



HAL
open science

Identification des symétries matérielles de matériaux anisotropes

Marc Louis Maurice François

► **To cite this version:**

Marc Louis Maurice François. Identification des symétries matérielles de matériaux anisotropes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1995. Français. NNT : . tel-00435563

HAL Id: tel-00435563

<https://theses.hal.science/tel-00435563>

Submitted on 24 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité :

MECANIQUE DES SOLIDES ET DES STRUCTURES

présentée à
l'Université Pierre et Marie CURIE
-Paris 6-

par *Marc FRANÇOIS*

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Titre de la thèse :

**IDENTIFICATION DES SYMETRIES MATERIELLES
DE MATERIAUX ANISOTROPES**

Soutenue le 19 décembre 1995 devant le jury composé de :

Monsieur B. CASTAGNEDE ____ Rapporteur
Monsieur Y. SURREL _____ Rapporteur
Monsieur P. ALAIS _____ Examineur
Monsieur Y. BERTHAUD ____ Examineur
Monsieur H. LE DRET _____ Examineur
Monsieur G. GEYMONAT ____ Examineur
Monsieur F. SIDOROFF _____ Examineur

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET TECHNOLOGIE
E.N.S. CACHAN / C.N.R.S. / UNIVERSITE PARIS 6
61 Avenue du Président Wilson - 94235 CACHAN cedex (France)

Merci à :

M. Geymonat et M. Berthaud pour leur encadrement,
l'ensemble des permanents du LMT pour leurs aides et conseils,
l'ensemble des thésards du LMT pour leur amitié et leur gentillesse,
l'ensemble du laboratoire de l'Ecole Centrale de Paris pour leur accueil toujours cordial,
aux enseignants et aux étudiants du DEA Mécanique et Matériaux de la promotion 1991.

et aussi à :

Mme Carrère pour ses encouragements,
mes collègues du lycée pour leur compréhension,
mes élèves d'avoir supporté certaines humeurs aléatoires.

et encore à :

mes amis d'avoir su le rester,
toute ma famille pour leur affection et leur soutien.

et surtout à :

Estelle, qui attend le "livre de Papa",
Raphaël, même s'il a manqué la soutenance de deux mois,
Marie-Anne, pour son amour et sa patience.

"L'homme se découvre quand il se mesure avec l'obstacle."

Saint-Exupéry

TABLE DES MATIÈRES

Le programme !

Titres

1	BASES DE TENSEURS	1
1.1	Base vectorielle orthonormée et notations	2
1.1.1	Conventions de notations	2
1.1.2	Base vectorielle orthonormée	2
1.2	Bases des tenseurs du second ordre	3
1.2.1	Base canonique	3
1.2.2	Base des tenseurs symétriques du second ordre	3
1.3	Bases des tenseurs du quatrième ordre	5
1.3.1	Base canonique	5
1.3.2	Base des tenseurs possédant les deux “petites” symétries	5
1.4	Conclusions	7
2	MESURES MÉCANIQUES	8
2.1	Généralités	9
2.2	Essai "canonique"	10
2.3	Essais sur machine triaxiale “Astrée”	11
2.4	Campagne de 6 essais de traction	13
2.5	Application : essai sur tube mince	14
2.5.1	Présentation	14
2.5.2	Principe de calcul et limitations	14
2.6	Conclusions et perspectives	15
3	DÉTERMINATION DU TENSEUR DE RIGIDITÉ PAR MESURES ULTRASONORES	16
3.1	Rappels sur la propagation des ondes	17
3.1.1	Propagation d’une onde plane en milieu homogène	17
3.1.2	équation de propagation en milieu élastique	17
3.1.3	Conditions d’existence d’un mode pur. Relation avec l’existence d’un plan de symétrie.	19
3.1.4	Expérimentations ultrasonores permettant d’accéder au tenseur de rigidité	20
3.2	Mesures par immersion	22
3.2.1	Présentation	22
3.2.2	Principe	22
3.2.3	Cas du matériau à symétrie inconnue	24
3.2.4	Conclusions et perspectives	25
3.3	Mesures par contact direct	26
3.3.1	Direction de propagation imposée : validation de l’hypothèse	26
3.3.2	Description d’une mesure	28
3.3.3	Justification, forme et réalisation de l’éprouvette à 26 facettes	32
3.3.4	Description du montage ultrasonore	35
3.3.5	Mesures expérimentales	37
3.3.6	Méthodes existantes de traitement des données ultrasonores	39
3.4	Nouvelle méthode de calcul du tenseur de rigidité	43
3.4.1	Mesures complètes : fonction de minimisation j	43

3.4.2	Minimisation de j par rapport au tenseur \mathbb{C}	44
3.4.3	Minimisation de j par rapport aux angles de déflexion	47
3.4.4	Mesures incomplètes : fonction de minimisation h	47
3.4.5	Minimisation de h	48
3.4.6	Performances du programme	49
3.5	Application sur les éprouvettes de bois	53
3.5.1	Chêne	53
3.5.2	Hêtre	53
3.5.3	Sippo	53
3.6	Grès des vosges	54
3.6.1	Introduction	54
3.6.2	Tenseur de rigidité brut	54
3.7	Conclusions et perspectives	55
4	ANALYSE DES SYMÉTRIES DU TENSEUR DE RIGIDITÉ	56
4.1	Figure de pôle du tenseur de rigidité	57
4.1.1	Introduction	57
4.1.2	Détermination de la figure de pôle	57
4.2	Figures de pôle des symétries exactes	59
4.2.1	Isotrope	59
4.2.2	Cubique	60
4.2.3	Isotrope transverse	61
4.2.4	Trigonal (rhomboédrique)	62
4.2.5	Tétragonal (quadratique)	64
4.2.6	Orthotrope	66
4.2.7	Monoclinique	67
4.2.8	Triclinique	67
4.2.9	Figures obtenues d'après les mesures expérimentales	68
4.2.10	Figure de pôle obtenue pour le grès des Vosges	70
4.2.11	Conclusions et perspectives	71
4.3	Tenseur symétrique le plus proche	72
4.3.1	Présentation	72
4.3.2	Méthode de minimisation des écarts	72
4.3.3	Fonction intrinsèque	73
4.3.4	Détermination du tenseur symétrique le plus proche	74
4.4	Symétries des tenseurs obtenus par les mesures ultrasonores	77
4.4.1	Tenseur de rigidité du chêne	77
4.4.2	Tenseur de rigidité du hêtre	81
4.4.3	Tenseur de rigidité du sippo	84
4.4.4	Tenseur de rigidité du grès des Vosges	87
4.5	Relation d'ordre entre les niveaux de symétrie	92
4.5.1	Classification d'après le nombre minimal de plans générateurs de la symétrie	92
4.5.2	Ordre partiel : groupes de symétrie	93
4.6	Conclusions et perspectives	95

5	DÉCOMPOSITION DE KELVIN	96
5.1	Principe de la décomposition	97
5.1.1	Analyse de \mathbb{C} dans la base $T^{2S} \quad T^{2S}$	97
5.1.2	Diagonalisation de \mathbb{C}	98
5.1.3	Nouvelle formulation de la loi de comportement	98
5.1.4	Visualisation	99
5.1.5	Calcul de l'énergie élastique	100
5.2	Modes propres et symétries	101
5.2.1	Isotrope	101
5.2.2	Cubique	102
5.2.3	Isotrope transverse	104
5.2.4	Trigonal (rhomboédrique)	106
5.2.5	Tétragonal (quadratique)	107
5.2.6	Orthotrope	107
5.2.7	Monoclinique	108
5.2.8	Triclinique	108
5.2.9	Conclusions	108
6	MODÈLES D'ENDOMMAGEMENT ANISOTROPE ISSUS DE LA DÉCOMPOSITION DE KELVIN	110
6.1	Principe de symétrie : direction de l'endommagement	111
6.2	Différentes lois de comportement et potentiels thermodynamiques	112
6.2.1	Symétrie de l'endommagement guidée par le matériau seul (modèle isotrope)	112
6.2.2	Remarque concernant la suite du chapitre	113
6.2.3	Symétrie de l'endommagement guidée par la sollicitation	113
6.2.4	Symétrie de l'endommagement guidée par les parties propres de la sollicitation (modèle mixte)	114
6.3	Fonction de dissipation : énergie maximale	115
6.4	Fonction seuils - potentiel de dissipation	118
6.4.1	Symétrie guidée par la sollicitation	118
6.4.2	Modèle isotrope ou modèle mixte	119
6.5	Conclusions	121
7	CONCLUSIONS	122
8	ANNEXES	124
8.1	Plan du montage de mesures ultrasonores	125
8.2	Tenseurs utilisés pour les figures de pôles de référence (Chapitre 4.2)	126
9	BIBLIOGRAPHIE	128

Figures

Figure 2-1. éprouvette de type Iosipescu d'après Pierron et al. (1995)	10
Figure 2-2. Têtes de la machine triaxiale Astree	11
Figure 2-3. Repérage du tube mince	14
Figure 3-1. Onde plane	17
Figure 3-2. Mesures par immersion sur une sphère	19
Figure 3-3. Montage ultrasonore de mesures par transmission	22
Figure 3-4. Figure de lenteurs (d'après Audoin et al., 1991)	23
Figure 3-5. Réponse impulsionnelle locale d'un transducteur (selon Dieulesaint, 1989)	26
Figure 3-6. Mesure de la vitesse de phase V	27
Figure 3-7. Décomposition de la vibration émise	28
Figure 3-8. Angles de polarisation et de déflexion	29
Figure 3-9. Trois signaux ultrasonores	30
Figure 3-10. Création du signal de référence	31
Figure 3-11. éprouvette à neuf paires de facettes (Arts, 1993)	33
Figure 3-12. éprouvette à 13 paires de facettes	33
Figure 3-13. Usinage de l'éprouvette	35
Figure 3-14. Montage ultrasonore et micro-ordinateur	35
Figure 3-15. Montage ultrasonore et éprouvette	36
Figure 3-16. Algorithme	44
Figure 3-17. Erreur globale pondérée en fonction de nombre d'itérations	50
Figure 3-18. Influence des erreurs en vitesse et en polarisation	51
Figure 3-19. Convergence de G pour le tenseur du chêne (échelle logarithmique)	52
Figure 4-1. Figure de pôles	58
Figure 4-2. Figure de pôle d'un tenseur \mathbb{C} isotrope	59
Figure 4-3. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} cubique dans sa base naturelle	60
Figure 4-4. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} cubique	60
Figure 4-5. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} isotrope transverse dans sa base naturelle (hexagonal 5)	61
Figure 4-6. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} isotrope transverse	61
Figure 4-7. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} trigonal dans sa base naturelle (hexagonal 6)	62
Figure 4-8. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} trigonal en configuration hexagonale 7	62
Figure 4-9. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} trigonal	63
Figure 4-10. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} tétragonal dans sa base naturelle (tétragonal 4/mm)	64
Figure 4-11. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} tétragonal dans sa configuration tétragonale 4	64
Figure 4-12. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} tétragonal	65
Figure 4-13. Figures de pôles d'un tenseur \mathbb{C} orthotrope dans sa base naturelle	66
Figure 4-14. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} orthotrope dans une base quelconque	66
Figure 4-15. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} monoclinique dans sa base "naturelle"	67
Figure 4-16. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} monoclinique dans une base quelconque	67
Figure 4-17. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en chêne	68

Figure 4-18. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en hêtre _____	69
Figure 4-19. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en sippo _____	69
Figure 4-20. Figure de pôles du tenseur de rigidité du Grès des Vosges d'après Arts _____	70
Figure 4-21. Figure de pôles du tenseur de rigidité du Grès des Vosges _____	70
Figure 4-22. Opérateur F dans le cas trigonal _____	73
Figure 4-23. Obtention de la symétrie cubique _____	74
Figure 4-24. Recherche de la base optimale visualisée sur la figure de pôles _____	75
Figure 4-25. écart entre les tenseurs de rigidité brut et symétrique pour le grès des Vosges _____	91
Figure 4-26. Ordre partiel des groupes de symétrie des tenseurs de rigidité _____	93
Figure 5-1. Tenseur de rigidité dans sa base propre _____	98
Figure 5-2. Schématisation de la décomposition de \mathbf{C} et \mathbf{C}^{-1} en modes propres _____	100
Figure 6-1. évolution de l'endommagement en fonction du taux $\dot{\gamma}$ _____	115
Figure 6-2. évolution des variables en fonction du déplacement imposé $x = a t$ _____	116
Figure 6-3. évolution des variables en fonction de la force F pour un essai à déplacement imposé $x = at$ _____	117
Figure 6-4. Courbes limites des énergies de mode en fonction du choix de la norme. _____	119

Tables

Table 1-1. Contraction de Voigt _____	4
Table 1-2. écriture colonne et coefficients _____	4
Table 1-3. Tenseur de T^{2S} T^{2S} dans la base S^I S^J et coefficients _____	6
Table 2-1. Matrice S pour l'essai canonique _____	10
Table 2-2. Problème de l'éprouvette triaxiale _____	12
Table 2-3. Matrice S pour une campagne de 6 essais de traction _____	13
Table 2-4. Problème du tube mince _____	14
Table 3-1. Normales aux facettes dans la base de l'éprouvette _____	35
Table 3-2. Mesures expérimentales sur le chêne. Vitesses en m/s et angles en degrés _____	38
Table 3-3. Mesures expérimentales sur le hêtre. Vitesses en m/s et angles en degrés _____	38
Table 3-4. Mesures expérimentales sur le sippo. Vitesses en m/s et angles en degrés _____	38
Table 3-5. Agencement de la résolution matricielle _____	46
Table 3-6. Tenseur orthotrope de l'os du fémur (GPa) d'après Cowin (1990) _____	49
Table 3-7. Influence du nombre de directions de propagation _____	50
Table 3-8. Tenseur de référence C_0 _____	50
Table 3-9. Tenseur de rigidité du chêne _____	53
Table 3-10. Tenseur de rigidité du hêtre _____	53
Table 3-11. Tenseur de rigidité du sippo _____	53
Table 3-12. Tenseur de rigidité du grès des Vosges (GPa) _____	54
Table 3-13. Tenseur de rigidité du grès des Vosges d'après Arts (GPa) _____	54
Table 4-1. Tenseur de rigidité (chêne) orthotrope en base naturelle (GPa) _____	77
Table 4-2. écart entre tenseurs brut et orthotrope (chêne) _____	77
Table 4-3. Modules ingénieur du chêne orthotrope _____	77
Table 4-4. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (chêne) _____	78
Table 4-5. Tenseur de rigidité (chêne) brut dans la base naturelle d'orthotropie (GPa) _____	78
Table 4-6. Tenseur de rigidité (chêne) isotrope transverse en base naturelle (GPa) _____	78
Table 4-7. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (chêne) _____	78
Table 4-8. Modules ingénieur du chêne isotrope transverse _____	79
Table 4-9. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (chêne) _____	79
Table 4-10. Tenseur de rigidité (chêne) brut dans la base naturelle d'isotropie transverse (GPa) _____	79
Table 4-11. Décorrélation entre C et C_{Sym} pour différentes symétries (chêne) _____	80
Table 4-12. Tenseur de rigidité (hêtre) orthotrope en base naturelle (GPa) _____	81
Table 4-13. écart entre tenseurs brut et orthotrope (hêtre) _____	81
Table 4-14. Modules ingénieur du hêtre orthotrope _____	81
Table 4-15. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (hêtre) _____	82
Table 4-16. Tenseur de rigidité (hêtre) isotrope transverse en base naturelle (GPa) _____	82
Table 4-17. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (hêtre) _____	82
Table 4-18. Modules ingénieur du hêtre isotrope transverse _____	82
Table 4-19. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (hêtre) _____	83
Table 4-20. Tenseur de rigidité (sippo) orthotrope en base naturelle (GPa) _____	84
Table 4-21. écart entre tenseurs brut et orthotrope (sippo) _____	84
Table 4-22. Modules ingénieur du sippo orthotrope _____	84

Table 4-23. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (sippo)	85
Table 4-24. Tenseur de rigidité (sippo) isotrope transverse en base naturelle (GPa)	85
Table 4-25. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (sippo)	85
Table 4-26. Modules ingénieur du sippo isotrope transverse	85
Table 4-27. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (sippo)	86
Table 4-28. Tenseur de rigidité monoclinique du grès des Vosges	87
Table 4-29. Repérage angulaire de la base naturelle de monoclinie (grès des Vosges)	87
Table 4-30. Tenseur de rigidité orthotrope du grès des Vosges	87
Table 4-31. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (grès des Vosges)	88
Table 4-32. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé orthotrope	88
Table 4-33. Tenseur de rigidité tétragonal du grès des Vosges	88
Table 4-34. Repérage angulaire de la base naturelle de tétragonalité (grès des Vosges)	88
Table 4-35. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé tétragonal	89
Table 4-36. Tenseur de rigidité isotrope transverse du grès des Vosges	89
Table 4-37. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (grès des Vosges)	89
Table 4-38. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé isotrope transverse	89
Table 4-39. Tenseur de rigidité cubique du grès des Vosges	90
Table 4-40. Repérage angulaire de la base naturelle de cubicité (grès des Vosges)	90
Table 4-41. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé cubique	90
Table 4-42. Décorrélation entre \mathbb{C} et \mathbb{C}_{Sym} pour différentes symétries (grès des Vosges).	91
Table 4-43. Niveau de symétrie et nombre de plans générateurs	92
Table 5-1. Correspondance des notations de la décomposition de Kelvin	98
Table 5-2. Valeur des modules de Kelvin d'un matériau isotrope	102
Table 8-1. Tenseur isotrope	126
Table 8-2. Tenseur cubique	126
Table 8-3. Tenseur isotrope transverse	126
Table 8-4. Tenseur trigonal (hexagonal 6)	126
Table 8-5. Tenseur tétragonal	127
Table 8-6. Tenseur orthotrope	127
Table 8-7. Tenseur monoclinique	127

INTRODUCTION

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan après un début de thèse à l'École Centrale de Paris interrompu suite au départ de D. Baptiste. Il porte sur le thème général de l'anisotropie des matériaux, que cette anisotropie soit inhérente à la structure (composite à fibres) du matériau ou induite par un processus mécanique (mise en forme des métaux, dégradation des matériaux fragiles).

Nous nous consacrons exclusivement à l'anisotropie élastique dans ce document. Plusieurs problèmes se posent lorsque l'on s'intéresse à des matériaux anisotropes :

- quelle classe de symétrie choisir ?
- à partir de quelles données ?

L'ordre de ces questions peut paraître étrange mais bien souvent les techniques de détermination du tenseur d'élasticité présupposent la connaissance des éléments de symétrie (méthodes ultrasonores par immersion ou essais mécaniques classiques). Des techniques très efficaces peuvent alors être mises au point pour identifier les termes non nuls du tenseur. En fait nous nous posons la question différemment :

Soit un tenseur d'élasticité donné. Quelles symétries se "cachent" dans ce tenseur exprimé dans un repère quelconque ? Comment les révéler et comment choisir le meilleur niveau de symétrie ?

Le plan de ce mémoire reprend en fait ces diverses questions.

Nous débutons dans le premier chapitre par quelques rappels sur les bases de tenseurs, notions abondamment utilisées dans ce travail.

Nous donnons dans le deuxième chapitre quelques éléments sur les mesures mécaniques d'un tenseur d'élasticité complet d'un matériau totalement anisotrope, mesures encore largement hors de portée.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes ultrasonores de mesures des vitesses et polarisation d'ondes. Après un bref rappel de la méthode par immersion nous exposons la méthode privilégiée dite de transparence par contact direct qui permet d'obtenir trois vitesses de propagation et deux projections des directions de polarisation. La méthode qui permet de passer des résultats acoustiques au tenseur d'élasticité est expliquée en considérant deux cas typiques : celui où toutes les données sont accessibles par l'expérience et celui plus courant où des mesures sont manifestement erronées ou peu fiables. Le problème des incertitudes n'est pas vraiment abordé dans ce travail. Un montage d'essais, une éprouvette et des résultats sont présentés à la fin de ce chapitre.

Le quatrième chapitre traite de l'analyse des symétries d'un tenseur d'élasticité. C'est dans ce chapitre que nous exploitons l'ensemble des données obtenues. Nous proposons de travailler en deux temps : on recherche qualitativement les symétries présentes par tracé de figures de pôles et ensuite on détermine parmi toutes les symétries possibles celle qui minimise une erreur dont la signification est donnée dans le document. Le choix du niveau de symétrie et du type de symétrie reste du ressort de l'utilisateur dans le cas courant ou plusieurs symétries sont équivalentes (au sens de l'erreur calculée). Des exemples sont donnés qui illustrent ce propos.

Les deux derniers chapitres ont trait à la décomposition modale dite de Kelvin des tenseurs et à une utilisation possible dans le cadre de l'anisotropie élastique induite par l'endommagement. Ce dernier chapitre est encore "expérimental". Il est largement perfectible.

1 BASES DE TENSEURS

Ce chapitre rappelle les définitions et présente les notations des bases de tenseurs. Les bases spécifiques des tenseurs symétriques sont aussi présentées. Leur définition précise est nécessaire pour la suite des calculs.

1.1 Base vectorielle orthonormée et notations

1.1.1 Conventions de notations

Remarquons que nous n'utiliserons, dans ce document, que des bases orthonormées. La position des indices n'est donc pas relative à la nature covariante ou contravariante des composantes. L'indice i en position inférieure représente la i ème composante scalaire d'un élément de nature tensorielle dans la base orthonormée considérée, par exemple v_i , V_i ou \cdot_i . L'indice en position supérieure représente le i ème élément d'une famille de tenseurs d'ordre non nul, par exemple \mathbf{u}^i , \mathbf{S}^{pq} .

Les scalaires sont écrits normalement, par exemple la masse volumique ou une composante C_{ijkl} d'un tenseur de rigidité. Les tenseurs d'ordre un (vecteurs) sont écrits en minuscule et en gras, par exemple \mathbf{n} ou \mathbf{u}^i . Les tenseurs d'ordre deux sont en gras et en majuscule ou en caractère grec, par exemple \mathbf{T} , \mathbf{S}^i ou encore \cdot ou \cdot^I . Les tenseurs d'ordre quatre sont en relief, par exemple \mathbb{C} .

Nous utiliserons dans tout le document, sauf indication contraire, la convention d'Einstein : tout indice répété est sommé.

1.1.2 Base vectorielle orthonormée

Définissons dans l'espace vectoriel à trois dimensions la base vectorielle \mathbf{u}^i orthonormée. Dans cette base, les composantes d'un vecteur \mathbf{v} sont notées v_i

$$\text{Soit :} \quad \mathbf{v} = v_i \mathbf{u}^i \quad 1.1-1$$

Il est pourtant d'usage courant et commode de représenter le vecteur \mathbf{v} par une représentation en colonne où les \mathbf{u}^i ne figurent plus. Cette représentation est utilisable pour les bases orthonormées dans le sens où elle implique $\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^j = \delta_{ij}$ lors du calcul du produit scalaire sur les composantes.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad 1.1-2$$

Le produit scalaire $v_i w_i$ entre deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} est un invariant par rapport au choix de la base \mathbf{u}^i . La norme p d'un vecteur est définie comme :

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_i (v_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1.1-3$$

Seule la norme euclidienne, la norme 2, est invariante par rapport au choix de la base \mathbf{u}^i . Elle correspond à la racine du carré scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Elle sera utilisée majoritairement et prise comme norme "par défaut" c'est à dire $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|_2$.

1.2 Bases des tenseurs du second ordre

1.2.1 Base canonique

C'est la base naturelle, la plus souvent employée (Barbotte, 1948 ; Brillouin, 1949 ; Bauer, 1955 ; Royer et Dieulesaint, 1989). Elle est construite à partir de la base des vecteurs par produit tensoriel entre toutes les combinaisons possibles des vecteurs de base.

C'est à dire :
$$\mathbf{B}^{ij} = \mathbf{u}^i \otimes \mathbf{u}^j \quad 1.2-1$$

C'est une base orthonormée de l'espace des tenseurs du second ordre. Soit :

$$\mathbf{B}^{ij} : \mathbf{B}^{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad 1.2-2$$

Le tenseur \mathbf{T} possède des composantes T_{ij} dans la base \mathbf{B}^{ij} :

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{B}^{ij} \quad 1.2-3$$

L'espace des tenseurs du second ordre T^2 est un espace vectoriel et possède donc neuf dimensions. Il serait possible d'écrire les composantes d'un tenseur \mathbf{T} sous forme de vecteur colonne en choisissant un ordre arbitraire pour les neuf couples d'indices (i,j) . Mais l'application principale des tenseurs du second ordre étant de les contracter avec ceux du premier ordre (vecteurs), on préfère opter pour la représentation en matrice 3x3. Ces représentations supposent l'orthogonalité de la base \mathbf{B}^{ij} .

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad 1.2-4$$

Bien sûr, seule la norme euclidienne (norme 2) est un invariant par rapport au choix de la base et elle sera utilisée comme norme par défaut. Elle est aussi issue du produit scalaire.

1.2.2 Base des tenseurs symétriques du second ordre

Un tenseur du second ordre est dit symétrique si $\mathbf{T} = {}^t\mathbf{T}$ ses composantes T_{ij} dans la base canonique (*i.e.* dans toute base canonique) respectent la relation suivante :

$$T_{ij} = T_{ji} \quad 1.2-5$$

Cette propriété se retrouve souvent en mécanique, par exemple pour le tenseur des petites déformations ou pour le tenseur des contraintes. L'espace des tenseurs du second ordre symétriques T^{2S} forme un sous-espace vectoriel à six dimensions de T^2 . Les \mathbf{B}^{ij} ne forment plus alors une base car trois termes ne sont plus indépendants. La classique écriture de à six composantes en colonne correspond au choix de conserver les termes indicés en (11, 22, 33, 23, 31, 12) par rapport au vecteur colonne suggéré au chapitre précédent. C'est la notation de Voigt. Le problème est que cette notation n'autorise pas l'écriture du produit scalaire, ni de la norme car les termes non diagonaux ne sont comptés qu'une fois. Une façon de comprendre ce qui suit est de décrire comme un coefficient correcteur le $\sqrt{2}$ qui apparaîtra devant ces termes. Mais, pour utiliser la décomposition de Kelvin qui sera abordée ensuite, Mehrabadi et Cowin (1990) et Cowin et Mehrabadi (1992 A) et (1992 B) proposent d'utiliser une base proprement définie. Nous rappelons ici la construction de la base \mathbf{S}^{ij} de T^{2S} orthonormée, à

partir de la base \mathbf{u}^i , dans laquelle les indices i et j agissent de façon symétrique :

$$i = j \quad \mathbf{S}^{ii} = \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^i \quad 1.2-6$$

$$\text{si } i \neq j \quad \mathbf{S}^{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^j + \mathbf{u}^j \cdot \mathbf{u}^i) \quad 1.2-7$$

Il nous faut alors ne retenir qu'une seule des combinaisons possibles pour i et j . Nous reprenons bien sûr la convention de Voigt pour cela, en nommant ces combinaisons de la façon habituelle :

(i,j)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(2,3)	(3,1)	(1,2)
I	1	2	3	4	5	6

Table 1-1. Contraction de Voigt

Le tenseur symétrique quelconque \mathbf{T} s'exprime alors dans cette base avec ses composantes \underline{T}_I :

$$\mathbf{T} = \underline{T}_I \mathbf{S}^I \quad 1.2-8$$

La définition de \mathbf{S}^I entraîne que les composantes \underline{T}_4 , \underline{T}_5 , \underline{T}_6 sont multipliées par un facteur $\sqrt{2}$ dans cette écriture par rapport à leur correspondance canonique. L'orthogonalité de la base \mathbf{S}^I autorise la forme en colonne :

$$\mathbf{T} \begin{array}{|l} \hline \underline{T}_2 = T_{22} \\ \hline \underline{T}_5 = \sqrt{2} T_{31} \end{array}$$

Table 1-2. écriture colonne et coefficients

Tous les raisonnements et calculs¹ faits dans l'espace \mathbf{T}^{2S} à partir de l'écriture colonne sont valables. Par exemple :

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\underline{T}_I \underline{T}_I} \quad 1.2-9$$

$$\mathbf{T} : \mathbf{Q} = \underline{T}_I \underline{Q}_I \quad 1.2-10$$

Mais bien sûr, pour tout calcul de contraction avec des tenseurs du premier ordre, il vaut mieux reprendre l'écriture 3x3 en base canonique.

¹ linéaires : l'écriture de la norme p avec $p \neq 2$ n'est pas respectée par exemple.

1.3 Bases des tenseurs du quatrième ordre

1.3.1 Base canonique

La base canonique formée des tenseurs \mathbb{B}^{ijkl} est construite à partir de la base \mathbf{u}^i (de la même façon que précédemment) :

$$\mathbb{B}^{ijkl} = \mathbf{u}^i \otimes \mathbf{u}^j \otimes \mathbf{u}^k \otimes \mathbf{u}^l. \quad 1.3-1$$

Cette base de l'espace vectoriel à 81 dimensions des tenseurs du quatrième ordre T^4 est orthonormée :

$$\mathbb{B}^{ijkl} :: \mathbb{B}^{pqrs} = \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} \delta_{ls} \quad 1.3-2$$

Le tenseur quelconque \mathbb{T} de T^4 s'exprime naturellement par :

$$\mathbb{T} = T_{ijkl} \mathbb{B}^{ijkl} \quad 1.3-3$$

L'orthogonalité de \mathbb{B}^{ijkl} autoriserait les écritures colonne 81×1 ou matrice 9×9 permettant la contraction avec un tenseur du second ordre écrit en colonne 9×1 . De même que précédemment, seule la norme 2, issue du produit scalaire, est invariante par choix de \mathbf{u}^i orthonormée.

1.3.2 Base des tenseurs possédant les deux "petites" symétries

On désigne par première "petite" symétrie sur un tenseur \mathbb{T} du quatrième ordre la propriété suivante dans la base canonique (*i.e.* dans toute base canonique) :

$$T_{ijkl} = T_{jikl} \quad 1.3-4$$

La seconde "petite" symétrie est la propriété équivalente sur l'autre paire d'indices :

$$T_{ijkl} = T_{ijlk} \quad 1.3-5$$

Ces propriétés ne dépendent pas de la base \mathbf{u}^i orthonormée choisie. Le nombre de composantes indépendantes chute à 36 et nous pouvons considérer l'espace vectoriel à 36 dimensions $T^{2S} \otimes T^{2S}$. Les 81 \mathbb{B}^{ijkl} ne forment plus une base. Le tenseur de rigidité \mathbb{C} possède ces symétries et aussi la "grande" symétrie dont nous n'avons pas besoin ici. Nous présentons la construction de la base de ces tenseurs issue de la base \mathbf{S} précédente de T^{2S} :

$$\mathbb{S}^{ijkl} = \mathbf{S}^{ij} \otimes \mathbf{S}^{kl} \quad 1.3-6$$

Cette base est orthonormée et nous devons, pour n'avoir que 36 composantes, ne considérer les couples d'indices (i,j) et (k,l) qu'une seule fois. Nous utiliserons pour cela la convention de Voigt présentée au chapitre précédent. Le tenseur \mathbb{T} s'exprime alors comme :

$$\mathbb{T} = \underline{T}_{IJ} \mathbf{S}^I \otimes \mathbf{S}^J \quad 1.3-7$$

De même que précédemment, le tenseur \mathbb{T} est représentable par un vecteur colonne 36×1 (relativement à \mathbb{S}^{IJ}) ou par une matrice 6×6 (relativement à $\mathbf{S}^I \otimes \mathbf{S}^J$) permettant le calcul simple de la contraction avec un tenseur symétrique du second ordre écrit en colonne 6×1 . Cette écriture, pour le tenseur de rigidité \mathbb{C} , diffère de celle qui est habituellement employée avec

l'écriture de Voigt. En effet, il faut tenir compte des coefficients $\sqrt{2}$ induits par la définition des \mathbf{S}^I :

\mathbb{C}	$\underline{C}_{11} = C_{1111}$	$\underline{C}_{14} = \sqrt{2} C_{1123}$
	$\underline{C}_{41} = \sqrt{2} C_{2311}$	$\underline{C}_{44} = 2 C_{2323}$

Table 1-3. Tenseur de $T^{2S} T^{2S}$ dans la base $\mathbf{S}^I \mathbf{S}^J$ et coefficients

Avec cette écriture et l'écriture en colonne des éléments de T^{2S} nous pouvons appliquer toutes les méthodes de calcul vectoriel et les règles d'algèbre linéaire sur les coefficients.

Calculs scalaires :

$$\mathbb{T} :: \mathbb{Q} = \underline{T}_{IJ} \underline{Q}_{IJ} \quad 1.3-8$$

$$\|\mathbb{T}\| = \sqrt{\underline{T}_{IJ} \underline{T}_{IJ}} \quad 1.3-9$$

$$\mathbf{P} : \mathbb{Q} : \mathbf{T} = \underline{P}_I \underline{Q}_{IJ} \underline{T}_J \quad 1.3-10$$

Calculs dans T^{2S} :

Si l'on considère la contraction de \mathbb{T} avec \mathbf{Q} suivante ($R_{ij} = T_{ijkl} Q_{kl}$ en base canonique) :

$$\mathbf{R} = \mathbb{T} : \mathbf{Q} \quad 1.3-11$$

On peut alors constater l'écriture du résultat \mathbf{R} dans la base $\mathbf{S}^I \mathbf{S}^J$:

$$\underline{R}_I = \underline{T}_{IJ} \underline{Q}_J \quad 1.3-12$$

Cette forme nous permet d'appliquer les résultats d'algèbre linéaire et en particulier d'affirmer que, si \underline{T}_{IJ} est symétrique (c'est à dire s'il possède la "grande" symétrie de \mathbb{C} notamment soit $C_{ijkl} = C_{klij}$ en base canonique), alors il est diagonalisable, possède six vecteurs propres orthogonaux et six valeurs propres.

Calculs dans $T^{2S} T^{2S}$:

Si l'on considère la contraction de \mathbb{T} avec \mathbf{Q} suivante ($R_{ijpq} = T_{ijkl} Q_{klpq}$ en base canonique) :

$$\mathbf{R} = \mathbb{T} : \mathbf{Q} \quad 1.3-13$$

Le dernier résultat montre que le résultat \mathbf{R} a pour composantes, dans la base $\mathbf{S}^I \mathbf{S}^J$:

$$\underline{R}_{IJ} = \underline{T}_{IK} \underline{Q}_{KJ} \quad 1.3-14$$

C'est à dire que les calculs habituels pour l'inversion sont applicables si \mathbf{R} est l'identité \mathbf{I} correspondante au produit sur les indices centraux ":" c'est à dire $\underline{R}_{IJ} = \underline{I}_{IJ}$ (ou $R_{ijpq} = \delta_{ip} \delta_{jq}$ pour l'écriture en base canonique $T_{ijpq} Q_{pqkl}$). On a, pour tout tenseur \mathbb{T} exprimé dans la base \mathbb{S}^{IJ} , le calcul simple de son inverse relativement au produit ":" par simple inversion de la matrice de ses coefficients \underline{T}_{IJ} :

$$\mathbb{T}^{-1} = (\underline{\mathbb{T}}_{\mathbb{I}\mathbb{J}})^{-1} \mathbf{S}^{\mathbb{I}} \mathbf{S}^{\mathbb{J}} \quad 1.3-15$$

On remarque alors la facilité d'obtention du tenseur des souplesses \mathbb{C}^{-1} par simple inversion de la matrice $\underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{I}\mathbb{J}}$, sans les coefficients correcteurs habituels (François *et al.*, (1991)).

1.4 Conclusions

L'utilisation de bases de tenseurs spécifiques pour les tenseurs symétriques apporte une sécurité supplémentaire au niveau des calculs par rapport à l'écriture classique de Voigt. La conversion (coefficient $\sqrt{2}$) présente une difficulté mineure. Elles nous permettent de représenter les tenseurs d'ordre deux et quatre par des tenseurs d'ordre un et deux dans l'espace vectoriel à six dimensions \mathbb{T}^{2S} . Cette approche est nécessaire pour décrire ensuite simplement la décomposition de Kelvin du tenseur de rigidité \mathbb{C} dans l'espace $\mathbb{T}^{2S} \times \mathbb{T}^{2S}$.

1	BASES DE TENSEURS	1
1.1	Base vectorielle orthonormée et notations	2
1.1.1	Conventions de notations	2
1.1.2	Base vectorielle orthonormée	2
1.2	Bases des tenseurs du second ordre	3
1.2.1	Base canonique	3
1.2.2	Base des tenseurs symétriques du second ordre	3
1.3	Bases des tenseurs du quatrième ordre	5
1.3.1	Base canonique	5
1.3.2	Base des tenseurs possédant les deux “petites” symétries	5
1.4	Conclusions	7
Table 1-1. Contraction de Voigt _____		4
Table 1-2. écriture colonne et coefficients _____		4
Table 1-3. Tenseur de $T^{2S} T^{2S}$ dans la base $S^I S^J$ et coefficients _____		6

Barbotte, 1948.....	3
Brillouin, 1949.....	3
Bauer, 1955.....	3
Royer et Dieulesaint, 1989	3
Mehrabadi et Cowin (1990).....	3
Cowin et Mehrabadi (1992) et (1992-1).....	3
François et al., (1991)	7

2 MESURES MÉCANIQUES

Dans ce petit chapitre sont livrées quelques réflexions sur une globalisation de la détermination du tenseur de rigidité \mathbb{C} par des essais mécaniques. Ces derniers restent aux libre choix de l'expérimentateur, sous une condition d'indépendance.

2.1 Généralités

Le principe de l'essai mécanique "direct" est de créer un champ de contraintes uniforme dans la zone de mesure et de mesurer le champ de déformation résultant (qui sera lui aussi uniforme si le matériau est homogène). Hayes (1969) propose une campagne d'essais permettant de déterminer \mathbb{C} dans le cas des solides anisotropes. La réalisation de ces essais "d'extension pure" semble néanmoins difficile. Nous proposons ici une méthode permettant de déterminer \mathbb{C} par une campagne de six essais quelconques (mais "indépendants").

Chaque essai (numéro e) donne donc un champ de contraintes $\underline{\sigma}^e$ et un champ de déformation associé $\underline{\epsilon}^e$ (que l'on suppose mesurable...).

$$\underline{\sigma}^e = \mathbb{C} : \underline{\epsilon}^e \quad 2.1-1$$

Afin de prendre en compte la totalité des essais nous introduisons les matrices \underline{S} et \underline{E} créées à partir des écritures en colonne de $\underline{\sigma}^e$ et $\underline{\epsilon}^e$ dans une base de tenseurs symétriques T^{2S} .

$$\underline{S}_{ie} = \underline{\sigma}_i^e \quad 2.1-2$$

et
$$\underline{E}_{ie} = \underline{\epsilon}_i^e \quad 2.1-3$$

Dans ces expressions, la loi de comportement s'écrit alors en fonction de ces matrices \underline{S} et \underline{E} :

$$\underline{S}_{ie} = \underline{C}_{ij} \underline{E}_{je} \quad 2.1-4$$

Le système représente un simple produit de matrices carrées dans le cas où nous considérons 6 essais ($1 \leq e \leq 6$). Le tenseur \mathbb{C} peut alors être obtenu à partir de \underline{C}_{ij} par simple inversion de la matrice \underline{E} :

$$\underline{C} = \underline{S} \cdot \underline{E}^{-1} \quad 2.1-5$$

La condition d'inversibilité $\det(\underline{E}) \neq 0$ représente la condition d'indépendance des e vecteurs $\underline{\epsilon}_i^e$. Cela revient à dire que les déformations $\underline{\epsilon}^e$ représentent une base de T^{2S} . D'autre part, nous avons la relation suivante sur les déterminants :

$$\det(\underline{S}) = \det(\underline{C}) \det(\underline{E}) \quad 2.1-6$$

Comme \underline{C} est symétrique et défini positif, son déterminant est non nul. La matrice \underline{C} représentant le tenseur \mathbb{C} dans la base T^{2S} est diagonalisable (nous détaillerons ce point au chapitre 5 : décomposition de Kelvin). En conclusion, il apparaît que si les contraintes imposées $\underline{\sigma}^e$ sont indépendantes, alors les déformations $\underline{\epsilon}^e$ le seront aussi et permettront la résolution ci-dessus. L'objet de ce qui suit est donc de recenser diverses possibilités pour construire les $\underline{\epsilon}^e$ indépendants et techniquement réalisables. La mesure des déformations complètes $\underline{\epsilon}^e$ n'est cependant pas abordée, et nous sommes conscients de l'aspect théorique de cette approche qui n'a pas été mise en pratique faute de temps.

Enfin, l'ensemble de l'approche peut être reprise en permutant \underline{S} et \underline{E} ; c'est à dire en supposant un essai à déformation imposée et à contrainte mesurée.

2.2 Essai "canonique"

L'idée la plus simple (pour un esprit mathématique) est de choisir la matrice \underline{S} comme l'identité, multipliée par un scalaire s représentant l'intensité (en MPa) de la contrainte imposée.

$$\underline{S} = s \underline{I} \quad 2.2-1$$

Le tenseur de rigidité est alors simplement donné par :

$$\underline{C} = s \underline{E}^{-1} \quad 2.2-2$$

Nous pouvons essayer de voir la nature de cette campagne d'essais d'après l'allure des tenseurs de déformations imposées :

Tractions simples sur les axes :	1	2	3	Cisaillements purs sur les axes	23	31	12	
s	0	0	0	0	0	0	0	} mesure des contraintes normales
0	s	0	0	0	0	0	0	
0	0	s	0	0	0	0	0	
\underline{S}	0	0	0	s	0	0	0	} mesure des contraintes tangentielles
0	0	0	0	0	s	0	0	
0	0	0	0	0	0	s	0	

Table 2-1. Matrice \underline{S} pour l'essai canonique

Une telle campagne d'essai est possible avec une éprouvette distincte pour chaque essai. Les trois premiers essais représentent de simples essais de traction sur les trois axes orthogonaux et les trois suivants sont des essais de cisaillement purs. Ces derniers peuvent être effectués sur des tubes pour des matériaux dont la symétrie est compatible avec la forme tubulaire (Chapitre 2.5). Les éprouvettes de type Iosipescu permettent de générer un champ de contraintes de cisaillement, même sur des matériaux anisotropes (Walrath et Adams, 1983). Néanmoins ces essais ne créent pas un champ de cisaillement pur, comme le montrent Pierron *et al.* (1995). Ce type de campagne reste actuellement délicate à réaliser.

