



HAL
open science

Couplage intégrales de frontières – éléments finis : application aux capsules sphériques et ellipsoïdales en écoulement.

J. Walter

► **To cite this version:**

J. Walter. Couplage intégrales de frontières – éléments finis : application aux capsules sphériques et ellipsoïdales en écoulement.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Technologie de Compiègne, 2009. Français. NNT : . tel-00454538

HAL Id: tel-00454538

<https://theses.hal.science/tel-00454538>

Submitted on 8 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée par

Johann WALTER

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Technologie de Compiègne

Champ disciplinaire : Bio-ingénierie, biomécanique, biomatériaux

Couplage intégrales de frontière – éléments finis :
application aux capsules sphériques et ellipsoïdales
en écoulement

Soutenue le 3 décembre 2009 devant le jury composé de :

- M. J.-L. Batoz (président)
- M. T.J. Pedley (rapporteur)
- M. P. Le Tallec (rapporteur)
- Mme D. Barthès-Biesel (directrice)
- Mme A.-V. Salsac
- M. M. Jaeger

Il faut imaginer Sisyphe heureux.

A. CAMUS

Remerciements

Alors que s'achèvent les trois ans et quelques mois consacrés à cette thèse, je me dois de remercier de nombreuses personnes, sans lesquelles ces années, et ce manuscrit, n'auraient pas été les mêmes.

Je remercie tout d'abord les membres de mon jury de thèse, pour avoir accepté d'en faire partie : Jean-Louis Batoz, Tim Pedley, Patrick Le Tallec, Marc Jaeger. Leurs remarques, critiques, suggestions ont été extrêmement précieuses. Mes remerciements vont tout particulièrement à Jean-Louis Batoz et Patrick Le Tallec pour m'avoir consacré beaucoup de temps durant ces années et m'avoir permis de comprendre un peu mieux les méthodes numériques et les éléments finis.

Je tiens à saluer Marina Vidrascu et Dominique Chapelle, de l'INRIA, pour s'être considérablement investis, avec toujours beaucoup de gentillesse et de disponibilité, dans les travaux visant à coupler nos codes pour prendre en compte la rigidité de flexion. Je me réjouis à l'idée de pouvoir consacrer plus de temps à travailler avec eux dans les quelques mois qui viennent.

Je remercie Éric Leclerc pour avoir porté le projet MicroFiec, financé par la Région Picardie et qui a payé une partie de ces travaux de thèse, ainsi que pour de nombreuses discussions fructueuses.

J'ai une très grande dette envers Étienne Lac, mon prédécesseur, dont le code et le manuscrit de thèse, impeccables, m'ont été une aide et une inspiration constante. Je dois aussi beaucoup à Yannick Lefebvre pour m'avoir passé le flambeau et avoir été, plusieurs années durant, une présence amicale dans le bureau.

Je remercie Alain Le Verger pour sa disponibilité et sa gentillesse. Je remercie

aussi Chantal Guilbert et Catherine Lacourt, ainsi que Christine Devaux et Odile Leclerc, pour leur efficacité et leur patience infinie face à mon incapacité à m'acquitter correctement des tâches administratives.

Il serait trop long de nommer toutes les personnes, en particulier les étudiants, qui ont contribué à rendre sympathiques ces années. J'ai une pensée particulière pour tous les gens du bureau et du couloir, déjà partis ou juste arrivés, que je n'oublierai pas de sitôt : Peiyuan, Xuan, Xuqu, Yohsuke, Hélène, Marie-Valérie, Cristi, Liguó, Aurélie, Iolanda, Zaher, ainsi qu'Agnès et Luhui.

Enfin, incapable de trouver des mots plus justes pour résumer une dette si immense, je remercie Dominique Barthès-Biesel et Anne-Virginie Salsac, mes patronnes, pour tout le chemin parcouru.

Table des matières

Principales notations	11
1 Introduction	15
1 Capsules et encapsulation	15
2 Capsules, vésicules, cellules	17
3 Capsules en écoulement : observations expérimentales	19
4 Capsules en écoulement : simulations numériques	22
4.1 Premiers travaux	22
4.2 Modèles axisymétriques	23
4.3 Modèles 2D	24
4.4 Modèles 3D	24
4.5 Au delà du modèle de membrane	29
5 Objectifs et plan de l'étude	31
2 Capsule en écoulement de Stokes	33
1 Présentation du problème	33
2 Formulation intégrale des équations de Stokes	36
2.1 Équations de Stokes, Stokeslet	36
2.2 Principe de la formulation intégrale	37
2.3 Application au cas d'une capsule	38
2.4 Capsule dans un écoulement infini	39
2.5 Capsule dans un canal	41

3	Élasticité bidimensionnelle : modèle de membrane	44
3.1	Déformations, efforts internes	45
3.2	Équation d'équilibre, principe des travaux virtuels	49
3.3	Lien avec l'élasticité tridimensionnelle	50
4	Lois de comportement	51
4.1	Quelques lois usuelles	51
4.2	Linéarisation de la loi de comportement	57
4.3	Comparaison des lois : sphère sous pression	59
3	Éléments finis de membrane et intégrales de frontière	61
1	Description du problème, contraintes de modélisation	61
2	Méthode numérique	63
2.1	Discretisation de l'interface	63
2.2	Schéma temporel et structure de la méthode numérique	66
2.3	Éléments finis de membrane	67
2.4	Problème fluide	70
3	Validation	70
3.1	Sphère sous pression	70
3.2	Convergence	71
3.3	Écoulement de cisaillement simple	73
3.4	Écoulement hyperbolique plan	80
4	Bilan et discussion	82
4.1	Limites des méthodes locales	86
4.2	Comparaison avec les méthodes existantes	87
4.3	Rigidité de flexion, limites du modèle de membrane	88
4	Capsules ellipsoïdales	91
1	Travaux précédents et objectifs	92
2	Présentation du problème et notations	94
3	<i>Tumbling</i> et <i>swinging</i>	96
3.1	<i>Tumbling</i>	97
3.2	<i>Swinging</i>	100
3.3	Transition	103
4	Influence de Ca et de la loi de comportement	105

4.1	Détermination de Ca^*	105
4.2	Évolutions des caractéristiques du mouvement	105
4.3	Étude des tensions	109
5	Influence du coefficient de Poisson	111
5.1	Évolution des caractéristiques du mouvement	111
5.2	Évolution de Ca^*	113
6	Discussion	117
6.1	Limites de l'étude	118
6.2	Importance des propriétés mécaniques de la membrane . . .	119
6.3	Tensions négatives, rigidité de flexion	120
5	Conclusion et perspectives	123
1	Bilan général	123
2	Perspectives	125
2.1	Capsule en écoulement confiné	126
2.2	Couplage avec Modulef, introduction d'une rigidité de flexion	130
A	Surfaces courbes, calcul tensoriel	135
1	Description d'une surface	135
1.1	Représentation paramétrique	135
1.2	Bases locales, tenseur métrique	136
1.3	Représentations d'un vecteur	137
2	Tenseurs d'ordre 2	138
2.1	Représentations d'un tenseur d'ordre 2	138
2.2	Transposition	139
2.3	Produit contracté	139
2.4	Tenseur identité	141
2.5	Dérivation par rapport à un tenseur d'ordre 2	142
3	Dérivées spatiales	143
3.1	Gradient	143
3.2	Divergence	144
3.3	Courbures	145
	Bibliographie	147

Principales notations

Lettres latines

A	Paramètre de la loi d'Evans-Skalak	56
$\underline{a}_1, \underline{a}_2$	Vecteurs tangents de la base covariante (configuration actuelle)	48
$\underline{A}_1, \underline{A}_2$	Vecteurs tangents de la base covariante (configuration de référence)	48
a/b	Rapport d'aspect de la capsule	94
a_V	Rayon de la sphère de même volume que la capsule	34
$\underline{\underline{B}}$	Tenseur des dilatations de Cauchy à gauche	48
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur des dilatations de Cauchy	46
C	Paramètre de la loi de Skalak	55
Ca	Nombre capillaire	36
D_{ij}	Paramètre de Taylor	72
D_{12}^∞	Paramètre de Taylor dans le plan de cisaillement à l'état stationnaire	72
$\underline{\underline{e}}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange	46
$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$	Vecteurs de la base cartésienne liée au fluide	33
E_s	Module d'Young surfacique	53
$\underline{\underline{F}}$	Gradient de la transformation	45
\underline{f}_w	Force surfacique pariétale (canal)	41

G_s	Module de cisaillement surfacique	53
h	Taille caractéristique d'une maille (adimensionnée)	65
I_1, I_2	Invariants de $\underline{\underline{C}}$	47
\underline{J}	Noyau de simple couche	37
J_s	Jacobien surfacique de la transformation	46
$\underline{\underline{K}}$	Noyau de double couche	37
K_s	Module de dilatation surfacique	53
\underline{n}	Vecteur normal	48
N_E	Nombre total d'éléments du maillage	65
N_N	Nombre total de nœuds du maillage	65
$N^{(p)}$	Fonction de forme associée au nœud p	64
\underline{q}	Chargement élastique sur la membrane	49
Re	Nombre de Reynolds	34
S	Paroi de la capsule (surface moyenne)	38
S_1, S_2	Faces d'entrée et de sortie du canal	41
S_w	Paroi du canal	41
\underline{T}	Tensions de Cauchy dans la membrane	47
Δt	Pas de temps	66
T_{min}, T_{max}	Extrema des tensions principales	76
\underline{U}	Déplacement depuis la configuration de référence	45
\hat{u}	Déplacement virtuel	49
\underline{v}	Vitesse dans le fluide	36
\underline{v}^{np}	Vitesse dans l'écoulement non perturbé	39
w_s	Énergie libre de déformation par unité de surface	46
\underline{X}	Position (configuration de référence)	45

\underline{x}	Position (configuration actuelle)	45
-----------------	-----------------------------------	----

Lettres grecques

β	Direction d'élongation de la capsule par rapport à \underline{e}_1	96
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement caractéristique de l'écoulement	33
Δ	Variation relative de surface de la capsule	95
δ	Position par rapport à la direction d'élongation de la capsule	96
$\underline{\hat{\underline{\epsilon}}}$	Tenseur des déformations virtuelles linéarisées	50
η^1, η^2	Coordonnées au sein d'un élément fini	64
ϑ	Épaisseur de la membrane	34
λ	Rapport des viscosités des fluides	33
λ_1, λ_2	Rapports d'extension	46
μ	Viscosité du fluide extérieur	33
ν_s	Coefficient de Poisson surfacique	53
ξ^1, ξ^2	Coordonnées d'un point de la membrane	44
$\underline{\underline{\pi}}$	Tensions de Piola-Kirchhoff dans la membrane	47
$\underline{\underline{\Sigma}}$	Contraintes de Piola-Kirchhoff dans la membrane (3D)	47
$\underline{\underline{\sigma}}$	Contraintes de Cauchy dans le fluide ou la membrane (3D)	36
$[\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{n}$	Saut de traction à l'interface entre les fluides	39
ψ	Paramètre de la loi de Mooney-Rivlin	54
Ω	Domaine fluide	37

Autres symboles

$\underline{\underline{\mathbb{1}}}_s$	Tenseur métrique 2D (configuration actuelle)	46
$\underline{\underline{\mathbb{1}}}_s^0$	Tenseur métrique 2D (configuration de référence)	46
∇_s	Opérateur gradient surfacique (configuration actuelle)	45
∇_s^0	Opérateur gradient surfacique (configuration de référence)	45
\bar{f}	Valeur moyenne de la quantité f	96
$[f]$	Amplitude crête à crête de la quantité f	96

Chapitre 1

Introduction

1 Capsules et encapsulation

L'encapsulation consiste à protéger une substance en l'entourant d'une enveloppe solide. Elle permet d'éviter sa dispersion dans le milieu ambiant ou sa dégradation au contact de celui-ci. Elle sert également au contrôle du relargage de la substance, la libération pouvant soit être lente, soit instantanée, en fonction des propriétés de l'enveloppe.

L'unité de base du vivant, depuis les premières bactéries, est la cellule. Celle-ci peut être envisagée comme une capsule. Une membrane marque la limite entre le milieu interne et le milieu externe et régule les échanges entre les deux, permettant à la cellule de faire entrer ce dont elle a besoin et d'agir sur son environnement extérieur en libérant des ions, des protéines, etc. Les transferts intra- et extracellulaires d'acides nucléiques et de protéines sont eux-mêmes souvent effectués à l'aide de capsules, plus simples que les cellules : les vésicules. Les globules rouges sont un exemple de capsules naturelles d'apparence très simple (ne possédant pas de matériel génétique, ils peuvent être considérés comme des capsules passives) mais permettant de remplir des fonctions très complexes. En protégeant l'hémoglobine et en maintenant sa concentration élevée en un lieu donné, ils favorisent la fixation et la libération du dioxygène et du dioxyde de carbone. Les transferts des gaz, fixés par l'hémoglobine, se font à travers la membrane de la cellule. Outre sa capacité à assurer les échanges, la membrane a également des propriétés mécaniques qui permettent au globule rouge de résister aux écoulements, dans les artères comme dans la microcirculation, sans se rompre. Un globule rouge humain atteint une durée de vie de 120 jours, durant laquelle il parcourt la circulation en-

viron un million de fois sans être excessivement endommagé.

Dans les dernières décennies, l'encapsulation à petite échelle est devenu un procédé omniprésent. Dans l'agro-alimentaire, par exemple, elle sert à protéger les substances volatiles telles que les arômes. Dans l'industrie cosmétique, ainsi qu'en pharmacologie, elle permet d'éviter la dégradation des substances actives par le milieu ambiant. Dans ces domaines, les procédés de fabrication sont suffisamment maîtrisés pour pouvoir être utilisés à grande échelle au quotidien. Il n'en est pas encore toujours de même dans le domaine biomédical, où les applications sont nombreuses mais la recherche encore très active pour atteindre les niveaux de fiabilité et de sécurité exigés pour faire pénétrer des capsules artificielles dans l'organisme.

Parmi les applications biomédicales les plus prometteuses figure la vectorisation, qui consiste à protéger un médicament ou du matériel génétique, pour le libérer localement, au niveau de la zone ciblée. La libération peut soit se faire brutalement, par rupture, ou continûment, par diffusion, pour assurer une action régulière de la substance thérapeutique. Ce domaine de recherche est actuellement très actif, et les techniques proposées sont nombreuses (Yih & Al-Fandi, 2006). Parmi les différentes méthodes d'encapsulation, on peut relever : les micro- et nanosphères (cœur solide) et micro- et nanocapsules (cœur liquide) polymériques (Johnston *et al.*, 2006) ; les liposomes (Rivera, 2003) ; les microbulles de gaz encapsulées dans un liposome (Liu *et al.*, 2006). Les applications sont multiples. Le traitement du cancer et la destruction de tumeurs cancéreuses est un domaine d'application particulièrement actif (Cho *et al.*, 2008) ; la vectorisation est alors intéressante, car elle vise à limiter les effets secondaires lourds d'une chimiothérapie classique. L'encapsulation d'acides nucléiques pour la thérapie génique est un autre domaine de la vectorisation exploré activement à l'heure actuelle.

D'autres applications biomédicales de l'encapsulation concernent l'encapsulation cellulaire, qui vise à se substituer à un organe déficient, par exemple dans l'attente d'une greffe (Kühtreiber *et al.*, 1999; Orive *et al.*, 2004). L'idée est de protéger des cellules étrangères à l'organisme. Des capsules à base d'alginate sont des porteurs couramment utilisés. L'encapsulation doit être optimisée pour que la capsule laisse passer les nutriments nécessaires aux cellules et les molécules synthétisées par celles-ci, tout en bloquant les immunoglobulines de l'hôte, empê-

chant ainsi la destruction des cellules par son système immunitaire.

L'encapsulation d'hémoglobine pour constituer du sang artificiel est également un sujet de recherche actif depuis de nombreuses années (Chang, 1999). Les propriétés mécaniques des capsules utilisées pour cela sont cruciales; des essais *in vivo* ont montré que les globules artificiels utilisés pouvaient être facilement endommagés dans la circulation, et que cet endommagement était directement lié à la forme et à la déformabilité des particules (Li *et al.*, 2005).

Le sang artificiel est un exemple qui illustre l'importance du contrôle de la rupture de la capsule, soit que l'on cherche à l'empêcher, soit que l'on souhaite la provoquer dans des conditions précises. Des facteurs physico-chimiques tels que le pH jouent évidemment un rôle important (Edwards-Lévy & Lévy, 1999). Mais les sollicitations mécaniques sont également à prendre en compte. Ceci nécessite de comprendre le comportement mécanique des objets utilisés pour l'encapsulation, qui est souvent complexe. Des tests expérimentaux et des modèles numériques sont ainsi nécessaires pour aider à la conception de ces objets.

2 Capsules, vésicules, cellules

Si les objets évoqués à la section précédente reposent sur des principes similaires, leurs propriétés mécaniques sont souvent très différentes. On s'intéressera ici aux capsules à cœur liquide, constituées d'une paroi solide renfermant un fluide. Dans toute la suite, le terme *capsule* désignera exclusivement ces objets. On exclut ainsi de l'étude les billes, couramment utilisées pour la vectorisation et l'encapsulation cellulaire, qui sont entièrement solides ou gélifiées.

Le principal objet d'étude concernera les capsules artificielles à membrane polymérique (Chang & Olbricht, 1993a; Edwards-Lévy & Lévy, 1999; Rehage *et al.*, 2002). La paroi d'une telle capsule est soumise aux lois de l'élasticité lagrangienne, c'est-à-dire qu'elle possède une configuration de référence et que toute déformation par rapport à celle-ci a un coût énergétique. Ce coût est quantifié par une énergie de déformation, qui n'obéit pas forcément à la loi de Hooke car le mouvement d'une capsule peut se faire dans le régime des *grandes déformations*. Comme indiqué dans le tableau 2.1, la paroi de tels objets est généralement mince par rapport au rayon de courbure. La mécanique de la paroi est alors dominée par

la résistance aux déformations surfaciques : dilatation et cisaillement ; pour des membranes polymérisées, ces deux effets sont du même ordre de grandeur. Du fait de la faible épaisseur de la paroi, les efforts de flexion sont généralement moins importants que les efforts plans, mais ils peuvent devenir dominants ponctuellement si la courbure locale devient élevée du fait d'une déformation.

Les vésicules phospholipidiques sont des capsules particulières. Leur paroi est constituée d'une bi-couche lipidique (ou de plusieurs bi-couches dans le cas des vésicules multilamellaires) ; au sein de celle-ci, les phospholipides sont totalement libres de glisser les uns par rapport aux autres dans le plan de la bi-couche. La paroi d'une vésicule a donc les caractéristiques d'une membrane fluide : elle ne possède pas de forme de référence et a une résistance au cisaillement sensiblement nulle. En revanche, les distances entre les phospholipides restent toujours à peu près constantes : ces membranes résistent très fortement à l'augmentation de surface. Si la paroi n'a pas de forme de référence, elle a en revanche une courbure de référence, ce qui se traduit par une résistance à la flexion. Cette dernière est particulièrement importante pour déterminer la forme que prend au repos une vésicule dont le rapport surface/volume est supérieur à celui de la sphère (Seifert, 1997). D'un point de vue mécanique, un *modèle vésicule* spécifique s'est ainsi développé. Il décrit une paroi dont le comportement est piloté par la nécessité de conserver sa surface constante, avec la prise en compte d'une rigidité de flexion ainsi que, pour les petites vésicules, de la sensibilité aux fluctuations thermiques. Ce modèle a donné lieu à une abondante littérature, qui dépasse le cadre de cette thèse. Voir par exemple Seifert (1999) et Vlahovska & Gracia (2007) pour une présentation du modèle vésicule et du formalisme associé.

Le cas du globule rouge est complexe, car il emprunte des caractéristiques aux capsules polymériques et aux vésicules. Sa paroi se compose tout d'abord d'une bi-couche lipidique, qui la rend très résistante aux variations de surface ; mais cette bi-couche est reliée à un cytosquelette protéique (constitué de spectrine), lequel introduit une forme de référence et une résistance au cisaillement (Mohandas & Evans, 1994). Comme indiqué dans le tableau 2.1, la résistance à la dilatation de surface est très supérieure à la résistance au cisaillement, et l'on pourra généralement considérer que le globule rouge se déforme à surface constante. Toutefois, son comportement est clairement différent de celui d'une vésicule. Fischer (2004)

a ainsi montré que, après déformation de la cellule puis retour au repos, les points matériels de la paroi retrouvaient la position qu'ils occupaient initialement sur celle-ci. L'existence de cette forme de référence a des conséquences en écoulement : les expériences d'Abkarian *et al.* (2007) ont mis en évidence un comportement en écoulement, le régime de *swinging*, que l'on ne peut expliquer sans celle-ci. La membrane du globule rouge présente par ailleurs des propriétés visco-élastiques (Evans & Skalak, 1980).

Dans le cadre de ces travaux, on choisit de s'intéresser à des capsules dont le comportement est piloté par l'élasticité lagrangienne. Ceci exclut l'étude des vésicules. De plus, on choisit d'étudier principalement les efforts élastiques dans le plan de la membrane, que l'on supposera dominants.

3 Capsules en écoulement : observations expérimentales

Dans la suite de ce travail, on s'intéressera au comportement mécanique propre d'une capsule et non pas, par exemple, aux propriétés moyennées d'une suspension (viscosité apparente. . .). On étudiera une capsule à paroi mince, remplie d'un fluide newtonien, soumise à un écoulement extérieur. On supposera de plus que le fluide extérieur est aussi newtonien et que le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la capsule est faible ; on a ainsi un *écoulement de Stokes*. Sous l'action de cet écoulement, la capsule se déplace, se déforme, éventuellement jusqu'à rupture de la paroi. Ce sont ces phénomènes mécaniques qui nous préoccuperont.

On présente maintenant les principales constatations expérimentales relatives au comportement d'une capsule artificielle isolée en écoulement. On notera qu'il existe une abondante littérature expérimentale relative au comportement mécanique du globule rouge. Toutefois, le globule rouge est une capsule très particulière, dont l'étude n'est pas l'objet de cette thèse, même si des extrapolations à ce cas pourront être envisagées. On ne s'intéressera pas non plus aux cas d'interactions entre capsules.

Deux types d'écoulement fréquemment utilisés pour l'étude des capsules sont ceux introduits par Taylor (1934) pour l'étude des gouttes en écoulement de Stokes : l'écoulement hyperbolique plan et l'écoulement de cisaillement simple. Réalisées

	a_V	ϑ	ϑ/a_V	G_s	K_s	K_s/G_s	κ	$\kappa/(K_s a_V^2)$
Capsule alginate-HSA (Carin <i>et al.</i> , 2003)	2×10^{-3}	3×10^{-5}	2×10^{-2}	2	2	1	3×10^{-10}	4×10^{-5}
Microcapsule ovalbumine (Lefebvre <i>et al.</i> , 2008)	3×10^{-5}	1×10^{-7}	3×10^{-3}	7×10^{-2}	0.2	3	2×10^{-16}	1×10^{-6}
Vésicule unilamellaire géante (Nagle & Tristram-Nagle, 2000)	2×10^{-5}	5×10^{-9}	3×10^{-4}	≈ 0	0.3	$+\infty$	1×10^{-19}	8×10^{-10}
Globule rouge (Lenormand <i>et al.</i> , 2001; Dao <i>et al.</i> , 2003)	3×10^{-6}	7×10^{-9}	2×10^{-3}	5×10^{-6}	0.3	6×10^4	2×10^{-19}	7×10^{-8}

Tableau 2.1 – Paramètres physiques pour plusieurs types de capsules ou vésicules : taille a_V [m], épaisseur de la paroi ϑ [m], module de cisaillement surfacique G_s [N/m], module de dilatation surfacique K_s [N/m], module de flexion κ [J]. Le module de flexion κ n'est pas indiqué dans les deux articles sur les capsules artificielles ; on a postulé que la paroi était constituée d'un matériau isotrope homogène et utilisé la formule classique $\kappa = \frac{E\vartheta^3}{12(1-\nu^2)}$, où E est le module d'Young (volumique) et ν est le coefficient de Poisson.

dans des systèmes à quatre rouleaux⁽¹⁾, les expériences en écoulement hyperbolique plan (Akchiche, 1987; Barthès-Biesel, 1991; Chang & Olbricht, 1993a) mettent en évidence un allongement de la capsule dans la direction d'élongation jusqu'à atteindre un état stationnaire. Dans cet état stationnaire, la paroi de la capsule et le fluide interne sont immobiles⁽²⁾; ceci implique que la viscosité du fluide interne n'a pas d'influence sur l'état stationnaire. Pour des écoulements suffisamment forts, on arrive à provoquer la rupture de la capsule (Barthès-Biesel, 1991).

Des expériences de cisaillement simple ont été réalisées dans un écoulement de Couette, avec des parois suffisamment éloignées de la capsule pour supposer qu'elles n'agissent pas directement sur elle. Ces expériences (Chang & Olbricht, 1993b; Walter *et al.*, 2000, 2001) montrent que la capsule s'allonge et s'incline par rapport à la direction de l'écoulement. Un état stationnaire peut être atteint, pour lequel la forme des capsule est fixe mais la membrane est en rotation autour de cette forme, entraînée par la vortacité de l'écoulement (ce qui implique que la viscosité du fluide interne a, dans ce cas, une influence sur l'état stationnaire); on parle de mouvement de *tank treading*. En fait, toutes ces études expérimentales notent, en régime établi, de faibles oscillations périodiques de la déformation et de l'inclinaison de la capsule; ces phénomènes, qu'on appelle maintenant généralement *swinging*, s'expliquent par le fait que les capsules utilisées n'étaient pas parfaitement sphériques⁽³⁾. Walter *et al.* (2001) notent aussi que la capsule présente des plis à faibles taux de cisaillement, tandis que Chang & Olbricht (1993b) parviennent à provoquer la rupture pour des taux de cisaillement suffisamment élevés.

Un troisième cas test rencontré dans diverses études (Risso *et al.*, 2006; Lefebvre *et al.*, 2008) est l'écoulement de Poiseuille dans un canal dont la dimension

1. Plus récemment, Lee *et al.* (2007) ont développé un système microfluidique permettant de générer un tel écoulement sans avoir recours aux rouleaux.

2. Notons que ceci est une des grandes différences entre le comportement d'une capsule et celui d'une goutte. Cela tient à la différence entre une surface fluide, qui transmet les contraintes de cisaillement, et une surface solide, qui peut les absorber.

