



HAL
open science

Contrôlabilité et stabilisation optimales en dimension finie ou infinie

Christophe Prieur

► **To cite this version:**

Christophe Prieur. Contrôlabilité et stabilisation optimales en dimension finie ou infinie. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2009. tel-00450499

HAL Id: tel-00450499

<https://theses.hal.science/tel-00450499>

Submitted on 26 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER (TOULOUSE III)

**Habilitation à diriger
des recherches**
**Contrôlabilité et stabilisation optimales
en dimension finie ou infinie**

Soutenue publiquement le 9 novembre 2009 devant le Jury composé de

Mr Bernard BROGLIATO
Mr Jean-Michel CORON
Mr Laurent PRALY
Mr Jean-Pierre RAYMOND
Mr Pierre ROUCHON
Me Sophie TARBOURIECH

Rapporteurs :

Mr Bernard BROGLIATO

Mr Pierre ROUCHON

Mr Enrique ZUAZUA

Version du 16 novembre 2009

Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma reconnaissance envers tous ceux qui m'ont accompagné ces dernières années. Je remercie tout d'abord Jean-Michel Coron qui, le premier, m'a initié au contrôle et m'a ensuite encouragé à poursuivre en thèse en co-direction avec Laurent Praly. Ces deux collègues et amis m'ont fait partager leur enthousiasme, leur rigueur et mille idées qui fourmillent dans mes travaux. Cette habilitation à diriger des recherches leur doit beaucoup. A l'issue de ma thèse, Jean-Michel et Laurent m'ont laissé prendre l'indépendance indispensable à un chercheur, mais se sont toujours montrés disponibles lorsque j'ai eu besoin d'un conseil. Je profite de ce manuscrit pour leur témoigner mon amitié et ma gratitude.

Je suis très touché de l'honneur que m'ont fait Bernard Brogliato, Pierre Rouchon et Enrique Zuazua en acceptant de rapporter mon travail. Les différents échanges que j'ai eus avec eux ont été très enrichissants.

Merci à Sophie Tarbouriech d'avoir accepté de présenter mon dossier de recherche auprès de l'université Paul-Sabatier. En plus de faire partie de mes amis et d'être une collaboratrice régulière, Sophie a beaucoup influencé mes travaux de recherche en me proposant de nouvelles voies, de nouvelles applications et en m'encourageant dans telles ou telles pistes, tout en respectant mes choix. Je remercie vivement Jean-Pierre Raymond d'avoir accepté de faire partie du jury. Sa présence est pour moi un grand honneur.

Puisque l'opportunité m'en est donnée, je remercie Michel Sorine pour ses questions scientifiques et ses conseils qu'il ne manque pas de me donner régulièrement. Je remercie également Hisham Abou-Kandil qui m'a proposé aussi bien des pistes de recherche fondamentale que des applications. Sa confiance qu'il a bien voulu m'accorder depuis longtemps est un grand honneur pour moi. Geoges Bastin, en plus d'être un collègue chaleureux avec qui j'apprécie travailler, n'a jamais compté son temps pour moi. Je lui en suis très reconnaissant.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers mes différents co-auteurs. J'exprime une pensée plus particulière pour Emmanuelle Crépeau avec qui j'ai vraiment apprécié travailler ces dernières années. Merci également à Lionel Rosier, Emmanuel Trélat, Denis Matignon, Stéphane Labbé avec qui j'ai eu des discussions très enrichissantes. Nombre de mes co-auteurs sont devenus des amis, ou étaient des amis avant d'être co-auteurs !

Je n'oublie pas mes nombreux collègues, et bien souvent amis, du groupe de recherche MAC. J'ai profité de nombreuses discussions scientifiques avec notamment Isabelle Queindec, Denis Arzelier, Didier Henrion, Lucie Baudouin, et Vincent Andrieu. Merci pour leurs conseils scientifiques, et amicaux. Ils ne se sont (presque) jamais montrés impatients dans les fartleks ou lorsque je me suis permis de parler des règles de rugby ! Merci à tout le groupe (et à quelques autres collègues, dont le coach) d'avoir su créer une ambiance chaleureuse et stimulante.

Je garde mes derniers remerciements pour Clémentine, qui, depuis plusieurs années déjà, m'encourage, et me soutient continuellement dans mes nombreux projets. J'arriverai un jour peut-être à montrer à Domitille (et aussi à Gaétane et Guillem) que la profession de chercheur n'est pas seulement une source de stress, ou de séparations, mais peut être aussi enthousiasmante et stimulante par les multiples satisfactions et rencontres qu'elle apporte. Je dédie ce manuscrit à mes quatre rubgymen préférés, reconvertis récemment au hockey sur glace.

Table des matières

Introduction	3
I Contrôle en dimension finie	7
1 Stabilisation de systèmes non-linéaires	9
1.1 Contrôle discontinu et robustesse	9
1.2 Stabilisation par une commande hybride	13
1.3 Feedback hybride pour les systèmes asymptotiquement contrôlables	15
1.4 Robustesse intrinsèque des systèmes hybrides	17
2 Contrôle optimal et robuste	21
2.1 Cas particulier de l'intégrateur de Brockett	23
2.2 Généralisation aux systèmes linéaires en la commande	27
2.3 Éléments de démonstration du théorème 2.6	29
2.4 Calcul numérique de la commande optimale	30
3 Performance optimale de systèmes soumis à des non-linéarités de secteur	31
3.1 Cas des saturations emboîtées	31
3.2 Analyse de la complexité numérique des conditions	35
3.3 Autres types de non-linéarités	35
II Contrôle en dimension infinie	37
4 Contrôle de structures flexibles mono-dimensionnelles	39
4.1 Contrôlabilité d'une poutre flexible	40
4.2 Éléments de démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2	42
4.3 Simulations numériques	44
4.4 Stabilisation de la poutre	46
4.5 Éléments de démonstration du théorème 4.10	49

5	Contrôle d'une plaque, application à l'optique adaptative	51
5.1	Contrôlabilité d'un miroir bimorphe	52
5.2	Stabilisation d'un miroir bimorphe	54
5.3	Eléments de démonstration du théorème 5.4	55
5.4	Contrôle robuste d'un miroir bimorphe	57
6	Contrôle frontière de systèmes hyperboliques	61
6.1	Equations de Saint-Venant en présence de perturbations	62
6.2	Contrôle frontière de systèmes hyperboliques quasi-linéaires non-homogènes . .	64
6.3	Validation numérique	67
6.4	Validation expérimentale	69
	Perspectives	73
	Bibliographie	78
	Bibliographie personnelle	89
	Revue à comité de lecture	89
	Actes de conférence à comité de lecture	91
	Chapitres dans des ouvrages collectifs	94

Introduction

Ce document présente une synthèse de mes travaux de recherche dont le thème central est la théorie du contrôle. Etant donné un système dont la dynamique dépend d'un paramètre (appelé contrôle, ou commande), l'enjeu principal de ces travaux a été de prouver l'existence d'une loi de commande telle que les solutions du système dynamique satisfassent certaines propriétés de convergence (vers un équilibre par exemple) ou de performance (comme un rejet de perturbations). Différentes structures de contrôle peuvent être envisagées : dépendant du temps et de la condition initiale (on parle alors de boucle ouverte), ou alors dépendant de l'état de la solution (on parle alors de boucle fermée, ou d'un retour d'état). De même, lorsque l'état du système dynamique est en dimension infinie, différentes propriétés de contrôle peuvent être obtenues selon la topologie et la régularité de la condition initiale considérées.

La réalisation de ces travaux a demandé des développements techniques importants. Citons quelques points-clés. Différentes études pour les systèmes de dimension finie ont nécessité l'utilisation de contrôles discontinus à des fins de stabilisation asymptotique et robuste. Nous avons également développé la synthèse de commandes (presque) optimales et robustes pour des systèmes non-linéaires. Parmi les résultats clés en dimension infinie, nous avons donné une description précise de la vitesse de la stabilité en fonction de la position de l'actionneur de structures flexibles. Nous avons aussi étudié le calcul de contrôle frontière dépendant uniquement de la sortie pour la régulation de l'écoulement de l'eau dans des canaux. Pour ces deux problèmes de dimension infinie nous avons considéré des commandes simples dans leur formulation, mais dont le calcul a nécessité des démonstrations sophistiquées.

Etant donné un système dynamique, suivant le nombre de modes dynamiques (en nombre fini ou pas), nous considérons un modèle écrit en terme d'équations aux dérivées ordinaires ou partielles. De même, suivant la largeur de la variation des paramètres (grande variation, transition entre deux régimes de fonctionnement par exemple), nous devons prendre en compte les effets non-linéaires ou pas. Nous obtenons ainsi différents types de modèles dynamiques. Une constante dans ce travail a été de chercher à établir la performance optimale, et à développer des techniques pour calculer explicitement ou numériquement les commandes. Par exemple pour le contrôle de structures flexibles par des cellules piézo-électriques, nous avons étudié précisément la vitesse de la convergence (polynomiale ou exponentielle). Nous pensons aussi à la performance optimale de systèmes soumis à des non-linéarités de type secteur, et à la synthèse de commandes mixtes (ou hybrides, avec une dynamique discrète et continue)

optimales (en temps minimal) et robustes. Un autre exemple, pour les systèmes de dimension infinie, concerne un système d'optique adaptative pour lequel nous avons calculé une commande optimale (au sens de la norme H_∞).

Nous structurons ce document en deux parties distinctes en distinguant la théorie de la commande pour les systèmes de dimension finie, de la théorie du contrôle en dimension infinie. Certains travaux annexes ont été omis. Nous donnons cependant une liste complète des publications à partir de la page 89.

La première partie présente l'essentiel de mes résultats et de mes applications en théorie du contrôle sur les systèmes non-linéaires de dimension finie, c'est-à-dire dont les modèles sont des équations aux dérivées ordinaires non-linéaires.

Nous allons tout d'abord étudier le problème général de la stabilisation de systèmes non-linéaires et nous envisagerons la classe de commandes hybrides qui permettent de garantir une robustesse par rapport aux petites perturbations (voir le chapitre 1). Nous introduirons en particulier l'exemple de l'intégrateur de Brockett. Ensuite, dans le chapitre 2, nous rajouterons un critère d'optimisation et, avec cette même classe de feedbacks, nous résoudrons le problème de stabilisation en temps minimal sous une contrainte d'amplitude de la commande, d'abord pour l'intégrateur de Brockett et ensuite pour tout système contrôlable non-linéaire (mais linéaire par rapport à la commande). Enfin, dans le chapitre 3, nous analyserons la performance optimale d'une classe de systèmes non-linéaires (plus précisément soumis à des non-linéarités de secteur) et nous privilégierons une méthode constructive pour le calcul de fonctions de Lyapunov.

La seconde partie de ce document concerne le contrôle de systèmes à paramètres répartis, plus précisément décrits par des équations aux dérivées partielles.

Nous souhaitons avoir une vision globale de ce type de systèmes et étudier toutes les questions classiques depuis la modélisation jusqu'à la simulation et l'application effective en passant, bien entendu, par la commande de tels systèmes. L'originalité de notre approche réside dans le fait que nous souhaitons privilégier les modèles EDP qui présentent l'intérêt de modéliser une infinité de degrés de liberté. Tant que cela est possible, nous souhaitons réserver la discrétisation au calcul effectif des solutions et des commandes.

Nous allons présenter plus particulièrement des résultats de contrôlabilité et de stabilité pour une EDP linéaire modélisant une structure flexible mono-dimensionnelle (de type poutre), contrôlée par des actionneurs ponctuels (voir le chapitre 4). Ensuite nous développons des résultats de contrôlabilité et de stabilité plus spécifiques pour les structures flexibles bi-dimensionnelles (de type plaque) et contrôlées par des actionneurs internes (c'est-à-dire répartis sur les domaines non-réduits à un point). L'application visée sera étudiée à la fin du chapitre 5, et concerne la régulation de miroir déformable dans un système d'optique adaptative. Dans le dernier chapitre de cette partie (chapitre 6), nous étudions le contrôle frontière des systèmes hyperboliques. Nous établirons des conditions suffisantes sur les conditions fron-

tière pour avoir une stabilité exponentielle vers l'équilibre en présence de petites perturbations. Nous appliquerons ce résultat théorique à la synthèse de commandes aux bords régulant l'écoulement de l'eau dans un canal, avec une vitesse exponentielle et avec une robustesse par rapport à la friction, et à la pente notamment.

Nous concluerons ce document par quelques perspectives de recherche en théorie du contrôle des systèmes de dimension finie ou infinie.

Les références alphanumériques [R*], $* \in \{1, \dots, 27\}$, [C*], $* \in \{1, \dots, 51\}$ renvoient à mes publications (voir à partir de la page 89). Les autres références sont citées dans la bibliographie (à partir de la page 79).

Première partie

Contrôle en dimension finie

Chapitre 1

Stabilisation de systèmes non-linéaires

Dans ce chapitre nous allons étudier le problème de la stabilisation des systèmes non-linéaires et nous rappellerons la nécessité d'utiliser des commandes discontinues (ou instationnaires) pour résoudre des problèmes de stabilité et de performance optimale. L'utilisation de commandes discontinues peut introduire une grande sensibilité par rapport aux perturbations, et peut même créer une instabilité du système en boucle fermée en présence de petites perturbations (voir le paragraphe 1.1). Nous allons ensuite introduire l'intégrateur de Brockett (voir le paragraphe 1.2), ainsi que la classe de feedbacks hybrides (c'est-à-dire avec une dynamique mixte discrète/continue) que nous allons étudier à plusieurs reprises dans ce document. Nous verrons que, sous une hypothèse de contrôlabilité, nous pouvons stabiliser les systèmes non-linéaires avec un contrôle hybride (voir le paragraphe 1.3). Enfin nous verrons dans le paragraphe 1.4 que la robustesse par rapport aux petites perturbations (comme les bruits de mesure et les erreurs de modèle) est intrinsèque à la classe de systèmes hybrides perturbés. Les commandes hybrides peuvent donc être utilisées pour d'autres problèmes de contrôle, comme le contrôle optimal. Cette question de la performance optimale fera l'objet du chapitre suivant (chapitre 2).

1.1 Contrôle discontinu et robustesse

Considérons un système décrit par un modèle non-linéaire

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

où $f : \tilde{\mathcal{O}} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue, $\tilde{\mathcal{O}}$ et U sont des voisinages de l'origine respectivement dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . Dans (1.1), x est appelé état du système, et u le contrôle. Supposons que \mathcal{A} est un équilibre de ce système, c'est-à-dire que \mathcal{A} est un compact inclus dans $\tilde{\mathcal{O}}$ tel que $f(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Nous noterons $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{A}$. Les solutions de (1.1) seront à valeur dans \mathcal{O} .¹ Les normes euclidiennes seront notées $|\cdot|$ (sans préciser la dimension

¹On peut ajouter \mathcal{A} à l'espace d'état, mais cela rend certaines hypothèses un peu plus compliquées à formuler (en particulier la notion de rayon de perturbations admissible page 16, et l'hypothèse (A4) page 18).

lorsque cela ne sera pas nécessaire), et pour tout $x \in \tilde{\mathcal{O}}$, nous noterons $|x|_{\mathcal{A}} = \min_{\bar{x} \in \mathcal{A}} |\bar{x} - x|$.

Le problème de *stabilisation par un retour d'état statique* est le suivant : Trouver une fonction $u : x \mapsto u(x)$, appelée contrôle ou retour d'état, définie et continue sur un voisinage de 0, nulle en 0, telle que le système

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \quad (1.2)$$

soit localement asymptotiquement stable, c'est-à-dire qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- (stabilité) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x_0|_{\mathcal{A}} < \delta$ et $x_0 \in \mathcal{O}$ alors toutes les solutions de (1.2) maximales sur $[0, T)$ avec la condition initiale

$$x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

vérifient $|x(t)|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, T)$.

- (attractivité) il existe $\mu > 0$ tel que si $|x_0|_{\mathcal{A}} < \mu$ et $x_0 \in \mathcal{O}$ alors les solutions de (1.2) et (1.3) vérifient $|x(t)|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow T$.

La propriété précédente est une propriété de boucle fermée puisque l'information sur l'état est utilisée pour calculer l'entrée du système dynamique (1.1). Nous opposons à cette propriété la suivante, dite de boucle ouverte : nous disons que le système de contrôle (1.1) est *asymptotiquement contrôlable* si les deux propriétés suivantes ([4, 37]) sont satisfaites :

1. il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $|x_0|_{\mathcal{A}} < \mu$ et $x_0 \in \mathcal{O}$, il existe $T > 0$ et une commande $u_{x_0} : [0, T) \rightarrow U$ mesurable telle que les solutions de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u_{x_0}(t)) , \\ x(0) &= x_0 , \end{aligned} \quad (1.4)$$

maximales sur $[0, T)$, satisfont $|x(t)|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow T$;

2. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que si $|x_0|_{\mathcal{A}} \leq \delta$ et $x_0 \in \mathcal{O}$, il existe une commande $u_{x_0} : [0, T) \rightarrow U$ comme dans 1. et telle que $|x(t)|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, T)$.

Remarquons que cette propriété de boucle ouverte est impliquée par l'existence d'un bouclage d'état stabilisant asymptotiquement (1.1). De plus, suivant la structure du système non-linéaire, il peut y avoir des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour établir la contrôlabilité asymptotique (voir [121] pour une caractérisation de la contrôlabilité en terme des fonctions de Lyapunov assignables (*Control Lyapunov Functions*, CLFs), ou [43] par exemple pour une condition sur l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteur). De même il existe des conditions nécessaires pour l'existence d'un contrôle stabilisant comme la condition de Brockett [23] (voir aussi [41]) :

Théorème 1.1 (*condition de Brockett, [23]*) *S'il existe un contrôle continu et stationnaire tel que le système (1.2) soit localement asymptotiquement stable, alors la fonction f est ouverte en $(0, 0)$, c'est-à-dire que l'image par f de tout voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.*

Un exemple important de systèmes qui ne vérifie pas cette condition est l'intégrateur de Brockett introduit dans [23] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Cet exemple est très souvent étudié dans la littérature (par exemple [39, 43, 92, 122]) car il a des applications importantes en robotique mobile voir [29, 101, 102, 114, 96] (on parle alors d'intégrateur non-holonôme). Voir d'autres types d'exemple dans [29, 92, 93, 97].

Il existe donc de nombreux systèmes non-linéaires de dimension finie (même réguliers et asymptotiquement contrôlables à l'origine) pour lesquels il est nécessaire de considérer

- des contrôles instationnaires (mais périodiques en temps) ;
- ou des commandes discontinues (si on se restreint à la classe de retours d'état stationnaires)

pour stabiliser asymptotiquement localement l'origine du système bouclé.

Nous ne considérerons pas le problème de la stabilisation par des contrôles instationnaires. Voir [40, 99, 100, 98] ou [43, 97] pour des références plus récentes sur les études de commandes dépendant du temps, mais périodiques en temps. En revanche nous nous focaliserons sur l'utilisation de contrôles dynamiques et discontinus qui peuvent être utiles pour des problèmes de stabilisation. Citons par exemple [37] qui propose de calculer un feedback par un échantillonnage (avec des *sampling solutions*), ou [4, 19] dans lesquels l'existence d'un retour d'état constant par morceaux (*patchy feedback*) est établie. Notons que le système (1.1) en boucle fermée avec une commande discontinue $x \mapsto u(x)$ peut se réécrire

$$\dot{x} = F(x) \quad (1.6)$$

avec $F(x) = f(x, u(x))$ et est une équation dynamique discontinue. Ce type de systèmes est présent dans de nombreuses applications (comme en mécanique [25]). Notons que les solutions (de Carathéodory) de (1.6) sont en général sensibles aux perturbations. Il est crucial d'étudier l'effet des perturbations sur la stabilité puisque c'est pour avoir de la robustesse que l'on utilise des feedbacks de préférence à la boucle ouverte. En se limitant à des contrôles continus stabilisants, il existe une fonction de Lyapunov pour le système bouclé (d'après [74]) et donc un peu de robustesse. L'obtention de robustesse par rapport à des bruits de plus grande amplitude est une question différente (voir [116]), mais peut être abordée par une approche Lyapunov (voir par exemple [69]). Bien entendu introduire la possibilité de construire des commandes discontinues nécessite d'étudier l'effet de la robustesse de façon systématique. Par exemple pour le système de Brockett, il existe un retour d'état (discontinu) tel que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable (et même avec une vitesse de convergence exponentielle) en l'absence d'erreur sur la dynamique, et fasse apparaître des cycles limite (non réduits à un point) en présence de telles perturbations (voir des simulations dans [97]).

Nous notons que la classe de solutions de (1.6) est protéiforme et dépend de l'ensemble des perturbations prises en compte dans la dynamique. Donnons quelques exemples de notions de

solutions possibles. Etant donné $T > 0$, nous rappelons que $X : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite solution de Carathéodory de (1.6) si X est absolument continue et vérifie

$$\dot{X}(t) = F(X(t))$$

pour presque tout $t \in [0, T)$. On parlera alors de solutions nominales. Une autre classe de solutions est celle des solutions d’Hermes. Ce sont les limites de solutions du système perturbé $\dot{x} = F(x + \xi_n)$ lorsque la suite de perturbations (ξ_n) tend vers 0. Voir [64, 60] pour une définition précise dans un contexte d’équations différentielles avec un second membre discontinu, ou [R5], et [115] pour des généralisations aux systèmes hybrides.

Deux autres notions de solutions sont celles de Krasovskii et de Filippov [50]. Nous rappelons que $X : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de Krasovskii, respectivement de Filippov, de (1.6) si X est absolument continue et vérifie, pour presque tout $t \in [0, T)$,

$$\dot{X}(t) \in \bigcap_{\delta > 0} \text{con } F(X(t) + B(0, \delta)) ,$$

respectivement

$$\dot{X}(t) \in \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{N, \lambda(N)=0} \text{con } F((X(t) + B(0, \delta)) \setminus N)$$

où $B(0, \delta)$ est la boule fermée de \mathbb{R}^n centrée en 0 et de rayon δ , λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , et $\text{con}(A)$ désigne l’enveloppe convexe fermée d’un ensemble A .

D’autres notions de solutions existent. Citons les π -solutions (celles obtenues par échantillonnage de la commande) et les solutions d’Euler. Voir [31, 123] pour les systèmes non-linéaires classiques et [R5] pour leur généralisation aux systèmes hybrides.

Nous comprenons que, lors de la synthèse de contrôles stabilisants, il soit nécessaire de préciser la robustesse et la stabilité que l’on obtient en utilisant telle ou telle classe de solutions. Ainsi les références [123, 36] proposent l’utilisation d’un type de commandes discontinues qui permettent de stabiliser le système pour les π -solutions et donc avec un certain type de robustesse (une erreur de mesure uniquement aux instants d’échantillonnage). Voir aussi [5] pour l’utilisation de contrôles définis par morceaux (*patchy feedbacks*). Nous souhaitons considérer une classe de solutions plus large, en l’occurrence les solutions de Krasovskii. Or il y a des systèmes asymptotiquement contrôlables tels qu’il n’existe pas de contrôle instationnaire discontinu $x \mapsto u(x)$ tel que le système bouclé soit asymptotiquement stable pour les solutions de Krasovskii. Il suffit de penser de nouveau à l’intégrateur de Brockett (1.5) qui est un exemple de tel système non-linéaire.

Il apparaît donc naturel d’envisager des commandes dynamiques $u \mapsto u(x, \zeta)$ où ζ est une variable dynamique additionnelle. La plus simple des dynamiques est une dynamique discrète pour ζ . On arrive donc à une commande mixte discrète/continue $u \mapsto u(x, \zeta)$ où x est l’état du système (donc avec une dynamique continue), et ζ est une variable suivant une dynamique discrète. La contrainte topologique de Brockett dans [23] (généralisée dans [112]) ne s’applique plus. Ainsi j’ai calculé avec Alessandro Astolfi, Imperial College, un contrôle hybride

qui garantit une stabilité asymptotique pour l'intégrateur de Brockett (à un changement de coordonnées près). Pour comprendre l'importance et la portée de ce résultat, précisons la classe de contrôleurs hybrides que l'on considère dans ce document.

Pour une présentation de ce type de feedbacks hybrides, voir [135, 55], [R8], ou [C55] par exemple. D'autres formalismes existent (voir par exemple [22, 130, 87, 88, 141] pour des travaux avec une approche moins systématique). Citons également [147] pour une synthèse de contrôles avec commutation pour des systèmes (de dimension finie ou infinie).

Un contrôleur dynamique hybride est la donnée d'un ensemble totalement ordonné Q et, pour tout $q \in Q$, de la donnée de $(u_q, \phi_q, \psi_q, C_q, D_q)$ telle que

- C_q et D_q sont deux sous-ensembles de $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^k$, pour un certain entier k fixé ;
- $u_q : C_q \rightarrow U$;
- $\phi_q : C_q \rightarrow \mathbb{R}^k$;
- $\psi_q : D_q \rightarrow \mathbb{R}^k$;

Le système (1.1) en boucle fermée avec ce contrôleur s'écrit

$$\begin{cases} \dot{(x, \chi)} = (f(x, u_q(x, \chi)), \phi_q(x, \chi)) & \text{si } (x, \chi) \in C_q \\ q^+ = \psi_q(x, \chi) & \text{si } (x, q) \in D_q \end{cases} \quad (1.7)$$

Donnons quelques idées intuitives sur ce contrôleur dynamique. L'état du contrôleur est $(\chi, q) \in \mathbb{R}^k \times Q$, et l'état du système est donc (x, χ, q) . Deux types de dynamiques ont lieu pour l'état du contrôleur : 1) soit discrète pour la variable q et décrite par la fonction ψ_q , si le couple (x, χ) est dans le sous-ensemble D_q des états, 2) soit continue pour la variable χ et décrite par la fonction ϕ_q , si le couple (x, χ) est dans le sous-ensemble C_q des états. L'état du contrôleur soit suit un flot, soit effectue des sauts suivant la valeur de l'état.

1.2 Stabilisation par une commande hybride

Donnons un sens précis aux notions de stabilité et de solutions du système (1.7), et présentons le résultat principal de [R18] co-écrit avec Rafal Goebel, université de Washington et Andrew Teel, université de Californie à Santa-Barbara. Pour cela nous fixons un ouvert $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^n$ et un attracteur compact $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{O}}$. Notons $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{A}$. Nous allons considérer le système non-linéaire (1.1) défini sur $\tilde{\mathcal{O}}$ qui est asymptotiquement contrôlable à \mathcal{A} . L'ensemble \mathcal{O} sera l'espace d'état de la variable continue du système hybride que nous analysons. Dans ce paragraphe nous n'utiliserons pas de dynamique continue χ du contrôleur et dans le formalisme de (1.7), la variable continue est x .

La classe des systèmes hybrides qui nous intéresse dans cette partie est celle résultant des systèmes non-linéaires en boucle fermée avec un feedback hybride. Nous le noterons informellement par

$$\begin{cases} \dot{x} \in F_q(x) & x \in C_q, \\ q^+ \in G_q(x) & x \in D_q, \end{cases} \quad (1.8)$$

où Q est un ensemble totalement ordonné et pour tout $q \in Q$, F_q et G_q sont des fonctions (éventuellement à valeurs dans les sous ensembles de C_q et D_q respectivement) tandis que C_q et D_q sont des sous-ensembles de \mathcal{O} . Le système hybride décrit par (1.8) sera noté (\mathcal{H}) .

Remarquons que pour (\mathcal{H}) , la variable continue x évolue uniquement de façon continue et n'a pas de sauts, tandis que la variable q n'évolue que par des sauts. Les ensembles C_q , respectivement D_q , décrivent les ensembles dans lesquels la variable continue peut évoluer, respectivement l'ensemble où la variable discrète q peut avoir des sauts. Rappelons quelques concepts de [56], et [R18] pour donner un sens précis à la notion de solutions que nous allons considérer. La première notion est celle de domaine de temps hybride qui est naturelle si on remarque qu'il y a une dynamique mixte discrète/continue dans le système (1.8) et que la "bonne" notion de temps est celle de temps mixte discret/continu.

Définition 1.2 – *Un ensemble $S \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$ est un domaine de temps hybride compact si $S = \bigcup_{j=0}^{J-1} ([t_j, t_{j+1}], j)$ pour une certaine suite de temps $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_J$.*
– *S est un domaine de temps hybride si pour tout $(T, J) \in S$, $S \cap ([0, T] \times \{0, 1, \dots, J\})$ est un domaine de temps hybride compact ;*
de façon équivalente, S est un domaine de temps hybride si S est la réunion d'une suite finie ou infinie d'intervalles $[t_j, t_{j+1}] \times \{j\}$, avec le dernier intervalle, s'il existe, éventuellement de la forme $[t_j, T)$ avec T fini ou $T = +\infty$.

Dans ce qui suit, nous noterons $\sup_t(S)$ pour le supremum par rapport à t tel que $(t, j) \in S$ pour un certain j , et $\sup_j(S)$ pour le supremum par rapport à j tel que $(t, j) \in S$ pour un certain t . Introduisons maintenant la définition formelle d'une solution de (1.8).

Définition 1.3 *Une solution du système hybride (1.8) consiste en un domaine de temps hybride non vide S , une fonction $x : S \rightarrow \mathcal{O}$ telle que $x(t, j)$ est localement absolument continue en t pour tout j fixé, et constant en j pour tout t fixé tel que $(t, j) \in S$, et une fonction $q : S \rightarrow Q$ tel que $q(t, j)$ est constant en t , pour tout j fixé pour tout $(t, j) \in S$, satisfaisant les conditions : $x(0, 0) \in C_{q(0,0)} \cup D_{q(0,0)}$ et*

(S1) *Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour presque tout t tel que $(t, j) \in S$,*

$$\dot{x}(t, j) \in F_{q(t,j)}(x(t, j)), \quad x(t, j) \in C_{q(t,j)}.$$

(S2) *Pour tout $(t, j) \in S$ tel que $(t, j+1) \in S$,*

$$q(t, j+1) \in G_{q(t,j)}(x(t, j)), \quad x(t, j) \in D_{q(t,j)}.$$

Etant donnée une solution de (1.8) nous ne considérerons que des solutions maximales (c'est-à-dire définies sur des domaines de temps hybrides maximaux), et nous ne mentionnerons pas explicitement le domaine de temps hybride. Nous identifierons la solution par (x, q) , et lorsque cela sera nécessaire, nous noterons son domaine de temps hybride $\text{dom}(x, q)$. Une

solution de (1.8) est dite *complète* si son domaine est non-borné. Une solution complète (x, q) peut satisfaire $\sup_t \text{dom}(x, q) < \infty$, dans ce cas la variable discrète doit avoir une infinité de sauts.

