gradient, la représentation des champs statiques et cinématiques d'interface dans l'espace macroscopique est insuffisante. En pointe de fissure, les quantités microscopiques peuvent avoir une amplitude de même ordre de grandeur que celle des champs macroscopiques (voir Figure 2.2.3 (b) page 64). Ce phénomène apparaît plus clairement lorsque les interfaces cohésives traitées sont « plus raides » que les sous-structures, la concentration de contrainte sur le front de fissure se rapprochant alors d'une singularité. Les quantités microscopiques d'interface ont, dans ce cas de figure, une influence globale sur la solution dans la structure. Cette influence n'est malheureusement pas transmise aux sous-structures lointaines par la résolution du problème ma-

croscopique.

- La simulation d'une propagation de fissure nécessite, pour chaque pas de temps de l'analyse, le calcul d'un nombre important d'états d'équilibre intermédiaires. Plus précisément, la propagation du front de fissure d'un premier état à un second nécessite un calcul pratiquement convergé des concentrations de contrainte dans le premier état. Lors du traitement d'interfaces cohésives très rigides, plusieurs itérations LaTIn sont ainsi nécessaires à l'avancée de la fissure d'un seul front de points d'intégration. Ceci explique les courbes de convergence chahutées observées lors de calcul de délaminage (voir Figure 5.7 page 112), les remontées du résidu correspondant à des changements de statuts locaux sur les interfaces cohésives situées près de la pointe de fissure.

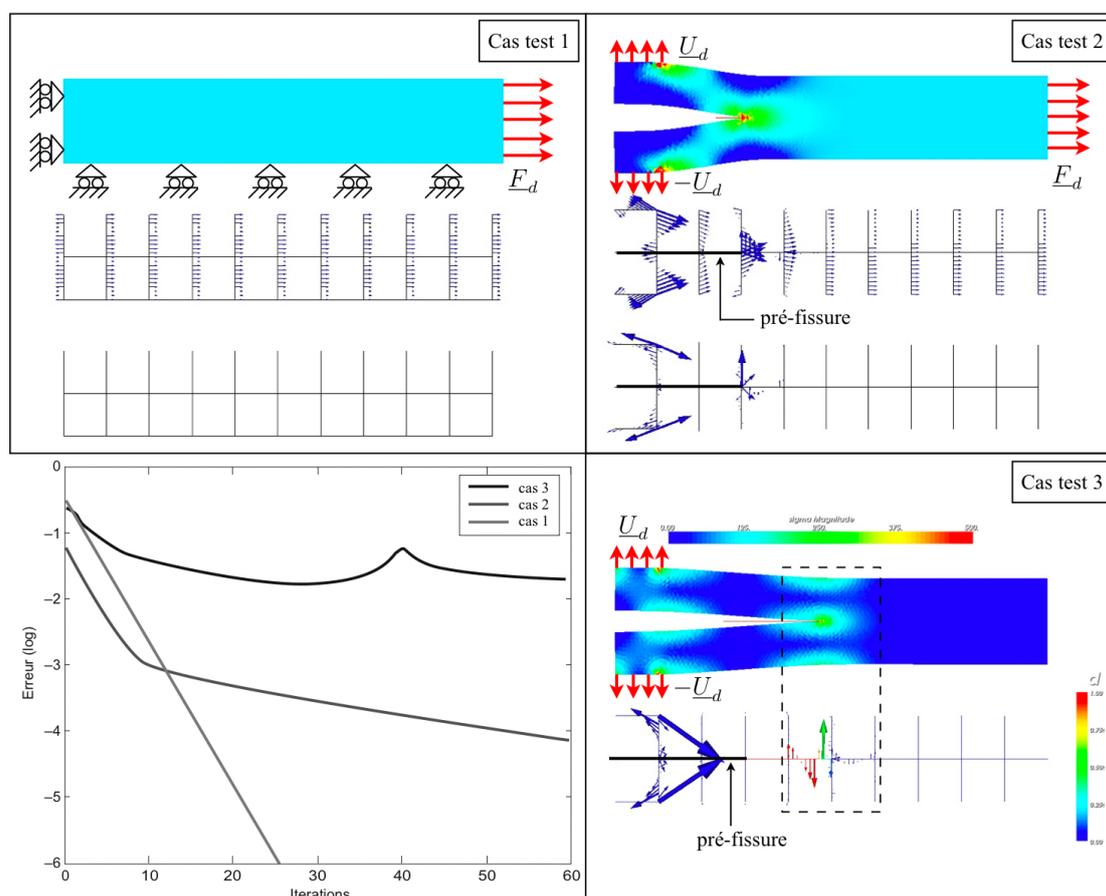


FIG. 5.2: Convergence d'un cas test à vingt sous-structures en 2D soumis à divers cas de chargement

Les deux derniers phénomènes sont illustrés par les résultats donnés sur la figure 5.2. La structure étudiée en 2D est composée de 20 sous-structures. La déformée de la structure, les efforts macroscopiques et microscopiques d'interface sont donnés pour trois cas de charge et de comportement d'interface différents. Les courbes de

convergence de l'algorithme LaTIn obtenues sont comparées sur un même graphique.

Dans le cas test 1, toutes les interfaces sont parfaites, et le chargement est choisi de façon à ce que la solution soit parfaitement représentée par la base macroscopique linéaire. Dans le cas test 2, toujours linéaire, une pré-fissure est définie, et le chargement active une singularité de contrainte en pointe de fissure. La baisse du taux de convergence obtenu dans ce cas est flagrante et uniquement due à la mauvaise séparation d'échelle évoquée. Dans le dernier cas, les interfaces horizontales ont un comportement cohésif. Le chargement est appliqué en quasi-statique sur dix pas de temps. La courbe de convergence tracée est celle d'un calcul LaTIn à un piquet de temps correspondant à la propagation de la fissure. Les deux effets décrits précédemment se cumulent et dégradent très fortement le taux de convergence.

Dans un premier temps, une solution au seul problème de mauvaise séparation d'échelle a été recherchée. Deux façons de rétablir l'extensibilité numérique ont ainsi été envisagées :

- Une première famille de solutions consiste à effectuer un certain nombre de calculs représentatifs, dont les solutions peuvent être réutilisées par la suite au cours de l'analyse. Ces solutions peuvent permettre un enrichissement de la base macroscopique couplé éventuellement à une approximation pertinente de la solution microscopique dans les zones à fort gradient. Cette démarche de calcul de fonctions *handbook* est celle employée par [Strouboulis et al., 2001] dans le cadre de la GFEM.
- La deuxième famille de solutions pour rétablir l'extensibilité de la méthode lors du traitement de non-linéarités localisées consiste à enrichir la base macroscopique par des fonctions choisies *a priori*. Le but de cette démarche est de trouver une base permettant une bonne représentation des quantités à grande longueur de variation pour un nombre faible de degrés de liberté macroscopiques. Cette approche est conceptuellement semblable à celle proposée par [Moës et al., 1999] dans le cadre de la XFEM pour enrichir la base éléments finis, qui correspond ici à la discrétisation microscopique.

Nous nous sommes ici dirigés vers la seconde famille de stratégies évoquées. Le choix d'une base macroscopique enrichie localement a permis d'obtenir la séparation d'échelle souhaitée dans les simulations de fissuration proposées par [Guidault et al., 2008], sur lesquelles nous reviendrons. Dans notre cas, un espace macroscopique pertinent à faible nombre de degrés de liberté n'a pas été trouvé. Un enrichissement permettant la transmission de toute l'information microscopique du front de délaminage est alors pratiqué. Son obtention fait l'objet de la section 1. Cependant, l'utilisation de la base « macroscopique » enrichie alourdit fortement les calculs. Une stratégie alternative moins coûteuse, bâtie sur ces idées et assurant également l'extensibilité, est proposée dans la section 2. Cette méthode permet, comme nous le verrons, de résoudre également la dernière difficulté soulevée, liée à la quantité de calculs d'équilibre global nécessaires à la propagation du front de fissure au cours du processus itératif.

1 Enrichissement de la base macroscopique

Les différents enrichissements testés, en 2D, sont représentés sur la figure 5.3. Les résultats obtenus pour chacun de ces enrichissements sont détaillés dans les sections suivantes.

1.1 Enrichissement polynomial

En 2D, et pour une interface $\Gamma_{EE'}$ linéique entre deux sous-structures adjacentes E et E' , la base macroscopique est limitée à quatre vecteurs : deux résultantes suivant les vecteurs propres $\underline{N}_{EE',1}$ et $\underline{N}_{EE',2}$ de la matrice d'inertie de $\Gamma_{EE'}$, une rotation selon $\underline{N}_{EE',3}$ et un mode d'extension. $\underline{N}_{EE',1}$ est ici associé à la valeur propre nulle de la matrice d'inertie $\mathbf{I}_{EE'}$ (c'est-à-dire que $\underline{N}_{EE',1}$ est la direction de l'interface linéique).

En généralisant cette écriture pour une base macroscopique polynomiale de degré p , les vecteurs de base utilisés, *a priori* non normés ni orthogonaux, peuvent être définis par les relations [Loiseau, 2001; Guidault, 2005] :

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{e}}_{EE',2i}^M &= (\underline{N}_{EE',1} \cdot \underline{G}_{EE'} M)^p \underline{N}_{EE',1} \\ \tilde{\underline{e}}_{EE',2i+1}^M &= (\underline{N}_{EE',1} \cdot \underline{G}_{EE'} M)^p \underline{N}_{EE',2}\end{aligned}\quad (5.1)$$

où i est un entier naturel tel que $0 < i \leq p$. La base effectivement utilisée est ensuite obtenue par une procédure d'orthonormalisation de Schmidt sur les vecteurs $(\tilde{\underline{e}}_{EE',i})_{i \in [0, 2(p+1)]}$.

L'enrichissement de la base macroscopique linéaire par des fonctions quadratiques et cubiques ($p = 3$) a pour effet une amélioration du taux de convergence, mais peu significative, les quantités d'interface en pointe de fissure étant encore très mal représentées dans l'espace macroscopique enrichi.

La figure 5.4 illustre ces idées, sur le cas test 2 de la figure 5.2 (page 105). Le résultat intitulé « monéchelle » correspond à un calcul LaTIn sans résolution du problème grossier. La courbe de convergence intitulée « macro effort » est obtenue par un calcul micro/macro en utilisant soit la base macroscopique linéaire classique, soit la base enrichie cubique. Ces deux courbes sont confondues, le gain apporté par les enrichissements successifs étant négligeable.

Les résultats suivants sont obtenus en imposant à l'étape linéaire du solveur LaTIn, en plus de l'équilibre des efforts macroscopiques d'interface, la continuité des déplacements macroscopiques des interfaces parfaites et la nullité des efforts d'interface cohésives pré-fissurées en traction. On pratique pour cela une séparation des contributions microscopiques et macroscopiques de la direction de recherche \mathbf{E}^- , couplée au choix optimum des paramètres de direction de recherche macroscopique, comme détaillé dans le chapitre 4. On observe alors un gain progressif sur le taux de convergence par utilisation des bases linéaires (courbe intitulée « macro linéaire »)

Type de base	Vecteurs de base macroscopique en 2D			
Linéaire	$e_{EE'1}^M$ 	$e_{EE'2}^M$ 	$e_{EE'3}^M$ 	$e_{EE'4}^M$
Enrichissement cubique	$e_{EE'5}^M$ 	$e_{EE'6}^M$ 	$e_{EE'7}^M$ 	$e_{EE'8}^M$
Base linéaire discontinue	$e_{EE'1}^M$ 	$e_{EE'2}^M$ 	$e_{EE'3}^M$ 	$e_{EE'4}^M$
	$e_{EE'5}^M$ 	$e_{EE'6}^M$ 	$e_{EE'7}^M$ 	$e_{EE'8}^M$
Base microscopique	$e_{EE'1}^M$ 	$e_{EE'2}^M$ 	$e_{EE'3}^M$ 	$e_{EE'4}^M$
				...

FIG. 5.3: Enrichissements de la base macroscopique en 2D

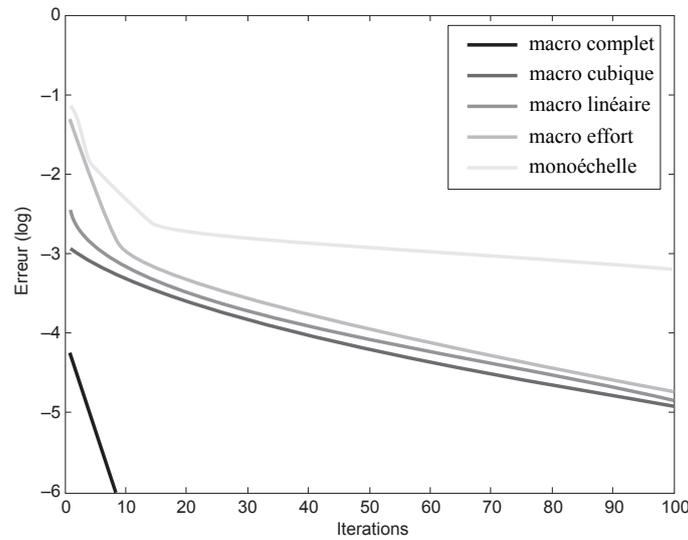


FIG. 5.4: Enrichissement de la base macroscopique sur un cas test 2D linéaire

et cubiques (courbe intitulée « macro cubique »). Cependant, l'enrichissement polynomial proposé améliore relativement peu le taux de convergence de la méthode, pour une taille doublée du problème macroscopique et des coûts supplémentaires dûs aux projections impliquées par le traitement séparé des directions de recherche microscopiques et macroscopiques.

1.2 Base macroscopique discontinue

Dans [Guidault et al., 2008], les auteurs proposent une façon originale de rétablir l'extensibilité de la méthode pour des calculs de fissuration dans des milieux homogènes et isotropes 2D. Les interfaces de la méthode de décomposition ont un comportement parfait, la propagation de la fissure ayant lieu dans les sous-structures (voir Figure 5.5 partie de gauche). Les concentrations de contrainte liées à la pointe de fissure sont ainsi localisées dans les sous-structures, les champs d'interface étant alors relativement bien approximatés par des bases linéaires sur les interfaces intactes. Sur les interfaces coupées par une fissure, une base macroscopique linéaire discontinue est utilisée (voir Figure 5.3). Les champs d'efforts et de déplacements de ces interfaces sont relativement lisses mais discontinus au point de coupure de l'interface par la pointe de fissure. Dès lors, ils sont bien représentés dans cette nouvelle base, et l'extensibilité numérique est assurée.

Cette technique a également été testée pour nos cas d'application, en 2D, mais n'a pas donné les résultats escomptés, et ce pour deux raisons. La première est que la position de la pointe de fissure change non seulement au cours de l'analyse, mais également au cours des itérations du solveur itératif. Sur l'exemple de la figure 5.6, la base macroscopique discontinue est mise à jour à convergence du calcul effectué à un piquet de temps t_n . La discontinuité macroscopique sur les interfaces horizontales

cohésives est introduite au point de transition entre la zone délaminée et la zone non-délaminée. L'inadéquation entre la base macroscopique discontinue utilisée et la position de la pointe de fissure obtenue au piquet de temps t_{n+1} apparaît de manière évidente. D'autre part, et même dans le cas où la position de la pointe de fissure est connue avant le calcul et n'évolue pas, les concentrations de contrainte en pointe de fissure affectent les quantités d'interface (voir Figure 5.5 partie de droite). Une base linéaire, même discontinue, est donc insuffisante pour représenter ces quantités.

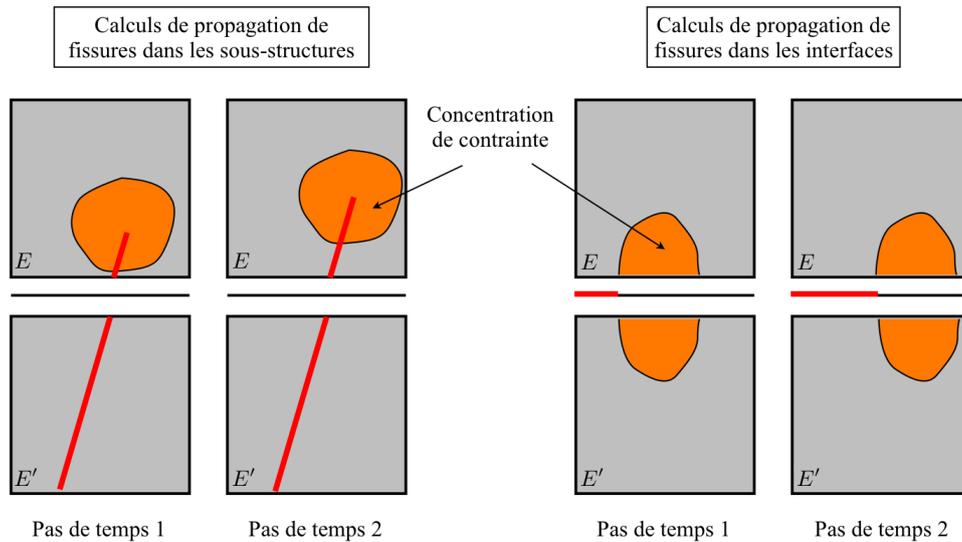


FIG. 5.5: Utilisation d'une base macroscopique discontinue pour traiter la fissuration dans les interfaces de la méthode de décomposition de domaine mixte

1.3 Base macroscopique complète

Le dernier enrichissement testé consiste à utiliser tous les degrés de liberté d'interface comme base macroscopique. Cette pratique est aisée, ces fonctions étant orthogonales au sens du produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Gamma)$ sur une interface $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}$.