3. On verra au chapitre 4 qu'il existe, pour les capsules non-sphériques, un régime totalement différent de celui de tank treading / swinging, appelé *tumbling*. Toutefois, les études référencées ici faisaient intervenir un fluide externe bien plus visqueux que le fluide interne; on verra que ceci rend nécessaire le travail à de très faibles taux de cisaillement pour observer ce régime, ce qui explique sans doute pourquoi ces études ne l'ont pas rencontré.

radiale est proche de la taille de la capsule. Ce cas a aussi été considérablement étudié pour les globules rouges, tant *in vivo* (microcirculation) qu'*in vitro*. Notons aussi que l'étude de Lefebvre *et al.* comporte des travaux dans des canaux microfluidiques de section carrée. Dans le cas d'une capsule artificielle initialement sphérique en canal cylindrique, on observe que la capsule migre vers le centre du canal pour atteindre une configuration axisymétrique. Elle se déforme, en particulier à l'arrière, où l'on note d'importants changements de courbure pouvant aller jusqu'à l'inversion de celle-ci (forme de parachute). Un état stationnaire est atteint, pour lequel la membrane et le fluide intérieur sont immobiles dans le référentiel de la capsule. Il ne semble pas y avoir de données expérimentales pour des capsules artificielles non-sphériques en canaux. Toutefois, les observations sur les globules rouges dans des capillaires montrent la possibilité de formes stationnaires non-axisymétriques (Skalak & Branemark, 1969).

Ces études mettent en valeur les phénomènes importants qu'il est intéressant d'étudier avec un modèle numérique : la présence de grandes déformations, pouvant aller jusqu'à la rupture ; l'effet du rapport des viscosités des fluides ; et l'enrichissement des phénomènes physiques observés, avec l'apparition de plusieurs régimes, quand les capsules n'ont pas une forme de référence sphérique.

4 Capsules en écoulement : simulations numériques

4.1 Premiers travaux

Les premiers travaux théoriques sur la mécanique de capsules en écoulement sont dus à Barthès-Biesel (1980) qui pose les hypothèses physiques du problème : écoulement de Stokes, prédominance des phénomènes d'élasticité plane par rapport à la flexion, grandes déformations de la membrane. Elle choisit trois paramètres principaux pour l'étude : le rapport des viscosités entre les fluides, un *nombre capillaire* comparant élasticité de la membrane et forces visqueuses⁽⁴⁾, et la loi de comportement de la membrane. Cet article fournit de premiers résul-

4. L'expression « nombre capillaire », quelque peu contre-intuitive, vient du fait que l'étude de la mécanique des capsules en écoulement de Stokes s'est beaucoup inspirée de celle des gouttes, pour lesquelles avait été introduit un nombre capillaire comparant forces visqueuses et tension de surface. On ne prend évidemment pas en compte de forces capillaires dans la mécanique des capsules.

tats pour une capsule initialement sphérique suspendue dans un écoulement de cisaillement simple. Ces résultats sont obtenus analytiquement pour des faibles valeurs du nombre capillaire (et donc de faibles perturbations par rapport à la forme initiale) et sont limités au régime stationnaire. L'influence des études existantes sur les gouttes en écoulement de Stokes est perceptible dans le choix des quantités étudiées : déformation dans le plan de cisaillement, quantifiée à l'aide du paramètre de Taylor, angle d'inclinaison du profil déformé..., tandis qu'aucun résultat quantitatif n'est mis en valeur pour la partie solide (tensions dans la membrane, par exemple).

Peu après, Barthès-Biesel & Rallison (1981) améliorent cette étude, en clarifiant considérablement la présentation du problème solide et en donnant une formule générale pour la déformation d'une capsule initialement sphérique en suspension dans n'importe quel type d'écoulement de Stokes. La méthode développée dans cet article permet aussi d'étudier les phénomènes transitoires.

4.2 Modèles axisymétriques

Dès que l'on essaie d'étudier de plus grandes déformations, le problème devient non-linéaire et il est alors impossible de le traiter analytiquement. La première étude numérique est due à Li *et al.* (1988) pour le cas d'un écoulement élongationnel axisymétrique infini. Le problème est préintégré analytiquement dans la direction orthoradiale : il ne reste donc qu'un demi-contour de la capsule à discrétiser. Ceci est fait à l'aide de 48 points de collocation, les dérivées étant calculées par différences finies. La méthode est raisonnablement précise et stable, même si du lissage est nécessaire. Ce même problème est ensuite étudié et appliqué au globe rouge par Pozrikidis (1990), en utilisant une méthode similaire. Par la suite, Diaz *et al.* (2000) ont montré que la description du contour de la capsule avec des éléments de frontière, reposant sur des fonctions B-splines et permettant de calculer plus précisément les dérivées spatiales, améliorerait fortement la fiabilité et la précision de la méthode par rapport à l'utilisation de différences finies.

Les modèles axisymétriques ne sont adaptés qu'à un nombre limité de problèmes, mais ils restent utiles pour le cas de l'écoulement d'une capsule dans un canal cylindrique. Des études récentes ont ainsi montré qu'un tel modèle permet une très bonne corrélation avec l'expérience (Lefebvre & Barthès-Biesel, 2007) et

peut être utilisé pour mesurer les propriétés mécaniques d'une microcapsule par analyse inverse (Lefebvre *et al.*, 2008).

Les modèles axisymétriques reposent sur l'hypothèse de l'invariance selon la direction orthoradiale. On montre toutefois que, pour divers choix de paramètres, la capsule est en compression dans cette direction. On peut s'attendre à ce que la membrane flambe et que des plis apparaissent (ceux-ci sont observés expérimentalement par Lefebvre *et al.*, 2008). Les résultats des modèles doivent donc être questionnés. Comme des modèles tridimensionnels en écoulement confiné commencent à être développés (Doddi & Bagchi, 2008*b*), il pourra être intéressant d'éprouver la validité des modèles axisymétriques en présence de compression.

4.3 Modèles 2D

La déformation de capsules a aussi été étudiée avec des modèles purement 2D, réduisant la capsule à une ligne élastique en mouvement dans un plan. La conservation du volume interne est remplacée par celle de la surface interne et l'incompressibilité surfacique de la paroi est, le cas échéant, remplacée par la conservation de la longueur du contour. De tels modèles permettent de traiter des problèmes non-axisymétriques tout en conservant une charge de calcul modérée; récemment, ils ont par exemple été utilisés pour modéliser la migration latérale de vésicules (Coupier *et al.*, 2008) et de globules rouges (Secomb *et al.*, 2007) en écoulement confiné. De tels modèles très simplifiés ne peuvent évidemment pas donner de résultats quantitativement exacts. Une capsule étant un objet fondamentalement tridimensionnel, de taille similaire dans les trois directions, il est permis de se demander si de tels modèles sont même pertinents qualitativement et s'ils ne risquent pas de manquer certains phénomènes cruciaux.

4.4 Modèles 3D

La première modélisation en 3D du comportement d'une capsule dans un écoulement infini est due à Pozrikidis (1995). S'inscrivant dans une tradition passant par l'article de Barthès-Biesel (1980) et remontant jusqu'aux travaux expérimentaux de Taylor (1934) sur les gouttes, Pozrikidis choisit de s'intéresser au cas d'une capsule dans un écoulement de cisaillement simple; ce problème est devenu depuis le cas test par excellence pour tous les travaux numériques sur les capsules.

À la suite de cette première étude, des stratégies numériques diverses ont été mises en place pour modéliser le comportement d'une capsule en écoulement.

Il faut noter un point commun : toutes ces méthodes emploient la structure générale introduite par Li *et al.* (1988) dans le cas axisymétrique et résumée à la figure 4.1. À chaque itération, pour une déformation donnée de la capsule, le problème solide est d'abord résolu, afin d'obtenir le chargement élastique exercé par la membrane sur les fluides. Celui-ci connu, le problème fluide peut être résolu, pour obtenir le champ de vitesse, en particulier au niveau de la membrane. Il est ensuite intégré de manière explicite (souvent par une simple méthode d'Euler) pour obtenir le déplacement correspondant et la nouvelle déformation de la capsule.

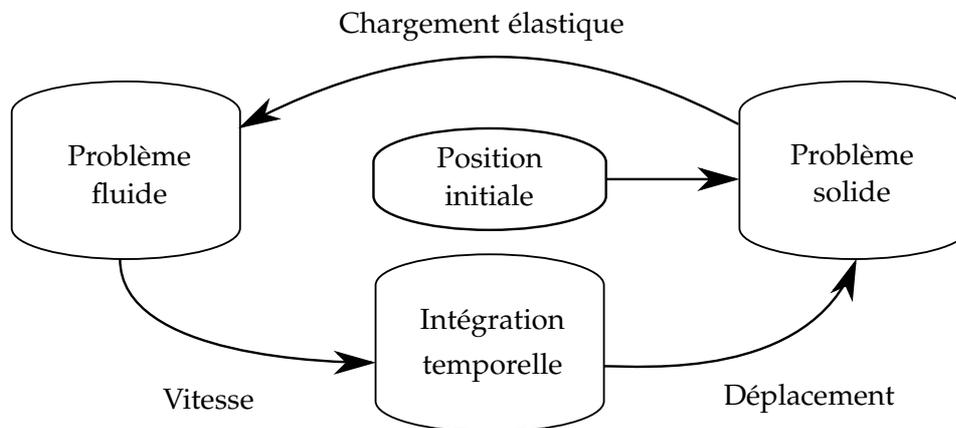


Figure 4.1 – Structure générale des schémas numériques utilisés pour simuler la mécanique de capsules.

Là où les diverses méthodes numériques diffèrent, c'est dans la discrétisation et la résolution des problèmes fluide et solide, et dans la manière de transférer les informations de l'un à l'autre. Les caractéristiques des principaux travaux récents sont synthétisées dans le tableau 4.1.

On notera que cette stratégie est différente de celles généralement utilisées en interaction fluide–structure. Le Tallec & Mouro (2001), par exemple, proposent une stratégie dans laquelle ce sont les efforts qui sont imposés au solide, et non déplacements qui sont alors l'inconnue du problème solide. De plus, les dérivées en temps doivent être traitées de manière plus complexe, du fait de la prise d'inertie dans le système.

	Problème fluide	Couplage	Problème solide
Ramanujan & Pozrikidis (1998)	Intégrales de frontière	Même maillage	Local moyenné (Poz)
Lac <i>et al.</i> (2004)	Intégrales de frontière	Même maillage	Local sur base B-splines bicubiques
Dodson & Dimitrakopoulos (2008)	Intégrales de frontière	Même maillage	Local sur éléments spectraux
Kessler <i>et al.</i> (2008)	Méthode spectrale (modes de Lamb)	Même maillage	Méthode spectrale
Li & Sarkar (2008)	Différences finies sur grille fixe	Frontières immergées	Local moyenné (Poz)
Doddi & Bagchi (2008 <i>a,b</i>)	Différences finies sur grille fixe	Frontières immergées	Éléments finis (E&P)
Sui <i>et al.</i> (2008)	Lattice Boltzmann	Frontières immergées	Éléments finis (E&P)

Tableau 4.1 – Méthodes numériques utilisées dans les publications récentes pour modéliser le comportement d’une capsule en 3D. Pour le problème solide, « Poz » désigne la méthode moyennée de Pozrikidis (1995), tandis que « E&P » renvoie à la méthode éléments finis d’Eggleton & Popel (1998).

Résolution du problème fluide

Au cours du mouvement de la capsule, la paroi subit des grands déplacements, comme les deux domaines fluides. Ceci introduit des complications : par exemple, mailler les domaines fluides (intérieur et extérieur) indépendamment nécessite alors de remailler fréquemment. Diverses méthodes ont été mises en place pour éviter ce remaillage régulier. La méthode des intégrales de frontière, développée par Ladyzhenskaya (1969) permet, dans le cas d'un écoulement de Stokes, de ne discrétiser que les frontières et non les domaines fluides. La vitesse de la membrane est exprimée en fonction d'une intégrale sur les seules interfaces du problème (membranes des capsules et éventuelles parois extérieures). Toutes les études ayant utilisé cette méthode ont de plus choisi, pour des raisons évidentes, d'utiliser le même maillage pour résoudre le problème solide et pour calculer l'intégrale sur la paroi de la capsule.

Une autre méthode utilisée pour ne pas avoir à mailler les fluides est la méthode spectrale utilisée par Kessler *et al.* (2008). Les domaines fluides sont projetés dans une base de fonctions spectrales, dont les fonctions de base ont la propriété de vérifier les équations de Stokes (modes de Lamb). En écrivant les conditions aux limites cinématiques et dynamiques aux points de collocation de la paroi, on a suffisamment d'équations pour déterminer les coefficients dans cette base de fonctions et ainsi résoudre le problème fluide.

L'autre classe de méthodes utilisées pour éviter d'avoir à remailler les fluides consiste à discrétiser ceux-ci à l'aide d'un maillage commun. Ainsi, dans la méthode des frontières immergées (proposée par Peskin; voir Peskin, 2002 pour une présentation de la méthode), les deux domaines fluides sont discrétisés à l'aide de la même grille eulérienne fixe, tandis que l'interface utilise un maillage 2D déformable séparé. Les vitesses et les efforts sont passés entre le solide et les fluides à l'aide de fonctions de Dirac approchées. L'interface est donc moins précise avec cette méthode qu'avec les intégrales de frontière; toutefois, les frontières immergées permettent de s'affranchir de l'hypothèse « écoulement de Stokes » et de travailler à des nombres de Reynolds plus grands, ou avec des fluides non-newtoniens. Dans ses travaux, Peskin résout le problème fluide et la mécanique de l'interface par des méthodes locales avec des différences finies, mais, pour les capsules, d'autres techniques ont pu être utilisées. Par exemple, Sui *et al.* (2008)

utilisent une méthode de type lattice Boltzmann pour traiter les fluides.

Résolution du problème solide

La résolution du problème solide peut être faite par diverses méthodes. Il a été constaté avec les modèles axisymétriques qu'une simple résolution des équations locales à l'aide de différences finies manquait de précision et de stabilité. L'utilisation d'interpolations ou de projections sur des bases de fonctions d'ordre élevé permet de calculer analytiquement les dérivées spatiales et d'obtenir de bons résultats par résolution des équations locales. Ainsi, Lac *et al.* (2004) utilisent des B-splines bicubiques, tandis que Dodson & Dimitrakopoulos (2008) font appel à des éléments spectraux. De telles méthodes locales nécessitent la continuité des dérivées spatiales de la position en tout point de la membrane⁽⁵⁾ et peuvent donc se révéler délicates à implémenter.

Pozrikidis (1995) a proposé une méthode utilisant une discrétisation plus simple de la membrane, autorisant des dérivées discontinues entre les éléments. Cette méthode consiste à supposer que le chargement élastique appliqué par la paroi sur les fluides est constant par élément; on montre alors que l'on peut se ramener à une intégrale sur les contours des éléments. Toutefois, cette méthode fait intervenir diverses moyennes et approximations, et ne saurait donc donner des résultats d'une grande précision. De plus, le chargement obtenu est discontinu au passage d'un élément à l'autre. Pozrikidis (1995) et Ramanujan & Pozrikidis (1998) utilisent le chargement calculé par cette méthode dans une intégrale de frontière; les discontinuités étant intégrées, elles ne posent pas de problème. En revanche, Li & Sarkar (2008), qui utilisent la même méthode de calcul du chargement, se servent de ce dernier dans une résolution *locale* du problème fluide; on peut alors s'interroger sur l'influence des discontinuités du chargement, même si elles sont en partie lissées par les fonctions de Dirac approchées des frontières immergées.

À côté des méthodes cherchant à résoudre localement les équations du mouvement de la paroi, une autre classe de méthodes utilisées pour traiter le problème solide repose sur sa formulation en un problème variationnel. L'équation locale est multipliée par une fonction test, un déplacement virtuel, et intégrée sur l'ensemble du domaine solide pour obtenir le principe des travaux virtuels. La formulation

5. On reviendra en détail sur ce point à la fin du chapitre 3.

variationnelle du problème solide est à la base de la technique de résolution par éléments finis proposée par Eggleton & Popel (1998) et reprise à l'identique par Doddi & Bagchi (2008b). Cette méthode, inspirée des travaux de Charrier *et al.* (1989), présente quelques limites. Ainsi, toute la formulation repose explicitement sur le fait que les éléments utilisés emploient une interpolation linéaire ; s'il était nécessaire de changer de type d'interpolation, par exemple pour augmenter la précision ou pour enrichir la physique du modèle, toute la méthode serait à revoir. Par ailleurs, le problème étudié par Charrier *et al.* est différent du cas d'une capsule : ces auteurs imposent un chargement, qui est uniquement normal (pression), et cherchent le déplacement correspondant ; dans le cas d'une capsule, on impose le déplacement et on cherche le chargement, qui a une composante normale et une composante tangentielle (du fait des frottements visqueux). Ni Eggleton & Popel ni Doddi & Bagchi ne fournissent la moindre explication quant à la manière dont ils adaptent la méthode de Charrier *et al.* à leur cas.

Enfin, la méthode utilisée par Kessler *et al.* (2008) diffère significativement des autres méthodes existantes, vu qu'elle repose sur la projection du domaine solide sur une base de fonctions spectrales⁽⁶⁾. Le problème solide est résolu à l'aide du principe des travaux virtuels, en utilisant des fonctions tests bien choisies, chacune permettant d'obtenir une équation portant sur une seule des fonctions de base, ce qui autorise une résolution simple du problème. La méthode semble efficace, mais n'a pour l'instant été utilisée que dans des domaines de petites déformations ; elle demande à être validée pour de plus grandes déformations.

4.5 Au delà du modèle de membrane

À l'exception de Kessler *et al.* (2008), tous les travaux présentés dans le tableau 4.1 traitent la paroi de la capsule comme une surface élastique sans rigidité de flexion. On peut cependant se demander si ces hypothèses ne peuvent pas être remises en question et si d'autres comportements ne devraient pas être ajoutés au modèle de la paroi. Par exemple, Secomb *et al.* (2007) et Barber *et al.* (2008) modélisent des globules rouges en traitant la paroi comme une surface *viscoélastique*.

6. On parle bien ici d'une projection, et non d'une interpolation comme dans la méthode de Dodson & Dimitrakopoulos (2008). Les positions et les dérivées sont continues d'un élément à l'autre.

Diaz *et al.* (2001) ont aussi étudié le cas d'une capsule à membrane viscoélastique en écoulement élongationnel. Toutefois, il s'agit de modèles de capsules 2D ou axisymétriques ; il ne semble pas exister à l'heure actuelle de modèles de capsules 3D incorporant de la viscoélasticité.

L'argument de Barthès-Biesel (1980) selon lequel l'hypothèse d'une paroi mince justifie de négliger la rigidité de flexion de celle-ci (par rapport aux efforts de cisaillement / dilatation surfaciques) n'est valable que *tant que la membrane est en traction*. Si, en revanche, la membrane subit de la compression plane dans une direction, elle va avoir tendance à plisser ou à flamber, et ce phénomène est piloté par sa rigidité de flexion (Finken & Seifert, 2006). L'existence de tels phénomènes pour une capsule en écoulement a été montré expérimentalement par Walter *et al.* (2001) et étudié numériquement par Lac *et al.* (2004). Ainsi, il conviendrait de modéliser la paroi d'une capsule non avec un modèle de *membrane* (sans rigidité de flexion) mais avec un modèle de *coque*. Toutefois, mettre en place un modèle de coque fiable, en grandes déformations avec des lois de comportement non-linéaires, est une tâche complexe.

Pozrikidis (2001) a tenté d'étendre la méthode de Ramanujan & Pozrikidis (1998) pour y incorporer une rigidité de flexion, suivant un simple modèle linéaire. Les moments de flexion sont calculés à partir de la courbure des éléments. Cependant, avec la discrétisation adoptée, les dérivées (et donc les normales) sont discontinues d'un élément un l'autre, et ces contributions ne sont pas prises en compte dans le calcul des effets de flexion. Pourtant, l'angle formé entre deux éléments est relié à ces effets. Dans cet article, Pozrikidis utilise des éléments quadratiques courbes mais, s'il avait utilisé des éléments linéaires plans, sa méthode aurait calculé des effets de flexion identiquement nuls sur toute la capsule, quelle que soit la déformation de celle-ci – ce qui est un non-sens.

Venus de la communauté des vésicules, où la rigidité de flexion joue un rôle important, Kessler *et al.* (2008) ont pris en compte ce phénomène dans leur étude des capsules ellipsoïdales. Ils adoptent un modèle simple, proposé par Helfrich (1973) pour les bi-couches lipidiques, introduisant une énergie de flexion variant avec le carré de la courbure moyenne locale. Toutefois, toute leur étude est conduite dans un domaine de déformation modérée, et ils ne font aucune étude quant à l'influence de cette rigidité de flexion sur leurs résultats. On voit ainsi qu'il est

nécessaire, pour l'étude des capsules en écoulement, de dépasser le modèle de membrane, mais qu'une étude complète avec un modèle de coque reste à conduire.

En conclusion, il existe désormais un large choix de méthodes numériques utilisables pour modéliser le comportement de capsules en écoulement. Toutefois, celles-ci ne sont pas égales en précision et en fiabilité. Un autre point très important à prendre en compte dans le choix d'une méthode est sa capacité à être étendue à une physique plus riche qu'un modèle de membrane élastique.

5 Objectifs et plan de l'étude

Le code numérique utilisé au sein de l'équipe au début de ces travaux de thèse était essentiellement celui présenté par Lac (2003) (et amélioré par Lac *et al.*, 2007), utilisant des intégrales de frontières et une discrétisation de la paroi par des B-splines bicubiques. Ce code a l'avantage de modéliser avec précision les grandes déformations, mais il présente l'inconvénient de devenir extrêmement instable en présence de compression plane, car les fonctions splines se mettent à osciller et la distance entre les nœuds à tendre vers 0. Ceci n'est problématique en cisaillement simple que pour certaines gammes de paramètres, mais devient rédhibitoire en écoulement parabolique (infini ou confiné), le code échouant systématiquement à rester stable lors de l'inversion de courbure à l'arrière de la capsule. Des problèmes de stabilité se posent aussi pour des capsules initialement non-sphériques. On pourrait souhaiter ajouter une rigidité de flexion à ce modèle. Toutefois, les équations locales d'équilibre de la paroi, même pour un simple modèle linéaire de flexion, font intervenir les dérivées secondes des courbures, c'est-à-dire les dérivées quatrièmes de la position. Il n'est pas possible de décrire de manière raisonnable de telles dérivées avec des splines *cubiques*.

Il a donc été nécessaire de modifier très profondément le code numérique et de changer complètement la discrétisation et le traitement du problème solide, en choisissant une nouvelle méthode qui puisse ensuite être étendue à la prise en compte d'une rigidité de flexion, d'effets viscoélastiques, etc. Le choix s'est porté sur la méthode des éléments finis, qui est très fréquemment utilisée pour modéliser les coques (voir par exemple Batoz & Dhatt, 1992; Chapelle & Bathe, 2003). Toutefois, le cas à traiter est particulier : il est nécessaire de travailler à

l'inverse des méthodes habituelles (déplacement imposé et non déplacement inconnu), et de travailler en grandes déformations avec plusieurs lois de comportement. Ceci rend malaisé le recours à des codes commerciaux ou classiques. On a donc choisi de développer une nouvelle méthode de résolution du problème solide, tout d'abord en l'absence de rigidité de flexion, mais en gardant l'ajout ultérieur de celle-ci à l'esprit. Pour le problème fluide, on conserve la méthode des intégrales de frontière, qui doit toutefois être adaptée à la nouvelle discrétisation de la paroi. Cette étude constitue la première tentative de couplage de ces deux méthodes pour l'étude d'une capsule.

Les grands objectifs de cette thèse sont donc :

- de développer une nouvelle stratégie numérique couplant éléments finis de membrane et intégrales de frontières, et de le valider ;
- d'exploiter ce code pour traiter le cas de capsules non-sphériques, inaccessible à la méthode numérique de Lac *et al.* (2004) et présentant actuellement un grand intérêt ;
- d'envisager l'extension de ce code pour enrichir la physique du problème.

Au chapitre 2, on présentera les hypothèses et équations du problème, en cherchant à les formuler sous une forme adaptée au travail numérique : les intégrales de frontières pour le problème fluide, le principe des travaux virtuels en coordonnées curvilignes pour le problème solide. La méthode numérique sera détaillée au chapitre 3. Par comparaison avec la littérature, on montrera qu'elle fournit d'excellents résultats. Au chapitre 4, la nouvelle méthode numérique sera utilisée pour étudier le comportement de capsules initialement non-sphériques (de forme ellipsoïdale). Ce sujet très riche n'a été que peu étudié jusqu'alors, et ce travail constituera, pour de telles capsules, la première étude détaillée de l'influence des propriétés mécaniques de la membrane. Enfin, la méthode a vocation à être étendue à des problèmes plus complexes, tant du point de vue fluide que solide. Le chapitre 5 sera largement consacré à ces extensions. Des résultats, préliminaires mais très encourageants, seront présentés pour deux problèmes : l'étude de la déformation d'une capsule en mouvement dans un canal de diamètre hydraulique proche de sa taille, et l'ajout d'une rigidité de flexion à la paroi de la capsule. La possibilité d'études ultérieures, à plus long terme, sera aussi discutée.

Chapitre 2

Capsule en écoulement de Stokes

Dans ce chapitre, on présente le modèle mécanique utilisé pour décrire une capsule en écoulement, en insistant tout d'abord sur les hypothèses physiques qui vont sous-tendre tout le travail. Le comportement d'une capsule en écoulement repose sur un couplage fluide-structure entre, d'une part, les écoulements interne et externe et, d'autre part, la paroi de la capsule. On se propose ici de donner les équations régissant chacun de ces domaines, en les mettant sous une forme qui sera utile pour traiter le problème numériquement : les équations de Stokes formulées comme des intégrales de frontière pour les fluides (§2) ; un modèle de membrane hyperélastique écrit sous forme variationnelle pour la paroi (§3). Enfin, on présentera quelques lois de comportement utilisées fréquemment pour décrire la paroi de capsules (§4).