Nous considérerons le cas où la solution (ou plus précisément la composante continue de l'état) atteint \mathcal{A} en temps continu fini ou infini (de même que nous envisagerons plus bas la cas de systèmes non-linéaires contrôlables en temps fini ou infini). Dans le cas présent la notion de stabilité asymptotique est la suivante :

Définition 1.4

- L'ensemble \mathcal{A} est stable pour le système hybride (\mathcal{H}) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que toute solution (x, q) de (\mathcal{H}) , avec $|x(0, 0)|_{\mathcal{A}} \leq \delta$, satisfait $|x(t, j)|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$ pour tout $(t, j) \in \text{dom}(x, q)$.
- L'ensemble \mathcal{A} est attractif pour le système hybride (\mathcal{H}) s'il existe $\delta > 0$ tel que
 - pour tout $(x_0, q_0) \in \mathcal{O} \times Q$ avec $|x_0|_{\mathcal{A}} \leq \delta$, il existe une solution de (\mathcal{H}) avec $(x, q)(0, 0) = (x_0, q_0)$;
 - pour toute solution (x, q) de (\mathcal{H}) avec $|x(0, 0)|_{\mathcal{A}} \leq \delta$ nous avons $|x(t, j)|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \sup_t(\text{dom}(x, q))$.
- L'ensemble \mathcal{A} est asymptotiquement stable, si \mathcal{A} est à la fois stable et attractif. Son bassin d'attraction, noté $B_{\mathcal{A}}$, est l'ensemble des points $x_0 \in \mathcal{O}$ tels que pour tout $q_0 \in Q$, il existe une solution de (\mathcal{H}) avec $x(0, 0) = x_0$, $q(0, 0) = q_0$, et toutes les solutions ainsi obtenues satisfont $|x(t, j)|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \sup_t(\text{dom}(x, q))$.
- \mathcal{A} est (globalement) asymptotiquement stable sur \mathcal{O} si \mathcal{A} est asymptotiquement stable et si $B_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}$.

1.3 Feedback hybride pour les systèmes asymptotiquement contrôlables

Pour l'ouvert $\tilde{\mathcal{O}}$, et le compact $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{O}}$, considérons un ensemble compact de contrôles admissibles $U \subset \mathbb{R}^m$, une fonction localement Lipchitz $f : \tilde{\mathcal{O}} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, et le système non-linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \tag{1.9}$$

Introduisons précisément la notion de contrôle hybride.

Définition 1.5 *Un feedback hybride sur \mathcal{O} consiste en*

- un ensemble totalement ordonné Q ,
- pour chaque $q \in Q$,
 - des ensembles $C_q \subset \mathcal{O}$ et $D_q \subset \mathcal{O}$,
 - une fonction $k_q : C_q \rightarrow U$,

– une fonction $g_q : D_q \rightrightarrows Q$.

Dans la définition précédente la notation \rightrightarrows signifie que g_q peut prendre ses valeurs dans les sous-ensembles de Q (voir [110]). La fonction k_q , en boucle fermée avec (1.9), détermine l'entrée de la dynamique continue, tandis que g_q décrit le saut de la variable discrète. Nous disons que le *contrôleur hybride rend \mathcal{A} asymptotiquement stable sur $\tilde{\mathcal{O}}$ pour (1.9)* si \mathcal{A} est asymptotiquement stable sur \mathcal{O} pour le système hybride (\mathcal{H}_{feed}) résultant de la définition $F_q(x) = f(x, k_q(x))$ et $G_q(x) = g_q(x)$, c'est-à-dire le système hybride :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, k_q(x)) & x \in C_q, \\ q^+ \in g_q(x) & x \in D_q, \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans tout ce qui suit, les *erreurs de mesure admissibles* et les *perturbations extérieures admissibles* sont des fonctions ξ et ζ qui vérifient

$$\begin{aligned} \xi(\cdot, \cdot, \cdot), \zeta(\cdot, \cdot, \cdot) &\in L_{loc}^\infty(\mathcal{O} \times [0, +\infty) \times \mathbb{N}; \mathbb{R}^n), \\ \xi(\cdot, t, j), \zeta(\cdot, t, j) &\in C^0(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n), \quad \forall (t, j) \in [0, +\infty) \times \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

En général les erreurs que nous considérons dépendent uniquement de x et t (et sont constantes en j), mais nous considérons aussi le cas où les erreurs changent pendant le saut. Comme remarqué dans [76, Remark 1.4], à cause de la présence de ζ et de la continuité de f par rapport à u , nous pouvons omettre la référence explicite aux erreurs d'actionneur (c'est-à-dire en remplaçant k_q par $k_q + e_a$ dans (1.10) où e_a est une petite erreur d'actionneur). De plus comme l'ensemble Q est discret, nous ne considérons pas le cas d'erreurs sur la variable discrète. Considérer des erreurs de mesure et des perturbations extérieures nous oblige à considérer des systèmes hybrides instationnaires qui peuvent être représentés par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, k_q(x + \xi)) + \zeta & x + \xi \in C_q, \\ q^+ \in g_q(x + \xi) & x + \xi \in D_q. \end{cases} \quad (1.12)$$

Nous noterons ce système par $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$. Les solutions de ce système sont définies de façon analogue aux solutions du système (1.8) (voir la définition 1.3).

Etant donnés ξ et ζ , nous pouvons définir la notion de stabilité asymptotique de \mathcal{A} sur \mathcal{O} pour le système $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$ de manière analogue à la définition 1.4 (mais en considérant les solutions de $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$ à la place des solutions de (\mathcal{H})). Par ailleurs nous introduisons (voir [R5]) le *rayon de perturbations admissible* comme étant une fonction continue $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ telle que $x + \rho(x)\mathbb{B} \subset \mathcal{O}$ pour tout $x \in \mathcal{O}$ (\mathbb{B} est la boule unité fermée de \mathbb{R}^n).

Définition 1.6 *Un feedback hybride sur \mathcal{O} rend \mathcal{A} asymptotiquement stable sur $\tilde{\mathcal{O}}$ pour (1.9), robustement aux bruits de mesure, aux erreurs d'actionneur et aux perturbations extérieures s'il existe un rayon de perturbations admissible $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tel que pour tout bruit de mesure admissible ξ et pour toute perturbation extérieure admissible ζ satisfaisant*

$$\begin{aligned} \sup_{(t,j) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}} |\xi(x, t, j)| &\leq \rho(x), \\ \text{esssup}_{(t,j) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}} |\zeta(x, t, j)| &\leq \rho(x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

\mathcal{A} est asymptotiquement stable sur \mathcal{O} pour le système hybride $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de [R18] (voir aussi [R5]) :

Théorème 1.7 *Si le système (1.9) est asymptotiquement contrôlable sur $\tilde{\mathcal{O}}$ en \mathcal{A} , alors il existe un feedback hybride sur \mathcal{O} avec $Q \subset \mathbb{Z}$ (muni de la relation d'ordre naturelle) qui rend \mathcal{A} asymptotiquement stable sur \mathcal{O} pour le système (1.9), robustement aux bruits de mesure, aux erreurs d'actionneur et aux perturbations extérieures.*

Ce résultat généralise la construction faite avec Alessandro Astolfi du contrôle hybride pour les systèmes chaînés avec deux commandes (voir [R2], et les simulations numériques dans [C6]).

Pour démontrer le théorème 1.7 nous construisons d'abord un feedback hybride stabilisant le système nominal (\mathcal{H}_{feed}) . Ensuite nous établissons un résultat de robustesse de la stabilité des systèmes hybrides. Ce dernier résultat de robustesse est intéressant en lui-même puisqu'il utilise uniquement les propriétés de la classe de systèmes hybrides considérés. C'est pourquoi nous le présentons dans le paragraphe 1.4 suivant.

Le feedback hybride construit dans [R18] crée une hystérésis entre différents feedbacks locaux. Un lien naturel entre cette construction et les fonctions de Lyapunov est donné dans [R26], où à partir d'une famille de fonctions de Lyapunov assignables (*Control Lyapunov Functions, CLF*) avec une propriété d'ordre, nous construisons un feedback hybride stabilisant asymptotiquement. Dans [R26], nous établissons aussi la réciproque : à partir du feedback hybride stabilisant, nous prouvons l'existence d'une famille ordonnée de CLF. Voir [R26] pour plus de détails.

1.4 Robustesse intrinsèque des systèmes hybrides

Nous allons maintenant énoncer un résultat de robustesse pour tout système hybride (1.8) qui est asymptotiquement stable et dont les données vérifient certaines propriétés de régularité. Ce résultat généralise ce qui est connu par ailleurs pour les systèmes classiques non-linéaires (voir [38] et [76]). Ce travail est prometteur. Il permet en effet de "systématiser" l'utilisation de commandes hybrides pour la stabilisation de systèmes non-linéaires, ce qui peut servir pour obtenir des résultats de performance (par exemple pour contrôler un système en temps minimal, comme dans le chapitre 2). Avant tout, définissons la notion de robustesse par rapport aux perturbations stationnaires.

Définition 1.8 *L'ensemble \mathcal{A} est asymptotiquement stable sur \mathcal{O} pour le système (\mathcal{H}) , robustement aux perturbations stationnaires, s'il existe un rayon de perturbations admissible ρ tel que, pour le système (\mathcal{H}^ρ) donné par*

$$\begin{cases} \dot{x} \in F_q^\rho(x), \dot{q} = 0 & x \in C_q^\rho, \\ q^+ \in G_q^\rho(x), x^+ = x & x \in D_q^\rho, \end{cases} \quad (1.14)$$

avec les définitions

$$\begin{aligned}
F_q^\rho(x) &:= \text{con } F_q((x + \rho(x)\mathbb{B}) \cap C_q) + \rho(x)\mathbb{B}, \\
G_q^\rho(x) &:= G_q((x + \rho(x)\mathbb{B}) \cap D_q), \\
C_q^\rho &:= \{x \in \mathcal{O} \mid (x + \rho(x)\mathbb{B}) \cap C_q \neq \emptyset\}, \\
D_q^\rho &:= \{x \in \mathcal{O} \mid (x + \rho(x)\mathbb{B}) \cap D_q \neq \emptyset\},
\end{aligned} \tag{1.15}$$

l'ensemble \mathcal{A} est asymptotiquement stable sur \mathcal{O} .

En ce qui concerne (\mathcal{H}) , nous supposons que les propriétés de régularité suivantes sont satisfaites :

(A0) $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$ est compact, $Q \subset \mathbb{Z}^{n_q}$;

et pour tout $q \in Q$,

(A_q1) C_q et D_q sont relativement fermés dans \mathcal{O} ;

(A_q2) $F_q : \mathcal{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est semi-continu extérieurement et localement borné, et $F_q(x)$ est convexe non-vide, pour tout $x \in C_q$;

(A_q3) $G_q : \mathcal{O} \rightrightarrows Q$ est semi-continu extérieurement et localement borné, et $G_q(x)$ est non-vide pour tout $x \in D_q$.

Rappelons que la fonction (à valeur ensembliste) $F_q : \mathcal{O} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est dite *semi-continue extérieurement* (outer semicontinuous, osc) si pour toute suite convergente $x_i \rightarrow x \in \mathcal{O}$ et $y_i \in F_q(x_i)$ avec $y_i \rightarrow y$, on a $y \in F_q(x)$. La fonction F_q est dite *localement bornée* si pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$, il existe un compact $K' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $F_q(x) \subset K'$ pour tout $x \in K$. Pour plus de détails et des formulations équivalentes voir [110, Chapitre 5].

Les hypothèses précédentes sur les données du système hybride (\mathcal{H}) sont celles suggérées dans [55] et étudiées plus particulièrement dans [56]. En particulier elles nous permettent de prouver l'existence de solutions (pour toute condition initiale dans $(C_q \cup D_q) \times Q$), et pour satisfaire la convergence graphique des solutions (voir [56] pour plus de détails).

Pour le résultat de robustesse qui nous intéresse ici, nous avons besoin des hypothèses supplémentaires suivantes :

(A₄) La famille $\{C_q\}_{q \in Q}$ est une famille localement finie recouvrant \mathcal{O} ;

(A₅) Les fonctions $G_q : \mathcal{O} \rightrightarrows Q$ sont localement bornées en x uniformément par rapport à q ;

(A₆) Pour tout $q \in Q$, $C_q \cup D_q = \mathcal{O}$.

Rappelons que la famille $\{C_q\}_{q \in Q}$ est une famille localement finie recouvrant \mathcal{O} si $\mathcal{O} = \bigcup_{q \in Q} C_q$ et si pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices q tels que C_q a une intersection non vide avec K . Dire que G_q est localement borné uniformément par rapport à q signifie que pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$ il existe un compact $K' \subset Q$ tel que $G_q(K) \subset K'$ pour tout $q \in Q$.

Remarque 1.9 Grâce à (A_q1) , (A_q2) , (A_q3) , pour tout q , et à $(A6)$, on déduit que pour toute condition initiale dans $\mathcal{O} \times Q$, il existe une solution (non triviale) de (\mathcal{H}) . Et donc avec [56, Proposition 2.1], nous pouvons dire que toute solution maximale (x, q) de (1.8) est soit complète, soit $|x(t, j)| \rightarrow \infty$ ou $x(t, j) \rightarrow \partial\mathcal{O}$ lorsque $t \rightarrow \sup_t \text{dom}(x, q)$ (et $j \rightarrow \sup_j \text{dom}(x, q)$).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 1.10 *Supposons que le système hybride (\mathcal{H}) satisfasse $(A0)$, $(A4)$, $(A5)$, $(A6)$, et (A_q1) , (A_q2) , (A_q3) pour tout q dans Q . Si \mathcal{A} est asymptotiquement stable sur \mathcal{O} pour (1.8) alors \mathcal{A} est robustement asymptotiquement stable.*

Ce dernier résultat peut être utilisé pour différents problèmes de contrôle, comme le calcul de retours de sortie hybrides (comme dans [C35]), ou pour des objectifs de performance comme la stabilisation en temps minimal. C'est justement cet objectif de performance que nous allons considérer dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Contrôle optimal et robuste

Présentons maintenant nos résultats en contrôle optimal de systèmes non-linéaires. La synthèse de commande optimale est un problème où les commandes sont naturellement discontinues même pour des systèmes linéaires (voir par exemple [24] pour des problèmes en contrôle optimal avec des contraintes sur l'état). Le problème de la synthèse de commande optimale est très important pour de nombreuses applications (citons [125]), et il faut tenir compte des contraintes sur le contrôle ou sur l'état comme dans [27]. Aussi leur sensibilité par rapport aux perturbations doit être prise en compte lors de la synthèse, pour pouvoir mesurer la dégradation de la performance en présence de bruits. Nous allons voir que le cadre des contrôles hybrides (ou mixtes, avec une dynamique discrète et continue) est naturel et permet de résoudre le problème de la synthèse d'une commande quasi-optimale contrainte et robuste aux perturbations.

Soient m et n deux entiers. Considérons le système de contrôle suivant sur \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t)), \quad (2.1)$$

où f_1, \dots, f_m sont des fonctions analytiques sur \mathbb{R}^n , et où le contrôle $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot))$ doit satisfaire la contrainte

$$\sum_{i=1}^m u_i(t)^2 \leq 1. \quad (2.2)$$

Notons que (2.1) est affine par rapport à la commande et sans dérive. Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Pour résoudre le problème de stabilisation de (2.1) vers \bar{x} avec la contrainte (2.2), nous allons considérer la classe des commandes hybrides décrite dans le chapitre 1 qui, comme nous l'avons vu, permet de considérer une classe de solutions plus large que celle avec les retours d'états classiques discontinus (comme dans [5, 36, 123]). Nous allons chercher à calculer une commande hybride optimale (c'est-à-dire en temps minimal avec la contrainte (2.2) qui soit robuste aux perturbations). L'étude des systèmes hybrides dans un contexte de commandes optimales est peu courante (citons [20, 53] dans un cadre différent).

L'idée de base de la synthèse de commandes hybrides optimales est de combiner un contrôle optimal, qui soit régulier sur une partie de l'espace d'état, à une autre commande, définie sur le complémentaire de l'ensemble de régularité de la commande optimale, afin d'exhiber un *contrôle quasi-optimal et robuste* en définissant une loi de commutation entre les différentes composantes de commande. Grosso modo, cette propriété de quasi-optimalité signifie que l'on peut approcher la synthèse optimale avec une précision aussi grande que l'on veut (cette précision est donnée par la quantité ε dans la définition 2.5 ci-dessous). Le contrôle hybride résoudra une propriété de temps quasi-minimal (parce que pas exactement égal à la synthèse optimale a priori discontinue, donc certainement sensible aux perturbations), mais robuste aux (petits) bruits de mesure, aux erreurs d'actionneur et aux perturbations extérieures.

Plus précisément dans une première partie nous considérons le problème du contrôle sous la contrainte (2.2) du système (2.1) vers le point \bar{x} , en temps minimal. Ce problème a une solution sous une condition de contrôlabilité en temps fini. Comme le système (2.1) est affine par rapport au contrôle et sans dérive, si le rang de l'algèbre de Lie pour les vecteurs (f_1, \dots, f_m) est plein, alors on a la contrôlabilité en temps fini (voir [34, 107] ou [43] pour une référence plus récente). Bien sûr il est difficile de calculer explicitement le feedback temps minimal. De plus la condition de Brockett [23] implique qu'en général cette commande optimale est discontinue. La régularité de la fonction temps minimal (et donc de la commande optimale) a été étudiée dans [126]. Pour les systèmes affines en la commande comme (2.1), il est prouvé dans [1, 2] que la fonction temps minimal est *sous-analytique*¹, pourvu qu'il n'existe pas de trajectoire singulière minimisante non triviale partant de \bar{x} . Cette hypothèse est vraie génériquement dès que $m \geq 3$ (voir [33]). En particulier cette fonction est analytique à l'extérieur d'une sous-variété stratifiée \mathcal{S} de \mathbb{R}^n , de codimension supérieure ou égale à 1 (voir [127]). Par conséquent, à l'extérieur de cette sous-variété, il est possible de calculer un contrôleur temps minimal analytique pour le système avec la contrainte (2.2). En boucle fermée avec cette commande optimale, les trajectoires ne coupent jamais \mathcal{S} .

Dans un voisinage de \mathcal{S} , nous pouvons prouver l'existence d'un ensemble de contrôleurs satisfaisant la contrainte (2.2) qui font sortir les solutions du système (2.1) hors de \mathcal{S} en temps petit.

Enfin, pour résoudre le problème de stabilisation robuste en temps minimal, nous créons une hystérésis, et nous définissons une loi de commutation, et donc une commande hybride, entre le retour d'état temps minimal et les autres contrôleurs définis au voisinage de \mathcal{S} . Le système hybride a la propriété intuitive suivante : si l'état est proche de la sous-variété \mathcal{S} , alors le feedback éloigne l'état de \mathcal{S} , en temps petit ; si l'état n'est pas proche de \mathcal{S} , alors le feedback fait converger les solutions vers \bar{x} en temps minimal. Par conséquent la stabilisation est quasi-optimale et robuste.

Nous voyons ainsi que nous résolvons dans [R12] la conjecture [17, Conj. 1, p. 101] dans le

¹On dit qu'un ensemble est sous-analytique si localement il peut être décrit comme une intersection d'ensembles de zéros et d'ensembles de niveau de fonctions analytiques. Voir [63, 66] pour une définition plus précise de cette notion.

contexte des feedbacks avec une dynamique mixte discrète/continue (voir aussi la remarque 2.7 ci-dessous). De plus nous estimons la dégradation de la performance optimale en présence de perturbations. Cette conjecture a ensuite été résolue dans la classe des feedback constants par morceaux (*patchy feedbacks*) dans [6] récemment.

Dans le paragraphe 2.1 nous étudions le cas particulier de l'intégrateur de Brockett et nous explicitons un contrôle hybride quasi-optimal et robuste par rapport aux petits bruits de mesures et erreurs de modélisation. Dans le paragraphe 2.2 nous généralisons cette approche à tout système linéaire par rapport à la commande. Nous donnons quelques éléments de la démonstration de ce résultat général dans le paragraphe 2.3. Le calcul numérique de la fonction temps-minimal est étudié dans le paragraphe 2.4.

2.1 Cas particulier de l'intégrateur de Brockett

L'étude de la stabilisation en temps optimal de l'intégrateur de Brockett (1.5) par un contrôle hybride a fait l'objet de la publication [R7] co-écrite avec Emmanuel Trélat, université d'Orléans.

Signalons que pour ce cas particulier il existe d'autres approches possibles pour la stabilisation sous-optimale comme [3, 105].

Dans ce cas il n'existe pas de trajectoire singulière non-triviale, et la variété \mathcal{S} est exactement l'axe $(0x_3)$. Il faut alors définir un contrôle qui permet de faire sortir toutes les trajectoires hors d'un voisinage de l'axe $(0, x_3)$ en temps fini (c'est le contrôle que nous définirons avec (2.8) ci-dessous).

La fonction temps minimal T pour joindre une condition initiale x à 0 avec un contrôle satisfaisant la contrainte (2.2) peut être calculée explicitement comme indiqué dans le résultat suivant (voir [13]).

Proposition 2.1 *La fonction temps minimal $T(x)$ pour atteindre 0 à partir d'une condition initiale $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ pour le système (1.5) avec la contrainte (2.2) est égale à*

$$T(x_1, x_2, x_3) = \frac{\theta}{\sqrt{\theta + \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2|x_3|}, \quad (2.3)$$

où $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3)$ est l'unique solution dans $[0, \pi)$ de

$$\frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} (x_1^2 + x_2^2) = 2|x_3|. \quad (2.4)$$

De plus, la fonction T est continue sur \mathbb{R}^3 , et est analytique hors de l'axe $(0, x_3)$.

Introduisons la fonction $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, définie par

$$g(\theta) = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (2.5)$$

pour $\theta \in [0, \pi)$, et par $g(0) = 0$. C'est une bijection strictement croissante de $(0, \pi)$ sur $(0, \infty)$.

Remarque 2.2 Le long de l'axe $(0, x_3)$, nous avons

$$T(0, 0, x_3) = \sqrt{2\pi|x_3|}.$$

L'ensemble des points où la fonction T n'est pas différentiable est l'axe $(0, x_3)$.

Pour tout $x_3 \neq 0$, il existe une infinité de trajectoires optimales qui permettent de rejoindre l'origine à partir de $(0, 0, x_3)$. Ces trajectoires sont données par (voir essentiellement [13])

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sqrt{\frac{|x_3|}{2\pi}}(\sin(2\pi t + \varphi) - \sin \varphi), \\ x_2(t) &= \sqrt{\frac{|x_3|}{2\pi}}(\cos(2\pi t + \varphi) - \cos \varphi), \\ x_3(t) &= -x_3 t - \frac{|x_3|}{2\pi} \sin(2\pi t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour $t \in [0, 1]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Les ensembles de niveau de la fonction T , c'est-à-dire l'ensemble $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3) = r\}$, pour un $r > 0$, ont l'allure de l'ensemble décrit sur la gauche de la figure 2.1. C'est un ensemble de révolution autour de l'axe $(0, x_3)$.

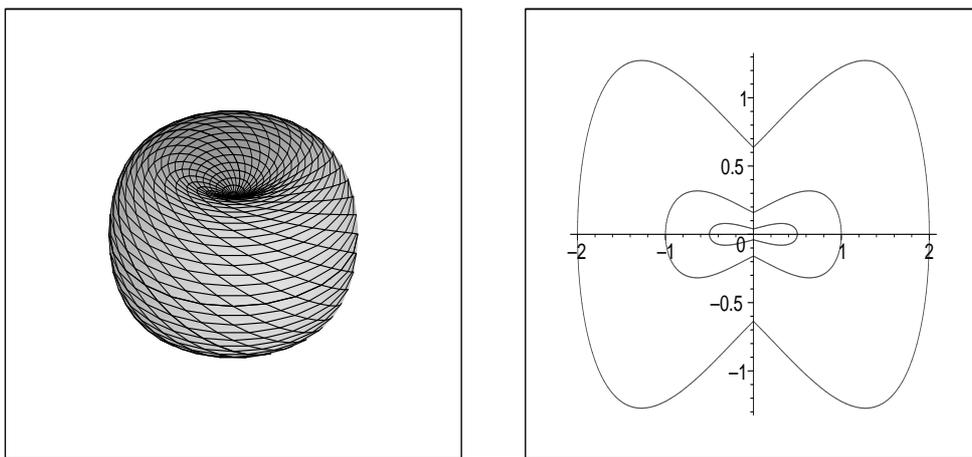


FIG. 2.1 – Un ensemble de niveau $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3) = r\}$ à gauche, et à droite une intersection d'un ensemble de niveau avec un plan vertical.

Les intersections de ces ensembles de niveau avec les plans contenant l'axe $(0, x_3)$ sont dessinées sur la droite de la figure 2.1.

En utilisant le principe du maximum et la théorie d'Hamilton-Jacobi (voir par exemple [104]) on peut vérifier que le contrôle optimal pour ramener un point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ à

l'origine en temps minimal est donné par la formule suivante (en notant $f_1(x) = (1, 0, -x_2)'$ et $f_2(x) = (0, 1, x_1)$)

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\langle \nabla T(x), f_1(x) \rangle = -\frac{\partial T}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3}, \\ u_2(x) &= -\langle \nabla T(x), f_2(x) \rangle = -\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour tout x tel que T est C^1 (et donc à l'extérieur de l'axe $(0, x_3)$). Plus précisément nous pouvons calculer le contrôle optimal dans le cas particulier de l'intégrateur de Brockett. En effet nous avons, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$,

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \cos \theta \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = -\sin \theta \frac{\text{sign}(x_3)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

où $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3)$ est la solution unique dans $[0, \pi)$ de (2.4).

Par conséquent le contrôle optimal u_{opt} pour rejoindre tout point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ à l'origine en temps minimal est donné par

$$\begin{aligned} u_{opt1}(x) &= -\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cos \left(g^{-1} \left(\frac{2|x_3|}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) + \frac{\text{sign}(x_3) x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \sin \left(g^{-1} \left(\frac{2|x_3|}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right), \\ u_{opt2}(x) &= -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cos \left(g^{-1} \left(\frac{2|x_3|}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) - \frac{\text{sign}(x_3) x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \sin \left(g^{-1} \left(\frac{2|x_3|}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right), \end{aligned}$$

où la fonction g est définie par (2.5).

À l'extérieur de l'axe $(0, x_3)$, le contrôle optimal est régulier et donc, à l'extérieur d'un voisinage de l'axe $(0, x_3)$, nous avons une robustesse naturelle de la stabilité. Pour préciser ce voisinage, nous introduisons, pour tout $M > 0$ et $r > 0$, l'ensemble

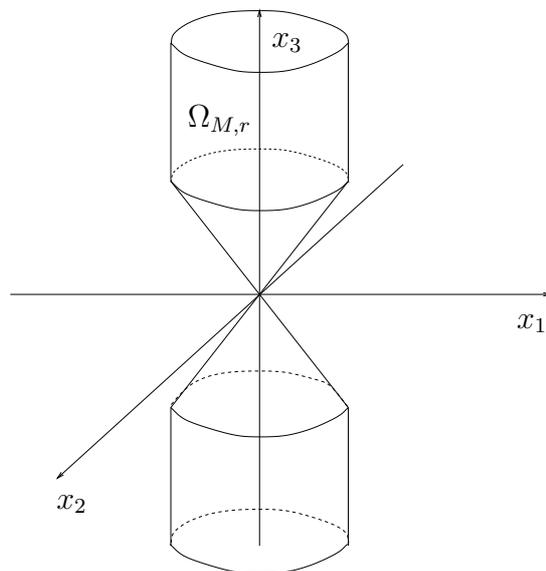
$$\Omega_{M,r} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \min(r, M|x_3|)\},$$

et nous notons le fermé de son complémentaire dans \mathbb{R}^3 par $\Gamma_{M,r}$:

$$\Gamma_{M,r} = \text{clos}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{M,r}).$$

Au voisinage de l'origine, $\Omega_{M,r}$ est un cône, et plus loin, c'est un cylindre autour de l'axe $(0, x_3)$ (voir la figure 2.2).

Une propriété intéressante de $\Gamma_{M,r}$ est la suivante (voir le lemme 2 de [R7] pour plus de précisions) : pour tous $M_0 > 0$ et $r_0 > 0$ suffisamment petits, l'ensemble $\Gamma_{M,r}$ est positivement invariant pour le contrôle optimal u_{opt} , et en utilisant la régularité de u_{opt} sur cet ensemble, nous avons une robustesse naturelle par rapport aux petites erreurs de mesure, et aux petites erreurs de modélisation. C'est une continuité des solutions par rapport aux perturbations. Plus précisément le temps où les solutions perturbées arrivent à l'origine dépend de la taille des perturbations, mais si les perturbations sont petites alors le temps pour arriver à 0 est quasi-optimal (voir le lemme 3 de [R7] pour plus de précisions).


 FIG. 2.2 – Allure de $\Omega_{M,r}$.