Cette idée a été mise en pratique pour résoudre le problème linéaire correspondant au cas test 2 sur la figure 5.2 (page 105). En utilisant la séparation des directions de recherche macroscopiques et microscopiques décrite dans le chapitre 4, la convergence est atteinte en une itération. En effet, à l'étape linéaire de la stratégie, l'équilibre des sous-structures est vérifié ainsi que l'équilibre des champs statiques d'interface (par résolution du problème macroscopique enrichi). Le choix des directions de recherche macroscopiques optimales permet alors d'assurer la vérification du comportement complet des interfaces parfaites et cohésives pré-fissurées. Le problème sous-structuré est donc résolu exactement (si le coefficient de pénalisation des paramètres de direction de recherche macroscopique est suffisamment

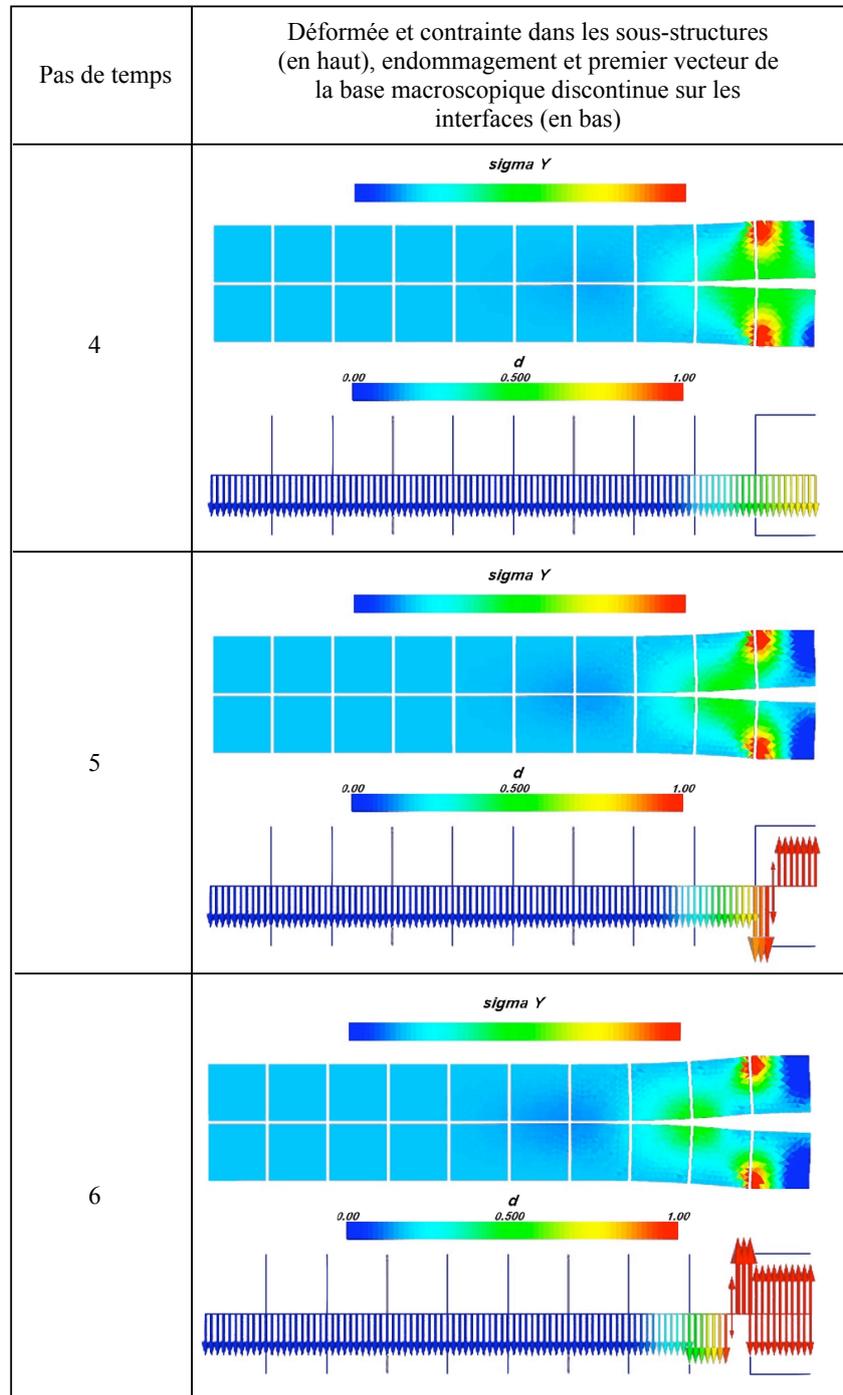


FIG. 5.6: Inadaptation de la base macroscopique linéaire discontinue pour les problèmes de délaminage

élevé) à la fin de la première étape linéaire du solveur. La courbe de convergence LaTIn obtenue est donnée sur la figure 5.4 (intitulée « macro complet »). On notera que, sans la pratique du raccord macroscopique entre sous-structures au sens du comportement d'interface, à l'étape linéaire du solveur itératif, le gain apporté par cet enrichissement est également nul.

Un cas moins dégénéré d'utilisation de cet enrichissement et de ne le pratiquer que sur les sous-structures situées dans une zone située autour de la pointe de fissure. Un gain significatif est observé sur le taux de convergence obtenu par rapport aux calculs sans enrichissement de la base macroscopique. Les résultats de cet enrichissement local sont fournis directement pour des calculs non-linéaires avec interfaces cohésives. La figure 5.7 donne les courbes de convergence LaTIn obtenues dans un premier temps par utilisation d'une base linéaire classique (courbe intitulée « macro linéaire »), et dans un second temps par enrichissement microscopique sur les quatre sous-structures entourant la pointe de fissure du cas test 3 de la figure 5.2 (courbe intitulée « macro complet localisé »).

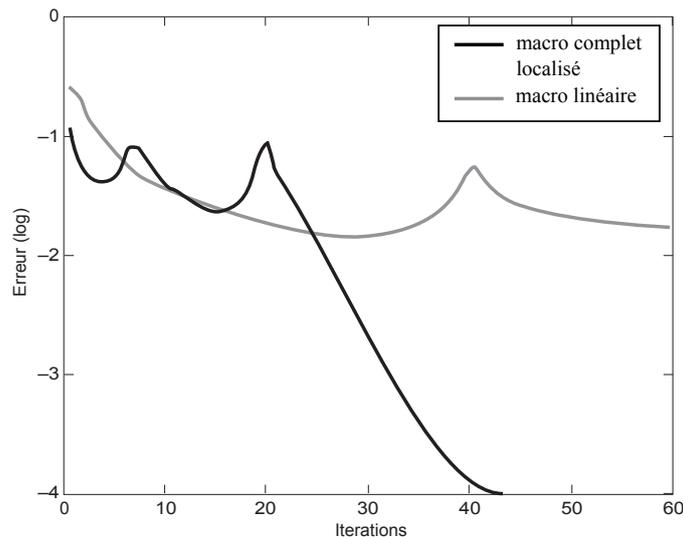


FIG. 5.7: Enrichissement local de la base macroscopique pour la propagation de fissure sur un cas test 2D

Nos lacunes à transmettre les effets à grande longueur de variation des concentrations de contrainte liées au front de fissure par le problème macroscopique peuvent être comblées en résolvant de manière exacte, à chaque étape linéaire de l'algorithme LaTIn, le problème linéarisé de la zone dans laquelle cette concentration a un effet dominant. L'extensibilité numérique globale de la méthode est restaurée par ce procédé.

L'enrichissement proposé a été étendu au 3D et donne des résultats similaires. Cependant, il ne nous donne pas satisfaction car il alourdit la construction et la résolution du problème macroscopique. En effet, assembler l'opérateur homogénéisé

d'une sous-structure enrichie revient à calculer explicitement le complément de Schur primal de cette sous-structure, et donc à effectuer une quantité considérable de résolutions de systèmes locaux. En outre, dans le cadre d'une résolution en parallèle, les opérateurs homogénéisés enrichis sont stockés sur les quelques processeurs traitant les sous-structures situées près du front de fissure. Un problème de répartition de charge (en mémoire et en temps CPU) se pose alors.

Une technique envisageable serait de résoudre de manière itérative le problème linéarisé de la zone située autour du front de délaminage, à chaque étape linéaire du solveur itératif, par la méthode de décomposition de domaine mixte à deux échelles. Dans la section 2, nous préférons à cette méthode la résolution itérative du problème non-linéaire de cette zone, à chaque itération de l'algorithme LaTIn global. Cette stratégie alternative permet également de recouvrer l'extensibilité en transmettant l'information à grande longueur d'onde issue des quantités microscopiques en pointe de fissure. En outre, les résolutions non-linéaires locales forcent la propagation du front de délaminage et limitent le nombre de calculs d'équilibre global nécessaires à la convergence.

2 Sous-itérations dans les zones à forts gradients

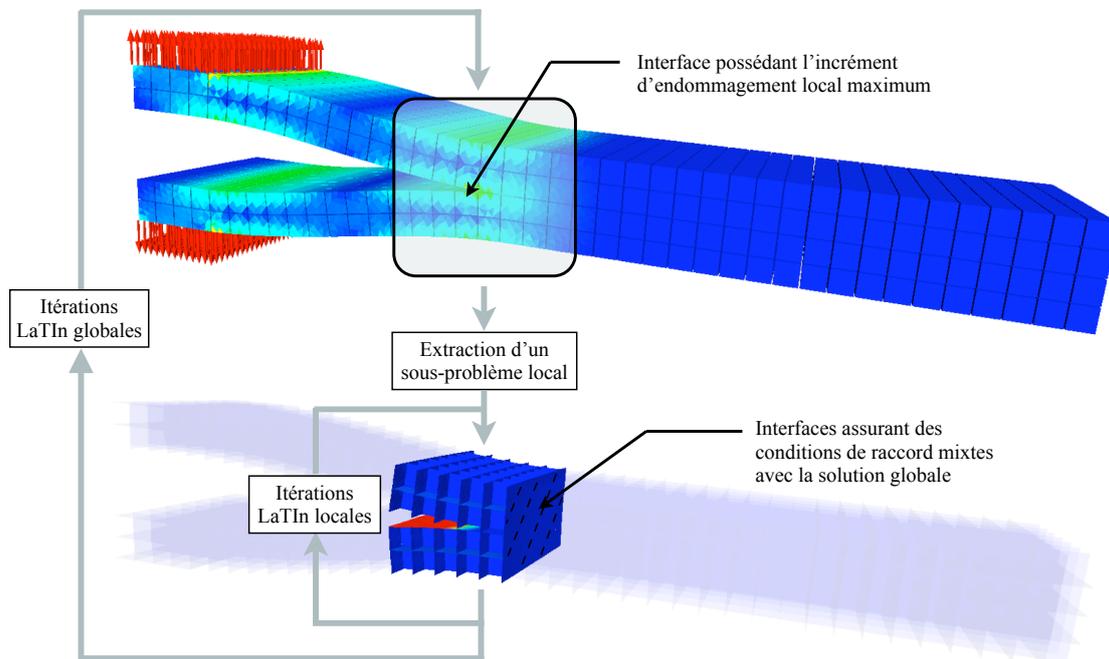


FIG. 5.8: Résolution d'un problème non-linéaire local par la stratégie micro/macro à chaque itération LaTIn globale

On propose ici de résoudre par la méthode de décomposition de domaine mixte

à deux échelles le problème non-linéaire localisé sur un bloc autour du front de délaminage, à chaque itération du solveur global (voir Figure 5.8). Schématiquement, les calculs non-linéaires dans cette zone permettent de traduire les effets locaux dus à la fissuration en contributions macroscopiques sur les interfaces des sous-domaines voisins. Une fois ces contributions obtenues, un calcul standard permet de les propager à l'ensemble de la structure. La partie du domaine Ω correspondant à ce bloc sera notée Ω_{sub} , et sa frontière $\partial\Omega_{\text{sub}}$. La structure extraite sera notée \mathbf{E}_{sub} .

La procédure utilisée est décrite par l'algorithme 2. Le point délicat de cette méthode est le raccord entre le problème global et le problème extrait, qui conditionne la convergence des algorithmes LaTIn locaux et globaux. Nous nous concentrons dans un premier temps sur l'étude de ce raccord. Ce choix effectué, la résolution du problème local sur \mathbf{E}_{sub} par la stratégie micro/macro pose assez peu de difficulté. Seules les différences avec l'algorithme global décrit dans le chapitre 3 seront détaillées.

■ **Remarque 2.1** *Cette démarche possède de fortes similitudes avec les techniques de relocalisations non-linéaires développées dans [Cresta et al., 2007; Pebrel et al., 2008]. Dans ces travaux, les auteurs résolvent des problèmes non-linéaires indépendants pour chaque sous-structure, après une prédiction linéaire globale de Newton résolue par une méthode de décomposition de domaine duale ou mixte. Le but de cette démarche est d'effectuer le nombre minimum de calculs d'équilibre globaux nécessaires à la propagation de l'information dans la structure.*

Techniquement cependant, les problématiques sont différentes. Ici, les relocalisations sont effectuées sur un ensemble de sous-structures afin d'activer les non-linéarités d'interface. En outre, elles sont effectuées à partir d'une solution admissible de \mathbf{A}_d correspondant uniquement à un équilibre global macroscopique.

2.1 Conditions aux limites du problème extrait

Les sous-itérations sur \mathbf{E}_{sub} sont réalisées après chaque étape locale de l'algorithme LaTIn global. Seuls les champs issus de l'étape linéaire, appartenant à \mathbf{A}_d , vérifient un certain équilibre global de la structure (un équilibre macroscopique). On choisira donc de relier les inconnues du problème extrait aux quantités issues de l'étape linéaire précédente, sur $\partial\Omega_{\text{sub}}$. Cette relation est imposée de façon mixte :

$$\begin{aligned} \forall (E, E') \in \mathbf{E}_{\text{sub}} \times \bar{\mathbf{E}}_{\text{sub}} / \partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{E'} \neq \{0\}, \\ \text{En tout point de } \Gamma_{EE'}, \underline{F}_E + k_E^{\text{CL}} \underline{W}_E = \underline{F}_E^{\text{CL}} + k_E^{\text{CL}} \underline{W}_E^{\text{CL}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

k_E^{CL} est un opérateur local symétrique, défini positif. $\underline{F}_E^{\text{CL}}$ et $\underline{W}_E^{\text{CL}}$ sont respectivement les champs \underline{F}_E et \underline{W}_E des interfaces de bord de \mathbf{E}_{sub} , issus de l'étape linéaire globale précédente.

Les meilleurs résultats de convergence des itérations locales et globales sont obtenus pour $k_E^{\text{CL}} = k_E^-$. Nous verrons dans la section 2.3 les caractéristiques numériques particulières induites par ce choix.

2.2 Problème extrait sous-structuré

Le problème non-linéaire sous-structuré à résoudre sur \mathbf{E}_{sub} s'écrit de manière similaire au problème global sous-structuré du chapitre 3 :

Trouver la solution $s = (s_E)_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}}$, où $s_E = (\underline{u}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{F}_E)$, vérifiant :

- Admissibilité cinématique de chaque sous-structure E .
- Admissibilité statique de E .
- Comportement linéaire orthotrope de E .
- Comportement des interfaces intérieures de \mathbf{E}_{sub} (cohésives ou parfaites) :
en tout point de $\Gamma_{EE'}$ tel que $E' \in \mathbf{V}_E$ et $E' \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$,

$$\mathcal{R}(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E, \underline{F}_{E'}) = 0 \quad (5.3)$$

- Comportement des interfaces transmettant les conditions aux limites :
Si $\Gamma_E \cap \partial\Omega \neq \{0\}$, En tout point de Γ_{Ed} , $\mathcal{R}_d(\underline{W}_E, \underline{F}_E) = 0 \quad (5.4)$

- Comportement des interfaces imposant les conditions de raccord mixte avec $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E}_{\text{sub}}$:
Si $(\exists E' \in \mathbf{V}_E \text{ tel que } E' \notin \mathbf{E}_{\text{sub}}), \forall E' \in \mathbf{V}_E \text{ tel que } E' \notin \mathbf{E}_{\text{sub}}$,
En tout point de $\Gamma_{EE'}$, $\underline{F}_E + k_E^{\text{CL}} \underline{W}_E = \underline{F}_{E'}^{\text{CL}} + k_{E'}^{\text{CL}} \underline{W}_{E'} \quad (5.5)$

La résolution de ce problème par l'algorithme LaTIn ne pose pas de difficulté particulière, les opérateurs construits pour résoudre le problème global étant réutilisés. Une attention particulière doit cependant être portée sur la construction du problème macroscopique, pour laquelle la prise en compte des conditions de raccord mixte requiert quelques précisions.

2.3 Construction du problème macroscopique local

La résolution du problème non-linéaire extrait par la méthode micro/macro à deux échelles nécessite la construction d'un problème homogénéisé local. Ce dernier, semblable au problème grossier global sur la structure, permet d'assurer l'équilibre des efforts macroscopiques des interfaces de \mathbf{E}_{sub} à chaque itération du solveur. Cependant, sur le bord $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega$, des conditions aux limites mixtes sont imposés. Il est judicieux de les prendre en compte dans la construction du problème macroscopique, en réécrivant la direction de recherche \mathbf{E}^- des résolutions locales sous la forme :

Trouver $(\underline{W}_E, \underline{F}_E)_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \Pi_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}}(\mathcal{W}_E \times \mathcal{F}_E)$ tel que :

$$\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}, \forall \underline{W}_E^* \in \mathcal{W}_E, \quad \int_{\Gamma_E} \left((\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + k_E^- (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) - k_E^- \widetilde{W}^M \right) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = 0 \quad (5.6)$$

$$\forall (\widetilde{W}_E^{M^*})_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \mathcal{W}_{\text{ad,sub}}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E} \underline{F}_E \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma \quad (5.7)$$

$$+ \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega} (\underline{F}_E^{\text{CL}} + k_E^{\text{CL}} \underline{W}_E^{\text{CL}} - k_E^{\text{CL}} \underline{W}_E) \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma$$

où les restrictions aux interfaces de \mathbf{E}_{sub} des champs macroscopiquement admissibles appartenant à $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$ sont recherchées dans l'espaces $\mathcal{W}_{\text{ad,sub}}^M$.

Cette formulation modifiée de la direction de recherche \mathbf{E}^- permet de s'assurer que les contraintes de transmission mixtes seront vérifiées par les quantités macroscopiques d'interface à chaque étape linéaire locale.

Par suite, en suivant la démarche de construction du problème homogénéisé décrite dans le chapitre 3, le problème macroscopique local devient :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \mathcal{W}_{\text{ad,sub}}^M \text{ tel que } \forall (\widetilde{W}_E^{M^*})_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \mathcal{W}_{\text{ad,sub}}^M, \\ & \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \setminus (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} \mathbb{L}_E^M \widetilde{W}_E^M \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma \\ & + \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \cap (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} \left((\mathbf{I}_d - k_E^{\text{CL}} k_E^{-1}) \mathbb{L}_E^M + k_E^- \right) \widetilde{W}_E^M \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma \\ & = \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma - \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \setminus (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} \widetilde{\underline{F}}_E \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma \\ & + \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \cap (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} \left(-(\mathbf{I}_d - k_E^{\text{CL}} k_E^{-1}) \widetilde{\underline{F}}_E - k_E^{\text{CL}} k_E^{-1} \widehat{\underline{F}}_E \right) \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma \\ & + \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \cap (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} (\underline{F}_E^{\text{CL}} + k_E^{\text{CL}} \underline{W}_E^{\text{CL}}) \cdot \widetilde{W}_E^{M^*} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le terme de droite du problème homogénéisé ainsi que le second membre sont modifiés par la prise en compte des conditions aux limites mixtes. L'assemblage de termes supplémentaires est nécessaire sur les bords $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \Omega$ du domaine extrait où ces conditions sont imposées. Le calcul de ces contributions ne posent pas de problème particulier.

Dans le cas retenu où

$$\forall E' \in \mathbf{V}_E \text{ tel que } E' \notin \mathbf{E}_{\text{sub}}, \text{ En tout point de } \Gamma_{EE'}, \quad (5.9)$$

$$k_E^{\text{CL}} = k_E^-$$

l'expression de ce problème macroscopique se simplifie. En prenant un champ test macroscopique dans l'espace $\mathcal{W}_{\text{ad},\partial\Omega_{\text{sub}}}^M$ des champs macroscopiques nuls sur toutes les interfaces de \mathbf{E}_{sub} sauf sur $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \mathcal{W}_{\text{ad},\text{sub}}^M \text{ tel que } \forall (\widetilde{W}_E^{M*})_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \mathcal{W}_{\text{ad},\partial\Omega_{\text{sub}}}^M, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \cap (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} k_E^- \widetilde{W}_E^M \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \cap (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} \widehat{F}_E \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma \\ + \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E \cap (\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega)} (F_E^{\text{CL}} + k_E^{\text{CL}} W_E^{\text{CL}}) \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'écriture de la vérification de contraintes de raccord mixte sur $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega$ par les quantités $\widehat{\cdot}$ d'interface conduit à l'annulation du multiplicateur de Lagrange. Les conditions de raccord mixtes sont donc vérifiées automatiquement par les champs de l'étape linéaire, sans écriture de contrainte macroscopique sur $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega$. Dans ce cas de figure, le problème macroscopique sur \mathbf{E}_{sub} s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \mathcal{W}_{\text{ad},\text{sub},0}^M \text{ tel que } \forall (\widetilde{W}_E^{M*})_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \in \mathcal{W}_{\text{ad},\text{sub},0}^M, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E} \mathbb{L}_E^M \widetilde{W}_E^M \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\partial\Omega_f} F_d \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma - \sum_{E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}} \int_{\Gamma_E} \widetilde{F}_E \cdot \widetilde{W}_E^{M*} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.11)$$

où $\mathcal{W}_{\text{ad},\text{sub},0}^M$ est l'espace des champs macroscopiques admissibles des interfaces de \mathbf{E}_{sub} , nul sur $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega_u$. Le problème extrait étant localisé sur un nombre restreint de sous-structures, le problème macroscopique local possède un faible nombre de degrés de liberté. Sa résolution est donc peu coûteuse. En outre, l'assemblage de ce problème n'est effectué que lorsque le domaine extrait évolue entre deux itérations globales (voir Section 2.4).