1 Présentation du problème

Comme représenté figure 1.1, on considère une capsule, contenant un fluide newtonien de viscosité μ_{int} et de masse volumique ρ_{int} , suspendue dans un autre fluide newtonien de viscosité μ et de masse volumique ρ . On considèrera par la suite que $\rho_{int} = \rho$, de sorte que les effets gravitationnels seront négligés. On néglige par ailleurs toutes les autres forces de volume. On introduit

$$\lambda = \frac{\mu_{int}}{\mu}, \quad (1.1)$$

le rapport des viscosités. On caractérise l'écoulement du fluide externe par un taux de cisaillement caractéristique $\dot{\gamma}$. On utilisera $\dot{\gamma}^{-1}$ comme échelle de temps caractéristique du problème. On se place dans un référentiel lié au fluide, muni du repère cartésien $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

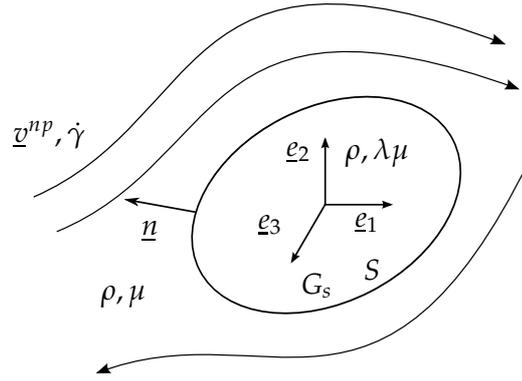


Figure 1.1 – Capsule en écoulement de Stokes.

La capsule, de volume V constant, est caractérisée par le rayon de la sphère équivalente :

$$a_V = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}, \quad (1.2)$$

par l'épaisseur initiale ϑ_0 de sa membrane et par la masse volumique ρ_{mb} de celle-ci. On prend a_V comme échelle de longueur caractéristique du problème.

En utilisant cette échelle de longueur, le nombre de Reynolds de l'écoulement autour de la capsule s'écrit :

$$Re = \frac{\rho\dot{\gamma}a_V^2}{\mu}; \quad (1.3)$$

il compare effets inertiels et visqueux dans les fluides. On suppose que a_V est suffisamment faible pour que $Re \ll 1$: les écoulements interne et externe sont des *écoulements de Stokes*, dans lesquels forces visqueuses et de pression s'équilibrent en l'absence d'inertie. Les champs de vitesse interne et externe \underline{v}_{int} et \underline{v}_{ext} et les champs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}_{int}$ et $\underline{\underline{\sigma}}_{ext}$ vérifient les équations de Stokes :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_{int} = 0, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{int} = \underline{0}, \quad (1.4)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v}_{ext} = 0, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ext} = \underline{0}. \quad (1.5)$$

Pour ce qui est de la paroi de la capsule, on supposera que $\vartheta_0 \ll a_V$, de telle sorte que l'on sera amené à traiter la membrane comme une *surface élastique*. On caractérisera les propriétés mécaniques de celle-ci par un module de cisaillement surfacique G_s et un module de dilatation surfacique K_s , et l'on négligera la résistance à la flexion devant la résistance à la déformation dans le plan de la membrane. On utilisera $a_V G_s$ comme échelle caractéristique de force.

La valeur de Re montre que l'on peut négliger les effets inertiels dans les fluides. Une rapide analyse dimensionnelle permet de vérifier qu'il en est de même dans la membrane de la capsule. En effet, si l'on compare la dérivée de la quantité de mouvement dans la membrane aux forces visqueuses dans le fluide extérieur, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\text{inertie membrane}}{\text{forces visqueuses}} &\sim \frac{\rho_{mb} \vartheta_0 a_V^2 \dot{\gamma}^2 a_V}{a_V^3 \mu \dot{\gamma} a_V^{-1}} \\ &\sim \frac{\rho_{mb}}{\rho} \frac{\vartheta_0}{a_V} Re. \end{aligned} \quad (1.6)$$

On a déjà supposé que ϑ_0/a_V et Re étaient petits devant 1. De plus, on s'intéresse dans ces travaux à des capsules dont la membrane est constituée d'un matériau organique et qui sont suspendues dans une solution aqueuse, de sorte que $\rho_{mb}/\rho \approx 1$. Ainsi

$$\frac{\rho_{mb}}{\rho} \frac{\vartheta_0}{a_V} Re \ll 1 \quad (1.7)$$

Le mouvement de la membrane est piloté par un équilibre entre efforts internes dus à la déformation et efforts externes dus aux fluides.

On traite la paroi de la capsule comme une surface élastique S , identifiée à sa surface moyenne. Les efforts internes seront donc représentés par les *tensions de Cauchy* \underline{T} ⁽¹⁾ et les efforts externes par une force *surfactive* \underline{q} . L'équation d'équilibre de la membrane s'écrit ainsi :

$$\underline{\nabla}_s \cdot \underline{T} + \underline{q} = \underline{0}, \quad (1.8)$$

où $\underline{\nabla}_s \cdot$ est l'opérateur divergence surfacique le long de la surface S .

La mécanique d'une capsule en écoulement est un problème d'interaction fluide-structure. Du fait de l'absence d'inertie tant dans le fluide que dans le solide, les effets de couplage sont très importants. Le couplage se décompose en deux effets. Du point de vue cinématique, on a la condition de *non-glissement* à la paroi. Ainsi, la vitesse des points de la membrane est égale à celle des fluides au contact. Pour ce qui est du couplage dynamique, on considère que la force surfacique \underline{q} exercée par les fluides sur la paroi est égale au saut de vecteur contrainte entre les fluides :

$$\underline{q} = (\underline{\sigma}_{ext} - \underline{\sigma}_{int}) \cdot \underline{n}, \quad (1.9)$$

1. Les tensions de Cauchy sont l'analogue bidimensionnel des contraintes de Cauchy ; cf. §3.1.

où \underline{n} est la normale à S pointant vers l'extérieur.

Enfin, pour caractériser l'interaction, on introduit le *nombre capillaire* qui compare les efforts visqueux dans les fluides et la résistance élastique de la membrane :

$$Ca = \frac{\mu \dot{\gamma} a_V}{G_s}. \quad (1.10)$$

2 Formulation intégrale des équations de Stokes

On commence par examiner le problème fluide et la résolution des équations de Stokes qui le pilotent. Considérer un écoulement de Stokes revient à considérer le mouvement d'un fluide newtonien en l'absence d'inertie. Cela signifie que l'histoire du fluide est sans importance et que, en l'absence de singularités (force ponctuelle...), l'écoulement à chaque instant est *totalement déterminé par les conditions aux limites* s'exerçant à la frontière du domaine fluide considéré. Cette idée simple est à la base de la méthode des intégrales de frontière, introduite par Ladyzhenskaya (1969).

On rappelle quelques propriétés fondamentales des écoulements de Stokes, et on formule le problème fluide intervenant dans la mécanique d'une capsule à l'aide d'intégrales de frontière. Ces résultats sont désormais classiques, et on renvoie à l'ouvrage de C. Pozrikidis (1992) pour plus de détails.

2.1 Équations de Stokes, Stokeslet

Un fluide newtonien, de viscosité μ , en écoulement à très petit nombre de Reynolds ($Re \ll 1$) en l'absence de force volumique extérieure est gouverné par les équations de Stokes. Celles-ci s'écrivent en l'absence de singularités :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}, \quad (2.1)$$

où \underline{v} est le champ de vitesse (eulérienne) de l'écoulement, et $\underline{\underline{\sigma}}$ le champ de contraintes.

On remarque immédiatement une propriété très intéressante des ces équations : elles sont linéaires. Notons aussi la disparition du temps, qui rend les équations réversibles : par exemple, pour un écoulement dans un canal, inverser le signe du débit revient à revenir en arrière dans le temps.

Une solution particulière des équations de Stokes sera utile par la suite : le Stokeslet. Considérons une force ponctuelle \underline{F}_x dans un écoulement infini immobile à l'infini⁽²⁾, telle que

$$\underline{F}_x(\underline{y}) = \underline{F} \delta(\underline{x} - \underline{y}), \quad (2.2)$$

où δ désigne la fonction de Dirac. L'équation du mouvement dans le fluide est ainsi :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) = \underline{F} \delta(\underline{x} - \underline{y}). \quad (2.3)$$

On montre alors que l'écoulement en un point \underline{y} vaut :

$$\underline{v}(\underline{y}) = \frac{1}{8\pi\mu} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{F}, \quad (2.4)$$

et que le champ de contraintes est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) = \underline{\underline{K}}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{F}, \quad (2.5)$$

où l'on a introduit deux *noyaux de Green* :

$$\underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{r} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{r^3} \underline{r} \otimes \underline{r}, \quad (2.6)$$

$$\underline{\underline{K}}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{r^5} \underline{r} \otimes \underline{r} \otimes \underline{r}, \quad (2.7)$$

où $\underline{r} = \underline{x} - \underline{y}$ et $r = \|\underline{r}\|$.

2.2 Principe de la formulation intégrale

Considérons maintenant un domaine fluide Ω , délimité par une frontière $\partial\Omega$, avec \underline{n} la normale à $\partial\Omega$ pointant vers l'intérieur de Ω (fig. 2.1).

On montre alors que, en l'absence de forces volumiques, la vitesse en tout point peut s'exprimer uniquement en fonction d'intégrales sur la frontière $\partial\Omega$. Si $\underline{x} \in \Omega$, on a (Pozrikidis, 1992, p. 27) :

$$\underline{v}(\underline{x}) = -\frac{1}{8\pi\mu} \int_{\partial\Omega} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} + \int_{\partial\Omega} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{\underline{K}}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \quad (2.8)$$

2. Ceci correspond au cas d'une sphère en translation sous l'action de la force \underline{F} équilibrée par la traînée de Stokes, dans un fluide immobile, si l'on cherche l'écoulement « loin de la sphère ».

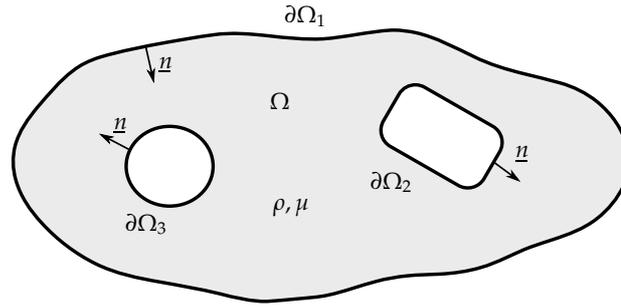


Figure 2.1 – Le domaine fluide Ω considéré. Ici, $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$.

Le passage à la limite pour $\underline{x} \in \partial\Omega$ est délicat, car le noyau \underline{K} présente une singularité quand $\underline{y} \rightarrow \underline{x}$, ce qui se produit si \underline{x} est sur la frontière. On montre que l'on a :

$$\begin{aligned} \underline{C}_K(\underline{x}) \cdot \underline{v}(\underline{x}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \int_{\partial\Omega} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + \int_{\partial\Omega}^{VP} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où *VP* indique que l'intégrale est calculée au sens de la *valeur principale de Cauchy*⁽³⁾. Le tenseur \underline{C}_K dépend de la régularité de la surface $\partial\Omega$; si la normale est continue au point \underline{x} , alors on a :

$$\underline{C}_K(\underline{x}) = \frac{1}{2} \underline{\mathbb{1}}. \quad (2.10)$$

En pratique, les discontinuités de la normale seront essentiellement liées à la présence de coins de parois (canal de section carrée, par exemple); mais la vitesse sera alors nulle, ce qui dispensera du calcul de \underline{C}_K .

2.3 Application au cas d'une capsule

On cherche maintenant à appliquer l'équation intégrale (2.9) au cas d'une capsule. Comme sur la figure 2.2, on note S la paroi de celle-ci (identifiée ici à sa surface moyenne) et \underline{n} la normale pointant vers l'extérieur. Les volumes occupés par les fluides interne et externe sont notés Ω_{int} et Ω_{ext} , le second étant délimité

3. La valeur principale permet d'associer une valeur à certaines intégrales impropres, en ôtant du domaine d'intégration un voisinage symétrique autour de la singularité et en faisant tendre la taille de ce voisinage vers 0. On verra que, pour les problèmes qui nous occupent ici, on n'aura pas besoin de calculer explicitement de valeurs principales, et l'on admettra donc les résultats les concernant sans entrer plus dans la théorie.

par une surface S_{ext} (pas nécessairement matérielle) dont la normale pointe vers l'intérieur.

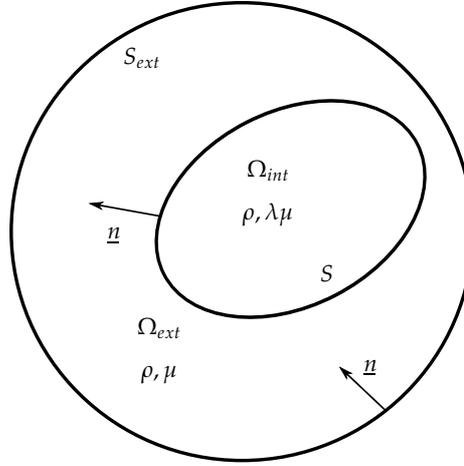


Figure 2.2 – Capsule en écoulement.

Soit un point $\underline{x} \in S$. On considère que la surface restera toujours suffisamment régulière pour avoir $\underline{C}_K(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{1}$. On écrit l'équation (2.9) en considérant tout d'abord $\Omega = \Omega_{int}$, puis $\Omega = \Omega_{ext}$. En combinant ces deux équations, il vient :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S, \quad \frac{1+\lambda}{2}\underline{v}(\underline{x}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + (1-\lambda) \int_S^{VP} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & - \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_{ext}} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\sigma}_{ext}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + \int_{S_{ext}} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où $[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = (\underline{\sigma}_{ext} - \underline{\sigma}_{int}) \cdot \underline{n}$ est le saut de traction au niveau de la paroi de la capsule.

2.4 Capsule dans un écoulement infini

On s'intéresse ici au cas d'une capsule plongée dans un écoulement infini, c'est-à-dire en l'absence de parois extérieures⁽⁴⁾. On note \underline{v}^{np} le champ de vitesse régnant dans l'écoulement en l'absence de capsule et $\underline{\sigma}^{np}$ le champ de contraintes correspondant.

4. Expérimentalement, on aura évidemment des parois, qui contribueront à générer l'écoulement, mais suffisamment loin pour ne pas avoir d'interaction directe avec la capsule.

On considère $S_{ext} = S_\infty$, une surface située suffisamment loin de la capsule pour retrouver sur S_∞ l'écoulement non-perturbé. L'équation (2.11) prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S, \quad \frac{1+\lambda}{2} \underline{v}(\underline{x}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + (1-\lambda) \int_S^{VP} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & - \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_\infty} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\sigma}^{np}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + \int_{S_\infty} \underline{v}^{np}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour simplifier cette équation, considérons un espace Ω' , borné par S_∞ , en l'absence de capsule. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in \Omega', \quad \underline{v}^{np}(\underline{x}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_\infty} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\sigma}^{np}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + \int_{S_\infty} \underline{v}^{np}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En combinant ces deux dernières équations, on peut éliminer les termes sur S_∞ et obtenir :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S, \quad \frac{1+\lambda}{2} \underline{v}(\underline{x}) = & \underline{v}^{np}(\underline{x}) - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + (1-\lambda) \int_S^{VP} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Cette équation met très clairement en valeur le caractère linéaire des équations de Stokes. Elle a en effet la forme d'un principe de superposition : la vitesse d'un point de la membrane est la combinaison linéaire de deux contributions, l'une due à l'écoulement sans capsule et l'autre à la seule capsule.

Dans le cas où les deux fluides ont la même viscosité ($\lambda = 1$), le terme faisant apparaître le noyau de double couche sur la capsule est éliminé, et cette équation prend une forme très simple :

$$\forall \underline{x} \in S, \quad \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^{np}(\underline{x}) - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \quad (2.15)$$

Dans ce cas, on notera que, si l'on connaît $[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}$ sur toute la surface de capsule, l'équation précédente donne *explicitement* la valeur de la vitesse en tout point de la paroi.

2.5 Capsule dans un canal

Cas général

On considère maintenant le cas d'une capsule dans un canal (voir fig. 2.3). L'écoulement entre dans le canal par la surface S_1 et sort par la surface S_2 ; on note $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ et p_1, p_2 les champs de vitesse et de pression sur ces deux surfaces. Les parois du canal constituent une surface S_w ; on note $\underline{f}_w = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ les efforts surfaciques exercés par le fluide à la paroi (en posant que les normales à S_1 , S_2 et S_w pointent vers le domaine fluide). On considère évidemment que la vitesse est nulle à la paroi. On conserve les notations introduites précédemment pour la description de la capsule.

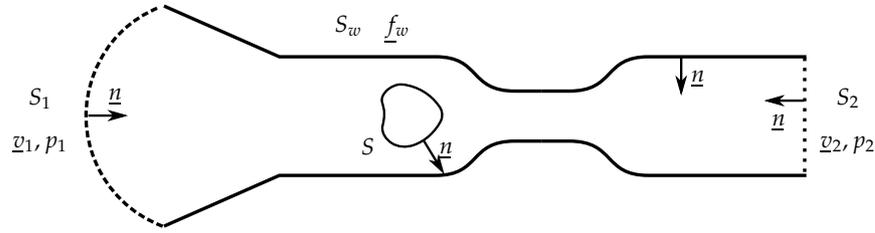


Figure 2.3 – Capsule dans un canal de section variable.

On peut alors écrire l'équation (2.11) pour un point $\underline{x} \in S$, avec $S_{ext} = S_1 \cup S_2 \cup S_w$:

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{x} \in S, \quad \frac{1+\lambda}{2} \underline{v}(\underline{x}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\
 & + (1-\lambda) \int_S^{VP} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\
 & - \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_w} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{f}_w(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\
 & - \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_1 \cup S_2} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\
 & + \int_{S_1 \cup S_2} \underline{v}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}, \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Cette équation est très compliquée, d'autant plus que, selon le cas précis étudié, les termes dans les diverses intégrales peuvent être inconnus (c'est en particulier toujours le cas de la force pariétale \underline{f}_w), ce qui nécessite d'écrire des équations supplémentaires. Elle a cependant été utilisée (avec une méthode numérique axisymétrique) par Diaz & Barthès-Biesel (2002) pour étudier l'entrée d'une capsule dans un pore cylindrique.

Recherche d'un état stationnaire dans un canal de section constante

Certaines hypothèses permettent de diminuer le nombre de termes de l'équation (2.16). C'est en particulier le cas de l'étude d'un problème précis : la recherche d'un état stationnaire dans un canal de section arbitraire mais constante.

Tout d'abord, on note que, à l'état stationnaire, le fluide interne est immobile dans le référentiel en translation avec la capsule et la viscosité du fluide interne ne joue donc plus de rôle. On peut donc fixer le rapport des viscosités entre les fluides interne et externe λ à 1.

On considère un canal de section constante, de longueur élevée par rapport au rayon de la capsule. On suppose que les surfaces S_1 et S_2 sont suffisamment éloignées de la capsule pour que l'écoulement sur celles-ci corresponde à l'écoulement non-perturbé :

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{v}^{np}. \quad (2.17)$$

Sans perte de généralité, on décide de fixer la référence de pression sur S_1 :

$$p_1 = p_1^{np} = 0; \quad (2.18)$$

la pression p_2 , en revanche, est inconnue, car la présence de la capsule impose une *perte de charge additionnelle* par rapport au cas non-perturbé.

Pour faire intervenir les pressions, on écrira sur $S_1 \cup S_2$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{d}} - p\underline{\underline{1}}, \quad (2.19)$$

où

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla v}} + \underline{\underline{\nabla v}^T} \right) \quad (2.20)$$

est la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse.

L'équation (2.16) prend désormais la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S, \quad \underline{v}(\underline{x}) = & -\frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_w} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{f}_w(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_2} p_2(\underline{y}) \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1 \cup S_2} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\underline{d}}^{np}(\underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + \int_{S_1 \cup S_2} \underline{v}^{np}(\underline{y}) \cdot \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

On note que, dans le membre de droite, seuls les deux premiers termes comportent des inconnues à déterminer lors de la résolution du problème fluide : \underline{f}_w et p_2 . Le saut $[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}$ est quant à lui déterminé par le couplage avec le solide.

D'un point de vue numérique, le calcul des noyaux est long, et l'on souhaite simplifier encore l'équation. Pour cela, on effectue la même opération que dans le cas de l'écoulement infini de sorte à exprimer le champ de vitesse des points de S en fonction du champ de vitesse non perturbé en ces mêmes points. Si l'on note $\underline{f}_w = \underline{f}_w^{np} + \underline{\Delta f}_w$ et $p_2 = p_2^{np} + \Delta p_2$, il vient finalement :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S, \quad \underline{v}(\underline{x}) = & \underline{v}^{np} - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & - \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_w} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\Delta f}_w(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ & + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_2} \Delta p_2(\underline{y}) \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On notera la disparition totale du noyau de double couche \underline{K} , ainsi que des intégrales sur S_1 . Notons aussi que, dans le cas d'un écoulement stationnaire dans un canal de section constante, il est toujours possible d'obtenir analytiquement l'expression de \underline{v}^{np} ⁽⁵⁾.

Il reste à calculer les termes inconnus $\underline{\Delta f}_w$ et Δp_2 . À cet effet, on écrit l'équation (2.9) sur S_w et S_2 ; une fois encore, on l'écrit en présence puis en l'absence de la capsule pour éliminer les termes relatifs à l'écoulement non-perturbé dans les intégrales. On obtient sur S_w (en multipliant par $8\pi\mu$) :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S_w, \quad - \int_{S_2} \Delta p_2(\underline{y}) \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ + \int_{S_w} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\Delta f}_w(\underline{y}) dS_{\underline{y}} = - \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

et de même sur S_2 , en projetant selon la normale $\underline{n}(\underline{x})$:

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S_2, \quad - \int_{S_2} \Delta p_2(\underline{y}) \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ + \int_{S_w} \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\Delta f}_w(\underline{y}) dS_{\underline{y}} = - \int_S \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les équations (2.23) et (2.24) permettent d'obtenir $\underline{\Delta f}_w$ et Δp_2 par résolution d'un système linéaire. Les coefficients de celui-ci sont constants, vu que les surfaces S_w et S_2 sont fixes. Puis, on calcule *explicitement* ⁽⁶⁾ la vitesse \underline{v} de la membrane de la capsule à l'aide de l'équation (2.22).

5. Voir par exemple Brody *et al.* (1996) pour la méthode et l'application au cas d'un canal de section rectangulaire.

6. On notera le rôle crucial joué ici par l'hypothèse $\lambda = 1$ en supprimant la contribution du

3 Élasticité bidimensionnelle : modèle de membrane

On s'intéresse maintenant aux équations régissant le problème solide. On fait l'hypothèse que l'on peut négliger tous les phénomènes mécaniques liés à l'épaisseur de la paroi de la capsule (flexion, cisaillement transverse), et que la mécanique de la paroi est uniquement pilotée par les déformations de la *surface moyenne* – c'est-à-dire que l'on décrit la paroi de la capsule comme une *membrane*, et non comme une *coque*. On supposera que la surface moyenne peut subir des grandes déformations, et l'on ne fera donc aucune hypothèse visant à linéariser les déformations ou la loi de comportement du matériau.

La paroi de la capsule étant une surface courbe, on la décrira avec le formalisme des coordonnées curvilignes. Quelques résultats essentiels sur le calcul en base non-orthonormée sont rappelés dans l'annexe A. On considère la paroi de la capsule comme un matériau purement bidimensionnel, c'est-à-dire une surface S paramétrée par *deux* coordonnées, ζ^1 et ζ^2 , comme à la figure 3.1. Tout point matériel est alors caractérisé par ses coordonnées (ζ^1, ζ^2) dans la configuration de référence, ce qui assure le caractère lagrangien du formalisme.

Le choix d'un formalisme bidimensionnel implique que l'on travaille toujours le long de la surface et non dans le repère 3D $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Ainsi, la plupart des tenseurs sont de rang 2, portés par les vecteurs tangents à S et les dérivées spatiales sont des dérivées le long de S ; les opérateurs gradient surfacique et divergence surfacique sont définis dans l'annexe A.

REM. : Quand on se place en coordonnées curvilignes, les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 2\}$ tandis que les lettres latines $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Sauf mention contraire, on applique la convention de sommation sur les indices répétés.

Les équations qui vont être développées dans cette section sont classiques. Pour plus d'informations, on renvoie à Salençon (2002) pour les principes généraux, Green & Adkins (1970) pour le traitement des grandes déformations en coordonnées curvilignes, ainsi qu'à l'article de Skalak *et al.* (1973) pour le formalisme bidimensionnel.

noyau de double couche sur S . Sans cette simplification, on ne pourrait pas découpler la vitesse des points de la membrane et les deux autres inconnues; on devrait alors déterminer *simultanément* Δf_w , Δp_2 et \underline{v} en résolvant un système linéaire plus gros et dont les coefficients changeraient quand la capsule se déforme.

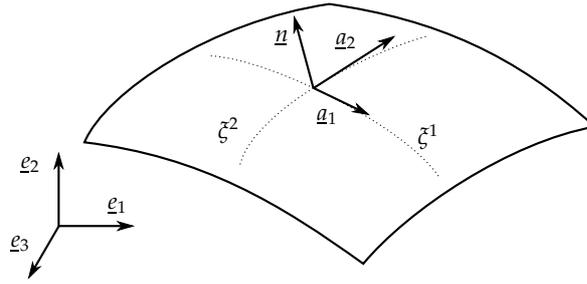


Figure 3.1 – Surface décrite par les coordonnées (ζ^1, ζ^2) et base covariante.

3.1 Déformations, efforts internes

On considère un champ de déplacement \underline{U} faisant passer la surface S d'une configuration de référence \mathcal{C}^0 à $t = 0$ à une configuration déformée \mathcal{C}^τ à $t = \tau$:

$$\begin{array}{ccc} \underline{U} & & \\ \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^\tau \\ t=0 & & t=\tau \end{array}$$

On suppose que, dans la configuration de référence \mathcal{C}^0 , le matériau est dans son état naturel (c'est-à-dire qu'il n'est pas précontraint).

On note avec des majuscules les positions et les vecteurs de base dans \mathcal{C}^0 , et avec des minuscules dans \mathcal{C}^τ . Par exemple :

$$\underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{U}(\underline{X}, t) \quad (3.1)$$

De même, on distingue le gradient surfacique sur \mathcal{C}^0 , noté $\underline{\nabla}_s^0 = \underline{\mathbb{1}}_s \cdot \nabla^0$, et le gradient surfacique sur \mathcal{C}^τ , noté $\underline{\nabla}_s = \underline{\mathbb{1}}_s \cdot \nabla$. Ainsi, pour tout tenseur \underline{T} , on a :

$$\underline{\mathbb{1}}_s \cdot d\underline{T} = \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_s^0 \underline{T} \cdot d\underline{X} = \underline{\underline{\underline{\nabla}}}_s \underline{T} \cdot d\underline{x}. \quad (3.2)$$

Dans cette équation, ainsi que dans toute la suite, les différentielles $d\underline{x}$ et $d\underline{X}$ sont construites par rapport aux coordonnées (ζ^1, ζ^2) ; ces deux vecteurs sont donc tangents à S .

