Université de la Méditerranée (Aix-Marseille 2)

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Modélisation numérique de la propagation et de la diffraction d'ondes mécaniques

Bruno Lombard

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS

Soutenue le 8 janvier 2010 devant le jury composé de :

Rapporteurs :

M. Sergey GAVRILYUK, Professeur Aix-Marseille III

M. Patrick JOLY, Directeur de Recherches INRIA

M. Jean VIRIEUX, Professeur Grenoble I

Examinateurs :

M. Olivier COUSSY, Professeur Ecole des Ponts

M. Jacques LIANDRAT, Professeur Ecole Centrale de Marseille

Mme. Agnès MAUREL, Chargée de Recherches CNRS

Remerciements

C'est avec une grande tristesse que j'aborde cette page de remerciements. Olivier Coussy est décédé le vendredi 15 janvier 2010, soit une semaine après la soutenance de cette thèse d'habilitation, qu'il a présidée. C'était la première fois que je le rencontrai ; nous avons eu des discussions chaleureuses et animées. Cette rencontre concrétisait treize ans de fréquentation par livre interposé : son ouvrage sur l'acoustique des milieux poreux, coécrit avec Messieurs Bourbié et Zinsner, m'accompagnait depuis mon premier stage de recherche en février 1997, et a initié mon intérêt pour le modèle de Biot [25]. Les pages qui suivent sont dédiées à sa mémoire.

Que cette bien triste nouvelle ne m'empêche pas de remercier chaleureusement les autres membres du jury, avec lesquels j'espère avoir l'occasion de travailler un jour :

- Sergey Gavrilyuk, fin connaisseur des systèmes hyperboliques, de la mécanique des milieux continus, de la thermodynamique : la liste peut continuer longtemps, et englober des pans entiers de la physique mathématique ! Bref, un digne représentant de l'"école russe", au savoir encyclopédique.

- Patrick Joly, référence incontournable pour tout chercheur qui s'aventure sur le terrain de la modélisation numérique des ondes. Ses publications et les thèses qu'il a dirigées constituent une source constante d'inspiration, et le point de départ de plusieurs des travaux présentés ici, notamment sur la méthode de Cagniard-de Hoop (chapitre 3) et la propagation des ondes en milieu dissipatif (chapitres 5 et 6).

- Jacques Liandrat, dont les cours d'analyse numérique en 1998 ont constitué mon initiation à ce domaine, et décidé en partie de ma vocation. Depuis, je me suis souvent interrogé sur une remarque faite en cours, à savoir que seuls les problèmes non linéaires (et notamment l'étude de la turbulence) présentaient un intérêt en mathématiques appliquées. Disons que je partage cette opinion à 50%, et espère que les 50% restant (dont la présente thèse est une illustration, à l'exception du chapitre 4) sauront l'intéresser !

- Agnès Maurel, rencontrée au gré des réunions du GdR 2501. Au-delà de son humour ravageur et de sa connaissance profonde de la physique, j'apprécie particulièrement sa vision décloisonnée de la science. "Se spécialiser, c'est rétrécir d'autant son univers", Claude Debussy dixit.

- Jean Virieux, qui rapportait mon dossier de candidature au CNRS en juin 2003. Nos première discussions, suite à l'oral du concours, m'ont rapidement convaincu de son extrême rigueur et de son honnêteté scientifique. Depuis, nous interagissons périodiquement. Je tenais enfin à souligner ses qualités de "leadership", qui se manifestent tant dans son implication éditoriale que dans l'organisation de vidéoconférence le jour d'une soutenance.

Je ne voudrais pas terminer cette page sans remercier les chercheurs avec lesquels ont été réalisés les travaux de ce mémoire. Je pense en premier lieu à Joël Piraux, au sujet duquel tout a été dit dans les remerciements d'une certaine thèse [T1] ... Je partage avec Guillaume Chiavassa le goût pour les méthodes numériques qui marchent, même si on ne sait pas toujours pourquoi. Loïc Le Marrec a eu le génie de nous proposer la configuration de nos rêves, sujet du chapitre 7. Enfin, travailler avec Stéphane Junca m'a permis d'illustrer un résultat mathématique bien connu :

Théorème 0.1 *Quand un matheux ne sait pas résoudre un problème, il le généralise.*

Et le pire, c'est que ça marche !

Contents

1 Introduction **7**
- 1.1 Contexte scientifique . . . 7
  - 1.1.1 Ondes et problèmes directs . . . 7
  - 1.1.2 Modélisation numérique . . . 8
- 1.2 Contribution personnelle . . . 10
  - 1.2.1 Contexte professionnel . . . 10
  - 1.2.2 Modèles et méthodes . . . 10
  - 1.2.3 Plan du document . . . 11
  - 1.2.4 Remarques . . . 12

I Méthodes de résolution **15**

2 Méthodes numériques **17**
- 2.1 Introduction . . . 17
- 2.2 Schéma d'intégration . . . 19
  - 2.2.1 Schémas ADER . . . 19
  - 2.2.2 Analyse numérique . . . 22
  - 2.2.3 Expériences numériques . . . 26
- 2.3 Méthode d'interface immergée . . . 28
  - 2.3.1 Problème continu . . . 28
  - 2.3.2 Problème discret . . . 30
  - 2.3.3 Expériences numériques . . . 32
- 2.4 Analyse de stabilité . . . 34
  - 2.4.1 Equations résolvantes . . . 34
  - 2.4.2 Ondes RG et LG . . . 35
  - 2.4.3 Stabilité GKS . . . 39
  - 2.4.4 Implémentation . . . 43
  - 2.4.5 Expériences numériques . . . 47
- 2.5 Conclusion . . . 48

3 Méthodes analytiques **51**
- 3.1 Introduction . . . 51
- 3.2 Modélisation . . . 53
  - 3.2.1 Géométrie . . . 53
  - 3.2.2 Transformations intégrales . . . 54
- 3.3 Résolution dans l'espace des transformées . . . 55

3.3.1 Potentiels . . . 55
3.3.2 Composantes du champs . . . 55
3.3.3 Coefficients de réflexion . . . 56
3.4 Onde P réfléchie . . . 57
3.4.1 Méthodologie . . . 57
3.4.2 Contour d'intégration . . . 58
3.4.3 Intégration dans le plan complexe . . . 58
3.4.4 Composantes du champ . . . 60
3.5 Onde SV réfléchie . . . 61
3.5.1 Méthodologie . . . 61
3.5.2 Etude du chemin de Cagniard-de Hoop . . . 61
3.5.3 Détermination du chemin de Cagniard-de Hoop . . . 70
3.5.4 Composantes du champ . . . 73
3.6 Conclusion . . . 75

II Ondes et contact **77**

3 Contacts linéaires **79**
3.1 Introduction . . . 79
3.2 Modélisation physique . . . 80
3.2.1 Configuration . . . 80
3.2.2 Equations d'évolution . . . 81
3.2.3 Conditions d'interfaces . . . 82
3.3 Méthode d'interface immergée . . . 86
3.3.1 Conditions d'interface d'ordre élevé . . . 86
3.3.2 Conditions de compatibilité . . . 87
3.3.3 Résolution des conditions d'interface . . . 88
3.3.4 Construction de valeurs modifiées . . . 88
3.4 Expériences numériques . . . 90
3.4.1 Surface libre . . . 90
3.4.2 Glissement sans frottement . . . 94
3.4.3 Masse-ressort . . . 95
3.5 Conclusion . . . 97

4 Contacts non linéaires **101**
4.1 Introduction . . . 101
4.2 Modélisation . . . 102
4.2.1 Modélisation physique . . . 102
4.2.2 Modélisation numérique . . . 106
4.2.3 Expériences numériques . . . 111
4.3 Analyse locale . . . 111
4.3.1 Méthode de perturbation . . . 111
4.3.2 Expériences numériques . . . 114
4.4 Analyse globale . . . 116
4.4.1 Forçage sinusoïdal . . . 116
4.4.2 Forçage périodique . . . 118

4.5 Conclusion 119

III Ondes et milieux dissipatifs **121**

5 Ondes viscoélastiques **123**
5.1 Introduction 123
5.2 Modélisation physique 124
5.2.1 Modèle de Zener 124
5.2.2 Equations d'évolution 127
5.3 Modélisation numérique 129
5.3.1 Schéma d'intégration 129
5.3.2 Méthode d'interface immergée 130
5.4 Expériences numériques 131
5.4.1 Dimension un 131
5.4.2 Dimension deux 135
5.5 Conclusion 135

6 Ondes poroélastiques **139**
6.1 Introduction 139
6.2 Modélisation physique 140
6.2.1 Modèle de Biot 140
6.2.2 Equations d'évolution 142
6.3 Modélisation numérique 144
6.3.1 Schéma d'intégration 144
6.3.2 Raffinement de maillage 145
6.3.3 Méthode d'interface immergée 147
6.4 Expériences numériques 147
6.4.1 Dimension un 147
6.4.2 Dimension deux 150
6.5 Conclusion 152

IV Ondes et milieux aléatoires **155**

7 Diffusion multiple **157**
7.1 Introduction 157
7.2 Modélisation 158
7.2.1 Tiges d'acier dans l'eau 158
7.2.2 Béton 159
7.3 Méthodes numériques 160
7.3.1 Simulation directe 160
7.3.2 Traitement des données 161
7.4 Résultats 162
7.4.1 Tiges d'acier dans l'eau 162
7.4.2 Béton 164
7.5 Conclusion 167

V Conclusion **171**

8 Conclusion et perspectives **173**
8.1 Bilan . . . 173
8.2 Directions de travail . . . 174
8.2.1 Contacts non linéaires . . . 174
8.2.2 Poroélasticité haute-fréquence . . . 176
8.2.3 Diffusion multiple . . . 177

9 Bilan d'activité **179**
9.1 Curriculum vitae . . . 179
9.2 Production scientifique . . . 180
9.2.1 Communications avec comité de lecture . . . 180
9.2.2 Communications sans comité de lecture . . . 182
9.3 Diffusion de la culture scientifique . . . 184
9.3.1 Enseignement . . . 184
9.3.2 Encadrement . . . 185
9.3.3 Vulgarisation . . . 185
9.4 Expertise scientifique . . . 186
9.4.1 Expertise d'articles . . . 186
9.4.2 Jury de thèse . . . 186
9.4.3 Expertise de projet . . . 186
9.5 Administration de la recherche . . . 186
9.5.1 Responsabilités collectives . . . 186
9.5.2 Réseaux de recherche . . . 186
9.6 Valorisation de la recherche . . . 187
9.6.1 Dépôt de logiciel . . . 187
9.6.2 Contrats de recherche . . . 187

Bibliographie **188**

Chapter 1

Introduction

1.1 Contexte scientifique

1.1.1 Ondes et problèmes directs

De nombreux domaines de la mécanique mettent en jeu la propagation et la diffraction des ondes mécaniques. En sismologie, les ondes de surface sont utilisées pour détecter des cavités enfouies [58]. A plus grande profondeur, les méthodes sismiques permettent de caractériser les réservoirs pétroliers. Dans le domaine du contrôle non-destructif, on utilise les ultrasons pour localiser des défauts - décollements de matériaux multicouches, soudures imparfaites - et évaluer leur dangerosité. En génie biomédical, la propagation des ondes dans les os spongieux (qui constituent notamment une partie du col du fémur) est infuencée par la porosité du milieu, conduisant ainsi à une estimation du risque de cassure. Dans tous les cas évoqués, les scientifiques mettent à profit la possibilité qu'offrent les ondes d'imager les milieux traversés, via la résolution de *problèmes inverses*.

Avant d'aborder un problème inverse, il est nécessaire de maîtriser le *problème direct* associé, à savoir : étant donnés une source et un milieu de propagation, calculer les champs d'ondes en un point et à un instant. Résoudre un problème direct permet tout d'abord d'observer les conséquences du modèle utilisé (lois de comportement, lois de contact, ...). Cette étape, généralement menée de pair avec l'analyse mathématique des équations mises en jeu, permet ainsi d'estimer si le modèle constitue un bon compromis entre la simplicité (pour rendre possible sa résolution) et la complexité (pour rendre compte de phénomènes riches). Une analyse édifiante et salutaire du concept de *modèle* peut être consultée dans [129], notamment dans le chapitre introductif.

Par ailleurs, résoudre un problème inverse repose bien souvent sur la mise en oeuvre de nombreux problèmes directs. On cherche alors à caractériser le milieu de façon à minimiser l'écart entre les données simulées et les données mesurées.

Enfin, la construction de solutions numériques de référence permet de quantifier la précision de méthodes approchées. Un exemple est donné par les méthodes analytiques en diffusion multiple. Celles-ci sont très rapides et largement utilisées lors de problèmes inverses. Cependant, leur

domaine de validité est restreint à de faibles concentrations de diffuseurs, et nécessite d'être estimé avant usage.

1.1.2 Modélisation numérique

Généralement, la résolution de problèmes directs passe par la mise en oeuvre de méthodes numériques. A l'instar des autres branches de la physique, l'acoustique a motivé des développements importants en modélisation numérique. Nous dessinons ici, très schématiquement, quelques tendances de cette évolution depuis une quarantaine d'années.

Géométries. La première évolution porte sur l'augmentation des dimensions spatiales : de la dimension deux avec des grilles de 200^2 points dans les années 1980, on passe début 2010 à des domaines tridimensionnels de 600^3 points. Cette augmentation va de pair avec l'évolution des ressources informatiques et le développement de méthodes de parallélisation des calculs. Elle est aussi fortement culturelle : si les revues de mathématiques appliquées présentent encore des algorithmes 1D, il n'en est pas de même en sismologie, où le 3D est nécessaire pour crédibiliser une méthode numérique.

Fréquentiel vs temporel. Le choix de l'espace de résolution est, lui aussi, en partie culturel. La communauté acousticienne, ataviquement liée au régime harmonique, a privilégié logiquement le développement de méthodes numériques fréquentielles. Inversement, la sismologie est une discipline habituée à une représentation temporelle des signaux, et a conduit dans les années 1970 aux premiers sismogrammes synthétiques par résolution dans le domaine temporel. Ces distinctions tendent à s'estomper actuellement, pour laisser la place à des critères plus objectifs. Plusieurs raisons - l'étude de signaux large-bande, la prise en compte de nonlinéarités, l'importance accordée aux signaux transitoires (notamment en acoustique musicale) - favorisent depuis une quinzaine d'années le développement de méthodes numériques temporelles. A contrario, résoudre des problèmes directs fréquence par fréquence peut s'avérer plus efficace en vue de l'imagerie sismique [81].

Modèles continus. Jusqu'à la fin des années 1980, les milieux de propagation étaient essentiellement modélisés par des lois de comportement élémentaires : fluide parfait, solide élastique. Depuis, l'objectif de réalisme croissant a conduit à la prise en compte d'effets dissipatifs (viscoélasticité, poroélasticité), voire de comportements non linéaires. Ainsi, la modélisation des effets de site avec liquéfaction du sous-sol, suite au piégeage d'ondes dans un bassin sédimentaire (notamment lors du tremblement de terre de Mexico), nécessite des lois de plasticité. Cette complexité a un prix informatique, en terme de nombre d'inconnues et de temps de calcul.

La description des obstacles, diffuseurs, interfaces, a elle aussi beaucoup évolué. De géométries planes coïncidant avec les axes du maillage, on est passé à des représentations plus précises, avec des interfaces de forme quelconque. Concernant les lois de contact, les conditions de Dirichlet ou de Neumann laissent progressivement la place à des modèles plus fins, de contact imparfait linéaire ou non linéaire [148].

Un autre aspect de modélisation, de nature moins physique que les précédents, concerne les équations mises en jeu. Pour simuler la propagation des ondes mécaniques sur une grande distance et suivant une direction privilégiée, à l'instar des ondes électromagnétiques dans une

fibre optique, il peut être avantageux de modifier les équations d'évolution. Au lieu d'équations d'ondes ou de Helmholtz, les *approximations paraxiales* conduisent à des équations paraboliques dont la résolution numérique est efficace. Largement utilisés jusque dans les années 1990, ces modèles n'évoluent plus guère et laissent la place aux modèles complets.

Méthodes numériques. Dans les années 1970, les *différences finies* ont été les premières méthodes de discrétisation d'équations d'ondes. Ces méthodes sont simples et efficaces sur une grille cartésienne régulière. Cependant, leurs qualités sont fortement dégradées en présence d'interfaces : sans précautions particulières, on observe des diffractions parasites, une chute de la précision des calculs, et enfin les conditions aux interfaces ne sont pas prises en compte.

Des approches plus perfectionnées ont alors été élaborées : éléments finis, volumes finis, Galerkin discontinu [51]. Ces schémas d'intégration utilisent un maillage adapté aux interfaces, éliminant ainsi les défauts mentionnés plus haut. En contrepartie, la durée des calculs croît fortement, essentiellement à cause de la condition de stabilité CFL qui relie le pas de temps discret au plus petit élément géométrique de la grille de calcul.

Concilier l'efficacité d'une méthode numérique sur grille cartésienne avec la précision d'une description surfacique des interfaces, tel est l'objectif que cherchent à atteindre différents groupes depuis une dizaine d'années. Une première approche est fournie par les *méthodes de domaines fictifs* avec multiplicateurs de Lagrange. Des inconnues supplémentaires, représentant les traces des quantités sur lesquelles portent les conditions aux limites, sont introduites dans la formulation variationnelle. Cette dernière est résolue par des éléments finis avec *condensation de masse*. La terminologie fait référence à un choix judicieux de points de quadrature, conduisant à une matrice diagonale, et donc aisément inversible Cette approche a essentiellement été développée au sein du projet Poems (anciennement Ondes) de l'INRIA. Les conditions aux limites de Dirichlet [166, 141] ou de contact unilatéral [148] ont ainsi été modélisées numériquement. Cpendant, ces méthodes ne permettent pas de discrétiser des conditions de saut, et donc de modéliser des interfaces matérielles.

Les *méthodes de pénalisation* constituent une deuxième approche, largement répandue en mécanique des fluides [55, 37]. L'ajout d'un terme source aux équations d'évolution permet de prendre en compte implicitement les conditions aux limites. Ce terme étant moyenné sur chaque maille de calcul, la description géométrique des interfaces est cependant moins précise qu'avec les méthodes de domaines fictifs.

Une troisième approche, sur laquelle nous reviendrons abondamment, est constituée des *méthodes d'interface immergée*. Plusieurs formulations ont été proposées depuis les travaux originels de Peskin sur cet thème en 1977 : l'*Immersed Boundary Method* avait pour objet la modélisation numérique d'une membrane élastique dans un écoulement de Stokes, décrivant le coeur et le sang. LeVeque et ses étudiants de l'Université de Washington ont successivement généralisé cette approche à des équations elliptiques, paraboliques, puis hyperboliques à coefficients discontinus, et permis d'atteindre des ordres de précision plus élevés. Ces travaux ont servi de base à [T1, A1, A2, A3][1]. Dans tous les cas, les méthodes d'interface immergée reviennent à modifier localement les schémas d'intégration aux points de calcul voisins des interfaces. Cette modification tire

[1] Les références à ma production scientifique renvoient à la section 9.2

avantage de la géométrie locale de l'interface (position dans le maillage, courbure et ses dérivées) et des conditions physiques aux interfaces. Par rapport aux méthodes de domaines fictifs et de pénalisation, la principale limitation des méthodes d'interface immergée tient à son cadre mathématique, moins bien étayé : les démonstrations de convergence sont rares, et la stabilité n'est généralement pas abordée.

1.2 Contribution personnelle

1.2.1 Contexte professionnel

J'ai abordé le domaine de la simulation des ondes mécaniques depuis mon début de thèse, en octobre 1998. Après un intermède post-doctoral d'un an, consacré aux écoulements multi-espèces en mécanique des fluides [A4], ce sujet constitue à nouveau le thème central de mes recherches. Ce document résume et présente de façon unifiée les différents travaux réalisés depuis mon recrutement comme chargé de recherches CNRS en octobre 2003. Ces travaux, menés au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, ont été effectués en partie avec les chercheurs permanents suivants :

- Guillaume Chiavassa, Maître de Conférences en mathématiques appliquées (Laboratoire de Mécanique Modélisation et Procédés Propres, Ecole Centrale de Marseille) ;
- Stéphane Junca, Maître de Conférences en mathématiques (Laboratoire Jean Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis) ;
- Loïc Le Marrec, Maître de Conférences en mécanique (Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université Rennes 1) ;
- Joël Piraux, Chargé de Recherches CNRS (Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille) ;
- Jean Virieux, Professeur UNSA (Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, Université Joseph Fourier, Grenoble).

Plusieurs de ces travaux ont été initiés et se sont réalisés dans le cadre du GdR 2501 *Etude de la propagation ultrasonore en vue du CND*.

1.2.2 Modèles et méthodes

La section 1.1 a dressé un portrait général des différentes tendances, modèles et méthodes dans le domaine de la simulation des ondes. En reprenant les points abordés, à la façon d'un cahier des charges, nos choix méthodologiques sont les suivants :

1. nous étudions uniquement des *problèmes directs* ;
2. sauf exception, les équations sont résolues dans le *domaine temporel*. Nos seules incursions dans le domaine fréquentiel interviennent pour calculer des solutions analytiques ou lors d'analyses de problèmes de diffraction d'ondes, où le régime harmonique est nécessaire ;

3. un effort de réalisme est apporté quant au choix des lois de comportement et de contact. Ces choix découlent en partie d'interactions avec des spécialistes de sismologie et de contrôle non-destructif. Des modèles complets sont utilisés, et non des approximations paraxiales ;

4. les géométries des interfaces peuvent être quelconques, quoique régulières : les singularités géométriques (coins, bouts de fissure) ne sont pas traitées ;

5. les équations d'évolution sont écrites sous forme d'un système vitesse-contrainte du premier ordre, en temps et en espace. Ce système d'équations aux dérivées partielles est résolu par des différences finies d'ordre élevé, de type ADER (Arbitrary DERivatives) ;

6. la discrétisation des interfaces est réalisée par une méthode d'interface immergée ;

7. enfin, un soin important est apporté à la mise en oeuvre informatique des calculs, et à la réalisation de codes optimisés.

1.2.3 Plan du document

Le chapitre 2 est une présentation 1D des méthodes numériques que nous avons développées. Une analyse numérique de la dispersion et de l'atténuation des schémas ADER est proposée, pour différents ordres de précision. Cette analyse est essentielle pour dimensionner les calculs lors de simulations 2D et 3D. Après un bref rappel de la méthode d'interface immergée, nous réalisons une analyse de stabilité GKS par modes discrets.

Le chapitre 3 traite de la méthode de Cagniard-de Hoop, dans le cas d'une interface plane entre un solide élastique 2D et le vide. Cette méthode analytique temporelle est bien connue en élastodynamique [1, 46]. Cependant, lorsqu'on souhaite calculer l'onde de cisaillement réfléchie en un point enfoui sous la surface libre, les contours d'intégration dans le plan complexe deviennent implicites, ce qui complique notoirement la résolution. Il nous a paru utile de détailler certains résultats originaux liés à ces chemins : lemmes 3.1 et 3.2, propriétés 3.2 et 3.4. Ces résultats sont utiles pour améliorer la précision et la rapidité d'exécution des calculs.

Le chapitre 3 porte sur les modèles linéaires de contact entre solides : surface libre, contact parfait soudé, glissement sans frottement, contact imparfait linéaire. Ce dernier modèle est légèrement modifié pour obtenir un résultat de conservation d'énergie (lemme 3.1). Les conditions d'interface sont discrétisées par la méthode d'interface immergée, dont un synopsis 2D est proposé. Une succession de simulations et de comparaisons avec des solutions analytiques illustre les propriétés attendues par les méthodes numériques. On montre en particulier que les méthodes utilisées dispensent de raffiner le maillage au voisinage des interfaces pour calculer correctement les ondes de surface.

Le chapitre 4 développe un aspect encore peu abordé dans la littérature : l'interaction d'ondes mécaniques avec des nonlinéarités de contact, en dimension un. Pour modéliser la compressibilité finie de fissures réelles, nous proposons une écriture générale (4.5) des conditions de saut. Nous montrons que le couplage de ces conditions avec les équations de l'élastodynamique constitue un problème bien posé (lemme 4.1). Plusieurs méthodes de résolution numérique sont proposées et conduisent à l'observation de deux phénomènes typiquement non linéaires : la génération d'harmoniques, la dilatation moyenne des fissures. Le reste du chapitre porte alors sur l'étude

théorique de ces phénomènes, en fonction de l'amplitude de l'onde incidente : on considère successivement le cas particulier d'une loi hyperbolique et de petites perturbations sinusoïdales en section 4.3, puis le cas général d'une famille de lois de contact et d'un signal périodique d'amplitude quelconque en section 4.4. Le principal résultat est le théorème 4.2.

Le réalisme des simulations nécessite de prendre en compte la dissipation d'énergie mécanique. Au chapitre 5, on s'intéresse à un modèle classique de viscoélasticité linéaire : le modèle de Zener généralisé, ou solide standard. Celui-ci permet d'approcher le comportement mécanique de matériaux à facteur de qualité constant, fréquemment rencontrés dans les milieux naturels. L'introduction de *variables de mémoire*, couplées aux vitesses et contraintes, rend le problème d'évolution local en temps et évite de stocker la solution sur de nombreux pas de temps. On adapte les méthodes numériques aux équations d'évolution ainsi obtenues, et on propose un ensemble de cas-tests et de comparaisons avec des solutions analytiques.

Un autre mécanisme de dissipation d'énergie est introduit par le mouvement relatif d'un fluide visqueux à travers un squelette solide. Le chapitre 6 porte sur le modèle de Biot, largement utilisé en poroélasticité. On s'intéresse au cas particulier du régime basse-fréquence, où la contrainte visqueuse due au fluide saturant les pores est proportionnelle à la vitesse de filtration. Les difficultés de modélisation numérique sont principalement induites par la présence d'une deuxième onde de compression, lente et fortement atténuée, aux côtés des ondes de compression et de cisaillement classiques.

Le chapitre 7 constitue une application des méthodes vues précédemment, ainsi que des outils logiciels qui en découlent [2]. On étudie la diffraction multiple des ondes par un ensemble de diffuseurs répartis aléatoirement, de tailles comparables à la longueur d'onde. Les simulations numériques permettent de caractériser le milieu effectif dans lequel se propage le champ cohérent. Contrairement aux méthodes analytiques, telles que l'*Independant Scattering Approximation* [113], cette approche purement numérique ne souffre pas de limitations en terme de concentrations des diffuseurs, conduisant ainsi à des solutions de référence. Deux configurations sont étudiées : tiges d'acier dans l'eau, béton.

Enfin, le chapitre 8 conclut le mémoire et propose trois directions de travail.

1.2.4 Remarques

Les trois remarques qui suivent sont utiles au lecteur :

1. la rédaction de ce mémoire a permis d'approfondir des travaux restés en souffrance et non publiés. Dans ce cas, nous détaillons les démonstrations. Dans le cas contraire, nous renvoyons le lecteur aux articles publiés ;

2. les simulations sont réalisées sur un PC Pentium IV monocoeur, cadencé à 3 GHz et disposant de 3 Go de RAM ;

3. sauf exception, les cartes représentant les ondes mécaniques en 2D sont codées avec deux palettes de couleurs différentes : vert-rouge pour les ondes de compression, jaune-magenta

[2] Voir à ce sujet la documentation disponible sur `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Articles/ZDP2D.1.03.pdf`

pour les ondes de cisaillement. La distinction entre ces ondes est réalisée numériquement, grâce à une estimation de la divergence et du rotationnel de la vitesse par différences finies.

Part I

Méthodes de résolution

Chapter 2

Méthodes numériques

Travail réalisé avec Joël Piraux
Production associée : article [A11]

2.1 Introduction

Généralités. Pour modéliser numériquement la propagation et la diffraction des ondes mécaniques, deux ingrédients-clés sont nécessaires : un schéma d'intégration des lois de conservation, et une méthode de discrétisation des interfaces. D'autres ingrédients, utiles mais non essentiels, ne seront pas développés par la suite : citons par exemple les *Perfectly Matched Layers* pour simuler des domaines non bornés [166, 46], et la modélisation de sources.

Les méthodes numériques doivent respecter le cahier des charges suivant. Tout d'abord, les artefacts non-physiques, tels que la dispersion numérique ou l'atténuation numérique dans un milieu élastique, doivent être minimisés. Cela va en général de pair avec la notion d'*ordre élevé*, qualifiant la précision avec laquelle les opérateurs discrets approchent les opérateurs continus de dérivation temporelle et spatiale. Typiquement, l'ordre 2 est actuellement le standard, et l'ordre 4 commence à se répandre parmi les développeurs de méthodes numériques [87]. Les ordres de précision de chacune des méthodes numériques employées doivent être identiques, la différence maximale acceptable étant d'un ordre [67]. Dans le cas contraire, la méthode d'ordre le plus bas dégrade la qualité globale des résultats.

L'autre notion essentielle est la *stabilité*, assurant la non-amplification des erreurs d'arrondi à chaque itération [158]. La stabilité doit être démontrée a priori, ou du moins observée à travers de multiples expériences numériques, sans quoi les simulations sont inutilisables. Enfin, les contingences matérielles - mémoire informatique requise, temps de calcul, possibilité de parallélisation des algorithmes - sont cruciales pour traiter des configurations non académiques.

Schéma d'intégration. Dans la thèse [T1] et les articles jusqu'à [A5] inclus, notre méthode

d'intégration favorite était un schéma de volumes finis d'ordre deux avec limiteurs de flux [102]. Celui-ci, issu de la mécanique des fluides, possède comme principal avantage pour l'acoustique de limiter la dispersion numérique. En contrepartie, il introduit une forte atténuation numérique, rabotant les extrêma des ondes. De plus, les limiteurs de flux non linéaires sont coûteux en temps de calcul, rendant hors de portée des simulations sur de grands domaines. Enfin, les équations d'évolution linéaires que nous étudions ne conduisent pas à l'apparition spontanée de chocs, pour lesquels des limiteurs sont utiles.

Depuis 2006, nous nous sommes orientés vers d'autres schémas d'ordre élevé, linéaires, explicites et à deux pas de temps : les schémas ADER (Arbitrary DERivatives), issus de l'aéroacoustique numérique [153, 154]. Sur grille cartésienne uniforme, ceux-ci reviennent à des schémas de différences finies de type Lax-Wendroff [108]. En dimension un, nous avons développé et testé les schémas ADER d'ordre pair de 4 à 10 ; l'ordre 2 revient exactement au schéma classique de Lax-Wendroff. En dimensions deux et trois, nous avons implémenté l'ordre 4.

Méthode d'interface immergée. Les schémas de différences finies sur grille cartésienne constituent une approche très efficace pour simuler la propagation des ondes transitoires en milieu homogène. Cependant, leurs qualités sont fortement dégradées pour simuler des phénomènes de diffraction, pour trois types de raisons. Tout d'abord, les solutions étant irrégulières au passage des interfaces, l'ordre de convergence des schémas chute, et des instabilités numériques peuvent être générées. De plus, les interfaces de forme quelconque sont représentées par des "marches d'escaliers", conduisant à des diffractions parasites. Enfin, les conditions aux interfaces ne sont pas prises en compte.

Dans la thèse [T1] et les articles associés [A1, A2, A3], nous avons développé une *méthode d'interface immergée* pour résoudre ces trois problèmes tout en conservant l'efficacité des différences finies. Le lecteur peut consulter ces références pour mettre en perspective notre contribution, par rapport à d'autres méthodes d'interface immergée. Cette méthode revient à modifier le schéma numérique d'intégration au voisinage des interfaces, en tirant profit des conditions d'interface et de la géométrie locale. Le couplage est automatique avec les schémas classiques pour systèmes hyperboliques du premier ordre. Enfin, le surcoût informatique à chaque pas de temps est négligeable par rapport au coût des schémas d'intégration.

En contrepartie, la stabilité de la méthode n'a pas été démontrée dans [T1, A1, A2, A3]. L'analyse classique de Von Neumann ne peut s'appliquer, celle-ci n'étant valide qu'en milieu homogène [158]. Les techniques d'énergie, valables dans le cas de coefficients variables, sont bien adaptées à des discrétisations découlant d'une formulation variationnelle, ce qui n'est pas le cas ici. A notre connaissance, la seule approche restante est l'*analyse GKS* par modes normaux discrets [68, 162, 163, 164, 174].

Plan. Les schémas ADER sont détaillés en section 2.2, en suivant une pédagogie différente de [153, 154] : au lieu de l'approche "volumes finis" avec résolution de problèmes de Riemann, nous écrivons directement un schéma de Lax-Wendroff d'ordre arbitraire. On réalise une analyse de dispersion numérique et d'atténuation numérique de ces schémas, que l'on illustre par des comparaisons avec des solutions analytiques en milieu homogène. En section 2.3, on présente brièvement la méthode d'interface immergée, en dimension 1. La partie la plus originale de ce chapitre est l'analyse GKS, développée en section 2.4.3. A notre connaissance et à l'exception

de l'étude scalaire menée dans [174], ce travail constitue la première analyse de stabilité d'une méthode d'interface immergée appliquée à des équations hyperboliques.

2.2 Schéma d'intégration

2.2.1 Schémas ADER

En dimension 1, le modèle le plus simple de propagation est donné par le système hyperbolique linéaire à coefficients constants

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}, \tag{2.1}$$

avec $\boldsymbol{U}(x,\,t) \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{R}^{-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, et $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_N)^T$ la matrice diagonale des valeurs propres, supposées toutes réelles et non nulles. Pour $N = 2$, ce système décrit les équations de l'acoustique et de l'élastodynamique [T1]. Les équations d'évolution de la poroélasticité de Biot se mettent aussi sous la forme (2.1) avec $N = 4$, lorsque la viscosité du fluide saturant est négligée : voir à ce sujet [A9] ou le chapitre 6.

On cherche une approximation $\boldsymbol{U}_j^n$ de la solution exacte $\boldsymbol{U}(x_j = j\,\Delta x,\, t_n = n\,\Delta t)$ de (2.1), où Δx et Δt sont respectivement les pas d'espace et de temps. Pour cela, un développement de Taylor en temps d'ordre K conduit à

$$\boldsymbol{U}(x_j,\, t_{n+1}) = \sum_{m=0}^{K} \frac{\Delta t^m}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial t^m}\boldsymbol{U}(x_j,\, t_n) + \mathcal{O}\left(\Delta t^{K+1}\right). \tag{2.2}$$

A partir de (2.1), les dérivées temporelles dans (2.2) sont remplacées par des dérivées spatiales

$$\boldsymbol{U}(x_j,\, t_{n+1}) = \sum_{m=0}^{K} \frac{(-\Delta t)^m}{m\,!}\,\boldsymbol{A}^m\,\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(x_j,\, t_n) + \mathcal{O}\left(\Delta t^{K+1}\right). \tag{2.3}$$

Il reste alors à estimer les dérivées spatiales dans (2.3) par des différences finies centrées d'ordre K : pour la suite, nous considérerons toujours K pair. La théorie de l'interpolation assure qu'il existe un ensemble de coefficients $\gamma_{K,m,s}$ tels que, pour une solution de classe C^K,

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(x_j,\, t_n) = \frac{(-1)^{m+1}}{\Delta x^m}\,m!\sum_{s=-K/2}^{+K/2}\gamma_{K,m,s}\,\boldsymbol{U}(x_{j+s},\, t_n) + \mathcal{O}\left(\Delta x^{K+1}\right). \tag{2.4}$$

Ces coefficients satisfont les propriétés suivantes ($q = 1, \ldots,\, K/2$)

$$\sum_{s=-K/2}^{+K/2}\gamma_{K,m,s} = 0, \qquad \sum_{m=1}^{K}\gamma_{K,m,0} = 1, \qquad \gamma_{K,m,s} = (-1)^m\,\gamma_{K,m,-s}, \qquad \gamma_{K,2\,q-1,0} = 0. \tag{2.5}$$

On injecte (2.4) dans (2.3), on remplace les valeurs exactes par les valeurs numériques de la solution, et on élimine les restes de Taylor. En posant

$$\boldsymbol{C}_s = \sum_{m=1}^{K}\gamma_{K,m,s}\left(\boldsymbol{A}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^m = \boldsymbol{R}\left(\sum_{m=1}^{K}\gamma_{K,m,s}\left(\boldsymbol{\Lambda}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^m\right)\boldsymbol{R}^{-1}, \tag{2.6}$$

on en déduit l'écriture générale 1D du schéma ADER d'ordre K en temps et en espace

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \sum_{s=-K/2}^{+K/2} \boldsymbol{C}_s \, \boldsymbol{U}_{j+s}^n. \tag{2.7}$$

Les coefficients $\gamma_{K,m,s}$ pour $K = 2$, 4, 6, 8, 10 sont donnés dans les tableaux 2.1-2.5. A l'ordre $K = 2$, on retrouve exactement le schéma classique de Lax-Wendroff [102]. Une écriture équivalente à (2.7), plus compacte et utilisée en section 2.3, est donnée par

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{U}_{j-K/2}^n, ..., \boldsymbol{U}_{j+K/2}^n\right), \tag{2.8}$$

où $\boldsymbol{H}$ est un opérateur discret déduit des $\boldsymbol{C}_s$. Une analyse de Von-Neumann en milieu homogène montre que les schémas (2.7) ou (2.8) sont stables sous la condition CFL

$$\beta_{\max} = \max_{d=1,...,N} |\beta_d| = \max_{d=1,...,N} |\lambda_d| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \Upsilon. \tag{2.9}$$

En dimension 1, $\Upsilon = 1$ pour tout K. En dimensions 2 et 3, les calculs sont similaires mais beaucoup plus fastidieux, et ne sont pas détaillés ici [37]. Pour $K = 2$, les conditions de stabilité sont $\Upsilon = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$ en 2D, et $\Upsilon = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$ en 3D. Pour $K = 4$, les conditions de stabilité sont estimées numériquement : $\Upsilon = 1$ en 2D, et $\Upsilon \approx 0.91$ en 3D.

$\gamma_{2,m,s}$	$m=1$	$m=2$
$s=-1$	-1/2	-1/2
$s=0$	0	1
$s=+1$	+1/2	-1/2

Table 2.1: Coefficients d'interpolation spatiale d'ordre 2.

$\gamma_{4,m,s}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$s=-2$	1/12	1/24	-1/12	-1/24
$s=-1$	-2/3	-2/3	1/6	1/6
$s=0$	0	5/4	0	-1/4
$s=+1$	2/3	-2/3	-1/6	1/6
$s=+2$	-1/12	1/24	1/12	-1/24

Table 2.2: Coefficients d'interpolation spatiale d'ordre 4.

$\gamma_{6,m,s}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$s=-3$	-1/60	-1/180	1/48	1/144	-1/240	-1/720
$s=-2$	3/20	3/40	-1/6	-1/12	1/60	1/120
$s=-1$	-3/4	-3/4	13/48	13/48	-1/48	-1/48
$s=0$	0	49/36	0	-7/18	0	1/36
$s=+1$	3/4	-3/4	-13/48	13/48	1/48	-1/48
$s=+2$	-3/20	3/40	1/6	-1/12	-1/60	1/120
$s=+3$	1/60	-1/180	-1/48	1/144	1/240	-1/720

Table 2.3: Coefficients d'interpolation spatiale d'ordre 6.

$\gamma_{8,m,s}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$
$s=-4$	1/280	1/1120	-7/1440	-7/5760	1/720	1/2880	-1/10080	-1/40320
$s=-3$	-4/105	-4/315	1/20	1/60	-1/80	-1/240	1/1680	1/5040
$s=-2$	1/5	1/10	-169/720	-169/1440	13/360	13/720	-1/720	-1/1440
$s=-1$	-4/5	-4/5	61/180	61/180	-29/720	-29/720	1/720	1/720
$s=0$	0	205/144	0	-91/192	0	5/96	0	-1/576
$s=+1$	4/5	-4/5	-61/180	61/180	29/720	-29/720	-1/720	1/720
$s=+2$	-1/5	1/10	169/720	-169/1440	-13/360	13/720	1/720	-1/1440
$s=+3$	4/105	-4/315	-1/20	1/60	1/80	-1/240	-1/1680	1/5040
$s=+4$	-1/280	1/1120	7/1440	-7/5760	-1/720	1/2880	1/10080	-1/40320

Table 2.4: Coefficients d'interpolation spatiale d'ordre 8.

$\gamma_{10,m,s}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$
$s=-5$	-1/1260	-1/6300	41/36288	41/181440	-13/34560	-13/172800	1/24192	1/120960	-1/725760	-1/3628800
$s=-4$	5/504	5/2016	-1261/90720	-1261/362880	19/4320	19/17280	-13/30240	-13/120960	1/90720	1/362880
$s=-3$	-5/84	-5/252	541/6720	541/20160	-29/1280	-29/3840	23/13440	23/40320	-1/26880	-1/80640
$s=-2$	5/21	5/42	-4369/15120	-4369/30240	13/240	13/480	-17/5040	-17/10080	1/15120	1/30240
$s=-1$	-5/6	-5/6	1669/4320	1669/4320	-323/5760	-323/5760	1/320	1/320	-1/17280	-1/17280
$s=0$	0	5269/3600	0	-1529/2880	0	341/4800	0	-11/2880	0	1/14400
$s=+1$	5/6	-5/6	-1669/4320	1669/4320	323/5760	-323/5760	-1/320	1/320	1/17280	-1/17280
$s=+2$	-5/21	5/42	4369/15120	-4369/30240	-13/240	13/480	17/5040	-17/10080	-1/15120	1/30240
$s=+3$	5/84	-5/252	-541/6720	541/20160	29/1280	-29/3840	-23/13440	23/40320	1/26880	-1/80640
$s=+4$	-5/504	5/2016	1261/90720	-1261/362880	-19/4320	19/17280	13/30240	-13/120960	-1/90720	1/362880
$s=+5$	1/1260	-1/6300	-41/36288	41/181440	13/34560	-13/172800	-1/24192	1/120960	1/725760	-1/3628800

Table 2.5: Coefficients d'interpolation spatiale d'ordre 10.

2.2.2 Analyse numérique

Dispersion numérique. Dans le champ des caractéristiques $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}$, une onde plane harmonique s'écrit

$$\boldsymbol{\theta}(x,\,t) = \boldsymbol{\theta}_0\, e^{i(\omega\, t - k\, x)}, \tag{2.10}$$

où ω est la pulsation et k le nombre d'onde. Injectée dans (2.1), cette onde conduit aux N relations de dispersion

$$\omega_d = k_d\, \lambda_d, \qquad d = 1, \ldots,\, N. \tag{2.11}$$

Regardons ce qui se passe d'un point de vue discret. Dans le champ des caractéristiques discrètes $\boldsymbol{\theta}_j^n = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^n$, une onde plane harmonique est de la forme (cf [59], p.182)

$$\boldsymbol{\theta}_j^n = \boldsymbol{\theta}_0\, e^{i\left(\hat{\omega}_d\, n\, \Delta\, t - \hat{k}_d\, j\, \Delta\, x\right)}, \tag{2.12}$$

où $\hat{\omega}_d = \Re\mathrm{e}\,\{\hat{\omega}_d\} + i\,\Im\mathrm{m}\,\{\hat{\omega}_d\}$ et $\hat{k}_d$ sont respectivement la pulsation discrète de l'onde d et le nombre d'onde discret associé. On injecte (2.12) dans le schéma (2.7). A partir des propriétés (2.5), on obtient ($d = 1, \ldots,\, N$)

(2.13)

$$\begin{aligned}
e^{i\,\hat{\omega}_d\,\Delta\, t} &= 1 - \sum_{m=1}^{K} \left(\sum_{j=-K/2}^{+K/2} \gamma_{K,m,j}\, e^{-i\,\hat{k}_d\, j\,\Delta\, x} \right) \beta_d^m, \\
&= 1 - \sum_{m=1}^{K} \left(\gamma_{K,m,0} + \sum_{j=1}^{+K/2} \gamma_{K,m,-j}\, e^{i\,\hat{k}_d\, j\,\Delta\, x} + \sum_{j=1}^{+K/2} (-1)^m\, \gamma_{K,m,-j}\, e^{-i\,\hat{k}_d\, j\,\Delta\, x} \right) \beta_d^m, \\
&= 1 - \sum_{q=1}^{K/2} \left(\gamma_{K,2q-1,0} + \sum_{j=1}^{K/2} \gamma_{K,2q-1,-j} \left(e^{i\,\hat{k}_d\, j\,\Delta\, x} + (-1)^{2q-1}\, e^{-i\,\hat{k}_d\, j\,\Delta\, x} \right) \right) \beta_d^{2q-1} \\
&\quad - \sum_{q=1}^{K/2} \left(\gamma_{K,2q,0} + \sum_{j=1}^{K/2} \gamma_{K,2q,-j} \left(e^{i\,\hat{k}_d\, j\,\Delta\, x} + (-1)^{2q}\, e^{-i\,\hat{k}_d\, j\,\Delta\, x} \right) \right) \beta_d^{2q}, \\
&= 1 - \sum_{q=1}^{K/2} \gamma_{K,2q,0}\, \beta_d^{2q} - 2 \sum_{j=1}^{K/2} \left(\sum_{q=1}^{K/2} \beta_d^{2q}\, \gamma_{K,2q,-j} \right) \cos(j\,\hat{k}_d\,\Delta\, x) \\
&\quad - 2\, i \sum_{j=1}^{K/2} \left(\sum_{q=1}^{K/2} \beta_d^{2q-1}\, \gamma_{K,2q-1,-j} \right) \sin(j\,\hat{k}_d\,\Delta\, x).
\end{aligned}$$

On identifie les parties réelles et imaginaires ; en posant

$$\Delta_j^P = \sum_{q=1}^{K/2} \gamma_{K,2q,-j}\, \beta_d^{2q}, \qquad \Delta_j^I = \sum_{q=1}^{K/2} \gamma_{K,2q-1,-j}\, \beta_d^{2q-1}, \tag{2.14}$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-\Im\mathrm{m}\,\{\hat{\omega}_d\}\;\Delta t}\,\cos\left(\Re\mathrm{e}\,\{\hat{\omega}_d\}\;\Delta t\right) = 1-\Delta_0^P - 2\displaystyle\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^P\;\cos(j\,\hat{k}_d\,\Delta x), \\ \\ e^{-\Im\mathrm{m}\,\{\hat{\omega}_d\}\;\Delta t}\,\sin\left(\Re\mathrm{e}\,\{\hat{\omega}_d\}\;\Delta t\right) = -2\displaystyle\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^I\;\sin(j\,\hat{k}_d\,\Delta x). \end{array}\right. \tag{2.15}$$

On détermine tout d'abord $\Re\mathrm{e}\,\{\hat{\omega}_d\}$, qui correspond à la partie propagative des ondes numériques. De (2.15), on déduit les N *relations de dispersion discrètes* ($d = 1, \ldots, N$)

$$\Re\mathrm{e}\,\{\hat{\omega}_d\} = -\frac{1}{\Delta t}\arctan\left(\frac{2\displaystyle\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^I\;\sin(j\,\hat{k}_d\,\Delta x)}{1-\Delta_0^P - 2\displaystyle\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^P\;\cos(j\,\hat{k}_d\,\Delta x)}\right). \tag{2.16}$$

Les vitesses de phase discrètes $\hat{\lambda}_d = \frac{\Re\mathrm{e}\{\hat{\omega}_d\}}{\hat{k}}$ dépendent alors de Δt et Δx, et ne sont donc pas constantes : toutes les longueurs d'onde calculées numériquement ne se propagent pas à la même vitesse. Pour quantifier l'erreur due à cette dispersion numérique, on calcule le rapport entre la vitesse de phase exacte et la vitesse de phase numérique

$$q_d = \frac{\hat{\lambda}_d}{\lambda_d} = \frac{1}{\lambda_d}\,\frac{\Re\mathrm{e}\,\{\hat{\omega}_d\}}{\hat{k}}, \quad d = 1, \ldots, N. \tag{2.17}$$

On définit alors l'inverse du nombre de points de calcul par période spatiale de l'onde associée à la valeur propre λ_d, soit

$$G_d = \frac{\hat{k}_d\,\Delta x}{2\,\pi}, \tag{2.18}$$

avec $G_d \in]0,\, 0.5]$. Pour $d = 1, \ldots, N$, ces notations conduisent à

$$q_d(\beta_d,\, G_d) = -\frac{1}{2\,\pi\,\beta_d\,G_d}\;\arctan\left(\frac{2\displaystyle\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^I\;\sin(2\,j\,\pi\,G_d)}{1-\Delta_0^P - 2\displaystyle\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^P\;\cos(2\,j\,\pi\,G_d)}\right). \tag{2.19}$$

En pratique, G_d est très petit. A partir des coefficients dans les tableaux 2.1-2.5, les développement de Taylor de (2.19) conduisent aux formules approchées à $O(G_d^{K+2})$ près ($d = 1, \ldots, N$)

$$q_d(\beta_d,\, G_d) = \left\{\begin{array}{ll} 1+\dfrac{2\,\pi^2}{3}\,(\beta_d^2-1)\,G_d^2 + \mathcal{O}(G_d^4) & \text{si } K=2, \\ \\ 1-\dfrac{2\,\pi^4}{15}\,(\beta_d^2-1)\,(\beta_d^2-4)\,G_d^4 + \mathcal{O}(G_d^6) & \text{si } K=4, \\ \\ 1+\dfrac{4\,\pi^6}{315}\,(\beta_d^2-1)\,(\beta_d^2-4)\,(\beta_d^2-9)\,G_d^6 + \mathcal{O}(G_d^8) & \text{si } K=6, \\ \\ 1-\dfrac{2\,\pi^8}{2835}\,(\beta_d^2-1)\,(\beta_d^2-4)\,(\beta_d^2-9)\,(\beta_d^2-16)\,G_d^8 + \mathcal{O}(G_d^{10}) & \text{si } K=8. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

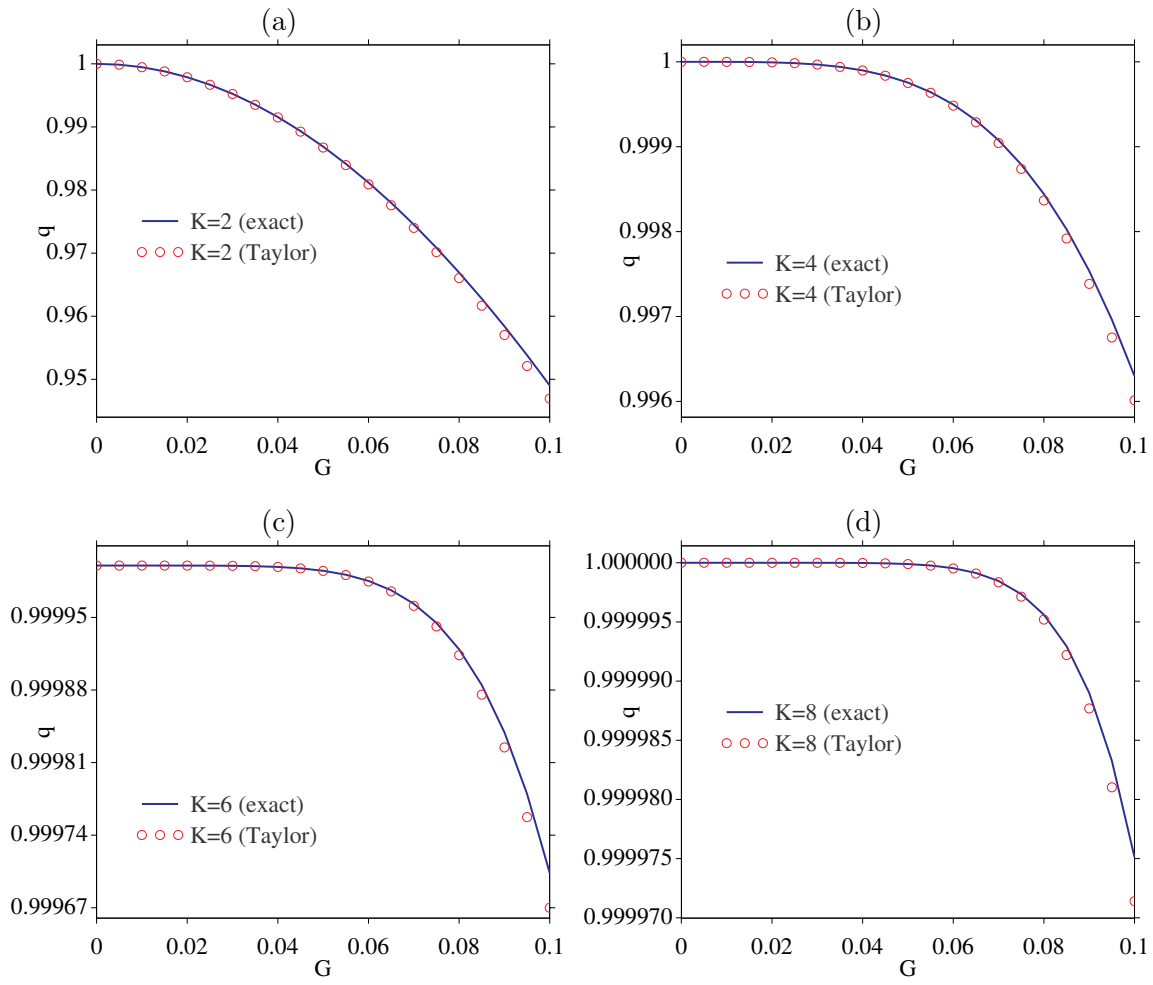


Figure 2.1: Courbes de dispersion numérique des schémas ADER d'ordre $K = 2$ (a), $K = 4$ (b), $K = 6$ (c) et $K = 8$ (d), avec $\beta = 0.60$. Formule exacte (2.19) et approchée (2.20).

Quelques remarques classiques déduites de (2.19)-(2.20), et illustrées en figure 2.1 :

- si $\beta_d = 1$, alors $q_d = 1$: la vitesse de phase discrète est égale à la vitesse de phase exacte ("pas de temps magique") ;
- à β_d fixé, on a
$$\lim_{G_d \to 0} q_d(\beta_d, G_d) = 1.$$
Ainsi, plus le nombre de points par longueur d'onde est grand, moins l'erreur de dispersion est importante ;
- à G_d fixé, la fonction $\beta_d \to q_d(\beta_d, G_d)$ est strictement croissante et tend vers 1. Le meilleur schéma est donc obtenu pour le plus grand β_d, limité toutefois par la condition de stabilité CFL : $\beta_d \leq 1$;
- enfin, les formules approchées (2.20) s'avèrent très précises, permettant ainsi facilement de dimensionner les calculs.

Atténuation numérique. On détermine maintenant $\Im\mathrm{m}\,\{\hat{\omega}_d\}$, qui correspond à la partie atténuée de l'onde numérique. De (2.15), on déduit

(2.21)
$$e^{-\Im\mathrm{m}\,\{\hat{\omega}_d\}\,\Delta t} = \sqrt{\left(1-\Delta_0^P-2\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^P\,\cos(j\,\hat{k}_d\,\Delta x)\right)^2+4\,\left(\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^I\,\sin(j\,\hat{k}_d\,\Delta x)\right)^2}.$$

Ainsi, $\Im\mathrm{m}\,\{\hat{\omega}_d\}$ n'est pas nulle et dépend de la discrétisation choisie. Pour quantifier cette atténuation numérique, on définit la grandeur adimensionnée

$$a_d = \frac{\Delta x}{\lambda_d}\,\Im\mathrm{m}\,\{\hat{\omega}_d\}\,, \qquad d=1,\ldots,N. \tag{2.22}$$

Vu la notation (2.18), on a pour $d=1,\ldots,N$

(2.23)
$$a_d(\beta_d,\,G_d) = -\frac{1}{2\,\beta_d}\,\ln\left(\left(1-\Delta_0^P-2\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^P\,\cos(2\,j\,\pi\,G_d)\right)^2+4\,\left(\sum_{j=1}^{K/2}\Delta_j^I\,\sin(2\,j\,\pi\,G_d)\right)^2\right).$$

A partir des coefficients dans les tableaux 2.1-2.4, les développement de Taylor de (2.23) conduisent aux formules approchées à $O(G_d^{K+4})$ près ($d=1,\ldots,N$)

(2.24)
$$a_d(\beta_d,\,G_d) = \begin{cases} -2\,\pi^4\,\beta_d\,(\beta_d^2-1)\,G_d^4+\mathcal{O}(G_d^6) & \text{si } K=2,\\ \dfrac{4\,\pi^6}{9}\,\beta_d\,(\beta_d^2-1)\,(\beta_d^2-4)\,G_d^6+\mathcal{O}(G_d^8) & \text{si } K=4,\\ -\dfrac{2\,\pi^8}{45}\,\beta_d\,(\beta_d^2-1)\,(\beta_d^2-4)\,(\beta_d^2-9)\,G_d^8+\mathcal{O}(G_d^{10}) & \text{si } K=6,\\ \dfrac{4\,\pi^{10}}{1575}\,\beta_d\,(\beta_d^2-1)\,(\beta_d^2-4)\,(\beta_d^2-9)\,(\beta_d^2-16)\,G_d^{10}+\mathcal{O}(G_d^{12}) & \text{si } K=8. \end{cases}$$

Quelques remarques classiques déduites de (2.23)-(2.24), et illustrées en figure 2.2 :

- si $\beta_d=1$, alors $a_d=0$: l'atténuation discrète est nulle ("pas de temps magique") ;
- à β_d fixé, on a
$$\lim_{G_d\to 0} a_d(\beta_d,\,G_d)=0.$$
Ainsi, plus le nombre de points par longueur d'onde est important, moins l'erreur de diffusion est importante.

Anisotropie numérique. En dimensions 2 et 3, la vitesse de phase et l'atténuation numérique sont aussi modifiées par l'angle entre l'onde plane et les axes du maillage. L'analyse d'anisotropie numérique quantifie cette dépendance angulaire. Les expressions théoriques étant très volumineuses, nous ne détaillons pas les calculs et présentons juste un exemple de résultat en figure 2.3. Le ratio q entre les vitesses de phase numérique et exacte est représenté en fonction de l'angle entre le vecteur directeur de l'onde plane et l'axe horizontal, pour différents nombres CFL. Dans tous les cas, l'erreur est maximale lorsque l'onde de propage suivant une des directions du maillage. Ainsi, les expressions théoriques obtenues en 1D conduisent aux estimations les plus pénalisantes en 2D et 3D.

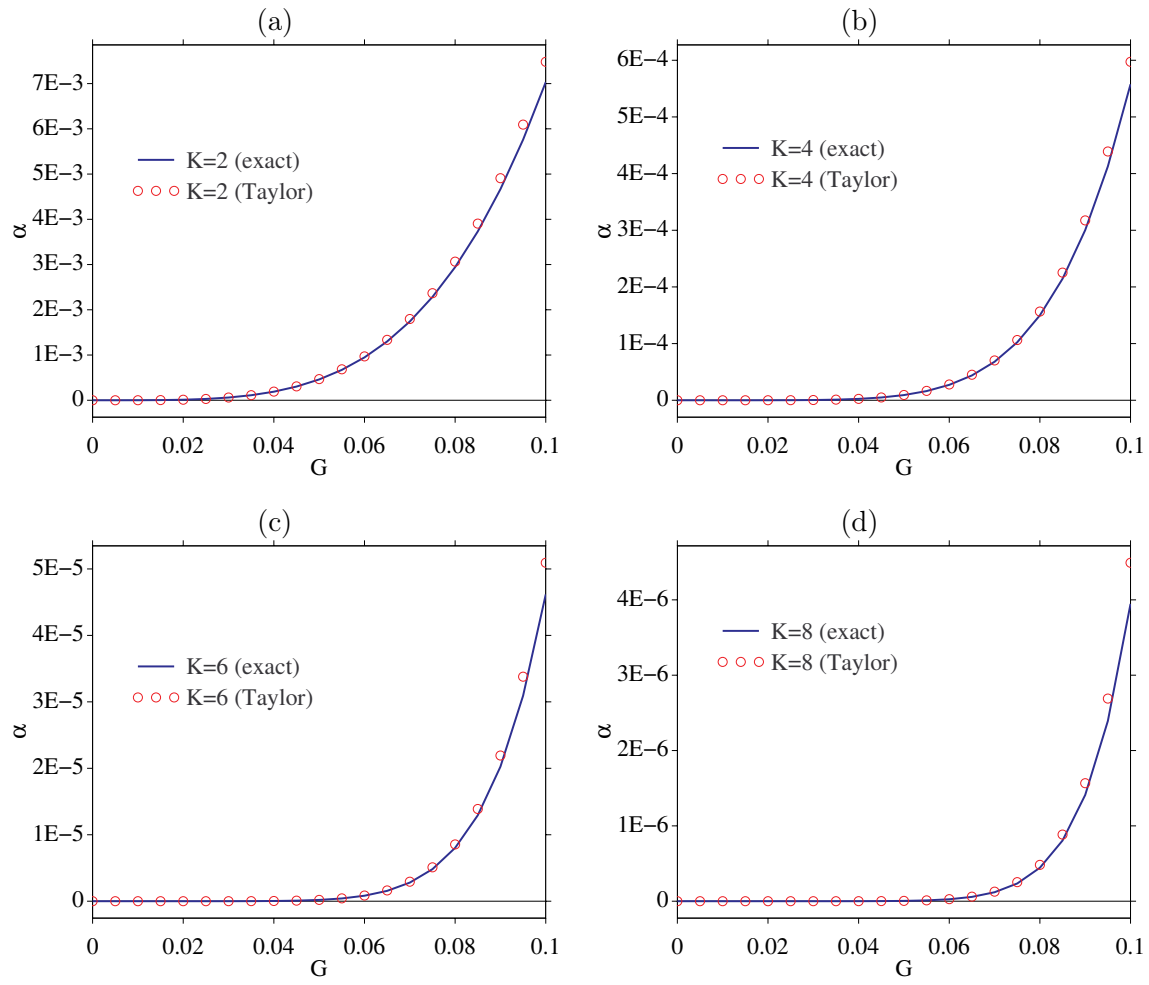


Figure 2.2: Courbes d'atténuation numérique des schémas ADER d'ordre $K = 2$ (a), $K = 4$ (b), $K = 6$ (c) et $K = 8$ (d), avec $\beta = 0.60$. Formule exacte (2.23) et approchée (2.24).

2.2.3 Expériences numériques

Les simulations présentées dans cette section sont réalisées en milieu homogène fluide, avec les propriétés physiques de l'eau et une source de fréquence centrale 50 Hz. Celle-ci est une sinusoïde tronquée de classe C^6 [A6, A9]. Le pas de discrétisation en espace est $\Delta x = 1$ m, soit 30 points de calcul par longueur d'onde centrale.

La propagation en 1D est illustrée en figure 2.4. On compare les solutions calculées par les schémas ADER d'ordre $K = 2$, 4, 6, 8 à la solution analytique. L'onde est propagée sur une grande distance - environ 24 longueurs d'onde - avec un nombre CFL : $\beta_{\max} = 0.90$. La qualité des solutions numériques croît logiquement avec l'ordre du schéma utilisé. Pour $K = 2$ (ie le schéma de Lax-Wendroff), les oscillations parasites sont très marquées et déforment complètement l'onde.

La figure 2.5-(a,b) représente la pression émise en 2D par une source ponctuelle au centre d'un domaine de 300×300 points de calcul, simulée par le schéma ADER d'ordre 4. La solution

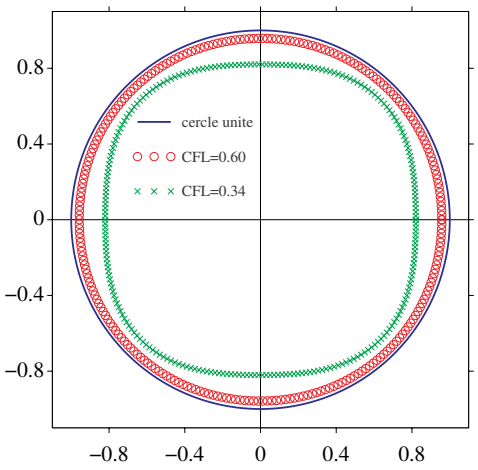


Figure 2.3: Courbes d'anisotropie numérique du schéma ADER 4.

analytique est obtenue en convoluant la source par la fonction de Green 2D. Le support de l'onde émise n'est pas borné, contrairement à celui de la source excitatrice, ce qui constitue une propriété classique des espaces de dimension paire [122]. L'accord entre solutions numérique et analytique est très bon. La figure 2.5-(c,d) représente la pression émise en 3D par une source ponctuelle au centre d'un domaine de $200 \times 200 \times 200$ points de calcul. Contrairement au cas 2D, le support de l'onde émise est borné. De petites oscillations parasites sont observées au niveau du front arrière de l'onde émise, vers $x = 60$ m et $x = 140$ m.

Schéma	1D ($\times$ 400 pas)	2D ($\times$ 100 pas)	3D ($\times$ 10 pas)
ADER 2	4.1 s	3.2 s	3.1 s
ADER 4	10.1 s	27.9 s	36.9 s
ADER 6	15.7 s	-	-
ADER 8	21.3 s	-	-
ADER 10	27.8 s	-	-
TVD	11.3 s	58.7 s	-

Table 2.6: Temps de calcul des schémas en milieu homogène fluide.

Enfin, les temps de calcul sont présentés dans le tableau 2.6. En 1D et 2D, on donne aussi le temps de calcul du schéma TVD utilisé dans [T1]. En 1D, 2D et 3D, les calculs sont réalisés respectivement sur des grilles de 4000, 400×400 et $100 \times 100 \times 100$ points. En 1D, on note l'augmentation quasiment linéaire du temps de calcul avec l'ordre du schéma ADER. Le schéma TVD d'ordre 2 est alors légèrement plus coûteux que le schéma ADER 4. En 2D, le temps de calcul d'ADER 4 est environ 10 fois supérieur à celui d'ADER 2. Cette augmentation relative par rapport au cas 1D est due au stencil d'ADER 4, comportant 25 points, contre 9 points pour ADER 2. Quant au schéma TVD, son coût devient prohibitif à cause des estimations non linéaires des limiteurs de flux dans les deux directions [T1].

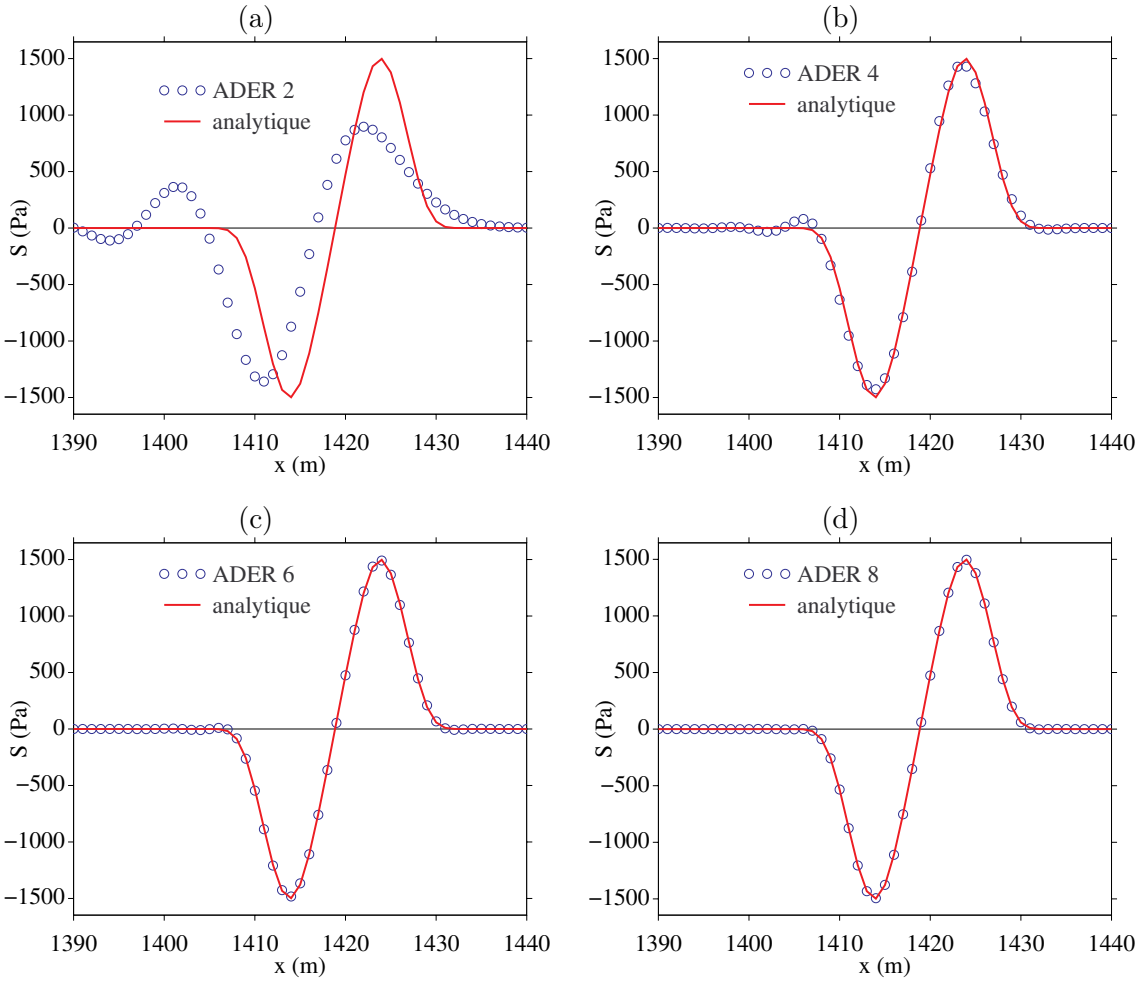


Figure 2.4: Pression émise par un point source en milieu homogène 1D fluide.

2.3 Méthode d'interface immergée

2.3.1 Problème continu

Soit une interface immobile située en $x = \alpha$ et séparant deux milieux Ω_0 et Ω_1 (figure 2.6). Les paramètres physiques sont constants sur Ω_0 et Ω_1 et discontinus en α, conduisant aux matrices $\boldsymbol{A}_0$ et $\boldsymbol{A}_1$ dans (2.1). Pour obtenir un problème bien posé, on doit définir N conditions indépendantes satisfaites par la solution $\boldsymbol{U}$ en α. On utilise ici des *conditions de saut linéaires* qui se mettent sous la forme

$$[\boldsymbol{\mathcal{B}}\,\boldsymbol{U}] = \boldsymbol{0}, \tag{2.25}$$

où $[f]$ désigne le saut de f de α^- à α^+, et $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est une matrice $N \times N$ indépendante de t. En acoustique, on considère généralement $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{I}_N$ la matrice identité de dimension N. Un exemple de matrice $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ non triviale est donné par le modèle de Biot, dans le cas d'un contact hydraulique

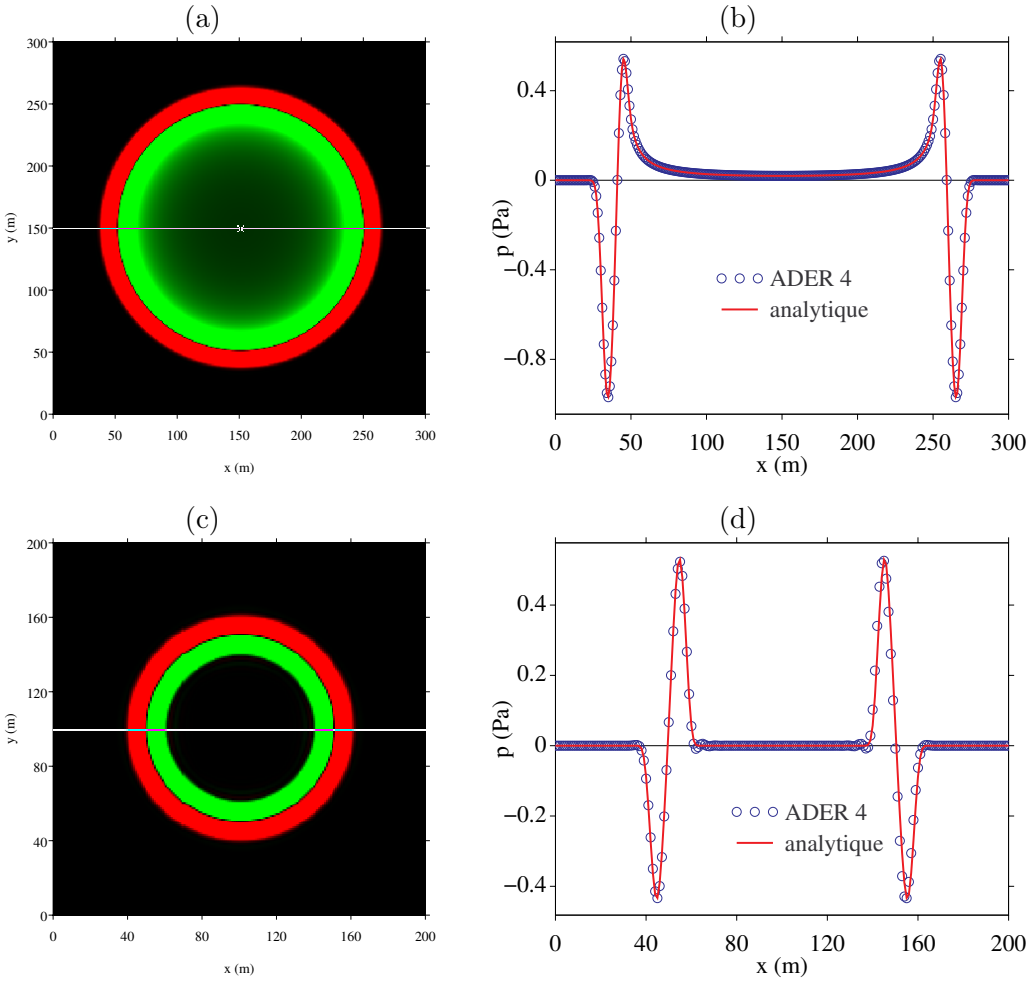


Figure 2.5: Pression émise par un point source en milieu homogène fluide : 2D (a-b), 3D (c-d).

imparfait entre deux solides poroélastiques : voir [A9] et le chapitre 6. Des lois plus sophistiquées que (2.25) existent aussi, décrivant par exemples des contacts imparfaits linéaires ou non linéaires entre solides : voir les chapitres 3 et 4. On dérive (2.25) m fois par rapport à t. Les dérivées temporelles sont remplacées par des dérivées spatiales grâce à la loi de conservation (2.1). En posant

$$\boldsymbol{D}_m = ((\boldsymbol{A}_1)^m)^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{B}}_1^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{B}}_0\, (\boldsymbol{A}_0)^m,$$

on obtient alors

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^+, t) = \boldsymbol{D}_m \frac{\partial^m}{\partial x^m}\boldsymbol{U}(\alpha^-, t). \tag{2.26}$$

Ainsi, même si la solution est continue en α ($\boldsymbol{\mathcal{B}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = \boldsymbol{I}_N$), les dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}$ sont discontinues au passage de l'interface si les paramètres physiques sont discontinus.

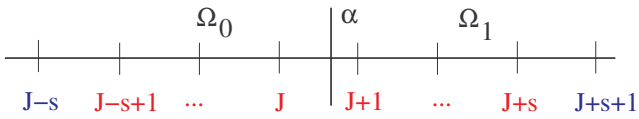


Figure 2.6: Interface immergée dans le maillage. Points réguliers (en bleu) et irréguliers (en rouge) ; largeur du stencil $s = K/2$.