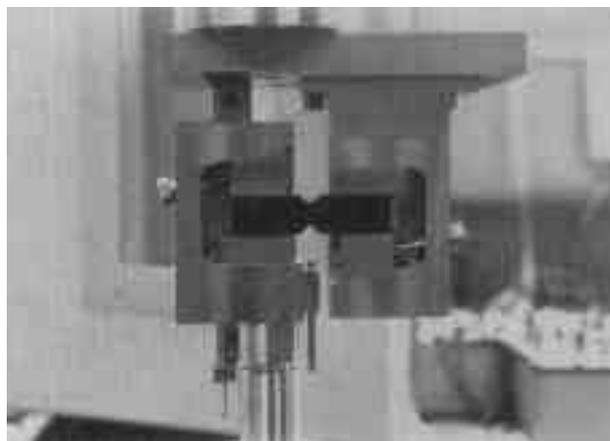


Figure 2-1. éprouvette de type Iosipescu d'après Pierron et al. (1995)

2.3 Essais sur machine triaxiale “Astrée”

La machine triaxiale ASTREE du LMT permet d'exercer trois sollicitations de traction indépendantes sur trois axes orthogonaux (Dusautoir, 1993). Nous considérons dans ce chapitre, pour simplifier, que chaque axe génère un champ de contrainte de traction pure, additif aux autres.

En fait ceci correspond à ce jour à un objectif (de J.M. Virely). La forme des éprouvettes est optimisée dans ce sens. Les éprouvettes actuelles 3D développent en leur sein un champ de contraintes et déformations complexe. Un processus itératif de modélisation aux éléments finis est encore nécessaire pour identifier les paramètres du matériau. Notons que de tels essais ne sont pas réalisés uniquement pour déterminer le tenseur de rigidité mais aussi les paramètres régissant la plasticité et l'écrouissage (Calloch, 1995).

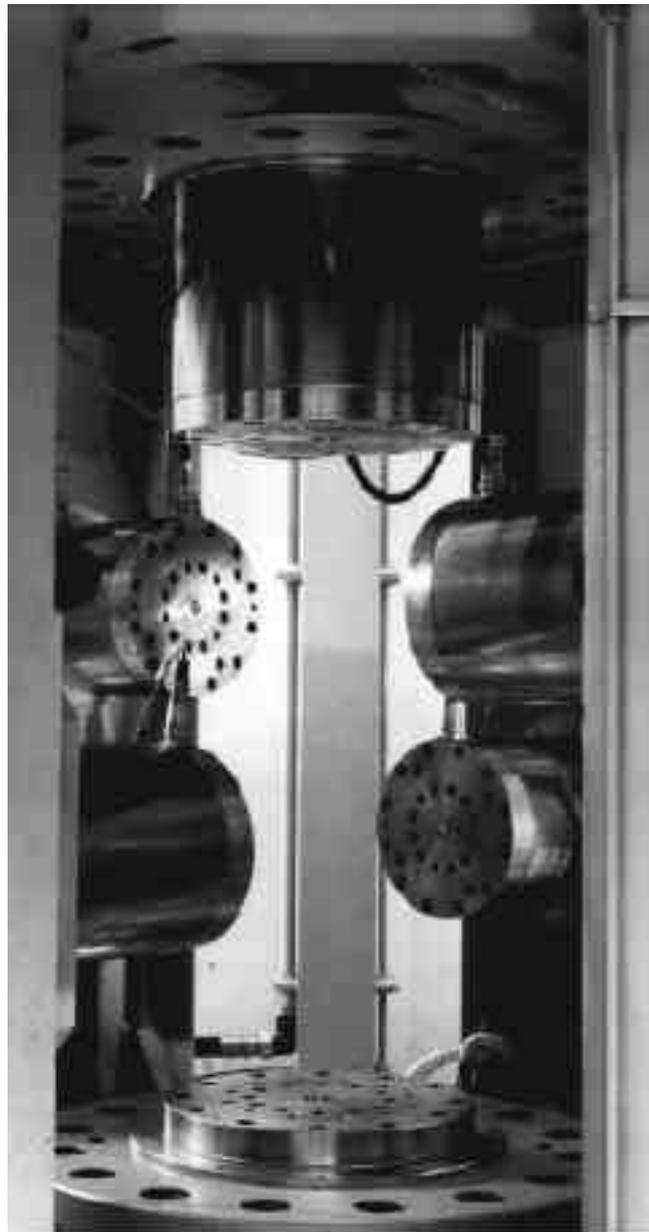


Figure 2-2. Têtes de la machine triaxiale ASTREE

On écrit la forme générique du tenseur des contraintes dans la base $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3\}$ sous la forme suivante, dans laquelle a, b, c représentent les intensités des tractions imposées, en MPa :

$$= a \mathbf{u}^1 \mathbf{u}^1 + b \mathbf{u}^2 \mathbf{u}^2 + c \mathbf{u}^3 \mathbf{u}^3 \quad 2.3-1$$

L'espace créé est de dimension 3 et on ne pourra pas avoir 6 tenseurs linéairement indépendants. Une solution possible est de rajouter 3 axes à la machine ASTREE par trois unités rotatives au bout de chaque vérin. Dans ce cas, le champ de contrainte créé possède 6 degrés de libertés et la machine est à même de réaliser l'essai "canonique" précédent. Cependant, plutôt que d'attendre la machine hexaxe, on peut néanmoins essayer de voir ce qu'il est possible de trouver avec l'éprouvette 3 axes existante.

Remarquons enfin que le tenseur des contraintes, dans le cas d'un matériau isotrope, représente alors une sollicitation quelconque. En effet, l'essai impose seulement les axes propres $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3\}$ du tenseur des contraintes (et des déformations) et ceux-ci sont indifférents au matériau dans le cas de l'isotropie.

En élasticité linéaire, l'intensité de la contrainte imposée ne joue que comme un facteur multiplicateur pour l'ensemble du problème. Nous choisissons les intensités (a,b,c) précédentes égales à s. L'équation 2.1-5 devient alors :

$$s \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} \underline{C}_A & \underline{C}_B \\ \hline (-\underline{C}_B) & \underline{C}_c \end{array} \begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & \underline{E} & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & \underline{E}_B & - \\ - & - & - \end{array}$$

Table 2-2. Problème de l'éprouvette triaxiale

Le problème peut alors se décomposer en deux sous-problèmes distincts A et B et donnent :

$$s \underline{I} = \underline{C}_A \underline{E}_A + \underline{C}_B \underline{E}_B \quad 2.3-2$$

et
$$\underline{0} = \underline{C}_B \underline{E}_A + \underline{C}_C \underline{E}_B \quad 2.3-3$$

Ce problème n'admet pas, en général, de solution. Néanmoins, si $\underline{E}_B = \underline{0}$, le problème se résout facilement. Cette condition correspond à dire que les matériaux mesurés possèdent trois plans de symétrie normaux aux axes de la machine. Nous trouvons ici les familles de symétrie suivantes : isotrope, cubique, orthotrope (chapitre 5). Dans ce cas, \underline{C}_B est nulle et il nous est possible de déterminer \underline{C}_A par :

$$\underline{C}_A = s \underline{E}_A^{-1} \quad 2.3-4$$

Pour le plus bas niveau de symétrie possible, l'orthotropie, cette équation (2.3.4) nous permet de déterminer 6 coefficients sur 9. Notons enfin que si les éprouvettes triaxiales sont en cours d'étude actuellement, par contre les éprouvettes biaxiales commencent à se généraliser (Boehler *et al.*, 1994 A).

2.4 Campagne de 6 essais de traction

On se propose d'effectuer trois essais de traction sur les trois vecteurs de base $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3\}$ et trois autres essais de traction sur les axes $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)$ tels que \mathbf{v}^1 soit médiateur de $(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3)$, \mathbf{v}^2 soit médiateur de $(\mathbf{u}^3, \mathbf{u}^1)$, \mathbf{v}^3 soit médiateur de $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$. La matrice \underline{S} prend alors la forme suivante :

Traction suivant :	\mathbf{u}^1	\mathbf{u}^2	\mathbf{u}^3	\mathbf{v}^1	\mathbf{v}^2	\mathbf{v}^3
$\underline{S} =$	1	0	0	0	1/2	1/2
	0	1	0	1/2	0	1/2
	0	0	1	1/2	1/2	0
	0	0	0	$\sqrt{2}/2$	0	0
	0	0	0	0	$\sqrt{2}/2$	0
	0	0	0	0	0	$\sqrt{2}/2$

Table 2-3. Matrice \underline{S} pour une campagne de 6 essais de traction

\underline{S} est alors une matrice à déterminant non nul donc nous pouvons déterminer \underline{C} par l'équation 2.1-5.

Mesure des déformations

Dans le cas de l'essai dans la direction \mathbf{u}^1 , les déformations ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{12} , ϵ_{13} peuvent être mesurées par des jauges ou par un extensomètre. Seule ϵ_{23} peut poser des problèmes car la jauge de déformation devrait être dans le plan orthogonal à l'axe de l'éprouvette. Les déformations hors axe ϵ_{13} , ϵ_{23} sont néanmoins gênantes dans la pratique car elles créent un champ de déplacement qui décale une tête de la machine par rapport à l'autre. On peut aussi remarquer, que, dans le domaine élastique, rien ne différencie l'essai de traction de l'essai de compression, ce qui peut simplifier le problème de l'accrochage des mors de la machine.

2.5 Application : essai sur tube mince

2.5.1 Présentation

Cette partie est en fait un exemple d'application de l'écriture proposée $\underline{S} = \underline{C} \cdot \underline{E}$ dans le cas de mesures incomplètes pour lesquelles \underline{E} n'est pas défini comme une matrice 6x6 inversible. L'éprouvette est donc un tube mince soumis à des essais classiques :

- un essai de torsion avec un moment M appliqué axialement créant une contrainte σ_{12} et un état de déformations ϵ^t

$$\sigma_{12} = \frac{M}{2 r^2 e} \quad 2.5-1$$

- un essai de pression interne p créant une contrainte σ_{11} et un état de déformations ϵ^p

$$\sigma_{11} = \frac{r p}{e} \quad 2.5-2$$

- un essai de traction axiale avec une force F créant une contrainte σ_{22} et un état de déformations ϵ^1

$$\sigma_{22} = \frac{F}{2 r e} \quad 2.5-3$$

La forme du tube mince autorise l'hypothèse de contraintes planes. Le repérage de l'élément de surface mesuré est donné par la figure ci-dessous.

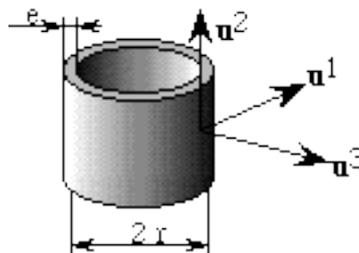


Figure 2-3. Repérage du tube mince

2.5.2 Principe de calcul et limitations

Nous pouvons alors déterminer les constantes élastiques présentes sur le tableau ci-dessous. Le matériau est supposé orthotrope dans la base locale $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3\}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{22} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} & \underline{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & p_{11} & l_{11} \\ \epsilon_{22} & p_{22} & l_{22} \\ \epsilon_{33} & p_{33} & l_{33} \\ \epsilon_{66} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Table 2-4. Problème du tube mince

- l'hypothèse de contraintes planes ne fait pas intervenir les zones en grisé,
- l'hypothèse de symétrie orthotrope entraîne la forme particulière du tenseur de rigidité $\underline{\mathbb{C}}$.

Finalement, nous pouvons déterminer tous les termes du tenseur de rigidité $\underline{\mathbb{C}}$ sauf le terme $\underline{\mathbb{C}}_{33}$ (\mathbb{C}_{3333}), cela paraît naturel.

2.6 Conclusions et perspectives

La présentation de la campagne d'essais sous la forme $\underline{\mathbb{S}} = \underline{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{E}}$ me semble intéressante. Elle souligne la nécessaire indépendance des sollicitations imposées (généralement sous forme de contraintes) ; celle-ci peut être simplement vérifiée par l'écriture de ces sollicitations sous forme de vecteurs colonne dans une base de T^2S .

L'essai "canonique", simple d'un point de vue théorique, présente les difficultés de réalisation des essais de cisaillement.

L'essai sur six éprouvettes de traction est, lui, réaliste mais demande un long travail expérimental. Néanmoins le tenseur de rigidité d'un matériau anisotrope de symétrie inconnue *a priori* peut ainsi être obtenu dans le repère du matériau arbitrairement choisi. La détermination des directions naturelles du matériau pourra être réalisée à l'aide des outils présentés au chapitre 4.

L'essai sur tube mince est en fait classique. La formulation présentée n'a qu'une vertu d'élégance.

Enfin, il est possible d'envisager le traitement de données redondantes, correspondant à la réalisation d'un grand nombre d'essais. Les matrices $\underline{\mathbb{S}}$ et $\underline{\mathbb{E}}$ deviennent alors rectangulaires et un traitement numérique sera nécessaire pour déterminer le $\underline{\mathbb{C}}$ qui minimisera une erreur à définir (vraisemblablement une erreur en énergie). Une perspective de recherche s'ouvre à ce niveau, avec le traitement de données partielles généralement fournies par un essai mécanique. La mesure du tenseur des déformations complet est, en effet, encore délicate à ce jour.

2	MESURES MÉCANIQUES DU TENSEUR DE RIGIDITÉ	8
2.1	Généralités	9
2.2	Essai "canonique"	10
2.3	Essais sur machine triaxiale "Astrée"	11
2.4	Campagne de 6 essais de traction	13
2.5	Application : essai sur tube mince	14
	2.5.1 Présentation	14
	2.5.2 Principe de calcul et limitations	14
2.6	Conclusions et perspectives	15

Table 2-1.	Matrice S pour l'essai canonique	10
Table 2-2.	Problème de l'éprouvette triaxiale	12
Table 2-3.	Matrice S pour une campagne de 6 essais de traction	13
Table 2-4.	Problème du tube mince	14

Figure 2-1.	éprouvette de type Iosipescu d'après Pierron et al. (1995)	10
Figure 2-2.	Têtes de la machine triaxiale Astree	11
Figure 2-3.	Repérage du tube mince	14

Hayes (1969)	9
(Walrath et Adams, 1983)	10
Pierron et al. (1995)	10
(Dusautoir, 1993)	11
(Calloch, 1995)	11
(Boehler et al., 1994)	12

3 DÉTERMINATION DU TENSEUR DE RIGIDITÉ PAR MESURES ULTRASONORES

Cette partie décrit les mesures ultrasonores et le traitement des données qui aboutissent à la détermination expérimentale du tenseur de rigidité \mathbb{C} . Nous nous plaçons dans le cas où les directions de symétrie matérielle ne sont pas connues à l'avance. Ceci nous contraint à utiliser la méthode dite de "contact direct" au lieu de la méthode "d'immersion" plus précise.

3.1 Rappels sur la propagation des ondes

3.1.1 Propagation d'une onde plane en milieu homogène

La plupart des notations et l'organisation générale de ce chapitre sont inspirées de l'ouvrage de Dieulesaint et Royer (1974). L'hypothèse d'homogénéité suppose que toute cause identique en deux points M et N aura une conséquence identique en M et N. Ceci implique notamment qu'une onde plane de vitesse de phase $\mathbf{V} = \mathbf{n} V$ reste plane avec des plans d'onde de normale \mathbf{n} parallèles (lieux de même état de vibration \mathbf{v}). Le déplacement \mathbf{v} de la particule en M à l'instant t ne dépend donc que du temps t et du scalaire $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$, où \mathbf{x} est le vecteur position \mathbf{OM} . Le milieu est supposé élastique linéaire.

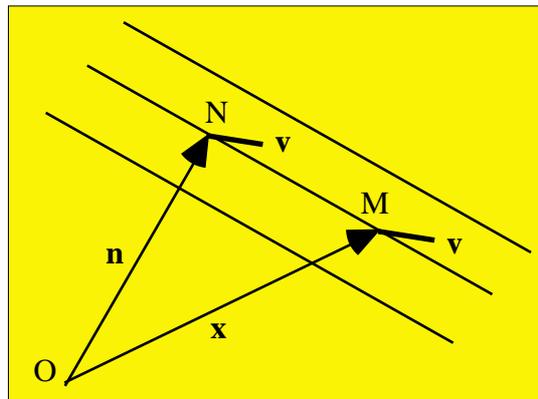


Figure 3-1. Onde plane

La formule suivante exprime l'équation générique de propagation de l'onde plane, dans laquelle F représente une fonction périodique de moyenne nulle et \mathbf{u} le vecteur unitaire représentant la direction de vibration des particules.

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} F \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V} \right) \quad 3.1-1$$

3.1.2 équation de propagation en milieu élastique

Tous les matériaux sont élastiques linéaires en regard des déformations infinitésimales que représentent une onde générée par des moyens du type ultrasons. En effet, le déplacement mesuré à la surface même d'un transducteur est de quelques Angströms pour le domaine de fréquences que nous utilisons, de l'ordre du MHz (Royer et Dieulesaint, 1989). Nous utiliserons donc la loi de comportement linéaire des matériaux anisotropes élastiques linéaires :

$$= \mathbb{C} : \quad 3.1-2$$

En petites déformations, la déformation ϵ s'écrit en fonction du déplacement (ici la vibration \mathbf{v}) par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad 3.1-3$$

La notation “ \cdot ,j” représente la dérivée par rapport à la j-ème composante de la variable

d'espace \mathbf{x} . Le principe fondamental de la dynamique $\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{v}}$ se traduit, pour un élément de volume v de frontière S soumis à un déplacement \mathbf{v} par :

$$\int_v \ddot{\mathbf{v}} dv = \int_S \mathbf{p} dS \quad 3.1-4$$

Dans cette équation \mathbf{p} représente la normale sortante à la surface S et $\ddot{\mathbf{v}}$ la dérivée seconde de \mathbf{v} par rapport au temps. La formule d'Ostrogradsky nous permet de considérer l'égalité des termes différentiels sur le seul élément de volume v :

$$\mathbf{div} \mathbf{p} = \ddot{\mathbf{v}} \quad 3.1-5$$

ou :

$$\ddot{v}_i = p_{ij,j} \quad 3.1-6$$

En tenant compte de la loi de comportement, de l'écriture de la vibration \mathbf{v} et de l'écriture de \mathbf{p} en fonction de \mathbf{v} il vient :

$$\ddot{v}_i = C_{ijkl} v_{k,lj} \quad 3.1-7$$

Comme la dérivée de \mathbf{v} par rapport à la variable d'espace \mathbf{x} vaut :

$$v_{k,l} = -u_k \frac{n_l}{V} \dot{F} \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V} \right) \quad 3.1-8$$

et celle par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u} \dot{F} \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V} \right) \quad 3.1-9$$

On obtient de même les dérivées secondes qui mènent, en simplifiant par \dot{F} , à l'équation de propagation suivante :

$$u_i = C_{ijkl} u_k n_l n_j \frac{1}{V^2} \quad 3.1-10$$

Cette équation montre que les directions de vibration \mathbf{u} sont vecteurs propres du tenseur de Christoffel ainsi défini (le "." correspond à la contraction sur l'indice le plus proche) :

$$\mathbf{C} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \quad 3.1-11$$

Le tenseur \mathbf{C} possède la symétrie induite par sa construction et celles de \mathbf{C} , il possède trois vecteurs propres \mathbf{u}^i et trois valeurs propres réelles et positives V_i^2 :

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{u}^i = V_i^2 \mathbf{u}^i \quad 3.1-12$$

La plus proche de la direction de propagation \mathbf{n} est nommée direction quasi-longitudinale \mathbf{u}^1 , les autres \mathbf{u}^2 et \mathbf{u}^3 sont les directions quasi-transversales. La vitesse de phase quasi-longitudinale V_1 est généralement plus grande que les autres.

La vitesse d'énergie W_i est liée au vecteur de Poynting (Dieulesaint et Royer, 1974). Sa direction est celle du transport de l'énergie ; elle conditionne la réception ou non de la polarisation \mathbf{u}^i de l'onde émise par un transducteur. Son expression vectorielle \mathbf{W}^i relative à la polarisation \mathbf{u}^i est :

$$\mathbf{W}^i = \frac{1}{V_i} (\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n}) \quad 3.1-13$$

La projection de la vitesse d'énergie \mathbf{W}^i sur la direction de propagation \mathbf{n} donne la vitesse de

phase V_i . Cette notion sera illustrée figure 3-6.

La transmission à l'interface de normale \mathbf{s} entre deux matériaux suppose une continuité classique en contrainte normale $\sigma_{\mathbf{s}}$ et en déplacements qui sont pour nous les vibrations \mathbf{v} . Ceci nous sera utile au chapitre 3.3.2 (description d'une mesure).

3.1.3 Conditions d'existence d'un mode pur. Relation avec l'existence d'un plan de symétrie.

Nous entendons par mode pur le cas où une onde quasi-longitudinale est exactement longitudinale ou une onde quasi-transversale est exactement transversale. Le même terme est aussi utilisé dans le cas où la vitesse d'énergie est colinéaire avec la vitesse de phase. Les deux définitions ne coïncident généralement pas.

J.P. Jarić (1994) et Norris (1989) démontrent que les deux conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que la direction \mathbf{u} soit normale à un plan de symétrie :

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad 3.1-14$$

Et, pour toute direction \mathbf{k} contenue dans le plan de symétrie :

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad 3.1-15$$

La première expression indique que toute onde perpendiculaire au plan de symétrie possède un mode purement longitudinal. Les deux autres modes sont par conséquent purement transverses (puisqu'orthogonaux).

La seconde expression indique que toute onde se propageant dans le plan de symétrie possède un mode purement transversal et orthogonal à ce plan. Par conséquent le second mode transverse est aussi dans le plan (mais pas forcément pur).

Les vitesses de phase sont d'ailleurs données par le facteur de \mathbf{u} dans le second membre qui vaut V^2 . La première condition pourrait permettre de rechercher les plans de symétrie d'un matériau anisotrope. Il faudrait pour cela par exemple rechercher la disparition du signal quasi-longitudinal obtenu par l'émission d'un transducteur longitudinal et la réception d'un transducteur transversal. Le groupe de plans ainsi obtenu contiendrait celui des plans de symétrie. évidemment, la faisabilité de l'expérience (dans le cas de mesures par contact direct) semble douteuse à cause de la double infinité de facettes parallèles à usiner sur l'éprouvette (à moins que le contact d'un transducteur sur une sphère soit satisfaisant).

L'idée devient réalisable en considérant des mesures par immersion, à l'aide de transducteurs focalisés. Le liquide couplant pourrait être une poudre ou un gel, afin de permettre la transmission des ondes transverses.

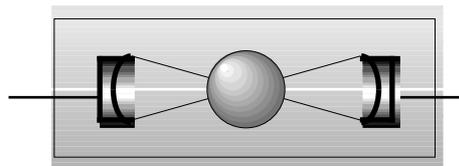


Figure 3-2. Mesures par immersion sur une sphère

3.1.4 Expérimentations ultrasonores permettant d'accéder au tenseur de rigidité

Une revue exhaustive des méthodes expérimentales susceptibles de fournir tout ou partie du tenseur de rigidité d'un matériau anisotrope est donné par Every (1994). En ce qui concerne les mesures ultrasonores, nous pouvons distinguer :

Les méthodes par transmission ultrasonore

- Les techniques de contact direct que nous utiliserons, tant par transmission (deux transducteurs) que par réflexion (un seul transducteur qui assure l'émission et la réception de l'onde réfléchie sur la face parallèle de l'échantillon).
- Les techniques "de transmission oblique", c'est à dire par immersion ou à l'aide d'un talon collé sur l'échantillon en forme de plaque.
- La technique de génération d'onde ultrasonore par impulsion laser (Every et Sachse, 1990 ; Castagnède *et al.*, 1991).
- La technique de génération d'onde ultrasonore par rupture de capillaire à la surface de l'échantillon testé.

Les méthodes opto-acoustiques (matériaux transparents)

- Celle de Schaefer-Bergmann dans laquelle la surface de lenteur est fournie par la figure de diffraction d'un faisceau monochromatique passant à travers une éprouvette excitée par une vibration ultrasonore.
- Les figures de Brillouin sont réalisées par la diffraction de la lumière dans un cristal mis en vibration par des ondes mécaniques.

Les méthodes par ondes guidées

- Les mesures par ondes de surface (ondes de Rayleigh) surtout utilisées pour les couches minces. Celles-ci permettent, par exemple, la mesure des modules d'Young en fonction de la profondeur, sur des métaux traités en surface.
- Les méthodes de mesure de l'angle critique de réflexion.
- L'utilisation des ondes de flexion planes (ondes de Lamb).

D'autres méthodes concernant des applications très spécifiques sont encore précisées dans l'article d'Every.

La plupart des méthodes ci-dessus nécessitent la connaissance des symétries du matériau *a priori*. Cette hypothèse est souvent vérifiée :

- pour les matériaux élaborés par l'homme comme les composites dans lesquels le groupe de symétrie matérielle (celui du tenseur de rigidité \mathbb{C}) contient celui de l'arrangement des renforts⁽¹⁾.

¹ Principe de Curie. Exemple : un composite tissé hexagonalement a un comportement isotrope transverse.

- pour les matériaux “purs” comme les cristaux pour lesquels les arrangements cristallins peuvent être déterminés par des figures de diffraction des rayons X, par exemple. Là aussi, le groupe de symétrie matérielle est contenu dans le groupe de symétrie cristallographique. Par exemple, nous connaissons les 32 groupes ponctuels de symétrie d’Hermann-Mauguin (Kittel, 1983) auxquels ne correspondent que les 8 systèmes de symétrie possibles pour \mathbb{C} .

Néanmoins, dans certains cas, la symétrie matérielle demeure inconnue et difficile à atteindre par des méthodes microscopiques :

- pour les matériaux géologiques, ils possèdent généralement au moins un plan de symétrie correspondant au plan orthogonal à la verticale de leur position au moment de leur élaboration souterraine. Les mouvements du sol peuvent modifier cette orientation et le matériau issu d’un carottage possède des symétries totalement inconnues. Celle-ci sera liée non seulement à la composition chimique de la roche, mais aussi à des grandeurs plus macroscopiques (inclusions, défauts) et l’anisotropie induite par le champ de contraintes au sein du sous-sol. La méthode de mesures par contact direct est souvent employée dans ce cas (Arts, 1993).
- pour les biomatériaux. Leur structure est généralement “bien” définie et observable avec des moyens classiques mais dans les conditions *in vitro* du laboratoire. Pour les os, le comportement est bien différent *in vivo* où cette structure s’adapte aux chargements imposés. Dans le cas d’os présentant des défauts (ostéoporose) ou ayant subi une fracture, la symétrie est inconnue.

3.2 Mesures par immersion

3.2.1 Présentation

Elle a été développée dès le début des années 70 (Markam, M.F., 1970 ; Vinh, 1981 ; Preziosa *et al.* , 1981 ; Hosten et Castagnède, 1983 A et B, Hosten et Deschamps, 1983) et est depuis extensivement utilisée dans le domaine des composites ou sur tout matériau dont les directions de symétrie (ou au moins le type de symétrie) sont connues à l'avance. Comme nous le verrons, cette hypothèse rend délicate l'utilisation de cette méthode dans notre cas, aussi nous n'en donnerons ici qu'un aperçu.

3.2.2 Principe

Le montage ci-dessus permet au transducteur d'émettre une onde longitudinale dans l'eau (ou un autre fluide). Celle-ci doit être thermostatée avec une bonne précision ($\pm 0,01^\circ\text{C}$) afin de bien connaître la vitesse de propagation de l'onde dans le bain. L'onde est réfractée (en partie) par l'éprouvette en forme de plaque plane de normale \mathbf{x}^1 . L'angle d'inclinaison est réglable.

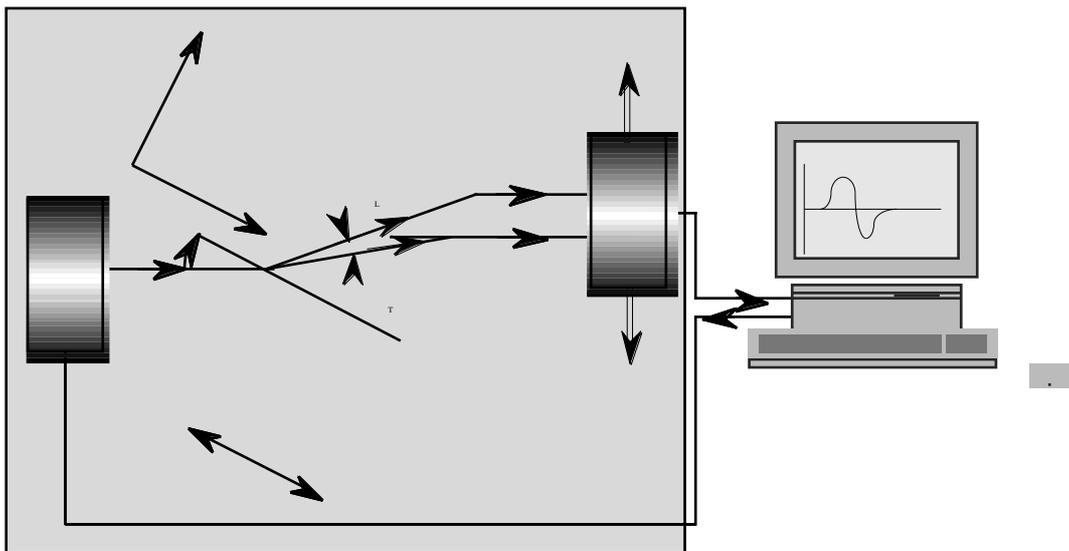


Figure 3-3. Montage ultrasonore de mesures par transmission

L'éprouvette possède généralement un plan de symétrie correspondant au plan de la figure ci-dessus. D'après le chapitre précédent il existe un mode purement transverse orthogonal au plan de symétrie ; celui-ci n'est alors pas excité car l'onde incidente n'a pas de composante dans cette direction. Deux modes peuvent alors se propager : le mode quasi-longitudinal QL et le mode quasi-transversal QT, les deux dans le plan de symétrie. Suivant l'inclinaison, il est possible de recevoir un ou deux modes. Pour chaque mode, et pour un ensemble d'angles d'inclinaison donné, on peut mesurer le temps de vol de l'onde par intercorrélacion avec un signal de référence (le signal obtenu sans éprouvette). Afin de recevoir au mieux le signal, une unité de translation permet de mettre le transducteur dans la position la plus favorable (fig. 3-

2). L'écart t entre le temps de vol et le temps de vol de référence donne une première relation entre la vitesse de l'onde dans le matériau V , la vitesse dans l'eau V_0 et l'angle de réfraction

$$t = \frac{e}{V \cos(\theta)} - \frac{e}{V_0 \cos(\theta_0)} \cos(\theta - \theta_0) \tag{3.2-1}$$

L'angle de réfraction θ est lié à l'angle d'incidence connu θ_0 et aux vitesses de l'onde V dans le matériau et V_0 dans l'eau par la relation de Snell-Descartes :

$$\frac{1}{V} \sin \theta = \frac{1}{V_0} \sin \theta_0 \tag{3.2-2}$$

Ces deux équations permettent alors de déterminer V et θ en fonction des grandeurs mesurables. La surface des lenteurs est définie comme l'extrémité du vecteur \mathbf{n}/V ; ici on peut donc considérer son intersection avec le plan de mesures, soit le plan $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$. Pour l'essentiel la méthode d'obtention de \mathbb{C} consiste à minimiser, au sens des moindres carrés, des courbes de lenteur théoriques aux points expérimentalement mesurés.

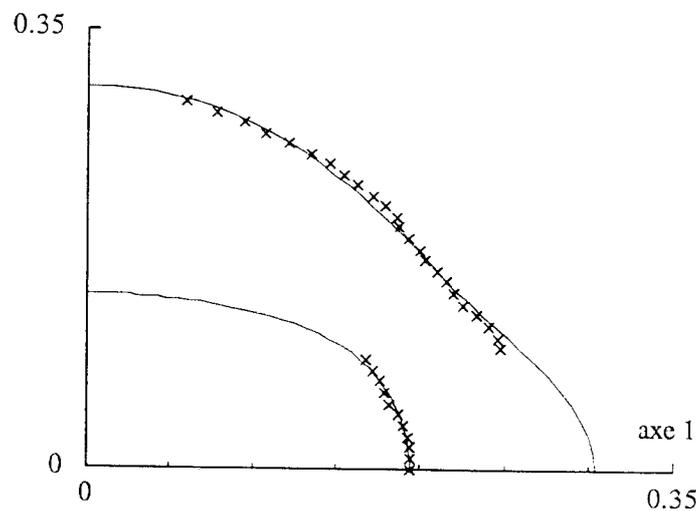


Figure 3-4. Figure de lenteurs (d'après Audoin et al., 1991)

Nous nous plaçons dans le cas d'un matériau à symétrie orthotrope⁽²⁾ (suivant les normales aux plans \mathbf{x}^i). Les symétries de plus haut niveau (tétragonal, cubique, isotrope) sont naturellement contenues dans cette analyse. La formule ci-dessous (Hosten et Castagnède, 1983-B) donne l'expression des vitesses quasi-longitudinales ou quasi-transversales V_T^I en fonction des constantes élastiques non nulles et de l'angle de transmission θ inconnu. Ces formules sont obtenues à partir de l'équation de propagation, en écrivant la condition d'existence des valeurs propres suivantes :

$$\det(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} - V^2) = 0 \tag{3.2-3}$$

Sans calcul, l'onde incidente étant dans le plan de symétrie matérielle ($\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$), la direction de propagation \mathbf{n} le sera aussi grâce à la symétrie complète du problème par rapport à ($\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$). Ceci permet d'écrire les composantes de la direction de propagation \mathbf{n} en fonction de l'angle θ :

² Le cas hexagonal est aussi simplement abordable.

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{x}^1 + \sin \alpha \mathbf{x}^2 \quad 3.2-4$$

On obtient alors la résolution de l'équation précédente (equ. 3.2-3) par :

$$2 (V_T^L)^2 = A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \quad 3.2-5$$

avec :

$$A = C_{11} \cos^2 \alpha + C_{22} \sin^2 \alpha + C_{66} \quad 3.2-6$$

$$B = (C_{11} \cos^2 \alpha + C_{66} \sin^2 \alpha) (C_{66} \cos^2 \alpha + C_{22} \sin^2 \alpha) - (C_{12} + C_{66})^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad 3.2-7$$

Le terme C_{11} est déterminé par la mesure en incidence normale. Tous les termes du tenseur \mathbb{C} sont représentés dans les équations ci-dessus si l'on considère les trois plans de symétrie. En général, seuls deux de ces plans sont accessibles dans le cas de mesures sur des éprouvettes de géométrie plaque. Le grand nombre de mesures favorise la précision sur les C_{IJ} ; le procédé pouvant être automatisé, la durée de l'expérience reste raisonnable. L'obtention des inconnues C_{IJ} se fait avec un processus de minimisation numérique de l'écart entre les courbes de vitesse théoriques et expérimentales. Roux *et al.* (1985) utilise une méthode du type moindres carrés. D'autres méthodes utilisent les invariants de \mathbb{C} comme variables (Grédiac *et al.*, 1993). Les intervalles de confiance sur les termes de \mathbb{C} peuvent être calculés (Audoin *et al.*, 1991).

Les directions de symétrie du matériau ne sont pas toujours exactement confondues avec celles de l'éprouvette ; il est possible de les retrouver avec une bonne précision (Castagnède *et al.*, 1989 ; Castagnède, 1991). L'ensemble des constantes élastiques peut être trouvé à partir d'une géométrie plaque en utilisant des propagations complémentaires hors plan de symétrie (Baste et Hosten, 1990 ; Chu *et al.*, 1994). Des applications ont été réalisées dans le cas d'anisotropie induite par l'endommagement (Gérard, 1981 ; Keyvani, 1991 ; Hood et Mignogna, 1995).

Un montage original permet de réaliser ces mesures sur des éprouvettes soumises simultanément à un essai mécanique (Audoin, 1991 ; Audoin et Baste, 1994) de façon à mesurer continûment le tenseur d'écart \mathbb{K} (tel qu'il sera défini au chapitre 6 équ. 6.1-1) et son évolution au cours de la sollicitation mécanique.

3.2.3 Cas du matériau à symétrie inconnue

Déviations hors plan de l'onde

Si le plan de la figure (fig. 3-2) n'est pas un plan de symétrie, il faudra prendre en compte un second angle de réfraction déviant l'onde dans le plan orthogonal. Une seconde unité de translation des transducteurs pourrait être à prévoir. D'autre part, les trois modes (quasi longitudinaux et quasi transversaux) peuvent alors être observés.

Inconnue supplémentaire

Une relation manque pour définir l'angle supplémentaire qui devient alors une inconnue à traiter. Celle-ci conditionne la direction de propagation \mathbf{n} intervenant dans l'équation de Christoffel (équ. 3.2-3). Le problème a été résolu dans le cas de matériaux orthotropes présentés avec des axes d'isotropie non confondus avec ceux du montage (Castagnède *et al.*,

1990 ; Baste et Hosten, 1990). Le cas général des matériaux à symétrie inconnue *a priori* n'a pas été traité à ce jour.

3.2.4 Conclusions et perspectives

Cette méthode de mesures par immersion est rapide, précise et automatisable pour les matériaux à symétrie connue. Il est possible de retrouver les directions de symétries si celles-ci ne sont pas exactement confondues avec les axes de l'éprouvette.

Le problème inverse que constitue la détermination du tenseur \mathbb{C} de symétrie connue est résolu et l'influence des erreurs a été analysée (Audoin *et al.*, 1991). Notre cas de matériau à symétrie inconnue *a priori* fournit une inconnue angulaire supplémentaire pour la direction de propagation \mathbf{n} . De plus, aucune simplification n'est disponible sur l'écriture du tenseur \mathbb{C} . La résolution du déterminant ci-dessus (équ. 3.2-3) devient considérablement plus délicate (Brose et Eckhardt, 1986).

Pour ces raisons, j'ai préféré dans le cadre de cette thèse utiliser la méthode de "contact direct" présentée ci-après, moins précise, mais qui fixe la direction de propagation \mathbf{n} .

Néanmoins, cette voie constitue un axe de recherche intéressant pour lequel de nombreux travaux préliminaires ont déjà été effectués par exemple dans le cas de la symétrie cubique (Every, 1979), dans le cas monoclinique (Brose et Eckhardt, 1986 ; Dye et Eckardt, 1989) ou encore dans le domaine de la recherche des directions de symétrie (Castagnède *et al.*, 1989). L'utilisation de mesures par immersion permettrait d'augmenter la précision des mesures par rapport à celles qui ont été effectuées par contact direct. Il me semblerait intéressant de développer une campagne de mesures par immersion sur une sphère dans un *solide* couplant, tel qu'une poudre ou un gel, permettant l'utilisation d'ondes de cisaillement.

3.3 Mesures par contact direct

La mesure par contact direct est extensivement utilisée dans le contrôle non destructif (Krautkramer et Krautkramer, 1988) ; elle procède d'un principe simple. Une onde est émise par un transducteur piézo-électrique au contact de l'éprouvette. Un autre transducteur au contact d'une face parallèle à la première reçoit l'onde décomposée par le matériau anisotrope. Dans le cas où une seule face est accessible ou pour doubler la longueur du parcours, on peut utiliser l'écho de l'onde sur la face libre. Le transducteur émetteur peut faire la réception de l'onde. Il est aussi possible de disposer le second transducteur plus loin afin de recevoir l'onde après un trajet "en V". Les échos simples ou multiples peuvent être utilisés (ces derniers permettent notamment de s'affranchir du problème du zéro temporel).

3.3.1 Direction de propagation imposée : validation de l'hypothèse

Le traitement des données ultrasonores que nous allons détailler au chapitre 3.4 utilise l'hypothèse de la connaissance de la direction de propagation \mathbf{n} . La méthode utilisée ici avec deux transducteurs face à face, permet de s'en assurer dans une certaine mesure. La planéité des capteurs impose la propagation d'une onde plane (figures 3-1 et 3-5) en supposant que le transducteur crée, en chacun de ses points, un même déplacement \mathbf{v} à l'instant t_0 de l'émission : cela revient à négliger les effets de bord. Les mesures de champ de déplacement à la surface d'un transducteur (Royer et Dieulesaint, 1989) (figure 3-5) montrent néanmoins que cette zone de champ raisonnablement homogène se limite à environ 80% du diamètre du transducteur.

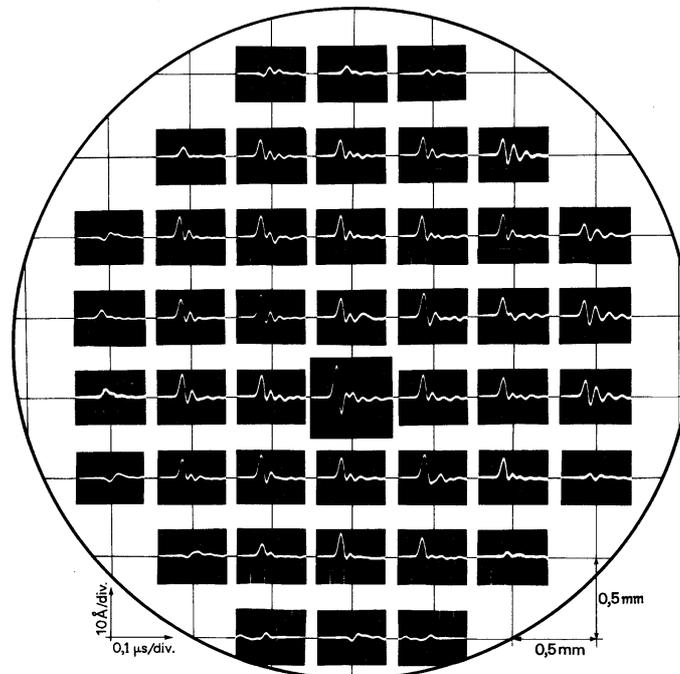


Figure 3-5. Réponse impulsionnelle locale d'un transducteur (selon Dieulesaint, 1989)

La direction de propagation est en fait liée à la vitesse d'énergie \mathbf{W} de l'onde. La figure

suivante illustre le fait que le produit scalaire $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}$ donne la vitesse de phase V (equ. 3.1-13). C'est donc bien la vitesse de phase V ($V \cdot \mathbf{n}$) correspondant à la direction de propagation \mathbf{n} qui est mesurée tandis que la vitesse d'énergie \mathbf{W} conditionne la réception ou non de l'onde (Arts, 1993 ; Every, 1994). Il faut, pour que le plan d'onde atteigne le transducteur récepteur, que la vitesse d'énergie \mathbf{W} forme avec la direction de propagation \mathbf{n} un angle inférieur à l'angle maximal (figure 3-5).

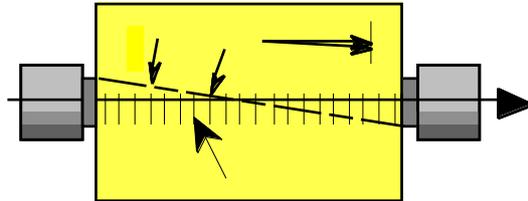


Figure 3-6. Mesure de la vitesse de phase V

Angle limite

L'angle limite est fonction de la géométrie du montage. Dans notre cas, avec des transducteurs d'un demi pouce de diamètre utile environ 10mm, et une éprouvette de 55mm d'épaisseur, vaut environ 10 degrés.

$$\tan(\theta) = \frac{d}{e} \quad 3.3-1$$

Une solution pour augmenter cet angle limite est d'augmenter le rapport d/e mais ceci se fait au détriment du nombre de facettes. La géométrie de l'éprouvette a été optimisée en tenant compte de ces paramètres (chapitre 3.3.3).