Maintenant nous introduisons un autre contrôle qui sera régulier sur $\Omega_{M,r}$. Ce contrôle sera noté u_g (comme *commande globale*) et sera tel que toute solution sortira de $\Omega_{M,r}$ en temps fini et petit si $\Omega_{M,r}$ a une taille suffisamment petite (voir le lemme 4 de [R7]). Ce contrôle est défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$u_g(x) = (u_{g1}(x), u_{g2}(x)) = (1, 0) . \quad (2.8)$$

Une stratégie de commutation est proposée pour définir un contrôle quasi-optimal et insensible aux petites perturbations. Pour la définir, numérotions les contrôles ainsi : $u_a = u_g$, et $u_b = u_{opt}$ avec l'ordre lexicographique $a < b$. Introduisons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} C_a &= \Omega_{M,r} , \quad C_b = \Gamma_{M',r'} , \\ D_a &= \Gamma_{M',r'} , \quad D_b = \Omega_{M,r} , \end{aligned}$$

où $M > M'$ et $r > r'$ sont des réels suffisamment petits. Nous pouvons comprendre l'idée intuitive de l'introduction de ces ensembles de la façon suivante : le lieu où le contrôle optimal est intéressant est C_b c'est-à-dire $\Gamma_{M',r'}$, tandis que le contrôle u_a est pertinent sur $\Omega_{M,r}$ (c'est le plus gros voisinage de l'axe $(0, x_3)$ entre $\Omega_{M,r}$ et $\Omega_{M,r}$). Les ensembles D_a et D_b sont les ensembles où la variable discrète $q \in \{a, b\}$ doit effectuer un saut de a à b (respectivement de b à a). Maintenant décrivons le contrôle hybride proprement dit (en suivant les notations de la définition 1.5) :

$$\begin{aligned} Q &= \{a, b\} ; \{C_a, C_b\} ; \{D_a, D_b\} ; \{u_a, u_b\} ; \\ g_a(x) &= b , \quad g_b(x) = a . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous pouvons démontrer que les solutions de l'intégrateur de Brockett (1.5) en boucle fermée avec ce contrôle hybride convergent vers l'origine en temps "presque" optimal. De plus

grâce aux propriétés de ce feedback hybride, nous avons une robustesse par rapport aux petites perturbations. Plus que de décrire exactement cette notion de convergence quasi-optimale et robuste dans le cadre de l'intégrateur de Brockett uniquement, nous préférons le faire pour des systèmes non-linéaires plus généraux.

2.2 Généralisation aux systèmes linéaires en la commande

Revenons au cadre du système (2.1) avec la contrainte (2.2). L'approche proposée dans le paragraphe précédent peut être généralisée aux systèmes linéaires en la commande. Bien sûr certains calculs explicites ne sont plus valables, et nous n'avons alors qu'un résultat d'existence. Nous supposons que la condition de rang de l'algèbre de Lie est satisfaite, c'est-à-dire que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs f_1, \dots, f_m est égale à \mathbb{R}^n , pour tout x de \mathbb{R}^n . On sait (voir [34, 107] ou [43] pour une référence plus récente) que le système (2.1) est alors contrôlable en tout point et en temps fini avec la contrainte (2.2).

Fixons $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, et notons $T_{\bar{x}}(x)$ le temps minimal pour relier un point x de \mathbb{R}^n à \bar{x} le long du système (2.1) avec la contrainte (2.2).

Faisons quelques rappels de théorie de contrôle optimal. Voir [15, 71, 137] par exemple pour des introductions à ces notions. Pour tout $T > 0$, soit \mathcal{U}_T l'ensemble ouvert des $u(\cdot)$ dans $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que la solution de (2.1), partant de \bar{x} avec le contrôle $u(\cdot) \in \mathcal{U}_T$, est bien définie sur $[0, T]$. La fonction, dite application entrée/sortie

$$\begin{aligned} E_{\bar{x}, T} : \mathcal{U}_T &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u(\cdot) &\longmapsto x(T), \end{aligned}$$

qui à un contrôle $u(\cdot)$ associe le point final $x(T)$ de la solution $x(\cdot)$ de (2.1) partant de \bar{x} , est appelée *application entrée/sortie* pour le point \bar{x} , en temps T . C'est une fonction lisse.

Définition 2.3 *Une solution $x(\cdot)$ de (2.1), avec la condition initiale $x(0) = \bar{x}$, est dite singulière sur $[0, T]$ si le contrôle associé $u(\cdot)$ est un point singulier de l'application entrée/sortie $E_{\bar{x}, T}$ (c'est-à-dire si la dérivée de Fréchet de $E_{\bar{x}, T}$ en $u(\cdot)$ n'est pas surjective). Le contrôle $u(\cdot)$ est alors dit singulier.*

Nous allons maintenant considérer le problème de la stabilisation du système (2.1) par un contrôle hybride en temps minimal avec une robustesse par rapport aux bruits de mesure et aux perturbations extérieures. Rappelons que nous noterons $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$, le système hybride obtenu en rebouclant le système (2.1) avec un contrôle hybride $Q, \{C_q, D_q, k_q, g_q\}_{q \in Q}$ comme introduit dans la définition 1.5, en présence de bruits de mesure ξ et de perturbations extérieures ζ . Nous noterons également $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$.

Rappelons une fonction $\delta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{K}_∞ si elle est continue, strictement croissante, et satisfaisant $\delta(0) = 0$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} \delta(R) = +\infty$. Par extension à la notation $|\cdot|_{\mathcal{A}}$, nous utiliserons la notation $|x|_{\bar{x}} = |\bar{x} - x|$.

Définissons maintenant la notion de convergence en temps fini vers \bar{x} (en adaptant la définition 1.4).

Définition 2.4 *Nous disons que nous avons une convergence uniforme en temps fini pour le système $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$ vers \bar{x} s'il existe un rayon de perturbations admissible² $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ et une fonction $\delta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ de classe \mathcal{K}_∞ tels que pour tout $R > 0$, il existe $\tau = \tau(R) > 0$, pour tout bruit de mesure ξ et pour toute perturbation extérieure ζ satisfaisant la régularité (1.11) et les inégalités (1.13), pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$, $|x_0|_{\bar{x}} \leq R$, et pour tout $q_0 \in Q$, les solutions (x, q) de $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$ partant de (x_0, q_0) sont maximalement définies sur $[0, T)$ avec $T \leq \tau$, et satisfont*

$$|x(t, j)|_{\bar{x}} \leq \delta(R), \quad \forall t \geq 0, (t, j) \in S,$$

et

$$x(t, j) \rightarrow \bar{x}, \quad \text{lorsque } t \rightarrow T, (t, j) \in S.$$

Nous allons maintenant introduire la définition principale de ce chapitre. Il s'agit de la convergence en temps quasi-optimal et de la robustesse.

Définition 2.5 *Le point \bar{x} est un équilibre robuste semi-globalement stable en temps quasi-minimal pour le système $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle hybride $Q, \{C_q, D_q, k_q, g_q\}_{q \in Q}$ satisfaisant la contrainte*

$$|k_q(x)| \leq 1, \quad \forall q \in Q, \forall x \in C_q,$$

tel que

- on a une convergence uniforme en temps fini;
- il existe un rayon de perturbations admissible $\rho_{\varepsilon, K} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x_0, q_0) \in K \times Q$, pour tout bruit de mesure ξ et pour toute perturbation extérieure ζ satisfaisant la régularité (1.11) et les inégalités (1.13) avec $\rho = \rho_{\varepsilon, K}$, la solution (maximale) partant de (x_0, q_0) atteint \bar{x} en temps inférieur à $T_{\bar{x}}(x_0) + \varepsilon$, où $T_{\bar{x}}(x_0)$ désigne le temps minimal pour rejoindre \bar{x} depuis x_0 pour le système (2.1) avec la contrainte $|u| \leq 1$.

Le résultat principal de [R12] est le suivant :

Théorème 2.6 *Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Supposons qu'il n'existe pas de solution singulière minimisante non-triviale du système (2.1), avec la contrainte (2.2) partant de \bar{x} . Alors il existe une commande hybride telle que \bar{x} soit un équilibre robuste semi-globalement stable en temps quasi-minimal pour le système $(\mathcal{H}_{feed}^{\xi, \zeta})$.*

²Nous avons défini cette notion à la page 16. Dans le contexte de ce chapitre, il s'agit d'une fonction continue $\rho : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\rho(x) \neq 0$, pour tout $x \neq \bar{x}$.

Remarque 2.7 – Le théorème 2.6 résout la conjecture [17, Conj. 1, p. 101] dans la classe des contrôles avec une dynamique mixte discrète/continue, avec en plus une estimation de la dégradation de la performance optimale en présence de perturbations. Rappelons que cette conjecture propose, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout compact K , l’existence d’un retour d’état (de type *patchy*, c’est-à-dire essentiellement constant par morceaux) tel que toute condition initiale dans K converge vers 0 en temps minimal, à ε près.

- Notons également que le problème de stabilisation *robuste et globale* en temps quasi-minimal (c’est-à-dire en prenant $K = \mathbb{R}^n$ dans la définition 2.5) n’a pas de solution car les bruits de mesure peuvent s’accumuler et peuvent ralentir les solutions approchant \bar{x} (voir aussi la discussion à ce propos après [17, Conj. 1, p. 101]).

2.3 Eléments de démonstration du théorème 2.6

Pour démontrer le théorème 2.6, remarquons d’abord qu’avec l’hypothèse d’absence de solutions singulières minimisantes non-triviales, la fonction temps minimal $T_{\bar{x}}$ pour le système (2.1), sous la contrainte (2.2), est sous-analytique, et donc analytique à l’extérieur d’une variété stratifiée \mathcal{S} de \mathbb{R}^n , de co-dimension plus grande que 1. Par conséquent, le contrôle optimal est continu (et même analytique) sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{S}$ (voir la figure 2.3).

Nous introduisons alors un voisinage Ω de \mathcal{S} , et une famille de contrôleurs définis sur une partition de Ω telle que les systèmes en boucle fermée par ces contrôleurs sortent de Ω en temps petit (si la taille de Ω est petite). Le comportement précis de ces solutions est donné par le lemme 2.13 de [R12].

Maintenant nous pouvons vérifier (voir le lemme 2.14 de [R12]) que les solutions du système en boucle fermée avec le contrôle optimal partant de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ arrive en temps optimal vers l’équilibre.

Enfin nous définissons un contrôleur hybride qui réalise le lien entre le contrôle optimal et les autres retours d’états. Pour cela nous définissons un autre voisinage Ω' de \mathcal{S} inclus dans Ω qui nous sert à définir une hystérésis entre le contrôle optimal et les autres commandes. Notre stratégie est la suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage Ω de l’ensemble des singularités, et il existe une famille de contrôleurs qui font sortir les solutions hors du voisinage en temps plus petit que ε . A l’extérieur de Ω' , le contrôle optimal est continu et donne des solutions qui ne croisent jamais \mathcal{S} et qui rejoignent \bar{x} en temps minimal. Avec ce feedback hybride, le temps nécessaire pour atteindre \bar{x} , à partir de tout point x_0 de \mathbb{R}^n , est plus petit que $T_{\bar{x}}(x_0) + \varepsilon$.

Remarque 2.8 S’il existe des solutions singulières minimisantes non-triviales alors la fonction T peut ne pas être sous-analytique (voir [16]) et nous ne pouvons a priori pas démontrer que l’ensemble \mathcal{S} de singularités est stratifié, qui est un point-clé de la construction de notre contrôle hybride. En revanche nous avons démontré dans [R11] que pour le cas de Martinet, qui est un système en dimension 3 où des solutions singulières minimisantes non-triviales existent,

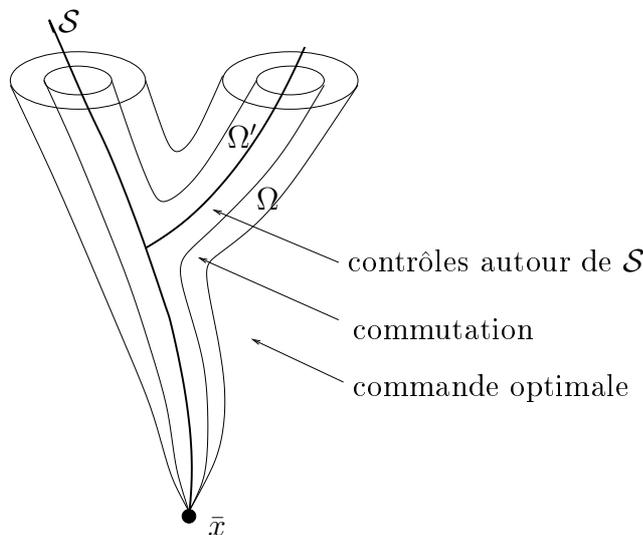


FIG. 2.3 – Commutation entre les contrôles, définis autour de \mathcal{S} , et le contrôle optimal.

nous pouvons utiliser la même démarche pour calculer un contrôle hybride stabilisant. En particulier nous pouvons démontrer que, dans ce cas, l'ensemble \mathcal{S} des singularités est stratifié.

2.4 Calcul numérique de la commande optimale

Le problème du calcul numérique de la commande optimale est un problème difficile. Citons [24] pour des systèmes linéaires avec des contraintes sur l'état. Voir également [124] pour des méthodes de tir ou [119]. Pour une comparaison entre les différentes méthodes nous pouvons consulter [137]. Nous n'avons pas abordé ce problème dans sa généralité, et le résultat principal du chapitre précédent est un résultat d'existence, et ne décrit pas comment calculer effectivement le contrôle hybride considéré, sauf si nous pouvons décrire précisément l'ensemble \mathcal{S} des singularités. Signalons tout de même les deux points suivants.

Pour l'exemple de l'intégrateur de Brockett, nous avons réussi à appliquer la théorie d'Hamilton-Jacobi pour expliciter la commande hybride, robuste et quasi-optimale. Nous pouvons faire des calculs analogues pour d'autres problèmes de contrôle optimal et pour d'autres systèmes (voir [125, 137] par exemple).

Mentionnons également [R19], co-écrit avec Jean-Bernard Lasserre, Didier Henrion, LAAS-CNRS et Emmanuel Trélat, université d'Orléans, où nous calculons numériquement le temps minimal pour atteindre l'équilibre. Plus précisément nous écrivons une suite d'inégalités linéaires matricielles (*Linear Matrix Inequalities, LMI*) dont la solution donne asymptotiquement le temps optimal. Comme nous l'avons vu la régularité de cette fonction est très importante pour le problème de synthèse optimale et son calcul peut permettre de calculer un contrôle optimal et un contrôle hybride stabilisant robustement quasi-optimale.

Chapitre 3

Performance optimale de systèmes soumis à des non-linéarités de secteur

Nous allons maintenant envisager une classe de systèmes non-linéaires particulière, plus précisément les systèmes linéaires soumis à l'action de non-linéarités de type secteur, comme les saturations et les backlash. Rappelons que les saturations sont présentes lorsque un actionneur (ou un capteur) est limité en amplitude ou en vitesse. Les non-linéarités de type backlash sont aussi présentes dans des systèmes physiques, plus particulièrement lorsqu'il y a des jeux mécaniques.

Dans ce chapitre, nous étudions l'estimation optimale du bassin d'attraction de systèmes soumis à de telles non-linéarités de secteur. Plus généralement, avec une approche similaire, nous pouvons étudier la performance optimale en terme de rejet de perturbations. L'accent sera mis sur les méthodes constructives et nous décrirons des conditions numériques pour résoudre les problèmes étudiés. Plus précisément les conditions seront écrites en terme d'inégalités linéaires matricielles (*Linear Matrix Inequalities, LMI*) qui peuvent être couplées à des méthodes d'optimisation afin de calculer la solution optimale aux problèmes envisagés.

Dans le paragraphe 3.1 nous étudierons plus particulièrement les systèmes non-linéaires comportant des saturations emboîtées. Dans le paragraphe 3.2 nous analyserons la complexité numérique de la solution proposée et nous la comparerons avec un autre résultat de la littérature. Enfin dans le paragraphe 3.3, nous donnerons des références étudiant d'autres types de non-linéarités.

3.1 Cas des saturations emboîtées

Dans ce paragraphe nous allons nous focaliser sur une certaine classe de systèmes non-linéaires, plus précisément les systèmes non-linéaires avec des saturations emboîtées du type :

$$\dot{x} = A_p x + B_p \text{sat}_p (A_{p-1} x + B_{p-1} \text{sat}_{p-1} (A_{p-2} x + \dots (A_1 x + B_1 \text{sat}_1 (A_0 x)) \dots)) \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système. Les matrices A_0 , A_j , et B_j , pour $j \in \{1, \dots, p\}$, sont de dimension appropriée (dépendant éventuellement de l'indice j). De plus sat_j est une fonction saturation composante par composante $\mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}^{m_j}$ définie par

$$(\text{sat}_j(v))_{(i)} = \text{sat}_j(v_{(i)}) = \text{sign}(v_{(i)}) \min(u_{j(i)}, |v_{(i)}|) , \quad \forall i = 1, \dots, m_j$$

où $u_{j(i)}$ désigne la borne de la j -ième saturation.

L'intérêt de ce type de systèmes est multiple. Le premier est que ce type de systèmes est naturel lorsque l'on veut stabiliser des systèmes en cascade (voir [117] ou [131]).

Une deuxième motivation pour étudier ce type de systèmes est qu'il permet de modéliser des systèmes linéaires contrôlés par des commandes saturées en amplitude, en vitesse, ou en accélération (ou en dérivée supérieure) [57]. Ainsi une question naturelle est l'étude de l'effet des non-linéarités sur la performance du système en boucle fermée. Dans ce contexte, il est important de pouvoir quantifier la dégradation de la performance en présence de ces non-linéarités. Négliger ces saturations peut entraîner une dégradation très importante de la performance, voire même une instabilité (voir [28]).

Nous allons donner des conditions de type LMI pour décrire la performance optimale de tels systèmes. Plus précisément nous allons estimer le bassin d'attraction pour la stabilité locale et donner des conditions suffisantes pour que le système soit globalement asymptotiquement stable. Notons qu'avec la même méthode nous pouvons étudier le rejet optimal de perturbations additives.

Décrivons tout d'abord le problème étudié dans [R18]. Pour cela définissons les non-linéarités suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \text{sat}_1(A_0x) - A_0x , \\ \phi_2(x) &= \text{sat}_2((A_1 + B_1A_0)x + B_1\phi_1(x)) - [(A_1 + B_1A_0)x + B_1\phi_1(x)] , \\ \phi_3(x) &= \text{sat}_3((A_2 + B_2(A_1 + B_1A_0))x + B_2\phi_2(x) + B_2B_1\phi_1(x)) \\ &\quad - [(A_2 + B_2(A_1 + B_1A_0))x + B_2\phi_2(x) + B_2B_1\phi_1(x)] , \\ &\quad \vdots \\ \phi_p(x) &= \text{sat}_p((A_{p-1} + B_{p-1}(A_{p-2} + B_{p-2}(A_{p-3} + \dots + B_2(A_1 + B_1A_0))))x \\ &\quad + B_{p-1}\phi_{p-1}(x) + B_{p-1}B_{p-2}\phi_{p-2}(x) + \dots + B_{p-1}B_{p-2} \dots B_1\phi_1(x)) \\ &\quad - [(A_{p-1} + B_{p-1}(A_{p-2} + B_{p-2}(A_{p-3} + \dots + B_2(A_1 + B_1A_0))))x \\ &\quad + B_{p-1}\phi_{p-1}(x) + B_{p-1}B_{p-2}\phi_{p-2}(x) + \dots + B_{p-1}B_{p-2} \dots B_1\phi_1(x)] . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Définissons aussi les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &= A_1 + B_1A_0 , \\ \mathbb{A}_2 &= A_2 + B_2(A_1 + B_1A_0) , \\ &\quad \vdots \\ \mathbb{A}_p &= A_p + B_p(A_{p-1} + B_{p-1}(A_{p-2} + \dots + B_2(A_1 + B_1A_0))) . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le système (3.1) peut ainsi être réécrit sous la forme

$$\dot{x} = \mathbb{A}_p x + B_p \phi_p(x) + B_p B_{p-1} \phi_{p-1}(x) + \dots + B_p B_{p-1} \dots B_1 \phi_1(x) . \tag{3.4}$$

Nous allons considérer les deux problèmes suivants :

Problème 3.1 Supposons la matrice \mathbb{A}_p Hurwitz. Trouver une estimation optimale de la région de stabilité pour le système (3.4).

Problème 3.2 Calculer les gains A_j , $j = 0, \dots, p - 1$ tels que \mathbb{A}_p soit Hurwitz et tel que la région de stabilité pour le système (3.4) soit maximale.

Ces deux problèmes sont complémentaires. Le premier problème est un problème d'analyse, tandis que le second est un résultat de synthèse. Nous avons formulé ces problèmes optimaux en terme de taille de la région de stabilité. Ces problèmes sont résolus dans [R10] écrit en collaboration avec Sophie Tarbouriech, LAAS-CNRS et Joaõ Gomes da Silva Jr, Université de Porto-Alegre. Bien sûr, on peut aussi envisager le problème optimal comme un problème de performance optimale (dans un contexte plus proche du chapitre 2 où nous cherchions à stabiliser le système en temps minimal). Par exemple nous avons étudiés dans [C20] le rejet optimal des perturbations, plus précisément le calcul du gain L^2 entre une entrée et l'état du système (3.1).

Décrivons maintenant le résultat principal de [R10]. Pour cela nous devons rappeler un lemme technique qui généralise les conditions de secteur (voir [72] par exemple) et le cas d'une seule saturation étudié dans [58].

Soit la non-linéarité $\varphi(v) = \text{sat}_{v_0}(v) - v$, avec $\varphi(v) \in \mathbb{R}^m$ et $v_{0(i)}$, $i = 1, \dots, m$ désigne la borne supérieure de la saturation $\text{sat}_{v_0}(v)$, et définissons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ suivant :

$$S(v_0) = \{(v, w), v \in \mathbb{R}^m; w \in \mathbb{R}^m; -v_0 \preceq v - w \preceq v_0\} . \quad (3.5)$$

Lemme 3.3 Si $(v, w) \in S(v_0)$ alors la non-linéarité $\varphi(v)$ satisfait l'inégalité

$$\varphi(v)'T(\varphi(v) + w) \leq 0 \quad (3.6)$$

pour toute matrice diagonale définie positive $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Nous avons utilisé ce lemme 3.3 pour résoudre le problème d'estimation optimale comme défini par le problème 3.1. Le bassin d'attraction de (3.1) sera estimé par l'ellipsoïde $\{x \in \mathbb{R}^n; x'W^{-1}x \leq 1\}$, où W est une matrice symétrique définie positive à calculer. Pour maximiser la taille du bassin d'attraction, nous avons choisi le critère suivant : calculer un réel positif μ solution du problème optimal

$$\min \mu \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{pmatrix} \mu & v_r' \\ v_r & W \end{pmatrix} \geq 0, \quad r = 1, \dots, n_r, \quad (3.7)$$

où v_r sont des vecteurs fixés de \mathbb{R}^n . Bien sûr d'autres critères sont possibles (par exemple la maximisation du demi petit-axe de l'ellipsoïde décrit par W).¹

Avec ce critère d'optimisation, une application récursive du lemme 3.3 aux non-linéarités (3.2) permet de résoudre le problème d'estimation optimale comme défini par le problème 3.1.

Théorème 3.4 *S'il existe une matrice symétrique définie positive W , des matrices Z_{jj} , $j = 1, \dots, p$, Y_{jl} , $j = 2, \dots, p$, $l = 1, \dots, p-1$, $j \neq l$, $j > l$, des matrices diagonales définies positives S_j , $j = 1, \dots, p$, de dimension appropriée et un réel μ positif solutions du problème optimal suivant² :*

$$\min \mu$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} WA'_p + A_p W & B_p B_{p-1} \dots B_1 S_1 - Z'_{11} & B_p B_{p-1} \dots B_2 S_2 - Z'_{22} & \dots & B_p S_p - Z'_{pp} \\ \star & -2S_1 & -Y'_{21} & \dots & -Y'_{p1} \\ \star & \star & -2S_2 & \dots & -Y'_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & -2S_p \end{pmatrix} < 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} W & WA'_{0(i)} - Z'_{11(i)} \\ \star & u_{1(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad (3.10)$$

⋮

$$\begin{pmatrix} W & Z'_{11} & Z'_{22} & \dots & Z'_{j-1, j-1} & WA'_{j-1(i)} - Z'_{jj(i)} \\ \star & 2S_1 & Y'_{21} & \dots & Y'_{j-1, 1} & S_1 B'_1 \dots B'_{j-2} B'_{j-1(i)} - Y'_{j1(i)} \\ \star & \star & 2S_2 & \dots & Y'_{j-1, 2} & S_2 B'_2 \dots B'_{j-2} B'_{j-1(i)} - Y'_{j2(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \star & 2S_{j-1} & S_{j-1} B'_{j-1(i)} - Y'_{jj-1(i)} \\ \star & \star & \star & \star & \star & u_{j(i)}^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m_j, \quad j = 2, \dots, p, \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} \mu & v'_r \\ v_r & W \end{pmatrix} \geq 0, \quad r = 1, \dots, n_r, \quad (3.12)$$

alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n; x'W^{-1}x \leq 1\}$ est une estimation optimale de la région de stabilité pour le système (3.1).

¹Notons qu'en posant $\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, une solution μ du problème (3.7) donne une solution du problème d'optimisation suivant : calculer un réel positif β solution de

$$\max \beta \quad \text{sous la contrainte} \quad \beta \Xi_0 \subset \mathcal{E}(W^{-1}, 1), \quad (3.8)$$

où $\Xi_0 = \text{con}\{v_r, r = 1, \dots, n_r\}$ est un polyèdre de référence. (Rappelons la notation de la page 12 : $\text{con}(A)$ désigne l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble A .)

C'est une interprétation physique du critère d'optimisation (3.7).

²Le symbole \star désigne les termes symétriques.

Le théorème 3.4 est un résultat d'estimation optimale du bassin d'attraction pour le système (3.1). Si la matrice \mathbb{A}_p est Hurwitz, on peut aussi établir une condition suffisante pour la stabilité globale. Pour cela il suffit de spécifier les gains Z_{jj} pour $j = 1, \dots, p$ dans (3.9), (3.10), ..., (3.12) pour que les secteurs (3.5) soient globaux. Voir [C13] pour plus de détails.

Nous pouvons également résoudre le problème de synthèse de gains optimaux tel que décrit dans le problème 3.2 en utilisant des techniques analogues. Voir [R10] pour plus de détails.

3.2 Analyse de la complexité numérique des conditions

Il est important de souligner que les conditions du théorème 3.4 sont écrites sous forme LMI par rapport aux variables de décision. Cela résulte de la forme de notre système non-linéaire (3.4) et de l'utilisation du lemme 3.3. L'utilisation de modèles polytopiques comme dans [12] donne aussi des conditions LMI. Comparons le nombre de variables de décision et le nombre de lignes, dans le théorème 3.4 et dans les conditions de [12, Th. 2.1].

La complexité des schémas numériques augmente lorsque le nombre de variables de décision et le nombre de lignes augmentent. Voir par exemple la complexité numérique des méthodes par points intérieurs [52]. Aussi la complexité est différente pour une méthode utilisant le problème primal (voir par exemple le théorème 5.1 dans [48]) ou utilisant le problème dual (comme le théorème 5.2 de [48]). A titre d'exemple nous pouvons comparer la complexité proposée par le théorème 3.4 avec celle proposée par [12, Th. 2.1] en utilisant l'algorithme proposé par [52] de Matlab. La complexité est proportionnelle à $\mathcal{D}^3\mathcal{L}$ (où \mathcal{D} est le nombre de variables de décision et \mathcal{L} est le nombre de lignes). C'est ce que nous avons dans [R10] où nous avons compté le nombre de lignes et le nombre de variables de décision en utilisant les deux approches et où nous vérifions que, pour les problèmes de relative grande dimension, il est préférable d'utiliser le théorème 3.4 plutôt que [12, Th. 2.1]. Voir la figure 3.1 pour la variation de la quantité $\mathcal{D}^3\mathcal{L}$ en fonction de n pour deux valeurs de m .

3.3 Autres types de non-linéarités

D'autres types de systèmes non-linéaires peuvent être étudiés en utilisant des généralisations de conditions de secteur. Nous pensons aux systèmes soumis à un backlash qui est une non-linéarité avec mémoire dans la mesure où nous devons connaître le passé du signal d'entrée pour calculer la sortie. C'est une non-linéarité qui est présente dans de nombreux systèmes mécaniques voir [26, 94, 128, 89].

Rappelons brièvement la définition d'un backlash. Nous notons l'ensemble des fonctions continues et continûment dérivables par morceaux $w : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ par $C_{pw}^1([0, +\infty); \mathbb{R}^m)$. L'opérateur Φ est un backlash s'il est défini par : pour tout $w \in C_{pw}^1([0, +\infty); \mathbb{R}^m)$, pour tout

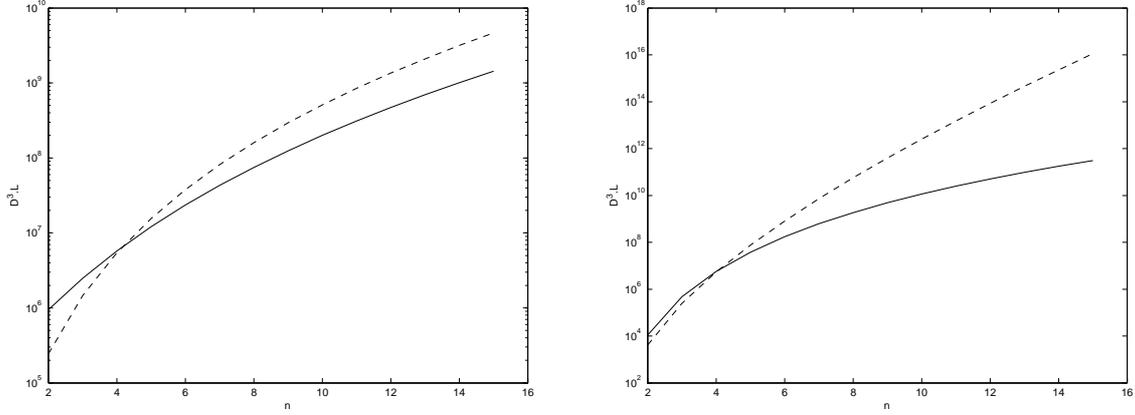


FIG. 3.1 – $\mathcal{D}^3\mathcal{L}$ pour $p = 2$ en fonction de n avec le théorème 3.4 (trait plein) et avec [12, Th. 2.1] (ligne en pointillée) : pour $m = 3$ (à gauche) et pour $m = n - 1$ (à droite)

$j \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in (t_{j-1}, t_j)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\widehat{(\Phi[w](t))}_{(i)} = \begin{cases} \ell_{(i)}\dot{w}_{(i)}(t), & \text{si } \dot{w}_{(i)}(t) \geq 0 \text{ et } (\Phi[w](t))_{(i)} = \ell_{(i)}(w_{(i)}(t) - c_r), \\ \ell_{(i)}\dot{w}_{(i)}(t), & \text{si } \dot{w}_{(i)}(t) \leq 0 \text{ et } (\Phi[w](t))_{(i)} = \ell_{(i)}(w_{(i)}(t) - c_l), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.13)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots$ est la partition de $[0, +\infty)$ telle que w est continûment dérivable sur chaque intervalle (t_{j-1}, t_j) , $j \in \mathbb{N}$. Dans (3.13) les vecteurs $\ell_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, sont fixés dans \mathbb{R}_+^m , et les vecteurs c_r et c_l sont dans \mathbb{R}^m tels que $c_l \preceq 0 \preceq c_r$.