2.3.2 Problème discret

Le schéma (2.8) a été construit en milieu homogène en supposant la solution de classe C^K sur $[x_{j-K/2}, ..., x_{j+K/2}]$. Aux points de calcul suffisamment loin de l'interface pour que le stencil appartienne à un seul milieu, on peut donc continuer à appliquer (2.8), comme en milieu homogène. Par contre, aux *points irréguliers* $x_{J-K/2+1}, ..., x_{J+K/2}$, où $J = \text{trunc}(\alpha \,/\, \Delta x)$, la solution n'est plus C^K sur la largeur complète du stencil, et on doit donc modifier le schéma (figure 2.6). Pour cela, on suit l'approche proposée dans [T1, A1, A2]. L'idée de base de cette *méthode d'interface immergée* est de construire, de part et d'autre de α, des prolongements $\boldsymbol{U}^*$ de classe $C^{2\,q-1}$ de $\boldsymbol{U}$

$$
\begin{aligned}
&\alpha \le x \le x_{J+K/2}, \qquad \boldsymbol{U}^*(x,\, t_n) = \sum_{m=0}^{2\,q-1} \frac{(x-\alpha)^m}{m\,!}\, \frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\, \boldsymbol{U}(\alpha^-,\, t_n), \\
&x_{J-K/2+1} \le x \le \alpha, \qquad \boldsymbol{U}^*(x,\, t_n) = \sum_{m=0}^{2\,q-1} \frac{(x-\alpha)^m}{m\,!}\, \frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\, \boldsymbol{U}(\alpha^+,\, t_n),
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

et qui satisfassent les mêmes conditions de saut que $\boldsymbol{U}$. La valeur de q est discutée plus loin. Les valeurs numériques de $\boldsymbol{U}^*$ sont appelées *valeurs modifiées*. En un point irrégulier d'un côté de l'interface, le schéma utilise les valeurs numériques aux points du même côté, et les valeurs modifiées aux points de l'autre côté.

Reste à estimer $\frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\, \boldsymbol{U}(\alpha^{\pm},\, t_n)$ dans (2.27). Pour cela, on écrit en α^- les développements de Taylor d'ordre $2\,q-1$ de la solution en r points à gauche de l'interface ; on fait de même en r points à droite de l'interface, tirant alors avantage des conditions de saut (2.26)

(2.28)

$$
\begin{aligned}
j = J-r+1, \ldots, J, \quad \boldsymbol{U}(x_j,\, t_n) &= \sum_{m=0}^{2\,q-1} \frac{(x_j-\alpha)^m}{m\,!}\, \frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\, \boldsymbol{U}(\alpha^-,\, t_n) + \mathcal{O}(\Delta\, x^{2\,q}), \\
j = J+1, \ldots, J+r, \quad \boldsymbol{U}(x_j,\, t_n) &= \sum_{m=0}^{2\,q-1} \frac{(x_j-\alpha)^m}{m\,!}\, \frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\, \boldsymbol{U}(\alpha^+,\, t_n) + \mathcal{O}(\Delta\, x^{2\,q}), \\
&= \sum_{m=0}^{2\,q-1} \frac{(x_j-\alpha)^m}{m\,!}\, \boldsymbol{D}_m\, \frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\, \boldsymbol{U}(\alpha^-,\, t_n) + \mathcal{O}(\Delta\, x^{2\,q}),
\end{aligned}
$$

avec $r \ge q$. Ces équations sont écrites de façon matricielle

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(x_{J-r+1},\, t_n) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}(x_{J+r},\, t_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}(\alpha^-,\, t_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,q-1}}{\partial\, x^{2\,q-1}}\, \boldsymbol{U}(\alpha^-,\, t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta\, x^{2\,q}) \\ \vdots \\ \mathcal{O}(\Delta\, x^{2\,q}) \end{pmatrix},
\tag{2.29}
$$

où $\boldsymbol{M}$ est une matrice $2\,r\,N \times 2\,q\,N$. On remplace alors les valeurs exactes des solutions par les valeurs numériques à l'instant t_n, et on élimine les restes de Taylor. On en déduit les estimations numériques des traces de la solution et de ses $2\,q-1$ dérivées spatiales en α^-

$$\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{U}^- \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{2\,q-1}}{\partial\, x^{2\,q-1}}\,\boldsymbol{U}^- \end{array} \right) = \boldsymbol{M}^{-1} \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{U}^n_{J-r+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}^n_{J+r} \end{array} \right), \tag{2.30}$$

où $\boldsymbol{M}^{-1}$ est une matrice $2\,q\,N \times 2\,r\,N$. Si $r > q$, alors $\boldsymbol{M}^{-1}$ est la pseudo-inverse de $\boldsymbol{M}$ au sens des moindres carrés. Les estimations des traces sont injectées dans (2.27), ce qui conduit aux valeurs modifiées à droite de α

$$\begin{aligned} j = J, \ldots, J + K/2, \quad \boldsymbol{U}^*_i &= \sum_{m=0}^{2\,q-1} \frac{(x_j-\alpha)^m}{m\,!}\,\frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\,\boldsymbol{U}^-, \\ &= \left(\boldsymbol{I}_N, \ldots, \frac{(x_j-\alpha)^{2\,q-1}}{(2\,q-1)\,!}\,\boldsymbol{I}_N \right) \boldsymbol{M}^{-1} \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{U}^n_{J-r+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}^n_{J+r} \end{array} \right), \\ &= \sum_{l=0}^{2\,r-1} \boldsymbol{T}_{j,l}\,\boldsymbol{U}^n_{J-r+l+1}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Les valeurs modifiées à gauche de α sont construites en suivant une procédure similaire. Une fois tous les $\boldsymbol{U}^*_i$ calculés, on modifie le schéma (2.8) aux points irréguliers en écrivant

$$\begin{aligned} j = J - K/2 + 1, \ldots, J, \qquad \boldsymbol{U}^{n+1}_j &= \boldsymbol{H}_0 \left(\boldsymbol{U}^n_{j-K/2}, ..., \boldsymbol{U}^n_J, \boldsymbol{U}^*_{J+1}, ..., \boldsymbol{U}^*_{j+K/2} \right), \\ j = J + 1, \ldots, J + K/2, \qquad \boldsymbol{U}^{n+1}_j &= \boldsymbol{H}_1 \left(\boldsymbol{U}^*_{j-K/2}, ..., \boldsymbol{U}^*_J, \boldsymbol{U}^n_{J+1}, ..., \boldsymbol{U}^n_{j+K/2} \right), \end{aligned} \tag{2.32}$$

où $\boldsymbol{H}_m$ sont les opérateurs discrets obtenus avec les paramètres physiques du milieu Ω_m ($m = 0,\ 1$). Par la suite, on désignera la méthode d'interface par les indices $(q,\ r)$. Quelques remarques au sujet de la méthode d'interface immergée :

1. l'algorithme est simple : les valeurs modifiées ne dépendent pas de l'opérateur $\boldsymbol{H}$. Le couplage de la méthode d'interface immergée avec des schémas d'ordre élevé ne pose donc pas de difficulté ;

2. les conditions de saut ne variant pas au cours du temps, les matrices $\boldsymbol{T}_{i,l}$ dans (2.31) peuvent être calculées en prétraitement. A chaque pas de temps, il reste uniquement à calculer les produits matrice-vecteur dans (2.31) et à injecter les valeurs modifiées obtenues dans (2.32). Le coût en temps de calcul est donc négligeable devant celui du schéma d'intégration ;

3. sans méthode d'interface immergée, on peut toujours utiliser le formalisme (2.32), en notant

$$\mathbf{T}_{j,l} = \delta_{j,j-J+r-1}\,\mathbf{I}_N,$$

dans (2.31), où δ désigne le symbole de Kronecker. Cette écriture sera utile lors de l'analyse de stabilité ultérieure ;

4. enfin, les conditions de saut et la position relative de l'interface dans le maillage sont prises en compte numériquement, via la matrice $\boldsymbol{M}^{-1}$ dans (2.31).

Dans [T1, A1], nous avons démontré les propriétés suivantes d'analyse numérique :

1. dans le cas-limite $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{B}}_\mathbf{1} = \boldsymbol{I}_N$, on obtient une propriété de *consistance* : si $q = r \geq K/2$, alors $\boldsymbol{U}_i^* = \boldsymbol{U}_i^n$. On retrouve ainsi le schéma en milieu homogène ;

2. la matrice $\boldsymbol{M}$ dans (2.29) est inversible si $q = r$. La démonstration dans [T1] est calculatoire, uniquement valable dans le cas de l'acoustique et pour $q = 1, 2, 3$. Pour la généraliser, il suffit de remarquer que $\boldsymbol{M}$ est le produit d'une matrice de conditions de saut et d'une matrice de Vandermonde. Ces deux matrices étant inversibles, leur produit est inversible quels que soient les paramètres physiques et numériques ;

3. soit K l'ordre du schéma. L'erreur locale de troncature de (2.32) aux points irréguliers est d'ordre K si $2\,q - 1 \geq K$. Cette condition peut être légèrement affaiblie [67] : une chute de précision d'un ordre aux points irréguliers maintient une erreur globale d'ordre K. En conséquence de quoi, l'erreur locale est d'ordre K si $q \geq K/2$.

2.3.3 Expériences numériques

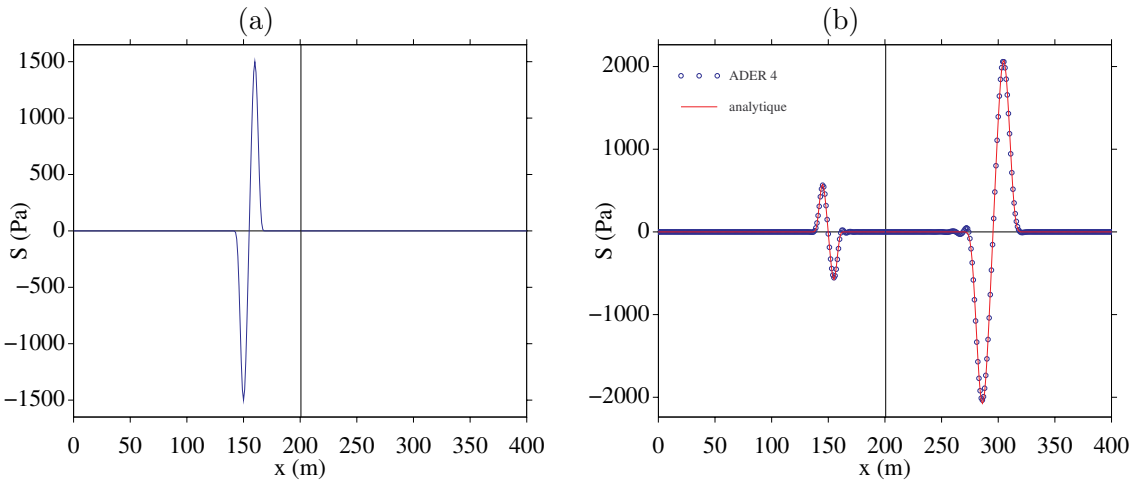


Figure 2.7: Interface entre deux milieux fluides. Pression incidente (a) et diffractée (b).

On teste ici la précision de la méthode d'interface immergée. Pour cela, on étudie un milieu fluide hétérogène de longueur 400 m. Les paramètres physiques sont constants par morceaux et discontinus en $\alpha = 200.67$ m :

$$(\rho,\, c) = \begin{cases} (1000 \text{ kg/m}^3,\, 1500 \text{ m/s}) & \text{si } x < \alpha \\ (1200 \text{ kg/m}^3,\, 2800 \text{ m/s}) & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

La pression et vitesse acoustique sont supposées continues, soit $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{I}_2$ dans (2.25). L'onde incidente est localisée dans le milieu Ω_0, et s'écrit $\boldsymbol{U}(x,\,0) = \boldsymbol{U}_0(x) = -(1/c,\,\rho)^T\, h(t_0 - x\,/\,c)$, où h est une combinaison de sinusoïdes tronquées

$$h(\xi) = \begin{cases} \varepsilon \displaystyle\sum_{m=1}^{4} a_m \,\sin(\beta_m\,\omega_c\,\xi) & \text{si } 0 < \xi < \dfrac{1}{f_c}, \\ 0 \text{ autrement,} \end{cases} \tag{2.33}$$

avec $\beta_m = 2^{m-1}$, $\omega_c = 2\pi\, f_c$; les coefficients a_m sont : $a_1 = 1$, $a_2 = -21/32$, $a_3 = 63/768$, $a_4 = -1/512$. L'onde obtenue est alors de classe C^6. La fréquence centrale est $f_c = \omega_c/(2\,\pi) =$ 50 Hz, et $t_0 = 113.3$ ms conduit à une localisation du front incident droit en $x = 170$ m. Le paramètre ε dans (2.33) est tel que la vitesse incidente est d'amplitude égale à 1 mm/s, soit $\varepsilon \approx 1.507$. Les calculs sont réalisés avec le schéma ADER d'ordre $K = 4$, sur une grille uniforme de N points et avec un nombre CFL $\beta_{\max} = 0.9$ (2.9). L'interface est discrétisée par la méthode d'interface immergée, de paramètres $(q,\,r)$, avec $q = r$.

En figure 2.7, on représente la pression incidente (a) et la pression diffractée après $N/2$ pas d'intégration temporelle (b), avec $N = 400$ et $q = r = 3$. Le nombre de points de calcul conduit respectivement à 30 et 56 points de calcul par longueur d'onde centrale, dans Ω_0 et Ω_1. La durée de simulation revient à une distance de propagation d'environ 3.2 longueurs d'onde centrale.

N	$q = r = 0$	ordre	$q = r = 1$	ordre	$q = r = 2$	ordre	$q = r = 3$	ordre
50	$7.586\,10^{3}$	-	$7.749\,10^{3}$	-	$7.784\,10^{3}$	-	$7.916\,10^{3}$	-
100	$5.035\,10^{3}$	**0.596**	$5.359\,10^{3}$	**0.532**	$5.327\,10^{3}$	**0.547**	$5.437\,10^{3}$	**0.537**
200	$1.454\,10^{3}$	**1.792**	$1.482\,10^{3}$	**1.854**	$1.389\,10^{3}$	**1.939**	$1.405\,10^{3}$	**1.958**
400	$9.003\,10^{2}$	**0.692**	$3.032\,10^{2}$	**2.289**	$2.651\,10^{2}$	**2.389**	$2.657\,10^{2}$	**2.403**
800	$3.242\,10^{2}$	**1.474**	$2.652\,10^{1}$	**3.515**	$2.219\,10^{1}$	**3.579**	$2.226\,10^{1}$	**3.577**
1600	$2.455\,10^{2}$	**0.401**	$7.114\,10^{0}$	**1.898**	$1.503\,10^{0}$	**3.884**	$1.502\,10^{0}$	**3.889**
3200	$8.369\,10^{1}$	**1.533**	$5.736\,10^{-1}$	**3.633**	$9.480\,10^{-2}$	**3.987**	$9.486\,10^{-2}$	**3.985**
6400	$6.466\,10^{1}$	**0.372**	$4.896\,10^{-1}$	**0.228**	$5.938\,10^{-3}$	**3.997**	$5.937\,10^{-3}$	**3.998**
12800	$2.276\,10^{1}$	**1.506**	$4.208\,10^{-2}$	**3.540**	$3.713\,10^{-4}$	**3.999**	$3.713\,10^{-4}$	**3.999**

Table 2.7: Mesures de convergence sur des grilles de N points. Schéma ADER 4 et méthode d'interface immergée de paramètres $q = r$.

Dans le tableau 2.7, on réalise une mesure d'ordre de convergence en norme L_2, par comparaison avec la solution exacte. Différentes valeurs de N et jeux de paramètres $(q,\,r)$ sont considérés, avec $q = r$. Le cas $q = 0$ correspond au schéma ADER 4 sans méthode d'interface immergée : logiquement, l'ordre 4 de précision est perdu. Il en est de même pour $q = 1$. L'analyse d'erreur locale rappelée en fin de section 2.3.2 précise que $q \geq 2$ est suffisant pour maintenir une erreur globale d'ordre 4, ce qui est confirmé par les mesures de convergence.

Les mesures d'ordre sont présentées de façon synthétique en figure 2.8. Vu l'échelle choisie, les résultats pour $q = 2$ et $q = 3$ sont indiscernables. On note, pour ces valeurs, la grande régularité des courbes, à la différence de celles obtenues pour $q = 0$ et $q = 1$, dont les comportements sont chahutés. Enfin, tant dans le tableau 2.7 qu'en figure 2.8, on note que les ordres de convergence pour $q = 2$ ou $q = 3$ sont inférieurs à 4 lorsque des maillages très grossiers sont utilisés. Cette observation est classique et expliquée dans la littérature d'analyse numérique.

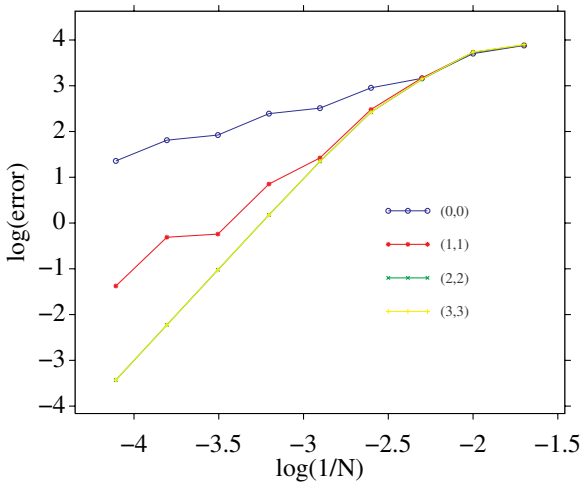


Figure 2.8: Ordres de convergence pour différents jeux de paramètres $(q,\, r)$: voir tableau 2.7.

2.4 Analyse de stabilité

2.4.1 Equations résolvantes

Avant d'aborder l'analyse de stabilité GKS (section 2.4.3 et 2.4.4), quelques outils préliminaires sont rappelés : *équations résolvantes*, ondes discrètes *rightgoing* et *leftgoing*, qui dépendent uniquement du schéma ADER. Considérons la variable discrète $\theta_j^n = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{U}_j^n$. A partir de (2.6) et (2.7), l'avancée en temps de chaque composante $\theta_{d,j}^n$ s'écrit $(d = 1, \cdots, N,)$

$$\theta_{d,j}^{n+1} = \theta_{d,j}^n - \sum_{s=-K/2}^{K/2} \chi_{s,d}\,\theta_{d,j+s}^n, \tag{2.34}$$

où $\chi_{s,d}$ est défini par $(s = -K/2, ...,\, K/2,\, d = 1, \cdots, N)$:

$$\chi_{s,d} = \sum_{m=1}^{K} \gamma_{K,m,s} \left(\lambda_d \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^m = \sum_{m=1}^{K} \gamma_{K,m,s}\,\beta_d^m. \tag{2.35}$$

Les solutions de (2.34) sont cherchées sous forme de modes discrets $\theta_{d,j}^n = z^n\,\phi_{d,j}$. En injectant ces modes dans (2.34), on obtient les équations linéaires aux différences $(d = 1, \cdots, N)$

$$(1 - z - \chi_{0,d})\;\phi_{d,j} - \sum_{s=-K/2, s\neq 0}^{K/2} \chi_{s,d}\,\phi_{d,j+s} = 0. \tag{2.36}$$

Les polynômes caractéristiques d'ordre K associés sont appelés *équations résolvantes* $(d = 1, \cdots, N)$

$$\mathcal{F}_d(\kappa,\, z) = (1 - z - \chi_{0,d})\;\kappa^{K/2} - \sum_{s=-K/2, s\neq 0}^{K/2} \chi_{s,d}\,\kappa^{s+K/2}, \tag{2.37}$$

qui dépendent des coefficients $\gamma_{K,m,s}$ du schéma, du nombre CFL β_d de l'onde d dans (2.35), et enfin de $z \in \mathbb{C}$. Par exemple, si $K = 2$ et $\beta_d \neq 1$, les coefficients du tableau 2.1 conduisent à

$$\mathcal{F}_d(\kappa,\, z) = \kappa^2 + \frac{2\left(1 - \beta_d^2 - z\right)}{\beta_d\,(\beta_d - 1)}\,\kappa + \frac{\beta_d + 1}{\beta_d - 1}, \qquad d = 1, \cdots,\, N, \tag{2.38}$$

permettant de retrouver les équations résolvantes du schéma de Lax-Wendroff, donnée en équation (6-5) de [68] ou équation (3.3) de [105]. Supposons que les K racines $\kappa_{(d-1)\,K+m}$ de (2.37) sont des racines simples ($m = 1, \cdots,\, K$, $d = 1, \cdots,\, N$). Alors, les solutions de (2.34) s'écrivent comme combinaisons d'ondes discrètes :

$$\theta_{d,j}^n = z^n \sum_{m=1}^{K} a_{(d-1)\,K+m}\,\kappa_{(d-1)\,K+m}^j. \tag{2.39}$$

Enfin, on définit les courbes fermées constituées des racines de (2.37), obtenues lorsque z varie le long du cercle de rayon r ($d = 1, \cdots,\, N$)

$$\Theta_d(r) = \left\{ \kappa \in \mathbb{C} \,/\, \mathcal{F}_d(\kappa,\, z) = 0, \quad z = r\,e^{i\,\theta}, \quad \theta \in [0,\, 2\,\pi], \quad r \geq 1 \right\}. \tag{2.40}$$

Des calculs élémentaires montrent que Θ_d est symétrique par rapport à l'axe réel.

2.4.2 Ondes RG et LG

A partir de maintenant, on considère un facteur d'amplification temporelle $|z| \geq 1$. Les racines des équations résolvantes conduisent alors à deux groupes d'ondes discrètes.

Définition 2.1 *Soit $|z| \geq 1$, et κ une racine de (2.37). Les ondes discrètes $z^n\,\kappa^j$ sont appelées "ondes rightgoing" (RG) si $|\kappa| < 1$, et inversement "ondes leftgoing" (LG) si $|\kappa| > 1$. Dans le cas-limite $|\kappa| = |z| = 1$, la vitesse de groupe [162]*

$$c_d(\kappa,\, z) = -\frac{\Delta\, x}{\Delta\, t}\,\frac{\kappa}{z}\,\frac{d\, z}{d\,\kappa}, \qquad d = 1,\, \cdots,\, N \tag{2.41}$$

est réelle, et les ondes RG et LG sont respectivement définies par $c_d(\kappa,\, z) > 0$ et $c_d(\kappa,\, z) < 0$.

Les termes "rightgoing" et "leftgoing" découlent du fait qu'une onde discrète $z^n\,\kappa^j$, avec $|\kappa| < 1 < |z|$, revient à une onde se propageant vers la droite lorsque l'indice temporel n augmente, alors qu'une onde discrète avec $|\kappa|$ et $|z| > 1$ se propage vers la gauche [163]. Le cas $|z| > 1$ et $|\kappa| = 1$ n'est pas pris en compte dans la définition 2.1, car cela correspond à $\beta_d > 1$ (2.9), valeur pour laquelle le schéma est instable [162].

Proposition 2.1 *Si $|z| \geq 1$, alors les K ondes discrètes (2.39) se répartissent en*

- *$K/2$ ondes RG, numérotées $z^n\,\kappa_{(d-1)\,K+2\,q-1}^j$,*
- *$K/2$ ondes LG, numérotées $z^n\,\kappa_{(d-1)\,K+2\,q}^j$,*

avec $d = 1, \cdots, N$ et $q = 1, \cdots, K/2$. Par ailleurs, il existe une unique onde RG (si $\beta_d > 0$) ou LG (si $\beta_d < 0$) dans le cas ($\kappa = 1$, $z = 1$).

DÉMONSTRATION. Le nombre K d'ondes discrètes est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre appliqué à (2.37). La répartition entre ondes RG et LG a été prouvée dans [68, 162] lorsque $z \neq 1$. Ce résultat découle du stencil du schéma, utilisant $K/2$ points à gauche et $K/2$ points à droite. Il reste à étudier la seconde partie de la proposition, à savoir le cas $z = 1$. Les équations (2.37), (2.35) et (2.5) impliquent

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_d(1,\,1) &= -\chi_{0,d} - \sum_{j=-K/2,\,j\neq 0}^{K/2} \chi_{j,d}, \\
&= -\sum_{j=-K/2}^{K/2} \chi_{j,d}, \\
&= -\sum_{j=-K/2}^{K/2} \sum_{m=1}^{K} \gamma_{K,m,j}\, \beta_d^m, \\
&= -\sum_{m=1}^{K} \left(\underbrace{\sum_{j=-K/2}^{K/2} \gamma_{K,m,j}}_{0} \right) \beta_d^m,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\kappa = 1$ est une racine de $\mathcal{F}_d$. Des calculs élémentaires conduisent à

$$\frac{\partial\, \mathcal{F}_d}{\partial\, z}(1,\,1) = -1, \qquad \frac{\partial\, \mathcal{F}_d}{\partial\, \kappa}(1,\,1) = -\beta_d.$$

Comme $\frac{\partial\, \mathcal{F}_d}{\partial\, \kappa}(1,\,1) \neq 0$, on a prouvé que $\kappa = 1$ est une racine simple de $\mathcal{F}_d$. A partir de (2.37) et (2.41), le théorème des fonctions implicites donne

$$c_d(1,\,1) = \frac{\Delta\, x}{\Delta\, t}\, \frac{\kappa}{z}\, \frac{\dfrac{\partial\, \mathcal{F}_d}{\partial\, \kappa}(1,\,1)}{\dfrac{\partial\, \mathcal{F}_d}{\partial\, z}(1,\,1)} = \lambda_d.$$

La vitesse de groupe est réelle et égale à la vitesse de phase de l'onde d. La définition 2.1 peut alors être appliquée, ce qui complète la preuve du cas $z = 1$. La répartition en ondes RG et LG est décrite dans le tableau 2.8. □

Les racines de (2.37) sont calculées explicitement si $K = 2$, et numériquement autrement ; dans ce cas, on utilise la *méthode de Laguerre* [130]. La mise en oeuvre de l'analyse GKS, vue plus loin, met en jeu une détermination séquentielle des racines de (2.37) lorsque $z = r\, e^{i\,\theta}$, avec $r \geq 1$ et $\theta \in [0,\, 2\,\pi]$. Il est donc d'importance cruciale que chaque racine varie continûment avec le paramètre θ. En conséquence de quoi, des algorithmes de tri doivent être appliqués une fois que les racines ont été calculées. On détaille ici les cas $K = 2$ et $K = 4$.

Pour $K = 2$, les deux racines de (2.37) sont séparées par le cercle unité. Leur classification est donc triviale. Les courbes Θ_d (2.40) sont représentées en figure 2.9, avec $r = 1$, $\beta_d = +0.337$

$\beta_d > 0$	$\beta_d < 0$
$\lvert\kappa_{(d-1)\,K+2\,q-1}\rvert < 1, \quad q = 1, \cdots, K/2-1$	$\lvert\kappa_{(d-1)\,K+2\,q-1}\rvert < 1, \quad q = 1, \cdots, K/2$
$\lvert\kappa_{(d-1)\,K+K-1}\rvert < 1$ si $\lvert z\rvert \geq 1$ et $z \neq 1$	$\lvert\kappa_{(d-1)\,K+2\,q}\rvert > 1, \quad q = 1, \cdots, K/2-1$
$\kappa_{(d-1)\,K+K-1} = 1$ si $z = 1$	$\lvert\kappa_{(d-1)\,K+K}\rvert > 1$ si $\lvert z\rvert \geq 1$ et $z \neq 1$
$\lvert\kappa_{(d-1)\,K+2\,q}\rvert > 1, \quad q = 1, \cdots, K/2$	$\kappa_{(d-1)\,K+K} = 1$ si $z = 1$

Table 2.8: Racines associées aux ondes RG et LG lorsque $|z| \geq 1$, pour $d = 1, \cdots, N$. Voir proposition 2.1.

(a-c) et $\beta_d = -0.337$ (b-d). Si $\beta_d > 0$ et $z = 1$, la racine $\kappa_{(d-1)\,K+1} = 1$ - associée à une onde RG - touche le cercle unité (a-c). Si $\beta_d < 0$ et $z = 1$, une observation similaire peut être faite pour la racine $\kappa_{(d-1)\,K+2} = 1$ (b-d), asociée avec une onde LG. Si $|z| > 1$, les graphes sont qualitativement les mêmes que ceux présentés ici, à la seule différence près que les racines de (2.37) ne touchent jamais le cercle unité.

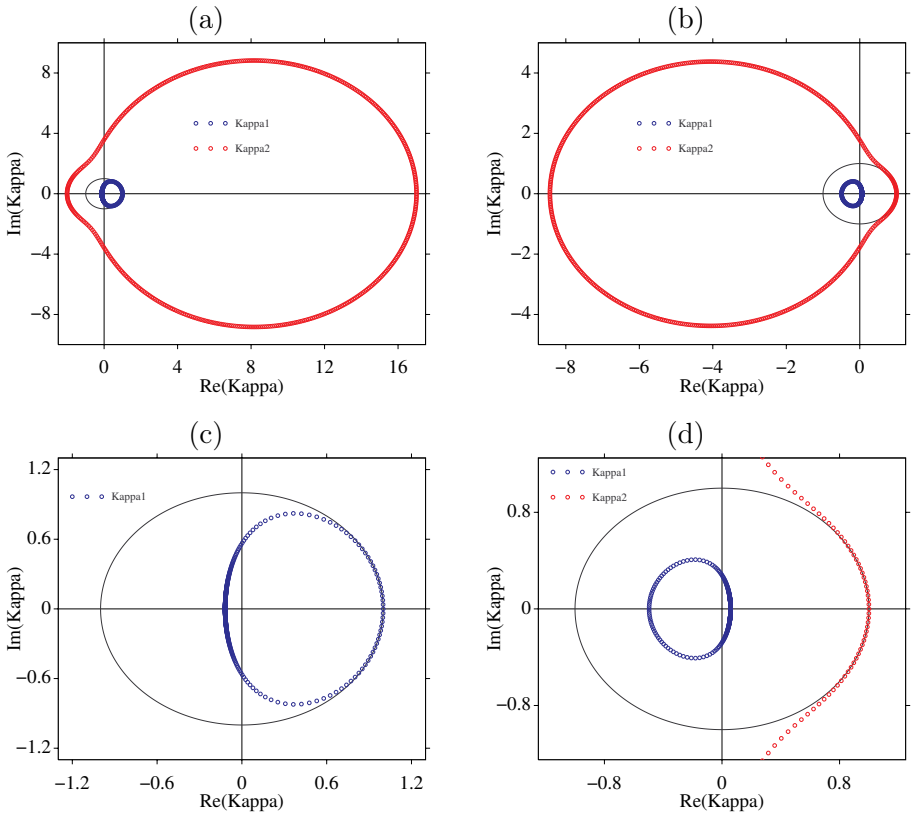


Figure 2.9: Θ_d (2.40) pour $K = 2$ et $r = 1$: $\beta_d > 0$ (a-c), $\beta_d < 0$. Zoom sur le cercle unité (c-d).

A la différence du cas simple $K = 2$, la classification des racines pour $K = 4$ n'est pas triviale, pour deux raisons. Premièrement, deux racines existent de chaque côté du cercle unité. Deuxièmement, une valeur critique de $|z|$ modifie la topologie de Θ_d dans (2.40), ce qui fait l'objet du prochain lemme.

Lemme 2.1 *Soit $K = 4$, $d = 1, \cdots, N$, $\beta_d > 0$ et $z = r\,e^{i\,\theta}$, avec $r \geq 1$ et $\theta \in [0, 2\,\pi]$. On s'intéresse aux racines de (2.37) à l'intérieur du cercle unité, associées aux ondes RG. Il existe un rayon critique $r_c(d) > 1$ tel que ces racines appartiennent à*

- *deux courbes fermées distinctes si $r < r_c$;*
- *deux courbes fermées s'intersectant en un seul point si $r = r_c$;*
- *une courbe fermée si $r > r_c$.*

Si $\beta_d < 0$, on obtient le même résultat pour les racines de (2.37) à l'extérieur du cercle unité et associées aux ondes LG. Le rayon critique r_c est l'unique racine réelle supérieure à 1 du polynôme du quatrième degré à coefficients réels ($d = 1, \cdots, N$)

$$
\begin{aligned}
& A\,r_c^4 + B\,r_c^3 + C\,r_c^2 + D\,r_c + E = 0,\\
& A = 48\,\beta_d^2 - 48,\\
& B = -32\,\beta_d^6 + 176\,\beta_d^4 - 240\,\beta_d^2 + 192,\\
& C = 12\,\beta_d^6 - 132\,\beta_d^4 + 408\,\beta_d^2 - 288,\\
& D = -12\,\beta_d^6 + 108\,\beta_d^4 - 288\,\beta_d^2 + 192,\\
& E = 3\,\beta_d^6 - 27\,\beta_d^4 + 72\,\beta_d^2 - 48.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

DÉMONSTRATION. A partir du tableau 2.2 et de (2.35), les équations résolvantes (2.37) s'écrivent

$$
\begin{aligned}
& (1 - z - \chi_{0,d})\,\kappa^2 - \left(\chi_{-2,d} + \chi_{-1,d}\,\kappa + \chi_{1,d}\,\kappa^3 + \chi_{2,d}\,\kappa^4\right) = 0, \quad d = 1, \cdots, N\\
& \chi_{\pm 2,d} = -\frac{1}{24}\,\beta_d\,(\beta_d - 1)\,(\beta_d + 1)\,(\beta_d \mp 2),\\
& \chi_{\pm 1,d} = \frac{1}{6}\,\beta_d\,(\beta_d \mp 1)\,(\beta_d - 2)\,(\beta_d + 2),\\
& \chi_{0,d} = -\frac{1}{4}\,\beta_d^2\,(\beta_d^2 - 5).
\end{aligned}
$$

Ces équations ont une solution double ssi $z = r_c \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation (2.42). □

	$\beta_d > 0$	$\beta_d < 0$
$-\varepsilon \leq \theta < +\varepsilon$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$ $\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} > 0$ $\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} < 0$
$+\varepsilon \leq \theta < 2\,\pi - \varepsilon$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$ $\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$ $\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$
$2\,\pi - \varepsilon \leq \theta < 2\,\pi + \varepsilon$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} > 0$ $\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} < 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$ $\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$

Table 2.9: Tri des racines de (2.37) pour $K = 4$, $d = 1, \cdots, N$ et $z = r\,e^{i\,\theta}$: cas $r < r_c$ (voir lemme 2.1); ε est un petit paramètre numérique.

	$\beta_d > 0$	$\beta_d < 0$
$-\varepsilon \leq \theta < +\varepsilon$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} > 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} < 0$
	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$
	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$
$+\varepsilon \leq \theta < \pi - \varepsilon$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$
$\pi - \varepsilon \leq \theta < \pi + \varepsilon$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$
	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} > 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} < 0$
$\pi + \varepsilon \leq 2\,\pi - \varepsilon$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} < 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} < 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} > 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} < 0$
$2\,\pi - \varepsilon \leq \theta < 2\,\pi + \varepsilon$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} > 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+1}\} < 0$
	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} < 0$	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+3}\} > 0$
	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} > 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+2}\} > 0$
	$\Re\mathrm{e}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} < 0$	$\Im\mathrm{m}\{\kappa_{(d-1)\,K+4}\} < 0$

Table 2.10: Tri des racines de (2.37) pour $K = 4$, $d = 1, \cdots, N$ et $z = r\,e^{i\,\theta}$: cas $r > r_c$ (voir lemme 2.1) ; ε est un petit paramètre numérique.

Pour $K = 4$ et $z = r\,e^{i\,\theta}$, $\theta \in [0,\, 2\,\pi]$, les racines de (2.37) sont tout d'abord classées en fonction de leur module : voir le tableau 2.8. Un algorithme de tri est alors appliqué sur les racines de chaque côté du cercle unité. Cet algorithme, détaillé dans les tableaux 2.9 et 2.10, dépend du rayon critique r_c défini dans le lemme 2.1. A cause de la précision finie du calcul des racines, un petit paramètre ε doit être introduit ; typiquement, $\varepsilon = 10^{-7}$. Le tri des racines qui découle des tableaux 2.9 et 2.10 conduit à des racines de (2.37) variant continûment avec θ.

Les courbes $\Theta_d(r)$ (2.40) pour $K = 4$ sont représentées en figure 2.10, avec $\beta_d = +0.337$ (colonne de gauche) et $\beta_d = -0.337$ (colonne de droite). Le rayon critique (2.42) est $r_c \approx 1.565$. Tout d'abord, on considère $r = 1 < r_c$. Les courbes à l'intérieur (a-c) et à l'extérieur (b-d) du cercle unité sont distinctes. Dans chaque cas, une unique racine associée aux ondes RG (a-c) et LG (b-d) touche le cercle unité en $z = 1$, comme prévu par la proposition 2.1. On considère ensuite $r = r_c$ (e-f) et $r = 2 > r_c$ (g-h). Comme annoncé dans le lemme 2.1, les courbes à l'intérieur du cercle unité s'intersectent en un point (e), et de même à l'extérieur du cercle unité (f). De plus grandes valeurs de r conduisent à une seule courbe (g-h).

2.4.3 Stabilité GKS

Les sections 2.4.1 et 2.4.2 ont porté sur l'ensemble des ondes discrètes solutions du schéma ADER d'ordre K à coefficients constants (2.7). A partir de maintenant, une considère une interface immergée dans le maillage, comme représentée en figure 2.6. Une solution discrète (2.39) est construite en sélectionnant les ondes LG à gauche de l'interface, et les ondes RG à droite de

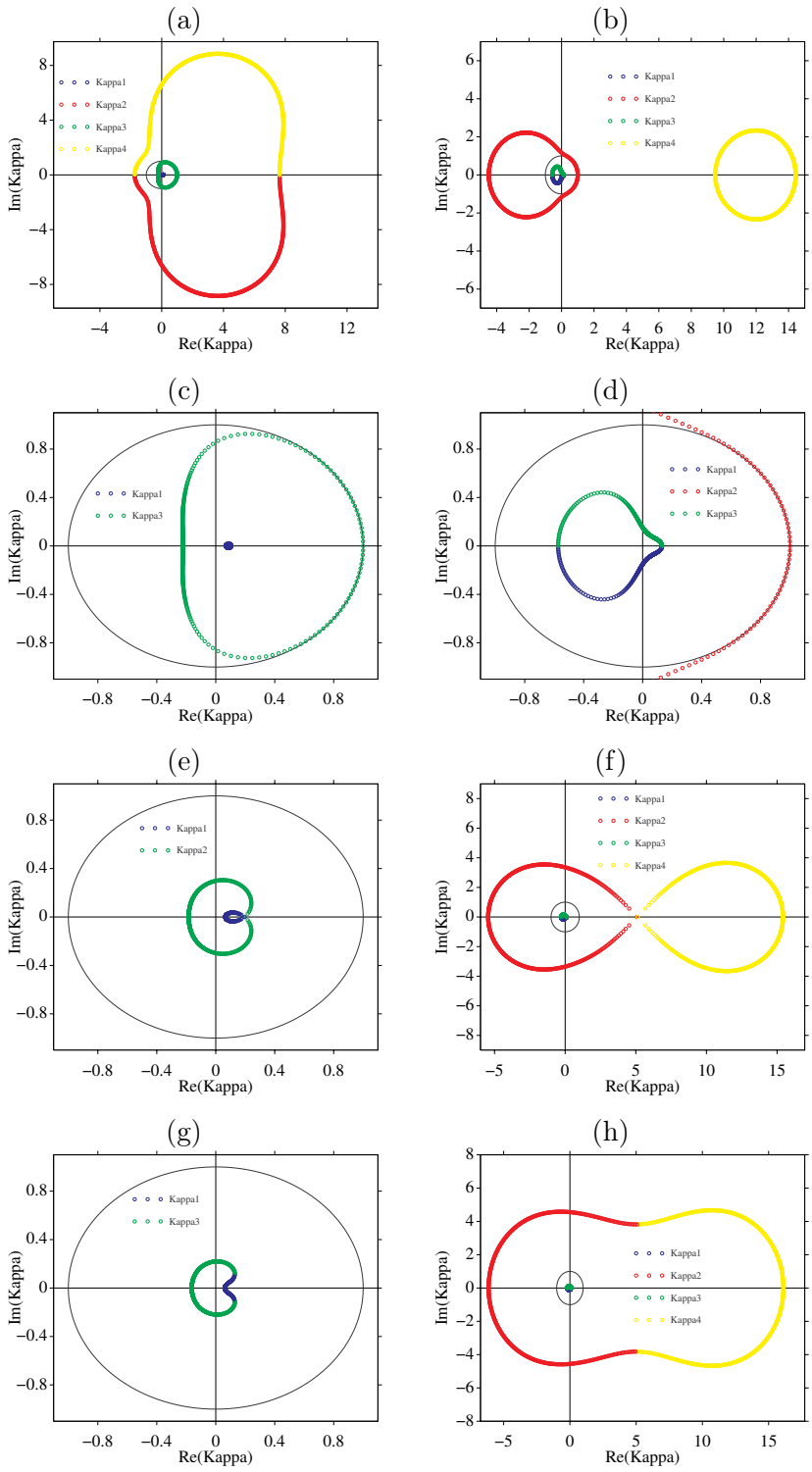


Figure 2.10: Θ_d (2.40) pour $K = 4$, $\beta_d > 0$ (colonne de gauche) et $\beta_d < 0$ (colonne de droite) : $r = 1 < r_c$ (a,b,c,d), $r = r_c$ (e-f), $r > r_c$ (g,h). Zoom sur le cercle unité (c,d,e,g).

l'interface. Pour $|z| \geq 1$, la proposition 2.1 conduit à ($d = 1, \cdots, N$)

$$\theta_{d,j}^n = \begin{cases} z^n \displaystyle\sum_{q=1}^{K/2} a_{(d-1)\,K+2q}\, \kappa_{(d-1)\,K+2q}^{j-J} & \text{si } j \leq J, \\ z^n \displaystyle\sum_{q=1}^{K/2} a_{(d-1)\,K+2q-1}\, \kappa_{(d-1)\,K+2q-1}^{j-(J+1)} & \text{si } j \geq J+1. \end{cases} \tag{2.43}$$

Cette solution particulière revient à considérer les ondes discrètes purement émises par l'interface. Les exposants J et $J+1$ dans (2.43) simplifient les calculs. La solution particulière (2.43) conduit à la caractérisation suivante de la stabilité [68, 162, 164].

Proposition 2.2 *Soit un schéma ADER d'ordre K (2.8) couplé à la méthode d'interface immergée (2.32). Ce couplage est stable ssi l'unique solution admissible (2.43) est identiquement nulle.*

Par construction, toute solution (2.43) est admissible par le schéma ADER. La proposition 2.2 met donc uniquement en jeu l'avancée en temps aux points irréguliers (2.32). Considérons tout d'abord l'avancée en temps à gauche de l'interface, aux points $j = J - K/2 + 1, \cdots, J$: à partir du schéma (2.7)-(2.8) et des valeurs modifiées (2.31), on obtient pour $m = 0, \cdots, K/2 - 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{n+1} &= \mathbf{U}_j^n - \left(\sum_{s=-K/2}^{+K/2-m-1} \mathbf{C}_{0s}\, \mathbf{U}_{j+s}^n + \sum_{s=K/2-m}^{+K/2} \mathbf{C}_{0s}\, \mathbf{U}_{j+s}^* \right), \\ &= \mathbf{U}_j^n - \left(\sum_{s=-K/2}^{+K/2-m-1} \mathbf{C}_{0s}\, \mathbf{U}_{j+s}^n + \sum_{s=K/2-m}^{K/2} \mathbf{C}_{0s} \sum_{l=0}^{2r-1} \mathbf{T}_{j+s,l}\, \mathbf{U}_{J-r+l+1}^n \right), \\ &= \mathbf{U}_j^n - \left(\sum_{s=-K/2}^{+K/2-m-1} \mathbf{C}_{0s}\, \mathbf{U}_{j+s}^n \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{s=K/2-m}^{K/2} \mathbf{C}_{0s} \left(\sum_{l=0}^{r-1} \mathbf{T}_{j+s,l}\, \mathbf{U}_{J-r+l+1}^n + \sum_{l=r}^{2r-1} \mathbf{T}_{j+s,l}\, \mathbf{U}_{J-r+l+1}^n \right) \right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Ces équations sont multipliées par $\mathbf{R}_0^{-1}$ pour entrer dans le champ des caractéristiques. En définissant les matrices $\mathbf{P}_{l,m}$ ($l = 0, \cdots, 2r-1$, $m = 0, \cdots, K/2-1$)

$$\mathbf{P}_{l,m} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=K/2-m}^{K/2} (\mathbf{R}_0)^{-1}\, \mathbf{C}_{0s}\, \mathbf{T}_{j+s,l}\, \mathbf{R}_0 & \text{if } l = 0, \cdots, r-1, \\ \displaystyle\sum_{s=K/2-m}^{K/2} (\mathbf{R}_0)^{-1}\, \mathbf{C}_{0s}\, \mathbf{T}_{j+s,l}\, \mathbf{R}_1 & \text{if } l = r, \cdots, 2\,r-1, \end{cases} \tag{2.45}$$

on obtient ($d = 1, \cdots, N$, $m = 0, \cdots, K/2 - 1$)

$$\underbrace{\theta^{n+1}_{d,j}}_{\in\Omega_0} = \underbrace{\theta^{n}_{d,j}}_{\in\Omega_0} - \left(\sum_{s=-K/2}^{K/2-m-1} \chi_{0s,d} \underbrace{\theta^{n}_{d,j+s}}_{\in\Omega_0} + \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{p=1}^{N} \mathbf{P}_{l,m}[d,p] \underbrace{\theta^{n}_{p,J-r+l+1}}_{\in\Omega_0} + \sum_{l=r}^{2r-1} \sum_{p=1}^{N} \mathbf{P}_{l,m}[d,p] \underbrace{\theta^{n}_{p,J-r+l+1}}_{\in\Omega_1} \right), \tag{2.46}$$

Une procédure similaire est appliquée aux points irréguliers à droite de l'interface $j = J + 1, \cdots, J + K/2$. En définissant les matrices $\mathbf{Q}_{l,m}$ ($l = 0, \cdots, 2r - 1$, $m = K/2, \cdots, K - 1$)

$$\mathbf{Q}_{l,m} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=-K/2}^{K/2-m-1} (\mathbf{R}_1)^{-1}\, \mathbf{C}_{1s}\, \mathbf{T}_{j+s,l}\, \mathbf{R}_0 & \text{if } l = 0, \cdots, r-1, \\ \displaystyle\sum_{s=-K/2}^{K/2-m-1} (\mathbf{R}_1)^{-1}\, \mathbf{C}_{1s}\, \mathbf{T}_{j+s,l}\, \mathbf{R}_1 & \text{if } l = r, \cdots, 2\,r-1, \end{cases} \tag{2.47}$$

on obtient ($d = 1, \cdots, N$, $m = K/2, \cdots, K - 1$)

$$\underbrace{\theta^{n+1}_{d,j}}_{\in\Omega_1} = \underbrace{\theta^{n}_{d,j}}_{\in\Omega_1} - \left(\sum_{l=0}^{r-1} \sum_{p=1}^{N} \mathbf{Q}_{l,m}[d,p] \underbrace{\theta^{n}_{p,J-r+l+1}}_{\in\Omega_0} + \sum_{l=r}^{2r-1} \sum_{p=1}^{N} \mathbf{Q}_{l,m}[d,p] \underbrace{\theta^{n}_{p,J-r+l+1}}_{\in\Omega_1} + \sum_{s=-K/2}^{K/2-m-1} \chi_{1s,d} \underbrace{\theta^{n}_{d,j+s}}_{\in\Omega_1} \right), \tag{2.48}$$

La solution (2.43) est injectée dans (2.46) et (2.48), en fonction du milieu Ω_0 ou Ω_1 considéré. On obtient ainsi $N\,K$ équations linéaires ($d = 1, \cdots, N$) dont les inconnues sont les coefficients

a dans (2.43) :

(2.49)

$$
\begin{aligned}
&(1-z)\sum_{q=1}^{K/2} a_{(d-1)K+2q}\,\kappa_{(d-1)K+2q}^{m-K/2+1} - \left(\sum_{j=-K/2}^{K/2-m-1} \chi_{0j,d} \sum_{q=1}^{K/2} a_{(d-1)K+2q}\,\kappa_{(d-1)K+2q}^{m-K/2+j+1} \right. \\
&+ \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{p=1}^{N} \mathbf{P}_{l,m}[d,p] \sum_{q=1}^{K/2} a_{(p-1)K+2q}\,\kappa_{(p-1)K+2q}^{-r+l+1} \\
&\left. + \sum_{l=r}^{2r-1}\sum_{p=1}^{N} \mathbf{P}_{l,m}[d,p] \sum_{q=1}^{K/2} a_{(p-1)K+2q-1}\,\kappa_{(p-1)K+2q-1}^{-r+l} \right) = 0, \quad m = 0, \cdots, K/2-1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-z)\sum_{q=1}^{K/2} a_{(d-1)K+2q-1}\,\kappa_{(d-1)K+2q-1}^{m-K/2} - \left(\sum_{j=K/2-m}^{K/2} \chi_{1j,d} \sum_{q=1}^{K/2} a_{(d-1)K+2q-1}\,\kappa_{(d-1)K+2q-1}^{m-K/2+j} \right. \\
&+ \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{p=1}^{N} \mathbf{Q}_{l,m}[d,p] \sum_{q=1}^{K/2} a_{(p-1)K+2q}\,\kappa_{(p-1)K+2q}^{-r+l+1} \\
&\left. + \sum_{l=r}^{2r-1}\sum_{p=1}^{N} \mathbf{Q}_{l,m}[d,p] \sum_{q=1}^{K/2} a_{(p-1)K+2q-1}\,\kappa_{(p-1)K+2q-1}^{-r+l} \right) = 0, \quad m = K/2, \cdots, K-1,
\end{aligned}
$$

où κ sont les racines des équations résolvantes (2.37). Les $N\,K$ équations (2.49) s'écrivent sous forme d'un système linéaire

$$\mathbf{G}(z)\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{2.50}$$

où $\mathbf{G}$ est une matrice carrée $N\,K \times N\,K$ et $\mathbf{a}$ est le vecteur des coefficients dans (2.43). La matrice $\mathbf{G}$ dépend de z et des solutions κ de (2.37), ces dernières dépendant du nombre CFL β_d et des coefficients du schéma ADER d'ordre K. La condition nécessaire et suffisante de stabilité GKS donnée en proposition 2.2 conduit alors à

$$\forall z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \geq 1, \qquad \det(\mathbf{G}(z)) \neq 0. \tag{2.51}$$

2.4.4 Implémentation

L'analyse de stabilité GKS revient ainsi à compter les zéros d'une fonction en dehors du cercle unité. La complexité des expressions (2.49) empêche une recherche explicite des zéros. Une seconde approche consiste à discrétiser un sous-domaine de $\mathbb{C}$, et à estimer numériquement $\det(\mathbf{G})$ aux points $z_{i,j}$. Plus précisément, cet algorithme consiste, en tout noeud $|z_{i,j}| \geq 1$, à

- calculer les racines des équations résolvantes (2.37) ;
- trier ces racines, conduisant à des ondes RG et LG (proposition 2.1) ;
- calculer le determinant de (2.49).

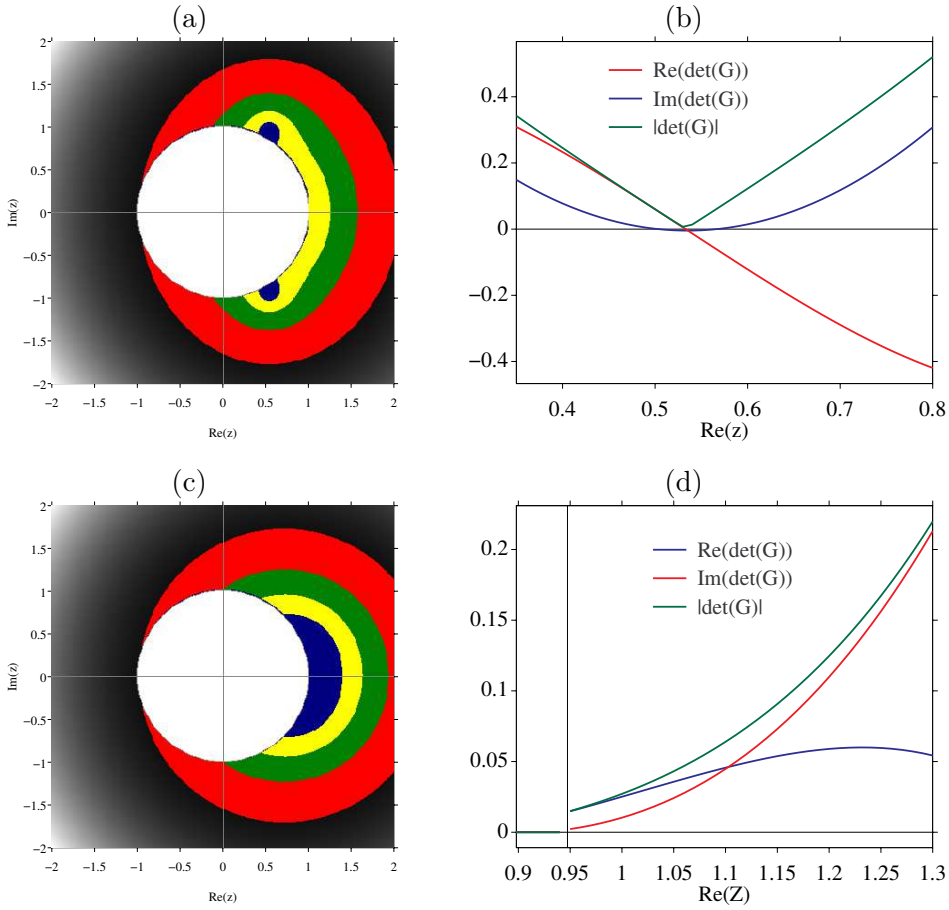


Figure 2.11: Zeros de $\det(\mathbf{G})$ dans $\mathbb{C}$ en dehors du cercle unité, dans une configuration instable (a-b) et stable (c-d). Isovaleurs de $|\det(\mathbf{G})|$ (a-c), coupe de $\det(\mathbf{G})$ au voisinage de son minimum (b-d).

La méthode (2.32) est alors stable ssi le déterminant est différent de zéro en tout point. Cet algorithme de type "force-brute" est illustré en figure 2.11 dans une configuration acoustique [A1], avec les paramètres physiques

$$(\rho,\, c) = \begin{cases} (1000,\, 1500) & \text{if } x \in \Omega_0, \\ (5000,\, 4000) & \text{if } x \in \Omega_1, \end{cases}$$

et $\varepsilon = (\alpha - J\,\Delta\,x)\,/\,\Delta\,x = 0.99$. On considère un schéma ADER d'ordre $K = 2$ (ie Lax-Wendroff), avec $\beta_{\max} = 0.9$. En (a-b), aucun traitement numérique n'est appliqué à l'interface. En (c-d), on utilise la méthode d'interface immergée, de paramètres $(q = 2,\, r = 2)$. Le sous-domaine $[-2,\, 2] \times [-2\,i,\, 2\,i]$ de $\mathbb{C}$ est discrétisé avec une grille uniforme 400×400 points. Sur les cartes (a-c), les isovaleurs de $|\det(\mathbf{G})|$ sont représentées avec une palette grise, rouge, verte, jaune et bleue, suivant les valeurs décroissantes. Les valeurs minimales de $|\det(\mathbf{G})|$, observées dans les îlots bleus, sont localisées en $0.53 \pm i\,0.95$ (a) et $0.95 \pm i\,0.32$ (c). Une coupe au voisinage de ces points représente les parties réelle, imaginaires, et le module de $\det(\mathbf{G})$ (b-d).

En figure 2.11-(b), les valeurs observées sont très petites mais pas rigoureusement nulles : le zéro du déterminant ne coïncide pas avec un noeud de discrétisation de $\mathbb{C}$. Pour les coefficients discontinus considérés, le schéma de Lax-Wendroff est instable. Au contraire, les valeurs de $\det(\mathbf{G})$ sont clairement distinctes de zéro en (d) : le couplage avec la méthode d'interface immergée stabilise le schéma. Dans les deux cas, des simulations numériques de propagation d'ondes confirment le diagnostic de stabilité.

Cependant, cet algorithme n'est pas optimal, pour les raisons suivantes :

1. On discrétise seulement un sous-domaine de $\mathbb{C}$. Rien n'assure que $\det(\mathbf{G})$ ne s'annule pas en dehors de la zone étudiée.
2. Le temps de calcul nécessaire pour estimer $|\det(\mathbf{G})|$ croît évidemment avec la taille du sous-domaine de $\mathbb{C}$ et avec la finesse de la discrétisation retenue. Dans le cas de la figure 2.11, le temps CPU est d'environ 8 secondes. C'est largement trop pour des études paramétriques de la stabilité, notamment en faisant varier la position de l'interface dans le maillage.
3. De façon générale, les zéros éventuels de $\det(\mathbf{G})$ ne coïncident pas avec un noeud de discrétisation de $\mathbb{C}$. La distinction entre des configurations stables ou instables repose alors sur un critère numérique, difficile à estimer. Autrement, on doit mettre en oeuvre un raffinement de maillage local au voisinage d'un éventuel zéro, conduisant encore à un surcoût informatique.
4. La plus grande partie de l'effort de calcul est consacrée à la localisation d'éventuels zéros. En pratique, cet effort est inutile : seul importe le fait qu'au moins un zéro existe en dehors du cercle unité.

Pour contourner ces défauts, on propose un nouvel algorithme basé sur la proposition suivante.

Proposition 2.3 *Considérons deux cercles* $\gamma_1(\theta) = e^{i\,\theta}$ *et* $\gamma_R(\theta) = R\,e^{i\,\theta}$, *avec* $\theta \in [0, 2\,\pi]$ *et* $R > 1$, *ainsi que leurs images par* $\det(\mathbf{G})$ *:*

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \gamma_1 \to \mathbb{C} \\ \\ z \mapsto \det(\mathbf{G}(z)) \end{cases}, \qquad \Gamma_R : \begin{cases} \gamma_R \to \mathbb{C} \\ \\ z \mapsto \det(\mathbf{G}(z)) \end{cases}$$

Alors, le couplage entre un schéma ADER d'ordre K *(2.8) et la méthode d'interface immergée (2.32) est stable ssi les indices* $\mathcal{I}$ *de* Γ_1 *et* Γ_R *par rapport à l'origine satisfont :*

$$\lim_{R\to+\infty} \mathcal{I}(\Gamma_R,\, 0) - \mathcal{I}(\Gamma_1,\, 0) = \lim_{R\to+\infty} \mathcal{J}(R). \tag{2.52}$$

Dans (2.52), $\mathcal{J}$ *désigne le nombre de racines multiples de (2.37) de module compris entre 1 et* R. *Pour* $K = 2$, $\mathcal{J}(R) = 0$ *quelque soit* $R \geq 1$. *Pour* $K = 4$, *le lemme 2.1 indique que* $\mathcal{J}(R) = 0$ *si* $1 \leq R < r_c$ *et* $\mathcal{J}(R) = 1$ *si* $R > r_c$, *soit* $\lim_{R\to+\infty} \mathcal{J}(R) = 1$.

Démonstration. On utilise un outil classique d'analyse complexe : le *principe de l'argument*, que l'on rappelle brièvement. Soit f une fonction méromorphe à l'intérieur d'un sous-domaine

ouvert simplement connexe U de $\mathbb{C}$, possédant un nombre fini $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{P}$ de zéros et de poles. Alors, l'image Γ de toute courbe γ de U par f satisfait

$$\mathcal{Z} - \mathcal{P} = \mathcal{I}(\Gamma,\, 0).$$

La fonction $\det(\mathbf{G}(z))$ est un polynôme : elle ne possède pas de pôles, et est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Le principe de l'argument appliqué à $\det(\mathbf{G}(z))$ implique que le membre de gauche de (2.52) est le nombre de zéros de $\det(\mathbf{G})$ entre γ_1 et γ_R. D'autre part, on doit soustraire les zéros de $\det(\mathbf{G})$ associés aux racines multiples des équations résolvantes (lemme 2.1) : en effet, ces racines multiples conduisent à des équations redondantes dans (2.49), et donc à un déterminant nul. La condition nécessaire et suffisante de stabilité (2.51) permet de conclure la démonstration. □

Le nouvel algorithme issu de la proposition 2.3 amène aux remarques suivantes :

1. Des méthodes d'analyse voisines existent dans d'autres disciplines, notamment avec le critère de stabilité de Nyquist en automatique.

2. Le temps de calcul est considérablement réduit par rapport au cas d'une discrétisation directe d'un sous-domaine de $\mathbb{C}$. Dans les exemples proposés en section 2.4.5, le temps CPU est d'environ 0.01 s.

3. Compter le nombre de tours de Γ_1 et Γ_R autour du point 0 est très simple à programmer. Le pas de dicrétisation $\Delta\,\theta$ de $[0,\, 2\,\pi]$ doit cependant être suffisamment petit pour déterminer précisément les positions relatives de 0 et de l'intersection de $\Gamma_{1,R}$ avec l'axe réel. Un pas variable, dépendant de la courbure locale de $\Gamma_{1,R}$, a été mis en oeuvre dans nos codes de calcul.

4. Le cas-limite où $\Gamma_{1,R}$ passe par l'origine en 0 est indécidable. Ce cas correspond à la limite d'une région de stabilité ; une perturbation des paramètres permet alors de conclure.

5. Le rayon R dans (2.52) doit théoriquement être infini. En pratique, des valeurs de R de l'ordre de 100 sont largement suffisantes. Il est par contre nécessaire de choisir $R \neq r_c$, lorsqu'un rayon critique existe (2.42).

6. L'analyse de stabilité est purement numérique : aucune expression théorique telle que (2.9) n'est obtenue. Si la proposition 2.3 diagnostique une configuration instable, la seule stratégie consiste à tester d'autres jeux de paramètres $(q,\, r)$ de la méthode d'interface immergée. En pratique, un choix de paramètres $(q,\, r)$ conduisant à une méthode stable est généralement facile à obtenir.

7. De nombreuses expériences numériques ont conduit aux observations suivantes. Premièrement, la méthode d'interface immergée stabilise en général le schéma ADER à coefficients discontinus. Deuxièmement, des valeurs $r > q$ dans (2.29) sont généralement très utiles pour stabiliser (2.32). Des observations similaires sont faites en 2D et 3D, où le traitement par moindres carrés dans (2.30) est la règle [A3,A4]. Voir à ce sujet la section 3.3.

8. La généralisation du test (2.52) à 2 interfaces ou plus ne conduit pas à des difficultés théoriques. Cependant, les systèmes généralisant (2.49) sont rapidement très difficiles à écrire. Il est a priori possible de rencontrer des cas où deux interfaces GKS stables conduisent à une configuration GKS instable, à cause des réflections multiples de modes

évanescents [164]. Toutefois, de tels cas sont extrêmement rares avec des schémas dissipatifs, et sont rencontrés uniquement dans des cas-limites (voir point 4). En pratique, étudier la stabilité de chaque interface séparément est suffisant pour garantir la stabilité de configurations avec de multiples interfaces.

2.4.5 Expériences numériques

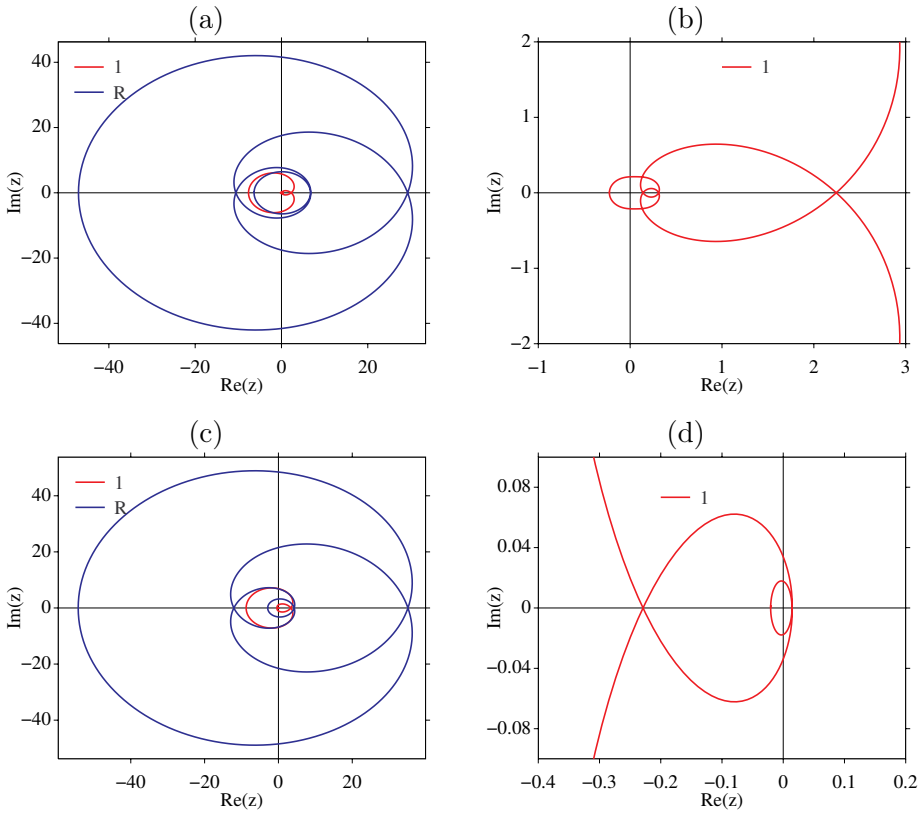


Figure 2.12: Tours des courbes Γ_1 et Γ_R autour de 0 (proposition 2.3) dans une configuration instable (a-b) et stable (c-d), avec le schéma ADER d'ordre 2 (ie Lax-Wendroff). Zooms au voisinage de l'origine (b-d).

La proposition 2.3 est illustrée en figure 2.12, dans la même configuration que celle considérée en figure 2.11 ; les paramètres physiques et numériques ont déjà été définis. Le rayon de γ_R est $R = 2$. Pour $K = 2$ (ie le schéma de Lax-Wendroff), les équations résolvantes n'ont pas de racine multiple, d'où $\mathcal{J}(R) = 0$ quel que soit $R > 1$. En (a-b), on n'applique pas de méthode d'interface immergée. Les courbes fermées Γ_1 et Γ_R encerclent respectivement l'origine 2 fois et 4 fois : la proposition 2.3 assure alors que le schéma est instable. En (c-d), la méthode d'interface immergée de paramètres (2, 2) conduit à $\mathcal{I}(\Gamma_1, 0) = \mathcal{I}(\Gamma_R, 0) = 4$, ce qui assure un couplage stable.

Comme deuxième exemple, on étudie un problème de poroélasticité ($N = 4$) en négligeant la viscosité du fluide interstitiel. Les équations d'évolution peuvent être consultées dans [A9]

Paramètres	Ω_0	Ω_1
ρ_f (kg/m^3)	1040	1040
η (Pa.s)	0	0
ρ_s (kg/m^3)	2650	2211
μ (Pa)	$1.85\,10^9$	$3.54\,10^9$
ϕ	0.01	0.4
a	2	2
κ (m^2)	10^{-12}	10^{-16}
P (Pa)	9.02^9	$1.17\,10^{10}$
Q (Pa)	$1.23\,10^9$	$1.30\,10^6$
R (Pa)	$6.35\,10^8$	$2.46\,10^7$

Table 2.11: Paramètres physiques du milieu poroélastique considéré.

ou au chapitre 6. Les paramètres physiques sont donnés en tableau 2.11. Ils correspondent respectivement à du grès saturé d'eau et à du schiste saturé d'eau. Le schéma ADER d'ordre $K = 4$ est utilisé, avec un nombre CFL $\beta_{\max} = 0.9$ et $\varepsilon = 0.99$. Ces paramètres conduisent au rayon critique $r_c = 10.15$ (2.42). Pour $R > r_c$, on obtient $\mathcal{I}(R) = 1$. En appliquant le schéma sans méthode d'interface immergée, l'analyse de stabilité GKS donne $\mathcal{I}(\Gamma_1,\, 0) = 8$ et $\mathcal{I}(\Gamma_R,\, 0) = 10$. La proposition 2.3 indique alors que le schéma est instable. Au contraire, la méthode d'interface immergée, de paramètres $(q = 4,\, r = 2)$, conduit à $\mathcal{I}(\Gamma_1,\, 0) = 10$ et $\mathcal{I}(\Gamma_R,\, 0) = 11$, soit un couplage stable.

2.5 Conclusion

Bilan. Notre contribution a porté sur deux points. Le premier point concerne les schémas d'intégration. Nous avons reformulé les *schémas ADER* sous forme de schémas de Lax-Wendroff d'ordre élevé. Une analyse numérique complète (stabilité, dispersion et atténuation numérique) a été réalisée. Enfin, ces schémas ont été programmés et testés en 1D, 2D et 3D pour toutes les lois de conservation considérées au cours de ce mémoire. Le deuxième point concerne une *méthode d'interface immergée*. Nous avons proposé une formulation systématique, conduisant à des ordres de précision arbitrairement élevés, et avons développé une analyse de stabilité GKS.

A la différence de méthodes variationnelles [166, 141], les méthodes obtenues ne disposent pas d'une assise théorique complète, ce qui constitue de toute évidence leur point faible. Par contre, la précision numérique et l'efficacité informatique obtenues sont maximales, permettant de modéliser des configurations très "exigeantes", telles que celles étudiées au chapitre 7.

Perspectives. Plusieurs aspects liés à l'analyse de stabilité GKS restent à examiner. Nous avons développé des algorithmes de tri pour les racines des équations résolvantes pour $K = 2$ et $K = 4$: les ordres supérieurs restent à étudier. Il en est de même pour l'existence de rayons critiques où les solutions de (2.37) sont de multiplicité supérieure à 1.

Une autre perspective concerne l'analyse GKS dans le cas de milieux dissipatifs. Plusieurs

modèles de dissipation d'énergie conduisent à des équations de propagation de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{U}, \tag{2.53}$$

généralisant (2.1). C'est par exemple le cas de milieux viscoélastiques décrits par le modèle de Zener (chapitre 5) ou les équations de la poroélasticité de Biot, avec un fluide saturant visqueux (chapitre 6). La présence du terme source nécessite de revoir la définition des modes RG et LG. On pourra s'inspirer des travaux [100, 101]

Chapter 3

Méthodes analytiques

Travail réalisé avec Nicolas Malleron
Production associée : article [A7], congrès [Cn6, Cjt7]

3.1 Introduction

Généralités. Plusieurs raisons président au développement de solutions analytiques pour des problèmes de propagation et de diffraction d'ondes. Une première motivation provient de la rapidité des calculs analytiques, surtout en vue d'études paramétriques. Supposons par exemple que l'on souhaite déterminer, en un point et à un instant donnés, le champ diffracté lors de l'interaction d'une onde plane avec un cylindre. Il est alors plus efficace de calculer la solution analytique que d'implémenter une méthode numérique et de réaliser l'intégration en temps jusqu'à l'instant souhaité : l'immense majorité des calculs est inutile eu égard à l'objectif visé.

L'analyse théorique des solutions constitue un deuxième intérêt des méthodes analytiques. En effet, on peut parfois déduire de ces dernières des propriétés générales des solutions du problème étudié, typiquement leur comportement asymptotique. Des exemples simples sont donnés dans le lemme 4.2, ou en annexe B de [A2].

Enfin, les solutions analytiques représentent une étape essentielle pour la validation des méthodes numériques. C'est ce dernier point qui nous intéresse ici au premier chef, et nous a conduit à développer de nombreuses solutions analytiques. Certaines sont bien connues, d'autres sont plus originales. Dans tous les cas, un très grand soin est requis pour garantir la précision des calculs et justifier la dénomination de *solution de référence*.

Configurations. En 2D, trois configurations nous ont amené à des développements analytiques :

1. *onde plane sur interface plane.* Pour des milieux de propagation non dissipatifs, des conditions de saut standard (contact soudé ou glissant, surface libre) et un angle d'incidence inférieur à l'angle critique, les calculs peuvent être réalisés directement dans le domaine temporel : voir la figure 3.8 du chapitre 3 et la figure 6.11 du chapitre 6. Dans le cas contraire, les calculs nécessitent des transformées de Fourier directe et inverse, cette dernière étant réalisée numériquement. Voir à ce sujet la figure 5.5 du chapitre 5.

2. *onde plane sur interface circulaire.* La démarche est détaillée en annexes B de [A3] et C de [A5]. L'onde plane transitoire est décomposée en une somme tronquée d'ondes planes harmoniques. Chaque composante de Fourier est alors écrite sur une base tronquée de fonctions de Bessel grâce à la décomposition de Jacobi-Anger. Les ondes diffractées sont écrites sur une base de fonctions de Hankel (à l'extérieur du cercle) et de Bessel (à l'intérieur) dont les coefficients découlent des conditions d'interface. Une transformée de Fourier inverse calculée numériquement conduit au signal temporel. Au bilan, les paramètres importants pour la précision des calculs sont le nombre de modes de Fourier, le pas en fréquence (lié à la fréquence maximale considérée) et le nombre de modes de Bessel. Voir les figures 3.4, 3.9, 3.10 et 3.11 au chapitre 3 ; les figures 5.6 et 5.7 au chapitre 5 ; la figure 6.12 au chapitre 6.

3. *onde cylindrique sur interface plane.* Considérons un milieu homogène, ou stratifié avec des interfaces planes parallèles et des paramètres physiques constants par morceaux : voir par exemple les figures 3.5 du chapitre 3 ou 6.10 du chapitre 6. Dans un tel milieu, les ondes rayonnées par un point source transitoire peuvent être déterminées directement dans le domaine temporel en suivant la *méthode de Cagniard-de Hoop* [79, 1, 4, 167]. Celle-ci repose sur des déformations astucieuses de contours d'intégration dans le plan complexe. Si les aspects théoriques de cette méthode sont bien connus, la littérature consacrée à sa mise en oeuvre pratique est nettement plus rare [61, 46]. C'est cet aspect que nous proposons de développer au cours de ce chapitre, dans un cas particulier appelé *problème de Garvin*, d'intérêt crucial en géosciences.

Problème de Garvin. La configuration étudiée est la suivante : une source d'ondes de compression, ponctuelle en espace et de dépendance temporelle quelconque, est enfouie dans un demi-espace élastique, homogène et isotrope en dimension deux. Le solide est séparé du vide par une interface plane. L'onde P émise par la source interagit avec la surface libre, donnant naissance à des ondes P et SV réfléchies. Les interférences constructives de ces ondes au voisinage de la surface libre constituent les ondes de Rayleigh [1]. Pour chacune des ondes, les quantités recherchées sont les deux composantes de la vitesse élastique et les trois composantes indépendantes du tenseur des contraintes élastiques.