Angle entre la vitesse d'énergie et la direction de propagation : limitation de la méthode

L'angle est lié à l'anisotropie du matériau. Il est nul pour un matériau isotrope. La méthode présentée ne permet donc pas certaines mesures pour les matériaux de grande anisotropie. Néanmoins, il est toujours possible de trouver des directions pour lesquelles est suffisamment faible (chapitre 3.1.3).

Une résolution du problème

Pour limiter les risques d'erreurs dues à ce problème, nous avons utilisé la démarche suivante : à l'issue du traitement des données ultrasonores (chapitre 3.4), nous obtenons le tenseur de rigidité \mathbb{C} complet. Nous recalculons alors à partir de ce tenseur \mathbb{C} , par le problème direct, les vitesses d'énergie \mathbf{W} et leur angle par rapport à la direction de propagation \mathbf{n} . Si celui-ci est supérieur à θ_{max} , la mesure est mise en doute et éventuellement éliminée. Un traitement spécifique est alors proposé : le cas des mesures incomplètes (chapitre 3.4.4).

De nombreuses autres causes peuvent fournir une mesure erronée :

- la réception d'un signal réfléchi sur une des parois de l'éprouvette. Ce fait peut néanmoins être détecté par l'inversion de phase que crée la réflexion sur un bord libre.
- le mélange de signaux de nature différente, par exemple entre une onde quasi-longitudinale réfléchie sur un bord et une onde quasi-transverse mesurée.
- la réflexion sur des défauts internes du matériau.

- la dispersion liée à l'amortissement des hautes fréquences par le matériau, qui modifie ("empâte") le signal émis par le transducteur. Néanmoins, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant qui traite des mesures, nous nous affranchirons quelque peu de ce problème.

En conclusion de cette liste non exhaustive, il apparaît que la fiabilité des mesures dépend du savoir-faire de l'opérateur, et que ce type d'essai a peu de chances d'être automatisé simplement.

3.3.2 Description d'une mesure

Description de la carte d'acquisition

Une carte "Saphir" est installée dans un micro-ordinateur de type PC®. Elle permet l'émission, toutes les millisecondes, d'une impulsion (de type "Dirac") électrique de tension réglable entre 10 et 220 Volts et de durée réglable entre 25 et 350 nanosecondes. Le signal est alors transmis au transducteur émetteur par un câble coaxial et une prise Microdot™ garantissant la transmission des signaux. Après le passage du signal ultrasonore dans l'éprouvette, le transducteur récepteur renvoie à la carte "Saphir" un signal de tension très faible (de l'ordre de quelques microVolts). Ce signal est alors numérisé par la carte sur 256 valeurs avec un pas de temps de 25 nanosecondes et sur 4000 points. La durée d'échantillonnage de 100 microsecondes permet de "couvrir" le temps de vol de 55 microsecondes d'une onde quasi-transversale lente à 1000m/s comme on peut rencontrer sur les éprouvettes testées en bois, de 55 mm de large. Le gain est réglable de 0 à 70dB. Pour améliorer le rapport signal-bruit, il est possible d'afficher la moyenne de 2,4,8, etc... signaux reçus.

Tension fournie par le transducteur récepteur

L'émetteur émet une vibration d'amplitude A dans une direction de mesure \mathbf{m} normée. Arrivée dans le matériau anisotrope, celle-ci se décompose sur le trièdre formé par les directions de vibration \mathbf{u}^i autorisées (vecteurs propres du tenseur de Christoffel présenté précédemment). Chaque vibration sur \mathbf{u}^i se déplace avec la vitesse de phase V_i .

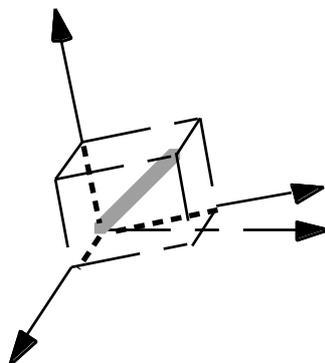


Figure 3-7. Décomposition de la vibration émise

Les vibrations ont donc, en supposant qu'il n'y ait aucune absorption, une amplitude A_i :

$$A_i = A (\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{m}) \quad 3.3-2$$

Le montage (fig. 3-13) impose une symétrie de positionnement entre l'émetteur et le récepteur. Le récepteur convertit en tension électrique les vibrations de direction \mathbf{m} normée (direction de mesure). La tension fournie U_i par le capteur pour la réception du mode i est proportionnelle à cette projection :

$$U_i = A (\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{m})^2 \quad 3.3-3$$

Le signal reçu sera donc maximal lorsque le cosinus entre la direction de vibration \mathbf{u}^i et la direction du capteur \mathbf{m} sera maximal.

Deux types de capteurs sont utilisés :

- les quasi-longitudinaux qui émettent une vibration de direction $\mathbf{m} = \mathbf{n}$
- les quasi-transverses qui émettent une vibration de direction $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$

Pour les seconds, la recherche du maximum d'intensité pourra se faire en orientant la paire de capteurs autour de \mathbf{n} . Le maximum d'intensité est atteint lorsque les trois vecteurs \mathbf{u}^i , \mathbf{m} , \mathbf{n} sont coplanaires. Le vecteur \mathbf{m} correspondant à cette position est renommé \mathbf{m}^i , relativement à la polarisation i . Ceci nous permet d'accéder à l'angle de polarisation θ_i . Le second angle positionnant la vibration \mathbf{u}^i , l'angle de déflexion ϕ_i reste non mesurable et sera considéré comme une inconnue du problème.

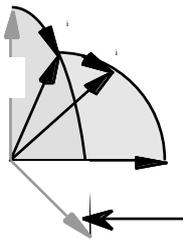


Figure 3-8. Angles de polarisation et de déflexion

D'où l'expression de \mathbf{u}^i en fonction de \mathbf{m}^i et \mathbf{n} :

$$\mathbf{u}^i = \cos \theta_i \mathbf{m}^i + \sin \theta_i \mathbf{n} \quad 3.3-4$$

Dans le cas de la mesure de la polarisation quasi-longitudinale, le cosinus entre \mathbf{u}^i et la vibration \mathbf{m} fournie par le transducteur transverse est généralement trop faible pour permettre la mesure. Cet angle de polarisation reste non mesurable.

Bilan d'une mesure

Nous avons donc, pour chaque direction de propagation \mathbf{n} , la possibilité de mesurer :

- la vitesse de phase V_i de chacune des trois polarisations
- les deux angles de polarisation θ_i

Lorsque tous ces paramètres ont pu être mesurés, on nommera ces cinq grandeurs une **mesure complète**. La **mesure incomplète** est relative au cas contraire. Les causes pouvant engendrer une telle incomplétude ont été énumérées au chapitre 3.3.1.

Un relevé temporel de signal ultrasonore

La figure 3-8 suivante montre le relevé temporel à la suite d'une émission transversale sur la facette B de l'éprouvette en chêne. La position du transducteur transverse est à peu près la bissectrice entre les deux positions de signaux transverses maximaux.

Les seconds et troisièmes signaux correspondent à l'arrivée des deux modes quasi-transverses. La vibration incidente \mathbf{m} (orthogonale à \mathbf{n}) émise par le transducteur s'est décomposée de façon presque égale sur chacune des directions de vibration \mathbf{u}^2 et \mathbf{u}^3 quasi-transverses permises par le matériau pour cette direction de propagation \mathbf{n} .

Le premier signal est dû à l'arrivée de la vibration quasi-longitudinale \mathbf{u}^1 (qui est généralement la plus rapide). Son intensité est relativement faible comme le cosinus entre \mathbf{u}^1 et \mathbf{n} est faible (mais non nul).

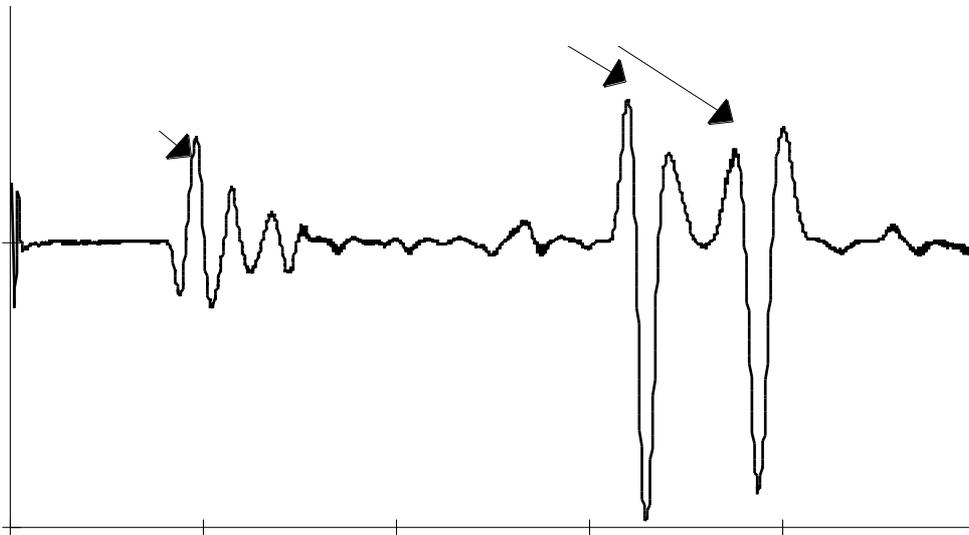


Figure 3-9. Trois signaux ultrasonores

Les signaux montrés sur la figure 3-9 ci-dessus sont révélateurs de la dispersion induite par le matériau étudié. Pour cette étude à caractère académique d'un matériau élastique linéaire, il aurait été plus judicieux de choisir un autre matériau que le bois dont la cellulose induit un comportement de type filtre passe-bas. Le choix du bois a néanmoins été retenu pour ses qualités de faible coût, d'usinabilité et de disponibilité en grandes épaisseurs, au contraire de la plupart des composites. Enfin, les roches ne présentent généralement pas une anisotropie aussi importante. Il serait intéressant de réaliser des campagnes de mesures sur des matériaux monocristallins massifs (par exemple sur du sel).

Mesure de la célérité par intercorrélation avec un signal de référence

Le signal émis par le transducteur correspond en général à une ou deux pseudo-périodes générées par la vibration amortie de la céramique piézo-électrique excitée par l'impulsion électrique de type "Dirac". Ce signal peut être visualisé à l'aide d'un transducteur au contact même du premier, ou, avec plus de précision, par une mesure dans un milieu très peu absorbant comme l'acier ou l'eau (pour les transducteurs longitudinaux). Hélas, dans notre

cas nous faisons des mesures sur le bois qui est un matériau dont la structure atténue les hautes fréquences. Le signal est donc déformé “vers les basses fréquences”. D’autre part, l’électronique étant très “choquée” par l’impulsion 220V de l’émission, le zéro temporel est peu fiable. Ceci nous empêche d’utiliser la mesure tête à tête pour définir le zéro temporel (Thomas, 1995).

Pour mesurer avec une précision correcte la célérité de l’onde, nous établissons un signal de référence à l’aide d’une cale à deux épaisseurs L et $2L$ réalisée, elle aussi, en bois de façon à avoir la même atténuation. L’instant $t=0$ est choisi comme étant le début du signal “fantôme” correspondant au signal qui existerait si l’onde était propagée depuis la continuité du matériau plutôt que par un transducteur.

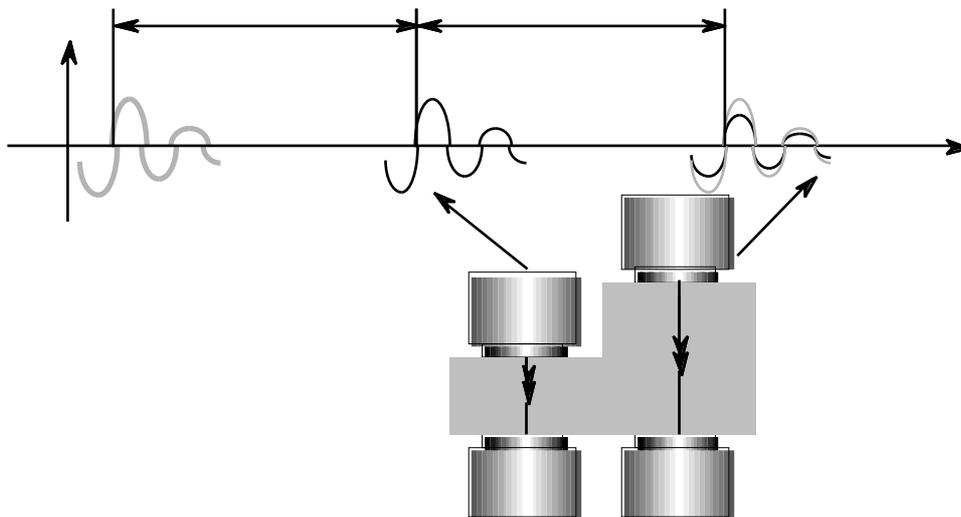


Figure 3-10. Création du signal de référence

Si l’on nomme F_1 la fonction obtenue pour le signal 1 et F_2 celle pour le signal 2, la fonction d’intercorrélation à maximiser pour obtenir t est :

$$f(t) = \int_0 F_1(t - t) F_2(t) dt \quad 3.3-5$$

La formule est discrétisée et programmée, ainsi que toutes les routines de traitement du signal, sur un micro-ordinateur PC[®] sur le logiciel Turbopascal[™]. Ces travaux ont fait l’objet d’un stage ingénieur de 10 mois (Pochert, 1994).

Pour la mesure des célérités de chacune des polarisations, on procède de même avec une intercorrélation entre le signal de référence (un par transducteur et par matériau) et le signal mesuré. Bien sûr, de nombreuses sorties visuelles et une délimitation manuelle de la zone du signal réel à étudier sont prévues pour permettre à l’opérateur d’isoler le “bon” signal de ses interférences avec les autres ou de tous les phénomènes parasites.

Mesure de la polarisation par interpolation au voisinage du maximum de réception

Comme nous l’avons vu au chapitre précédent décrivant la tension fournie par le capteur, celle-ci est théoriquement proportionnelle au carré du produit scalaire $\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{m}$. En effet, nous avons, dans le cas du transducteur transversal émettant une vibration \mathbf{m} de composantes

$\mathbf{m}(0, \cos \alpha, \sin \alpha)$ dans le repère de l'éprouvette :

$$(\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{m})^2 = \cos^2 \alpha_i \cos^2(\alpha - \alpha_i) \quad 3.3-6$$

L'angle de polarisation α peut être recherché manuellement en réglant l'appareil pour avoir l'intensité maximale. Néanmoins ce procédé est peu précis comme la fonction \cos^2 est très "ronde" à son maximum. Une alternative est de rechercher la disparition du signal lorsque $\alpha = \alpha_i + \pi/2$. L'autre est de mesurer un grand nombre de points et de calculer le maximum de la fonction suivante (équ. 3.3-7) qui s'approche au mieux des points expérimentaux. La fonction recherchée dépend de l'intensité I_i de la polarisation i mesurée et de l'angle recherché α :

$$I = I_i \cos^2(\alpha - \alpha_i) \quad 3.3-7$$

L'angle α_i recherché et l'intensité I_i sont fournis par la recherche du minimum du carré de l'écart entre les points expérimentalement mesurés (I_k, α_k) et leur correspondant d'après la formule ci-dessus :

$$\min_{I_i, \alpha_i} (I_k - I_i \cos^2(\alpha_k - \alpha_i))^2 \quad 3.3-8$$

Dans la pratique, la non linéarité du transducteur et de la chaîne de mesure nous a amenés à modifier cette corrélation. La fonction expérimentalement observée est en \cos^4 . Ceci ne change rien à l'étude précédente. L'expérience prouve que la zone de mesure des points expérimentaux doit être très réduite autour du maximum ; en effet, à cet endroit le signal quasi-transverse étudié est peu perturbé par l'autre qui est généralement proche de son minimum. Enfin, la mesure de ces points (I_k, α_k) doit être faite dans un temps relativement court afin de ne pas changer les conditions d'interface entre les transducteurs et l'éprouvette qui sont une donnée cruciale lors de la mesure d'une intensité de réception.

3.3.3 Justification, forme et réalisation de l'éprouvette à 26 facettes

Nombre minimal de facettes ; conditions de résolution

Pour une direction de propagation \mathbf{n} donnée (donc une paire de facettes parallèles donnée), nous pouvons mesurer cinq grandeurs (deux angles de polarisation α_2 et α_3 et trois vitesses de phase V_1, V_2, V_3) à chaque mesure. D'autre part, deux angles de déflexion α_2 et α_3 inconnus apparaissent pour cette même mesure. Notre objectif étant de trouver le tenseur de rigidité \mathbb{C} , l'idée de base est d'utiliser un maximum de tenseurs de Christoffel relatifs à des directions \mathbf{n} différentes. Sur les six grandeurs représentées par le tenseur de Christoffel, cinq sont donc mesurées, restent inconnus les deux angles de déflexion α_2 et α_3 des ondes quasi-transversales, l'angle de polarisation α_1 et l'angle de déflexion α_1 de l'onde quasi-longitudinale. Enfin, deux équations supplémentaires sont fournies par l'hypothèse que nous ferons (au moment du calcul de \mathbb{C}) d'orthogonalité de \mathbf{u}^1 par rapport au plan $(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3)$. Chaque essai fourni donc trois équations. Le nombre de mesures complètes E minimal pour déterminer les 21 composantes de \mathbb{C} est donc de sept.

$$E = 7 \quad 3.3-9$$

Nous devons disposer d'une éprouvette disposant d'au moins sept paires de facettes parallèles. Le nombre de mesure augmentera la précision obtenue sur les coefficients C_{ijkl} .

Enfin, comme nous avons pu le vérifier sur des programmes de simulation de mesures pour voir l'influence des paramètres expérimentaux, la précision est fortement dépendante de l'indépendance des directions mesurées \mathbf{n} .

Forme de l'éprouvette

Les éprouvettes utilisées classiquement (Arts, 1993) ont neuf paires de facettes. Celles-ci sont disposées orthogonalement aux :

- trois axes $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ de l'éprouvette : ce sont les facettes **primaires** {A,B,C}
- six bissectrices de ces axes : ce sont les facettes **secondaires** {I,J,K,L,M,N}.

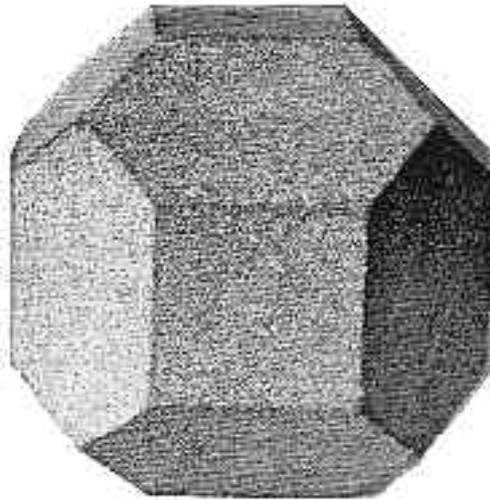


Figure 3-11. éprouvette à neuf paires de facettes (Arts, 1993)

Afin de mieux balayer la sphère unité, nous avons préféré utiliser une éprouvette sur laquelle nous avons rajouté, par rapport à la précédente, quatre facettes proches des trisectrices des axes. Pour en simplifier l'usinage, ce ne sont pas les trisectrices, mais la rotation de $\pi/4$ du faisceau de bissectrices autour d'un axe privilégié : le vecteur \mathbf{x}^3 .

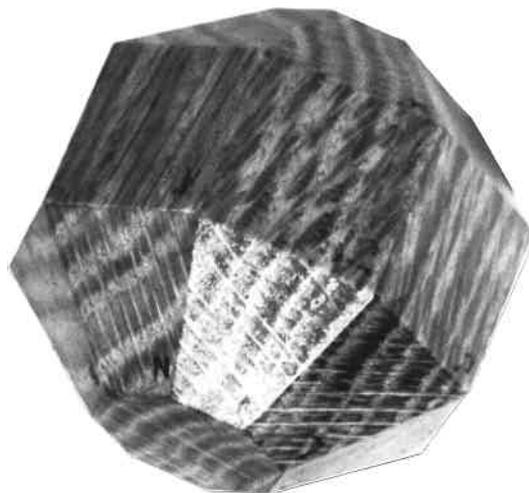


Figure 3-12. éprouvette à 13 paires de facettes

Cette réalisation nous rajoute alors quatre paires de facettes **tertiaires** { , , , }. Soient, au bilan vingt-six facettes parallèles deux à deux et recouvrant assez bien l'ensemble des

directions de l'espace. Bien sûr, afin de préserver la nature même de l'étude, l'éprouvette n'est pas taillée dans ses directions naturelles de symétrie (sauf dans le cas des premières éprouvettes réalisées en sippo et en hêtre qui constituaient une approche de faisabilité). Néanmoins celles-ci sont visibles à l'œil nu sur le matériau bois. Elles serviront de confirmation de la validité des résultats sur l'étude des symétries.

Dimensionnement

Outre le nombre maximal de facettes, l'autre contrainte sur la forme de l'éprouvette est de la réaliser de dimension minimale afin de conserver un signal ultrasonore d'énergie suffisante. Une fois choisie la forme de l'éprouvette, sa dimension globale est régie par la dimension du transducteur qui doit s'inscrire dans la plus petite facette pour éviter les effets de bord.

Pour l'éprouvette classique à 18 facettes, les facettes les plus exigües sont celles correspondant aux bissectrices ; le calcul de leur largeur impose la relation suivante, dans laquelle e est la largeur de l'éprouvette et d le diamètre du transducteur :

$$e = \frac{d}{2(\sqrt{2} - 1)} \quad 3.3-10$$

Pour un transducteur Panametrics[®], $d=15\text{mm}$ et donc $e = 36,2\text{mm}$.

Pour l'éprouvette à 26 facettes, les facettes secondaires ou tertiaires sont les plus exigües et le calcul du point de tangence d'un cercle, centré sur la normale passant par l'origine du repère, fournit la condition suivante :

$$e = d \sqrt{\frac{1041 - 736\sqrt{2}}{775 - 548\sqrt{2}}} \quad 3.3-11$$

Pour le même transducteur Panametrics[®], $d=15\text{mm}$, la condition donne $e = 53,3\text{mm}$. Bien que cette dimension soit globalement une fois et demie plus grande que la précédente, cette épaisseur est encore suffisamment faible pour avoir de bonnes conditions de réception des ultrasons. Les éprouvettes en chêne et en hêtre ont été réalisées avec une largeur de 55mm. Une éprouvette en sippo de 45mm a aussi été essayée, mais elle n'a pas permis d'obtenir des signaux d'aussi bonne qualité. Enfin, une éprouvette en monocristal de superalliage base nickel (aubage de turboréacteur) est en cours de réalisation dans le cadre d'une collaboration avec le Centre des Matériaux de l'école des Mines.

Usinage

Le lecteur aura compris que l'usinage a conditionné le choix du matériau et quelque peu la forme de l'éprouvette. Il a été réalisé sur une fraiseuse de l'E.N.S. avec une fraise deux tailles de 60mm de diamètre. La vitesse de coupe a été choisie maximale, en fonction des capacités de la (vieille) machine et l'avance d'environ 0,05mm par dent pour avoir une surface de bonne qualité. L'ensemble de la pièce ne nécessite, contre toute apparence, que deux cotes de réglage pour la machine dont une en fonction du rayon du cylindre de réglage r :

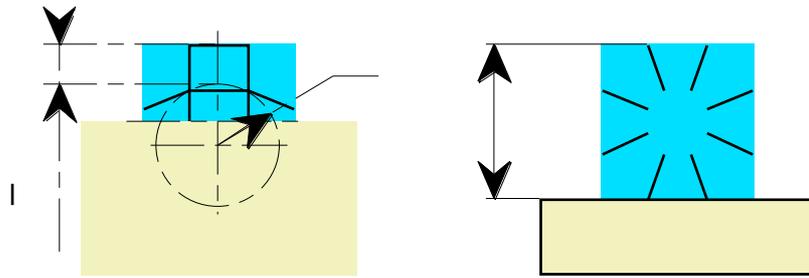


Figure 3-13. Usinage de l'éprouvette

L'usinage commence par celui d'un cube, avec les précautions nécessaires pour garantir l'orthogonalité, puis une mise sur vé pour réaliser la première facette secondaire. De même, une autre mise sur vé est nécessaire pour réaliser la première facette tertiaire. L'ensemble demande environ une après midi à un usineur peu confirmé...

La finition de l'éprouvette est obtenue par un vernissage au vernis à parquets, un ponçage au papier de verre 400, une seconde couche de vernis et un étuvage à 40 degrés. Cette opération a pour but d'étancher l'éprouvette afin de :

- garantir un taux d'humidité du bois constant (prépondérant dans sa masse volumique)
- assurer une bonne interface entre transducteur et bois
- éviter au couplant (miel) de pénétrer dans le bois.

Numérotation des facettes

La table ci-dessous donne les normales sortantes des facettes dans la base $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$. La facette opposée à F est nommée F'.

A	B	C	I	J	K	L	M	N				
1.0000	0	0	0	0.7071	0.7071	0	0.7071	-0.7071	0.5000	-0.5000	-0.5000	0.5000
0	1.0000	0	0.7071	0	0.7071	0.7071	0	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
0	0	1.0000	0.7071	0.7071	0	-0.7071	0.7071	0	0.5000	0.5000	-0.5000	-0.5000

Table 3-1. Normales aux facettes dans la base de l'éprouvette

3.3.4 Description du montage ultrasonore



Figure 3-14. Montage ultrasonore et micro-ordinateur

Le chapitre 3.3.2 "Description d'une mesure" nous impose certaines contraintes auxquelles

devra répondre le montage ultrasonore ; les voici, ainsi que les solutions proposées. Le dessin d'ensemble du montage est fourni en annexe.

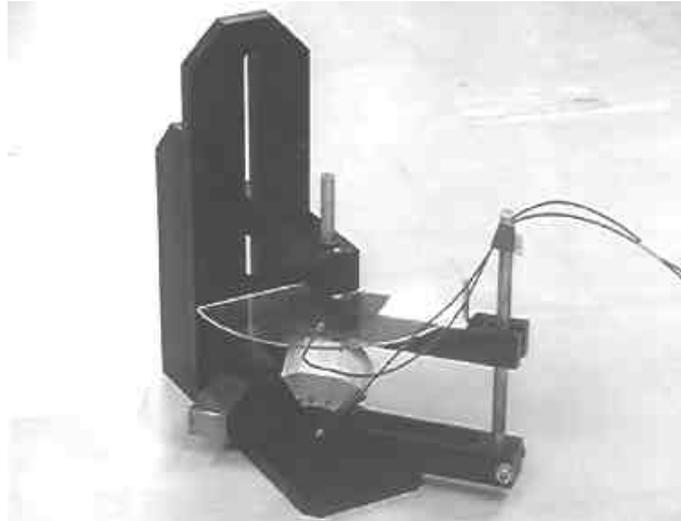


Figure 3-15. Montage ultrasonore et éprouvette

Réglage et mesure de l'angle de polarisation dans le cas du transducteur transversal.

Deux bras couplés maintiennent les transducteurs. Le parallélisme est assuré par une tige verticale. La mesure de l'angle dans le repère du montage $\{X^1, X^2, X^3\}$ est effectuée sur un rapporteur gradué fixé précisément sur la traverse supérieure du bâti. L'éprouvette est maintenue en place par un vé fixé sur le bâti. Pour chaque facette mesurée correspond une position précise et une table contenant les 13 changements de repères nécessaires est utilisée pour ramener les données dans le repère de l'éprouvette.

Installation de transducteurs de diamètre différent.

Deux jeux de bras couplés sont prévus ; le démontage est aisé.

Installation de différentes tailles d'éprouvette.

Deux vé existent : un pour les éprouvettes de 55mm et une autre pour les éprouvettes de 45mm. D'autre part, le vé et le bras supérieur sont montés dans une lumière afin de permettre le réglage pour d'autres formes d'éprouvettes.

Pression de contact bien uniforme et constante lors de la mesure

Cette condition (indispensable lors de la recherche du maximum de réception pour déterminer l'angle) est réalisée d'une part par la masse d'environ deux kilogrammes posée au sommet du montage et d'autre part par une "suspension" des transducteurs réalisée par deux joints toriques : l'un réalise une liaison plane souple (sous le transducteur) et l'autre assure une liaison linéaire-annulaire (autour du transducteur). Le repérage en rotation est assuré par une rainure guidant le connecteur. L'ensemble est réalisé en aluminium anodisé.

3.3.5 Mesures expérimentales

Une campagne de mesures ultrasonores dure environ une journée. L'expérimentateur doit interpréter de nombreux signaux "litigieux" (voir le chapitre 3.3.2).

Post-traitement

à l'issue d'une campagne d'essais sur un échantillon, l'opérateur reporte dans son compte-rendu l'ensemble des mesures qu'il a été capable de réaliser. Il doit aussi indiquer celles pour lesquelles il a un doute. Le premier traitement des données est effectué avec l'ensemble de ces mesures.

à l'issue du traitement numérique, un premier tenseur de rigidité \mathbb{C} est obtenu. Il permet de calculer simplement, par traitement du problème direct (équ. 3.1-11, 12 et 13) les vitesses de phase et d'énergie de chaque mode. Si une vitesse de phase calculée est trop différente de celle qui fut mesurée ou si la vitesse d'énergie forme un angle plus grand que l'angle limite α_{lim} , alors la mesure est remise en cause, déclarée invalide, conservée si le signal est tout à fait sûr et en tous cas refaite. Il est arrivé en effet de découvrir un signal très faible à l'endroit indiqué par le calcul.

Transducteurs

Les mesures ci-dessous ont été effectuées avec les transducteurs suivants :

- Panametrics V103 1 MHz longitudinal
- Panametrics V153 1 MHz transversal.

Le choix de la fréquence relativement basse de 1 MHz se justifie pour que :

- les ultrasons ne "voient" pas les défauts (longueur d'onde de quelques mm)
- la filtration des hautes fréquences ne déforme pas trop le signal. La bande passante de ces capteurs est de 0,5 MHz.

Précision des mesures

Celle-ci est très difficile à évaluer. La précision de mesures en vitesses dépend essentiellement de l'élargissement du signal à cause de l'absorption des hautes fréquences. Même si la technique de détermination du zéro temporel (chapitre 3.3.2) par la cale à deux épaisseurs diminue l'incertitude, cette absorption varie en fonction de la direction de mesure. Néanmoins une bonne répétabilité des mesures a été constatée expérimentalement. En comparant la largeur du signal à celui de référence et au temps de parcours, j'ai pu estimer l'erreur commise à environ 3%.

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 3\%$$

La précision angulaire obtenue sur les angles de déflexion est estimée à partir de l'allure de l'intensité du signal au voisinage du maximum de réception. Je l'estime à environ 3° de part et d'autre. Soit, pour une plage de 180° :

— 3%

Il est évident que cette étude pourrait être affinée. Il serait possible de valider cette précision sur des matériaux connus à l'avance.

Chêne

Masse volumique : 0,953 g/cm³

Facettes	A	B	C	I	J	K	L	M	N				
V ₁	1953	4387	1740	2431	1671	2923	2139	2202	2314	2553	2673	1915	2561
V ₂	1312	1403	1216	1343	1172	1430	1297	1388	1376	1169	1505	1252	1478
2	1	62	102	68	4	27	54	60	51	50	64	49	52
V ₃	853	1151	878	1064	810	1011	992	821	978	1120	951	-	955
3	83	153	10	157	100	154	150	155	150	141	141	-	127

Table 3-2. Mesures expérimentales sur le chêne. Vitesses en m/s et angles en degrés

Hêtre

Masse volumique : 0,8976 g/cm³

Facettes	A	B	C	I	J	K	L	M	N				
V ₁	1741	4726	2327	3200	-	-	3151	1883	-	3600	-	2800	3600
V ₂	1594	1932	1939	1982	1773	1681	1993	1656	1530	1880	1681	1730	1725
2	176	163	88	53	12	125	34	5	136	75	53	47	36
V ₃	906	1582	882	-	993	1550	1930	1005	1564	1747	1628	-	1338
3	88	74	177	-	90	35	127	97	46	140	140	-	126

Table 3-3. Mesures expérimentales sur le hêtre. Vitesses en m/s et angles en degrés

Nous remarquons la présence de six mesures incomplètes dans cette table. Certaines ont été éliminées, considérées comme aberrantes au niveau du post-traitement.

Sippo

Masse volumique : 0,585 g/cm³

Facettes	A	B	C	I	J	K	L	M	N				
V ₁	1900	1536	5200	-	2700	1524	2460	2762	1942	-	2100	1726	-
V ₂	1338	1133	1364	1382	1562	2120	1400	1420	1341	1350	1570	1564	1260
2	85	7	27	66	86	144	55	110	142	109	66	105	180
V ₃	838	800	1200	1447	1088	760	1000	1047	810	1318	1200	1450	1250
3	173	90	137	156	177	55	140	22	56	20	178	15	88

Table 3-4. Mesures expérimentales sur le sippo. Vitesses en m/s et angles en degrés

Cette campagne de mesures a fait l'objet d'un projet pratique en laboratoire de D.E.A. (Brismalein, 1995).

3.3.6 Méthodes existantes de traitement des données ultrasonores

Nous allons, dans ce chapitre, faire un aperçu des méthodes existantes de traitement des données ultrasonores. Voici un bref descriptif des méthodes présentées :

- Celle de Van Bursirk, Cowin et Carter (1986) nécessite la connaissance complète de six propagations sur des directions bien précises.
- Celle d'Arts (1993) ou d'Harder (1985) s'accommode de directions de propagation quelconques, en nombre quelconque, mais l'information de la mesure de l'angle de polarisation est perdue dès le premier pas de calcul.
- Celle de Neighbourgs et Schacher (1967) ne nécessite que la connaissance des vitesses de propagation mais ne semble utilisable que dans le cas où la symétrie du matériau est connue.
- La méthode de Klima (1973) est en fait la continuité de la précédente et elle propose une résolution dans le cas général.
- Nous proposons enfin dans le chapitre suivant une autre méthode de résolution qui permet de trouver le tenseur \mathbb{C} qui correspond le mieux aux données expérimentales tout en permettant d'utiliser le maximum d'informations disponibles.

D'autre part Ditri (1994) montre que 15 constantes élastiques peuvent être déterminées par la connaissance de mesures acoustiques relatives à des directions de propagation contenues dans un seul plan, et 20 si les directions de propagation sont contenues dans deux plans distincts. Ces résultats sont importants dans le cas où le matériau est utilisé sous forme de plaque ou coque mince, où le nombre de constantes élastiques est plus faible.

Méthode de Van Bursirk, Cowin et Carter

Van Bursirk, Cowin et Carter (1986) proposent de déterminer les vingt et une composantes de \mathbb{C} à l'aide d'une campagne de mesures sur six directions (trois axes orthonormés et leur trois bissectrices), en supposant mesurables les directions de vibration des particules \mathbf{u}^i . Cette approche est présentée sur le plan purement théorique.

La connaissance de ces directions de vibrations n'est pas possible avec des transducteurs à ultrasons traditionnels, mais le sera peut-être un jour à l'aide d'autres méthodes expérimentales, comme l'interférométrie laser (Royer et Dieulesaint, 1989). Pour l'instant, ces appareillages ne sont pas assez sensibles pour capter le déplacement de matière sur la surface d'une éprouvette.

Le tenseur de Christoffel est alors totalement identifiable sous la forme suivante :

$$= \sum_{i=1}^3 (V_i)^2 \mathbf{u}^i \otimes \mathbf{u}^i \quad 3.3-12$$

La détermination de \mathbb{C} est alors possible d'après l'autre forme de $(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n})$; la méthode consiste à choisir des directions de propagation \mathbf{n} astucieuse. Par exemple $\mathbf{n}=(1,0,0)$ donne directement six coefficients :

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} & & 11 & 12 & 13 \\ C_{16} & C_{66} & C_{56} & = & 12 & 22 & 23 \\ C_{15} & C_{56} & C_{55} & & 13 & 23 & 33 \end{matrix} \quad 3.3-13$$

Certaines composantes sont obtenues deux fois (on a 36 équations au cours de ces 6 essais), il est bien sûr possible de tirer profit de cette redondance pour minimiser l'influence des erreurs de mesure, plutôt que de privilégier arbitrairement certains .

Méthode d'Arts

Pour déterminer les vingt et une composantes de \mathbb{C} , Arts (1993) propose d'utiliser le tenseur de Christoffel sous une forme deux fois contractée avec chacune des trois directions de vibration \mathbf{u}^i ; ce qui donne, compte tenu de l'orthogonalité des \mathbf{u}^i :

$$\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^i = (V_i)^2 \quad 3.3-14$$

Chaque équation est linéaire en C_{ijkl} et E essais fournissent 3E équations. Le nombre minimum de mesures complètes est de sept.

$$E \geq 7 \quad 3.3-15$$

On peut donc la réécrire sous une forme matricielle en utilisant une contraction qui fait correspondre à chacun des indices ijkl indépendants de \mathbb{C} un indice K :

$$X_{ei}^K \cdot C_K = M_{ei} \quad 3.3-16$$

Dans cette écriture, l'indice ei représente la polarisation i de l'essai e. Ce système n'a en général plus de solution pour plus de 7 mesures complètes (la matrice X possède alors plus de 21 lignes) et Arts détermine \mathbb{C} en minimisant l'écart quadratique suivant :

$$E \sum_{ei=1} M_{ei}^2 - \sum_{K=1}^{21} X_{ei}^K \cdot C_K \quad 3.3-17$$

Le tenseur \mathbb{C} obtenu est celui pour lequel les vitesses $(V_i)^2$ expérimentales "collent" au mieux avec leurs homologues issues de \mathbb{C} . Les angles de déflexion θ_i inconnus sont initialisés à 0 pour les ondes quasi-transversales et $\pi/2$ pour les ondes quasi-longitudinales. De nouvelles directions de vibration \mathbf{u}^i sont obtenues à partir du problème direct (en diagonalisant le tenseur de Christoffel $\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n}$ issu du \mathbb{C} obtenu). Un nouveau \mathbb{C} est calculé d'après ces directions \mathbf{u}^i et ainsi de suite. L'information contenue dans les angles de polarisation θ_i est donc perdue dès la première itération.

Méthode de Neighbours et Schacher

Seules les vitesses V_i sont supposées mesurées dans cette approche. Cela est surprenant car la détermination des angles de polarisation θ_i s'effectue presque simultanément à l'aide de transducteurs transversaux. Neighbours et Smith (1950) pour les matériaux à symétrie cubique puis Neighbours et Schacher (1967) dans le cas général proposent de trouver \mathbb{C} en utilisant un repère local, $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ choisi tel que l'onde se propageant alors suivant $\mathbf{x}^1 = \mathbf{n}$. Le tenseur de Christoffel s'écrit alors dans ce repère local (composantes \underline{C}_{ij} de \mathbb{C} exprimé dans le repère local $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ en contraction de Voigt) :

$$\begin{pmatrix} 'C_{11} & 'C_{16} & 'C_{15} \\ 'C_{16} & 'C_{66} & 'C_{56} \\ 'C_{15} & 'C_{56} & 'C_{55} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 (V_i)^2 \mathbf{u}^i \mathbf{u}^i \quad 3.3-18$$

Ce qui revient à résoudre (en ' C_{ij} ') le système (équation 4 dans l'article) :

$$\begin{vmatrix} 'C_{11} - (V_i)^2 & 'C_{11} & 'C_{15} \\ 'C_{16} & 'C_{66} - (V_i)^2 & 'C_{56} \\ 'C_{15} & 'C_{56} & 'C_{55} - (V_i)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad 3.3-19$$

La solution de ce système, obtenue par méthode de perturbation, donne les ' C_{11} ', ' C_{66} ' et ' C_{55} ' en fonction des ' $(V_i)^2$ ' (mesurés) et des autres termes de la matrice ci-dessus, par exemple :

$$'C_{11} = (V_i)^2 - \frac{'C_{15}^2}{'C_{11}'C_{55}} + \frac{'C_{16}^2}{'C_{11}'C_{66}} + \frac{2'C_{15}'C_{16}'C_{56}}{('C_{11}'C_{55})('C_{11}'C_{66})} + \dots \quad 3.3-20$$

Si l'on ne connaît pas du tout le matériau ou s'il est triclinique, on doit trouver le tenseur \mathbb{C} qui permet de vérifier au mieux toutes les équations précédentes. La résolution numérique de ce problème semble être très complexe et coûteuse. Si, par contre on a des informations (analyse cristallographique...), les auteurs proposent des directions de propagation offrant des modes purs ou semi-purs permettant d'avoir de nombreuses simplifications: certains C_{ij} non diagonaux deviennent nuls.

Cette méthode est surtout adaptée pour un matériau à symétrie connue avec un nombre d'essais minimal et la mesure des seules vitesses de propagation. La convergence de la méthode a été étudiée (Neighbours, 1980).

Méthode de Klima

Cette méthode (Klima, 1973) est une extension de celle de Neighbours et Schacher. Elle utilise aussi un repère local $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ pour écrire le tenseur de Christoffel et \mathbf{x}^1 est toujours choisi égal à \mathbf{n} , direction de propagation. Dans le repère orthonormé de vibration des particules $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3\}$, le tenseur de Christoffel est diagonal :

$$= \begin{pmatrix} (V_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (V_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (V_3)^2 \end{pmatrix} \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\} \quad 3.3-21$$

On rappelle la formule de changement de repère pour tenseur du second ordre, de la base $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3\}$ à la base $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$:

$$'_{ij} = U_{ip} U_{jq} \mathbf{u}^p \mathbf{u}^q \quad 3.3-22$$

avec U matrice de passage $U_{ip} = \mathbf{u}^j$ i-ème composante de \mathbf{u}^j dans la base $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$.

Comme $\mathbf{x}^1 = \mathbf{n}$ est proche (onde quasi-longitudinale) de \mathbf{u}^1 , $U_{1p} \approx \delta_{1p}$ et donc $'_{11} \approx \mathbf{u}^1 \mathbf{u}^1$. Les auteurs proposent d'introduire un terme d'écart Z_1 a priori petit, il sera déterminé par itérations.

$$'_{11} = \mathbf{u}^1 \mathbf{u}^1 + Z_1 = (V_1)^2 + Z_1 \quad 3.3-23$$

Finalement, les équations précédentes permettent d'écrire un système d'équation linéaires dans lesquelles les A_{ij} sont les composantes (connues) de la matrice de passage de la base-éprouvette $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ à la base locale $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$:

$$(V_1)^2 + Z_1 = A_{1i} A_{1j} A_{1k} A_{1l} C_{ijkl} \quad 3.3-24$$

Mais ces équations, quelque soit e, sont au maximum 15 à être indépendantes (compte tenu des symétries de \mathbb{C} , quinze termes seulement apparaissent). Il nous en manque encore six pour obtenir les vingt et une équations tant désirées.