Nous étudions dans [C30] l'analyse de la stabilité (ainsi que de la performance) d'un système avec backlash. Nous avons également étudié les systèmes soumis à des backlash et des saturations emboîtées (voir [C34] et [C39]). Des travaux sont en cours avec Sophie Tarbouriech et Isabelle Queinnec, LAAS-CNRS, et seront développés dans le futur (voir la partie perspectives).

Deuxième partie

Contrôle en dimension infinie

Chapitre 4

Contrôle de structures flexibles mono-dimensionnelles

Les recherches sur les matériaux intelligents et sur les problèmes d'automatique des systèmes comportant des matériaux intelligents s'intensifient depuis une dizaine d'année. Le principal avantage des matériaux intelligents est de remplacer leur masse comme mode d'action par une énergie. Comme l'énergie est plus facile à transporter que la matière, nous comprenons pourquoi les matériaux intelligents tendent à être utilisés comme actionneurs et comme capteurs dans de nombreux systèmes physiques (comme les ouvrages d'art, les structures subissant des contraintes mécaniques...). Parmi les exemples les plus usuels de matériaux intelligents, citons les alliages à mémoire de forme, les matériaux électro-rhéostatiques ou magnéto-rhéostatiques, et les corps piézo-électriques...

Je me suis intéressé à l'utilisation de cellules piézo-électriques¹ pour le contrôle de la forme d'une structure mécanique (problème de contrôlabilité) ou l'atténuation de ses vibrations (stabilisation de l'état de la structure mécanique).

Il y a de nombreuses modélisations possibles pour les systèmes comportant peu de cellules piézo-électriques. Ces modèles sont souvent écrits en terme d'équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire avec un état vivant dans un espace de dimension finie. En revanche le calcul d'un modèle EDP pour modéliser l'évolution d'une structure soumise à l'action d'un grand nombre (ou d'une infinité) de cellules piézo-électriques et dont l'état est mesuré par un grand nombre de capteurs piézo-électriques est plus délicat.

Nous allons nous intéresser au contrôle d'une poutre flexible dans le paragraphe 4.1 en précisant l'ensemble des positions de l'actionneur piézo-électrique pour que nous ayons une contrôlabilité. Nous donnerons quelques éléments de la démonstration des résultats principaux dans le paragraphe 4.2 (en insistant sur ceux qui nous seront utiles pour l'étude de la stabilisation étudiée dans le paragraphe 4.4). Des simulations numériques illustreront la contrôlabilité

¹une cellule piézo-électrique est un corps qui délivre une quantité de charges lorsqu'elle est déformée et réciproquement.

et le calcul de la commande dans le paragraphe 4.3. Les résultats de stabilisation et les vitesses de convergence seront détaillées dans le paragraphe 4.4. Enfin des éléments de la démonstration de la stabilisation seront exposés dans le paragraphe 4.5.

Pour une introduction sur les contrôles d'équations aux dérivées partielles et des liens avec des systèmes de dimension finie nous pouvons étudier [146] pour les systèmes linéaires, ou [43] pour les systèmes non-linéaires.

4.1 Contrôlabilité d'une poutre flexible

Considérons une structure flexible de type poutre munie d'un actionneur piézo-électrique. Nous souhaitons étudier le problème du contrôle de la forme de la poutre sous l'action de la cellule piézo-électrique. Il existe une grande variété de modèles pour de tels systèmes. Citons les modèles écrits en terme d'éléments finis (comme dans [10]), d'approximations en dimension finie (voir [120, 61, 136]). Les modèles qui nous intéressent dans ce chapitre concernent ceux écrits en terme d'équations aux dérivées partielles (comme dans [49]).

Les résultats qui concernent plus particulièrement les propriétés de contrôlabilité sont [109, 51]. Citons également [138] qui utilise une approche proche de celle utilisée ici mais avec des conditions aux bords différentes (celles d'une poutre simplement posée aux deux extrémités). Comme nous avons en tête les applications concernant le contrôle actif des vibrations² ou le contrôle de structures flexibles, il est nécessaire d'utiliser les conditions aux bords suivantes : celles d'une poutre libre à une extrémité et encastrée à une autre extrémité.

Pour étudier la contrôlabilité exacte de l'EDP modélisant une poutre actionnée par une cellule piézo-électrique, nous utilisons la méthode HUM (*Hilbert Uniqueness Method*) introduite dans [80, 81] qui permet de démontrer des résultats de contrôlabilité. Cette méthode n'est pas uniquement un résultat d'existence : elle permet aussi de calculer le contrôle qui résout le problème de contrôlabilité exacte. Notons comme dans [43] que cette méthode peut être vue comme un résultat de contrôle optimal puisque le contrôle donné par la méthode HUM est le contrôle minimal pour la norme L^2 .

En collaboration avec Emmanuelle Crépeau, université de Versailles, nous avons prouvé dans [R9] que pour tout $T > 0$ nous avons une contrôlabilité exacte de la poutre si la position de l'actionneur piézo-électrique est suffisamment bien choisie, pour une certaine régularité des conditions initiales (voir les théorèmes 4.1 et 4.2 ci-dessous pour une formulation précise).

Le modèle que nous considérons est l'équation d'Euler-Bernoulli :

$$\partial_t^2 w(x, t) + \frac{YI}{\rho A_b} \partial_x^4 w(x, t) = \frac{1}{\rho A_b} \partial_x^2 m(x, t) , \quad x \in (0, L) \quad (4.1)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \partial_x w(0, t) = 0 , \quad (4.2)$$

$$\partial_x^2 w_{xx}(L, t) = 0, \quad \partial_x^3 w(L, t) = 0 , \quad (4.3)$$

²comme pour le dispositif expérimental disponible au laboratoire de mécanique de l'université de Campinas, Brésil.

avec les notations (voir la figure 4.1)

- $w(x, t)$ est la déformation au temps t et au point $x \in [0, L]$;
- ρ est la densité (linéique et uniforme) de la poutre ;
- A_b est l'aire de la section ;
- Y est le module de Young ;
- I est le moment d'inertie ;
- m est le moment exercé par la cellule piézo-électrique.

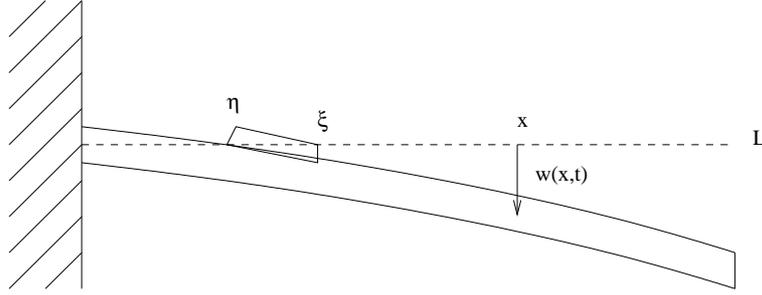


FIG. 4.1 – Poutre flexible munie d'un actionneur piézo-électrique entre $x = \eta$ et $x = \xi$.

D'autres modèles peuvent être considérés (voir par exemple [7]). Les conditions initiales de (4.1) sont

$$w(., 0) = w^0, \partial_t w(., 0) = w^1. \quad (4.4)$$

Le moment exercé par la cellule piézo-électrique est fonction de la tension :

$$m(x, t) = K_a V_a(t) [H(x - \xi) - H(x - \eta)], \quad (4.5)$$

où K_a est une constante physique dépendant des caractéristiques de la cellule piézo-électrique, $V_a(t)$ est le contrôle, c'est-à-dire la tension à appliquer, $x \mapsto H(x)$ est la fonction d'Heaviside :

$$H(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0,$$

tandis que ξ et η sont les extrémités de la cellule piézo-électrique.

Dans le modèle précédent, l'état est w , tandis que le contrôle est V_a .

En suivant les notations de [138], nous introduisons les ensembles $Y_0 = L^2(0, \pi)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$Y_\alpha = \overline{\{y \in C^\infty(0, \pi); w^{(4n)}(0) = w^{(4n+1)}(0) = w^{(4n+2)}(\pi) = w^{(4n+3)}(\pi) = 0\}}^{H^\alpha(0,L)},$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_{<0}$, $Y_\alpha = (Y_{-\alpha})^*$ avec Y_0 comme espace pivot.

Nous établissons dans [R9] les résultats de contrôlabilité à zéro suivants :

Théorème 4.1 *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ensemble $\mathcal{A} \subset (0, L)^2$ avec une mesure de Lebesgue égale à L^2 tel que, pour tout $(\xi, \eta) \in \mathcal{A}$, toute condition initiale dans $Y_{3+\varepsilon} \times Y_{1+\varepsilon}$ du système (4.1)-(4.3) est exactement $L^2(0, T)$ -contrôlable en temps $T > 0$, pour tout $T > 0$.*

Théorème 4.2 *Il existe un ensemble $\mathcal{B} \subset (0, L)^2$ non dénombrable mais de mesure de Lebesgue égale à 0 tel que, pour tout $(\xi, \eta) \in \mathcal{B}$, toute condition initiale dans $Y_3 \times Y_1$ du système (4.1)-(4.3) est exactement $L^2(0, T)$ -contrôlable en temps $T > 0$, pour tout $T > 0$.*

De plus nous calculons explicitement la tension qu'il faut appliquer à l'actionneur pour avoir la contrôlabilité exacte. Nous illustrerons ces résultats par des simulations numériques en choisissant comme paramètres physiques ceux classiquement utilisés en réduction active de vibrations.

Notons que la méthode utilisée repose sur un résultat d'approximation diophantienne, issu de la théorie des nombres, que nous avons établi dans [R9]. Il est important de noter que ce résultat en lui-même est nouveau et a été utilisé dans [R17] (en collaboration avec Lionel Rosier et Pierre Le Gall, université de Nancy I) pour la stabilisation de la poutre (voir le paragraphe 4.4). Nous présentons ici les éléments principaux de la démonstration de [R9] puisqu'ils nous permettront de comprendre la démarche utilisée dans [R17].

4.2 Eléments de démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2

Dans ce paragraphe nous donnons quelques éléments de la démonstration des théorèmes 4.2 et 4.12. Pour une démonstration plus complète voir [R9]. Ces éléments de démonstration de la contrôlabilité de (4.1)-(4.3) nous permettront d'étudier la stabilisation du même modèle comme étudié dans [R17].

Faisons quelques rappels sur la méthode HUM (voir [80]), dans un contexte d'équations du second ordre en temps (comme dans [139]). Soit $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$, un opérateur autoadjoint coercif, où X est un espace de Hilbert. Soit $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{D}(A^{1/2})^*)$, où $\mathcal{D}(A^{1/2})$ est le complété de $\mathcal{D}(A)$ avec la norme $x \mapsto \sqrt{\langle Ax, x \rangle}$, et $\mathcal{D}(A^{1/2})^*$ est le dual de $\mathcal{D}(A^{1/2})$ par rapport à X . Etudions le système suivant

$$\begin{aligned} \ddot{w}(t) + Aw(t) &= Bu(t) \ , \ \forall t \in [0, T] \\ w(0) &= \dot{w}(0) = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Supposons que nous ayons, pour tout $u \in L^2(0, T; U)$, un résultat d'existence et d'unicité d'une solution $w \in C(0, T; \mathcal{D}(A^{1/2})) \cap C^1(0, T; X)$ de (4.6) qui dépende continûment de $u \in L^2(0, T; U)$, autrement dit l'opérateur $L_T u := (w(t), \dot{w}(T))$ satisfait $L_T \in \mathcal{L}(L^2(0, T; U); \mathcal{D}(A^{1/2}) \times X)$.

Dans ce contexte la notion de contrôlabilité est la suivante :

Définition 4.3 *Le système (4.6) est exactement contrôlable en temps $T > 0$ si L_T est surjectif.*

La théorie de HUM permet de prouver une contrôlabilité à l'aide d'une inégalité d'observabilité du problème adjoint.

Théorème 4.4 (voir [80] et [139]) *Le système (4.6) est exactement contrôlable en temps $T > 0$, si et seulement si la solution ϕ du problème homogène*

$$\ddot{\phi} + A\phi = 0 \text{ sur } [0, T] \quad (4.7)$$

$$\phi(0) = \phi^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \dot{\phi}(0) = \phi^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \quad (4.8)$$

satisfait l'inégalité d'observabilité :

$$\int_0^T \|B^* \phi(s)\|_U^2 ds \geq M_T (\|\phi^0\|_X^2 + \|\phi^1\|_{\mathcal{D}(A^{1/2})^*}^2), \quad (4.9)$$

pour tout $(\phi^0, \phi^1) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^{1/2})$, avec M_T indépendant de (ϕ^0, ϕ^1) .

Appliquons ce résultat à notre problème. En normalisant la longueur de la poutre à $L = \pi$, on introduit l'opérateur $A : H^4(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$ défini par, $\forall w \in H^4(0, \pi)$, $Aw = \partial_x^4 w$. Compte tenu des conditions aux bords (4.3), son domaine de définition est $\mathcal{D}(A) = \{w \in H^4(0, \pi); w(0) = w'(0) = w''(\pi) = w^{(3)}(\pi) = 0\}$. D'après (4.1) et (4.5), l'opérateur d'entrée est défini par $Bu = \partial_x(\delta_\xi - \delta_\eta)u$ en normalisant la constante piézo-électrique à 1 et en notant δ_ξ et δ_η les mesures de Dirac en ξ et en η respectivement. Avec ces définitions, le système (4.1) se réécrit sous la forme de (4.6). Etudions l'inégalité d'observabilité (4.9).

Soit $(\phi^0, \phi^1) \in Y_1 \times Y_{-1}$. La solution du problème homogène (4.7)-(4.8) s'écrit :

$$\phi(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\phi_k^0 \cos(\alpha_k^2 t) + \frac{\phi_k^1}{\alpha_k^2} \sin(\alpha_k^2 t) \right) \psi_k(x)$$

avec $\phi_k^0 = \int_0^L \phi^0(x) \psi_k(x) dx$, $\phi_k^1 = \int_0^L \phi^1(x) \psi_k(x) dx$ et ψ_k est le $k^{\text{ème}}$ vecteur propre normalisé de A , pour la valeur propre α_k^4 .

Nous calculons $\int_0^T \|B^* \phi\|_U^2 = \int_0^T |\partial_x \phi(\xi, t) - \partial_x \phi(\eta, t)|^2 dt$. Pour minorer cette dernière quantité nous aurons besoin de

Lemme 4.5 (Inégalité d'Ingham [9]) *Soit $(\nu_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ une suite de réels deux à deux distincts tels que :*

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} (\nu_{k+1} - \nu_k) = +\infty$$

Soit $T > 0$. Alors il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dans $l^2(\mathbb{Z})$, la série $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_k e^{i\nu_k t}$ converge dans $L^2(0, T)$ et satisfait

$$C_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 \geq \int_0^T \left| \sum_{-\infty}^{+\infty} x_k e^{i\nu_k t} \right|^2 dt \geq C_2 \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_k|^2$$

En appliquant ce lemme, nous en déduisons l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(\phi^0, \phi^1) \in Y_1 \times Y_{-1}$,

$$\int_0^T |\partial_x \phi(\xi, t) - \partial_x \phi(\eta, t)|^2 dt \geq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\phi_k^0|^2 + \left| \frac{\phi_k^1}{\alpha_k^2} \right|^2 \right) |\psi_k'(\xi) - \psi_k'(\eta)|^2$$

Nous calculons, pour tout $x \in (0, \pi)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$,

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos(\alpha_k x) - \cosh(\alpha_k x) + \mu_k(\sinh(\alpha_k x) - \sin(\alpha_k x))) ,$$

avec α_k la $k^{\text{ème}}$ racine positive de $1 + \cos(\alpha_k \pi) \cosh(\alpha_k \pi) = 0$, et $\mu_k = \frac{\cos(\alpha_k \pi) + \cosh(\alpha_k \pi)}{\sin(\alpha_k \pi) + \sinh(\alpha_k \pi)}$.

Avec les conditions aux bords $w = w'' = 0$ en $x = 0, \pi$, on calcule (voir [138]) $\psi_k(x) = \sin(kx)$, pour tout $x \in (0, \pi)$.

Avec les conditions aux bords (4.2)-(4.3) nous avons une équation transcendante à considérer et aussi des approximations diophantiennes à établir. En effet un calcul permet de voir $\psi'_k(\xi) - \psi'_k(\eta) \sim \alpha_k \sin(\alpha_k \frac{\xi - \eta}{2})$ en négligeant certains termes (voir [R9] pour plus de détails). La question d'approximation diophantienne naturelle est donc la suivante : quelle est la dépendance par rapport à k de la distance de la suite $\{\alpha_k \frac{\xi - \eta}{2\pi}\}_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$ aux entiers relatifs ? Autrement dit, peut-on estimer $d(\alpha_k \frac{\xi - \eta}{2\pi}, \mathbb{Z})$.

En utilisant [30] et [75], Emmanuelle Crépeau et moi-même obtenons les deux résultats suivants (voir [R9])

Proposition 4.6 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $A \subset (0, 1)$ avec une mesure de Lebesgue égale à 1, et il existe $C > 0$, tels que pour tout $a \in A$, et pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$,*

$$d(\alpha_k a, \mathbb{Z}) \geq \frac{C}{k^{1+\varepsilon}} .$$

Proposition 4.7 *Il existe un ensemble $B \subset (0, 1)$ non dénombrable mais de mesure nulle et il existe $C > 0$, tels que pour tout $b \in B$, et pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$,*

$$d(\alpha_k b, \mathbb{Z}) \geq \frac{C}{k} .$$

Nous arrivons ainsi à minorer $\sin(\alpha_k \frac{\xi - \eta}{2})$, et à écrire une inégalité d'observabilité : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{A} \subset (0, \pi)^2$ tel que pour tout $(\xi, \eta) \in \tilde{A}$,

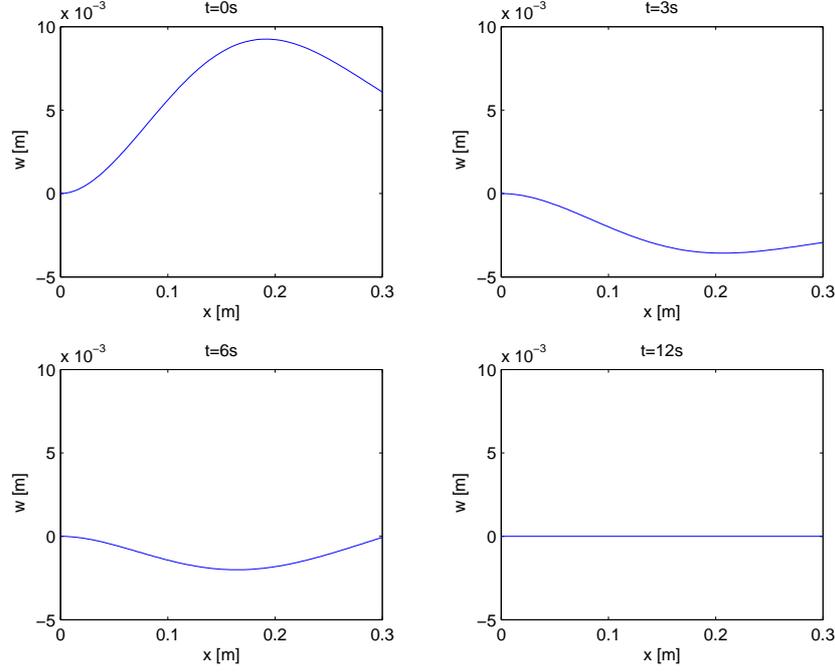
$$\int_0^T |\partial_x \phi(\xi, t) - \partial_x \phi(\eta, t)|^2 \geq C \sum_{k=1}^{k=\infty} \left| \frac{\phi_k^0}{\alpha_k^{1+\varepsilon}} \right|^2 + \left| \frac{\phi_k^1}{\alpha_k^{3+\varepsilon}} \right|^2$$

et nous en déduisons les théorèmes 4.1 et 4.2.

4.3 Simulations numériques

Illustrons le théorème 4.1. Nous allons vérifier que ce résultat est plus qu'un résultat d'existence puisque nous calculerons numériquement le contrôle.

Nous choisissons les constantes physiques suivantes du dispositif expérimental de [61] décrits dans [R9].


 FIG. 4.2 – Profil de la poutre à $t \in [0, T]$ pour $T = 12$.

On considère l'application $\Lambda : (\phi^0, \phi^1) \in Y_{-1-\epsilon} \times Y_{-3-\epsilon} \mapsto (\partial_t w(\cdot, 0), w(\cdot, 0)) \in Y_{1+\epsilon} \times Y_{3+\epsilon}$ définie par les solutions aux deux problèmes suivants.

Soit ϕ la solution du problème homogène

$$\begin{cases} \partial_t^2 \phi + \frac{YI}{\rho A_b} \partial_x^4 \phi = 0, \\ \phi(0, \cdot) = 0, \partial_x \phi(0, \cdot) = 0, \\ \partial_x^2 \phi(L, \cdot) = 0, \partial_x^3 \phi(L, \cdot) = 0, \\ \phi(\cdot, 0) = \phi_0, \partial_t \phi(\cdot, 0) = \phi_1. \end{cases} \quad (4.10)$$

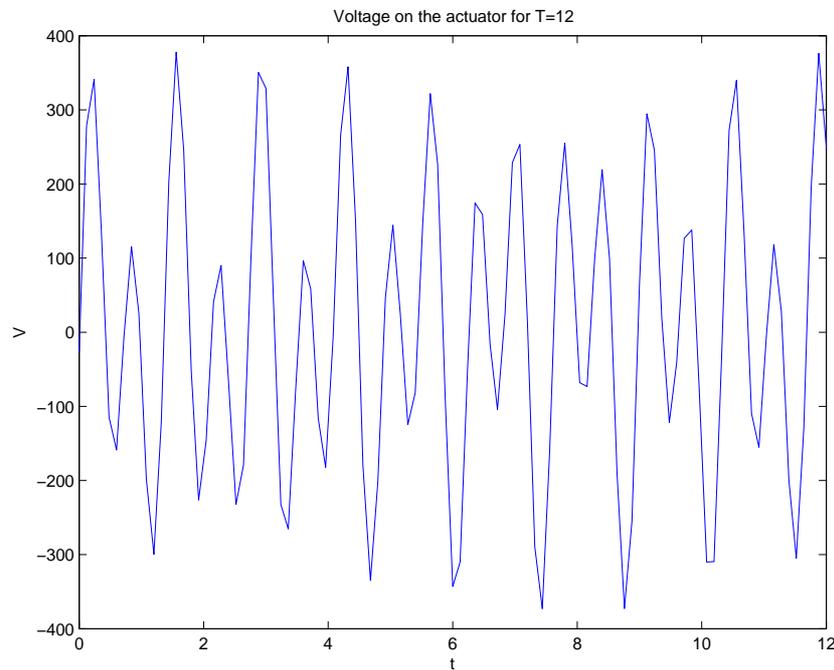
Soit w la solution du problème en temps rétrograde

$$\begin{cases} \partial_t^2 w + \frac{YI}{\rho A_b} \partial_x^4 w = \frac{1}{\rho A_b} K_a V_a(t) \partial_x^2 [H(x - \xi) - H(x - \eta)], \\ w(0, \cdot) = 0, \partial_x w(0, \cdot) = 0, \\ \partial_x^2 w(L, \cdot) = 0, \partial_x^3 w(L, \cdot) = 0, \\ w(\cdot, T) = 0, \partial_t w(\cdot, T) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

avec le contrôle donné par la méthode HUM : $V_a(t) = \partial_x \phi(\xi, t) - \partial_x \phi(\eta, t)$.

D'après notre résultat Λ est inversible (sauf pour un ensemble de mesure nulle de (ξ, η)).

D'après le théorème 4.1 nous avons un résultat de contrôlabilité pour tous les temps de contrôle T . Nous avons ainsi simulé le système (4.1) avec le contrôle donné par la méthode HUM (et représenté à la figure 4.3) pour $T = 12s$. Nous avons choisi un schéma d'Euler pour la discrétisation des équations (4.10) et (4.11). Nous vérifions à la figure 4.2 que nous avons bien une contrôlabilité à zéro pour $T = 12s$. Le lien entre la contrôlabilité (ou l'observabilité)

FIG. 4.3 – Tension à appliquer pour $T = 12s$.

et le schéma de discrétisation est un sujet de recherche difficile (voir [142, 143, 144, 145] pour différentes classes d'équations).

Comme on peut s'y attendre, plus le temps de contrôle est petit, plus il sera nécessaire d'appliquer des tensions grandes. Nous pouvons vérifier (voir [R9]) que si le temps de contrôle est trop petit, alors les tensions à appliquer sont trop grandes pour pouvoir être physiquement appliquées.

4.4 Stabilisation de la poutre

Dans ce paragraphe nous allons étudier le problème de la stabilisation de la poutre, c'est-à-dire le calcul d'une boucle fermée, autrement dit d'un contrôle dépendant d'une partie de l'état (appelée sortie) tel que le système en boucle fermée converge vers l'équilibre. Comme nous allons le voir, la principale difficulté réside dans l'estimation de la vitesse de convergence, et il faudra spécifier quelles positions des cellules piézo-électriques donnent une vitesse de convergence exponentielle ou polynomiale.

Dans toute la suite de cette étude, prenons le cas d'un actionneur piézo-électrique collé à gauche (ce qui correspond à $\eta = 0$). Le modèle (4.1)-(4.4) devient le suivant (après avoir

normalisé toutes les constantes à 1 sauf la longueur qui est choisie égale à π)

$$\partial_t^2 w(x, t) + \partial_x^4 w(x, t) = -u(t) \frac{d\delta_\xi}{dx}(x), \quad (4.12)$$

$$w(0, t) = \partial_x w(0, t) = \partial_x^2 w(\pi, t) = \partial_x^3 w(\pi, t) = 0, \quad (4.13)$$

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad \partial_t w(x, 0) = w^1(x). \quad (4.14)$$

Supposons que l'on ait placé un capteur piézo-électrique co-localisé avec l'actionneur qui nous permettra de mesurer (une partie) des vibrations, plus précisément la sortie sera donnée par

$$y(t) := \partial_x w(0, t) - \partial_x w(\xi, t) = -\partial_x w(\xi, t).$$

Le dispositif expérimental que nous considérons est donc donné par la figure 4.4.

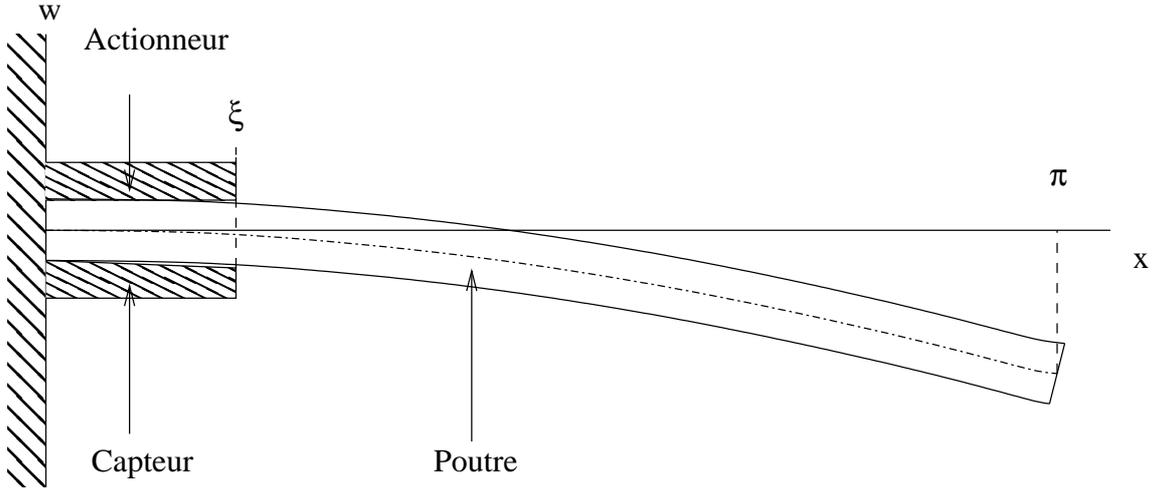


FIG. 4.4 – Position des actionneurs et des capteurs sur la poutre.

En notant $E(w, \partial_t w) = \int_0^\pi (|\partial_x^2 w|^2 + |\partial_t w|^2)$, un calcul informel le long des solutions de (4.12)-(4.14) donne

$$E(w(t), \partial_t w(t)) - E(w^0, w^1) = 2 \int_0^T u(t) \partial_x \partial_t w(\xi, t) dt. \quad (4.15)$$

Donc un contrôle candidat est, pour $K > 0$,

$$u(t) = -K \partial_x \partial_t w(\xi, t). \quad (4.16)$$

En boucle fermée avec ce contrôle, nous avons $E \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow +\infty$.

C'est pourquoi dans la suite nous étudions l'équation

$$\partial_t^2 w + \partial_x^4 w = K \partial_x \partial_t w \frac{d}{dx} \delta_\xi(x). \quad (4.17)$$

Le but de ce paragraphe est de trouver l'ensemble des ξ tel que nous avons un résultat de stabilité pour (4.17), et de préciser la vitesse de convergence (exponentielle ou polynomiale).