2.4 Construction adaptative du sous-problème

L'extraction de \mathbf{E}_{sub} est réalisée de manière automatique à chaque itération du solveur global. Pour cela, on définit un critère local par interface. L'interface de la structure possédant la valeur maximale de ce critère est sélectionnée pour construire le sous-problème. L'ensemble des sous-structures dont le centre de gravité est situé à une distance inférieure à une longueur donnée l_d du centre de gravité de l'interface précédemment sélectionnée sont extraites pour former \mathbf{E}_{sub} (voir Figure 5.8 page 113).

Deux critères de sélection d'interface ont été implantés :

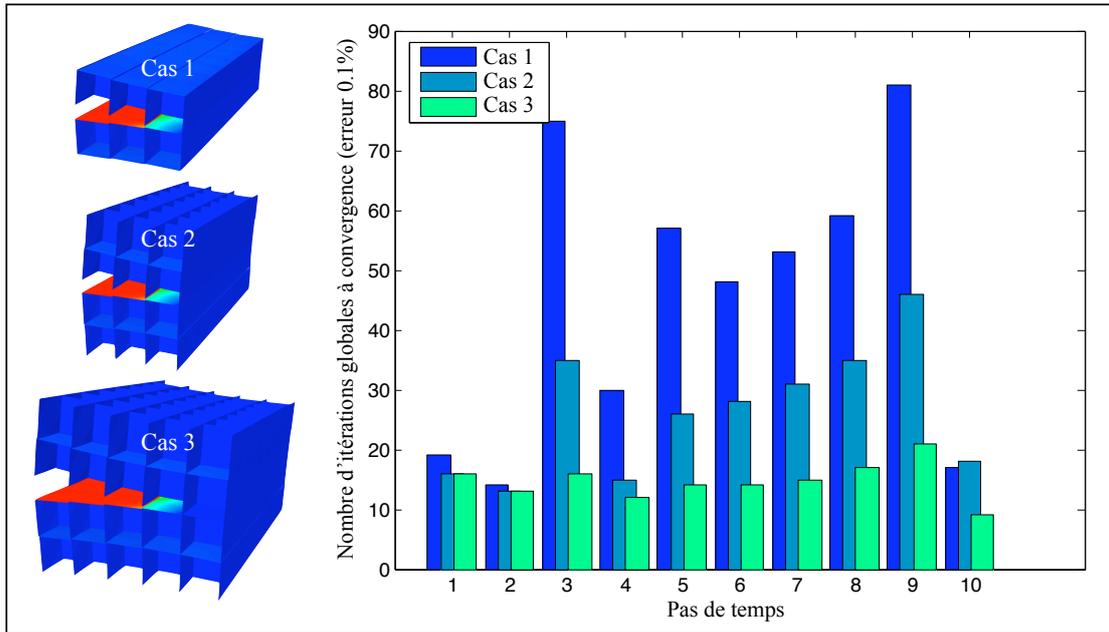


FIG. 5.9: Influence de la taille du sous-problème extrait sur la convergence globale

- L'erreur sur la non-vérification du comportement d'interface par les quantités issues de l'étape linéaire ν_{rdc}^{loc} . Ce critère ne nous donne pas satisfaction car il sélectionne potentiellement des interfaces situées dans des zones où les interfaces cohésives ne s'endommagent pas, en particulier aux premières itérations du solveur global, lorsque l'erreur locale est élevée dans toute la structure.
- L'incrément d'endommagement local maximum au pas de temps calculé (voir Figure 5.8 page 113). Ce critère est utilisé pour obtenir les résultats présentés par la suite.

Le paramètre de longueur l_d a une influence significative sur le taux de convergence du solveur global (voir les résultats de la figure 5.9). Plus précisément, le nombre d'itérations à convergence diminue lorsque la taille du sous-problème augmente, une asymptote étant rapidement atteinte, correspondant au traitement de la partie significative des concentrations de contrainte liées à la pointe de fissure dans Ω_{sub} .

2.5 Parallélisation

Il a été choisi de conserver la distribution globale des sous-structures sur les différents processeurs pour résoudre le problème local sur \mathbf{E}_{sub} , ceci afin de limiter les coûts de communication. Dans le cas test présenté Figure 5.10, cinq processeurs sont utilisés pour le calcul, les sous-structures de \mathbf{E}_{sub} étant localisées sur deux d'entre eux.

Algorithme 2 : Procédure de sous-itérations dans les zones à fort gradient

-
- 1: **Construction des opérateurs**
 - 2: **for** $t = t_1, \dots, t_N$ **do**
 - 3: **Initialisation des quantités d'interface**
 - 4: **for** $n = 0, \dots, N$ **do**
 - 5: **Etape linéaire**
 - 6: **Relaxation**
 - 7: **Etape locale**
 - 8: **Construction des opérateurs de \mathbf{E}_{sub}**
 - Sélection des sous-structures de \mathbf{E}_{sub}
 - $\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{\text{sub}} \neq \{0\}$ et $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega = \{0\}$,
en tout point d'intégration de $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega$, initialiser $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$
 - Assembler $\mathbf{L}_{\text{sub}}^M$
 - 9: **for** $m = 0, \dots, M$ **do**
 - 10: **Etape linéaire sur \mathbf{E}_{sub}**
 - Etape macro sur \mathbf{E}_{sub}**
 - $\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$, résoudre $(\mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) \bar{u}_E = \widehat{F}_E + f_{dE}$
 - $\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$, extraire \widetilde{F}_E^M
 - Assembler $\widetilde{F}_{\text{sub}}^M$ et Résoudre $\mathbf{L}_{\text{sub}}^M \widetilde{W}^M = \widetilde{F}_{\text{sub}}^M$
 - Etape micro sur \mathbf{E}_{sub}**
 - $\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$, résoudre $(\mathbf{K}_E + \mathbf{k}_E) u_E = \widehat{F}_E + f_{dE} + \widetilde{W}_E^M$
 - $\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$, extraire W_E et F_E
 - 11: **Relaxation des quantités de \mathbf{E}_{sub}**
 - Si $m > 0$, $W_E \leftarrow \mu W_E + (1 - \mu) W_{E_{m-1}}$
 $F_E \leftarrow \mu F_E + (1 - \mu) F_{E_{m-1}}$
 - 12: **Etape locale sur \mathbf{E}_{sub}**
 - 13: **if** $m \leq M - 1$ **then**
 - 14: ■ $\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{\text{sub}} \neq \{0\}$,
en tout point d'intégration de $\partial\Omega_{\text{sub}}$, calculer $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$
 - 15: **end if**
 - $\forall E \in \mathbf{E}_{\text{sub}}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{\text{sub}} = \{0\}$, $\forall E' \in \mathbf{V}_E \cap \mathbf{E}_{\text{sub}}$
tel que $E < E'$, en tout point d'intégration de $\Gamma_{EE'}$,
calculer $(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_E, \widehat{F}_{E'})$
 - 16: **Calcul d'erreur sur \mathbf{E}_{sub}**
 - 17: **end for**
 - 18: **Etape locale sur les interfaces de $\partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega$**
 - $\forall E \in \mathbf{E}$ tel que $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_{\text{sub}} \neq \{0\}$ et $\partial\Omega_E \cap \partial\Omega = \{0\}$,
 $\forall E' \in \mathbf{V}_E$ tel que $E < E'$, en tout point d'intégration
de $\Gamma_{EE'} \in \partial\Omega_{\text{sub}} \setminus \partial\Omega$, calculer $(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_E, \widehat{F}_{E'})$
 - 19: **Calcul d'erreur**
 - 20: **end for**
 - 21: **end for**
-

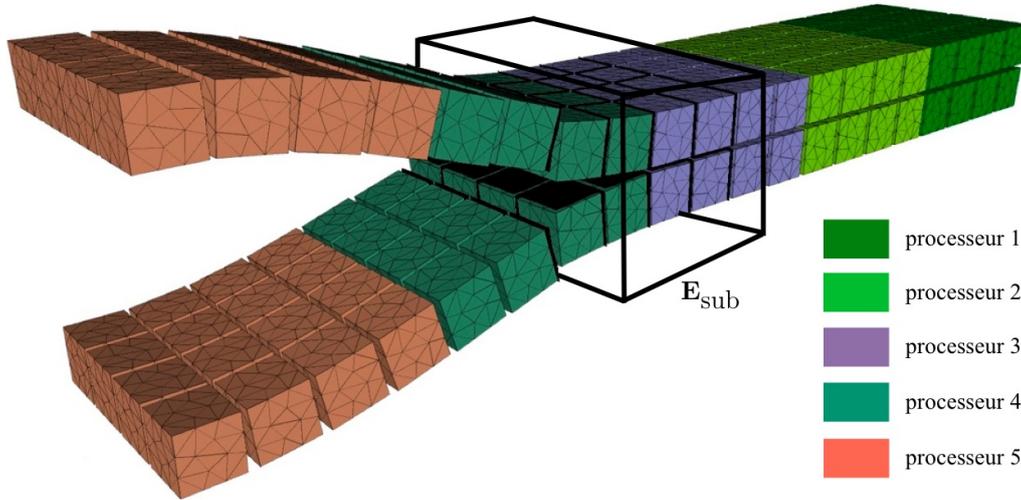


FIG. 5.10: Répartition des sous-structures du sous-problème sur les processeurs de l'architecture parallèle

2.6 Résultats

La résolution quasi-exacte d'un sous-problème non-linéaire extrait du problème global par la méthode de décomposition de domaine mixte à chaque itération du solveur global donne de très bons résultats, illustrés sur la figure 5.11 pour le cas test de type DCB à quatre plis représenté Figure 5.1 page 104. On obtient notamment une indépendance à la non-linéarité traitée du nombre d'itérations globales à convergence, mais également une baisse significative de la quantité de calculs effectués. Pour des paramètres de cette procédure bien choisis (taille du sous-problème, position, critère d'arrêt des sous-itérations), le nombre de problème locaux à inverser sur les sous-structures est divisé par dix.

Cependant, sur une architecture parallèle, le temps total requis pour la résolution (*wallclock*) est, pour un jeu de paramètres optimal, seulement divisé par deux. En effet, la résolution du problème local n'est effectuée que par un nombre réduit de processeurs. En conséquence, la charge des CPU ne traitant pas le sous-problème est allégée, mais les performances de la stratégie en terme de temps de résolution sont réduites. La deuxième limite de la méthode proposée est la difficulté d'extraction du sous-problème pour des fronts de délaminage quelconques.

3 Enseignements et utilisation des concepts développés

Dans le cas d'une utilisation de la méthode itérative classique, la quantité de calculs effectués sur les sous-structures est la même quel que soit le niveau de non-

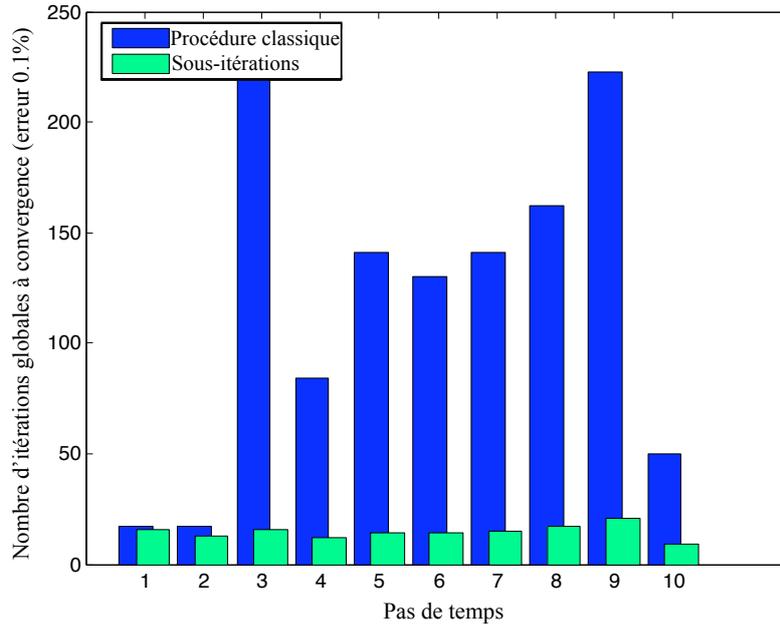


FIG. 5.11: Nombre d'itérations LaTIn à convergence obtenu grâce à la procédure de sous-itérations locales

linéarité locale rencontré. Il en résulte que la majorité de ces calculs sont inutiles, les champs sur les sous-structures des zones à faibles gradients variant peu d'une itération à l'autre.

La procédure de résolution locale décrite précédemment permet d'astreindre la précision des résolutions locales effectuées à chaque itération globale à la non-linéarité locale traitée. Elle offre ainsi un large champ d'investigations possibles pour traiter de manière efficace les problèmes de non-linéarités localisées sur une architecture parallèle. Diverses solutions sont envisagées pour pallier les problèmes de répartition de charge et de choix de sous-problème extrait évoqués dans la section précédente :

- Une redistribution des sous-structures d'un ou plusieurs sous-problèmes extraits \mathbf{E}_{sub} sur les processeurs de l'architecture parallèle. La position des sous-problèmes évolue lentement au cours de l'analyse, en suivant le front de fissure. Ces redistributions, bien que lourdes en temps de communication, n'interviennent donc que rarement au cours de l'analyse. Les domaines sur lesquels sont pratiquées les réanalyses locales sont cependant toujours choisis *a priori*.
- Une redistribution de toutes les sous-structures de \mathbf{E} sur les noeuds de l'architecture parallèle, régulièrement au cours de l'analyse. Ces distributions sont effectuées par un algorithme METIS, basé sur la théorie des graphes. Usuellement, le poids de chaque sous-structure et interface est déterminé par les nombres de degré de liberté des entités locales, de façon à obtenir une répartition homogène de la mémoire utilisée. L'idée consiste à pondérer ces entités par les non-linéarités locales traitées, de façon à obtenir une répartition homo-

gène en terme de temps de calcul, les sous-itérations étant réalisées de manière systématique sur tous les processeurs.

Des solutions d'un autre ordre peuvent également être envisagées pour rétablir l'extensibilité de la méthode. Les deux procédures complémentaires proposées ici étant relativement éloignées des travaux effectués, il nous est difficile d'évaluer leur efficacité potentielle :

- Assurer une meilleure séparation des échelles en introduisant une connaissance du problème traité en pointe de fissure. Techniquement, on opte pour une représentation analytique, semi-analytique, ou une représentation numérique obtenue par une série de calculs représentatifs des champs d'interface en front de fissure et on ajoute ces fonctions à celles de la base macroscopique linéaire. Hormis la difficulté de trouver ces fonctions pour des fronts surfaciques quelconques, on se heurte au problème évoqué de l'avancée du front de fissure au cours des itérations LaTIn.
- Réduire la quantité de calculs locaux nécessaires en prédisant par un calcul approché la position des fronts de fissure à un piquet de temps donné. Pour cela, on initialise par exemple les quantités d'interface de la méthode de décomposition de domaine mixte par une solution calculée avec une discrétisation grossière, donnant la position approximative des fronts de fissure.

Stratégie de calcul à trois échelles

Ce chapitre présente la résolution du problème macroscopique par un algorithme itératif parallèle. L'approximation de la solution macroscopique à un troisième niveau est proposée.

Sommaire

1	Méthode BDD pour le problème macroscopique	126
1.1	Problème macroscopique condensé	126
1.2	Résolution du problème condensé	127
2	Approximation de la solution macroscopique	132
3	Extensibilité en mémoire et en temps	132

L'efficacité de la méthode pour résoudre les problèmes de délaminage est liée à une discrétisation macroscopique donnée du problème de référence (une sous-structure dans l'épaisseur du pli). Par conséquent, le nombre de sous-structures progresse linéairement avec le nombre de plis du stratifié étudié, et de manière quadratique avec ses dimensions dans le plan. L'assemblage, le stockage et la résolution directe sur un seul processeur du problème macroscopique associé à cette sous-structuration fine deviennent extrêmement coûteux dès que la taille de la structure augmente. Dans le pire des cas, l'assemblage est impossible, la mémoire de la machine chargée de résoudre problème grossier étant insuffisante. De plus, la durée des communications entre processeurs, de type « tous vers un » (voir Chapitre 3), augmente également linéairement avec la taille de la structure, à nombre de degrés de liberté par processeur fixé.

On comprend donc que pour l'étude de structures de grande taille présentant de fortes non-linéarités nécessitant la mise à jour régulière des directions de recherche, et par suite le réassemblage régulier de l'opérateur de rigidité macroscopique, la solution consistant à utiliser une machine dotée d'une capacité élevée de stockage pour résoudre le problème macroscopique est insuffisante.

Dans les travaux précédents sur la méthode de décomposition de domaine mixte à deux échelles, deux solutions distinctes ont été proposées pour résoudre ce problème. Ces deux méthodes reposent sur un regroupement des sous-structures E de \mathbf{E} en groupes de sous-structure adjacentes, appelées super sous-structures. Chaque super-sous-structure \bar{E} occupe un domaine $\Omega_{\bar{E}}$ de bord $\partial\Omega_{\bar{E}}$. A l'intersection entre deux super-sous-structures adjacentes \bar{E} et \bar{E}' , on définit une super-interface $\Gamma_{\bar{E}\bar{E}'}$. Les deux approches basées sur cette super-sous-structuration se distinguent par le degré de finesse de la résolution du problème macroscopique :

- La première méthode consiste en une résolution approchée du problème macroscopique. Elle est proposée dans [Loiseau, 2001] et reprise dans les travaux de [Nouy, 2003] et de [Violeau, 2007]. Le principe est de rechercher une approximation $(\widetilde{W}_{E,h}^M)_{E \in \mathbf{E}}$ du multiplicateur macroscopique $(\widetilde{W}_E^M)_{E \in \mathbf{E}}$. Une nouvelle inconnue $(\widetilde{W}_{\bar{E},h}^M)_{\bar{E} \in \mathbf{E}}$, que l'on nommera super-multiplicateur, est définie sur les super-interfaces de chaque super-sous-structure \bar{E} . Elle est recherchée dans l'espace $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$ des fonctions affines sur les super-interfaces, continues au passage d'une super-interface et nulles sur $\partial\Omega_u$. Le lien entre le multiplicateur approché sur chaque super-sous-structure et le super-multiplicateur défini sur l'ensemble des super-interfaces $\Gamma_{\bar{E}}$ délimitant \bar{E} est défini par construction d'un opérateur de prolongement :

$$\widetilde{W}_{\bar{E},h}^M = \mathbb{P}_{E\bar{E}} \widetilde{W}_{E,h}^M \quad (6.1)$$

Le problème macroscopique approché portant sur le super-multiplicateur, ob-

tenu à partir de la définition (3.35) (page 69), devient alors :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } (\widetilde{W}_{\bar{E},h}^M)_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \in \bar{\mathcal{W}}_{\text{ad}}^M \text{ tel que } \forall (\widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*})_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \in \bar{\mathcal{W}}_{\text{ad}}^M, \\
& \sum_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \sum_{E \in \bar{E}} \int_{\Gamma_E} \mathbb{L}_E \mathbb{P}_{E\bar{E}} \widetilde{W}_{\bar{E},h}^M \cdot \mathbb{P}_{E\bar{E}} \widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*} d\Gamma \\
& = \sum_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \sum_{E \in \bar{E}} \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}_d \cdot \mathbb{P}_{E\bar{E}} \widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*} d\Gamma - \sum_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \sum_{E \in \bar{E}} \int_{\Gamma_E} \widetilde{F}_E \cdot \mathbb{P}_{E\bar{E}} \widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*} d\Gamma
\end{aligned} \tag{6.2}$$

soit, par intégration sur les seules super-interfaces :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } (\widetilde{W}_{\bar{E},h}^M)_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \in \bar{\mathcal{W}}_{\text{ad}}^M \text{ tel que } \forall (\widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*})_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \in \bar{\mathcal{W}}_{\text{ad}}^M, \\
& \sum_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{\bar{E}}} \widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*} \cdot \left(\sum_{E \in \bar{E}} \mathbb{P}_{E\bar{E}}^T \mathbb{L}_E \mathbb{P}_{E\bar{E}} \right) \widetilde{W}_{\bar{E},h}^M d\Gamma \\
& = \sum_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_f} \left(\sum_{E \in \bar{E}} \mathbb{P}_{E\bar{E}}^T \underline{F}_d \right) \cdot \widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*} d\Gamma - \sum_{\bar{E} \in \mathbf{E}} \int_{\Gamma_{\bar{E}}} \left(\sum_{E \in \bar{E}} \mathbb{P}_{E\bar{E}}^T \widetilde{F}_E \right) \cdot \widetilde{W}_{\bar{E}}^{M^*} d\Gamma
\end{aligned} \tag{6.3}$$

L'opérateur de prolongement $\mathbb{P}_{E\bar{E}}$ d'une super-sous-structure \bar{E} est construit en définissant un ensemble de fonctions de forme (six par super-interface en 2D) liant les multiplicateurs macroscopiques locaux $(\widetilde{W}_{\bar{E}}^M)_{E \in \bar{E}}$ aux degrés de liberté super-macroscopiques de chacune des super-interfaces. La cinématique de chaque super-sous-structure s'apparente alors à celle utilisée pour définir un milieu de Cosserat.