Celles-ci sont obtenues en considérant la trace du tenseur de Christoffel qui donne, quel que soit le repère considéré :

$$\sum_{i=1}^3 (V_i)^2 = (C_{1111} + C_{2323} + C_{1212}) \quad 3.3-25$$

Les formules de changement de repère nous donnent cette fois-ci au maximum six équations linéaires indépendantes pour les composantes de \mathbb{C} dans le repère - éprouvette.

On dispose à présent de vingt et une équations linéaires pour trouver les C_{ijkl} . Au bilan nous devons :

- faire quinze essais indépendants donnant des vitesses longitudinales,
- faire six essais indépendants donnant les vitesses longitudinales et transversales,
- faire une première résolution avec les Z_1 nuls,
- reprendre les valeurs de Z_1 calculées par le problème direct (\mathbb{C}, \mathbf{n}) puis $(V_i)^2 - Z_1$ et recalculer les Z_1 jusqu'à convergence.

On peut, bien sûr augmenter le nombre de mesures, et rechercher le meilleur \mathbb{C} par méthode des moindres carrés pour augmenter la précision.

En conclusion cette méthode est adaptée à des essais où les seules vitesses sont mesurables. Dans notre cas nous nous priverions de l'information sur les polarisations qui nous permettra de minimiser le nombre d'essais ou d'avoir une plus grande redondance et d'améliorer la précision obtenue.

3.4 Nouvelle méthode de calcul du tenseur de rigidité

3.4.1 Mesures complètes : fonction de minimisation j

Minimisation de l'écart entre deux expressions du tenseur de Christoffel

Au cours des chapitres précédents (chap. 3.1), nous avons constaté qu'il existe deux expressions essentielles du tenseur de Christoffel \mathbb{C} . L'une d'elle (equ. 3.1-11) est composée de la direction de propagation connue \mathbf{n} et de l'inconnue \mathbb{C} . L'autre (equ. 3.3-12) contient les données expérimentales \underline{v}_i et \underline{V}_i que nous soulignons dès à présent pour les distinguer de leur valeur théorique (et la masse volumique ρ qui n'intervient que comme multiplicateur dans tout le problème). Les directions de propagation \underline{u}^i contiennent, en plus des données expérimentales \underline{v}_i , les inconnues α_i correspondant aux angles de polarisation. L'idée est de créer la fonction de minimisation j comme la norme euclidienne (pour l'invariance par le choix du repère) du tenseur d'écart \mathbf{K} entre ces deux expressions de \mathbb{C} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1}^3 (\underline{V}_i)^2 \underline{u}^i \underline{u}^i \quad 3.4-1$$

$$j = \frac{1}{2} \mathbf{K} : \mathbf{K} \quad 3.4-2$$

Les grandeurs \mathbf{K} et j sont évidemment nulles lorsque l'on atteint la solution pour les inconnues \mathbb{C} et α_i et si les données expérimentales \underline{V}_i et \underline{v}_i sont exemptes d'erreurs. La direction de vibration quasi-longitudinale \underline{u}^1 , non mesurable, est définie comme étant orthogonale aux autres directions de vibrations \underline{u}^2 et \underline{u}^3 ; ceci définit α_2 et α_3 .

$$\underline{u}^1 = \frac{\underline{u}^2 \times \underline{u}^3}{\|\underline{u}^2 \times \underline{u}^3\|} \quad 3.4-3$$

Comme il a été montré précédemment (chapitre 3.3.5) nous disposons, par mesure complète, des trois vitesses de phase V_1, V_2, V_3 et des deux angles de polarisation α_2 et α_3 . Les inconnues supplémentaires sont les trois angles de déflexion α_1 et β_1 . Enfin l'équation ci-dessus nous donne α_2 et α_3 en fonction des autres grandeurs. Soit au global trois données par mesure et donc un nombre minimal de sept essais.

Fonction de minimisation globale

Le tenseur \mathbb{C} recherché est celui qui minimise toutes les fonctions j relatives à chaque mesure. Nous définissons la fonction de minimisation globale J comme la somme de toutes les fonctions positives j^e de chaque essai e .

$$J = \sum_{e=1}^E j^e \quad 3.4-4$$

Nous pouvons bien sûr, à ce stade affecter certaines mesures plus fiables que d'autres d'un "poids" p^e afin d'augmenter leur influence dans la minimisation (et *vice versa*).

Stratégie de minimisation

La structure de j (en fait celle de \mathbf{K}) permet de séparer les variables : d'une part les 21 variables indépendantes de \mathbb{C} et d'autre part les 2E angles de déflexion ϕ_i . La minimisation sera faite itérativement par rapport à chaque groupe de variables (³). Nous rappelons que la notation (\cdot, \cdot) correspond aux indices (2,3) des modes quasi-transverses :

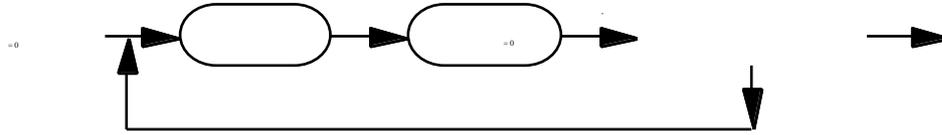


Figure 3-16. Algorithme

L'initialisation est faite en considérant les angles de déflexion nuls, ce qui correspond à la solution dans le cas du matériau isotrope. La sortie du programme se fait généralement en fonction de la vitesse de convergence V_{conv} . Nous précisons l'expression de celle-ci en fonction de la valeur de J aux pas de calculs $p-1$ et p :

$$V_{\text{conv}} = \frac{J_{p-1} - J_p}{J_p} \quad 3.4-5$$

Pratiquement, la valeur limite de V_0 est prise à 10^{-3} . Lors de calculs de vérification, nous créons des mesures à partir d'un tenseur \mathbb{C} préalablement connu ; celles-ci sont donc exemptes d'erreurs et un autre test de sortie du programme est prévu lorsque l'erreur J_p devient plus petite que 10^{-6} . Enfin, une sécurité limitant à 50 le nombre de pas de calculs est toujours souhaitable.

La gestion de ces itérations est assurée par un programme nommé *Optimisation* tandis que les routines *optimiseC* et *optimisePhi* se chargent respectivement de la première et de la seconde boîte de l'algorithme. L'ensemble a été programmé sur le logiciel *MatLab*[®] installé sur une station de travail *Hewlett-Packard*[®] HP715.

3.4.2 Minimisation de j par rapport au tenseur \mathbb{C}

Fonction globale G ; multiplicateurs de Lagrange

Ne considérer que les vingt et une variables indépendantes de \mathbb{C} conduit à des expressions très complexes lors des dérivations. Nous préférons considérer les quatre-vingt une variables représentées par C_{ijkl} et créer l'opérateur linéaire μ (du quatrième ordre) qui, contracté avec \mathbb{C} , représente les soixante conditions de symétrie de \mathbb{C} et les soixante multiplicateurs de Lagrange correspondants. Nous devons donc trouver le minimum (81 variables C_{ijkl} et 60 variables μ_j) de la fonction G suivante (Faurre, 1988) :

$$G(\mathbb{C}, \mu) = J(\mathbb{C}) + \mu :: \mathbb{C} \quad 3.4-6$$

Dans cette expression la contraction $\mu :: \mathbb{C}$ représente, une fois dérivée par rapport à μ , les soixante conditions de symétrie de \mathbb{C} :

$$\mu :: \mathbb{C} = \mu_1 (C_{1112} - C_{1121}) + \mu_2 (C_{1113} - C_{1131}) + \dots + \mu_{60} (C_{2333} - C_{3332}) \quad 3.4-7$$

³ La minimisation a néanmoins été tentée en considérant l'ensemble des variables comme un unique vecteur. Aucune méthode numérique essayée n'a convergé vers un quelconque résultat.

Le terme général μ_{ijkl} (auquel on associe un indice unique μ_I à l'aide d'une méthode présentée ci-dessous) de $\underline{\mu}$ dépend donc de la nature de l'indice $ijkl$:

- 0 pour un indice de référence qui ne possède pas d'indice miroir
- μ_I pour un indice de référence qui possède un indice miroir
- $-\mu_I$ pour l'indice miroir correspondant

Une condition nécessaire pour avoir ce minimum est que les dérivées partielles soient nulles :

$$\frac{dG}{dC} = 0 \quad (81 \text{ équations}) \quad 3.4-8$$

$$\frac{dG}{d\mu} = 0 \quad (60 \text{ équations}) \quad 3.4-9$$

Dérivée de G par rapport à l'opérateur $\underline{\mu}$

Dans la dérivée de cette expression par rapport aux μ_I nous retrouvons les soixante conditions de symétrie de \underline{C} . Par exemple :

$$\frac{dG}{d\mu_2} = C_{1113} - C_{1131} = 0 \quad 3.4-10$$

Ces équations sont linéaires en C_{ijkl} et peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$M_{IJ} \cdot \underline{C}_J = 0_I \quad 3.4-11$$

Dans cette écriture \underline{C} représente une écriture de \underline{C} sous forme de vecteur colonne. Nous proposons la correspondance suivante entre l'écriture canonique C_{ijkl} et l'écriture \underline{C}_I pour I compris entre 1 et 81 ; elle est basée sur l'écriture d'un nombre en base 3 et nommée ind :

$$I = \text{ind}(i,j,k,l) = 27(i-1) + 9(j-1) + 3(k-1) + (l-1) + 1 \quad 3.4-12$$

Nous détaillons maintenant la structure de l'opérateur $\underline{\mu}$; celui-ci fait correspondre un des C_{ijkl} "de référence" (c'est à dire les 21 grandeurs indépendantes) à ses homologues "miroirs" liés à lui par les relations de symétrie de \underline{C} . Un indice $ijkl$ est dit de référence s'il satisfait à la condition suivante (il est miroir si non) :

$$[i \ j] \ \& \ [k \ l] \ \& \ [(3(i-1)+j-1) \ (3(k-1)+l-1)] \quad 3.4-13$$

Ces inégalités correspondent à choisir comme indice de référence le plus petit des indices I concernés par les symétries.

La matrice M comporte donc 60 lignes (correspondant aux 60 indices miroirs) et 81 colonnes. L'indice I de l'équation correspond donc toujours à un groupe d'indices miroir $ijkl$. Le J varie, lui de 1 à 81. Le terme générique M_{IJ} vaut donc 1 si J est l'indice de référence correspondant au miroir I , -1 si $I=J$ (attention, ce n'est pas sur la diagonale...) et 0 ailleurs. La matrice M est calculée en début de programme.

Dérivée de G par rapport au tenseur \underline{C}

Nous pouvons de façon évidente, scinder cette dérivée sur les deux termes :

$$\frac{dG}{dC} = \frac{dJ}{dC} + \frac{d\underline{\mu} :: \underline{C}}{dC} \quad 3.4-14$$

Le premier membre, la dérivée de J, est en fait égal à la somme des dérivées des fonctions j de chaque mesure e. Nous avons (en fonction du tenseur **K** (équ. 3.4-1):

$$\frac{d j}{d C} = \mathbf{n} \mathbf{K} \mathbf{n} \tag{3.4-15}$$

Le second membre ne pose pas de difficultés :

$$\frac{d \mu :: C}{d C} = \mu \tag{3.4-16}$$

La nullité de ce gradient s'écrit finalement sous forme explicite (on indice en e les termes relatifs à la mesure e)

$$\sum_{e=1}^E \left(\mathbf{n}^e \cdot (\mathbf{n}^e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}^e) \cdot \mathbf{n}^e - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{V}_i)^2 \mathbf{n}^e \cdot \underline{\mathbf{u}}^{ie} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{ie} \cdot \mathbf{n}^e \right) + \mu = 0 \tag{3.4-17}$$

Soit encore, la même équation sous forme indicielle :

$$\sum_{e=1}^E \left(n_i^e n_p^e \cdot C_{pj kq} \cdot n_q^e n_l^e - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{V}_i)^2 n_i^e \underline{u}^{ie}_j \underline{u}^{ie}_k n_l^e \right) + \mu_{ijkl} = 0$$

Ces 81 équations sont linéaires en $C_{pj kq}$ et en μ_{ijkl} . Pour permettre une résolution rapide, nous les réécrivons sous forme matricielle. Le vecteur X est composé des 81 composantes de C et des 60 composantes de μ . Les multiplicateurs $n_i n_p n_q n_l$ de $C_{pj kq}$ sont regroupés dans la ligne $I = \text{ind}(i, j, k, l)$ et la colonne $J = \text{ind}(p, j, k, q)$ de la matrice N. De même, les termes $\sum_i (\mathbf{V}_i)^2 n_i \underline{u}^{ie}_j \underline{u}^{ie}_k n_l$ sont à la I-ème ligne du vecteur nommé D.

Enfin, pour l'équation correspondant à l'indice ijkl, le μ_I de référence correspondant sera multiplié par +1 et le μ_I miroir correspondant par -1 (s'ils existent). On retrouve alors la définition de la transposée de la matrice M précédente.

Résolution matricielle

Les réflexions ci-dessus nous amènent à construire la matrice carrée A (141 lignes et colonnes) et les vecteurs X et Y construits de la façon suivante :

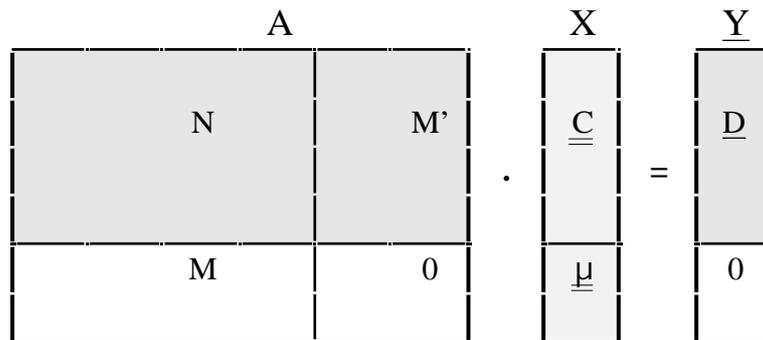


Table 3-5. Agencement de la résolution matricielle

On distingue en grisé la dérivée de G par rapport à C et en blanc la dérivée de G par rapport à μ . Le vecteur X est obtenu par résolution de ce système simple. Nous remarquons que seul le vecteur Y est à recalculer au cours des différents pas de l'optimisation car lui seul contient les termes $\underline{\mathbf{u}}^i$ qui vont être modifiés par la minimisation par rapport aux angles θ_i .

3.4.3 Minimisation de j par rapport aux angles de déflexion

Le second groupe de variables, les angles de déflexion (rappelons $(\alpha, \beta) = (2,3)$, les angles des polarisations quasi-transversales) ont une contribution non linéaire dans les fonctions de minimisation j . Ces dernières sont indépendantes les unes des autres par rapport aux α, β . Précisons le gradient de j par rapport à ces variables :

$$\frac{\partial j}{\partial \alpha} = -\mathbf{K} : \sum_{i=1}^3 (V_i)^2 (\underline{\mathbf{u}}^i \underline{\mathbf{u}}^i + \underline{\mathbf{u}}^i \underline{\mathbf{u}}^i) \quad 3.4-18$$

Nous devons distinguer le cas où i correspond à une direction quasi-transversale :

$$\underline{\mathbf{u}}^i = (-\sin \alpha \underline{\mathbf{m}} + \cos \alpha \underline{\mathbf{n}}) \quad 3.4-19$$

du cas, plus complexe, où i correspond à la direction quasi-longitudinale dont la définition la relie aux angles de polarisation α, β :

$$\underline{\mathbf{u}}^1 = \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{u}}^1 (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^1) \quad 3.4-20$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \frac{(\underline{\mathbf{u}}^2 \underline{\mathbf{u}}^3)}{\|\underline{\mathbf{u}}^2 \underline{\mathbf{u}}^3\|} \quad 3.4-21$$

Ce gradient est utilisé dans un algorithme B.F.G.S. pour trouver le minimum de j par rapport à α et β . Ces angles de déflexion optimisés sont alors utilisés pour définir de nouveau les directions de vibration $\underline{\mathbf{u}}^i$ qui seront utilisées dans le pas suivant de la minimisation, en \mathbb{C} . L'ensemble est programmé dans la routine `optimisePhi`.

3.4.4 Mesures incomplètes : fonction de minimisation h

Dans bien des cas, la mesure ne peut pas être complète comme nous l'avons détaillé dans le chapitre consacré aux mesures expérimentales. Nous traitons dans la suite du cas où deux polarisations sur trois ont pu être mesurées, nous avons nommé ceci une **mesure incomplète**.

Nouvelle fonction de minimisation h

La fonction de minimisation j précédente doit alors être adaptée. La polarisation inconnue sera notée k et nous la distinguerons des autres, mesurées nommées i et j . Nous définissons alors les composantes L_{ij} obtenue par la projection de \mathbf{K} sur l'espace généré par les directions "connues" $\underline{\mathbf{u}}^i, \underline{\mathbf{u}}^j$ correspondant aux mesures $\underline{\mathbf{m}}^i$ et $\underline{\mathbf{m}}^j$:

$$L_{ij} = (\underline{\mathbf{u}}^i \underline{\mathbf{n}}) : \mathbb{C} : (\underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{u}}^j) - ij \frac{V_i^2}{V_j^2} \quad 3.4-22$$

Afin de garder une structure homogène à celle de j (chapitre 3.4.3) sur les mesures complètes, nous définissons la fonction de minimisation h comme :

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij}^2 \quad 3.4-23$$

Cette définition correspond à $h = 1/2 (\mathbf{L} : \mathbf{L})$ si les \mathbf{u}^i forment une base orthonormée. Si la mesure quasi-transversale 3 est manquante nous pouvons éliminer l'angle de polarisation α_3 inconnu en imposant l'orthogonalité du trièdre \mathbf{u}^i . Cette définition génère pourtant deux solutions pour α_3 symétriques par rapport à α_2 qui sont fournies par l'équation suivante :

$$\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) = 0 \quad 3.4-24$$

Parmi ces deux solutions, nous retenons celle qui donne la valeur de h la plus faible. Considérant les trois données fournies par les L_{ij} indépendants et les deux inconnues α_i , la condition de résolution devient, en nommant F le nombre de mesures incomplètes :

$$4E+F \geq 21 \quad 3.4-25$$

Fonction globale G

Celle-ci doit maintenant tenir compte des fonctions de minimisation j des mesures complètes et des fonctions h des mesures incomplètes. Toutes sont additionnées ; les fonctions h ont naturellement un "poids" inférieur aux autres puisque ne faisant intervenir que la moitié des termes.

3.4.5 Minimisation de h

Minimisation de h par rapport au tenseur C

Les calculs précédents restent inchangés à part la dérivée de la fonction h qui devient :

$$\frac{h}{C} = \sum_{i,j}^{\text{connus}} L_{ij} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^j \cdot \mathbf{n} \quad 3.4-26$$

Il est à noter que, cette fois, le coefficient des C_{ijkl} dépend des \mathbf{u}^i et qu'il devra être recalculé à chaque itération. Le temps de calcul s'en trouve considérablement augmenté. Par contre les grandeurs C et μ sont toujours obtenues par simple résolution du problème $A.X = Y$.

Minimisation de h par rapport aux angles

Les fonctions h , toujours indépendantes les unes par rapport aux autres sont minimisées indépendamment par rapport au couple de variables α_i . Le gradient de h est fourni par :

$$\frac{h}{C} = \sum_{i,j}^{\text{connus}} L_{ij} (C :: (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^j \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^j \cdot \mathbf{n})) \quad 3.4-27$$

Le symbole $::$ représente la contraction sur les quatre indices. Comme précédemment, un algorithme B.F.G.S. est utilisé pour déterminer le minimum de h. Nous détaillons maintenant les dérivées de \mathbf{u}^i :

- si la polarisation inconnue est la quasi-longitudinale \mathbf{u}^1 , le calcul de cette dérivée reste le même que précédemment.
- si la polarisation inconnue est la quasi-transversale \mathbf{u}^3 , la dérivée de \mathbf{u}^2 reste la même que précédemment, mais \mathbf{u}^1 (supposé orthogonal à \mathbf{u}^2 et \mathbf{u}^3) et sa dérivée dépendent maintenant de la valeur de α_3 , elle-même déterminée par la variable α_3 obtenue d'après la

relation d'orthogonalité ci-dessus. Les relations suivantes apparaissent alors :

$$\frac{\mathbf{u}^1}{2} = -\sin \alpha_2 \mathbf{m}^2 \mathbf{u}^3 + \cos \alpha_2 \mathbf{n} \mathbf{u}^3 \quad 3.4-28$$

$$\frac{\mathbf{u}^1}{3} = -\sin \alpha_3 \mathbf{u}^2 \mathbf{m}^3 + \cos \alpha_3 \mathbf{u}^2 \mathbf{n} \pm \frac{\tan \alpha_2}{\cos \alpha_3} \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \alpha_2 \tan^2 \alpha_3}}$$

$$(\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_2) \mathbf{n} - \sin \alpha_2 \mathbf{m}^3) \quad 3.4-29$$

La valeur du symbole \pm est donnée par le choix du meilleur angle α_3 décrit ci-dessus. Le calcul, dans ce dernier cas, est considérablement plus long.

3.4.6 Performances du programme

Nous avons utilisé, pour simuler les mesures, un tenseur déterminé par Van Bursirk *et al.* (1990) et par Cowin (1990). C'est un tenseur orthotrope qui a été mesuré sur un fémur humain par méthode ultrasonore. Les mesures ultrasonores : vitesses V_i et directions de mesures \mathbf{m} ($i = 2,3$) sont fournies par résolution du problème direct (équations 3.1-11 et 12). Les directions de propagation \mathbf{n} correspondent à celles de l'éprouvette.

C _d	18	9.98	10.1	0	0	0
	9.98	20.2	10.7	0	0	0
	10.1	10.7	27.6	0	0	0
	0	0	0	6.23	0	0
	0	0	0	0	5.61	0
	0	0	0	0	0	4.52

Table 3-6. Tenseur orthotrope de l'os du fémur (GPa) d'après Cowin (1990)

Influence du nombre de direction de propagation (nombre de mesures E)

Nous décrivons ci-dessous l'influence du nombre de mesures complètes E (c'est à dire du nombre de directions de propagation \mathbf{n}) sur la précision du résultat. Le tableau présenté ci-après compare le tenseur obtenu et le tenseur ci-dessus.

Il est surprenant que le programme ait pu converger, vers des valeurs fausses toutefois, pour seulement 6 mesures (à 5 mesures, le calcul n'aboutit pas). Comme le précisait l'inéquation 3.3-9, sept mesures complètes est bien le minimum possible. Ceci a été confirmé par la simulation à partir d'un tenseur triclinique plus "difficile" à obtenir : le tenseur \mathbb{C}_0 ci-après pour lequel la convergence de l'algorithme est montrée figure 3-17. à partir de huit mesures, la solution est rapidement trouvée. Le nombre de mesures excédentaires a pour effet de diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision correcte.

nombre de mesures E	nombre d'itérations	écart relatif maximal entre deux valeurs	Différence en norme	Plus grande valeur du quadrant supérieur droit
6	13	$4 \cdot 10^{-2}$	6 %	jusqu'à 0.76 GPa
7	50	$2 \cdot 10^{-2}$	4.3 %	jusqu'à 0.61 GPa
8	42	$3 \cdot 10^{-4}$	0.02 %	$<4 \cdot 10^{-3}$ GPa
13	11	$8 \cdot 10^{-5}$	0.004 %	$<10^{-7}$ GPa

Table 3-7. Influence du nombre de directions de propagation

Influence de l'anisotropie

Pour étudier cette influence, nous avons créé un tenseur de rigidité tout à fait utopique, sans aucune symétrie (triclinique) et possédant des grandes valeurs dans les seconds et troisièmes quarts. Une analyse de ce tenseur à l'aide des figures de pôles présentées au chapitre 4 ne lui révèle qu'une "faible" tendance monoclinique.

	6	3	2	1	3	2
	3	7	4	2	1	3
C_0	2	4	8	2	3	4
	1	2	2	6	2	1
	3	1	3	2	5	2
	2	3	4	1	2	4

Table 3-8. Tenseur de référence C_0

En simulant une campagne de sept mesures, ce tenseur est retrouvé au bout de 171 itérations, avec une erreur globale finale de 0,0002 et un écart par rapport au tenseur ci-dessus n'excédant pas 0,03 "GPa". La convergence de l'erreur globale est de l'ordre d'une décade par 20 itérations.

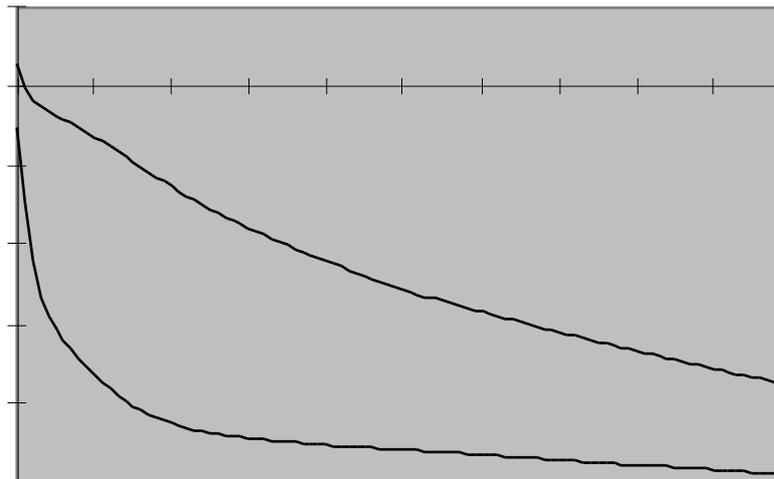


Figure 3-17. Erreur globale pondérée en fonction de nombre d'itérations

Le tenseur isotrope est retrouvé dès la première itération, comme les angles de déflexion α_i sont initialisés à leur valeur solution 0. La vitesse de convergence diffère en fonction de

l'anisotropie. Le tenseur \mathbb{C}_d est obtenu très rapidement avec une bonne précision tandis que le tenseur \mathbb{C}_o , très anisotrope est retrouvé au bout de plus nombreuses itérations. La figure ci-contre représente l'erreur globale pondérée (divisée par la norme du tenseur à retrouver), en fonction du nombre d'itérations.

Influence des erreurs de mesure

Le tenseur \mathbb{C}_d depuis lequel sont calculées les mesures est le tenseur relatif à l'os présenté ci-dessus (table 3-6). Il est comparé au tenseur \mathbb{C} obtenu après traitement des mesures bruitées : soit par une erreur systématique (mesure +3%) soit par une erreur aléatoire (mesure + une erreur sur $\pm 3\%$, avec une répartition équiprobable).

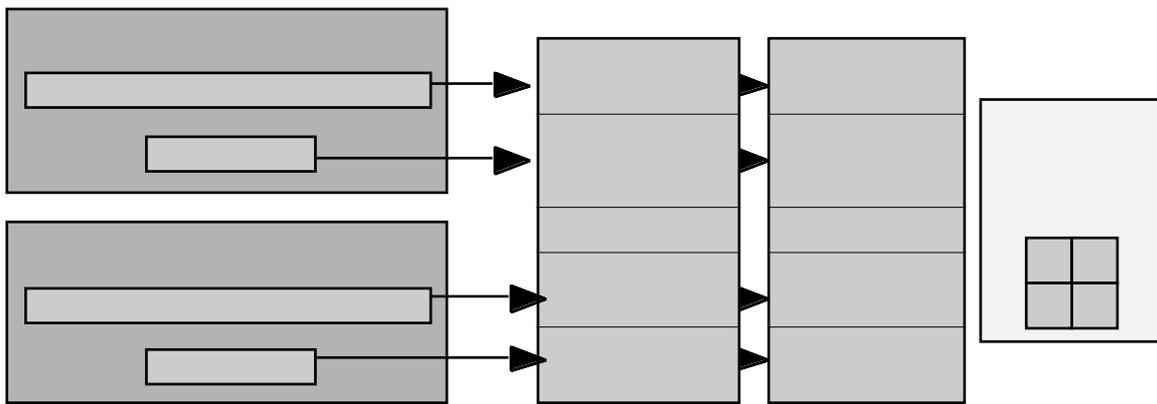


Figure 3-18. Influence des erreurs en vitesse et en polarisation

L'influence des erreurs systématiques de mesure des polarisations apparaît réduite de façon surprenante. La cause en est certainement la répartition des directions de mesure \mathbf{n} dans l'espace : les erreurs se compensent. Ceci ne serait pas vérifié dans le cas de mesures partielles. Les erreurs systématiques en vitesse ont une importance prédominante : le terme $(V_i)^2$ est présent dans l'ensemble du problème.

On notera la différence de comportement entre les termes non soulignés des second et troisième quarts dans T^{2s} , normalement nuls au niveau de la solution exacte (tenseur orthotrope) et les autres termes (soulignés). Les simulations effectuées sur \mathbb{C}_o montrent la plus grande difficulté à retrouver ces termes des second et troisième quarts.

D'autres tests d'erreur sur chaque mesure montrent que les mesures pour lesquelles nous avons des vitesses élevées sont prépondérantes. Ceci est normal puisque les fonctions de minimisation j et h font intervenir le carré de la vitesse $(V_i)^2$. Comme ces mesures sont souvent bonnes (souvent associées à une direction de symétrie), ceci ne semble pas être un inconvénient.

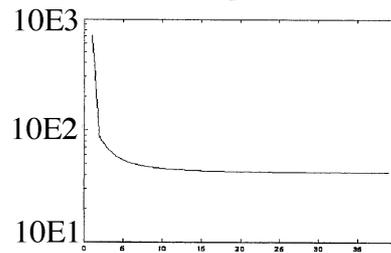
Cas réel

Figure 3-19. Convergence de G pour le tenseur du chêne (échelle logarithmique)

En pratique, une solution correcte dans le cas d'une campagne de mesures comportant une ou deux mesures incomplètes nécessite environ 1/2 heure (en une vingtaine d'itérations) sur la station HP[®]715 lorsque le réseau n'est pas trop chargé et moins de 5 minutes dans le cas de mesures complètes. La convergence est montrée figure 3-19 ; l'erreur globale tend asymptotiquement vers une valeur minimum non nulle.

3.5 Application sur les éprouvettes de bois

Tous les tenseurs sont exprimés dans la base $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ de l'éprouvette.

3.5.1 Chêne

Nous obtenons pour le chêne, dans le repère de l'éprouvette, en GPa :

$$\mathbb{C} \begin{vmatrix} 3,51 & 0,47 & 1,27 & -0,56 & -0,67 & -0,02 \\ 0,47 & 13,20 & 1,03 & 0,24 & -0,04 & -0,07 \\ 1,27 & 1,03 & 2,97 & 0,14 & -0,23 & -0,59 \\ -0,56 & 0,24 & 0,14 & 0,37 & 0,17 & 0,06 \\ -0,67 & -0,04 & -0,23 & 0,17 & 1,09 & -0,07 \\ -0,02 & -0,07 & -0,59 & 0,06 & -0,07 & 0,81 \end{vmatrix}$$

Table 3-9. Tenseur de rigidité du chêne

3.5.2 Hêtre

Nous obtenons pour le hêtre, dans le repère de l'éprouvette en GPa le tenseur suivant dont un module de Kelvin est négatif (tenseur non défini positif) :

$$\mathbb{C} \begin{vmatrix} 2,45 & 4,58 & 0,91 & -0,59 & 0,27 & 0,13 \\ 4,58 & 19,47 & 0,80 & 1,64 & -1,02 & -0,77 \\ 0,91 & 0,80 & 4,70 & 0,70 & 0,25 & -0,88 \\ -0,59 & 1,64 & 0,70 & 3,15 & 0,32 & -0,17 \\ 0,27 & -1,02 & 0,25 & 0,32 & 1,08 & -0,86 \\ 0,13 & -0,77 & -0,88 & -0,17 & -0,86 & 2,54 \end{vmatrix}$$

Table 3-10. Tenseur de rigidité du hêtre

3.5.3 Sippo

Nous obtenons pour le sippo, dans le repère de l'éprouvette en GPa le tenseur suivant dont un module de Kelvin est négatif (tenseur non défini positif) :

$$\mathbb{C} \begin{vmatrix} 2,31 & 0,26 & 0,18 & 0,28 & 0,09 & -0,25 \\ 0,26 & 1,54 & 1,23 & 0,19 & 1,02 & 0,05 \\ 0,18 & 1,23 & 12,32 & 1,63 & 0,15 & 0,01 \\ 0,28 & 0,19 & 1,63 & 0,53 & 0,51 & -0,02 \\ 0,09 & 1,02 & 0,15 & 0,51 & 0,38 & -0,11 \\ -0,25 & 0,05 & 0,01 & -0,02 & -0,11 & 0,61 \end{vmatrix}$$

Table 3-11. Tenseur de rigidité du sippo

3.6 Grès des vosges

3.6.1 Introduction

Les données ultrasonores proviennent des mesures d'Arts (1993) sur un échantillon de pierre : le grès des Vosges. Le dispositif de mesures ultrasonores utilisé à l'Institut Français du Pétrole est de meilleure qualité technique que celui qui a été décrit dans ce travail. L'éprouvette utilisée est décrite au chapitre 3.3.3. Les mesures consistent en sept mesures complètes.

3.6.2 Tenseur de rigidité brut

En utilisant la méthode présentée ci-dessus, nous obtenons le tenseur \mathbb{C} suivant :

$$\mathbb{C} \begin{vmatrix} 12,2 & -2,2 & 1,9 & 0,9 & 0,8 & -0,5 \\ -2,2 & 13,0 & 2,9 & 0,2 & -0,3 & 0,4 \\ 1,9 & 2,9 & 13,9 & 0,0 & -0,0 & 0,1 \\ 0,9 & 0,2 & 0,0 & 4,0 & 1,2 & 0,0 \\ 0,8 & -0,3 & -0,0 & 1,2 & 5,4 & 0,0 \\ -0,5 & 0,4 & 0,1 & 0,0 & 0,0 & 5,4 \end{vmatrix}$$

Table 3-12. Tenseur de rigidité du grès des Vosges (GPa)

Ce tenseur est obtenu pour une erreur j (définie au chapitre 3.4.2) globale de 2,51 GPa.

$$\mathbb{C} \begin{vmatrix} 10,3 & 0,9 & 1,3 & 1,4 & 1,1 & 0,8 \\ 0,9 & 10,6 & 2,1 & 0,2 & -0,2 & -0,6 \\ 1,3 & 2,1 & 14,1 & 0,1 & -0,5 & -1 \\ 1,4 & 0,2 & 0,1 & 5,1 & 0,1 & 0,2 \\ 1,1 & -0,2 & -0,5 & 0,1 & 6 & 0,1 \\ 0,8 & -0,6 & -1 & 0,2 & 0,1 & 4,9 \end{vmatrix}$$

Table 3-13. Tenseur de rigidité du grès des Vosges d'après Arts (GPa)

Le tenseur ci-dessus déterminé par la méthode d'Arts offre une erreur globale de 4,24 GPa. Remarquons que pour déterminer une erreur au sens de j à partir d'un tenseur de rigidité et des mesures, il faut rechercher les angles de déflexion qui minimisent les écarts j . La valeur de l'erreur globale n'est donc pas indicatrice de la qualité du résultat, au contraire de l'analyse du niveau de symétrie (chapitre 4).

3.7 Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet à ce jour d'une publication (François, 1996) et ont été présentés à l'occasion de congrès nationaux (François, 1995 A) et internationaux (François, 1995 B) et colloques (François, 1994 A et 1994 B).

La méthode ultrasonore détaillée ci-dessus est capable de donner le tenseur de rigidité d'un matériau anisotrope pour au moins sept mesures complètes. Le tenseur de rigidité obtenu, exprimé dans la base de l'éprouvette, nécessite d'être remis dans sa base naturelle, ce qui est l'objet du chapitre suivant.

La méthode expérimentale mériterait d'être améliorée. Il serait souhaitable de laisser la direction de propagation \mathbf{n} s'établir d'elle même (comme dans la méthode par immersion) et de pouvoir la mesurer. En effet, pour des matériaux aussi anisotropes que le bois, les vitesses d'énergies sont souvent bien éloignées des directions de propagation. Par contre, la méthode semble bien adaptée dans le cas de matériaux d'anisotropie plus faible comme les métaux.

Des développements futurs pourraient concerner les matériaux hétérogènes, par imagerie ou autre. La mesure de l'anisotropie induite par l'endommagement demande, à mon avis, un autre type de mesures que celles des vitesses, peu affectées par l'existence de micro-fissures. Il serait préférable de mesurer la fonction de transfert du matériau, et d'associer les grandeurs obtenues avec les vitesses des ondes. D'autres méthodes de mesures telles que la méthode d'immersion dans un milieu solidifiable (figure 3-2) me semblent à envisager et permettraient de rapprocher les méthodes actuelles par immersion et par contact.

3	DÉTERMINATION DU TENSEUR DE RIGIDITÉ PAR MESURES ULTRASONORES	16
3.1	Rappels sur la propagation des ondes	17
3.1.1	Propagation d'une onde plane en milieu homogène	17
3.1.2	équation de propagation en milieu élastique	17
3.1.3	Conditions d'existence d'un mode pur. Relation avec l'existence d'un plan de symétrie.	19
3.1.4	Expérimentations ultrasonores permettant d'accéder au tenseur de rigidité	20
3.2	Mesures par immersion	22
3.2.1	Présentation	22
3.2.2	Principe	22
3.2.3	Cas du matériau à symétrie inconnue	24
3.2.4	Conclusions et perspectives	25
3.3	Mesures par contact direct	26
3.3.1	Direction de propagation imposée : validation de l'hypothèse	26
3.3.2	Description d'une mesure	28
3.3.3	Justification, forme et réalisation de l'éprouvette à 26 facettes	32
3.3.4	Description du montage ultrasonore	35
3.3.5	Mesures expérimentales	37
3.3.6	Méthodes existantes de traitement des données ultrasonores	39
3.4	Nouvelle méthode de calcul du tenseur de rigidité	43
3.4.1	Mesures complètes : fonction de minimisation j	43
3.4.2	Minimisation de j par rapport au tenseur C	44
3.4.3	Minimisation de j par rapport aux angles de déflexion	47
3.4.4	Mesures incomplètes : fonction de minimisation h	47
3.4.5	Minimisation de h	48
3.4.6	Performances du programme	49
3.5	Application sur les éprouvettes de bois	53
3.5.1	Chêne	53
3.5.2	Hêtre	53
3.5.3	Sippo	53
3.6	Grès des vosges	54
3.6.1	Introduction	54
3.6.2	Tenseur de rigidité brut	54
3.7	Conclusions et perspectives	55

Figure 3-1. Onde plane	17
Figure 3-2. Mesures par immersion sur une sphère	19
Figure 3-3. Montage ultrasonore de mesures par transmission	22
Figure 3-4. Figure de lenteurs (d'après Audoin et al., 1991)	23
Figure 3-5. Réponse impulsionnelle locale d'un transducteur (selon Dieulesaint, 1989)	26
Figure 3-6. Mesure de la vitesse de phase V	27
Figure 3-7. Décomposition de la vibration émise	28
Figure 3-8. Angles de polarisation et de déflexion	29
Figure 3-9. Trois signaux ultrasonores	30
Figure 3-10. Création du signal de référence	31
Figure 3-11. éprouvette à neuf paires de facettes (Arts, 1993)	33
Figure 3-12. éprouvette à 13 paires de facettes	33
Figure 3-13. Usinage de l'éprouvette	35
Figure 3-14. Montage ultrasonore et micro-ordinateur	35
Figure 3-15. Montage ultrasonore et éprouvette	36
Figure 3-16. Algorithme	44
Figure 3-17. Erreur globale pondérée en fonction de nombre d'itérations	50
Figure 3-18. Influence des erreurs en vitesse et en polarisation	51
Figure 3-19. Convergence de G pour le tenseur du chêne (échelle logarithmique)	52
Table 3-1. Normales aux facettes dans la base de l'éprouvette	35
Table 3-2. Mesures expérimentales sur le chêne. Vitesses en m/s et angles en degrés	38
Table 3-3. Mesures expérimentales sur le hêtre. Vitesses en m/s et angles en degrés	38
Table 3-4. Mesures expérimentales sur le sippo. Vitesses en m/s et angles en degrés	38
Table 3-5. Agencement de la résolution matricielle	46
Table 3-6. Tenseur orthotrope de l'os du fémur (GPa) d'après Cowin (1990)	49
Table 3-7. Influence du nombre de directions de propagation	50
Table 3-8. Tenseur de référence C_0	50
Table 3-9. Tenseur de rigidité du chêne	53
Table 3-10. Tenseur de rigidité du hêtre	53
Table 3-11. Tenseur de rigidité du sippo	53
Table 3-12. Tenseur de rigidité du grès des Vosges (GPa)	54
Table 3-13. Tenseur de rigidité du grès des Vosges d'après Arts (GPa)	54

Arts 1993	39
Arts 1993	40
Arts 1993	54
Arts, 1993	21
Arts, 1993	33
Arts,1993	27
Ashman et al. 1984	49
Audoin et al. , 1991.....	24
Audoin et al., 1991.....	25
Audoin et Baste, 1994.....	24
Audoin, 1991	24
Baste et Hosten, 1990	24
Baste et Hosten, 1990	25
Brismalein, 1995.....	38
Brose et Eckhardt, 1986.....	25
Brose et Eckhardt, 1986.....	25
Castagnède et al., 1989	24
Castagnède et al., 1989	25
Castagnède et al., 1990	24
Castagnède et al., 1991	20
Castagnède, 1991.....	24
Chu et al. , 1994.....	24
Cowin 1990.....	49
Dieulesaint et Royer 1974	17
Dieulesaint et Royer, 1974	18
Dieulesaint et Royer, 1989	39
Dieulesaint, 1989	26
Ditri 1994.....	39
Dye et Eckardt, 1989	25
Every 1994.....	20
Every et Sachse, 1990.....	20
Every, 1979.....	25

Every, 1994.....	27
Faurre, 1988.....	44
François, 1994-1 et 1994-2	55
François, 1995-1	55
François, 1995-2	55
François, 1996.....	55
Gérard, 1981	24
Grédiac et al. , 1993.....	24
Harder 1985	39
Hood et Mignogna, 1995	24
Hosten et Castagnède, 1983-1 et 2	22
Hosten et Castagnède, 1983.....	23
Hosten et Deschamps, 1983.....	22
J.P. Jarić 1994.....	19
Keyvani, 1991.....	24
Kittel, 1983	21
Klima 1973	39
Klima, 1973	41
Krautkramer et Krautkramer, 1988.....	26
Markam, M.F., 1970	22
Neighbourgs et Schacher 1967	39
Neighbours et Schacher 1967	40
Neighbours et Smith 1950	40
Neighbours, 1980.....	41
Norris 1989	19
Pochert, 1994	31
Preziosa et al. , 1981	22
Roux et al. 1985.....	24
Royer et Dieulesaint, 1989	17
Thomas, 1995	31
Van Bursirk, Cowin et Carter 1986	39
Van Bursirk, Cowin et Carter 1986	39
Vinh, 1981	22

4 ANALYSE DES SYMÉTRIES DU TENSEUR DE RIGIDITÉ

à partir d'une campagne d'essai sur un matériau à symétrie inconnue, on obtient le tenseur de rigidité dans un repère quelconque. Il est important de connaître les symétries, exactes ou proches, de ce tenseur. Une figure de pôle est employée. Pour calculer le tenseur symétrique le plus proche, nous utiliserons un opérateur intrinsèque. Enfin, le choix de la symétrie du matériau sera guidé par l'écart entre les tenseurs "bruts" et "symétriques", les niveaux de symétrie, mais aussi par les autres aspects du problème.