Dans cette configuration, la principale difficulté liée à la méthode de Cagniard-de Hoop concerne le calcul de l'onde SV réfléchie à l'intérieur du domaine élastique ; à la surface du domaine, cas envisagé dans [57, 76, 82], il n'y a pas de complications. Un des piliers de la méthode, à savoir le chemin de Cagniard-de Hoop, devient alors implicite. Cela conduit, si l'on n'y prend pas garde, à une chute de la précision et à une augmentation du temps de calcul.

Plan. Tout d'abord, nous précisons les hypothèses de travail et les équations de propagation des différentes ondes. Après transformées de Fourier et de Laplace, nous résolvons ces équations

dans le domaine spectral. Le calcul de l'onde P réfléchie illustre les différents volets de la méthode de Cagniard-de Hoop. Le calcul de l'onde SV réfléchie est plus délicat. On propose en particulier une analyse détaillée du contour implicite de Cagniard-de Hoop, à notre connaissance originale.

3.2 Modélisation

3.2.1 Géométrie

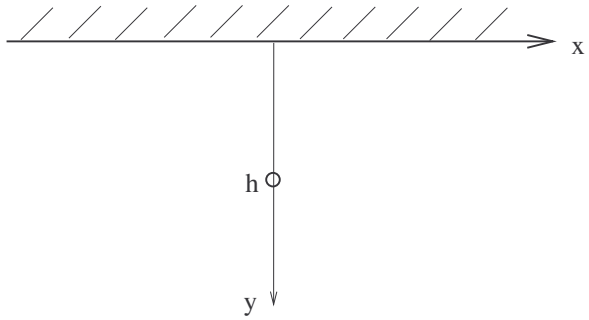


Figure 3.1: Configuration étudiée

Soit un solide élastique isotrope et homogène, de paramètres physiques la masse volumique ρ, la célérité des ondes de compression c_p et la célérité des ondes de cisaillement c_s. Le milieu élastique est séparé du vide par une interface plane. Le repère d'étude est tel que l'interface coïncide avec l'axe horizontal x, et l'axe y est vertical dirigé vers le bas (figure 3.1). Les calculs qui suivent peuvent facilement être adaptés au cas d'une interface plane orientée de façon quelconque, via des matrices de rotation adéquates.

Le milieu élastique, initialement au repos, est excité à partir de $t = 0$ par une source ponctuelle d'ondes de compression, localisée en $(0,\, h)$ en dehors de l'interface : $h > 0$. L'excitation est de durée finie T. On suppose vérifiée l'hypothèse des petites perturbations, et on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D. L'onde émise interagit avec la surface libre, conduisant à des ondes réfléchies de compression (P) et de cisaillement (SV).

Le potentiel de l'onde P directe émise par la source est noté Φ_{IP}. Le potentiel de l'onde P réfléchie par la surface libre est noté Φ_{RP}. Enfin, le pseudo-potentiel de l'onde SV directe réfléchie par la surface libre est noté $\boldsymbol{\Psi_{RS}} = {}^T(0,\, 0,\, \Psi_{RS})$. Les équations d'ondes vérifiées sont

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c_p^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}\,\Phi_{IP} - \Delta\,\Phi_{IP} = \delta(x)\,\delta(y-h)\,f(t),\\
&\frac{1}{c_p^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}\,\Phi_{RP} - \Delta\,\Phi_{RP} = 0,\\
&\frac{1}{c_s^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}\,\Psi_{RS} - \Delta\,\Psi_{RS} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

où $f(t)$ représente la dépendance temporelle de la source. Celle-ci est de durée finie : $f(t) \neq 0$ sur $[0,\, T]$, et est suffisamment régulière (au moins deux fois dérivable).

On rappelle que le déplacement élastique $\boldsymbol{u} = {}^T(u_1,\, u_2)$ d'une onde P (de potentiel Φ) ou d'une onde SV (de pseudo-potentiel $\boldsymbol{\Psi} = {}^T(0,\, 0,\, \Psi)$) s'écrivent respectivement [1]

$$\boldsymbol{u} = \nabla\Phi = \left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x},\, \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y}\right), \qquad \boldsymbol{u} = \nabla \wedge \boldsymbol{\Psi} = \left(\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,y},\, -\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,x}\right). \tag{3.2}$$

La vitesse élastique est alors $\boldsymbol{v} = (v_1,\, v_2)^T = \frac{\partial\,\boldsymbol{u}}{\partial\,t}$. Enfin, les trois composantes indépendantes du tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\sigma}$ sont déduites de la loi de Hooke

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \rho\, c_p^2\, \frac{\partial\, u_1}{\partial\, x} + \rho\, (c_p^2 - 2\, c_s^2)\, \frac{\partial\, u_2}{\partial\, y}, \\
\sigma_{12} &= \rho\, c_s^2 \left(\frac{\partial\, u_1}{\partial\, y} + \frac{\partial\, u_2}{\partial\, x}\right), \\
\sigma_{22} &= \rho\, (c_p^2 - 2\, c_s^2)\, \frac{\partial\, u_1}{\partial\, x} + \rho\, c_p^2\, \frac{\partial\, u_2}{\partial\, y}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.2 Transformations intégrales

Les transformées de Fourier directe et inverse d'une fonction $w(x)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(w) = w(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\, e^{i\, k\, x}\, dx, \\
\mathcal{F}^{-1}(w) = w(x) &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w(k)\, e^{-i\, k\, x}\, dk,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

avec les propriétés classiques

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\, w}{\partial\, x}\right) = -i\, k\, w, \qquad \mathcal{F}(\delta) = 1. \tag{3.5}$$

La transformée de Laplace d'une fonction $w(t)$ s'écrit

$$\mathcal{L}(w) = w(s) = \int_0^{+\infty} w(t)\, e^{-s\, t}\, dt, \tag{3.6}$$

avec $s \in \mathbb{R}^+$. Si $w(0) = 0$, ce qui sera le cas tout au long de cette étude, la propriété

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial\, w}{\partial\, t}\right) = s\, w \tag{3.7}$$

est vérifiée. Pour deux fonctions $w_1(t)$ et $w_2(t)$, on dispose du théorème de convolution

$$\mathcal{L}(w_1 * w_2) = \mathcal{L}(w_1)\,.\,\mathcal{L}(w_2). \tag{3.8}$$

Enfin, il y a bijection entre une fonction et sa transformée de Laplace (théorème de Lerch).

3.3 Résolution dans l'espace des transformées

3.3.1 Potentiels

On applique une transformée de Fourier en x et une transformée de Laplace en t aux équations d'ondes (3.1). A partir des propriétés (3.5) et (3.7), on obtient les équations différentielles

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi_{IP} + \eta_P^2\,\Phi_{IP} &= \delta(y-h)\,f(s), \\ -\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi_{RP} + \eta_P^2\,\Phi_{RP} &= 0, \\ -\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Psi_{RS} + \eta_S^2\,\Psi_{RS} &= 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec

$$\eta_p^2 = k^2 + \frac{s^2}{c_p^2}, \qquad \eta_s^2 = k^2 + \frac{s^2}{c_s^2}. \tag{3.10}$$

Pour rendre la fonction "racine carrée" uniforme dans le plan complexe, on munit celui-ci de la coupure $\mathbb{R}^-$, et on choisit la détermination $\Re\mathrm{e}\left\{z^{1/2}\right\} \geq 0$. Ce choix étant fait, les solutions de (3.9) vérifiant les conditions de décroissance pour y tendant vers l'infini s'écrivent

$$\begin{aligned} \Phi_{IP} &= \frac{1}{2\,\eta_p}\,e^{-|y-h|\,\eta_p}\,f(s), \\ \Phi_{RP} &= A(k,\,s)\,e^{-(y+h)\,\eta_p}\,f(s), \\ \Psi_{RS} &= B(k,\,s)\,e^{-y\,\eta_s - h\,\eta_p}\,f(s). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Les coefficients A et B sont déduits ultérieurement des conditions aux limites.

3.3.2 Composantes du champs

Pour calculer les vitesses et contraintes des différentes ondes, on applique une transformée de Fourier en x et une transformée de Laplace en t aux équations de l'élastodynamique (3.2) et (3.3). Les équations obtenues s'expriment en fonction des transformées des potentiels et pseudo-potentiel (3.11). Les transformées des composantes du champ de l'onde P directe s'écrivent alors

(3.12)

$$\begin{aligned} v_1^{IP}(k,\,y,\,s) &= -\frac{i\,k\,s}{2\,\eta_p}\,e^{-|y-h|\,\eta_P}\,f(s), \\ v_2^{IP}(k,\,y,\,s) &= -\frac{s}{2}\,\mathrm{sgn}\,(y-h)\,e^{-|y-h|\,\eta_P}\,f(s), \\ \sigma_{11}^{IP}(k,\,y,\,s) &= \left(\frac{\rho}{2\,\eta_p}\left(\left(1-2\,\frac{c_s^2}{c_p^2}\right)\,s^2 - 2\,c_s^2\,k^2\right) - \rho\left(c_p^2 - 2\,c_s^2\right)\,\delta(y-h)\right)\,e^{-|y-h|\,\eta_P}\,f(s), \\ \sigma_{12}^{IP}(k,\,y,\,s) &= i\,\rho\,c_s^2\,\mathrm{sgn}\,(y-h)\,k\,e^{-|y-h|\,\eta_P}\,f(s), \\ \sigma_{22}^{IP}(k,\,y,\,s) &= \left(\frac{\rho}{2\,\eta_p}\left(s^2 + 2\,c_s^2\,k^2\right) - \rho\,c_p^2\,\delta(y-h)\right)\,e^{-|y-h|\,\eta_P}\,f(s). \end{aligned}$$

Les transformées des composantes du champ de l'onde P réfléchie s'écrivent

$$
\begin{aligned}
&v_1^{RP}(k,\,y,\,s) = -i\,k\,s\,A(k,\,s)\,e^{-(y+h)\,\eta_P}\,f(s),\\
&v_2^{RP}(k,\,y,\,s) = -s\,\eta_p\,A(k,\,s)\,e^{-(y+h)\,\eta_P}\,f(s),\\
&\sigma_{11}^{RP}(k,\,y,\,s) = \rho\left(s^2\left(1-2\,\frac{c_s^2}{c_p^2}\right)-2\,c_s^2\,k^2\right)\,A(k,\,s)\,e^{-(y+h)\,\eta_P}\,f(s),\\
&\sigma_{12}^{RP}(k,\,y,\,s) = 2\,i\,\rho\,c_s^2\,k\,\eta_p\,A(k,\,s)\,e^{-(y+h)\,\eta_P}\,f(s),\\
&\sigma_{22}^{RP}(k,\,y,\,s) = \rho\left(s^2+2\,c_s^2\,k^2\right)\,A(k,\,s)\,e^{-(y+h)\,\eta_P}\,f(s).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Enfin, les transformées des composantes du champ de l'onde SV réfléchie s'écrivent

$$
\begin{aligned}
&v_1^{RS}(k,\,y,\,s) = -s\,\eta_s\,B(k,\,s)\,e^{-y\,\eta_S-h\,\eta_P}\,f(s),\\
&v_2^{RS}(k,\,y,\,s) = i\,k\,s\,B(k,\,s)\,e^{-y\,\eta_S-h\,\eta_P}\,f(s),\\
&\sigma_{11}^{RS}(k,\,y,\,s) = 2\,i\,\rho\,c_s^2\,k\,\eta_s\,B(k,\,s)\,e^{-y\,\eta_S-h\,\eta_P}\,f(s),\\
&\sigma_{12}^{RS}(k,\,y,\,s) = \rho\,c_s^2\left(2\,k^2+\frac{s^2}{c_s^2}\right)\,B(k,\,s)\,e^{-y\,\eta_S-h\,\eta_P}\,f(s),\\
&\sigma_{22}^{RS}(k,\,y,\,s) = -\sigma_{11}^{RS}(k,\,y,\,s).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

3.3.3 Coefficients de réflexion

A la surface libre, les champs élastiques vérifient la condition de Dirichlet $\boldsymbol{\sigma.n} = \mathbf{0}$, où $\boldsymbol{n}$ est un vecteur normal à la surface, soit

$$
\sigma_{12}(x,\,0,\,t) = 0, \qquad \sigma_{22}(x,\,0,\,t) = 0. \tag{3.15}
$$

Par transformée de Fourier en x et transformée de Laplace en t de (3.15), on obtient

$$
\begin{cases}
\sigma_{12}(k,\,0,\,s) = \left(\sigma_{12}^{IP}+\sigma_{12}^{RP}+\sigma_{12}^{RS}\right)(k,\,0,\,s) = 0,\\
\sigma_{22}(k,\,0,\,s) = \left(\sigma_{22}^{IP}+\sigma_{22}^{RP}+\sigma_{22}^{RS}\right)(k,\,0,\,s) = 0.
\end{cases}
\tag{3.16}
$$

On reporte les transformées (3.12), (3.13) et (3.14) dans (3.16), ce qui conduit au système

$$
\begin{cases}
2\,i\,k\,\eta_p\,A+\left(2\,k^2+\dfrac{s^2}{c_s^2}\right)\,B = i\,k,\\
\left(s^2+2\,c_s^2\,k^2\right)\,A-2\,i\,c_s^2\,k\,\eta_s\,B = -\dfrac{s^2+2\,c_s^2\,k^2}{2\,\eta_p},
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

dont les solutions s'écrivent

$$
\begin{aligned}
A(k,\, s) &= \frac{1}{2\,\eta_p}\,\frac{4\,k^2\,\eta_p\,\eta_s + \left(2\,k^2 + \dfrac{s^2}{c_s^2}\right)^2}{\Delta_{AB}(k,\, s)},\\
B(k,\, s) &= \frac{2\,i\,k\,\left(2\,k^2 + \dfrac{s^2}{c_s^2}\right)}{\Delta_{AB}(k,\, s)},\\
\Delta_{AB}(k,\, s) &= 4\,k^2\,\eta_p\,\eta_s - \left(2\,k^2 + \frac{s^2}{c_s^2}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

En posant $k = \frac{i\,s}{c}$, le dénominateur Δ_{AB} dans (3.18) se met sous la forme

$$
\Delta_{AB}(k,\, s) = s^4\,\Delta_R(c), \quad \text{avec } \Delta_R(c) = \left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{c_s^2}\right)^2 + \frac{4}{c^2}\,\left(\frac{1}{c_p^2} - \frac{1}{c^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c^2}\right)^{1/2}. \tag{3.19}
$$

$\Delta_R = 0$ revient à l'équation de Rayleigh (eq. 5-96 dans [1]), dont on sait qu'elle possède deux solutions, toutes deux réelles : $\pm c_r$, avec $c_r < c_s < c_p$. Ainsi, les deux seuls pôles de $A(k,\, s)$ et $B(k,\, s)$ sont : $\pm\frac{i}{c_r}$.

3.4 Onde P réfléchie

3.4.1 Méthodologie

On détermine ici les composantes du champ de l'onde P réfléchie, en x, y et t. Pour traiter avec un formalisme unique les cinq composantes dans (3.13), on définit les variables $G = v_1^{RP}, ..., \sigma_{11}^{RP}$ et g telles que

$$
G(k,\, y,\, s) = g(k,\, s)\,e^{-(y+h)\,\eta_P}\,f(s). \tag{3.20}
$$

La transformée de Fourier inverse (3.4) de (3.20) s'écrit

$$
G(x,\, y,\, s) = \frac{1}{2\,\pi}\,f(s)\int_{-\infty}^{+\infty} g(k,\, s)\,e^{-(y+h)\,\eta_P}\,e^{-i\,k\,x}\,dk. \tag{3.21}
$$

On pose $k = p\,s$. Etant donné (3.13), on a

$$
g(k,\, s)\,dk = s^2\,g(p)\,dp \tag{3.22}
$$

où $g(p)$ découle de $g(k,\, s)$ en remplaçant k par p et s par 1. On injecte alors (3.22) dans (3.4). En posant

$$
t = (y+h)\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} + i\,p\,x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.23}
$$

on obtient

$$
G(x,\, y,\, s) = \frac{s^2}{2\,\pi}\,f(s)\int_{-\infty}^{+\infty} g(p)\,e^{-s\,t}\,dp. \tag{3.24}
$$

Conformément à ce qui a été vu en sections 3-1 et 3-3, les coupures et pôles dans l'intégrand de (3.5) appartiennent à $]-i\,\infty, -\frac{i}{c_p}]\cup]\frac{i}{c_p}, +i\,\infty[$. Le point essentiel de la méthode de Cagniard-de Hoop consiste alors à modifier le contour d'intégration dans (3.5), pour mettre cette intégrale sous forme de la transformée de Laplace d'une fonction, à déterminer. Par identification, on obtiend alors explicitement $G(x,\, y, t)$.

3.4.2 Contour d'intégration

Pour calculer (3.24), il faut déterminer le *chemin de Cagniard-de Hoop*. Celui-ci est défini dans le plan complexe par

$$\Lambda = \left\{ p \in \mathbb{C} \,/\, (y+h)\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} + i\,p\,x - t = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \right\}. \tag{3.25}$$

En définissant un système de coordonnées polaires centré sur la source image

$$x = r\,\cos\theta, \qquad y + h = r\,\sin\theta, \tag{3.26}$$

il est aisé de mettre (3.25) sous la forme du polynôme

$$p^2 + \left(2\,i\,\frac{t}{r}\,\cos\theta\right) p + \frac{\sin^2\theta}{c_p^2}\frac{t^2}{r^2} = 0. \tag{3.27}$$

Suivant les valeurs de t, les racines de (3.27) définissent deux chemins $\gamma^{\pm}$ ou $\Gamma^{\pm}$

$$\begin{aligned} &\gamma^{\pm} :\, t \le t_0 = \frac{r}{c_p}, \quad p^{\pm}(t) = -i\left(\frac{t}{r}\,\cos\theta \pm \frac{|\,\sin\theta\,|}{r}\sqrt{t_0^2 - t^2}\right), \\ &\Gamma^{\pm} :\, t \ge t_0 = \frac{r}{c_p}, \quad p^{\pm}(t) = -i\,\frac{t}{r}\,\cos\theta \pm \frac{|\,\sin\theta\,|}{r}\sqrt{t^2 - t_0^2}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Le temps t_0 correspond au temps d'arrivée de l'onde P émise par la source et réfléchie par la surface libre. A $t = t_0$, les solutions $p^{\pm}(t)$ quittent l'axe imaginaire (chemins $\gamma^{\pm}$) au point $p = -i\,\frac{\cos\theta}{c_p}$. Pour $t > t_0$, les solutions $p^{\pm}(t)$ appartiennent à des branches d'hyperboles (chemins $\Gamma^{\pm}$) et ne traversent plus l'axe imaginaire : ainsi, les coupures de g sont évitées. On définit alors le contour fermé

$$\Pi(R) = [-R,\, R] \cup C^+(R) \cup \Gamma^+(R) \cup \Gamma^-(R) \cup C^-(R), \tag{3.29}$$

où $C^{\pm}(R)$ sont des arcs de cercle de centre 0 et de rayon R reliant l'axe des abscisses aux chemins $\Gamma^{\pm}(R)$. Par construction, ce contour fermé n'encercle pas de pôle de $g(p)$. Un exemple de chemin $\Pi(R)$ est présenté en figure 3.2, pour $\cos\theta < 0$ (i.e. $x < 0$).

3.4.3 Intégration dans le plan complexe

La fonction $g(p)$ est holomorphe sur $\Pi(R)$: par application du théorème de Cauchy, on a

$$\int_{\Pi(R)} g(p)\, e^{-s\,t}\, dp = 0. \tag{3.30}$$

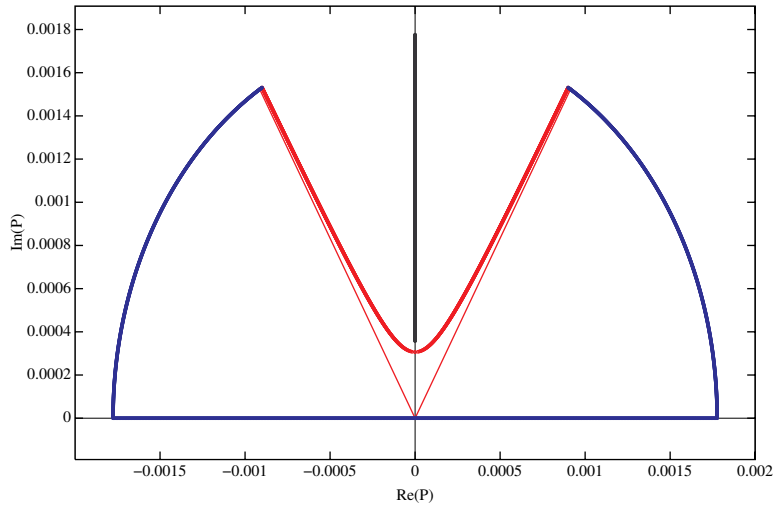


Figure 3.2: Contour d'intégration $\Pi(R)$ pour l'onde P réfléchie.

On fait tendre R vers $+\infty$ et on applique le lemme de Jordan, puis on fait porter l'intégration sur t, soit

(3.31)
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} g(p)\, e^{-s\,t}\, dp &= \int_{\Gamma^+} g(p)\, e^{-s\,t}\, dp - \int_{\Gamma^-} g(p)\, e^{-s\,t}\, dp \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} g(p^+(t))\ \left.\frac{d\,p^+}{d\,t}\right|_{\Gamma^+} e^{-s\,t}\, dt - \int_{t_0}^{+\infty} g(p^-(t))\ \left.\frac{d\,p^-}{d\,t}\right|_{\Gamma^-} e^{-s\,t}\, dt.\end{aligned}$$

A partir de (3.28), on montre facilement

$$\left.\frac{d\,p^\pm}{d\,t}\right|_{\Gamma^\pm} = \pm\frac{\left(p^{\pm\,2} + \dfrac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}}{\sqrt{t^2 - t_0^2}}, \tag{3.32}$$

(voir par exemple [46]), d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(p)\, e^{-s\,t}\, dp = 2\int_{t_0}^{+\infty} \frac{Y\left(p^+(t)\right)}{\sqrt{t^2 - t_0^2}}\, e^{-s\,t}\, dt, \tag{3.33}$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} Y\left(p^+(t)\right) = X\left(p^+(t)\right) + X\left(p^-(t)\right), \\ \\ X\left(p^\pm(t)\right) = g\left(p^\pm(t)\right)\left(p^{\pm\,2} + \dfrac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}. \end{array}\right. \tag{3.34}$$

Les racines $p^\pm(t)$ vérifient $p^-(t) = -\overline{p^+(t)}$; ainsi, on a $g\left(p^-(t)\right) = \pm\overline{g\left(p^+(t)\right)}$, d'où les deux cas

$$\begin{array}{lll} g\left(p^-(t)\right) = \overline{g\left(p^+(t)\right)} & \Rightarrow & Y\left(p^+(t)\right) = \Re\mathrm{e}\left\{X^+\left(p^+(t)\right)\right\}, \\ g\left(p^-(t)\right) = -\overline{g\left(p^+(t)\right)} & \Rightarrow & Y\left(p^+(t)\right) = i\,\Im\mathrm{m}\left\{X^+\left(p^+(t)\right)\right\}. \end{array} \tag{3.35}$$

On injecte alors (3.33) dans (3.24). A partir des propriétés de la transformée de Laplace (3.7) et (3.8) on obtient enfin le résultat

$$
\begin{aligned}
G(x,\,y,\,t) &= \left(\tilde{G} * f''\right)(x,\,y,\,t),\\
\tilde{G}(r,\,t) &= \frac{1}{\pi}\,\frac{Y\left(p^{+}(t)\right)}{\sqrt{t^2-t_0^2}}\,H\left(t-t_0\right),
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

où $p^{+}(t)$ est donné par la deuxième formule de (3.28) et H est la distribution de Heaviside. L'expression (3.36) est voisine de celle de la fonction de Green de l'onde incidente [122]

$$
\tilde{\Phi}_{IP}(r,\,t) = \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{H\left(t-\frac{r}{c_p}\right)}{\sqrt{t^2-\left(\frac{r}{c_p}\right)^2}}, \qquad r^2 = x^2+(y-h)^2\,. \tag{3.37}
$$

Lors des convolutions numériques, les singularités apparentes en $1/\sqrt{t^2-t_0^2}$ dans (3.36) et (3.37) sont éliminées grâce à un changement de variable classique : voir (4-4-5) dans [130].

3.4.4 Composantes du champ

On applique la procédure décrite dans les sections 3.4.1 à 3.4.3 aux transformées (3.13). Les fonctions régulières Y intervenant dans (3.36) sont alors

$$
\begin{aligned}
Y_{v_1^{RP}} &= \Im\mathrm{m}\left\{p\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} A(p,\,s)\right\},\\
Y_{v_2^{RP}} &= \Re\mathrm{e}\left\{-\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right) A(p,\,s)\right\},\\
Y_{\sigma_{11}^{RP}} &= \Re\mathrm{e}\left\{\rho\left(1-2\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2-2\,c_s^2\,p^2\right)\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} A(p,\,s)\right\},\\
Y_{\sigma_{12}^{RP}} &= \Im\mathrm{m}\left\{-2\,\rho\,c_s^2\,p\,\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right) A(p,\,s)\right\},\\
Y_{\sigma_{22}^{RP}} &= \Re\mathrm{e}\left\{\rho\left(1+2\,c_s^2\,p^2\right)\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} A(p,\,s)\right\},
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

avec $p = p^{+}(t)$ donné par (3.28), et $A(p,\,s)$ déduit de (3.18)

$$
A(p,\,s) = \frac{1}{2\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}}\,\frac{4\,p^2\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}\left(p^2+\frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}+\left(2\,p^2+\frac{1}{c_s^2}\right)^2}{4\,p^2\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}\left(p^2+\frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}-\left(2\,p^2+\frac{1}{c_s^2}\right)^2}. \tag{3.39}
$$

Pour gagner en temps de calcul et en précision, il est avantageux de remarquer que

$$
\left(p^2+\frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} = |\,\sin\theta\,|\;\frac{t}{r} - i\,\frac{\cos\theta}{r}\sqrt{t^2-t_0^2}. \tag{3.40}
$$

3.5 Onde SV réfléchie

3.5.1 Méthodologie

On cherche enfin les composantes du champ de l'onde SV réfléchie. La démarche est la même qu'en section 3.4 : les transformées (3.14) sont décrites par deux variables $G = v_1^{RS}, ..., \sigma_{11}^{RS}$ et g

$$G(k,\, y,\, s) = g(k,\, s)\, e^{-y\,\eta_s - h\,\eta_p}\, f(s). \tag{3.41}$$

Après transformée de Fourier inverse de (3.41) puis changement de variable $k = p\,s$, on obtient la même équation que (3.24), à la différence importante suivante : au lieu de (3.23), on a

$$t = y\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} + h\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} + i\,p\,x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.42}$$

Il faut alors déterminer le chemin de Cagniard-de Hoop suivant

$$\Lambda = \left\{ p \in \mathbb{C} \,/\, \mathcal{F}(p,\, t) = y\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} + h\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} + i\,p\,x - t = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \right\}. \tag{3.43}$$

Contrairement à (3.28), on ne sait pas résoudre analytiquement (3.43) dans le cas général, ni même expliciter le temps d'arrivée t_0 de l'onde SV réfléchie par la surface libre. Les deux seuls cas où (3.43) est connu sont : $c_p = c_s$ ou $y = 0$, ce deuxième cas étant fréquemment étudié [82]. Dans ces deux cas-limites, la solution est facilement déduite de (3.28).

3.5.2 Etude du chemin de Cagniard-de Hoop

Dans cette section, nous rassemblons différentes propriétés du chemin de Cagniard-de Hoop. Le nombre et la nature des solutions p de (3.43) dépendant de t, on distingue pour la suite de l'étude quatre instants critiques :

$$\left| \begin{array}{l} t_A = \sqrt{\dfrac{1}{c_s^2} - \dfrac{1}{c_p^2}} - \dfrac{x}{c_p}, \\ \\ t_D = \sqrt{\dfrac{1}{c_s^2} - \dfrac{1}{c_p^2}} + \dfrac{x}{c_p}, \\ \\ t_R = \dfrac{h}{c_p} + \dfrac{y}{c_s}, \\ \\ t_0 = \dfrac{y}{c_s}\sqrt{1 - (q_0\, c_s)^2} + \dfrac{h}{c_p}\sqrt{1 - (q_0\, c_p)^2} - q_0\, x, \end{array} \right. \tag{3.44}$$

avec q_0 solution de

$$y\,\frac{q_0}{\sqrt{\dfrac{1}{c_s^2} - q_0^2}} + h\,\frac{q_0}{\sqrt{\dfrac{1}{c_p^2} - q_0^2}} + x = 0. \tag{3.45}$$

Propriété 3.1 *Soit $p(t)$ solution de (3.43). Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) *les solutions non imaginaires pures sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire*

$$\mathcal{F}(p,\, t) = 0 \iff \mathcal{F}(-\overline{p},\, t) = 0\,;$$

(ii) *si p imaginaire pur, alors*

$$|\, p\,| < \min\left(\frac{1}{c_s},\, \frac{1}{c_p}\right)\,;$$

(iii) *pour t grand, les solutions tendent asymptotiquement vers deux droites*

$$p_\infty^{\pm}(t) = \frac{\pm(y+h) - i\,x}{x^2 + (y+h)^2}\,t\,; \tag{3.46}$$

(iv) *si $x \neq 0$, la seule solution réelle est $p = 0$ et est atteinte à $t = t_R$.*

Démonstration. Les propriétés (i) et (iii) sont immédiates. Cette dernière implique que, pour t suffisamment grand, les solutions de (3.43) sont contenues dans le demi-plan

$$\text{sgn}\ (\Im\text{m}\,\{p\}) = -\text{sgn}\ (x).$$

Si p est imaginaire pure, alors $i\,p\,x$ est réel. Comme t est réel, on déduit de (3.43) que

$$y\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} + h\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} \in \mathbb{R},$$

d'où

$$y\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} \in \mathbb{R}, \qquad h\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} \in \mathbb{R},$$

ce qui démontre (ii) : comme dans le cas de l'onde P réfléchie, le chemin de Cagniard-de Hoop ne traverse donc pas les coupures de g. Enfin, si p est réel, $i\,p\,x$ est imaginaire pur, et

$$t - y\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} - h\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} \in \mathbb{R},$$

d'où $i\,p\,x = 0$. Si $x \neq 0$, cela implique que $p = 0$ et démontre (iv) : ainsi, le chemin de Cagniard-de Hoop ne traverse l'axe réel qu'une seule fois. □

Lemme 3.1 *L'équation (3.43) possède*

- *0 solution si $t < \min(t_A,\, t_D)$;*
- *1 solution si $\min(t_A,\, t_D) < t < \max(t_A,\, t_D)$;*
- *2 solutions si $t > \max(t_A,\, t_D)$.*

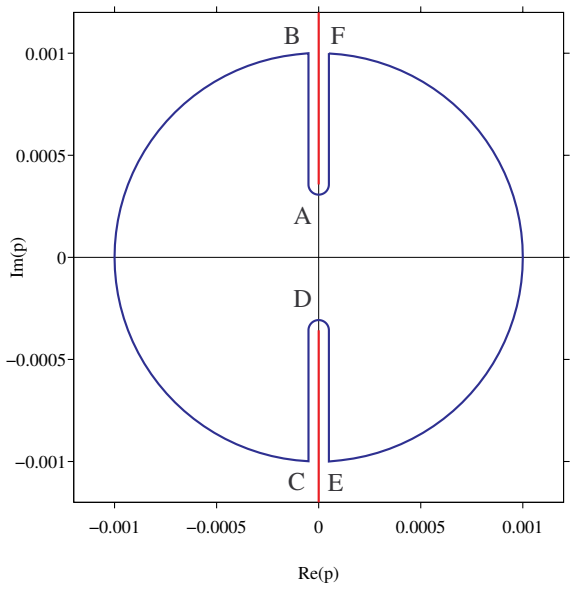


Figure 3.3: Chemin ψ utilisé pour la démonstration du lemme 3.1. Coupures de $\mathcal{F}$ en rouge.

DÉMONSTRATION. On suppose tout au long de la démonstration que $x < 0$; le cas $x > 0$ est similaire, et $x = 0$ nécessite seulement des modifications mineures. Considérons le chemin ψ schématisé en figure 3.3 et défini par

$$\psi(R) = AB \cup BC \cup CD \cup DE \cup EF \cup FA,$$

où R est un réel ; AB est un segment de droite longeant la coupure de $\mathcal{F}$ dans le demi-plan $\Im\mathrm{m}(p) > 0$ par la gauche, de $\frac{i}{c_p}$ à $i\,R$; BC est un demi-cercle de rayon R centré sur l'origine et localisé dans le demi-plan $\Re\mathrm{e}(p) < 0$; CD est un chemin longeant la coupure de $\mathcal{F}$ dans le demi-plan $\Im\mathrm{m}(p) < 0$ par la gauche ; le reste du contour est déduit de ce qui précède par symétrie par rapport à l'axe imaginaire. Le réel R est destiné à tendre vers l'infini ; avant tout passage à la limite et pour assurer la validité des calculs qui vont suivre, R est supposé satisfaire

$$R > \max\left(\frac{1}{c_s}, \frac{t}{x}\right).$$

A l'intérieur de ψ, $\mathcal{F}$ est méromorphe et ne possède pas de pôles. Le *principe de l'argument*, déjà utilisé pour démontrer la proposition **??**, conduit à

$$\mathcal{Z} = \mathcal{I}(\Psi, 0),$$

où $\mathcal{Z}$ est le nombre de zéros de $\mathcal{F}$ à l'intérieur de ψ, Ψ est l'image de ψ par $\mathcal{F}$, et $\mathcal{I}(\Psi, 0)$ est l'indice de Ψ par rapport à l'origine. Il n'y a pas besoin d'étudier Ψ dans son intégralité : de la propriété évidente

$$\mathcal{F}(-\overline{p}, t) = \overline{\mathcal{F}(p, t)},$$

il s'ensuit qu'il suffit d'étudier l'image de AD par $\mathcal{F}$, puis d'effectuer une symétrie de cette image par rapport à l'axe réel pour compléter Ψ.

Image de AB. Le chemin AB est défini par $p(r) = 0^- + i\,r$, avec $r \in [\frac{1}{c_p}, R]$. L'image $A^{'}$ de A par $\mathcal{F}$ dans (3.43) est réelle et s'écrit

$$\begin{aligned} A^{'} &= y\sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_p^2}} - \frac{x}{c_p} - t, \\ &= t_A - t. \end{aligned}$$

Sur AB, on a

$$\mathcal{F}(p,\,t) = y\left(-r^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} + h\left(-r^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} - r\,x - t,$$

d'où les deux sous-cas

$$r \in \left[\frac{1}{c_p},\,\frac{1}{c_s}\right] \;\Rightarrow\; \Im\mathrm{m}\left\{\mathcal{F}(p,\,t)\right\} = -h\sqrt{r^2 - \frac{1}{c_p^2}},$$

$$r \in \left[\frac{1}{c_s},\,R\right] \;\Rightarrow\; \Im\mathrm{m}\left\{\mathcal{F}(p,\,t)\right\} = -y\sqrt{r^2 - \frac{1}{c_s^2}} - h\sqrt{r^2 - \frac{1}{c_p^2}}.$$

Le signe devant les radicaux découle de la convention choisie pour $\sqrt{z}$ dans le plan complexe. Ainsi, sur les deux sous-intervalles considérés, $\Im\mathrm{m}\left\{\mathcal{F}(p,\,t)\right\} < 0$ est une fonction strictement décroissante de r. L'image $B^{'}$ de B par $\mathcal{F}$ dans (3.43) s'écrit

$$B^{'} = -x\,R - t - i\left(y\sqrt{R^2 - \frac{1}{c_s^2}} + h\sqrt{R^2 - \frac{1}{c_p^2}}\right).$$

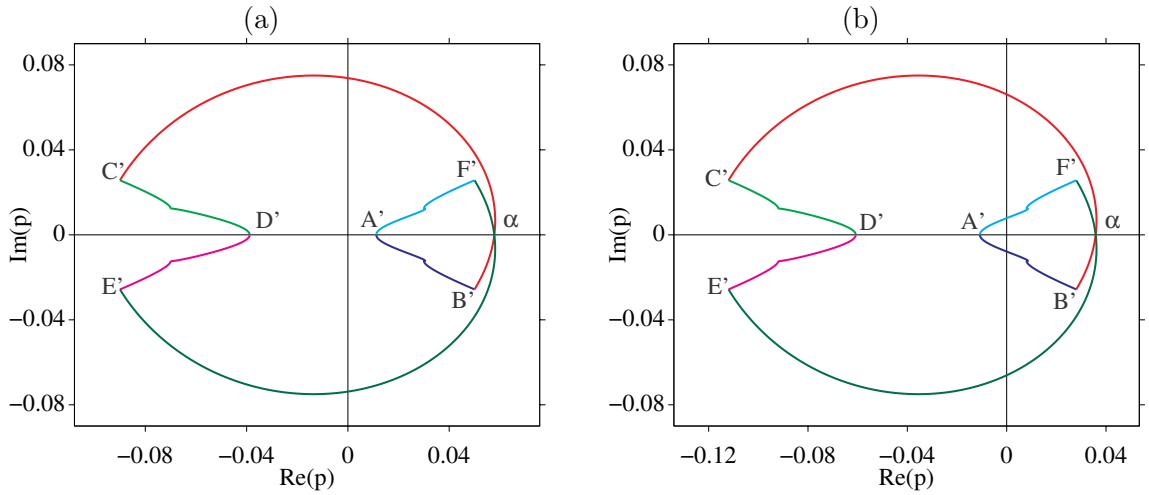


Figure 3.4: Contours Ψ utilisés lors de la démonstration du lemme 3.1. (a) : $\mathcal{I}(\Psi,\,0) = 1$, obtenu pour $\min(t_A,\,t_D) < t < \max(t_A,\,t_D)$; (b) : $\mathcal{I}(\Psi,\,0) = 2$, obtenu pour $t > \max(t_A,\,t_D)$.

Image de BC. Le chemin BC est défini par $p(\theta) = R\,e^{i\,\theta}$, avec $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\,\pi}{2}]$. L'image $C^{'}$ de C par $\mathcal{F}$ dans (3.43) s'écrit

$$C^{'} = x\,R - t + i\,\left(y\sqrt{R^2 - \frac{1}{c_s^2}} + h\sqrt{R^2 - \frac{1}{c_p^2}}\right),$$

d'où $\Re\mathrm{e}\{C^{'}\} < 0$ et $\Im\mathrm{m}\{C^{'}\} > 0$. Comme $\Im\mathrm{m}\{B^{'}\} < 0$ et $\mathcal{F}$ continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que le chemin $B^{'}C^{'}$ coupe l'axe réel en au moins un point. Pour R grand, on a

$$\mathcal{F}(p(\theta),\,t) \sim (-(y+h) + i\,x)\,R\,e^{i\,\theta} - t,$$

de parties réelle et imaginaire

$$f_1(\theta) = \Re\mathrm{e}\,\{\mathcal{F}(p(\theta),\,t)\} \sim -\,((y+h)\,\cos\theta + x\,\sin\theta)\;R - t,$$

$$f_2(\theta) = \Im\mathrm{m}\,\{\mathcal{F}(p(\theta),\,t)\} \sim (x\,\cos\theta - (y+h)\,\sin\theta)\;R.$$

D'une part, on a

$$f_1^{'}(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \theta_1 = \pi + \arctan\left(\frac{x}{y+h}\right) \in \left[\frac{\pi}{2},\,\frac{3\,\pi}{2}\right].$$

Pour $\theta < \theta_1$ (resp. $\theta > \theta_1$), $f_1(\theta)$ est une fonction croissante (resp. décroissante). D'autre part, on a

$$f_2^{'}(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \theta_2 = \pi - \arctan\left(\frac{y+h}{x}\right) \in \left[\frac{\pi}{2},\,\frac{3\,\pi}{2}\right].$$

Pour $\theta < \theta_2$ (resp. $\theta > \theta_2$), $f_2(\theta)$ est une fonction croissante (resp. décroissante). Comme $\Im\mathrm{m}\{\mathrm{C}^{'}\} > 0$, on déduit du comportement de $f_2(\theta)$ que, pour R suffisamment grand, le point d'intersection de $B^{'}C^{'}$ avec l'axe réel est unique : on note α ce point. Reste à examiner la position de α par rapport à $A^{'}$. Pour R grand, on a

$$\begin{aligned} f_2(\theta_g) &\sim (x\,\cos\theta_g - (y+h)\,\sin\theta_g)\;R \\ &\sim \frac{x^2 + (y+h)^2}{y+h}\,\frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y+h}\right)^2}} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, α se situe sur la partie de $B^{'}C^{'}$ de partie réelle croissante, d'où $\alpha > \Re\mathrm{e}\{B^{'}\} > A^{'}$.

Image de CD. Le chemin CD est défini par $p(r) = 0^{-} - i(R-r)$, avec $r \in [0,\,R - \frac{1}{c_p}]$. L'image $D^{'}$ de D par $\mathcal{F}$ dans (3.43) s'écrit

$$\begin{aligned} D^{'} &= y\sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_p^2}} + \frac{x}{c_p} - t \\ &= t_D - t. \end{aligned}$$

Sur CD, on a

$$\mathcal{F}(p,\,t) = y\left(-(R-r)^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} + h\left(-(R-r)^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} + (R-r)\,x - t,$$

d'où les deux sous-cas

$$r \in \left[0,\, R - \frac{1}{c_s}\right] \;\Rightarrow\; \Im\mathrm{m}\left\{\mathcal{F}(p,\, t)\right\} = y\sqrt{(R-r)^2 - \frac{1}{c_s^2}} + h\sqrt{(R-r)^2 - \frac{1}{c_p^2}},$$

$$r \in \left[R - \frac{1}{c_s},\, R - \frac{1}{c_p}\right] \;\Rightarrow\; \Im\mathrm{m}\left\{\mathcal{F}(p,\, t)\right\} = h\sqrt{(R-r)^2 - \frac{1}{c_p^2}}.$$

Sur ces deux sous-intervalles, $\Im\mathrm{m}\{\mathcal{F}(p,\, t)\}$ est une fonction strictement décroissante de r. Comme $\Im\mathrm{m}\{C^{'}\} > 0$ et $\Im\mathrm{m}\{D^{'}\} = 0$, le chemin $C^{'}D^{'}$ ne coupe l'axe réel qu'une seule fois, en $D^{'}$.

Bilan. Le contour Ψ est obtenu après symétrie de $A^{'}D^{'}$ par rapport à l'axe réel. De la discussion qui précède, on déduit que les seuls points d'intersection de Ψ avec l'axe réel sont

$$A^{'} = t_A - t, \qquad \alpha > \Re\mathrm{e}\Big\{\mathrm{B}^{'}\Big\} = -x\,R - t, \qquad D^{'} = t_D - t < A^{'},$$

avec $A^{'}$ et $D^{'}$ indépendants de R, et α tendant vers $+\infty$ avec R. Pour R suffisamment grand, on obtient $D^{'} < A^{'} < \alpha$. Ainsi, le contour Ψ coupe successivement l'axe réel aux points $A^{'}$, α, $D^{'}$, α, et enfin $A^{'}$. Pour un réel quelconque η, on déduit que

- si $\eta < D^{'}$, le contour Ψ n'entoure pas η ;
- si $D^{'} < \eta < A^{'}$, le contour Ψ entoure une fois η ;
- si $\eta > A^{'}$, on peut trouver R tel que le contour Ψ entoure deux fois η.

L'application de cette propriété à $\eta = 0$ achève la démonstration. □

On représente le contour Ψ en figure 3.4. Les paramètres physiques et géométriques sont : $c_p = 2800$ m/s, $c_s = 1400$ m/s, $x = -70$ m, $y = 10$ m et $h = 20$ m. Pour ces paramètres, les instants critiques sont : $t_0 = 32.3$ ms, $t_A = 31.2$ ms et $t_D = -18.8$ ms. En (a), on choisit $t = 20$ ms, soit $t_D < t < t_A$: le contour Ψ entoure une fois l'origine, ce qui correspond à une unique solution dans le lemme 3.1. En (b), on choisit $t = 42$ ms, soit $t > t_A < t_D$: le contour Ψ entoure deux fois l'origine, ce qui correspond à deux solutions dans le lemme 3.1.

La propriété suivante précise la nature des solutions de (3.43), en fonction de t.

Propriété 3.2 *Si $x \neq 0$, les solutions de (3.43) sont*

- *1 solution imaginaire pure si* $\min(t_A,\, t_D) < t < \max(t_A,\, t_D)$ *;*
- *2 solutions imaginaires pures si* $\max(t_A,\, t_D) < t < t_0$
- *2 solutions complexes symétriques par rapport à l'axe imaginaire et ne coupant pas l'axe réel si $t > t_0$.*

Si $x = 0$, les solutions de (3.43) sont

- *2 solutions imaginaire pures conjuguées si* $t_A \leq t < t_0$ *;*
- *1 solution double* $p = 0$ *si* $t = t_0$ *;*
- *2 solutions réelles de signe opposé si* $t > t_0$.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord $x \neq 0$. La propriété 3.1-(ii) indique que les solutions imaginaires pures de (3.43) sont inclues dans l'intervalle $]-\frac{i}{c_p}, +\frac{i}{c_p}[$. Pour déterminer ces solutions, on pose $p = i\,q$ et on étudie la fonction

$$f(q) = y\sqrt{\frac{1}{c_s^2} - q^2} + h\sqrt{\frac{1}{c_p^2} - q^2} - q\,x - t$$

sur l'intervalle réel $]-\frac{1}{c_p}, +\frac{1}{c_p}[$. Les dérivées première et seconde de f s'écrivent

$$f^{'}(q) = -y\,\frac{q}{\sqrt{\frac{1}{c_s^2} - q^2}} - h\,\frac{q}{\sqrt{\frac{1}{c_p^2} - q^2}} - x, \quad f^{''}(q) = -\frac{y}{c_s^2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{c_s^2} - q^2\right)^{3/2}} - \frac{h}{c_p^2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{c_p^2} - q^2\right)^{3/2}} < 0,$$

ce qui implique que $f^{'}(q)$ est une fonction strictement décroissante. De plus, $f^{'}(q)$ est continue sur l'intervalle considéré, et

$$\lim_{q \to -1/c_p^+} f^{'}(q) = +\infty, \qquad \lim_{q \to +1/c_p^-} f^{'}(q) = -\infty,$$

ce qui implique qu'il existe un unique $q_0 \in]-\frac{1}{c_p}, +\frac{1}{c_p}[$ tel que $f^{'}(q_0) = 0$. Comme $f^{'}(0) = -x > 0$, on a plus précisément $0 < q_0 < \frac{1}{c_p}$. On déduit de ce qui précède que f croît de $f(-\frac{1}{c_p}) = t_D - t$ à $f(q_0)$, puis décroît jusqu'à $f(\frac{1}{c_p}) = t_A - t$. L'équation $f(q) = 0$ revient alors à une équation dépendant du paramètre t. On distingue quatre cas.

Cas 1 : $t < \min(t_A, t_D)$. Comme $\min f(q) > 0$, l'équation $f(q) = 0$ n'a pas de solution réelle. Cela correspond au premier cas du lemme 3.1: (3.43) ne possède alors aucune solution.

Cas 2 : $\min(t_A, t_D) < t < \max(t_A, t_D)$. Dans ce cas, $\min f(q) \leq 0$ et $\max f(q) \geq 0$. On en déduit que $f(q) = 0$ possède une solution réelle, et donc que (3.43) possède une solution imaginaire pure. D'après le lemme 3.1, (3.43) possède une unique solution pour cette valeur de t, que l'on vient de déterminer. La solution est explicitement connue dans deux cas particuliers. Si $t = \min(t_A, t_D)$, alors $p = -\frac{i}{c_p}$ si $x < 0$, et $p = +\frac{i}{c_p}$ si $x > 0$. Si $t = \max(t_A, t_D)$, alors $p = +\frac{i}{c_p}$ si $x < 0$, et $p = -\frac{i}{c_p}$ si $x > 0$.

Cas 3 : $\max(t_A, t_D) < t \leq t_0$. Dans ce cas, $f\left(-\frac{1}{c_p}\right) < 0$, $f\left(+\frac{1}{c_p}\right) < 0$, et $f\,(q_0) \geq 0$. Ainsi, $f(q) = 0$ possède deux solutions réelles - soit deux solutions imaginaires pures de (3.43) - qui coalescent à $t = t_0$. Or d'après le lemme 3.1, (3.43) possède alors deux solutions : on sait donc qu'il n'existe pas d'autres solutions.

Cas 4 : $t > t_0$. Dans ce cas, $f(q_0) < 0$, donc $f(q) = 0$ ne possède pas de solution réelle, et (3.43) ne possède pas de solution imaginaire pure. D'après le lemme 3.1, (3.43) possède deux

solutions. Il s'ensuit que les solutions de (3.43) ne sont pas imaginaires pures. De la propriété 3.1-(i), il découle que les solutions de (3.43) sont alors symétriques par rapport à l'axe imaginaire. Enfin, d'après la propriété 3.1-(ii), les solutions de (3.43) ne sont pas réelles.

L'étude du cas $x = 0$ est analogue, et ne nécessite que des modifications mineures par rapport à ce qui précède. Notons juste que $t_A = t_D$ et que t_0 est alors explicite : $t_0 = t_R$. □

La propriété suivante conduit à une interprétation physique de l'instant t_0 intervenant dans la propriété 3.2, instant où le chemin de Cagniard-de Hoop Λ quitte l'axe imaginaire.

Propriété 3.3 *L'instant t_0 dans (3.44) est le temps d'arrivée de l'onde SV réfléchie.*

Démonstration. Lors de l'étude des solutions imaginaires pures de (3.43), menée dans la démonstration de la propriété (3.2), on a défini t_0 comme étant le seul instant tel que

$$\begin{cases} \mathcal{F}(p_0,\, t_0) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p_0,\, t_0) = 0, \end{cases} \tag{3.47}$$

soit

$$\begin{cases} y \left(p_0^2 + \dfrac{1}{c_s^2} \right)^{1/2} + h \left(p_0^2 + \dfrac{1}{c_p^2} \right)^{1/2} + i\, p_0\, x - t_0 = 0, \\ \\ y \dfrac{p_0}{\left(p_0^2 + \dfrac{1}{c_s^2} \right)^{1/2}} + h \dfrac{p_0}{\left(p_0^2 + \dfrac{1}{c_p^2} \right)^{1/2}} + i\, x = 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

D'après la propriété 3.1-(ii), p_0 vérifie

$$| \, p_0 \, | < \min \left(\frac{1}{c_s},\, \frac{1}{c_p} \right),$$

donc il existe θ_p et θ_s tels que

$$p_0 = \frac{i}{c_s} \sin \theta_s = \frac{i}{c_p} \sin \theta_p.$$

En injectant ces expressions dans la deuxième équation de (3.48), on obtient

$$y \tan \theta_s + h \tan \theta_p = -x. \tag{3.49}$$

Cette dernière relation traduit le fait qu'un rayon, issu de la source et atteignant la surface libre avec un angle d'incidence θ_p, est réfléchi avec un angle θ_s avant d'atteindre le récepteur en $(x,\, y)$ (figure 3.5). Le rayon considéré vérifie donc les lois de Snell-Descartes : de tous les rayons possibles joignant la source au récepteur après une réflexion, il est celui de temps de parcours minimal. On injecte ensuite (3.49) dans la première équation de (3.48), en remplaçant x par son expression dans (3.49). On obtient alors

$$t_0 = \frac{1}{c_p} \frac{h}{\cos \theta_p} + \frac{1}{c_s} \frac{y}{\cos \theta_s}.$$

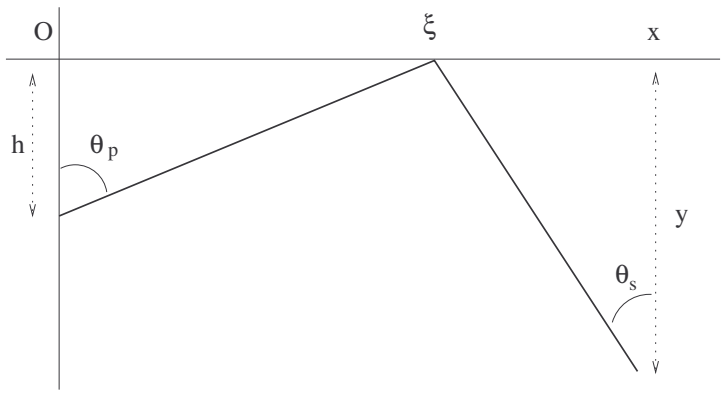


Figure 3.5: Onde P émise et onde SV réfléchie (propriété 3.3).

Des calculs élémentaires montrent alors que t_0 correspond au temps d'arrivée du rayon représenté en figure 3.5. Or, on a montré précédemment que ce rayon était le rayon effectivement suivi par l'onde SV réfléchie (car minimisant le temps d'arrivée), ce qui clôt la démonstration. □

Pour calculer q_0 (ou p_0) solution de $f'(q_0) = 0$ (ou $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p_0, t_0) = 0$), on met en oeuvre une méthode de Newton-Raphson avec bisection [130]. Dans certaines configurations, par exemple x grand devant y, une méthode de Newton plus élémentaire peut diverger. Par ailleurs, seuls les instants $t \geq t_0$ dans (3.2) présentent un intérêt pratique : si $t < t_0$, l'onde SV n'a pas encore atteint le récepteur en (x, y) et le champ obtenu est nul. Pour $t > t_0$, on déduit de la propriété 3.2 que le chemin de Cagniard-de Hoop se décompose en deux branches symétriques par rapport à l'axe imaginaire, de parties réelles respectivement positive et négative : $\Lambda = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

La propriété suivante précise la géométrie du chemin de Cagniard-de Hoop Λ au voisinage de $p_0 = p(t_0)$, i.e. le point du plan complexe où Λ quitte l'axe imaginaire.

Propriété 3.4 *Au voisinage de $p_0 = p(t_0)$, on a*

$$\frac{d\,p}{d\,t} \simeq k(t)\,\frac{1}{\sqrt{t^2 - t_0^2}}, \quad k(t_0) < +\infty$$

$$\text{avec } k(t) = \sqrt{\frac{t + t_0}{2\,\dfrac{y}{c_s^2}\,\dfrac{1}{\left(p_0^2 + \dfrac{1}{c_s^2}\right)^{3/2}} + 2\,\dfrac{h}{c_p^2}\,\dfrac{1}{\left(p_0^2 + \dfrac{1}{c_p^2}\right)^{3/2}}}}. \tag{3.50}$$

Démonstration. Soit $k(p)$ défini par

$$k(p) = \mathcal{F}(p, t) + t.$$

Au voisinage de p_0, un développement de Taylor d'ordre deux de k conduit à

$$k(p) = k(p_0) + (p - p_0)\,k'(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2\,k''(p_0) + \mathcal{O}\,(p - p_0)^3\,.$$

De (3.47), on déduit

$$k(p_0) = t_0, \qquad k^{'}(p_0) = 0,$$

soit

$$t = t_0 + \frac{1}{2}(p - p_0)^2 \, k''(p_0) + \mathcal{O}\left(p - p_0\right)^3 .$$

Cette dernière équation conduit à

$$p(t) = p_0 + \sqrt{\frac{2(t - t_0)}{k^{''}(p_0)}} + \mathcal{O}\left(p - p_0\right)^{3/2}, \tag{3.51}$$

avec

$$k^{''}(p_0) = \frac{y}{c_s^2} \frac{1}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{3/2}} + \frac{h}{c_p^2} \frac{1}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{3/2}} > 0$$

car $p_0 \in]-\frac{i}{c_p}, +\frac{i}{c_p}[$: voir à ce sujet la propriété 3.2. En dérivant (3.51) par rapport à t, il découle

$$\begin{aligned} \frac{d\,p}{d\,t} &\approx \frac{1}{\sqrt{2\,k''(p_0)\,(t - t_0)}} \\ &\approx \sqrt{\frac{t + t_0}{2\,g^{''}(p_0)}} \frac{1}{t^2 - t_0^2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Deux conséquences importantes découlent de la propriété 3.4. D'une part, le chemin de Cagniard-de Hoop Λ quitte l'axe imaginaire perpendiculairement à cet axe (tangente à p_0 réelle). D'autre part, la singularité de $\frac{dp}{dt}$ en t_0 est intégrable, comme celles obtenues avec les onde P directe et réfléchie (3.32).

3.5.3 Détermination du chemin de Cagniard-de Hoop

Il reste à calculer numériquement le chemin $\Lambda = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Pour cela, une approche naturelle consiste à résoudre (3.43) par un algorithme de type Newton. Cependant, la convergence de cette méthode dans le plan complexe n'est pas garantie, surtout au voisinage de l'axe imaginaire, ie pour $t \approx t_0$. Nous avons préféré mettre en oeuvre une autre approche, basée sur la propriété suivante et découlant d'élévations successives au carré et des manipulations algébriques élémentaires sur (3.43).

Propriété 3.5 *Le chemin Λ est inclu dans le chemin $\tilde{\Lambda}$ défini par*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Lambda} = \left\{ p \in \mathbb{C} \,/\, \mathcal{P}(p,\, t) = a\, p^4 + b(t)\, p^3 + c(t)\, p^2 + d(t)\, p + e(t) = 0 \right\}, \\
&a = \left(x^2 + y^2 + h^2\right)^2 - 4\, y^2\, h^2, \\
&b(t) = 4\, i\, t\, x\, \left(x^2 + y^2 + h^2\right), \\
&c(t) = -2 \left(\left(x^2 + y^2 + h^2\right) \left(t^2 - \frac{y^2}{c_s^2} - \frac{h^2}{c_p^2} \right) + 2\, t^2\, x^2 + 2\, y^2\, h^2 \left(\frac{1}{c_p^2} + \frac{1}{c_s^2} \right) \right), \\
&d(t) = -4\, i\, t\, x \left(t^2 - \frac{y^2}{c_s^2} - \frac{h^2}{c_p^2} \right), \\
&e(t) = \left(t^2 - \frac{y^2}{c_s^2} - \frac{h^2}{c_p^2} \right)^2 - \left(\frac{2\, y\, h}{c_p\, c_s} \right)^2 .
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Les solutions de (3.52) satisfont des propriétés analogues à 3.1-(i), (ii), (iii). Aux asymptotes (3.46) s'ajoutent deux asymptotes d'équations

$$
\tilde{p}_\infty^{\pm}(t) = \frac{\pm(y-h) - i\, x}{x^2 + (y-h)^2}\, t. \tag{3.53}
$$

L'avantage de (3.52) est de conduire à une méthode numérique très efficace et robuste : la *méthode de Laguerre*, avec polissage des racines [130]. Cependant, à t fixé, $\mathcal{P}$ est un polynôme du quatrième degré à coefficients complexes. Il possède donc 4 racines : 2 racines qui appartiennent au chemin de Cagniard-de Hoop (3.43), et 2 racines supplémentaires qui ne satisfont pas (3.43) et qu'il convient d'éliminer. La quartique (3.52) ne dépendant pas du signe de h, ces racines supplémentaires correspondent à une source image en $-h$. Pour distinguer ces racines, la méthode la plus directe consiste à vérifier si elles satisfont l'équation d'origine (3.43). Cependant, cette estimation est coûteuse en temps de calcul, et peu précise lorsque les contours Λ et $\tilde{\Lambda}$ sont proches. Nous préférons faire reposer le tri des racines sur la propriété suivante.

Propriété 3.6 *Soit $\tilde{p}^{\pm}$ les racines non-physiques de (3.52). Pour $t \geq t_0$,*

$$
\left| \Im m \left\{ p^{\pm} \right\} \right| \leq \left| \Im m \left\{ \tilde{p}^{\pm} \right\} \right|. \tag{3.54}
$$

L'égalité est atteinte uniquement en $x = 0$, cas déjà analysé en propriété 3.2.

Cette propriété n'a pas été démontrée mais est vérifiée numériquement dans tous les cas examinés. Pour l'étayer, on note aussi qu'elle est satisfaite par les asymptotes (3.46) et (3.53) :

$$
\left| \Im \mathrm{m} \left\{ p_\infty^{\pm} \right\} \right| = \frac{|x|}{x^2 + (y+h)^2}\, t \leq \left| \Im \mathrm{m} \left\{ \tilde{p}_\infty^{\pm} \right\} \right| = \frac{|x|}{x^2 + (y-h)^2}\, t.
$$

En figure 3.6, on représente en rouge et bleu les chemins Λ et $\tilde{\Lambda}$ dans le plan complexe, après résolution numérique de (3.52) et tri (3.54). Les paramètres physiques sont les mêmes qu'en

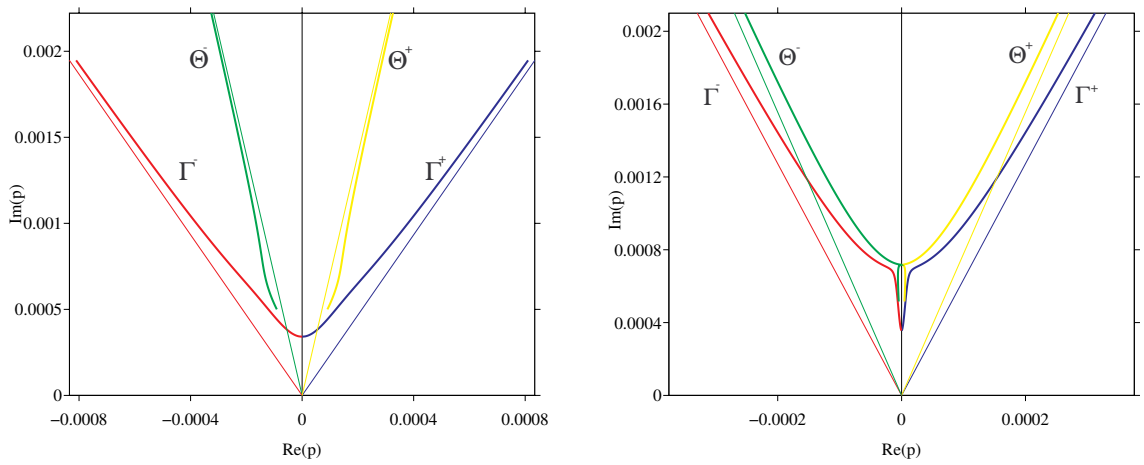


Figure 3.6: Onde SV réfléchie : chemin de Cagniard-de Hoop $\Lambda = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, chemin fictif $\tilde{\Lambda} = \Theta^+ \cup \Theta^-$ découlant de (3.52), et asymptotes associées. Les paramètres sont : $x \neq 0$, $t > t_0$, $y = 20$ m (a), $y = 1$ m (b).

figure 3.4, avec $t > t_0$. Les asymptotes découlent de la propriété 3.1-(iii) et de (3.53). En (a) et (b), le récepteur est respectivement profondément enfoui ($y = 20$ m) et superficiel ($y = 1$ m). Dans ce dernier cas, il devient évident que le chemin de Cagniard-de Hoop n'est pas constitué de branches d'hyperboles, contrairement aux chemins des ondes P directe et réfléchie.

Notons, pour conclure, que deux zones du plan nécessitent un traitement particulier pour la détermination numérique de Λ. D'une part, au voisinage de la source $x = 0$, $y = h$, la quartique (3.52) dégénère en équation du second degré dont les coefficients sont de signe fixe si $t \geq t_0$:

$$
\begin{aligned}
& c(t)\, p^2 + e(t) = 0, \\
& c(t) = -4\, h^2\, t^2 < 0, \\
& e(t) = \left(t^2 - h^2 \left(\frac{1}{c_p^2} + \frac{1}{c_s^2} \right)^2 \right) \left(t^2 - h^2 \left(\frac{1}{c_p^2} - \frac{1}{c_s^2} \right)^2 \right) > 0,
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

et dont la solution est connue explicitement. D'autre part, au voisinage de la surface libre $y \to 0$, Λ et $\tilde{\Lambda}$ tendent à se superposer, comme observé en figure 3.6-(b). La détermination numérique de racines multiples étant peu précise, on met alors en oeuvre une méthode de perturbation [172], que l'on expose ici à l'ordre 1 : des développements d'ordre plus élevé sont évidemment possibles.

Lemme 3.2 *Au voisinage de la surface libre et pour $t \geq t_0$, les solutions de (3.43) s'écrivent*

$$
\begin{aligned}
& p(t) = p_0(t) + y\, p_1(t) + \mathcal{O}(y^2), \\
& p_0 = -i\,\frac{t}{r}\,\cos\theta \pm \frac{|\sin\theta|}{r}\,\sqrt{t^2 - t_0^2}, \\
& p_1 = -p_0 \left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} \left(t - \frac{h}{c_p^2}\,\frac{1}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}} \right).
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

Démonstration. On injecte le développement de perturbations dans (3.43), d'où

$$
t = y \underbrace{\left((p_0 + y\,p_1)^2 + \frac{1}{c_s^2} \right)^{1/2}}_{\Delta_1} + h \underbrace{\left((p_0 + y\,p_1)^2 + \frac{1}{c_p^2} \right)^{1/2}}_{\Delta_2} + i\,(p_0 + y\,p_1)\; x.
$$

Un développement de Taylor d'ordre un donne

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} + y\,\frac{p_0\,p_1}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}} + \mathcal{O}(y^2), \\
\Delta_2 &= \left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} + y\,\frac{p_0\,p_1}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}} + \mathcal{O}(y^2).
\end{aligned}
$$

On injecte Δ_1 et Δ_2 dans l'expression de t, et on identifie les termes d'ordre 0 et 1 en y :

$$
\begin{cases}
t = h \left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2} + i\,p_0\,x, \\
\left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} + h\,\frac{p_0\,p_1}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}} + i\,p_1\,x = 0.
\end{cases}
\tag{3.57}
$$

La première équation de (3.57) revient à l'équation du chemin pour l'onde P réfléchie (3.25), dont la solution pour $t \geq t_0$ est donnée explicitement en (3.28). Quelques manipulations algébriques sur la deuxième équation de (3.57) conduisent à l'expression de p_1 dans (3.56). □

3.5.4 Composantes du champ

Une fois le chemin de Cagniard-de Hoop déterminé, on suit une procédure analogue à celle exposée en section 3.4. Les techniques classiques de déformation de contour dans le plan complexe

permettent de remplacer la transformée de Fourier inverse de (3.41) par une transformée de Laplace directe, et donc de résoudre le problème posé :

$$
\begin{aligned}
G(x,\, y,\, t) &= \left(\tilde{G} * f''\right)(x,\, y,\, t), \\
\tilde{G}(r,\, t) &= \frac{1}{\pi}\, Y\left(p^{+}(t)\right) \frac{d\,p}{d\,t}\, H\left(t - t_0\right),
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

avec les composantes Y^{RS} déduites de (3.14)

$$
\begin{aligned}
Y_{v_1^{RS}} &= \Re\mathrm{e}\left\{ -\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}\; B(p,\, s)\right\}, \\
Y_{v_2^{RS}} &= \Im\mathrm{m}\left\{-p\, B(p,\, s)\right\}, \\
Y_{\sigma_{11}^{RS}} &= \Im\mathrm{m}\left\{-2\,\rho\, c_s^2\, p\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}\; B(p,\, s)\right\}, \\
Y_{\sigma_{12}^{RS}} &= \Re\mathrm{e}\left\{\rho\, c_s^2\left(2\,p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)\; B(p,\, s)\right\}, \\
Y_{\sigma_{22}^{RS}} &= -Y_{\sigma_{11}^{RS}},
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

et $B(p,\, s)$ déduit de (3.18)

$$
B(p,\, s) = \frac{2\, i\, p\left(2\,p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)}{4\,p^2\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2} - \left(2\,p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^2}.
\tag{3.60}
$$

La principale différence avec le cas de l'onde P réfléchie provient du fait que, dans (3.58), $\frac{dp}{dt}$ n'est pas connue explicitement en fonction de t. Le théorème des fonctions implicites appliqué à (3.43) donne

$$
\frac{d\,p}{d\,t} = \frac{1}{y\,\dfrac{p}{\left(p^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}} + h\,\dfrac{p}{\left(p^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}} + i\,x},
\tag{3.61}
$$

ce qui permet l'évaluation numérique de cette quantité. Grâce à la propriété 3.4, on sait que $\frac{dp}{dt}$ est singulière en $1\sqrt{t^2 - t_0^2}$. Lors des convolutions numériques, il convient donc de traiter convenablement cette singularité. Pour cela, on définit un intervalle $[t_0,\, t_0 + \varepsilon]$ sur lequel (3.61) est remplacée par l'expression approchée (3.50) puis régularisée analytiquement grâce à un changement de variable classique, comme en section 3.4.3. Si on utilise le contour perturbé (3.56), $\frac{dp_0}{dt}$

et $\frac{dp_1}{dt}$ sont alors connus explicitement comme dans (3.32) :
(3.62)

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}}{\sqrt{t^2 - t_0^2}},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \left(-\frac{1}{K} \frac{2\,p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}} + \frac{1}{K^2}\,\frac{h}{c_p^2}\,\frac{p_0^2 \left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2}}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{3/2}} \right) \frac{dp_0}{dt} + \frac{1}{K^2}\,p_0 \left(p_0^2 + \frac{1}{c_s^2}\right)^{1/2},$$

$$K(p_0(t),\,t) = t - \frac{h}{c_p^2}\,\frac{1}{\left(p_0^2 + \frac{1}{c_p^2}\right)^{1/2}},$$

ce qui rend possible une régularisation globale via le changement de variable idoine.

3.6 Conclusion

Bilan. La méthode de Cagniard-de Hoop est actuellement largement connue et utilisée [47]. Néanmoins, sa mise en oeuvre pratique reste difficile, et l'analyse de certains de ses aspects - nature des singularités, recherche de racines dans le plan complexe - nécessite encore des efforts. Ceci est d'autant plus vrai que l'objectif visé est celui d'une haute précision, par exemple pour qualifier des méthodes numériques. C'est tout l'objet de ce chapitre, dans une configuration issue de la sismologie.

Perspectives. L'analyse et l'implémentation d'autres configurations dans des codes de calcul reste d'actualité. Par rapport à ce qui a été présenté au cours de ce chapitre, la principale nouveauté concerne les intégrales de branche associées aux ondes de tête : voir par exemple le cas de l'interface fluide-solide [46].

De façon générale, la méthode de Cagniard-de Hoop est appliquée dans le cas de paramètres physiques constants par morceaux. Le cas de paramètres physiques variant continûment selon une direction d'espace peut aussi être abordé, au prix cependant d'un temps de calcul important. Voir à ce sujet le stage de master de Nicolas Malleron [Cn6] (section 9.2.1 et 9.3.2), où le cas simple d'un point source dans un fluide homogène de paramètres variables est étudié dans le domaine temporel.

Part II

Ondes et contact

Chapter 3

Contacts linéaires

Travail réalisé avec Joël Piraux et Jean Virieux
Production associée : articles [A5, A7]

3.1 Introduction

Les contacts entre milieux solides sont généralement des zones complexe, présentant des gradients de propriété et des hétérogénéités. Citons l'exemple des soudures et des collages dans le contexte industriel, ou celui des fractures en géosciences. Si l'épaisseur de la zone de contact est petite devant les longueurs d'onde propagées, on peut remplacer cette zone par une interface d'épaisseur nulle et par un ensemble de conditions décrivant les propriétés moyennes du contact. Plusieurs jeux de conditions de saut et de conditions aux limites existent, décrivant différentes situations physiques. Le couplage des équations d'évolution et des conditions d'interface doit évidemment constituer un problème bien posé [158].

On s'intéresse ici aux lois de contact linéaires, largement utilisées en élastodynamique. Malgré leur simplicité, la modélisation numérique de ces conditions d'interface est un problème souvent mal résolu. Schématiquement, deux stratégies existent. La première consiste à adapter le maillage aux interfaces. Les conditions de contact sont alors généralement prises en compte de façon faible, via une formulation variationnelles [28, 93, 14, 5].

La deuxième stratégie, beaucoup moins coûteuse informatiquement, consiste à imposer de façon forte les conditions d'interface sur une grille cartésienne. Pour cela, certaines méthodes ajustent les paramètres physiques [90, 168, 123]. Ainsi, la méthode du *vacuum* décrit les conditions de surface libre en considérant des coefficients de Lamé nuls et une masse volumique très petite dans les noeuds de calcul adjacents à l'interface [175, 60, 119, 58]. Une autre approche sur grille cartésienne consiste à modifier explicitement le schéma [90], comme proposé par exemple dans la *méthode des images* [99, 83, 139, 177]. Les résultats obtenues sont corrects lorsque l'interface est plane et parallèle à une direction du maillage. Dans le cas contraire, des

instabilités peuvent apparaître [21]. Pour éviter des diffractions parasites, il est aussi nécessaire de diminuer fortement le pas de discrétisation au voisinage de l'interface, ce qui est difficile et coûteux [156, 160, 140].

Les *méthodes de domaines fictifs* avec multiplicateurs de Lagrange constituent une approche intéressante pour concilier l'efficacité d'une grille de calcul cartésienne et une description géométrique précise des contacts. Le cadre de travail variationnel conduit de plus à des estimations a priori d'erreurs et à des conditions de stabilité [12]. A notre connaissance, cette approche n'est cependant possible que pour la prise en compte de conditions aux limites, qu'elles soient linéaires [166, 141] ou non linéaires [148]. En particulier, les conditions de saut modélisant le glissement sans frottement ou les contacts imparfaits nécessitent d'autres approches.

Dans [A5, A7], nous avons adapté une *méthode d'interface immergée*, proche de l'esprit des méthodes de domaines fictifs. Un schéma de différences finies d'ordre élevé est utilisé en tout point, et modifié localement pour incorporer de façon forte les conditions aux interfaces et la géométrie de ces dernières. Dans ce qui suit, nous présentons tout d'abord les différentes lois de contact utilisées, dans le cas d'un solide élastique 2D. Nous expliquons ensuite comment insérer ces lois dans un schéma numérique. Enfin, nous proposons des exemples de simulation numérique et de comparaisons avec des solutions analytiques.

3.2 Modélisation physique

3.2.1 Configuration

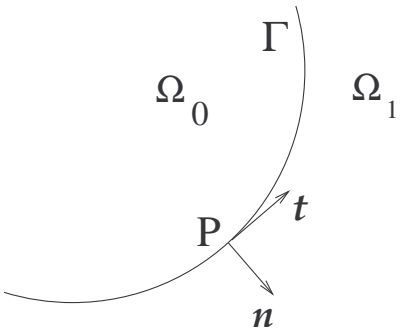


Figure 3.1: Interface Γ entre deux milieux Ω_0 et Ω_1.