Déformations, contraintes

On définit \underline{F} , le gradient de la transformation, par la relation suivante :

$$d\underline{x} = \underline{F} \cdot d\underline{X}. \quad (3.3)$$

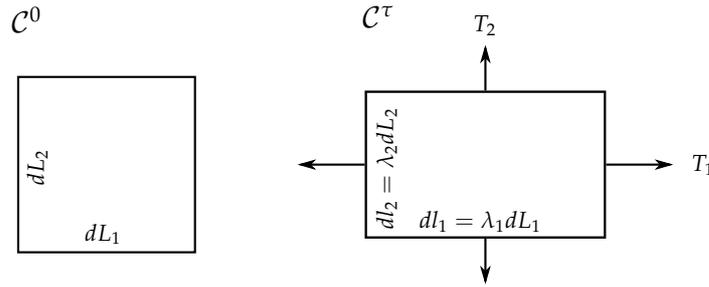


Figure 3.2 – Rapports d’extension dans les directions principales et tensions principales.

De manière équivalente, on a :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}_s^0 + \underline{\underline{\nabla}}_s^0 U, \quad (3.4)$$

où $\underline{\underline{\mathbb{1}}}_s^0$ est le tenseur identité sur la surface initiale.

Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ est un tenseur de rang 2 dont les deux valeurs propres, notées λ_α , sont les *rapports d’extension* de lignes matérielles de la surface (voir fig. 3.2).

On introduit aussi J_s , le jacobien surfacique de la transformation, qui mesure la variation locale de surface ($J_s = dS/dS_0$). On a ainsi :

$$J_s = \det \underline{\underline{F}} = \lambda_1 \lambda_2. \quad (3.5)$$

On définit le tenseur des dilatations de Cauchy (tenseur lagrangien) :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \quad (3.6)$$

et le tenseur des déformations de Green-Lagrange (tenseur lagrangien) :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}_s^0 \right), \quad (3.7)$$

que l’on peut écrire de manière équivalente :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\nabla}}_s^0 U + \underline{\underline{\nabla}}_s^0 U^T + \underline{\underline{\nabla}}_s^0 U^T \cdot \underline{\underline{\nabla}}_s^0 U \right). \quad (3.8)$$

Les propriétés mécaniques du matériau sont caractérisées par une énergie libre de déformation par unité de surface initiale, notée w_s . En l’absence de liaisons internes surfaciques⁽⁷⁾, celle-ci relie les tensions (lagrangiennes) de Piola-Kirchhoff

7. Si nécessaire, les liaisons internes surfaciques seraient traitées comme classiquement en faisant intervenir une nouvelle inconnue scalaire, un multiplicateur de Lagrange. C’est par exemple ainsi qu’est imposée l’incompressibilité surfacique dans les modélisations mécaniques des vésicules (voir par exemple à ce sujet Seifert, 1999).

$\underline{\underline{\pi}}$ ⁽⁸⁾ et les déformations par :

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial w_s}{\partial \underline{\underline{e}}}. \quad (3.9)$$

Les tensions de Piola-Kirchhoff n'ont pas de sens physique direct. Celui-ci est porté par leur pendant eulérien, les tensions de Cauchy :

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{J_s} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{F}}^T. \quad (3.10)$$

Le sens physique des tensions de Cauchy est analogue à celui de leur équivalent tridimensionnel, les contraintes de Cauchy⁽⁹⁾ : sur un élément de contour de la configuration actuelle, de binormale $\underline{\underline{b}}$ et de longueur infinitésimale dl , s'exerce une force infinitésimale $d\underline{\underline{f}}$ vérifiant :

$$d\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{b}} dl. \quad (3.11)$$

Invariants pour les matériaux isotropes

On fait maintenant une hypothèse sur la structure du matériau constituant la membrane : l'isotropie.⁽¹⁰⁾ Alors, l'énergie ne saurait dépendre de l'orientation des déformations décrites par le tenseur $\underline{\underline{e}}$, mais seulement des invariants géométriques de celui-ci⁽¹¹⁾. Suivant Skalak *et al.* (1973), on choisit d'utiliser les deux invariants suivants, construits à partir de $\underline{\underline{C}}$ plutôt que de $\underline{\underline{e}}$:

$$I_1 = \text{tr} \underline{\underline{C}} - 2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2, \quad (3.12a)$$

$$I_2 = \det \underline{\underline{C}} - 1 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1, \quad (3.12b)$$

dont on note qu'ils sont tous les deux nuls en l'absence de déformation.

On a :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2 \frac{\partial \text{tr} \underline{\underline{e}}}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2 \underline{\underline{1}}_s^0 \quad (3.13)$$

8. Il s'agit du second tenseur de Piola-Kirchhoff.

9. On notera respectivement $\underline{\underline{\pi}}$ et $\underline{\underline{T}}$ les tensions de Piola-Kirchhoff et de Cauchy, et $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ leurs analogues en élasticité 3D.

10. Notons qu'il s'agit ici d'isotropie *surfactive*. D'un point de vue 3D, le matériau peut donc être pleinement isotrope, ou seulement isotrope transverse (comme c'est le case des membranes cellulaires, par exemple).

11. Ce résultat d'algèbre linéaire très intuitif porte le nom de *théorème de représentation*.

et

$$\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial(\det \underline{\underline{C}} - 1)}{\partial \underline{\underline{C}}} : \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2J_s^2 \underline{\underline{C}}^{-1}. \quad (3.14)$$

Ainsi, avec les relations (3.9) et (3.10), on a :

$$\underline{\underline{\pi}} = 2 \frac{\partial w_s}{\partial I_1} \underline{\underline{1}}_s^0 + 2J_s^2 \frac{\partial w_s}{\partial I_2} \underline{\underline{C}}^{-1}, \quad (3.15)$$

$$\underline{\underline{T}} = \frac{2}{J_s} \frac{\partial w_s}{\partial I_1} \underline{\underline{B}} + 2J_s \frac{\partial w_s}{\partial I_2} \underline{\underline{1}}_s, \quad (3.16)$$

où $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ est le tenseur des dilatations de Cauchy à gauche.

Écriture en coordonnées curvilignes

Les coordonnées curvilignes fournissent une manière élégante de formuler les équations précédentes. Comme à la figure 3.1, on définit la base covariante par la donnée de deux vecteurs tangents :

$$\underline{\underline{a}}_\alpha = \frac{\partial \underline{\underline{x}}}{\partial \underline{\underline{\zeta}}^\alpha} \quad (3.17)$$

et du vecteur normal

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\underline{\underline{a}}_1 \times \underline{\underline{a}}_2}{\|\underline{\underline{a}}_1 \times \underline{\underline{a}}_2\|}. \quad (3.18)$$

On peut alors définir la base contravariante $(\underline{\underline{a}}^1, \underline{\underline{a}}^2, \underline{\underline{n}})$ comme indiqué à l'annexe A. Ainsi, tout vecteur $\underline{\underline{v}}$ peut s'écrire :

$$\underline{\underline{v}} = v^i \underline{\underline{a}}_i = v_i \underline{\underline{a}}^i = v_{X_i} \underline{\underline{e}}_i, \quad (3.19)$$

où $\underline{\underline{a}}_3 = \underline{\underline{a}}^3 = \underline{\underline{n}}$ et où l'indice X indique les composantes cartésiennes. L'élément de surface a alors pour expression :

$$dS = \sqrt{|a_{\alpha\beta}|} d\zeta^1 d\zeta^2. \quad (3.20)$$

Les deux bases locales sont définies de manière analogue sur la configuration de référence et notées alors avec des lettres majuscules.

Avec $d\underline{\underline{x}} = d\zeta^\alpha \underline{\underline{a}}_\alpha$ et $d\underline{\underline{X}} = d\zeta^\alpha \underline{\underline{A}}_\alpha$, $\underline{\underline{F}}$ s'écrit tout simplement :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{a}}_\alpha \otimes \underline{\underline{A}}^\alpha. \quad (3.21)$$

On a ainsi :

$$\underline{\underline{C}} = a_{\alpha\beta} \underline{\underline{A}}^\alpha \otimes \underline{\underline{A}}^\beta. \quad (3.22)$$

On en déduit⁽¹²⁾ :

$$\text{tr} \underline{\underline{C}} = a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}, \quad (3.23)$$

$$\det \underline{\underline{C}} = J_s^2 = |a_{\alpha\beta}| |A^{\alpha\beta}|. \quad (3.24)$$

Ainsi, les invariants I_1 et I_2 s'écrivent :

$$I_1 = a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} - 2, \quad (3.25a)$$

$$I_2 = |a_{\alpha\beta}| |A^{\alpha\beta}| - 1, \quad (3.25b)$$

et l'équation (3.16) prend la forme :

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{J_s} \frac{\partial w_s}{\partial I_1} A^{\alpha\beta} + 2J_s \frac{\partial w_s}{\partial I_2} a^{\alpha\beta}. \quad (3.26)$$

On voit alors tout l'intérêt de l'écriture en coordonnées curvilignes : toutes les informations utiles quant à la déformation sont contenues dans les variations du tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$. Et l'on peut ainsi calculer les tensions à l'aide uniquement de la métrique dans la configuration de référence et dans la configuration actuelle.

3.2 Équation d'équilibre, principe des travaux virtuels

En l'absence d'inertie dans la membrane, la forme locale (ou *forme forte*) de l'équation d'équilibre du matériau s'écrit de manière classique :

$$\underline{\nabla}_s \cdot \underline{T} + \underline{q} = \underline{0}, \quad (3.27)$$

où \underline{q} est une force surfacique, correspondant pour une capsule au saut de traction $[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}$ entre les fluides interne et externe.

Dans la base locale, l'équation (3.27) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha T^{\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\gamma T^{\alpha\beta} + q^\alpha = 0, & \alpha = 1, 2 \\ b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + q^n = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

On peut reformuler l'équation (3.27) sous forme variationnelle (*forme faible*). Soit $\underline{\hat{u}}$ un champ de déplacement virtuel. On fait le produit scalaire de l'équation (3.27) avec $\underline{\hat{u}}$ et on intègre sur la surface de la capsule dans la configuration

12. On rappelle que $|a_{\alpha\beta}|$ désigne le déterminant de la *matrice* de terme général $(a_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ et vaut donc $a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$. Cette quantité n'est pas égale à $\det(a_{\alpha\beta})$, déterminant du *tenseur* identité, qui vaut bien entendu 1. De même pour $|A^{\alpha\beta}|$.

actuelle, obtenant le *principe des travaux virtuels* :

$$\begin{aligned} & \forall \underline{\hat{u}} \text{ déplacement virtuel,} \\ & \int_S \underline{\hat{u}} \cdot \underline{q} \, dS = \int_S \underline{\hat{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}) : \underline{T}(\underline{U}) \, dS, \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $\underline{\hat{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_s \underline{\hat{u}} + \underline{\nabla}_s \underline{\hat{u}}^T)$. Le membre de gauche correspond au travail virtuel des efforts externes, tandis que le membre de droite correspond aux travaux virtuels des efforts internes.

3.3 Lien avec l'élasticité tridimensionnelle

L'élasticité bidimensionnelle que l'on a développée ici peut s'envisager comme un cas particulier de l'élasticité tridimensionnelle. Considérons maintenant la paroi de la capsule comme un matériau 3D. La surface moyenne est décrite comme précédemment par les deux coordonnées ζ^1 et ζ^2 . On ajoute une troisième coordonnée, ζ^3 , pour décrire l'épaisseur, en supposant que, dans la configuration de référence, les lignes $\zeta^3 = \text{cste}$ sont orthogonales à la surface moyenne.

Le modèle de membrane repose alors sur trois hypothèses :

- les contraintes planes : $\Sigma^{33} = 0$ (on rappelle que $\underline{\Sigma}$ est la forme 3D des contraintes de Piola-Kirchhoff) ;
- l'absence de cisaillement transverse : les composantes $e_{3\alpha} = e_{\alpha 3}$ du tenseur des déformations sont nulles ;
- l'absence de variation des déformations à travers l'épaisseur, qui conduit à négliger les phénomènes de flexion.

Sous ces trois hypothèses, le tenseur des contraintes prend la forme simple :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = \sigma^{\alpha\beta}(\zeta^1, \zeta^2) \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta. \quad (3.30)$$

On est alors fondé à intégrer à travers l'épaisseur pour retrouver les tensions utilisées dans le cadre de l'élasticité 2D :

$$\underline{T} = \vartheta \sigma^{\alpha\beta} \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta, \quad (3.31)$$

où ϑ est l'épaisseur dans la configuration actuelle.

De la même manière, on peut intégrer à travers l'épaisseur l'énergie de déformation 3D w , pour directement aboutir aux tensions comme précédemment :

$$w_s = \vartheta_0 w. \quad (3.32)$$

Ainsi, du point de vue des efforts internes, l'élasticité 2D est strictement équivalente à l'élasticité 3D dans le cadre des trois hypothèses « membrane » données plus haut. Pour retrouver de plus l'équation d'équilibre, il faut faire une hypothèse supplémentaire : supposer que l'épaisseur est suffisamment faible pour pouvoir considérer que les efforts exercés par les fluides s'exercent sur la surface moyenne plutôt que sur les faces interne et externe de la membrane.

Cette opération permet aussi de voir comment on peut adapter une énergie de déformation 3D au cadre de l'élasticité 2D. Pour un matériau isotrope 3D, on adoptera les invariants suivants⁽¹³⁾ :

$$I'_1 = \text{tr} \underline{\underline{C}} - 3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3, \quad (3.33a)$$

$$I'_2 = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \underline{\underline{C}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{C}}^2) \right) - 3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 - 3, \quad (3.33b)$$

$$I'_3 = \det \underline{\underline{C}} - 1 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 - 1. \quad (3.33c)$$

Pour un matériau incompressible en volume ($I'_3 = 0$), ce qui est une hypothèse fréquemment utilisée pour les matériaux polymériques et pour les matériaux biologiques, et dans le cadre du modèle de membrane⁽¹⁴⁾, on peut relier ces invariants aux invariants 2D construits à partir de la déformation de la surface moyenne (éq. 3.12) :

$$I'_1 = I_1 - 1 + \frac{1}{I_2 + 1}, \quad (3.34a)$$

$$I'_2 = \frac{I_1 + 2}{I_2 + 1} + I_2 - 2. \quad (3.34b)$$

4 Lois de comportement

4.1 Quelques lois usuelles

On présente maintenant quelques lois hyperélastiques communément utilisées pour l'étude des capsules, en s'attachant à mettre en valeur les idées physiques ayant présidé au développement de ces lois. Ces lois peuvent s'organiser en deux

13. En notant bien que $\underline{\underline{C}}$ est maintenant un tenseur de rang 3.

14. Notons que ce lien repose sur l'idée que les rapports d'extension λ_1, λ_2 du cas 3D sont les mêmes que ceux du cas 2D, c'est-à-dire que deux des directions principales des déformations sont tangentes à la surface moyenne – ce qui ne serait plus le cas en présence de cisaillement transverse.

grands types. Tout d'abord, les lois utilisées en élasticité tridimensionnelle, dont on peut chercher la limite 2D dans le cadre du modèle de membrane. Puis, les lois intrinsèquement 2D, souvent développées à l'origine pour étudier de manière simple des matériaux complexes tels que les membranes biologiques.

Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke est une loi de comportement postulant une relation linéaire entre les tensions de Piola-Kirchhoff et le tenseur des déformations de Green-Lagrange. C'est ainsi la linéarisation de l'équation (3.9) en petites déformations, mais peut aussi être une loi raisonnable à plus grande déformation pour certains matériaux. On parlera alors de « loi de Hooke généralisée ».

Cette loi peut être formulée en 2D ou en 3D. Commençons par le cas surfacique. On a alors par hypothèse :

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\mathcal{H}}}^H : \underline{\underline{\epsilon}}, \quad (4.1)$$

où $\underline{\underline{\mathcal{H}}}^H$ ne dépend pas de $\underline{\underline{\epsilon}}$. Ainsi, l'énergie de déformation $w_s^H = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\mathcal{H}}}^H : \underline{\underline{\epsilon}}$ est d'ordre 2 en $\underline{\underline{\epsilon}}$ et (du fait de l'isotropie) ne dépend que des invariants de ce tenseur. La forme la plus générale satisfaisant ces deux conditions est :

$$w_s^H = \mu_s \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}^2) + \frac{\lambda_s}{2} (\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}})^2, \quad (4.2)$$

où λ_s et μ_s sont les *coefficients de Lamé*. Elle conduit à l'expression bien connue des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\underline{\underline{\pi}} = 2\mu_s \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda_s (\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}}_s. \quad (4.3)$$

La stabilité mécanique du matériau⁽¹⁵⁾ exige :

$$\mu_s > 0, \quad \lambda_s + \mu_s > 0. \quad (4.4)$$

Avec les invariants définis à l'équation (3.12), la loi de Hooke s'écrit :

$$w_s^H = \frac{G_s}{4} \left(2I_1 - 2I_2 + \frac{1}{1 - \nu_s} I_1^2 \right), \quad (4.5)$$

15. Plus précisément, l'état naturel doit être en petite déformation l'unique minimum absolu d'énergie interne ; c'est-à-dire que l'énergie w_s^H doit être nulle en l'absence de déformation, et strictement positive pour toute déformation non nulle. La forme bilinéaire associée à $\underline{\underline{\mathcal{H}}}^H$ doit être définie positive.

où l'on a introduit le module de cisaillement surfacique $G_s = \mu_s$ et le coefficient de Poisson surfacique $\nu_s = \lambda_s / (\lambda_s + 2\mu_s)$, qui doivent vérifier :

$$G_s > 0, \quad -1 < \nu_s < 1. \quad (4.6)$$

Les modules surfaciques de Young et de dilatation sont obtenus par :

$$E_s = 2G_s(1 + \nu_s), \quad K_s = G_s \frac{1 + \nu_s}{1 - \nu_s}. \quad (4.7)$$

La loi de Hooke 2D peut donc aussi s'écrire directement dans la base locale :

$$\pi^{\alpha\beta} = 2G_s \left(A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} \right) e_{\gamma\delta}. \quad (4.8)$$

Par un raisonnement similaire, on peut aboutir à la forme 3D de la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = 2\mu \underline{\underline{e}} + \lambda (\text{tr } \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}}, \quad (4.9)$$

où $\underline{\underline{e}}$ est alors la forme 3D du tenseur des déformations.

Dans le cadre du modèle de membrane (cf. § 3.3), on peut déterminer e_{33} à partir de l'hypothèse des contraintes planes et intégrer dans l'épaisseur pour trouver la loi bidimensionnelle, qui est évidemment l'équation (4.2). On a alors $G_s = G\theta_0$ et $\nu_s = \nu$. On peut toutefois noter une différence entre ces deux approches au niveau des conditions de stabilité ; si l'on part de la loi 3D, on trouve :

$$G > 0, \quad -1 < \nu < 0.5, \quad (4.10)$$

ce qui est plus restrictif au niveau du coefficient de Poisson. Ainsi, si l'on impose au matériau d'obéir à la loi de Hooke 3D, le coefficient de Poisson surfacique dans le cadre du modèle de membrane ne peut dépasser 1/2. En revanche, si l'on suppose juste qu'il obéit à la loi de Hooke 2D (ce qui est une hypothèse moins forte, entre autres parce qu'il ne faut que l'isotropie dans le plan), ν_s peut aller jusqu'à 1.

Loi de Mooney-Rivlin

La loi de Mooney-Rivlin (MR) est une loi *volumique* bien adaptée aux matériaux caoutchouteux. Elle repose sur les deux hypothèses suivantes :

- l'incompressibilité volumique, c'est-à-dire $I'_3 = 0$;

– une énergie de déformation dépendant linéairement des invariants I'_1 et I'_2 .

Ainsi, l'énergie de déformation s'écrit :

$$w^{MR} = \frac{G^{MR}}{2} (\psi I'_1 + (1 - \psi) I'_2), \quad \psi \in [0, 1]. \quad (4.11)$$

L'incompressibilité volumique est imposée en ajoutant un terme dans le calcul des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{MR} = \frac{\partial w^{MR}}{\partial \underline{\underline{e}}} - p \frac{\partial I'_3}{\partial \underline{\underline{e}}}, \quad (4.12)$$

où la nouvelle inconnue p est un *multiplicateur de Lagrange* (pression interne).

Le cas $\psi = 1$ correspond à la *loi néo-hookienne* (NH) :

$$w^{NH} = \frac{G^{MR}}{2} I'_1. \quad (4.13)$$

La loi néo-hookienne a une interprétation statistique simple : elle peut s'interpréter en considérant une expérience de traction sur une chaîne polymérique emmêlée. En tirant, on ordonne la chaîne, ce qui diminue l'entropie du système et a donc un coût énergétique, correspondant à w^{NH} .

Il existe diverses autres lois plus ou moins proches de la loi de Mooney-Rivlin utilisées pour décrire des matériaux comme le caoutchouc. On renvoie à Treloar (1976) pour une présentation synthétique de ces lois.

Dans le cadre de l'hypothèse « membrane », on peut obtenir la forme 2D de la loi de Mooney-Rivlin :

$$w_s^{MR} = \frac{G^{MR} \vartheta_0}{2} \left[\psi \left(I_1 - 1 + \frac{1}{I_2 + 1} \right) + (1 - \psi) \left(\frac{I_1 + 2}{I_2 + 1} + I_2 - 2 \right) \right], \quad \psi \in [0, 1]. \quad (4.14)$$

La loi néo-hookienne prend ainsi la forme :

$$w_s^{NH} = \frac{G^{MR} \vartheta_0}{2} \left(I_1 - 1 + \frac{1}{I_2 + 1} \right). \quad (4.15)$$

Il faut noter que l'hypothèse $I'_3 = 0$ est utilisée pour construire la forme 2D et est donc incluse dans celle-ci. Il n'est pas nécessaire en 2D de faire intervenir un multiplicateur de Lagrange dans le calcul des tensions.

Il faut noter que, même si l'on peut la formuler de manière bidimensionnelle, la loi de Mooney-Rivlin décrit une mécanique tridimensionnelle ; par exemple, une augmentation de surface est compensée par une diminution d'épaisseur de manière à conserver le volume. On va voir maintenant quelques lois reposant sur une mécanique véritablement bidimensionnelle.

Loi de Skalak

Pour l'étude du globule rouge, Skalak *et al.* (1973) ont proposé la loi 2D suivante (Sk) :

$$w_s^{Sk} = \frac{G_s^{Sk}}{4} (I_1^2 + 2I_1 - 2I_2 + CI_2^2), \quad C > -1/2. \quad (4.16)$$

Pour comprendre la physique décrite par cette loi, il peut être utile d'écrire la loi de Hooke 2D dans les directions principales :

$$\pi_1 = G_s \left(2e_1 + \frac{2\nu_s}{1-\nu_s} (e_1 + e_2) \right) \quad (\text{de même pour } \pi_2).$$

On voit que l'on a deux termes : le second donne des contraintes isotropes, proportionnelles à la variation de surface (on rappelle qu'en petites déformations $J_s \approx 1 + \text{tr } \underline{e}$), tandis que le premier donne un champ de contraintes anisotrope, nul en moyenne si la surface reste constante. Ces deux termes peuvent être d'ordres de grandeur distincts, selon la valeur de ν_s . Cette distinction est intéressante pour étudier la membrane du globule rouge, pour laquelle $\nu_s \rightarrow 1$.

L'idée de Skalak *et al.* était de généraliser cette distinction aux grandes déformations. On comprend alors l'origine de l'équation (4.16) si l'on calcule les tensions de Piola-Kirchhoff dans les directions principales :

$$\pi_1 = G_s^{Sk} (2e_1 + C(J_s^2 - 1)(1 + 2e_2)) \quad (\text{de même pour } \pi_2).$$

On retrouve bien deux termes similaires à précédemment, le second étant nul à surface constante ($J_s = 1$). Plus C est élevé, plus le matériau résiste à l'augmentation de surface (on verra plus bas que $K_s/G_s = 1 + 2C$).

Skalak *et al.* s'intéressaient au globule rouge, donc à des valeurs élevées de C (ils mesurent $C = 1 \cdot 10^3$ ⁽¹⁶⁾), mais leur loi peut être utile pour décrire d'autres matériaux, avec d'autres valeurs du rapport K_s/G_s . Par exemple, Carin *et al.* (2003) trouvent que le comportement mécanique de capsules bioartificielles à membrane d'albumine réticulée placées en compression est correctement décrit par la loi Sk avec $C = 0$.

16. Comme on l'a vu en introduction, le consensus actuel sur les valeurs de K_s et G_s devrait plutôt conduire à $C \sim 10^4$.

Loi d'Evans-Skalak

Dans leur ouvrage consacré à la mécanique des membranes biologiques, Evans & Skalak (1980) reprennent l'idée introduite par Skalak *et al.* (1973) d'utiliser une loi distinguant cisaillement surfacique et dilatation surfacique. À cet effet, ils introduisent deux invariants, traduisant respectivement les effets de cisaillement et de dilatation surfaciques :

$$J_1 = \frac{\text{tr} \underline{\underline{C}}}{2J_s} - 1 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2} - 1 = \frac{I_1 + 2}{2\sqrt{I_2 + 1}} - 1, \quad (4.17a)$$

$$J_2 = J_s - 1 = \lambda_1\lambda_2 - 1 = \sqrt{I_2 + 1} - 1, \quad (4.17b)$$

à partir desquels ils formulent une nouvelle loi (ES) :

$$w_s^{ES} = G_s^{ES} \left(J_1 + A \frac{J_2^2}{2} \right), \quad A > 0. \quad (4.18)$$

Pour comprendre cette loi, il est utile d'écrire la forme des tensions qui en découlent. On a :

$$\underline{\underline{T}} = G_s^{ES} \left(\frac{2}{J_s^2} \underline{\underline{\tilde{B}}} + A(J_s - 1) \underline{\underline{\mathbb{1}}}_s \right),$$

où $\underline{\underline{\tilde{B}}} = \underline{\underline{B}} - \frac{1}{2}(\text{tr} \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}}_s$ est la partie déviatorique du tenseur de Cauchy à gauche.