4.1 Figure de pôle du tenseur de rigidité

4.1.1 Introduction

Le tenseur de rigidité \mathbb{C} obtenu par une méthode expérimentale quelconque est exprimé dans une base issue de la base de l'éprouvette $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$. L'écriture sous la forme \underline{C}_{IJ} en notation de Voigt comme dans la base T^{2S} ne révèle pas les symétries du matériau, c'est à dire celles du tenseur \mathbb{C} . D'autre part, les erreurs de mesures, de même que les arrondis numériques, font que les symétries, si elles existent, ne sont pas parfaitement respectées. Ces symétries "approximatives" rendent difficile l'utilisation des indicateurs de symétrie, comme ceux que nous pouvons tirer de la décomposition de Kelvin (chapitre 5) ou des autres décompositions de \mathbb{C} (voir à ce sujet le paragraphe 5.2.9).

En regardant une figure de pôles cristallographique (Voigt, 1927), l'idée m'est venue d'adapter cette représentation au cas des "presque" symétries. Il fallait, en premier lieu ne conserver de cette représentation qu'un élément minimal unique : la symétrie plane. En effet, pour les tenseurs de rigidité, l'ensemble du groupe de symétrie peut être décrit par une famille de plans de symétrie. Le plan de symétrie peut être représenté par sa seule normale. Il est d'autre part possible d'affecter à chaque normale l'écart entre \mathbb{C} et son symétrique. La demi-sphère unité peut être représentée sur le disque unité par projection stéréographique. Nous obtenons ainsi une figure de pôle de la décorrélation, c'est à dire une information qualitative sur les symétries du tenseur \mathbb{C} . Ces figures sont facilement lisibles (par habitude des représentations cristallographiques, ou par comparaison avec les figures de référence du chapitre 4.2). Nous avons ainsi une idée des symétries "raisonnablement" admissibles pour le matériau .

4.1.2 Détermination de la figure de pôle

à chaque vecteur unitaire \mathbf{r} du demi espace $\mathbf{x}^3 \geq 0$ ($\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3\}$ est la base de l'éprouvette dans laquelle est exprimée \mathbb{C}) on associe la décorrélation $D(\mathbf{r})$ qui représente l'écart relatif (norme euclidienne naturelle) entre \mathbb{C} et son symétrique $S[\mathbf{r}](\mathbb{C})$ par rapport au plan \mathbf{r} .

$$D(\mathbf{r}) = \frac{\|\mathbb{C} - S[\mathbf{r}](\mathbb{C})\|}{\|\mathbb{C}\|} \quad 4.1-1$$

Rappelons l'écriture de $S[\mathbf{r}](\mathbb{C})$ sous forme de tenseur du second ordre appliqué à un vecteur \mathbf{u} :

$$S[\mathbf{r}](\mathbf{u}) = (\mathbf{I} - 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u} \quad 4.1-2$$

Le tenseur $S[\mathbf{r}](\mathbb{C})$ peut être obtenu par la transformation des vecteurs de base \mathbf{x}^i :

$$(S[\mathbf{r}](\mathbb{C}))_{ijkl} = (\mathbf{I} - 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_{ip} (\mathbf{I} - 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_{jq} (\mathbf{I} - 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_{kr} (\mathbf{I} - 2 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_{ls} C_{pqrs} \quad 4.1-3$$

Mais cette opération est coûteuse en temps de calcul ; de nombreux termes sont calculés plusieurs fois car on ne tient pas compte des symétries (indicielles) de \mathbb{C} . Pour cela Bond (Auld, 1973) a créé des matrices permettant la transformation rapide du tenseur sous son

écriture C_{ij} . Celles-ci sont utilisables pour toute transformation géométrique telle que rotation, inversion, symétrie. Elles ont été programmées dans les routines `bondrot.m` et `bondsym.m`.

La demi-sphère unité est balayée suivant deux angles : la longitude χ et la latitude ϕ .

$$0 \leq \chi < 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \phi < \pi/2 \quad 4.1-4$$

Ces angles sont bien sûr balayés avec des valeurs discrètes, tous les 10 degrés, par exemple. Les valeurs intermédiaires sont obtenues par lissage. A chaque valeur de la décorrélation on associe une couleur ou un niveau de gris, pour un minimum à 0 et le maximum à 1. Rappelons par la figure 4-1 suivante le principe de la figure de pôles : chaque point M de la demi-sphère unité avec $x^3 \geq 0$ est représenté par l'intersection m de la droite SM (S est le pôle "sud") avec le plan (x^1, x^2) . Une normale \mathbf{r} d'un plan quelconque peut ainsi être représentée.

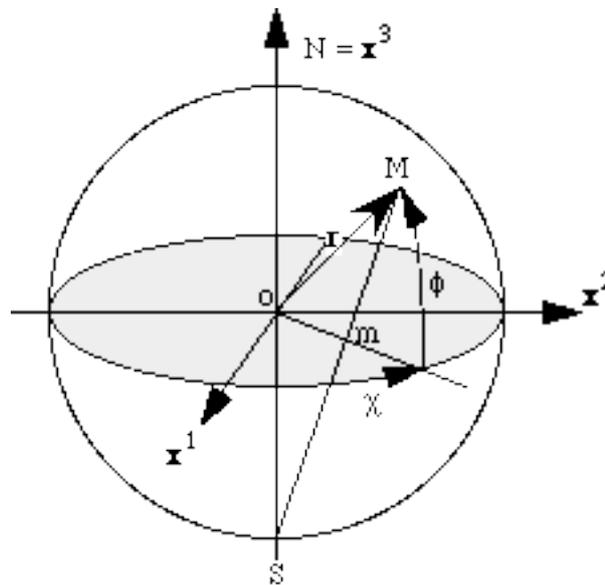


Figure 4-1. Figure de pôles

4.2 Figures de pôle des symétries exactes

Ces figures sont données comme référence. On y retrouve une extension des figures cristallographiques où les éléments miroirs (classiquement représentés par des “o”) sont remplacés par les zones de décorrélation nulles (noires). Pour la description, nous considérons x^1 le sens de lecture, x^2 vers le haut et x^3 vers nous. Les tenseurs sont représentés dans une figure de pôles dont les axes correspondent soit à la base naturelle du tenseur (celle de l’écriture classique qui donne des relations simples entre les coefficients) soit à une base quelconque. Pour les illustrations nous utilisons une base obtenue à partir de la base naturelle par trois rotations (chapitre 4.3.4) de $\pi/8$. Les tenseurs utilisés pour ces figures sont donnés en annexe. La valeur des décorrélations est sans intérêt pour cette approche qualitative, on peut néanmoins vérifier qu’elle est invariante par rapport au choix du repère (sur les figures de références correspondant à deux tenseurs identiques, dont l’un est tourné par rapport à ses axes naturels, par exemple figures 4-3 et 4-4).

4.2.1 Isotrope

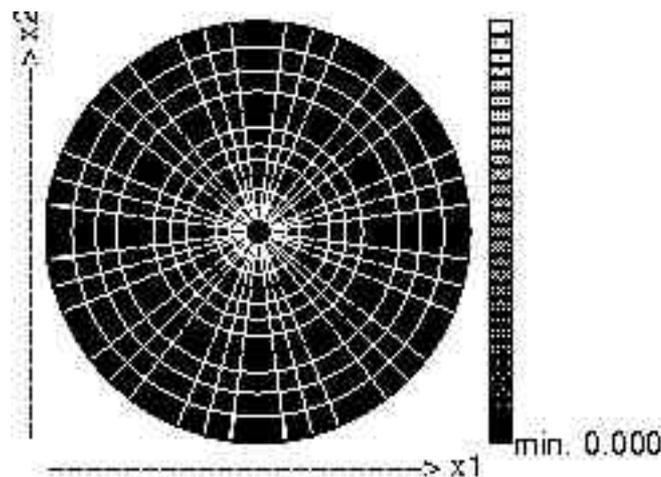


Figure 4-2. Figure de pôle d’un tenseur \mathbb{C} isotrope

Dans cette configuration la décorrélation est identiquement nulle ; l’ensemble de la figure de pôle est noire. Le tenseur est donné table 8-1.

4.2.2 Cubique

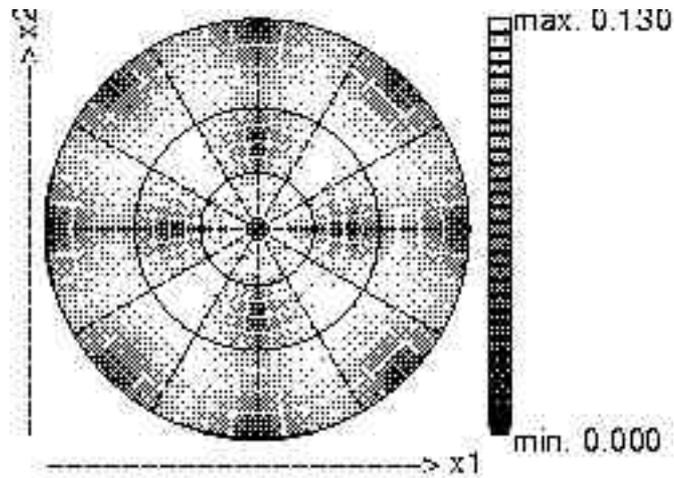


Figure 4-3. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} cubique dans sa base naturelle

Les neuf normales (zones sombres) des plans de symétrie cubique sont visibles ; celles sur l'équateur sont "coupées" en deux. Le tenseur (table 8-2) est ici représenté avec ses axes coïncidant avec ceux de la figure.

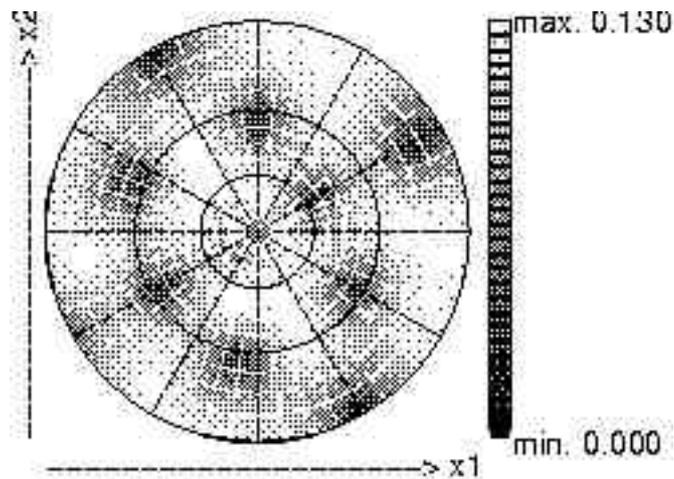


Figure 4-4. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} cubique

Dans cette position quelconque du même tenseur, les normales des neuf plans de symétrie ne coïncident plus avec les axes où les bissectrices du repère associé à la figure.

4.2.3 Isotrope transverse

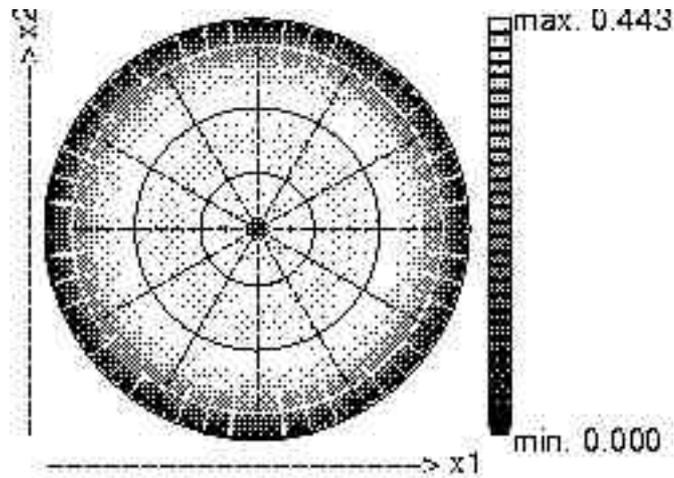


Figure 4-5. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} isotrope transverse dans sa base naturelle (hexagonal 5)

Le tenseur (table 8-3) est représenté ici avec son axe d'isotropie transverse pointé selon \mathbf{x}^3 . Cette configuration est aussi appelée "hexagonale 5" par les cristallographes.

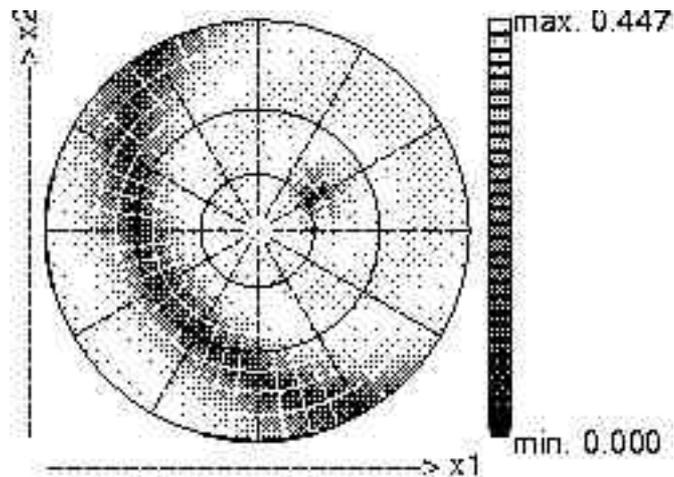


Figure 4-6. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} isotrope transverse

La bande noire et la tache sombre sont révélatrices de la symétrie isotrope transverse. Le lissage effectué par le logiciel entre les points de calcul peut induire en erreur si le maillage n'est pas assez fin.

4.2.4 Trigonal (rhomboédrique)

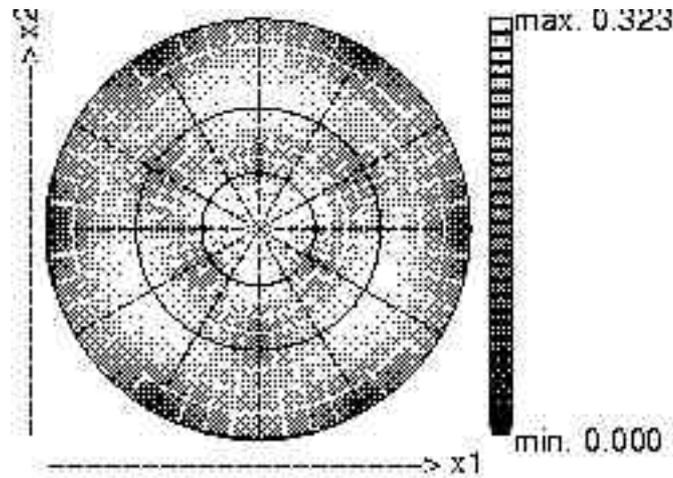


Figure 4-7. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} trigonal dans sa base naturelle (hexagonal 6)

Ici apparaissent les trois normales des plans de symétrie du tenseur trigonal (table 8-4). Les autres zones sombres de la figure n'ont pas une décorrélation nulle. Cette configuration est appelée "hexagonale 6" par les cristallographes.

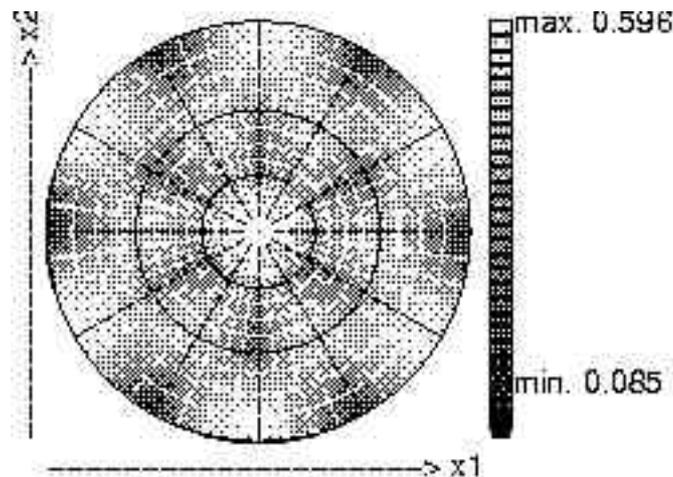


Figure 4-8. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} trigonal en configuration hexagonale 7

Le même tenseur ⁽¹⁾ est tourné autour de \mathbf{x}^3 . Une des normales des plans de symétrie ne correspond pas avec \mathbf{x}^1 , mais est dans le plan $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ cette configuration est appelée "hexagonale 7" par les cristallographes.

¹ En l'occurrence, il s'agit ici d'un autre tenseur, comme l'indique le niveau de décorrélation différent. Cela ne change rien à l'aspect de la figure.

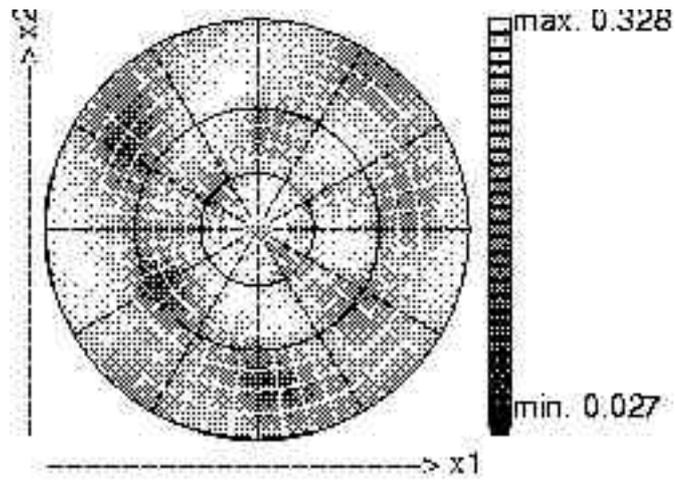


Figure 4-9. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} trigonal

Le même tenseur en position "quelconque". Les normales ne correspondent *a priori* avec aucun axe lié à la figure. Les trois taches sombres correspondant aux normales à $\pi/3$ les unes des autres sont révélatrices de cette symétrie.

4.2.5 Tétraogonal (quadratique)

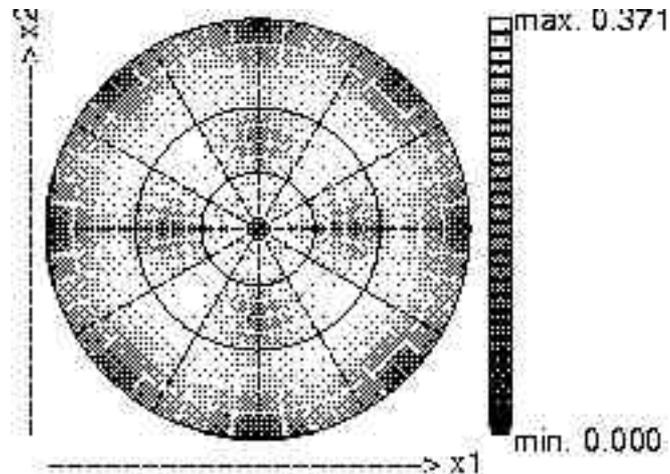


Figure 4-10. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} tétraogonal dans sa base naturelle (tétraogonal 4/mm)

Quatre plans de symétrie du tenseur (table 8-5) de normale dans $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ apparaissent plus un de normale \mathbf{x}^3 . Cette configuration est nommée "tétraogonal 4/mm" par les cristallographes. Les zones plus sombres vers les bissectrices de $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3)$ indiquent que le tenseur est proche de la symétrie cubique.

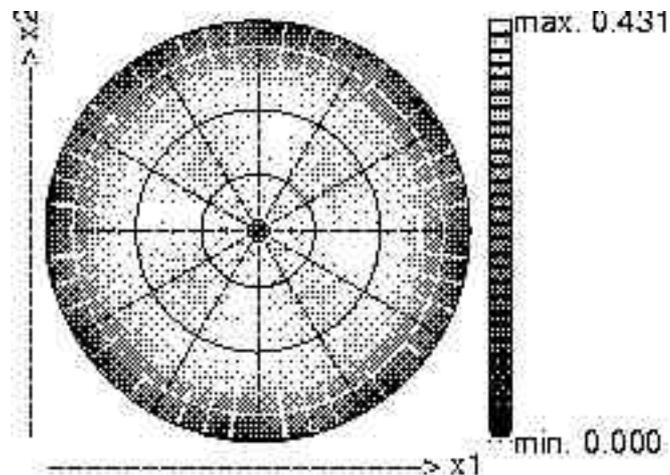


Figure 4-11. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} tétraogonal dans sa configuration tétraogonale 4

Le même tenseur est tourné autour de \mathbf{x}^3 cette configuration est appelée "tétraogonale 4" par les cristallographes.

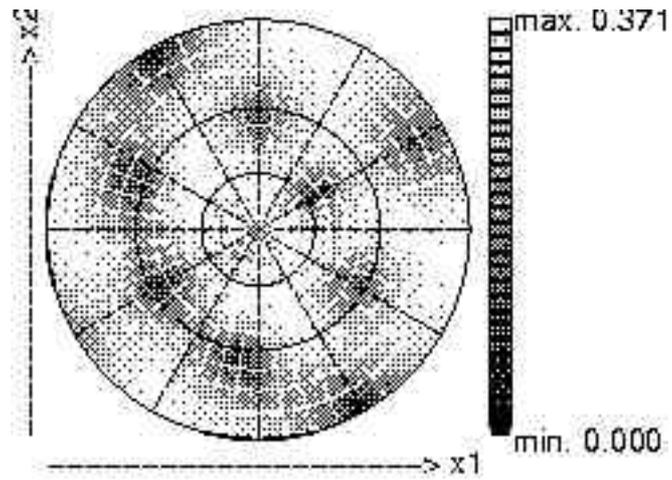


Figure 4-12. Figure de pôles d'un tenseur C tétragonal

Le tenseur tétragonal est ici en position "quelconque". Les cinq taches sombres sont révélatrices de cette symétrie.

4.2.6 Orthotrope

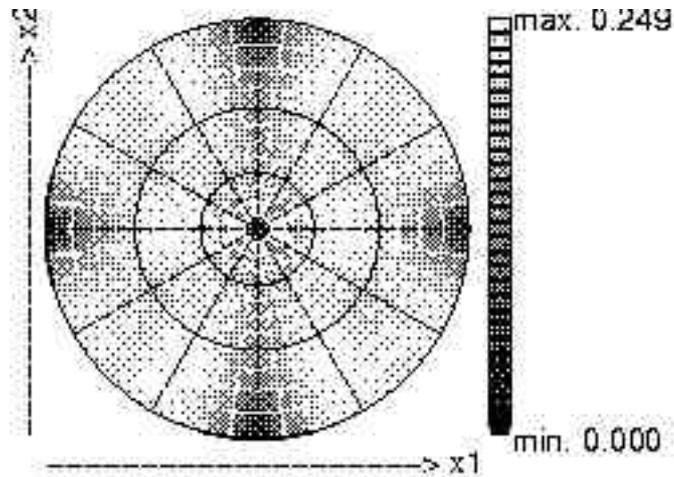


Figure 4-13. Figures de pôles d'un tenseur \mathbb{C} orthotrope dans sa base naturelle

Les trois plans de symétrie du tenseur orthotrope (table 8-6) apparaissent clairement. Ils sont ici orthogonaux aux vecteurs de base.

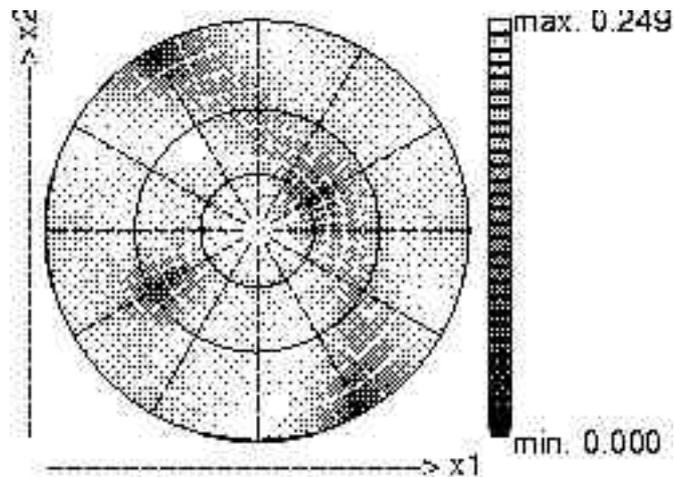


Figure 4-14. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} orthotrope dans une base quelconque

Les trois taches correspondant à des normales orthogonales sont révélatrices de la symétrie orthotrope.

4.2.7 Monoclinique

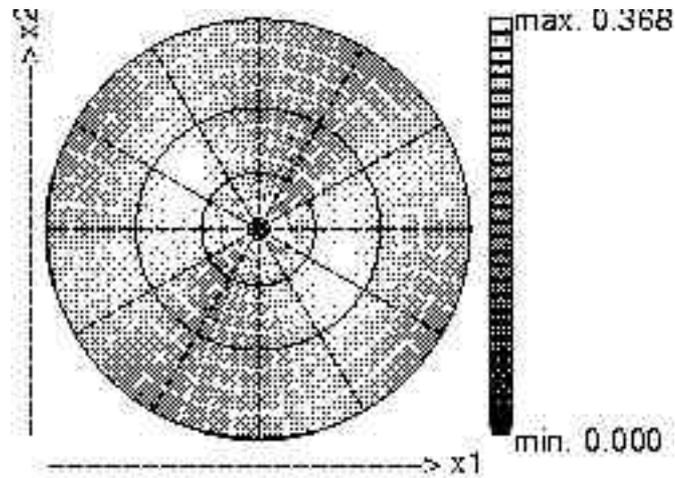


Figure 4-15. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} monoclinique dans sa base "naturelle"
Le seul plan de symétrie de ce tenseur (table 8-7) apparaît : le plan orthogonal à x^3 .

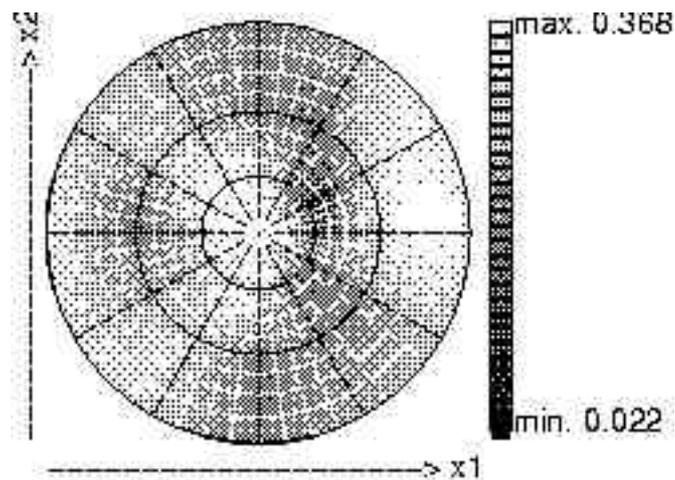


Figure 4-16. Figure de pôles d'un tenseur \mathbb{C} monoclinique dans une base quelconque
Une tache unique est révélatrice de la normale au plan de symétrie unique de la monoclinie.
D'autres tendances sont pourtant présentes dans ce tenseur déterminé au hasard.

4.2.8 Triclinique

Bien sûr, il serait ici inutile de montrer une figure type ; plus aucun endroit de la carte n'est complètement à zéro.

4.2.9 Figures obtenues d'après les mesures expérimentales

éprouvette en chêne

Nous traitons ici du tenseur de rigidité obtenu d'après les mesures sur l'éprouvette de chêne (table 3-9). Celui-ci est le plus intéressant car cette éprouvette a été usinée intentionnellement dans des axes différents des axes de symétrie.

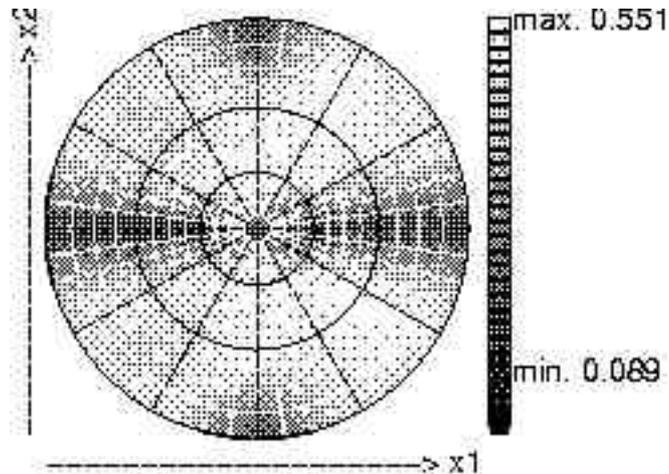


Figure 4-17. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en chêne

On observe au premier abord la bande sombre correspondant aux normales contenues dans le plan $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3)$. Celles-ci, ainsi que la normale \mathbf{x}^2 sont représentatives des "bons" plans de symétrie. On identifie alors une tendance à l'isotropie transverse.

Si l'on observe plus attentivement la figure, on aperçoit deux fuseaux plus sombres dans la bande. Ceux-ci correspondent aux vecteurs bissecteurs de \mathbf{x}^1 et \mathbf{x}^3 . Ces directions peuvent être visualisées sur l'éprouvette : ce sont les directions radiales et tangentiels au tronc de l'arbre. Ces trois directions de symétrie correspondent à une symétrie orthotrope.

éprouvette en hêtre

Le tenseur de rigidité dont nous montrons la figure de pôles de la décorrélation suivante est celui de l'éprouvette en hêtre (table 3-10) mesurée au chapitre précédent.

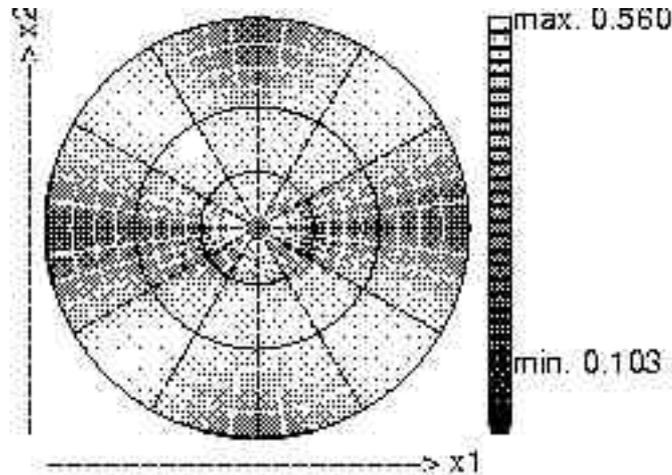


Figure 4-18. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en hêtre

Nous visualisons assez bien sur cette figure de pôle la nature orthotrope de ce matériau. On voit aussi, que, contrairement aux apparences, l'éprouvette n'a pas été usinée tout à fait dans la base naturelle du tenseur de rigidité (les taches sombres ne sont pas tout à fait centrées sur les axes). De même que pour le chêne, une bande horizontale sombre entraîne une tendance isotrope transverse.

éprouvette en sippo

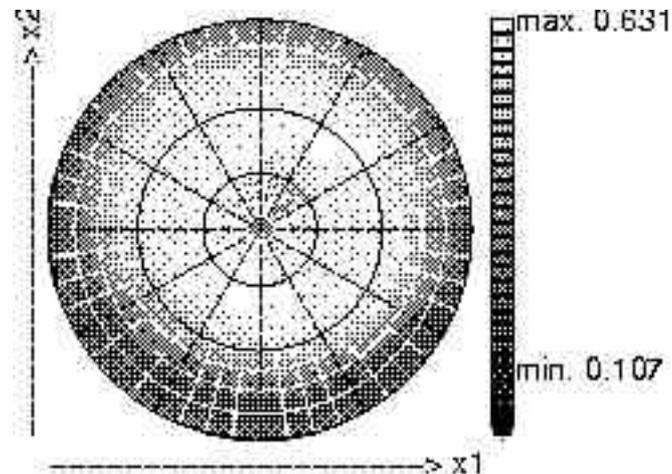


Figure 4-19. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en sippo

Sur cette éprouvette en sippo, dont le tenseur a été mesuré au chapitre précédent (table 3-11), nous visualisons assez nettement l'isotropie transverse. Cette tendance sera en effet vérifiée au chapitre suivant où nous vérifierons que les modules correspondant aux directions radiales et tangentielles de l'arbre sont proches pour cette essence (en tenant compte néanmoins de la qualité assez médiocre des mesures réalisées sur cette éprouvette de 45mm).

Conclusion sur la symétrie des bois étudiés

L'isotropie transverse peut sembler étonnante pour du bois. La figure révèle en fait que les modules dans les directions radiales et tangentielles sont certes différents, mais du même ordre de grandeur, tandis que le module longitudinal est beaucoup plus grand. Ceci sera mis en évidence dans l'expression du tenseur de rigidité exprimé dans les axes propres du tenseur orthotrope le plus proche.

4.2.10 Figure de pôle obtenue pour le grès des Vosges

à partir des mesures ultrasonores confiées par l'Institut Français du Pétrole, nous montrons ci-dessous la figure de pôle obtenue pour le tenseur de rigidité (table 3-13) déterminé avec la méthode d'Arts (1993).

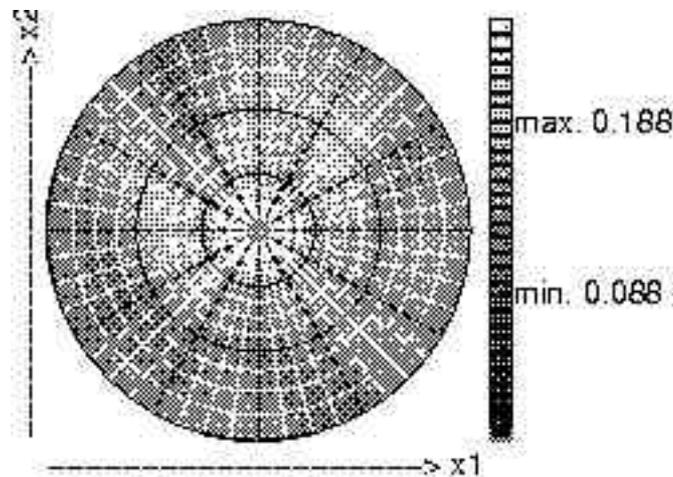


Figure 4-20. Figure de pôles du tenseur de rigidité du Grès des Vosges d'après Arts

La figure de pôle ci-dessous est obtenue à partir du tenseur de rigidité (table 3-12) déterminé par notre méthode détaillée au chapitre 3.

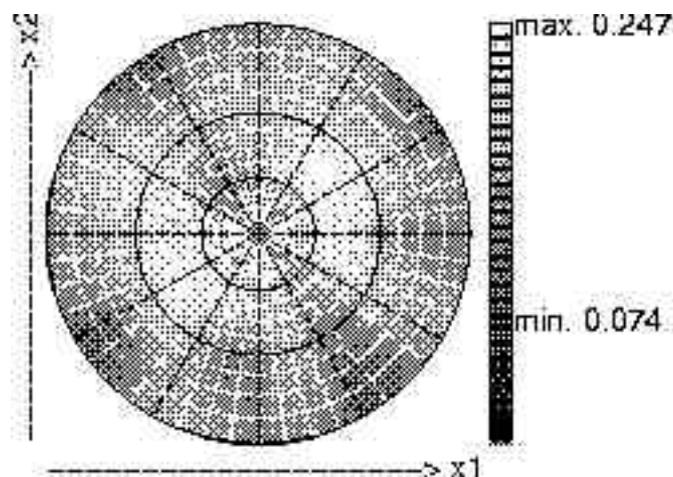


Figure 4-21. Figure de pôles du tenseur de rigidité du Grès des Vosges

Les deux figures sont représentées sur une échelle de décorrélation identique. Le tenseur

obtenu par notre méthode donne une carte plus “contrastée” que celle obtenue par l’autre méthode. Il possède donc des symétries plus marquées que celui obtenu par l’autre méthode. Ce fait sera d’ailleurs confirmé dans le chapitre suivant. Sans être une preuve absolue, ce fait amène à penser que la méthode présentée fournit un résultat plus exact que l’autre.

Les minimums et maximums de décorrélation demeurent néanmoins environ aux mêmes endroits : les axes propres sont à peu près les mêmes. Les quatre zones sombres laissent envisager une nature au moins orthotrope.

4.2.11 Conclusions et perspectives

Ces cartes me semblent adaptées pour une évaluation *a priori* des symétries d’un matériau anisotrope dont l’éventuelle symétrie est inconnue. Elles seraient utilisables pour des tenseurs d’ordre autre que quatre.

Serait-il possible d’envisager les tenseurs du quatrième ordre symétriques (tenseurs de rigidité) comme une famille de surfaces contenues dans le disque unité ? Certains calculs pourraient-ils être simplifiés par cette approche ?

4.3 Tenseur symétrique le plus proche

Avertissement : ce chapitre n'est pas toujours empreint d'une grande rigueur mathématique. C'est plutôt de manière intuitive que j'ai abordé la construction des tenseurs symétriques, par analogie avec les symétries équivalentes des objets tridimensionnels. Néanmoins, tous les résultats ont été vérifiés numériquement.

4.3.1 Présentation

Après avoir obtenu des informations qualitatives sur les symétries du tenseur de rigidité par les figures de pôles décrites ci-dessus, il paraît indispensable de disposer d'informations plus quantitatives. C'est à dire donner le pourcentage d'erreur commis en supposant que le tenseur expérimental \mathbb{C} possède telle ou telle symétrie, et de donner l'expression de ce tenseur symétrique \mathbb{C}_{Sym} (possédant la symétrie matérielle choisie) et de sa base associée B_{Sym} . Nous construisons pour un groupe de symétrie Sym donné et une base associée B , le tenseur $F(\mathbb{C}, B)$ invariant par Sym . On recherche ensuite la base B_{Sym} pour laquelle l'écart relatif entre \mathbb{C} et $F(\mathbb{C}, B)$ est minimal ; cet écart indique l'erreur commise en considérant que \mathbb{C} possède cette symétrie. Nous pouvons ainsi obtenir, pour un niveau de symétrie retenu (fonction du problème traité), le tenseur optimal \mathbb{C}_{Sym} et sa base orthonormée naturelle B_n issue de la base associée B_{Sym} .

Le même opérateur F pourrait s'appliquer au tenseur des souplesses \mathbb{S} plutôt qu'à celui des rigidités \mathbb{C} . Le résultat serait différent dans notre cas où F est basée sur un opérateur de moyenne arithmétique ; appliquer F sur \mathbb{C} (plutôt que sur \mathbb{S}) revient à privilégier les termes \underline{C}_{IJ} importants, qui sont obtenus avec une bonne précision.

4.3.2 Méthode de minimisation des écarts

Lorsqu'un tenseur possédant une symétrie est exprimé dans sa base naturelle B_n , il possède des relations classiques entre ses coefficients. Par exemple, un tenseur orthotrope possédera, exprimé dans B_n , douze composantes non nulles, dont neuf indépendantes. Le tenseur \mathbb{C} quelconque ne possède généralement pas ces relations. Les coefficients \underline{C}_{IJ} dépendent de la base B dans laquelle nous écrivons \mathbb{C} . La base B_n peut être déterminée comme celle pour laquelle les \underline{C}_{IJ} vérifient au mieux les relations de symétrie (Arts, 1993). Il est alors nécessaire d'écrire une fonction d'écart E basée sur ces relations, pour chaque type de symétrie Sym . Par exemple, pour la symétrie orthotrope :

$$(I,J) \quad \{4,5,6\} \text{ et } I \neq J \quad E(\mathbb{C}, B) = \sqrt{\sum \underline{C}_{PI}^2} \quad 4.3-1$$

Bien sûr, pour d'autres niveaux de symétrie, la fonction E prendra une expression plus compliquée que cette simple norme. Néanmoins celle-ci fait déjà apparaître l'arbitraire de cette méthode quand au choix de la norme et quand au poids numérique des \underline{C}_{PI} : doit-on tenir compte de leur multiplicité (nombre de termes dépendants C_{ijkl}) ou non ? Pour ces raisons, il est préférable de créer une fonction d'écart F intrinsèque pour laquelle il n'y pas de choix arbitraires.

4.3.3 Fonction intrinsèque

Être symétrique par rapport à un groupe de symétrie *Sym* c'est être invariant par toutes les transformations comprises dans ce groupe. Le tenseur \mathbb{C} ne l'est *a priori* pas, mais la moyenne de \mathbb{C} sur son orbite relatif à *Sym* l'est (la moyenne de \mathbb{C} avec toutes ses transformées par le groupe de symétrie *Sym*). Pour limiter les calculs, il est simplement nécessaire de déterminer un ensemble de transformations minimal et générateur de *Sym* (Sedov, 1971 ; Surrel, 1993).

Symétries d'ordre p

Fixons un groupe de symétrie *Sym* et soit $B = \{r(1), r(2), z\}$ une base normée associée : dans le cas des symétries d'ordre *p*, *z* est pris comme axe, le premier plan de symétrie est choisi de normale *r*(1) et le second de normale *r*(2) = $R[z, 2/p](r(1))$ (2). On peut alors définir $F(\mathbb{C}, B)$ la moyenne de \mathbb{C} sur l'orbite de *Sym* et correspondante à la base *B*.

$$F(\mathbb{C}, B) = \frac{1}{2p} \sum_{q=0}^{2p-1} S[r(2 - \text{mod}_2(q))]^q(\mathbb{C}) \tag{4.3-2}$$

Dans cette expression "mod₂" représente l'opérateur modulo 2, et la puissance *q* sur l'opérateur de symétrie *S* est entendue en terme de composition. Par convention $S[r(2)]^0$ représente l'opérateur identité *Id*.

La figure ci-dessous illustre cet opérateur dans le cas trigonal. Le symbole \odot représente de façon symbolique le tenseur \mathbb{C} qui ne possède pas de symétrie. L'entier *p* vaut ici 3; l'ensemble est bien trigonal.