Soit deux solides élastiques isotropes bidimensionnels Ω_0 et Ω_1 séparés par une interface Γ (figure 3.1), décrite par une représentation paramétrique $(x(\tau), y(\tau))$. Les vecteurs unitaires tangentiel $\boldsymbol{t}$ et normal $\boldsymbol{n}$ à Γ sont

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

avec $x' = \frac{dx}{d\tau}$ et $y' = \frac{dy}{d\tau}$. On suppose que $x'(\tau)$ et $y'(\tau)$ sont continus et dérivables le long de Γ autant de fois que nécessaire. Les projections, normalement et tangentiellement à l'interface, du

déplacement élastique $\boldsymbol{u}$, de la vitesse élastique $\boldsymbol{v}$, et de la contrainte normale $\boldsymbol{\sigma.n}$, sont notées

$$\left|\begin{array}{l} u_N = \boldsymbol{u.n}, \\ u_T = \boldsymbol{u.t}, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} v_N = \boldsymbol{v.n}, \\ v_T = \boldsymbol{v.t}, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_N = (\boldsymbol{\sigma.n}).\boldsymbol{n}, \\ \sigma_T = (\boldsymbol{\sigma.n}).\boldsymbol{t}. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Soit P un point de Γ (figure 3.1), omis dans les notations qui suivent pour la clarté de l'exposé. Pour toute fonction $f(x,\, y,\, t)$, on note la trace de f en P du côté Ω_l

$$f_l = \lim_{M \to P, M \in \Omega_l} f(M,\, t), \tag{3.3}$$

avec $l = 0, 1$. Le saut de f en P à travers Γ, de Ω_0 à Ω_1, est noté

$$[f] = f_1 - f_0. \tag{3.4}$$

3.2.2 Equations d'évolution

L'équation de conservation de la quantité de mouvement et la loi de comportement de l'élasticité linéaire s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\, \dfrac{\partial\, \boldsymbol{v}}{\partial\, t} = \boldsymbol{\nabla.\sigma}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \end{array}\right. \tag{3.5}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations et $\boldsymbol{C}$ est le tenseur d'élasticité. Pour un milieu isotrope 2D de coefficients de Lamé λ et μ, on a

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\,\mu & 0 & \lambda \\ 0 & 2\,\mu & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda + 2\,\mu \end{pmatrix}.$$

Après quelques manipulations élémentaires, on obtient le système de 5 équations aux dérivées partielles

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, t} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\, \sigma_{11}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, y}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, t} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, \sigma_{22}}{\partial\, y}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\, \sigma_{11}}{\partial\, t} - (\lambda + 2\,\mu)\, \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x} - \lambda\, \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, y} = 0, \\ \dfrac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, t} - \mu\left(\dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, y} + \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\, \sigma_{22}}{\partial\, t} - \lambda\, \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x} - (\lambda + 2\,\mu)\, \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, y} = 0, \end{array}\right. \tag{3.6}$$

où $v_1 = \frac{\partial\, u_1}{\partial\, t}$ et $v_2 = \frac{\partial\, u_2}{\partial\, t}$ sont les composantes de la vitesse élastique, et σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} sont les composantes indépendantes du tenseur des contraintes. En posant

$$\boldsymbol{U} = (v_1,\, v_2,\, \sigma_{11},\, \sigma_{12},\, \sigma_{22})^T,$$

on peut écrire (3.6) sous forme d'un système du premier ordre en temps et en espace

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}, \tag{3.7}$$

où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des matrices 5×5. Les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont réelles : $\pm c_p = \pm\sqrt{(\lambda + 2\,\mu)/\rho}$, $\pm c_s = \pm\sqrt{\mu/\rho}$, et 0, où c_p et c_s sont les vitesses de propagation des ondes de compression (P) et de cisaillement (S).

3.2.3 Conditions d'interfaces

Les conditions de surface libre, ou conditions de *Dirichlet*, constituent l'exemple le plus simple de loi de contact. Au sens strict, il n'y a même plus de contact, puisqu'un des deux milieux est remplacé par du vide, par exemple Ω_1. Les contraintes à l'interface sont alors nulles, d'où les conditions aux limites

$$\sigma_{N0} = 0, \qquad \sigma_{T0} = 0. \tag{3.8}$$

Cette approche est justifiée lorsque la masse volumique d'un des milieux est très grande devant celle de l'autre milieu, typiquement un solide et de l'air. On modélise ainsi la diffraction d'ondes élastiques par des fissures [166], des cavités sous-terraines [58], ou des topographies du sol [139]. La modélisation numérique de (3.8) constitue l'argument de [A7].

Les conditions de *contact soudé* décrivent deux solides parfaitement reliés l'un à l'autre. Les conditions de saut exprimant la continuité des efforts et des déplacements normaux et tangentiels à l'interface s'écrivent

$$[u_N] = 0, \quad [u_T] = 0, \quad [\sigma_N] = 0, \quad [\sigma_T] = 0. \tag{3.9}$$

Ce cas a été traité en détail dans [T1], où le lecteur intéressé trouvera des exemples numériques.

Les conditions de *glissement sans frottement* décrivent une fine couche de lubrifiant entre deux solides. Les efforts et déplacements normaux à l'interface sont continus, et les contraintes tangentielles sont nulles, soit deux conditions de saut et deux conditions aux limites

$$[u_N] = 0, \quad [\sigma_N] = 0, \quad \sigma_{T0} = 0, \quad \sigma_{T1} = 0. \tag{3.10}$$

La modélisation numérique des conditions (3.10) est incorporée dans nos codes de calcul mais n'a pas été décrite dans une publication.

Enfin, les conditions de *masse-ressort* autorisent des discontinuités de contrainte et de déplacements à l'interface, modélisant ainsi des contacts imparfaits. Considérons quatre paramètres positifs, éventuellement variables le long de Γ : K_N, K_T, M_N et M_T, respectivement appelés raideur normale, raideur tangentielle, masse normale et masse tangentielle. Nous écrivons

$$\begin{aligned} [u_N] &= \frac{1}{K_N}\,\sigma_{N0}, \quad [u_T] = \frac{1}{K_T}\,\sigma_{T0}, \\ [\sigma_N] &= M_N\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}u_{N1}, \quad [\sigma_T] = M_T\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2}u_{T1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dans la littérature, on trouve des conditions de saut très voisines,

$$
\begin{aligned}
&[u_N] = \frac{1}{K_N}\,\sigma_{N0}, \quad [u_T] = \frac{1}{K_T}\,\sigma_{T0},\\
&[\sigma_N] = M_N\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} u_{N0}, \quad [\sigma_T] = M_T\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} u_{T0},
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

différant uniquement sur le côté où sont estimées les traces : nous reviendrons sur cet aspect plus loin. Les conditions (3.12), originellement heuristiques, sont largement utilisées en contrôle non-destructif pour décrire des collages [88, 159, 150, 169], et en géosciences pour modéliser des fractures [132, 63, 38, 9, 73]. Plusieurs analyses ont été proposées pour justifier les conditions de masse-ressort dans une configuration académique : un milieu tricouche, le milieu intermédiaire d'épaisseur $\overline{h}$ étant supposé élastique isotrope, de masse volumique $\overline{\rho}$ et de coefficients de Lamé $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$. Si $\overline{h}$ est très petite devant les tailles caractéristiques du domaine étudié, une analyse en régime quasi-statique [7, 98] conduit à

$$
K_N = \frac{\overline{\lambda} + 2\,\overline{\mu}}{\overline{h}}, \qquad K_T = \frac{\overline{\mu}}{\overline{h}}, \quad M_N = 0, \quad M_T = 0.
\tag{3.13}
$$

Une démonstration rigoureuse de (3.12)-(3.13) a récemment été proposée en régime dynamique, en supposant $\overline{\rho}$ petite devant les masses volumiques de Ω_0 et Ω_1 [104]. Enfin, une troisième famille de démonstrations repose sur le calcul analytique du champ diffracté par le milieu tricouche, pour une onde plane harmonique incidente [142]. Si les longueurs d'onde sont grandes devant $\overline{h}$, on retrouve les raideurs dans (3.13), $M_N = \overline{\rho}\,\overline{h}$, et M_T dépendant de M_N et de l'angle d'incidence de l'onde plane.

L'intérêt des conditions de masse-ressort (3.11) ou (3.12) est de décrire, de façon simple, tout un continuum de degrés de contact compris entre les trois cas-limites suivants

- $K_N \to +\infty$, $K_T \to +\infty$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$: contact soudé (3.9) ;
- $K_N \to +\infty$, $K_T \to 0$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$: glissement sans frottement (3.10) ;
- $K_N \to 0$, $K_T \to 0$, $M_N = 0$ et $M_T = 0$: conditions de Dirichlet (3.8).

De façon générale, les termes inertiels sont souvent négligés : $M_N = 0$ et $M_T = 0$, les conditions (3.11) et (3.12) étant alors identiques. Dans le cas contraire, on note tout d'abord que les conditions (3.12) ne sont pas symétriques et induisent une direction spatiale privilégiée. Pour expliciter ce point, considérons un milieu 1D, avec une onde incidente dont le support appartient à Ω_0, et qui se propage vers la droite (voir par exemple la figure 2.6). On sait calculer analytiquement les ondes réfléchies et transmises (annexe B de [A2]). Considérons ensuite une onde incidente dans Ω_1, se propageant vers la gauche, et interchangeons les paramètres des milieux. On s'attend à ce que les ondes diffractées soient les mêmes que dans le premier cas. Or, les ondes transmises dans les deux cas diffèrent. En annexeA de [A5], on analyse et on borne cette différence.

Par ailleurs, les équations de l'élastodynamique et les conditions de masse-ressort ne mettent en jeu aucun mécanisme de dissipation d'énergie. Or, si $M_N \neq 0$ ou $M_T \neq 0$ et que les conditions (3.12) sont utilisées, alors nous n'avons pas réussi à démontrer la conservation d'une énergie

mécanique (ce qui ne veut pas dire qu'une telle loi de conservation n'existe pas !). Contrairement à l'usage habituel - en particulier le nôtre dans [A5] -, nous préférons donc maintenant utiliser les conditions (3.11), pour lesquelles nous montrons un résultat de conservation d'énergie.

Lemme 3.1 *Soit $\boldsymbol{U}$ solution de (3.7) et satisfaisant les conditions de saut (3.11). On pose*

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + 2\,\mu}{4\,\mu\,(\lambda+\mu)}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\lambda}{4\,\mu\,(\lambda+\mu)},$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\rho\,\boldsymbol{v}^2 + \alpha_1\left(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2\right) + \alpha_2\,\sigma_{11}\,\sigma_{22} + \frac{1}{\mu}\,\sigma_{12}^2\right)\,d\Omega, \tag{3.14}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{1}{K_N}\,\sigma_{N1}^2 + \frac{1}{K_T}\,\sigma_{T1}^2 + M_N\,v_{N0}^2 + M_T\,v_{T0}^2\right)\,d\Gamma.$$

En l'absence de termes sources, $E = E_1 + E_2$ satisfait

$$\frac{d\,E}{d\,t} = 0, \qquad E(\boldsymbol{U},\,t) \geq 0, \qquad E(\boldsymbol{U},\,t) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U} = 0.$$

Démonstration. On multiplie la première équation de (3.5) par $\boldsymbol{v}$, puis on intègre par parties sur Ω_0 :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_0} \rho\,\boldsymbol{v}\,\frac{\partial\,\boldsymbol{v}}{\partial\,t}\,d\Omega &= \int_{\Omega_0} \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega,\\ &= \int_\Gamma \boldsymbol{v}_0.\boldsymbol{\sigma}_0.\boldsymbol{n}\,d\Gamma - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\sigma}\,d\Omega,\\ &= \int_\Gamma \boldsymbol{v}_0.\boldsymbol{\sigma}_0.\boldsymbol{n}\,d\Gamma - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,d\Omega.\end{aligned}$$

Des calculs similaires sur Ω_1 conduisent à

$$\int_{\Omega_1} \rho\,\boldsymbol{v}\,\frac{\partial\,\boldsymbol{v}}{\partial\,t}\,d\Omega = -\int_\Gamma \boldsymbol{v}_1.\boldsymbol{\sigma}_1.\boldsymbol{n}\,d\Gamma - \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,d\Omega.$$

En sommant les deux équations précédentes, on obtient $\delta_1 + \delta_2 = 0$, avec

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \int_\Omega \left(\rho\,\boldsymbol{v}\,\frac{\partial\,\boldsymbol{v}}{\partial\,t} + \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\right)\,d\Omega,\\ &= \frac{d}{d\,t}\,\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\rho\,\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\right)\,d\Omega,\\ &= \frac{d}{d\,t}\,\underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\rho\,\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\right)\,d\Omega}_{E_1},\end{aligned}$$

et, à partir des notations (3.2) et des conditions de saut (3.11),

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_\Gamma [\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}]\, d\Gamma, \\
&= \int_\Gamma [v_N\, \sigma_N + v_T\, \sigma_T]\, d\Gamma, \\
&= \int_\Gamma \left(v_{N1}[\sigma_N] + v_{T1}[\sigma_T] + \sigma_{N0}[v_N] + \sigma_{T0}[v_T]\right)\, d\Gamma, \\
&= \int_\Gamma \left(M_N\, v_{N1} \frac{\partial\, v_{N1}}{\partial\, t} + M_T\, v_{T1} \frac{\partial\, v_{T1}}{\partial\, t} + \frac{1}{K_N}\, \sigma_{N0}\, \frac{\partial\, \sigma_{N0}}{\partial\, t} + \frac{1}{K_T}\, \sigma_{T0}\, \frac{\partial\, \sigma_{T0}}{\partial\, t} \right)\, d\Gamma, \\
&= \underbrace{\frac{d}{dt}\, \frac{1}{2} \int_\Gamma \left(M_N\, v_{N1}^2 + M_T\, v_{T1}^2 + \frac{1}{K_N}\, \sigma_{N0}^2 + \frac{1}{K_T}\, \sigma_{T0}^2 \right)^2 d\Gamma}_{E_2}.
\end{aligned}$$

La quantité $E = E_1 + E_2$ satisfait donc $dE/dt = 0$. Les propriétés de positivité du tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}$ assurent que E_1 est une forme quadratique définie positive. Il en est de même de façon évidente pour E_2. □

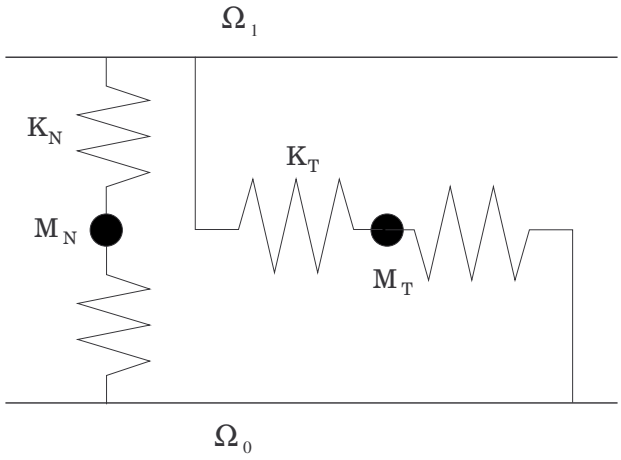


Figure 3.2: Modèle rhéologique décrivant les conditions de masse-ressort (3.12).

Le lemme 3.1 montre que (3.14) est une énergie, somme de deux contributions. L'intégrale sur Ω est l'énergie mécanique des ondes élastiques. L'intégrale le long de Γ est l'énergie mécanique de déformation élastique de l'interface. On reconnait des termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de systèmes masse-ressort normal et tangentiel à l'interface (figure 3.2).

Les simulations présentées en section 3.4 sont réalisées avec les nouvelles conditions (3.11). En pratique, on n'observe pas de différence notable suivant le type de loi utilisée, pour deux raisons. D'une part, pour des valeurs réalistes des paramètres physiques, l'influence des termes inertiels est petite devant celle des termes de raideur. D'autre part, l'asymétrie des conditions de masse-ressort est un effet du deuxième ordre : voir à ce sujet l'annexe A de [A5].

Pour conclure sur les conditions de masse-ressort, rappelons qu'elles ne sont justifiées que pour de très faibles amplitudes des ondes incidentes. Deux principales limitations sont associées au caractère linéaire de (3.11) ou (3.12) :

- aucun mécanisme n'empêche $[u_N] < 0$. Pour éviter cette interpénétration des milieux, une loi de contact non linéaire en compression est nécessaire. L'analyse théorique et la modélisation numérique de telles lois fait l'objet du chapitre 4 ;
- les réponses mécaniques normale et tangentielle à l'interface sont découplées. Or, en pratique, la raideur tangentielle est d'autant plus grande que la contrainte normale est importante (frottement de Coulomb). Là encore, des lois de contact non linéaires sont requises pour améliorer le réalisme de la modélisation.

3.3 Méthode d'interface immergée

3.3.1 Conditions d'interface d'ordre élevé

Pour discrétiser les lois de contact, on commence par déterminer les conditions d'interface satisfaites par les dérivées spatiales successives de la solution $\boldsymbol{U}$ jusqu'à un ordre k, notées

$$\boldsymbol{U}_i^k = \lim_{M\to P,\, M\in\Omega_i} \left(\boldsymbol{U}^T, ..., \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha-\beta}\,\partial y^\beta}\boldsymbol{U}^T, ..., \frac{\partial^k}{\partial y^k}\boldsymbol{U}^T \right)^T, \tag{3.15}$$

avec $\alpha = 0, ..., k$ et $\beta = 0, ..., \alpha$. Le vecteur $\boldsymbol{U}_i^k$ possède $5(k+1)\,(k+2)/2$ composantes. Les lois de contact (3.8)-(3.11) s'écrivent alors de façon matricielle

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}_1^0\,\boldsymbol{U}_1^0 + \boldsymbol{D}_1^0\,\boldsymbol{U}_1^1 = \boldsymbol{C}_0^0\,\boldsymbol{U}_0^0 + \boldsymbol{D}_0^0\,\boldsymbol{U}_0^1, \\ &\boldsymbol{L}_1^0\,\boldsymbol{U}_1^0 = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{L}_0^0\,\boldsymbol{U}_0^0 = \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

avec les matrices de conditions de saut $\boldsymbol{C}_i^0$, les matrices de conditions aux limites $\boldsymbol{L}_i^0$, et les matrices de conditions de masse-ressort $\boldsymbol{D}_i^0$.

On illustre la dérivation des conditions d'interface dans le cas des conditions de glissement sans frottement (3.10). De (3.1) et (3.2), on déduit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_0^0(\tau) = \boldsymbol{C}_1^0(\tau) &= \begin{pmatrix} -y' & x' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y'^2 & -2\,x'y' & x'^2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{L}_0^0(\tau) = \boldsymbol{L}_1^0(\tau) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x'y' & x'^2 - y'^2 & x'y' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pour obtenir les conditions satisfaites par les traces des dérivées premières de $\boldsymbol{U}$, on dérive (3.16) par rapport à t. Les dérivées temporelles sont remplacées par des dérivées spatiales grâce à la loi de conservation (3.7). Par exemple, la condition aux limites $\boldsymbol{L}_1^0\,\boldsymbol{U}_1^0 = \boldsymbol{0}$ conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,(\boldsymbol{L}_1^0\,\boldsymbol{U}_1^0), &= \boldsymbol{L}_1^0\,\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{U}_1^0 = \boldsymbol{0}, \\ &= -\boldsymbol{L}_1^0\,\boldsymbol{A}_1\,\frac{\partial}{\partial x}\,\boldsymbol{U}_1^0 - \boldsymbol{L}_1^0\,\boldsymbol{B}_1\,\frac{\partial}{\partial y}\,\boldsymbol{U}_1^0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

où $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{B}_1$ sont les matrices de paramètres physiques en Ω_1. On dérive aussi (3.16) par rapport au paramètre de l'interface τ, sachant que $\boldsymbol{U}_i^0$ est une fonction composée de $x(\tau)$ et $y(\tau)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,\tau}\left(\boldsymbol{L}_1^0\,\boldsymbol{U}_1^0\right) &= \left(\frac{d}{d\,\tau}\,\boldsymbol{L}_1^0\right)\boldsymbol{U}_1^0 + \boldsymbol{L}_1^0\,\frac{\partial}{\partial\,\tau}\,\boldsymbol{U}_1^0 = \boldsymbol{0}, \\ &= \left(\frac{d}{d\,\tau}\,\boldsymbol{L}_1^0\right)\boldsymbol{U}_1^0 + \boldsymbol{L}_1^0\left(x^{'}\frac{\partial}{\partial\,x}\,\boldsymbol{U}_1^0 + y^{'}\frac{\partial}{\partial\,y}\,\boldsymbol{U}_1^0\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les équations matricielles (3.18) et (3.19) permettent de contruire une matrice $\boldsymbol{L}_1^1$ dépendant de τ et des paramètres physiques en Ω_1, telle que $\boldsymbol{L}_1^1\,\boldsymbol{U}_1^1 = \boldsymbol{0}$: on a ainsi obtenu des conditions d'ordre 1. En itérant ce processus k fois, on déduit de (3.16) les conditions d'ordre k

$$\boldsymbol{C}_1^k\,\boldsymbol{U}_1^k = \boldsymbol{C}_0^k\,\boldsymbol{U}_0^k, \qquad \boldsymbol{L}_i^k\,\boldsymbol{U}_i^k = \boldsymbol{0}, \qquad i = 0, 1. \tag{3.20}$$

La construction des matrices $\boldsymbol{C}_i^k$ et $\boldsymbol{L}_i^k$ est fastidieuse et source d'erreurs dès que $k \geq 2$. La mise en oeuvre d'outils de calcul formel est bien adaptée à cette tâche. Par ailleurs, on note que les dérivées spatiales successives de $x^{'}$ et $y^{'}$ interviennent dans les matrices de conditions d'ordre k. Ces matrices incorporent donc des renseignements sur la courbure de Γ en P, ainsi que sur ses dérivées.

3.3.2 Conditions de compatibilité

Les systèmes sous-déterminés (3.20) sont destinés à être résolus : on va chercher à exprimer $\boldsymbol{U}_1^k$ en fonction de $\boldsymbol{U}_0^k$, et inversement. Pour réduire le nombre d'inconnues de ces sytèmes, on tire profit de *conditions de compatibilité* qui relient entre elles certaines des dérivées spatiales de la solution, en tout point des domaines. Dans un solide élastique isotrope, ces conditions - aussi appelées *conditions de Barré de Saint Venant* - s'écrivent en 2D

$$\frac{\partial^2\,\sigma_{12}}{\partial\,x\,\partial\,y} = \alpha_2\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,x^2} + \alpha_1\,\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,x^2} + \alpha_1\,\frac{\partial^2\,\sigma_{11}}{\partial\,y^2} + \alpha_2\,\frac{\partial^2\,\sigma_{22}}{\partial\,y^2}, \tag{3.21}$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + 2\,\mu}{4\,(\lambda + \mu)}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\lambda}{4\,(\lambda + \mu)}.$$

L'équation (3.21) constitue une condition nécessaire et suffisante de symétrie du tenseur des contraintes. On peut dériver (3.21) autant de fois que nécessaire en fonction de x et y, soit pour $n = 2, \ldots, k$ et $i = 0, \ldots, n-2$,

$$\frac{\partial^n\,\sigma_{12}}{\partial\,x^{n-i-1}\,\partial\,y^{i+1}} = \alpha_2\,\frac{\partial^n\,\sigma_{11}}{\partial\,x^{n-i}\,\partial\,y^i} + \alpha_1\,\frac{\partial^n\,\sigma_{22}}{\partial\,x^{n-i}\,\partial\,y^i} + \alpha_1\,\frac{\partial^n\,\sigma_{11}}{\partial\,x^{n-i-2}\,\partial\,y^{i+2}} + \alpha_2\,\frac{\partial^n\,\sigma_{22}}{\partial\,x^{n-i-2}\,\partial\,y^{i+2}} = 0. \tag{3.22}$$

De (3.22), il découle que la trace de $\boldsymbol{U}_i^k$ peut s'exprimer en fonction d'un nombre réduit de composantes indépendantes $\boldsymbol{V}_i^k$

$$\boldsymbol{U}_i^k = \boldsymbol{G}_i^k\,\boldsymbol{V}_i^k, \qquad i = 0,\, 1. \tag{3.23}$$

Un algorithme pour construire $\boldsymbol{G}_i^k$ est donné dans [A5].

3.3.3 Résolution des conditions d'interface

Les conditions aux limites dans (3.20) et les conditions de compatibilité (3.23) conduisent aux systèmes sous-déterminés

$$\boldsymbol{L}_i^k \, \boldsymbol{G}_i^k \, \boldsymbol{V}_i^k = \boldsymbol{0}, \quad i = 0,\, 1, \tag{3.24}$$

soit

$$\boldsymbol{V}_i^k = \boldsymbol{K}_i^k \, \boldsymbol{W}_i^k, \quad i = 0,\, 1, \tag{3.25}$$

où $\boldsymbol{K}_i^k$ est la matrice construite à partir du noyau de $\boldsymbol{L}_i^k \, \boldsymbol{G}_i^k$. La solution $\boldsymbol{W}_i^k$ est l'ensemble minimal des composantes indépendantes de la trace de $\boldsymbol{U}$ et de ses dérivées spatiales jusqu'à l'ordre k, du côté Ω_i. En injectant (3.25) dans les conditions de saut de (3.20), on obtient

$$\boldsymbol{S}_1^k \, \boldsymbol{W}_1^k = \boldsymbol{S}_0^k \, \boldsymbol{W}_0^k, \tag{3.26}$$

avec $\boldsymbol{S}_i^k = \boldsymbol{C}_i^k \, \boldsymbol{G}_i^k \, \boldsymbol{K}_i^k$. On résoud le système sous-déterminé (3.26)

$$\boldsymbol{W}_1^k = \left(\left(\boldsymbol{S}_1^k \right)^{-1} \mid \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{S}_1^k} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_0^k \\ \boldsymbol{\Lambda}^k \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

où $(\boldsymbol{S}_1^k)^{-1}$ désigne la pseudo-inverse de $\boldsymbol{S}_1^k$ au sens des moindres-carrés, $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{S}_1^k}$ est la matrice des vecteurs du noyau de $\boldsymbol{S}_1^k$, et $\boldsymbol{\Lambda}^k$ est un ensemble de multiplicateurs de Lagrange. Pour construire $(\boldsymbol{S}_1^k)^{-1}$ et $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{S}_1^k}$, on utilise une décomposition en valeurs singulières de $\boldsymbol{S}_1^k$ [130].

3.3.4 Construction de valeurs modifiées

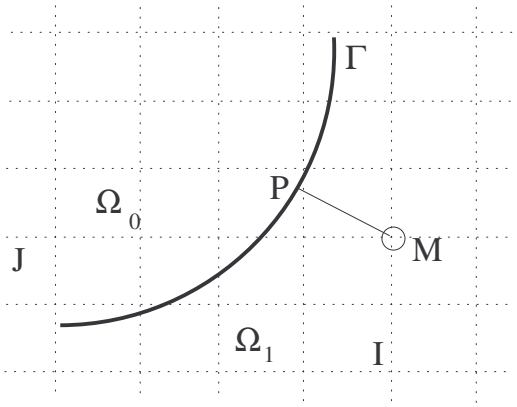


Figure 3.3: Interface Γ immergée dans le maillage cartésien. Point irrégulier $M(x_I,\, y_J) \in \Omega_1$ et sa projection orthogonale P sur Γ.

Soit un *point irrégulier* $M(x_I,\, y_J) \in \Omega_1$ dont la valeur est utilisée par le schéma d'intégration en un (ou des) point(s) de Ω_0. Au lieu d'utiliser $\boldsymbol{U}_{I,J}^n$, on injecte dans le schéma une *valeur modifiée* $\boldsymbol{U}_{I,J}^*$, définie comme un prolongement régulier de la solution de l'autre côté de l'interface.

Soit P la projection orthogonale de M sur Γ (figure 3.3), et $\mathbf{\Pi}_{i,j}^k$ la matrice des coefficients de Taylor en dimension deux

$$\mathbf{\Pi}_{i,j}^k = \left(\boldsymbol{I}_5, ..., \frac{1}{\beta\,!\,(\alpha-\beta)\,!}\,(x_i - x_P)^{\alpha-\beta}(y_j - y_P)^{\beta}\boldsymbol{I}_5, ..., \frac{(y_j - y_P)^k}{k\,!}\,\boldsymbol{I}_5 \right), \tag{3.28}$$

où $\boldsymbol{I}_5$ est la matrice identité 5×5, $\alpha = 0, ..., k$ et $\beta = 0, ..., \alpha$. La valeur modifiée s'écrit alors

$$\boldsymbol{U}_{I,J}^* = \mathbf{\Pi}_{I,J}^k\, \boldsymbol{U}_0^k. \tag{3.29}$$

Reste à estimer numériquement $\boldsymbol{U}_0^k$ en fonction des valeurs numériques aux points voisins de P, et en fonction des conditions d'interface. Pour cela, on considère le disque $\mathcal{D}$ de centre P et de rayon q. Aux points de $\mathcal{D} \cap \Omega_0$, on écrit le développement de Taylor d'ordre k de la solution en P, et on utilise (3.23) et (3.25)

$$\begin{aligned}
(x_i,\, y_j) \in \mathcal{D} \cap \Omega_0, \quad \boldsymbol{U}(x_i, y_j, t_n) &= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{U}_0^k + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}), \\
&= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{G}_0^k\, \boldsymbol{V}_0^k + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}), \\
&= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{G}_0^k\, \boldsymbol{K}_0^k \boldsymbol{W}_0^k + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}), \\
&= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{G}_0^k\, \boldsymbol{K}_0^k\, (\mathbf{1}\,|\,\mathbf{0}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_0^k \\ \\ \mathbf{\Lambda}^k \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Aux points de $\mathcal{D} \cap \Omega_1$, on écrit le développement de Taylor d'ordre k de la solution en P, et on utilise (3.23), (3.25) et les conditions d'interface (3.27)

$$\begin{aligned}
(x_i,\, y_j) \in \mathcal{D} \cap \Omega_1, \quad \boldsymbol{U}(x_i, y_j, t_n) &= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{U}_1^k + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}), \\
&= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{G}_1^k\, \boldsymbol{V}_1^k + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}), \\
&= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{G}_1^k\, \boldsymbol{K}_1^k \boldsymbol{W}_1^k + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}), \\
&= \mathbf{\Pi}_{i,j}^k\, \boldsymbol{G}_1^k\, \boldsymbol{K}_1^k\, \left(\left(\boldsymbol{S}_1^k\right)^{-1} \,|\, \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{S}_1^k} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_0^k \\ \\ \mathbf{\Lambda}^k \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Les équations (3.30) et (3.31) sont écrites de façon matricielle

$$(\boldsymbol{U}(.,\, t_n))_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_0^k \\ \\ \mathbf{\Lambda}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}) \\ \vdots \\ \mathcal{O}(\Delta\, x^{k+1}) \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Le rayon q doit être tel que le système (3.32) soit surdéterminé. On remplace alors les valeurs exactes - et inconnues - dans le membre de gauche de (3.32) par les valeurs numériques à l'instant t_n, et on élimine les restes de Taylor. On note $\boldsymbol{M}^{-1}$ l'inverse au sens des moindres carrés de $\boldsymbol{M}$. Les multiplicateurs de Lagrange $\mathbf{\Lambda}^k$ étant inutiles pour construire la valeur modifiée (3.29), on définit la restriction $\overline{\boldsymbol{M}^{-1}}$ de $\boldsymbol{M}^{-1}$ telle que

$$\boldsymbol{W}_0^k = \overline{\boldsymbol{M}^{-1}}\, (\boldsymbol{U}^n)_{\mathcal{D}}\,. \tag{3.33}$$

La valeur modifiée découlant de (3.23), (3.25), (3.29) et (3.33) s'écrit alors

$$\boldsymbol{U}^*_{I,J} = \boldsymbol{\Pi}^k_{I,J}\, \boldsymbol{G}^k_0\, \boldsymbol{K}^k_0\, \overline{\boldsymbol{M}^{-1}}\, (\boldsymbol{U}^n)_{\mathcal{D}}\,. \tag{3.34}$$

On réitère cette opération en tous les points irréguliers le long de Γ. Les matrices dans (3.34) ne dépendant pas du temps, elles peuvent être calculées en prétraitement. A chaque pas de temps, il reste uniquement à réaliser les produits matrice-vecteur dans (3.34) en tous les points irréguliers, et à injecter les valeurs obtenues dans le schéma. Les matrices mises en jeu sont de petite taille, typiquement 5×100. Après optimisation des phases de calcul et d'échange des valeurs modifiées, le surcoût en temps de calcul est inférieur à 1% du temps nécessaire pour le schéma d'intégration. Reste la question du choix de k. En théorie, on doit prendre $k = r$, où r est l'ordre du schéma. Cependant, $k = r - 1$ suffit pour maintenir une erreur globale d'ordre r [67].

3.4 Expériences numériques

3.4.1 Surface libre

Le premier exemple d'utilisation des conditions de Dirichlet met en jeu une onde plane de compression impactant une cavité circulaire vide. Plusieurs expériences numériques sont réalisées successivement, avec 10, 5 et 4 points par longueur d'onde S minimale. Dans tous les cas, la vitesse élastique horizontale est enregistrée à chaque pas de temps en un récepteur situé juste au-dessus de la cavité, noté R sur les cartes de la figure 3.4. En (d) et (f), on compare les solutions numériques à la solution analytique obtenue par transformée de Fourier et décomposition des ondes sur une base d'harmoniques cylindriques. Avec 4 points par longueur d'onde, les erreurs sont visibles sans zoom. A 10 points par longueur d'onde, l'accord avec la solution analytique est excellent, même pour le deuxième train d'ondes, d'amplitude très faible (f).

Le deuxième exemple, présenté en figure 3.5, est un cas-test classique en sismologie. La surface libre est une droite inclinée par rapport à l'horizontale, coupant donc le maillage cartésien de façon quelconque. Une source de compression, notée S, est enfouie sous la surface libre, à une profondeur petite devant les longueurs d'onde. L'onde de compression émise impacte la surface libre, conduisant à des ondes réfléchies de compression et de cisaillement. Les *ondes de Rayleigh* sont le résultat de l'interférence constructive des ondes réfléchies [133, 1]. Ces ondes, guidées par la surface libre, sont observables en (a), symétriquement par rapport à S.

La vitesse verticale est enregistrée en quatre récepteurs situés à la surface libre, notés R en (a). L'évolution temporelle de cette vitesse est présentée en figure 3.5 (b). On observe deux trains d'ondes. Le premier correspond aux ondes de volume. Son amplitude décroît fortement avec la distance de propagation. Le deuxième train d'ondes reste d'amplitude reste constante au cours de la propagation : l'onde de Rayleigh n'est pas dispersive en milieu élastique à paramètres constants. En figure 3.5 (b), on compare aussi les solutions numériques et exactes obtenues en convoluant la source par la fonction de Green déduite de la méthode de *Cagniard-de Hoop*, exposée au chapitre 3. L'accord est excellent, sachant que la durée de la simulation correspond à une distance de propagation d'environ 55 longueurs d'onde, et que les simulations sont réalisées avec 9 points de calcul par longueur d'onde S minimale. Dans [A7], nous avons montré que l'erreur commise était quasiment indépendante de l'angle entre l'interface et le maillage, contrairement aux autres méthodes utilisant une grille de calcul cartésienne.

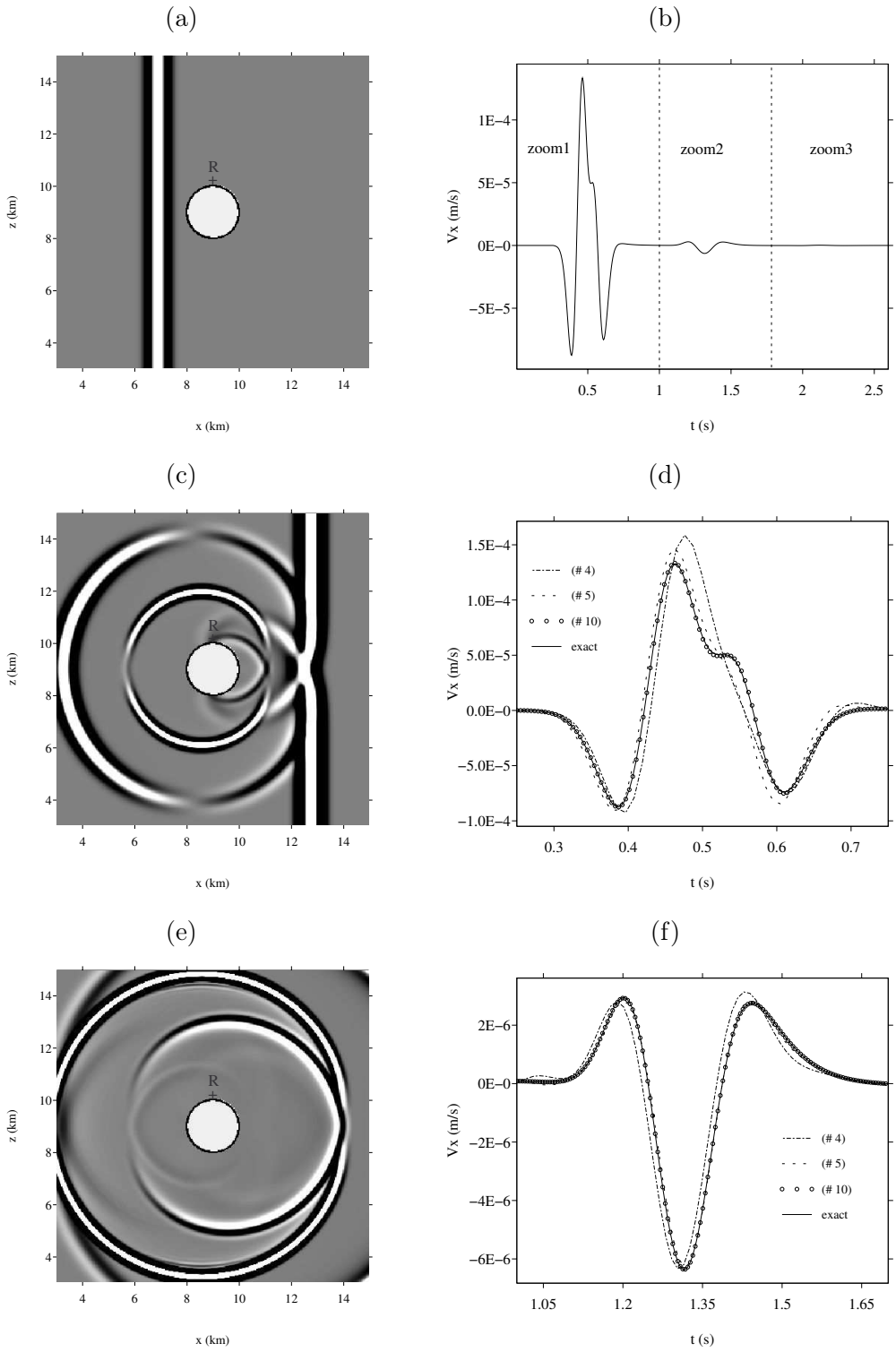


Figure 3.4: Onde plane impactant une cavité circulaire vide. Cartes à différents instants (a,c,e). Signal temporel enregistré au récepteur R (b). Comparaison avec la solution analytique, pour différents nombres de points par longueur d'onde S, sur le zoom 1 (d) et le zoom 2 (f).

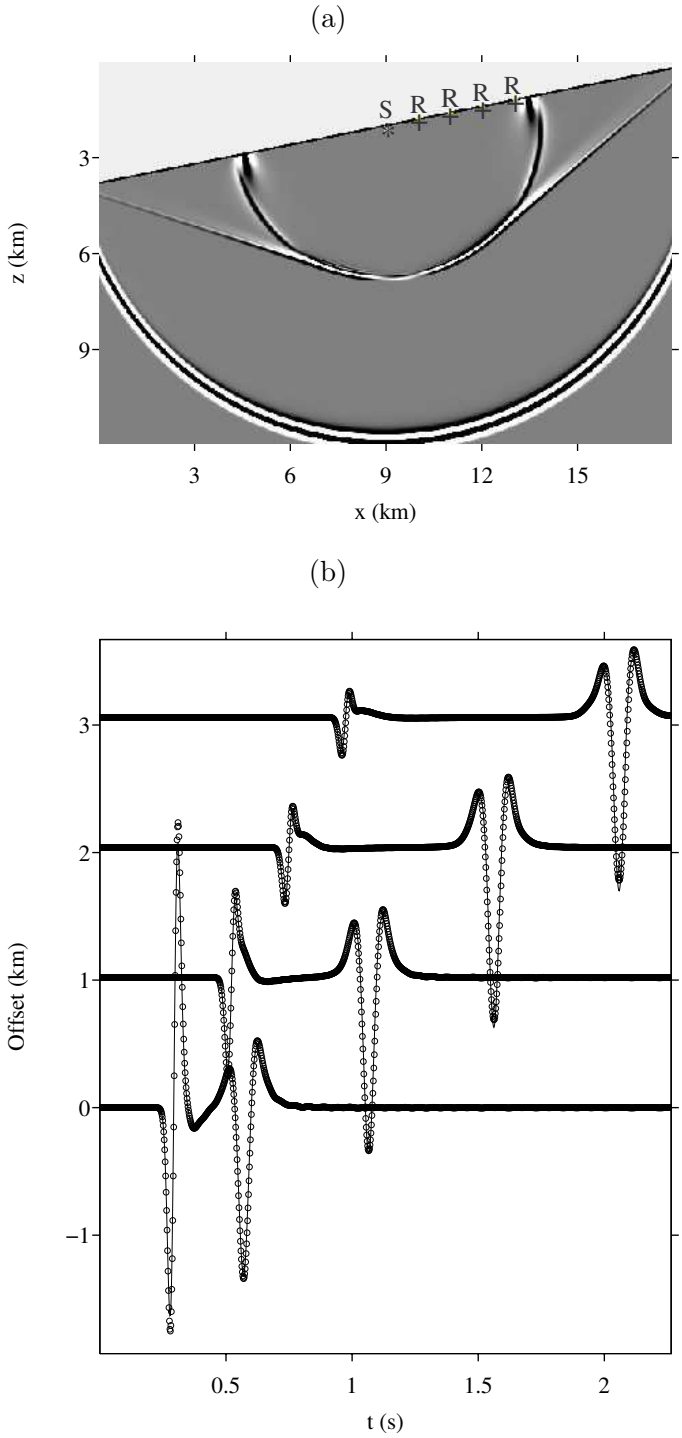


Figure 3.5: Champ émis par un point source S dans un solide élastique isotrope et réfléchi par une surface libre. Carte de la vitesse verticale (a). Evolution temporelle de cette vitesse aux récepteurs R (b) : solution analytique (-) et numérique ∘.

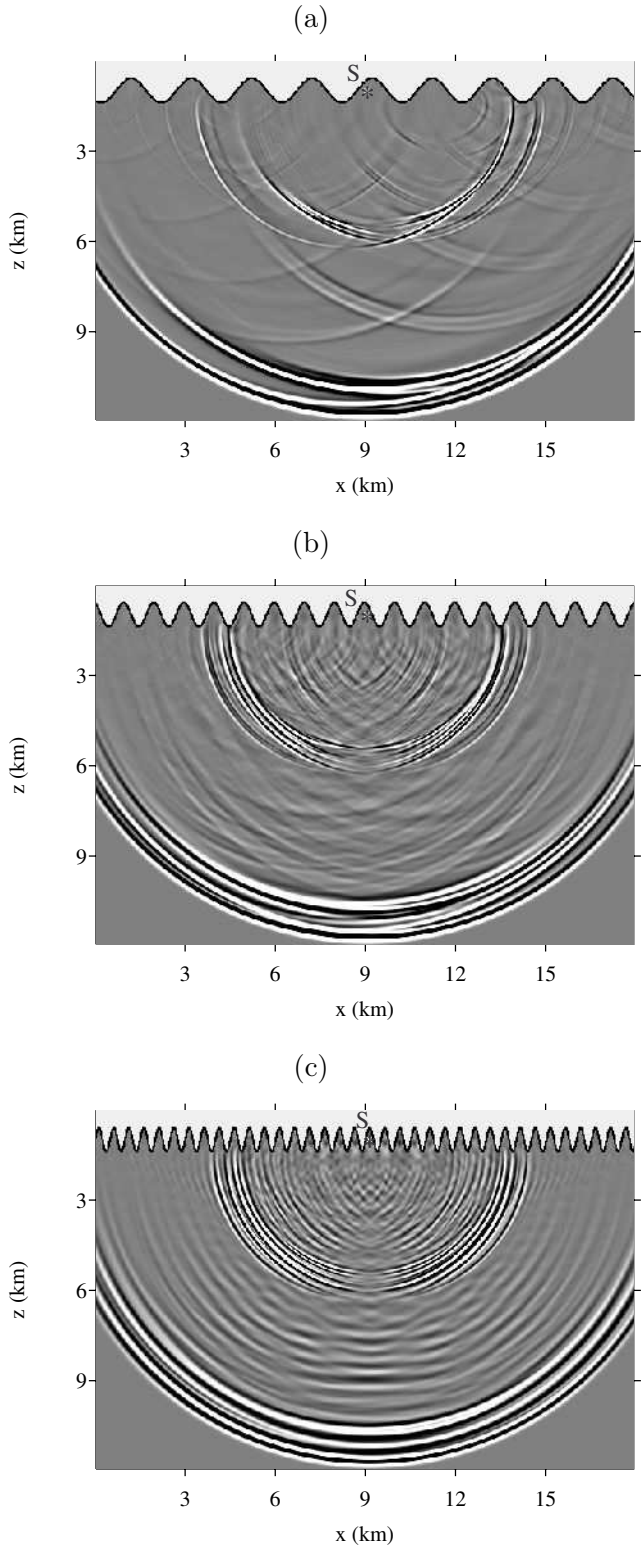


Figure 3.6: Champ émis par un point source S sous des interfaces sinusoïdales avec le vide.

On propose enfin deux tests plus qualitatifs. La figure 3.6 généralise le poblème de Garvin à des topographies sinusoïdales, de différentes périodes spatiales. La figure 3.7 représente un milieu tricouche circulaire. Du centre à l'extérieur, les milieux sont de l'eau, un solide élastique, et le vide. La source est localisée près de la surface libre, sur le côté droit. Le champ est représenté après 400 itérations (a) puis 10000 itérations (b). Des simulations sur des nombres beaucoup plus importants d'itérations - typiquement plusieurs millions - ont aussi été réalisées, indiquant numériquement la stabilité des algorithmes.

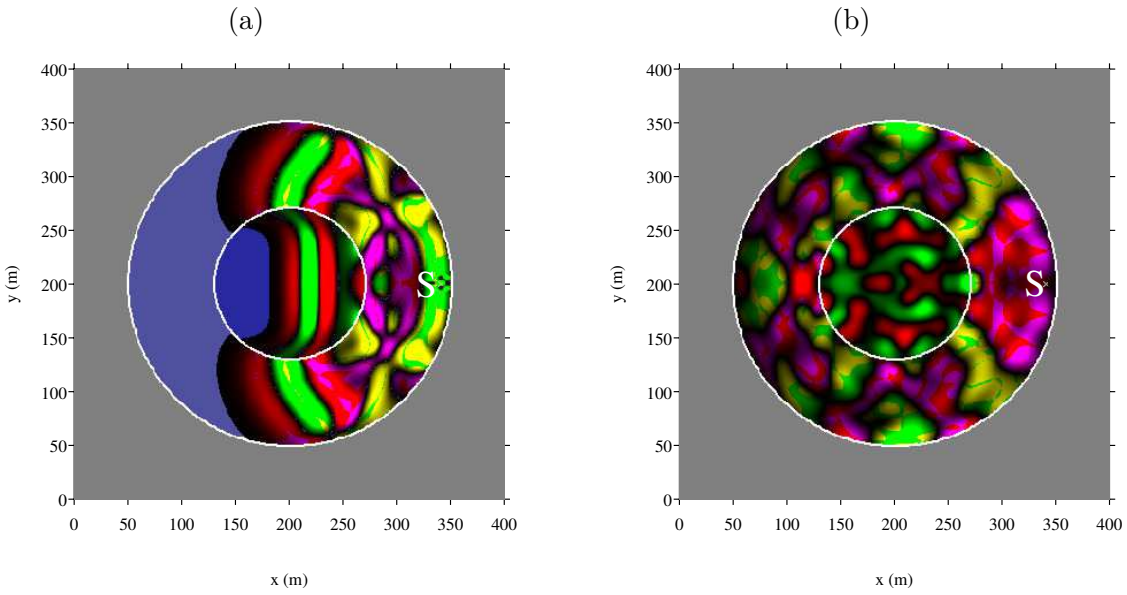


Figure 3.7: Champ émis dans une couronne élastique comprise entre le vide (extérieur) et un liquide (intérieur), après 400 itérations (a) et 10000 itérations (b).

3.4.2 Glissement sans frottement

On illustre maintenant l'impact d'ondes sur des interfaces avec conditions de glissement sans frottement. Pour bien mettre en évidence le rôle de ces conditions, on considère des milieux Ω_0 et Ω_1 identiques, ayant les propriétés du Plexiglass. Ainsi, les ondes diffractées sont purement induites par (3.10), et non par la discontinuité des paramètres physiques.

Comme premier exemple, on présente en figure 3.8 l'impact d'une onde plane de compression avec une interface plane. La composante σ_{11} est affichée à l'initialisation (a-b) et après intégration (c-d). Les milieux étant identiques, les directions de propagation des ondes P incidente et transmise sont identiques. Une coupe des ondes S réfléchie et transmise est présentée en (d) : l'accord avec la solution analytique est très bon. En figure 3.9, on simule l'impact d'une onde plane de compression sur une interface circulaire. La solution numérique est comparée avec succès à la solution analytique (d), calculée avec un nombre important de modes de Bessel (60) et de Fourier (32768).

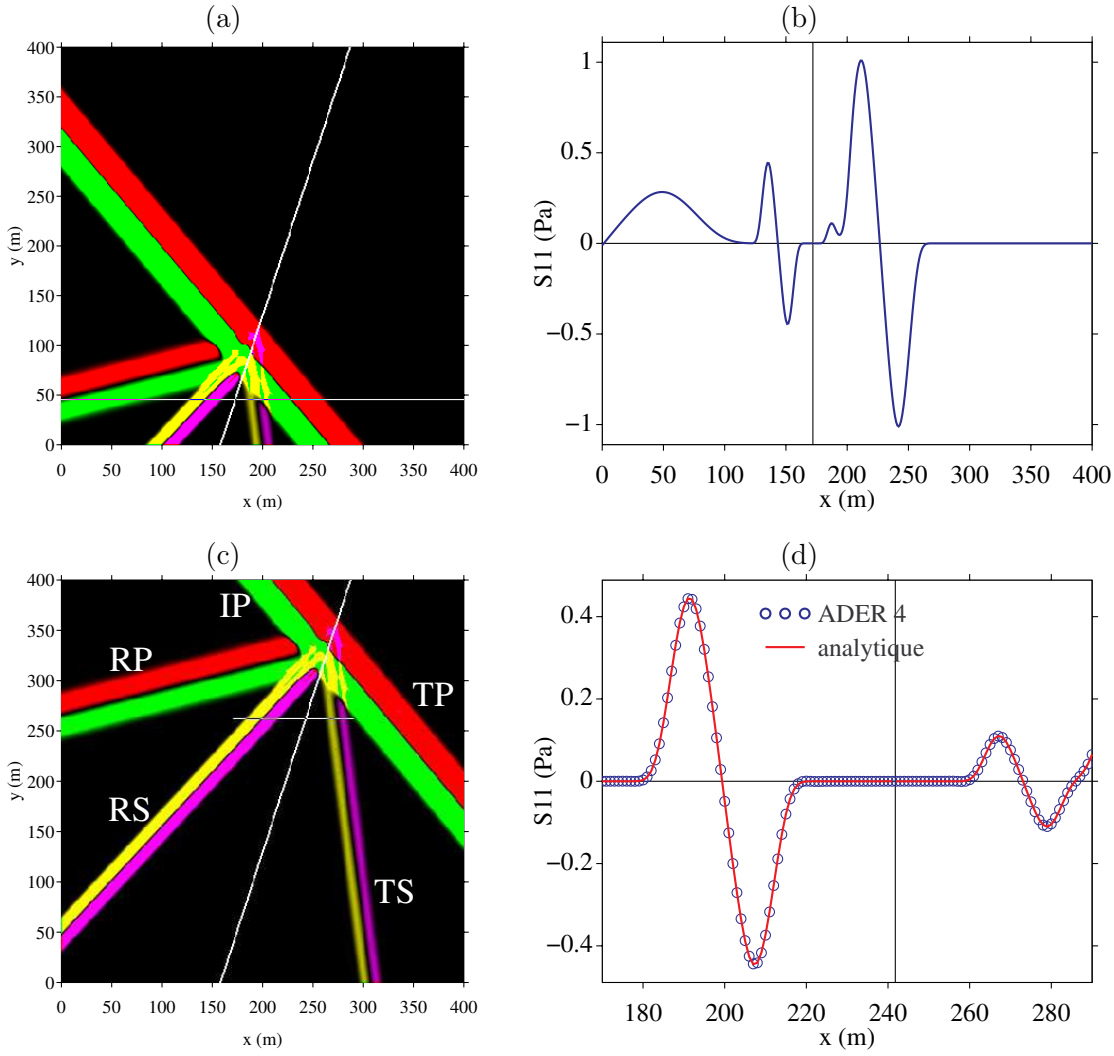


Figure 3.8: Ondes planes incidente (IP), réfléchies (RP, RS) et transmises (TP, TS) par une interface plane avec conditions de glissement sans frottement.

3.4.3 Masse-ressort

Nous présentons enfin des simulations avec les conditions de masse-ressort (3.11). En figure 3.10, on étudie l'interaction d'une onde plane P avec un cercle séparant deux solides identiques. Les paramètres du contact imparfait sont constants le long de l'interface : $K_N = K_T = 10^9\,\mathrm{kg.m^{-2}.\,s^{-3}}$, $M_N = M_T = 1000\,\mathrm{kg.m.^{-2}s^{-1}}$. La solution est présentée après intégration (a-b) et comparée avec la solution analytique. L'ordre k de la méthode d'interface immergée (3.34) est crucial pour la qualité des solutions numériques [A5]. En (c-d), on compare les solutions numériques pour différents ordres. L'ordre 1 est manifestement faux ; les ordres supérieurs sont très voisins entre eux (c). Un zoom illustre le gain en précision lorsque k augmente (d). Le surcoût en temps intervient uniquement en pré-traitement, lors du calcul des matrices dans (3.34).

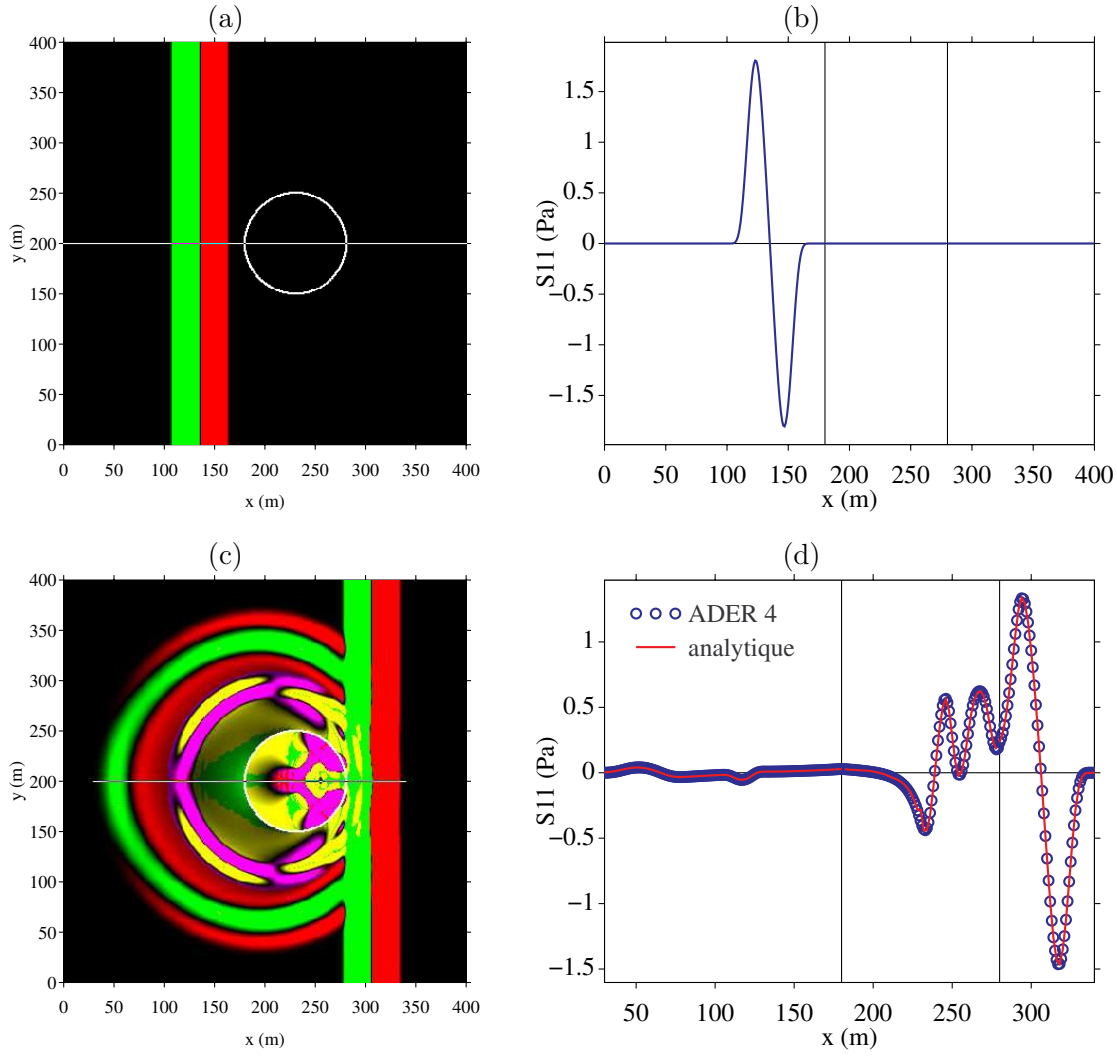


Figure 3.9: Onde plane de compression impactant une interface circulaire avec conditions de glissement sans frottement, séparant deux solides élastiques identiques.

On représente enfin en figure 3.11 une interface circulaire séparant deux solides de propriétés physiques différentes. Trois degrés de contact sont considérés : $K_N = K_T = +\infty$ (a-b) i.e. un contact parfait soudé, $K_N = K_T = 10^9\,\mathrm{kg.m^{-2}.\,s^{-3}}$ (c-d), et $K_N = K_T = 10^8\,\mathrm{kg.m^{-2}.\,s^{-3}}$ (e-f). Les termes inertiels sont négligés : $M_N = M_T = 0\,\mathrm{kg.m.^{-2}s^{-1}}$. Les calculs sont réalisés à l'ordre $k = 3$ pour les deux premiers cas, et à l'ordre $k = 4$ pour le troisième cas. Suivant le degré de contact, on observe des différences importantes sur les champs diffractés. En particulier, il y a inversion du premier front d'onde P réfléchie entre les cas 1 et 3. Ce dernier cas, qui tend vers un décollement, est très exigeant sur un plan numérique. L'ordre $k = 4$ est nécessaire pour obtenir un bon accord avec la solution analytique (f). Cette dernière requiert un grand nombre de modes de Fourier - typiquement 32768, au lieu des 512 utilisés classiquement - pour converger.

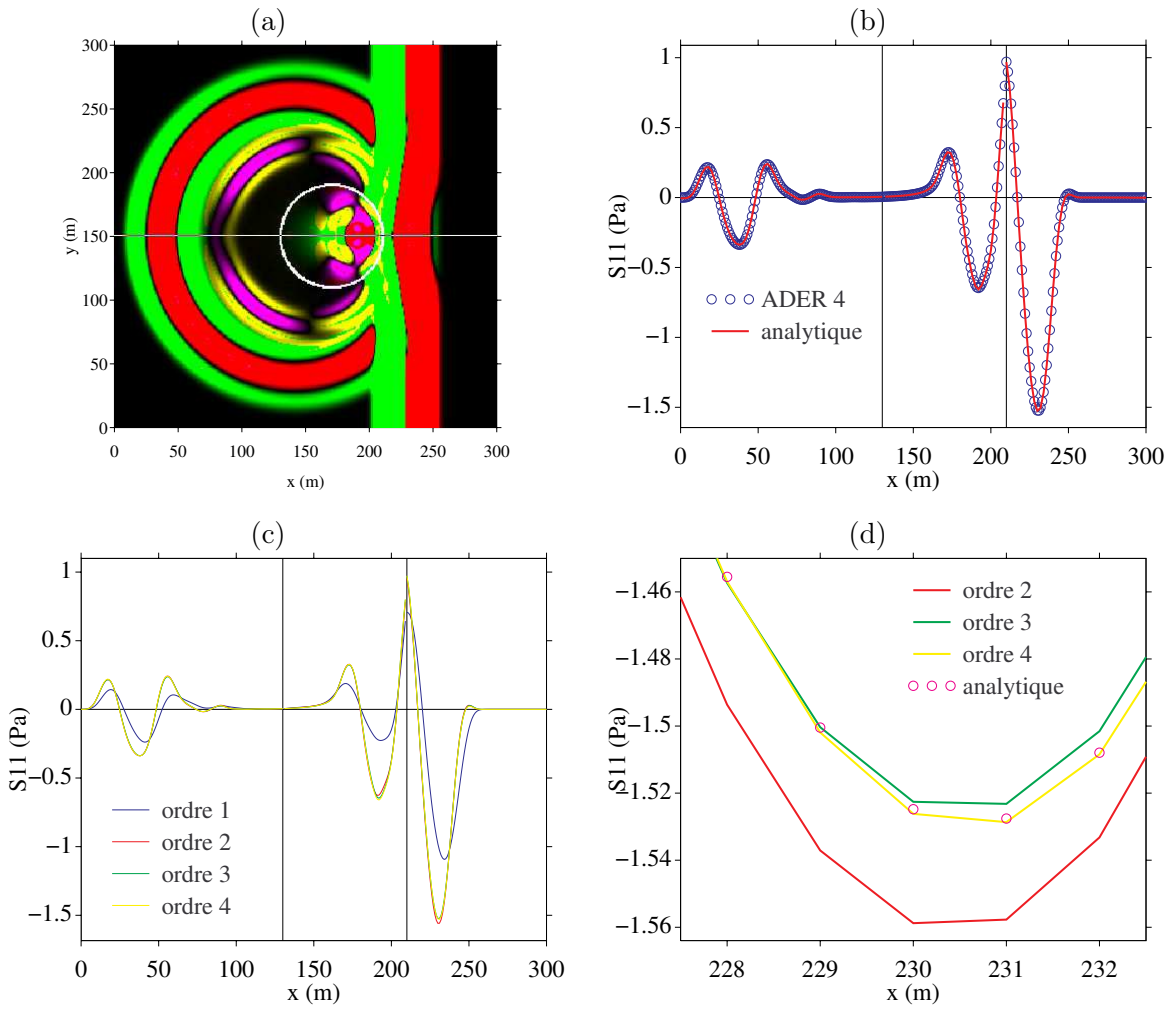


Figure 3.10: Onde plane P impactant une interface circulaire avec conditions de masse-ressort entre deux milieux identiques (a-b). Solutions numériques pour différents ordres k (c) ; zoom (d).

3.5 Conclusion

Bilan. Le principal défaut de la méthode d'interface immergée présentée au cours de ce chapitre réside dans la complexité de sa mise en ouvre : recherche des points irréguliers, calculs de projections orthogonales sur des surfaces, dérivation de conditions d'interface, ... D'autant que chacune de ces étapes doit être optimisée pour conduire, in fine, à un surcoût en temps de calcul négligeable devant celui du schéma d'intégration. En contrepartie, une fois que ces aspects algorithmiques sont résolus, l'adaptation à une large classe de conditions d'interface linéaires est très rapide.

Perspectives. Une première direction de recherche concerne la modélisation de dissipation d'énergie au niveau des interfaces, due au frottement entre les rugosités en contact ou à la présence

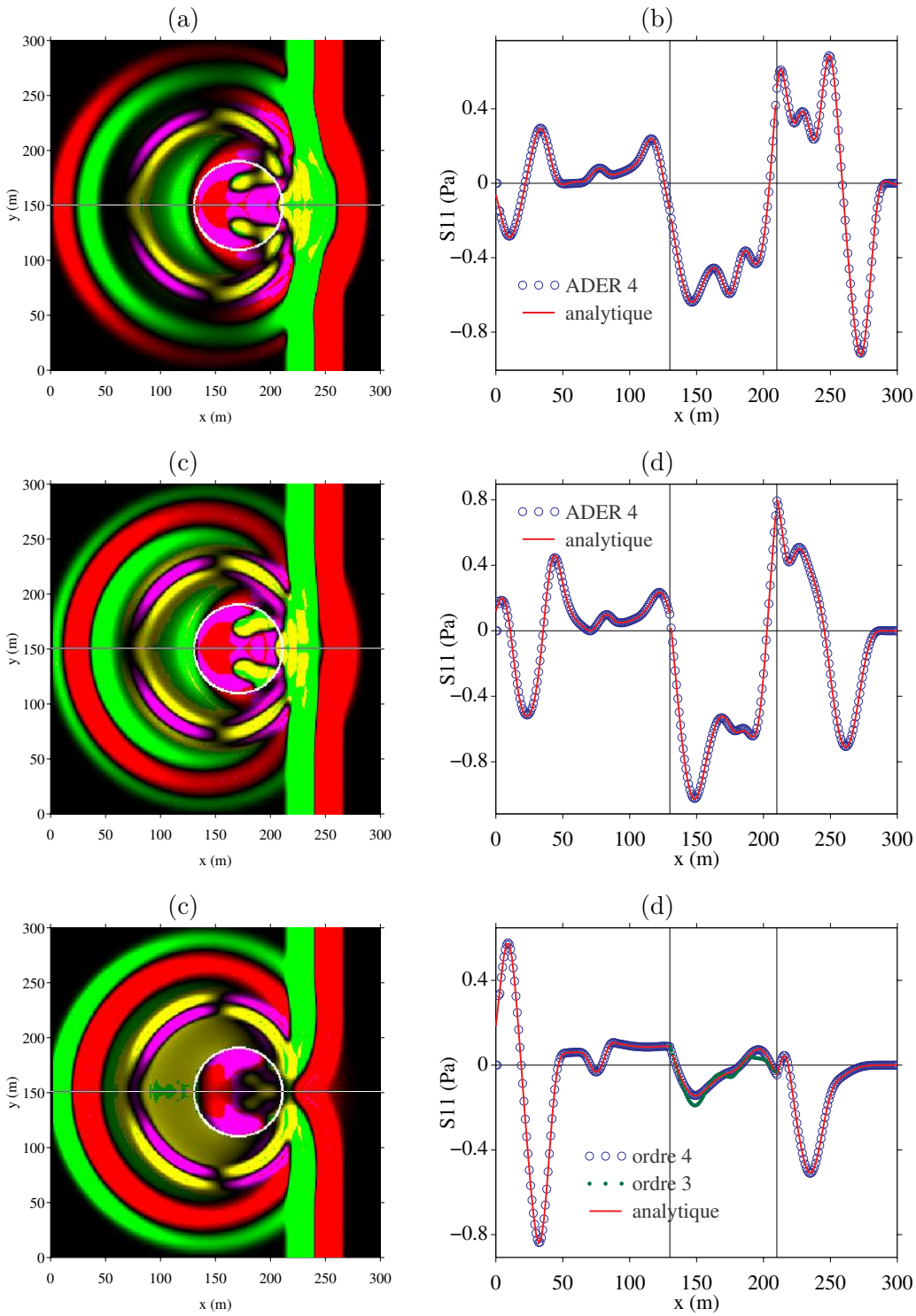


Figure 3.11: Onde plane P impactant une interface circulaire entre deux solides élastiques différents, décrite par les conditions de masse-ressort : contact soudé (a-b), collage fort (c-d), collage faible (e-f).

d'un lubrifiant. Pour de très petites perturbations, on peut encore utiliser des conditions linéaires, généralisant (3.11) et découlant du modèle de Maxwell [29].

Par ailleurs, le passage en 3D est incontournable pour les applications réelles. On pense notamment à la modélisation des surfaces libres en sismologie, domaine pour lequel se multiplient actuellement les benchmarks. Des premiers résultats ont été obtenus par Joël Piraux fin 2009, pour des interfaces entre deux fluides parfaits. Dans le cas d'une onde plane impactant une sphère, les comparaisons avec solutions analytiques ont montré que l'ordre de convergence du schéma était conservé. Ces travaux vont faire l'objet d'une publication future.

Chapter 4

Contacts non linéaires

Travail réalisé avec Joël Piraux et Stéphane Junca
Production associée : articles [A6, A8], ouvrage collectif [Oc1]

4.1 Introduction

Les défauts dans des solides - fissures, fractures, ..., dénommés par la suite *cracks* - présentent généralement des surfaces rugueuses en contact partiel. Lors de l'interaction avec des ondes mécaniques, le degré de contact peut être modifié, conduisant à des phénomènes complexes qui dépendent fortement de l'amplitude des contraintes appliquées [126].

Si les longueurs d'onde sont grandes devant l'épaisseur des cracks, il est légitime de remplacer ceux-ci par une interface d'épaisseur nulle munie d'un ensemble de conditions d'interface adéquates. Le chapitre précédent a traité des conditions linéaires de masse-ressort. Celles-ci, largement utilisées en élastodynamique, présentent cependant deux défauts majeurs. Premièrement, elles ne prennent pas en compte la compressibilité finie des cracks réels, autorisant ainsi la pénétration non physique de leurs faces en contact. Deuxièmement, les méthodes utilisées en contrôle non-destructif des matériaux et basées sur des modèles linéaires échouent souvent à détecter des cracks en contact partiel [155].

Les lois de contact non linéaires les plus fréquemment envisagées en élastodynamique sont les *conditions de Signorini*, associées au *contact unilatéral* [135, 148, 89]. Ces lois de mécanique non régulière [84] décrivent des cracks de compressibilité nulle : soit les faces sont en contact parfait, avec continuité des déplacements et efforts normaux ; soit les faces sont déconnectées, conduisant aux conditions de Dirichlet. A ce comportement en compression, on adjoint généralement des conditions de frottement non linéaire.

On s'intéresse ici à une autre classe de lois de contact régulier, qui décrivent des cracks de compressibilité finie et non nulle. Les modèles choisis ont été proposés indépendamment dans

le contexte du contrôle non-destructif [2] et des géosciences [8], vers 1983. On se focalise sur le comportement en compression, en considérant des ondes P en incidence normale, d'où une configuration unidimensionnelle. Enfin, on considère un seul crack.

Nous avons réalisé trois ensembles de travaux sur ce thème. Tout d'abord, nous avons proposé des modélisations numériques directes de la diffraction d'ondes, dans le régime temporel [A6] et dans le régime harmonique [Oc1]. Les simulations ont conduit à deux observations : la génération d'harmoniques, et un saut positif du déplacement moyen à l'interface. Cette dernière quantité, qui revient à une dilatation moyenne du crack, est intéressante d'un point de vue applicatif, car elle est mesurable par des techniques acoustiques [94]. Ces phénomènes sont d'autant plus marqués que l'amplitude de l'onde incidente est grande. Pour relier ces quantités aux caractéristiques du crack, nous avons mis en oeuvre une méthode de perturbation [Oc1]. L'onde incidente est alors supposée de très faible amplitude, sinusoïdale, et l'analyse concerne uniquement une loi de contact hyperbolique. Enfin, nous avons généralisé ces analyses à des ondes incidentes périodiques d'amplitude quelconque - tout en supposant vérifiées les hypothèses de l'élastodynamique linéaire - pour une large classe de lois de contact [A8].

4.2 Modélisation

4.2.1 Modélisation physique

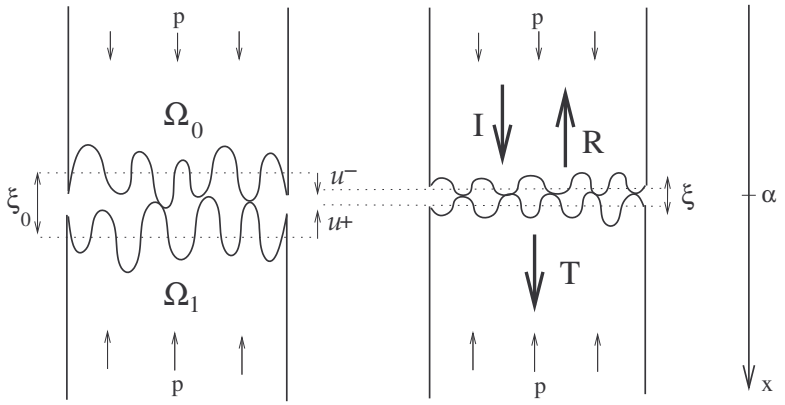


Figure 4.1: Milieux élastiques Ω_0 et Ω_1 avec des surfaces rugueuses en contact, soumis à une contrainte statique p. Configuration statique (gauche) et dynamique (droite), avec les ondes incidente (I), réfléchie (R) et transmise (T).

On considère un unique crack avec des surfaces rugueuses séparant deux milieux élastiques Ω_0 et Ω_1. On note ρ la masse volumique et c la célérité des ondes de compression. Ces paramètres sont constants par morceaux et peuvent être discontinus au passage du crack : $(\rho_0,\, c_0)$ si $x \in \Omega_0$, $(\rho_1,\, c_1)$ si $x \in \Omega_1$. Les milieux sont soumis à une contrainte statique p. Au repos, la distance entre les plans moyens des rugosités est $\xi_0(p) > 0$ (figure 4.1, gauche).

Des ondes élastiques de compression sont émises par une source ponctuelle en $x = x_s < \alpha$ dans Ω_0, où α est un plan moyen du crack. L'onde impactant α donne naissance à une onde

réfléchie (dans Ω_0) et une onde transmise (dans Ω_1). Les perturbations dans Ω_0 et Ω_1 sont décrites par les équations de l'élastodynamique 1D

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + S(t)\,\delta(x - x_s), \tag{4.1}$$

où $S(t)$ désigne la source causale de contrainte, $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ est la vitesse élastique, u est le déplacement élastique, et σ est la perturbation de contrainte autour de p. Les valeurs initiales de v et σ sont v_0 et σ_0. Les contraintes induites par les ondes élastiques modifient l'épaisseur ξ du crack (figure 4.1, droite). Pour prendre en compte la compressibilité finie du crack, on impose l'inégalité

$$\xi = \xi_0 + [u] \geq \xi_0 - d > 0, \tag{4.2}$$

où $[u] = u^+ - u^-$ est la différence des déplacements élastiques des deux côtés du crack, et $d(p) > 0$ est la *fermeture maximale autorisée* [8]. On suppose enfin que les longueurs d'onde sont beaucoup plus grandes que ξ, de sorte que la durée de propagation à travers le crack est négligée. Ce dernier est alors remplacé par une interface d'épaisseur nulle en $x = \alpha$: $[u] = [u(\alpha,\, t)] = u(\alpha^+,\, t) - u(\alpha^-,\, t)$.

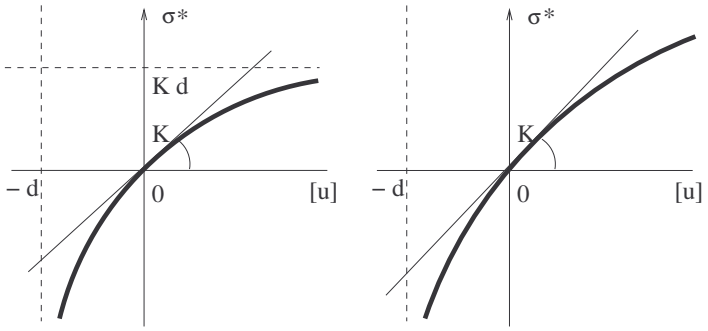


Figure 4.2: Schématisation de la relation non linéaire entre la contrainte élastique et le saut du déplacement élastique en α. Gauche : modèle 1 (4.7) ; droite : modèle 2 (4.8).