On remarque les similitudes avec les tensions obtenues par la loi de Skalak : une composante isotrope augmentant avec la variation de surface et une composante de cisaillement, l'importance relative des deux composantes étant ajustable via le paramètre A . On peut toutefois noter quelques différences :

- le mode de cisaillement et le mode de dilatation sont mieux séparés dans la loi ES, avec un mode de cisaillement pur porté par $\underline{\underline{\tilde{B}}}$, symétrique et de trace nulle, et un mode de dilatation pure porté par $\underline{\underline{\mathbb{1}}}_s$; la loi d'Evans-Skalak est ainsi plus élégante que la loi de Skalak ;
- le terme correspondant à la résistance à la dilatation est en J_s^4 dans w_s^{Sk} , tandis qu'il n'est qu'en J_s^2 dans w_s^{ES} , ce qui signifie que la loi Sk résiste plus vigoureusement à l'augmentation de surface.

On peut récrire cette loi avec les invariants I_1 et I_2 , obtenant :

$$w_s^{ES} = G_s^{ES} \left(\frac{I_1 + 2}{2\sqrt{I_2 + 1}} - 1 + \frac{A}{2} \left(I_2 + 2 - 2\sqrt{I_2 + 1} \right) \right), \quad A > 0. \quad (4.19)$$

4.2 Linéarisation de la loi de comportement

Les lois de comportement présentées ici sont non-linéaires. Il peut toutefois être intéressant de linéariser ces lois pour le cas d'un petit déplacement par rapport à un état donné, éventuellement pré-contraint. On considère donc maintenant la transformation suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{U} & & \underline{u} & & \\ \mathcal{C}^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}^\tau & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\tau+} \\ t=0 & & t=\tau & & t=\tau+dt \end{array}$$

On suppose que $\|\underline{\nabla}_s u\| \ll 1$, et on travaillera à l'ordre 1 en $\underline{\nabla}_s u$. On cherche le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\underline{\mathcal{H}}}}$ tel que :

$$T^{\alpha\beta}(\tau + dt) = T^{\alpha\beta}(\tau) + \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (4.20)$$

où

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}_s u}} + \underline{\underline{\underline{\nabla}_s u}^T} \right). \quad (4.21)$$

Calcul de $\underline{\underline{\underline{\mathcal{H}}}}$

En $t = \tau$, on définit $\underline{\underline{\underline{d}}}$, le tenseur des taux de déformation par :

$$\underline{\underline{\underline{d}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\underline{\nabla}_s v}} + \underline{\underline{\underline{\nabla}_s v}^T} \right), \quad (4.22)$$

où $\underline{v} = \frac{\partial \underline{U}(\underline{X}, t)}{\partial t}$ est le champ de vitesse à $t = \tau$, et où l'on note que les gradients sont calculés sur \mathcal{C}^τ (c'est-à-dire que $\underline{\underline{\underline{d}}}$ est eulérien). On montre classiquement que :

$$\underline{\underline{\underline{d}}} dt = \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}. \quad (4.23)$$

On a pour les tensions :

$$T^{\alpha\beta}(\tau + dt) = T^{\alpha\beta}(\tau) + \dot{T}^{\alpha\beta} dt. \quad (4.24)$$

Or $T^{\alpha\beta}$ ne dépend que du tenseur métrique. On a pour celui-ci :

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = 2d_{\alpha\beta}. \quad (4.25)$$

En dérivant l'équation (3.26), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{T}^{\alpha\beta} = & -\frac{2\dot{J}_s}{J_s^2} \frac{\partial w_s}{\partial I_1} A^{\alpha\beta} + \frac{2}{J_s} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial I_1^2} \dot{I}_1 + \frac{\partial^2 w_s}{\partial I_1 \partial I_2} \dot{I}_2 \right) A^{\alpha\beta} + 2\dot{J}_s \frac{\partial w_s}{\partial I_2} a^{\alpha\beta} \\ & + 2J_s \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial I_1 \partial I_2} \dot{I}_1 + \frac{\partial^2 w_s}{\partial I_2^2} \dot{I}_2 \right) a^{\alpha\beta} + 2J_s \frac{\partial w_s}{\partial I_2} \dot{a}^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Or, à partir des résultats de l'annexe A, on montre que :

$$\dot{I}_1 = A^{\gamma\delta} \dot{a}_{\gamma\delta}, \quad \dot{I}_2 = J_s^2 a^{\gamma\delta} \dot{a}_{\gamma\delta}, \quad (4.26a)$$

$$\dot{J}_s = \frac{J_s}{2} a^{\gamma\delta} \dot{a}_{\gamma\delta}, \quad \dot{a}^{\alpha\beta} = -a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} \dot{a}_{\gamma\delta}. \quad (4.26b)$$

On aboutit finalement à la forme recherchée :

$$T^{\alpha\beta}(\tau + dt) = T^{\alpha\beta}(\tau) + \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (4.27a)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathcal{H}^{\alpha\beta\gamma\delta} = & -\frac{2}{J_s} \frac{\partial w_s}{\partial I_1} A^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + 2J_s \frac{\partial w_s}{\partial I_2} \left(a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} - 2a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} \right) + \frac{4}{J_s} \frac{\partial^2 w_s}{\partial I_1^2} A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} \\ & + 4J_s^3 \frac{\partial^2 w_s}{\partial I_2^2} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + 4J_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial I_1 \partial I_2} \left(A^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + a^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} \right). \quad (4.27b) \end{aligned}$$

Petites déformations depuis l'état initial naturel

L'équation (4.27) peut être écrite pour une petite déformation depuis l'état initial naturel. Il apparaît alors que toutes les lois de comportement isotropes dans le plan conduisent dans ce cas à une équation de la forme :

$$T^{\alpha\beta} = G_s \left(2A^{\alpha\gamma} A^{\beta\delta} + \frac{2\nu_s}{1-\nu_s} A^{\alpha\beta} A^{\gamma\delta} \right) \varepsilon_{\gamma\delta}. \quad (4.28)$$

Évidemment, on reconnaît dans l'équation (4.28) la forme 2D de la loi de Hooke.

Cette linéarisation permet de comparer les différentes lois de comportement, en ajustant leurs coefficients de telle sorte à ce qu'elles aient le même comportement en petite déformation.

- La loi de Mooney-Rivlin conduit, pour toutes les valeurs de ψ , à $G_s = G^{MR} \theta_0$ et $\nu_s = 1/2$. Cette valeur de ν_s correspond bien à un matériau incompressible en volume, ce qui est conforme aux hypothèses de la loi.
- La loi de Skalak mène à $G_s = G_s^{Sk}$ et $\nu_s = C/(1+C)$. On a ainsi $K_s/G_s = 1+2C$. On note que $\lim_{C \rightarrow \infty} \nu_s = 1$, c'est-à-dire que le comportement se rapproche de l'incompressibilité surfacique quand C augmente.

- Dans la limite des petites déformations, la loi d’Evans-Skalak conduit à la forme (4.28), avec $G_s = G_s^{ES}$ et $\nu_s = (A - 1)/(A + 1)$. On a ainsi $K_s/G_s = A$. On note que $\lim_{A \rightarrow \infty} \nu_s = 1$, c’est-à-dire que le comportement se rapproche effectivement de l’incompressibilité surfacique quand A augmente.

4.3 Comparaison des lois : sphère sous pression

Pour mettre en valeur la différence entre les lois, on peut observer la manière dont elles se comportent dans quelques cas simples. On trouvera une comparaison de ce type dans l’article de Barthès-Biesel *et al.* (2002), où diverses lois sont comparées quand soumises à une traction simple et à une dilatation isotrope. On effectue ici une variante de ces comparaisons sur le cas d’une sphère sous pression.

On considère une sphère de rayon initial a passant à un rayon $a_p = (1 + \alpha)a$ sous l’effet d’une surpression interne p . Localement, la membrane de la sphère subit une dilatation isotrope de rapport d’extension $\lambda = 1 + \alpha$. On peut calculer analytiquement les tensions (isotropes) pour les diverses lois de comportement. On trouve :

$$T^H = G_s \frac{1 + \nu_s}{1 - \nu_s} (\lambda^2 - 1), \quad T^{NH} = G_s \left(1 - \frac{1}{\lambda^6} \right), \quad (4.29a)$$

$$T^{Sk} = G_s \left(\lambda^2 - 1 + C\lambda^2(\lambda^4 - 1) \right), \quad T^{ES} = G_s A (\lambda^2 - 1). \quad (4.29b)$$

Pour passer à la pression, on applique la loi de Laplace :

$$p = \frac{2T}{a_p} = \frac{2T}{a(1 + \alpha)}. \quad (4.30)$$

Les résultats sont donnés dans la figure 4.1. On a ajusté les paramètres des différentes lois pour avoir le même comportement en petite déformation ($\nu_s = 0.5$).

On peut, au vu des courbes, faire plusieurs remarques :

- les lois H et ES ont un comportement identique : le mode de dilatation surfacique de la loi d’Evans-Skalak est une loi linéaire ;
- avec la loi NH, la pression atteint un maximum pour $\alpha = 7^{1/6} - 1$; cela signifie que, si l’on impose une pression supérieure à cette pression maximale, la sphère gonfle sans atteindre d’état stationnaire (en pratique, jusqu’à la rupture) ;
- la loi Sk présente une propriété intéressante : elle est durcissante (*strain-hardening*), c’est-à-dire que la courbe se trouve au-dessus de la tangente à

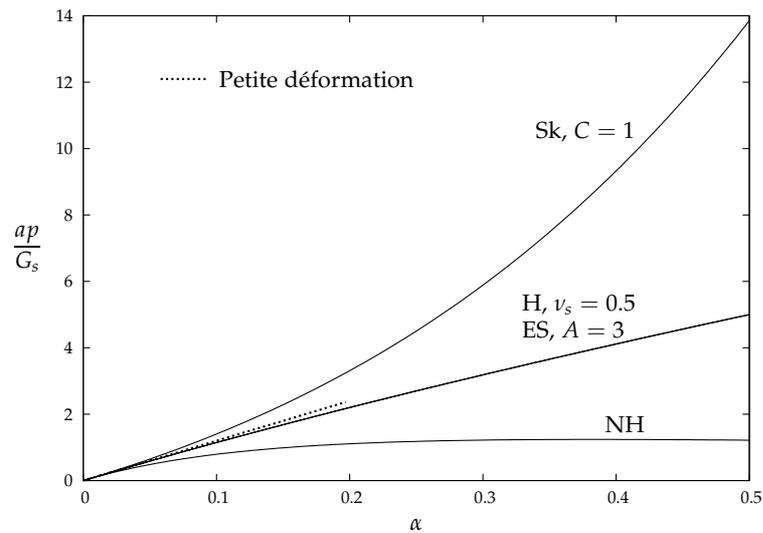


Figure 4.1 – Pression adimensionnée ap/G_s en fonction du facteur de gonflement α pour quatre lois : Hooke généralisé, $\nu_s = 0.5$; néo-hookien; Skalak, $C = 1$; Evans-Skalak, $A = 3$. Les paramètres sont choisis de sorte à ce que les lois aient le même comportement en petite déformation.

l'origine; on voit ainsi que, même si elle a été conçue dans le même esprit que la loi ES, elle est en pratique très différente; cette différence de comportement est essentiellement due à la dépendance en J_s^4 dans w_s^{Sk} .

Chapitre 3

Couplage entre éléments finis de membrane et intégrales de frontière

Comme expliqué au chapitre 1, la discrétisation de l'interface par B-splines bi-cubiques mise en place par Lac (2003) se montre très instable en présence de compression et se prête mal à l'incorporation d'une rigidité de flexion. On a choisi d'utiliser plutôt pour le problème solide une méthode par éléments finis, toujours dans le cadre du modèle de membrane, tout en conservant la méthode des intégrales de frontières pour le problème fluide. Ce chapitre vise à détailler la méthode numérique employée et à la valider sur plusieurs cas tests : le gonflement d'une sphère, une capsule dans un écoulement de cisaillement simple, puis dans un écoulement hyperbolique plan.

1 Description du problème, contraintes de modélisation

On cherche à modéliser le comportement d'une capsule en écoulement de Stokes. Les équations et hypothèses du problème ont été détaillées au chapitre 2, de même que les notations, et l'on se contente ici de rappeler les points les plus importants. La capsule est décrite comme une surface fermée S . Les inconnues du problème sont :

- la position $\underline{x}(\underline{X}, t)$ des points de la paroi de la capsule (où \underline{X} désigne la position du point matériel dans la configuration de référence), ou de manière équivalente le champ de déplacement $\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x} - \underline{X}$;
- le champ de vitesse à la paroi $\underline{v}(\underline{x}, t)$;
- le chargement à la paroi $\underline{q}(\underline{x}, t)$.

Le problème fluide consiste à résoudre les équations de Stokes dans les milieux interne et externe. On supposera dans la suite que la capsule est plongée dans un écoulement infini et que les fluides interne et externe ont la même viscosité. Le problème fluide peut alors se formuler comme une intégrale de frontière :

$$\forall \underline{x} \in S, \quad \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^{np}(\underline{x}) - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \quad (1.1)$$

On peut écrire cette équation de manière formelle sous la forme :

$$\underline{v} - \underline{v}^{np} = \mathcal{J} \underline{q}. \quad (1.2)$$

Pour ce qui est du problème solide, on traite la paroi de la capsule comme une membrane hyperélastique. Celle-ci est à l'équilibre, les efforts internes équilibrant le chargement \underline{q} exercé par les fluides. Le principe des travaux virtuels s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall \hat{\underline{u}} \text{ déplacement virtuel,} \\ \int_S \hat{\underline{u}} \cdot \underline{q} dS = \int_S \hat{\underline{\varepsilon}}(\hat{\underline{u}}) : \underline{T}(\underline{U}) dS, \end{aligned} \quad (1.3)$$

ce que l'on écrit formellement sous la forme :

$$\mathcal{M} \underline{q} = \mathcal{R}(\underline{U}). \quad (1.4)$$

Enfin, les deux problèmes sont couplés. Le couplage cinématique est la condition de non-glissement :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \underline{v}(\underline{x}, t). \quad (1.5)$$

Quant à la condition de couplage dynamique, elle identifie le chargement au saut de traction visqueuse entre les fluides :

$$\underline{q} = [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}. \quad (1.6)$$

Avant de détailler la nouvelle méthode numérique que l'on propose pour résoudre ce problème, il peut être intéressant d'insister sur le fait que le problème à résoudre est très peu classique. Tout d'abord, l'inertie est complètement absente du problème, tant du côté solide que du côté fluide. On a ainsi une succession d'états d'équilibre, mais sans certitude quant à leur stabilité. Par ailleurs, il faut rappeler que le problème solide est très fortement non-linéaire : le modèle doit non seulement décrire des grands déplacements mais aussi des grandes déformations. Par exemple, des études expérimentales de capsules écoulement dans un

pore trouvent des rapports d'extension moyens allant jusqu'à 1.2 (Risso *et al.*, 2006; Lefebvre *et al.*, 2008).

Enfin, les capsules considérées se déplacent librement dans le fluide : il n'y a pas de conditions aux limites cinématiques (encastrement, déplacement imposé...). Ceci complique l'application de la méthode des éléments finis au problème solide. En effet, dans la plupart des utilisations des éléments finis en élasticité (voir par exemple Batoz & Dhatt 1992 ou Chapelle & Bathe 2003 pour le cas des membranes et coques), y compris en interaction fluide-structure, le champ de déplacement est l'inconnue du problème solide. Toutefois, ceci nécessite des conditions aux limites cinématiques pour empêcher les mouvements rigidifiants et assurer l'unicité de la solution. En l'absence de ces conditions aux limites, il serait nécessaire de filtrer les déplacements rigidifiants, ce qui est délicat. On choisit donc de résoudre le problème solide à déplacements imposés, le chargement étant la solution du problème fluide. Ce choix permet aussi d'avoir une résolution explicite du problème fluide par la méthode des intégrales de frontière.

2 Méthode numérique

La méthode numérique utilisée ici suit dans son organisation générale les méthodes classiquement employées pour l'étude des capsules. La capsule est placée dans son état de référence à sa position initiale et l'écoulement est démarré. À chaque pas de temps, le chargement q sur la membrane est déterminé à partir de la déformation par une méthode éléments finis. Ayant ce chargement, la vitesse \underline{v} des points de la membrane peut être calculée explicitement par la méthode des intégrales de frontière. Enfin, le champ de vitesse est intégré pour obtenir la nouvelle position. On va maintenant détailler ces étapes.

2.1 Discrétisation de l'interface

La surface de la capsule est discrétisée à l'aide d'éléments triangulaires. On utilise une interpolation isoparamétrique, c'est-à-dire que toutes les inconnues ($\underline{x}, \underline{U}, \underline{v}, q$) sont interpolées en utilisant la même discrétisation. On reviendra sur ce choix dans la section 2.3. On implémente deux types d'éléments : des éléments P_1 , triangles plans à 3 nœuds, utilisant une interpolation linéaire (fig. 2.1a), et des

éléments P_2 , triangles courbes à 6 nœuds, utilisant une interpolation quadratique (fig. 2.1b). Toutefois, la méthode développée ici est très générale et pourrait être utilisée avec d'autres choix d'interpolation.

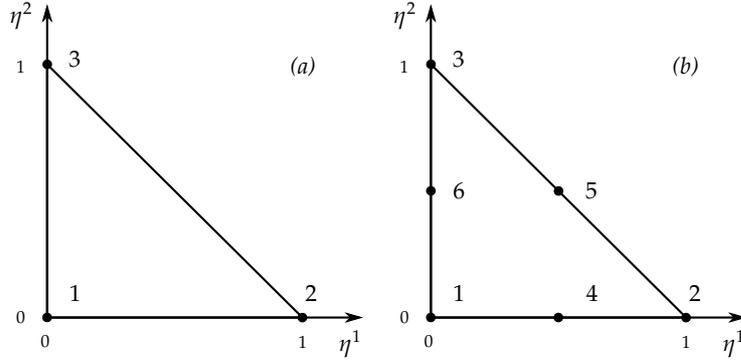


Figure 2.1 – Éléments P_1 (a) et P_2 (b).

On repère la position d'un point au sein d'un élément donné à l'aide de deux coordonnées (η^1, η^2) telles que η^1, η^2 et $1 - \eta^1 - \eta^2$ appartiennent à $[0, 1]$. La valeur d'une quantité interpolée en un point, par exemple une fonction vectorielle \underline{f} , est calculée à partir des valeurs nodales de cette quantité. Si l'on note $f_{X_j}^{(p)}$ la j -ième composante cartésienne de \underline{f} au nœud p ($p \in \{1 \dots nn\}$, où nn est le nombre de nœuds de l'élément) et $N^{(p)}(\eta^1, \eta^2)$ la fonction de forme associée à ce nœud, on a :

$$\underline{f}(\eta^1, \eta^2) = \sum_{p=1}^{nn} f_{X_j}^{(p)} N^{(p)}(\eta^1, \eta^2) \underline{e}_j. \quad (2.1)$$

Avec la numérotation des nœuds donnée à la figure 2.1, les fonctions de forme pour les éléments P_1 sont données de manière classique (voir par exemple Batoz & Dhatt, 1990) par

$$N^{(1)}(\eta^1, \eta^2) = 1 - \eta^1 - \eta^2, \quad (2.2a)$$

$$N^{(2)}(\eta^1, \eta^2) = \eta^1, \quad (2.2b)$$

$$N^{(3)}(\eta^1, \eta^2) = \eta^2. \quad (2.2c)$$

On a pour les éléments P_2 :

$$N^{(1)}(\eta^1, \eta^2) = (1 - \eta^1 - \eta^2)(1 - 2\eta^1 - 2\eta^2), \quad (2.3a)$$

$$N^{(2)}(\eta^1, \eta^2) = \eta^1(2\eta^1 - 1), \quad (2.3b)$$

$$N^{(3)}(\eta^1, \eta^2) = \eta^2(2\eta^2 - 1), \quad (2.3c)$$

$$N^{(4)}(\eta^1, \eta^2) = 4\eta^1(1 - \eta^1 - \eta^2), \quad (2.3d)$$

$$N^{(5)}(\eta^1, \eta^2) = 4\eta^1\eta^2, \quad (2.3e)$$

$$N^{(6)}(\eta^1, \eta^2) = 4\eta^2(1 - \eta^1 - \eta^2). \quad (2.3f)$$

La sphère initiale est maillée selon la méthode utilisée par Ramanujan & Pozrikidis (1998). On inscrit un icosaèdre⁽¹⁾ dans la sphère. Le maillage est construit en plaçant un nouveau nœud au milieu de chaque côté et en divisant chaque élément en 4 ; les nouveaux nœuds sont ensuite projetés sur la sphère. La procédure est répétée jusqu'à atteindre le nombre d'éléments désiré. Les éléments P_2 sont obtenus à partir des éléments P_1 en coupant à nouveau les côtés en deux et en projetant les nouveaux nœuds sur la sphère. Le maillage de la capsule initiale est montré sur la figure 2.2. On note respectivement N_E et N_N le nombre total d'éléments et de nœuds. La taille caractéristique du maillage est notée Δx , ou $h = \Delta x/a_V$ sous forme adimensionnée.

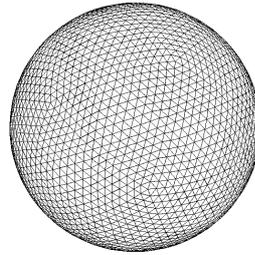


Figure 2.2 – Maillage typique de la capsule avec des triangles plans (éléments P_1).
 $N_E = 5120$, $N_N = 2562$.

Pour les besoins de l'analyse de stabilité et de convergence, on quantifiera h en utilisant :

$$h_1 = \frac{1}{a_V} \sqrt{\frac{4\pi a_V^2}{N_E}} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{2a_V} \sqrt{\frac{4\pi a_V^2}{N_E}}, \quad (2.4)$$

1. Polyèdre régulier à 20 faces triangulaires.

pour les éléments P_1 et P_2 , respectivement. Cette définition permettent d'avoir la même valeur de h pour les deux types d'éléments quand le nombre de degrés de liberté de l'interface discrétisée est le même.

2.2 Schéma temporel et structure de la méthode numérique

Le problème couplé que l'on étudie ici peut être vu comme une équation différentielle du premier ordre en temps (eq. 1.5), dont l'inconnue est le champ de déplacement \underline{U} . Cette équation décrit l'évolution cinématique de la membrane et donc du maillage éléments finis. Elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \mathcal{F}(\underline{U}), \quad (2.5)$$

où \mathcal{F} est une fonction connue de \underline{U} donnée par l'équation du fluide (1.1), dans laquelle le saut de traction $[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = \underline{q}$ est obtenu en résolvant le problème solide (1.3). Formellement, on a ainsi :

$$\mathcal{F}(\underline{U}) = \mathcal{J} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}(\underline{U}) \quad (2.6)$$

On fait appel à un schéma de Runge-Kutta explicite du deuxième ordre pour résoudre ce problème. La convergence en temps exige alors que le pas de temps Δt vérifie :

$$\Delta t < \frac{3}{2L}, \quad (2.7)$$

où L est la constante de Lipschitz de la fonction \mathcal{F} (Stuart & Humphries, 1998).

On peut évaluer l'ordre de grandeur des différentes fonctions composant \mathcal{F} :

$$\mathcal{J} \sim \frac{\Delta x}{\mu}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{M} \sim a_V^2 \hat{u}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{R}(\underline{U}) \sim \frac{a_V^2}{\Delta x} \hat{u} \times \frac{G_s}{\Delta x} U \quad (2.10)$$

On notera que, pour l'évaluation de l'ordre de grandeur de \mathcal{J} , le noyau \underline{J} varie en $1/r$ et que la partie dominante de l'intégrale correspond donc à \underline{y} proche de \underline{x} ; l'ordre de grandeur spatial pertinent pour cette équation est ainsi Δx plutôt que a_V . On a ainsi pour la constante de Lipschitz de \mathcal{F} :

$$L \sim \frac{G_s}{\mu \Delta x} = \frac{a_V}{\Delta x} \frac{\dot{\gamma}}{Ca}. \quad (2.11)$$

Avec l'ordre de grandeur de L obtenu à l'équation (2.11), la condition de stabilité peut être écrite sous forme adimensionnée comme :

$$\dot{\gamma}\Delta t < O(hCa). \quad (2.12)$$

Ainsi, un schéma explicite peut être utilisé pour étudier le mouvement de particules déformables en écoulement de Stokes, car les forces visqueuses sont comparables aux forces élastiques, c'est-à-dire $Ca = O(1)$. Le pas de temps limite est gouverné par la discrétisation spatiale, et l'on peut obtenir des résultats numériques avec des temps de calcul raisonnables. Inversement, pour des structures très rigides, pour lesquelles $Ca \ll 1$, la condition (2.12) conduit à des pas de temps minuscules et des temps de calcul inacceptables. C'est pourquoi les schémas temporels explicites ne sont généralement pas utilisés dans de tels cas.

2.3 Éléments finis de membrane

Pour un état déformé donné de la capsule, on résout d'abord le problème solide, construit à partir du principe des travaux virtuels (éq. 1.3). Soit \mathcal{V} l'espace de Sobolev $H^1(S)$, auquel appartient la fonction test $\underline{\hat{u}}$. La fonction test doit en effet appartenir à $H^1(S)$ pour permettre le calcul et l'intégration de la déformation virtuelle $\underline{\hat{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}})$ de manière directe. En revanche, ni le principe des travaux virtuels ni l'intégrale de frontière (éq. 1.1) ne nécessitent que \underline{q} appartienne à $H^1(S)$. Pour le problème solide, \underline{q} a seulement besoin d'être dans l'espace dual \mathcal{V}' . En revanche, il est commode de choisir $\underline{q} \in L^2(S)$ pour pouvoir calculer explicitement l'intégrale de frontière.

On discrétise \mathcal{V} en un espace élément fini \mathcal{V}_h correspondant au maillage décrit plus haut. On choisit d'utiliser aussi cet espace pour approximer $\underline{q} \in L^2$. Le problème solide devient alors :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \underline{q} \in \mathcal{V}_h \text{ tel que, } \forall \underline{\hat{u}} \in \mathcal{V}_h, \\ &\int_S \underline{\hat{u}} \cdot \underline{q} dS = \int_S \underline{\hat{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}) : \underline{T}(\underline{U}) dS. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le principe de la méthode est de formuler le problème solide sous la forme d'un système linéaire mettant en jeu les valeurs aux nœuds de l'inconnue \underline{q} et de la fonction test $\underline{\hat{u}}$. Les intégrales sur S sont décomposées en une somme d'intégrales sur les éléments. Pour le calcul de la métrique au sein d'un élément donné, on

remplace les coordonnées (ζ^1, ζ^2) par les coordonnées locales (η^1, η^2) de l'élément.