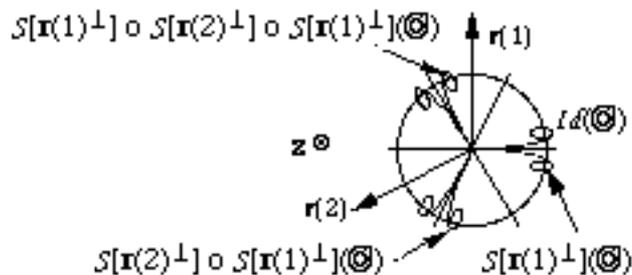


Figure 4-22. Opérateur F dans le cas trigonal

La symétrie obtenue pour de $F(\mathbb{C}, B)$ est bien sûr conditionnée par la valeur de *p* :

- p* {1,2} _____ monoclinique 4.3-3
- p* {3,6} _____ trigonal 4.3-4
- p* {4} _____ orthotrope 4.3-5
- p* {5,7,9,...} _____ isotrope transverse (hexagonal) 4.3-6
- p* {8} _____ tétragonal 4.3-7

² $R[z, 2/p](v)$ représente la rotation de *v* autour de *z* d'un angle $2/p$.

Autres symétries

Trois types de symétries du tenseur de rigidité ne peuvent pas être obtenues par la méthode précédente : les symétries isotrope, cubique et évidemment triclinique.

Je n'ai pas encore résolu le cas isotrope. Il faut pour cela déterminer un groupe de symétries minimal et générateur de l'isotropie. Peut être celui de l'icosaèdre (Elata et Rubin, 1995). Par ailleurs, existe-t-il, pour les tenseurs d'ordre quatre une famille de plans de symétrie qui génère l'isotropie ?

La symétrie cubique possède neuf plans de symétrie, mais il est possible de la générer à l'aide d'un tenseur orthotrope. Cette symétrie représente un comportement équivalent dans les trois directions orthogonales de l'orthotropie. On peut donc l'obtenir en "moyennant" le tenseur orthotrope avec les deux rotations qui permutent ses axes orthogonaux. La figure ci-dessous illustre l'opérateur appliqué à un tenseur orthotrope symbolisé par un parallélépipède. La représentation de cet objet tridimensionnel ne possède pas les neuf plans de symétrie de la symétrie cubique. Tous les raisonnements ne peuvent donc pas être illustrés par de telles figures. Néanmoins, un tenseur triclinique ainsi moyenné possède alors une symétrie cubique. Dans la figure ci-dessous, le parallélépipède représente un tenseur orthotrope \mathbb{C} ; la moyenne de \mathbb{C} avec ses permutations (directes) \mathbb{C}' et \mathbb{C}'' est de symétrie cubique. Par commodité, seul le premier quadrant est représenté.

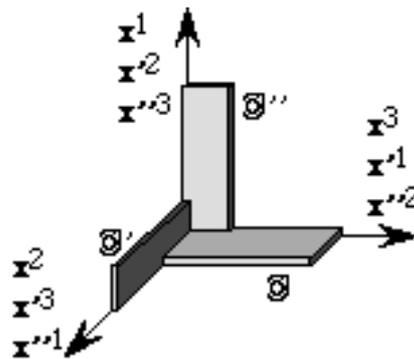


Figure 4-23. Obtention de la symétrie cubique

La symétrie tétragonale représente aussi un sous-groupe de la symétrie orthotrope, en imposant la condition d'équivalence sur deux directions orthogonales. Elle peut donc être obtenue à partir de la symétrie orthotrope en "moyennant" le tenseur orthotrope avec sa rotation de $\pi/2$ autour de \mathbf{z} . Cette opération est moins coûteuse en temps de calcul que la fonction F ci-dessus avec $p=8$.

4.3.4 Détermination du tenseur symétrique le plus proche

Nous disposons donc de fonctions intrinsèques F permettant de calculer un tenseur respectant la symétrie imposée Sym par rapport à une base naturelle B. Le tenseur \mathbb{C}_{Sym} , respectant la symétrie choisie et le plus proche de \mathbb{C} sera déterminé en recherchant la base \mathbf{B}_{Sym} pour laquelle l'écart relatif, en norme euclidienne naturelle, est minimal.

$$\mathbb{C}_{\text{Sym}} = \min_{\mathbf{B}} \frac{\|\mathbb{C} - \mathbf{F}(\mathbb{C}, \mathbf{B})\|}{\|\mathbb{C}\|} \quad 4.3-8$$

La base B est repérée par trois angles :

- longitude : positionne la projection du vecteur $\mathbf{r}(1)$ dans le plan $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ de \mathbf{x}^1 vers \mathbf{x}^2 .
- latitude : positionne le vecteur $\mathbf{r}(1)$ du plan $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ vers \mathbf{x}^3 .
- précession : positionne le dièdre $(\mathbf{r}(2), \mathbf{z})$ en rotation autour de $\mathbf{r}(1)$.

La recherche de la base optimale s'effectue donc en faisant varier ces trois angles. On utilise une méthode de simplex comme aucun gradient n'est disponible. Le résultat \mathbb{C}_{Sym} est écrit dans la base orthonormée naturelle B_n directe $\{\mathbf{r}(1), \mathbf{r}'(1), \mathbf{z}\}$ déduite de B_{Sym} dans laquelle $\mathbf{r}'(1)$ est calculé comme :

$$\mathbf{r}'(1) = \mathbf{z} \times \mathbf{r}(1) \quad 4.3-9$$

Nous pouvons remarquer que, pour les symétries qui imposent des relations simples entre les coefficients C_{ijkl} , cette méthode donne les mêmes résultats que la méthode de minimisation des écarts (chapitre 4.3.2), avec une norme respectant les ordres de multiplicité des termes, par exemple, pour l'orthotropie :

$$\|\underline{C}_{PI}\| = \dots + 4 (C_{14})^2 + \dots + 8 (C_{56})^2 + \dots \quad 4.3-10$$

Utilisation des figures de pôles de la décorrélation

De nombreux minimums sont des minimums locaux. Afin de savoir où l'on se situe, une interface graphique est utilisée en permanence. Il s'agit des figures de pôle du chapitre 4.1, sur lesquelles sont repérées les vecteurs $\mathbf{r}(1)$ et $\mathbf{r}(2)$ par des marqueurs. L'opérateur peut régler manuellement les trois angles précédents au départ de la minimisation. Leur positions successives et finales sont indiquées.

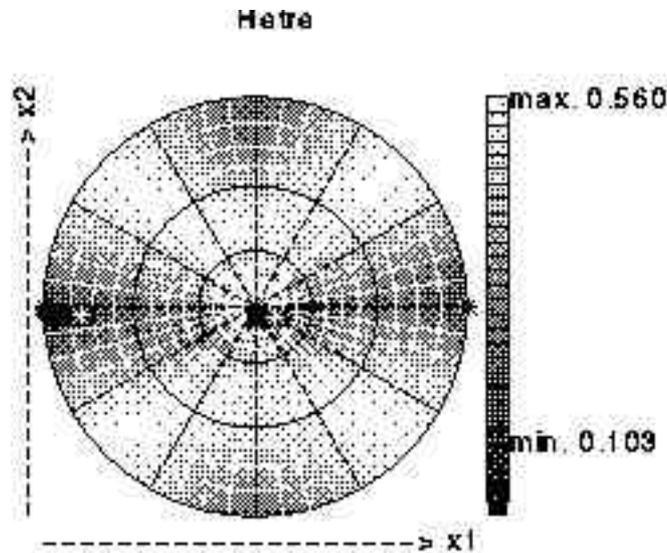


Figure 4-24. Recherche de la base optimale visualisée sur la figure de pôles

Sur la figure ci-dessus, les marqueurs cerclés correspondent au réglage de départ de l'utilisateur à l'aide des trois curseurs dont deux sont représentés (longitude, latitude et précession). Les marqueurs blancs représentent le trajet de l'optimisation et les étoiles noires le résultat final. L'ensemble de la minimisation dure quelques secondes sur un HP715.

Une fois le tenseur \mathbb{C}_{Sym} déterminé, il est possible de visualiser ses symétries par une figure de pôles. Les normales aux plans de symétries ne correspondent plus à des zones sombres

mais à des zones réellement noires (de décorrélation nulle) à condition que le “maillage” numérique de la figure soit suffisamment fin.

4.4 Symétries des tenseurs obtenus par les mesures ultrasonores

4.4.1 Tenseur de rigidité du chêne

Symétrie orthotrope

à partir du tenseur de rigidité expérimental montré au chapitre 3.5.1 (table 3-9), nous obtenons, pour la symétrie orthotrope :

$$\mathbb{C}_{\text{Orth}} \begin{vmatrix} 2,62 & 0,99 & 0,88 & 0 & 0 & 0 \\ 0,99 & 4,44 & 0,61 & 0 & 0 & 0 \\ 0,88 & 0,61 & 13,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,80 \end{vmatrix}$$

Table 4-1. Tenseur de rigidité (chêne) orthotrope en base naturelle (GPa)

Pour la position obtenue, l'écart relatif entre \mathbb{C} et son correspondant \mathbb{C}_{Orth} est de :

$$\frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_{\text{Orth}}\|}{\|\mathbb{C}\|} = 13,2 \%$$

Table 4-2. écart entre tenseurs brut et orthotrope (chêne)

L'éprouvette a été usinée volontairement hors axes de symétrie, ce point la rend la plus intéressante. Les valeurs obtenues sont un peu plus faibles que celles classiquement admises pour ce type de bois feuillu (Guitard et Genevaux, 1988). Ceci est en partie dû à la masse volumique importante de l'éprouvette (0,953 g/cm³). Le taux d'humidité semble y être important (il sera prochainement mesuré). Le tenseur est défini positif ; ses valeurs correspondent aux modules-ingénieur suivants :

<i>direction</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Module d'Young E (GPa)	2,36	4,06	12,9

<i>directions</i>	<i>23</i>	<i>31</i>	<i>12</i>
Modules de cisaillement G (GPa)	1,31	1,03	1,61
Coefficients de Poisson	23 0,02	31 0,31	12 0,22
	32 0,07	13 0,06	21 0,37

Table 4-3. Modules ingénieur du chêne orthotrope

Les angles de positionnement finaux sont décrits à la table suivante. On y retrouve

l'inclinaison visible à l'œil nu d'environ 30 degrés entre la direction des fibres et la normale \mathbf{x}^2 à la facette B.

longitude	-2,0 °
latitude	60,9 °
précession	92,7°

Table 4-4. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (chêne)

Nous pouvons aussi préciser le tenseur \mathbb{C} original dans la même base B_n :

$$\mathbb{C}_{B_n} \begin{vmatrix} 2,62 & 0,99 & 0,88 & -0,52 & 0,13 & 0,16 \\ 0,99 & 4,44 & 0,61 & 0,14 & 0,50 & 0,07 \\ 0,88 & 0,61 & 13,2 & 0,02 & 0,02 & 0,27 \\ -0,52 & 0,14 & 0,02 & 0,66 & -0,21 & -0,28 \\ 0,13 & 0,50 & 0,02 & -0,21 & 0,52 & -0,09 \\ 0,16 & 0,07 & 0,27 & -0,28 & -0,09 & 0,80 \end{vmatrix}$$

Table 4-5. Tenseur de rigidité (chêne) brut dans la base naturelle d'orthotropie (GPa)

On constate que, pour cette symétrie simple, la symétrisation correspond à annuler les valeurs qui doivent l'être pour respecter cette symétrie. Néanmoins, certains coefficients pas si négligeables que cela ont été supprimés...

Symétrie isotrope transverse

à partir du tenseur de rigidité expérimental déterminé chapitre 3.5.1 (table 3-9), nous obtenons, pour la symétrie isotrope transverse :

$$\mathbb{C}_{IsTr} \begin{vmatrix} 3,30 & 1,22 & 0,74 & 0 & 0 & 0 \\ 1,22 & 3,30 & 0,74 & 0 & 0 & 0 \\ 0,74 & 0,74 & 13,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,59 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,04 \end{vmatrix}$$

Table 4-6. Tenseur de rigidité (chêne) isotrope transverse en base naturelle (GPa)

Pour la position obtenue, l'écart relatif entre \mathbb{C} et son correspondant \mathbb{C}_{IsTr} est de :

$$\frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_{IsTr}\|}{\|\mathbb{C}\|} = 16,6 \%$$

Table 4-7. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (chêne)

Le tenseur est défini positif ; il n'est pas représenté dans la même base que précédemment, comme le décrivent les angles de positionnement ci-après. Nous donnons les modules-

ingénieur suivants :

<i>direction</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Module d'Young E (GPa)	2,83	2,83	12,96

<i>directions</i>	<i>23</i>	<i>31</i>	<i>12</i>
Modules de cisaillement G (GPa)	1,17	1,17	2,07
Coefficients de Poisson	23 0,04	31 0,16	12 0,36
	32 0,16	13 0,04	21 0,36

Table 4-8. Modules ingénieur du chêne isotrope transverse

Les angles de positionnement finaux montrent que l'axe d'isotropie transverse (normale au plan des vecteurs $\mathbf{r}(1)$ et $\mathbf{r}(2)$ d'angles $2/5$) est l'axe \mathbf{x}^2 :

longitude	0,2 °
latitude	1,3 °
précession	91,2°

Table 4-9. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (chêne)

Nous pouvons aussi préciser le tenseur \mathbb{C} original dans la même base \mathbf{B}_n :

$$\mathbb{C}_{\mathbf{B}_n} \begin{vmatrix} 3,45 & 1,31 & 0,45 & 0,53 & 0,05 & -0,67 \\ 1,31 & 2,97 & 1,04 & -0,18 & 0,59 & -0,23 \\ 0,45 & 1,04 & 13,20 & 0,01 & 0,02 & -0,01 \\ 0,52 & -0,18 & 0,01 & 0,37 & 0,04 & -0,18 \\ 0,05 & 0,59 & 0,02 & 0,04 & 0,81 & 0,07 \\ -0,67 & -0,23 & -0,01 & -0,18 & 0,07 & 1,12 \end{vmatrix}$$

Table 4-10. Tenseur de rigidité (chêne) brut dans la base naturelle d'isotropie transverse (GPa)

Pour cette symétrie plus complexe, le passage du tenseur brut au tenseur isotrope transverse affecte pratiquement tous les coefficients.

Autre symétries

D'autre part, nous donnons ci-dessous l'écart entre \mathbb{C} et \mathbb{C}_{Sym} pour les six niveaux de symétries décrits :

	Type de symétrie	écart $\mathbb{C} - \mathbb{C}_{Sym}$ (%)	
	Triclinique	0	
	Monoclinique	8,6	
Orthotrope	13,2	Trigonale	15,5
Tétraogonal	16		
Cubique	56,3	Isotrope transverse	16,6
	Isotrope	?	

Table 4-11. Décorrélation entre \mathbb{C} et \mathbb{C}_{Sym} pour différentes symétries (chêne)

La symétrie monoclinique correspond à une propriété très “faible”. Elle présente en cela un intérêt limité d’un point de vue pratique.

Le tableau ci-dessus, ainsi que les suivants du même type reprend la classification habituelle des niveaux de symétrie rappelée chapitre 4.5.2. On pourra vérifier que les écarts entre \mathbb{C} et \mathbb{C}_{Sym} respectent bien la relation d’ordre (partiel) proposée.

Dans la branche orthotrope, la symétrie orthotrope est obtenue pour un écart beaucoup plus faible que les symétries d’ordre plus élevé. On retrouve là la symétrie locale habituelle pour le bois.

Dans la branche trigonale par contre, le niveau plus riche de symétrie isotrope transverse ne diffère que d’un % du niveau précédent. La nature transverse décelée dans la figure de pôle (4-17) est ici confirmée.

4.4.2 Tenseur de rigidité du hêtre

Symétrie orthotrope

à partir du tenseur de rigidité expérimental déterminé chapitre 3.5.2 (table 3-10), nous obtenons, pour la symétrie orthotrope :

$$\mathbb{C}_{\text{Orth}} \begin{vmatrix} 2,44 & 4,54 & 0,97 & 0 & 0 & 0 \\ 4,54 & 19,9 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,97 & 0,6 & 4,61 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,36 \end{vmatrix}$$

Table 4-12. Tenseur de rigidité (hêtre) orthotrope en base naturelle (GPa)

Pour la position obtenue, l'écart relatif entre \mathbb{C} et son correspondant \mathbb{C}_{Orth} est de :

$$\frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_{\text{Orth}}\|}{\|\mathbb{C}\|} = 19,2 \%$$

Table 4-13. écart entre tenseurs brut et orthotrope (hêtre)

Les valeurs obtenues semblent acceptables (Guitard et Genevaux, 1988). Le tenseur est maintenant défini positif ; il est intéressant de constater ce fait car le tenseur \mathbb{C} ne l'était pas.

Le tenseur ci-dessus possède les modules-ingénieur suivants :

direction	1	2	3
Module d'Young E (GPa)	1,26	11,2	4,1

directions	23	31	12
Modules de cisaillement G (GPa)	5,97	2,49	4,72
Coefficients de Poisson	23 -0,28	31 0,59	12 0,22
	32 -0,10	13 0,18	21 1,97

Table 4-14. Modules ingénieur du hêtre orthotrope

Les coefficients de poisson présentent des valeurs très erronées ; ces grandeurs semblent très "sensibles" aux erreurs de mesures. Celles-ci sont donc certainement importantes. L'éprouvette en hêtre nous a semblé ne pas être assez homogène ; sa position dans l'arbre est trop proche du centre. Le rayon de courbure des cernes est trop faible par rapport à la dimension de l'éprouvette. Les mesures de célérités dans les directions \mathbf{x}^1 et \mathbf{x}^3 peuvent de ce fait être des mesures effectuées sur des ondes de trajet non rectiligne, expliquant la (trop) grande différence entre les modules E^1 et E^3 (et les coefficients de poisson aberrants).

Les angles de positionnement finaux sont décrits à la table suivante ; l'éprouvette n'a pas été usinée précisément dans ses axes de symétrie, ceci est vérifiable visuellement.

longitude	2,8 °
latitude	-10,83 °
précession	5,66 °

Table 4-15. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (hêtre)

Symétrie isotrope transverse

à partir du tenseur de rigidité expérimental déterminé chapitre 3.5.2 (table 3-10), nous obtenons, pour la symétrie isotrope transverse :

$$\mathbb{C}_{\text{IsTr}} \begin{vmatrix} 3,55 & 0,94 & 2,55 & 0 & 0 & 0 \\ 0,94 & 3,55 & 2,55 & 0 & 0 & 0 \\ 2,55 & 2,55 & 20,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,61 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,61 \end{vmatrix}$$

Table 4-16. Tenseur de rigidité (hêtre) isotrope transverse en base naturelle (GPa)

Pour la position obtenue, l'écart relatif entre \mathbb{C} et son correspondant \mathbb{C}_{IsTr} est de :

$$\frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_{\text{IsTr}}\|}{\|\mathbb{C}\|} = 26,3 \%$$

Table 4-17. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (hêtre)

Le tenseur est défini positif. Nous donnons les modules-ingénieur suivants :

direction	1	2	3
Module d'Young E (GPa)	3,11	3,11	17,13

directions	23	31	12
Modules de cisaillement G (GPa)	5,22	5,22	2,61
Coefficients de Poisson	23 0,10	31 0,57	12 0,19
	32 0,57	13 0,10	21 0,19

Table 4-18. Modules ingénieur du hêtre isotrope transverse

Les coefficients de poisson (et les modules d'Young) obtenus sont désormais plus réalistes, mais l'écart de 26,3% remet en cause la validité de ces résultats. Les angles de positionnement finaux montrent que l'axe d'isotropie transverse (normale au plan des

vecteurs $\mathbf{r}(1)$ et $\mathbf{r}(2)$ d'angles $2/5$ est proche de l'axe \mathbf{x}^2 :

longitude	93,65 °
latitude	96,6 °
précession	-0,00°

Table 4-19. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (hêtre)

4.4.3 Tenseur de rigidité du sippo

Symétrie orthotrope

à partir du tenseur de rigidité expérimental déterminé chapitre 3.5.3 (table 3-11), nous obtenons, pour la symétrie orthotrope :

$$\mathbb{C}_{\text{Orth}} \begin{vmatrix} 1,65 & 0,45 & 0,86 & 0 & 0 & 0 \\ 0,45 & 1,65 & 0,40 & 0 & 0 & 0 \\ 0,86 & 0,40 & 12,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,86 \end{vmatrix}$$

Table 4-20. Tenseur de rigidité (sippo) orthotrope en base naturelle (GPa)

Pour la position obtenue, l'écart relatif entre \mathbb{C} et son correspondant \mathbb{C}_{Orth} est de :

$$\frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_{\text{Orth}}\|}{\|\mathbb{C}\|} = 19,1 \%$$

Table 4-21. écart entre tenseurs brut et orthotrope (sippo)

Les valeurs obtenues sont acceptables (Guitard et Genevaux, 1988) sauf pour la valeur aberrante de \underline{C}_{55} . Celle-ci rend d'ailleurs le tenseur non défini positif. On retrouve ici le problème de la piètre qualité des mesures effectuées sur le sippo.

Le tenseur possède les modules-ingénieur suivants, dont certains sont aberrants :

<i>direction</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Module d'Young E (GPa)	1,48	1,52	12,32

<i>directions</i>	<i>23</i>	<i>31</i>	<i>12</i>
Modules de cisaillement G (GPa)	1,70	-0,30 (!)	1,72
Coefficients de Poisson	23 0,04	31 0,30	12 0,25
	32 0,40	13 0,04	21 0,16

Table 4-22. Modules ingénieur du sippo orthotrope

Toutes ces valeurs sont acceptables (et même meilleures que celles obtenues pour le hêtre), sauf bien sûr la valeur de G_{31} en relation avec \underline{C}_{55} déjà noté ci-dessus. Les angles de positionnement finaux sont décrits à la table suivante :

longitude	117,5 °
latitude	-6,9 °
précession	2,61 °

Table 4-23. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (sippo)

Symétrie isotrope transverse

à partir du tenseur de rigidité expérimental déterminé chapitre 3.5.3 (table 3-11), nous obtenons, pour la symétrie isotrope transverse :

$$\mathbb{C}_{\text{IsTr}} \begin{vmatrix} 1,79 & 0,35 & 0,62 & 0 & 0 & 0 \\ 0,35 & 3,55 & 0,62 & 0 & 0 & 0 \\ 0,62 & 0,62 & 12,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,72 \end{vmatrix}$$

Table 4-24. Tenseur de rigidité (sippo) isotrope transverse en base naturelle (GPa)

Pour la position obtenue, l'écart relatif entre \mathbb{C} et son correspondant \mathbb{C}_{IsTr} est de :

$$\frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_{\text{IsTr}}\|}{\|\mathbb{C}\|} = 23,4 \%$$

Table 4-25. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (sippo)

Le tenseur est (enfin) défini positif. Le niveau de symétrie "imposée" plus élevé a le même effet que précédemment sur le tenseur du hêtre (pour la symétrie orthotrope cependant). Nous donnons les modules-ingénieur suivants :

<i>direction</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Module d'Young E (GPa)	1,70	1,70	12,38

<i>directions</i>	<i>23</i>	<i>31</i>	<i>12</i>
Modules de cisaillement G (GPa)	0,72	0,72	1,44
Coefficients de Poisson	23 0,05	31 0,33	12 0,12
	32 0,33	13 0,05	21 0,12

Table 4-26. Modules ingénieur du sippo isotrope transverse

Ces grandeurs sont acceptables. Les angles de positionnement finaux donne l'axe d'isotropie transverse proche de x^3 , qui était déjà visible sur la figure de pôles de ce tenseur \mathbb{C} (figure 4-19) :

longitude	1,85 °
latitude	1,59 °
précession	-7,03 °

Table 4-27. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (sippo)

4.4.4 Tenseur de rigidité du grès des Vosges

Monoclinique

Le tenseur de rigidité suivant, monoclinique et exprimé dans une base naturelle, est distant (chapitre 4.3) de 6,53% du tenseur brut obtenu pour le grès des Vosges par notre méthode (table 3-12). Il est, ainsi que tous les autres, défini positif.

$$\mathbb{C}_{\text{Mon}} = \begin{pmatrix} 10,1 & -0,2 & 2,4 & 0,3 & 0 & 0 \\ -0,2 & 10,8 & 2,4 & 0,3 & 0 & 0 \\ 2,4 & 2,4 & 13,9 & 0,0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,0 & 3,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,1 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 7,4 \end{pmatrix}$$

Table 4-28. Tenseur de rigidité monoclinique du grès des Vosges

Les angles de positionnement de la normale au plan de symétrie sont (chapitre 4.3) :

$$\text{Longitude de } \mathbf{x}^1 \text{ vers } \mathbf{x}^2 : 35,6^\circ$$

$$\text{Latitude de } \mathbf{x}^1 \mathbf{x}^2 \text{ vers } \mathbf{x}^3 : -2,7^\circ$$

Table 4-29. Repérage angulaire de la base naturelle de monoclinie (grès des Vosges)

Trigonal

Le tenseur de rigidité trigonal le plus proche est distant (chapitre 4.3) de 17,36% du tenseur brut. Donner son expression ne présente pas grand intérêt tant il est clair que ce type de symétrie ne correspond pas à la nature de ce matériau.

Orthotrope

Soit le tenseur orthotrope suivant, le plus proche du tenseur de rigidité brut ; il est distant de 8,99% de ce dernier. On constate sa grande similitude avec le tenseur monoclinique. (l'écart n'est que de 3,5% entre les deux types de symétries).

$$\mathbb{C}_{\text{Orth}_o} = \begin{vmatrix} 10,8 & 2,6 & -0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 2,6 & 13,8 & 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3 & 2,4 & 10,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,5 \end{vmatrix}$$

Table 4-30. Tenseur de rigidité orthotrope du grès des Vosges

Les angles de positionnement du faisceau de normales sont (chapitre 4.3) :

Longitude de \mathbf{x}^1 vers \mathbf{x}^2 : $-56,3^\circ$

Latitude de $\mathbf{x}^1\mathbf{x}^2$ vers \mathbf{x}^3 : $4,3^\circ$

Précession autour de $\mathbf{r}(1)$: $86,4^\circ$

Table 4-31. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (grès des Vosges)

Le matériau, supposé orthotrope, possède les modules-ingénieur suivants :

direction	1	2	3
Module d'Young E (GPa)	10,2	12,6	9,7

directions	23	31	12
Modules de cisaillement G (GPa)	12,2	14,9	6,9
Coefficients de Poisson	23 0,25	31 -0,07	12 0,20
	32 0,19	13 -0,07	21 0,24

Table 4-32. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé orthotrope

Tétragonal

Le tenseur suivant est tétragonal ; il est distant de 14,33% du tenseur de rigidité brut.

$$\mathbb{C}_{\text{Tétra}} = \begin{vmatrix} 10,2 & -0,2 & 2,7 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 10,2 & 2,7 & 0 & 0 & 0 \\ 2,7 & 2,7 & 13,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,6 \end{vmatrix}$$

Table 4-33. Tenseur de rigidité tétragonal du grès des Vosges

Les angles de positionnement du faisceau de normales sont (chapitre 4.3) :

Longitude de \mathbf{x}^1 vers \mathbf{x}^2 : $37,2^\circ$

Latitude de $\mathbf{x}^1\mathbf{x}^2$ vers \mathbf{x}^3 : $-4,3^\circ$

Précession autour de $\mathbf{r}(1)$: $-16,7^\circ$

Table 4-34. Repérage angulaire de la base naturelle de tétragonalité (grès des Vosges)

Le matériau, supposé tétragonal, possède alors les modules-ingénieur suivants :

<i>direction</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Module d'Young E (GPa)	9,6	9,6	11,7

<i>directions</i>	<i>23</i>	<i>31</i>	<i>12</i>
Modules de cisaillement G (GPa)	9,9	9,9	15,3
Coefficients de Poisson	23 0,22	31 0,27	12 -0,07
	32 0,27	13 0,22	21 -0,07

Table 4-35. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé tétragonal

Isotrope transverse

Le tenseur suivant est isotrope transverse ; il est distant de 18,41% du tenseur de rigidité brut.

$$\mathbb{C}_{I.T.} = \begin{vmatrix} 11,5 & -1,4 & 2,6 & 0 & 0 & 0 \\ -1,4 & 11,5 & 2,6 & 0 & 0 & 0 \\ 2,6 & 2,6 & 13,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,5 \end{vmatrix}$$

Table 4-36. Tenseur de rigidité isotrope transverse du grès des Vosges

Les angles de positionnement du faisceau de normales sont (chapitre 4.3) :

Longitude de \mathbf{x}^1 vers \mathbf{x}^2 : $17,7^\circ$

Latitude de $\mathbf{x}^1\mathbf{x}^2$ vers \mathbf{x}^3 : $-0,8^\circ$

Précession autour de $\mathbf{r}(1)$: $-10,9^\circ$

Table 4-37. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (grès des Vosges)

Le matériau, supposé isotrope transverse, possède alors les modules-ingénieur suivants :

<i>direction</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Module d'Young E (GPa)	10,7	10,7	12,3

<i>directions</i>	<i>23</i>	<i>31</i>	<i>12</i>
Modules de cisaillement G (GPa)	9,7	9,7	12,9
Coefficients de Poisson	23 0,22	31 0,26	12 -0,17
	32 0,26	13 0,22	21 -0,17

Table 4-38. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé isotrope transverse

Cubique

Le tenseur suivant est isotrope cubique ; il est distant de 22,1% du tenseur de rigidité brut.

$$C_{\text{Cub}} = \begin{vmatrix} 10,6 & 2,1 & 2,1 & 0 & 0 & 0 \\ 2,1 & 10,6 & 2,1 & 0 & 0 & 0 \\ 2,1 & 2,1 & 10,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,2 \end{vmatrix}$$

Table 4-39. Tenseur de rigidité cubique du grès des Vosges

Les angles de positionnement du faisceau de normales sont (chapitre 4.3) :

Longitude de \mathbf{x}^1 vers \mathbf{x}^2 : $36,1^\circ$

Latitude de $\mathbf{x}^1\mathbf{x}^2$ vers \mathbf{x}^3 : $-4,5^\circ$

Précession autour de $\mathbf{r}(1)$: $-42,7^\circ$

Table 4-40. Repérage angulaire de la base naturelle de cubicité (grès des Vosges)

Le matériau, supposé cubique, possède alors les modules-ingénieur suivants :

<i>direction</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
Module d'Young E (GPa)	9,9	9,9	9,9

<i>directions</i>	<i>23</i>	<i>31</i>	<i>12</i>
Modules de cisaillement G (GPa)	12,3	12,3	12,3
Coefficients de Poisson	23 0,16	31 0,16	12 0,16
	32 0,16	13 0,16	21 0,16

Table 4-41. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé cubique

Bilan

Nous comparons ci-dessous les écarts entre le tenseur de rigidité brut du grès des Vosges (méthode présentée et autre méthode) et les tenseurs symétriques les plus proches. La relation d'ordre est celle décrite au chapitre 4.5.2.

	Type de symétrie	écart \mathbb{C} - \mathbb{C}_{Sym} , (%) méthode présentée - méthode Arts	
	Triclinique	0 - 0	
	Monoclinique	6,53 - 8,7	
Orthotrope	9,0 - 11,7	Trigonale	17,4 - 14,4
Tétragonal	14,3 - 14,8		
Cubique	22,1 - 18,7	Isotrope transverse	18,4 - 15,4
	Isotrope	?	

Table 4-42. Décorrélacion entre \mathbb{C} et \mathbb{C}_{Sym} pour différentes symétries (grès des Vosges).

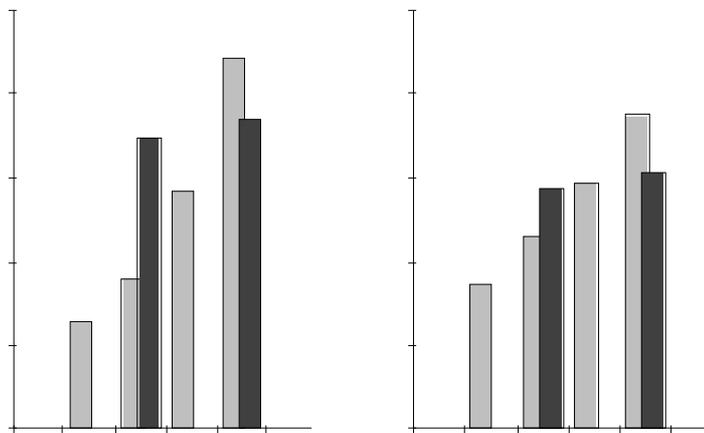


Figure 4-25. écart entre les tenseurs de rigidité brut et symétrique pour le grès des Vosges

On constate que le tenseur déterminé par la nouvelle méthode présente des corrélations plus “contrastées” que l’autre avec les tenseurs symétriques les plus proches. Le choix de la symétrie la plus “naturelle” pour ce matériau s’oriente maintenant vers la symétrie tétragonale, pour les symétries de haut niveau, et reste au niveau orthotrope pour les symétries de bas niveau.

4.5 Relation d'ordre entre les niveaux de symétrie

Si l'on conçoit bien qu'un solide isotrope est plus symétrique que tout autre ou qu'un solide triclinique est le moins symétrique, il est difficile de classer entre eux les autres niveaux de symétrie. L'objet de ce chapitre est de définir une relation d'ordre (ordre partiel, d'ailleurs) entre les différents niveaux de symétrie pour les tenseurs symétriques de T^{2S} (c'est à dire du type tenseurs de rigidité).

4.5.1 Classification d'après le nombre minimal de plans générateurs de la symétrie

Cette classification a été présentée par Cowin et Mehrabadi (1987). Elle est basée sur le nombre minimal de plans de symétrie générateurs du niveau de symétrie de \mathbb{C} . Elle a été modifiée ici en ce qui concerne la symétrie isotrope transverse dont nous pouvons voir au chapitre 4 (sur les symétries de \mathbb{C}) qu'elle peut être générée par un dièdre de plans à $\pi/5$ l'un de l'autre. De même le nombre de plans générateurs de la symétrie cubique n'est pas précisé par Cowin et Mehrabadi (1987). Nous avons vu qu'il est possible de la générer à l'aide de deux plans de symétrie à $\pi/5$ l'un de l'autre (equ. 4.2-6). Le nombre minimum de plans générateurs de l'isotropie m'est inconnue mais son niveau de symétrie est évidemment le plus élevé. La classification devient alors la suivante, modifiée par rapport à celle de Cowin et Mehrabadi pour les niveaux cubique et isotrope transverse qui ne sont plus équivalents :

Nom de la symétrie	Nb. de plans générateurs
Triclinique	0
Monoclinique	1
Orthotrope Trigonal Tétragonal Isotrope-transverse	2
Cubique	4
Isotrope	?

Table 4-43. Niveau de symétrie et nombre de plans générateurs

L'angle de dièdre entre les deux plans générateurs peut servir à faire une distinction entre les niveaux orthotrope ($\pi/2$), trigonal ($\pi/3$), tétragonal ($\pi/4$) et isotrope transverse ($\pi/5$).

4.5.2 Ordre partiel : groupes de symétrie

La figure ci-contre résume l'imbrication classique des groupes de symétrie pour chacun des huit niveaux de symétrie possibles. L'ordre est partiel et compatible avec celui de la classification donnée par Yong-Zhong et Del Piero (1991) où le tenseur de rigidité est décomposé (en utilisant un calcul en nombres complexes) en prenant en compte le nombre de rotations suivant deux axes, génératrices du groupe de symétrie. Le cas des tenseurs ne possédant pas la "grande" symétrie est aussi traité.

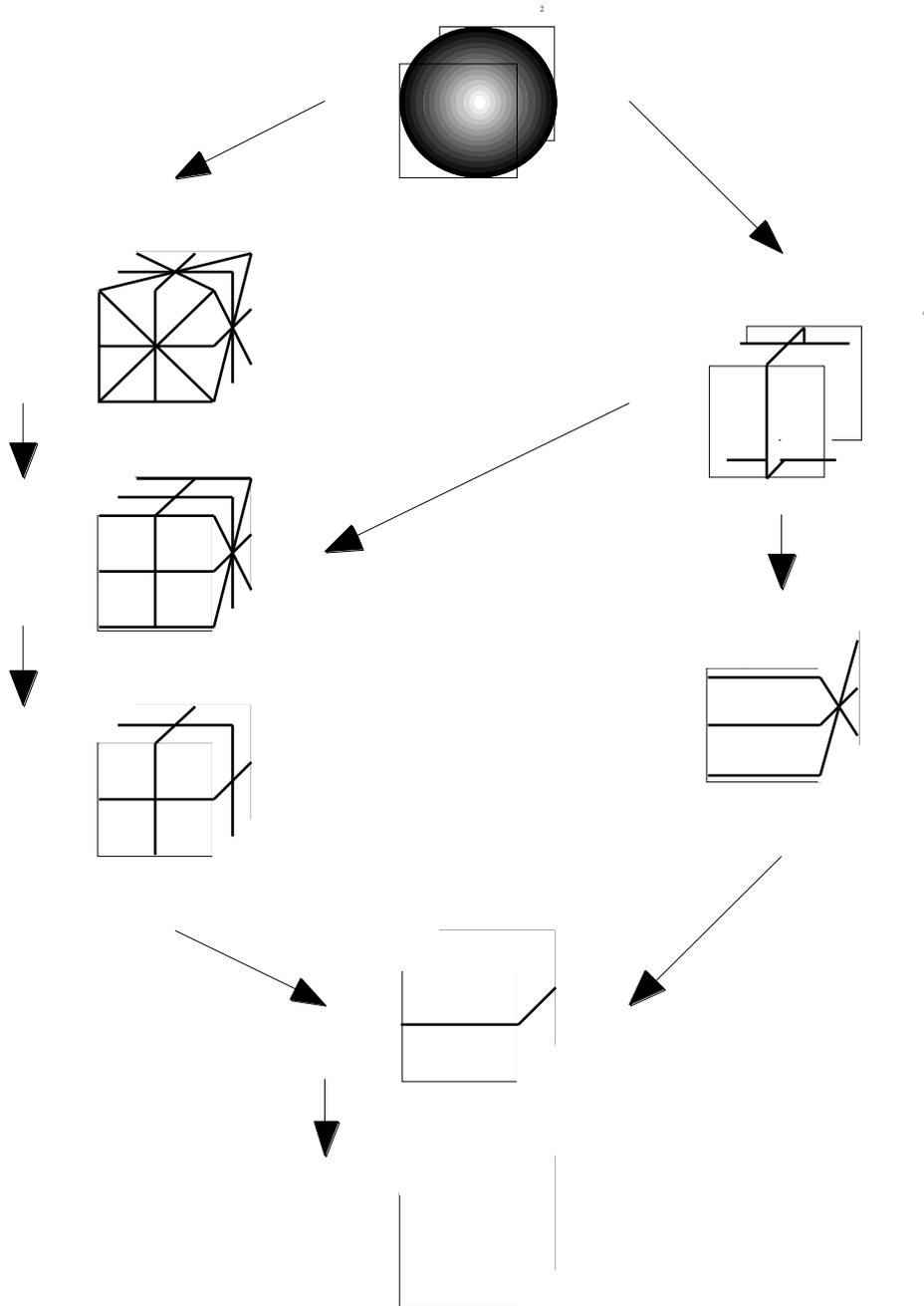


Figure 4-26. Ordre partiel des groupes de symétrie des tenseurs de rigidité

Le nombre entre parenthèses représente le nombre de plans de symétrie (le nombre de taches sur les figure de pôles de décorrélation du chapitre 4.2). Les flèches sont à lire dans le sens de

“contient”. Les figures représentent la trace des plans de symétrie sur un cube unitaire. L'imbrication des groupes est alors facilement perceptible, comme les figures sont données dans une orientation cohérente (réellement imbriquées).

4.6 Conclusions et perspectives

Cette méthode peut déterminer le tenseur de rigidité \mathbb{C}_{Sym} le plus proche de \mathbb{C} possédant la symétrie choisie ainsi que sa base naturelle B_n . Le choix du type de symétrie convenant aux mesures expérimentales est aidé par la valeur des écarts entre \mathbb{C} et \mathbb{C}_{Sym} pour chaque famille de symétrie. Néanmoins, il appartient à l'utilisateur de faire le choix final qui dépend aussi du type de problème, des applications envisagées pour le matériau et de la marge d'erreur que l'on se donne.

Enfin, il serait nécessaire de déterminer le groupe générateur de l'isotropie, pour pouvoir inclure ce niveau de symétrie complète à cette étude.