On doit définir deux conditions de saut indépendantes en α. Le saut de σ est proportionnel à la masse du milieu interstitiel entre Ω_0 et Ω_1. Le crack étant supposé sec et rempli d'air, dont la masse volumique est très inférieure à ρ_0 et ρ_1, on suppose que la contrainte est continue

$$[\sigma(\alpha,\, t)] = 0 \;\Rightarrow\; \sigma(\alpha^+,\, t) = \sigma(\alpha^-,\, t) = \sigma^*(t). \tag{4.3}$$

La deuxième condition de saut est moins triviale. Des études expérimentales et théoriques ont montré que u est discontinu et présente un saut dépendant de la contrainte appliquée. On rappelle le modèle linéaire avec ressort seul, vu au chapitre 3 [132] :

$$\sigma^*(t) = K\,[u(\alpha,\, t)]\,, \tag{4.4}$$

où K est la *raideur d'interface*. La condition (4.4) ne satisfait pas (4.2) lorsqu'une compression importante est appliquée : $\sigma^*(t) < -K\,d \;\Rightarrow\; \xi < \xi_0 - d$. La condition linéaire (4.4) n'est donc adaptée qu'à des perturbations de très faible amplitude. Au-delà, des conditions de saut non linéaires doivent être proposées.

Pour construire de telles relations, on note que les efforts de compression augmentent le nombre de rugosités en contact. Ainsi, la contrainte à appliquer est plus faible, en valeur absolue, selon que l'on ouvre ou ferme le crack. On suppose qu'une contrainte infinie est nécessaire pour fermer complètement le crack. De plus, l'inégalité (4.2) doit être satisfaite, et on doit retrouver (4.4) dans le cas-limite de contraintes infinitésimales. Enfin, des relations concaves liant la contrainte et le saut de déplacement sont observées expérimentalement [112]. La relation générale

$$\sigma^*(t) = K\, d\, \mathcal{F}\left([u(\alpha,\, t)]/d\right) \tag{4.5}$$

satisfait les critères imposés, où $\mathcal{F}$ est une fonction concave croissante et régulière

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} :]-1,\, +\infty[\to]-\infty,\, \mathcal{F}_{\max}[, \quad \lim_{X \to -1} \mathcal{F}(X) = -\infty, \quad 0 < \mathcal{F}_{\max} \leq +\infty, \\ &\mathcal{F}(0) = 0, \quad \mathcal{F}^{'}(0) = 1, \quad \mathcal{F}^{''} < 0 < \mathcal{F}^{'}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Deux modèles déduits d'expériences vérifient la relation non linéaire (4.5). Le *modèle 1* présenté dans [2, 8, 10] s'écrit

$$\sigma^*(t) = \frac{K\ [u(\alpha,\, t)]}{1 + [u(\alpha,\, t)]\,/d} \Leftrightarrow \mathcal{F}(X) = \frac{X}{1+X}, \quad \mathcal{F}_{\max} = 1. \tag{4.7}$$

Le *modèle 2* présenté dans [112] s'écrit

$$\sigma^*(t) = K\, d\, \ln\left(1 + [u(\alpha,\, t)]/d\right) \Leftrightarrow \mathcal{F}(X) = \ln(1+X), \quad \mathcal{F}_{\max} = +\infty. \tag{4.8}$$

Ces deux lois de contact sont schématisées en figure 4.2. La droite de pente K tangente à l'origine revient aux conditions linéaires (4.4). La principale différence entre les modèles porte sur le comportement en traction : dans le cas du modèle 1, la contrainte est bornée. Dans tous les cas, la loi (4.5) devient irréaliste en traction à partir d'une certaine dilatation du crack. Une amélioration du modèle nécessiterait de prendre en compte les effets d'adhésion.

Il convient de déterminer si le couplage des équations de l'élastodynamique (4.1) et des lois de contact (4.3) et (4.5) constitue un problème bien posé. Le lemme suivant, analogue du lemme 3.1 vu au chapitre 3 dans le cas linéaire, propose un résultat de conservation d'énergie. Il généralise aussi le lemme 1 de [A6].

Lemme 4.1 *Soit $\boldsymbol{U} = (v,\, \sigma)^T$ solution de (4.1) avec les conditions de saut (4.3) et (4.5),*

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho\, v^2 + \frac{1}{\rho\, c^2}\, \sigma^2 \right) dx, \\ E_2 &= K\, d^2 \left(\frac{\sigma^*}{K\, d}\, \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sigma^*}{K\, d}\right) - \frac{1}{K\, d} \int_0^{\sigma^*} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sigma}{K\, d}\right) d\sigma \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

En l'absence de termes sources, $E = E_1 + E_2$ satisfait

$$\frac{d\, E(\boldsymbol{U},\, t)}{d\, t} = 0, \quad E(\boldsymbol{U},\, t) \geq 0, \quad E(\boldsymbol{U},\, t) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U}(x,\, t) = \boldsymbol{0}.$$

Dans le cas-limite $\sigma^* \ll K\, d$, alors $E_2 \approx \frac{1}{2\,K}\, \sigma^{*2}$.

DÉMONSTRATION. On multiplie la première équation de (4.1) par v, et on intègre par parties sur Ω_0. La deuxième équation de (4.1) conduit alors à

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\alpha^-} \rho\, v\, \frac{\partial\, v}{\partial\, t}\, dx &= \int_{-\infty}^{\alpha^-} v\, \frac{\partial\, \sigma}{\partial\, x}\, dx,\\ &= v(\alpha^-,\, t)\, \sigma(\alpha^-,\, t) - \int_{-\infty}^{\alpha^-} \sigma\, \frac{\partial\, v}{\partial\, x}\, dx,\\ &= v(\alpha^-,\, t)\, \sigma(\alpha^-,\, t) - \int_{-\infty}^{\alpha^-} \frac{1}{\rho\, c^2}\, \sigma\, \frac{\partial\, \sigma}{\partial\, t}\, dx.\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$\int_{\alpha^+}^{+\infty} \rho\, v\, \frac{\partial\, v}{\partial\, t}\, dx = -v(\alpha^+,\, t)\, \sigma(\alpha^+,\, t) - \int_{\alpha^+}^{+\infty} \frac{1}{\rho\, c^2}\, \sigma\, \frac{\partial\, \sigma}{\partial\, t}\, dx.$$

En ajoutant les deux équations précédentes, on obtient $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$, avec

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, v\, \frac{\partial\, v}{\partial\, t}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho\, c^2}\, \sigma\, \frac{\partial\, \sigma}{\partial\, t}\, dx\\ &= \frac{d}{d\, t}\, \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho\, v^2 + \frac{1}{\rho\, c^2}\, \sigma^2 \right) dx}_{E_1},\end{aligned}$$

et, en utilisant (4.5),

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \sigma^*(t)\, \left[v(\alpha,\, t) \right],\\ &= \frac{1}{K}\, \sigma^*(t)\, \left(\mathcal{F}^{-1} \right)' \left(\frac{\sigma^*}{K\, d} \right) \frac{\partial\, \sigma^*}{\partial\, t},\\ &= \frac{d}{d\, t}\, \underbrace{K\, d^2 \left(\frac{\sigma^*}{K\, d}\, \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sigma^*}{K\, d} \right) - \frac{1}{K\, d} \int_0^{\sigma^*} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sigma}{K\, d} \right) d\sigma \right)}_{E_2}.\end{aligned}$$

La quantité $E = E_1 + E_2$ vérifie donc $\frac{dE}{dt} = 0$; E_1 est une forme quadratique définie positive. Il reste donc uniquement à étudier le signe de E_2. Vu les propriétés de $\mathcal{F}$ dans (4.6), $\mathcal{F}^{-1}$ est strictement croissante, et

$$\int_0^{\sigma^*} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sigma^*}{K\, d} \right) d\sigma \leq \sigma^*\, \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sigma^*}{K\, d} \right).$$

En conséquence de quoi, on a $E_2 \geq 0$ et $E_2 = 0$ pour $\sigma^* = 0$. Enfin, pour $\sigma^* \ll K\, d$, on écrit un développement de Taylor d'ordre un et on utilise les propriétés de $\mathcal{F}^{-1}$ déduites de (4.6)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sigma}{K\, d} \right) &= \mathcal{F}^{-1}(0) + \frac{\sigma}{K\, d}\, \left(\mathcal{F}^{-1} \right)' (0) + \mathcal{O}\left(\sigma^{*2} \right),\\ &= \frac{\sigma}{K\, d} + \mathcal{O}\left(\sigma^{*2} \right).\end{aligned}$$

En injectant cette expression dans E_2, on complète la preuve pour les contraintes de petite amplitude. □

Le lemme 4.1 signifie que (4.9) est une énergie, somme de deux contributions. Le terme E_1 est l'énergie mécanique des ondes élastiques. Le terme E_2 est l'énergie mécanique de déformation non linéaire du crack. Les effets inertiels étant négligés dans (4.3) et (4.5), E_2 revient à une énergie potentielle. Dans le cas-limite $\sigma^* \ll K\,d$, on retrouve l'énergie potentielle d'un ressort linéaire. Enfin, les modèles de contact 1 et 2 conduisent à des expresions analytiques de E_2. Avec le modèle 1 (4.7), on obtient [A6]

$$E_2 = K\,d^2 \left(\ln\left(1 - \frac{\sigma^*(t)}{K\,d}\right) + \frac{1}{1 - \dfrac{\sigma^*(t)}{K\,d}} - 1 \right).$$

Avec le modèle 2 (4.8), on obtient

$$E_2 = K\,d^2 \left(e^{\frac{\sigma^*}{K\,d}} \left(\frac{\sigma^*}{K\,d} - 1 \right) - 1 \right).$$

Par ailleurs, une conséquence de la conservation d'énergie est que la solution de (4.1) avec les conditions de saut (4.3) et (4.5) n'"explose" pas. En reliant cette solution à la solution d'une équation différentielle ordinaire, on peut en déduire un résultat d'existence et d'unicité [A6].

4.2.2 Modélisation numérique

Simulations numériques directes. Pour résoudre numériquement (4.1) avec les conditions de saut (4.3) et (4.5), nous avons mis en oeuvre deux méthodes. La première repose sur des *simulations numériques directes* (SND) dans le domaine temporel [A6]. Un schéma d'intégration, typiquement ADER 4, résoud les lois de conservation. Une méthode d'interface immergée discrétise les conditions de saut, généralisant l'approche présentée en section 2.3. A la différence des contacts linéaires, les matrices pour le calcul de valeurs modifiées doivent être déterminées à chaque pas de temps, par résolution d'un système non linéaire.

Si les nonlinéarités sont très fortes - on quantifiera plus loin cette notion -, les ondes diffractées présentent de fortes variations, tendant vers des chocs. Un pas de discrétisation suffisamment fin est alors nécessaire pour estimer correctement les traces de la solution à l'interface. Dans [A6], nous raffinons globalement le maillage, ce qui est coûteux informatiquement. Nous préférons maintenant raffiner localement en temps et en espace autour de l'interface ; voir à ce sujet le chapitre 6, section 6.3.2. Nous n'avons pas de résultat théorique de stabilité dans le cas général. Par contre, les expériences numériques ont indiqué la stabilité du couplage de la méthode d'interface immergée et du schéma d'intégration. Dans le cas-limite du régime linéaire avec la condition (4.4), ces expériences ont été corroborées par une analyse de stabilité GKS (section 2.4.3).

Les erreurs commises - dispersion et atténuation numériques - sont quantifiables par des techniques d'analyse numérique, et peuvent être rendues négligeables en utilisant un maillage suffisamment fin. En conséquence de quoi, les simulations numériques directes fournissent des solutions de référence, quasi-analytiques. De plus, elles permettent sans difficulté supplémentaire de traiter des configurations avec de multiples interfaces. En contrepartie, ces méthodes ne conduisent évidemment à aucune compréhension théorique des phénomènes étudiés. De plus, les

simulations dans le domaine temporel ne sont pas optimales pour réaliser rapidement des études paramétriques de la solution périodique, sous réserve d'existence de cette dernière.

Méthode d'équilibrage harmonique. Si la source $S(t)$ dans (4.1) est périodique et qu'on ne s'intéresse pas à la solution transitoire, la *méthode d'équilibrage harmonique* (MEH) constitue une méthode de résolution numérique plus efficace que des simulations directes [Oc1]. Nous l'avons mise en oeuvre dans le cas du modèle 1 (4.7) et d'une source sinusoïdale de pulsation ω. Les déplacements élastiques incident (u_I), réfléchi (u_R) et transmis (u_T) sont alors écrits sous la forme de séries de Fourier [52]

$$
\begin{aligned}
u_I(x,\,t) &= \frac{v_0}{\omega}\,\{\cos(\omega\,t - k_0\,x) - 1\}\,,\\
u_R(x,\,t) &= R_0^a + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(R_n^a\,\sin n\,(\omega\,t + k_0\,x) + R_n^b\,\cos n\,(\omega\,t + k_0\,x)\Big)\,,\\
u_T(x,\,t) &= T_0^a + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_n^a\,\sin n\,(\omega\,t - k_1\,x) + T_n^b\,\cos n\,(\omega\,t - k_1\,x)\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

avec $k_0 = \omega/c_0$, $k_1 = \omega/c_1$. Les contraintes élastiques σ_I, σ_R et σ_T sont déduites de (4.10). Les séries sont tronquées à l'ordre N et injectées dans les conditions de saut (4.3)-(4.5). Les termes d'argument trigonométrique identique sont identifiés, et les termes de pulsation supérieure à $N\,\omega$ sont éliminés. La condition (4.3) conduit à $2\,N$ équations linéaires, dans lesquelles R_0^a et T_0^a n'interviennent pas. La condition (4.5) conduit à $2\,N+1$ équations non linéaires, dont une des inconnues est $T_0^a - R_0^a + v_0/\omega$. Ainsi, on obtient un système non linéaire $(4\,N+1)\times(4\,N+1)$, mettant en jeu des nonlinéarités quadratiques

$$
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{X} = \big(\overline{Y},\,R_1^a,\,T_1^a,\,R_1^b,\,T_1^b,\ldots,\,R_N^b,\,T_N^b\big)^T, \qquad \overline{Y} = T_0^a - R_0^a + \frac{v_0}{\omega}.
\tag{4.11}
$$

$\overline{Y}$ est le saut du déplacement élastique moyen à l'interface. Nous reviendrons abondamment sur cette quantité, en sections 4.3 et 4.4.

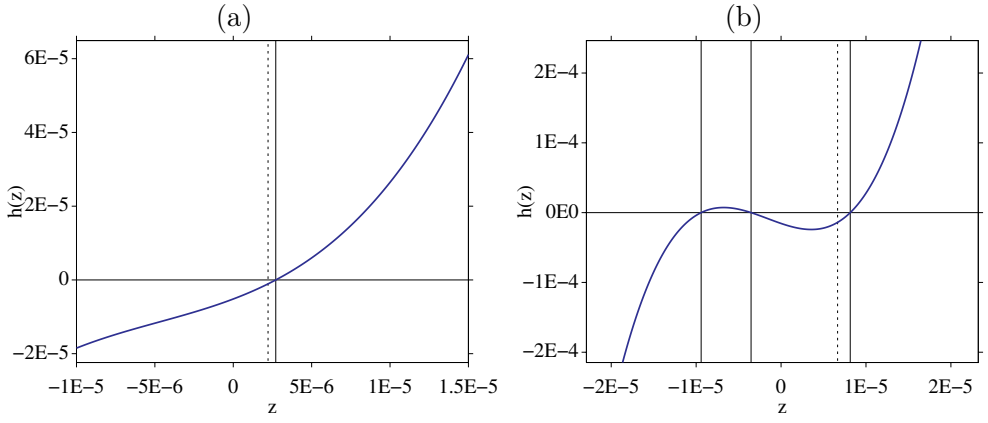


Figure 4.3: Fonction h (4.15) utilisée dans la démonstration du lemme 4.2, pour $v_0 = 2\,10^{-3}$ m/s (a) et $v_0 = 6\,10^{-3}$ m/s (b). Les droites verticales en traits plein et pointillé représentent les solutions exacte et approchée.

Pour résoudre (4.11), on distingue trois cas :

- *Régime linéaire* $|\sigma_I|/(K\,d) \to 0$, $\forall N$: (4.11) revient à un système linéaire dont la solution est facile à calculer analytiquement. Dans ce cas-limite, $\overline{Y} = 0$ et $R_n^{a,b} = T_n^{a,b} = 0$ si $n \geq 2$.

- *Régime non linéaire,* $N = 1$: (4.11) peut être résolu analytiquement. Suivant la valeur des paramètres physiques et de l'amplitude du forçage v_0, (4.11) possède une ou trois solutions.

Lemme 4.2 *Soit les coefficients réels*

$$\begin{aligned} &\zeta = \frac{\rho_1\, c_1\, v_0}{K\, d} = \frac{|\,\sigma_I\,|}{K\, d} > 0, \qquad E = 1 + \frac{\rho_1\, c_1}{\rho_0\, c_0} > 0, \\ &A = \frac{1}{E}\left(\frac{\omega}{v_0}\right)^2 \zeta^4 > 0, \qquad B = \frac{2}{E}\,\frac{\rho_1\, c_1}{K}\,\frac{\omega^2}{v_0}\,\zeta^2 > 0, \\ &C = E + \frac{1}{E}\left(\frac{\rho_1\, c_1\, \omega}{K}\right)^2 - \frac{2}{E}\,\zeta^2, \qquad D = -\frac{2}{E}\,\frac{\rho_1\, c_1\, v_0}{K} < 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

et les fonctions du paramètre de forçage v_0

$$Q(v_0) = \frac{A^2 - 3\,B}{9}, \qquad R(v_0) = \frac{2\,A^3 - 9\,A\,B + 27\,C}{54}. \tag{4.13}$$

Alors il existe une valeur critique $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$ *telle que : si* $v_0 \leq \tilde{v}_0$*, la solution réelle de (4.11) est unique ; si* $v_0 > \tilde{v}_0$*, (4.11) possède trois solutions réelles. Dans tous les cas, on retient la seule solution réelle positive.*

Démonstration. Après quelques manipulations algébriques, les composantes de $\boldsymbol{X}$ dans (4.11) sont exprimées en fonction de T_1^a

$$\begin{aligned} &\overline{Y} = \zeta\, T_1^a, \qquad T_1^b = \left(-\zeta^2\,\frac{\omega}{v_0}\,(T_1^a)^2 - \frac{\rho_1\, c_1\, \omega}{K}\,T_1^a + 2\,\frac{v_0}{\omega}\right)/E, \\ &R_1^a = -\frac{\rho_1\, c_1}{\rho_0\, c_0}\,T_1^a, \qquad R_1^b = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\rho_1\, c_1}{\rho_0\, c_0}\,T_1^b. \end{aligned} \tag{4.14}$$

L'inconnue T_1^a satisfait l'équation cubique

$$h(T_1^a) = A\,(T_1^a)^3 + B\,(T_1^a)^2 + C\,T_1^a + D = 0. \tag{4.15}$$

On retrouve le cas-limite du régime linéaire en éliminant les termes en $\mathcal{O}(\zeta)$ dans (4.12) et (4.14) . En régime non linéaire, les racines de (4.15) peuvent être calculées exactement grâce aux formules de Cardan. Les coefficients de (4.15) sont réels : ainsi, il peut y avoir soit une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées, soit trois racines réelles. La valeur critique $\tilde{v}_0$ séparant ces deux cas satisfait $R^2(\tilde{v}_0) = Q^3(\tilde{v}_0)$ [130]. Avec les valeurs des paramètres utilisées en section 4.2.3, la valeur critique est $\tilde{v_0} \approx 5.01\,10^{-3}$ m/s. Les racines a_0, a_1 et a_3 de (4.15) vérifient

$$a_0 + a_1 + a_2 = -\frac{B}{A} < 0, \qquad a_0\, a_1\, a_2 = -\frac{D}{A} > 0. \tag{4.16}$$

Etant donné que $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \pm\infty$ et $h(0) = D < 0$, il y a toujours une racine réelle $a_0 > 0$. Si $R^2 > Q^3$, cette solution réelle est unique, comme montré en figure 4.3-(a). Si

$R^2 \leq Q^3$, (4.16) implique $a_1 < 0$ et $a_2 < 0$, comme montré en figure 4.3-(b). Les racines négatives a_1 et a_2 conduisent alors à $\overline{Y} < -d$, ce qui est interdit par le critère (4.2). Quelle que soit la valeur v_0, on sélectionne donc la seule racine $T_1^a = a_0 \in \mathbb{R}^+$. □

Par ailleurs, le lemme suivant montre que l'incidence d'une onde sinusoïdale conduit à une dilatation moyenne du crack.

Lemme 4.3 *Pour toute amplitude de forçage $v_0 > 0$, on a $\overline{Y} > 0$. Pour v_0 petit, on a*

$$\overline{Y} \approx 2\,\frac{v_0^2}{\beta^2\,d}\,\frac{1}{1+(\omega/\beta)^2}, \qquad \textit{avec } \beta = K\left(\frac{1}{\rho_0\,c_0}+\frac{1}{\rho_1\,c_1}\right) > 0. \tag{4.17}$$

Démonstration. Lors de la preuve du lemme 4.2, on a obtenu $T_1^a > 0$. De (4.12) et (4.14), on déduit $\overline{Y} > 0$. Pour estimer analytiquement ce saut, on suppose que les effets non linéaires sont faibles, de sorte que ζ est petit mais non nul. On retient alors seulement le coefficient en $\mathcal{O}(\zeta)$ dans (4.12)-(4.15). L'équation cubique devient alors une équation linéaire, dont la solution est représentée par une droite verticale en traits pointillés en figure 4.3. Des manipulations algébriques conduisent alors à l'approximation (4.17). □

- *Régime non linéaire, $N > 1$:* (4.11) est résolu numériquement par la méthode de Newton-Raphson. La détermination de $\boldsymbol{F}$ et de sa matrice jacobienne $\boldsymbol{J}$ a été automatisée en développant des outils de calcul formel : le calcul de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{J}$ pour $N = 100$ dure environ 1 seconde. Les expérimentations numériques indiquent que la racine de (4.11) peut ne pas être unique, comme dans le cas $N = 1$, même pour des valeurs $v_0 < \tilde{v}_0$. La valeur initiale de la méthode de Newton-Raphson doit donc être choisie la plus proche possible de la bonne solution. Pour cela, on utilise les premières composantes de $\boldsymbol{X}$ calculées exactement dans le cas $N = 1$; les autres composantes sont mises à zéro

$$\boldsymbol{X}^0 = \left(\underbrace{\overline{Y},\, R_1^a,\, T_1^a,\, R_1^b,\, T_1^b}_{N=1},\, 0, ...,\, 0\right)^T. \tag{4.18}$$

Cette procédure simple fonctionne bien jusqu'à $v_0 \approx \tilde{v}_0$. Pour des amplitudes plus importantes du forçage, cette approche est couplée à une méthode de continuation basique. On résoud alors de façon séquentielle (4.11), depuis une valeur $v_0^{\min} < \tilde{v}_0$ où l'algorithme converge

$$\left\{\begin{array}{l} v_j = v_0^{\min} + j\,\dfrac{v_0 - v_0^{\min}}{N_{\max}}, \\ \boldsymbol{X}_j^0 = \boldsymbol{X}_{j-1}, \qquad j = 1, ..., N_{\max}, \end{array}\right. \tag{4.19}$$

avec $\boldsymbol{X}_0^0$ donné par (4.18). Cet algorithme est très robuste, même pour $v_0 \gg \tilde{v}_0$.

Pour conclure cette section, indiquons que la MEH ne conduit à aucun renseignement théorique sur la solution, excepté dans le cas simple $N = 1$. Par contre, elle est très efficace pour des études paramétriques de la solution. De plus, son domaine de validité est arbitrairement grand, du moment que l'initialisation est réalisée correctement et qu'un nombre N suffisamment grand de modes de Fourier est utilisé.

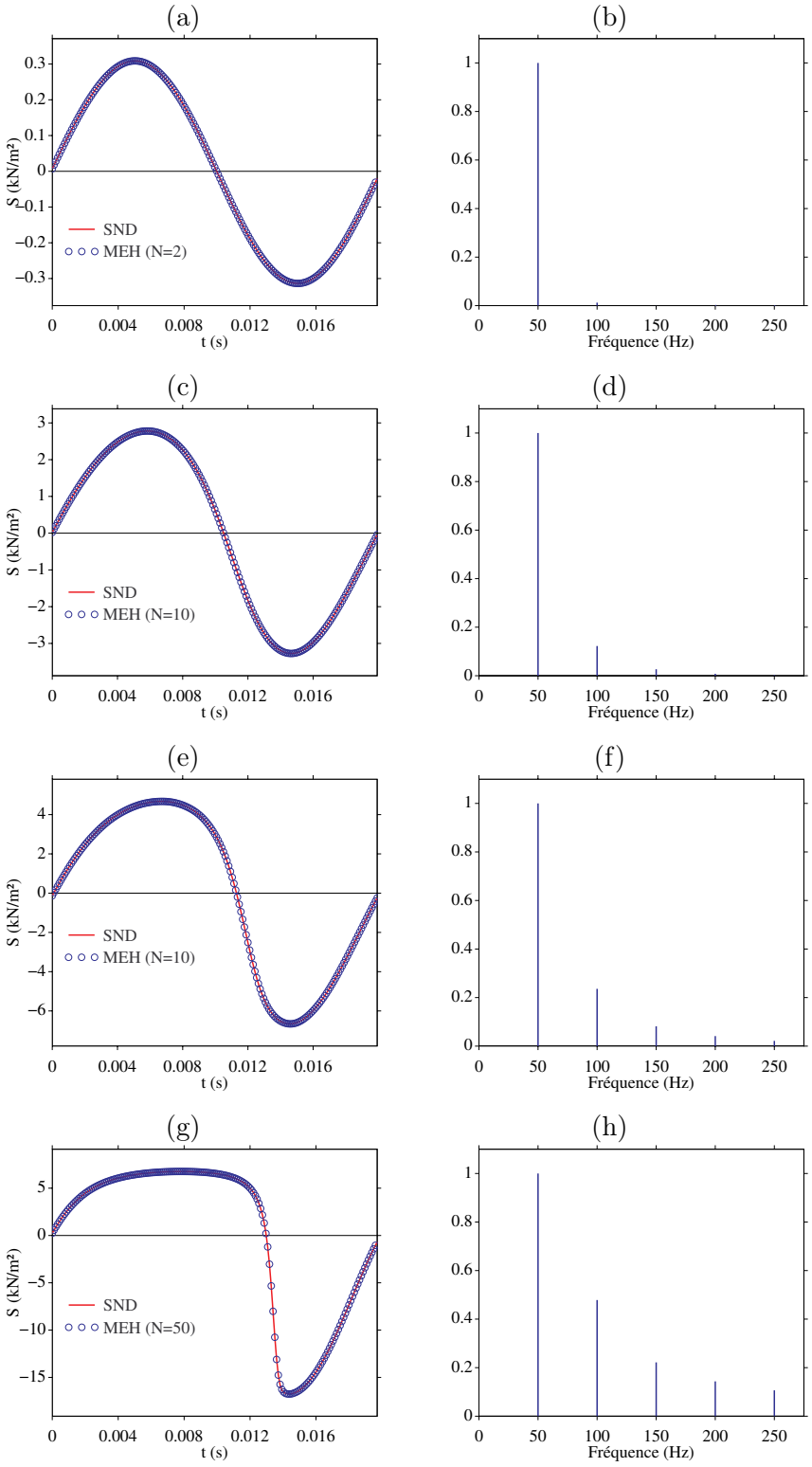


Figure 4.4: Contrainte élastique transmise, modèle 1 (4.7) : évolution temporelle sur une période (gauche), amplitude normalisée des harmoniques (droite). Amplitude de la vitesse incidente : $v_0 = 10^{-4}$ m/s (a-b), $v_0 = 10^{-3}$ m/s (c-d), $v_0 = 2\,10^{-3}$ m/s (e-f) et $v_0 = 5\,10^{-3}$ m/s (g-h).

4.2.3 Expériences numériques

Pour illustrer l'influence des conditions de saut non linéaires (4.3)-(4.5) sur la diffraction des ondes, on considère un crack décrit par le modèle 1 (4.7), une source sinusoïdale de fréquence 50 Hz, et les paramètres physiques

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho_1 = 1200 \ \text{kg.m}^{-3}, & K = 1.3\,10^9 \ \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}, \\ c_0 = c_1 = 2800 \ \text{m.s}^{-1}, & d = 6.1\,10^{-6}\,\text{m}. \end{cases}$$

L'amplitude v_0 de la vitesse élastique incidente varie de 10^{-4} m/s à $5\,10^{-3}$ m/s. Cette dernière amplitude correspond à une déformation maximale $\varepsilon = v_0/c_0 \approx 10^{-6}$, de sorte que le cadre de l'élastodynamique linéaire (4.1) est encore valide [1]. On met en oeuvre les méthodes de simulation numérique directe (SND) et d'équilibrage harmonique (MEH) décrites en section 4.2.2.

La figure 4.4 représente l'évolution temporelle de la contrainte élastique transmise à travers le crack durant une période, ainsi que l'amplitude normalisée des harmoniques générées. Plus l'amplitude v_0 augmente, plus la sinusoïde est distordue. Le nombre d'harmoniques nécessaires N pour obtenir un bon accord de la MEH avec la SND augmente en conséquence.

La figure 4.5 représente l'évolution spatiale du déplacement élastique autour du crack, à un instant donné, le régime périodique étant atteint. Les valeurs moyennes des déplacements incident et réfléchi ($x < \alpha$) et transmis ($x > \alpha$) sont représentées par des traits pointillés horizontaux. Avec $v_0 = 10^{-4}$ m/s (a), ces valeurs moyennes apparaissent continues à travers α, à l'échelle de la figure. Pour des amplitudes v_0 plus importantes, on observe un saut positif de α^- à α^+. Ce saut, qui revient à une dilatation moyenne du crack, croît avec v_0 (b,c,d). Il correspond à $\overline{Y}$ dans (4.11), estimé dans le lemme 4.3.

Enfin, la figure 4.6 représente l'évolution temporelle de $\overline{Y}(t) = [u(\alpha, t)]$ sur une période. La valeur maximale de $\overline{Y}$ croît avec v_0, tandis que la valeur minimale de $\overline{Y}$ décroît et est bornée par $-d$, comme requis par le critère (4.2). Ces observations sont analysées dans les sections suivantes.

4.3 Analyse locale

4.3.1 Méthode de perturbation

On se place ici dans le cas particulier du modèle 1 (4.7) et d'un forçage sinusoïdal (4.1)

$$S(t) = 2\,v_0\,\rho_0\,c_0^2\,\sin\Omega\,t, \tag{4.20}$$

qui conduit à une vitesse élastique incidente d'amplitude v_0. En adaptant la démarche suivie dans [135, 19], on obtient une équation différentielle ordinaire (EDO) non autonome satisfaite par $Y(t) = [u(\alpha, t)]$

$$\frac{d\,Y}{d\,t} + \beta\,\frac{Y}{1 + Y/d} = 2\,v_0\,\sin\Omega\,t, \tag{4.21}$$

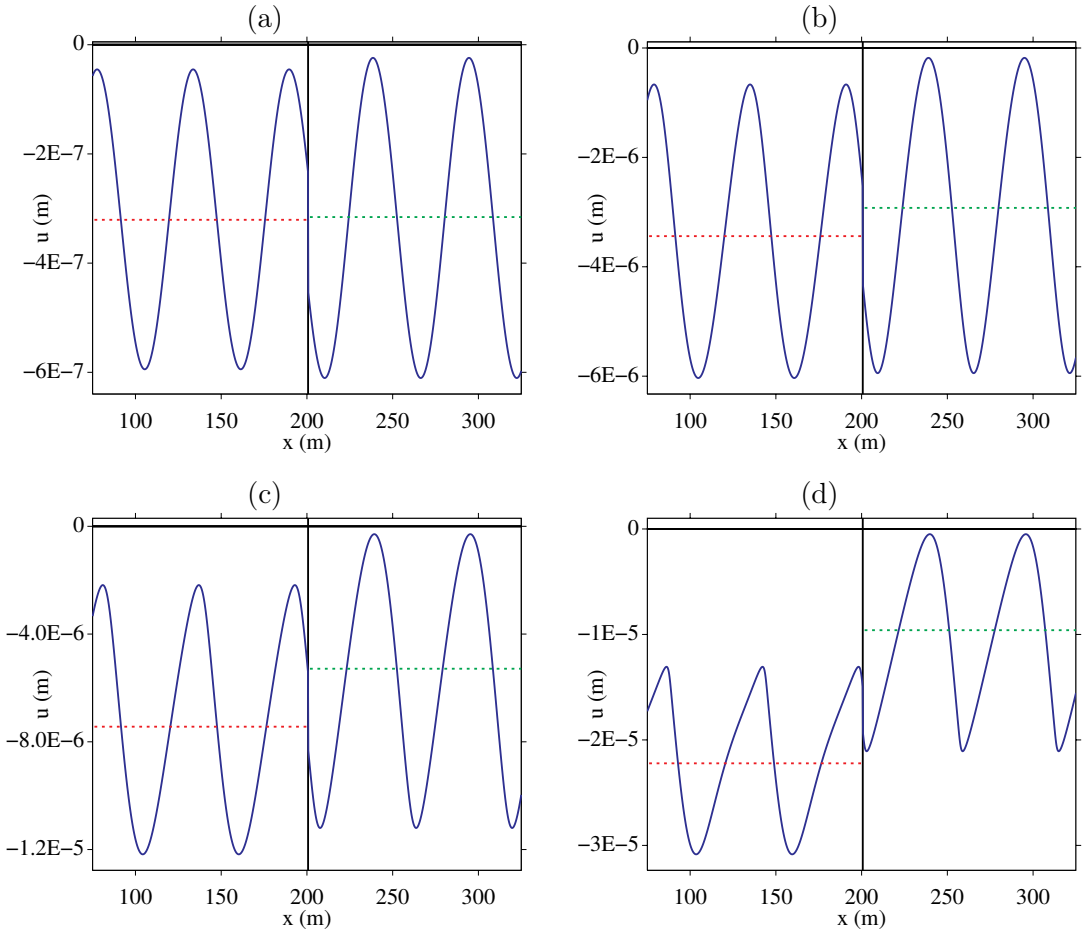


Figure 4.5: Déplacement élastique, pour $v_0 = 10^{-4}$ m/s (a), $v_0 = 10^{-3}$ m/s (b), $v_0 = 2\,10^{-3}$ m/s (c) et $v_0 = 5\,10^{-3}$ m/s (d). La droite verticale représente le crack en $\alpha = 200$ m. Les lignes horizontales pointillées rouge et verte représentent la valeur moyenne du déplacement élastique autour de α. La loi de contact est le modèle 1 (4.7).

avec $\beta = K((\rho_0\, c_0)^{-1} + (\rho_1\, c_1)^{-1})$, identique au coefficient défini dans (4.17). L'analyse dimensionnelle de (4.21) montre que Y est égale à d fois une fonction de $\frac{v_0}{\beta\, d}$, $\frac{\Omega}{\beta}$ et $\Omega\, t$. Pour résoudre (4.21), on suppose $|Y|/d < 1$, ce qui conduit à la série

$$\frac{d\,Y}{d\,t} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{d^n}\, Y^{n+1} = 2\, v_0\, \sin \Omega\, t. \tag{4.22}$$

Une solution approchée de (4.22) est cherchée par une *méthode de perturbation* [13]

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d^n}\, y_n(t). \tag{4.23}$$

Rien n'assure a priori que la série (4.23) converge : $|Y|/d < 1$ est toujours satisfait lorsque $Y < 0$, mais ce n'est vrai pour $Y > 0$ que si $\frac{v_0}{\beta\, d}$ est suffisamment petit. En insérant (4.23) dans (4.22)

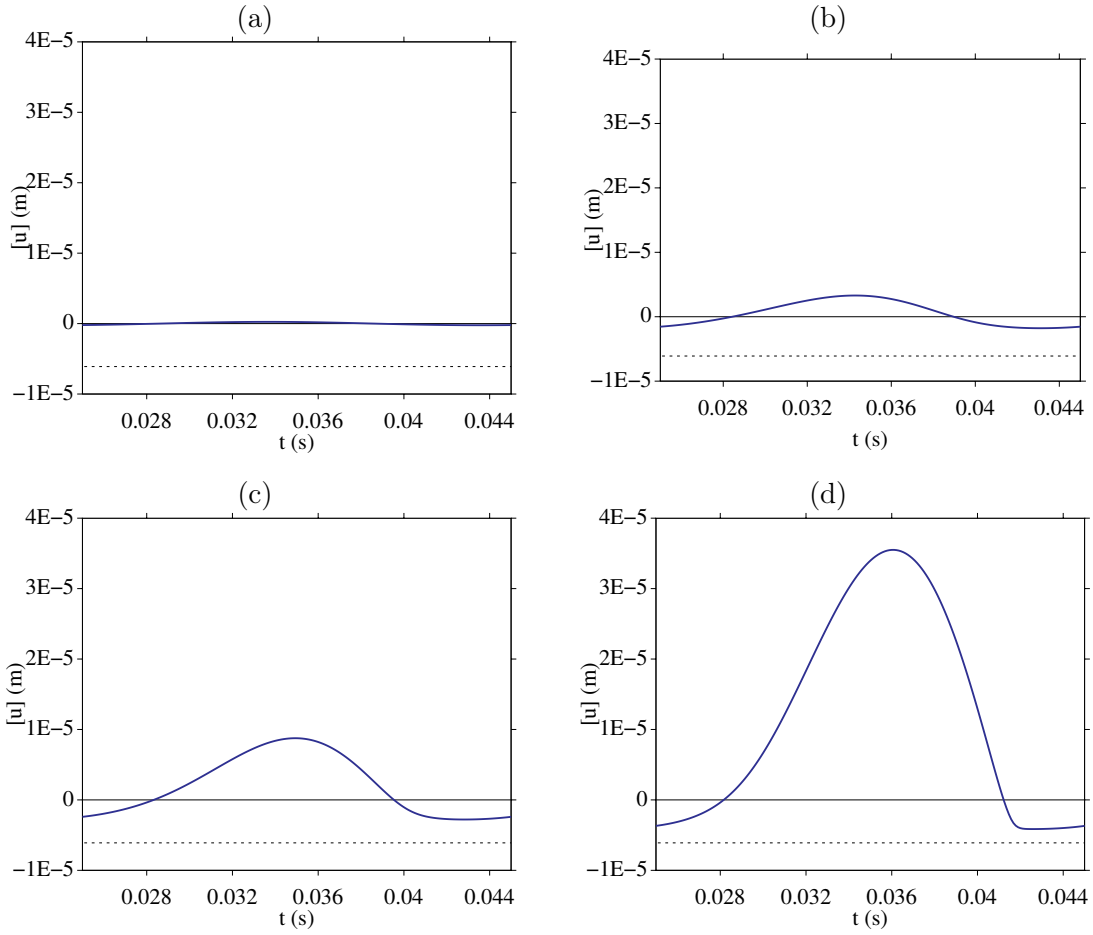


Figure 4.6: Evolution temporelle de $\overline{Y}(t) = [u(\alpha,\, t)]$, pour $v_0 = 10^{-4}$ m/s (a), $v_0 = 10^{-3}$ m/s (b), $v_0 = 2\,10^{-3}$ m/s (c) et $v_0 = 5\,10^{-3}$ m/s (d). La droite horizontale en pointillés représente la compressibilité maximale $-d$ autorisée par le modèle 1 (4.7).

et en identifiant les termes de puissance identique en d, on obtient les séries infinies couplées

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\,y_0}{d\,t} + \beta\, y_0 = 2\, v_0\, \sin \Omega\, t,\\
&\frac{d\,y_1}{d\,t} + \beta\, y_1 = \beta\, y_0^2,\\
&\frac{d\,y_2}{d\,t} + \beta\, y_2 = \beta\, y_0 \left(2\, y_1 - y_0^2\right),\\
&\frac{d\,y_3}{d\,t} + \beta\, y_3 = \beta\, \left(2\, y_0\, y_2 + y_1^2 - 3\, y_0^2\, y_1 + y_0^4\right),
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

et ainsi de suite. Contrairement à la méthode d'équilibrage harmonique, il n'y a pas d'influence de l'ordre de troncature N sur la précision des solutions Y_n de rang $n < N$. Les équations récursives et linéaires obtenues de la sorte sont beaucoup plus simples à résoudre que l'EDO non linéaire (4.21), même si le calcul analytique de Y_n pour $n \geq 2$ est très fastidieux. Ce calcul a été automatisé en développant des outils de calcul formel. Cependant, comme le nombre de termes

dans Y_n est approximativement $2^{2\,n+1}$, les ordres élevés sont actuellement hors d'atteinte, tant du point de vue de la mémoire requise que du temps de calcul. Par exemple, le calcul de Y_n jusqu'à $N = 8$ dure 20 mn. L'ordre $N = 12$ est la limite atteinte. En posant $\varphi_0 = \arctan \frac{\Omega}{\beta}$, la solution périodique d'ordre 0 de (4.23)-(4.24) est

$$Y_0(t) = 2\,\frac{v_0}{\beta}\,\frac{1}{\sqrt{1+(\Omega/\beta)^2}}\,\sin(\Omega\,t-\varphi_0). \tag{4.25}$$

En posant $\varphi_1 = \arctan \frac{\beta}{2\,\Omega}$, la solution périodique d'ordre 1 de (4.23)-(4.24) est

$$Y_1(t) = 2\,\frac{v_0^2}{\beta^2\,d}\;\frac{1}{1+(\Omega/\beta)^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(2\,\Omega/\beta)^2}}\,\sin(2\,\Omega\,t-2\,\varphi_0+\varphi_1)\right). \tag{4.26}$$

On déduit deux propriétés de (4.26). Tout d'abord, la valeur moyenne $\overline{Y}_1$ de Y_1 n'est pas nulle

$$\overline{Y}_1 = 2\,\frac{v_0^2}{\beta^2\,d}\;\frac{1}{1+(\Omega/\beta)^2} > 0. \tag{4.27}$$

On retrouve l'estimation de la dilatation moyenne (4.17), obtenue par la méthode d'équilibrage harmonique dans le cas d'un unique mode de Fourier. Plus généralement, on peut montrer que la valeur moyenne $\overline{Y}_{2n+1}$ de Y_{2n+1} est proportionnelle à $d\left(\frac{v_0}{\beta\,d}\right)^{2n+2}$, et $\overline{Y}_{2n} = 0$. La deuxième propriété déduite de (4.26) concerne le terme de pulsation $2\,\Omega$. Son importance est quantifiée en effectuant le rapport des amplitudes des termes sinusoïdaux dans (4.26) et (4.25)

$$\gamma_2 = \frac{v_0}{\beta\,d}\,\frac{1}{\sqrt{1+(\Omega/\beta)^2}\,\sqrt{1+(2\,\Omega/\beta)^2}}. \tag{4.28}$$

Ainsi, les effets non linéaires augmentent avec $\frac{v_0}{\beta\,d}$ et diminuent avec $\frac{\Omega}{\beta}$. Le coefficient γ_2 permet d'estimer de façon simple l'importance des effets non linéaires, en fonction des paramètres physiques et de la source excitatrice.

4.3.2 Expériences numériques

En figure 4.7, on compare les solutions obtenues par la méthode de perturbation MP (4.23)-(4.24) et par intégration numérique directe de l'équation différentielle (4.21). Pour cette dernière, on met en oeuvre une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK 4) à pas constant, avec $Y(0) = 0$. Le nombre de pas d'intégration est tel que RK 4 peut être considérée comme la solution de référence. Les paramètres physiques sont les mêmes qu'en section 4.2.3. A la différence de la figure 4.6, l'échelle verticale des figures n'est pas constante.

Pour t petit, les deux solutions présentées en figure 4.7 diffèrent, la méthode de perturabtion ne prenant pas en compte les solutions transitoires. Plus v_0 augmente, plus le nombre de modes N nécessaire pour obtenir un bon accord augmente. Avec $v_0 = 1.5\,10^{-3}$ m/s (c), la limite de validité du développement (4.22) est atteinte. Avec $v_0 = 5\,10^{-3}$ m/s (d), seule la solution obtenue par simulation directe est présentée, la méthode de perturbation ne convergeant pas.

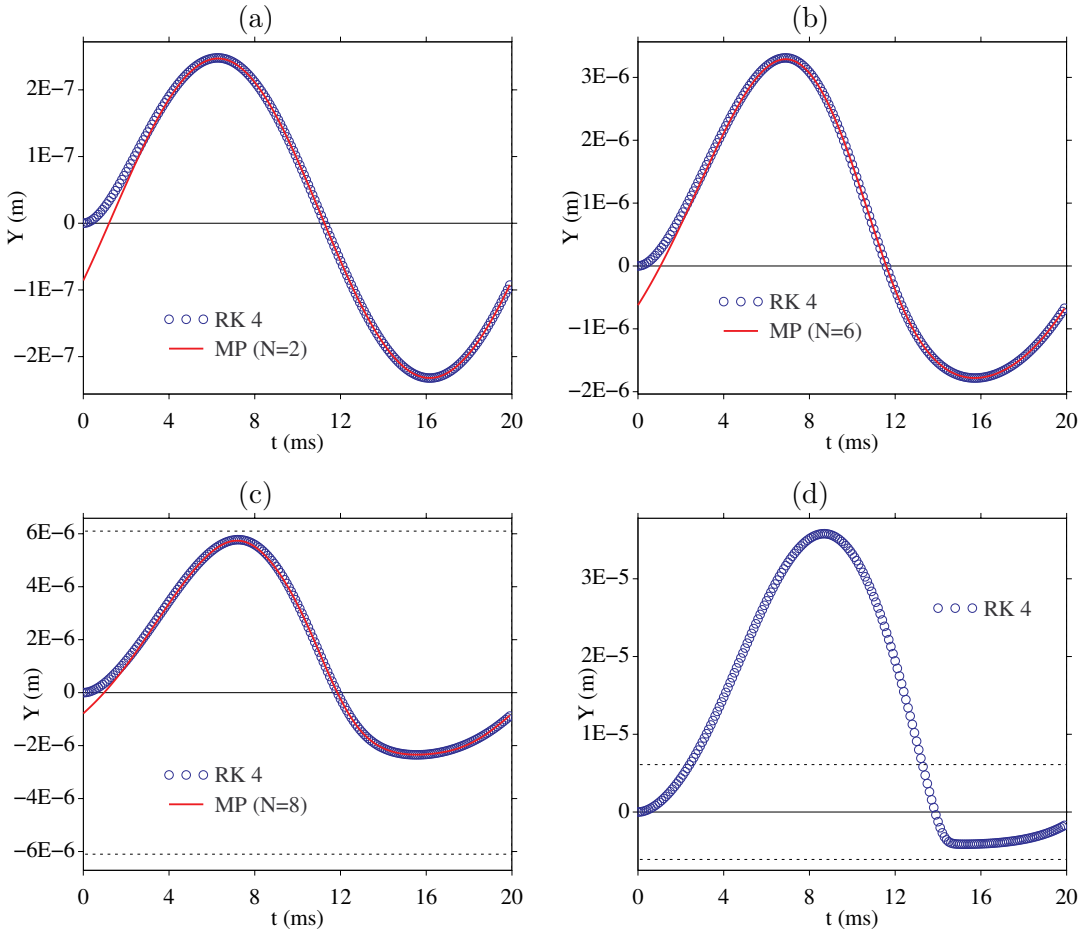


Figure 4.7: Evolution temporelle de $\overline{Y}(t) = [u(\alpha,\, t)]$, pour $v_0 = 10^{-4}$ m/s (a), $v_0 = 10^{-3}$ m/s (b), $v_0 = 1.5\,10^{-3}$ m/s (c) et $v_0 = 5\,10^{-3}$ m/s (d). Les droites horizontales en pointillés délimitent le domaine de validité de la méthode de perturbation.

En figure 4.8, on représente une étude paramétrique de la solution en fonction de l'amplitude v_0 de la vitesse élastique incidente. On compare les estimations de la dilatation moyenne $\overline{Y}$ (4.27) et de l'amplitude normalisée de la deuxième harmonique γ_2 (4.28), obtenues par méthode de perturbation, aux solutions de référence obtenues par la méthode d'équilibrage harmonique. En échelle log-log, on observe que $\overline{Y}$ est très proche de la droite de pente 2 déduite de (4.27), même pour des valeurs importantes de v_0 (a) : ainsi, même si la série (4.23) diverge, son premier terme constant fournit une estimation très précise de la dilatation moyenne du crack. En section 4.4, on qualifiera l'ordre de précision obtenu. Concernant les harmoniques, l'amplitude du deuxième harmonique Γ_2 tend bien vers γ_2 pour v_0 petit. L'amplitude de chaque harmonique croît strictement en fonction de v_0. Enfin, à v_0 fixé, l'amplitude des Γ_i est une fonction strictement décroissante de l'ordre i.

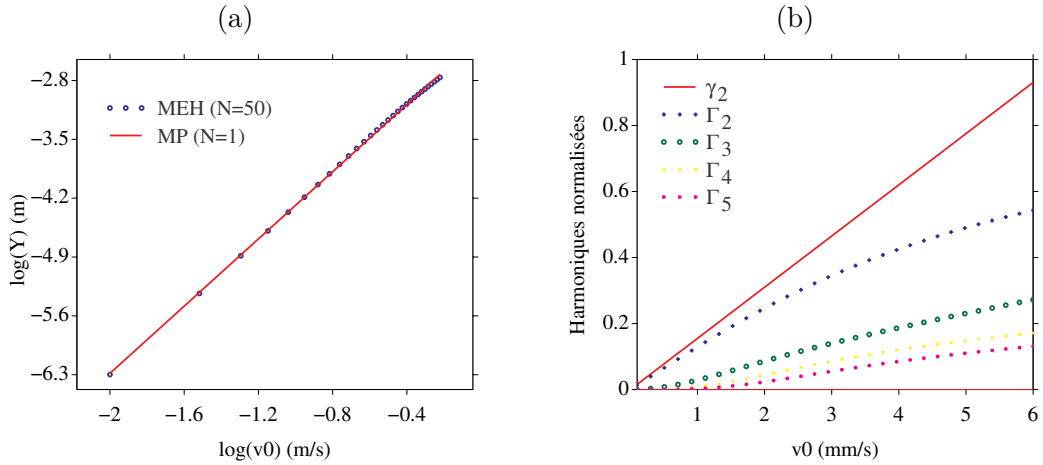


Figure 4.8: Etude paramétrique en fonction de v_0 : dilatation $\overline{Y}$ (a), harmoniques (b).

4.4 Analyse globale

4.4.1 Forçage sinusoïdal

Dans la section précédente, on a mené une analyse locale, valide pour une onde incidente monochromatique de très petite amplitude et pour le modèle 1 de contact (4.7). Cette analyse a conduit à un phénomène typiquement non linéaire - la dilatation moyenne $\overline{Y}$ du crack - et à une estimation de cette dilatation en fonction des paramètres physiques (4.27). On montre ici que les résultats obtenus sont valides quelle que soit l'amplitude du forçage, le signal périodique, et la loi de contact $\mathcal{F}$ dans (4.6). Pour la clarté de l'exposé, on traite tout d'abord le cas d'une source monochromatique (4.20). En définissant les paramètres adimensionnels

$$
\begin{aligned}
&A = \frac{2\,v_0}{\beta\,d}, \qquad \omega = \frac{\Omega}{\beta}, \qquad T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi\,\beta}{\Omega},\\
&y = \frac{[u(\alpha,\,t)]}{d}, \quad f(y) = -\mathcal{F}(y), \qquad f_{\min} = -\mathcal{F}_{\max},
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

l'équation d'évolution du saut de u (4.21) se met sous la forme d'une équation différentielle non autonome

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\,y}{d\,t} = f(y) + A\,\sin\omega t = F(t,\,y), \qquad \omega > 0, \qquad 0 \le A < +\infty,\\
f :]-1,\,+\infty[\to]f_{\min},\,+\infty[, \quad \lim\limits_{y\to -1} f(y) = +\infty, \quad -\infty \le f_{\min} < 0,\\
f(0) = 0, \quad f^{'}(0) = -1, \quad f^{'}(y) < 0 < f^{''}(y),\\
y(0) = y_0 \in]-1,\,+\infty[.
\end{cases}
\tag{4.30}
$$

Notre objectif étant d'étudier les propriétés qualitatives de la solution périodique de (4.30), il convient tout d'abord de démontrer l'existence d'une telle solution, ainsi que son caractère attractif, quelle que soit la donnée initiale. C'est l'objet de la proposition 4-1 de [A8].

Proposition 4.1 *La solution T-périodique $Y(t)$ de (4.30) existe et est unique. De plus, elle est exponentiellement stable.*

La démonstration de cette proposition repose sur des techniques classiques pour systèmes dynamiques : méthode de l'isocline, théorème de l'entonnoir [80], application de premier retour de Poincaré [71]. Au cours de la démonstration, on doit distinguer deux cas suivant l'amplitude du forçage : $A = 0$, $0 < A < |f_{\min}|$, et $A \geq |f_{\min}|$. Néanmoins, le portrait de phase de (4.30) est le même dans tous les cas (figure 4.9).

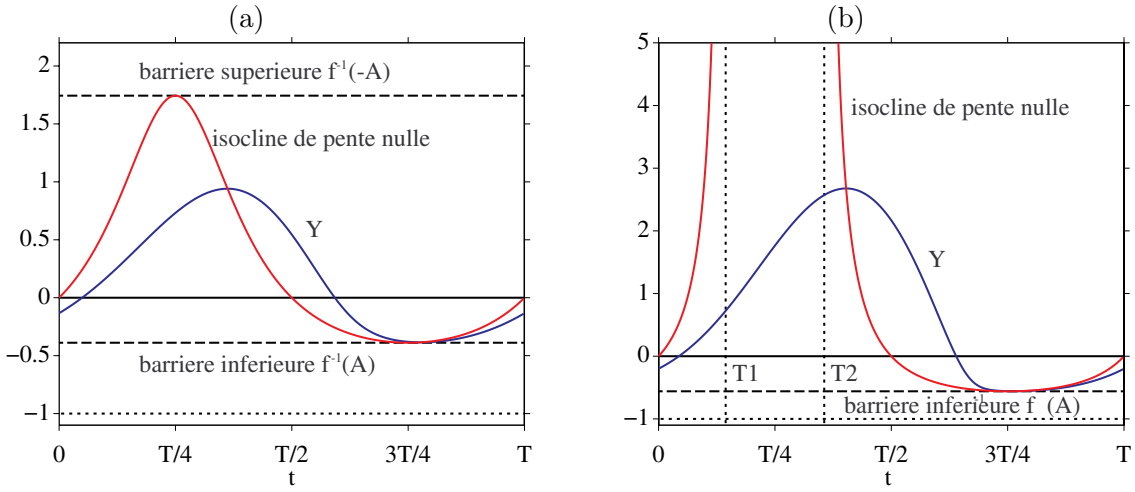


Figure 4.9: Portrait de phase de (4.30) dans le cas du modèle 1 (4.7), pour $A = 0.6$ (a) et $A = 1.2$ (b) : isocline de pente nulle et solution périodique Y. Lignes horizontales discontinues : barrière inférieure $f^{-1}(A) < 0$, barrière supérieure $f^{-1}(-A) > 0$ (a). Lignes horizontales en pointillés : frontière $y = -1$ imposée par la loi de contact. En (b), les lignes verticales en T_1 et T_2 représentent les asymptotes de l'isocline de pente nulle.

Le principale résultat est alors le théorème 5-4 de [A8] qui stipule que l'impact d'une onde sinusoïdale sur le crack conduit à une valeur moyenne positive du saut du déplacement élastique, quels que soient la loi de contact (4.5) et l'amplitude de l'onde incidente.

Théorème 4.1 *La valeur moyenne $\overline{Y}$ de la solution T-périodique Y de (4.30) est positive et croît strictement avec l'amplitude du forçage*

$$\overline{Y} > 0, \qquad \frac{\partial \overline{Y}}{\partial A} > 0.$$

Pour de petites amplitudes, on a l'estimation locale

$$\overline{Y} = \frac{f''(0)}{4} \frac{A^2}{1+\omega^2} + \mathcal{O}(A^4). \tag{4.31}$$

Ce résultat justifie et généralise les observations numériques et l'analyse locale présentées dans les sections précédentes. Dans le cas du modèle 1 (4.7) et à partir des variables adimensionnées (4.29), l'estimation (4.31) revient à la dilatation obtenue par méthode de perturbation (4.27) et par méthode d'équilibrage harmonique avec un mode de Fourier (4.17).

La convexité de f joue un rôle crucial pour la démonstration de ce théorème, tant sur le domaine de définition de f, pour le résultat général, qu'en 0 pour l'estimation locale. L'évolution de $\overline{Y}$ en fonction de A est représentée en figure 4.10. Pour $A = 2$, l'erreur relative entre $\overline{Y}$ et son estimation locale (4.31) est inférieure à 5%. La figure 4.10-(a) peut induire en erreur : elle semble indiquer que $\overline{Y}$ est toujours au-dessus de son estimation (4.31). Il n'en est rien : pour des valeurs importantes du forçage, la position de $\overline{Y}$ par rapport à son estimation n'est pas constante (b).

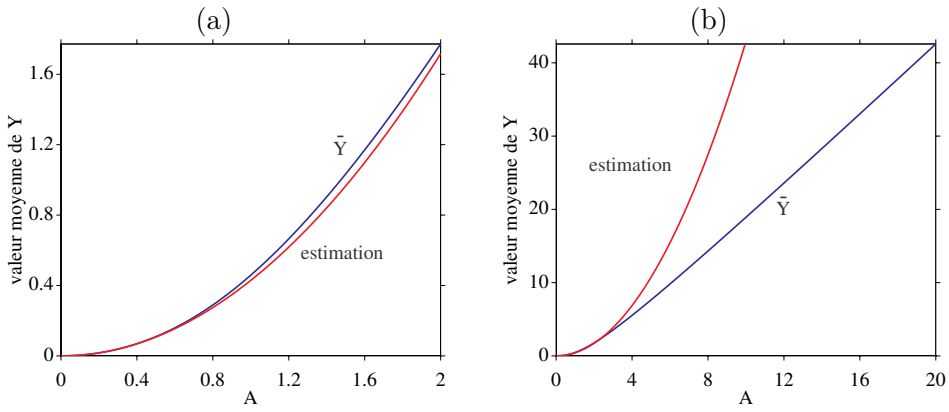


Figure 4.10: Evolution de $\overline{Y}$ avec l'amplitude du forçage A, pour $0 \leq A \leq 2$ (a) et $0 \leq A \leq 20$ (b), dans le cas du modèle 1 (4.7). Voir théorème 4.1.

Avant de conclure cette section, notons qu'une analyse des ouverture et fermeture maximales du crack sur une période a aussi été menée dans le cas d'un forçage sinusoïdal. Le lecteur intéressé trouvera les résultats et des estimations de ces quantités dans [A8].

4.4.2 Forçage périodique

Pour une source $S(t)$ quelconque (4.1), on peut obtenir des résultats généraux en supposant que S est T-périodique et de valeur moyenne nulle. Cette dernière hypothèse est physiquement réaliste : dans le cas contraire, le déplacement élastique incident croît linéairement avec t. En définissant les paramètres adimensionnés et la décomposition en série de Fourier de la source

$$
\begin{aligned}
& v_0 = \frac{1}{2\,\rho_0\,c_0^2}\,\max_{t\in[0,\,T]}|S(t/\beta)|\,, \quad A = \frac{2\,v_0}{\beta\,d}, \quad y = \frac{[u(\alpha,\,t)]}{d}, \quad f(y) = -\mathcal{F}(y), \\
& g(t) = \frac{1}{2\,\rho_0\,c_0^2\,v_0}\,|S(t/\beta)| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\sin n\omega t + b_n\,\cos n\omega t)\,, \quad T = \beta\,T_0, \quad \omega = \frac{2\,\pi}{T},
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

on obtient le problème modèle

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d\,y}{d\,t} = f(y) + A\,g(t) = F(t,\,y), \\
f :]-1,\,+\infty[\to]f_{\min},\,+\infty[, \quad \lim_{y \to -1} f(y) = +\infty, \quad -\infty \leq f_{\min} < 0, \\
f(0) = 0, \quad f^{'}(0) = -1, \quad f^{'}(y) < 0 < f^{''}(y), \\
g(t+T) = g(t), \quad \overline{g} = 0, \quad |g(t)| \leq 1, \quad \max_{t \in [0,\,T]} |g(t)| = 1, \quad 0 \leq A < +\infty, \\
y(0) = y_0 \in]-1,\,+\infty[.
\end{array}
\right. \tag{4.33}
$$

La proposition 6-1 de [A8], généralisant la proposition 4.1, garantit l'existence, l'unicité et l'attractivité exponentielle de la solution T-périodique $Y(t)$. Le principal résultat est le théorème 6-3 de [A8] :

Théorème 4.2 *La valeur moyenne de la solution T-périodique Y dans (4.33) est positive et croît strictement avec l'amplitude du forçage :*

$$\overline{Y} > 0, \qquad \frac{\partial\,\overline{Y}}{\partial\,A} > 0.$$

Pour de faibles amplitudes de forçage, on a l'estimation locale

$$\overline{Y} = f^{''}(0)\,\left(\frac{A}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{1 + (n\,\omega)^2} + \mathcal{O}\left(A^3\right), \tag{4.34}$$

où a_n and b_n sont les coefficients de Fourier de la source (4.32).

Dans le cas d'une source sinusoïdale pure, $a_1 = 1$ and $a_{n>1} = b_n = 0$: (4.34) revient à l'estimation (4.31). Notons que l'ordre de précision de (4.34) a chuté d'une unité par rapport à (4.31).

4.5 Conclusion

Bilan. L'interaction d'ondes avec des contacts non linéaires est un sujet en plein essor depuis le début des années 2000, désigné par la terminologie de *contact acoustic nonlinearity*. L'analyse théorique menée au cours de ce chapitre est une contribution à ce thème de recherche. Nous avons relié une grandeur fondamentale des défauts de contact - la compressibilité maximale d - à des grandeurs mesurbales acoustiquement. En effet, les champs diffractés mesurables dépendent de façon simple la dilatation moyenne $\overline{Y}$. A partir de (4.34), on dispose ainsi d'une méthode simple pour déterminer d.

Perspectives. Les aspects théoriques, centraux dans [A8], ont essentiellement porté sur l'étude de la dilatation moyenne du crack. Une analyse systématique de l'amplitude des *harmoniques* reste à mener, généralisant (4.28). On pourra s'inspirer des techniques mises en oeuvre dans l'analyse des harmoniques d'une clarinette au voisinage du seuil de bifurcation [134]. Une estimation de l'erreur commise sur les coefficients $R_n^{a,b}$ et $T_n^{a,b}$ de la méthode d'équilibrage harmonique (4.10), en fonction de l'ordre de troncature N, constituerait un résultat intéressant.

La monotonie de la *loi de contact* $\mathcal{F}$ dans (4.6) est un ingrédient essentiel pour prouver les propriétés du crack : la croissance stricte de $\mathcal{F}$ conduit à l'unicité et l'attractivité de la solution périodique. De plus, la concavité stricte de $\mathcal{F}$ conduit à la croissance stricte de la valeur moyenne $\overline{Y}$ avec l'amplitude du forçage. Relaxer ces hypothèses peut conduire à des situations beaucoup plus complexes et riches, et nécessiter des outils mathématiques plus sophistiqués. On pense notamment à des modèles hystérétiques d'interface [84, 66].

Nous nous sommes focalisés sur le comportement mécanique du crack en traction / compression. La prise en compte des *efforts tangentiels* et de leur couplage avec les efforts normaux est essentielle en vue d'études en dimensions supérieures [126]. La modélisation numérique de l'interaction d'ondes avec des interfaces non linéaires reste aussi à mener en dimension deux, généralisant la méthode présentée en section 3.3. Les matrices d'extrapolation devant être recalculées à chaque pas de temps, le coût informatique sera alors nettement plus important que pour les conditions linéaires.

L'étude de l'interaction d'ondes avec un *réseau de nonlinéarités* est un sujet en plein développement en acoustique. Des travaux sur des thèmes semblables sont réalisés depuis longtemps dans d'autres domaines de la physique, par exemple en mécanique quantique, et portent notamment sur des effets de localisation d'énergie au voisinage des nonlinéarités. En section 8.2.1, on détaille différentes pistes de travail sur ce sujet.

Part III

Ondes et milieux dissipatifs

Chapter 5

Ondes viscoélastiques

Travail réalisé avec Joël Piraux
Production associée : article [A10]

5.1 Introduction

De nombreux milieux, tels que les matériaux biologiques ou les roches en géosciences, mettent en jeu des mécanismes de dissipation d'énergie importants. Lorsqu'une onde se propage, son énergie mécanique décroît alors au cours du temps. Les mécanismes fondamentaux - frottement grain à grain, réaction chimique, ... - à l'origine de cette dissipation sont ici systématiquement ignorés, au profit d'une approche purement phénoménologique : quel modèle permet de reproduire les phénomènes observés ?

Pour le choix du modèle, un critère important concerne la solvabilité des équations obtenues. Les milieux viscoélastiques sont en effet des matériaux *à mémoire*, nécessitant de connaître toute l'histoire passée de la solution pour déterminer sa valeur à un instant donné. Ce stockage est impossible à réaliser informatiquement pour des tailles de domaine ou des durées de simulation non triviales. Certains modèles de viscoélasticité permettent d'éviter ce stockage en considérant des variables supplémentaires satisfaisant des équations différentielles locales en temps. C'est le cas du modèle de *Zener*, retenu ici. Nos contributions portent sur la résolution des équations d'évolution et sur la discrétisation des conditions de saut aux interfaces.

La section 5.2 synthétise divers travaux sur ce thème [138, 30] et corrige des erreurs récurrentes. La résolution numérique des équations d'évolution fait l'objet de la section 5.3, où une technique de *splitting* est mise en oeuvre : la partie propagative est résolue par un schéma ADER d'ordre 4, tandis que la partie dissipative est résolue exactement. Les conditions de saut aux frontières sont discrétisées par une méthode d'interface immergée, permettant de traiter l'interface entre un milieu viscoélastique et différents milieux: le vide, un fluide parfait, un solide élastique ou un autre solide viscoélastique. Des expériences numériques sont proposées en section 5.4.

5.2 Modélisation physique

5.2.1 Modèle de Zener

Dans un solide viscoélastique soumis à de petites perturbations, la contrainte dépend linéairement des valeurs passées de la vitesse de déformation, soit, en dimension un,

$$\sigma = \psi * \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \tag{5.1}$$

où σ est la contrainte, $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ est la déformation, u est le déplacement, et $\psi(t)$ est la fonction de relaxation. Le choix du modèle de viscoélasticité, c'est-à-dire de la fonction ψ, dépend du milieu considéré et de contingences calculatoires. Le *modèle de Maxwell* est adapté à des fluides visqueux. Le *modèle de Kelvin-Voigt* est parfois utilisé en géosciences, car le coût requis en mémoire informatique est faible [33]. Cependant, certaines propriétés de ce modèle ne sont pas réalistes : ainsi, la vitesse de phase d'une onde propagée à travers un solide de Kelvin-Voigt croît de façon non bornée avec la fréquence.

Nous utilisons ici le *modèle de Zener*, ou solide standard, qui reproduit correctement le comportement mécanique des solides usuels soumis à des essais de relaxation : suite à un échelon causal de déformation, la contrainte à appliquer passe instantanément de 0 à π_u (module "unrelaxed"), puis décroît jusqu'à la valeur non nulle π_r (module "relaxed"). Par ailleurs, la croissance de la vitesse de phase avec la fréquence est correctement reproduite, de $c_0 = \sqrt{\pi_r/\rho}$ pour une fréquence nulle à $c_\infty = \sqrt{\pi_u/\rho}$ pour une fréquence infinie, où ρ est la masse volumique. Des exemples de courbe de relaxation et de courbe de dispersion sont présentés en figure 5.1.

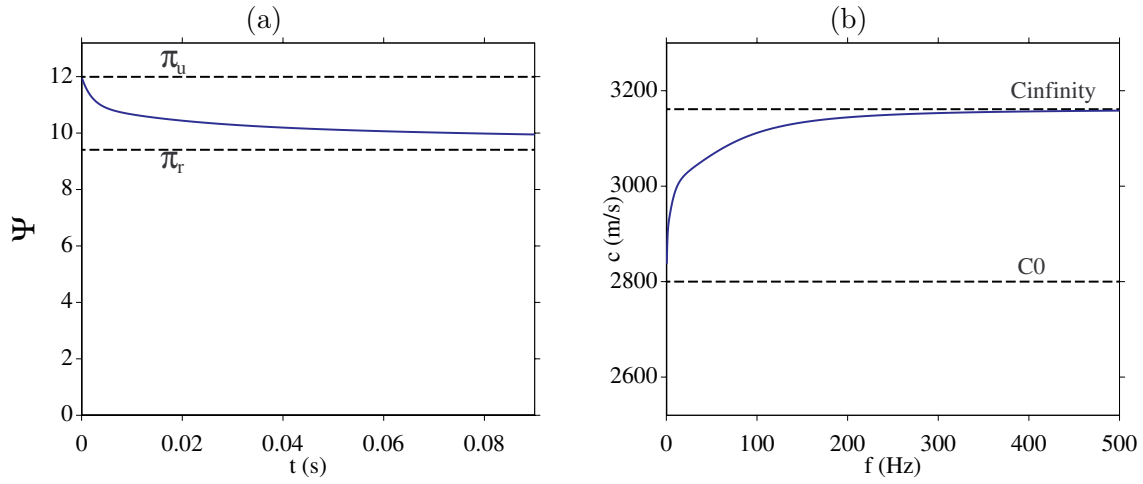


Figure 5.1: Courbes de relaxation (a) et de dispersion (b) du modèle de Zener.

La fonction de relaxation du modèle de Zener s'écrit

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \pi_r \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right) H(t), \\ &= \pi_r \left(1 + \sum_{l=1}^{N} \kappa_l \, e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} \right) H(t), \end{aligned} \tag{5.2}$$

où H désigne la distribution d'Heaviside, N est le nombre de mécanismes de relaxation, $\tau_{\varepsilon l}$ et $\tau_{\sigma l}$ sont des temps de relaxation, avec $\tau_{\varepsilon l} > \tau_{\sigma l} > 0$, et $\kappa_l = \frac{1}{N} \left(\frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} - 1 \right) > 0$. Les $2\,N$ coefficients κ_l et $\tau_{\sigma l}$ sont déterminés à partir du facteur de qualité que l'on souhaite obtenir, mais d'autres grandeurs, telle que l'atténuation ou la vitesse de phase, pourraient être utilisées indifféremment. Pour cela, on écrit le module de viscoélasticité $M(\omega) = \mathcal{F}(\frac{\partial \psi}{\partial t})$, où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier en temps, et ω la pulsation :

$$M(\omega) = \pi_r \left(1 + i\,\omega \sum_{l=1}^{N} \frac{\kappa_l}{1/\tau_{\sigma l} + i\,\omega} \right). \tag{5.3}$$

Le facteur de qualité est défini comme le rapport des parties réelle et imaginaire de M, d'où

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{N} \frac{\omega\,\tau_{\sigma l}\,\kappa_l}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2}}{1 + \displaystyle\sum_{l=1}^{N} \frac{\omega^2 \tau_{\sigma l}^2 \kappa_l}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2}}. \tag{5.4}$$

Soit $\tilde{Q}^{-1}(\omega)$ l'inverse du facteur de qualité que l'on cherche à approcher. Typiquement, les matériaux étudiés en géosciences ont un facteur de qualité quasi-constant sur une très large bande de fréquence [4]. Les coefficients κ_l et $\tau_{\sigma l}$ sont obtenus en minimisant l'écart entre $\tilde{Q}^{-1}(\omega)$ et $Q^{-1}(\omega)$, sur une bande de pulsation de ω_0 à ω_1. Nous avons implémenté ici une minimisation en norme L_2 par moindres carrés linéaires [43, 49, 20], très simple à mettre en oeuvre. Celle-ci consiste à placer les temps de relaxation sur une échelle logarithmique de N points, de ω_0 à ω_1 :

$$\frac{1}{\tau_{\sigma l}} = \omega_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{\frac{l-1}{N-1}}, \qquad l = 1, ..., N. \tag{5.5}$$

De même, on définit des pulsations discrètes ω_k réparties régulièrement sur une échelle logarithmique de $2\,N - 1$ points, de ω_0 à ω_1 [62] :

$$\omega_k = \omega_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{\frac{j - \frac{1-p}{2}}{N-1}}, \qquad k = 1, ..., 2\,N - 1, \quad j = k \operatorname{div} 2, \quad p = k \bmod 2. \tag{5.6}$$

Les coefficients κ_l sont alors obtenus en résolvant par moindres carrés le système linéaire surdéterminé découlant de (5.4)

$$\sum_{l=1}^{N} \frac{\omega_k\,\tau_{\sigma l} \left(1 - \omega_k\,\tau_{\sigma l}\,Q^{-1}(\omega_k) \right)}{1 + \omega_k^2\,\tau_{\sigma l}^2} \kappa_l = Q^{-1}(\omega_k), \qquad k = 1, ..., 2\,N - 1. \tag{5.7}$$

Rien ne garantit la positivité des κ_l même si, lors des expérimentations numériques, nous n'avons jamais obtenu de coefficients négatifs. Pour des milieux extrêmement atténuants, où la positivité risque de ne plus être satisfaite, une stratégie consiste à résoudre le problème d'optimisation (5.7) avec la contrainte non linéaire $\kappa_l > 0$ [50]. Une autre stratégie consiste à réaliser une minimisation en norme L_∞, mais celle-ci n'est connue que pour un facteur de qualité constant [6].

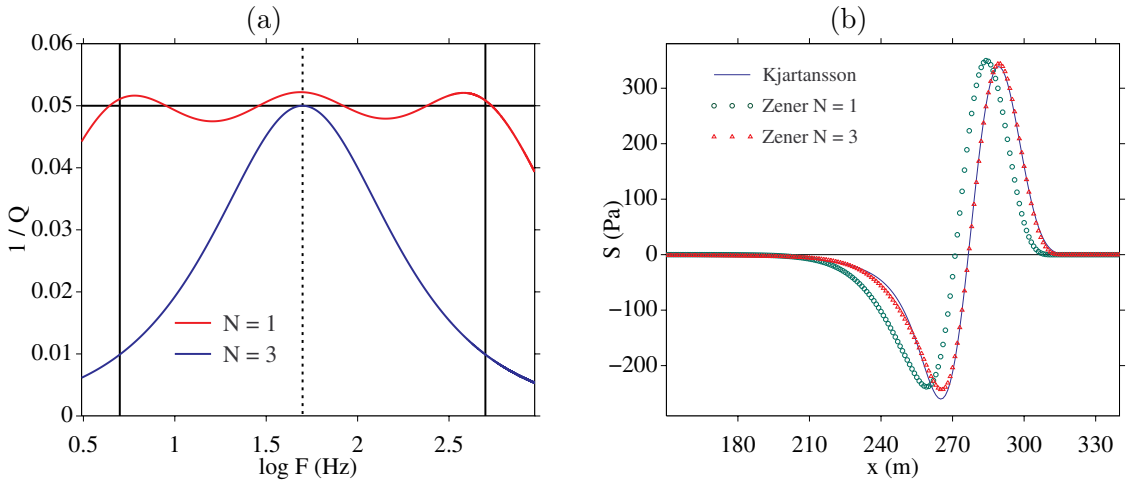


Figure 5.2: Influence du nombre de mécanismes de relaxation N sur l'approximation du modèle à $Q = 20$ constant. Facteurs de qualité optimisés (a), solutions analytiques transitoires (b).