On a ainsi par exemple :

$$\underline{a}_\alpha = \frac{\partial N^{(p)}}{\partial \eta^\alpha} \underline{x}^{(p)}, \quad \underline{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 N^{(p)}}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta} \underline{x}^{(p)}, \quad (2.14)$$

formules à partir desquelles on peut calculer directement le tenseur métrique et les symboles de Christoffel.

Le membre gauche de 2.13 devient

$$\int_S \underline{\hat{u}} \cdot \underline{q} dS = \sum_{el} \hat{u}_{X_j}^{(p)} \left(\int_0^1 \int_0^{1-\eta^2} N^{(p)} N^{(q)} \sqrt{|a_{\alpha\beta}|} d\eta^1 d\eta^2 \right) q_{X_j}^{(q)}. \quad (2.15)$$

On peut le récrire sous forme vectorielle comme :

$$\int_S \underline{\hat{u}} \cdot \underline{q} dS = \sum_{el} \{\hat{u}_{el}\}^T [M_{el}] \{q_{el}\}, \quad (2.16)$$

où les vecteurs $\{q_{el}\}$ et $\{\hat{u}_{el}\}$, de taille $3nn$, correspondent respectivement aux composantes cartésiennes du chargement et du déplacement virtuel discrétisés aux nœuds de l'élément :

$$\begin{aligned} \{q_{el}\} &= \left\{ q_{X1}^{(1)}, q_{X2}^{(1)}, q_{X3}^{(1)} \quad \dots \quad q_{X1}^{(nn)}, q_{X2}^{(nn)}, q_{X3}^{(nn)} \right\}, \\ \{\hat{u}_{el}\} &= \left\{ \hat{u}_{X1}^{(1)}, \hat{u}_{X2}^{(1)}, \hat{u}_{X3}^{(1)} \quad \dots \quad \hat{u}_{X1}^{(nn)}, \hat{u}_{X2}^{(nn)}, \hat{u}_{X3}^{(nn)} \right\}. \end{aligned}$$

La matrice $[M_{el}]$ correspond à l'intégrale dans l'équation (2.15). On notera qu'elle fait intervenir le jacobien $\sqrt{|a_{\alpha\beta}|}$ pour prendre en compte la déformation de la surface locale, et doit donc être recalculée à chaque pas de temps.

On peut assembler les vecteurs et matrices élémentaire pour construire les quantités globales $\{q\}$, $\{\hat{u}\}$ et $[M]$ (de taille $3N_N$ pour les vecteurs, $3N_N \times 3N_N$ pour la matrice) (Batoz & Dhatt, 1990). Le membre de gauche du problème (2.13) devient ainsi :

$$\int_S \underline{\hat{u}} \cdot \underline{q} dS = \{\hat{u}\}^T [M] \{q\}. \quad (2.17)$$

En utilisant une méthode similaire, le membre de droite de l'équation (2.13) prend la forme :

$$\int_S \hat{\underline{\underline{\hat{u}}}} : \underline{\underline{T}} dS = \sum_{el} \int_0^1 \int_0^{1-\eta^2} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \sqrt{|a_{\alpha\beta}|} d\eta^1 d\eta^2. \quad (2.18)$$

Les tensions $T^{\alpha\beta}$ sont calculées directement à partir du tenseur métrique sur la configuration déformée et sur la configuration initiale en utilisant l'équation (3.26) du chapitre 2.

Il est ensuite nécessaire d'exprimer le tenseur $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ en fonction des composantes cartésiennes de \hat{u} . Ce tenseur est lié à la représentation covariante de \hat{u} par :

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\hat{u}_{\alpha,\beta} + \hat{u}_{\beta,\alpha} - 2\Gamma_{\alpha\beta}^i \hat{u}_i \right), \quad (2.19)$$

où l'on a noté le tenseur des courbures $b_{\alpha\beta}$ sous la forme $\Gamma_{\alpha\beta}^3$ par souci de concision. Les représentations covariante et cartésienne du déplacement virtuel \hat{u} sont reliées par :

$$\hat{u}_i = a_i^{Xj} \hat{u}_{Xj} = N^{(p)} a_i^{Xj} \hat{u}_{Xj}^{(p)}, \quad (2.20)$$

où les a_i^{Xj} sont les composantes cartésiennes de \underline{a}_i . Le tenseur des déformations virtuelles prend donc la forme :

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \hat{u}_{Xj}^{(p)} \chi_{\alpha\beta}^{(p)j}, \quad (2.21)$$

où

$$\chi_{\alpha\beta}^{(p)j} = \frac{1}{2} N_{,\beta}^{(p)} a_{\alpha}^{Xj} + \frac{1}{2} N_{,\alpha}^{(p)} a_{\beta}^{Xj} + N^{(p)} a_{\alpha,\beta}^{Xj} - \Gamma_{\alpha\beta}^i N^{(p)} a_i^{Xj}. \quad (2.22)$$

On peut noter que, dans le cas particulier des éléments P_1 , plusieurs termes de $\chi_{\alpha\beta}^{(p)j}$ sont nuls et l'on a simplement :

$$\chi_{\alpha\beta}^{(p)j} = \frac{1}{2} N_{,\beta}^{(p)} a_{\alpha}^{Xj} + \frac{1}{2} N_{,\alpha}^{(p)} a_{\beta}^{Xj}. \quad (2.23)$$

En séparant les valeurs nodales de \hat{u} des termes dans l'intégrale, le membre de droite de (2.13) devient :

$$\int_S \hat{\underline{\varepsilon}}(\hat{u}) : \underline{T} dS = \sum_{el} \hat{u}_{Xj}^{(p)} \left(\int_0^1 \int_0^{1-\eta^2} \chi_{\alpha\beta}^{(p)j} T^{\alpha\beta} \sqrt{|a_{\alpha\beta}|} d\eta^1 d\eta^2 \right). \quad (2.24)$$

La forme vectorielle de l'équation est

$$\int_S \hat{\underline{\varepsilon}}(\hat{u}) : \underline{T} dS = \sum_{el} \{\hat{u}_{el}\}^T \{R_{el}\} \quad (2.25)$$

$$= \{\hat{u}\}^T \{R\}. \quad (2.26)$$

Le vecteur $\{R\}$ varie avec la métrique et doit donc être calculé et assemblé à chaque pas de temps.

Finalement, le problème solide discret devient :

$$\{\hat{u}\}^T [M] \{q\} = \{\hat{u}\}^T \{R\}, \quad \forall \{\hat{u}\}^T \in \mathcal{V}_h, \quad (2.27)$$

L'équation se simplifie en :

$$[M]\{q\} = \{R\}, \quad (2.28)$$

étant donné que $\{q\}$ vérifie l'équation (2.27) pour tout déplacement virtuel $\{\hat{u}\} \in \mathcal{V}_h$.

Notons que, avec cette méthode numérique, la configuration déformée est connue au moment où l'on résout le problème solide. Ceci simplifie considérablement les choses par rapport aux méthodes utilisées usuellement en élasticité non-linéaire, comme par exemple la méthode de Wriggers & Taylor (1990). Les intégrales de surface sont calculées en utilisant 6 points de Hammer sur chaque élément (Hammer *et al.*, 1956). Le système linéaire creux (2.28) est résolu à l'aide de la librairie PARDISO (Schenk & Gärtner, 2004, 2006).

2.4 Problème fluide

Une fois le chargement \underline{q} obtenu, le champ de vitesse aux nœuds est obtenu explicitement à partir de l'équation intégrale (1.1), que l'on discrétise sur le même maillage que pour le problème solide. On utilise 12 points de Hammer par élément pour l'intégration. Il faut noter que le noyau $\underline{J}(\underline{x}, \underline{y})$ varie en $1/r$ et devient très grand quand $\underline{y} \rightarrow \underline{x}$, ce qui peut conduire à des erreurs numériques. Pour traiter ce problème, on suit Ramanujan & Pozrikidis (1998) et on passe en coordonnées polaires (centrées sur \underline{x}) quand \underline{x} et \underline{y} appartiennent au même élément. Ce changement de coordonnées introduit un jacobien qui tend vers 0 aussi vite que r , ce qui élimine la singularité. Dans ce cas, on utilise pour l'intégration 6 points de Gauss le long de chacune des coordonnées (soit 36 points par élément).

3 Validation

3.1 Sphère sous pression

Avant d'étudier le problème couplé, on souhaite commencer par tester les éléments finis de membrane et vérifier qu'ils se comportent correctement en grande déformation. Pour cela, on cherche à résoudre numériquement le problème de la sphère sous pression présenté au chapitre 2, § 4.3.

On impose un déplacement normal de la forme

$$\underline{U}(\underline{X}) = \alpha \underline{X}, \quad (3.1)$$

et on cherche la surpression p correspondante (définie comme la valeur moyenne du chargement normal, après avoir vérifié que la composante tangentielle du chargement est bien négligeable).

On donne à la figure 3.1 les résultats obtenus pour la loi néo-hookienne et la loi de Skalak ($C = 1$) avec les deux types d'éléments considérés (P_1 et P_2). Pour α compris entre 0 et 0.5, on trouve une erreur relative maximale par rapport à la solution analytique de 0.3% avec les éléments P_1 et de 0.09% avec les éléments P_2 . Ceci montre que les deux types d'éléments se comportent correctement quand ils sont soumis à des grandes déformations isotropes.

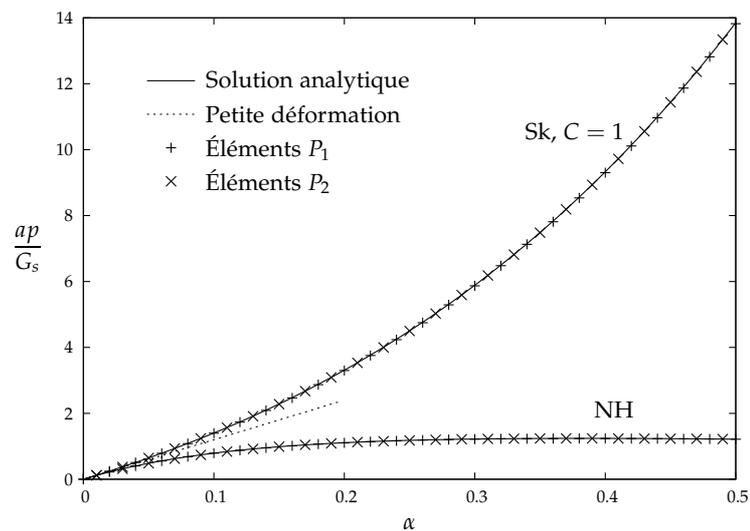


Figure 3.1 – Pression adimensionnée en fonction du facteur de gonflement pour les lois NH et Sk ($C = 1$). $N_N = 2562$ pour les deux types d'éléments.

3.2 Convergence

Passons maintenant à la résolution du problème couplé. Il faut d'abord vérifier que la procédure numérique est stable et converge par rapport à la discrétisation en temps et en espace. On considère un test classique : le comportement d'une capsule initialement sphérique dans un écoulement de cisaillement simple. On s'intéresse au cas d'une membrane obéissant à la loi néo-hookienne, pour un

nombre capillaire $Ca = 0.6$, et on se penche sur l'influence du pas de temps et de la taille du maillage. Une étude complète du comportement en cisaillement simple sera effectuée en § 3.3.

L'écoulement non perturbé est donné par :

$$\underline{v}^{np}(\underline{x}) = \dot{\gamma} x_2 \underline{e}_1. \quad (3.2)$$

Dans un tel écoulement, la capsule s'allonge dans une direction contenue dans le plan de cisaillement. La forme déformée de la capsule peut être approximée par un ellipsoïde et la déformation quantifiée à l'aide du paramètre de Taylor D_{ij} :

$$D_{ij} = \frac{|L_i - L_j|}{L_i + L_j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.3)$$

où les L_i sont les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde (du fait de la symétrie de l'écoulement, L_1 et L_2 sont dans le plan de cisaillement). En pratique, suivant Ramanujan & Pozrikidis (1998), on calcule le tenseur des moments d'inertie de la capsule. En faisant l'hypothèse que l'on a affaire à un ellipsoïde, il existe une relation entre la longueur des axes et les valeurs principales de ce tenseur, que l'on utilise pour calculer les L_i . Cette méthode présente l'avantage d'être systématique et largement répandue dans la littérature, mais ne donne que des valeurs approximatives si la forme de la capsule n'est pas ellipsoïdale. Pour $Ca = 0.6$ avec la loi NH, la capsule atteint un état stationnaire ; D_{12}^∞ désigne alors le paramètre de Taylor dans le plan de cisaillement à l'état stationnaire.

On étudie tout d'abord l'influence du pas de temps adimensionné $\dot{\gamma}\Delta t$ sur la stabilité de la procédure numérique avec un maillage très fin ($N_N = 10242$ nœuds, $h = 2.5 \times 10^{-2}$). Cette taille de maille correspond à $N_E = 20480$ éléments P_1 et $N_E = 5120$ éléments P_2 . Comme prédit par l'équation (2.12), la procédure est conditionnellement stable. On trouve que, pour ce cas précis, la condition de stabilité sur le pas de temps est $\dot{\gamma}\Delta t \leq 6 \times 10^{-3}$ pour les éléments P_1 et $\dot{\gamma}\Delta t \leq 5 \times 10^{-3}$ pour les éléments P_2 . Au dessus de ce pas de temps critique, le volume interne de la capsule augmente exponentiellement et le calcul doit être arrêté. En dessous, le volume interne varie faiblement et la déformation de la capsule atteint un état stationnaire.

Pour l'étude de la convergence, on notera que l'on ne connaît pas la valeur théorique de la déformation attendue, car le problème n'a pas de solution analytique. On choisit d'utiliser comme référence pour chaque type d'éléments P_i

($i = 1, 2$) la valeur de D_{12}^∞ , notée D_i^{ref} , obtenue avec le pas de maillage mentionné plus haut et pour un pas de temps faible $\dot{\gamma}\Delta t = 1 \times 10^{-4}$.

On commence par augmenter le pas de temps et par calculer l'erreur $\epsilon_i = \frac{|D_{12}^\infty - D_i^{ref}|}{D_i^{ref}}$ relative à la valeur de référence, pour chaque type d'éléments. Comme montré sur la figure 3.2, la méthode numérique converge linéairement en temps pour les deux types d'éléments. On note aussi que l'erreur demeure faible ($\epsilon_i < 2 \times 10^{-4}$) pour toutes les valeurs du pas de temps suffisamment faibles pour satisfaire l'équation (2.12).

On étudie ensuite l'influence du pas du maillage en augmentant h , avec un pas de temps faible de $\dot{\gamma}\Delta t = 1 \times 10^{-4}$. Comme le montre la figure 3.3, la méthode converge par rapport à h , approximativement en h^4 . La précision des résultats reste bonne même pour des maillages plus grossiers ($\epsilon_i < 2 \times 10^{-2}$). La figure 3.3 montre aussi que la différence relative $\delta = \frac{|D_2 - D_1|}{D_2}$ entre les valeurs obtenues avec les éléments P_1 et P_2 quand on diminue h . Les résultats obtenus avec les deux types d'éléments convergent donc vers une solution commune.

On trouve ainsi que la procédure numérique est conditionnellement stable et converge en temps et en espace. Au vu des résultats de convergence, on choisit d'utiliser pour tous les calculs des éléments P_2 avec $N_N = 2562$ nœuds et $N_E = 1280$ éléments ($h = 5 \times 10^{-2}$). Pour $Ca \geq 0.5$, on utilise un pas de temps $\dot{\gamma}\Delta t = 5 \times 10^{-3}$; en suivant l'équation (2.12), on réduit le pas de temps proportionnellement à Ca pour $Ca < 0.5$.

3.3 Écoulement de cisaillement simple

On étudie le comportement d'une capsule initialement sphérique dans un écoulement de cisaillement simple avec la nouvelle méthode numérique détaillée précédemment. Afin de valider la méthode, les résultats sont comparés avec trois études précédentes :

- les travaux de Lac *et al.* (2004), qui utilisent la même méthode que ce travail pour le problème fluide (éléments de frontière), mais une approche locale pour le problème solide, reposant sur une discrétisation de l'interface par B-splines bicubiques ;
- les travaux de Li & Sarkar (2008), qui utilisent la méthode des frontières

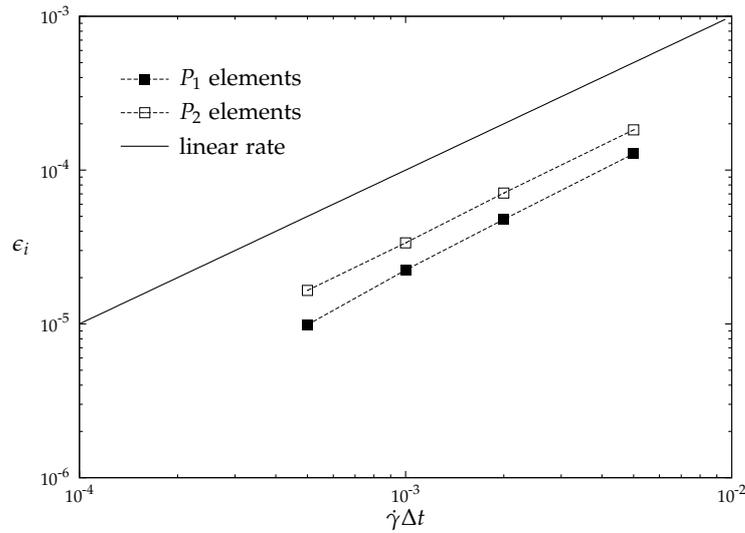


Figure 3.2 – Erreur relative ϵ_i sur le paramètre de Taylor D_{12}^∞ en fonction du pas de temps pour des éléments P_1 et P_2 à $Ca = 0.6$. Dans tous les cas, $N_N = 10242$, $h = 2.5 \times 10^{-2}$ (c'est-à-dire 20480 éléments P_1 , 5120 éléments P_2). La valeur de référence D_i^{ref} pour chaque type d'éléments est prise pour $\gamma\Delta t = 1 \times 10^{-4}$.

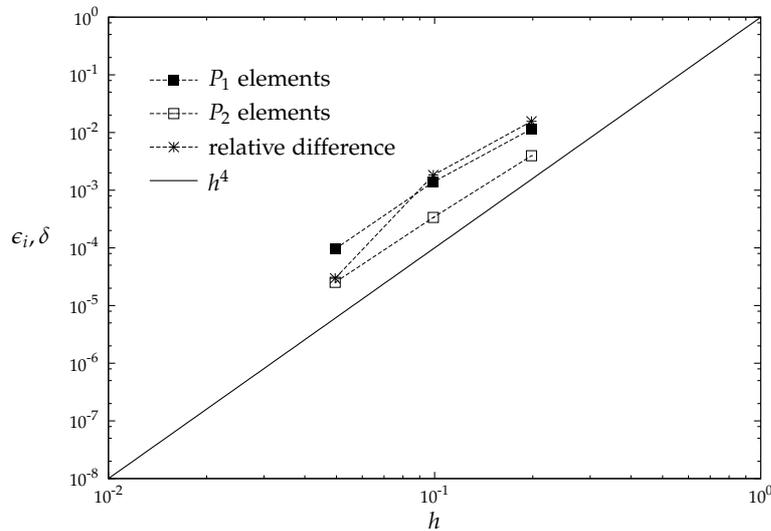


Figure 3.3 – Erreur relative ϵ_i sur le paramètre de Taylor D_{12}^∞ en fonction de la taille du maillage pour des éléments P_1 et P_2 à $Ca = 0.6$, et différence relative δ entre les valeurs P_1 et P_2 . Dans tous les cas, $\gamma\Delta t = 1 \times 10^{-4}$. La valeur de référence D_i^{ref} pour chaque type d'élément est prise pour $h = 2.5 \times 10^{-2}$ (c'est-à-dire 20480 éléments P_1 , 5120 éléments P_2).

- immergées avec des différences finies pour l'écoulement et une approche locale avec un chargement constant par élément pour le problème solide ;
- les travaux de Doddi & Bagchi (2008b), qui utilisent aussi les frontières immergées pour le fluide, mais des éléments finis pour modéliser la membrane, quoiqu'avec une méthode sensiblement différente de celle présentée ici, comme mentionné au chapitre 1.

Le champ de vitesse non-perturbé est donné par l'équation (3.2). Le comportement de la membrane est modélisé soit par la loi néo-hookienne, soit par la loi de Skalak avec $C = 1$.

La capsule est initialement dans son état de référence. Quand l'écoulement est démarré, la capsule subit une élongation, tandis que la membrane est en rotation le long de la forme déformée (mouvement de *tank-treading*). Durant les premiers instants de la déformation, des plis apparaissent à proximité du plan orthogonal à la direction d'élongation (on appellera ce plan *l'équateur*). Ces plis sont liés à la présence de tensions compressives dans la membrane. Selon la valeur du nombre capillaire Ca , on trouve trois régimes stationnaires distincts, comme décrit par Lac *et al.* (2004). Pour $Ca < Ca_L$, la membrane reste en compression dans la zone équatoriale et les plis persistent à l'état stationnaire (fig. 3.4a)⁽²⁾. Pour des valeurs supérieures du nombre capillaire, la capsule devient plus allongée par l'écoulement ; la valeur de la composante isotrope des tensions (reliée à ν_s) augmente, ce qui aboutit à la présence de tensions positives à l'équateur et à la disparition des plis (fig. 3.4b). Enfin, pour $Ca > Ca_H$, la capsule déformée se comporte comme un corps élancé soumis à un couple (du fait de la vorticité de l'écoulement) ; des tensions négatives sont de nouveau présentes à l'état stationnaire et la membrane flambe aux pointes (fig. 3.4c). Comme noté au chapitre 1, ces trois régimes ont été observés expérimentalement.

On peut alors comparer les valeurs de D_{12}^∞ avec la littérature pour la loi NH (fig. 3.5) et la loi Sk (fig. 3.6). Nos résultats sont en bon accord avec les travaux précédents pour toutes les valeurs du nombre capillaire. En particulier, nos résultats présentent toujours moins de 1% d'écart avec ceux de Lac *et al.* (2004) tant pour la loi NH que pour la loi Sk, ce qui valide la nouvelle méthode. En revanche, on

2. Comme on peut le remarquer dans l'équation (3.28) du chapitre 2, $\underline{q} \cdot \underline{n}$ change de signe en même temps que la courbure ; c'est donc une quantité intéressante à tracer pour repérer les plis.

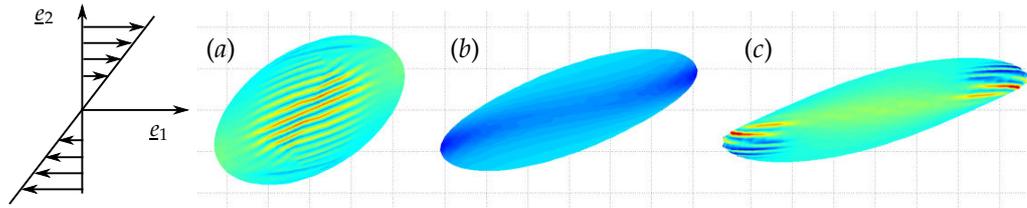


Figure 3.4 – Déformation stationnaire d'une capsule dont la membrane suit la loi NH, pour différentes valeurs de Ca : (a) $Ca = 0.3$, (b) $Ca = 0.6$, (c) $Ca = 1.2$. Les couleurs représentent la composante normale du chargement. L'échelle de couleur est commune aux trois figures.

trouve un écart de 5% avec Li & Sarkar (2008) pour les deux lois. Ceci est probablement dû à la description grossière du chargement adoptée par ces auteurs. Les résultats de Doddi & Bagchi (2008b) sont proches des nôtres pour les faibles valeurs du nombre capillaire, mais semblent diverger quand Ca augmente. Cette différence est surprenante, car ces auteurs utilisent aussi des éléments finis pour modéliser la membrane.

Les valeurs critiques Ca_L et Ca_H séparant les trois régimes restent un problème ouvert, au sujet duquel les études précédentes ne sont pas parvenues à un consensus. Ces nombres capillaire critiques sont définis comme les valeurs de Ca entre lesquelles la capsule atteint un état stationnaire dépourvu de tensions négatives. La figure 3.7 représente les extrema des tensions principales à l'état stationnaire (notés T_{min} et T_{max}) pour les deux lois considérées et permet de repérer les valeurs critiques de Ca données par notre nouvelle méthode. On trouve :

$$Ca_L = 0.45, \quad Ca_H = 0.63, \quad (3.4)$$

pour la loi NH et

$$Ca_L = 0.4, \quad Ca_H = 2.4, \quad (3.5)$$

pour la loi Sk ($C = 1$)⁽³⁾. Ces valeurs sont égales à celles trouvées par Lac *et al.* (2004). Doddi & Bagchi (2008b) trouvent aussi des tensions négatives à faible Ca , mais n'ont pas quantifié les nombre capillaire critique Ca_L . Ils n'ont par ailleurs pas étudié de grandes valeurs de Ca et n'ont donc pu commenter l'existence de

3. On notera que Ca_L ne dépend que faiblement de la loi, car les lois sont équivalentes à faibles déformations.

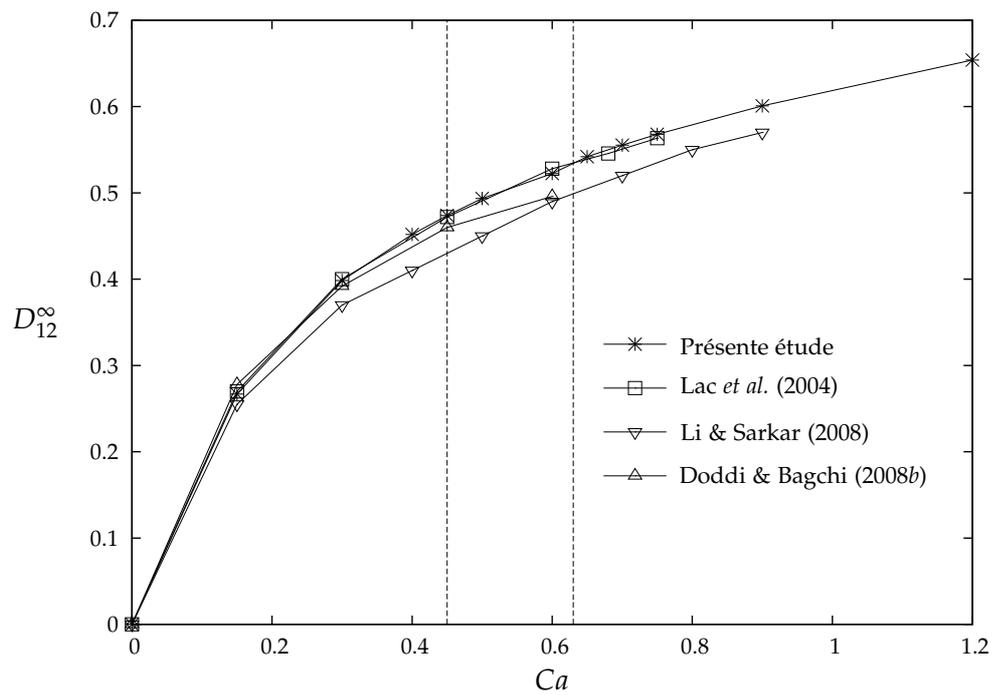


Figure 3.5 – Valeurs de D_{12}^{∞} en fonction de Ca pour une capsule dont la membrane suit la loi NH dans un écoulement de cisaillement simple. Les résultats sont comparés avec Lac *et al.* (2004), Li & Sarkar (2008) et Doddi & Bagchi (2008*b*). Les lignes verticales indiquent les nombres capillaires critiques Ca_L et Ca_H .