4	ANALYSE DES SYMÉTRIES DU TENSEUR DE RIGIDITÉ	56
4.1	Figure de pôle du tenseur de rigidité	57
4.1.1	Introduction	57
4.1.2	Détermination de la figure de pôle	57
4.2	Figures de pôle des symétries exactes	59
4.2.1	Isotrope	59
4.2.2	Cubique	60
4.2.3	Isotrope transverse	61
4.2.4	Trigonal (rhomboédrique)	62
4.2.5	Tétragonal (quadratique)	64
4.2.6	Orthotrope	66
4.2.7	Monoclinique	67
4.2.8	Triclinique	67
4.2.9	Figures obtenues d'après les mesures expérimentales	68
4.2.10	Figure de pôle obtenue pour le grès des Vosges	70
4.2.11	Conclusions et perspectives	71
4.3	Tenseur symétrique le plus proche	72
4.3.1	Présentation	72
4.3.2	Méthode de minimisation des écarts	72
4.3.3	Fonction intrinsèque	73
4.3.4	Détermination du tenseur symétrique le plus proche	74
4.4	Symétries des tenseurs obtenus par les mesures ultrasonores	77
4.4.1	Tenseur de rigidité du chêne	77
4.4.2	Tenseur de rigidité du hêtre	81
4.4.3	Tenseur de rigidité du sippo	84
4.4.4	Tenseur de rigidité du grès des Vosges	87
4.5	Relation d'ordre entre les niveaux de symétrie	92
4.5.1	Classification d'après le nombre minimal de plans générateurs de la symétrie	92
4.5.2	Ordre partiel : groupes de symétrie	93
4.6	Conclusions et perspectives	95

Figure 4-1. Figure de pôles _____	58
Figure 4-2. Figure de pôle d'un tenseur C isotrope _____	59
Figure 4-3. Figure de pôles d'un tenseur C cubique dans sa base naturelle _____	60
Figure 4-4. Figure de pôles d'un tenseur C cubique _____	60
Figure 4-5. Figure de pôles d'un tenseur C isotrope transverse dans sa base naturelle (hexagonal 5) _____	61
Figure 4-6. Figure de pôles d'un tenseur C isotrope transverse _____	61
Figure 4-7. Figure de pôles d'un tenseur C trigonal dans sa base naturelle (hexagonal 6) _____	62
Figure 4-8. Figure de pôles d'un tenseur C trigonal en configuration hexagonale 7 _____	62
Figure 4-9. Figure de pôles d'un tenseur C trigonal _____	63
Figure 4-10. Figure de pôles d'un tenseur C tétragonal dans sa base naturelle (tétragonal 4/mm) _____	64
Figure 4-11. Figure de pôles d'un tenseur C tétragonal dans sa configuration tétragonale 4 _____	64
Figure 4-12. Figure de pôles d'un tenseur C tétragonal _____	65
Figure 4-13. Figures de pôles d'un tenseur C orthotrope dans sa base naturelle _____	66
Figure 4-14. Figure de pôles d'un tenseur C orthotrope dans une base quelconque _____	66
Figure 4-15. Figure de pôles d'un tenseur C monoclinique dans sa base "naturelle" _____	67
Figure 4-16. Figure de pôles d'un tenseur C monoclinique dans une base quelconque _____	67
Figure 4-17. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en chêne _____	68
Figure 4-18. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en hêtre _____	69
Figure 4-19. Figure de pôle du tenseur de rigidité de l'éprouvette en sippo _____	69
Figure 4-20. Figure de pôles du tenseur de rigidité du Grès des Vosges d'après Arts _____	70
Figure 4-21. Figure de pôles du tenseur de rigidité du Grès des Vosges _____	70
Figure 4-22. Opérateur F dans le cas trigonal _____	73
Figure 4-23. Obtention de la symétrie cubique _____	74
Figure 4-24. Recherche de la base optimale visualisée sur la figure de pôles _____	75
Figure 4-25. écart entre les tenseurs de rigidité brut et symétrique pour le grès des Vosges _____	91
Figure 4-26. Ordre partiel des groupes de symétrie des tenseurs de rigidité _____	93

Table 4-1. Tenseur de rigidité (chêne) orthotrope en base naturelle (GPa)	77
Table 4-2. écart entre tenseurs brut et orthotrope (chêne)	77
Table 4-3. Modules ingénieur du chêne orthotrope	77
Table 4-4. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (chêne)	78
Table 4-5. Tenseur de rigidité (chêne) brut dans la base naturelle d'orthotropie (GPa)	78
Table 4-6. Tenseur de rigidité (chêne) isotrope transverse en base naturelle (GPa)	78
Table 4-7. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (chêne)	78
Table 4-8. Modules ingénieur du chêne isotrope transverse	79
Table 4-9. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (chêne)	79
Table 4-10. Tenseur de rigidité (chêne) brut dans la base naturelle d'isotropie transverse (GPa)	79
Table 4-11. Décorrélation entre C et CSym pour différentes symétries (chêne)	80
Table 4-12. Tenseur de rigidité (hêtre) orthotrope en base naturelle (GPa)	81
Table 4-13. écart entre tenseurs brut et orthotrope (hêtre)	81
Table 4-14. Modules ingénieur du hêtre orthotrope	81
Table 4-15. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (hêtre)	82
Table 4-16. Tenseur de rigidité (hêtre) isotrope transverse en base naturelle (GPa)	82
Table 4-17. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (hêtre)	82
Table 4-18. Modules ingénieur du hêtre isotrope transverse	82
Table 4-19. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (hêtre)	83
Table 4-20. Tenseur de rigidité (sippo) orthotrope en base naturelle (GPa)	84
Table 4-21. écart entre tenseurs brut et orthotrope (sippo)	84
Table 4-22. Modules ingénieur du sippo orthotrope	84
Table 4-23. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (sippo)	85
Table 4-24. Tenseur de rigidité (sippo) isotrope transverse en base naturelle (GPa)	85
Table 4-25. écart entre tenseurs brut et isotrope transverse (sippo)	85
Table 4-26. Modules ingénieur du sippo isotrope transverse	85
Table 4-27. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (sippo)	86
Table 4-28. Tenseur de rigidité monoclinique du grès des Vosges	87
Table 4-29. Repérage angulaire de la base naturelle de monoclinie (grès des Vosges)	87
Table 4-30. Tenseur de rigidité orthotrope du grès des Vosges	87
Table 4-31. Repérage angulaire de la base naturelle d'orthotropie (grès des Vosges)	88
Table 4-32. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé orthotrope	88
Table 4-33. Tenseur de rigidité tétragonal du grès des Vosges	88
Table 4-34. Repérage angulaire de la base naturelle de tétragonalité (grès des Vosges)	88
Table 4-35. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé tétragonal	89
Table 4-36. Tenseur de rigidité isotrope transverse du grès des Vosges	89
Table 4-37. Repérage angulaire de la base naturelle d'isotropie transverse (grès des Vosges)	89
Table 4-38. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé isotrope transverse	89
Table 4-39. Tenseur de rigidité cubique du grès des Vosges	90
Table 4-40. Repérage angulaire de la base naturelle de cubicité (grès des Vosges)	90
Table 4-41. Modules ingénieur du grès des Vosges supposé cubique	90
Table 4-42. Décorrélation entre C et CSym pour différentes symétries (grès des Vosges).	91

Table 4-43. Niveau de symétrie et nombre de plans générateurs _____ 92

Voigt, 192757
Auld, 197357
Arts (1993).....70
Arts, 199372
Sedov, 197173
Surrel, 1993.....73
Elata et Rubin, 199574
Guitard et Genevoux, 198877
Guitard et Genevoux, 198881
Guitard et Genevoux, 198884
Cowin et Mehrabadi (1987).....92
Cowin et Mehrabadi (1987).....92
Yong-Zhong et Del Piero (1991).....93

5 DÉCOMPOSITION DE KELVIN

Ce chapitre rappelle le principe de la décomposition en modes propres. Il décrit le sens mécanique de la diagonalisation de la matrice représentant \mathbb{C} . Ce théorème fut découvert par Kelvin en 1856 puis oublié pendant plus d'un siècle... C'est pourtant une extraordinaire idée à partir de laquelle nous pourrions extrapoler quelques modèles au chapitre suivant. Des notions un peu complexes comme la définition positive du tenseur de rigidité apparaissent ici sous une étonnante simplicité. La décomposition de chaque niveau de symétrie possible pour le tenseur de rigidité est présentée.

5.1 Principe de la décomposition

5.1.1 Analyse de \mathbb{C} dans la base $\mathbf{T}^2 \mathbf{S}$ $\mathbf{T}^2 \mathbf{S}$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations la loi de comportement s'écrit de façon classique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad 5.1-1$$

Dans cette équation $\boldsymbol{\sigma}$ représente le tenseur des contraintes de Cauchy, du second ordre et symétrique. Le tenseur du second ordre symétrique $\boldsymbol{\epsilon}$ représente le tenseur des petites déformations. Le tenseur de rigidité \mathbb{C} possède de ce fait les deux "petites" symétries décrites au chapitre 1 "Base de tenseurs". D'autre part les principes de la thermodynamique imposent la "grande" symétrie.

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad 5.1-2$$

De ce fait le tenseur \mathbb{C} possède une représentation sous forme de matrice 6x6 $\underline{\mathbb{C}}_{PQ}$ symétrique dans la base \mathbf{S}^I \mathbf{S}^J . Les $\underline{\mathbb{C}}_{PQ}$ ont la dimension d'une contrainte et peuvent s'exprimer en GPa. Cette matrice est donc diagonalisable et possède six valeurs propres $\underline{\lambda}^I$ nommées **modules de Kelvin**, et six vecteurs propres \mathbf{E}^I orthogonaux (de dimension six) ayant la dimension d'une contrainte. Nous avons donc :

$$\mathbb{C} : \mathbf{E}^I = \underline{\lambda}^I \mathbf{E}^I \quad 5.1-3$$

Ces vecteurs propres \mathbf{E}^I dans l'espace \mathbf{S}^I sont homogènes à une déformation. L'équation ci-dessus signifie que toute déformation $\boldsymbol{\epsilon}$ proportionnelle à \mathbf{E}^I génère dans le matériau un état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{E}^I c'est à dire proportionnel à la déformation. C'est pourquoi je suggère de nommer les \mathbf{E}^I les **modes propres**.

Il est intéressant de constater que l'existence de ces six modes et modules a été découverte par Lord Kelvin (1856) avant le formalisme tensoriel (¹). Rychlewski (1984) ne précise pas la démonstration et se réfère à des ouvrages mathématiques (Mal'Tsev, 1956), (Khalmosh, 1963), (Glazman and Lyubitch, 1969). Gurtin (1974) utilise le théorème de décomposition spectrale (sur les tenseurs du second ordre) pour démontrer (très rapidement) la décomposition de \mathbb{C} dans le cas isotrope. Enfin Mehrabadi et Cowin (1990) utilisent la démonstration ci-dessus.

Les \mathbf{E}^I étant orthogonaux, on peut les choisir orthonormés. Si n modules de Kelvin $\underline{\lambda}^I$ sont égaux, l'espace propre correspondant possède n dimensions ($n(I)$ dépend de I). Le théorème de la base incomplète nous permet de choisir des modes propres $\mathbf{E}^{I1} \dots \mathbf{E}^{In}$ orthonormés. Nous avons donc :

$$n(I) = 6 \quad 5.1-4$$

¹Cette communication, qu'il présenta à la Royal Society, eut un accueil mitigé. Il faut dire que les théorèmes d'analyse linéaire relatifs à la diagonalisation étaient encore récents. Cette grande idée fut alors "oubliée" pendant un siècle et demi et les ouvrages de référence [Love 1926] n'en parlent pas.

Précisons ici les notations qui seront utilisées dès à présent.

	Mathématiques	Mécanique
\underline{I}	Valeurs propres de $[C_{PQ}]$ d'ordre n.	Modules de Kelvin en GPa.
\mathbf{E}^{Ip}	Vecteur propre (ortho) normé correspondant, p varie de 1 à n.	Modes propres indépendants.

Table 5-1. Correspondance des notations de la décomposition de Kelvin

Remarquons que toute déformation appartenent à l'espace $\mathbf{E}^{I1} \dots \mathbf{E}^{In}$ génèrera un état de contrainte homothétique de rapport \underline{I} . Tout tenseur de cette forme (de cet espace) pourra être nommé sollicitation propre, le terme sollicitation couvrant indifféremment contrainte ou déformation.

$$\underline{I} = e^1 \mathbf{E}^{I1} + \dots + e^n \mathbf{E}^{In} \quad \underline{I} = \underline{I} \underline{I} \quad 5.1-5$$

et $\underline{I} = s^1 \mathbf{E}^{I1} + \dots + s^n \mathbf{E}^{In} \quad \underline{I} = \frac{1}{\underline{I}} \underline{I} \quad 5.1-6$

5.1.2 Diagonalisation de \mathbb{C}

Nous pouvons maintenant réécrire \mathbb{C} dans la base orthonormée issue des \mathbf{E}^{Ip} , c'est à dire $\mathbf{E}^{Ip} \mathbf{E}^{Ip}$, qui autorise (chapitre 1) l'écriture matricielle. Nous avons alors le tenseur \mathbb{C} écrit sous la forme diagonale suivante :

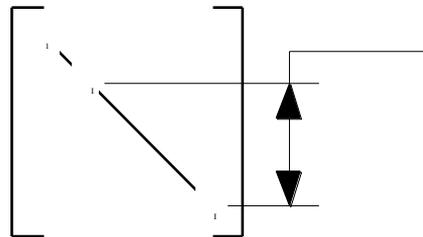


Figure 5-1. Tenseur de rigidité dans sa base propre

5.1.3 Nouvelle formulation de la loi de comportement

A partir de l'équation précédente, ou de la formulation précédente dans la base propre des \mathbf{E}^{Ip} nous pouvons réécrire la loi de comportement de façon intrinsèque :

$$\mathbb{C} = \sum_{p=1}^n \underline{I} \mathbf{E}^{Ip} \mathbf{E}^{Ip} \quad 5.1-7$$

Dans cette expression apparaît la structure du tenseur de rigidité \mathbb{C} : la déformation imposée est projetée sur les \underline{I} espaces propres $\mathbf{E}^{I1} \dots \mathbf{E}^{In}$ puis multipliée par les modules correspondants \underline{I} . Les projecteurs correspondants \mathbb{P}^I (de $T^2S \quad \mathbf{E}^{I1} \dots \mathbf{E}^{In}$) étant :

$$\mathbb{P}^I = \sum_{p=1}^n \mathbf{E}^I \mathbf{E}^I \quad 5.1-8$$

Nous pouvons alors réécrire le tenseur de rigidité \mathbb{C} sous sa forme la plus explicite :

$$\mathbb{C} = \sum_I \mathbb{P}^I \quad 5.1-9$$

Le tenseur de souplesse \mathbb{C}^{-1} est bien sûr obtenu de façon immédiate :

$$\mathbb{C}^{-1} = \sum_I \frac{1}{\lambda_I} \mathbb{P}^I \quad 5.1-10$$

Enfin, nous pouvons préciser l'allure de la relation contrainte - déformation (sans alourdir l'écriture par les sommations sur I et p) :

$$\sigma = \sum_I \lambda_I \mathbb{P}^I \quad 5.1-11$$

ou, directement, en nommant λ_I le projeté \mathbb{P}^I et λ_I le projeté \mathbb{P}^I , nous obtenons la forme la plus simple possible pour la loi de comportement d'un matériau anisotrope :

$$\sigma = \sum_I \lambda_I \mathbb{P}^I \quad 5.1-12$$

Les projecteurs \mathbb{P}^I , comme les \mathbf{E}^I forment une base orthonormée, représentent une relation de fermeture ("orthogonal expansion") de l'identité \mathbb{I} , comme le précise Rychlewski (1984). C'est à dire qu'un tenseur quelconque de T^{2S} est la somme de ses projections par tous les projecteurs \mathbb{P}^I . On pourra alors parler, pour λ_I (ou λ_I) de **parties** de (ou). C'est déjà couramment utilisé lorsque l'on parle de **partie déviatorique** ou **partie hydrostatique** pour les matériaux isotropes (ce qui correspond aux modes propres dans ce cas).

$$\sigma = \sum_I \lambda_I \mathbb{P}^I \quad 5.1-13$$

$$\sigma = \sum_I \lambda_I \mathbb{P}^I \quad 5.1-14$$

La dernière remarque, faite par Rychlewski (1984), est que la décomposition de Kelvin est la seule méthode directe pour comparer deux tenseurs de rigidité d'un même matériau triclinique exprimé dans deux bases différentes. En effet, pour une telle absence de symétrie, aucun repère \mathbf{u}^p n'est privilégié donc aucune base canonique ne l'est. La décomposition en modes propres permet de comparer les modules de Kelvin et la nature des modes.

5.1.4 Visualisation

Le chapitre 1 précédent montre que la contrainte (ou déformation) se projette (par \mathbb{P}^I) dans les espaces propres puis est multipliée par un module λ_I (ou $1/\lambda_I$) différent, ce qui rend la déformation (ou contrainte) obtenue non proportionnelle. Le dessin suivant, sans souci de rigueur, tente de décrire cela :

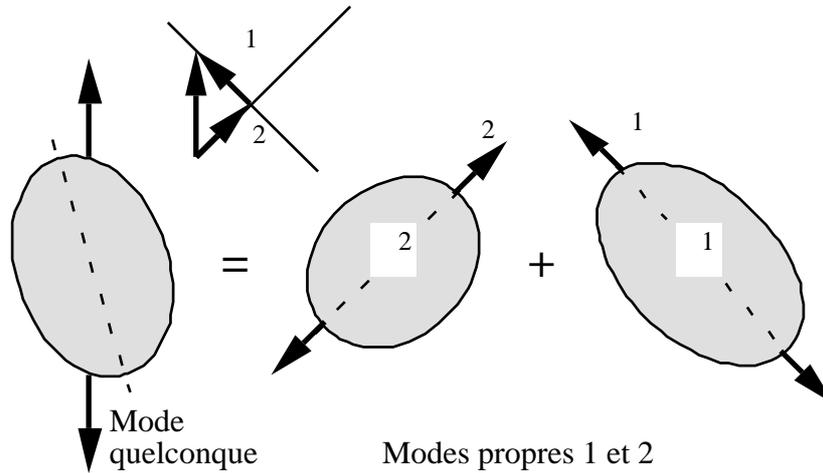


Figure 5-2. Schématisation de la décomposition de et en modes propres

5.1.5 Calcul de l'énergie élastique

énergie élastique

L'énergie élastique W possède une expression devenant d'une étonnante simplicité. En effet l'expression classique suivante (qui nécessite 81 sommations) :

$$2W = \mathbb{C} : \mathbb{C} : \mathbb{C} \tag{5.1-15}$$

devient la somme (à au plus six termes) en fonction des parties I de :

$$2W = \sum_I \mathbb{I} : \mathbb{I} : \mathbb{I} \tag{5.1-16}$$

Cette expression fait apparaître que la condition suffisante pour que \mathbb{C} soit défini positif est simplement que ses modules de Kelvin soient tous strictement positifs. Ou en fonction de la contrainte :

$$2W = \sum_I \frac{1}{\mathbb{I}} \mathbb{I} : \mathbb{I} \tag{5.1-17}$$

énergie élastique de chaque mode

La formule présentée ci-dessus (5.1-16) montre la décomposition naturelle de l'énergie élastique sur chaque mode. En effet, nous avons l'énergie W^I du mode I qui vaut :

$$2W^I = \mathbb{I} : \mathbb{I} : \mathbb{I} \tag{5.1-18}$$

Ou sa forme équivalente en contraintes. Et l'énergie globale est la somme des énergies de chaque mode :

$$W = \sum_I W^I \tag{5.1-19}$$

Cette décomposition sera utile pour l'établissement de modèles d'endommagement anisotropes.

5.2 Modes propres et symétries

Les différentes symétries physiques habituelles, dont Gurtin (1972) semble préciser que ce sont les seules possibles, du tenseur \mathbb{C} sont abordées dans ce chapitre. En référence à Mehrabadi et Cowin (1990) nous nommerons “isochores” tout tenseurs de T^{2S} de trace nulle et “dilatationnels” les autres. Les tenseurs du second ordre sont donnés ici dans la base canonique habituelle. Les tenseurs du quatrième ordre sont présentés dans la base $T^{2S} \quad T^{2S}$. Les noms des symétries sont ceux utilisés par Dieulesaint et Royer (1974), l’autre dénomination, plus française est aussi rappelée. L’autre dénomination (issue de la cristallographie) est aussi indiquée lorsque cela est nécessaire. Pour lever toute ambiguïté je précise l’écriture du tenseur de rigidité et le choix de la base canonique vectorielle \mathbf{u}^i .

5.2.1 Isotrope

Rychlewski (1984) rappelle que les modes propres d’un matériau isotrope sont bien connus. Il s’agit en effet de tous les tenseurs sphériques et de tous les déviateurs de T^{2S} . L’écriture de la loi de comportement prend alors la forme suivante :

$$= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + \frac{2}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{D} \quad 5.2-1$$

Dans cette forme classique on scinde le tenseur des déformations en deux parties, l’une sphérique (ou hydrostatique) et l’autre déviatorique (les cisaillements). Il est aisé de construire une base propre.

Mode dilatationnel (sphérique) de dimension 1

Pour le mode sphérique (dilatationnel), l’espace correspondant à \mathbb{E}^1 est de dimension 1, donc nous avons une seule possibilité pour le choix de \mathbf{E}^1 :

$$\mathbf{E}^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad 5.2-2$$

C’est un mode correspondant aux sollicitations hydrostatiques. Une sphère sous pression restera sphérique. La composante ϵ_{11} d’un tenseur des contraintes sur \mathbf{E}^1 sera donc égale à $\sqrt{3} Ph$ (Ph étant la pression hydrostatique).

Mode isochore de dimension 5

Par contre l’autre espace propre possède 5 dimensions et nous avons le choix pour créer une base orthonormée ; la plus simple semble être la construction dont je donne ici le premier terme (le second et le troisième sont obtenus avec le terme $1/\sqrt{2}$ aux positions 13 et 23) :

$$\mathbf{E}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2-3$$

Un quatrième terme possible est montré ci-dessous ; le cinquième est obtenu par une

permutation circulaire des indices 1,2 et 3 (deux choix possibles).

$$E^{24} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2-4}$$

Une autre possibilité pour écrire ces tenseurs est proposée par Surrel (1996) qui nomme ces tenseurs ‘‘cisaillement cylindrique’’. Leur interprétation physique (comment les développer au sein d’un milieu élastique) est délicate.

$$E'^{24} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \tag{5.2-4'}$$

Les modules de Kelvin \underline{K}_I sont ici bien connus, nous avons :

	Composantes de \mathbb{C} , en écriture 6x6	Coefficients de Lamé
\underline{K}_1	$\underline{C}_{11} + 2 \underline{C}_{12}$	$3 + 2 \mu$
\underline{K}_2	$\underline{C}_{11} - \underline{C}_{12}$	2μ

Table 5-2. Valeur des modules de Kelvin d’un matériau isotrope

La norme de \underline{K}_2 , projeté d’un tenseur des contraintes sur cet espace propre (aussi nommé \mathbf{S} , le déviateur) représente le cisaillement maximal. C’est aussi $\sqrt{2/3} J_2$, le second invariant de utilisé dans le critère de Von Mises.

Nous pouvons aussi décrire le cas où les deux modules de Kelvin sont égaux. Ceci entraîne que le coefficient de Lamé μ et le coefficient de Poisson sont nuls. Tout tenseur de T^{2S} est mode propre. On peut imaginer que le matériau a une réponse toujours proportionnelle à la sollicitation. Certains auteurs nomment ce type de solides ‘‘hyperélastiques’’ (attention, ce terme est utilisé dans d’autres domaines).

5.2.2 Cubique

Nous considérons ici un matériau à symétrie cubique, décrit dans un repère de base \mathbf{u}^i correspondant aux directions de symétrie du matériau. L’écriture de \mathbb{C} sous forme 6x6 prend alors sa forme habituelle. Kelvin (1856) et Mehrabadi et Cowin (1990) montrent que le solide de symétrie cubique possède trois modules de Kelvin correspondants à trois espaces propres que nous détaillons ci-après. Les modules de Kelvin sont obtenus en diagonalisant la matrice représentant \mathbb{C} dans T^{2S} T^{2S} ; c’est à dire en recherchant la nullité du déterminant suivant :

$$\det \begin{pmatrix} \underline{C}_{11} - \underline{K}_1 & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{12} & \underline{C}_{11} - \underline{K}_1 & \underline{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{12} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{11} - \underline{K}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} - \underline{K}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} - \underline{K}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} - \underline{K}_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.2-5}$$

Mode dilatationnel (sphérique) de dimension 1

Le premier espace est de dimension 1 et correspond au mode sphérique (dilatationnel) décrit à propos des solides isotropes. Nous reprenons donc le tenseur \mathbf{E}^1 normé :

$$\mathbf{E}^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad 5.2-6$$

Le module de Kelvin associé $\underline{\mu}^1$ associé vaut, de même que précédemment :

$$\underline{\mu}^1 = \underline{C}_{11} + 2 \underline{C}_{12} \quad 5.2-7$$

Premier mode isochore de dimension 2

Le second espace propre est celui des cisaillements dans les plans de symétrie. C'est un mode isochore. Nous pouvons créer une base orthonormée de cet espace à deux dimensions (trois directions et une condition de trace nulle) à partir de la famille de tenseurs suivantes, dans laquelle a et b sont des scalaires dont un est non nul.

$$\mathbf{E}^{21,22} = \frac{1}{2(a^2+b^2+ab)} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b) \end{pmatrix} \quad 5.2-8$$

Le module de Kelvin $\underline{\mu}^2$ correspondant vaut :

$$\underline{\mu}^2 = \underline{C}_{11} - \underline{C}_{12} \quad 5.2-9$$

Second mode isochore de dimension 3

Les modules de Kelvin de ce mode correspondent à la diagonalisation du troisième quart de la matrice représentant \mathbb{C} . Le module de Kelvin vaut donc \underline{C}_{44} .

$$\underline{\mu}^3 = \underline{C}_{44} \quad 5.2-10$$

Cet espace propre de dimension 3 est constitué des cisaillements hors plans de symétrie. C'est aussi, bien sûr, un mode isochore. La façon la plus simple de compléter la base orthonormée est décrite par le tenseur ci-dessous :

$$\mathbf{E}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2-11$$

Si l'on se souvient que \underline{C}_{44} est égal à $2 C_{44}$ (chapitre 1 : bases de tenseurs), l'égalité de $\underline{\mu}^2$ et $\underline{\mu}^3$ fournit la condition classique nécessaire pour qu'un solide cubique soit isotrope, en notation de Voigt :

$$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad 5.2-12$$

écriture intrinsèque de la loi de comportement

Pour le premier espace propre, la projection \mathbb{P}^1 : correspond classiquement à la partie sphérique (hydrostatique) de :

$$\mathbb{P}^1 : \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \mathbf{I} \quad 5.2-13$$

Le troisième projecteur est obtenu par la somme des produits $\mathbf{E}^3 \mathbf{E}^3$ pour $p=1,2,3$. Soit, dans la base $\mathbf{T}^2 \mathbf{T}^2$:

$$\mathbb{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 5.2-14$$

Nous pouvons aussi écrire la partie de obtenue par cette projection \mathbb{P}^3 :

$$(i,j \text{ non sommés}) \quad (\mathbb{P}^3 :)_{ij} = (1 - ij) \quad ij \quad 5.2-15$$

La projection \mathbb{P}^2 : est obtenue en complémentant les deux précédentes jusqu'à l'identité :

$$(i,j \text{ non sommés}) \quad (\mathbb{P}^2 :)_{ij} = ij \left(ij - \frac{1}{3} pp \right) \quad 5.2-16$$

J'en profite pour proposer une loi de comportement "minimale" pour un matériau à symétrie cubique, similaire à la formulation classique pour les matériaux isotropes vus au chapitre précédent. Soit, dans un repère de symétrie, avec i,j non sommés :

$$ij = -\frac{1}{3} \left(pp \right) \quad ij + -\frac{2}{3} \left(ij - \frac{1}{3} pp \right) \quad ij + -\frac{3}{3} (1 - ij) \quad ij \quad 5.2-17$$

Cette loi de comportement est minimale, et ne fait intervenir que les trois modules de Kelvin du matériau. Elle se rapproche de la loi bien connue pour les matériaux isotropes. Néanmoins, elle n'est pas écrite en terme d'invariants (sauf pour le premier mode), ce qui est bien normal puisque le matériau ne possède pas toutes les symétries.

5.2.3 Isotrope transverse

Nous allons considérer dans ce chapitre les solides isotropes transverses, ou hexagonal 5 en notation cristallographique. Le tenseur de rigidité \mathbb{C} est écrit dans une base \mathbf{u}^i qui fait correspondre l'axe de symétrie avec le vecteur \mathbf{u}^3 . Le tenseur de rigidité prend alors la forme classique :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{12} & \underline{C}_{11} & \underline{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{13} & \underline{C}_{13} & \underline{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{11} - \underline{C}_{12} \end{pmatrix} \quad 5.2-18$$

Nous donnons ici les quatre modes propres présentés par Rychlewski (1984). Mehrabadi et Cowin (1990) précisent le calcul des modules de Kelvin associés et le détail des coefficients présentés. Ces calculs sont très longs et le lecteur pourra en trouver le détail dans cette publication.

Premier mode dilatationnel de dimension 1

$$\mathbf{E}^1 = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \sin x \end{pmatrix} \quad 5.2-19$$

La valeur de x dépend des \underline{C}_{ij} . Ce mode correspond à une compression plane autour de l'axe \mathbf{u}^3 associée à une tension (suivant un rapport précis) sur l'axe \mathbf{u}^3 .

Second mode dilatationnel de dimension 1

$$\mathbf{E}^2 \begin{pmatrix} \sin x & 0 & 0 \\ 0 & \sin x & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \cos x \end{pmatrix} \tag{5.2-20}$$

La valeur de x est précisée par Cowin, elle dépend des \underline{C}_{ij} . Ce mode est similaire au précédent, avec un rapport différent.

Troisième mode isochore de dimension 2

Les modules de Kelvin correspondent ici à la diagonalisation de la sous-matrice diagonale contenant les \underline{C}_{44} . Ce dernier est donc le module de Kelvin correspondant à cet espace propre de dimension 2, représentant les cisaillements sur $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^3$ et $\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3$.

$$\mathbf{E}^{21,22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ u & v & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2-21}$$

Nous pouvons choisir deux représentants simples et normés avec $(u,v) \in \{ (1/\sqrt{2},0) ; (0,1/\sqrt{2}) \}$. Le mode ci-dessus représente une combinaison de cisaillements faisant intervenir l'axe de symétrie.

Quatrième mode isochore de dimension 2

Le dernier module de Kelvin est $\underline{C}_{11} - \underline{C}_{12}$, qui est valeur propre du premier quart de la matrice représentant \mathbb{C} ainsi que de la dernière sous-matrice (en fait le terme C_{66} seul). Nous avons donc :

$$\mathbf{E}^{31,32} \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2-22}$$

La construction ci-dessus permet de choisir deux représentants simples et normés avec $(x,y) \in \{ (1/\sqrt{2},0) ; (0,1/\sqrt{2}) \}$. Le mode ci-dessus représente une combinaison de cisaillements ne faisant pas intervenir l'axe de symétrie.

5.2.4 Trigonal (rhomboédrique)

Nous détaillons dans ce chapitre les modes propres des solides trigonaux ou hexagonaux 6 ou 7 en notation cristallographique. La différence entre ces deux symétries ne concerne que le choix du repère de référence \mathbf{u}^1 . L'écriture ci-dessous prend comme axe de symétrie hexagonale le vecteur \mathbf{u}^3 . Comme il est rappelé au chapitre 4.1, la symétrie hexagonale 6 choisit un \mathbf{u}^1 qui est une normale à un plan de symétrie, tandis que la symétrie hexagonale 7 n'est pas "calée" de la sorte mais peut se ramener à une hexagonale 6 par rotation autour de \mathbf{u}^3 . Les termes qui apparaissent alors sont ici indiqués en italique. Nous choisirons pour la suite \mathbf{u}^2 correspondant à un axe de symétrie, c'est à dire le cas hexagonal 6. Les démonstrations sont fournies par Mehrabadi et Cowin (1990) qui distingue curieusement les symétries hexagonales 6 et 7.

$$\mathbb{C} \begin{pmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} & \underline{C}_{14} & -\underline{C}_{15} & 0 \\ \underline{C}_{12} & \underline{C}_{11} & \underline{C}_{13} & -\underline{C}_{14} & \underline{C}_{15} & 0 \\ \underline{C}_{13} & \underline{C}_{13} & \underline{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{14} & -\underline{C}_{14} & 0 & \underline{C}_{44} & 0 & \underline{C}_{15} \\ -\underline{C}_{15} & \underline{C}_{15} & 0 & 0 & \underline{C}_{44} & \underline{C}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{15} & \underline{C}_{14} & \underline{C}_{11} - \underline{C}_{12} \end{pmatrix} \quad 5.2-23$$

Deux modes dilatationnels de dimension 1

Ces deux modes ont une allure similaire à celle des deux modes de dimension 1 décrits au chapitre précédent pour la symétrie isotrope transverse. Bien sûr, la valeur de x dépend alors du coefficient non nuls \underline{C}_{14} qui apparaît pour ce type de symétrie.

Deux modes isochores de dimension 2

Ces deux nouveaux modes isochores ressemblent à une combinaison linéaire de ceux décrits au chapitre précédent pour l'isotropie transverse. Nous avons :

$$\mathbf{E}^{21,22} \begin{pmatrix} a & b & u \\ b & -a & v \\ u & v & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2-24$$

Et :

$$\mathbf{E}^{31,32} \begin{pmatrix} x & y & r \\ y & -x & q \\ r & q & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2-25$$

Le cas isotrope transverse est donc un cas particulier du cas trigonal présenté ici pour lequel les valeurs (a,b,q,r) sont nulles.

Distinction entre trigonal et isotrope transverse

Lors de l'analyse d'un tenseur \mathbb{C} inconnu et exprimé dans un repère quelconque, comment distinguer un tenseur trigonal d'un tenseur isotrope transverse? Je propose d'utiliser la propriété suivante : un tenseur \mathbb{C} trigonal est isotrope transverse si les des deux modes isochores (de dimension 2) $\mathbf{E}^{21,22}$ et $\mathbf{E}^{31,32}$ sont à déterminants nuls.

5.2.5 Tétragonal (quadratique)

Ce chapitre est dédié aux solides à symétrie tétragonale 6. C'est à dire que les plans de symétrie sont les quatre plans orthogonaux aux vecteurs de base \mathbf{u}^1 et \mathbf{u}^2 et leurs bissectrices. Le dernier plan de symétrie étant constitué par le plan orthogonal à \mathbf{u}^3 . La symétrie tétragonale 7 est identique à la symétrie tétragonale 6 à une rotation autour de \mathbf{u}^3 près. Le tenseur de rigidité prend l'allure suivante :

$$\mathbb{C} \begin{pmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} & 0 & 0 & \underline{C}_{16} \\ \underline{C}_{12} & \underline{C}_{11} & \underline{C}_{13} & 0 & 0 & -\underline{C}_{16} \\ \underline{C}_{13} & \underline{C}_{13} & \underline{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} & 0 \\ \underline{C}_{16} & -\underline{C}_{16} & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{11} - \underline{C}_{12} \end{pmatrix} \quad 5.2-26$$

Les détails de calcul des modes propres et des modules de Kelvin sont donnés par Mehrabadi et Cowin (1990) qui distingue ici aussi curieusement les symétries tétragonales 6 et 7.

Deux modes dilatationnels de dimension 1

Ces deux modes ont une allure similaire à celle des deux modes de dimension 1 décrits au chapitre de la symétrie isotrope transverse.

Deux modes isochores de dimension 1

Un des modes représente le cisaillement suivant $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$:

$$\mathbf{E}^{21} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2-27$$

Et l'autre les cisaillements suivant les bissectrices de $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$:

$$\mathbf{E}^{22} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2-28$$

Un mode isochore de dimension 2

Ce mode, de module de Kelvin \underline{C}_{44} , est identique à celui de la symétrie isotrope transverse vu au chapitre précédent, correspondant aux cisaillements $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^3$ et $\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3$, c'est à dire faisant intervenir le "dernier" plan de symétrie \mathbf{u}^3 .

$$\mathbf{E}^{51,52} \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ u & v & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2-29$$

5.2.6 Orthotrope

Ce chapitre traite des tenseurs de rigidité de symétrie orthotrope. Les calculs sont effectués dans des axes \mathbf{u}^i choisis correspondants aux normales aux trois plans de symétrie. Le détail des calculs peut être trouvé dans la publication de Mehrabadi et Cowin (1990). Le tenseur de rigidité prend la forme suivante :

$$\mathbb{C} \begin{pmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{12} & \underline{C}_{22} & \underline{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{13} & \underline{C}_{23} & \underline{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{66} \end{pmatrix} \quad 5.2-30$$

Trois modes de dimension 1

Les trois modules de Kelvin correspondent aux valeurs propres du premier quart de la matrice ci-dessus. Ceux-ci, ainsi que les modes propres correspondants sont donc sans propriétés quelconque, comme les six valeurs présentes sont indépendantes.

Trois modes isochores de dimension 1

Ceux-ci correspondent à la diagonalisation du troisième quart de la matrice ci-dessus. Les modules de Kelvin sont évidents à trouver et valent \underline{C}_{44} , \underline{C}_{55} , \underline{C}_{66} . Les modes propres associés sont, de façon évidente, les cisaillements sur les directions $\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3$; $\mathbf{u}^3, \mathbf{u}^1$ et $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$.

5.2.7 Monoclinique

Nous traitons dans ce chapitre de la symétrie monoclinique, c'est à dire à un seul plan de symétrie. Le détail des calculs n'est pas fourni par Cowin et Mehrabadi (1992 A). Cette publication parle d'exactement quatre modes propres dilatationnels et deux modes propres isochores, mais la correction parue plus tard remplace l'égalité par une inégalité (Cowin et Mehrabadi, 1992-B)

Au plus quatre modes propres dilatationnels

Ces modes n'ont pas de propriété particulière, comme la matrice représentant \mathbb{C} est très peu "contrainte".

Au moins deux modes isochores

Deux modes sont, eux, isochores.

5.2.8 Triclinique

Dans ce cas d'absence de symétrie, nous avons une définition par défaut. En effet, tout tenseur ne possédant aucune des propriétés ci-dessus sera triclinique.

5.2.9 Conclusions

La décomposition de Kelvin permet d'identifier simplement tout type de symétrie exacte pour un tenseur de rigidité \mathbb{C} exprimé dans une base quelconque car les propriétés permettant l'identification (ordre des modes, isochore, dilatationnel) sont intrinsèques. Celles ci sont résumées dans le tableau du chapitre suivant (5.3). Le programme `mod_de_Kelvin.m` réalise cette analyse.

La recherche des axes propres (c'est à dire les \mathbf{u}^i pour lesquels la matrice \underline{C}_{IJ} s'exprime de façon simple) pourrait se faire sur les tenseurs du second ordre \mathbf{E}^{IP} plutôt que sur le tenseur du quatrième ordre \mathbb{C} . Bien sûr, pour un tenseur entaché d'erreurs les propriétés ne sont plus vérifiées. Il est possible de remplacer des égalités par des tolérances (comme il est fait dans le programme). Mais il me semble difficile de créer des marges d'erreurs équitablement pondérées pour les différents critères. Par exemple, décider de l'égalité de modules de Kelvin à 10^{-6} est-il aussi "rigoureux" que de décider la nullité de la trace d'un mode à 10^{-6} près? Pour ces raisons, le choix du type de symétrie pour un tenseur entaché d'erreurs n'a pas été fait suivant cette méthode, ni suivant d'autres indicateurs rigoureux comme les invariants C_{ijkk} et C_{ikkj} ² (Cowin et Mehrabadi, 1987), (Jarić 1994), ou l'autre décomposition de \mathbb{C} présentée par Böhler *et al.* (1994), Onat (1991), Backus (1970), Surrel (1993) et rattachée à celle de Kelvin par Baerheim (1993).

Enfin, le point fort de la décomposition de Kelvin est l'équivalence de l'écriture en contraintes et déformations. L'arbitraire du choix est ainsi levé et l'écriture d'une surface seuil dans une base propre me semble être indispensable pour décrire la plasticité, l'endommagement ou autre phénomène. Le chapitre suivant représente un travail sur l'endommagement allant dans ce sens, par l'utilisation des énergies de mode.

² Ces indicateurs ont d'ailleurs une relation directe avec le tenseur acoustique de Christoffel . Voir à ce sujet le chapitre 3.1.3.

5	DÉCOMPOSITION DE KELVIN	96
5.1	Principe de la décomposition	97
5.1.1	Analyse de C dans la base T 2S f T 2S	97
5.1.2	Diagonalisation de C	98
5.1.3	Nouvelle formulation de la loi de comportement	98
5.1.4	Visualisation	99
5.1.5	Calcul de l'énergie élastique	100
5.2	Modes propres et symétries	101
5.2.1	Isotrope	101
5.2.2	Cubique	102
5.2.3	Isotrope transverse	104
5.2.4	Trigonal (rhomboédrique)	106
5.2.5	Tétragonal (quadratique)	107
5.2.6	Orthotrope	107
5.2.7	Monoclinique	108
5.2.8	Triclinique	108
5.2.9	Conclusions	108

Figure 5-1. Tenseur de rigidité dans sa base propre _____ 98

Figure 5-2. Schématisation de la décomposition de s et e en modes propres _____ 100

Table 5-1. Correspondance des notations de la décomposition de Kelvin _____ 98
Table 5-2. Valeur des modules de Kelvin d'un matériau isotrope _____ 102

Backus (1970).....	109
Baerheim (1993)	109
Böhler (1994).....	109
Cowin et Mehrabadi (1992).....	108
Cowin et Mehrabadi, 1987	109
Cowin et Mehrabadi, 1992-1	108
Dieulesaint et Royer (1974).....	101
Glazman and Lyubitch, 1969.....	97
Gurtin (1972)	101
Gurtin (1974)	97
Jaric.....	109
Kelvin (1856).....	102
Khalmosh, 1963.....	97
Lord Kelvin (1856)	97
Mal’Tsev, 1956.....	97
Mehrabadi (1990)	102
Mehrabadi et Cowin (1990).....	97
Mehrabadi et Cowin (1990).....	101
Mehrabadi et Cowin (1990).....	105
Mehrabadi et Cowin (1990).....	106
Mehrabadi et Cowin (1990).....	107
Mehrabadi et Cowin (1990).....	108
Onat (1991).....	109
Rychlewski (1984).....	97
Rychlewski (1984).....	99
Rychlewski (1984).....	99
Rychlewski (1984).....	101
Rychlewski (1984).....	104
Surrel (1993).....	109
Surrel (1996).....	102

6 MODÈLES D'ENDOMMAGEMENT ANISOTROPE ISSUS DE LA DÉCOMPOSITION DE KELVIN

Il était difficile de résister à la tentation “*de mettre un d devant les* ” comme me le suggéra un jour Pippo dans le couloir du labo.

6.1 Principe de symétrie : direction de l'endommagement

L'endommagement a d'abord été observé comme une diminution du module d'Young (Kachanov, 1958 ; Lemaitre et Dufailly, 1977), après un certain seuil, lors d'un essai de traction (compression) (Mazars, 1984). Pour cette raison, beaucoup de modèles privilégient comme variable le module d'Young. L'essai de traction ne représentant généralement pas un mode propre, nous n'utiliserons pas cet indicateur. L'endommagement représente de façon générale une perte de rigidité par rapport au matériau original. Nous allons appliquer les concepts présentés à des matériaux élastiques endommageables (céramiques ou bétons par exemple) en excluant tous les couplages possibles (plasticité..). Beaucoup de modèles d'endommagement anisotropes présupposent la direction \mathbb{K} de l'endommagement. Par exemple en la définissant orthotrope, ce qui correspond aux possibilités de délaminage des composites ou encore en supposant une mécanique de l'endommagement (Lemaitre et Chaboche 1985). Je me suis efforcé de laisser la nouvelle symétrie se créer d'elle même, en respectant le principe de symétrie (bien connu des cristallographes) suivant :

“Les conséquences sont au moins aussi symétriques que les causes”.

Les conséquences sont : le tenseur de rigidité \mathbb{C} du matériau.

Les causes sont : le tenseur de rigidité \mathbb{C}^0 du matériau vierge et le tenseur des contraintes ou des déformations imposées. Entre ces deux derniers il faut effectuer un choix car ils n'ont pas, en général, les mêmes symétries. Par contre l'ensemble de ces causes possède un groupe de symétrie bien défini : c'est celui des modes propres \mathbb{P}^I pour le tenseur de rigidité \mathbb{C}^0 et celui, inclus dans le précédent, des projetés \mathbb{P}^I : ou \mathbb{P}^I : de la contrainte et de la déformation. C'est donc, à partir de ces ensembles que nous allons bâtir le tenseur de rigidité \mathbb{C} du matériau endommagé.

Soit le tenseur de rigidité \mathbb{C} défini comme le tenseur initial \mathbb{C}^0 moins un tenseur d'écart \mathbb{K} (défini positif) qui représente la contribution de l'endommagement :

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^0 - \mathbb{K} \quad 6.1-1$$

Ce tenseur aura, dans le cas d'une évolution monotone de la sollicitation extérieure une direction constante (normée) et une évolution pilotée par des scalaires d^I que l'on peut représenter par un “vecteur” \mathbf{d} (évoluant de façon homothétique dans le cas d'une évolution monotone).