Reste à déterminer les pulsations ω_0 et ω_1, ainsi que le nombre de mécanismes de relaxation N. Les pulsations ω_0 et ω_1 dépendent évidemment du spectre du signal propagé. En pratique, nous choisissons $\omega_0 = \omega_c/10$ et $\omega_1 = 10\,\omega_c$, où $\omega_c = 2\,\pi\,f_c$ est la pulsation centrale de la source. La qualité du modèle - i.e. la précision avec laquelle l'algorithme (5.7) approche une loi $\tilde{Q}^{-1}(\omega)$ donnée - croît avec N. Dans le même temps, le coût informatique devient rapidement prohibitif : voir la section 5.2.2 à ce sujet.

Si $\tilde{Q}(\omega)$ est constant, on peut choisir N en comparant les solutions analytiques transitoires du modèle de Zener et du *modèle de Kjartansson* [92]. Ce dernier est le seul modèle linéaire, causal, et à facteur de qualité constant. Le calcul des deux solutions analytiques repose sur des techniques classiques d'analyse complexe et de transformées de Fourier. Notons qu'on préfère discrétiser le modèle de Zener que le modèle de Kjartansson, pour deux raisons. Tout d'abord, les équations d'évolution du modèle à Q constant mettent en jeu des dérivées temporelles fractionnaires, difficiles à résoudre [31]. D'autre part, même si les matériaux à Q constant interviennent fréquemment dans les milieux naturels [4], nous souhaitons modéliser une classe plus large de comportements viscoélastiques, en particulier les lois d'atténuation de milieux effectifs à Q variable.

La comparaison entre les solutions analytiques est effectuée à l'instant correspondant à la durée maximale de la simulation prévue. En figure 5.2, on présente une comparaison de $\tilde{Q}^{-1} = 1/20$ avec l'expression (5.4) déduite de la procédure d'optimisation (a), ainsi qu'une comparaison des solutions analytiques transitoires des modèles de Zener et de Kjartansson (b), pour différentes valeurs de N. En pratique, $N > 3$ est rarement envisagé dans la littérature, et la valeur $N = 1$

est couramment utilisée, surtout en 3D [138].

5.2.2 Equations d'évolution

En dimension quelconque d'espace, la relation constitutive d'un solide viscoélastique linéaire isotrope peut s'écrire [30]

$$\sigma_{ij} = (\psi_\pi(t) - 2\,\psi_\mu(t)) * \frac{\partial\,\varepsilon_{kk}}{\partial\,t}\,\delta_{ij} + 2\,\psi_\mu(t) * \frac{\partial\,\varepsilon_{ij}}{\partial\,t}, \tag{5.8}$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont les composantes des tenseurs de contraintes et déformations, δ_{ij} est le symbole de Kronecker, ψ_π et ψ_μ sont des fonctions de relaxation. Dans le cas-limite élastique, $\psi_\pi = (\lambda + 2\,\mu)\,H(t)$ et $\psi_\mu = \mu\,H(t)$, où λ et μ sont les coefficients de Lamé. A partir de (5.8) et de la conservation de la quantité de mouvement, on obtient une équation d'onde vectorielle satisfaite par le déplacement $\boldsymbol{u}$, généralisant l'équation de Navier. Comme dans le cas élastique, la solution de cette équation est la somme de déplacements à rotationnel nul et à divergence nulle, associés aux ondes de compression P et de cisaillement S. Ces déplacements satisfont des équations d'ondes découplées - ce qui n'est plus vrai dans le cas de milieux viscoélastiques anisotropes - dont les coefficients font intervenir respectivement ψ_π et ψ_μ. Ainsi, il est possible de généraliser (5.2) en écrivant

$$\begin{aligned} \psi_\pi(t) &= \pi_r \left(1 + \sum_{l=1}^{N} \kappa_l^p\, e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}}\right) H(t), \\ \psi_\mu(t) &= \mu_r \left(1 + \sum_{l=1}^{N} \kappa_l^s\, e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}}\right) H(t), \end{aligned} \tag{5.9}$$

où $\pi_r = \rho\,c_{p_0}^2$ et $\mu_r = \rho\,c_{s_0}^2$ sont les modules relaxés en compression et en cisaillement, avec c_{p0} et c_{s0} les vitesses de phase des ondes P et S à fréquence nulle. Les modules non relaxés s'écrivent

$$\pi_u = \pi_r \left(1 + \sum_{l=1}^{N} \kappa_l^p\right) = \rho\,c_{p_\infty}^2, \qquad \mu_u = \mu_r \left(1 + \sum_{l=1}^{N} \kappa_l^s\right) = \rho\,c_{s_\infty}^2,$$

avec c_{p_∞} et c_{s_∞} les vitesses de phase des ondes P et S à fréquence infinie. Les paramètres dans (5.9) sont estimés de la même façon qu'en section 5.2.1, à partir des facteurs de qualité Q_p et Q_s des ondes P et S. En général, $Q_s < Q_p$: les ondes S sont plus atténuées que les ondes P. Les temps de relaxation $\tau_{\sigma l}$ sont choisis identiques pour les ondes P et S, sachant que ces temps sont uniquement déterminés à partir de la bande de fréquence où est effectuée l'identification des paramètres (5.5). De plus, choisir des temps de relaxation et un nombre de mécanismes de relaxation identiques pour les ondes P et S conduit à des économies importantes en mémoire informatique requise [138, 173].

Pour écrire les équations d'évolution satisfaites par σ_{ij}, on dérive (5.8) par rapport à t, et on utilise (5.9). Si $i = j$, on obtient

$$\frac{\partial\,\sigma_{ij}}{\partial\,t} = (\pi_u - 2\,\mu_u)\,\frac{\partial\,v_k}{\partial\,x_k} + 2\,\mu_u\,\frac{\partial\,v_i}{\partial\,x_j} + \sum_{l=1}^{N} \xi_{ijl}, \tag{5.10}$$

où les ξ_{ijl} sont les *variables de mémoire*

$$\xi_{ijl} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}} \left(\pi_r \, \kappa_l^p - 2\,\mu_r \, \kappa_l^s\right) e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} H(t) * \frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_k} - 2\,\mu_r \frac{\kappa_l^s}{\tau_{\sigma l}} e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} H(t) * \frac{\partial\, v_i}{\partial\, x_j}. \tag{5.11}$$

Ces variables de mémoire satisfont des équations différentielles locales en temps:

$$\frac{d\,\xi_{ijl}}{d\,t} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}} \left(\xi_{ijl} + \left(\pi_r \, \kappa_l^p - 2\,\mu_r \, \kappa_l^s\right) \frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_k} + 2\,\mu_r \, \kappa_l^s \, \frac{\partial\, v_i}{\partial\, x_j}\right), \qquad l = 1, ..., \, N. \tag{5.12}$$

De même, si $i \neq j$, on obtient

$$\frac{\partial\, \sigma_{ij}}{\partial\, t} = \mu_u \left(\frac{\partial\, v_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, v_j}{\partial\, x_i}\right) + \sum_{l=1}^{N} \xi_{ijl}, \tag{5.13}$$

avec les variables de mémoire

$$\xi_{ijl} = -\mu_r \frac{\kappa_l^s}{\tau_{\sigma l}} \, e^{-\frac{t}{\tau_{\sigma l}}} H(t) * \left(\frac{\partial\, v_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, v_j}{\partial\, x_i}\right), \tag{5.14}$$

qui satisfont les équations différentielles

$$\frac{d\,\xi_{ijl}}{d\,t} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}} \left(\xi_{ijl} + \mu_r \, \kappa_l^s \left(\frac{\partial\, v_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, v_j}{\partial\, x_i}\right)\right), \qquad l = 1, ..., \, N. \tag{5.15}$$

Les produits de convolution dans (5.11) et (5.14), découlant du produit de convolution dans (5.8), n'interviennent plus dans (5.12) et (5.15). Ainsi, l'adjonction de ces équations différentielles évite de devoir stocker les valeurs passées des vitesses de déformation, en se ramenant à un problème local en temps. On note que (5.12) et (5.15) ne font pas intervenir les dérivées spatiales des ξ_{ijl}. Les variables de mémoire ne satisfont donc pas de conditions de saut.

En dimensions deux, les équations (5.10), (5.12), (5.13) et (5.15), couplées aux équations de conservation de la quantité de mouvement, conduisent au système de $5 + 3\,N$ équations aux dérivées partielles

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, t} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\, \sigma_{11}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, y}\right) = 0, \\
\dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, t} - \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, \sigma_{22}}{\partial\, y}\right) = 0, \\
\dfrac{\partial\, \sigma_{11}}{\partial\, t} - \pi_u \, \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x} - \left(\pi_u - 2\,\mu_u\right) \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, y} = \displaystyle\sum_{l=1}^{N} \xi_{11l}, \\
\dfrac{\partial\, \sigma_{12}}{\partial\, t} - \mu_u \left(\dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, y} + \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, x}\right) = \displaystyle\sum_{l=1}^{N} \xi_{12l}, \\
\dfrac{\partial\, \sigma_{22}}{\partial\, t} - \left(\pi_u - 2\,\mu_u\right) \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x} - \pi_u \, \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, y} = \displaystyle\sum_{l=1}^{N} \xi_{22l}, \\
\dfrac{\partial\, \xi_{11l}}{\partial\, t} + \dfrac{1}{\tau_{\sigma l}} \left(\pi_r \, \kappa_l^p \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x} + \left(\pi_r \, \kappa_l^p - 2\,\mu_r \, \kappa_l^s\right) \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, y}\right) = -\dfrac{1}{\tau_{\sigma l}} \, \xi_{11l}, \qquad l = 1, ..., \, N, \\
\dfrac{\partial\, \xi_{12l}}{\partial\, t} + \dfrac{\mu_r \, \kappa_l^s}{\tau_{\sigma l}} \left(\dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, y} + \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, x}\right) = -\dfrac{1}{\tau_{\sigma l}} \, \xi_{12l}, \qquad l = 1, ..., \, N, \\
\dfrac{\partial\, \xi_{22l}}{\partial\, t} + \dfrac{1}{\tau_{\sigma l}} \left(\left(\pi_r \, \kappa_l^p - 2\,\mu_r \, \kappa_l^s\right) \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x} + \pi_r \, \kappa_l^p \, \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, y}\right) = -\dfrac{1}{\tau_{\sigma l}} \, \xi_{22l}, \qquad l = 1, ..., \, N.
\end{array}\right. \tag{5.16}$$

En posant

$$\boldsymbol{U} = (v_1,\, v_2,\, \sigma_{11},\, \sigma_{12},\, \sigma_{22},\, \xi_{111}, ...,\, \xi_{11N},\, \xi_{121}, ...,\, \xi_{12N},\, \xi_{221}, ...,\, \xi_{22N})^T\,,$$

on peut écrire (5.16) sous forme d'un système du premier ordre en temps et en espace

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{U}, \tag{5.17}$$

où $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{S}$ sont des matrices $(5+3\,N)\times(5+3\,N)$. Les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont réelles : $\pm c_{p\infty}$, $\pm c_{s\infty}$, et 0 à l'ordre de multiplicité $3\,N+1$. Le rayon spectral de $\boldsymbol{S}$ est $R(\boldsymbol{S}) = 1/\tau_{\sigma N} = \omega_1$ (5.5).

5.3 Modélisation numérique

5.3.1 Schéma d'intégration

Pour intégrer le système (5.17), on introduit une grille uniforme de pas d'espace $\Delta\,x = \Delta\,y$ et de pas de temps $\Delta\,t$. Si on intègre simultanément les dérivées et le terme source dans (5.17), une analyse de stabilité à la Von-Neumann conduit à une condition de stabilité

$$\Delta\,t \leq \min\left(\frac{\Upsilon\,\Delta\,x}{c_{p_\infty}},\, \frac{2}{R(\boldsymbol{S})}\right), \tag{5.18}$$

avec Υ défini en (2.9). Dans (5.18), la borne induite par le rayon spectral de $\boldsymbol{S}$ est plus restrictive que la condition CFL classique si $\omega_1 \geq 2\,c_{p_\infty}/(\Upsilon\,\Delta\,x)$. En introduisant le nombre de points de calcul par longueur d'onde centrale $\mathcal{N} = 2\,\pi\,c_{p\infty}/(\omega_c\,\Delta\,x)$, la condition CFL classique est pénalisée par les effets visqueux si

$$\mathcal{N} \leq 10\,\pi\,\Upsilon. \tag{5.19}$$

Dans le cas du schéma de Lax-Wendroff ($K = 2$ et du schéma ADER d'ordre $K = 4$, l'inégalité (5.19) est pénalisante respectivement si $\mathcal{N} \leq 22$ et si $\mathcal{N} \leq 31$. Notons par ailleurs que la construction de schémas d'ordre élevé pour (5.17) est difficile.

Nous suivons ici une approche plus efficace, qui consiste à résoudre alternativement par *Strang's splitting* [102] la partie propagative

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}, \tag{5.20}$$

et la partie avec terme source

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{U}. \tag{5.21}$$

L'équation (5.20) peut être résolue par un schéma à deux pas de temps, centré en espace et à flux conservé, conduisant à $\boldsymbol{U}^{n+1/2}$. On utilise ici un schéma ADER d'ordre 4 en temps et en

espace, détaillé en section 2.2. Les paramètres physiques ne variant pas avec t, l'équation (5.21) est résolue de façon exacte, avec $(i,\, j) = \{(1,1),\, (1,2),\, (2,2)\}$:

$$
\begin{aligned}
v_i^{n+1} &= v_i^{n+1/2}, \\
\sigma_{ij}^{n+1} &= \sigma_{ij}^{n+1/2} + \sum_{l=1}^{N} \tau_{\sigma l} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{2\,\tau_{\sigma l}}}\right) \xi_{ijl}^{n+1/2}, \\
\xi_{ijl}^{n+1} &= e^{-\frac{\Delta t}{2\,\tau_{\sigma l}}}\, \xi_{ijl}^{n+1/2}, \qquad l = 1, ..., N.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Le splitting (5.20)-(5.21) avec l'intégration exacte (5.22) conduit à la condition de stabilité optimale CFL : $\frac{c_{p\infty}\,\Delta t}{\Delta x} \leq \Upsilon$. Cependant, comme $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ne commutent pas avec $\boldsymbol{S}$, l'ordre de convergence théorique décroît de 4 à 2.

5.3.2 Méthode d'interface immergée

L'étape (5.20) nécessite un traitement particulier aux points pour lesquels le stencil du schéma coupe une interface. Pour cela, nous avons adapté une *méthode d'interface immergée* initialement conçue pour des milieux élastiques [A3, A5]. Celle-ci permet d'estimer précisément les dérivées spatiales de $\boldsymbol{U}$ dans (5.20), en injectant dans le schéma des extrapolations de $\boldsymbol{U}$, de part et d'autre des interfaces. Vu la structure de $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, seules des extrapolations de vitesses et contraintes sont requises.

Comme vu en section 3.3, une étape essentielle pour construire ces extrapolations consiste à déterminer les conditions satisfaites aux interfaces par les dérivées spatiales successives de $\boldsymbol{U}$. Pour cela, on dérive les conditions satisfaites par vitesses et contraintes jusqu'à l'ordre k, cet ordre dépendant de la précision requise. On remplace alors les dérivées temporelles par des dérivées spatiales, à partir des équations d'évolution. Cependant, quelle équation d'évolution utiliser : (5.16) ou (5.20) ?

L'utilisation du système complet (5.16) a conduit à une méthode instable, contrairement à l'utilisation du système découpé (5.20), tant en 1D qu'en 2D. Nous n'avons pas trouvé d'explication à ce comportement. Un élément de réponse pourraît être de dire que les conditions de saut d'ordre k déduites du système complet (5.16) ne sont pas *consistantes* - en un sens à définir - avec le système (5.20) qui les utilise. Cette explication n'est cependant pas satisfaisante, car l'instabilité observée découle d'extrapolations mal calculées, indépendamment même du schéma qui les utilise. Il semble donc plutôt que les matrices d'extrapolation déduites du système complet (5.16) soient mal conditionnées.

L'utilisation du système splitté (5.20) a conduit à une méthode stable, possédant toutes les propriétés observées dans les milieux sans atténuation. En particulier, le système (5.20) permet d'obtenir des *conditions de compatibilité*, importantes pour la stabilité de la méthode.

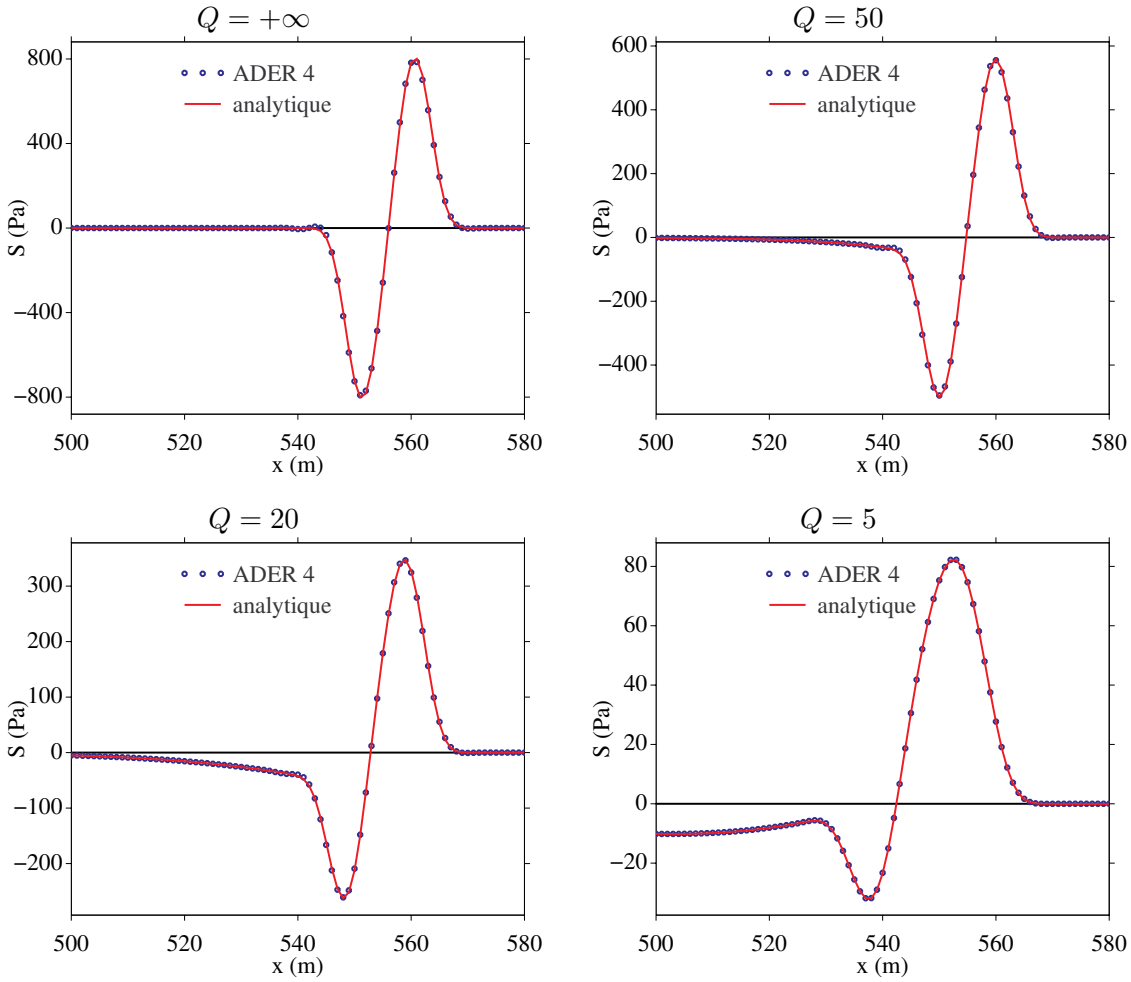


Figure 5.3: Milieu homogène 1D.

5.4 Expériences numériques

5.4.1 Dimension un

En figure 5.3, on illustre la précision du schéma ADER 4 et du splitting en milieu homogène. Les paramètres physiques sont $\rho = 1200$ kg/m^3 et $\pi_r = 9.4$ GPa, soit $c_0 = 2800$ m/s, ce qui est approximativement le cas du Plexiglass. On considère quatre valeurs de facteur de qualité, correspondant à des milieux d'atténuation intrinsèque croissante : $Q = +\infty$ (élasticité pure), 50, 20 et 5, avec dans chaque cas $N = 3$ mécanismes de relaxation. Les calculs sont réalisés sur une grille de 600 points en espace, avec $\Delta x = 1$ m et CFL $= 0.9$. Une source ponctuelle de contrainte, placée au centre du domaine, émet une sinusoïde bornée de classe C^6 et de fréquence centrale 100 Hz. On représente les ondes propagées vers la droite après 300 pas d'intégration, soit une distance de propagation d'environ 10 longueurs d'onde centrale, ainsi qu'une comparaison avec la solution analytique.

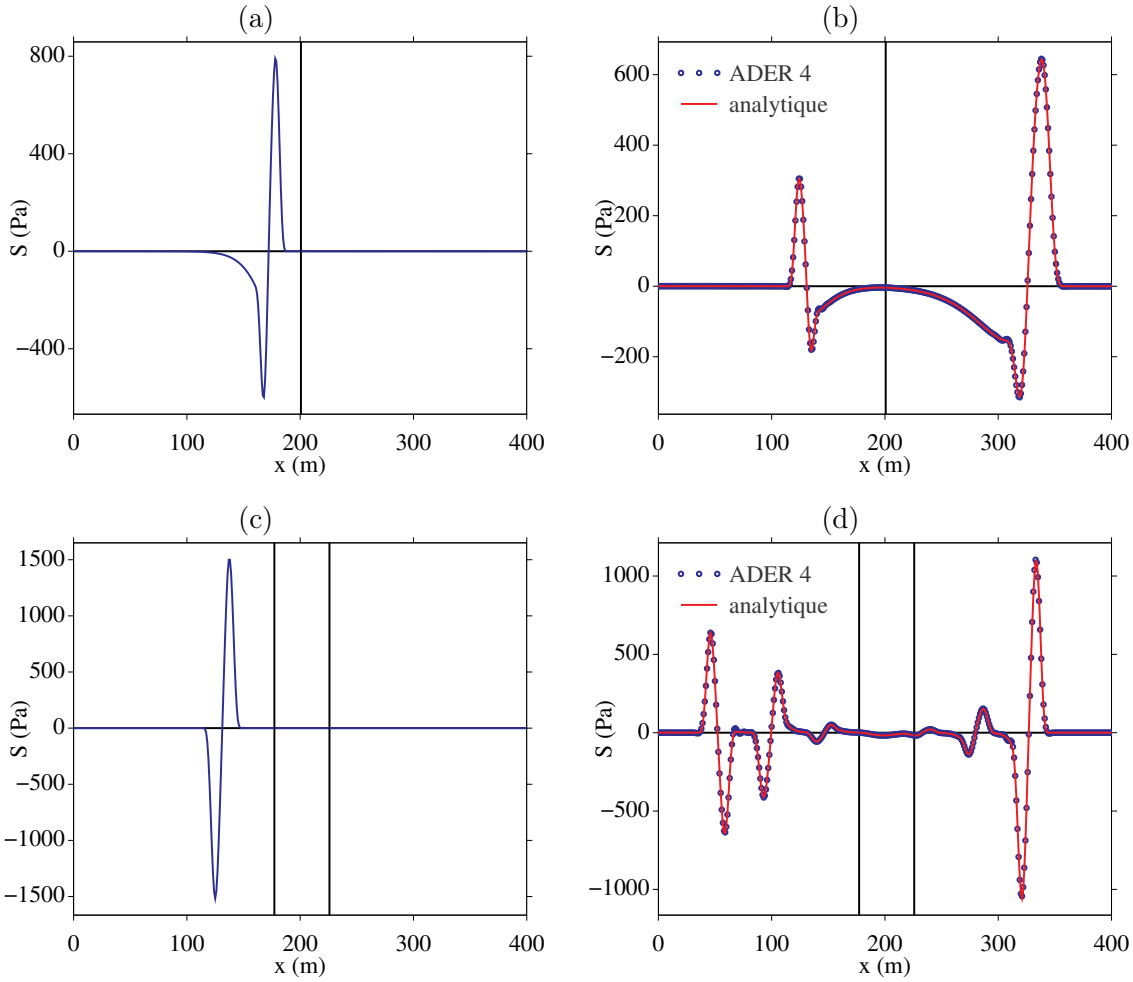


Figure 5.4: Milieux hétérogènes 1D. Interface entre deux solides viscoélastiques (a-b), milieu tricouche fluide-viscoélastique-fluide (c-d). Onde incidente (a-c), ondes diffractées (b-d).

Le cas de milieux viscoélastiques hétérogènes est illustré en figure 5.4. En (a-b), on considère l'interface entre le Plexiglass (avec $Q = 5$) et du granite ($\rho = 2400$ kg/m^3 et $\pi_r = 48.6$ GPa, soit $c_0 = 4500$ m/s, $Q = 10$). On représente en figure 5.4 l'onde incidente (a) puis les ondes diffractées après 200 pas d'intégration (b). Les autres paramètres sont les mêmes que pour le test précédent. La concordance des solutions numérique et analytique est très bonne. En (c-d), on considère un milieu tricouche eau / Plexiglass /eau. Les équations d'évolution dans les sous-domaines fluides et viscoélastiques sont différentes - acoustique dans les milieux gauche et droite, viscoélasticité (5.16) dans le milieu intermédiaire -, et reliées par les conditions de saut classiques : continuité de la vitesse et des efforts. L'onde incidente générée dans le fluide est représentée en (c), tandis que les solutions numérique et analytique après diffraction sont représentées en (d).

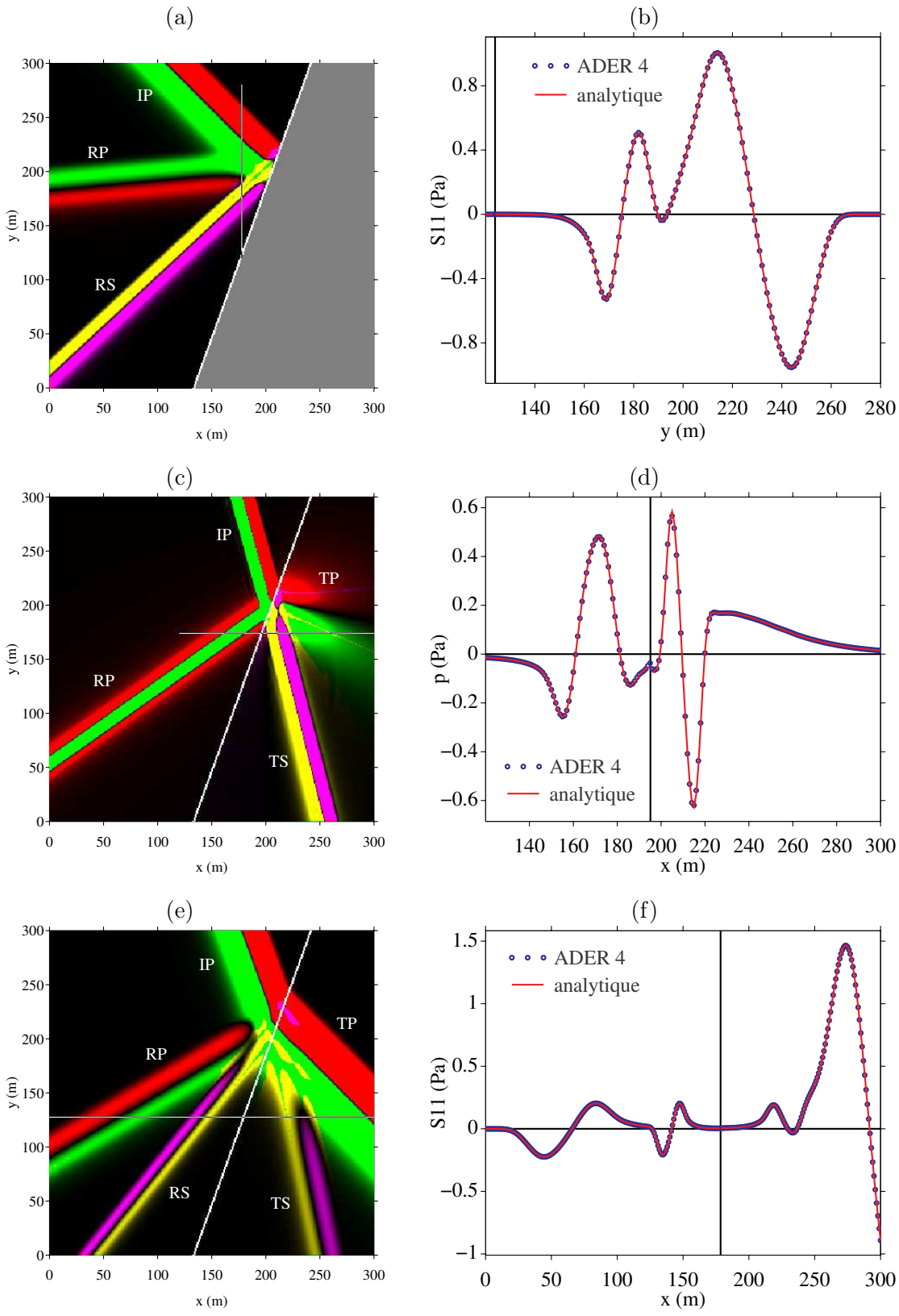


Figure 5.5: Onde plane impactant une interface plane 2D. Viscoélastique-vide (a-b), fluide-viscoélastique (c-d), deux solides viscoélastiques soudés (e-f).

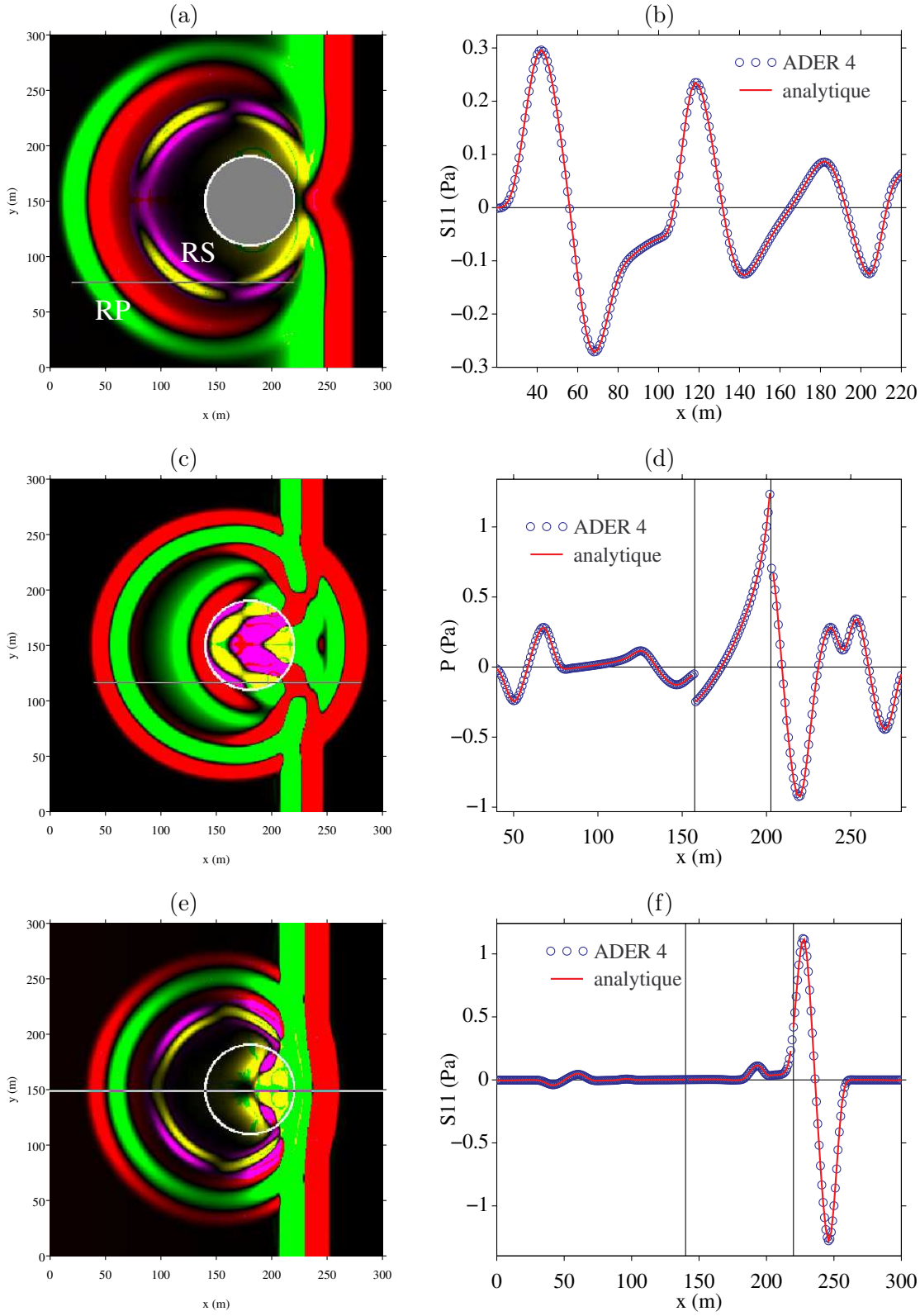


Figure 5.6: Onde plane impactant une interface circulaire 2D. Viscoélastique / vide (a-b), fluide / viscoélastique (c-d), élastique / viscoélastique en contact soudé (e-f).

5.4.2 Dimension deux

Les tests sont réalisés sur un domaine de 300 m $\times$ 300 m, discrétisé en espace par $N_x \times N_y = 300 \times 300$ points, avec CFL = 0.85. L'onde incidente est une onde plane P homogène. La propagation d'ondes est simulée dans trois configurations : solide viscoélastique / vide, fluide parfait / solide viscoélastique, et deux solides viscoélastiques. Sur les cartes, les ondes incidente, réfléchies et transmises P et S sont désignées respectivement par les lettres I, R et S. Les segments horizontaux ou verticaux désignent le lieu des points où est réalisée la coupe.

En figure 5.5, l'interface est plane et inclinée de 70 degrés par rapport à l'axe horizontal. Le vecteur directeur de l'onde plane incidente est incliné par rapport à l'axe horizontal. Les ondes planes P et S réfléchies et transmises sont des *ondes planes non homogènes*, i.e. leur direction de propagation n'est pas colinéaire à leur direction d'atténuation. Voir les références [107, 39, 40, 23, 24, 171] pour plus de détails. Pour toutes les combinaisons de milieux, l'accord entre solutions numériques et solutions analytiques est très bon.

En figure 5.6, l'interface est circulaire et sépare un solide viscoélastique et le vide (a-b), un fluide et un solide viscoélastique (c-d), et enfin un solide élastique et un solide viscoélastique (e-f). Le vecteur directeur de l'onde P incidente est horizontal. Les solutions analytiques sont calculées par transformées de Fourier et décomposition des ondes planes harmoniques sur une base de fonctions de Bessel et de Hankel, comme au chapitre 3. L'accord entre solutions numériques et analytiques est très bon.

En figure 5.7, les milieux à l'extérieur et à l'intérieur du cercle sont deux solides viscoélastiques, ayant respectivement les propriétés physiques du Plexiglass et du mortier. Trois types de contact sont considérés : coutact soudé (3.9), glissement sans frottement (3.10), et conditions de masse-ressort (3.11). Voir le chapitre 3 pour plus de détails sur ce sujet. L'accord avec les solutions analytiques est très bon.

5.5 Conclusion

Bilan. En viscoélastodynamique, le point-clé consiste à éliminer le produit de convolution dans la loi de comportement. Cela peut se réaliser en introduisant un ensemble de variables de mémoire qui satisfont des équations différentielles locales en temps, dispensant de stocker les valeurs passées de la solution. Le surcoût en terme de mémoire informatique peut tout de même s'avérer important, surtout si on cherche à modéliser finement des milieux à facteur de qualité constant. A partir des équations obtenues, nous avons mis en oeuvre des techniques numériques classiques pour systèmes hyperboliques, et qualifié les algorithmes par comparaison avec des solutions analytiques.

Perspectives. L'*estimation des paramètres* du modèle de Zener n'est pas optimale (section 5.2.1). Il convient d'implémenter et de tester d'autres techniques d'optimisation, en particulier en norme L_∞ et L_2 avec contrainte de positivité. Par ailleurs, une analyse plus fine de l'*erreur de modèle* par rapport au critère choisi - facteur de qualité constant, ou autre - permettrait de déterminer le nombre optimal N de mécanismes de relaxation à prendre en compte.

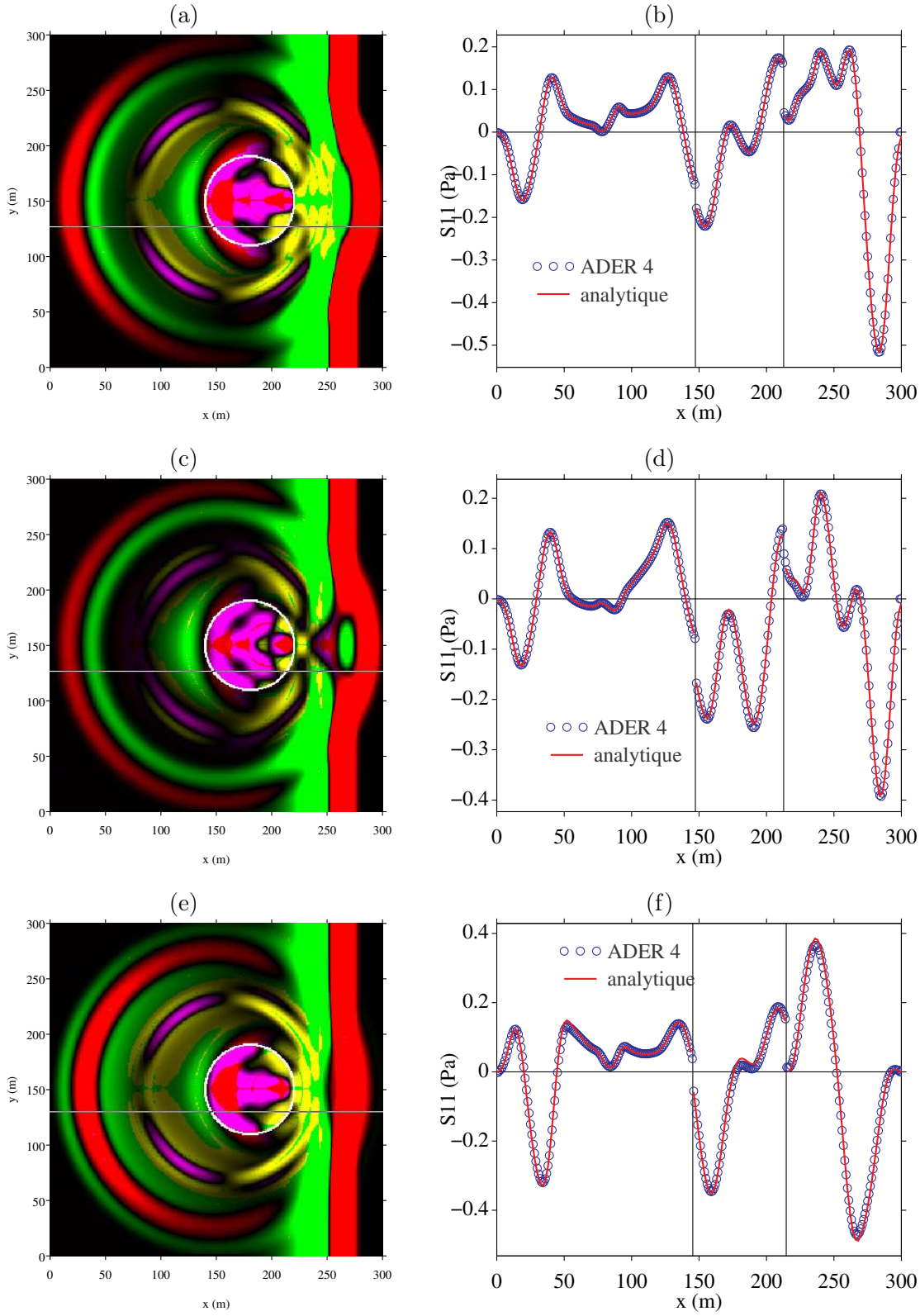


Figure 5.7: Onde plane impactant une interface circulaire 2D entre deux solides viscoélastiques. Contact soudé (a-b), glissement sans frottement (c-d), conditions de masse-ressort (e-f).

Les équations d'évolution d'un solide de Zener en dimension 3 mettent en jeu 9+6 N variables. Les ressources informatiques requises sont donc importantes, sachant que $N = 3$ est une valeur couramment utilisée pour représenter un facteur de qualité constant (figure 5.2). Pour le moment, nous avons construit et validé des schémas ADER en 3D. Reste un travail important à réaliser, portant sur la discrétisation des interfaces par la méthode d'interface immergée, ainsi que sur la parallélisation des algorithmes.

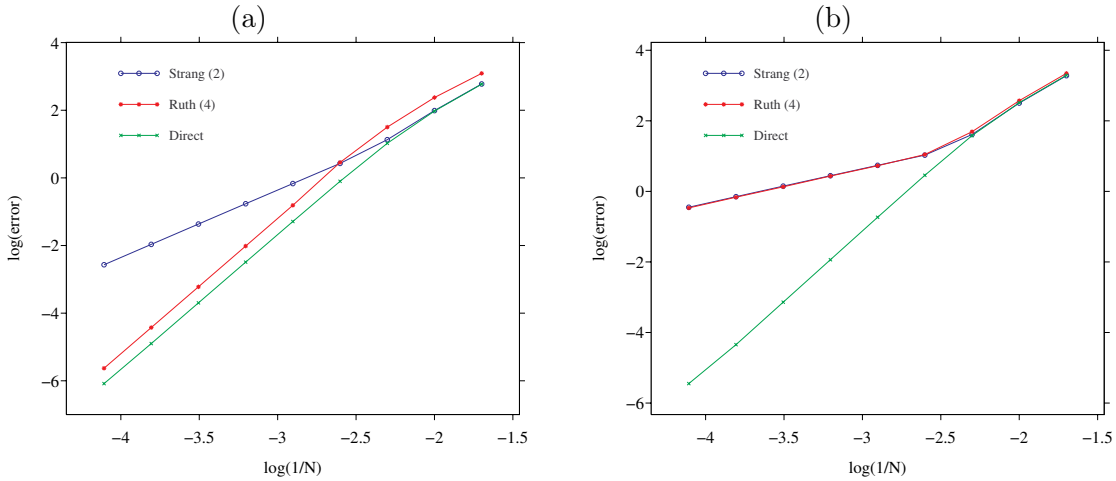


Figure 5.8: Mesures de convergence en milieu homogène (a) et hétérogène (b).

Une dernière piste de recherche concerne l'intégration numérique de (5.20). Comme annoncé en fin de section 5.3.1, le Strang splitting conduit à une erreur d'ordre 2. Le schéma ADER d'ordre 4 est alors pénalisé, diminuant l'efficacité informatique de l'approche proposée. Des méthodes de splitting d'ordre plus élevé existent [111], notamment un splitting d'ordre 4 développé par Ruth et Forest [56]. En figure 5.8-a, on présente des mesures de convergence réalisées en milieu viscoéalstique 1D, qui confirment l'ordre 2 et 4 des splitting des Strang et de Ruth ; on représente aussi les mesures réalisées avec un schéma d'ordre 4 discrétisant directement (5.17), sans splitting.

Considérons maintenant un milieu 1D hétérogène (figure 5.4). L'interface est discrétisée par la méthode d'interface immergée. L'intégration numérique par le schéma ADER 4 avec splitting d'ordre 4 devrait conduire à une méthode d'ordre 4. Or, il n'en est rien : les mesures présentées en figure 5.8-b indiquent une convergence d'ordre 1, quasi identique à celle obtenue avec le Strang splitting. Un travail d'analyse numérique est à mener pour comprendre l'origine de cette dégradation. Notons enfin que l'ordre 4 est obtenu avec une discrétisation directe de (5.17). Celle-ci pose cependant des problèmes lors d'une résolution par moindres carrés des conditions d'interface (section 5.3.2), ce qui nécessite là-aussi une étude plus approfondie.

Chapter 6

Ondes poroélastiques

Travail réalisé avec Guillaume Chiavassa et Joël Piraux
Production associée : article [A9], congrès international [Ci5]

6.1 Introduction

Les milieux poreux sont constitués d'une matrice solide saturée par un ou plusieurs fluides. Ils interviennent dans de nombreuses applications de la mécanique, notamment les os en biomécanique, et les roches saturées d'eau, de gaz ou de pétrole en géosciences. Le modèle le plus largement utilisé pour décrire la propagation des vibrations dans un milieu poreux à structure élastique a été proposé par Biot en 1956 [17, 18].

Jusque vers 1990, la résolution des équations de Biot a essentiellement reposé sur une formulation fréquentielle. Depuis, de nombreux auteurs ont développé des simulations dans le domaine temporel, en adaptant les grandes classes de méthodes numériques pour EDP : éléments de frontière [149], différences finies [74, 42, 176], éléments finis [50, 117, 178], éléments finis spectraux [121], méthodes spectrales [34, 32]. Une critique peut être apportée à la quasi-totalité de ces articles, à l'exception de [34, 32] : les valeurs numériques de viscosité du fluide saturant sont prises nulles ou très petites, en tout cas sont irréalistes [64]. Or, cette viscosité joue un rôle crucial sur la dynamique du système de Biot. Celui-ci prévoit en effet la coexistence de deux types de solutions, de comportement radicalement différents : une *onde rapide* de compression et une onde de cisaillement, peu affectées par la viscosité ; une *onde lente* de compression, dont la dispersion et l'atténuation sont très importantes et dépendent fortement de la viscosité.

La coexistence d'un régime propagatif classique et d'un régime diffusif conduit à deux difficultés majeures de modélisation numérique. D'une part, les équations d'évolution sont *raides* : une résolution directe du système de Biot est donc inefficace, conduisant à une condition de stabilité d'autant plus restrictive que le fluide interstitiel est visqueux. D'autre part, la longueur d'onde de l'onde rapide peut être plusieurs ordres de grandeur plus élevée que celle de l'onde

lente. Une discrétisation suffisamment précise de cette dernière est donc très coûteuse informatiquement.

Nous avons proposé un ensemble de méthodes numériques pour résoudre ces problèmes, en *régime basse-fréquence*, lorsque l'écoulement du fluide saturant est de type Poiseuille. Nous découpons les équations d'évolution en deux parties : une partie propagative, résolue par un schéma ADER d'ordre 4, et une partie avec terme source, résolue de façon exacte. On retrouve alors la condition de stabilité CFL optimale. Pour capturer l'évolution de l'onde lente, nous appliquons une technique de raffinement de maillage spatio-temporel à flux conservatif autour des sources et interfaces, là où est localisée l'onde lente. Enfin, nous développons une méthode d'interface immergée pour discrétiser les interfaces. Le modèle numérique ainsi constitué permet enfin d'incorporer différents jeux de conditions de saut, modélisant différents degrés de contact hydraulique.

La section 6.2 rappelle les principales hypothèses du modèle de Biot basse-fréquence. Les équations d'évolution sont écrites sous forme d'un système du premier ordre en temps et en espace, et on déduit de l'analyse de dispersion les propriétés essentielles des solutions. En section 6.3, on présente les méthodes numériques développées pour résoudre les équations de Biot en milieu hétérogène : schéma d'intégration d'ordre élevé avec splitting, raffinement de maillage, méthode d'interface immergée. En section 6.4, on propose un ensemble d'expériences numériques, en dimensions un et deux

6.2 Modélisation physique

6.2.1 Modèle de Biot

En figure 6.1, on schématise un milieu poreux à travers lequel des perturbations de longueur d'onde λ se propagent. Les hypothèses du modèle de Biot basse-fréquence sont les suivantes [25, 30] :

- λ est grande devant le diamètre des pores et devant le volume élémentaire macroscopique sur lequel les paramètres physiques et géométriques (porosité, coefficients de Lamé, ...) sont stationnaires ;
- les perturbations sont infinitésimales, d'où des équations constitutives linéaires ;
- la phase liquide est unique et continue, sans pores occlus ;
- le fluide est peu visqueux et ne transmet pas les efforts de cisaillement ;
- le squelette est élastique et isotrope ;
- les couplages thermomécaniques sont négligés, ce qui est légitime pour un liquide.

L'approche de Biot pour construire un milieu continu équivalent au milieu poreux est heuristique : les principes de la mécanique des milieux continus sont supposé vérifiés à l'échelle macroscopique,

notamment l'existence d'un potentiel de déformation élastique et la validité du principe de stationnarité [17]. Une démonstration rigoureuse des équations de Biot a été proposée a posteriori par des techniques d'homogénéisation [103, 27, 131]. Ces dates correspondent approximativement à la mise en évidence expérimentale de l'onde lente, validant ainsi le modèle de Biot [128].

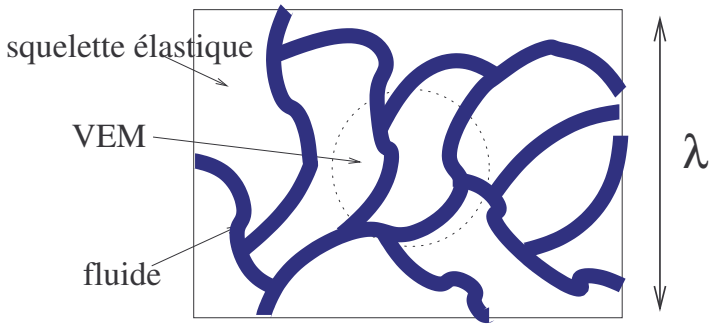


Figure 6.1: Schématisation d'un milieu poreux. VEM : volume élémentaire macroscopique ; λ : longueur d'onde propagée.

En basse-fréquence, le modèle de Biot nécessite de connaître 10 paramètres physiques : la masse volumique ρ_f et la viscosité dynamique η du fluide ; la masse volumique ρ_s et le module de cisaillement μ du squelette solide ; la porosité $0 < \phi < 1$, la tortuosité $a \geq 1$, la perméabilité absolue κ, le coefficient de Lamé λ_f et les deux coefficients de Biot β et m de la matrice saturée. On introduit les notations suivantes : $\rho_w = \frac{a}{\phi}\,\rho_f$, $\rho = \phi\,\rho_f + (1-\phi)\,\rho_s$, et $\chi = \rho\,\rho_w - \rho_f^2 > 0$. Les inconnues sont la vitesse élastique $\boldsymbol{v}_s$, la vitesse de filtration $\boldsymbol{w} = \phi\,(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)$ où $\boldsymbol{v}_f$ est la vitesse acoustique du fluide, les composantes du tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\sigma}$, et la pression acoustique p. En 1D, 2D et 3D, cela correspond respectivement à 4, 8 et 13 inconnues.

Les paramètres physiques sont supposés constants par morceaux et discontinus au niveau d'une interface. En notant $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{t}$ les vecteurs normal et tangentiel à l'interface, les conditions de saut entre deux solides poroélastiques soudés sont

$$[\boldsymbol{v}_s.\boldsymbol{n}] = 0, \quad [\boldsymbol{v}_s.\boldsymbol{t}] = 0, \quad [\boldsymbol{w}.\boldsymbol{n}] = 0, \quad [(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n})\,.\,\boldsymbol{n}] = 0, \quad [(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n})\,.\,\boldsymbol{t}] = 0, \quad [p] = -\frac{1}{\kappa_s}\,\boldsymbol{w}^*, \tag{6.1}$$

où $\boldsymbol{w}^*$ désigne la vitesse de filtration normale à l'interface, et où κ_s est la perméabilité hydraulique de l'interface [65]. Le paramètre κ_s décrit de façon simple une gamme de contacts hydrauliques, avec deux cas-limites intéressants. Si $\kappa_s \to +\infty$, le contact hydraulique au passage de l'interface est parfait et on obtient les conditions de pore ouvert [25]. Si $\kappa_s \to 0$, alors $\boldsymbol{w}^* \to 0$: localement, le mouvement relatif du fluide par rapport à la matrice solide est nul, ce qui correspond à des pores bouchés. Dans [143], le lecteur intéressé pourra trouver une justification physique de κ_s, ainsi qu'une discussion sur la probable dépendance fréquentielle de ce paramètre.

Enfin, on précise la modélisation des effets dissipatifs nécessaire pour obtenir les équations d'évolution. La dissipation d'énergie est supposée dépendre uniquement du mouvement relatif du fluide par rapport à la matrice solide [25]. Pour une épaisseur de couche-limite visqueuse grande devant le diamètre des pores, ou régime *basse-fréquence*, le pseudo-potentiel des dissipations s'écrit [30]

$$\mathcal{D} = \frac{\phi^2\,\eta}{2\,\kappa}\,(\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_s)^2\,. \tag{6.2}$$

L'écoulement étant de type Poiseuille, on note que la fréquence n'intervient pas dans (6.2). Pour des épaisseurs de couche-limite inférieures au rayon des pores, obtenues en considérant de plus hautes fréquences, on sort du domaine de validité de (6.2). On peut cependant continuer à utiliser (6.2) en apportant une correction fréquentielle aux paramètres physiques mis en jeu, par exemple en écrivant $\eta(\omega) = \eta\, F(\omega)$. Le choix de la fonction de correction F dépend de la géométrie des pores et est abordé en section 8.2.2. La frontière entre le régime basse-fréquence et le régime général peut être estimée en notant qu'elle correspond à des effets inertiels comparables aux effets visqueux. Cette frontière est quantifiable analytiquement : les équations de Biot basse-fréquence sont valides pour des fréquences inférieures à

$$f_c = \frac{\eta\,\phi}{2\,\pi\,a\,\kappa\,\rho_f}. \tag{6.3}$$

Pour $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, $\phi = 0.5$, $a = 2$, $\kappa = 10^{-12}\mathrm{m}^2$, $\rho_f = 10^3\mathrm{kg/m}^3$, on obtient $f_c \approx 50$ kHz, ce qui est l'ordre de grandeur généralement considéré. Ainsi, les expériences de sismique-réflexion à grande distance, mettant en jeu des fréquences de l'ordre de la centaine de Hertz, correspondent au régime de Biot basse-fréquence. Par contre, les expériences ultrasonores sur des matériaux biologiques, menées pour des fréquences de l'ordre de la centaine de kHz, ne peuvent être modélisées par les équations de Biot basse-fréquence et par les méthodes numériques décrites plus loin.

6.2.2 Equations d'évolution

On renvoit à [17, 25, 30] pour une dérivation détaillée des équations de Biot. En dimension deux, la formulation vitesse-contrainte des équations de Biot conduit aux équations d'évolution

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\, v_{s1}}{\partial\, t} - \dfrac{\rho_w}{\chi}\left(\dfrac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\, y}\right) - \dfrac{\rho_f}{\chi}\,\dfrac{\partial\, p}{\partial\, x} = \dfrac{\rho_f}{\chi}\,\dfrac{\eta}{\kappa}\, w_1,\\
\dfrac{\partial\, v_{s2}}{\partial\, t} - \dfrac{\rho_w}{\chi}\left(\dfrac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\, y}\right) - \dfrac{\rho_f}{\chi}\,\dfrac{\partial\, p}{\partial\, y} = \dfrac{\rho_f}{\chi}\,\dfrac{\eta}{\kappa}\, w_2,\\
\dfrac{\partial\, w_1}{\partial\, t} + \dfrac{\rho_f}{\chi}\left(\dfrac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\, y}\right) + \dfrac{\rho}{\chi}\,\dfrac{\partial\, p}{\partial\, x} = -\dfrac{\rho}{\chi}\,\dfrac{\eta}{\kappa}\, w_1,\\
\dfrac{\partial\, w_2}{\partial\, t} + \dfrac{\rho_f}{\chi}\left(\dfrac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\, y}\right) + \dfrac{\rho}{\chi}\,\dfrac{\partial\, p}{\partial\, y} = -\dfrac{\rho}{\chi}\,\dfrac{\eta}{\kappa}\, w_2,\\
\dfrac{\partial\,\sigma_{11}}{\partial\, t} - (\lambda_f + 2\,\mu)\,\dfrac{\partial\, v_{s1}}{\partial\, x} - \beta\, m\,\dfrac{\partial\, w_1}{\partial\, x} - \lambda_f\,\dfrac{\partial\, v_{s2}}{\partial\, y} - \beta\, m\,\dfrac{\partial\, w_2}{\partial\, y} = 0,\\
\dfrac{\partial\,\sigma_{12}}{\partial\, t} - \mu\left(\dfrac{\partial\, v_{s2}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, v_{s1}}{\partial\, y}\right) = 0,\\
\dfrac{\partial\,\sigma_{22}}{\partial\, t} - \lambda_f\,\dfrac{\partial\, v_{s1}}{\partial\, x} - \beta\, m\,\dfrac{\partial\, w_1}{\partial\, x} - (\lambda_f + 2\,\mu)\,\dfrac{\partial\, v_{s2}}{\partial\, y} - \beta\, m\,\dfrac{\partial\, w_2}{\partial\, y} = 0,\\
\dfrac{\partial\, p}{\partial\, t} + m\left(\beta\,\dfrac{\partial\, v_{s1}}{\partial\, x} + \dfrac{\partial\, w_1}{\partial\, x} + \beta\,\dfrac{\partial\, v_{s2}}{\partial\, y} + \dfrac{\partial\, w_2}{\partial\, y}\right) = 0.
\end{array}\right. \tag{6.4}$$

En posant

$$\boldsymbol{U} = (v_{s1},\, v_{s2},\, w_1,\, w_2,\, \sigma_{11},\, \sigma_{12},\, \sigma_{22},\, p)^T,$$

on peut écrire (6.4) sous forme d'un système du premier ordre en temps et en espace

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{U}, \tag{6.5}$$

où $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{S}$ sont des matrices 8×8. Une analyse mathématique détaillée de (6.5) est réalisée dans [50] : existence, unicité et régularité des solutions. On se restreint ici aux propriétés essentielles en vue de la modélisation numérique. Le rayon spectral de $\boldsymbol{S}$ est $R(\boldsymbol{S}) = \frac{\eta}{\kappa}\frac{\rho}{\chi}$, de valeurs typiques $R(\boldsymbol{S}) \approx 10^6$: le système d'équations d'évolution (6.5) est *raide* [102]. Les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont réelles : $\pm\overline{c}_{p1}$, $\pm\overline{c}_{p2}$, $\pm c_s$, et 0 à l'ordre de multiplicité 2, avec $\overline{c}_{p1} > \overline{c}_s > \overline{c}_{p2}$. Les ondes associées aux valeurs propres $\overline{c}_{p1}$ et $\overline{c}_{p2}$ sont des ondes de compression, respectivement appelées *onde rapide* et *onde lente*. L'onde associée à la valeur propre $\overline{c}_s$ est une onde de cisaillement.

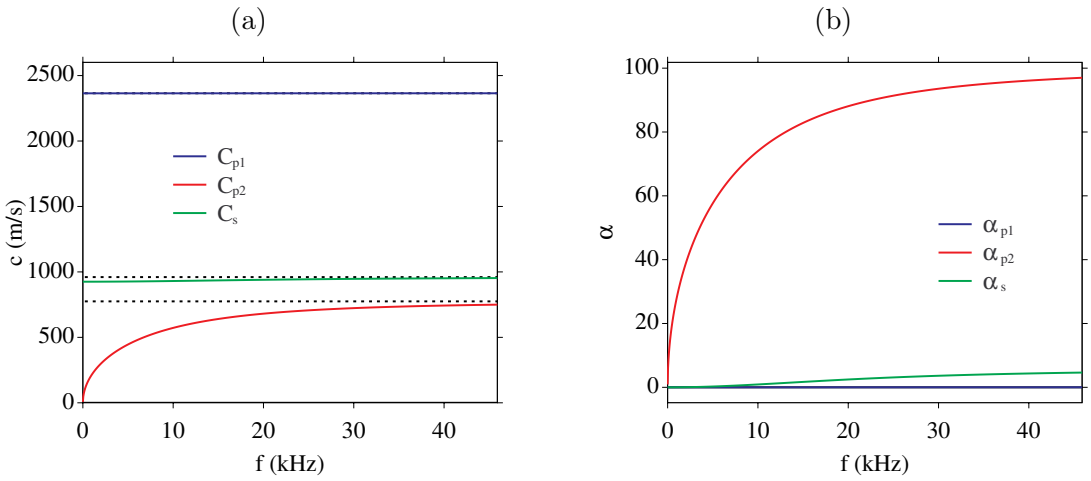


Figure 6.2: Courbes de dispersion (a) et d'atténuation (b). p1 : onde de compression rapide ; p2 : onde de compression lente ; s : onde de cisaillement. En (a), les traits pointillés horizontaux désignent les valeurs propres $\overline{c}_{p1}$, $\overline{c}_{p2}$ et $\overline{c}_s$.

Soit une onde plane homogène de direction de propagation $\boldsymbol{n}$, de direction de vibration $\boldsymbol{d}$, et de pulsation $\omega = 2\,\pi\,f$, où f est la fréquence et k le nombre d'onde, et de vecteur position $\boldsymbol{r} = (x,\, y)^T$. On injecte l'expression de cette onde $\boldsymbol{d}\,e^{i(\omega\,t - k\,\boldsymbol{n}.\,\boldsymbol{r})}$ dans (6.4). Si $\boldsymbol{d}$ est colinéaire à $\boldsymbol{n}$, on obtient la relation de dispersion des ondes de compression

$$\begin{aligned}
&A\,k^4 + B(\omega)\,k^2 + C(\omega) = 0,\\
&A = \kappa\,m\left(\lambda_f + 2\,\mu - \beta^2\,m\right),\\
&B(\omega) = -\kappa\left(\left(\lambda_f + 2\,\mu\right)\,\rho_w + m\left(\rho - 2\,\beta\,\rho_f\right)\right)\omega^2 + i\,\eta\left(\lambda_f + 2\,\mu\right)\omega,\\
&C(\omega) = \chi\,\kappa\,\omega^4 - i\,\eta\,\rho\,\omega^3,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

de racines $\pm k_{p1}$ et $\pm k_{p2}$, $\Re\mathrm{e}\left\{k_{p1,p2}\right\} > 0$. Si $\boldsymbol{d}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{n}$, on obtient la relation de

dispersion de l'onde de cisaillement

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{A\,C - B^2}{C} \right)^{1/2}, \\
A &= \omega^2 \, \left(\rho + \phi \, \rho_f (a-2) \right) - i \, \omega \, \phi^2 \, \frac{\eta}{\kappa}, \\
B &= -\omega^2 \, \phi \, \rho_f \, (a-1) + i \, \omega \, \phi^2 \, \frac{\eta}{\kappa}, \\
C &= \omega^2 \, \phi \, \rho_f \, a - i \, \omega \, \phi^2 \, \frac{\eta}{\kappa}.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

On en déduit les vitesses de phase $c = \omega / \Re\mathrm{e}\, k$ et les atténuations $\alpha = \Im\mathrm{m}\, k$ des différentes ondes. Les vitesses de phase sont des fonctions croissantes de la fréquence et tendent, par valeur inférieure, vers les valeurs propres $\overline{c}$ associées. Si $\eta = 0$, les trois ondes sont non dispersives et non atténuées, et l'énergie mécanique est conservée. Si $\eta \neq 0$, l'onde de compression rapide et l'onde de cisaillement restent peu dispersives et sont peu atténuées. Par contre, l'influence de la viscosité sur l'onde de compression lente est très importante. Dans la limite très basse fréquence $f \ll f_c$, c_{p2} tend vers 0 : l'onde lente est alors un mode statique [35]. Pour des fréquences plus grandes, c_{p2} est non nul mais l'atténuation devient très importante : l'onde lente est alors très fortement atténuée. Ces propriétés sont résumées en figure 6.2.

L'influence directe de l'onde lente sur la propagation en milieu homogène est ainsi négligeable. Cela a amené des auteurs à remettre en cause l'utilité du modèle de Biot pour des applications réelles. Cependant, l'influence de l'onde lente devient cruciale en présence d'interfaces [25]. En effet, l'onde de compression lente générée lors de l'interaction d'une onde de compression rapide ou d'une onde de cisaillement avec une interface reste localisée au voisinage de cette interface, et peut être localement d'amplitude importante. Elle joue alors un rôle crucial dans les équations de bilan au niveau des interfaces, et donc sur l'amplitude des ondes diffractées. Cette justifie le soin important apporté au calcul précis de l'onde lente.

6.3 Modélisation numérique

6.3.1 Schéma d'intégration

Pour intégrer le système (6.5), on introduit une grille uniforme de pas d'espace $\Delta\, x = \Delta\, y$ et de pas de temps $\Delta\, t$. Les méthodes numériques citées en section 6.1 intègrent simultanément les dérivées et le terme source dans (6.5). Une analyse de stabilité à la Von-Neumann conduit alors à une condition de stabilité

$$
\Delta\, t \leq \min \left(\frac{\Upsilon \, \Delta\, x}{c_{p_\infty}}, \frac{2}{R(\boldsymbol{S})} \right),
\tag{6.8}
$$

avec Υ défini en (2.9). Dans (6.8), la borne induite par le rayon spectral de $\boldsymbol{S}$ est très restrictive. Dans du grès saturé d'eau, par exemple, le nombre CFL maximum est $\overline{c}_{p1} \, \Delta\, t / \Delta\, x \approx 10^{-2}$. Pour du grès saturé de bitume, on atteint 10^{-12}, ce qui rend le calcul impraticable.

Comme dans le cas des ondes viscoélastiques vu au chapitre 5, nous suivons ici une approche plus efficace, en résolvant alternativement par *Strang's splitting* [102] la partie propagative

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}, \tag{6.9}$$

et la partie avec terme source

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{U}. \tag{6.10}$$

L'équation (6.9) peut être résolue par un schéma à deux pas de temps, centré en espace et à flux conservé, conduisant à $\boldsymbol{U}^{n+1/2}$. On utilise pour cela un schéma ADER d'ordre 4 en temps et en espace, détaillé en section 2.2. Les paramètres physiques ne variant pas avec t, l'équation (6.10) est résolue de façon exacte : p et $\boldsymbol{\sigma}$ ne sont pas modifiés, tandis que les vitesses deviennent ($i = 1, 2$)

$$v_{si}^{n+1} = v_{si}^{n+1/2} + \frac{\rho_f}{\rho}\left(1 - e^{-\frac{\eta}{\kappa}\frac{\varrho}{\chi}\frac{\Delta t}{2}}\right) w_i^{n+1/2}, \qquad w_i^{n+1} = e^{-\frac{\eta}{\kappa}\frac{\varrho}{\chi}\frac{\Delta t}{2}}\, w_i^{n+1/2}. \tag{6.11}$$

Le splitting (6.9)-(6.10) avec l'intégration exacte (6.11) conduit à la condition de stabilité optimale CFL : $\frac{c_{p1}\,\Delta t}{\Delta x} \leq \Upsilon$. Cependant, comme $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ne commutent pas avec $\boldsymbol{S}$, l'ordre de convergence théorique décroît de 4 à 2.

6.3.2 Raffinement de maillage

Si $\eta \neq 0$, on déduit de l'analyse de dispersion qu'une grille très fine est nécessaire pour discrétiser convenablement l'onde lente. Une grille uniforme étant beaucoup trop coûteuse informatiquement, on met en oeuvre une méthode de raffinement de maillage [86]. Comme l'onde lente reste essentiellement localisée au voisinage des sources et des interfaces, il n'est pas utile de modifier les zones à raffiner au cours de la propagation.

Nous implémentons ici une méthode de raffinement de maillage spatio-temporel à flux conservé [16], bien adaptée au schéma d'intégration ADER. Dans la zone raffinée, les pas en espace et en temps sont divisés par un facteur identique. L'interface entre deux grilles en dimension un est schématisée en figure 6.3. Pour le schéma ADER 4 de largeur de stencil $s = 2$, il faut déterminer les valeurs fictives $\boldsymbol{U}_1^{c,n}$, $\boldsymbol{U}_2^{c,n}$, $\boldsymbol{U}_{-2}^{f,n+\frac{j}{q}}$, $\boldsymbol{U}_{-1}^{f,n+\frac{j}{q}}$ ($j = 0, \ldots, q-1$), où q est le facteur de raffinement, et les indices c et f désignent la grille grossière ("coarse") et fine. Pour cela, on procède par interpolation linéaire en espace entre noeuds voisins du noeud où une valeur fictive est recherchée. Sur la grille grossière, on obtient

$$\boldsymbol{U}_1^{c,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}_{\frac{q}{2}-1}^{f,n} + \boldsymbol{U}_{\frac{q}{2}}^{f,n}\right) & \text{si } q \text{ pair,} \\ \boldsymbol{U}_{\frac{q-1}{2}}^{f,n} & \text{si } q \text{ impair,} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{U}_2^{c,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}_{\frac{3q}{2}-1}^{f,n} + \boldsymbol{U}_{\frac{3q}{2}}^{f,n}\right) & \text{si } q \text{ pair,} \\ \boldsymbol{U}_{\frac{3q-1}{2}}^{f,n} & \text{si } q \text{ impair.} \end{cases} \tag{6.12}$$

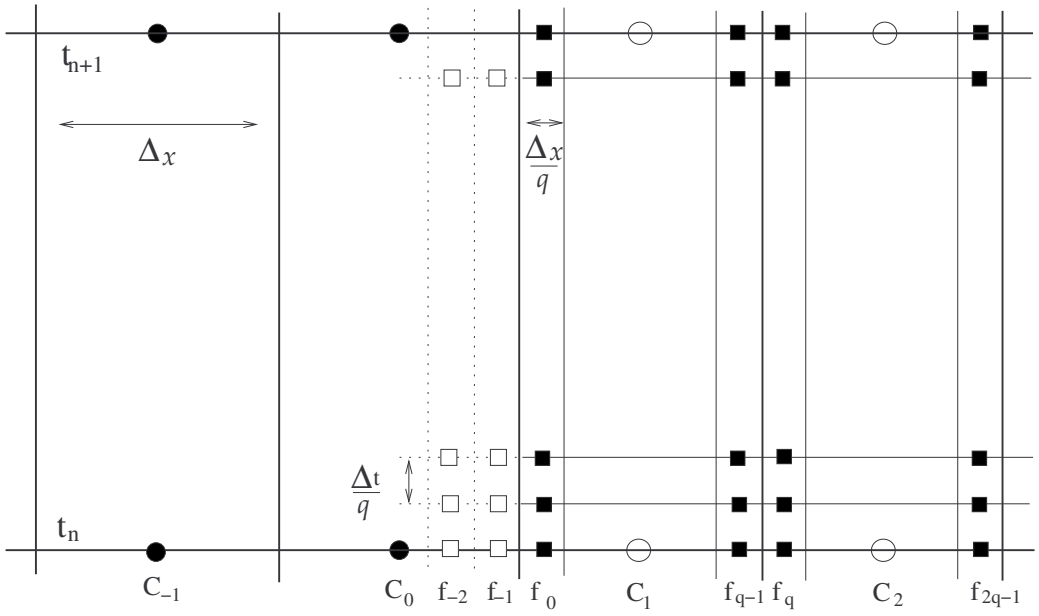


Figure 6.3: Interface entre deux grilles, celle de droite étant raffinée d'un facteur q. Valeurs de la grille grossière (C) connues • et fictives ∘. Valeurs de la grille fine (F) connues □ et fictives □.

Toutes les valeurs dans (6.12) sont connues. Sur la grille fine, on obtient ($j = 0, ..., q-1$)

$$\boldsymbol{U}_{-1}^{f,n+\frac{j}{q}} = \frac{2}{q+1}\,\boldsymbol{U}_{0}^{c,n+\frac{j}{q}} + \frac{q-1}{q+1}\,\boldsymbol{U}_{0}^{f,n+\frac{j}{q}},$$

$$\boldsymbol{U}_{-2}^{f,n+\frac{j}{q}} = \begin{cases} \dfrac{4}{q+1}\,\boldsymbol{U}_{0}^{c,n+\frac{j}{q}} + \dfrac{q-3}{q+1}\,\boldsymbol{U}_{0}^{f,n+\frac{j}{q}} & \text{si } q \geq 3, \\ \dfrac{3-q}{2\,q}\,\boldsymbol{U}_{-1}^{c,n+\frac{j}{q}} + \dfrac{3\,(q-1)}{2\,q}\,\boldsymbol{U}_{0}^{c,n+\frac{j}{q}} & \text{si } q < 3. \end{cases} \tag{6.13}$$

Dans (6.13), les valeurs de la grille grossière aux sous-pas $j = 1, \ldots, q-1$ ne sont pas connues. On les détermine par interpolation linéaire en temps entre t_n et t_{n+1}

$$\boldsymbol{U}_{i}^{c,n+\frac{j}{q}} = \frac{q-j}{q}\,\boldsymbol{U}_{i}^{c,n} + \frac{j}{q}\,\boldsymbol{U}_{i}^{c,n+1}, \qquad i = -1,\, 0, \quad j = 0, ..., q-1. \tag{6.14}$$

Nous n'avons pas de résultat de stabilité sur le couplage entre le schéma d'intégration et la méthode de raffinement de maillage (6.12)-(6.14) : à notre connaissance, une analyse de stabilité par technique GKS a été proposée uniquement dans le cas simple du schéma de Lax-Wendroff et de l'équation d'advection scalaire [15]. Toutefois, les expériences numériques n'indiquent aucun problème d'instabilité, quel que soit le facteur de raffinement q.

En dimension d, on montre facilement que le surcoût informatique est en $\mathcal{O}(h^d\, q^{d+1})$, où h est la largeur de la zone à raffiner. Il convient donc de choisir avec soin q et h. Pour un signal de fréquence centrale f_0, on impose que le nombre de points par longueur d'onde rapide sur la grille

grossière soit identique au nombre de points par longueur d'onde lente sur la grille fine, soit

$$q(f_0) = \frac{c_{p1}(f_0)}{c_{p2}(f_0)}, \tag{6.15}$$

avec c_{pi} déduits de (6.6). Les valeurs obtenues peuvent être très élevées, par exemple $q \approx 64$. Les expériences numériques indiquent que des raffinements successifs sont alors utiles pour minimiser les diffractions parasites à l'interface entre les grilles. Concernant h, nous choisissons $h = 4\,\lambda_{p2}$, où λ_{p2} est la longueur d'onde lente à la fréquence f_0.