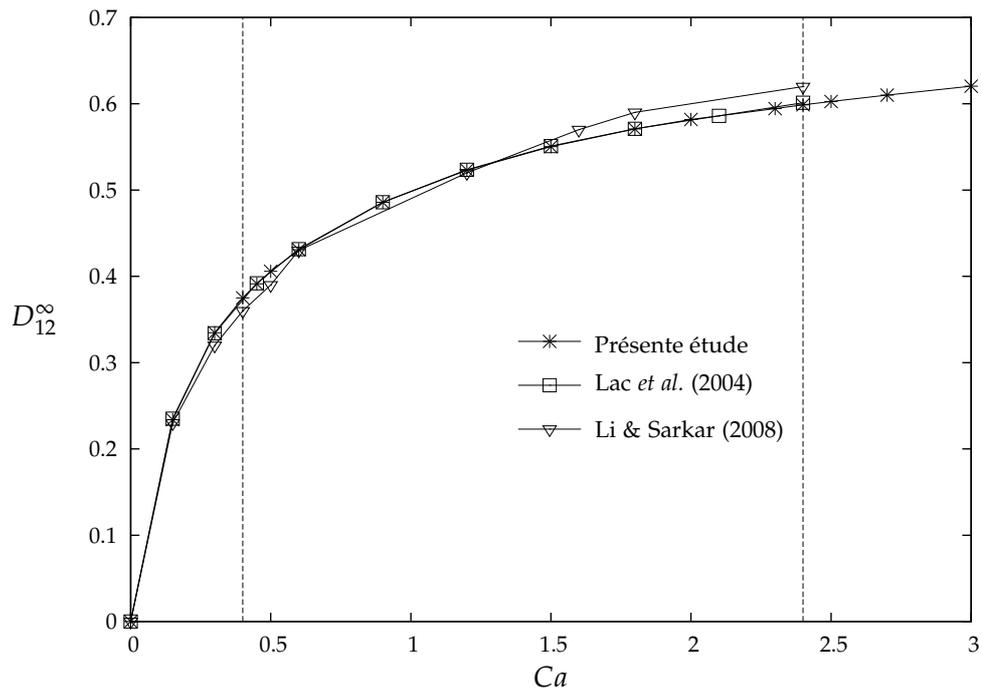


Figure 3.6 – Valeurs de D_{12}^{∞} en fonction de Ca pour une capsule dont la membrane suit la loi Sk ($C = 1$) dans un écoulement de cisaillement simple. Les résultats sont comparés avec Lac *et al.* (2004) et Li & Sarkar (2008); ce cas n'a pas été traité par Doddi & Bagchi (2008*b*). Les lignes verticales indiquent les nombres capillaires critiques Ca_L et Ca_H .

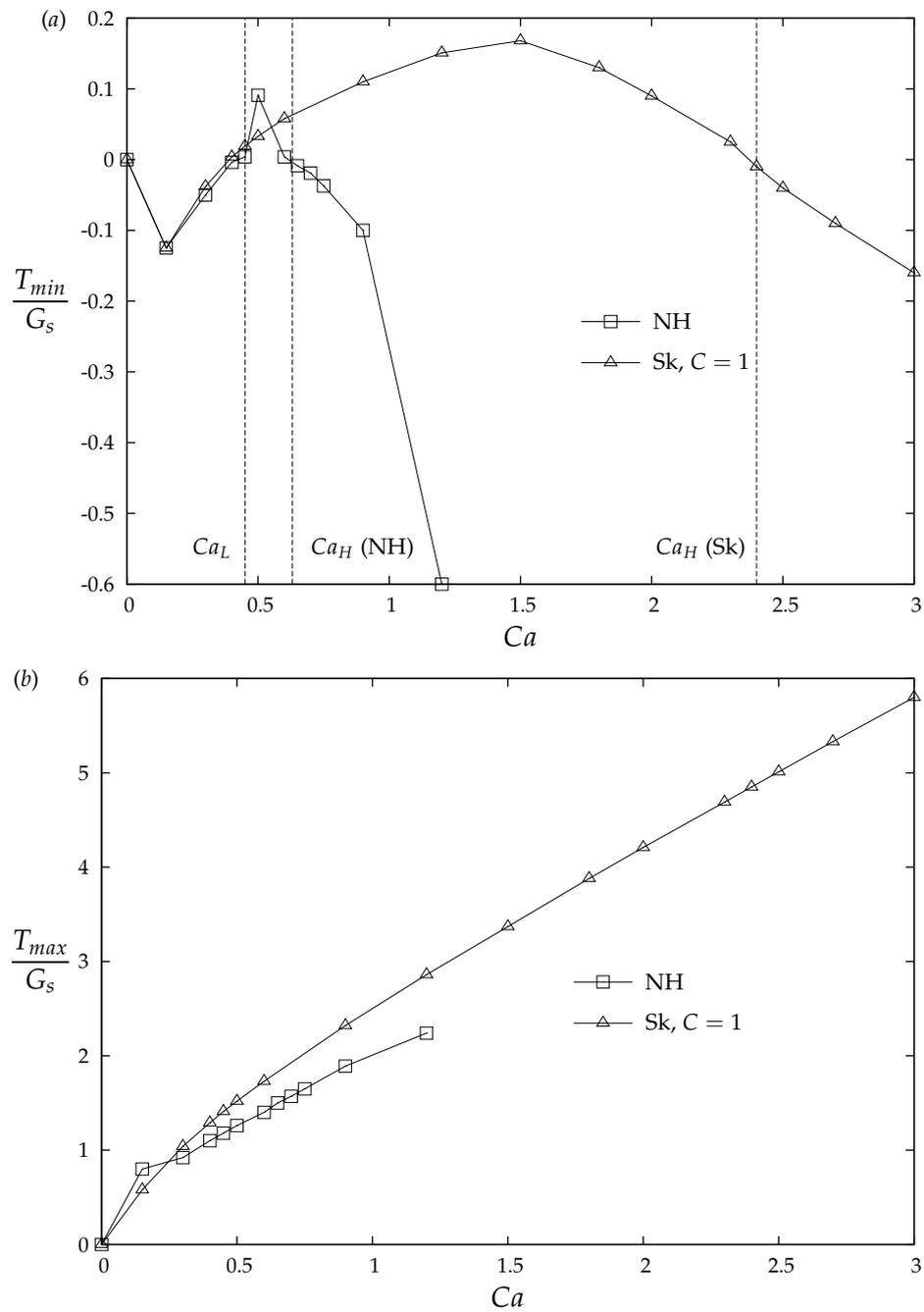


Figure 3.7 – Extrema des tensions principales pour la loi NH et la loi Sk ($C = 1$). (a) Tension minimale, (b) tension maximale. Les lignes verticales représentent les nombres capillaires critiques Ca_L et Ca_H .

Ca_H . Quant à Li & Sarkar (2008), ils observent les trois régimes, mais sont incapables de caractériser Ca_L et Ca_H , car ils trouvent des tensions négatives pour toutes les valeurs de Ca ; ils attribuent ce phénomène au manque de précision de leur méthode numérique. Ainsi, la présente étude est la seule avec celle de Lac *et al.* à déterminer Ca_L et Ca_H ; il est remarquable que, bien qu'utilisant des méthodes numériques différentes, ces deux études trouvent les mêmes valeurs.

La méthode numérique utilisée par Lac *et al.* (2004) devient instable et finit par faire diverger le calcul quand des tensions négatives apparaissent : dans les zones de compression, la distance entre les nœuds tend à devenir très faible ce qui fait osciller les splines et aboutit à l'échec du calcul. Avec cette nouvelle méthode numérique, des plis se forment aussi pour $Ca < Ca_L$; toutefois, ils ne compromettent pas la stabilité numérique du calcul. On note aussi que Li & Sarkar (2008) rencontrent des problèmes de stabilité pour $Ca > Ca_H$. À l'inverse, notre méthode demeure numériquement stable pour toutes les valeurs de Ca essayées, y compris pour des valeurs bien au-dessus de Ca_H (on est allé jusqu'à 1.2 pour la loi NH et 3.0 pour la loi Sk sans rencontrer des problèmes de stabilité).

Cette méthode présente donc l'avantage de permettre une étude complète du comportement de la capsule en écoulement, y compris pour des nombres capillaires hors de l'intervalle $[Ca_L, Ca_H]$. La méthode demeure aussi stable pour des temps de calcul longs. Ceci permet d'étudier le mouvement de tank treading, qui est un phénomène lent : par exemple, pour une capsule obéissant à la loi NH à $Ca = 0.6$, la déformation stationnaire est atteinte à $\dot{\gamma}t = 7$ tandis que la période de tank treading est de $\dot{\gamma}T = 22$. Les calculs ont pu être prolongés pendant plus de deux périodes de tank treading sans rencontrer de problèmes de stabilité (ceci correspond à 10 000 itérations).

3.4 Écoulement hyperbolique plan

On s'intéresse maintenant au comportement d'une capsule dans un écoulement hyperbolique plan. Le champ de vitesse non-perturbé est donné par :

$$\underline{v}^{np}(\underline{x}) = \dot{\gamma}(x_1\underline{e}_1 - x_2\underline{e}_2). \quad (3.6)$$

Deux études numériques ont été consacrées à un tel problème :

- les travaux de Lac *et al.* (2004) mentionnés plus haut ;

- l'étude récente de Dodson & Dimitrakopoulos (2008), qui discrétisent l'interface à l'aide d'éléments spectraux, sur lesquels ils résolvent l'équation d'équilibre local pour la membrane et calculent le champ de vitesse par la méthode des intégrales de frontière.

Dodson & Dimitrakopoulos n'ayant pas encore publié les résultats complets de leur étude, l'article de Lac *et al.* sera la principale référence utilisée ici pour comparaison.

Une fois encore, on décrit le comportement de la membrane à l'aide de la loi néo-hookienne et de la loi de Skalak (avec $C = 1$). Placée dans un écoulement hyperbolique plan, la capsule subit une élongation selon la direction e_1 . Comme dans le cas du cisaillement simple, des tensions compressives et des plis apparaissent pendant le régime transitoire dans le plan orthogonal à la direction d'élongation. Pour les valeurs du nombre capillaire inférieures à une valeur critique Ca_L , ces plis persistent à l'état stationnaire. Pour des valeurs de Ca plus élevées, un état stationnaire sans tensions négatives peut être atteint. On définit Ca_L comme la valeur en dessous de laquelle on a des tensions négatives à l'état stationnaire. Quand on augmente encore Ca , on trouve que le comportement de la capsule dépend de la loi utilisée pour décrire la membrane. Avec la loi NH, il existe un nombre capillaire critique Ca_∞ au delà duquel la capsule continue à s'allonger sans plus atteindre d'état stationnaire. Cette valeur critique Ca_∞ n'existe en revanche pas pour la loi Sk, pour laquelle on trouve toujours un état stationnaire⁽⁴⁾.

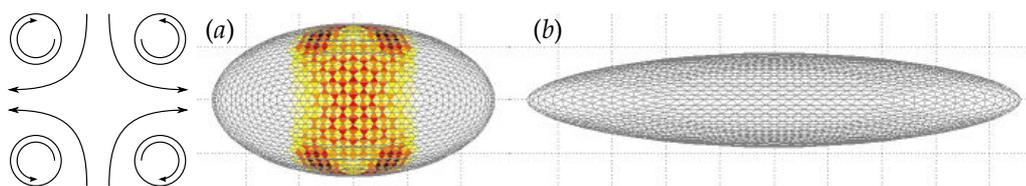


Figure 3.8 – Déformation stationnaire d'une capsule dont la membrane suit la loi Sk ($C = 1$), pour différentes valeurs de Ca : (a) $Ca = 0.1$, (b) $Ca = 1.0$. Les zones blanches sont en traction, tandis que les couleurs représentent l'intensité des tensions négatives.

4. On notera la similarité avec le cas de la sphère sous pression, dans lequel il existe une pression critique au delà de laquelle la loi NH donne une extension infinie.

On compare les valeurs obtenues pour D_{12}^∞ à celles de Lac *et al.* (2004) dans les figures 3.9 (loi NH) et 3.10 (loi Sk). Pour la gamme de nombres capillaires pour laquelle ils avaient obtenu des résultats, les valeurs sont en très bon accord (une fois encore, moins de 1% d'écart). On notera que le léger écart observé pour la loi NH à faible Ca est dû à la présence d'importants plis dans l'état stationnaire trouvé par notre méthode, qui rendent difficile une définition précise de D_{12}^∞ .

Comme dans le cas du cisaillement simple, les nombres capillaires critiques entre les régimes demeurent un problème ouvert. Avec la nouvelle méthode, les valeurs critiques que l'on trouve pour la loi NH sont

$$Ca_L = 0.14, \quad Ca_\infty = 0.35, \quad (3.7)$$

et pour la loi Sk ($C = 1$)

$$Ca_L = 0.15, \quad \text{pas de } Ca_\infty. \quad (3.8)$$

On obtient les mêmes valeurs de Ca_L que Lac *et al.* (2004). En revanche, les résultats diffèrent pour Ca_∞ : Lac *et al.* trouvent une valeur plus basse pour la loi NH ($Ca_\infty = 0.22$) et une valeur finie pour la loi Sk ($Ca_\infty = 0.7$). On peut trouver une explication pour cette différence de comportement dans les travaux de Dodson & Dimitrakopoulos (2008), qui montrent qu'une capsule placée en écoulement hyperbolique plan présente des courbures très élevées aux extrémités durant la phase transitoire, avant de retourner à des courbures plus faibles à l'état stationnaire. On observe aussi ce phénomène avec notre méthode (comme illustré en fig. 3.11), même si notre discrétisation de l'interface ne permet pas une quantification précise de la courbure aux pointes. On peut penser que la méthode numérique de Lac *et al.* a été rendue instable par ces courbures élevées, et qu'ils ont incorrectement interprété ce problème purement numérique comme un signe d'extension infinie, qui peut effectivement se produire à plus fort Ca pour certaines lois de comportement, mais certainement pas pour une loi durcissante comme la loi de Skalak.

4 Bilan et discussion

Le couplage d'éléments finis de membrane avec des intégrales des frontière est une technique qui n'avait jamais été tentée précédemment pour étudier le compor-

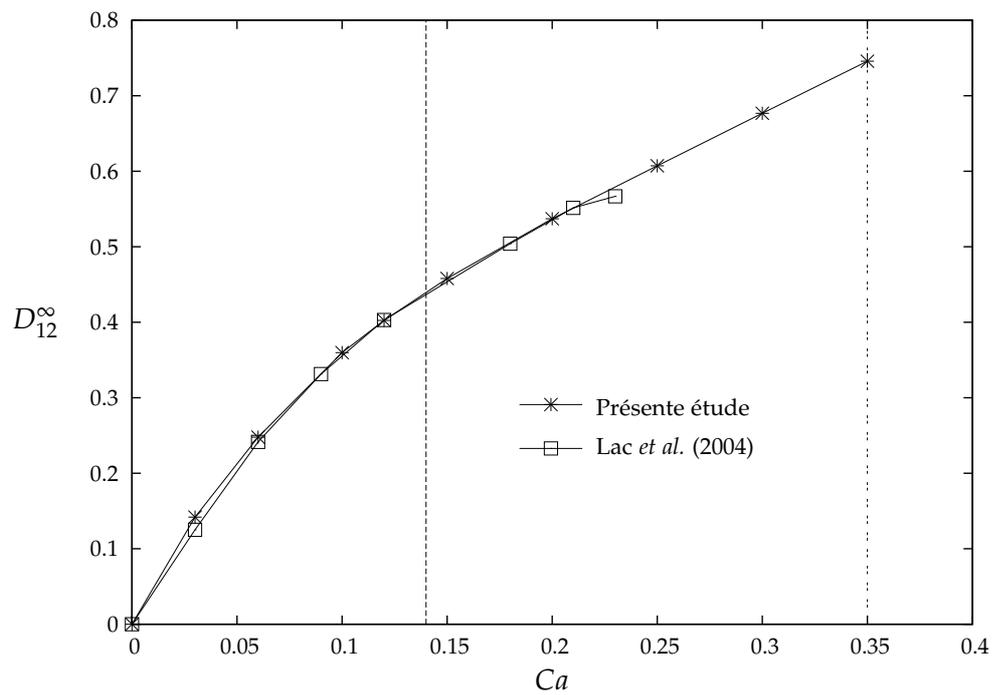


Figure 3.9 – Valeurs de D_{12}^{∞} en fonction de Ca pour une capsule dont la membrane suit la loi NH dans un écoulement hyperbolique plan. Les résultats sont comparés à Lac *et al.* (2004). Les lignes verticales indiquent les nombres capillaires critiques Ca_L et Ca_{∞} .

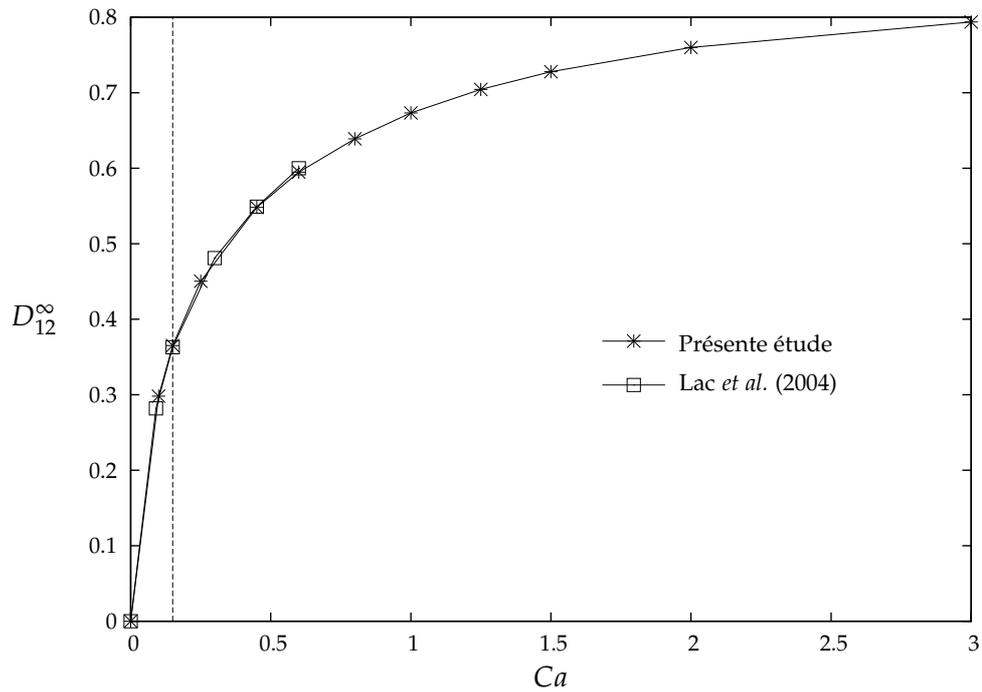


Figure 3.10 – Valeurs de D_{12}^{∞} en fonction de Ca pour une capsule dont la membrane suit la loi Sk ($C = 1$) dans un écoulement hyperbolique plan. Les résultats sont comparés à Lac *et al.* (2004). La ligne verticale indique le nombre capillaire critique Ca_L .

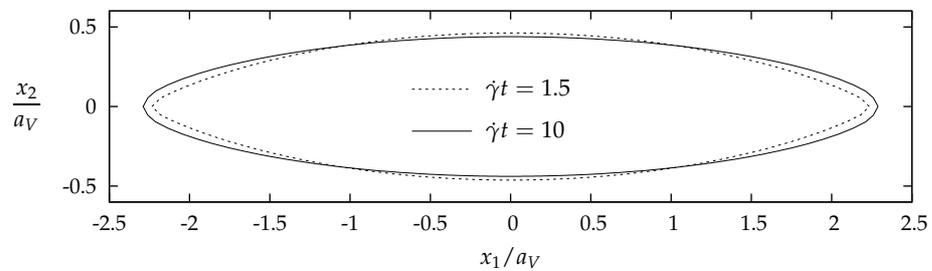


Figure 3.11 – Profils transitoire ($\dot{\gamma}t = 1.5$) et stationnaire ($\dot{\gamma}t = 10$) dans le plan (x_1, x_2) pour une capsule dans un écoulement hyperbolique plan à $Ca = 1.0$. La capsule de la membrane obéit à la loi Sk ($C = 1$). On observe que la courbure aux pointes est plus élevée durant le régime transitoire qu'à l'état stationnaire.

tement d'une capsule. Les résultats que l'on a présentés ici montrent clairement que cette méthode numérique est viable et précise. On se propose maintenant de revenir sur quelques points importants soulevés durant cette étude.

4.1 Limites des méthodes locales

L'écriture de l'équation d'équilibre de la membrane sous forme de problème variationnel (eq. 2.13) plutôt que comme une équation d'équilibre local impose des conditions différentes sur la discrétisation du problème. Quand on utilise l'équation locale, le chargement \underline{q} est égal à la divergence surfacique des tensions \underline{T} . On désire ensuite utiliser \underline{q} dans l'intégrale de frontière du problème fluide. Ainsi, pour que cette intégrale ait un sens, le tenseur \underline{T} doit être continu sur la surface entière de la capsule. Du fait de la définition de \underline{T} , la position (et le champ de déplacement) doivent donc être de classe C^1 sur toute la surface.

Une telle description C^1 n'est pas possible pour une sphère⁽⁵⁾. Ce problème topologique est inévitable quand on utilise l'équation d'équilibre local pour traiter une capsule, et a été rencontré par toutes les études reposant sur cette équation.

Lac *et al.* (2004) maillent la sphère à l'aide de B-spline bicubiques le long de coordonnées similaires aux coordonnées sphériques habituelles. Si cette méthode offre une description C^2 de la position sur une grande partie de la surface, elle introduit deux points singuliers – les pôles – où la base locale covariante ne peut pas être définie et où les tensions ne peuvent donc pas être calculées. De plus, comme les symboles de Christoffel tendent vers l'infini quand on s'approche des pôles, les erreurs numériques deviennent importantes autour de ces points. Lac *et al.* (2007) sont parvenus à diminuer le problème en introduisant un deuxième maillage, dont les pôles sont orthogonaux à ceux du premier maillage. Ils résolvent alors le problème solide une fois sur chaque maillage et calculent une moyenne pondérée du chargement, de sorte à réduire la contribution des zones proches des pôles. Cette méthode donne généralement de très bons résultats, mais elle est coûteuse en temps de calcul, car elle nécessite de résoudre le problème solide deux fois et de faire régulièrement des projections de la position et du chargement d'une grille sur l'autre. De plus, elle présente toujours des instabilités numériques dans certains cas, comme par exemple en écoulement hyperbolique (eq. 3.6) quand

5. C'est un corollaire classique du théorème de la « boule chevelue » de Poincaré-Brouwer.

l'axe des pôles d'un des deux maillages est dans la direction d'élongation.

Une autre technique utilisée pour mailler la sphère dans le cadre d'une approche locale est d'utiliser des éléments entre lesquels les dérivées premières en espace sont discontinues. Il est alors nécessaire d'implémenter une méthode *ad hoc* pour traiter ces discontinuités. Un exemple d'une telle méthode est fourni par Wang & Dimitrakopoulos (2006). Ils discrétisent l'interface avec un faible nombre d'éléments spectraux (entre 6 et 14) qui offrent une représentation très régulière de la position au sein de chaque élément, mais avec des discontinuités entre ceux-ci. Ces auteurs font alors appel à une méthode de lissage du premier ordre pour imposer la continuité de la position et de ses dérivées premières d'un élément à l'autre. À la différence du faible nombre d'éléments (et donc du faible recours nécessaire au lissage) utilisé par Wang & Dimitrakopoulos, Ramanujan & Pozrikidis (1998) utilisent un maillage déstructuré avec 512 éléments triangulaires de type P_2 entre lesquels les tensions sont discontinues. Ces auteurs ont mis en place une technique complexe pour moyenniser le tenseur \underline{T} à chaque nœud à partir de ses valeurs sur les éléments contigus et pour ensuite le réinterpoler entre les nœuds pour calculer le chargement – lequel est supposé constant par morceaux. Les effets de tant de moyennes sont difficiles à prédire ou à contrôler.

À la différence des méthodes reposant sur l'équation locale d'équilibre, celles résolvant le problème variationnel ne sont pas soumises à ces complications topologiques. Comme on l'a vu, l'équation (2.13) permet à \underline{u} d'être dans H^1 , ce qui signifie que le problème solide peut être discrétisé à l'aide d'un espace d'éléments finis présentant des discontinuités des dérivées premières entre les éléments. On peut ainsi obtenir le chargement sans avoir à recourir à une technique de lissage ou de moyenne mal contrôlée. Il apparaît ainsi que les méthodes variationnelles sont une manière plus robuste de traiter le mécanisme de la membrane d'une capsule que les méthodes reposant sur l'équilibre local.

4.2 Comparaison avec les méthodes existantes

La nouvelle méthode présentée ici donne des résultats en bon accord avec la littérature dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple. En particulier, elle donne des résultats remarquablement proches (moins de 1% d'écart) de ceux de Lac *et al.* (2004). Ceci est d'autant plus intéressant que ces auteurs sont ceux qui ont

employé la discrétisation la plus précise. On trouve de plus les mêmes nombres capillaires critiques Ca_L et Ca_H , bien qu'utilisant des méthodes numériques différentes. On peut donc supposer que ces valeurs sont bien liées à la physique du problème et non à un choix de méthode numérique.