6.2 Différentes lois de comportement et potentiels thermodynamiques

D'après les considérations précédentes nous allons écrire les formes de lois de comportement (et le potentiel thermodynamique associé) admissibles. Le tenseur de rigidité \mathbb{C}^0 du matériau vierge est directement remplacé par sa décomposition vue au chapitre précédent.

6.2.1 Symétrie de l'endommagement guidée par le matériau seul (modèle isotrope)

Ici le tenseur de rigidité \mathbb{K} n'est construit qu'à partir des projecteurs \mathbb{P}^I sur les modes propres du matériau vierge.

$$\mathbb{K} = \sum_I \mu^I \mathbb{P}^I \quad 6.2-1$$

D'où, avec l'équation 5.1-9 :

$$\mathbb{C} = \sum_I \mu^I (1 - d^I) \mathbb{P}^I \quad 6.2-2$$

Quelle que soit l'évolution de \mathbf{d} la symétrie du matériau ne changera pas (sauf pendant l'éphémère augmentation de symétrie qui peut être provoquée par l'égalité généralement momentanée de deux modules $\mu^I (1 - d^I)$). Cette constance me pousse à nommer ce modèle **isotrope** (en référence aux modèles de plasticité). Détaillons encore un peu ce modèle isotrope pour les matériaux anisotropes : l'influence de la sollicitation extérieure se trouvera néanmoins dans l'évolution de \mathbf{d} qui sera pilotée par un potentiel de dissipation Ψ^* (et la loi de normalité) associé au seuil d'endommagement que nous étudierons au chapitre suivant.

Le potentiel thermodynamique endommageable (Lemaitre et Chaboche 1985) vaut donc, en fonction du projeté $\mathbb{P}^I (= \mathbb{P}^I :)$:

$$\Psi^* = \frac{1}{2} \sum_I \mu^I (1 - d^I) \mathbb{P}^I : \mathbb{P}^I \quad 6.2-3$$

La densité d'énergie stockée par le matériau vaut Ψ . La contrainte \mathbb{Y}^I dérive de ce potentiel par rapport à la déformation \mathbb{E} . Les taux de restitution de densité d'énergie élastique $-\dot{\Psi}^I$ dérivent de ce potentiel par rapport aux scalaires d'endommagement d^I :

$$-\dot{\Psi}^I = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial d^I} = -\frac{1}{2} \mu^I \mathbb{P}^I : \mathbb{P}^I \quad 6.2-4$$

Cette grandeur représente (au signe près) l'énergie du mode I si celui-ci ne s'endommageait pas. Il est à rappeler que les grandeurs μ^I , d^I , \mathbb{Y}^I ont le même nombre de composantes : le nombre d'espaces propres, c'est à dire au plus six. Enfin rappelons l'énergie élastique associée à chaque mode W^I qui a été précisée au chapitre précédent et vaut :

$$W^I = (1 - d^I) \mathbb{Y}^I \quad 6.2-5$$

6.2.2 Remarque concernant la suite du chapitre

A présent nous allons envisager l'influence de la sollicitation ou imposée. Nous allons donc, pour exposer les idées présentées, nous placer dans le cas d'une évolution monotone. Pour une raison que nous détaillerons dans le chapitre consacré à l'hypothèse d'énergie maximale, nous faisons le choix de privilégier la déformation comme variable d'état, avec \mathbf{d} . Pour modéliser une évolution monotone nous supposons que évolue en conservant sa direction \mathbf{E} normée.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} \tag{6.2-6}$$

$$= e \mathbf{E} \tag{6.2-7}$$

Le scalaire e représente alors l'intensité de la déformation et on suppose qu'il évolue de façon monotone au cours du temps, avec une vitesse supposée "lente" pour éliminer les phénomènes dynamiques et thermiques.

On peut aussi en déduire une formulation différentielle, \mathbb{C}^0 représentant alors l'état actuel du matériau soumis à un incrément de déformation $d = de \mathbf{E}$. Le complément de la différentielle $e d\mathbf{E}$ n'est pas traité ici.

6.2.3 Symétrie de l'endommagement guidée par la sollicitation

Ici, nous choisissons de privilégier la déformation pour piloter la symétrie de l'endommagement, c'est à dire de \mathbb{K} . On peut, bien sûr, privilégier la contrainte et les équations sont obtenues en faisant la permutation dans tout ce chapitre. Cette approche est un peu en contradiction avec les considérations vues au chapitre précédent et n'utilise pas la décomposition de Kelvin mais s'inscrit dans la logique du raisonnement sur les symétries. Nous avons :

$$\mathbb{K} = d \mathbf{E} \mathbf{E} \tag{6.2-8}$$

soit :
$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^0 - d \mathbf{E} \mathbf{E} \tag{6.2-9}$$

Ce modèle présente une propriété intéressante : pour un assouplissement du matériau donné par rapport à une déformation imposée, il perturbe le moins le tenseur originel \mathbb{C}^0 . C'est à dire que la norme de \mathbb{K} est minimale. Il constitue en cela une borne.

La symétrie du matériau changera au cours de l'endommagement. Précisons le potentiel thermodynamique :

$$= \frac{1}{2} (: \mathbb{C}^0 : - d :) \tag{6.2-10}$$

Le taux de restitution de densité d'énergie - Y vaut simplement :

$$- Y = - \frac{1}{2} : \tag{6.2-11}$$

Enfin la valeur limite de d (à rupture) n'est plus ici forcément égal à 1 ; ici d possède une

dimension (GPa). La rupture est atteinte lorsque \mathbb{C} n'est plus défini positif (un des modules de Kelvin devient nul).

6.2.4 Symétrie de l'endommagement guidée par les parties propres de la sollicitation (modèle mixte)

Par sollicitation on entend bien sûr contrainte ou déformation qui ont les mêmes directions propres. Cette phrase entraîne l'écriture suivante :

$$\mathbb{K} = \sum_I \mathbb{I}^I d^I \mathbb{E}^I \quad 6.2-12$$

Soit :

$$\mathbb{C} = \sum_I \mathbb{I}^I (\mathbb{P}^I - d^I \mathbb{E}^I) \quad 6.2-13$$

Le projecteur \mathbb{E}^I doit être construit à partir des parties propres $\mathbb{I}^I = \mathbb{P}^I$: , en les normant. Soit donc, si \mathbb{P}^I : est non nul :

$$\mathbb{E}^I = \frac{\mathbb{I}^I}{\|\mathbb{I}^I\|} \quad 6.2-14$$

et, sinon

$$\mathbb{E}^I = \mathbb{0} \quad 6.2-15$$

Il est évident que ce "saut" ne doit pas se faire sentir dans l'écriture de \mathbb{C} et que si \mathbb{P}^I : est faible pour un mode, la variable d'endommagement d^I correspondante devra l'être aussi pour assurer la continuité de la fonction.

Condition

$$\lim_{\|\mathbb{I}^I\| \rightarrow 0} d^I = 0 \quad 6.2-16$$

Le potentiel thermodynamique s'écrit simplement :

$$= \frac{1}{2} \sum_I \mathbb{I}^I (1 - d^I) \mathbb{I}^I : \mathbb{I}^I \quad 6.2-17$$

Au premier abord il est curieux de retrouver le même potentiel thermodynamique que pour le modèle isotrope. Mais ceci est logique si l'on considère que \mathbb{E}^I est un projecteur contenu dans \mathbb{P}^I . En effet, cela signifie que la seule différence entre les deux modèles consiste à prendre en compte ou non la partie orthogonale $\mathbb{P}^{I*} = \mathbb{P}^I - \mathbb{E}^I \mathbb{E}^I$, dont l'énergie \mathbb{P}^{I*} : est nulle. Nous n'avons donc pas besoin de recalculer \mathbb{Y}^I et \mathbb{W}^I qui sont les mêmes que pour le modèle isotrope.

6.3 Fonction de dissipation : énergie maximale

L'approche précédente ne change rien à l'écriture de la loi d'évolution (scalaire) de l'endommagement. Pour cette raison, elle est choisie dans tout le chapitre aussi simple que possible, en décidant d'une énergie élastique W **maximale** nommée Y° . L'énergie élastique W sera donc constante dans le matériau pendant l'endommagement. étant donné que je ne pense pas qu'un matériau endommagé puisse stocker plus d'énergie qu'un matériau vierge, j'envisage ce modèle comme une borne (supérieure) du comportement des matériaux.

Pour fixer les idées nous présentons ici un exemple unidimensionnel, c'est à dire un ressort de raideur initiale k , d'énergie maximale Y° , dont l'extrémité se déplace d'une longueur x sous l'effet d'une force F . Nous avons la loi de comportement suivante, qui tient compte de l'endommagement d :

$$F = k (1 - d) x \quad 6.3-1$$

L'énergie élastique est donnée par

$$W = \frac{1}{2} k (1 - d) x^2 \quad 6.3-2$$

Le taux de restitution de densité d'énergie - Y :

$$- Y = - \frac{1}{2} k x^2 \quad 6.3-3$$

Pour maximiser l'énergie W à la valeur Y° , nous pouvons écrire la fonction indicatrice de l'endommagement f ($f = 0$ lors de l'endommagement ; $f = 1$ si non) comme suit :

$$f(Y) = 1 - \frac{(1-d) Y}{Y^\circ} \quad 6.3-4$$

Cette écriture est, pour Y au voisinage de Y° , un cas particulier de la loi de Marigo (1981) qui prévoit une évolution linéaire de d en fonction de Y à partir d'un seuil.

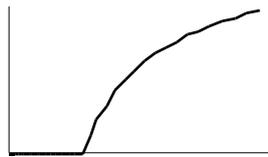


Figure 6-1. évolution de l'endommagement en fonction du taux Y

La nullité de la fonction f pendant l'endommagement entraîne l'expression de d suivante, en fonction de la variable x :

$$d = \left\langle 1 - \frac{2 Y^\circ}{k x^2} \right\rangle^+ \quad 6.3-5$$

Dans cette expression $\langle \rangle^+$ représente la partie positive du terme. L'expression ci-dessus est valable si l'on considère un essai mécanique pour lequel le déplacement x ne fait qu'augmenter, sous forme, par exemple, d'une rampe de vitesse a (supposée suffisamment faible pour pouvoir négliger les phénomènes dynamiques et thermiques) :

$$x = a t \quad 6.3-6$$

Le déplacement critique x_c pour lequel se produit le premier endommagement vaut :

$$x_c = \sqrt{\frac{2 Y^o}{k}} \tag{6.3-7}$$

La force critique associée est la force maximale atteinte et vaut :

$$F_c = \sqrt{2 k Y^o} \tag{6.3-8}$$

Ce modèle ne prévoit pas la rupture. Rappelons qu'il constitue une borne supérieure au comportement des matériaux. Un essai "réel" (unidimensionnel) permettrait de caler la loi d'évolution de Y en fonction de x . Le tableau ci-dessous représente l'évolution de l'ensemble des variables d, Y, F , et la raideur $k(1 - d)$ en fonction de la variable privilégiée x pour un essai rampe :

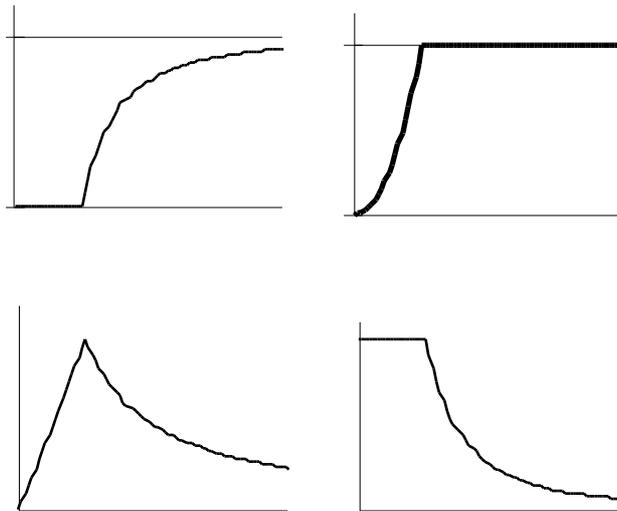


Figure 6-2. évolution des variables en fonction du déplacement imposé $x = a t$

Il est intéressant de représenter l'évolution des variables en privilégiant la variable F , la force exercée sur le ressort. Nous pouvons constater qu'il est en fait impossible d'endommager le matériau avec un essai à force imposée car, une fois arrivé à la force critique F_c nous sortons du domaine prévu, c'est à dire nous obtenons la rupture du matériau. D'autre part, même pour l'essai rampe $x = a t$, les grandeurs ne sont plus des fonctions, ce qui risque de compliquer grandement les équations.

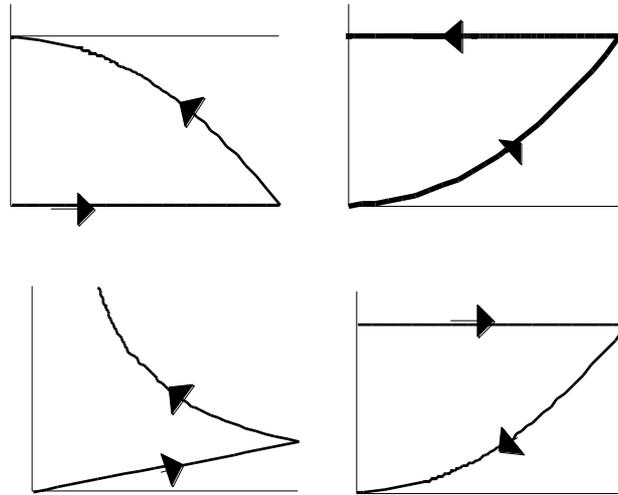


Figure 6-3. évolution des variables en fonction de la force F pour un essai à déplacement imposé $x = at$

Nous envisagerons donc pour tout le chapitre un essai à déformation imposée pour illustrer les modèles proposés.

6.4 Fonction seuils - potentiel de dissipation

La similitude en contrainte et déformation est le grand avantage de tout critère fondé sur la décomposition de Kelvin. Cowin et Sadegh (1991) comparent en effet une carte iso-Von Mises qui prend bien évidemment des allures différentes en contraintes et déformations pour un matériau anisotrope (orthotrope dans l'exemple) et les cartes iso-invariants issus de la décomposition de Kelvin qui sont elles, bien sûr, proportionnelles. Cette propriété permet donc d'écrire les critères de seuil d'endommagement (le potentiel de dissipation ψ^* à la fois en contrainte et en déformation).

Il nous reste à écrire une fonction seuil de l'endommagement, et le pseudo-potential de dissipation ψ^* associé (Lemaitre et Chaboche 1985). Nous considérerons pour simplifier que le potentiel ψ^* est la fonction f indicatrice du convexe d'élasticité. Il sera donc négatif (pas d'endommagement) ou nul (endommagement). Nous le construirons à partir des énergies maximales Y^I . Rappelons la loi de normalité, qui définit la direction de l'endommagement :

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{f}{Y} \circ \quad 6.4-1$$

Le terme $\dot{\mathbf{d}}$ est déterminé par la nullité de f et en écrivant la différentielle de f qui doit être nulle lors de l'endommagement :

$$df = \frac{f}{Y} \cdot dY + \frac{f}{\mathbf{d}} \cdot d\mathbf{d} \quad 6.4.2$$

Nous obtenons l'expression de df puis celle de $d\mathbf{d}$. Les expressions ne permettront pas, en général de garder la notation vectorielle, nous utiliserons la notation indicielle d^I et d^I .

6.4.1 Symétrie guidée par la sollicitation

Mais commençons par le cas où tout cela est inutile : le cas simple du modèle en sollicitation pilotant l'endommagement (6.2.3). Dans ce cas la loi de normalité ne s'impose par et \mathbf{d} est fourni par l'hypothèse d'énergie maximale Y^0 . Le matériau s'endommage lorsque k augmente et voit sa résistance à la déformation imposée \mathbf{E} diminuer. L'endommagement commence lorsque l'on atteint un niveau global d'énergie Y^0 . Dans le cas de l'évolution monotone $\mathbf{e} = \mathbf{E}$ décrite (6.2.2) nous pouvons préciser la déformation e_m suivante :

$$e_m = \sqrt{\frac{2 Y^0}{\mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}}} \quad 6.4-3$$

et l'endommagement d :

$$d = \left\langle \frac{e^2 \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} - 2 Y^0}{e^2} \right\rangle_+ \quad 6.4-4$$

6.4.2 Modèle isotrope ou modèle mixte

Ici, les choses sont déjà plus complexes. L'endommagement est décrit par le vecteur \mathbf{d} constitué des d^I de chaque mode. Nous pouvons déterminer une fonction seuil qui tienne compte de la décomposition de Kelvin et donc des énergies de mode W^I . Nous les supposons comme précédemment maximisées par des énergies-seuil Y^{0I} . Construisons un vecteur \mathbf{w} représentant l'énergie de mode réduite :

$$w^I = \frac{W^I}{Y^{0I}} \tag{6.4-5}$$

C'est à dire
$$w^I = \frac{(1 - d^I) Y^I}{Y^{0I}} \tag{6.4-6}$$

Si l'un des w^I atteint 1, l'endommagement commence. Lorsqu'ils évoluent simultanément, on peut utiliser une norme ⁽¹⁾. Cette écriture nous permet de généraliser la fonction présentée pour le modèle unidimensionnel (6.3-4) :

$$f = 1 - \|\mathbf{w}\|_N \tag{6.4-7}$$

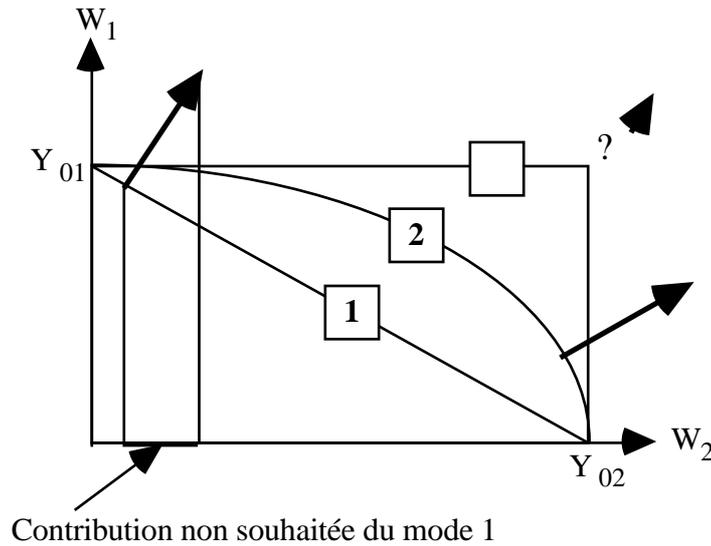


Figure 6-4. Courbes limites des énergies de mode en fonction du choix de la norme.

Le choix de la norme ne peut être fait que d'après des essais ou des considérations de micromécanique. Je choisis d'utiliser la classique norme 2 (Euclidienne) qui évite les non dérivabilités de la norme 1 et la normale de direction constante de la norme 1 qui apporte une contradiction avec l'hypothèse de continuité en 0 (6.2-16).

$$N = 2 \tag{6.4-8}$$

Nous obtenons dans ces conditions les paramètres déterminant l'endommagement, alors que $\|\mathbf{w}\| = 1$:

$$\frac{f}{Y^I} = \frac{(1 - d^I)^2 Y^I}{(Y^{0I})^2} \tag{6.4-9}$$

¹ Il est possible d'envisager une indépendance entre les modes ; c'est ce qui fut fait et programmé en premier. C'est aussi le cas particulier de la norme infinie.

$$\frac{f}{d^I} = - \frac{(1 - d^I) (Y^I)^2}{(Y^{0I})^2} \quad 6.4-10$$

$$d = - \frac{I \frac{(1 - d^I)^2 Y^I}{(Y^{0I})^2}}{I \frac{(1 - d^I)^3 (Y^I)^3}{(Y^{0I})^4}} dY^I \quad 6.4-11$$

Et il reste dd à calculer qui vaut simplement $d (f/ Y)$.

6.5 Conclusions

Outre la remarque classique qui consiste à souhaiter des essais capables de “caler les constantes”, il faut remarquer que celles-ci sont au plus les six énergies critiques Y° et la fonction de dissipation $f(Y)$. Enfin, je crois qu’il serait assez simple de différencier les modes propres isochores (pour lesquels la formulation me semble adaptée) et les modes dilatationnels. En effet, pour ces derniers, en fonction du signe de la déformation, leur présence peut diminuer ou augmenter l’énergie critique des autres modes. Cette analyse peut, à mon idée, s’inscrire dans le cadre des modélisations issues de la micromécanique des matériaux élastiques endommageables.

6	MODÈLES D'ENDOMMAGEMENT ANISOTROPE ISSUS DE LA DÉCOMPOSITION DE KELVIN	110
6.1	Principe de symétrie : direction de l'endommagement	111
6.2	Différentes lois de comportement et potentiels thermodynamiques	112
6.2.1	Symétrie de l'endommagement guidée par le matériau seul (modèle isotrope)	112
6.2.2	Remarque concernant la suite du chapitre	113
6.2.3	Symétrie de l'endommagement guidée par la sollicitation	113
6.2.4	Symétrie de l'endommagement guidée par les parties propres de la sollicitation (modèle mixte)	114
6.3	Fonction de dissipation : énergie maximale	115
6.4	Fonction seuils - potentiel de dissipation	118
6.4.1	Symétrie guidée par la sollicitation	118
6.4.2	Modèle isotrope ou modèle mixte	119
6.5	Conclusions	121

Figure 6-1.	évolution de l'endommagement en fonction du taux \dot{Y}	115
Figure 6-2.	évolution des variables en fonction du déplacement imposé $x = a t$	116
Figure 6-3.	évolution des variables en fonction de la force F pour un essai à déplacement imposé $x = a t$	117
Figure 6-4.	Courbes limites des énergies de mode en fonction du choix de la norme.	119

Kachanov, 1958	111
Lemaitre et Dufailly, 1977	111
Mazars, 1984	111
Lemaitre et Chaboche 1985	111
Lemaitre et Chaboche 1985	112
Marigo (1981)	115
Cowin et Sadegh (1991)	118
Lemaitre et Chaboche 1985	118

7 CONCLUSIONS

Et perspectives...

Le thème majeur de ce travail est l'anisotropie, envisagée comme une inconnue à déterminer. La méthode de mesures ainsi que la détermination du niveau de symétrie et l'utilisation des figures de pôles sont publiés (François, 1996) et ont fait l'objet de présentation lors de congrès nationaux (François, 1994 A et B ; 1995 A) ou internationaux (François, 1995 B).

La méthode ultrasonore présentée répond au problème posé dans le cas d'une anisotropie native inconnue du matériau. C'est le cas pour les échantillons de bois présentés, mais aussi pour des pierres issues de forages souterrains ou pour des os humains. La méthode est améliorable au niveau expérimental. Les mesures par contact direct ne sont pas d'une très grande précision et il serait intéressant de développer d'autres essais ultrasonores donnant plus de précision (sans doute par immersion) adaptés au problème tridimensionnel posé. Au niveau des applications industrielles, à celles déjà existantes du domaine de la géologie, il faut ajouter d'autres champs technologiques :

- détermination de l'orientation d'un monocristal (en cours à travers une collaboration avec le Centre des Matériaux de l'école des Mines de Paris).
- la mesure des caractéristiques des os humains. La méthode par immersion permettrait de l'envisager *in vivo*.
- d'autres applications dans le domaine du bois ou autre composite naturel.

De nombreuses améliorations expérimentales sont envisageables pour améliorer la précision des mesures. Certaines possibilités sont présentées dans ce document.

Le traitement des symétries à partir du tenseur de rigidité brut peut être employé à partir de n'importe quelle campagne de mesures. L'utilisation des figures de pôles de décorrélation me semble simple et efficace quant à la visualisation des symétries d'un tenseur de rigidité. L'application à d'autres types de tenseurs est envisageable.

Le classement des symétries pour le matériau étudié reste lié non seulement au tenseur de rigidité et à ses corrélations avec les tenseurs symétriques les plus proches, mais aussi au problème dans sa globalité, c'est à dire l'utilisation envisagée de ce tenseur dans un calcul et au niveau de précision nécessaire.

L'anisotropie induite par l'endommagement fait ici l'objet d'une étude purement théorique basée sur l'utilisation de la décomposition de Kelvin en modes propres. Celle-ci me semble intéressante comme cadre à des approches micro-mécaniques par exemple. La mesure de cette anisotropie induite fait déjà l'objet de travaux. Son développement dans le cadre le plus général de sollicitation quelconque sur un matériau initialement anisotrope semble accessible. Le cadre de la décomposition de Kelvin devrait pouvoir apporter beaucoup dans d'autres domaines (surfaces seuils, plasticité...).

7 CONCLUSIONS

122

8 ANNEXES

Quelques compléments.

8.1 Plan du montage de mesures ultrasonores

8.2 Tenseurs utilisés pour les figures de pôles de référence (Chapitre 4.2)

Ces tenseurs sont exprimés en écriture de Voigt. L'unité n'a pas d'importance ; les ordres de grandeur non plus.

269	115	115	0	0	0
115	269	115	0	0	0
115	115	269	0	0	0
0	0	0	76	0	0
0	0	0	0	76	0
0	0	0	0	0	76

Table 8-1. Tenseur isotrope

15	12	12	0	0	0
12	15	12	0	0	0
12	12	15	0	0	0
0	0	0	4.4	0	0
0	0	0	0	4.4	0
0	0	0	0	0	4.4

Table 8-2. Tenseur cubique

0.2399	0.1809	0.3175	0	0	0
0.1809	0.2399	0.3175	0	0	0
0.317	0.3175	0.8870	0	0	0
0	0	0	0.6521	0	0
0	0	0	0	0.6521	0
0	0	0	0	0	0.0295

Table 8-3. Tenseur isotrope transverse

0.9159	0.3148	0.0324	0.2276	0	0
0.3148	0.9159	0.0324	-0.2276	0	0
0.0324	0.0324	0.8036	0	0	0
0.2276	-0.2276	0	0.6124	0	0
0	0	0	0	0.6124	0.2276
0	0	0	0	0.2276	0.3006

Table 8-4. Tenseur trigonal (hexagonal 6)

0.5194	0.0173	0.0267	0	0	0
0.0173	0.5194	0.0267	0	0	0
0.0267	0.0267	0.8310	0	0	0
0	0	0	0.5297	0	0
0	0	0	0	0.5297	0
0	0	0	0	0	0.6711

Table 8-5. Tenseur tétragonal

6	2	3	0	0	0
2	4	1	0	0	0
3	1	5	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	3

Table 8-6. Tenseur orthotrope

11	12	13	0	0	1.6
12	22	23	0	0	2.6
13	23	33	0	0	3.6
0	0	0	4.4	4.5	0
0	0	0	4.5	5.5	0
1.6	2.6	3.6	0	0	6.6

Table 8-7. Tenseur monoclinique

8	ANNEXES	124
8.1	Plan du montage de mesures ultrasonores	125
8.2	Tenseurs utilisés pour les figures de pôles de référence (Chapitre 4.2)	126

Table 8-1. Tenseur isotrope _____	126
Table 8-2. Tenseur cubique _____	126
Table 8-3. Tenseur isotrope transverse _____	126
Table 8-4. Tenseur trigonal (hexagonal 6) _____	126
Table 8-5. Tenseur tétragonal _____	127
Table 8-6. Tenseur orthotrope _____	127
Table 8-7. Tenseur monoclinique _____	127

9 BIBLIOGRAPHIE

Et voici le dernier chapitre contenant l'annuaire indispensable de ce travail...

- Arts, R. A study of general anisotropic elasticity in rocks by wave propagation, Thèse de l'Université P. et M. Curie Paris 6, 1993.
- Audoin, B. *évaluation ultrasonore de l'endommagement anisotrope d'un composite à matrice fragile*. Thèse de l'Université de Bordeaux 1, 1991.
- Audoin, B. ; Baste, S. ; Castagnède, B. Estimation de l'intervalle de confiance des constantes d'élasticité identifiées à partir des vitesses de propagation ultrasonores, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série II*, **312**, Paris, 1991.
- Audoin, B. et Baste, S. Ultrasonic evaluation of stiffness tensor changes and associated anisotropic damage in a ceramic matrix composite, *J. Appl. Mech.*, **61**, 1994.
- Auld, B.A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley & Sons, 1973.
- Backus, G. A geometrical picture of anisotropic elastic tensor. *Rev. Geoph. Space Phys.*, vol. **8**, 1970.
- Baerheim, R. Harmonic decomposition of the anisotropic elasticity tensor. *Q.Jl Mech. Appl. Mat.*, vol. **36**, Pt. 3, 1993.
- Barbotte, J. *Le calcul tensoriel*, Bordas, Paris, 1948.
- Baste, S. et Hosten, B. évaluation de la matrice d'élasticité des composites orthotropes par propagation ultrasonore en dehors des plans principaux de symétrie, *Rev. Phys. Appl.*, **25**, 1990.
- Bauer, E. *Champs de vecteurs et de tenseurs*, Masson, Paris, 1955.
- Boehler, J.P. ; Demmerle, S. et Koss S. A new direct biaxial testing machine for anisotropic material, *Exp. Mech.*, **34**, 1, 1994. (A)
- Bœhler, J.P. ; Kirillov, J.R. et Onat, E.T. On the polynomial invariants of the elasticity tensor. *J. Elast.*, Vol. **34**, 1994. (B)
- Brillouin, L. *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Masson, Paris, 1949.

- Brismalein, C. *Identification des symétries matérielles par méthode ultrasonore*, rapport de P.P.L. de D.E.A. Mécanique et matériaux, L.M.T. Cachan, 1995.
- Brose, K.H. et Eckardt, C.J. Calculation of elastic constants of TCNQ crystals using atom-atom potentials, *Chem. Phys. Lett.*, **125**, 3, 1986.
- Calloch, S. *Mémoire de thèse à paraître*, LMT Cachan, 1995.
- Castagnède, B. *Problèmes inverses en mécanique expérimentale des solides anisotropes*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Bordeaux 1, 1991.
- Castagnède, B. ; Jenkins, J.T. ; Sachse, W. et Baste, S. Optimal determination of the elastic constants of composite materials from ultrasonic wave-speed measurements, *J. Appl. Phys.*, **67**, 6, 1990.
- Castagnède, B. ; Kim, K.Y. ; Sachse, W. et Thompson, M.O. Determination of the elastic constants of anisotropic materials using laser-generated ultrasonic signals, *J. Appl. Phys.*, **70**, 1, 1991.
- Castagnède, B. ; Roux, J. et Hosten, B. Correlation method for normal mode tracking in anisotropic media using an ultrasonic immersion system, *Ultrasonics*, **27**, 1989.
- Chu, Y.C. ; Degtyar, D. et Rokhlin, S.I. On determination of orthotropic material moduli from ultrasonic velocity data in nonsymmetry planes, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**, 6, 1994.
- Cowin, S.C. et Mehrabadi, M. On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials. [*Q.J*] *Mech. Appl. Math.*, vol. **40**, Pt. 4, 1987.
- Cowin, S.C. et Mehrabadi, M. Non interacting modes for anisotropic hard tissue, *J. Biomech.*, **24**, 9, 1991.
- Cowin, S.C. et Mehrabadi, M. The structure of the linear anisotropic elastic symmetries. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. **40**, N° 7, 1992. (A)
- Cowin, S.C. et Sadegh, A.M. Addenda and Corrigenda On The structure of the linear anisotropic elastic symmetries. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. **41**, N° 12, 1992. (B)

- Dieulesaint, E. et Royer, D. *Ondes élastiques dans les solides*, Masson, Paris, 1974.
- Ditri, J.J. On the determination of the elastic moduli of anisotropic media from limited acoustical data, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**, 1994.
- Dusautoir, C. *Contribution à l'identification automatique de lois de comportement à partir d'essais multiaxiaux*, Mémoire CNAM, 1993.
- Dye, R.C. et Eckardt, C.J. A complete set of elastic constants of crystalline anthracene by Brillouin scattering, *J. Chem. Phys.*, **90**, 4, 1989.
- Elata, D. et Rubin, M.B. A new representation for the strain energy of anisotropic elastic materials with application to damage evolution in brittle materials, *Mech. Mat.*, **19**, 1995.
- Every, A.G. General, closed-form expression for acoustic waves in cubic crystals, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 16, 1979 (B).
- Every, A.G. Determination of the elastic constants of anisotropic solids, *NDT & E International*, **27**, 1, 1994. (A)
- Every, A.G. et Sachse, W. Determination of the elastic constants of anisotropic solids from acoustic-wave group-velocity measurements, *Phys. Rev.*, **42**, 13, 1990.
- Faure, P. *Analyse numérique. Notes d'optimisation*. Collection Ellipses, édition Marketing (école Polytechnique), Palaiseau, 1988.
- François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. *Comportement mécanique des matériaux*, Masson, Paris, 1991.
- François, M. ; Berthaud, B. et Geymonat, G. Anisotropie des matériaux : experimentation acoustique et optimisation numérique, *Congrès national GEO*, Aussois, 1994 (A).
- François, M. ; Berthaud, B. et Geymonat, G. Material anisotropy : acoustical experimentation and numerical optimization, *7th International Conference on Mechanical Behaviour of Materials I.C.M. 7*, La Haye, 1995 (B).

- François, M. ; Berthaud, B. et Geymonat, G. Material anisotropy : acoustical experimentation and numerical optimization, *Congrès européen Euromech*, Lyon, 1994 (B).
- François, M. ; Berthaud, B. et Geymonat, G. Tenseur de rigidité et symétries d'un matériau anisotrope par expérimentation ultrasonore, *Congrès A.U.M.*, Strasbourg, 1995 (A).
- François, M. ; Berthaud, B. et Geymonat, G. Une nouvelle analyse des symétries d'un matériau élastique anisotrope. Exemple d'utilisation à partir de mesures ultrasonores, *C.R. Acad. Sci. Paris*, séries II, **322**, 2, b, 87-94, 1996.
- Gérard, A. *Etude des possibilités d'évaluation de l'endommagement par des mesures ultrasonores*, 2^{ème} sujet de thèse, Université Pierre et Marie Curie Paris 6.
- Glazman, I. M. et Lyubich, Yu. I. *Finite Dimensional Analysis in Problems*. Moscow, Nauka, 1969.
- Grédiac, M. ; Vautrin, A. ; Verchery, G. A general method for data averaging of anisotropic elastic constants, *J. Appl. Mech., Trans. of ASME*, **60**, 1993.
- Guitard D. et Genevaux J.M. Vers un matériau technologique : le bois, *Art. Mech.*, **40**, 5-6, 1988.
- Gurtin, M.E. A short proof of the representation theorem for isotropic, linear stress-strain relation. *J. of Elast.*, Vol. **4**, No. 3, 1974.
- Gurtin, M.E. *The Linear Theory of Elasticity*. Handbuch der Physik, Vol. IV Springer, 1972
- Harder, S. Inversion of phase velocity for the anisotropic elastic tensor, *J. Geoph. Res.*, **90**, B12, 1985.
- Hayes, M. A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media, *J. Mat. Sci.*, **4**, 1969.
- Hood, J. A. et Mignogna, R. B. Determination of elastic moduli in anisotropic media from ultrasonic measurements, *Ultrasonics*, **33**, 1, 1995.

- Hosten, B. et Castagnède, B. Mesure des constantes élastiques du bois à l'aide d'un interféromètre ultrasonore, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **296**, Série II, 1983 (B).
- Hosten, B. et Castagnède, B. Optimisation du calcul des constantes élastiques à partir des mesures de vitesse d'une onde ultrasonore, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **296**, Série II, 1983 (A).
- Hosten, B. et Deschamps, M. Mesure des coefficients élastiques complexes des matériaux anisotropes à l'aide d'un interféromètre ultrasonore assisté par ordinateur, *Cahiers du groupe français de Rhéologie, 18^e colloque G.F.R.*, tome IV, **4**, 1983.
- Jarić, J.P. On the conditions for the existence of a plane of symmetry for anisotropic elastic material. *Mech. Res. Comm.*, vol. **21**, N° 2, 1994.
- Kachanov, L.M. Time of rupture process under creep condition. *Izv. Akad. NAUK. SSR - Otd Tekh. Nauk. n°8*, 1958.
- Kelvin (Thomson), W. Elements of Mathematical Theory of Elasticity. *Phil. Trans. R. Soc.*, **146**, 1856.
- Keyvani, M. *Contribution à l'étude de la modélisation et de l'endommagement des composites de type S.M.C. par méthodes ultrasonores*, Thèse de l'école Centrale, Paris, 1991.
- Khalmosh, P. *Finite Dimensional Vector Spaces*. Moscow, Fizmatgiz, 1963.
- Kittel, J. *Physique de l'état solide*, Dunod, Paris, 1983.
- Klima, K. The computation of the elastic constants of an anisotropic medium from the velocities of body waves. *Studia Geoph. et Geod.*, **17**, 1973.
- Krautkramer, J. et Krautkramer, H. *Ultrasonic testing of materials*, Springer verlag, Heidelberg, 1977.
- Lemaitre, J. et Chaboche, J.L. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985.

- Lemaitre, J. et Dufailly, J. Modélisation et identification de l'endommagement plastique des métaux, *3^{ème} congrès français de mécanique*, Grenoble, 1977.
- Love, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New-York, 1926.
- Mal'Tsev, A.I. *Fundamental of Linear Algebra*, Moscow, Gostekhizdat, 1956
- Marigo, J.J. Formulation d'une loi de l'endommagement d'un matériau élastique, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série II*, **292**, Paris, 1981.
- Markam, M.F. Measurement of the elastic constants of fibre composites by ultrasonics, *Composites*, **1**, 1970.
- Mazars, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*, Université Paris 6, 1984.
- Mehrabadi, M. et Cowin, S.C. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *Q.Jl Mech. Appl. Mat.*, Vol. **43**, Pt. 1, 1990.
- Neighbours, J.R. Convergence of the calculation of elastic constants from wave velocities in cubic crystals, *J. Appl. Phys.* **51**, 11, 1980.
- Neighbours, J.R. et Schacher, G.E. Determination of the constants from sound-velocity measurements in crystals of general symmetry. *J. Appl. Phys.*, **38**, 13, 1967.
- Neighbours, J.R. et Smith, S. An approximation method for the determination of the elastic constants, *J. Appl. Phys.*, **21**, 941, 1950.
- Norris, A.N. On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes, *Q. J. Mech. Appl. Mat.*, **42**, 3, 1989.
- Onat, E.T. *Group theory and representation of microstructure and mechanical behaviour of materials*. The minerals, Metals & Materials society, 1991.
- Pierron, P. ; Vautrin, A. et Harris, B. The Iosipescu in-plane shear test: validation on an isotropic material, *Exp. Mech.*, **35**, 2, 1995.

- Pochert, A. *Réalisation d'un logiciel de pilotage et d'acquisition de la carte ultrasonore "Saphir". Mise au point de la campagne d'essais associée à la détermination des constantes élastiques d'un matériau anisotrope*, Rapport de stage ingénieur, L.M.T. - Universität Brunswick, 1994.
- Preziosa, C. ; Mudry, M. ; Launay, J. et Giletta, F. Détermination des constantes élastiques du bois par une méthode acoustique goniométrique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **293**, Série II, 1981.
- Roux, J. ; Hosten, B. ; Castagnede, B. et Deschamps, M. Caractérisation mécanique des solides par spectro-interférométrie ultrasonore, *Rev. Phys. Appl.*, **20**, 1985.
- Royer, D. et Dieulesaint, E. Mesures optiques de déplacements d'amplitude 10^{-4} à 10^2 Angström. Application aux ondes élastiques. *Rev. Phys. Appl.*, Vol. **24**, 1989.
- Rychlewski, J. On Hooke's Law, *Prikl. Matem. Mekhan.*, **48**, 3, 1984.
- Sedov, L.I. *A course in continuum mechanics*, Wolters-Noordhoff, 1971.
- Surrel, Y. A new description of the tensor of elasticity based upon irreducible representation, *Eur. J. Mech., A/Solids*, **12**, 2, 1993.
- Surrel, Y. *Communication privée*, 1996.
- Thomas, J.J. *Contrôle non destructif des matériaux et des structures par l'analyse dynamique non linéaire*, Thèse de l'école polytechnique, Palaiseau, 1995.
- Van Bursirk, W.C ; Cowin, S.C. et Carter, J.R. A theory of acoustic measurements of the elastic constants of a general anisotropic elastic solid. *J. Mat. Sci.*, **21**, 1986.
- Vinh, T. Mesures ultrasonores de constantes élastiques de matériaux composites, *Sciences et techniques de l'armement*, vol. **54**, 2, 1981.
- Voigt, A.E. *Handbuch der cristalphysic*, Springer Verlag, 1927.

- Walrath D.E. et Adams D.F. The Iosipescu shear test as applied to composite materials, *Exp. Mech.*, mars 1983.
- Yong-Zhong, H. et
Del Piero, G. On the completeness of the cristallographic symmetries in the description of the elastic tensor. *J. Elast.*, vol **25**, 1991.

Résumé

La mesure du tenseur d'élasticité complet d'un matériau anisotrope élastique linéaire présente des difficultés expérimentales lorsque les éventuelles symétries ne sont pas connues à l'avance.

Aux mesures mécaniques dont la complexité est montrée, nous préférons une campagne d'essais ultrasonores. Ceux-ci sont effectués par la méthode de contact direct sur une éprouvette polyédrale à 26 facettes. Le tenseur d'élasticité est obtenu par la minimisation d'une fonctionnelle basée sur l'écart entre deux expressions du tenseur acoustique (de Christoffel).

Afin de révéler les symétries exactes ou non du tenseur obtenu exprimé dans le repère de l'éprouvette, des figures de pôles montrent la corrélation du tenseur avec son symétrique par rapport à tout plan de l'espace. Ces cartes sont révélatrices de tous les niveaux de symétries possibles.

Un opérateur intrinsèque détermine le tenseur possédant la symétrie choisie, le plus proche du tenseur expérimentalement obtenu. L'écart entre les deux tenseurs et la classification des niveaux de symétrie permettent de faire le choix de la symétrie correspondant le mieux au matériau étudié.

Enfin, l'étude de l'anisotropie induite par l'endommagement est abordée à l'aide de la décomposition de Kelvin.

Abstract

The measure of the complete stiffness tensor of an anisotropic elastic material bring experimental difficulties when the possible symmetries are formerly unknowns.

As described mechanical measurements show great complexity, we prefer the use of an ultrasonic experimentation. These are done by using the direct contact method on a 26-faces specimen. The stiffness tensor is obtained by the minimization of a fonctionnal based on the discrepancy between two expression of the acoustic (Christoffel's) tensor.

In order to reveal the (exact or not) symmetries of the obtained stiffness tensor expressed in the specimen's axis, pole figures show the correlation between the stiffness tensor and it's symmetric by every plane of the space. These maps are revealing every possible material symmetry.

An intrinsic operator determine the stiffness tensor having the chosen symmetry the nearest from the experimentally obtained stiffness tensor. The discrepancy between the two tensors and the order of the symmetry levels allow to choose the best symmetry for the studied material.

Finally, damage-induced anisotropy is investigated with Kelvin's decomposition.