Soit l'opérateur en boucle fermée $\mathfrak{A}z := (v, -\partial_x^4 w + K \partial_x v(\xi) \frac{d}{dx} \delta_\xi)$. Pour donner son domaine de définition notons, pour tout w dans $H^1(0, \xi) \cap H^1(\xi, \pi)$, le saut en ξ par $[w]_\xi$, i.e. $[w]_\xi = w(\xi^+) - w(\xi^-)$. Nous obtenons (voir [R17], co-écrit avec Lionel Rosier et Pierre Le Gall, université de Nancy I)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{ z = (w, v) \mid & (w, v) \in H^2(0, \pi)^2, w \in H^4(0, \xi) \cap H^4(\xi, \pi), \\ & w(0) = \partial_x w(0) = \partial_x^2 w(\pi) = \partial_x^3 w(\pi) = 0, \\ & v(0) = \partial_x v(0) = 0, K \partial_x v(\xi) = [\partial_x^2 w]_\xi, [\partial_x^3 w]_\xi = 0 \}. \end{aligned}$$

Soit $H = V \times L^2$, où V est l'ensemble des fonctions de H^2 nulles en 0, et de dérivée nulle en 0. Nous pouvons vérifier que $\mathfrak{A} : \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \rightarrow H$ génère un semi-groupe de contraction. Etudions la stabilité forte de (4.17) avant de préciser les vitesses de convergences. Pour cela nous rappelons que le système (4.17) est dit fortement stable si $\|w(t), w_t(t)\|_H \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$. D'après (4.15), si ξ est tel que $\psi'_k(\xi) = 0$ pour un certain k alors $(0, \psi_k)$ est une condition initiale telle que l'énergie est constante, donc la solution ne converge pas vers 0. C'est pourquoi nous introduisons les ensembles

$$\mathcal{S}_k = \{\xi, \psi'_k(\xi) = 0\}, \quad \mathcal{S} = \bigcup_k \mathcal{S}_k.$$

Nous obtenons donc que si $\xi \in \mathcal{S}$ alors nous n'avons pas de convergence. La réciproque est vraie comme démontrée dans [R17] :

Théorème 4.8 *Le système (4.17) est fortement stable si et seulement si $K > 0$ et $\xi \notin \mathcal{S}$.*

La démonstration repose sur l'utilisation du principe d'invariance de LaSalle (voir [86]). On peut utiliser aussi le théorème d'Arendt-Batty [8] (comme [R6] pour un autre problème de stabilisation).

L'ensemble \mathcal{S} est de mesure de Lebesgue égale à π et dense dans $(0, \pi)$.

Nous pouvons préciser la vitesse de convergence pour certaines positions de l'actionneur :

Théorème 4.9 *Soit $\xi \notin \mathcal{S}$ tel que $\xi/\pi \in \mathbb{Q}$ et tel que $\frac{\xi}{\pi} \neq \frac{4k'+3}{4k+2}$, pour tout k, k' dans \mathbb{Z} . Alors*

$$\sup_{|\beta| \geq 1} \|(i\beta - \mathfrak{A})^{-1}\| < \infty.$$

Et donc d'après [67] ou [106], \mathfrak{A} génère un semi-groupe exponentiellement stable i.e., il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ telles que

$$\|e^{t\mathfrak{A}} z_0\|_H \leq C e^{-\delta t} \|z_0\|_H$$

pour tout $z_0 = (w_0, v_0) \in H$ et pour tout $t \geq 0$.

Bien sûr ce résultat est théorique puisque la condition sur ξ n'est pas vérifiable sur une installation physique. En revanche nous avons une convergence polynomiale pour presque tout ξ :

Théorème 4.10 *Pour presque tout $\xi \in (0, \pi)$, pour tout $l > 1$*

$$\sup_{|\beta| \geq 1} |\beta|^{-l} \|(i\beta - \mathfrak{A})^{-1}\| < \infty. \quad (4.18)$$

Et donc d'après [85], pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que

$$\|e^{t\mathfrak{A}} z_0\|_{\mathcal{H}} \leq C_k \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{k}{l}} (\ln t) \|z_0\|_{\mathcal{D}(\mathfrak{A}^k)} \quad \forall z_0 \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}^k).$$

Ce dernier résultat est le plus intéressant puisqu'il permet de dire avec quelle vitesse le retour de sortie (4.16) stabilise le système (4.12)-(4.14).

4.5 Eléments de démonstration du théorème 4.10

Nous ne donnerons pas les éléments de la démonstration du théorème 4.9 (en revanche nous établirons un autre résultat de stabilisation exponentielle, voir le théorème 5.4 page 55 ci-dessous). Donnons cependant quelques éléments de la démonstration du théorème 4.10 qui établit la convergence polynomiale de (4.17) pour presque tout ξ . Comme nous allons le voir, la méthode est celle des multiplieurs et utilise la proposition 4.6 (issue de l'article [R9] co-écrit avec Emmanuelle Crépeau). Pour une démonstration complète du théorème 4.10, voir [R17].

Soit $l \in (1, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, et $\xi \in (0, \pi)$ que nous préciserons plus bas. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde. Si (4.18) est faux, alors il existe une suite $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ de réels strictement positifs et une suite $\{(w_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ de points dans $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ telles que

$$\|(w_n, v_n)\|_{V \times H} = 1, \quad \beta_n \rightarrow +\infty, \quad (4.19)$$

et telles qu'en notant $(f_n, g_n) := (i\beta_n - \mathfrak{A})(w_n, v_n)$, nous ayons

$$\beta_n^l (f_n, g_n) \rightarrow (0, 0) \text{ dans } V \times H \quad (4.20)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. En définissant $\{w_n\} = w_n - [w_n]_{\xi}$, nous avons $i\beta_n w_n - v_n = f_n \rightarrow 0$ dans V , et $i\beta_n v_n + \{w_n^{(4)}\} = g_n \rightarrow 0$ dans H , lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent $i\beta_n \|w_n\|_V^2 - (v_n, w_n)_V \rightarrow 0$ et $i\beta_n \|v_n\|_H^2 - (\{w_n^{(4)}\}, v_n)_H \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. D'où

$$\|w_n\|_V^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \|v_n\|_H^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \|\beta_n w_n\|_H^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (4.21)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. On peut en déduire

$$3 \int_0^{\pi} |w_n''|^2 dx + \beta_n^2 \int_0^{\pi} |w_n|^2 = O(|\beta_n w_n(\pi)|^2) + o(1) \quad (4.22)$$

A la lumière de (4.21) et (4.22), pour avoir une contradiction, il suffit de prouver $\beta_n w_n(\pi) \rightarrow 0$. C'est le but du reste de la démonstration.

La fonction w_n peut être calculée explicitement en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} -\beta_n^2 w_n + \{w_n^4\} &= g_n + i\beta_n f_n , \\ w_n(0) = w_n'(0) = w_n''(\pi) = w_n'''(\pi) &= 0 . \end{aligned}$$

On calcule $w_n(\pi) = N/D$, avec

$$\begin{aligned} |N| &\leq C\beta_n^{-1} e^{\sqrt{\beta_n}\pi} (\|f_n\|_V + \|g_n\|_H) , \\ D &= e^{\sqrt{\beta_n}\pi} \sin \pi \left(\sqrt{\beta_n} \frac{\xi}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \times \sin \pi \left(\sqrt{\beta_n} \left(1 - \frac{\xi}{\pi} \right) + \frac{1}{4} \right) . \end{aligned} \quad (4.23)$$

D'après la proposition 4.6, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$, et pour presque tout $\alpha \in (0, 1)$, l'existence d'un nombre fini de solutions $q \in \mathbb{N}_{>0}$ de l'inégalité

$$d\left(\left(q + \frac{1}{2}\right)\alpha_n + \frac{1}{4}, \mathbb{Z}\right) < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}} .$$

On en déduit avec (4.23) et (4.20), et en choisissant $\varepsilon = l - 1$.

$$|\beta_n w_n(\pi)| \leq C\beta_n^{1+\varepsilon} (\|f_n\|_V + \|g_n\|_H) \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Ce qui donne une contradiction et conclut la démonstration du théorème 4.10.

Chapitre 5

Contrôle d'une plaque, application à l'optique adaptative

Nous allons maintenant étudier le cas de structures flexibles soumis à l'action de matériaux piézo-électriques. Plus précisément nous allons considérer le cas d'un miroir bimorphe dans un système d'optique adaptative. Les systèmes d'optique adaptative permettent de corriger les déformations du front d'onde incident sur un télescope. Ces déformations sont dues à la traversée de l'atmosphère par la lumière. Pour les corriger, différentes techniques sont utilisées, comme la correction numérique des observations. Nous allons nous intéresser à la déformation du miroir secondaire par le contrôle de cellules piézo-électriques. Cette correction est calculée à partir des mesures fournies par un analyseur de front d'onde : l'analyseur de Shack-Hartmann qui analyse la phase résultante après réflexion sur le miroir déformable (voir le schéma 5.1). Différents types de miroirs déformables existent [108, 111]. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux miroirs bimorphes qui sont constitués de différentes épaisseurs : d'abord une couche réfléchissante, ensuite une couche de capteurs piézo-électriques, enfin une couche d'actionneurs piézo-électriques. Le système comporte un grand nombre d'entrées (par exemple une quarantaine sur le miroir déformable du banc expérimental SESAME [118] de l'Observatoire de Paris). De plus la tendance pour les télescopes est d'augmenter la taille des miroirs et d'augmenter leur nombre de degrés de liberté. C'est pourquoi nous souhaitons privilégier une approche dimension infinie et que nous considérons un modèle EDP pour ce miroir bimorphe.

Nous étudions tout d'abord la contrôlabilité d'un miroir bimorphe dans le paragraphe 5.1, puis la stabilisation du miroir dans le paragraphe 5.2. Le paragraphe 5.3 contient des éléments de la démonstration de ce résultat de stabilisation. Enfin nous étudierons plus particulièrement le système d'optique adaptative dans le paragraphe 5.4.

Commençons par établir la contrôlabilité du modèle du miroir bimorphe considéré.

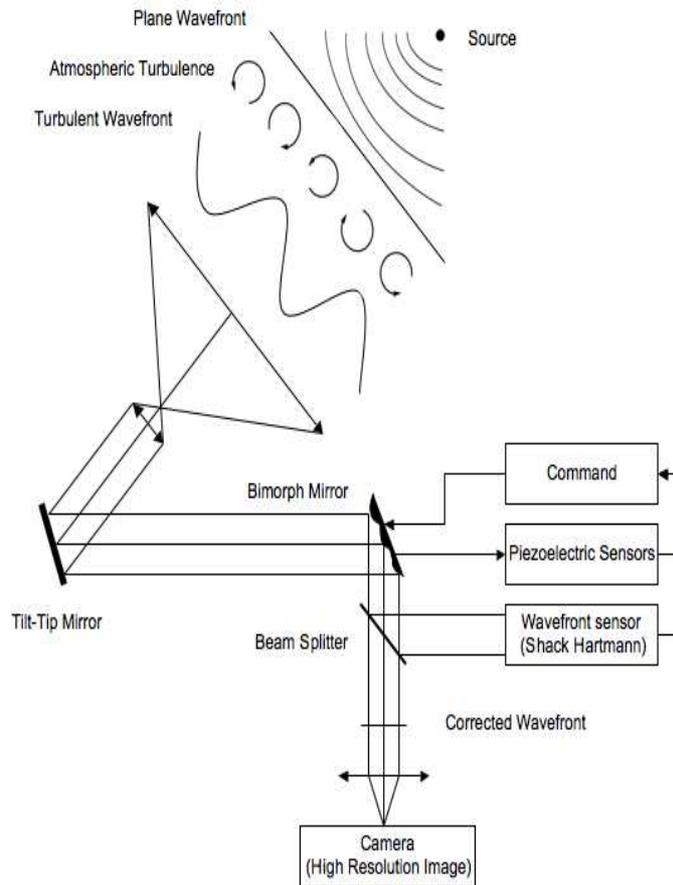


FIG. 5.1 – Différentes composantes du système d'optique adaptative.

5.1 Contrôlabilité d'un miroir bimorphe

Dans ce paragraphe nous étudions plus particulièrement le modèle du miroir bimorphe et la contrôlabilité du modèle EDP. Nous rappelons qu'un miroir bimorphe peut être composé de trois couches, une couche purement flexible, une autre couche munie d'une distribution de capteurs piézo-électriques, enfin une couche munie d'actionneurs piézo-électriques.¹

Le modèle que nous considérons ici a été calculé en collaboration avec Michel Lenczner, professeur de mécanique à l'université de Belfort-Montbéliard [R13]. Nous avons utilisé des techniques de limite à deux échelles, présentées par exemple dans [32], pour calculer un modèle EDP. Pour cela nous utilisons des outils de mécanique et d'analyse, et nous obtenons un modèle macroscopique décrivant la structure mécanique et le système entrée-sortie dans son ensemble et un modèle microscopique pour décrire la répartition périodique des actionneurs et des capteurs piézo-électriques.

¹En réalité, pour que la fibre neutre soit au centre du dispositif expérimental, il est important de symétriser les couches et donc d'utiliser six couches au total.

Nous allons prouver d'abord la contrôlabilité pour un miroir bimorphe 1D (de type poutre), puis la contrôlabilité pour le modèle 2D (de type plaque). La stabilisation exponentielle par retour de sortie sera étudiée dans le paragraphe 5.2.

Cas 1D Le modèle 1D calculé dans [R13] par des techniques d'homogénéisation est le suivant :

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u = -s\partial_x \varphi + a\partial_x^2 \varphi, \\ \partial_t^2 w + \partial_x^4 w + w = \partial_x^2 \varphi, \\ w(0, t) = w(L, t) = \partial_x w(0, t) = \partial_x w(L, t) = 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

où

- w est la déformation transverse ;
- u est le déplacement longitudinal ;
- φ est la tension appliquée à la couche-actionneur ;
- $a > 0$, $L > 0$ et s sont des réels constants (les autres constantes ont été fixées à 1).

Considérons les espaces $V = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, $\tilde{V} = H_0^2(0, L)$, $H = L^2(0, L)$ et l'opérateur $\mathcal{A}(w, v) = (v, -w^{(4)} - w)$ défini sur le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)) \times H_0^2(0, L) \subset \tilde{V} \times H$.

En contrôlant d'abord le terme en u dans la première équation de (5.1), puis le reste de l'équation nous avons le résultat de contrôlabilité suivant (voir [R22] co-écrit avec Pierre Le Gall et Lionel Rosier, Université de Nancy I) :

Théorème 5.1 *Toute paire $((w^0, w^1), u^0)$, $((w^{0,T}, w^{1,T}), u^T)$ de triplets dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \times V$ peut être connectée par une solution de (5.1) avec un contrôle $\varphi \in C([0, T]; H^2(0, L))$.*

Cas 2D Nous avons maintenant à étudier le modèle 2D suivant :

$$\begin{cases} -(\lambda + \mu)\partial_1 \operatorname{div} U - \mu\Delta u_1 = -s_\beta \partial_\beta \varphi + a_{\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2 \varphi, \\ -(\lambda + \mu)\partial_2 \operatorname{div} U - \mu\Delta u_2 = -t_\beta \partial_\beta \varphi + b_{\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2 \varphi, \\ \partial_t^2 w + \Delta^2 w + w = g_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \varphi, \\ w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

avec les notations suivantes² :

- $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est Lipschitzien et borné ;
- w est le déplacement transverse ;
- $U = (u_1, u_2)$ est le déplacement longitudinal ;
- $\partial_1 \varphi = \partial \varphi / \partial x_1$, $\partial_2 \varphi = \partial \varphi / \partial x_2$, $\operatorname{div} U = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$;
- $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé ;

²Nous avons utilisé la convention d'Einstein pour la sommation des indices répétés.

- $A = (a_{\gamma\delta})$, $B = (b_{\gamma\delta})$, et $G = (g_{\alpha\beta})$ sont des matrices dans $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ définies positives, tandis que t_1 , t_2 , s_1 , et s_2 sont des réels.

Le contrôle φ doit nécessairement être solution du modèle elliptique

$$-s_\beta \partial_\beta \varphi + a_{\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2 \varphi = f_1, \quad (5.3)$$

$$-t_\beta \partial_\beta \varphi + b_{\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2 \varphi = f_2, \quad (5.4)$$

où $f_i := -(\lambda + \mu) \partial_i \operatorname{div} U - \mu \Delta u_i$ pour $i = 1, 2$.

Nous obtenons donc que f_1 et f_2 doivent satisfaire la *condition de compatibilité* :

$$(-t_\beta \partial_\beta + b_{\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2) f_1 = (-s_\beta \partial_\beta + a_{\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta}^2) f_2. \quad (5.5)$$

C'est une condition nécessaire³ pour l'existence d'une fonction φ . Nous introduisons la définition suivante pour l'existence d'un couple (f_1, f_2) :

Définition 5.2 *Un quadruplet $(w^0, w^1, u_1, u_2) \in (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ est compatible si le système (5.3)-(5.4) a une solution $\varphi \in H^2(\Omega)$, les fonctions f_1, f_2 étant définies par $f_i := -(\lambda + \mu) \partial_i \operatorname{div} (u_1, u_2) - \mu \Delta u_i$ pour $i = 1, 2$.*

Dès que cette condition de compatibilité est satisfaite, nous pouvons établir la contrôlabilité du système (5.2). En effet nous avons

Théorème 5.3 *Chaque paire $(w^0, w^1, u_1, u_2), (w^{0,T}, w^{1,T}, u_1^T, u_2^T)$ de quadruplets compatibles peut être connectée par une solution de (5.2) avec un contrôle $\varphi \in C([0, T]; H^2(\Omega))$.*

Maintenant que nous avons démontré cette contrôlabilité, étudions la stabilisation exponentielle par un retour de sortie.

5.2 Stabilisation d'un miroir bimorphe

Dans ce paragraphe nous allons calculer un retour de sortie tel que le système en boucle fermée est exponentiellement stable. Nous allons nous concentrer sur le modèle 1D du miroir sachant que cette approche est généralisable au cas 2D. Revenons au cas du modèle (5.1) avec une sortie I :

$$-\partial_x^2 u = -s \partial_x \varphi + a \partial_x^2 \varphi, \quad (5.6)$$

$$\partial_t^2 w + \partial_x^4 w + w = \partial_x^2 \varphi, \quad (5.7)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (5.8)$$

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (5.9)$$

$$I = \partial_t (\partial_x^2 w + c \partial_x u). \quad (5.10)$$

³C'est une condition qui est aussi suffisante pour un rectangle (voir [R22]).

Dans l'équation précédente, I est le champ de courant mesuré par la couche-capteurs piézo-électriques. Les conditions initiales sont

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad \partial_t w(x, 0) = w^1(x).$$

On souhaite imposer la condition suivante sur le contrôle

$$\partial_x^2 \varphi = k \partial_t \partial_x^2 w,$$

où k est un réel. Pour tout $f \in L^1(0, L)$, on note $[f] := L^{-1} \int_0^L f(x) dx$.

Il est possible de stabiliser exponentiellement vite le miroir bimorphe avec un retour de sortie. En effet nous avons

Théorème 5.4 *Soit $k > 0$ et φ l'unique solution de*

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \varphi &= k \partial_t \partial_x^2 w \quad \text{dans } (0, L) \\ \varphi(0) &= \varphi(L), \quad [\varphi] = 0. \end{aligned}$$

Pour tout $(w^0, w^1) \in (H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)) \times H_0^2(0, L)$, il existe une unique solution (u, w) de (5.6)-(5.9) telle que $u \in C(\mathbb{R}^+; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))$, $w \in C(\mathbb{R}^+; H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^2(0, L))$.

De plus, il existe $C > 0$, $\mu > 0$ tels que pour tout $(w^0, w^1) \in (H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)) \times H_0^2(0, L)$

$$\|u(t)\|_{H^2(0,L)} + \|w(t)\|_{H^4(0,L)} + \|\partial_t w(t)\|_{H^2(0,L)} \leq C (\|w^0\|_{H^4(0,L)} + \|w^1\|_{H^2(0,L)}) e^{-\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

Enfin φ est un retour de sortie, c'est l'unique solution de

$$\begin{aligned} k^{-1} \partial_x^2 \varphi + c \partial_t \partial_x K \varphi &= I, \\ \varphi(0) &= \varphi(L), \quad [\varphi] = 0. \end{aligned}$$

Présentons les éléments principaux de la démonstration de ce résultat.

5.3 Éléments de démonstration du théorème 5.4

La démonstration du théorème 5.4 utilise la technique des multiplieurs et le théorème de Huang-Prüss ([67] ou [106]) que nous avons déjà utilisé pour démontrer le théorème 4.9, page 48. Nous ne donnerons que les éléments principaux de la démonstration (voir [R22] pour une démonstration plus complète). Nous considérons les espaces suivants $V = H_0^2(0, L)$, $H = L^2(0, L)$, et l'opérateur $\mathfrak{A}(w, v) = (v, -w^{(4)} - w + kv'')$ sur le domaine $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) = (H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)) \times H_0^2(0, L) \subset V \times H$, ainsi que le produit hermitien

$$\langle (w, v), (\tilde{w}, \tilde{v}) \rangle_{V \times H} = \int_0^L (w'' \overline{\tilde{w}''} + w \overline{\tilde{w}}) dx + \int_0^L v \overline{\tilde{v}} dx.$$

L'opérateur \mathfrak{A} est dissipatif, en effet nous avons

$$\langle \mathfrak{A}(w, v), (w, v) \rangle_{V \times H} = -k \int_0^L |v'|^2 dx \leq 0. \quad (5.11)$$

D'après le théorème d'Huang-Prüss ([67] ou [106]), la stabilisation exponentielle dans $V \times H$ est équivalente à

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathfrak{A}), \quad (5.12)$$

$$\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta - \mathfrak{A})^{-1}\| < \infty. \quad (5.13)$$

L'équation (5.12) n'est pas difficile à établir. Concentrons-nous sur la démonstration de (5.13) que nous allons établir par l'absurde.

Si (5.13) est fautive, alors il existe une suite $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ de réels, et une suite $\{(w_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$,

$$\|(w_n, v_n)\|_{V \times H} = 1, \quad |\beta_n| \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (5.14)$$

et telles qu'en définissant $(f_n, g_n) := (i\beta_n - \mathfrak{A})(w_n, v_n)$ nous ayons

$$(f_n, g_n) \rightarrow (0, 0) \text{ dans } V \times H, \quad (5.15)$$

c'est-à-dire

$$i\beta_n w_n - v_n = f_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } V \quad (5.16)$$

$$i\beta_n v_n + w_n^{(4)} + w_n - kv_n'' = g_n \rightarrow 0 \quad \text{dans } H. \quad (5.17)$$

D'après la dissipativité, (5.14) et (5.15), nous avons

$$k \int_0^L |v_n'|^2 dx = \Re \langle (i\beta_n - \mathfrak{A})(w_n, v_n), (w_n, v_n) \rangle_{V \times H} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

où \Re désigne la partie réelle. D'autre part, (5.16) et (5.17) donnent, quand $n \rightarrow \infty$,

$$i\beta_n \|w_n\|_V^2 - (v_n, w_n)_V \rightarrow 0, \quad (5.19)$$

$$i\beta_n \|v_n\|_H^2 + (w_n^{(4)} + w_n - kv_n'', v_n)_H \rightarrow 0. \quad (5.20)$$

En prenant la différence de (5.19)-(5.20), nous pouvons calculer

$$i\beta_n (\|w_n\|_V^2 - \|v_n\|_H^2) - 2\Re(v_n, w_n)_V - k\|v_n'\|_H^2 \rightarrow 0,$$

dont la partie imaginaire est $\beta_n (\|w_n\|_V^2 - \|v_n\|_H^2) \rightarrow 0$. Par conséquent avec (5.14) on trouve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_V^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_H^2 = \frac{1}{2}$ qui, combiné avec (5.18), donne une contradiction. Ceci conclut la démonstration du théorème 5.4.

5.4 Contrôle robuste d'un miroir bimorphe

Revenons au problème de la régulation du miroir déformable dans un système d'optique adaptative. Le dispositif est décrit par la figure 5.1, page 52.

Nous allons considérer le cas du modèle (5.2) du miroir bimorphe en nous focalisant sur le déplacement transverse qui est le terme dominant. En notant ce déplacement transverse par e (car la lettre w de l'équation (5.2) sera utilisée pour les perturbations dans ce paragraphe), nous écrivons la dynamique du miroir bimorphe :

$$\rho \partial_t^2 e + Q_1 \Delta^2 e + Q_2 e = \tilde{d}_{31} \Delta u \quad (5.21)$$

avec les notations suivantes :

- e est le déplacement transverse ;
- ρ est la densité surfacique ;
- Q_1 est la rigidité flexionnelle, et Q_2 est un terme correctif.

La variable spatiale x appartient à un disque Ω de rayon a . Les conditions aux bords pour le miroir sont celles des conditions libres. Elles s'écrivent en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \partial_r^2 e + \nu \left(\frac{1}{r} \partial_r e + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 e \right) \Big|_{r=a} &= 0, \\ \partial_r \Delta e + \frac{1}{r} (1 - \nu) \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_\theta e \right) \Big|_{r=a} &= 0. \end{aligned}$$

La théorie de Kolmogorov donne la modélisation de la turbulence atmosphérique ϕ_{tur} . Son modèle est généré par un phénomène aléatoire. Plus précisément en notant w_{tur} un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, le modèle dynamique de la turbulence atmosphérique est

$$\partial_t \phi_{tur} = F \phi_{tur} + G \omega_{tur} , \quad (5.22)$$

pour des matrices F et G . Voir la publication [R21] co-écrite avec Lucie Baudouin, Fabien Guignard, et Denis Arzelier, LAAS-CNRS, et les références citées. Nous avons des approximations en dimension finie de cette turbulence en utilisant une famille de polynômes particulière : les modes de Zernike. Les premiers modes de Zernike sont donnés par le tableau 5.4 et nous avons donc en coordonnées polaires :

$$\phi_{tur}(r, \theta, t) \approx \sum_{i=3}^{N_Z} \phi_i(t) Z_i(r, \theta) ,$$

en omettant les trois premiers modes (qui sont corrigés par le miroir primaire).

En combinant (5.21) et (5.22) et en rajoutant la sortie donnée par l'analyseur de Shack-Hartmann et les perturbations, nous obtenons le modèle EDP suivant

$$\begin{cases} x' = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases}$$

avec

i	$Z_i(r, \theta)$	Nom
0	1	Piston
1	$2\frac{r}{a} \cos \theta$	inclinaison selon y
2	$2\frac{r}{a} \sin \theta$	inclinaison selon x
3	$\sqrt{3}(2(\frac{r}{a})^2 - 1)$	focus
4	$\sqrt{6}(\frac{r}{a})^2 \cos 2\theta$	astigmatisme
5	$\sqrt{6}(\frac{r}{a})^2 \sin 2\theta$	astigmatisme
6	$\sqrt{8}(3(\frac{r}{a})^3 - 2\frac{r}{a}) \cos \theta$	coma selon x
7	$\sqrt{8}(3(\frac{r}{a})^3 - 2\frac{r}{a}) \sin \theta$	coma selon y
8	$\sqrt{5}(6(\frac{r}{a})^4 - 6(\frac{r}{a})^2 + 1)$	sphéricité

TAB. 5.1 – Premiers modes de Zernike.

- l'état x est $(e, \partial_t e, \phi_{tur})$;
- $w = (w_{mod}, w_{SH}, w_{tur}, w_{piezo})$ réunit les perturbations (respectivement du modèle, de l'analyseur, de la turbulence atmosphérique, des capteurs piézo-électriques) ;
- u est la tension. C'est notre contrôle ;
- $z = (\phi_{res}, u)$ est la sortie à contrôler ;
- $y = (y_{pe}, y_{SH})$ réunit la sortie piézo-électrique et la sortie de l'analyseur ;
- $A, B_1, B_2 \dots$ sont des opérateurs (voir [R21] pour une expression).

Considérons un cadre général de synthèse de commande robuste (voir [46]) et supposons que X, U, W, Z et Y sont des Hilberts séparables, A générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe sur X , et que $B_1, B_2 \dots$ sont des opérateurs linéaires bornés sur leur espace. Le système avec une sortie à contrôler est le suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), & x(0) = x_0, \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{12} u(t), \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

On cherche un contrôleur \mathcal{K} qui stabilise ce système et garantisse un gain L_2 entre w et z plus petit que $\gamma : \|w \mapsto z\| < \gamma$. Le contrôleur robuste \mathcal{K} est donnée par une EDP de la forme :

$$\begin{cases} p'(t) = Mp(t) + Ny(t), & p(0) = p_0 \\ u(t) = Lp(t) + Ry(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (5.24)$$

avec M, N, L , et R des opérateurs à calculer. En notant le rayon spectral ρ , nous avons le résultat suivant (voir [140]) :

Théorème 5.5 *Il existe un contrôleur \mathcal{K} tel que le système (5.23) avec le contrôle (5.24) satisfait $\|w \mapsto z\| < \gamma$, si et seulement s'il existe deux opérateurs définis positifs P et $Q \in \mathcal{L}(X)$ vérifiant*

- $A^*P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^*)P + C_1^*C_1 = 0$ et $A + (\gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^*)P$ génère un semi-groupe stable,
- $AQ + QA^* + Q(\gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2)Q + B_1B_1^* = 0$ et $A^* + (\gamma^{-2}C_1^*C_1 - C_2^*C_2)Q$ génère un semi-groupe stable,
- $\rho(PQ) < \gamma^2$.

Dans ce cas, le contrôleur \mathcal{K} est donné par

$$\begin{aligned} M &= A + (\gamma^{-2}B_1B_1^* - B_2B_2^*)P - Q(I - \gamma^{-2}PQ)^{-1}C_2^*C_2, \\ N &= -Q(I - \gamma^{-2}PQ)^{-1}C_2^*, \\ L &= B_2^*P, \\ R &= 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier facilement que le théorème 5.5 s'applique à notre situation, en introduisant les espaces fonctionnels suivants : $X = H_{bc}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $W = (L^2(\Omega))^4$, $U = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $Y = Z = (L^2(\Omega))^2$.

Pour tronquer le système et calculer numériquement la commande robuste du théorème 5.5, il faut une base de la déformation du miroir e et une base de la perturbation atmosphérique Φ_{tur} séparément. Pour la variable e nous pouvons considérer les fonctions de Bessel qui nous permettent de construire les fonctions propres de Δ^2 (avec bord libre) :

$$\begin{aligned} z_{kj}^1(r, \theta) &= a_{kj} \left(J_k \left(\frac{\lambda_{kj}r}{a} \right) + c_{kj} I_k \left(\frac{\lambda_{kj}r}{a} \right) \right) \cos k\theta \\ z_{kj}^2(r, \theta) &= a_{kj} \left(J_k \left(\frac{\lambda_{kj}r}{a} \right) + c_{kj} I_k \left(\frac{\lambda_{kj}r}{a} \right) \right) \sin k\theta \end{aligned}$$

avec

- J_k (*resp.* I_k) : fonction de Bessel (*resp.* modifiée) de 1^{ere} espèce et d'ordre k ;
- λ_{kj} et c_{kj} : coefficients liés aux conditions de bord du miroir ;
- a_{kj} : coefficients de normalisation ;
- $\left(\frac{\lambda_{kj}}{a} \right)^4$ sont les valeurs propres associées.