6.3.3 Méthode d'interface immergée

Pour prendre en compte numériquement les interfaces, nous avons adapté la méthode d'interface immergée décrite en section 2.3 aux équations (6.4) et aux conditions de saut (6.1). En dimension un et pour $\eta = 0$, nous avons étudié la stabilité de la méthode par une technique de modes normaux discrets GKS [68, 163]. Cette analyse, qui revient à déterminer numériquement la position de zéros dans le plan complexe, conduit à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Par contre, excepté dans des cas très simples, on ne peut pas en déduire d'expression analytique de type CFL, liant les paramètres physiques et les pas de discrétisation. Voir la section 2.4.3 pour les détails techniques.

Nous avons réalisé de nombreuses études paramétriques de stabilité, faisant varier la position de l'interface dans le maillage ou les valeurs des paramètres physiques. De ces études, il découle que le couplage du schéma et de la méthode d'interface est stable, pour des valeurs usuelles des paramètres physiques. Pour des discontinuités importantes de ces derniers, la méthode d'interface stabilise le schéma : voir à ce sujet le cas illustré en figure 6.5.

Nous avons aussi implémenté la méthode d'interface immergée en 2D, avec et sans viscosité. Toutefois, seuls des tests préliminaires ont été réalisés. Nous n'avons en effet pas encore couplé informatiquement les algorithmes de raffinement de maillage et la méthode d'interface immergée, ce qui empêche de simuler la propagation dans des milieux avec viscosité.

6.4 Expériences numériques

6.4.1 Dimension un

Dans les expériences numériques qui suivent, on note respectivement avec des cercles (ou croix) et en traits pleins les solutions numérique et analytique. Les ondes incidente, réfléchies et transmises sont désignées par les lettres I, R et T. Les ondes rapide et lente sont désignées par la lettre F (fast) et S (slow). Excepté en figure 6.6, l'onde incidente est une onde rapide, dont l'évolution temporelle est une combinaison de sinusoïdes tronquées de classe C^6 et de fréquence centrale 40 Hz. Enfin, les interfaces matérielles et numériques entre grilles sont respectivement représentées en traits plein et en pointillés.

En figure 6.4, on simule la propagation des ondes dans du grès homogène saturé d'eau, en négligeant la viscosité de cette dernière. Les pores sont supposés partiellement fermés à

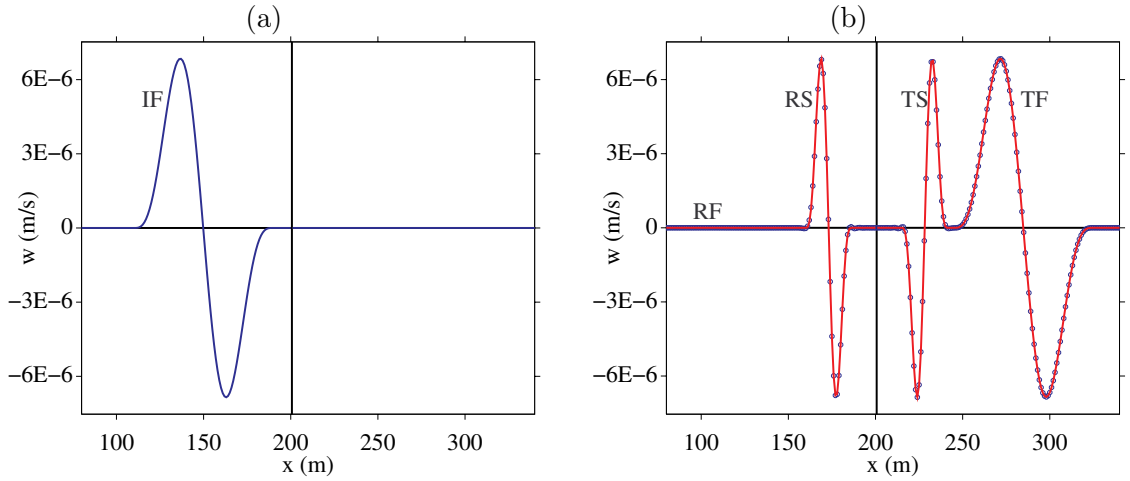


Figure 6.4: Contact hydraulique imparfait, $\eta = 0$. Onde incidente (a) ; ondes diffractées (b).

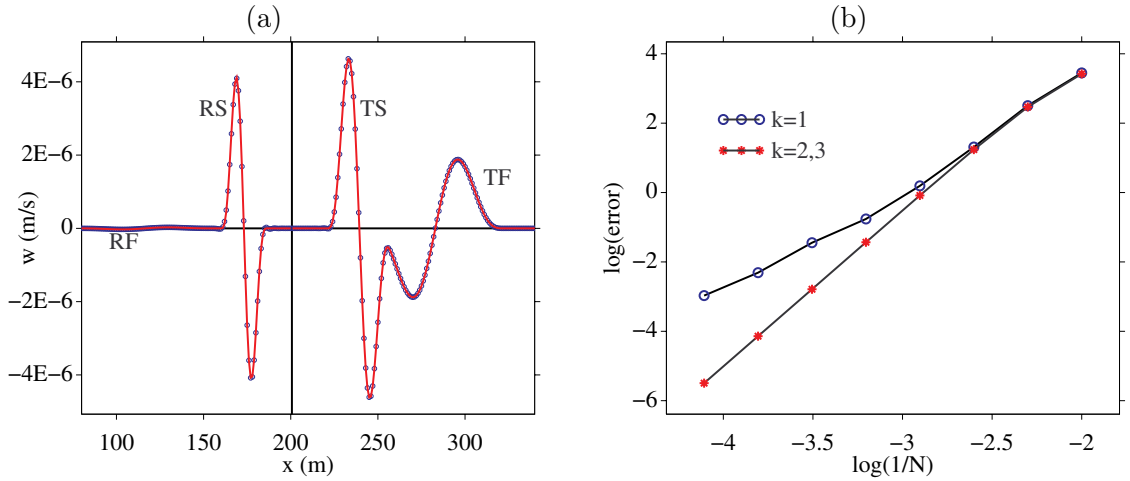


Figure 6.5: Contact hydraulique parfait, $\eta = 0$. Ondes diffractées (a) ; mesures de convergence (b).

l'interface, de sorte que la perméabilité hydraulique κ_s dans (6.1) est finie. Vu que le milieu de propagation est homogène, les diffractions sont uniquement modélisées par la méthode d'interface immergée. On obtient ainsi une première confirmation de la précision de cette méthode.

En figure 6.5, on considère un milieu hétérogène constitué de grès saturé d'eau (à gauche de l'interface) et de schiste saturé de gaz (à droite de l'interface). Dans les deux sous-domaines, la viscosité du fluide interstitiel est négligée. Sans traitement numérique particulier au niveau de l'interface, le schéma appliqué au système (6.4) à coefficients discontinus est instable, et les simulations sont inutilisables. L'analyse de stabilité GKS montre, au contraire, que le schéma couplé à la méthode d'interface est stable, quelle que soit la position de l'interface dans le maillage. En (b), on présente une étude de convergence, en fonction de l'ordre k des extrapolations utilisées

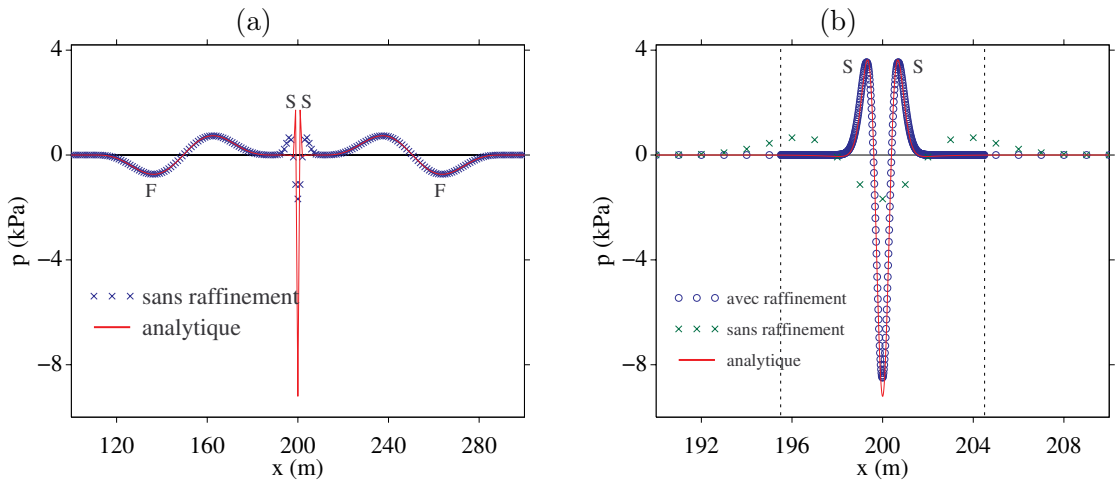


Figure 6.6: Milieu homogène, $\eta \neq 0$. Ondes générées par un point source (a) ; zoom (b).

au niveau des interfaces [A1, A9]. L'analyse théorique, qui prévoit que $k = 2$ ou $k = 3$ sont suffisants pour maintenir une erreur globale d'ordre 4, est confirmée. Par contre, l'ordre $k = 1$ est insuffisant, et conduit à une convergence d'ordre 2.9.

En figure 6.6, on simule les ondes générées par une source ponctuelle de contrainte dans du grès saturé d'eau, en prenant en compte la viscosité de cette dernière. Les calculs sont présentés une fois que la source est éteinte. Sans splitting, la condition de stabilité (6.8) est très pénalisante, conduisant à $c_{p1}\,\Delta t\,/\,\Delta x \leq 0.3$. Avec splitting, on utilise ici un pas de temps tel que $c_{p1}\,\Delta t\,/\,\Delta x = 0.9$. L'onde lente reste localisée au voisinage de la source, et varie très fortement sur une petite échelle spatiale. Sur grille uniforme grossière, cette onde est mal calculée (a). Pour bien capturer l'onde lente, on doit utiliser une grille localement raffinée d'un facteur $q = 64$ (b), ce facteur découlant de l'analyse de dispersion et de (6.15).

Le cas d'un milieu hétérogène avec une interface et des fluides saturant visqueux est illustré en figure 6.7. Autour de l'interface, la grille est raffinée 8 fois, puis 64 fois. En (a), on représente la pression lors de l'interaction de l'onde incidente avec l'interface. L'amplitude des ondes lentes réfléchie et transmise est supérieure à celle des autres ondes. Ultérieurement, cette amplitude décroît, les ondes lentes restant localisées à l'interface (b). Des zooms permettent de visualiser les différents maillages et d'observer la concordance entre les solutions numérique et analytique (c-d).

Pour représenter l'interaction d'une onde rapide réfléchie avec une onde lente déjà générée, on présente en figure 6.8 le cas de deux interfaces. Les milieux sont, de gauche à droite, du grès saturé d'eau, du schiste saturé de gaz, puis à nouveau du grès saturé d'eau. Les viscosités des différents fluides saturant sont prises en compte. Comme dans le test précédent, la grille est raffinée 8 fois puis 64 fois autour des interfaces. La pression est représentée alors que l'onde traverse le troisième milieu (a). Un zoom permet d'observer l'échelle d'évolution des ondes lentes localisées aux interfaces (b).

Comme dernier exemple en dimension un, on considère en figure 6.9 une configuration avec

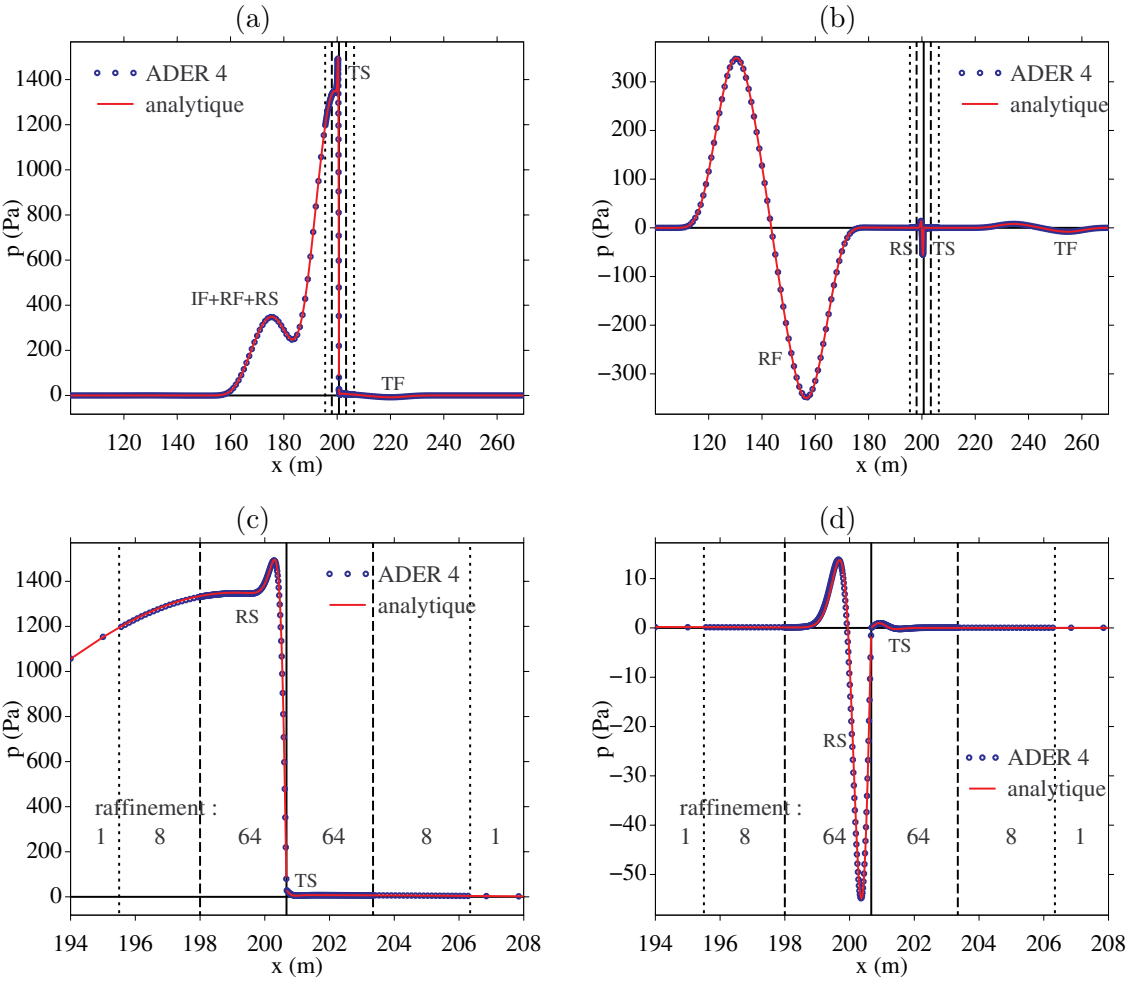


Figure 6.7: Milieu avec une interface, $\eta \neq 0$. Instants t_1 (a-c) et $t_2 > t_1$ (b-d). Zooms (c-d).

10 interfaces réparties aléatoirement, séparant successivement du grès saturé d'eau et du schiste saturé de gaz. On représente σ à l'instant initial (a) et après interaction avec les 10 interfaces (b). Contrairement à p représenté dans les figures précédentes, les contraintes dues aux ondes lentes ne sont pas visibles à l'échelle de la figure. Simuler la propagation dans un tel milieu présente un intérêt physique, permettant de caractériser le *milieu effectif* possédant des propriétés équivalentes pour le *champ cohérent* [161] : voir à ce sujet le chapitre 7. D'un point de vue numérique, on en déduit aussi l'importance du choix de q et h (section 6.3.2) : même en 1D, le surcoût informatique dû aux raffinements successifs devient non négligeable.

6.4.2 Dimension deux

La figure 6.10 présente la vitesse solide horizontale v_{s1} rayonnée par une source de compression, positionnée au centre d'un domaine constitué de grès saturé d'eau sans viscosité (a-b) ou avec viscosité (c-d). Dans le premier cas, l'onde lente se propage. La solution analytique est calculée

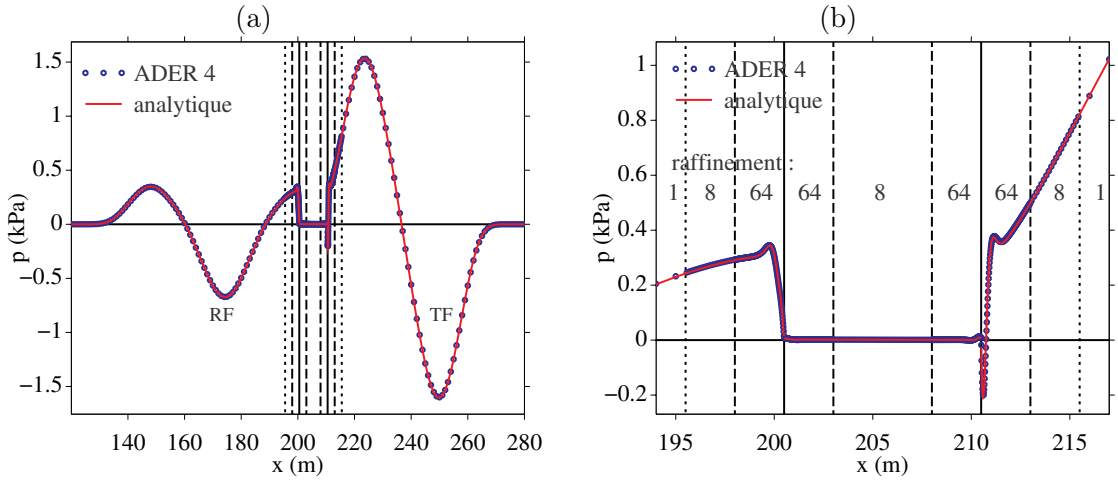


Figure 6.8: Milieu avec deux interfaces, $\eta \neq 0$ (a). Zoom (b).

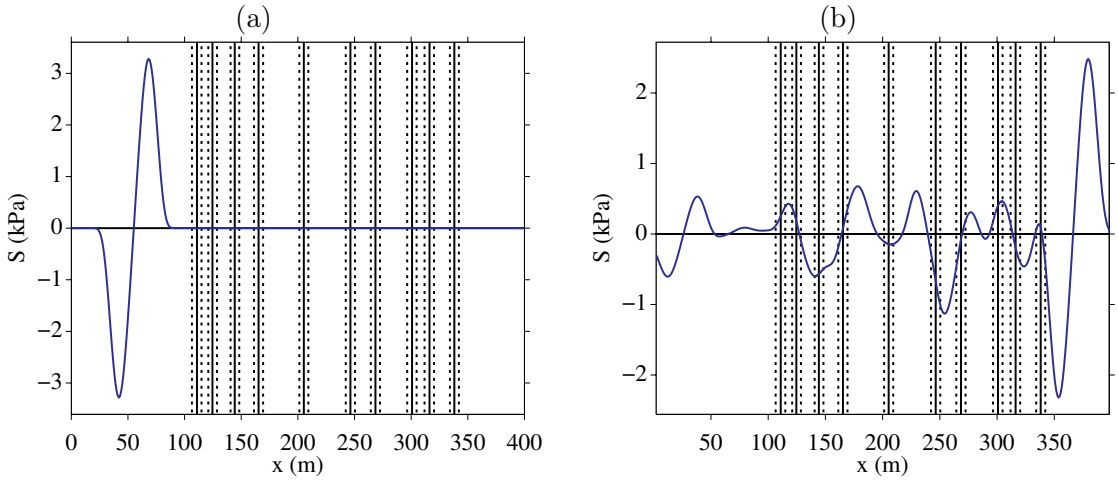


Figure 6.9: Milieu avec 10 interfaces, $\eta \neq 0$. Instant intial (a), après propagation (b).

par la méthode de Cagniard-de Hoop [50]. Avec viscosité, l'onde lente est très atténuée et n'est pas visible à l'échelle des figures (c-d). Voir [37] pour la pression rayonnée et la mise en oeuvre du raffinement de maillage autour de la source.

Un premier test de la méthode d'interface immergée est proposé en figure 6.11. Une onde plane rapide intersecte une interface plane entre du grès saturé d'eau et du grès saturé de bitume. Comme précisé en section 6.3.3, la viscosité des fluides saturants n'est pas prise en compte, ce qui est physiquement discutable dans le cas du bitume ... Le contact hydraulique entre les milieux est supposé parfait, soit $\kappa_s \to +\infty$ dans (6.1). On observe la dispersion numérique de l'onde lente transmise, due au trop faible nombre de points par longueur d'onde. Les comparaisons de solutions numérique et analytique sur différentes grilles indiquent une convergence d'ordre 4.

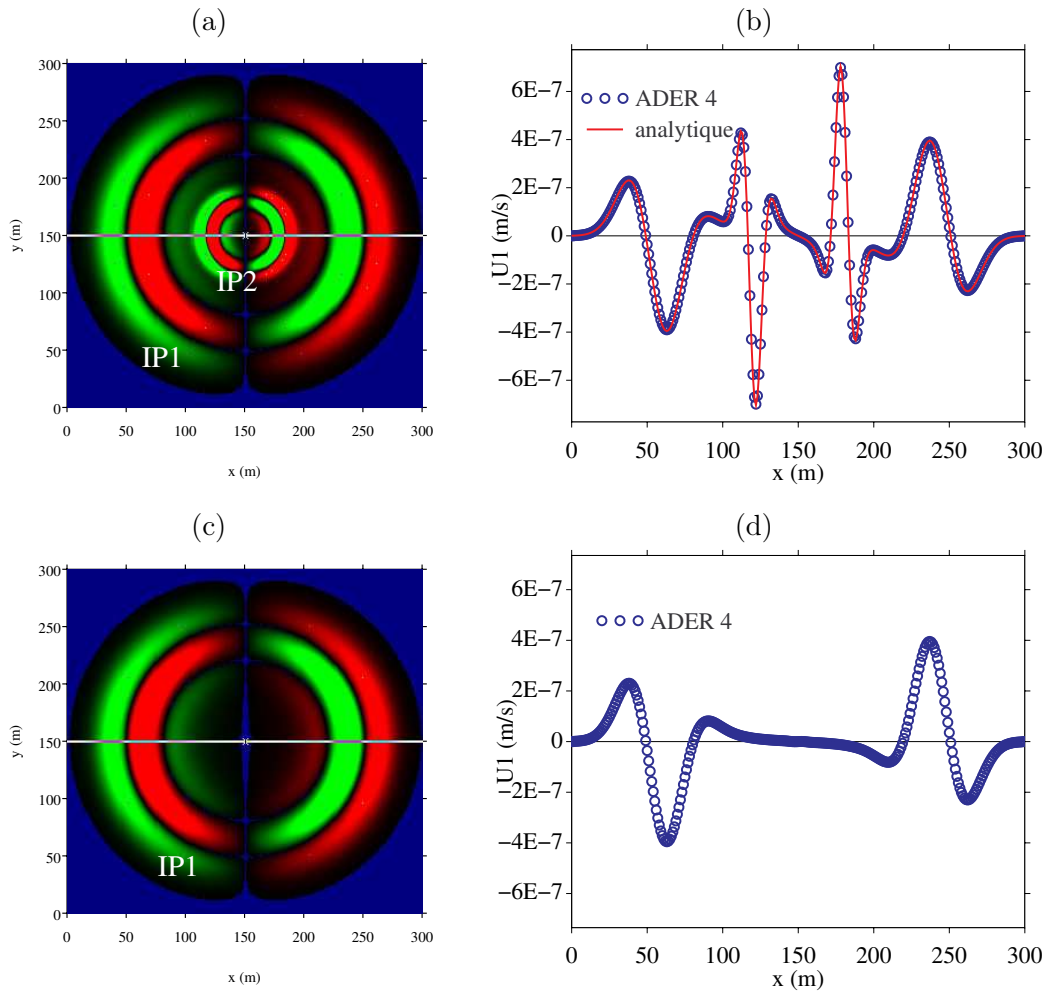


Figure 6.10: Vitesse v_{s1} rayonnée par un point source en milieu homogène, avec $\eta = 0$ (a-b) et $\eta = 10^{-3}$ Pa.s (c-d).

Le dernier test est réalisé en faisant impacter une onde plane rapide sur une interface circulaire. Les milieux extérieur et intérieur sont respectivement du grès saturé d'eau et du schiste saturé de gaz. En figure 6.12, on observe le champ initial (a-b) et les ondes diffractées (c-d). La solution analytique est calculée par transformée de Fourier et développement des solutions sur des bases de fonctions de Bessel.

6.5 Conclusion

Bilan. La modélisation numérique du système de Biot est rendue difficile par la coexistence d'ondes de nature radicalement différente : deux ondes "classiques", de propriétés voisines des ondes élastiques, et une onde "lente", fortement diffusive et dispersive. Celle-ci rend indispensable le développement de méthodes de splitting et de raffinement de maillage spatio-temporel.

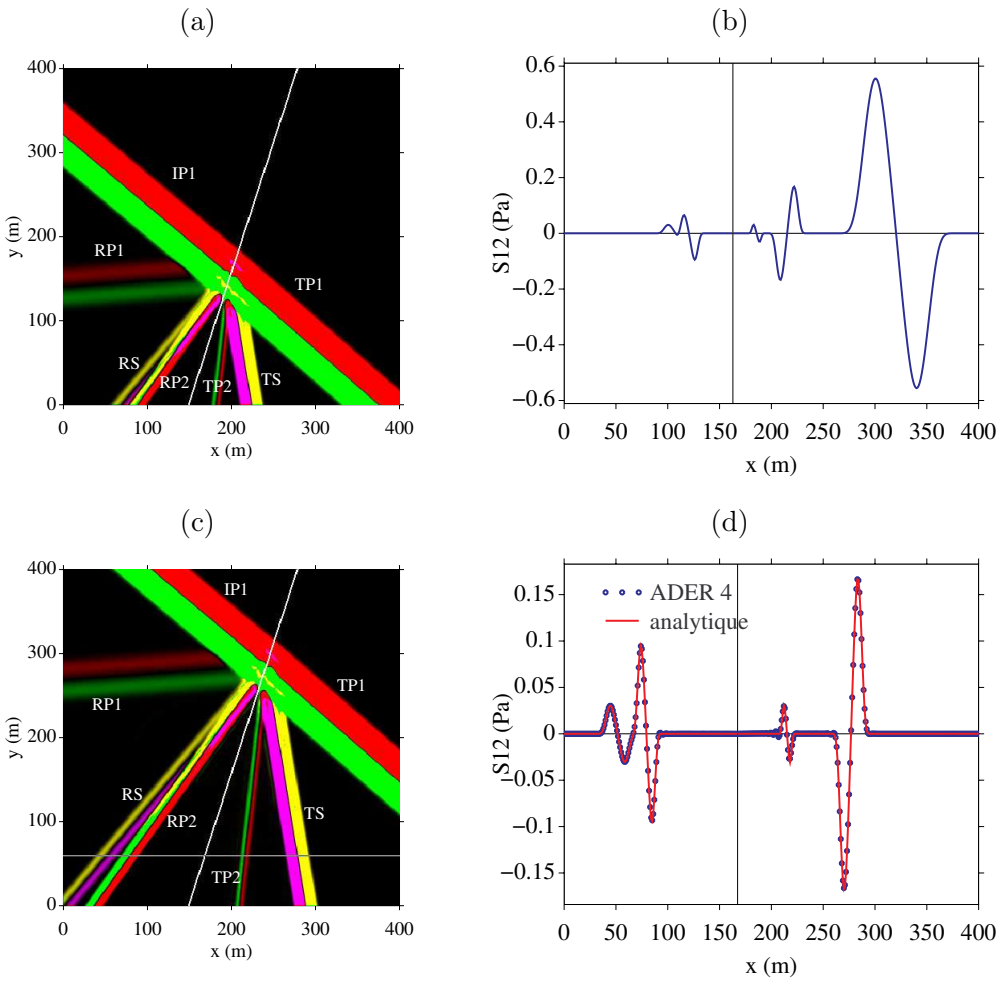


Figure 6.11: Onde plane sur une interface plane, $\eta = 0$.

Perspectives. On suggère ici plusieurs pistes de recherche :

- *Algorithmes 2D.* Pour compléter ce travail et conduire à des modélisations numériques réalistes, les méthodes de raffinement de maillage et d'interface immergée doivent être couplées en dimension deux. La difficulté est purement algorithmique. Une difficulté supplémentaire devrait découler de la parallélisation des calculs, nécessaire pour aborder des configurations présentant un intérêt physique.

- *Stabilité GKS.* En 1D et si $\eta \neq 0$, l'analyse GKS reste à faire [100, 101]. Lorsque la viscosité est suffisante pour que l'onde lente reste localisée à l'interface, des instabilités numériques apparaissent. En raffinant le maillage suffisamment pour que l'onde lente soit correctement discrétisée, ces instabilités disparaissent. On propose une explication qualitative de ce phénomène : sans raffinement, l'onde lente est très mal calculée. Les valeurs numériques du champ au voisinage de l'interface ne sont alors pas compatibles avec les conditions de saut imposées par la méthode d'interface immergée. L'analyse GKS standard doit être modifiée pour prendre en compte le splitting [100, 101].

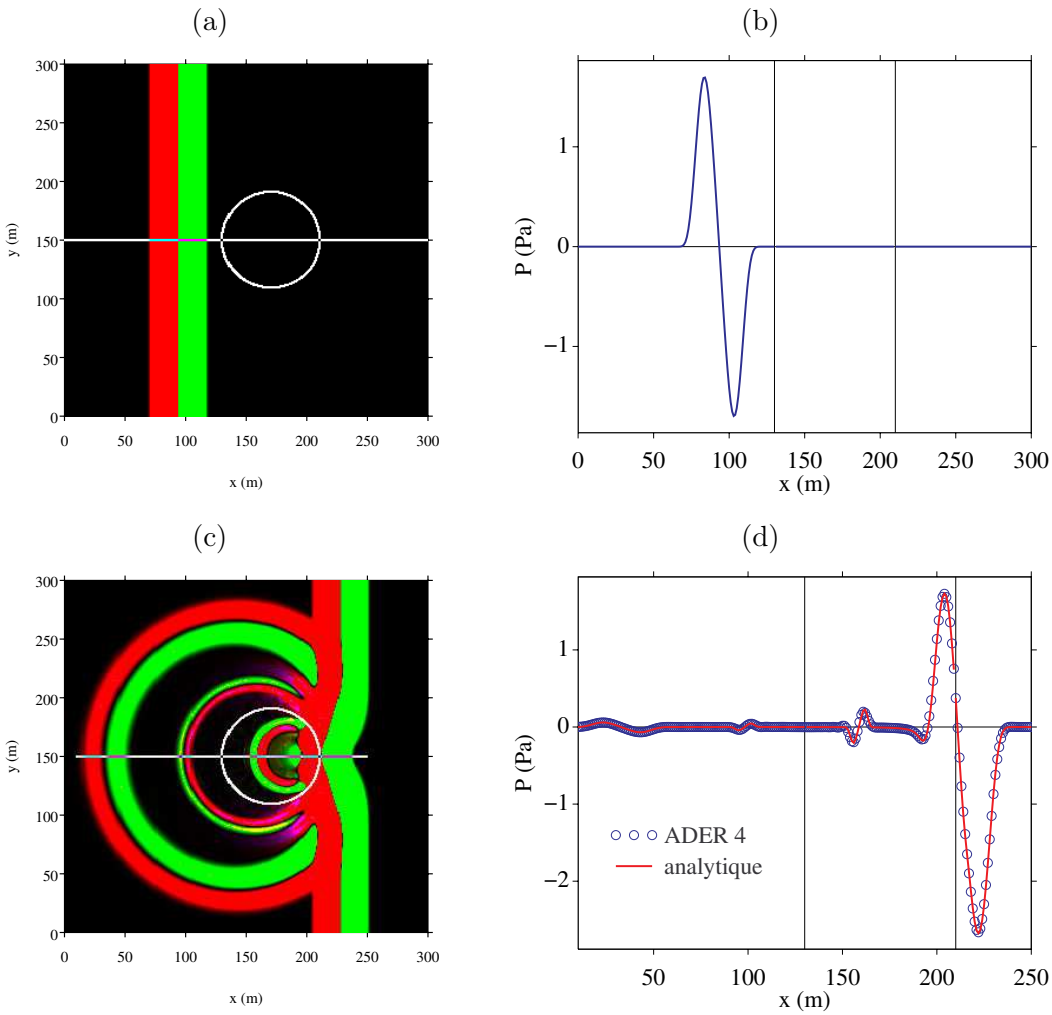


Figure 6.12: Onde plane impactant une interface circulaire 2D, $\eta = 0$.

- *Poroviscoélasticité.* La modélisation des effets dissipatifs dans la matrice solide améliorerait le réalisme des simulations. A l'opérateur viscodynamique découlant de (6.2), il est en effet nécessaire d'ajouter un opérateur viscoélastique pour décrire les atténuations mesurées dans les milieux naturels [157]. La modélisation numérique ne devrait pas conduire à des nouveautés notables : comme au chapitre 5, des mécanismes de relaxation peuvent être associés au comportement mécanique de la partie solide, conduisant à un ensemble de variables de mémoire satisfaisant des équations différentielles locales en temps [32].

- *Dérivées fractionnaires.* On s'est uniquement intéressé ici au régime basse-fréquence. Dans le reste du domaine de validité de la poroélasticité, les équations de Biot mettent en jeu une dépendance fréquentielle non polynomiale. En régime transitoire, cela conduit à l'introduction de dérivées d'ordre fractionnaire, dont la résolution numérique est délicate. En section 8.2.2, nous détaillons les difficultés, les approches existantes, et proposons un plan de travail.

Part IV

Ondes et milieux aléatoires

Chapter 7

Diffusion multiple

Travail réalisé avec Mathieu Chekroun, Loïc Le Marrec et Joël Piraux
Production associée : chapitre d'ouvrage [Oc2], congrès [Ci6, Cn8, Cjt11, Cjt12]

7.1 Introduction

Motivation. On s'intéresse ici à la propagation d'ondes à travers un ensemble de diffuseurs répartis aléatoirement dans une matrice fluide ou solide. Si les longueurs d'onde propagées sont du même ordre de grandeur que la taille des diffuseurs, le champ total revient à la superposition d'un *champ incohérent* et d'un *champ cohérent*. Après moyennage des ondes sur des réalisations indépendantes du désordre, le champ incohérent tend vers zéro, tandis que le champ cohérent correspond à une propagation dans un milieu effectif, à caractériser [113]

L'objet des méthodes de diffusion multiple est de déterminer analytiquement le nombre d'onde du milieu effectif, ce qui conduit notamment aux vitesses de phase et atténuations du champ cohérent. Pour cela, de nombreuses approches globalement équivalentes existent [54, 97, 170] ; ici, nous utilisons l'*Independant Scattering Approximation* (ISA). Les hypothèses sous-jacentes sont : faible concentration des diffuseurs, faible contraste d'impédance entre les diffuseurs et la matrice. Le nombre d'onde effectif peut alors être relié linéairement à la concentration en diffuseurs et à la section efficace des diffuseurs.

Cependant, un inconvénient majeur des méthodes de diffusion multiple réside dans leur domaine de validité. Celui-ci est généralement très restreint, et aucune estimation de l'erreur commise n'est disponible. Des expérimentations réelles permettent de quantifier ces limites, mais elles sont coûteuses en matériel et en temps [44].

Méthodologie. Nous proposons ici une caractérisation purement numérique du milieu effectif, basée sur des simulations de propagation d'ondes en milieu hétérogène. Cette approche, classique dans de nombreux domaines de la mécanique appliquée - mécanique des solides [95],

mécanique des fluides [165] -, est encore peu répandue en acoustique. Une première difficulté découle de la taille des simulations requises : la grille de calcul est typiquement de 5000×10000 points en 2D, avec 20000 pas d'intégration en temps, et plusieurs jeux de simulations à réaliser. Ces contingences nécessitent des outils de calcul intensif adaptés. Une autre difficulté, essentielle, découle de la présence de multiples interfaces. Comme rappelé en section 2.1, celles-ci conduisent sur grille cartésienne à une effondrement de la précision des calculs, voire à des instabilités si les contrastes des paramètres physiques sont importants. Ces dégâts peuvent être limités si le maillage est adapté aux interfaces, au prix cependant d'une explosion du temps de calcul due à la condition de stabilité CFL et aux opérations logiques pour le repérage des points de calcul.

Les méthodes numériques présentées tout au long de ce mémoire s'avèrent particulièrement bien adaptées pour de telles simulations. Pour rendre possible une véritable métrologie numérique des milieux étudiés, l'essentiel du travail a consisté à transformer ces méthodes numériques en outils de calcul intensif. Cette tâche, réalisée avec Joël Piraux, a conduit à l'optimisation des codes, à la gestion interactive ou textuelle des entrée-sorties, et à la parallélisation des algorithmes sur un réseau de PC. Par ailleurs, les compétences en traitement du signal et en connaissance des milieux aléatoires ont été apportées par Mathieu Chekroun et Loïc Le Marrec.

Plan. En section 7.2, nous détaillons les deux configurations étudiées : des tiges d'acier dans l'eau, et du béton. En section 7.3, nous rappelons brièvement les méthodes d'intégration et de traitement des données employées. En section 7.4, des tests de validité de ces méthodes numériques sont réalisés, démontrant que leurs erreurs sont bornées et largement inférieures aux quantités physiques recherchées. Cela nous permet d'affirmer que les résultats de simulations constituent les solutions de référence des problèmes étudiés. Des comparaisons avec l'ISA confirment les hypothèses sous-jacentes de celle-ci : l'ISA n'est valide que pour de très faibles concentrations surfaciques de diffuseurs, inférieures à 10 %.

7.2 Modélisation

7.2.1 Tiges d'acier dans l'eau



Figure 7.1: Echantillon de tiges d'aciers, issu de [113].

Des expériences ultrasonores ont été réalisées au Laboratoire Ondes et Acoustique de l'ESPCI sur des échantillons de tiges d'acier parallèles et immergées dans de l'eau [44, 113, 45] (figure 7.1). Cet environnement contrôlé permet aux auteurs de mesurer les paramètres importants de la diffusion multiple, de les comparer à ceux prévus par l'ISA, et enfin d'effectuer des expériences de retournement temporel.

Du point de vue de la modélisation numérique, cette configuration présente un triple intérêt : géométrie bidimensionnelle, milieux de propagation simples, données expérimentales de qualité. Les milieux sont supposés sans atténuation, de paramètres physiques

$$\begin{cases} (\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3},\ c = 1500\,\mathrm{m/s}) & \text{dans l'eau,} \\ (\rho = 7700\,\mathrm{kg/m^3},\ c_p = 6100\,\mathrm{m/s},\ c_s = 3050\,\mathrm{m/s}) & \text{dans l'acier.} \end{cases}$$

Les tiges, de rayon 0.4 mm, sont disposées aléatoirement avec une concentration de 0.12 tiges/mm^2, soit une concentration surfacique de 6 %, ce qui correspond au deuxième type d'échantillon dans [113]. Elles appartiennent à un sous-domaine de 2 cm de largeur et 6 cm de hauteur, contenu dans un domaine de calcul de 3×6 cm^2. Une distance d'exclusion de 30 μm entre chaque diffuseur est imposée : cette corrélation entre les diffuseurs, violant une des hypothèses de l'ISA, n'est pas pénalisante [45]. L'onde plane incidente est un Ricker [A7] de fréquence centrale 2 MHz, d'où une longueur d'onde dans l'eau de 0.75 mm.

7.2.2 Béton

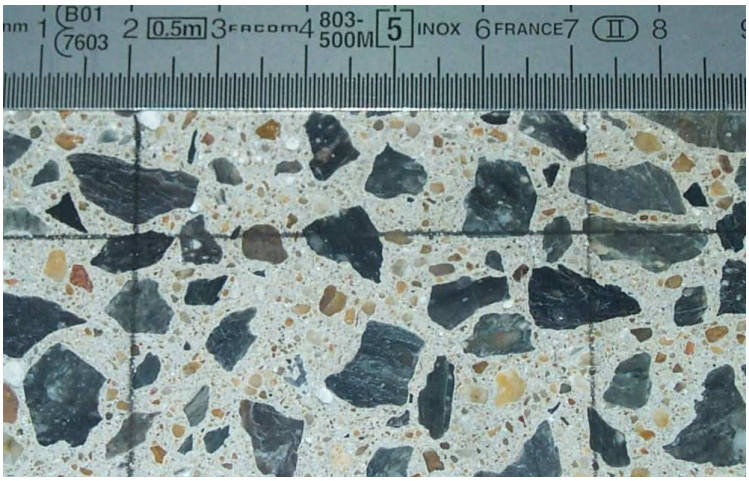


Figure 7.2: Coupe d'un béton (gris : mortier ; noir : graviers).

La thèse de Mathieu Chekroun au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées a porté sur la propagation des ondes de Rayleigh à la surface du béton [36]. Dans le travail présenté ici, nous occultons la présence d'une surface libre - ce point figure en perspectives, en section 8.2.3 - et étudions uniquement la propagation des ondes de volume en milieu infini. Le béton réel, représenté en figure 7.2, est modélisé comme suit. Les graviers sont supposés circulaires, de rayon unique $a = 6$ mm, dans une géométrie bidimensionnelle. La fréquence d'investigation

varie de 50 kHz à 700 kHz. Dans cette bande de fréquences, les longueurs d'onde varient de 3 mm (pour l'onde S) à 90 mm (pour l'onde P). Les graviers sont donc considérés comme des hétérogénéités, de taille comparable aux longueurs d'onde. Au contraire, le mortier est considéré comme homogène, la taille de ses constituants (eau, sable, ciment) étant largement inférieure aux longueurs d'onde. Les milieux sont supposés sans atténuation, de paramètres physiques

$$(\rho,\, c_p,\, c_s) = \begin{cases} (2050\,\mathrm{kg/m^3},\, 3950\,\mathrm{m/s},\, 2250\,\mathrm{m/s}) & \text{dans le mortier,} \\ (2610\,\mathrm{kg/m^3},\, 4300\,\mathrm{m/s},\, 2475\,\mathrm{m/s}) & \text{dans les graviers,} \end{cases}$$

et sont en contact parfait soudé. La concentration des graviers dans le mortier est décrite par le nombre n de diffuseurs par unité de surface. Trois concentrations surfaciques $\phi = n\,\pi\,a^2$ sont considérées par la suite : $\phi = 6$ %, 12 %, et 18 %, définissant trois bétons-types C6, C12 et C18. Ces concentrations sont inférieures à celles de bétons réels, plus proches de 40 %. La distance moyenne entre les diffuseurs les plus proches est $l_\phi = a\,\sqrt{\pi\,/\phi}$, soit : $l_{6\%} = 43$ mm, $l_{12\%} = 32$ mm, $l_{18\%} = 25$ mm. Les diffuseurs appartiennent à un sous-domaine de 25 cm de largeur et 75 cm de hauteur, contenu dans un domaine de calcul de 37.5×75 cm^2. Une distance d'exclusion de 0.6 mm entre chaque diffuseur est imposée.

7.3 Méthodes numériques

7.3.1 Simulation directe

Pour intégrer les équations de l'acoustique et de l'élastodynamique 2D, deux schémas numériques sont utilisés : le schéma de Lax-Wendroff et le schéma ADER d'ordre 4. Cette redondance permet d'observer l'effet des artefacts numériques, largement supérieurs avec le schéma de Lax-Wendroff. Le lecteur peut consulter le chapitre 2, section 2.2, pour les propriétés de ces schémas. La dispersion numérique et l'atténuation numérique sont maximales selon les directions principales de la grille de calcul, et sont donc déduites des expressions 1D (2.20) et (2.24). Les valeurs maximales du rapport q entre les vitesses de phase numérique et exacte, ainsi que la valeur maximale de l'atténuation numérique a, sont alors, pour le schéma de Lax-Wendroff,

$$\begin{aligned} q(\beta,\, G) &= 1 + \frac{2\,\pi^2}{3}\,(\beta^2 - 1)\,G^2 + \mathcal{O}(G^4), \\ a(\beta,\, G) &= -2\,\pi^4\,\beta\,(\beta^2 - 1)\,G^4 + \mathcal{O}(G^6), \end{aligned} \tag{7.1}$$

et pour le schéma ADER d'ordre 4

$$\begin{aligned} q(\beta,\, G) &= 1 - \frac{2\,\pi^4}{15}\,(\beta^2 - 1)\,(\beta^2 - 4)\,G^4 + \mathcal{O}(G^6), \\ a(\beta,\, G) &= \frac{4\,\pi^6}{9}\,\beta\,(\beta^2 - 1)\,(\beta^2 - 4)\,G^6 + \mathcal{O}(G^8). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dans (7.1) et (7.2), $\Delta\,x$ est le pas de discrétisation en espace ; $\beta = c\,\Delta\,t/\Delta\,x$ et G sont respectivement le nombre CFL et l'inverse du nombre de points de calcul par longueur d'onde, dans le cas le plus défavorable. Cela implique de dimensionner $\Delta\,x$ par rapport à l'onde ayant la plus petite vitesse c - onde acoustique dans le cas des tiges d'acier dans l'eau, onde S dans le mortier

dans le cas du béton -, à la fréquence maximale étudiée. Le pas de temps Δt découle quant à lui de la condition de stabilité CFL (2.9), où nous choisissons $\beta_{\max} = 0.60$ pour le schéma de Lax-Wendroff, et $\beta_{\max} = 0.85$ pour le schéma ADER 4.

La discrétisation des interfaces repose sur la méthode d'interface immergée. Celle-ci couple les algorithmes d'intégration numérique dans la matrice extérieure et dans les diffuseurs, en prenant en compte les conditions de saut et la géométrie des interfaces. Le lecteur peut consulter la section 2.3 pour une présentation 1D, et la section 3.3 pour la mise en oeuvre 2D. Le résultat qualitatif suivant est essentiel. Soit k l'ordre de la méthode d'interface immergée, et r l'ordre du schéma. Alors si $k \geq r - 1$, la présence d'interfaces n'introduit pas d'artefacts numériques supplémentaires par rapport au schéma d'intégration. Nous choisissons $k = 2$ dans le cas du schéma de Lax-Wendroff et $k = 3$ dans le cas du schéma ADER d'ordre 4.

7.3.2 Traitement des données

La source est une onde plane de vecteur directeur suivant l'axe x, initialement extérieure à la zone où sont répartis les diffuseurs. Un réseau régulier de récepteurs, de N_l lignes et N_c colonnes, est disposé parmi les diffuseurs, enregistrant le champ à chaque pas de temps. La position des récepteurs est repérée par $(x_i = x_0 + i\,\Delta\,x_r,\, y_j = y_0 + j\,\Delta\,y_r)$, avec $i = 0, \ldots, N_c - 1$ et $j = 0, \ldots, N_l - 1$. L'écart entre deux lignes satisfait $\Delta\,y_r > \lambda_0/2$, où λ_0 est la longueur d'onde de l'onde incidente dans la matrice. Les offsets x_0 et y_0 sont tels que les récepteurs sont suffisamment loin des bords du domaine de calcul pour éviter d'enregistrer les réflexions parasites.

Chaque ligne de récepteurs correspond à une réalisation d'un processus aléatoire. Pour augmenter le nombre de réalisations indépendantes du désordre, on réalise successivement $\mathcal{N}$ simulations, avec des tirages différents de diffuseurs. On obtient le champ cohérent en sommant les signaux temporels aux $\mathcal{N} \times N_l$ lignes, conduisant à N_c signaux temporels $s(x_i, t_n)$. En pratique, seuls les récepteurs localisés dans la matrice sont pris en compte.

La vitesse de phase de l'onde cohérente $c(\omega)$ est calculée en utilisant une transformée en p–ω, qui représente le champ d'onde total dans le domaine lenteur-fréquence, avec $p = 1/c$ [116, 120]. On calcule la transformée de Fourier en temps du champ cohérent, notée

$$s(x_i, \omega) = A(x_i, \omega)\, \mathrm{e}^{-i\,\omega\,p_0(\omega)\,x_i}, \tag{7.3}$$

où $A(x_i, \omega)$ est l'amplitude du spectre en x_i, et p_0 reste à déterminer. Dans l'espace (p, ω), on a

$$\hat{s}(p, \omega) = \sum_{i=1}^{N_c} A(x_i, \omega)\, e^{i\,\omega\,(p - p_0(\omega))\,x_i}. \tag{7.4}$$

Pour chaque pulsation discrète ω, on calcule $\hat{s}(p, \omega)$ en plusieurs valeurs de p. Le maximum du module $|\hat{s}(p, \omega)|$ est atteint en $p = p_0(\omega) = 1/c(\omega)$, d'où une estimation de la vitesse de phase.

Le coefficient d'atténuation est estimé grâce à la décroissance de l'amplitude du spectre du champ cohérent. Dans le domaine fréquentiel, l'amplitude du spectre dans (7.3)-(7.4) s'écrit

$$A(x_i, \omega) = A_0(\omega)\, \mathrm{e}^{-\alpha(\omega)\,x_i}, \tag{7.5}$$

où $A_0(\omega)$ est l'amplitude de s au premier récepteur. Le coefficient d'atténuation $\alpha(\omega)$ est déterminé par la pente de la droite d'écart minimal à $\ln(A(x_i, \omega))$, au sens des moindres carrés. L'onde incidente étant plane, on ne prend pas en compte l'atténuation géométrique.

7.4 Résultats

7.4.1 Tiges d'acier dans l'eau

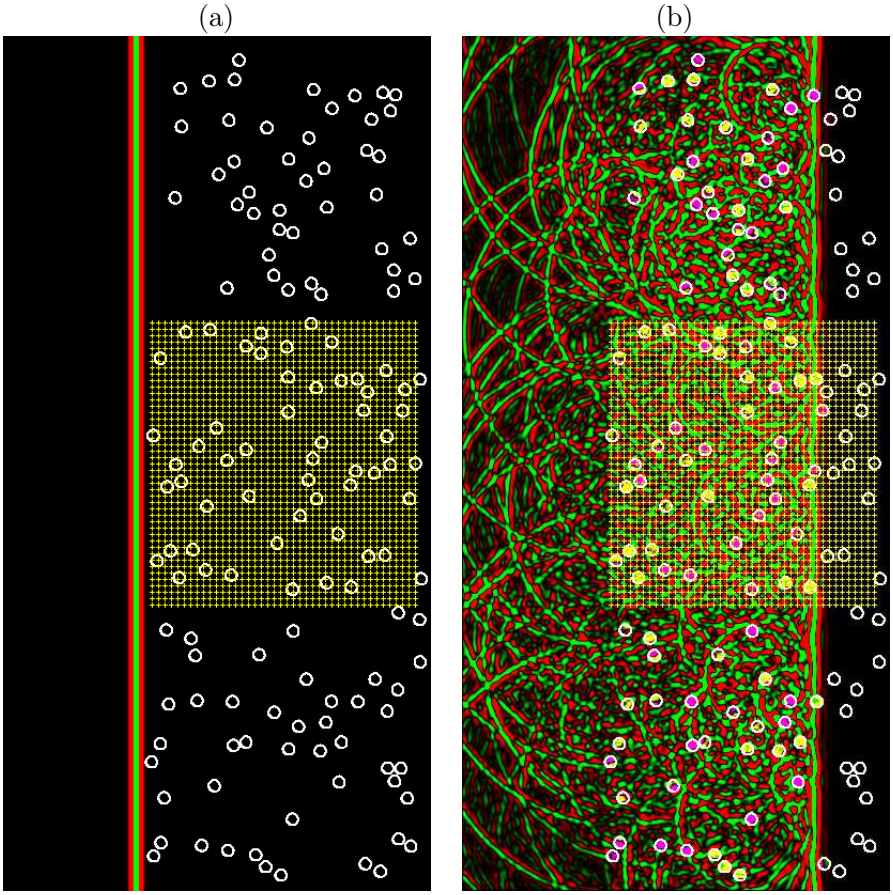


Figure 7.3: Tiges d'acier dans l'eau (0.12 tiges/mm^2). Cartes de pression à l'instant initial (a) et après 13000 pas (b). Grille régulière : récepteurs.

Le dimensionnement est réalisé pour le schéma de Lax-Wendroff. Le nombre CFL de l'onde la plus lente est $\beta = \frac{0.5 \times 1500}{6100} = 0.147$. Pour limiter les artefacts numériques, on choisit un pas d'espace fin : $\Delta x = 7.5\,10^{-6}$ m, d'où une grille de 4000×6000 points de calcul. Le signal large-bande, centré à 2 MHz, est exploité jusque vers 4 MHz, soit $G = 50$ points de calcul par longueur d'onde dans l'eau. Les expressions (7.1) conduisent alors à une dispersion numérique maximale de $2.5\,10^{-2}$ % et à une atténuation numérique maximale de $4.5\,10^{-6}$ Np/m. Les caractéristiques de la grille de récepteurs sont : $N_l = 45$, $N_c = 42$ et $\Delta x_R = \Delta y_R = 0.45$ mm. On effectue $\mathcal{N} = 3$ séries de simulation, soit $\mathcal{N} \times N_l = 135$ réalisations indépendantes du désordre.

La figure 7.3 représente p dans l'eau et σ_{11} dans les tiges d'acier, à l'instant initial (a) et après 13000 pas d'intégration (b). Les calculs sont stoppés après 20000 itérations, lorsque l'onde incidente a traversé l'ensemble des diffuseurs. Chaque itération durant 12 s, une simulation complète dure environ 66 heures et nécessite 2 Go de mémoire vive.

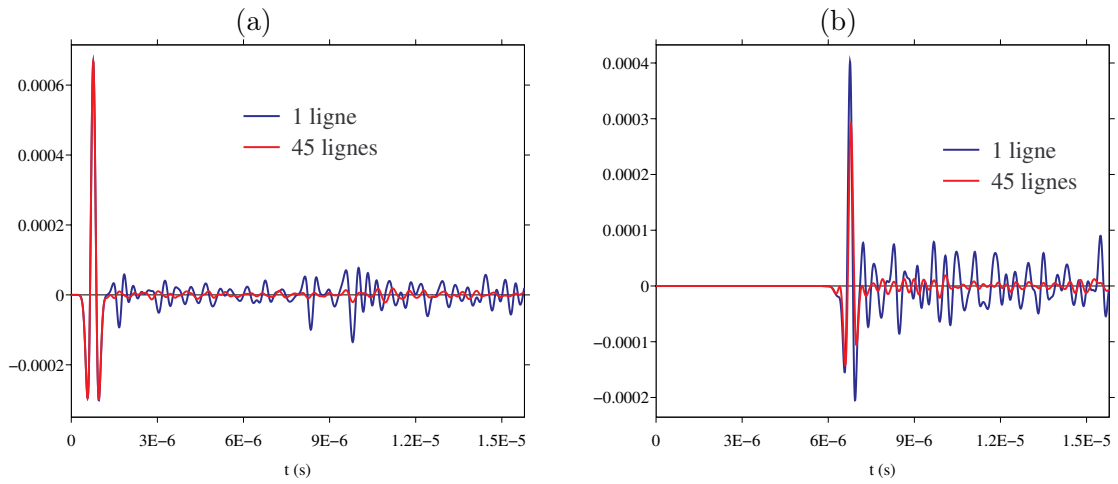


Figure 7.4: Tiges d'acier dans l'eau : évolution temporelle de v_1 à gauche de la grille de récepteurs (a) et au centre de cette grille (b). Signal brut : bleu ; signal après sommation : rouge.

En figure 7.4, on compare l'évolution temporelle de la vitesse horizontale v_1 en un récepteur situé en colonne 0 (a) et en colonne $N_c/2 = 21$ (b). On représente le signal brut (en bleu) et le signal sommé sur les N_l lignes de récepteurs à la même abscisse (rouge). La coda suivant l'onde balistique est fortement diminuée après sommation. D'autre part, on observe la déformation et l'atténuation du signal cohérent après propagation : son amplitude maximale est $7\,10^{-4}$ m/s en (a) et $3\,10^{-4}$ m/s en (b), ce qui illustre la dispersion et l'atténuation intrinsèque du milieu effectif.

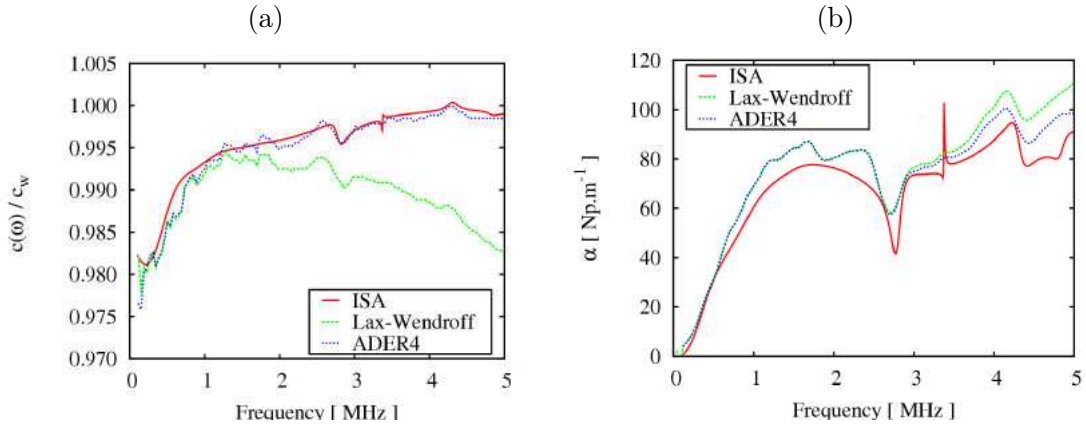


Figure 7.5: Tiges d'acier dans l'eau : dispersion (a) et atténuation (b) du milieu effectif.

A partir des N_c signaux sommés, les méthodes exposées en section 7.3.2 permettent d'estimer la dispersion et l'atténuation du milieu effectif. En figure 7.5, on compare ces estimations numériques à celles prévues théoriquement. Les valeurs de dispersion déduites d'ADER 4 sont très proches de celles de l'ISA (a). L'écart avec les données simulées par Lax-Wendroff, croissant avec la fréquence, découle de la dispersion numérique de ce schéma. Concernant l'atténuation

(b), l'accord entre valeurs théoriques et simulées est moins fin, même si les comportements sont globalement similaires.

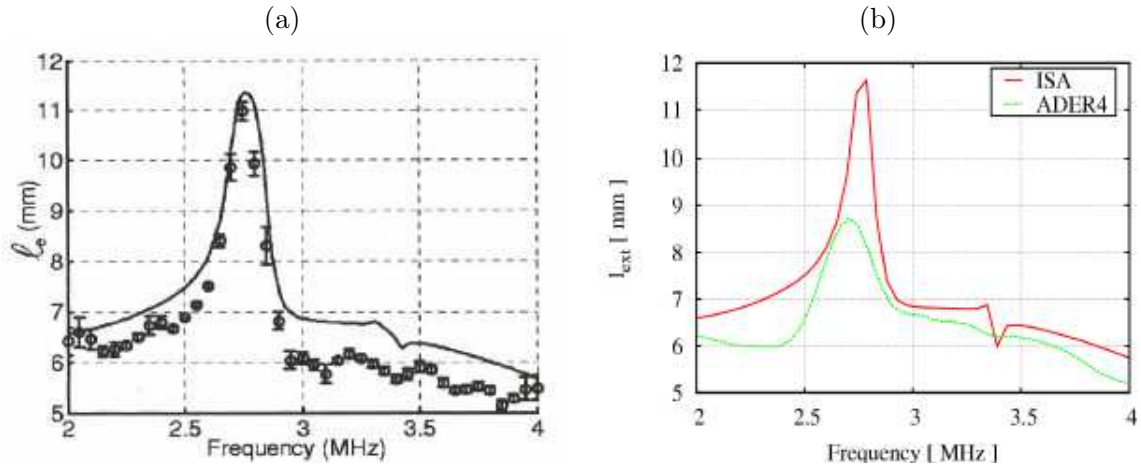


Figure 7.6: Tiges d'acier dans l'eau : libre parcours moyen. Résultats expérimentaux [45] (a) et numériques (b), comparés aux prédictions de l'ISA (trait continu en (a), courbe rouge en (b)).

Pour quantifier l'atténuation du champ cohérent due à la diffusion multiple, les physiciens utilisent la notion de *libre parcours moyen* l_e. Pour des milieux non dissipatifs, on a $l_e = l_{ext} = 1/(2\,\alpha)$, où l_{ext} est la longueur caractéristique d'extinction, et α est l'atténuation du milieu effectif. En figure 7.6, on compare des mesures expérimentales de l_e (a) issues de [45], les données simulées (b), et les valeurs théoriques de l'ISA. Le comportement est qualitativement le même dans les trois cas. Pour toutes les fréquences, l'ISA surestime l_e, ce qui revient à sous-estimer l'atténuation. Cette observation a déjà été faite à propos de la figure 7.5-(b). La principale différence entre les résultats expérimentaux et numériques est observée vers 2.7 MHz. Une explication possible tient au faible nombre de colonnes N_c où est réalisée l'estimation par moindres carrés de α (section 7.3.2). Nous étudions plus en détail cet aspect dans le cas du béton.

7.4.2 Béton

Les calculs sont réalisés avec le schéma ADER d'ordre 4. Le nombre CFL associé à l'onde la plus lente est $\beta = \frac{0.85\times 2250}{4300} = 0.44$. Le pas en espace est $\Delta\,x = 10^{-4}$ m, d'où une grille de 3750×7500 points de calcul. Le signal large-bande, centré à 250 kHz, est exploité jusque vers environ 700 kHz, soit $G = 30$ points de calcul par longueur d'onde S dans le mortier. Les expressions (7.2) conduisent alors à une dispersion numérique maximale de $4.8\,10^{-3}$ % et à une atténuation numérique maximale de $7.8\,10^{-7}$ Np/m. La grille de récepteurs est constituée de $N_l = 41$ lignes et $N_c = 220$ colonnes, avec $\Delta\,x_R = 1$ mm et $\Delta\,y_R = 6.25$ mm. Le nombre d'échantillons temporels après sommation est donc environ 5 fois plus important que dans le cas des tiges d'acier dans l'eau. On effectue $\mathcal{N} = 3$ séries de simulation, soit $\mathcal{N} \times N_l = 123$ réalisations indépendantes du désordre. L'onde incidente est une onde de compression.

Deux séries de tests sont réalisées pour qualifier la précision des méthodes numériques. Un

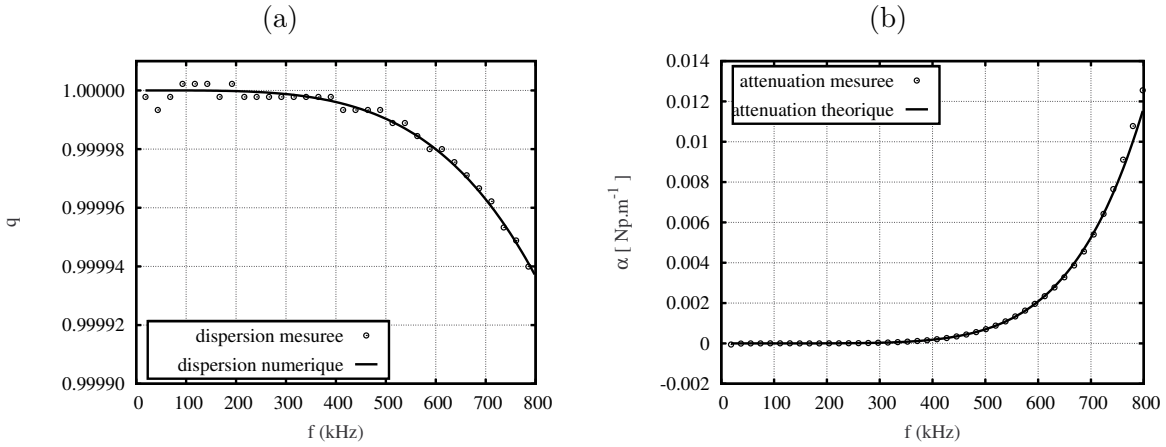


Figure 7.7: Béton homogène 1D : courbes de dispersion numérique (a) et d'atténuation numérique (b). Traits continus : valeurs théoriques (7.2) ; pointillés : valeurs mesurées.

premier test porte sur les méthodes de traitement des données. Pour cela, on simule la propagation d'ondes dans le mortier homogène, en dimension 1. Les dispersions et atténuations mesurées doivent être égales aux dispersions et atténuations numériques prévues par (7.2). En figure 7.7, on compare les quantités théoriques et mesurées. L'accord entre ces quantités est excellent, avec une erreur relative inférieure à 10^{-3} %. La chaîne de traitement du signal est donc fiable et correctement étalonnée.

Le deuxième test consiste à simuler l'interaction de l'onde incidente avec un unique gravier. Le champ diffracté après 1600 pas d'intégration est représenté en figure 7.8-(a). En (b), on compare l'évolution temporelle du signal mesuré au récepteur R à la solution analytique. Cette dernière est calculée par transformée de Fourier et décomposition sur une série de fonctions de Bessel. L'accord entre les solutions numériques et analytiques est très bon.

Ces tests étant validés, les simulations en milieu hétérogène sont considérées comme la solution de référence. La figure 7.9 représente σ_{11} à l'instant initial (a) et après 3000 pas d'intégration (b). Les calculs sont stoppés après 5000 itérations, lorsque l'onde incidente a traversé l'ensemble des diffuseurs. En figure 7.10, on compare l'évolution temporelle de v_1 mesurée en un récepteur situé en colonne 0 (a) et en colonne $N_c/2 = 110$ (b). Comme dans le cas des tiges d'acier immergées dans l'eau, la coda suivant l'onde balistique est fortement diminuée après sommation.

A partir des simulations de champ cohérent, on estime numériquement la dispersion et l'atténuation du milieu effectif. En figure 7.11, on compare les valeurs simulées aux prédictions théoriques de l'ISA, pour différentes concentrations de graviers. Concernant la dispersion, l'accord entre les deux approches est bon jusque vers 18 %. Concernant l'atténuation, le domaine de validité de l'ISA est plus restreint, et limité à environ 6 % de concentration. En conclusion, l'application de l'ISA ou de méthodes similaires à des bétons réels, où la concentration en gravier est de l'ordre de 40 %, conduit à des résultats erronés.

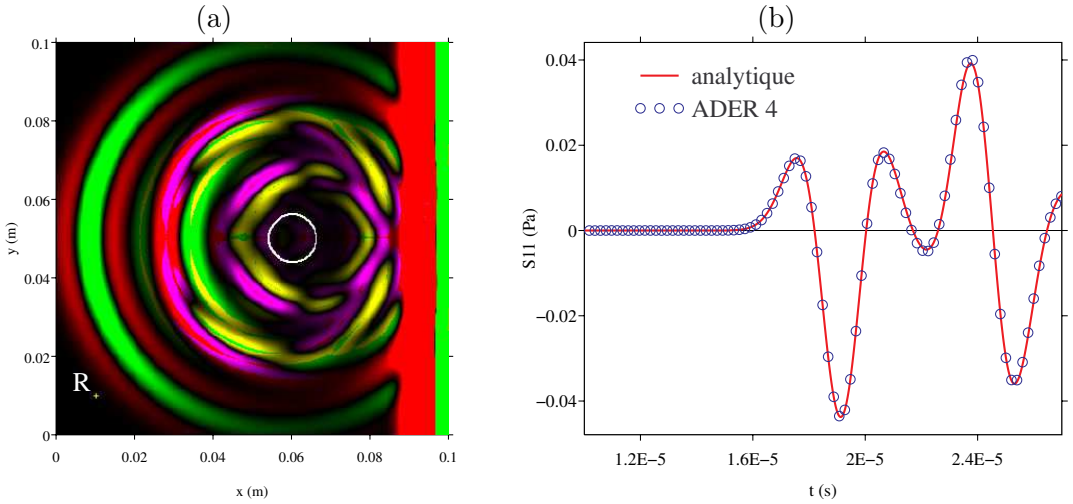


Figure 7.8: Béton : onde plane P dans le mortier, diffractée par un gravier. Carte de σ_{11} après 800 pas d'intégration (a), évolution temporelle en un récepteur R (b).

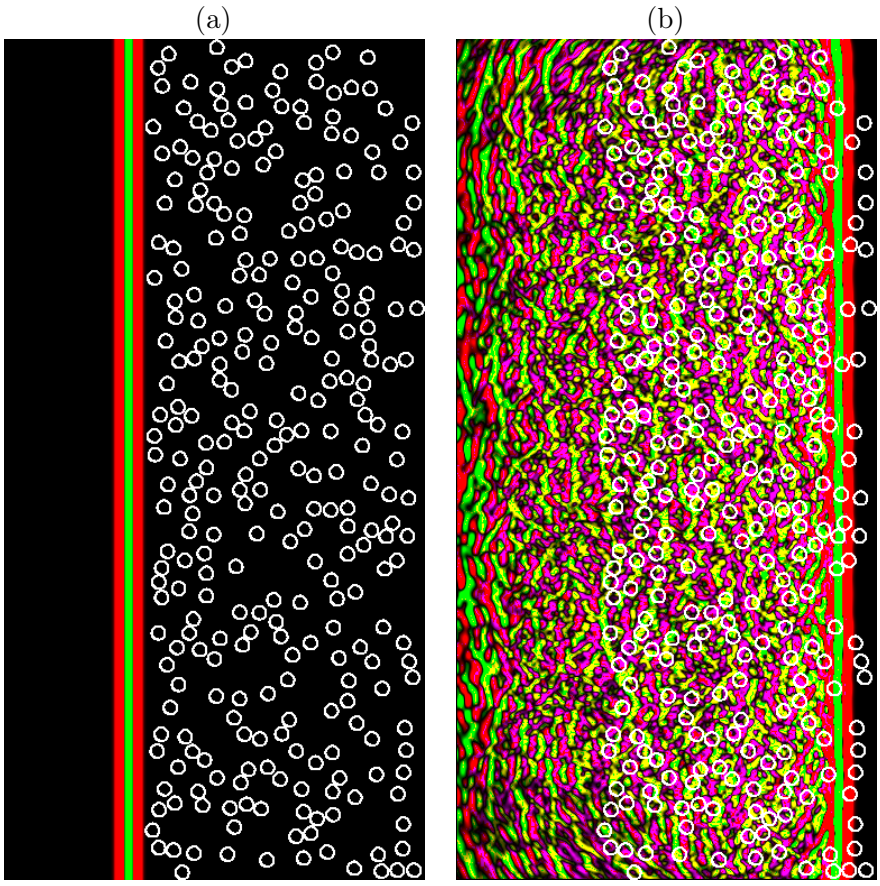


Figure 7.9: Béton : concentration 18 %. Cartes de σ_{11} à l'instant initial (a) et après 3000 pas (b).

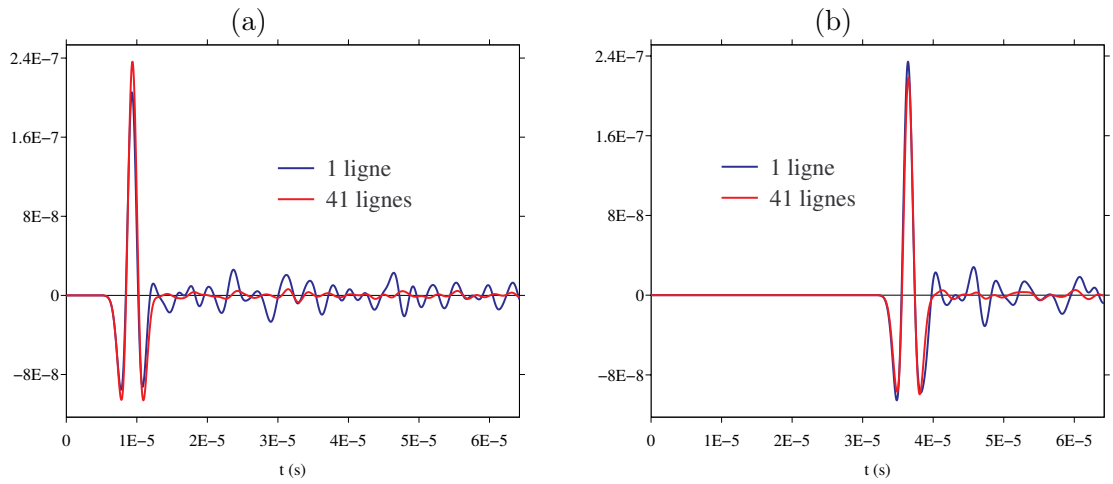


Figure 7.10: Béton : évolution temporelle de v_1 à gauche de la grille de récepteurs (a) et au centre de cette grille (b). Signal brut : bleu ; signal après sommation : rouge.

7.5 Conclusion

Bilan. Nous avons considéré des milieux 2D avec une répartition aléatoire de diffuseurs dont la taille est comparable aux longueurs d'onde propagées. Les méthodes numériques présentées au cours des chapitres précédents, ainsi que le recours à des outils informatiques intensifs (cluster de PC, ...), rendent possible une caractérisation du nombre d'onde effectif. Les artefacts numériques sont bornés et largement inférieurs aux quantités physiques recherchées, ce qui conduit à des solutions de référence. Cela permet notamment de qualifier la précision de méthodes analytiques telle que l'ISA.

Perspectives.

- *Réalisme des simulations.* L'outil numérique mis au point ici est une première étape pour l'étude de configurations réelles. La prise en compte d'atténuation dans la matrice et les diffuseurs, nécessaire dans le cas du béton, est opérationnelle : voir pour cela les algorithmes développés au chapitre 5, traitant de viscoélasticité linéaire. De même, simuler une granulométrie variable ou différentes formes de diffuseurs ne présente pas de difficulté. Une extension en cours concerne la construction de modèles numériques 3D, pour lesquels la parallélisation des algorithmes est une nécessité. La stratégie retenue actuellement, et déjà opérationnelle en dimension deux, repose sur la décomposition des domaines en tranches et sur un réseau local de PC.

- *Validité des méthodes analytiques.* Les outils numériques rendent possible l'étude de plusieurs aspects de la propagation d'ondes en milieu aléatoire. Une première question concerne la précision des méthodes analytiques de diffusion multiple, en fonction de la concentration et des caractéristiques des diffuseurs. On peut notamment examiner l'amélioration apportée par des méthodes d'ordre élevé, nécessaires pour traiter des milieux non dilués tels que le béton [114].

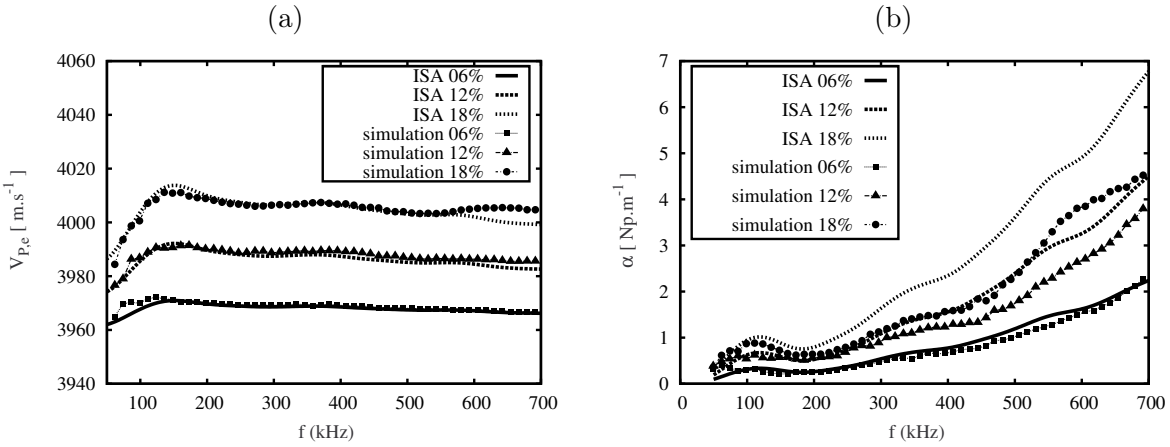


Figure 7.11: Béton : dispersion (a) et atténuation (b) du milieu effectif.