- La deuxième méthode consiste en une résolution exacte du problème macroscopique par la méthode de décomposition de domaine mixte à deux échelles. Cette stratégie est proposée dans les travaux de [Nouy, 2003]. L'algorithme de résolution LaTin est utilisé pour résoudre le problème macroscopique linéaire posé sur les super-sous-structures et super-interfaces.

Pour être efficace, la première approche décrite, doit être associée à un raffinement local de la super-sous-structuration dans les zones à fort gradient. Pour les mêmes raisons que celles qui nous ont conduits à une discrétisation et une sous-structuration homogène du stratifié, nous préférons à cette démarche une résolution exacte du problème macroscopique, effectuée en parallèle sur tous les processeurs de l'architecture de calcul. La seconde solution est alors une alternative envisageable, mais qui a également été écartée pour nos travaux. La raison principale de ce rejet est la difficulté potentielle du choix de bonnes directions de recherche pour la résolution de ce problème, dont les propriétés de rigidité ne sont pas intuitives. Inversement, les méthodes de décomposition de domaine basées sur les compléments de Schur proposent une construction algébrique du préconditionneur. La méthode de décomposition de domaine primale BDD [Mandel, 1993; Le Tallec, 1994] a ainsi été choisie pour résoudre le problème macroscopique en parallèle.

1 Méthode BDD pour le problème macroscopique

1.1 Problème macroscopique condensé

1.1.1 Super-sous-structuration et problème associé

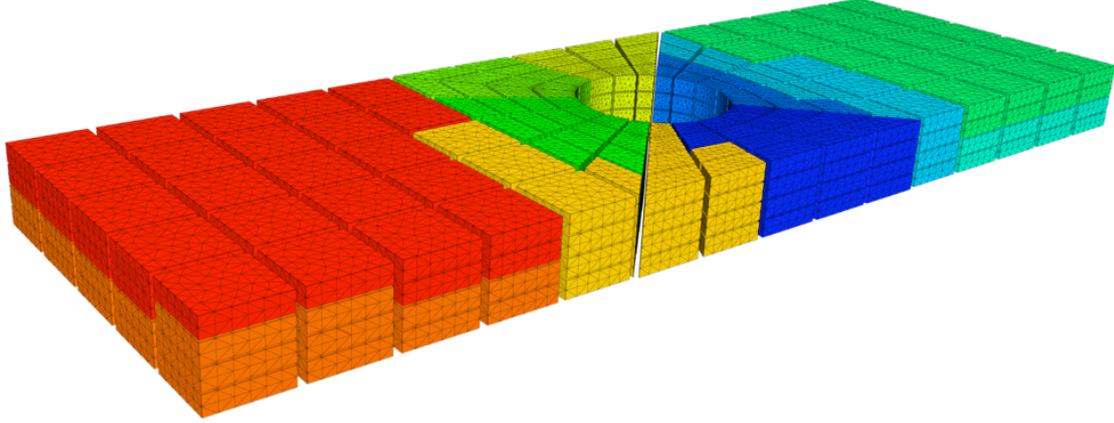


FIG. 6.1: Sous-structuration sur deux niveaux : sous-structures et super-sous-structures

La résolution du problème macroscopique par la méthode de décomposition de domaine primale repose également sur un regroupement de sous-structures adjacentes en super-sous-structures, séparées par des super-interfaces. En pratique, chaque super-sous-structure est composée de l'ensemble des sous-structures traitées sur un même processeur par la stratégie de décomposition de domaine mixte à deux échelles (voir Figure 6.1).

Sur chaque super-sous-structure \bar{E} , le problème algébrique d'équilibre macroscopique assemblé (3.45) (page 74), portant sur les inconnues macroscopiques, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_{ii}^{(\bar{E})} & \mathbf{L}_{ib}^{(\bar{E})} \\ \mathbf{L}_{bi}^{(\bar{E})} & \mathbf{L}_{bb}^{(\bar{E})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{W}_i^{(\bar{E})} \\ \widetilde{W}_b^{(\bar{E})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{F}_i^{(\bar{E})} \\ \widetilde{F}_b^{(\bar{E})} + \widetilde{\lambda}_b^{(\bar{E})} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Les indices i désignent les degrés de liberté internes à la super-sous-structure \bar{E} , les indices b désignent les degrés de liberté de super-interface communs avec une super-sous-structure voisine. L'exposant M du multiplicateur macroscopique, des opérateurs de rigidité homogénéisés assemblés et du second membre macroscopique a été omis afin d'alléger les écritures. La variable $\widetilde{\lambda}_b^{(\bar{E})}$ désigne le résidu d'équilibre macroscopique exercé par les super-sous-structures voisines de \bar{E} sur le bord $\partial\Omega_{\bar{E}}$.

Le problème d'équilibre global est fermé par l'équation d'admissibilité cinématique des quantités de super-interface, traduisant la continuité du multiplicateur

macroscopique au passage d'une super-interface :

$$\sum_{\bar{E}} \mathbf{B}^{(\bar{E})} \widetilde{W}_b^{(\bar{E})} = 0 \quad (6.5)$$

et par l'équation d'admissibilité statique des quantités de super-interface, traduisant « l'équilibre » des réactions macroscopiques sur les super-interfaces :

$$\sum_{\bar{E}} \mathbf{A}^{(\bar{E})} \widetilde{\lambda}_b^{(\bar{E})} = 0 \quad (6.6)$$

1.1.2 Condensation statique primale

On introduit le complément de Schur macroscopique primal $\mathbf{S}_p^{(\bar{E})}$ de la super-sous-structure \bar{E} :

$$\mathbf{S}_p^{(\bar{E})} = \mathbf{L}_{bb}^{(\bar{E})} - \mathbf{L}_{bi}^{(\bar{E})} \mathbf{L}_{ii}^{(\bar{E})^{-1}} \mathbf{L}_{ib}^{(\bar{E})} \quad (6.7)$$

ainsi que le second membre macroscopique local condensé $F_c^{(\bar{E})}$ correspondant aux défauts d'équilibre macroscopique exercés sur \bar{E} et condensés sur $\partial\Omega_{\bar{E}}$:

$$F_c^{(\bar{E})} = \widetilde{F}_b^{(\bar{E})} - \mathbf{L}_{bi}^{(\bar{E})} \mathbf{L}_{ii}^{(\bar{E})^{-1}} \widetilde{F}_i^{(\bar{E})} \quad (6.8)$$

Le problème macroscopique condensé posé sur une unique variable cinématique macroscopique \widetilde{W}_b de super-interface (on relira le chapitre bibliographique 2 pour plus de détails) s'écrit alors :

$$\mathbf{S}_p \widetilde{W}_b = F_c \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{S}_p = \sum_{\bar{E}} \mathbf{A}^{(\bar{E})} \mathbf{S}_p^{(\bar{E})} \mathbf{A}^{(\bar{E})T} \\ F_c = \sum_{\bar{E}} \mathbf{A}^{(\bar{E})} F_c^{(\bar{E})} \end{cases} \quad (6.9)$$

1.2 Résolution du problème condensé

1.2.1 Résolution en parallèle par un gradient conjugué

La procédure 3 décrit l'algorithme du gradient conjugué qui peut être utilisé en première approche pour résoudre le problème condensé d'interface (6.9).

Cet algorithme est aisé à implanter sur une architecture de calcul parallèle. Le processeur $P_{\bar{E}}$ assigné à la résolution des problèmes locaux d'équilibre de la super-sous-structure \bar{E} ne stocke que la trace sur $\partial\Omega_{\bar{E}}$ des vecteurs inconnus (résidu du système condensé, vecteurs directions de recherche, vecteur solution).

Les opérations effectuées sont ensuite soit des opérations locales effectuées sur les vecteurs stockés par $P_{\bar{E}}$ (addition de deux vecteurs, multiplication par un scalaire, multiplication d'un vecteur par le complément de Schur local), soit des opérations nécessitant des transferts d'information avec les autres processeurs. Ces dernières sont de deux types :

Algorithme 3 : Algorithme du gradient conjugué

-
- 1: Initialiser $\widetilde{W}_{b_0} = 0$
 - 2: Initialiser $r_0 = F_c$
 - 3: Initialiser $z_0 = r_0$ et $w_0 = z_0$
 - 4: **for** $j = 0, \dots, m$ **do**
 - 5: $\alpha_j = (r_j, z_j) / (\mathbf{S}_p w_j, w_j)$
 - 6: $\widetilde{W}_{b_{j+1}} = \widetilde{W}_{b_j} + \alpha_j w_j$
 - 7: $r_{j+1} = r_j - \alpha_j \mathbf{S}_p w_j$
 - 8: $z_{j+1} = r_{j+1}$
 - 9: $\beta_j^k = -(\mathbf{S}_p w_k, z_{j+1}) / (w_k, \mathbf{S}_p w_k)$
 - 10: $w_{j+1} = z_{j+1} + \sum_{k=0}^j \beta_j^k w_k$
 - 11: **end for**
-

- Opération d'assemblage : sur une super-interface $\Gamma_{\bar{E}\bar{E}'}$, les vecteurs stockés sur $P_{\bar{E}}$ et $P_{\bar{E}'}$ sont ajoutés puis remplacés par le résultat de cette addition. Cette opération est nécessaire pour réaliser le produit matrice/vecteur $\mathbf{S}X$, qui est réalisé en deux étapes : le calcul des produits locaux $\mathbf{S}^{(\bar{E})}X^{(\bar{E})}$ puis l'assemblage du résultat obtenu. Une opération similaire est également effectuée pour assembler le second membre F_c après avoir effectué le calcul des contributions locales $\underline{F}_c^{(\bar{E})}$.
- Opération de réduction : une quantité locale est sommée sur tous les processeurs et remplacée par le résultat de cette addition. Cette opération n'est nécessaire que pour calculer des produits scalaires $X.X$. Les données échangées entre processeurs sont donc des résultats scalaires de produits locaux $X^{(\bar{E})}.X^{(\bar{E})}$.

La convergence de l'algorithme est évaluée en calculant la norme du résidu global à la fin de chaque itération, rapportée à la norme du résidu initial. La validité de ce critère dans notre cas d'application n'a pas été discutée dans ce travail.

Après convergence, la solution est reconstruite localement sur les noeuds intérieurs de chaque super-sous-structure en résolvant la première ligne de l'équilibre macroscopique local (6.4), le multiplicateur macroscopique étant donné sur le bord.

■ **Remarque 1.1** *La méthode BDD a été préférée à la méthode FETI pour des raisons pratiques, ces deux méthodes étant dans les faits semblables en terme de performances. La résolution du problème condensé primal peut être réalisée par le gradient conjugué classique présenté dans cette section, les compléments de Schur locaux étant inversibles. Dans certaines phases de développement, la possibilité de ne pas utiliser l'étape de projection associée à des noyaux d'opérateurs de rigidité locale, décrite dans la section suivante, s'est révélée bénéfique.*

1.2.2 Gradient conjugué préconditionné projeté

Comme pour la méthode FETI, l'utilisation d'un gradient conjugué pour résoudre le problème d'interface nécessite l'utilisation d'un bon préconditionneur d'une part, et d'un projecteur d'autre part afin de transmettre rapidement l'information à grande longueur de variation au cours des itérations.

Préconditionneur

L'introduction du projecteur dans la méthode de décomposition de domaine primale est associée à la résolution itérative du problème d'interface en utilisant le préconditionneur de Neumann :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{p}}^{-1} = \sum_{\bar{E}} \tilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})} \mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})+} \tilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})T} \quad (6.10)$$

$\mathbf{S}_{\mathbf{p}}^{(\bar{E})+}$ est une inverse généralisée du complément de Schur primal de la super-sous-structure \bar{E} . L'opérateur d'assemblage et de *scaling* est simplement écrit $\tilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^{(\bar{E})}$, la définition des quantités macroscopiques excluant la possibilité d'avoir des ordres de multiplicité des degrés de liberté macroscopiques d'interface supérieurs à 2. Cette opération de *scaling* est suffisante pour assurer une bonne convergence de l'algorithme si les super-sous-structures ne sont pas macroscopiquement trop hétérogènes.

Projection sur une grille grossière

Effectuer le produit $\tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{p}}^{-1} r_j$ consiste à résoudre des problèmes de Neumann sur chaque super-sous-structure avant d'effectuer une opération d'assemblage. Il est alors nécessaire de s'assurer que le chargement r_j est auto-équilibré au sens de chaque super-sous-structure \bar{E} . Cette relation s'écrit algébriquement :

$$\mathbf{R}_b^{(\bar{E})T} \tilde{\mathbf{A}}^{(\bar{E})T} r_j = 0 \quad (6.11)$$

où $\mathbf{R}_b^{(\bar{E})}$ est une base du noyau du complément de Schur primal de la super-sous-structure \bar{E} . En définissant $\mathbf{C} = \left(\tilde{\mathbf{A}}^{(1)} \mathbf{R}_b^{(1)} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}^{(\bar{N}_{\mathbf{E}})} \mathbf{R}_b^{(\bar{N}_{\mathbf{E}})} \right)$ où $\bar{N}_{\mathbf{E}}$ est le nombre de super-sous-structures de \mathbf{E} , les contraintes locales 6.11 s'écrivent globalement :

$$\mathbf{C}^T r_j = 0 \quad (6.12)$$

Cette contrainte est traitée classiquement en recherchant la solution du problème macroscopique condensé sous la forme :

$$\tilde{W}_b = \tilde{W}_{b_0} + \mathbf{P} \tilde{W}_b^* \quad (6.13)$$

L'écriture de la contrainte (6.12) pour l'initialisation \widetilde{W}_{b_0} et pour son complémentaire $\mathbf{P}\widetilde{W}_b^*$ s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \mathbf{C}^T(b - \mathbf{S}_p\widetilde{W}_{b_0}) = 0 \\ \mathbf{C}^T\mathbf{S}_p\mathbf{P} = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Pour respecter ces conditions d'orthogonalité, on choisit usuellement :

$$\begin{cases} \widetilde{W}_{b_0} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{S}_p\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T b \\ \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{S}_p\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{S}_p \end{cases} \quad (6.15)$$

L'opérateur $\mathbf{S}_p^G = (\mathbf{C}^T\mathbf{S}_p\mathbf{C})$ est une représentation grossière de la rigidité globale de la structure. L'initialisation \widetilde{W}_{b_0} est une combinaison des traces sur les super-interfaces des modes à énergie nulle des super-sous-structures : $\widetilde{W}_{b_0} \in \text{Im}(\mathbf{C})$. Par projection orthogonale, la partie complémentaire $\mathbf{P}\widetilde{W}_b^*$ est recherchée de manière itérative dans l'espace supplémentaire $\text{Ker}(\mathbf{C}^T\mathbf{S}_p)$.

La procédure 4 décrit l'algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté finalement obtenu.

■ **Remarque 1.2** *Dans les cas étudiés, le bon conditionnement du problème macroscopique et le faible nombre d'itérations pratiquées du gradient conjugué (voir Section 2) rendent inutile la réorthogonalisation complète des directions de recherche.*

Algorithme 4 : Algorithme du gradient conjugué préconditionné projeté

- 1: Initialiser $\widetilde{W}_{b_0} = (\mathbf{P}\widetilde{W}_{b_{00}}) + \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{S}_p\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T F_c$
 - 2: Calculer $r_0 = F_c - \mathbf{S}_p\widetilde{W}_{b_0}$
 - 3: Calculer $z_0 = \mathbf{P}\widetilde{\mathbf{S}}_p^{-1}r_0$ et initialiser $w_0 = z_0$
 - 4: **for** $j = 0, \dots, m$ **do**
 - 5: $\alpha_j = (r_j, z_j) / (\mathbf{S}_p w_j, w_j)$
 - 6: $\widetilde{W}_{b_{j+1}} = \widetilde{W}_{b_j} + \alpha_j w_j$
 - 7: $r_{j+1} = r_j - \alpha_j \mathbf{S}_p w_j$
 - 8: $z_{j+1} = \mathbf{P}\widetilde{\mathbf{S}}_p^{-1}r_{j+1}$
 - 9: $\beta_j^k = -(\mathbf{S}_p w_k, z_{j+1}) / (w_k, \mathbf{S}_p w_k)$
 - 10: $w_{j+1} = z_{j+1} + \sum_{k=0}^j \beta_j^k w_k$
 - 11: **end for**
-

1.2.3 Implantation parallèle de la résolution du problème grossier

Opérateur de rigidité sur la grille grossière

Le point le plus délicat de la parallélisation du gradient conjugué préconditionné projeté est l'assemblage de l'opérateur de rigidité grossière :

$$\mathbf{S}_p^G = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \sum_i \mathbf{R}_b^{(j)T} \tilde{\mathbf{A}}^{(j)T} \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \mathbf{S}_p^{(i)} \tilde{\mathbf{A}}^{(i)T} \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{R}_b^{(k)} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad j \quad (6.16)$$

Les termes $\mathbf{S}_{p_{kj}}^{G(i)} = \mathbf{R}_b^{(j)T} \tilde{\mathbf{A}}^{(j)T} \tilde{\mathbf{A}}^{(i)} \mathbf{S}_p^{(i)} \tilde{\mathbf{A}}^{(i)T} \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{R}_b^{(k)}$ ne sont non-nuls que si les super-sous-structures numérotées j et k sont des voisins de la super-sous-structure i ou que $j = i$ et k est un voisin de i ou enfin que $k = i$ et j est un voisin de i . Le processeur sur lequel est assigné la super sous-structure i reçoit la trace des modes à énergie nulle de ses voisins. Il calcule ensuite les contributions locales $\mathbf{S}_{p_{kj}}^{G(i)}$, où j et k vérifient les conditions de voisinage énoncées précédemment. Ces contributions locales sont stockées dans un opérateur $\mathbf{S}_p^{G(i)}$ de même dimension que \mathbf{S}_p^G . Une opération de réduction permet finalement d'obtenir l'opérateur de rigidité grossière sur tous les processeurs : $\mathbf{S}_p^G = \sum_i \mathbf{S}_p^{G(i)}$. L'assemblage et la factorisation du problème

grossier sur tous les processeurs permettent d'optimiser les transferts en utilisant des communications de type « tous vers tous ».