Pour la variable Φ_{tur} nous pouvons utiliser les modes de Zernike (voir les premiers dans la table 5.4).

Dans [R21] nous avons calculé numériquement la commande robuste en minimisant le rapport : $\frac{\|\phi_{res}\|_{L^2}}{\|\phi_{tur}\|_{L^2}}$. Ce critère correspond justement au critère de performance de [77] par exemple. Nous avons ensuite effectué des simulations de Monte-Carlo et noté une atténuation comparable à [103]. Cette comparaison prouve l'intérêt de la méthode.

Ces simulations concluent notre étude sur les systèmes d'optique adaptative. Beaucoup de questions restent et nous proposons des pistes de recherche dans les perspectives (voir à partir de la page 73).

Chapitre 6

Contrôle frontière de systèmes hyperboliques

Dans cette partie nous allons revoir nos résultats en ce qui concerne le contrôle frontière de systèmes quasi-linéaires hyperboliques. Une propriété très importante pour nous est l'existence de coordonnées de Riemann qui sont un outil pour l'analyse et la commande de tels systèmes (voir [18, 78] par exemple). Nous étudions l'effet de perturbations sur la stabilité. Ces dernières sont vues comme des termes non homogènes dans le système hyperbolique et sont supposés être petits au sens de la norme C^1 (voir le paragraphe 6.2 ci-dessous pour plus de détails). Nous allons étudier une condition suffisante en terme de conditions aux bords pour la stabilisation exponentielle des solutions.

Ce résultat est ensuite appliqué à la régulation de l'écoulement de l'eau dans un canal, en présence de petites perturbations. Les ouvertures des portes aux extrémités des biefs sont nos commandes. Le modèle considéré n'est pas strictement hyperbolique à cause de la friction, de la pente et de l'apport ou de la perte d'eau le long du canal. Notre condition suffisante de stabilité exponentielle nous permet de calculer un contrôle frontière (donc des commandes de portes de vannes) pour que le niveau et le débit de l'eau dans le canal convergent vers l'équilibre choisi. Ce contrôle est une fonction des paramètres physiques des vannes et uniquement des hauteurs d'eau aux extrémités du canal. C'est donc un retour de sortie simple à utiliser sur des applications réelles.

Nous illustrons ce résultat par des simulations numériques en utilisant les valeurs numériques d'une rivière (en l'occurrence la Sambre en Belgique), et par des expérimentations sur un micro-canal (celui de l'École d'ingénieurs en systèmes avancés et réseaux (ESISAR), membre de l'INP Grenoble, située à Valence).

Dans le paragraphe 6.1, nous introduisons les équations de Saint-Venant permettant de modéliser un canal avec une petite pente, de la friction et éventuellement des fuites (ou de l'apport) d'eau le long du canal. Nous énonçons la condition suffisante de stabilité sur les systèmes quasi-linéaires non-homogènes dans le paragraphe 6.2. Dans le paragraphe 6.3 nous

appliquons ce résultat au modèle introduit dans le paragraphe 6.1 et nous illustrons la convergence par des simulations numériques. Nous concluons ce chapitre par le paragraphe 6.4 avec des résultats d'expérimentation sur un micro-canal.

6.1 Equations de Saint-Venant en présence de perturbations

Comme motivation de cette étude, étudions le problème de la régulation du débit et du niveau de l'eau dans un bief. Voir la figure 6.1 où nous avons noté $H(x, t)$ la hauteur de l'eau dans un canal, et $Q(x, t)$ son débit. Le contrôle est donné par les deux portes aux extrémités du bief. Différentes expressions pour les conditions aux bords sont possibles en fonction de l'installation hydraulique.

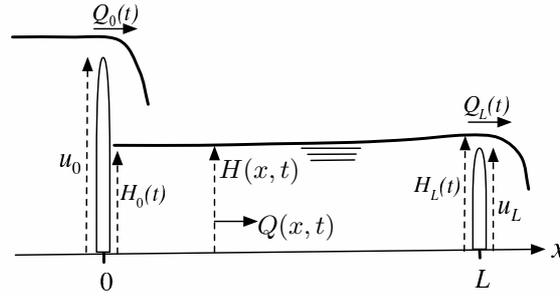


FIG. 6.1 – Contrôle frontière de l'eau dans un bief.

Nous supposons que le canal est horizontal, que le bief est rectangulaire (avec une section constante), et que le canal a des pertes (ou des apports) en eau (avec une invariance par rapport au temps) qui ne modifie pas l'équation de conservation du moment.

Dans ce contexte les équations de Saint-Venant (ou *shallow water equations*) s'écrivent (voir le livre [59], et l'article historique [113]), pour tout $x \in (0, L)$ et $t \geq 0$,

$$\partial_t H(x, t) + \partial_x \left(\frac{Q(x, t)}{B} \right) = q(x), \quad (6.1)$$

$$\partial_t Q(x, t) + \partial_x \left(\frac{Q^2(x, t)}{BH(x, t)} + \frac{gBH^2(x, t)}{2} \right) = gBH(I - J) + kq \frac{Q}{BH}. \quad (6.2)$$

La première équation décrit une conservation de la masse, tandis que la deuxième une conservation du moment. Dans ces équations nous utilisons les notations suivantes :

- g est la constante de gravitation ;
- $q(x)$ l'apport (ou la perte) d'eau le long du canal ;
- B est la largeur du bief ;

- I est la pente ;
- $J(Q, H) = \frac{n_M^2 Q^2}{S(H)^2 R(H)^{4/3}}$, est la friction ;
- $k = 0$ si q est positif, et $k = 1$ sinon.

Les conditions frontières dépendent de la configuration physique. Voir [R23], ou [47] pour différentes possibilités. Le choix que nous allons faire ici est celui d'une porte laissant passer l'eau par en-dessous en $x = 0$ et d'une porte laissant passer l'eau par au-dessus en $x = L$ (comme sur la figure 6.2) :

$$Q(0, t) = U_0 B \mu_0 \sqrt{2g(z_{up} - H(0, t))}, \quad (6.3)$$

où z_{up} est le niveau d'eau en amont du bief, et

$$H(L, t) = \left(\frac{Q^2(L, t)}{2gB^2\mu_L^2} \right)^{1/3} + h_s + U_L, \quad (6.4)$$

où h_s est la hauteur fixe de la porte aval. Les quantités μ_0 et μ_L sont des coefficients hydrauliques.

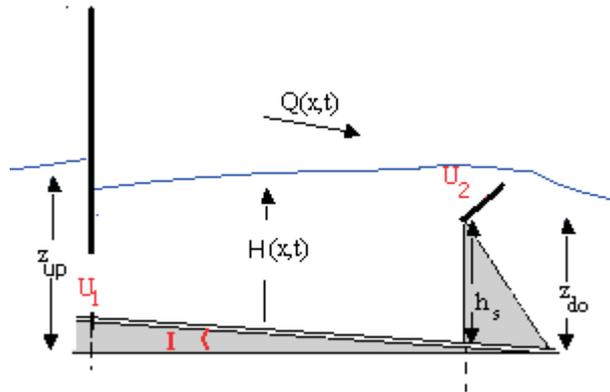


FIG. 6.2 – Bief muni de deux portes décrites par (6.3) et (6.4).

Le problème que nous allons étudier est celui de la régulation des portes aux extrémités pour que

- le contrôle ne dépende que des sorties, c'est-à-dire des variables $H(0, t)$ et $H(L, t)$
- il existe une solution de notre modèle EDP ;
- l'état (H, Q) converge vers l'équilibre (propriété d'attractivité) ;
- la solution reste proche de l'équilibre (propriété de stabilité).

Le problème de la stabilisation de l'écoulement de l'eau dans un canal en présence de perturbations a déjà été étudié, voir par exemple [91] pour un récent état de l'art. Souvent des approximations en dimension finie des équations précédentes sont introduites comme dans [54, 90]. Des commandes H_∞ ont été calculées dans [83, 84] et plus récemment dans [82].

Une approche Lyapunov est possible pour aborder ce problème, voir [44, 47] pour le cas sans perturbation dans (6.1)-(6.2). Cette méthode a été utilisée pour les systèmes quasi-linéaires hyperboliques homogènes généraux dans [45]. Nous reviendrons plus bas sur ce dernier résultat (voir le paragraphe 6.2 plus bas).

Notons aussi que l'approche utilisée ici est l'étude de l'influence des termes non-homogènes de (6.1)-(6.2) sur l'évolution des coordonnées de Riemann. Cette approche peut être aussi utilisée pour la détection de fuites dans des canaux d'irrigation ou la détection de pannes de capteurs ou d'actionneurs. Voir par exemple [14, 35]. Pour ce type de problèmes on peut calculer un observateur du système et stabiliser le système en erreur.

6.2 Contrôle frontière de systèmes hyperboliques quasi-linéaires non-homogènes

Avant de donner la formulation générale de notre résultat [R20] (co-écrit avec Joseph Winkin, université de Namur, et Georges Bastin, université de Louvain-la-Neuve) concernant le contrôle frontière de systèmes hyperboliques quasi-linéaires non-homogènes, présentons quelques idées de la démonstration sur les équations de Saint-Venant (6.1)-(6.2). Pour cela réécrivons notre système sous forme matricielle :

$$\partial_t \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} + A(H, Q) \partial_x \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x) \\ gBH(I - J) + kq \frac{Q}{BH} \end{pmatrix}$$

avec la définition $A(H, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1/B \\ gBH - (Q^2/BH^2) & 2Q/BH \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A(H, Q)$ sont $\lambda_1(H, V) = (Q/H) - \sqrt{gH}$, et $\lambda_2(H, V) = (Q/H) + \sqrt{gH}$ et sont appelées vitesses caractéristiques [18]. On dira que l'écoulement est fluvial si $\lambda_1(H, Q) < 0 < \lambda_2(H, Q)$. Calculons les équilibres du système. Avec des conditions aux bords constantes, $Q(0, t) = \bar{Q}_0$ et $H(L, t) = \bar{H}_L$ pour tout t , il existe un équilibre $H(x, t) = \bar{H}(x)$, et $Q(x, t) = \bar{Q}(x)$, pour tout $x \in [0, L]$, et pour tout t , donné par les équations différentielles :

$$\begin{aligned} \bar{Q}'(x) &= Bq(x) \\ \bar{H}'(x) &= -g\bar{H} \frac{I - \bar{J}}{\lambda_1 \lambda_2} - q \frac{\bar{Q}}{B^2 \bar{H}} \frac{(k - 2B)}{\lambda_1 \lambda_2}, \end{aligned}$$

Le problème de contrôle est de rendre ces équilibres localement asymptotiquement stables.

Dans les coordonnées de Riemann $\xi_1 = (Q/H) - 2\sqrt{gH} - (\bar{Q}/\bar{H}) + 2\sqrt{g\bar{H}}$, et $\xi_2 = (Q/H) + 2\sqrt{gH} - (\bar{Q}/\bar{H}) - 2\sqrt{g\bar{H}}$, le système (6.1)-(6.2) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \partial_t \xi_1 + \lambda_1(\xi_1, \xi_2) \partial_x \xi_1 &= h_1(\xi_1, \xi_2) \\ \partial_t \xi_2 + \lambda_2(\xi_1, \xi_2) \partial_x \xi_2 &= h_2(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \tag{6.5}$$

avec des fonctions h_1 et h_2 qui sont données dans [R23]. Nous choisirons notre contrôle pour que les conditions aux bords soient équivalentes à $\xi_1(L, t) = k_L \xi_2(L, t)$, et $\xi_2(0, t) = k_0 \xi_1(0, t)$. Sans perturbation, nous avons $h_1 = h_2 = 0$, et donc le long des caractéristiques

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i(x_i, t) , \quad (6.6)$$

les coordonnées de Riemann sont invariantes. D'après les conditions aux bords, la condition $k_0 k_L < 1$ est une condition suffisante pour la stabilité asymptotique locale. Ce cas sans perturbation est étudié dans [R3] (voir aussi [78]). En présence de perturbations, le long des solutions de (6.6), nous avons

$$\xi_i(x_i(t), t) = \xi_i(x_i(0), 0) + \int_0^t h_i(\xi_1(x_i(s), s), \xi_2(x_i(s), s)) ds ,$$

et donc les coordonnées de Riemann ne sont plus invariantes le long des caractéristiques. En revanche nous pouvons démontrer que si $k_0 k_L < 1$ et si les termes non-homogènes sont suffisamment petits (par rapport à ξ) alors nous avons la stabilité asymptotique locale. C'est le résultat principal de [R20]. Un autre type de termes non-homogènes a été considéré dans [R27]. Enonçons le résultat principal de [R20] dans le cas particulier d'un système de deux lois de conservation avec des termes non-homogènes. Pour cela considérons $\xi : [0, L] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\partial_t \xi + \Lambda(\xi) \partial_x \xi = \mathbf{h}(\xi) \quad (6.7)$$

où $\Lambda : B(0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est une fonction C^1 telle que $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $B(0, \varepsilon_0)$ est la boule fermée de \mathbb{R}^2 centrée en 0 et de rayon ε_0 , avec

$$\lambda_1(0) < 0 < \lambda_2(0), \quad (6.8)$$

et $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) : B(\varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction C^1 telle que

$$\mathbf{h}(0) = 0 . \quad (6.9)$$

Les conditions aux bords de (6.7) seront

$$\begin{pmatrix} \xi_1(L, t) \\ \xi_2(0, t) \end{pmatrix} = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \xi_1(0, t) \\ \xi_2(L, t) \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

où $\mathbf{g} : B(0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction C^1 satisfaisant $\mathbf{g}(0) = 0$. Nous avons la définition suivante de compatibilité des conditions initiales avec les conditions aux bords :

Définition 6.1 Une fonction $\xi^\# \in C^1(0, L; \mathbb{R}^2)$ satisfait la condition de compatibilité \mathcal{C} si

$$\begin{pmatrix} \xi_1^\#(L) \\ \xi_2^\#(0) \end{pmatrix} = \mathbf{g} \begin{pmatrix} \xi_1^\#(0) \\ \xi_2^\#(L) \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\boldsymbol{\xi}^\#(L))\partial_x \boldsymbol{\xi}_1^\#(L) - \mathbf{h}_1(\boldsymbol{\xi}^\#(L)) \\ \lambda_2(\boldsymbol{\xi}^\#(0))\partial_x \boldsymbol{\xi}_2^\#(0) - \mathbf{h}_2(\boldsymbol{\xi}^\#(0)) \end{pmatrix} = \nabla \mathbf{g} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1^\#(0) \\ \boldsymbol{\xi}_2^\#(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\boldsymbol{\xi}^\#(0))\partial_x \boldsymbol{\xi}_1^\#(0) - \mathbf{h}_1(\boldsymbol{\xi}^\#(0)) \\ \lambda_2(\boldsymbol{\xi}^\#(L))\partial_x \boldsymbol{\xi}_2^\#(L) - \mathbf{h}_2(\boldsymbol{\xi}^\#(L)) \end{pmatrix}.$$

Nous notons $B_C(\varepsilon_0)$ l'ensemble des fonctions continûment différentiables $\boldsymbol{\xi}^\# : [0, L] \rightarrow B(0, \varepsilon_0)$ satisfaisant la condition de compatibilité \mathcal{C} .

Nous introduisons aussi les notations classiques suivantes. Pour toute fonction Φ continue sur $[0, L]$ et Ψ continûment différentiable sur $[0, L]$, nous noterons $|\Phi|_{C^0(0,L)} = \max_{x \in [0,L]} |\Phi(x)|$, et $|\Psi|_{C^1(0,L)} = |\Psi|_{C^0(0,L)} + |\Psi'|_{C^0(0,L)}$. Pour toute matrice $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, le rayon spectral sera noté $\rho(K)$.

En collaboration avec Joseph Winkin, université de Namur, Georges Bastin, université de Louvain-la-Neuve, nous avons alors le résultat suivant (voir [R20] pour la démonstration) :

Théorème 6.2 *Si $\rho(\nabla \mathbf{g}(0)) < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$, $H > 0$, $\mu > 0$, et $C > 0$ tels que pour toute fonction continûment différentiable $\mathbf{h} : B(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\mathbf{h}(0) = 0$ et $|\nabla \mathbf{h}(0)| \leq H$, pour toute fonction $\boldsymbol{\xi}^\# \in B_C(\varepsilon)$, il existe une et une seule fonction $\boldsymbol{\xi} \in C^1([0, L] \times [0, +\infty); \mathbb{R}^2)$ satisfaisant l'équation (6.7), les conditions aux bords (6.10) et la condition initiale*

$$\boldsymbol{\xi}(x, 0) = \boldsymbol{\xi}^\#(x), \forall x \in [0, L]. \quad (6.11)$$

De plus, le système est localement exponentiellement stable pour la norme C^1 :

$$|\boldsymbol{\xi}(\cdot, t)|_{C^1(0,L)} \leq C e^{-\mu t} |\boldsymbol{\xi}^\#|_{C^1(0,L)}, \forall t \geq 0. \quad (6.12)$$

Ce résultat généralise [R3] obtenu en collaboration avec Jonathan de Halleux, Georges Bastin, université de Louvain-la-Neuve, Jean-Michel Coron, université Paris-Sud, et Brigitte d'Andréa-Novel, Mines de Paris qui étudie plus particulièrement le cas des systèmes de lois de conservation homogènes.

Une autre condition d'amortissement a été récemment établie dans [45] pour les systèmes quasi-linéaires de dimension n . Pour énoncer ce dernier résultat (dans le cas particulier $n = 2$), nous avons besoin des notations : Pour toute matrice $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, nous noterons $\|K\| = \max\{|Kx|, x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$, et $\rho_1(K) = \inf\{\|\Delta K \Delta^{-1}\|, \Delta \in \mathcal{D}_{2,+}\}$ où $\mathcal{D}_{2,+}$ désigne l'ensemble des matrices diagonales de taille 2×2 définies positives. Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 6.3 ([45]). *Si $\rho_1(\nabla g(0)) < 1$ alors le système hyperbolique quasi-linéaire homogène*

$$\partial_t \boldsymbol{\xi} + \Lambda(\boldsymbol{\xi}) \partial_x \boldsymbol{\xi} = 0$$

est localement exponentiellement stable pour la norme H^2 .

Faisons quelques remarques sur ce dernier résultat :

Remarque 6.4 – La démonstration repose sur le calcul d’une fonction de Lyapunov comme dans [21, 44, 47]. La fonction de Lyapunov calculée dans [45] utilise un terme exponentiel $e^{-\mu x}$ comme dans [42] pour la stabilité de l’équation d’Euler. Elle utilise aussi les dérivées spatiales de ξ d’ordre 2. C’est pourquoi le résultat de [45] est valable pour la norme H^2 .

- Comme le calcul de [45] donne une fonction de Lyapunov avec une décroissance stricte, une piste de recherche naturelle est d’utiliser l’inégalité de Lyapunov pour calculer une marge de stabilité pour les termes non-homogènes, et peut-être démontrer un résultat de stabilité pour le système hyperbolique quasi-linéaire non-homogène (6.7). Cette démonstration pourrait permettre de calculer la valeur H dans le théorème 6.2.
- Notons aussi que la condition de stabilité du théorème 6.3 est moins forte que celle de [78] (qui est la même que celle du théorème 6.2) : $\rho(\nabla g(0)) < 1$. En effet dans [45] il est montré que pour toute matrice K , nous avons $\rho_1(K) \leq \rho(K)$ et qu’il existe une matrice K d’ordre 2 telle que $\rho_1(K) < \rho(K)$.
- Les théorèmes 6.2 et 6.3 posent les questions ouvertes suivantes : est ce qu’il existe des conditions aux bords telles que nous ayons la stabilité exponentielle pour la norme C^1 , mais pas pour la norme H^2 ? Et réciproquement est ce qu’il existe des conditions aux bords telles que nous ayons la stabilité exponentielle pour la norme H^2 , mais pas pour la norme C^1 ?

6.3 Validation numérique

Les lois de commande calculées dans [R3] (en collaboration avec J. de Halleux, J.-M. Coron, B. d’Andréa-Novel, et G. Bastin) par une approche invariants de Riemann sont utilisées et implémentées dans le cadre d’un contrat industriel liant le CESAME (Université Catholique de Louvain-la-Neuve) et le service d’Etudes Hydrologiques du Ministère Wallon de l’Equipement et des Transports (Belgique), en charge de l’exploitation des canaux de la Basse Sambre.

Dans [R23] co-écrit avec Valérie Dos Santos, Université Lyon 1, nous appliquons le résultat précédent aux équations de Saint-Venant (6.1)-(6.2) en présence de perturbations pour tenir compte de la friction, de la pente et d’éventuels fuites ou apports d’eau le long du canal.

Plus précisément, dans le cas des conditions frontière (6.3)-(6.4), nous pouvons démontrer que les contrôles suivants :

$$U_0 = H_0 \frac{\frac{\bar{Q}_0}{BH_0} - 2\sqrt{g}\alpha_0(\sqrt{H_0} - \sqrt{\bar{H}_0})}{\mu_0 \sqrt{2g(z_{up} - H(0,t))}},$$

$$U_L = H_L - h_s - \left[\frac{(H_L [\frac{\bar{Q}_L}{BH_L} + 2\sqrt{g}\alpha_L(\sqrt{H_L} - \sqrt{\bar{H}_L})])^2}{2g\mu_L^2} \right]^{1/3},$$

avec $\alpha_0 = \frac{1-k_0}{1+k_0}$, $\alpha_L = \frac{1-k_L}{1+k_L}$, $H_0 = H(0, t)$ et $H_L = H(L, t)$, rendent le système en boucle fermée localement asymptotiquement stable pour la norme C^1 . Notons que ce sont des contrôles

frontière qui ne dépendent que de la sortie (si on définit la sortie comme étant uniquement la hauteur d'eau aux deux extrémités du bief). Cette commande est donc facilement implémentable pour des applications.

Nous avons effectué des simulations numériques en prenant les valeurs numériques de la Sambre qui est une rivière entre Namur et Charleroi. Les caractéristiques physiques du bief de la Sambre que nous avons considéré sont données dans le tableau 6.1. Nous avons utilisé le

paramètres	B (m)	L (m)	I	μ_0 $= \mu_L$	n_M ($s.m^{-1/3}$)
valeurs	40	11239	$7.92e^{-5}$	0.4	0.30

TAB. 6.1 – Données physiques de la Sambre.

schéma de Preismann pour discrétiser les équations.

Trois simulations numériques ont été effectuées (voir la figure 6.3) :

- (S1) $k_0 = -0.25$, et $k_L = -0.16$, nous observons que nous avons une stabilité asymptotique ;
- (S2) $k_0 = -0.92$, et $k_L = -0.59$, nous observons que nous avons une stabilité asymptotique ;
- (S3) $k_0 = -1.05$, et $k_L = -0.68$, nous observons que le système est instable.

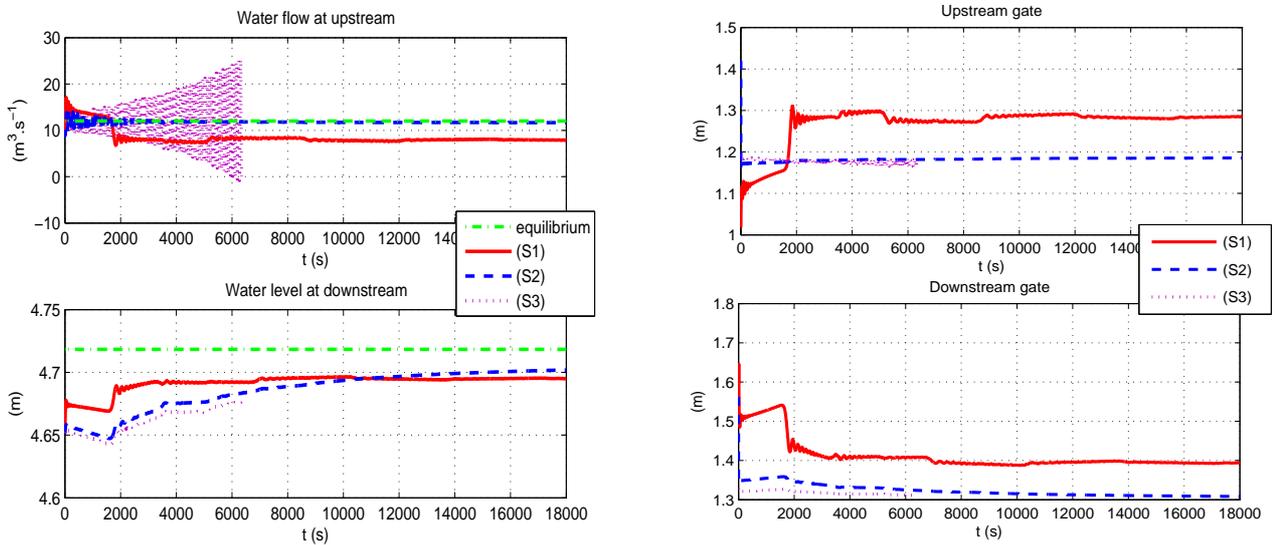


FIG. 6.3 – Simulations numériques : à gauche, du haut vers le bas : débit et niveau de l'eau en amont ; à droite, du haut vers le bas : ouverture de la porte amont et aval pour S1 (en trait plein), pour S2 (en trait discontinu) et pour S3 (en pointillés). L'équilibre à atteindre est en trait mixte.

Nous pouvons vérifier que la vitesse de convergence augmente avec le produit $|k_0 k_L|$. Cette observation est logique en étudiant la démonstration du théorème 6.2, et le calcul de μ dans l'inégalité (6.12).

L'équilibre qui est représenté sur les graphiques de la figure 6.3 est celui sans perturbation (c'est le seul calculable en pratique). Pour éliminer l'écart entre l'équilibre perturbé et l'équilibre sans perturbation, il suffit de rajouter un petit terme intégral. C'est ce que nous avons fait pour la simulation SI1 (voir la figure 6.4).

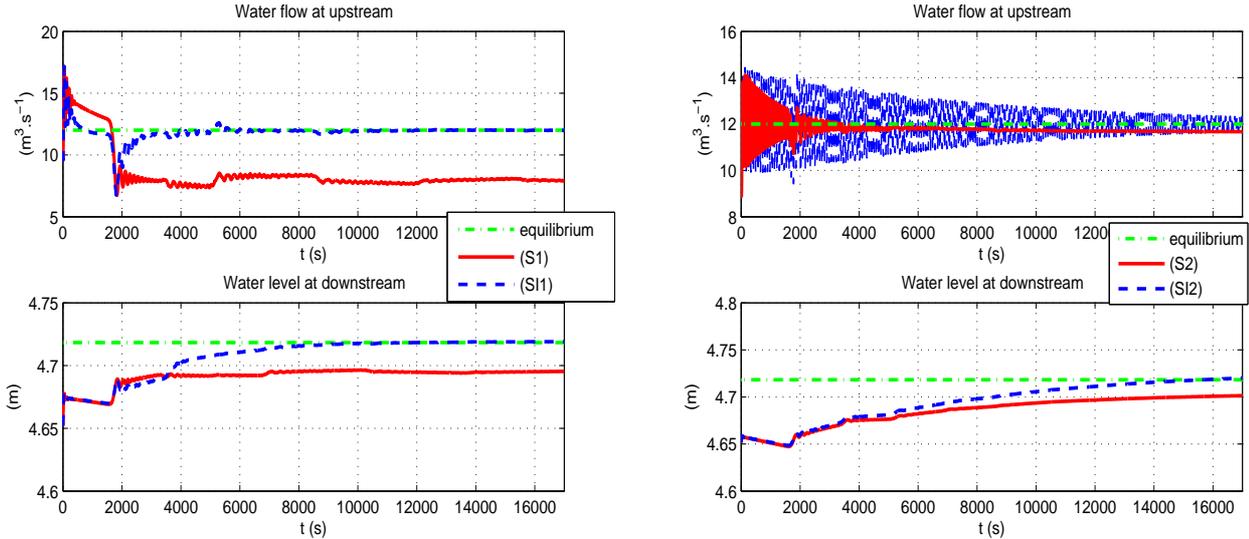


FIG. 6.4 – Simulations numériques : à gauche, du haut vers le bas : débit et niveau de l'eau en amont ; à droite, du haut vers le bas : ouverture de la porte amont et aval pour S1 (en trait plein), pour SI1 (en traits discontinus) avec un petit terme intégral. L'équilibre à atteindre est en trait mixte.

La stabilité asymptotique avec un contrôle frontière proportionnel intégral n'a jamais été étudié pour des équations hyperboliques quasi-linéaires. En revanche elle a été étudiée dans [47] pour des équations hyperboliques linéaires.

6.4 Validation expérimentale

Nous présentons dans [R23] des expérimentations effectuées sur le micro-canal du Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes, dirigé par Eduardo Mendes. C'est un laboratoire de l'ESISAR, l'école nationale supérieure des systèmes avancés et réseaux, située à Valence. Cette école fait partie du groupe INP Grenoble.

Les caractéristiques physiques du micro-canal sont données par le tableau 6.4.

paramètres	$B(m)$	$L (m)$	$n_M (s \cdot m^{-1/3})$	μ_0	μ_L	I
valeurs	0.1	7	1.03	0.6	0.73	$1.6e^{-3}$

TAB. 6.2 – Données physiques du micro-canal de Valence.

Nous avons considéré les trois jeux de paramètres suivants :

(E1) $k_0 = -0.0853$, $k_L = -0.463$;

(E2) $k_0 = -0.2134$, $k_L = -1.1575$;

(E3) $k_0 = -0.3414$, $k_L = -1.852$.

Dans chaque cas nous avons observé la stabilité asymptotique (voir les graphiques de la figure 6.5).