- *Diffusion d'ondes par les globules rouges.* En collaboration avec Emilie Franceschini - arrivée au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique en 2008 - et Joël Piraux, nous démarrons actuellement une étude numérique de la diffusion multiple des ondes acoustiques dans le sang. A partir des ondes rétrodiffusées, le but est de remonter à la concentration en globules rouges, ou *hématocrite*, et à leur degré d'aggrégation. Cette modélisation fait suite à de nombreux travaux expérimentaux et théoriques [152, 147].

  En première approximation, le plasma et les globules rouges sont supposés des fluides parfaits, de paramètres physiques

$$(\rho,\, c) = \begin{cases} (1092\,\mathrm{kg/m^3},\, 1638\,\mathrm{m/s}) & \text{dans les globules,} \\ (1021\,\mathrm{kg/m^3},\, 1547\,\mathrm{m/s}) & \text{dans le plasma.} \end{cases}$$

  La géométrie du problème est bidimensionnelle, avec des globules cylindriques, de rayon 2.75 μm. L'onde incidente est plane, de fréquence centrale 20 MHz. Par rapport aux cas traités jusqu'ici - tiges d'acier dans l'eau, béton -, les principales différences sont les suivantes : longueur d'onde grande devant la taille des diffuseurs (diffusion de Rayleigh) et très faible contraste d'impédances. Ces deux points sont pénalisants pour la modélisation numérique : un maillage très fin est nécessaire pour discrétiser convenablement les diffuseurs. Une très grande précision des méthodes d'intégration est requise pour que les artefacts numériques soient largement inférieurs aux faibles signaux réfléchis.

  En figure 7.12, on présente un exemple de simulation. En (a-b), les cartes de pression sont représentées à l'instant initial et après interaction avec les globules, de concentration surfacique 6%. En (c), on affiche le signal temporel mesuré en un récepteur à gauche des globules : on observe le signal direct, puis une coda d'amplitude très inférieure, due aux ondes rétrodiffusées. La partie de cette coda comprise entre les droites verticales pointillées est extraite. Une transformée de Fourier du signal extrait conduit à la courbe bleue en (d). En pratique, on s'intéresse à la courbe rouge (d), plus lisse et obtenue en sommant les FFT en plusieurs récepteurs.

  Des séries de simulations permettent ainsi d'évaluer le *coefficient de rétrodiffusion* en fonction de l'hématocrite. Numériquement, nous avons observé une augmentation de ce co-

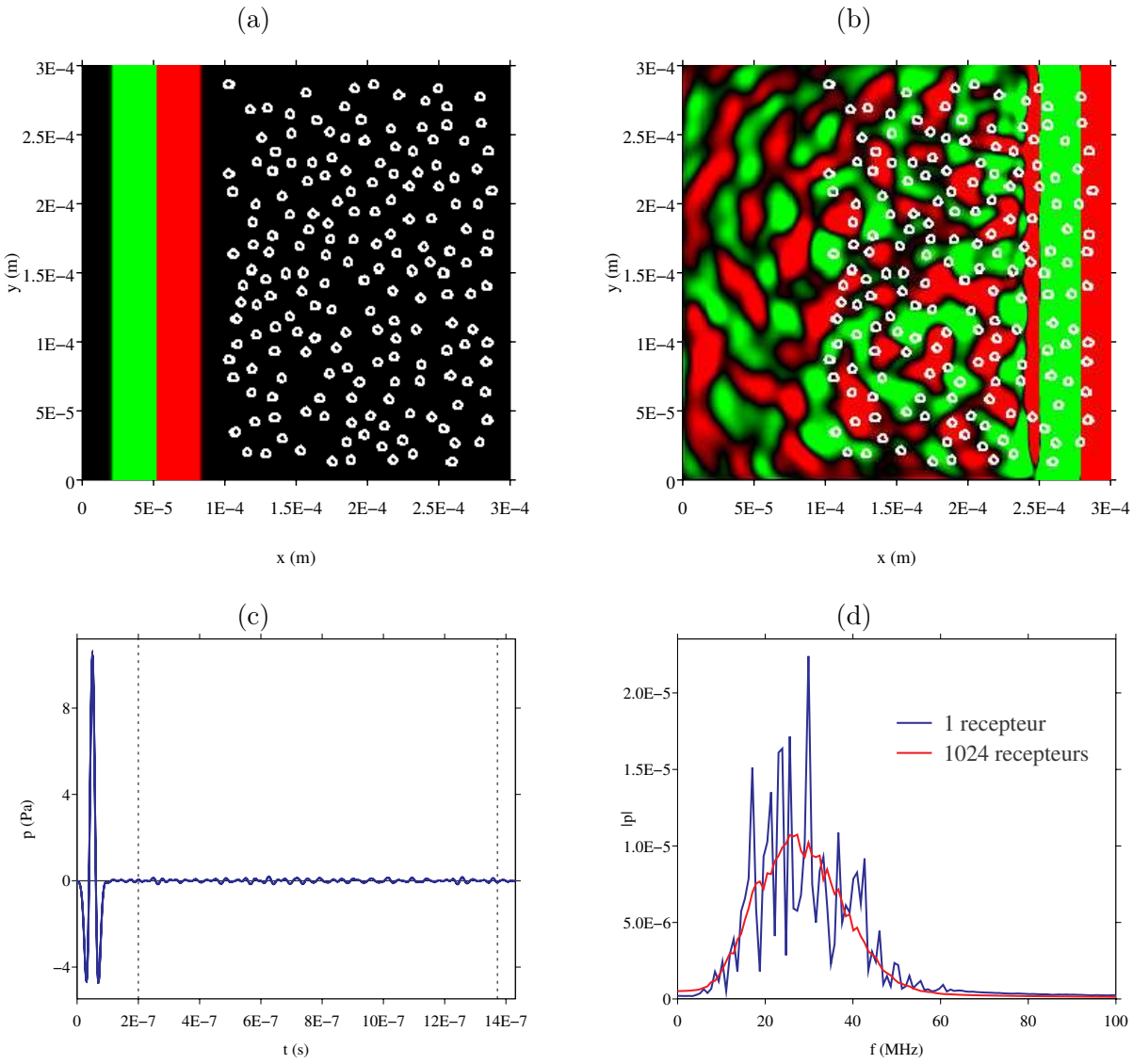


Figure 7.12: Globules rouges non aggrégés, immergés dans du plasma. (a-b) : interaction avec une onde plane. (c) : pression incidente et rétrodiffusée, enregistrée en un récepteur. (d) : FFT du signal tronqué en un récepteur (bleu), moyenne pondérée des FFT en 1024 récepteurs (rouge).

efficient jusqu'à 12 % d'hématocrite, puis une décroissance jusque vers 40 % : nous ne pouvons actuellement considérer des concentrations supérieures, pour des raisons liées aux algorithmes de remplissage aléatoire. Des comparaisons sont en cours avec les théories déduites du modèle de Perkus-Yevick [127] qui prévoient ce comportement non monotone [Cjt16].

Part V

Conclusion

Chapter 8

Conclusion et perspectives

8.1 Bilan

Au terme de cette présentation, nous rappelons les critères qui ont gouverné nos différents travaux.

Le premier critère a porté sur la précision des méthodes de calcul. Pour intégrer les lois de conservation, nous avons développé des schémas d'ordre élevé. Une méthode d'interface immergée a conduit à une représentation précise des conditions physiques et de la géométrie des interfaces. L'analyse de ces méthodes a permis de quantifier les artefacts numériques qu'elles induisaient. Enfin, la précision des solutions numériques a été examinée systématiquement, par comparaison avec des solutions analytiques.

Le deuxième critère a concerné la généralité des modèles physiques utilisés. Une hiérarchie de lois de comportement et de conditions d'interface a été considérée : fluide parfait, élasticité, viscoélasticité, poroélasticité d'une part ; surface libre, contact parfait, contact imparfait d'autre part. Quasiment toutes les combinaisons de ces milieux et de ces lois de contact ont été modélisées numériquement et testées. A cela répond aussi une généralité des géométries possibles : ellipse, droite, sinusoïde, line, polygone, spline cubique ont été implémentées.

Enfin, le troisième critère a porté sur l'efficacité informatique des méthodes numériques et de leur mise en oeuvre. L'usage d'une grille cartésienne de calcul, d'un splitting pour les termes sources en viscoélasticité et poroélasticité, d'un raffinement de maillage spatio-temporel pour discrétiser l'onde lente de Biot : tout cela concourt à une efficacité maximale des calculs. Un aspect peu visible et pourtant essentiel a eu trait à l'intégration des différentes méthodes au sein d'un logiciel unique, ainsi qu'à l'optimisation de ses performances.

Ces trois critères ont nécessité des interactions permanentes entre différentes disciplines : mathématiques appliquées, mécanique, informatique. Cela a rendu possible la construction d'un outil d'expérimentation numérique fiable en physique des ondes. Une première application a porté sur l'interaction d'ondes avec une nonlinéarité de contact. A la façon d'expériences réelles, l'observation des simulations nous a conduit sur la voie de développements théoriques. Une deuxième application a porté sur la propagation des ondes à travers un ensemble de diffuseurs

répartis aléatoirement. Les simulations numériques ont alors permis de remplacer les expériences de laboratoire et de qualifier la précision des méthodes de diffusion multiple utilisées classiquement. Nous espérons que cet outil numérique suscitera d'autres applications chez les physiciens, conduisant en retour à de nouveaux développements numériques.

Nous proposons maintenant trois pistes de travail, représentatives des idées qui précèdent.

8.2 Directions de travail

8.2.1 Contacts non linéaires

La généralisation des travaux présentés au chapitre 4 à un nombre N fini ou infini de nonlinéarités en 1D peut être envisagée de plusieurs façons. Notons tout d'abord que le résultat de conservation d'énergie (lemme 4.1) est généralisable directement, conduisant ainsi à un problème bien posé.

La première direction de recherche consiste à étudier la dilatation moyenne d'un réseau soumis à une excitation périodique [A8]. Au lieu de l'équation différentielle ordinaire (4.30), on est amené à analyser un système d'équations différentielles à retard (plus précisément, des *neutral delay differential equations* [72]), de la forme

$$\frac{d\,y_i}{d\,t}(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{d\,y_j}{d\,t}(t-\tau_j) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j\, f\,(y_j(t)) + S(t), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{8.1}$$

où τ_j sont des retards dus au temps de propagation entre les diffuseurs, et f est une fonction non linéaire décrivant la nature du contact. Le cas préliminaire $N = 2$ est actuellement en cours d'étude avec Stéphane Junca. Contrairement au cas d'un seul crack, on démontre que la convergence vers la solution périodique n'est pas exponentielle. Cette propriété découle des réflexions successives des ondes entre les cracks.

Une deuxième direction de recherche concerne les régimes de propagation induits par la succession de contacts. En figure 8.1, on présente des simulations numériques directes de la propagation d'ondes à travers un réseau fini régulier de cracks. En fonction de l'espacement entre deux cracks successifs, l'analyse de Bloch-Floquet prévoit un comportement passe-bande et coupe-bande en régime linéaire. Ce comportement est bien observé pour de très petites amplitudes incidentes (a-b). Pour des amplitudes de forçage plus importantes, les régimes sont qualitativement inchangés.

Dans le cas d'un réseau désordonné, on s'attend à des effets de piégeage d'énergie au voisinage des contacts, de type *localisation d'Anderson* [137]. Les techniques d'analyse de ces régimes sont largement répandues dans d'autres disciplines, notamment en physique du solide et mécanique quantique pour l'étude du transport d'électrons dans un réseau cristallin. Le principale effort d'adaptation devrait porter sur la nature des nonlinéarités mises en jeu : polynomiales dans les cas évoqués précédemment [136], hyperboliques ou logarithmiques dans (4.7) et (4.8).

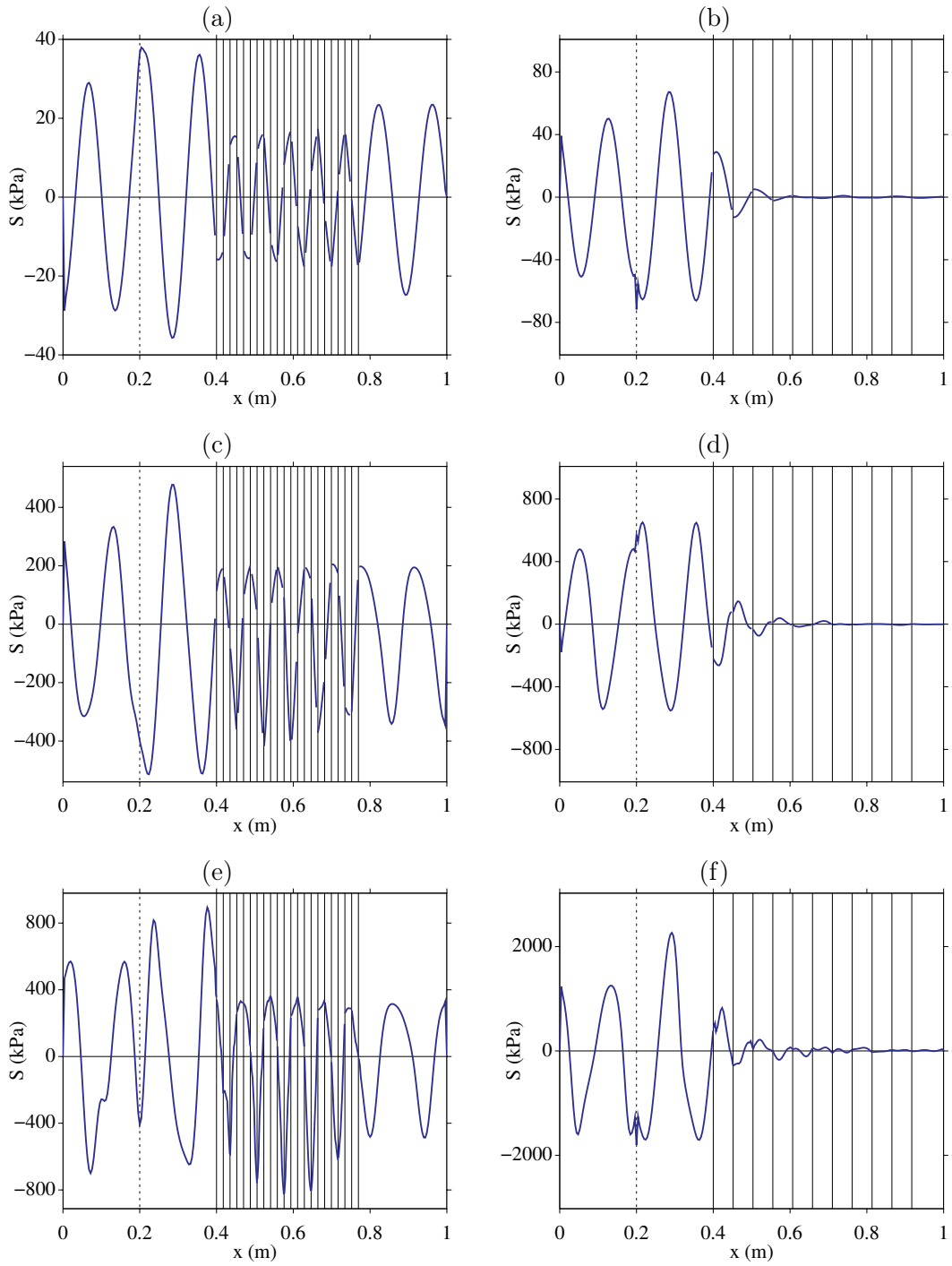


Figure 8.1: Propagation d'ondes élastiques à travers un réseau régulier fini de cracks non linéaires, décrits par le modèle 1 (4.7), pour différentes amplitudes v_0 de la vitesse élastique incidente : $v_0 = 10^{-3}$ m/s (a-b), $v_0 = 2\,10^{-3}$ m/s (c-d) et $v_0 = 5\,10^{-3}$ m/s (e-f). Colonne de gauche : passe-bande ; colonne de droite : coupe-bande.

8.2.2 Poroélasticité haute-fréquence

Comme mentionné en section 6.2.1, une correction $F(\omega)$ de la viscosité permet d'écrire les équations de Biot dans tout le domaine de validité de la poroélasticité, et non plus seulement pour des fréquences inférieures à f_c (6.3). De nombreux travaux ont porté sur la détermination de F dans des cas de géométries académiques des pores [18, 30]. Une avancée importante a eu lieu en 1987 avec l'introduction du modèle JKD [85]. Pour un réseau aléatoire de pores de section constante, les auteurs proposent l'expression

$$F(\omega) = \left(1 + i\,\omega\,\frac{4\,a^2\,\kappa^2\,\rho_f}{\eta\,\Lambda^2\,\phi^2}\right)^{1/2}, \tag{8.2}$$

où Λ est une longueur caractéristique visqueuse. Le modèle de Biot couplé au modèle JKD (8.2) est très largement utilisé depuis, dans le domaine fréquentiel. L'écriture des équations d'évolution dans le domaine temporel est plus difficile : les termes sources en membres de droite de (6.4) sont remplacés par des *dérivées fractionnaires décalées*

$$(D+\theta)^\alpha f(t) = e^{-\theta\,t} D^\alpha \left(e^{\theta\,t} f(t)\right), \tag{8.3}$$

où D^α est la *dérivée fractionnaire de Caputo* d'ordre $0 < \alpha < 1$ [115]. En dimension un, on obtient ainsi le système d'équations aux dérivées partielles [109]

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\,v_s}{\partial\,t} - \dfrac{\rho_w}{\chi}\,\dfrac{\partial\,\sigma}{\partial\,x} - \dfrac{\rho_f}{\chi}\,\dfrac{\partial\,p}{\partial\,x} = \dfrac{\rho_f}{\chi}\,\dfrac{\eta}{\kappa}\,\dfrac{1}{\sqrt{a_s}}\,(D+a_s)^{1/2}\,w, \\ \dfrac{\partial\,w}{\partial\,t} + \dfrac{\rho_f}{\chi}\,\dfrac{\partial\,\sigma}{\partial\,x} + \dfrac{\rho}{\chi}\,\dfrac{\partial\,p}{\partial\,x} = -\dfrac{\rho}{\chi}\,\dfrac{\eta}{\kappa}\,\dfrac{1}{\sqrt{a_s}}\,(D+a_s)^{1/2}\,w, \\ \dfrac{\partial\,\sigma}{\partial\,t} - (\lambda_f + 2\,\mu)\,\dfrac{\partial\,v_s}{\partial\,x} - \beta\,m\,\dfrac{\partial\,w}{\partial\,x} = 0, \\ \dfrac{\partial\,p}{\partial\,t} + \beta\,m\,\dfrac{\partial\,v_s}{\partial\,x} + \dfrac{\partial\,w}{\partial\,x} = 0, \end{array}\right. \tag{8.4}$$

avec la pulsation relative

$$a_s = \frac{\Lambda^2\,\phi^2\,\eta}{4\,a^2\,\kappa\,\rho_f}. \tag{8.5}$$

Si $a_s \to 0$, les termes fractionnaires dans (8.4) dégénèrent en termes sources classsiques, comme dans (6.4). L'approximation numérique des dérivées fractionnaires dans (8.4) est difficile à cause de leur caractère non local et des convolutions avec des noyaux singuliers en $t^{-1/2}$ [110]. Un algorithme a été proposé dans [109] pour calculer les dérivées d'ordre $1/2$, couplé à une méthode pseudo-spectrale pour la partie non-fractionnaire des équations de Biot. Toutefois, cette approximation des dérivées fractionnaires n'est pas optimale, et les méthodes par FFT en espace sont limitées à des géométries élémentaires et à des paramètres physiques constants par morceaux.

Un travail sur ce thème est prévu avec Guillaume Chiavassa, Joël Piraux et Denis Matignon (professeur de mathématiques à l'ISAE). On pourra s'inspirer de travaux réalisés dans le cas de l'équation de Webster-Lokshin, décrivant la propagation des ondes dans un tube de section variable, avec pertes visqueuses [70, 75]. Dans ces travaux, le choix des points de discrétisation des

intégrales de convolution est fondé sur le contenu fréquentiel des ondes propagées. Par ailleurs, les poids associés à chacun de ces noeuds découlent d'une procédure d'optimisation par moindres-carrés . Enfin, le découpage des intégrales en une partie *instantanée* et une partie *historique* rend les algorithmes beaucoup plus efficaces. La précision des modèles numériques pourra être estimée par comparaison avec des solutions analytiques dans le domaine temporel, dont le calcul est une spécialité de Zine Fellah, chargé des recherches au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique [53].

8.2.3 Diffusion multiple

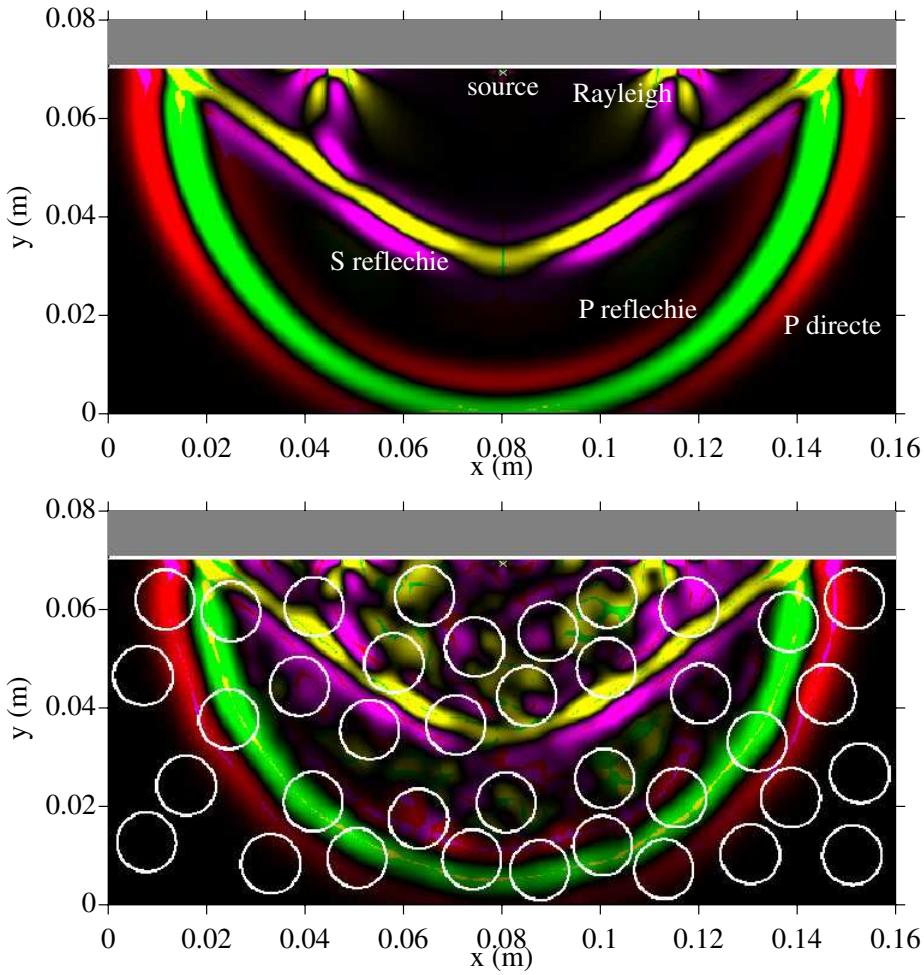


Figure 8.2: Plaque de béton à surface libre, homogène (haut) et hétérogène avec 40 % de diffuseurs (bas). Champ élastique rayonné par un point source.

Soit un milieu élastique semi-infini 2D rempli aléatoirement d'hétérogénéités élastiques, et séparé du vide par une interface plane. Une telle configuration modélise par exemple une plaque de béton avec une surface libre [36]. En sommant les ondes de surface pour différentes répartitions d'hétérogénéités, on obtient une *onde de Rayleigh cohérente*, dont on cherche les propriétés

en fonction des paramètres du problème. Pour cela, une première approche consiste à utiliser les caractéristiques du milieu effectif semi-infini et à en déduire les propriétés de l'onde de Rayleigh viscoélastique [30]. La pertinence de cette approche très simple, suivie dans [36], n'a pas encore été démontrée théoriquement [96]. Une étude numérique directe, basée sur les méthodes présentées tout au long du chapitre 7, permettrait de valider ou non cette approche. Un travail sur ce thème est prévu avec Loïc Le Marrec et Joël Piraux.

On illustre de telles simulations directes en figure 8.2. Un point source de fréquence centrale 250 kHz est enfoui sous la surface libre d'un milieu élastique ayant les propriétés du mortier. En l'absence d'hétérogénéités (haut), on observe les ondes bien connues, analysées au chapitre 3 et représentées en figure 3.5 du chapitre 3. En bas, on observe la perturbation apportée par une distribution aléatoire d'hétérogénéités, ayant les propriétés physiques du gravier. La concentration surfacique est de 40 %, ce qui correspond aux valeurs typiques du béton. Une étude numérique complète du phénomène reste à mener. Plusieurs dizaines, voire centaines, de simulations doivent être réalisées, sur des domaines de propagation plus étendus. En effet, les ondes de Rayleigh doivent être suffisamment séparées des ondes de volume pour permettre une mesure précise de leurs caractéristiques.

Chapter 9

Bilan d'activité

9.1 Curriculum vitae

Bruno Lombard	Chargé de Recherches CNRS (CR1)
Nationalité française	Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, UPR 7051
Né le 8 février 1973	31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille
Vie maritale	tel : 04-91-16-44-13, mail : `lombard@lma.cnrs-mrs.fr`
Deux enfants	page web : `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/`

Formations et diplômes

- 1994-1997 : ingénieur de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille
- 1998 : DEA de Mécanique de l'Université Aix-Marseille 2, mention bien
- 2002 : doctorat de Mécanique de l'Université Aix-Marseille 2
- 2002 : qualification universitaire en section 26 et 60

Parcours professionnel

- 1999-2001 : **moniteur** en mécanique des fluides à l'Université d'Aix-Marseille 2
- 2001-2002 : **ATER** en mathématiques à l'Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille
- 2002-2003 : **stage postdoctoral** au Departamento de Matematica Aplicada de Valencia
- depuis octobre 2003 : **chargé de recherches** au CNRS, section 9

9.2 Production scientifique

Thèse

T1 - B. Lombard, *Méthodes numériques pour la propagation des ondes mécaniques et acoustiques en présence d'interfaces*, Université Aix-Marseille 2 (4 janvier 2002), direction Joël Piraux. Rapporteurs : Gérard Maugin, Serge Piperno. Examinateurs : Christophe Bailly, Roland Borghi, Guillaume Chiavassa, Joël Piraux.
`http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/83/17/PDF/tel-00009907.pdf`.

9.2.1 Communications avec comité de lecture

Articles

A1 - J. Piraux, B. Lombard, *A new interface method for hyperbolic problems with discontinuous coefficients: one-dimensional acoustic example*, Journal of Computational Physics, 168-1 (2001), p. 227-248, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00004811`.

A2 - B. Lombard, J. Piraux, *How to incorporate the spring-mass conditions in finite-difference schemes*, SIAM Journal of Scientific Computing, 24-4 (2003), p. 1379-1407, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00004812`.

A3 - B. Lombard, J.Piraux, *Numerical treatment of two-dimensional interfaces for acoustic and elastic waves*, Journal of Computational Physics, 195-1 (2004), p. 90-116, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00004813`.

A4 - B. Lombard, R. Donat, *The Explicit Simplified Interface Method for compressible multicomponent flows*, SIAM Journal of Scientific Computing, 27-1 (2005), p. 208-230, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00004814`.

A5 - B. Lombard, J. Piraux, *Numerical modeling of elastic waves across imperfect contacts*, SIAM Journal of Scientific Computing, 28-1 (2006), p. 172-205, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00004815`.

A6 - B. Lombard, J. Piraux, *Modeling 1-D elastic P-waves in a fractured rock with hyperbolic jump conditions*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 204 (2007), p. 292-305, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00009406`.

A7 - B. Lombard, J. Piraux, C. Gélis, J. Virieux, *Free and smooth boundaries in 2-D finite-difference schemes for transient elastic waves*, Geophysical Journal International, 172 (2008), p. 252-261, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00157508`.

A8 - S. Junca, B. Lombard, *Dilatation of a one-dimensional nonlinear crack impacted by a periodic elastic wave*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 70-3 (2009), p. 735-761, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00339279`.

A9 - G. Chiavassa, B. Lombard, J. Piraux, *Numerical modeling of 1-D transient poroelastic waves in the low-frequency range*, accepté et à paraître au Journal of Computational and Applied Mathematics, (2010), `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00193103`.

A10 - B. Lombard, J. Piraux, *Numerical modeling of transient viscoelastic waves in two-dimensional media with interfaces*, en cours de rédaction, (2010).

A11 - B. Lombard, J. Piraux, *Immersed Interface method and finite-difference schemes for wave propagation*, en cours de rédaction, (2010).

Ouvrages collectifs

Oc1 - B. Lombard, J. Piraux, *Propagation of compressional elastic waves through a 1-D medium with contact nonlinearities*, Springer Proceedings in Physics 128 (2009), p. 183-194, `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00288271`.

Oc2 - M. Chekroun, L. le Marrec, B. Lombard, J. Piraux, O. Abraham, *Comparisons between multiple scattering methods and direct numerical simulations for elastic wave propagation in concrete*, Springer Proceedings in Physics 128 (2009), p. 317-327, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/GdR08B.pdf`.

Congrès internationaux

Lorsque plusieurs auteurs sont mentionnés dans les présentations orales qui suivent, le nom de l'orateur est souligné.

Ci1 - B. Lombard, J. Piraux, *Numerical resolution in the time domain of 2D acoustic equations with interfaces*, 5th European Conference on Underwater Acoustics (10-13 juillet 2000, Lyon), p. 99-104.

Ci2 - B. Lombard, J. Piraux, *Interface method and finite volumes: two-dimensional acoustic example*, 3rd International Congress of Finite Volume for Complex Applications (24-28 juin 2002, Porquerolles), p. 599-606, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/Fvca02.pdf`.

Ci3 - B. Lombard, J. Piraux, *Time-domain modelling of 2D wave propagation over a fractured sediment*, 7th European Conference on Underwater Acoustics (5-8 juillet 2004, Delft, Pays-Bas), p. 27-32, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/Ecua04.pdf`.

Ci4 - B. Lombard, J. Piraux, *Modeling of 1D elastic P-waves in a fractured rock with hyperbolic jump conditions*, 7th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (20-24 juin 2005, Providence, USA), p. 212-214, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/Waves05.pdf`.

Ci5 - G. Chiavassa, B. Lombard, J. Piraux, *Numerical modeling of 1-D transient poroelastic waves*, 8th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (23-27 juillet 2007, Reading, Angleterre), p. 523-525, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/Waves07A.pdf`.

Ci6 - M. Chekhroun, L. Le Marrec, B. Lombard, J. Piraux, O. Abraham, *Numerical methods for multiple scattering of ultrasounds in random media*, 8th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (23-27 juillet 2007, Reading, Angleterre), p. 492-494, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/Waves07B.pdf`.

Congrès nationaux

Cn1 - B. Lombard, J. Piraux, *Modélisation numérique d'interfaces imparfaites et propagation des ondes élastiques 1D*, 5ème Congrès Français d'Acoustique (3-6 septembre 2000, Lausanne), p. 99-102, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/Cfa00A.pdf`.

Cn2 - J. Piraux, B. Lombard, *Une nouvelle méthode d'interface en dimension 2 : application aux équations de l'acoustique*, 5ème Congrès Français d'Acoustique (3-6 septembre 2000, Lausanne), p. 103-106, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/Cfa00B.pdf`.

Cn3 - B. Lombard, J. Piraux, *Modélisation numérique de la propagation des ondes à travers une interface fluide-solide*, 6ème Congrès Français d'Acoustique (8-11 avril 2002, Lille), 4 pages.

Cn4 - J. Piraux, B. Lombard, *Insertion des conditions de masse-ressort dans des schémas numériques pour décrire la propagation d'ondes à travers une couche de colle*, 6ème Congrès Français d'Acoustique (8-11 avril 2002, Lille), 4 pages.

Cn5 - B. Lombard, J. Piraux, *Modélisation numérique de la propagation d'ondes élastiques à travers un collage en 2D*, 2ème Journée du GDR 2501 (8-12 décembre 2003, Aussois), p.173-182, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/GdR03.pdf`.

Cn6 - N. Malleron, B. Lombard, J. Piraux, *Calcul des ondes acoustiques transitoires émises par une source ponctuelle dans un fluide continûment variable par la méthode de Cagniard-de Hoop*, 4ème Journée du GdR 2501 (14-19 mai 2006, Giens), p. 193-201, `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Congres/GdR06.pdf`.

Cn7 - B. Lombard, J. Piraux, *Propagation of compressional elastic waves through a 1-D medium with contact nonlinearities*, 5ème Journée du GdR 2501 (2-6 juin 2008, Anglet), parution en ouvrage collectif (voir [Oc1]).

Cn8 M. Chekroun, L. le Marrec, B. Lombard, J. Piraux, O. Abraham, *Comparisons between multiple scattering methods and direct numerical simulations for elastic wave propagation in concrete*, 5ème Journée du GdR-US 2501 (2-6 juin 2008, Anglet), parution en ouvrage collectif (voir [Oc2]).

9.2.2 Communications sans comité de lecture

Congrès et journées thématiques

Cjt1 - B. Lombard, J. Piraux, *Une méthode pour prendre en compte aux interfaces les conditions de continuité de l'acoustique dans les schémas d'ordre élevé*, 31ème Congrès d'Analyse Numérique (17-21 mai 1999, Bonascre).

Cjt2 - B. Lombard, J. Piraux, *L'Explicit Simplified Interface Method pour un problème hyperbolique 2D avec coefficients discontinus*, 32ème Congrès d'Analyse Numérique (5-9 juin 2000, Port d'Albret).

Cjt3 - B. LOMBARD, J. PIRAUX, *Comportement passe-bande d'un réseau d'interfaces imparfaites avec conditions de type masse-ressort*, 7ème Journée d'Acoustique Physique Sous-marine Ultra-Sonore (14-16 mars 2001, Marseille).

Cjt4 - B. LOMBARD, J. PIRAUX, *Simulation numérique de la propagation des ondes élastiques à travers des défauts de contact*, 1er Congrès National de Mathématiques Appliquées (28 mai-1er juin 2001, Pompadour).

Cjt5 - B. LOMBARD, R. DONAT, *An interface method for contact discontinuities in 1D Euler flows*, 1st Meeting of Hyke Network (24-28 février 2003, Vienne).

Cjt6 - B. LOMBARD, J. PIRAUX, *Modélisation numérique de la propagation d'ondes à travers des contacts imparfaits en 2D*, 36ème Congrès d'Analyse Numérique (31 mai-4 juin 2004, Obernai).

Cjt7 - B. LOMBARD, *Computation of transient Rayleigh waves by the Cagniard-de Hoop's method*, 3ème Journée du GdR 2501 (21-22 octobre 2004, INRIA-Rocquencourt).

Cjt8 - B. LOMBARD, *Méthodes numériques pour la propagation des ondes mécaniques avec interfaces*, conférence invité au GdR Ondes, Journée thématique du GT1 sur les méthodes temporelles (17 octobre 2006, Paris).

Cjt9 - B. LOMBARD, *Interaction d'une onde de compression avec un joint de fracture de raideur normale non linéaire*, Journée d'acoustique non linéaire du GdR 2501 (5 avril 2007, Paris LMM).

Cjt10 - G. CHIAVASSA, B. LOMBARD, J. PIRAUX, *Numerical modeling of transient poroelastic waves in the low-frequency range*, Acoustics'08 (2008, Paris).

Cjt11 - M. CHEKHROUN, L. LE MARREC, B. LOMBARD, O. ABRAHAM, J. PIRAUX, *Comparisons between multiple scattering methods and time-domain numerical simulations for elastic waves*, Acoustics'08 (2008, Paris).

Cjt12 - M. CHEKHROUN, L. LE MARREC, B. LOMBARD, O. ABRAHAM, J. PIRAUX, *Comparisons between multiple scattering methods and direct numerical simulations for elastic wave propagation in concrete*, MIMS workshop on New Directions in Analytical and Numerical Methods for Forward and Inverse Wave Scattering (23-24 juin 2008, Manchester, Angleterre).

Cjt13 - B. LOMBARD, *Méthode d'interface immergée pour la propagation d'ondes mécaniques transitoires*, Ecole thématique "Avancées récentes en calcul scientifique" (9-13 février 2009, Luminy).

Cjt14 - E. FRANCESCHINI, B. LOMBARD, J. PIRAUX, *Ultrasound characterization of red blood cells distribution: a wave scattering simulation study*, 6ème Journée du GDR-US (18-22 janvier 2010, Lake District, Angleterre).

Cjt15 - G. CHIAVASSA, B. LOMBARD, J. PIRAUX, *A time-domain numerical method for the low-frequency Biot model*, soumis au 10ème Congrès Français d'Acoustique (12-16 avril 2010, Lyon).

Cjt16 - E. Franceschini, B. Lombard, J. Piraux, *Caractérisation ultrasonore de la distribution de globules rouges : étude par simulation numérique*, soumis au 10ème Congrès Français d'Acoustique (12-16 avril 2010, Lyon).

Séminaires

S1 - 15 mars 2000, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (Marseille).

S2 - 12 février 2002, Centre de Mathématiques Appliquées (Ecole Polytechnique, Palaiseau).

S3 - 19 mars 2002, Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilité (Marseille).

S4 - 10 novembre 2002, Departamento de Matematica Aplicada (Valencia, Espagne).

S5 - 20 mars 2003, Département de Mathématiques (Besançon).

S6 - 30 avril 2003, Institut de Mécanique des Fluides (Toulouse).

S7 - 15 mai 2003, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers (Paris).

S8 - 30 juillet 2003, CEMRACS (Luminy).

S9 - 12 janvier 2004, Laboratoire de Mathématiques Appliquées (Chambéry).

S10 - 12 février 2004, Projet Ondes (Inria, Paris).

S11 - 11 mars 2004, Laboratoire Géosciences-Azur (Nice-Sophia-Antipolis).

S12 - 14 juin 2005, Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilité (Marseille).

S12 - 1er juin 2006, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, groupe non linéaire (Marseille).

S14 - 11 décembre 2007, Projet NACHOS (Inria, Sophia-Antipolis).

S15 - 20 mars 2008, MSNM-GP (Marseille).

S16 - 17 février 2009, Projet Smash (Inria-Iusti, Marseille).

9.3 Diffusion de la culture scientifique

9.3.1 Enseignement

- 1999-2001 : moniteur en maîtrise de mécanique des fluides, Unimeca (Aix-Marseille 2), 96 heures par an. *Travaux pratiques expérimentaux* : PIV, fil chaud, vélocimétrie laser.
- 2001-2002 : demi-poste d'ATER à l'Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, 96 heures. *Mathématiques appliquées* : analyse complexe, analyse numérique, systèmes dynamiques, informatique.
- 2003-2004 : chargé de cours en DEA de Mathématiques Appliquées (Aix-Marseille 2), 10 heures. *Méthodes numériques pour la propagation des ondes.*

- 2004-2005 : chargé de cours en DEA d'Acoustique (Aix-Marseille 2), 8 heures. *Acoustique sous-marine* : propagation modale.

- 2006-2008 : chargé de cours en Master recherche 2$^{\text{ème}}$ année d'Acoustique (Aix-Marseille 2), 16 heures par an. *Propagation des ondes dans les milieux complexes* : ondes de Rayleigh, ondes viscoélastiques.

- 2008-2010 : chargé de cours et responsable de module en Master recherche 2$^{\text{ème}}$ année d'Acoustique (Université de Provence / Centrale Marseille). *Méthodes de résolution - discrétisation* : modélisation mathématique et numérique des vibrations d'une corde de piano (12 heures par an).

- 2009-2010 : chargé de cours en Master recherche 2$^{\text{ème}}$ année d'Acoustique (Université de Provence / Centrale Marseille). *Interfaces, vibrations, rayonnement* : modes propres et modes de résonance (4 heures).

9.3.2 Encadrement

- Charles Bahini, *Etude des schémas ADER pour l'acoustique*, stage de DEA de Mathématiques Appliquées (1$^{\text{er}}$ mars 2004, 31 juin 2004), co-encadrement avec Joël Piraux.

- Nicolas Malleron, *Calcul des ondes acoustiques transitoires émises par une source ponctuelle dans un fluide continûment variable par la méthode de Cagniard-de Hoop*, stage de DEA de Calcul Scientifique (1$^{\text{er}}$ mars 2005, 31 juillet 2005), co-encadrement avec Joël Piraux.

J'ai participé aux travaux de deux doctorants :

- Céline Gélis, *Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine espace-fréquence en deux dimensions. Application à la caractérisation de la subsurface dans le cadre de la détection de cavités souterraines*, Université de Nice Sophia-Antipolis (14 décembre 2005), co-direction Jean Virieux, Gilles Grandjean.

- Mathieu Checkroun, *Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface*, Ecole Centrale de Nantes (3 décembre 2008), co-direction Odile Abraham, Michel Campillo.

Ces travaux en commun ont conduit à l'article [A7] et aux communications [Oc2, Ci6, Cn8, Cjt11, Cjt12].

9.3.3 Vulgarisation

- 22 mars 2007 : initiation à la physique en maternelle (Ecole Fontainieu, Marseille).

- 9 juin 2009 : expériences de physique en CE1 (Ecole Cauvin, Marseille).

9.4 Expertise scientifique

9.4.1 Expertise d'articles

- Geophysical Journal International : 2007 (3), 2008 (3).
- IMA Journal of Applied Mathematics : 2009 (1).
- International Journal of Computer Mathematics : 2007 (1).
- International Journal for Numerical Methods in Fluids : 2009 (1).
- Journal of Computational and Applied Mathematics : 2007 (2), 2008 (1), 2009 (1).
- Mécanique et Industries : 2009 (1).
- Methods and Applications of Analysis : 2006 (1).
- SIAM Journal on Scientific Computing : 2009 (1).

9.4.2 Jury de thèse

- Mathieu Checkroun, *Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface*, Ecole Centrale de Nantes (3 décembre 2008), examinateur invité.

9.4.3 Expertise de projet

- ANR Jeune Chercheur : 2008 (1).
- Georgian National Science Foundation : 2009 (1).

9.5 Administration de la recherche

9.5.1 Responsabilités collectives

- 1999-2001 : représentant des doctorants du LMA.
- 2004-2006 : membre élu du Conseil de Laboratoire du LMA.

9.5.2 Réseaux de recherche

- 2002-2003 : réseau européen HYKE *Hyperbolic and Kinetic Equations.*
- 2003-2008 : GdR 2501 *Etude de la propagation ultrasonore en vue du contrôle non-destructif.*

9.6 Valorisation de la recherche

9.6.1 Dépôt de logiciel

- J. Piraux, B. Lombard, *Logiciel de calcul numérique pour la propagation d'ondes mécaniques avec interface*, déposé à l'Agence de Protection des Programmes (2004). Constamment mis à jour. Opérationnel sur PC fonctionnant sous Windows. Documentation disponible sur `http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/Articles/ZDP2D.1.03.pdf`.

9.6.2 Contrats de recherche

- 2005 : développement de logiciel pour simuler la réponse acoustique transitoire de mines enfouies. Partenaire : Groupe d'Etudes Sous-Marines de l'Atlantique (GESMA) de la DGA. Montant total du contrat : 46000 euros HT. Implication personnelle : 50% du contrat.
- 2007-2010 : renouvellement du contrat précédent. Mise à jour du logiciel (3D, version parallélisée, milieux poroélastiques et viscoélastiques). Montant total du contrat : 71000 euros HT. Implication personnelle : 50% du contrat.

Bibliography

[1] J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing, Amsterdam (1973).

[2] J. D. Achenbach, A. N. Norris, *Loss of specular reflection due to nonlinear crack-face interaction*, J. NonDest. Eval., 3 (1982), p. 229-239.

[3] P. M. Adler, J. F. Thovert, *Fractures and Fracture Networks*, Kluwer Academic Publishers, London (1999).

[4] K. Aki, P. G. Richards, *Quantitative Seismology. Theory and Methods. Vol. 1*, Freeman, New-York (1980).

[5] D. Appelö, N. A. Petersson, *A stable finite difference method for the elastic wave equation on complex geometries with free surfaces*, Comm. Comput. Phys., 5 (2009), p. 84-107.

[6] S. Asvadurov, L. Knizhnerman, J. Pabon, *Finite-difference modeling of viscoelastic materials with quality factors of arbitrary magnitude*, Geophysics, 69-3 (2004), p. 817-824.

[7] J. M. Baik, R. B. Thompson, *Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model*, J. Nondestructive Eval., 4 (1985), p. 177-196.

[8] S. C. Bandis, A. C. Lumsden and N. R. Barton, *Fundamentals of rock fracture deformation*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 20 (1983), p. 249-268.

[9] G. B.van Baren, W. A. Mulder, G. C. Herman, *Finite-difference modeling of scalar-wave propagation in cracked media*, Geophysics, 66 (2001), p. 267-276.

[10] N. R. Barton, S. C. Bandis, K. Bakhtar, *Strength, deformation and conductivity coupling of rock joints*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 22-3 (1985), p. 121-140.

[11] E. Bécache, A. Ezziani, P. Joly, *A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation*, Computational Geosciences 8 (2004), p. 255-299.

[12] E. Bécache, J. Rodríguez, C. Tsogka, *Convergence results of the fictitious domain method for a mixed formulation of the wave equation with a Neumann boundary condition*, Esaim M2AN, 43-2 (2009), p. 377-399.

[13] C. M. Bender, S. A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers 1*, Springer, New-York (1999).

[14] M. Ben Jemaa, N. Glinsky-Olivier, V .M. Cruz-Atienza, J. Virieux, S. Piperno, *Dynamic non-planar crack rupture by a finite-volume method*, Geophys. J. Int., 171 (2007), p. 271-285.

[15] M. J. Berger, *Stability of interfaces with mesh refinement*, Math. Comput., 45 (1985), p. 301-318.

[16] M. J. Berger, R. J. LeVeque, *Adaptative mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems*, SIAM J. Numer. Anal., 35-6 (1998), p. 2298-2316.

[17] M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I: Low-frequency range*, J. Acoust. Soc. Am., 28-2 (1956), p. 168-178.

[18] M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II: High-frequency range*, J. Acoust. Soc. Am., 28-2 (1956), p. 179-191.

[19] S. Biwa, S. Nakajima and N. Ohno, *On the acoustic nonlinearity of solid-solid contact with pressure dependent interface stiffness*, ASME J. Appl. Mech., 71 (2004), p. 508-515.

[20] J. O. Blanch, J. O. A. Robertsson, W. W. Symes, *Modeling of a constant Q: methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique*, Geophysics, 60-1 (1995), p. 176-184.

[21] T. Bohlen, E. H. Saenger, *3-D Viscoelastic finite-difference modeling using the rotated staggered grid: tests of accuracy*, 65th Annual International Meeting, EAGE, Extended Abstracts, C44 (2003).

[22] T. Bohlen, E. H. Saenger, *Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves*, Geophysics, 71 (2006), T109-T115.

[23] R. D. Borcherdt, *Reflection and refraction of type-II S waves in elastic and anelastic media*, Bull. Seism. Soc. Am., 67-1 (1977), p. 43-67.

[24] R. D. Borcherdt, *Reflection-refraction of general P- and type-I S waves in elastic and anelastic solids*, Geophys. J. R. astr. Soc., 70 (1982), p. 621-638.

[25] T. Bourbié, O. Coussy, B. Zinszner, *Acoustics of Porous Media*, Gulf Publishing Company (1987).

[26] S. R. Brown, C. H. Scholz, *Closure of rock joints*, J. Geophys. Res., 91 (1986), p. 4939-4948.

[27] R. Burridge, J. B. Keller, *Poroelasticity derived from microstructure*, J. Acoust. Soc. Am. 70-4 (1981), p. 1140-1146.

[28] M. H. Carpenter, D. Gottlieb, S. Arbanel, *Time-stable boundary conditions for finite-difference schemes solving hyperbolic schemes: methodology and application to high-order compact schemes*, J. Comput. Phys., 111 (1994), p. 220-236.

[29] J. M. Carcione, *Elastodynamics of a non-ideal interface: application to crack and fracture scattering*, J. Geophys. Res., 101 (1996), p. 28177-28188.

[30] J. M. Carcione, *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*, Pergamon (2007).

[31] J. M. Carcione, F. Cavallini, F. Mainardi, A. Hanyga, *Time-domain modeling of constant-Q seismic waves using fractional derivatives*, Pure Appl. Geophys., 159-7 (2002), p. 1719-1736.

[32] J. M. Carcione, H. B. Helle, *Numerical solution of the poroviscoelastic wave equation on a staggered mesh*, J. Comput. Phys., 154 (1999), p. 520-527.

[33] J. M. Carcione, F. Poletto, D. Gei, *3-D wave simulation in anelastic media using the Kelvin-Voigt constitutive equation*, J. Comput. Phys., 196 (2004), p. 282-297.

[34] J. M Carcione, G. Quiroga-Goode, *Some aspects of the physics and numerical modeling of Biot compressional waves*, J. Comput. Acoust., 3 (1996), p. 261-280.

[35] R. N. Chandler, D. L. Johnson, *The equivalence of quasi-static flow in fluid-saturated porous media and Biot's slow wave in the limit of zero frequency*, J. Appl. Phys., 52 (1981), p. 3391-3395.

[36] M. Chekroun, *Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface*, Thèse de l'Ecole Centrale de Nantes (2008).

[37] G. Chiavassa, *Développements et applications de méthodes numériques pour des problèmes à caractère hyperbolique*, Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université Aix-Marseille 2 (2009).

[38] R. T. Coates, M. Schoenberg, *Finite-difference modeling of faults and fractures*, Geophysics, 69 (1998), p. 1514-1526.

[39] H. F. Cooper, E. L. Reiss, *Reflection of plane viscoelastic waves from plane boundaries*, J. Acoust. Soc. Am., 39-6 (1966), p. 1133-1138.

[40] H. F. Cooper, *Reflection and transmission of oblique plane waves at a plane interface between viscoelastic media*, J. Acoust. Soc. Am., 42-5 (1967), p. 1064-1069.

[41] V. M. Cruz-Atienza, J. Virieux, *Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach*, Geophys. J. Int., 158 (2004), p. 939-954.

[42] N. Dai, A. Vafidis, E. R. Kanasewich, *Wave propagation in heterogeneous porous media: a velocity-stress, finite-difference method*, Geophysics, 60-2 (1995), p. 327-340.

[43] S. M. Day, J. B. Minster, *Numerical simulation of attenuated wavefields using a Padé approximant method*, Geophys. J. R. astr. Soc., 78 (1984), p. 105-118.

[44] A. Derode, A. Tourin, M. Fink, *Random multiple scattering of ultrasound. I. Coherent and ballistic waves*, Phys. Rev. E 64, 036605 (2001).

[45] A. Derode, V. Mamou, A. Tourin, *Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent waves in random medium*, Phys. Rev. E 74, 036606 (2006).

[46] J. Diaz, *Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées*, Thèse de l'Université Paris 6 (2005).

[47] J. Diaz, A. Ezziani, *Analytical solution for wave propagation in stratified poroelastic medium. Part II: the 3D case*, Rapport de Recherche INRIA 6596, (2008).

[48] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann (1980).

[49] H. Emmerich, M. Korn, *Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields*, Geophysics, 52-9 (1987), p. 1252-1264.

[50] A. Ezziani, *Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques*, Thèse de l'Université Paris-Dauphine (2005).

[51] A. Ezziani, P. Joly, *Local time stepping and discontinuous Galerkin methods for symmetric first order hyperbolic systems*, accepté et à paraître au J. Comput. App. Math., (2009).

[52] S. Farner, C. Vergez, J. Kergomard, A. Lizée, *Contribution to harmonic balance calculations of self-sustained periodic oscillations with focus on single-reed instruments*, J. Acoust. Soc. Am., 119 (2006), p. 1794-1804.

[53] Z. Fellah, *Propagation acoustique dans les milieux poreux hétérogènes*, Habilitation à Diriger des Recherches de l'Université Aix-Marseille 2 (2007).

[54] L. Foldy, *The multiple scattering of waves*, Phys. Rev., 67-3 (1945), p. 107-119.

[55] B. Fornet, *Problèmes hyperboliques à coefficients discontinus et pénalisation de problèmes hyperboliques*, Thèse de l'Université de Provence (2007).

[56] E. Forest, R. D. Ruth, *Fourth-order symplectic integration*, Physica D., 43 (1990), p. 105-117.

[57] W. W. Garvin, *Exact transient solution of the buried line source problem*, Proc. R. Soc. London Ser. A, 234 (1955), p. 528-541.

[58] C. Gélis, D. Leparoux, J. Virieux, A. Bitri, S. Operto, G. Grandjean, *Numerical modeling of surface waves over shallow cavities*, J. Environ. Engin. Geophys., 10 (2005), p. 49-59.

[59] E. Godlewski, P. A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag (1996).

[60] R. Graves, *Simulating seismic wave propagation in 3-D elastic media using staggered-grid finite differences*, Bull. Seismo. Soc. Am., 86 (1996), p. 1091-1106.

[61] Q. Grimal, *Etude dans le domaine temporel de la propagation d'ondes élastiques en milieux stratifiés*, Thèse de l'Université Paris 12 (2003).

[62] J. P. Groby, C. Tsogka, *A time domain method for modeling viscoacoustic wave propagation*, J. Comput. Acoust., 14-2 (2006), p. 201-236.

[63] B. Gu, K. Nihei, L. Myer, *Numerical simulation of elastic wave propagation in fractured rock with the boundary integral equation method*, J. Geophys. Res., 101 (1996), p. 933-943.

[64] B. Gurevich, *On "Wave propagation in heterogeneous porous media: a velocity-stress, finite-difference method" by N. Dai, A. Vafidis, E. R. Kanasewich*, Geophysics 61-4 (1996), p. 1230-1231.

[65] B. Gurevich, M. Schoenberg, *Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity*, J. Acoust. Soc. Am., 105-5 (1999), p. 2585-2589.

[66] V. Gusev, B. Castagnede, A. Moussatov, *Hysteresis in response of nonlinear bistable interface to continuously varying acoustic loading*, Ultrasonics 41, (2003), p. 643-654.

[67] B. Gustafsson, *The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems*, Math. Comput., 29-130 (1975), p. 396-406.

[68] B. Gustafsson, H. O. Kreiss, A. Sundström, *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems II*, Math. Comput., 26-119 (1972), p. 649-686.

[69] H. Haddar, D. Matignon, *Theoretical and numerical analysis of the Webster Lokshin model*, Rapport de Recherche INRIA 6558, (2008).

[70] H. Haddar, J. Li, D. Matignon, *Efficient solution of a wave equation with fractional order dissipative terms*, accepté et à paraître au J. Comput. App. Math., (2009).

[71] J. K. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Texts in Applied Mathematics (Springer-Verlag, 1991).

[72] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences (Springer-Verlag, 1993).

[73] M. Haney, R. Sneider, *Numerical modeling of waves incident on slip discontinuities*, in Annual Report of the Consortium Project on Seismic Inverse Methods for Complex Structures (2003), p. 1-10.

[74] S. Hassanzadeh, *Acoustic modeling in fluid-saturated porous media*, Geophysics, 56-4 (1991), p. 424-435.

[75] T. Hélie, D. Matignon, R. Mignot, *Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems: towards efficient real-time simulation*, Int. J. Tomogr. Stat., 7 (2007), p. 13-18.

[76] D. V. Helmberger, *The crust-mantle transition in Bering sea*, Bull. Seism. Soc. Am., 58-1 (1968), p. 179-214.

[77] S. Hestholm, *Elastic wave modeling with free surfaces: stability of long simulations*, Geophysics, 68 (2003), p. 314-321.

[78] S. Hirsekorn, *Nonlinear transfer of ultrasounds by adhesive joints - a theoretical description*, Ultrasonics, 39 (2001), p. 57-68.

[79] A. T. de Hoop, *A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems*, Applied Scientific Research, 8 (1960), p. 349-356.

[80] J. H. Hubbard, B. H. West, *Differential Equations: a Dynamical System Approach*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag (1991).

[81] B. Hustedt, S. Operto, J. Virieux, *Mixed-grid and staggered-grids finite difference methods for frequency-domain acoustic wave modelling*, Geophys. J. Int., 157 (2004), p. 1269-1296.

[82] U. Iturraran-Viveros, F. J. Sanchez-Sesma, *The classical Garvin's problem revisited*, Bull. Seismo. Soc. Am., 96 (2006), p. 1344-1351.

[83] R. S. Jih, K. L. McLaughlin, Z. A. Der, *Free-boundary conditions of arbitrary polygonal topography in a two-dimensional explicit finite-difference scheme*, Geophysics, 53 (1988), p. 1045-1055.

[84] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press (1985).

[85] D. L. Johnson, J. Koeplik, R. Dashen, *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media*, J. Fluid. Mech., 176 (1987), p. 378-402.

[86] P. Joly, J. Rodriguez, *An error analysis of conservative space-time mesh refinement methods for the one-dimensional wave equation*, SIAM J. Numer. Anal., 43-2 (2005), p. 825-859.

[87] P. Joly, J. Rodriguez, *Optimized higher order time discretization of second order hyperbolic problems: construction and numerical study*, accepté et à paraître au J. Comput. App. Math., (2009).

[88] J. P. Jones, J. S. Whittier, *Waves at flexibility bonded interfaces*, J. Appl. Mech. (1967), p. 905-908.

[89] S. Junca, B. Rousselet, *The method of strain coordinates with weak unilateral springs*, preprint (2009), `http://math1.unice.fr/~junca/pdffiles/SCUC.pdf`

[90] K. R. Kelly, R. W. Ward, S. Treitel, R. M. Alford, *Synthetic seismograms: a finite-difference approach*, Geophysics, 41 (1976), p. 2-27.

[91] J. Y. Kim, A. Baltazar, J. W. Hu, S. I. Rokhlin, *Hysteretic linear and nonlinear acoustic responses from pressed interfaces*, Int. J. Solids. Struct., 43 (2006), p. 6436-6452.

[92] E. Kjartansson, *Attenuation of seismic waves in rocks and applications in energy exploration*, PhD thesis, Stanford University (1979).

[93] D. Komatitsch, J. P. Vilotte, *The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2-D and 3-D geological structures*, Bull. Seism. Soc. Am., 88 (1998), p. 368-392.

[94] B. A. Korshak, I. Y. Solodov, E. M. Ballad, *DC effects, sub-harmonics, stochasticity and "memory" for contact acoustic non-linearity*, Ultrasonics, 40 (2002), p. 707-713.

[95] N. Lahellec, J. C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet, *Analysis of inhomogeneous materials at large strains using fast Fourier transform*, Computational Mechanics of Solid Materials at large Strains (2003), `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00097030/fr/`.

[96] E. Larose, A. Derode, D. Clorennec, L. Margerin, M. Campillo, *Passive retrieval of Rayleigh wave in disordered elastic media*, Phys. Rev. E 72, 046607 (2005).

[97] M. Lax, *Multiple scattering of waves (ii): the effective field in dense systems*, Phys. Rev., 85 (1952), p. 621-629.

[98] F. Lebon, A. Ould-Kaoua, C. Licht, *Numerical study of soft adhesively bonded joints in finite elasticity*, Computational Mechanics, 21 (1997), p. 134-140.

[99] A. R. Levander, *Fourth-order finite-difference P-SV seismograms*, Geophysics, 53 (1988), p. 1425-1436.

[100] R. J. LeVeque, J. Oliger, *Numerical methods based on additive splittings for hyperbolic partial differential equations*, Math. Comput., 40 (1983), p. 469-497.

[101] R. J. LeVeque, *Intermediate boundary conditions for time-split methods applied to hyperbolic partial differential equations*, Math. Comput., 47 (1986), p. 37-54.

[102] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press (2002).

[103] T. Levy, E. Sanche-Palencia, *Equations and interface conditions for acoustic phenomena in porous media*, J. Math. Anal. App., 61 (1977), p. 813-834.

[104] C. Licht, F. Lebon, A. Léger, *Dynamics of elastic bodies connected by a thin adhesive layer*, Springer Proceedings in Physics 128 (2009), p. 99-110.

[105] T. Lin, J. Sochacki, R. Ewing, J. George, *Some grid refinement schemes for hyperbolic equations with piecewise constant coefficients*, Math. Comput., 56 (1991), p. 61-86.

[106] C. M. Linton, P. A. Martin, *Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: second-order corrections for the effective wavenumber*, J. Acoust. Soc. Am., 117-6 (2005), p. 3413-3423.

[107] F. J. Lockett, *The reflection and refraction of waves at an interface between viscoelastic materials*, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962), p. 53-64.

[108] F. Lörcher, C. Munz, *Lax-Wendroff-type schemes of arbitrary order in several space dimensions*, IMA J. Numer. Anal., (2005), p. 1-28.

[109] J. F. Lu, A. Hanyga, *Wave field simulation for heterogeneous porous media with singular memory drag force*, J. Comput. Phys., 208 (2005), p. 651-674.

[110] C. Lubich, *Discretized fractional calculus*, SIAM J. Math. Anal., 17 (1986), p. 704-719.

[111] R. I. McLachlan, *On th numerical integration of ordinary differential equations by symmetric composition methods*, SIAM J. Sci. Comp., 16 (1995), p. 151-168.

[112] B. Malama, P. H. Kulatilake, *Models for normal fracture deformation under compressive loading*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 40 (2003), p. 893-901.

[113] V. Mamou, *Caractérisation ultrasonore d'échantillons hétérogènes multiplement diffuseurs*, Thèse de l'Université Paris 7 (2005).

[114] P. Martin, A. Maurel, *Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: weak scattering without closure assumptions*, Wave motion, 45 (2008), p. 865-880.

[115] D. Matignon, *Introduction au calcul fractionnaire*, Fractals et Lois d'Échelle, Hermès, vol.1, ch.4, (2002), p. 143-183.

[116] G. A. McMechan, M. J Yedlin, *Analysis of dispersive waves by wave field transformation*, Geophysics, 46-6 (1981), p. 869-874.

[117] A. Mesgouez, *Etude numérique de la propagation des ondes mécaniques dans un milieu poreux en régime impulsionnel*, Thèse de l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse (2005).

[118] D. J. Min, C. Shin, H. Soo Yoo, *Free-Surface boundary condition in finite-difference elastic wave modeling*, Bull. Seismo. Soc. Am., 94 (2004), p. 237-250.

[119] P. Moczo, J. Kristek, M. Galis, *Simulation of the planar free surface with near-surface lateral discontinuities in the finite-difference modeling of seismic motion*, Bull. Seismo. Soc. Am., 94 (2004), p. 760-768.

[120] T. A. Mokhtar, R. B. Herrmann, D. R. Russel, *Seismic velocity and Q model for the shallow structure of the arabian shield from short-period Rayleigh waves*, Geophysics, 53-11, (1988), p. 1379-1387.

[121] C. Morency, J. Tromp, *Spectral-element simulations of wave propagation in porous media*, Geophys. J. Int., 175 (2008), p. 301-345.

[122] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953).

[123] F. Muir, J. Dellinger, J. Etgen, D. Nichols, *Modeling elastic fields across irregular boundaries*, Geophysics, 57 (1992), p. 1189-1193.

[124] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, Wiley series in nonlinear science, John Wiley & Sons (1995).

[125] Y. Ohara, T. Mihara, K. Yamanaka, *Effect of adhesion force between crack planes on subharmonic and DC responses in nonlinear ultrasound*, Ultrasonics, 44 (2006), p. 194-199.

[126] C. Pecorari, *Nonlinear interaction of plane ultrasonic waves with an interface between rough surfaces in contact*, J. Acoust. Soc. Am., 113 (2003), p. 3065-3072.

[127] J. K. Perkus, G. J. Yevick, *Analysis of classical statistical mechnaics by means of collective coordinates*, Physical Review 110-1 (1958), p. 1-13.

[128] T. J. Plona, *Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies*, App. Phys. Lett., 36-4 (1980), p. 259-261.

[129] Pour La Science, *La modélisation informatique, exploration du réel*, dossier 52 (2006).

[130] W. H. Press, S. A. Teukolskyn, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (1992).

[131] S. R. Pride, A. F. Gangi, F. D. Morgan, *Deriving the equations of motion for porous isotropic media*, J. Acoust. Soc. Am., 92-6 (1992), p. 3278-3290.

[132] L. Pyrak-Nolte, L. Myer, N. Cook, *Transmission of seismic waves across single natural fractures*, J. Geophys. Res., 95 (1990), p. 8617-8638.

[133] J. W. Rayleigh, *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*, Proc. London Math. Soc., 17 (1885), p. 4-11.

[134] B. Ricaud, *Properties of periodic solutions near their oscillation threshold for a class of hyperbolic partial differential equations with localized nonlinearity*, soumis au SIAM J. App. Math., (2009), `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00403682/fr/`.

[135] J. M. Richardson, *Harmonic generation at an unbonded interface: I. Planar interface between semi-infinite elastic media*, Int. J. Eng. Sci., 17 (1979), p. 73-85.

[136] O. Richoux, *Etude de la propagation des ondes mécaniques dans un réseau unidimensionnel comportant du désordre et/ou des nonlinéarités localisées*, Thèse de l'Université du Maine (1999).

[137] O. Richoux, C. Depollier, J. Hardy, *Propagation of mechanical waves in a one-dimensional nonlinear disordered lattice*, Physical Review E 73, 026611 (2006).

[138] J. O. A. Robertsson, J. O. Blanch, W. W. Symes, *Viscoelastic finite-difference modeling*, Geophysics, 59-9 (1994), p. 1444-1456.

[139] J. O. Robertsson, *A numerical free-surface condition for elastic / viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography*, Geophysics, 61 (1996), p. 1921-1934.

[140] D. Rodrigues, *Large scale modelling of seismic wave propagation*, Thèse de l'Ecole Centrale de Paris (1995).

[141] J. Rodriguez Garcia, *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique*, Thèse de l'Université Paris 9 (2004).

[142] S. I. Rokhlin, Y. J. Wang, *Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids*, J. Acoust. Soc. Amer., 89 (1991), p. 503-515.

[143] J. H. Rosenbaum, *Synthetic microseismograms: logging in porous formation*, Geophysics, 39-1 (1974), p. 14-32.

[144] E. H. Saenger, T. Bohlen, *Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid*, Geophysics, 69 (2004), p. 583-591.

[145] E. H. Saenger, N. Gold, S. A. Shapiro, *Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid*, Wave Motion, 31 (2000), p. 77-92.

[146] F. Sánchez-Sesma, U. Iturrarán-Viveros, *The classical Garvin's problem revisited*, Bull. Seismo. Soc. Am., 96 (2006), p. 1344-1351.

[147] D. Savéry, G. Cloutier, *High-frequency ultrasound backscaterring by blood: analytical and semianalytical models of the erythrocyte cross section*, J. Acoust. Soc. Am., 121 (2007), p. 3963-3971.

[148] G. Scarella, *Etude théorique et numérique de la propagation d'ondes en présence de contact unilatéral dans un milieu fissuré*, Thèse de l'Université Paris 9 - Dauphine (2004).

[149] M. Schanz, *Application of 3-D time domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids*, Eng. Anal. Bound. Elem., 25 (2001), p. 363-376.

[150] M. Schoenberg, *Elastic wave behavior across linear slip interfaces*, J. Acoust. Soc. Am., 68 (1980), p. 1516-1521.

[151] F. Schubert, B. Koehler, *Numerical time-domain simulation of diffusive ultrasound in concrete*, Ultrasonics, 42 (2004), p. 781-786.

[152] K. K. Shung, *On the ultrasound scattering from blood as a function of hematocrit*, IEEE Trans. Son. Ultrason., SU-29 (1982), p. 327-331.

[153] T. Schwartzkopff, M. Dumbser, C. Munz, *Fast high order ADER schemes for linear hyperbolic equations*, J. Comput. Phys., 197-2 (2004), p. 532-539.

[154] T. Schwartzkopff, M. Dumbser, M. Käser, *Fast high order finite volume schemes for linear wave propagation*, Numerische Mathematik (2005).

[155] I. Y. Solodov, *Ultrasonics of non-linear contacts: propagation, reflection and NDE-applications*, Ultrasonics, 36 (1998), p. 383-390.

[156] R. Stacey, *New finite-difference methods for free surfaces with a stability analysis*, Bull. Seismo. Soc. Am., 84 (1994), p. 171-184.

[157] R. D. Stoll, G. M. Bryan, *Wave attenuation in saturated sediments*, J. Acoust. Soc. Am., 47-5 (1970), p. 1440-1447.

[158] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Chapman & Hall (1999).

[159] H.G. Tattersall, *The ultrasonic pulse-echo technique as applied to adhesion testing*, J. Appl. Phys., 6 (1973), p. 819-832.

[160] E. Tessmer, D. Kosloff, *3-D elastic modeling with surface topography by a Chebychev spectral method*, Geophysics, 59 (1994), p. 464-473.

[161] V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge, L. Jaouen, *Multiple scattering of acoustic waves and porous absorbing media*, Physical Review, E70 (2004), 026609.

[162] L. N. Trefethen, *Group velocity interpretation of the stability theory of Gustafsson, Kreiss, Sundström*, J. Comput. Phys., 49 (1983), p. 199-217.

[163] L. N. Trefethen, *Instability of difference models for hyperbolic initial boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., 37 (1984), p. 329-367.

[164] L. N. Trefethen, *Stability of difference models containing two boundaries or interfaces*, Math. Comput., 45 (1985), p. 279-300.

[165] C. D. Tsakiroglou, *A methodology for the derivation of non-Darcian models for the flow of generalized Newtonian fluids in porous media*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 105 (2002), p. 79-110.

[166] C. Tsogka, *Modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés*, Thèse de l'Université Paris 9 - Dauphine (1999).

[167] J. H. M. T. Van der Hijden, *Propagation of elastic transient elastic waves in stratified anisotropic media*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 32 (1987).

[168] J. Virieux, *P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method*, Geophysics, 51 (1986), p. 889-901.

[169] V. Vlasie, M. Rousseau, *Acoustical validation of the rheological models for a structural bond*, Wave Motion, 37 (2003), p. 333-349.

[170] P. C. Waterman, R. Truell, *Multiple scattering of waves*, J. Math. Phys., 2-4 (1961), p. 512-537.

[171] L. Wennerberg, *Snell's law for viscoelastic materials*, Geophys. J. R. astr. Soc., 81 (1985), p. 13-18.

[172] D. P. Williams, *Scattering by wave-bearing surfaces under fluid loading*, PhD. thesis, University of Nottingham, UK (1999).

[173] T. Xu, G. A. McMechan, *Composite memory variables for viscoelastic synthetic seismograms*, Geophys. J. Int., 121 (1995), p. 634-639.

[174] C. Xue, S. Deng, *An upwinding boundary condition capturing method for Maxwell's equations in media with material interfaces*, J. Comput. Phys., 225 (2007), p. 342-362.

[175] J. Zahradník, *Simple elastic finite-difference scheme*, Bull. Seism. Soc. Am., 85 (1995), p. 1879-1887.

[176] Y. Q. Zeng, J. Q. He, Q. H. Liu, *The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media*, Geophysics, 66-4 (2001), p. 1258-1266.

[177] W. Zhang, X. Chen, *Traction image method for irregular free surface boundaries in finite-difference seismic wave simulation*, Geophys. J. Int., 167 (2006), p. 337-353.

[178] C. Zhao, W. Li, J. Wang, *An explicit finite element method for Biot dynamic formulation in fluid-saturated porous media and its application to a rigid foundation*, J. Sound. Vib., 282 (2005), p. 1169-1181.

[179] J. Zhao, J. G. Cai, *Transmission of elastic P-waves across single fractures with a nonlinear normal deformational behavior*, Rock Mech. Rock Engng., 34-1 (2001), p. 3-22.

Résumé

Ce document traite de la résolution de problèmes directs de propagation d'ondes en milieu hétérogène et dans le domaine temporel.

L'essentiel du travail porte sur la conception, l'analyse et l'implémentation de méthodes numériques pour la propagation d'ondes : schéma d'ordre élevé pour intégrer les lois de conservation, méthode d'interface immergée pour discrétiser les interfaces sur une grille cartésienne. On modélise numériquement plusieurs lois de comportement linéaires (fluide parfait, élasticité, viscoélasticité, poroélasticité) et conditions d'interface (surface libre, contacts parfaits ou imparfaits). Les résultats numériques sont comparés à des solutions analytiques, dont certaines sont originales.

La mise en oeuvre des différentes méthodes au sein d'un code de calcul optimisé rend possible une expérimentation numérique fine de phénomènes ondulatoires en milieux complexes. On étudie de cette façon la propagation des ondes à travers un ensemble de diffuseurs répartis aléatoirement, en dimension deux. Les solutions numériques permettent de caractériser le milieu effectif, et ainsi de quantifier la précision de méthodes classiques de diffusion multiple.

En parallèle à ces travaux numériques, une analyse théorique de l'interaction d'ondes élastiques avec des nonlinéarités de contact est aussi menée, en dimension un. On étudie la génération d'harmoniques et la dilatation moyenne d'une fissure en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.

Mots-clés : viscoélasticité, modèle de Biot, nonlinéarité de contact, diffusion multiple, milieu effectif, différences finies, méthode d'interface immergée, Cagniard-de Hoop, calcul scientifique.

Abstract

This document deals with direct problems of wave propagation in heterogeneous media and in the time domain.

The main part of the work concerns the conception, the analysis, and the implementation of numerical methods: high-order schemes to integrate conservation laws, immersed interface method to discretize interfaces on a Cartesian grid. Various linear constitutive laws (inviscid fluid, elasticity, viscoelasticity, poroelasticity) and interface conditions (free surface, perfect or imperfect contact) are modeled. The numerical results are compared with analytical solutions.

Putting together the various methods into a single optimized code yields an accurate numerical tool to study wave phenomena in complex media. As an illustration, we study the propagation of waves across a random network of scatterers, in 2D. The effective medium is characterized numerically. The accuracy of classical methods of multiple scattering is examined.

More theoretical works are also proposed, concerning the interaction between elastic waves and a contact nonlinearity, in 1D. We study the generation of harmonics and the mean dilatation of the crack in terms of the forcing amplitude.

Keywords: viscoelasticity, Biot model, contact nonlinearity, multiple scattering, effective medium, finite differences, immersed interface method, Cagniard-de Hoop, scientific computing.