Résolution des problèmes grossiers

Cette résolution implique, en plus des produits matrice/vecteur $\mathbf{S}_p X$, la réalisation de produits $\mathbf{C}^T X$ et $\mathbf{C} Y$. Pour le premier produit, les contributions locales $\mathbf{C}^{(\bar{E})T} X^{(\bar{E})}$ sont calculées et stockées dans un vecteur de dimension égale au nombre de modes à énergie nulle de la structure. Une opération de réduction permet d'obtenir le second membre du problème grossier sur tous les processeurs. Après résolution directe du problème grossier, le produit $\mathbf{C} Y$ est effectué par assemblage entre super-sous-structures voisines des contributions calculées localement $\mathbf{C}^{(\bar{E})} Y^{(\bar{E})}$.

1.2.4 Inversion généralisée des problèmes locaux

Les traces des modes à énergie nulle des super-sous-structures sont extraites par une méthode algébrique. [Nouy, 2003] montre que les vecteurs de base du noyau de l'opérateur homogénéisé d'une sous-structure E sont la projection dans l'espace macroscopique des traces sur Γ_E des modes à énergie nulle du problème microscopique non-augmenté. Par suite, les modes macroscopiques à énergie nulle d'une super-sous-structure \bar{E} sont la restriction des vecteurs de base du noyau de l'opérateur microscopique assemblé de \bar{E} aux interfaces de cette super-sous-structure,

projetés dans l'espace macroscopique. L'obtention de leur expression dans la base macroscopique n'est pas aisée. En outre, le nombre de modes à énergie nulle d'une super-sous-structure traversée complètement par une fissure est doublé. L'extraction automatique est alors particulièrement pratique.

L'inversion généralisée des compléments de Schur, nécessaire au calcul des produits $\tilde{\mathbf{S}}_p^{-1}r$, est réalisée en bloquant suffisamment de degrés de liberté pour éliminer les modes à énergie nulle.

2 Approximation de la solution macroscopique

Les figures 6.2 (a) et (b) présentent le résultat d'un calcul non-linéaire effectué en 10 pas de chargement, sur une plaque trouée à quatre plis en traction, de séquence d'empilement $[0/90]_s$. La discrétisation dans l'épaisseur des plis est plus fine que celle du problème de même géométrie décrit dans le chapitre 1. Le nombre de degrés de liberté mis en jeu est $3,4 \cdot 10^6$.

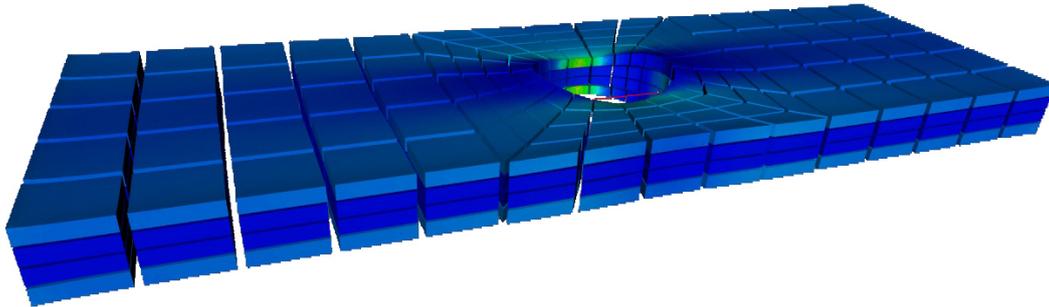
La figure 6.2 (c) donne des courbes de convergence de l'algorithme LaTIn pour la résolution du problème non-linéaire posé à un des piquets de temps de l'analyse. Les itérations du solveur BDD permettant la résolution itérative du problème macroscopique de la stratégie micro/macro sont stoppées après un nombre donné d'itérations. Il apparaît clairement qu'un nombre réduit d'itérations du gradient conjugué préconditionné projeté suffit à obtenir le taux de convergence de l'algorithme LaTIn obtenu par résolution exacte du problème macroscopique. En pratique une erreur de 10^{-1} sur la norme du résidu du problème macroscopique condensé (rapportée à la norme du résidu initial) est suffisante pour assurer l'extensibilité numérique de la stratégie.

Cette propriété peut être interprétée de la manière suivante : le problème macroscopique, dont le nombre de degrés de liberté dépend directement de la sous-structuration retenue, est trop raffiné. L'admissibilité des quantités macroscopiques à un troisième niveau de discrétisation suffit à transmettre l'information à grande longueur d'onde dans la structure au cours des itérations LaTIn. En référence à la conclusion donnée dans le chapitre 4, on effectue donc une résolution approchée à un troisième niveau des prédictions linéaires sécantes de l'algorithme de résolution LaTIn.

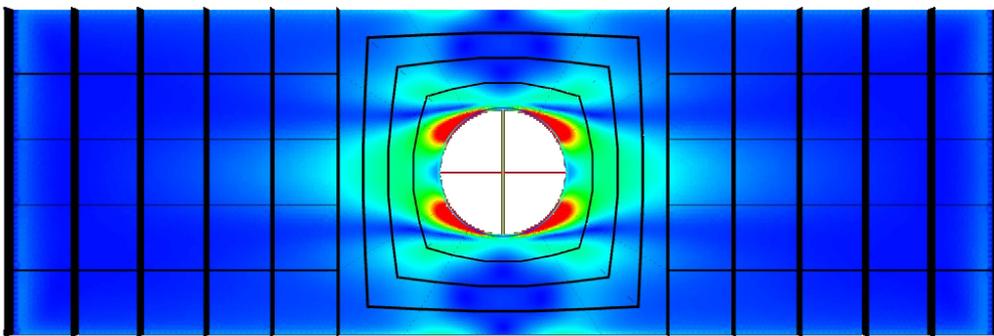
3 Extensibilité en mémoire et en temps

L'utilisation d'un algorithme parallèle pour résoudre le problème macroscopique confère à la méthode d'excellentes propriétés d'extensibilité en mémoire et en temps. Les résultats de tests de parallélisation effectués sur le problème limitant pour une résolution monoprocesseur, décrit dans le chapitre 1 (Figure 1.9 pages 26), sont donnés sur les histogrammes 6.3.

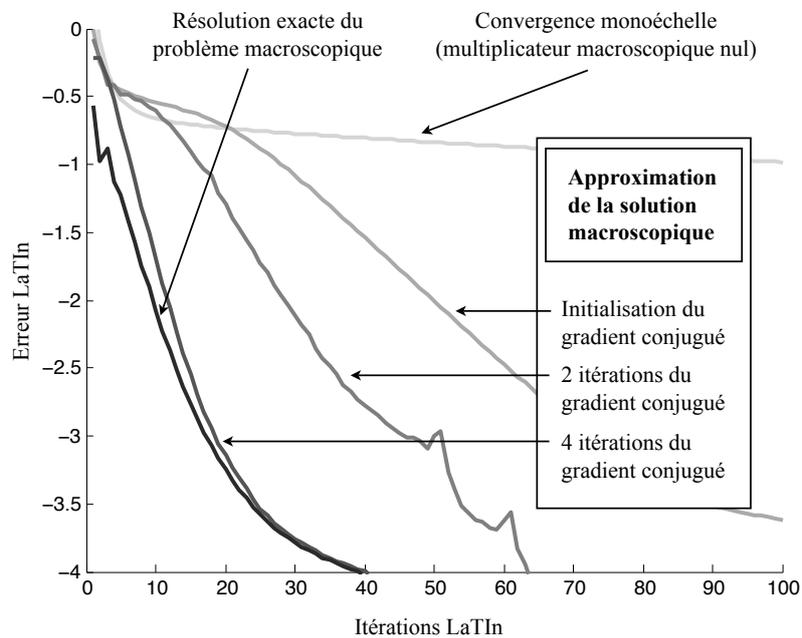
La structure est divisée en 520 sous-structures. Le calcul d'un seul pas de chargement est réalisé par la méthode de décomposition de domaine à trois échelles, le nombre de processeurs de l'architecture parallèle variant de 1 (résolution monoprocésseur à deux échelles) à 11. Les itérations LaTIn sont stoppées lorsque le critère d'erreur ν_{rdc} atteint 0,1%. Les résultats obtenus sont très proches de courbes en $\frac{1}{\text{nombre de CPU}}$ correspondant à une répartition théorique linéaire de la mémoire et du temps de calcul de la résolution monoprocésseur sur les différents processeurs utilisés.



(a) Norme de la contrainte dans les sous-structures



(b) Endommagement dans l'interface cohésive supérieure



(c) Courbe de convergence LaTin pour différents niveaux de convergence du problème macroscopique

FIG. 6.2: Cas test de type « plaque trouée en traction à 4 plis » (3.4 millions de degrés de liberté)

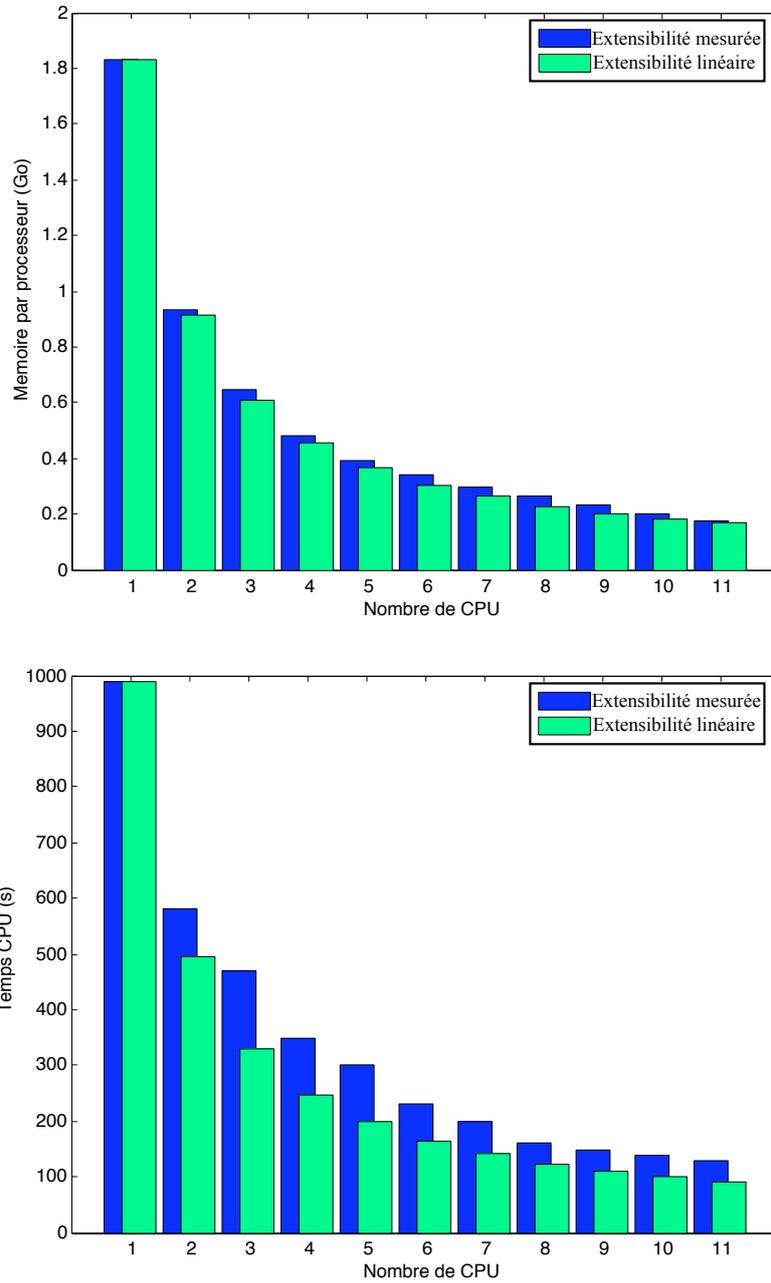


FIG. 6.3: Extensibilité en temps CPU et en mémoire de la stratégie de décomposition de domaine mixte à trois échelles

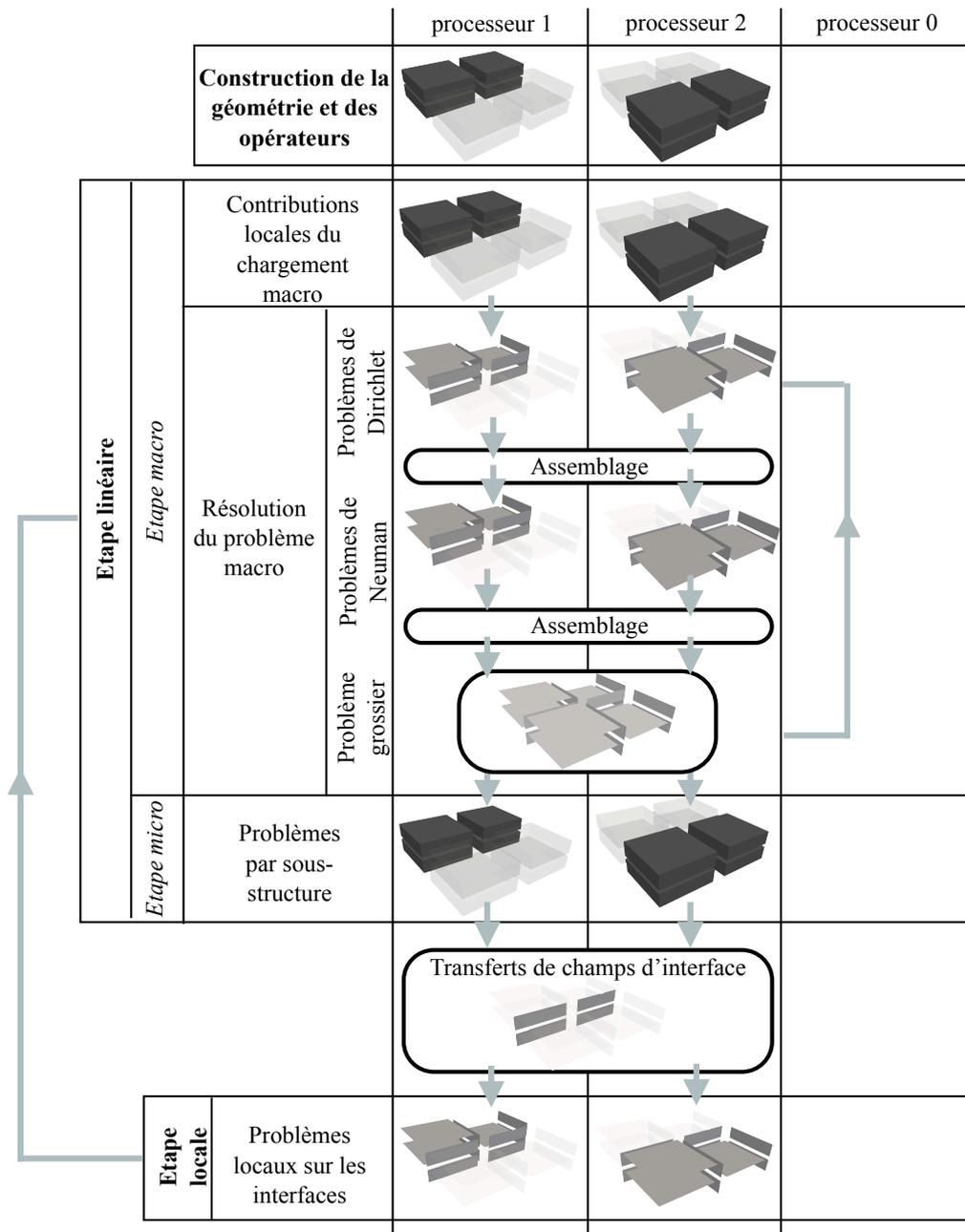


FIG. 6.4: Principe de parallélisation de la stratégie de décomposition de domaine à trois échelles

Le pas de temps du schéma d'intégration implicite du problème non-linéaire d'évolution doit être relié aux non-linéarités locales traitées afin d'assurer la convergence du solveur à chaque piquet de temps. On présente dans une première partie un critère d'erreur permettant d'évaluer les niveaux d'erreurs de la solution incrémentale dus à la discrétisation en temps. Dans une seconde partie, une adaptation de la stratégie de calcul à trois échelles pour les problèmes instables est proposée.

Sommaire

1	Contrôle de l'incrément de chargement	138
1.1	Influence de la discrétisation en temps	138
1.2	Principe de l'indicateur	139
1.3	Application : pas de temps adaptatif	139
2	Résolution de problèmes d'instabilité	140
2.1	Contrôle local du chargement	140
2.2	Algorithme de Newton à longueur d'arc	141
2.3	Intégration dans la stratégie de calcul parallèle	142
2.4	Optimisation de l'algorithme de Newton	143
2.5	Choix de la longueur d'arc	146
2.6	Analyse des résultats	146

1 Contrôle de l'incrément de chargement

1.1 Influence de la discrétisation en temps

Le choix de la discrétisation en temps du problème de référence a une forte influence sur la solution obtenue à l'issue du processus incrémental. La figure 7.1 montre les résultats de calculs en quasi-statique par intégration implicite en temps d'un cas test de type DCB à quatre plis. Seules les interfaces de la méthode de décomposition de domaine sont représentées. Trois discrétisations en temps sont utilisées. Pour chacune, les problèmes non-linéaires posés à chaque piquet de temps sont résolus par la méthode de décomposition de domaine basée sur la LaTIn, convergée jusqu'à un niveau d'erreur ν_{rdc} donné.

Sur l'interface centrale, les résultats obtenus en terme d'avancée de fissure sont les mêmes dans les trois cas. Par contre, dans les interfaces entre les plis inférieurs et supérieurs, la solution obtenue à la fin de l'analyse dépend de la discrétisation en temps adoptée.