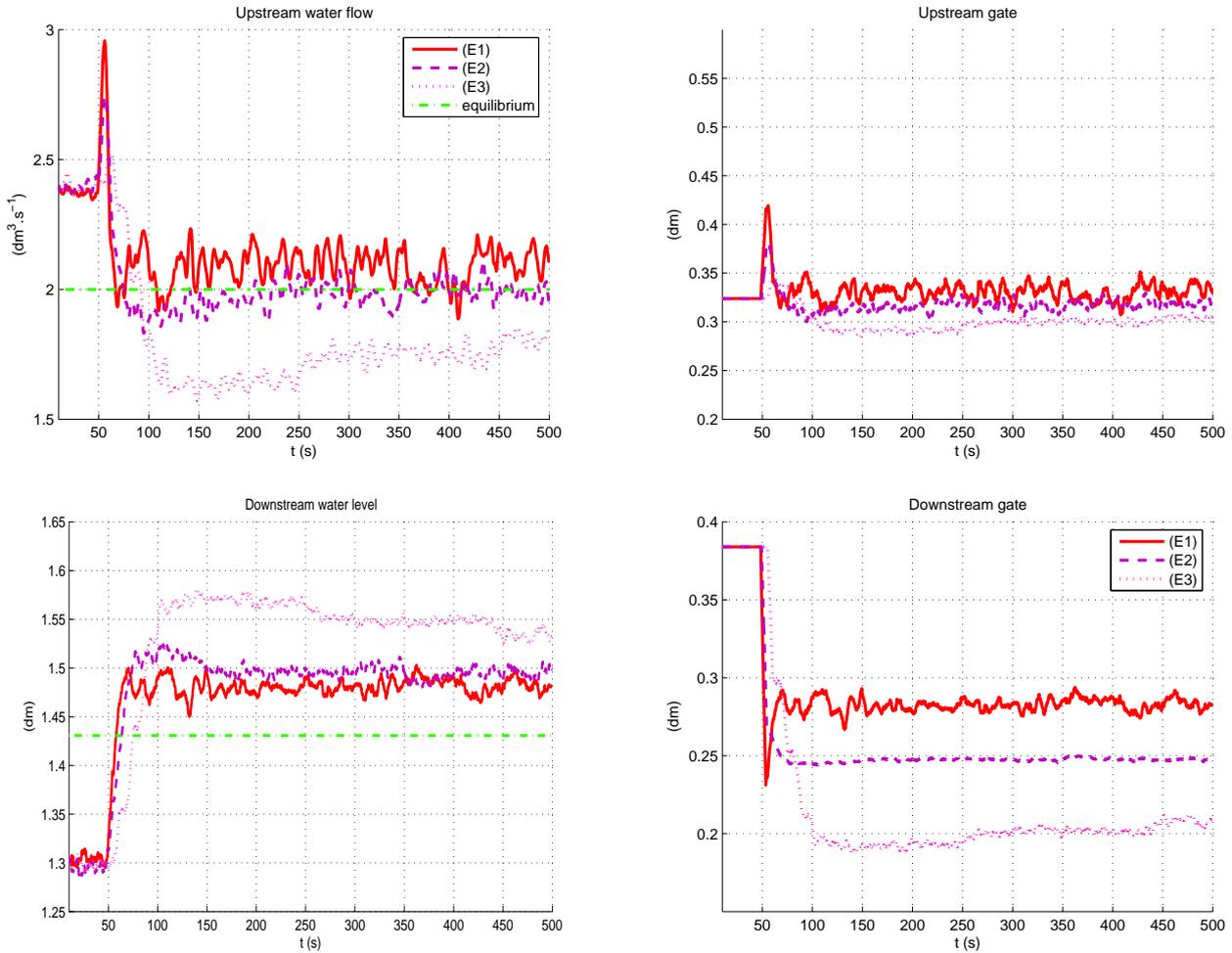


FIG. 6.5 – Expérimentations : à gauche, du haut vers le bas, débit de l'eau en amont, et niveau de l'eau en aval ; à droite, du haut vers le bas, ouverture de la porte amont, et de la porte aval pour E1 (en trait plein), pour E2 (en trait discontinu) et pour E3 (en pointillés). L'équilibre à atteindre est en trait mixte.

De nouveau nous pouvons éliminer l'écart entre l'équilibre désiré et celui perturbé en rajoutant un petit terme intégral dans le calcul du contrôle. C'est ce que nous avons fait pour la seconde expérimentation. Voir les graphiques de la figure 6.6 où l'expérimentation (EI1=E2) correspond à (E2) de la figure 6.5. Dans l'expérimentation (EI3), nous avons utilisé un terme intégral un peu plus grand et nous observons un grand transitoire.

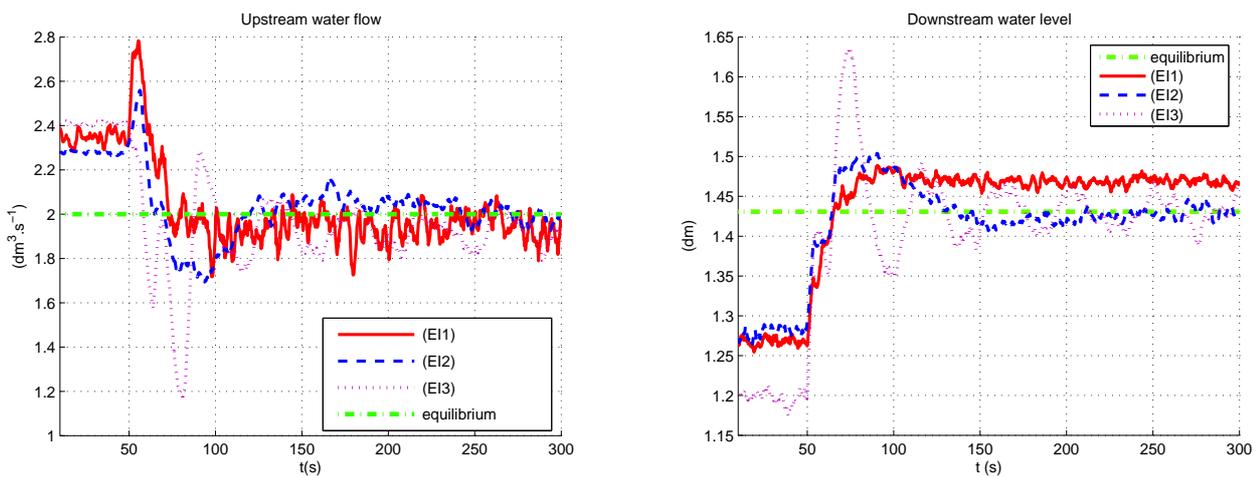


FIG. 6.6 – Expérimentations : à gauche, débit de l'eau en amont ; et à droite, niveau de l'eau en aval pour EI1 (en trait plein), pour EI2 (en trait discontinu) et pour EI3 (en pointillés).

Perspectives

Décrivons les pistes de recherche qui mériteraient d'être étudiées à la lecture de ce document.

Commande de systèmes de dimension finie

Commandes hybrides Dans le contexte de la stabilisation de systèmes non-linéaires, je suis actuellement deux directions de recherche. La première est celle concernant la synthèse de retours de sortie hybrides. Dans le cas d'informations partielles sur l'état du système, créer une hystérésis sur la sortie peut ne pas être suffisant pour définir un contrôle hybride stabilisant. Une solution peut être de coupler cette construction avec un observateur (ou au moins un observateur de la norme). Un premier résultat a été obtenu dans [C35], en collaboration avec Andrew Teel, université de Santa-Barbara, pour le problème de recollement de deux retours de sortie. Nous utilisons une propriété de détectabilité qui nous permet d'établir l'existence d'un estimateur asymptotique de la norme de l'état.

Toujours en collaboration avec Andrew Teel nous allons focaliser notre étude sur le cas d'un système soumis à une saturation en entrée. Pour ce type de système, nous supposons que nous pouvons calculer un retour de sortie local linéaire et une commande non-linéaire globale. Nous essayons de calculer des conditions constructibles pour recoller la commande linéaire locale et la commande non-linéaire globale en fonction de la sortie uniquement. Nous envisageons de calculer des conditions écrites en terme d'inégalités linéaires matricielles. L'optimisation du domaine, où la commande linéaire locale est utilisée, est très importante puisqu'elle permet d'optimiser la vitesse de convergence du système bouclé. Ce dernier résultat peut être vu comme un résultat d'*anti-windup* puisqu'il permettra d'agrandir le domaine de stabilité d'une commande linéaire locale.

Fonctions de Lyapunov assignables Une autre piste de recherche est celle de la synthèse de fonctions de Lyapunov assignables (*Control Lyapunov Functions, CLF*) à partir d'une propriété de contrôlabilité locale (ou de la donnée d'une CLF locale) et d'une propriété de contrôlabilité pratique (contrôlabilité à un ensemble). Nous avons vu au chapitre 1 qu'il n'était pas toujours possible de calculer un retour continu et stabilisant à partir d'une propriété de contrôlabilité, et donc à partir d'une CLF. En collaboration avec Vincent Andrieu, LAAS-

CNRS, je souhaite étudier des conditions suffisantes pour que l'on puisse calculer une CLF globale à partir de ces deux propriétés de contrôlabilité. La difficulté principale vient du fait que l'interpolation de deux CLF n'est pas nécessairement une CLF.

En collaboration avec Vincent Andrieu, Denis Arzelier, et Sophie Tarbouriech, LAAS-CNRS, j'envisage d'étudier le cas d'un système soumis à une non-linéarité de secteur qui dépend de la taille de l'état, autrement dit qui satisfait une certaine condition sur un compact contenant l'origine et qui vérifie une autre condition de secteur à l'extérieur d'un autre compact. Sous une propriété de recouvrement de l'espace d'état, nous envisageons d'étudier sous quelles conditions nous pouvons calculer une commande globale. Nous avons trouvé un exemple pour lequel il ne suffit pas d'envelopper les deux conditions de secteur dans une seule condition de secteur pour stabiliser le système non-linéaire. Au contraire, avec cet exemple, nous espérons démontrer qu'il est nécessaire de conserver les conditions de secteur locale et non-locale (à l'extérieur d'un ensemble) pour stabiliser ce type de systèmes non-linéaires.

Systèmes soumis à d'autres types de non-linéarité Je souhaite poursuivre mes travaux de recherche pour la synthèse de commandes stabilisantes optimales pour des systèmes comportant des non-linéarités de secteur particulières. Plusieurs pistes méritent d'être étudiées. En collaboration avec Sophie Tarbouriech et Isabelle Queinnec, LAAS-CNRS, j'étudie différents problèmes (comme la stabilité, ou la performance optimale) de systèmes comportant un backlash et une saturation en cascade. Ce type de non-linéarité est une première approximation des hystérésis présents dans de nombreux systèmes mécaniques et dans les systèmes bouclés considérés au chapitre 1.

Le problème de la synthèse de commandes comportant un backlash ou une hystérésis nous semble aussi intéressant. Pour l'instant nous avons étudié des problèmes d'analyse. Plus généralement, pour contrecarrer ou au moins limiter l'effet du backlash, je compte aussi étudier le problème de la synthèse de boucle *anti-windup*. De telles boucles *anti-windup* existent pour les systèmes comportant des saturations en amplitude ou en vitesse [129]. Il est tout à fait naturel d'étudier la synthèse de gains *anti-windup* pour des systèmes comportant ces autres types de non-linéarités. Nous envisageons dans un premier temps de calculer des gains statiques, puis des gains dynamiques (avec un ordre égal à l'ordre du système, ou avec un ordre réduit). L'*anti-windup* peut être en entrée ou en sortie du contrôleur.

Systèmes avec réinitialisation En collaboration avec Thomas Loquen et Sophie Tarbouriech, LAAS-CNRS, nous nous intéressons à l'analyse de systèmes avec réinitialisation. Ce type de système est présent lorsque l'on utilise une commande de type *First Order Element* (FORE), où l'état de la commande est remis à zéro sous certaines conditions de la sortie et de l'erreur (par rapport à une référence) du système. Cette classe de commandes est particulièrement intéressante lorsque l'on souhaite faire du rejet de perturbations, pour améliorer la performance du système bouclé. On peut même obtenir des performances qui ne peuvent pas être atteintes avec des commandes linéaires classiques. Le prix à payer est le suivant : la

commande d'un contrôleur avec réinitialisation a des grandes amplitudes. On comprend alors qu'il faille étudier l'effet des saturations en entrée du système pour voir si la performance est vraiment améliorée. C'est ce que nous sommes en train d'étudier. Nous estimons la performance (en terme de rejet de perturbation) ainsi que le bassin d'attraction d'un système soumis à une saturation et contrôlé par un contrôleur à réinitialisation. Nous souhaitons également voir l'effet d'une limitation en vitesse de l'entrée du système. Une question ouverte concerne le cas d'un système avec une réinitialisation et une saturation en sortie. Cette dernière modifie la condition de remise à zéro de l'état du contrôleur.

Equation d'Euler-Bernoulli contrôlée avec des commandes saturantes Dans le prolongement de ces travaux, et à l'interface des chapitres 3 et 4, je souhaite étudier l'équation d'Euler-Bernoulli avec des contrôles limités en amplitude. A ma connaissance, l'estimation du bassin d'attraction de tels systèmes non-linéaires est un sujet encore peu exploré. Plus généralement la prise en compte des limitations en amplitude et en vitesse dans le contrôle des EDP linéaires est une question méritant d'être étudiée à long terme.

Contrôle en dimension infinie

Prise en compte d'autres positions de l'actionneur et du capteur Dans le chapitre 4, nous avons calculé un ensemble des positions de l'actionneur et du capteur piézo-électriques pour que notre retour de sortie donne une stabilité polynomiale ou exponentielle d'une structure flexible. L'étude a été faite pour le cas d'un actionneur et d'un capteur co-localisés et collés à l'encastrement. Nous avons choisi cette configuration physique pour l'actionneur parce que c'est celle qui est communément utilisée pour beaucoup d'applications de contrôle actif de vibrations [95]. Il est en effet naturel de penser que la vitesse de convergence est plus grande pour un actionneur localisé près de l'encastrement plutôt que du côté libre de la structure flexible. Il serait intéressant de reprendre notre étude pour toutes les positions de l'actionneur/capteur (ayant une longueur fixe) et de vérifier qu'effectivement la vitesse de convergence est la plus grande lorsque l'actionneur et le capteur sont du côté de l'encastrement. Il serait également intéressant de voir le cas d'un actionneur et d'un capteur non-colocalisé.

Contrôle actif de vibrations d'un système fluide-structure En collaboration avec Lucie Baudouin et Bogdan Robu, LAAS-CNRS, nous nous intéressons à la réduction active de vibrations dans un système fluide-structure de type aile d'avion remplie de carburant. Nous étudions plus particulièrement le contrôle de cellules piézo-électriques pour réduire les vibrations de la structure flexible. Nous avons calculé un modèle EDP pour la structure flexible (de type plaque) couplée à une autre EDP modélisant le mouvement du fluide. Nous envisageons maintenant de calculer une commande H_∞ pour réduire les vibrations et rejeter les perturbations extérieures (telles que l'accélération du bord encasté). Nous souhaitons illustrer notre

approche et nos résultats sur des simulations numériques. Nous comptons aussi illustrer ces résultats par des expérimentations sur un dispositif réel dont les premiers modes de vibrations ont les mêmes caractéristiques qu'une aile d'avion remplie de carburant. Ce dispositif expérimental est présent à l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), site de l'ENSICA.

Contrôle d'un miroir déformable dans un système d'optique adaptative Mes travaux sur les systèmes d'optique adaptative ouvrent de nombreuses perspectives. La première serait le calcul de la matrice d'interaction dont les termes contiennent l'effet de chaque entrée du miroir déformable sur chaque sortie de l'analyseur de front d'onde de Shack Hartmann. Cette matrice d'interaction est mesurée expérimentalement régulièrement. Une piste naturelle serait d'utiliser le modèle EDP que nous avons développé pour calculer cette matrice d'interaction. Dans un contexte de commande robuste, comme celui qui a été considéré dans le chapitre 5, calculer la matrice d'interaction avec le modèle physique du miroir et de l'analyseur de front d'onde permet de répartir et de quantifier les incertitudes dans la matrice d'interaction. Par exemple la température modifie les propriétés physiques du miroir bimorphe et on pourrait envisager de quantifier les variations de certains termes de la matrice d'interaction en fonction de ce paramètre. De plus la synthèse de la commande du miroir adaptatif peut tenir compte de ces incertitudes.

Une autre piste de recherche serait de considérer les effets non-linéaires dans le système d'optique adaptative. La première des non-linéarités qui peut être active est la limitation en amplitude des actionneurs piézo-électriques. Dans un second temps il faudrait étudier les limitations en vitesse des actionneurs ainsi que l'effet mémoire des matériaux piezo-électriques (qui pourrait être modélisé par une hystérésis). Un autre travail de recherche important à étudier est l'effet du retard dans la dynamique du système d'optique adaptative. Il existe plusieurs sources de retard dans ce système. Par exemple l'analyseur de Shack Hartmann intègre le front d'onde sur un certain intervalle de temps et donc fournit une information sur le front d'onde avec un certain retard. Par ailleurs calculer la commande à appliquer sur chaque actionneur peut introduire un retard qu'il faudrait également prendre en compte.

Contrôle frontière de systèmes hyperboliques Dans le prolongement de nos études sur le contrôle frontière de systèmes hyperboliques, nous proposons de calculer des termes intégraux qui, combinés au terme proportionnel, permettent de stabiliser le système. Nous avons vu l'intérêt de tels termes sur des simulations numériques ainsi que sur des expérimentations. Nous proposons de prolonger les résultats théoriques sur les systèmes hyperboliques linéaires de [47] pour étudier les systèmes hyperboliques quasi-linéaires. Une fois encore, une approche utilisant les invariants de Riemann pourrait être utile. En ce qui concerne les applications des systèmes hyperboliques, nous pouvons envisager d'utiliser nos résultats ou nos techniques pour le trafic routier [62], ou pour le transport de gaz dans des pipelines [11].

A plus long terme, je souhaite aussi étudier les problèmes de contrôle et de stabilisation en utilisant la classe de solutions non-régulières. Nous pouvons en effet étudier les solutions avec chocs qui se propagent le long des solutions. Les résultats de contrôlabilité et de stabilité peuvent être différents avec cette classe de solutions. Les applications concernent aussi les systèmes autoroutiers, et les réseaux de pipelines. Nous savons en effet qu'en périphérie des villes, le flux de voitures peut présenter des discontinuités qui se propagent et qui peuvent diminuer le flux moyen d'automobiles circulant.

Contrôle approché d'une EDP couplée à une EDO Un travail a débuté avec Emmanuelle Crépeau, université de Versailles–Saint-Quentin, sur le contrôle approché d'une équation de la chaleur couplée à une équation aux dérivées ordinaires (EDO). Ce type d'équations couplées peut modéliser de nombreux systèmes physiques comme les pots catalytiques où les gaz nocifs sont captés dans des sites actifs le long du pot d'échappement et donc ne diffusent pas autant que les gaz inoffensifs (ou moins toxiques). On peut aussi utiliser ce type de modèles couplés pour l'épuration de boues dans des canalisations. Nous pouvons vérifier que ce type de système n'est pas exactement contrôlable, il est donc intéressant d'étudier la contrôlabilité approchée plus spécifiquement. Dans [R24], nous utilisons une paramétrisation de la solution du système bouclé pour démontrer une propriété de contrôlabilité approchée. Ce résultat peut permettre de faire du suivi de trajectoires. Toujours en collaboration avec Emmanuelle Crépeau, je souhaite étudier le cas d'une matrice de diffusion non-triviale (c'est-à-dire différente de l'identité). La principale difficulté vient du fait que les calculs de paramétrisation de la solution ne peuvent plus être effectués explicitement. Il faut alors envisager des estimations des solutions.

Bibliographie

Les références alphanumériques $[\mathbb{R}^*]$, $*$ $\in \{1, \dots, 27\}$, et $[\mathbb{C}^*]$, $*$ $\in \{1, \dots, 51\}$ renvoient à mes publications (voir à partir de la page 89). Les références numériques sont les autres références citées.

- [1] A. Agrachev, Compactness for SR minimizers and subanalyticity, *Rend. Sem. Mat. Pol. Univ. Torino*, 56 (4), pp. 1-12, 1998.
- [2] A. Agrachev, et J. P. Gauthier, On subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18 (3), pp. 359-382, 2001.
- [3] M. Alamir, et N. Marchand, Constrained minimum-time-oriented feedback control for the stabilization of nonholonomic systems in chained form, *J. Optimization Theory Appl.*, 118 (2), pp. 229-244, 2003.
- [4] F. Ancona, et A. Bressan, Patchy vector fields and asymptotic stabilization, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 4, pp. 445-471, 1999.
- [5] F. Ancona, et A. Bressan, Flow stability of patchy vector fields and robust feedback stabilization, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41 (5), pp. 1455-1476, 2003.
- [6] F. Ancona, et A. Bressan, Nearly time optimal stabilizing patchy feedbacks, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlinéaire*, 24, pp. 279-310, 2007.
- [7] F. Araruna, et E. Zuazua, Controllability of the Kirchhoff system for beams as limit of the Mindlin-Timoshenko one, *SIAM J. Cont. Optim.*, 47 (4), pp. 1909-1938, 2008.
- [8] W. Arendt, et C.J.K. Batty, Tauberian theorems and stability of one-parameter semi-groups, *Trans. Am. Math. Soc.*, 306 (2), pp. 837-852, 1988.
- [9] C. Baiocchi, V. Komornik, et P. Loreti, Ingham type theorems and applications to control theory, *Boll. Unione Mat. Ital., Sez. B, Artic. Ric. Mat.*, 2, pp. 33-63, 1999.
- [10] V. Balamurugan, et S. Narayanan, *Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control*, Finite elements in analysis and design, 37, pp. 713-738, 2001.
- [11] M.K. Banda, M. Herty, et A. Klar, Gas flow in pipeline networks, *Networks and Heterogeneous Media*, 1 (1), pp. 41-56, 2006.
- [12] A. Bateman, et Z. Lin, An analysis and design method for linear systems under nested saturation, *Systems and Control Letters*, 48, pp. 41-52, 2003.

-
- [13] R. Beals, B. Gaveau, et P.C. Greiner, Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups, *J. Math. Pures Appl.*, 79 (7), pp. 633-689, 2000.
- [14] N. Bedjaoui, X. Litrico, D. Koenig, J. Ribot-Bruno, et P.-O. Malaterre, Static and dynamic data reconciliation for an irrigation canal, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 134 (6), pp. 778-787, 2008.
- [15] B. Bonnard, et M. Chyba, *Singular trajectories and their role in control theory*, Mathématiques & Applications, vol. 40, Paris, Springer, 2003.
- [16] B. Bonnard, et M. Chyba, *The role of singular trajectories in control theory*, Math. Monograph, Springer-Verlag, 2003.
- [17] A. Bressan, Singularities of stabilizing feedbacks, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 56 (4), pp. 87-104, 1998.
- [18] A. Bressan, *Hyperbolic systems of conservation laws. The one dimensional Cauchy problem*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [19] A. Bressan, et B. Piccoli, *Introduction to the mathematical theory of control*, Applied Math Series, vol. 2, American Institute of Mathematical Sciences, 2007.
- [20] A. Bacciotti, et F. Ceragioli, Nonsmooth optimal regulation and discontinuous stabilization, *Abstract and Applied Analysis*, 20, pp. 1159-1195, 2003.
- [21] G. Bastin, B. Haut, J-M. Coron, et B. d'Andréa-Novel, Lyapunov stability analysis of networks of scalar conservation laws, *Networks and Heterogeneous Media*, 2 (4), pp. 749-757, 2007.
- [22] M. S. Branicky, Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, 43, pp. 475-482, 1998.
- [23] R.W. Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, in *Differential geometric control theory*, R.W. Brockett, R.S. Millman et H.J. Sussmann, ed., Boston, Birkhäuser, 1983, p. 181-191.
- [24] B. Brogliato, Some results on optimal control with unilateral state constraints, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 70 (10) (A), pp. 3626-3657, 2009.
- [25] B. Brogliato, *Nonsmooth mechanics. Models, dynamics and control*, 2nd ed., Communications and Control Engineering Series, London, Springer, 1999.
- [26] B. Brogliato, M. Mabrouk, et A. Z. Rio, On the controllability of linear juggling mechanical systems, *Syst. Control Lett.*, 55 (4), pp. 350-367, 2006.
- [27] B. Brogliato, S.-I. Niculescu, et P. Orhant, On the control of finite-dimensional mechanical systems with unilateral constraints, *IEEE Trans. Autom. Control*, 42 (2), pp. 200-215, 1997.
- [28] P.J. Campo, et M. Morari, Robust control of processes subject to saturations nonlinearities, *Computers and Chemical Engineering*, 14 (4-5), pp. 343-358, 1990.

- [29] C. Canudas de Wit, et O.J. Sordalen, Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints, *IEEE Trans. Automat. Control*, 37, pp. 1791-1797, 1992.
- [30] J.W.S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, Moskau, Verlag, 1961.
- [31] F. Ceragioli, Some remarks on stabilization by means of discontinuous feedbacks, *Systems and Control Letters*, 45 (4), pp. 271-281, 2002.
- [32] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, 23 (6), pp. 1482-1518, 1992.
- [33] Y. Chitour, F. Jean, et E. Trélat, Genericity properties for singular trajectories, *Journal Diff. Geom.*, 73 (1), pp. 45-73, 2006.
- [34] W.-L. Chow, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, *Math. Ann.*, 111, pp. 98-105, 1939.
- [35] S. Choy, et E. Weyer, Reconfiguration schemes to mitigate faults in automated irrigation channels, *Control Engineering Practice*, 16 (10), pp. 1184-1194, 2008.
- [36] F.H Clarke, Yu.S. Ledyaev, L. Rifford, et R.J. Stern, Feedback stabilization and Lyapunov functions, *SIAM J. Control Opt.*, 39 (1), pp. 25-48, 2000.
- [37] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, et A.I. Subbotin, Asymptotic controllability implies feedback stabilization, *IEEE Trans. Automat. Control*, 42, pp. 1394-1407, 1997.
- [38] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, et R.J. Stern, Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions, *J. Diff. Eq.*, 149 (1), pp. 69-114, 1998.
- [39] R.T. Clooskey, et R.M. Murray, Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback, *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (5), pp. 614-628, 1997.
- [40] J.-M. Coron, Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift, *Math. Control Signals Syst.*, 5, pp. 295-312, 1992.
- [41] J.-M. Coron, A necessary condition for feedback stabilization, *Systems and Control Letters*, 14 (3) pp. 227-232, 1990.
- [42] J.-M. Coron, On the null asymptotic stabilization of the 2-D incompressible Euler equation in a simply connected domain, *SIAM J. Control and Optimization*, 37 (6), pp. 1874-1896, 1999.
- [43] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [44] J.-M. Coron, B. d'Andréa-Novel, et G. Bastin, A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 (1), pp. 2-11, 2007.
- [45] J.-M. Coron, G. Bastin, et B. d'Andréa-Novel, Dissipative boundary conditions for one dimensional nonlinear hyperbolic systems, *SIAM J. Control and Optimization*, 47 (3), pp. 1460-1498, 2008.

-
- [46] R. F. Curtain, et H. Zwart, *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Texts in Applied Mathematics, vol. 21, Springer Verlag, New York, 1995.
- [47] V. Dos Santos, G. Bastin, J-M. Coron, et B. d'Andréa-Novel, Boundary control with integral action for hyperbolic systems of conservation laws : stability and experiments, *Automatica*, 44 (5), pp. 1310-1318, 2008.
- [48] E. de Klerk, *Aspects of semidefinite programming. Interior Point Algorithms and selected applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The netherlands, 2002.
- [49] P. Destuynder, A mathematical analysis of a smart-beam which is equipped with piezoelectric actuators, *Control Cybern.*, 28 (3), pp. 503-530, 1999.
- [50] A.F. Filippov, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Kluwer, 1988.
- [51] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, et J. Rudolph, Linear systems over Mikusinski operators and control of a flexible beam, *ESAIM : Proc.*, 2, pp. 183-193, 1997.
- [52] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, et M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Math Words Inc., Natick, MA, 1995.
- [53] M. Garavello, et B. Piccoli, Hybrid necessary principle, *SIAM J. Cont. Opt.*, 43 (5), pp. 1867-1887, 2005.
- [54] A. Garcia, M. Hubbard, et J. De Vries, Open channel transient flow control by discrete time LQR methods, *Automatica*, 28 (2), pp. 255-264, 1992.
- [55] R. Goebel, J. Hespanha, A.R. Teel, C. Cai, et R. Sanfelice, Hybrid systems : generalized solutions and robust stability, In *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Stuttgart, Germany, 2004.
- [56] R. Goebel, et A.R. Teel, Solutions to hybrid inclusions via set and graphical convergence with stability theory applications, *Automatica*, 42, pp. 573-587, 2006.
- [57] J.M. Gomes da Silva Jr., S. Tarbouriech, et G. Garcia, Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators, *IEEE Trans. Autom. Control*, 48 (5), pp. 842-847, 2003.
- [58] J.M. Gomes da Silva Jr, et S. Tarbouriech, Anti-windup design with guaranteed regions of stability : an LMI approach, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 50 (1), pp. 106-111, 2005.
- [59] W.H. Graf, *Fluvial Hydraulics*, John Wiley & Sons, 1998.
- [60] O. Hájek, Discontinuous differential equations, I, *J. Diff. Eq.*, 32, pp. 149-170, 1979.
- [61] D. Halim, et S.O.R. Moheimani, Spatial H_2 control of a piezoelectric laminate beam : experimental implementation, *IEEE Trans. Control Syst. Tech.*, 10 (4), pp. 533-546, 2002.
- [62] B. Haut, et G. Bastin, A second order model of road junctions in fluid models of traffic networks, *Networks and Heterogeneous Media (NHM)*, 2 (2), pp. 227-253, 2007.