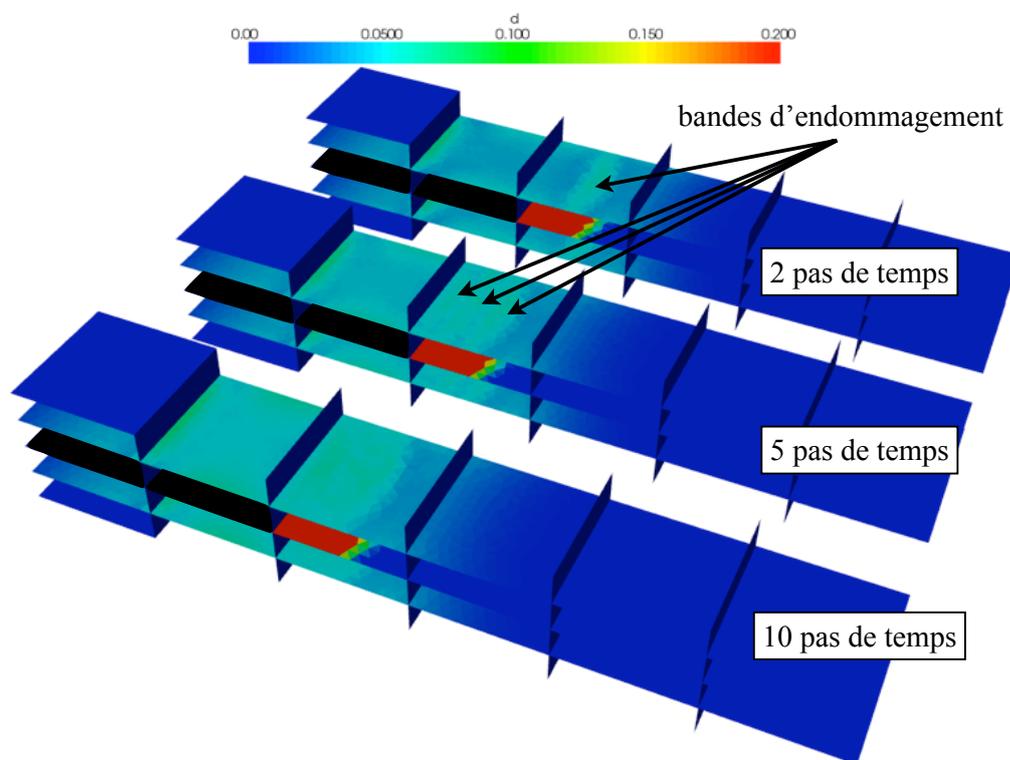


FIG. 7.1: Influence du pas de chargement sur la solution obtenue

1.2 Principe de l'indicateur

Afin de quantifier l'erreur due à la discrétisation en temps, on propose un indicateur basé sur la mesure du résidu non-linéaire d'interface détaillée dans le chapitre 4. On suppose que les solutions convergées aux piquets de temps t_{n-1} et t_n sont données. L'évolution de la structure entre ces deux piquets de temps est inconnue. On la suppose linéaire (voir Figure 7.2). Les solutions intermédiaires ainsi obtenues appartiennent à l'espace d'admissibilité \mathbf{A}_d . Il est alors possible d'évaluer la qualité de ces solutions interpolées par une mesure du non-respect du comportement non-linéaire d'interface. Cette évaluation est réalisée en calculant ν_{rdc} ou ν_{rdc}^{loc} en un certain nombre de piquets de temps intermédiaires t_{n-1}^i tels que $t_{n-1} < t_{n-1}^i < t_n$, et le maximum de l'erreur obtenue donne la valeur de l'indicateur recherché ν_{rdc}^t au pas de temps t_n .

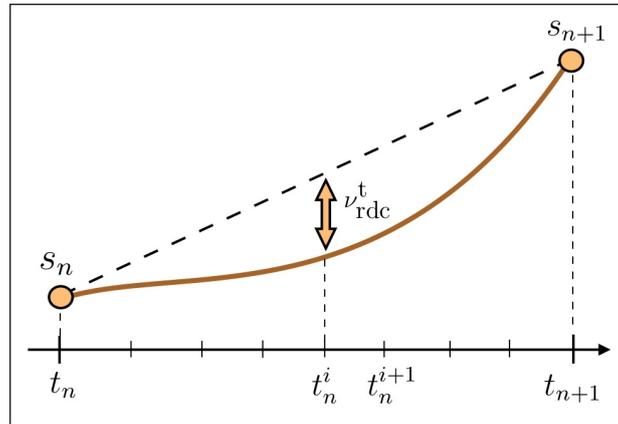


FIG. 7.2: Principe de l'erreur en discrétisation temporelle

L'indicateur ν_2^t peut être interprété comme une mesure globale de la non-linéarité du problème entre les piquets de temps t_{n-1} et t_n .

■ **Remarque 1.1** *Le nombre d'itérations à convergence de l'algorithme LaTIn au piquet de temps t_n peut également permettre de quantifier cette non-linéarité de manière simple. Cependant, les niveaux obtenus pour cet indicateur ne sont pas directement interprétables.*

■ **Remarque 1.2** *L'indicateur ν_2^t étant basé sur l'évaluation de ν_{rdc} , il ne fait appel qu'à des calculs locaux sur les interfaces.*

1.3 Application : pas de temps adaptatif

L'indicateur défini précédemment peut être utilisé de deux façons différentes. Il peut d'abord permettre une estimation *a posteriori* de la qualité de la solution incrémentale obtenue, le calcul pouvant être relancé si nécessaire avec une discrétisation en temps plus fine.

Une utilisation avancée de cet indicateur permet d'adapter de manière explicite le pas de chargement aux non-linéarités rencontrées en cours d'analyse. On suppose que l'incrément de chargement est constant au cours du temps. On se place au piquet de temps t_n , où l'on connaît la valeur de ν_2^t . Si l'on se fixe une valeur cible ν_{2d}^t de ν_2^t , le pas de temps Δt^{n+1} est alors obtenu par la loi :

$$\Delta t^{n+1} = \left(\frac{\nu_{2d}^t}{\nu_2^t} \right)^\beta \Delta t^n \quad \text{où } 0 < \beta < 1 \quad (7.1)$$

2 Résolution de problèmes d'instabilité

La méthode de résolution de problèmes non-linéaires LaTIn, dans sa version incrémentale, est algorithmiquement très proche d'un schéma de Newton-Raphson. Elle présente les mêmes difficultés pour résoudre des problèmes d'instabilité globale (*snap-back* ou *snap-through*). Dans cette étude, on considère que les instabilités ont lieu très ponctuellement durant l'analyse. On propose alors de basculer de l'algorithme de résolution LaTIn vers un algorithme de Newton à longueur d'arc.

Plus précisément, la stratégie de contrôle à longueur d'arc est activée si l'algorithme LaTIn ne converge pas. Inversement, après un certain nombre de pas de temps consécutifs pendant lesquels le paramètre de chargement croît, l'algorithme de résolution à longueur d'arc est remplacé par le schéma LaTIn.

On considère le problème non-linéaire d'équilibre à résoudre au pas de temps t_n du schéma d'intégration implicite. Le système obtenu après discrétisation est noté :

$$\mathbf{K}((U_m)_{m \leq n}) U_n = F_n \quad (7.2)$$

où l'opérateur de rigidité global dépend des solutions aux piquets de temps t_m tels que $m \leq n$.

2.1 Contrôle local du chargement

De manière très classique, les algorithmes de résolution à longueur d'arc [Riks, 1972; Crisfield, 1981] proposent de réécrire le système non-linéaire en supposant que la norme du chargement appliquée λ est inconnue, sa direction F étant donnée. Une équation de contrôle est ajoutée au système afin de coupler le paramètre de chargement introduit et l'évolution des inconnues du problème. Les premières relations, historiquement introduites pour traiter des instabilités géométriques, reposent sur un contrôle du chargement par une norme globale des inconnues. Pour un algorithme dit à longueur d'arc sphérique, l'équation de contrôle s'écrit :

$$\Delta U_n^2 + \Delta \lambda_n^2 = \Delta l \quad (7.3)$$

Pour un algorithme à longueur d'arc cylindrique cette équation est remplacée par la suivante :

$$\Delta U_n^2 = \Delta l \quad (7.4)$$

$\Delta \cdot_n$ désigne l'incrément d'une quantité les piquets de temps t_{n-1} et t_n , Δl est un paramètre de la méthode, constant pour chaque pas de temps.

Les non-linéarités traitées dans les problèmes de délaminage sont très localisées. Dans ce cas, forcer l'incrément d'une norme de la solution globale au cours d'un pas de temps n'est pas judicieux, un accroissement faible de cette norme ne signifiant pas forcément une faible variation des variables internes. On propose donc d'utiliser une version locale de l'équation de contrôle [Schellenkens et De Borst, 1993; Allix et Corigliano, 1996; Geers, 1999; Alfano et Crisfield, 2003] :

$$\mathbf{c}(U_n) \Delta U_n = \Delta l \quad (7.5)$$

L'opérateur $\mathbf{c}(U)$ permet d'extraire certaines composantes de l'inconnue de déplacement, portant en général sur des degrés de liberté localisés dans la zone d'intérêt. Pour la stratégie retenue ici, ce opérateur extrait simplement l'incrément de saut de déplacement local maximum sur les points de Gauss des interfaces cohésives présentant un endommagement inférieur à 1 au piquet de temps t_{n-1} . Ainsi, le paramètre de chargement est explicitement lié à une variable locale dont dépend l'incrément d'endommagement maximum dans la structure, et dont dépend donc l'avancée de fissure.

2.2 Algorithme de Newton à longueur d'arc

A chaque piquet de temps t_n , la solution (U_n, λ_n) du problème non-linéaire suivant est recherchée :

$$\begin{cases} f(U_n, \lambda_n) = \mathbf{K}(U_n) U_n - \lambda_n F = 0 \\ g(U_n, \lambda_n) = \mathbf{c}(U_n) \Delta U_n - \Delta l = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Conceptuellement, le système non-linéaire (7.6) pourrait être résolu par la stratégie de décomposition de domaine basée sur l'algorithme LaTIn. Cependant, le traitement de l'équation de contrôle, globale sur toute la structure, nous paraît délicat dans le cadre de cette stratégie. Nous avons donc opté pour un algorithme de résolution de type Newton modifié.

Le développement au premier ordre de (7.6) autour du point (U_n^i, λ_n^i) obtenu à une itération i de Newton conduit au système suivant :

$$\begin{cases} f(U_n^{i+1}, \lambda_n^{i+1}) = f(U_n^i, \lambda_n^i) + \frac{\partial f}{\partial U_{|(U_n^i, \lambda_n^i)}} (U_n^{i+1} - U_n^i) + \frac{\partial f}{\partial \lambda_{|(U_n^i, \lambda_n^i)}} (\lambda_n^{i+1} - \lambda_n^i) = 0 \\ g(U_n^{i+1}, \lambda_n^{i+1}) = g(U_n^i, \lambda_n^i) + \frac{\partial g}{\partial U_{|(U_n^i, \lambda_n^i)}} (U_n^{i+1} - U_n^i) + \frac{\partial g}{\partial \lambda_{|(U_n^i, \lambda_n^i)}} (\lambda_n^{i+1} - \lambda_n^i) = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

L'opérateur tangent $\frac{\partial f}{\partial U_{|(U_n^i, \lambda_n^i)}}$ est classiquement remplacé par $\mathbf{K}(U_n^i)$, tandis que $\frac{\partial g}{\partial U_{|(U_n^i, \lambda_n^i)}}$ est approché par $\mathbf{c}(U_n^i)$. En supposant que le système (7.6) est vérifié au

piquet de temps t_{n-1} , on obtient :

$$\begin{cases} \Delta U_n^{i+1} = \lambda_n^{i+1} \mathbf{K}(U_n^i)^{-1} F - U_{n-1} \\ \mathbf{c}(U_n^i) \Delta U_n^{i+1} = \Delta l \end{cases} \quad (7.8)$$

L'équation d'équilibre linéarisée est finalement introduite dans l'équation de contrôle local.

On obtient l'expression du paramètre de chargement à l'itération $i + 1$:

$$\lambda_n^{i+1} = \frac{\Delta l + \mathbf{c}(U_n^i) U_{n-1}}{\mathbf{c}(U_n^i) \mathbf{K}(U_n^i)^{-1} F} \quad (7.9)$$

et, en injectant cette solution dans l'équilibre linéarisé, l'expression du déplacement à l'itération $i + 1$:

$$U_n^{i+1} = \lambda_n^{i+1} \mathbf{K}(U_n^i)^{-1} F \quad (7.10)$$

Cette étape de prédiction linéaire de l'algorithme de Newton est suivie d'une étape de mise à jour des variables internes. Les opérateurs $\mathbf{K}(U_n)$ et $\mathbf{c}(U_n)$ sont recalculés à partir des solutions U_n^{i+1} et $(U_m)_{m < n}$. Une nouvelle itération de Newton est alors effectuée si la norme du résidu non-linéaire d'équilibre est plus grande que le critère d'arrêt spécifié.

■ **Remarque 2.1** *En pratique, la norme du résidu de l'équation de contrôle n'est pas évaluée. En effet, la donnée d'une longueur d'arc fixe un incrément d'endommagement maximum dans la structure au cours d'un pas de temps, ce qui est bien sûr intéressant d'un point de vue algorithmique mais n'a pas forcément de sens physique. On interrompt donc les itérations de Newton dès qu'un équilibre non-linéaire global est atteint, pour une valeur quelconque du paramètre de chargement. Dans les faits, cette convergence est atteinte pour des valeurs du saut de déplacement local maximum contrôlé très proche de la valeur imposée.*

2.3 Intégration dans la stratégie de calcul parallèle

La résolution de l'étape de prédiction linéaire de l'algorithme de Newton modifié est la seule phase du schéma nécessitant la résolution d'un problème global. On propose alors d'effectuer l'inversion $\mathbf{K}(U_i)^{-1} F$ de l'étape de prédiction linéaire de l'itération i de Newton par la méthode de décomposition de domaine à trois échelles décrite dans les chapitres précédents. Techniquement, les variables d'endommagement et indicateurs de contact des interfaces cohésives sont « bloqués » aux valeurs trouvées à l'étape de mise à jour de l'itération $i - 1$ de Newton, de façon à obtenir la solution du problème linéarisé $\mathbf{K}(U_i)U = F$.

Bien que l'algorithme LaTIn soit utilisé en-deçà de ses possibilités, la stratégie proposée conserve la majeure partie de son efficacité, et ceci pour deux raisons principales :

- La mise à jour des non-linéarités du problème dans le cadre de l'algorithme de Newton modifié est effectuée sur les interfaces cohésives seulement, correspondant à des interfaces de la méthode de décomposition de domaine mixte. En conséquence, aucune opération de réassemblage global n'est nécessaire au cours du processus itératif de Newton. La réactualisation à chaque itération de l'opérateur sécant est donc peu coûteuse.
- La résolution d'un problème non-linéaire par l'algorithme LaTIn et la résolution d'un problème non-linéaire par un algorithme de Newton sécant avec une résolution LaTIn du problème linéarisé font intervenir des calculs très proches. Ainsi, basculer d'un algorithme à l'autre est immédiat.

■ **Remarque 2.2** *On notera que la linéarité du système à résoudre par la stratégie de décomposition de domaine mixte rend, ponctuellement, la technique de sous-itérations proposée dans le chapitre 5 peu efficace. Cependant, en suivant les idées de [Cresta et al., 2007; Pebrel et al., 2008], il est possible d'effectuer ces résolutions de problèmes non-linéaires localisés autour du front de délaminage à la fin de chaque itération de Newton.*

2.4 Optimisation de l'algorithme de Newton

Les coûts de calcul, représentés par le nombre total d'itérations LaTIn nécessaire à la convergence d'un pas de temps par l'algorithme de Newton, peuvent être diminués significativement de deux façons : d'une part une initialisation judicieuse de la méthode de décomposition de domaine utilisée pour effectuer les prédictions linéaires de Newton, et d'une part un choix réfléchi des critères d'arrêt de cette méthode.

2.4.1 Initialisation de la stratégie de décomposition de domaine mixte

De façon très classique, l'initialisation des champs d'interface de la méthode de décomposition de domaine mixte par des champs proches de la solution recherchée améliore la convergence du solveur itératif. Dans le cadre de l'utilisation de cette stratégie pour résoudre les problèmes d'équilibre non-linéaires posés à chaque piquet de temps de l'analyse, cette propriété est très faiblement exploitée, la topologie de la structure et les amplitudes des champs solution variant fortement d'un pas de temps à l'autre.

Dans notre cas, cette technique se révèle beaucoup plus efficace. En effet, les solutions de deux prédictions linéaires successives de Newton pour un même pas de temps sont relativement proches, et ceci d'autant plus que l'algorithme de Newton se rapproche de la convergence. Numériquement, ceci se traduit par de faibles variations

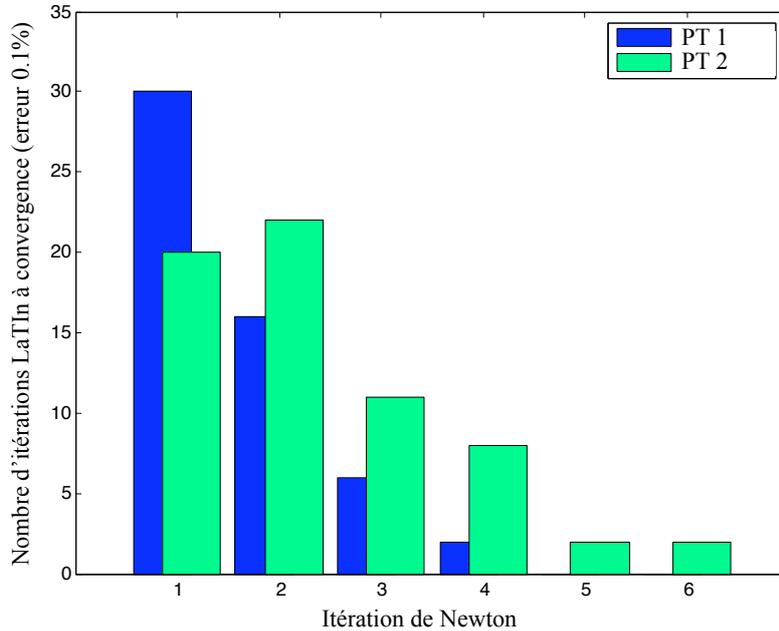


FIG. 7.3: Influence de l'initialisation du solveur linéaire LaTIn sur le nombre d'itérations LaTIn nécessaires à la résolution des étapes de prédiction linéaire de Newton pour deux pas de temps distincts

des opérateurs $\mathbf{c}(U_i)$ et $\mathbf{K}(U_i)$ au cours des itérations de Newton. L'idée retenue est alors d'initialiser les quantités d'interface de la stratégie LaTIn à l'itération $i + 1$ de Newton par les champs solutions de la prédiction linéaire de l'itération i .

Les résultats obtenus par la mise en application de cette idée sont donnés sur la figure 7.3. Les deux premiers pas de temps d'un calcul sur la plaque trouée représentée figure 6.2 (page 134) sont résolus par un algorithme de Newton à longueur d'arc. Ces deux pas de temps correspondent à des niveaux très différents de non-linéarité. Pour le premier pas de temps (résultat intitulé « PT 1 »), les indicateurs d'endommagement restent inférieurs à 1 partout dans la structure. La baisse du nombre d'itérations LaTIn à convergence au cours des itérations de Newton est très claire. La fissuration est initiée au cours du deuxième pas de temps (résultat intitulé « PT 2 »). Ceci a pour effet une faible efficacité de l'initialisation proposée pour la deuxième itération de Newton, la topologie de la structure ayant fortement évolué après l'étape de mise à jour de la première itération. Les propriétés attendues sont cependant retrouvées pour les itérations suivantes.

2.4.2 Choix des critères d'arrêts

L'idée à la base des développements détaillés dans cette section est la suivante : il peut paraître inutile d'obtenir un résultat de prédiction linéaire de Newton fortement convergé si le comportement linéarisé est très différent du comportement attendu

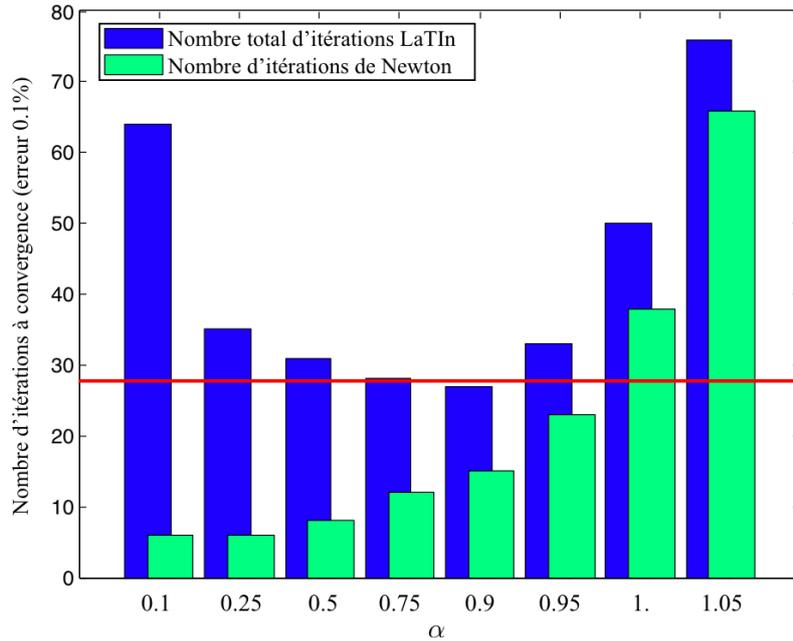


FIG. 7.4: Influence du critère d'arrêt du solveur linéaire LaTIn sur le nombre d'itérations de Newton et le nombre total d'itérations LaTIn nécessaires à la résolution sur un pas de temps

de la structure à un piquet de temps donné. Il est alors intéressant de lier le critère d'arrêt des prédictions de Newton résolues par la méthode de décomposition de domaine mixte au résidu du système non-linéaire (7.6). Plus précisément, le critère d'arrêt ν_{rdc}^i des itérations LaTIn à une itération i de Newton est choisi de manière explicite :

$$\nu_{rdc}^i = \frac{1}{\alpha} \nu_{rdc}^{i-1} \quad (7.11)$$

La figure 7.4 montre l'influence du paramètre α sur le temps de calcul (ici le nombre total d'itérations LaTIn effectuées) pour un pas de temps donné du cas test de type « plaque trouée » étudié dans la section précédente, résolu par un algorithme de Newton à longueur d'arc. Une valeur faible de ce paramètre correspond à un calcul de Newton classique, où les étapes de prédiction linéaire sont résolues de manière exacte. Le nombre d'itérations de Newton est minimal, mais les temps de calculs peuvent être améliorés. Une valeur de α supérieure à 1 a en général pour résultat la divergence du processus. Par contre, un optimum en terme de temps CPU apparaît clairement pour des valeurs de α proches de 1 par valeurs inférieures.

■ **Remarque 2.3** *En choisissant α proche de 1, une ou deux itérations LaTIn suffisent à la résolution partielle souhaitée des prédictions linéaires de Newton. On est ainsi ramené à un algorithme proche de l'algorithme LaTIn appliqué à la résolution d'un système non-linéaire. Ceci explique notre faible intérêt pour une résolution*

formelle du problème d'équilibre sous contrôle (7.6) par un algorithme *LaTin* non-linéaire.

■ **Remarque 2.4** *L'écriture de la relation (7.11) n'est rendue possible que par l'utilisation du même critère d'erreur pour évaluer la convergence de la stratégie de décomposition de domaine d'une part, et la convergence du processus de Newton d'autre part. Dans les deux cas, on mesure la non-vérification du comportement d'interface par des quantités issues d'une prédiction linéaire (voir Chapitre 4).*

2.5 Choix de la longueur d'arc

On utilise ici les mêmes idées que celles développées dans la section 1.3. Si l'on appelle Δd_n l'incrément d'endommagement local maximum dans la structure au pas de temps t_n , en spécifiant une valeur Δd^d souhaitée pour cet paramètre on écrit la relation permettant d'obtenir explicitement la longueur d'arc au pas de temps t_{n+1} :

$$\Delta l^{n+1} = \left(\frac{\Delta d^d}{\Delta d_n} \right)^\beta \Delta l^n \quad \text{où } 0 < \beta < 1 \quad (7.12)$$

On notera qu'il est préférable de choisir une longueur d'arc initiale Δl^1 conduisant à un endommagement local maximum dans la structure inférieur à 1.

2.6 Analyse des résultats

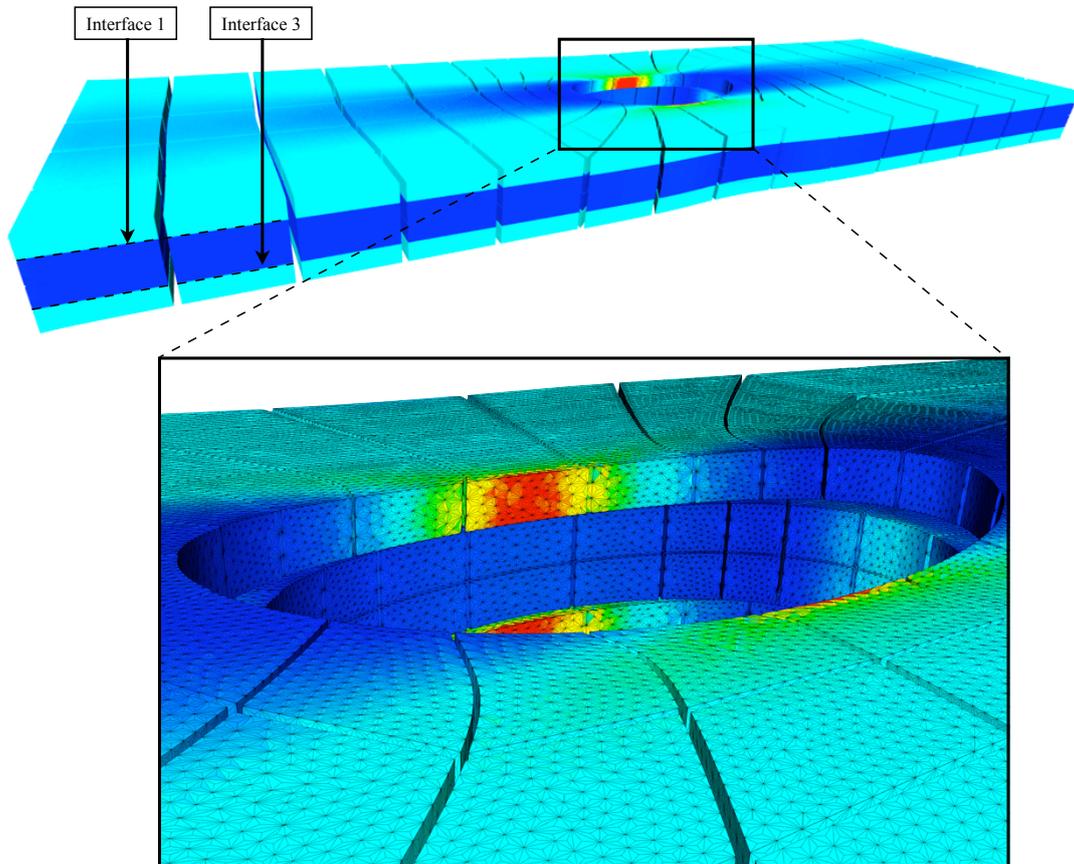
La figure 7.5 présente la courbe de réponse globale effort/déplacement de la plaque trouée de séquence d'empilement $[0/90]_s$ traitée dans le chapitre 6. La différence de propriétés matérielles entre les plis à 0° et 90° entraîne une localisation de l'endommagement dans les interfaces entre ces plis, numérotées 1 et 3 (voir Figure 7.6). Une zone d'instabilité apparaît très rapidement au début de l'analyse. Elle correspond à des initiations de fissures instables dans ces deux interfaces. L'utilisation de l'algorithme de Newton à longueur d'arc permet l'obtention d'une solution incrémentale dans cette zone composée de quatre propagations de fissures instables successives (deux par interface, de chaque côté du trou). La structure reprend par la suite un comportement monotone.

Des difficultés de convergence ont été observées lors de la bifurcation d'une solution symétrique (point P1 de la courbe globale) à une solution non symétrique (point P2). Afin de forcer la convergence de l'algorithme de Newton dans ces cas pathologiques, l'utilisation d'un maillage non régulier est nécessaire afin d'introduire une dissymétrie numérique dans le problème. Cette pratique peut être encore insuffisante. La procédure empirique suivante a été adoptée : si l'algorithme de Newton ne converge pas après un certain nombre d'itérations, la longueur d'arc est diminuée de moitié. Cette solution n'a, dans le cadre de nos calculs, pas été mise en défaut.

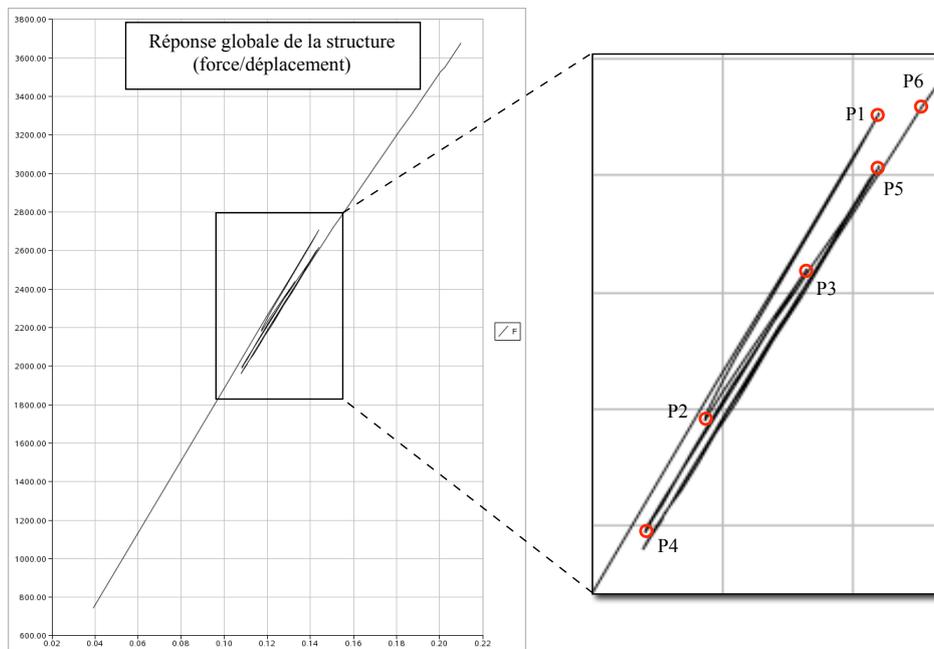
Le résultat présenté montre que des instabilités très abruptes peuvent être passées par utilisation de la stratégie décrite.

■ **Remarque 2.5** *Une autre solution classique utilisée pour traiter les problèmes instables consiste à résoudre le problème non-linéaire d'évolution par un schéma d'intégration temporelle explicite. Le passage en dynamique est alors relativement naturel, et permet de prendre en compte les effets d'inertie induits par les ruptures locales dans le stratifié. Ces ruptures dynamiques locales sont les analogues des instabilités qui ont été traitées dans ce chapitre dans le cadre d'une résolution en quasi-statique du problème d'évolution.*

■ **Remarque 2.6** *Les considérations spécifiques liées aux passages d'instabilités mises à part, les développements de cette section ont montré comment résoudre les étapes de prédiction linéaires d'un algorithme de Newton sécant par la méthode de décomposition de domaine mixte à trois échelles. Il peut également être intéressant d'évaluer les performances de l'utilisation de ce solveur pour résoudre les problèmes linéarisés d'un algorithme de Newton tangent.*



(a) Sous-stucturation et maillage des sous-structures



(b) Comportement global de la structure

FIG. 7.5: Cas test de type plaque trouée en traction à quatre plis ($3,4 \cdot 10^6$ ddl)*Stratégie de calcul à trois échelles pour la prédiction du délaminage*

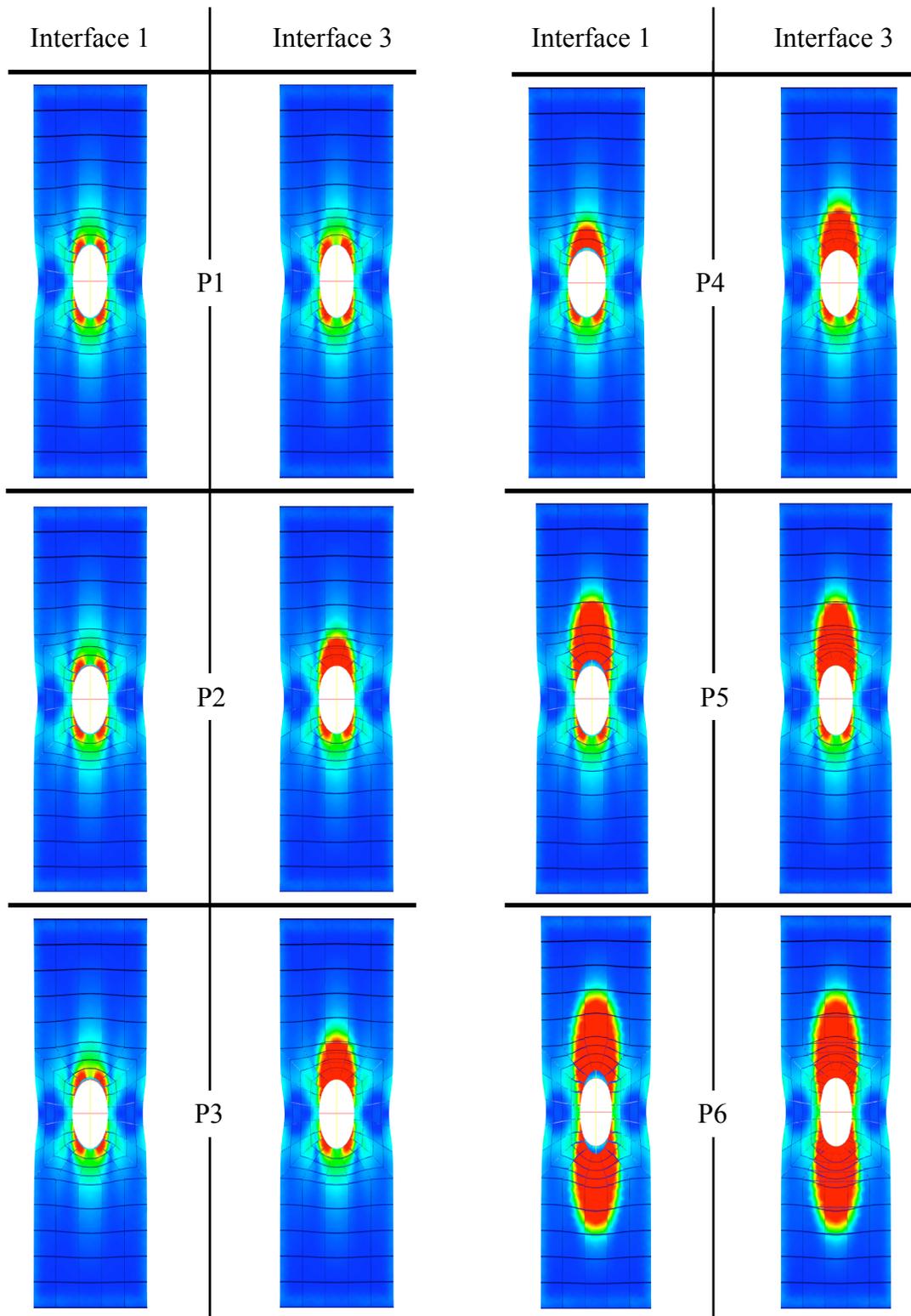


FIG. 7.6: Endommagement dans les interfaces d'une plaque trouée en six points d'intérêt de la courbe globale de réponse

Conclusion

Les pressions économiques imposent aux industriels une conception robuste à toujours moindre coût. nécessitant donc le remplacement d'une partie des certifications expérimentales par des simulations fiables. Pour répondre à cette demande, de nombreux outils de modélisation pour la prédiction du délaminage dans les stratifiés, résultats des études théoriques, numériques et expérimentales menées dans les trente dernières années, ont ainsi été fournis aux ingénieurs. Cependant, utiliser ces modèles pour simuler les dégradations de structures industrielles implique la résolution de problèmes de très grande taille. A ce jour, ces problèmes ne peuvent être résolus qu'en recourant aux dernières avancées dans le domaine du calcul parallèle. Il est donc indispensable d'établir une osmose entre des modèles avancés de stratifiés, représentant fidèlement les propriétés du matériau, et des stratégies de calcul intensif sur architectures parallèles. Or, comme nous l'avons vu dans ce mémoire, répondre à ce nouvel impératif industriel se révèle être un véritable défi.

Pour contribuer à relever ce défi, notre travail a débuté par le constat critique que de nombreux travaux proposent de simuler le délaminage à l'aide de modèles d'interface cohésive concentrant les dégradations dans les zones inter-laminaires superficielles. Or, la méthode de décomposition de domaine mixte basée sur l'algorithme LaTIn propose un traitement efficace des non-linéarités de surface. Elle est donc *a priori* très bien adaptée à une résolution en parallèle des problèmes de grande taille résultant de l'utilisation des modèles d'interface cohésive. La principale raison expliquant l'efficacité de cette stratégie de résolution est le choix d'une sous-structuration respectant la topologie des modèles de stratifié évoqués. Cet attribut original a pour conséquence de modérer significativement le nombre d'opérations de réassemblage nécessaires au traitement du problème non-linéaire d'évolution.

Immanquablement, le traitement des non-linéarités du modèle de stratifié dans les interfaces de la méthode de décomposition de domaine, a soulevé certaines difficultés numériques. D'abord, la stratégie multiéchelle micro/macro, dont les propriétés de convergence sont maîtrisées pour des interfaces parfaites, a dû être adaptée pour les interfaces cohésives. C'est ainsi que la convergence sans condition a été obtenue en modifiant l'algorithme de résolution LaTIn. Le schéma obtenu peut être interprété comme un algorithme de Newton sécant pour lequel les prédictions linéaires sont réalisées de manière approchée : seules les quantités macroscopiques du problème homogénéisé de la stratégie sont en équilibre global sur la structure.

Ensuite, nous avons montré que le problème homogénéisé résolu à chaque itération de l'algorithme LaTIn, permettant la transmission rapide de l'information à grande longueur de variation, est exagérément raffiné pour notre cas d'utilisation. Un rééquilibrage a été apporté par une résolution itérative partielle, en parallèle,

du problème grossier au moyen de la méthode BDD. Celle-ci incorporant elle-même un problème de grille grossière, un nombre très faible d'itérations de cette stratégie est suffisant à l'extraction et la transmission de composantes à grande longueur de variation pertinentes assurant l'extensibilité de la stratégie. Cette opération de filtrage peut alors être vue comme une résolution approchée à un troisième niveau des prédictions linéaires sécantes de l'algorithme de résolution non-linéaire LaTIn.

Ainsi améliorée, la stratégie implantée dans un code de calcul parallèle a démontré d'excellentes propriétés d'extensibilité en temps et en mémoire, ainsi qu'une aptitude certaine au traitement de problèmes industriels.

Nous avons poursuivi notre travail sur un second point : les non-linéarités induites par le comportement local adoucissant de la structure, particulièrement complexes à traiter numériquement. Ces non-linéarités conduisent en premier lieu à des instabilités globales. Afin de résoudre ces problèmes d'instabilité, une procédure de contrôle du chargement par l'avancée de fissure a été incorporée à la stratégie de résolution à trois échelles.

En second lieu, les fortes concentrations de contrainte sur le front de délaminage remettent en cause la séparation d'échelle effectuée classiquement dans le cadre de la stratégie micro/macro. Une stratégie de relocalisation a donc été développée pour rétablir l'extensibilité de la méthode en supprimant l'effet de la mauvaise séparation d'échelle. Pour obtenir ce résultat, des sous-problèmes sont résolus sur une zone localisée autour du front de fissure, à la fin de chaque itération LaTIn globale. Cette pratique permet de diminuer très significativement la quantité de calculs effectués, car les résolutions superflues dans les zones à faible gradient sont évitées.