- [63] R. M. Hardt, Stratification of real analytic mappings and images, *Invent. Math.*, 28, 1975.
- [64] H. Hermes, Discontinuous vector fields and feedback control, In *Differential Equations and Dynamical Systems*, Academic Press, pp. 155-165, 1967.
- [65] J.P. Hespanha, et A.S. Morse, Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching, *Automatica*, 35 (3), pp. 385-393, 1999.
- [66] H. Hironaka, Subanalytic sets, *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra*, in honor of Y. Akizuki, pp. 453-493, 1973.
- [67] F.-L. Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, *Ann. Differential Equations*, 1 (1), pp. 43-56, 1985.
- [68] HYCON, *HYbrid CONtrol : Training Heterogeneity and Complexity of Networked Embedded Systems*, réseau d'excellence européen coordonné par F. Lamnabhi-Lagarrigue, sept. 2004-mars 2009, <http://www.ist-hycon.org>
- [69] M. Janković, R. Sepulchre, et P. V. Kokotović, CLF based designs with robustness to dynamic input uncertainties, *Systems Control Lett.*, 37 (1), pp. 45-54, 1999.
- [70] Z.P. Jiang, Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties, *Automatica*, 36, pp. 189-200, 2000.
- [71] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 52, Cambridge, 1997.
- [72] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, 2d edition, Prentice-Hall, London, 1996.
- [73] N.N. Krasovskii, *Game-Theoretic Problems of Capture*, Nauka, Moscow, 1970, in Russian.
- [74] J. Kurzweil, On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2*, 24, pp. 19-77, 1956.
- [75] S. Lang, *Introduction to diophantine approximations*, Springer-Verlag, 1991.
- [76] Y.S. Ledyev, et E.D. Sontag, A Lyapunov characterization of robust stabilization, *Nonlinear Analysis*, 37, pp. 813-840, 1999.
- [77] B. Le Roux, J.-M. Conan, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, L.M. Mugnier, et T. Fusco, Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics, *J. Opt. Soc. Am. A.*, 21(7), pp. 1261-1276, 2004.
- [78] Li Ta-tsien, *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, Research in applied mathematics, Masson et Wiley, Paris, 1994.
- [79] Li Ta-tsien, et Yu Wen-Ci, *Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems*, Duke university mathematical series, 1985.
- [80] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1 : Contrôlabilité exacte*, (Exact controllability, perturbations and stabilization of distributed systems. Vol. 1 : Exact controllability), vol. 8, Paris, Masson, 1988.

-
- [81] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.*, 30 (1), pp. 1-68, 1988.
- [82] X. Litrico, et V. Fromion, H_∞ control of an irrigation canal pool with a mixed control politics, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 14 (1), pp. 99-101, 2006.
- [83] X. Litrico, et D. Georges, Robust continuous-time and discrete-time flow control of a dam-river system : (I) Modelling, *J. of applied mathematical modelling*, 23 (11), pp. 809-827, 1999.
- [84] X. Litrico, et D. Georges, Robust continuous-time and discrete-time flow control of a dam-river system : (II) Controller design, *J. of applied mathematical modelling*, 23 (11), pp. 829-846, 1999.
- [85] Z. Liu, et B. Rao, Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation, *Z. Angew. Math. Phys.*, 56, pp. 630-644, 2005.
- [86] Z.-H. Luo, Bao-Zhu Guo, et O. Morgul, *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications*, Springer, 1999.
- [87] J. Lygeros, K.H. Johansson, S.N. Simić, J. Zhang, et S.S. Sastry, Dynamical properties of hybrid automata, *IEEE Trans. Automat. Control*, 48 (1), pp. 2-17, 2003.
- [88] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Systems and control : foundations and applications, Birkhäuser, 2003.
- [89] J. W. Macki, P. Nistri, et P. Zecca, Mathematical models for hysteresis, *SIAM Review*, 35 (1), pp. 94-123, 1993.
- [90] P.-O. Malaterre, Pilot : A linear quadratic optimal controller for irrigation canals, *Journal of irrigation and drainage engineering*, 124 (3), pp. 187-194, 1998.
- [91] P.-O. Malaterre, D.C. Rogers, et J. Schuurmans, Classification of canal control algorithms, *J. of irrigation and drainage engineering*, 124 (1), pp. 3-10, 1998.
- [92] N. Marchand, et M. Alamir, Discontinuous exponential stabilization of chained form systems, *Automatica*, 39 (2), pp. 343-348, 2003.
- [93] N. Marchand, A. Hably, et A. Chemori, Global stabilization with low computational cost of the discrete time chain of integrators by means of bounded controls, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 (5), pp. 948-952, 2007.
- [94] M.T. Mata-Jiménez, et B. Brogliato, Analysis of proportional-derivative and nonlinear control of mechanical systems with dynamic backlash, *J. Vib. Control*, 9 (1-2), pp. 119-155, 2003.
- [95] S. O. R. Moheimani, D. Halim, et A. J. Fleming, *Spatial control of vibration : theory and experiments*, World Scientific, 2003.
- [96] P. Morin, et C. Samson, Practical and asymptotic stabilization of chained systems by the transverse function control approach, *SIAM J. Control Optim.*, 43 (1), pp. 32-57, 2004.

- [97] P. Morin, *Stabilisation de systèmes non linéaires critiques et application à la commande de véhicules*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Nice-Sophia Antipolis, octobre 2004.
- [98] P. Morin, et C. Samson, Control of non-linear chained systems. From the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45, pp. 141-146, 2000.
- [99] P. Morin, J.-B. Pomet, et C. Samson, Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of Lie brackets in closed loop, *SIAM J. Control Optimization*, 38 (1), pp. 22-49, 1999.
- [100] P. Morin, C. Samson, J.-B. Pomet, et Z.-P. Jiang, Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls, *Syst. Control Lett.*, 25 (5), pp. 375-385, 1995.
- [101] P. Morin, et C. Samson, Exponential stabilization of nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics, *ESAIM Cont. Optim. Calc. Var.*, 4, pp. 1-35, 1999.
- [102] P. Morin, et C. Samson, Robust stabilization of driftless systems with hybrid open-loop/feedback control, In *Proc. 19th American Control Conference*, Chicago, 2000.
- [103] R. Paschall, et D. Anderson, Linear quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements, *Appl. Opt.*, 32, pp. 6347-6358, 1993.
- [104] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskij, R.V. Gamkrelidze, et E.F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [105] B. Piccoli, F. M. Pait, et A. Bittar, A hybrid controller for a nonholonomic system, *SBA Cont. Aut.*, 9, pp. 85-89, 1998.
- [106] J. Prüss, On the spectrum of C^0 -semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284 (2), pp. 847-857, 1984.
- [107] P. K. Rashevski, About connecting two points of complete nonholonomic space by admissible curve, *Uch Zapiski Ped. Inst. Libknexta*, 2, pp. 83-94, 1938.
- [108] H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, C. Petit, J.-M. Conan, et P. V. de Lesegno, Optimal control, observers and integrators in adaptive optics, *Opt. Express*, 14, pp. 7464-7476, 2006.
- [109] R. Rebarber, Spectral assignability for distributed parameter systems with unbounded scalar control, *SIAM J. Control Opt.*, 27 (1), pp. 148-169, 1989.
- [110] R.T. Rockafellar, et R. J-B Wets, *Variational Analysis*, Springer, 1998.
- [111] F. Rodier, *Adaptive optics in astronomy*, Cambridge University Press, 1999.
- [112] E.P. Ryan, On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback, *SIAM J. Control Optim.*, 32 (6), pp. 1597-1604, 1994.

-
- [113] B. de Saint-Venant, Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec applications aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 73, pp. 148-154, et pp. 237-240, 1871.
- [114] C. Samson, et P. Morin, Practical stabilization of driftless systems on Lie groups : the transverse function approach, *IEEE Trans. Automat. Control*, 48, pp. 1496-1508, 2003.
- [115] R.G. Sanfelice, R. Goebel, et A.R. Teel, Generalized solutions to hybrid dynamical systems, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 14 (4), pp. 699-724, 2008.
- [116] R. Sepulchre, Slow peaking and low-gain designs for global stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 45 (3), pp. 453-461, 2000.
- [117] R. Sepulchre, M. Jankovic, et P. Kokotović, *Constructive nonlinear control*, Springer-Verlag, London, 1997.
- [118] Sésame, banc de recherche et développement en optique adaptative, Laboratoire d'Etudes Spatiales et d'Instrumentation en Astrophysique (LESIA), Observatoire de Paris-Meudon, <http://www.lesia.obspm.fr/Sesame.html>
- [119] J.A. Sethian, *Level set methods and fast marching methods*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, 1999.
- [120] R.S. Smith, C.C. Chu, et J.L. Fanson, The design of H_∞ controllers for an experimental non-collocated flexible structure Problem, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2 (2), pp. 101-109, 1994.
- [121] E. D. Sontag, A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21, pp. 462-471, 1983.
- [122] E. D. Sontag, Stability and stabilization : Discontinuities and the effect of disturbances, in *Nonlinear Analysis, Differential Equations, and Control* (Proc. NATO Advanced Study Institute, Montreal, Jul/Aug 1998 ; F.H. Clarke, R.J. Stern, ed.), Kluwer, pp. 551-598, 1999.
- [123] E. D. Sontag, Clocks and insensitivity to small measurement errors, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 4, pp. 537-557, 1999.
- [124] J. Stoer, et R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, 3rd ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 12, New York, NY, 2002.
- [125] P. Souères, et J.-P. Laumond, Shortest paths synthesis for a car-like robot, *IEEE Trans. Autom. Control*, 41 (5), pp. 672-688, 1996.
- [126] H. J. Sussmann, Subanalytic sets and feedback control, *J. Diff. Eq.*, 31 (1), pp. 31-52, 1979.
- [127] M. Tamm, Subanalytic sets in the calculus of variation, *Acta Math.*, 146, pp. 167-199, 1981.

- [128] G. Tao, et P.V. Kokotović, Adaptive control of systems with unknown non-smooth nonlinearities, *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 11 (1), pp. 81-100, 2002.
- [129] S. Tarbouriech, et M. C. Turner, Anti-windup design : an overview of some recent advances and open problems, *IET Control Theory & Applications*, 3 (1), pp. 1-19, 2009.
- [130] L. Tavernini, Differential automata and their discrete simulators, *Nonlinear Anal.*, 11 (6), pp. 665-683, 1987.
- [131] A. R. Teel, Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls, *Systems and Control Letters*, 18, pp. 165-171, 1992.
- [132] A. R. Teel, Hybrid Dynamical Systems and Robust Feedback Control, plenary lecture, *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, 2008.
- [133] A. R. Teel, O. L. Kaiser, et R. M. Murray, Uniting local and global controllers for the Caltech ducted fan, *Proc. Am. Cont. Conf.*, Albuquerque, NM, 1997.
- [134] A. R. Teel, et L. Praly, A smooth Lyapunov function from a class- \mathcal{KL} estimate involving two positive semidefinite functions, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5, pp. 313-367, 2000.
- [135] A.R. Teel, R.G. Sanfelice, et R. Goebel, Hybrid Control Systems, *Encyclopedia of complexity and systems science*, Springer, 2008.
- [136] S. Tliba, et H. Abou-Kandil, H_∞ controller design for active vibration damping of a smart flexible structure using piezoelectric transducers, *4th Symp. IFAC on Robust Control Design (ROCOND 2003)*, Milan, Italie, 2003.
- [137] E. Trélat, *Contrôle optimal. Théorie et applications*, Vuibert, Paris, 2005.
- [138] M. Tucsnak, Regularity and exact controllability for a beam with piezoelectric actuator, *SIAM J. Control Optimization*, 34 (3), pp. 922-930, 1996.
- [139] M. Tucsnak, Wellposedness, controllability and stabilizability of systems governed by partial differential equations, notes de cours, université de Nancy 1, 2004.
<http://www.iecn.u-nancy.fr/~tucsnak/carteindia.pdf>
- [140] B. Van Keulen, H_∞ control with measurement-feedback for linear infinite-dimensional systems, *J. Math. Syst. Estim. Control*, 3 (4), pp. 373-411, 1993.
- [141] H. Ye, A. N. Michel, et L. Hou, Stability theory for hybrid dynamical systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 43 (4), pp. 461-474, 1998.
- [142] E. Zuazua, Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8 (2), pp. 469-513, 2002.
- [143] E. Zuazua, Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1-D wave equation, *Rendiconti di Matematica VIII*, 24 (2), pp. 201-237, 2004.
- [144] E. Zuazua, Propagation, observation, control and numerical approximation of waves approximated by finite difference method, *SIAM Review*, 47 (2), pp. 197-243, 2005.

- [145] E. Zuazua, Control and numerical approximation of the wave and heat equations, *Proceedings of the ICM 2006*, Vol. III, "Invited Lectures", European Mathematical Society Publishing House, M. Sanz-Solé *et. al.* (eds.), 2006.
- [146] E. Zuazua, Controllability and observability of partial differential equations : Some results and open problems, in *Handbook of differential equations : Evolutionary differential equations*, vol 3, C. M. Dafermos, et E. Feireisl (eds.), Elsevier Science, pp. 527-621, 2006.
- [147] E. Zuazua, Switching control, *J. of the European Mathematical Society*, à paraître, 2009.

Bibliographie personnelle

Les références [R1] à [R27] peuvent être téléchargées au format pdf à partir de leur étiquette dans ce mémoire. Ainsi la référence [R1] peut être téléchargée à l'aide du lien :

www.laas.fr/~cprieur/HDR/R1.pdf

Cette liste est arrêtée au 10 juillet 2009.

Reuves à comité de lecture

- [R1]. C. Prieur, Uniting local and global controllers with robustness to vanishing noise, *Math. Control Signals Systems*, 14, pp. 143-172, 2001.
- [R2]. C. Prieur, et A. Astolfi, Robust stabilization of chained systems via hybrid control, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 48 (10), pp. 1768-1772, 2003.
- [R3]. J. de Halleux, C. Prieur, J.-M. Coron, B. d'Andréa-Novel, et G. Bastin, Boundary feedback control in networks of open channels, *Automatica*, 39 (8), pp. 1365-1376, 2003.
- [R4]. C. Prieur, et J. de Halleux, Stabilization of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations, *Systems and Control Letters*, 52 (3-4), pp. 167-178, 2004.
- [R5]. C. Prieur, Asymptotic controllability and robust asymptotic stabilizability, *SIAM J. Control Opt.*, 43 (5), pp. 1888-1912, 2005.
- [R6]. D. Matignon, et C. Prieur, Asymptotic stability of linear conservative systems when coupled with diffusive systems, *ESAIM : Control, Optim. Cal. Var.*, 11, pp. 487-507, 2005.
- [R7]. C. Prieur, et E. Trélat, Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback, *Math. Control Signals Systems*, 17 (3), pp. 201-216, 2005.
- [R8]. C. Prieur, Robust stabilization of nonlinear control systems by means of hybrid feedbacks, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 64 (1), pp. 25-38, 2006.
- [R9]. E. Crépeau, et C. Prieur, Control of a clamped-free beam by a piezoelectric actuator, *ESAIM : Control, Optim. Cal. Var.*, 12, pp. 545-563, 2006.
- [R10]. S. Tarbouriech, C. Prieur, et J.M. Gomes da Silva Jr., Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 51 (8), pp. 1364-1371, 2006.

- [R11]. C. Prieur, et E. Trélat, Hybrid robust stabilization in the Martinet case, *Control & Cybernetics*, 35 (4), pp. 923-945, 2006.
- [R12]. C. Prieur, et E. Trélat, Quasi-optimal robust stabilization of control systems, *SIAM J. Control Opt.*, 45 (5), pp. 1875-1897, 2006.
- [R13]. M. Lenczner, et C. Prieur, Asymptotic model of an active mirror, *Int. J. of Tomography Statistics*, 5 (special volume), pp. 68-72, 2007.
- [R14]. P. Le Gall, C. Prieur, et L. Rosier, On the control of a bimorph mirror, *Int. J. of Tomography Statistics*, 5 (special volume), pp. 97-102, 2007.
- [R15]. P. Le Gall, C. Prieur, et L. Rosier, Stabilization of a clamped-free beam with collocated piezoelectric sensor/actuator, *Int. J. of Tomography Statistics*, 6 (special volume), pp. 104-109, 2007.
- [R16]. C. Prieur, et E. Trélat, On two hybrid robust optimal stabilization problems, *Int. J. of Tomography Statistics*, 6 (special volume), pp. 86-91, 2007.
- [R17]. P. Le Gall, C. Prieur, et L. Rosier, Output feedback stabilization of a clamped-free beam, *Internat. J. Control*, 80 (8), pp. 1201-1216, 2007.
- [R18]. C. Prieur, R. Goebel, et A. R. Teel, Hybrid feedback control and robust stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, 52 (11), pp. 2103-2117, 2007.
- [R19]. J. B. Lasserre, D. Henrion, C. Prieur, et E. Trélat, Nonlinear optimal control via occupation measures and LMI-relaxations, *SIAM J. Control Opt.*, 47(4), pp. 1643-1666, 2008.
- [R20]. C. Prieur, J. Winkin, et G. Bastin, Boundary control of non-homogeneous systems of conservation laws, *Math. Control Signals Systems*, 20 (2), pp. 173-197, 2008.
- [R21]. L. Baudouin, C. Prieur, F. Guignard, et D. Arzelier, Robust control of a bimorph mirror for adaptive optics system, *Applied Optics*, 47 (20), pp. 3637-3645, 2008.
- [R22]. P. Le Gall, C. Prieur, et L. Rosier, Exact controllability and output feedback stabilization of a bimorph mirror, *ESAIM Proc.*, 25, pp. 19-28, 2008.
- [R23]. V. Dos Santos, et C. Prieur, Boundary control of open channels with numerical and experimental validations, *IEEE Trans. Control Syst. Technology*, 16 (6), pp. 1252-1264, 2008.
- [R24]. E. Crépeau, et C. Prieur, Approximate controllability of a reaction-diffusion system, *Systems and Control Letters*, 57 (12), pp. 1048-1057, 2008.
- [R25]. V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, T. R. Calliero, R. A. Borges, P. L. D. Peres, et C. Prieur, Robust absolute stability and nonlinear state feedback stabilization based on polynomial Lur'e functions, *Nonlinear Analysis Series A : Theory, Methods & Applications*, 70, pp. 1803-1812, 2009.
- [R26]. R. Goebel, C. Prieur, et A.R. Teel, Smooth patchy control Lyapunov functions, *Automatica*, 45 (3), pp. 675-683, 2009.

- [R27]. C. Prieur, Control of systems of conservation laws with boundary errors, *J. on Networks and Heterogeneous Media*, 4 (2), pp. 393-407, 2009.

Actes de conférences à comité de lecture

- [C1]. C. Prieur, et L. Praly, Uniting local and global controllers, *IEEE Conf. on Dec. and Cont.* (CDC'99), Arizona, pp. 1214-1219, 1999.
- [C2]. C. Prieur, P. Bendotti, et L. El-Ghaoui, Robust optimization-based control : an LMI approach, *IEEE Conf. on Dec. and Cont.* (CDC'00), Sydney, Australie, Vol. 3, pp. 2317-2322, 2000.
- [C3]. C. Prieur, Asymptotic controllability and robust asymptotic stabilizability, *IFAC : Symp. on Nonlinear Control Systems* (NOLCOS'01), St-Petersbourg, Russie, 2001.
- [C4]. C. Prieur, et J. de Halleux, Complete stabilization of a tank, *15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [C5]. C. Prieur, et J. de Halleux, Stabilization of a tank via output feedback, *IEEE Conf. on Dec. and Cont.* (CDC'02), Las-Vegas, NV, 2002.
- [C6]. C. Prieur, et A. Astolfi, Robust stabilization of chained systems via hybrid control, *IEEE Conf. on Dec. and Cont.* (CDC'02), Las-Vegas, NV, 2002
- [C7]. F. Mazenc, et C. Prieur, Switching using distributed delays, *IFAC : Workshop on Time Delay System 2003*, Rocquencourt, France, 2003.
- [C8]. D. Matignon, et C. Prieur, Asymptotic stability of linear conservative systems when coupled with diffusive systems, invité par Birgit Jacob, Michael Demetriou and Kirsten Morris dans le cadre du mini-symposium "infinite-dimensional systems I : theory", *Math. Theory Network Syst.* (MTNS'04), 2004.
- [C9]. E. Crépeau, et C. Prieur, Control of a clamped-free beam by a piezoelectric actuator, *Math. Theory Network Syst.* (MTNS'04), 2004.
- [C10]. C. Prieur, et E. Trélat, Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback, invité par F. Lamnabhi-Lagarrigue dans le cadre du mini-symposium "Stabilization of uncertain hybrid and nonlinear systems", *Math. Theory Network Syst.* (MTNS'04), 2004.
- [C11]. P.-A. Bliman, et C. Prieur, On existence of smooth solutions of parameter-dependent convex programming problems, *Math. Theory Network Syst.* (MTNS'04), 2004.
- [C12]. C. Prieur, et L. Praly, A tentative direct Lyapunov design of output feedbacks, *IFAC : Symp. on Nonlinear Control System* (NOLCOS'04), Stuttgart, Germany, pp. 1121-1126, 2004.
- [C13]. S.Tarbouriech, C. Prieur, et J.M. Gomes Da Silva, Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations, *IEEE Conf. on Dec. and Cont.* (CDC'04), Bahamas, pp. 5493-5498, 2004.

- [C14]. J. de Halleux, C. Prieur, et G. Bastin Boundary control design for cascades of hyperbolic 2x2 PDE systems via graph theory, *Conf. on Dec. and Cont.* (CDC'04), Bahamas, 2004.
- [C15]. S. Tliba, C. Prieur, et H. Abou-Kandil, Active Vibration Damping of a Smart Flexible Structure Using Piezoelectric Transducers : H-infinity Design and Experimental Results, *World Congress IFAC 2005*, Prague, 2005.
- [C16]. S. Tarbouriech, C. Prieur, et J.M. Gomes da Silva Jr., An anti-windup strategy for a flexible cantilever beam, *World Congress IFAC 2005*, Prague, 2005.
- [C17]. J.B. Lasserre, C. Prieur, et D. Henrion, Nonlinear optimal control : Numerical approximations via moments and LMI-relaxations, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. and Eur. Cont. Conf.* (CDC-ECC'05), Sevilla, Spain, pp. 1648-1653, 2005.
- [C18]. C. Prieur, et E. Trélat, Semi-global minimal time hybrid robust stabilization of analytic driftless control-affine systems, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. and Eur. Cont. Conf.* (CDC-ECC'05), Sevilla, Spain, pp. 5438-5443, 2005.
- [C19]. C. Prieur, J. Winkin, et G. Bastin, Boundary control of non-homogeneous systems of two conservation laws, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. and Eur. Cont. Conf.* (CDC-ECC'05), Sevilla, Spain, pp. 1899-1904, 2005.
- [C20]. S. Tarbouriech, C. Prieur, et J. M. Gomes Da Silva Jr, L2 performance for systems presenting nested saturations, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. and Eur. Cont. Conf.* (CDC-ECC'05), Sevilla, Spain, pp. 5000-5005, 2005.
- [C21]. C. Prieur, R. Goebel, et A.R. Teel, Results on robust stabilization of asymptotically controllable systems by hybrid feedback, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. and Eur. Cont. Conf.* (CDC-ECC'05), Sevilla, Spain, pp. 2598 - 2603, 2005.
- [C22]. C. Prieur, et E. Trélat, On two hybrid robust optimal stabilization problems, *13th IFAC Workshop on Control applications of Optimization* (CAO'06), Cachan, France, 2006.
- [C23]. M. Lenczner, et C. Prieur, Asymptotic model of an active mirror, *13th IFAC Workshop on Control applications of Optimization* (CAO'06), Cachan, France, 2006.
- [C24]. P. Le Gall, C. Prieur, et L. Rosier, Stabilization of a clamped-free beam with collocated piezoelectric sensor/actuator, *13th IFAC Workshop on Control applications of Optimization* (CAO'06), Cachan, France, 2006.
- [C25]. P. Le Gall, C. Prieur, et L. Rosier, On the control of a bimorph mirror, *13th IFAC Workshop on Control applications of Optimization* (CAO'06), Cachan, France, 2006.
- [C26]. R.G. Sanfelice, A.R. Teel, R. Goebel, et C. Prieur, On the robustness to measurement noise and unmodeled dynamics of stability in hybrid systems, *American Control Conference* (ACC'06), Minneapolis, Minnesota, pp. 4061-4066, 2006.
- [C27]. S. Tarbouriech, et C. Prieur, Stability Analysis for Sandwich Systems with Backlash : an LMI approach, *5th IFAC Symposium on Robust Control Design* (ROCOND'06), Toulouse, France, 2006.

- [C28]. L. Baudouin, C. Prieur, et D. Arzelier, Robust control of a bimorph mirror for adaptive optics system, *17th Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'06)*, Kyoto, Japan, 2006.
- [C29]. C. Prieur, Boundary control of non-homogeneous hyperbolic systems. *8th french-romanian Conf. of applied math.*, Chambéry, France, 2006.
- [C30]. S. Tarbouriech, et C. Prieur, L2-performance analysis for sandwich systems with backlash, *IEEE Conf. on Dec. (CDC'06)*, San-Diego, CA, pp. 1364-1371, 2006.
- [C31]. R. Goebel, C. Prieur, et A.R. Teel, Smooth patchy control Lyapunov functions, *IEEE Conf. on Dec. (CDC'06)*, San-Diego, CA, 2006.
- [C32]. V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, T. R. Calliero, R. A. Borges, P. L. D. Peres, et C. Prieur, Robust absolute stability and stabilization based on homogeneous polynomially parameter-dependent Lur'e functions, *American Control Conference (ACC'07)*, New-York, NY, 2007.
- [C33]. R. Goebel, C. Prieur, et A.R. Teel, Relaxed characterizations of smooth patchy control Lyapunov functions, *IFAC : Symp. on Nonlinear Control System (NOLCOS'07)*, Pretoria, South-Africa, 2007.
- [C34]. S. Tarbouriech, et C. Prieur, Stability analysis for systems with backlash and saturated actuator, *IFAC : Symp. on Nonlinear Control System (NOLCOS'07)*, Pretoria, South-Africa, 2007.
- [C35]. C. Prieur, et A.R. Teel, Uniting local and global output feedback controllers, *IFAC : Symp. on Nonlinear Control System (NOLCOS'07)*, Pretoria, South-Africa, 2007.
- [C36]. E. Crépeau, et C. Prieur, Motion planning of reaction-diffusion system arising in combustion and electrophysiology, *IFAC Workshop on Control of Distributed Parameter Systems (CDPS'07)*, Namur, Belgium, 2007.
- [C37]. V. Dos Santos, C. Prieur, et J. Sau, Boundary control of a channel in presence of small perturbations : a Riemann approach, *IFAC Workshop on Control of Distributed Parameter Systems (CDPS'07)*, Namur, Belgium, 2007.
- [C38]. V. Dos Santos, et C. Prieur, Boundary Control of a channel : practical and numerical studies, *3rd IFAC Symp. on Syst. Struc. and Control (SSSC'07)*, Foz do Iguacu, Brazil, 2007.
- [C39]. S. Tarbouriech, et C. Prieur, Stability analysis for systems with nested backlash and saturation operators, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. (CDC'07)*, New-Orleans, LA, 2007.
- [C40]. T. Loquen, S. Tarbouriech, et C. Prieur, Stability analysis for reset systems with input saturation, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. (CDC'07)*, New-Orleans, LA, 2007.
- [C41]. C. Prieur, et A.R. Teel, Uniting a high performance, local controller with a global controller : the output feedback case for linear systems with input saturation *American Control Conference (ACC'08)*, Seattle, WA, 2008.

- [C42]. L. Baudouin, C. Prieur, F. Guignard, et D. Arzelier, Control of adaptive optics system : an H-infinite approach, *17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [C43]. C. Pittet, N. Despré, S. Tarbouriech, et C. Prieur, Nonlinear controller design for satellite reaction wheels unloading using anti-windup techniques *Am. Inst. of Aeronautics and Astronautics Conf. (AIAA '08)*, Honolulu, Hawaii, 2008.
- [C44]. D. Eckhard, J.M. Gomes da Silva Jr.S. Tarbouriech, et C. Prieur, Output dynamic feedback controller design for disturbance attenuation taking into account both sensor and actuator saturations, *Congresso Brasileiro de Automática (CBA'08)*, Juiz de Fora, Brazil, 2008.
- [C45]. T. Loquen, S. Tarbouriech, et C. Prieur, Stability of reset control systems with nonzero reference, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. (CDC'08)*, Cancun, Mexico, 2008.
- [C46]. V. Andrieu, et C. Prieur, Uniting two control Lyapunov functions for affine systems, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. (CDC'08)*, Cancun, Mexico, 2008.
- [C47]. J. Boada, C. Prieur, S. Tarbouriech, C. Pittet, et C. Charbonnel, Anti-windup design for satellites control with microthrusters, *Am. Inst. of Aeronautics and Astronautics Conf. (AIAA '09)*, Chicago, Illinois, 2009.
- [C48]. B. Robu, L. Baudouin, et C. Prieur, A distributed parameter model for a fluid-flexible structure system, *5th IFAC Workshop on Control of Distributed Parameter Systems (CDPS'09)*, Toulouse, France, 2009.
- [C49]. S. Agarwal, G. Carbou, et C. Prieur, A network of ferromagnetic ellipsoidal samples, *5th IFAC Workshop on Control of Distributed Parameter Systems (CDPS'09)*, Toulouse, France, 2009.
- [C50]. B. Robu, L. Baudouin, et C. Prieur, A controlled distributed parameter model for a fluid-flexible structure system : numerical simulations and experiment validations, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. (CDC'09)*, Shanghai, China, 2009.
- [C51]. V. Andrieu, C. Prieur, S. Tarbouriech, et D. Arzelier, Synthesis of a global asymptotic stabilizing feedback law for a system satisfying two different sector conditions, *IEEE Conf. on Dec. and Cont. (CDC'09)*, Shanghai, China, 2009.

Chapitres dans des ouvrages collectifs

- [C52]. C. Prieur, A robust globally asymptotically stabilizing feedback : the example of the Artstein's circles, in *Nonlinear Control in the Year 2000*, A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue and W. Respondek (eds.), Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 258, Springer Verlag, London, pp. 279-300, 2000.
- [C53]. C. Prieur, Hybrid systems with small perturbations, applications in control theory, in *Fourth Nonlinear Control Network (NCN) Workshop, Nonlinear and Adaptive Control*,

- A. Zinober et D. Owens (eds.), *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 281, Springer, Berlin, pp. 285-294, 2002.
- [C54]. C. Roos, J-M. Biannic, S. Tarbouriech, et C. Prieur, On-ground aircraft control law synthesis using an LPV anti-windup approach, in *Nonlinear analysis and synthesis techniques for aircraft control*, D. Bates et M. Hagstrom (eds.), *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, Berlin, 2007.
- [C55]. B. De Schutter, W. P. M. H. Heemels, J. Lunze, et C. Prieur, Survey of modeling, analysis and control of hybrid systems, in *Handbook of Hybrid Systems Control, Theory-Tools-Applications*, J. Lunze and F. Lamnabhi-Lagarrigue (eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 2009.