Cependant, cette amélioration pose des difficultés de répartition de charge sur l'architecture de calcul parallèle, qui limitent ses performances en terme de temps de calcul effectif et conduisent à une première perspective pour ce travail. Une technique de relocalisation améliorée consisterait en une redistribution des charges respectant la répartition des non-linéarités du problème. Pour aller plus loin, l'idée elle-même de ces relocalisations peut éventuellement être remise en cause. Ces calculs locaux supplémentaires sont, au moins partiellement, substituables par l'ajout de fonctions pertinentes dans la base macroscopique, obtenues numériquement ou par des études analytiques.

Ce travail ouvre également une perspective sur le traitement des stratifiés à grand nombre de plis. Dans nos cas test, le nombre de plis mis en jeu étant faible, la résolution itérative du problème homogénéisé de la stratégie micro/macro est extrêmement efficace. Pour des problèmes de taille plus importante, il est probable que l'enrichissement de la troisième échelle par des modes de plaque peut apporter une amélioration des propriétés de convergence de l'algorithme itératif utilisé pour résoudre le problème macroscopique.

Enfin, les développements proposés offrent la possibilité de résoudre de manière exacte des problèmes de délaminage sur de grandes *process zones*, sans raffinement

local pratiqué *a priori* ni opération de remaillage au cours de l'analyse. Cependant, et malgré les progrès technologiques réalisés en matière de calculateur parallèle, une résolution à cette échelle reste limitée à des *zooms* dans les structures industrielles complètes. Un raccord avec un modèle de type plaque, beaucoup moins coûteux et suffisant à l'obtention d'une solution de bonne qualité dans les zones à faible gradient, est à envisager.

Les développements présentés dans ce mémoire apportent donc des éléments de réponse à la problématique de l'association des modèles de stratifié avec le calcul parallèle. Ils représentent une base solide d'outils pour le traitement de modèles plus complexes que ceux utilisés dans ce travail, en particulier des modèles non-locaux, qui donnent à l'heure actuelle les résultats de meilleure qualité.

Bibliographie

- [Alfano, 2006] G. Alfano (2006). On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models. *Composites Science and Technology*, 66 :723–730.
- [Alfano et Crisfield, 2003] G. Alfano et M.A. Crisfield (2003). Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58 :999–1048.
- [Alfano et Crisfield, 2001] G. Alfano et M. A. Crisfield (2001). Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1701–1736.
- [Allix, 1987] O. Allix (1987). *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, chapitre Délaminage : approche par la mécanique de l’endommagement, pages 39–53. J.M. Fouet and P. Ladevèze and R. Ohayon, eds, Pluralis.
- [Allix et Blanchard, 2006] O. Allix et L. Blanchard (2006). Mesomodeling of delamination : towards industrial applications. *Composites Science and Technology*, 66 :731–744.
- [Allix et Corigliano, 1996] O. Allix et A. Corigliano (1996). Modeling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens. *International Journal of Fracture*, 77 :11–140.
- [Allix et Ladevèze, 1992] O. Allix et P. Ladevèze (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Computers and structures*, 22 :235–242.
- [Allix et al., 1998] O. Allix, D. Lévêque, et L. Perret (1998). Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology*, 58 :671–678.
- [Auriel et al., 1982] G. Auriel, G. Boubal, et P. Ladevèze (1982). Sur une méthode de calcul des effets locaux. In JNC3, editor, *comptes Rendus des Troisièmes Journées Nationales sur les Composites*, pages 279–288.
- [Barboteu et al., 2001] M. Barboteu, P. Alart, et M. Vidrascu (2001). A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4785–4803.
- [Barenblatt, 1962] G.I. Barenblatt (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7 :55–129.
- [Ben Dhia, 1998] H. Ben Dhia (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 326 :899–904.

- [Ben Dhia et Rateau, 2001] H. Ben Dhia et G. Rateau (2001). Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 332 :649–654.
- [Billoët et al., 1994] J.L. Billoët, T. Ben Zineb, et B. Ben Lazreg (1994). introduction de l'effet de paroi dans l'analyse des contraintes de bords libres pour les plaques stratifiées. In *Comptes rendus des neuvièmes journées nationales sur les composites, Saint-Etienne*, pages 833–842. J.P. Favre and A. Vaudrin.
- [Brandt, 1977] A. Brandt (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31 :333–390.
- [Brandt, 1982] A. Brandt (1982). Guide to multigrid development. In A. Hackbush et U. Trottenberg, editors, *Conference on Multigrid Methods*, pages 220–312.
- [Brewer et Lagace, 1988] J. C. Brewer et P. A. Lagace (1988). Quadratic stress criterion for initiation of delamination. *International Journal of Composite materials*, 22 :1141–1155.
- [Briggs, 1987] W.-L. Briggs (1987). *A multigrid tutorial*. SIAM.
- [Camanho et al., 2003] P. P. Camanho, C.G. Dávila, et F. De moura (2003). Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 37 :1415–1438.
- [Cresta et al., 2007] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, et S. Guinard (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods in structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1436–1446.
- [Crisfield, 1981] M.A. Crisfield (1981). A fast incremental iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Computers and structures*, 13 :55–62.
- [Daudeville et Ladevèze, 1993] L. Daudeville et P. Ladevèze (1993). A damage mechanics tool for laminate delamination. *Composite Structures*, 25 :547–55.
- [De Borst, 2004] R. De Borst (2004). Computational fracture mechanics. In John Wiley et Sons, editors, *Encyclopedia of computational mechanics*, volume 2, pages 335–373. E. Stein and R. De Borst and T.J.R. Hughes.
- [De Borst et Remmers, 2006] R. De Borst et J. C. Remmers (2006). Computational modelling of delamination. *Composites Science and Technology*, 66 :713–722.
- [Destuynder et al., 1983] P. Destuynder, M. Djoua, et S. Lescure (1983). Some remarks on elastic fracture mechanics. *J.M.T.A.*, 2(1) :113–135.
- [Devries et al., 1989] F. Devries, F. Dumontet, G. Duvaut, et F. Léné (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27 :285–298.
- [Dohrmann, 2003] C.R. Dohrmann (2003). A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal for Scientific Computing*, 25 :246–258.
- [Douglas, 1996] C.-C. Douglas (1996). *A review of numerous parallel multigris methods*. G. Astfalk.

- [Dugdale, 1960] D.S. Dugdale (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8 :100–104.
- [Dumontet, 1986] H. Dumontet (1986). Study of a boundary layer problem in elastic composite. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20 :265–286.
- [Farhat et al., 2000a] C. Farhat, A. Macedo, M. Lesoinne, F.-X. Roux, et F. Magoules (2000a). Two-level domain decomposition methods with lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182(2) :213–240.
- [Farhat et Mandel, 1998] C. Farhat et J. Mandel (1998). The two-level feti method for static and dynamic plate problems - part i : an optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 :129–152.
- [Farhat et al., 2000b] C. Farhat, K. Pierson, et M. Lesoine (2000b). The second generation feti methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometracally non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184 :333–374.
- [Farhat et Roux, 1991] C. Farhat et F.X. Roux (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227.
- [Farhat et Roux, 1994] C. Farhat et F.-X. Roux (1994). Implicit parallel processing in structural mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 2 :1–24.
- [Feyel et Chaboche, 2000] F. Feyel et J.-L. Chaboche (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :309–330.
- [Fish et Belsky, 1995a] J. Fish et V. Belsky (1995a). Multigrid method for periodic heterogeneous media. part 1 : Convergence studies for one-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126 :1–16.
- [Fish et Belsky, 1995b] J. Fish et V. Belsky (1995b). Multigrid method for periodic heterogeneous media. part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126 :17–38.
- [Fish et al., 1997] J. Fish, K. Shek, M. Pandheeradi, et M. S. Shephard (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148 :53–73.
- [Fortin et Brezzi, 1991] M. Fortin et F. Brezzi (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. K.
- [Geers, 1999] M.G.D. Geers (1999). Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. part i : the subplane control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(2) :177–204.

- [Germain et al., 2007] N. Germain, J. Besson, et F. Feyel (2007). Composite layered materials : Anisotropic nonlocal damage models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :4272–4282.
- [Ghosh et al., 1995] S. Ghosh, K. Lee, et S. Moorthy (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and voronoï cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32(1) :27–62.
- [Ghosh et al., 2001] S. Ghosh, K. Lee, et P. Raghavan (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :2335–2385.
- [Gosselet, 2003] P. Gosselet (2003). *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. PhD thesis, Université Paris 6.
- [Gosselet et al., 2004] P. Gosselet, V. Chiaruttini, C. Rey, et F. Feyel (2004). A monolithic strategy based on hybrid domain decomposition method for multiphysic problems. *Revue européenne des éléments finis*, 13 :523–534.
- [Gosselet et Rey, 2006] P. Gosselet et C. Rey (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13 :515–572.
- [Guedra-Degeorges, 1993] D. Guedra-Degeorges (1993). *Une nouvelle approche des composites par la mécanique de l'endommagement*, chapter Principaux essais de délaminage - exploitation, pages 229–249. Pluralis, O. Allix and D. Engrand and P. Ladevèze and L. Perret.
- [Guedra-Degeorges et Ladevèze, 2008] D. Guedra-Degeorges et P. Ladevèze (2008). *Course On Emerging Techniques For Damage Prediction And Failure Of Laminated Composite Structures*. Cepadues.
- [Guidault, 2005] P.-A. Guidault (2005). *Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration*. PhD thesis, ENS de Cachan.
- [Guidault et al., 2008] P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney, et S. Cornuault (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5) :381–399.
- [Guinard et al., 2002] S. Guinard, O. Allix, D. Guedra-Degeorges, et D. Vinet (2002). A 3d damage analysis of low-velocity impacts on laminated composites. *Composites Science and Technology*, 62 :585–590.
- [Helkhodja et al., 2007] N. Helkhodja, H. Ben Dhia, et F.-X. Roux (2007). Modélisation des structures multi-défauts dans le cadre arlequin et approches par sous-domaines. In *Colloque National en Calcul de Structures*.
- [Hellen, 1975] T.K. Hellen (1975). On the method of the virtual crack extension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9 :187–207.

- [Herakovich, 1981] C. T. Herakovich (1981). On the relationship between engineering properties and delamination of composite materials. *International Journal of Composite materials*, 15 :336–348.
- [Highsmith et Reifsnider, 1982] A.L. Highsmith et K.L. Reifsnider (1982). *Damage in Composite Materials, ASTM STP 775*, chapter Stiffness reduction mechanism in composite material, pages 103–117. American Society for Testing and Materials.
- [Hillerborg et al., 1976] A. Hillerborg, M. Modeer, et P.E. Peterson (1976). Analysis of crack formation and growth in concret by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6 :773–782.
- [Hughes et al., 1998] T. J. R. Hughes, G. R. Feijoo, L. Mazzei, et J.-B. Quincy (1998). The variational multiscale—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 :3–24.
- [Irwin, 1957] G.R. Irwin (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :361–366.
- [Jones et McCormick, 1997] J. Jones et S. McCormick (1997). Parallel multigrid algorithms. *Parallel Numerical Algorithms*.
- [Klawonn et Rheinbach, 2005] A. Klawonn et O. Rheinbach (2005). A parallel implementation of dual-primal feti methods for three dimensional linear elasticity using a transformation of basis. Technical Report SM-E-607, Department of Mathematics, University of Duisburg-Essen, Germany.
- [Ladevèze, 1985] P. Ladevèze (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Compte rendu de l’académie des Sciences*, 300(2) :41–44.
- [Ladevèze, 1986] P. Ladevèze (1986). Sur la mécanique de l’endommagement des composites. In C. Bathias et Eds Pluralis aris D. Menkès, editors, *Comptes Rendus des Cinquièmes Journées Nationales sur les composites*, pages 667–683.
- [Ladevèze, 1999] P. Ladevèze (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- [Ladevèze et al., 2000] P. Ladevèze, O. Allix, J.-F. Deu, et D. Levêque (2000). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :105–122.
- [Ladevèze et Dureisseix, 1998] P. Ladevèze et D. Dureisseix (1998). A 2-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis. *Contemporary Mathematics*, 218 :246–253.
- [Ladevèze et Dureisseix, 2000] P. Ladevèze et D. Dureisseix (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18–28.
- [Ladevèze et Le Dantec, 1992] P. Ladevèze et E. Le Dantec (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43 :253–267.

- [Ladevèze et Lubineau, 2002] P. Ladevèze et G. Lubineau (2002). An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composites Science and Technology*, 62(4) :533–541.
- [Ladevèze et al., 2006a] P. Ladevèze, G. Lubineau, et D. Marsal (2006a). Towards a bridge between the micro and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66 :698–712.
- [Ladevèze et al., 2006b] P. Ladevèze, G. Lubineau, et D. Violeau (2006b). A computational damage micromodel of laminated composites. *Int J of Fracture*, 137 :139–150.
- [Ladevèze et Nouy, 2002] P. Ladevèze et A. Nouy (2002). Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps. *Comptes Rendus de Mécanique*, 330 :683–689.
- [Ladevèze et Nouy, 2003] P. Ladevèze et A. Nouy (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087.
- [Ladevèze et al., 2002] P. Ladevèze, A. Nouy, et O. Loiseau (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891.
- [Lasry et Belytschko, 1988] D. Lasry et T. Belytschko (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24 :581–597.
- [Le Tallec, 1994] P. Le Tallec (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. In *Computational Mechanics Advances*, volume 1. Elsevier.
- [Le Tallec et al., 1998] P. Le Tallec, J. Mandel, et M. Vidrascu (1998). A neumann-neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems. *SIAM Journal on Numerical Analyses*, 35(2) :836–867.
- [Lemaître et Chaboche, 1985] J. Lemaître et J.-L. Chaboche (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- [Lévêque, 1998] D. Lévêque (1998). *Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire*. PhD thesis, ENS de Cachan.
- [Lions, 1990] P.-L. Lions (1990). On the schwartz alternative method. iii : A variant for nonoverlapping subdomains. In T.F. Chan et al., editors, *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. SIAM.
- [Loiseau, 2001] O. Loiseau (2001). *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes*. PhD thesis, ENS de Cachan.
- [Mandel, 1993] J. Mandel (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(233-241).
- [Melenk et Babuška, 1996] J. Melenk et I. Babuška (1996). The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 :289–314.

- [Mi et al., 1998] Y. Mi, M. A. Crisfield, et G. A. O. Davies ands H.-B. Hellweg (1998). Progressive delamination using interface elements. *Journal of Composite Materials*, 32 :1246–1272.
- [Moës, 2002] N. Moës (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 :813–833.
- [Moës et al., 1999] N. Moës, J. Dolbow, et T. Belytschko (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Engineering Science*, 46 :131–150.
- [Nataf et al., 1994] F. Nataf, F. Rogier, et E. de Sturler (1994). Optimal interface conditions dor domain decomposition methods. Technical report, CMAP (Ecole Polytechnique).
- [Needleman, 1987] A. Needleman (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54(3) :525–531.
- [Nouy, 2003] A. Nouy (2003). *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. PhD thesis, ENS de Cachan.
- [Nouy et Ladevèze, 2004] A. Nouy et P. Ladevèze (2004). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087.
- [Oden et al., 2006] J. T. Oden, S. Prudhomme, A. Romkes, et P. T. Bauman (2006). Multi-scale modeling of physical phenomena : Adaptative control of models. *SIAM Journal for Scientific Computing*, 28 :2359–2389.
- [Oden et al., 1999] J. T. Oden, K. Vemaganti, et N. Moës (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172 :3–25.
- [Pagano et Rybicki, 1974] N. J. Pagano et E. F. Rybicki (1974). On the significance of effective modulus solutions for fibrous composites. *International Journal of Composite materials*, 8 :214–228.
- [Parks, 1974] D. M. Parks (1974). A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, 10 :487–502.
- [Passieux et al., 2007] J.-C. Passieux, P. Ladevèze, et D. Néron (2007). Sur l’extensibilité d’une stratégie de calcul multiéchelle et parallèle avec homogénéisation en temps et en espace. In *Proc. of CFM 2007 - 18e Congrès Français de Mécanique*.
- [Pebrel et al., 2008] J. Pebrel, C. Rey, et P. Gosselet (2008). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *Int Jal of Multiscale Computational Engineering*, A paraitre.
- [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987] G. Pijaudier-Cabot et Z.P. Bazant (1987). Non-local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113 :1512–1533.

- [Pipes et Pagano, 1970] R. B. Pipes et N.J. Pagano (1970). Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *International Journal of Composite materials*, 4 :538–458.
- [Planas et Elices, 2000a] J. Planas et M. Elices (2000a). Asymptotic analysis of a cohesive crack. 1. theoretical background. *International Journal of Fracture*, 55 :153–177.
- [Planas et Elices, 2000b] J. Planas et M. Elices (2000b). Asymptotic analysis of a cohesive crack. 2. influence of the softening curve. *International Journal of Fracture*, 64 :221–237.
- [Raju, 1987] I.S. Raju (1987). Calculation of strain-energy release rates with high order and singular finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 28 :251–274.
- [Rey, 1996] C. Rey (1996). Une technique d'accélération de la résolution de problèmes d'élasticité non-linéaire par décomposition de domaine. *Compte rendu de l'académie des Sciences*, 322 série IIb :601–606.
- [Rice, 1968] J. R. Rice (1968). A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :379–386.
- [Riks, 1972] E. Riks (1972). The application of newton's methods to the problem of the application of newton's methods to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39 :1060–1065.
- [Risler et Rey, 2000] F. Risler et C. Rey (2000). Iterative accelerating algorithms with krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical algorithms*, 23 :1–30.
- [Rixen et Farhat, 1999] D. Rixen et C. Farhat (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :489–516.
- [Sanchez-Palencia, 1980] E. Sanchez-Palencia (1980). Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, 127.
- [Schellenkens et De Borst, 1993] J.C.J. Schellenkens et R. De Borst (1993). On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(1) :43–66.
- [Schwarz, 1869] H.A. Schwarz (1869). Uber einige abbildungsdufgaben. *J. Reine Angew. Math.*, 70 :105–120.
- [Shivakumar et Raju, 1992] K. N. Shivakumar et I. S. Raju (1992). An equivalent domain integral method for the three-dimesional mixed-mode fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 42(6) :935–959.
- [Smit et al., 1998] R.J.M Smit, W.A.M. Brekelmans, et H.E.H Meijer (1998). Prediction of the mechanical behavior of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 :181–192.

- [Strouboulis et al., 2001] T. Strouboulis, K. Coops, et I. Babuška (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32-33) :4081–4193.
- [Suquet, 1987] P. Suquet (1987). *Homogenization techniques for composite media*, chapter Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics. E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui, Springer Verlag.
- [Talreja, 1985] R. Talreja (1985). Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 19 :355–375.
- [Tvergaard, 1990] V. Tvergaard (1990). Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 27 :83–151.
- [Violeau, 2007] D. Violeau (2007). *Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés*. PhD thesis, ens-cachan.
- [Wang et Choi, 1982] S. S. Wang et I. Choi (1982). Boundary-layer effects in composite laminates - part 1 : free-edge stress singularities. *International Journal of Composite materials*, 49 :541–548.
- [Withney et Nuismer, 1974] J. M. Withney et R. J. Nuismer (1974). Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentration. *International Journal of Composite materials*, 8 :253–265.
- [Xu et Needleman, 1994] X.P. Xu et A. Needleman (1994). Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42 :1397–1434.
- [Zohdi et al., 1996] T.I. Zohdi, J.T. Oden, et G.J. Rodin (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1-4) :273–298.