On trouve des résultats tout aussi proches à ceux de Lac *et al.* en écoulement hyperbolique plan. Les deux études trouvent la même valeur du nombre capillaire critique Ca_L , ce qui semble là aussi indiquer que cette valeur est physique. En revanche, Lac *et al.* rencontrent des problèmes numériques pour les grandes valeurs de Ca dus à la présence de courbures élevées pendant la phase transitoire. La plus grande rigidité numérique de nos éléments, comparés aux B-splines bicubiques, permet à notre méthode de demeurer stable pendant le régime transitoire et d'atteindre l'état stationnaire, quand il existe. Cependant, notre discrétisation ne permet pas d'avoir une description précise de la courbure locale aux pointes quand la capsule est très allongée. La méthode de Dodson & Dimitrakopoulos (2008) est sans doute plus adaptée à l'étude de ces courbures. D'autres études avec une méthode numérique différente seraient nécessaires pour confirmer les différences de comportement observées entre les lois NH et Sk et les valeurs trouvées pour Ca_∞ .

4.3 Rigidité de flexion, limites du modèle de membrane

Si les résultats trouvés avec la nouvelle méthode sont souvent très proches de ceux de Lac *et al.* (2004), il faut toutefois noter une différence importante : le comportement de la membrane en présence de compression. Là où la méthode de Lac *et al.* finit par diverger en présence de tensions négatives ($Ca < Ca_L$ ou $Ca > Ca_H$ en cisaillement simple, $Ca < Ca_L$ en écoulement hyperbolique plan), la nouvelle méthode reste stable et mène à un état d'équilibre stationnaire. Cette différence de comportement est probablement due à la plus grande rigidité numérique des éléments utilisés ici comparés aux splines cubiques. En effet, d'un point de vue théorique, quand une coque mince est soumise à de la compression, elle tend à flamber et à présenter des plis. La longueur d'onde de ceux-ci est déterminée par la rigidité de flexion de la coque. Dans le cas où cette rigidité de flexion tend vers 0 (modèle de membrane), la longueur d'onde des plis doit faire de même et le problème n'a plus de solution. Numériquement, toutefois, la discrétisation introduit toujours une rigidité numérique (un élément P_1 , par exemple, reste nécessaire-

ment plan), qui agit localement comme une rigidité de flexion et détermine la longueur d'onde des plis. Si cette rigidité numérique est suffisamment élevée, elle permet de maintenir une distance suffisante entre les nœuds pour empêcher la méthode de diverger. C'est le cas avec la discrétisation que l'on utilise ici, et généralement pas pour les splines cubiques. Notons d'ailleurs que ni Doddi & Bagchi (2008b) ni Li & Sarkar (2008), qui utilisent une discrétisation similaire à la nôtre, ne constatent d'instabilités à faible nombre capillaire. Cette rigidité introduite par la méthode numérique permet d'obtenir des résultats stables dans les cas où l'état stationnaire présente des tensions négatives, rendant possible l'étude de ces cas.

Malgré ces avantages, il faut garder à l'esprit que cette rigidité introduite par les éléments n'est qu'un artefact de la méthode numérique ; elle ne peut pas être contrôlée ou obéir à un modèle mécanique décrivant la rigidité de flexion d'une paroi expérimentale. Ainsi, par exemple, les plis observés pour $Ca < Ca_L$ dépendent du maillage et de l'orientation de celui-ci lors du mouvement de tank-treading. On ne dispose que d'un modèle de membrane, *stabilisé* par une rigidité numérique, et non d'un vrai modèle de coque. Toutefois, si un modèle de membrane ne peut prévoir l'état plissé, il est suffisant pour traiter les zones où la paroi est tendue, ainsi que pour déterminer, par le calcul des tensions négatives et des directions principales associées, la localisation des plis et l'orientation de ceux-ci.

De plus, la rigidité introduite par les éléments a un effet essentiellement local, sans influence sur l'allure générale de la capsule. La figure 4.1 montre la même capsule (même Ca , même instant) pour deux valeurs de h différentes. On remarque que, quand h est divisé par 2, la longueur d'onde des plis diminue d'autant, mais sans influencer sur la forme globale de la capsule. Ainsi, on peut supposer que le modèle numérique développé ici donne une bonne description globale du comportement d'une capsule réelle qui ne présenterait qu'une faible rigidité de flexion (y compris pour la détermination de Ca_L et Ca_H), seule l'allure des plis n'étant pas décrite correctement. Ceci justifie l'adoption de ce modèle dans la suite du travail. En revanche, si l'on veut conduire une étude complète des plis, ou étudier des capsules dont la résistance à la flexion est du même ordre de grandeur que la résistance aux déformations dans le plan, il convient de développer un véritable modèle de coque prenant en compte physiquement cette rigidité de flexion.

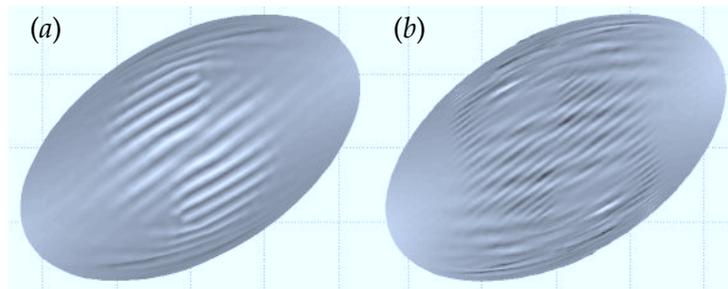


Figure 4.1 – Allure d’une même capsule à $Ca < Ca_L$ pour deux tailles de maille : (a) $h = 5 \times 10^{-2}$, (b) $h = 2.5 \times 10^{-2}$. Dans les deux cas, $Ca = 0.15$ et la membrane obéit à la loi NH. L’échelle de gris correspond à la composante normale du chargement.

Chapitre 4

Capsules ellipsoïdales en écoulement de cisaillement simple

La nouvelle méthode numérique présentée au chapitre précédent a montré son efficacité sur des cas classiques. On se propose maintenant de l'utiliser pour traiter un problème différent et encore peu exploré : le cas d'une capsule dont la forme de référence n'est pas sphérique. En particulier, on s'intéressera ici aux capsules dont la forme de référence est un ellipsoïde de révolution (sphéroïde), dans un écoulement de cisaillement simple. Les motivations pour une telle étude sont multiples. Tout d'abord, le comportement mécanique de capsules non-sphériques présente un certain nombre de caractéristiques absentes chez les capsules sphériques. Or, Chang & Olbricht (1993*b*) et Walter *et al.* (2001) ont observé expérimentalement ces phénomènes même pour des capsules ne présentant qu'un très faible écart à la sphéricité (rapport d'aspect de 0.97); ainsi, la capsule initialement sphérique n'est pas un modèle totalement satisfaisant pour des capsules réelles. De plus, les avancées technologiques permettant de fabriquer des capsules en canaux microfluidiques (Xiang *et al.*, 2008; Liu *et al.*, 2009) permettent d'imaginer de fabriquer celles-ci en faisant polymériser une membrane autour de gouttes fortement non-sphériques. De telles capsules peuvent avoir un grand intérêt, car elles présentent un plus grand rapport surface/volume que les capsules sphériques, ce qui favorise la diffusion trans-membranaire. Un modèle est nécessaire pour de tels objets. Enfin, des capsules naturelles peuvent ne pas être sphériques : c'est en particulier le cas du globule rouge, dont la surface est de 44% supérieure à celle d'une sphère de même volume. Comme mentionné au chapitre 1, des phénomènes typiques des capsules non-sphériques ont été observés expérimentalement avec des globules

rouges par Abkarian *et al.* (2007), et il faut chercher à les mieux comprendre.

1 Travaux précédents et objectifs

Les études numériques tridimensionnelles du comportement de capsules non-sphériques sont peu nombreuses. Ramanujan & Pozrikidis (1998) ont étudié le comportement de sphéroïdes aplatis en cisaillement simple et montré l'existence d'un régime, généralement appelé *swinging*, dans lequel le paramètre de Taylor et l'inclinaison de la capsule oscillent au cours du temps. Leur étude porte essentiellement sur des sphéroïdes faiblement aplatis (rapport d'aspect 0.9) ; quelques résultats sont donnés pour un rapport d'aspect de 0.5, mais sans atteindre un régime établi (les temps de calcul nécessaires pour cela étaient sans doute trop élevés pour les moyens de l'époque).

Les études suivantes sont plus récentes, motivées par les travaux expérimentaux d'Abkarian *et al.* (2007) sur les globules rouges. Sui *et al.* (2008) ont, comme Ramanujan & Pozrikidis (1998), étudié un certain nombre de cas particuliers pour des sphéroïdes aplatis (rapports d'aspect : 0.5, 0.67, 0.9) dont la membrane obéit la loi néo-hookienne avec la même viscosité pour les fluides interne et externe. Ils montrent que, pour des valeurs suffisamment faibles du nombre capillaire (plus faibles que celles explorées par Ramanujan & Pozrikidis), la capsule est soumise à un autre régime, appelé *tumbling*, au cours duquel elle se comporte essentiellement comme un ellipsoïde rigide, le phénomène de tank treading disparaissant. L'étude est limitée à quelques cas et ne donne l'amplitude des oscillations en fonction du nombre capillaire que pour le rapport d'aspect 0.67. Elle montre que l'amplitude des oscillations du paramètre de Taylor est maximale autour de la transition et que, en régime de *swinging*, les oscillations de l'inclinaison diminuent quand le nombre capillaire augmente.

Il n'existe qu'une seule étude numérique explorant *systématiquement* l'influence d'un jeu de paramètres : celle de Kessler *et al.* (2008). Ces auteurs ont principalement cherché à examiner la validité d'un modèle analytique simplifié proposé par Skotheim & Secomb (2007), censé prévoir le régime du comportement de la capsule en fonction du nombre capillaire et du rapport des viscosités. L'étude de Kessler *et al.* se limite à des sphéroïdes aplatis présentant initialement de faibles

écarts à la sphéricité (rapport d'aspect : 0.9) et subissant des déformations modérées; la seule loi considérée pour la paroi de la capsule est la loi de Hooke généralisée, complétée par une légère rigidité de flexion. Ils établissent un diagramme de phase déterminant le régime en fonction du rapport des viscosités et du nombre capillaire pour le rapport d'aspect 0.9.

Le modèle analytique de Skotheim & Secomb (2007) cherche à déterminer l'effet du rapport des viscosités et du nombre capillaire. Il repose sur une hypothèse très forte : la forme tridimensionnelle de la capsule reste constante au cours du mouvement. Ainsi, soit les points matériels restent fixes par rapport à cette forme et celle-ci tourne dans l'écoulement (tumbling), soit les points tournent autour de la forme tandis que l'inclinaison de celle-ci oscille (swinging). Le modèle postule que le comportement de la capsule est dominé par une compétition entre, d'une part, l'énergie apportée par l'écoulement, qui a tendance à mettre en mouvement les points autour de la forme de la capsule et, d'autre part, l'énergie de déformation de la membrane, qui tend à les maintenir dans leur position de référence. Ainsi, le tumbling a lieu à faibles nombres capillaires, tandis que le swinging correspond à des nombres capillaires plus élevés. Le modèle donne aussi une expression de l'amplitude et de la valeur moyenne des oscillations de l'inclinaison en fonction du nombre capillaire et du rapport des viscosités. Si ce modèle analytique permet de comprendre la physique générale du phénomène, Kessler *et al.* (2008) montrent qu'il ne rend qu'imparfaitement compte du comportement de la capsule et que l'hypothèse d'une forme constante n'est pas vérifiée. Par ailleurs, ce modèle ne prend pas en compte l'expression de l'énergie de déformation de la membrane (la loi de comportement), et prédit donc que ni la transition, ni les oscillations de l'inclinaison ne dépendent de la loi – ce qui semble surprenant.

La présente étude vise à être une étude systématique du comportement de capsules ellipsoïdales en cisaillement simple. On choisit de s'intéresser à des cas résolument différents de ceux étudiés par Kessler *et al.* (2008) : on travaillera avec des capsules initialement très éloignées de la sphère (en considérant aussi bien des sphéroïdes allongés qu'aplatis), et dans des domaines de grandes déformations. Ceci conduira en particulier à se pencher sur *l'influence des propriétés mécaniques de la membrane* : loi de comportement, rapport entre module de cisaillement et module de dilatation surfacique, nécessité d'une rigidité de flexion. . . En revanche,

on se limitera à un rapport des viscosités $\lambda = 1$, et l'on renvoie aux travaux de Kessler *et al.* pour une étude plus détaillée de l'influence de ce paramètre.

Après avoir introduit les notations nécessaires à la description des phénomènes (§2), on présentera sur des exemples les différents régimes du mouvement (§3). On effectuera ensuite une étude systématique en fonction du nombre capillaire pour deux lois de comportement et deux rapports d'aspect (§4), puis on étudiera l'influence relative des modules de cisaillement et de dilatation (§5). Enfin, on conclura par quelques remarques sur les points saillants de l'étude (§6).

2 Présentation du problème et notations

On étudie une capsule dont la forme de référence non-contraainte est un ellipsoïde de révolution. On note a la demi-longueur de son axe de révolution, et b la demi-longueur de l'axe orthogonal. Ainsi, dans un repère orthonormé (O', X, Y, Z) bien choisi, l'équation de la forme de référence est :

$$\left(\frac{X}{b}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + \left(\frac{Z}{a}\right)^2 = 1. \quad (2.1)$$

On définit le *rapport d'aspect* a/b de l'ellipsoïde initial. Si $a/b < 1$, on parle de *sphéroïde aplati* et de *sphéroïde allongé* si $a/b > 1$.

Le volume de la capsule a pour expression

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2. \quad (2.2)$$

On choisit pour l'échelle de longueur du problème (intervenant entre autres dans la définition du nombre capillaire) le rayon a_V de la sphère de même volume que l'ellipsoïde :

$$a_V = \sqrt[3]{ab^2}. \quad (2.3)$$

Dans un écoulement de cisaillement simple, les points de la membrane sont continuellement en mouvement, du fait de la vorticité de l'écoulement. Pour une capsule initialement sphérique, tous les points sont équivalents et la capsule prend une forme fixe stationnaire autour de laquelle la membrane est en rotation (phénomène de *tank-treading* évoqué au chapitre précédent). Pour une capsule ellipsoïdale, dont la forme de référence ne possède pas la symétrie sphérique, les points

de la membrane ne sont pas équivalents. Une telle capsule ne peut atteindre un état stationnaire et un régime périodique se met en place, comme on le verra par la suite. On se propose donc tout d'abord d'introduire les notations nécessaires pour décrire le mouvement périodique de la capsule.

Dans toute l'étude, l'axe de révolution de la capsule sera placé dans le plan de cisaillement $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Par symétrie, les points matériels initialement présents dans ce plan y demeureront durant le mouvement. On s'intéressera particulièrement à ces points et à l'intersection de la capsule avec le plan de cisaillement ; il s'agira approximativement d'une ellipse, comme représenté figure 2.1. Si l'on note L_1 la longueur du grand axe et L_2 celle du petit axe, on rappelle que la paramètre de déformation de Taylor s'écrit :

$$D_{12} = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}. \quad (2.4)$$

Contrairement au cas de la sphère, D_{12} n'est pas nul à l'état initial pour une capsule ellipsoïdale. Un autre paramètre utile pour décrire la déformation est Δ , la variation relative de surface. Si l'on note $A(t)$ la surface de la membrane au temps t , on a alors :

$$\Delta = \frac{A(t) - A(0)}{A(0)}. \quad (2.5)$$

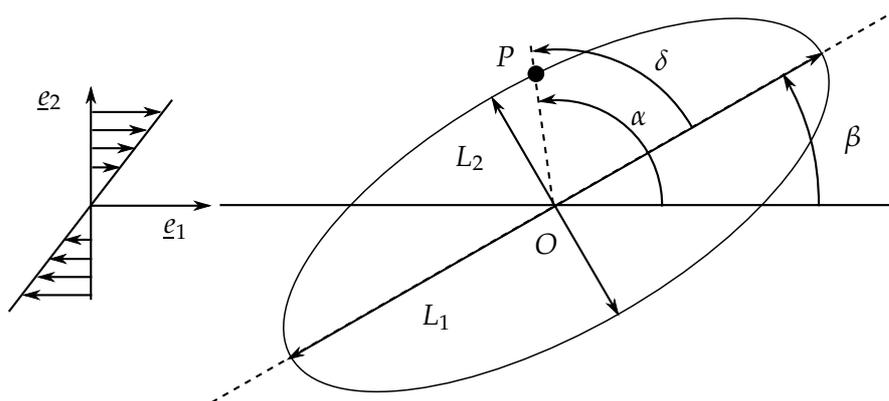


Figure 2.1 – Notations utilisées pour décrire la capsule déformée.

La dynamique de la déformation de la capsule est complexe : d'une part, la forme globale évolue dans le temps (variation de la déformation et de l'orientation) et d'autre part la membrane est en rotation. Ces deux phénomènes doivent

être quantifiés simultanément. Pour décrire le mouvement, on adopte donc les notations de Kessler *et al.* (2008). On suit la position d'un point matériel P situé dans le plan de cisaillement, et l'on note α l'angle que fait \overrightarrow{OP} avec \underline{e}_1 . Par ailleurs, on note β l'angle que fait le grand axe de l'ellipse avec \underline{e}_1 . Enfin, on pose $\delta = \alpha - \beta$. Notons que la valeur initiale de δ est arbitraire, selon le choix du point P .

Quand on atteint un régime périodique établi, la période T du mouvement est prise comme étant celle de l'évolution de l'angle α . Il est alors intéressant de caractériser les variations de diverses quantités (D_{12}, β, \dots) au cours d'une période. On surmontera d'une barre la *valeur moyenne* de la quantité considérée, et on écrira entre crochets son *amplitude crête à crête*. Par exemple : $\bar{\beta}, [\beta]$.

On s'intéressera aussi aux variations des efforts dans la membrane, en particulier aux extrema des tensions principales T_1 et T_2 . Il conviendra alors de distinguer extrema spatial et temporel. Par exemple, le maximum de tension à un instant donné est :

$$T_{max}(t) = \max_{\underline{x}, \gamma} (T_{\gamma}(\underline{x}, t)), \gamma \in \{1, 2\},$$

et sa valeur minimale sur une période est dénotée

$$\min T_{max} = \min_t (T_{max}(t)) = \min_t \left(\max_{\underline{x}, \gamma} (T_{\gamma}(\underline{x}, t)) \right), \gamma \in \{1, 2\}.$$

3 *Tumbling et swinging*

Pour une capsule ellipsoïdale donnée, on rencontre deux régimes, selon la valeur du nombre capillaire Ca . On note Ca^* le nombre capillaire critique séparant ces deux régimes. Pour $Ca < Ca^*$, la capsule se déforme peu et a un comportement proche de celui d'un ellipsoïde rigide soumis à la vorticité de l'écoulement. On parle de *tumbling*.   l'inverse, pour $Ca > Ca^*$, on retrouve un régime proche du tank-treading connu pour les capsules sphériques, avec la membrane en rotation autour d'une forme déformée donnée. Toutefois, pour une capsule ellipsoïdale, la déformation et l'orientation de cette forme varient périodiquement. On parle alors de *swinging*. On se propose tout d'abord de montrer les caractéristiques de ces deux régimes sur des exemples. On considère une capsule dont la forme de référence est un sphéroïde allongé, dont le rapport d'aspect initial vaut $a/b = 2$ et dont la membrane obéit à la loi de Skalak, avec $C = 1$.

3.1 Tumbling

On considère ici le cas d'une capsule soumise au régime de tumbling, à un nombre capillaire de $Ca = 0.1$; on verra par la suite que, pour cette loi et ce rapport d'aspect, on a $Ca^* = 0.29$. On donne à la figure 3.1 l'état de la capsule à différents instants.

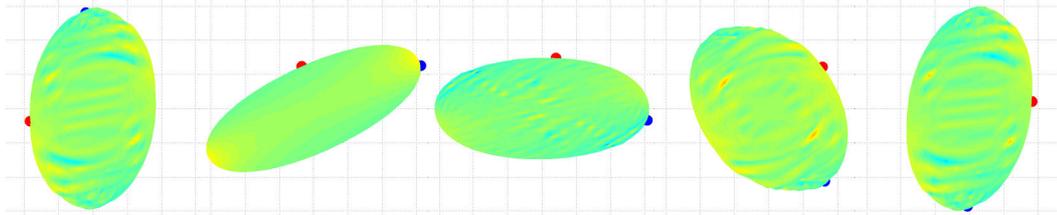


Figure 3.1 – Capsule dans le plan de cisaillement aux instants $\gamma t = 16.5, 19, 21.5, 24, 25$. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.1$. Les couleurs correspondent à la composante normale du chargement, $\underline{q} \cdot \underline{n}$. Les points colorés permettent de suivre deux points matériels; dans la configuration de référence, le point bleu est sur le grand axe et le point rouge sur le petit axe.

Le mouvement de la capsule a les caractéristiques générales d'un mouvement de corps rigide. En effet, les points matériels bougent peu par rapport à leur position initiale relativement aux axes principaux de l'ellipsoïde. La mesure des angles, figure 3.2, permet de quantifier ces caractéristiques. L'orientation de l'ellipsoïde, représentée par β , fait un tour complet, tandis que le petit mouvement des points matériels par rapport à leur position initiale se traduit par de faibles oscillations de δ .

Il est toutefois un peu abusif de dire que la capsule a exactement un mouvement de corps rigide. Le paramètre de Taylor, montré figure 3.3, varie au cours du mouvement, oscillant autour de sa valeur initiale. L'écoulement tend à étirer la capsule dans la direction $\pi/4$; ceci se traduit par des valeurs maximales de D_{12} quand β vaut $\pi/4$ ou $-3\pi/4$, et minimales quand il vaut $3\pi/4$ et $-\pi/4$.

Les tensions minimales et maximales sont données figure 3.4. On note que, à l'exception des instants où elle est alignée avec la direction d'élongation, la capsule présente des zones de tensions négatives. Comme on le voit à la figure 3.5, les tensions négatives recouvrent une grande partie de la surface de la capsule.

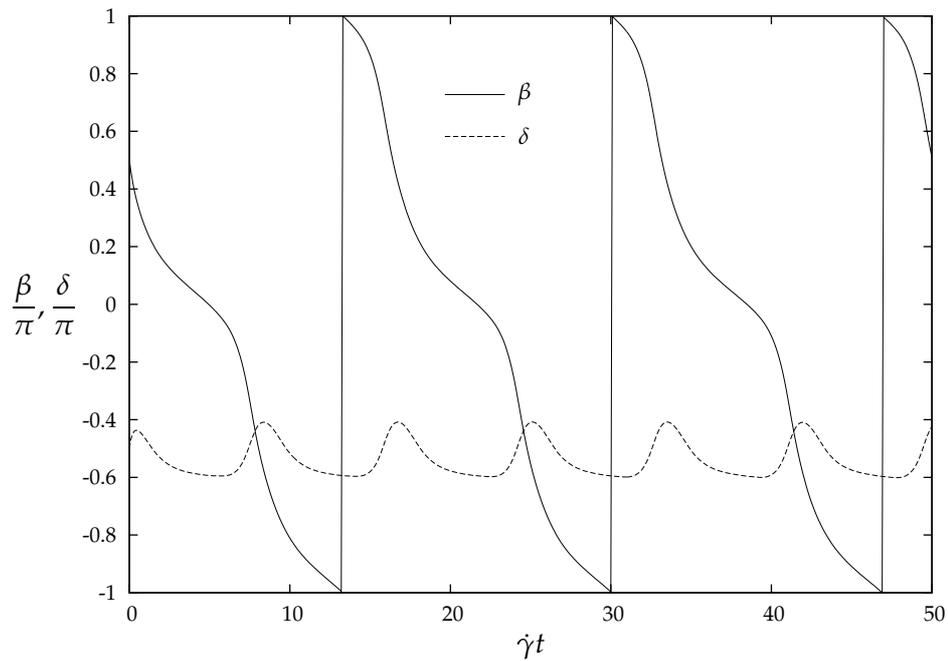


Figure 3.2 – Angles β et δ durant le régime de tumbling. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.1$.

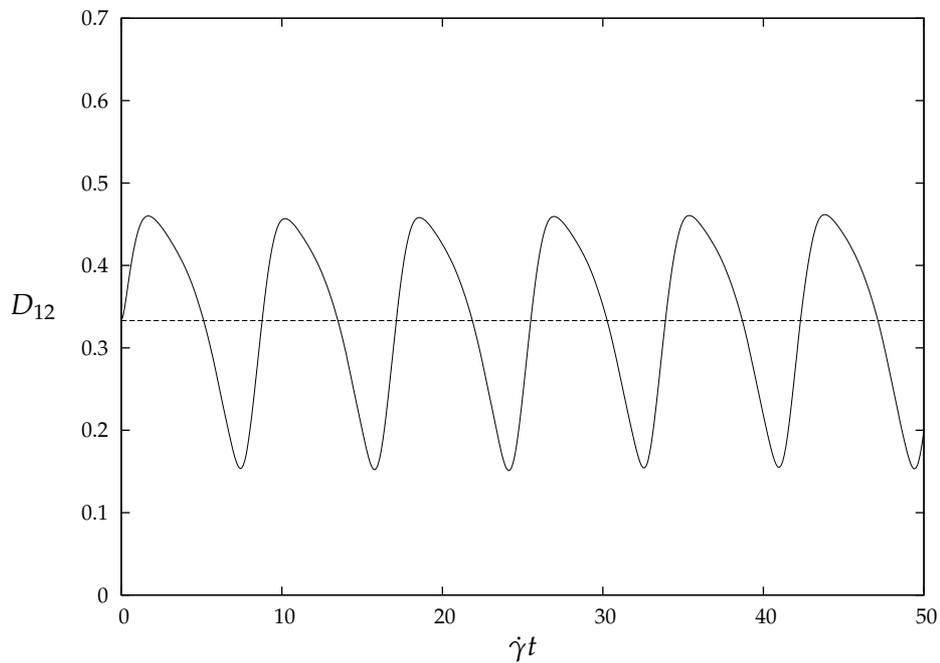


Figure 3.3 – Paramètre de Taylor D_{12} durant le régime de tumbling. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.1$. La déformation oscille autour de sa valeur initiale, repérée par la ligne pointillée.

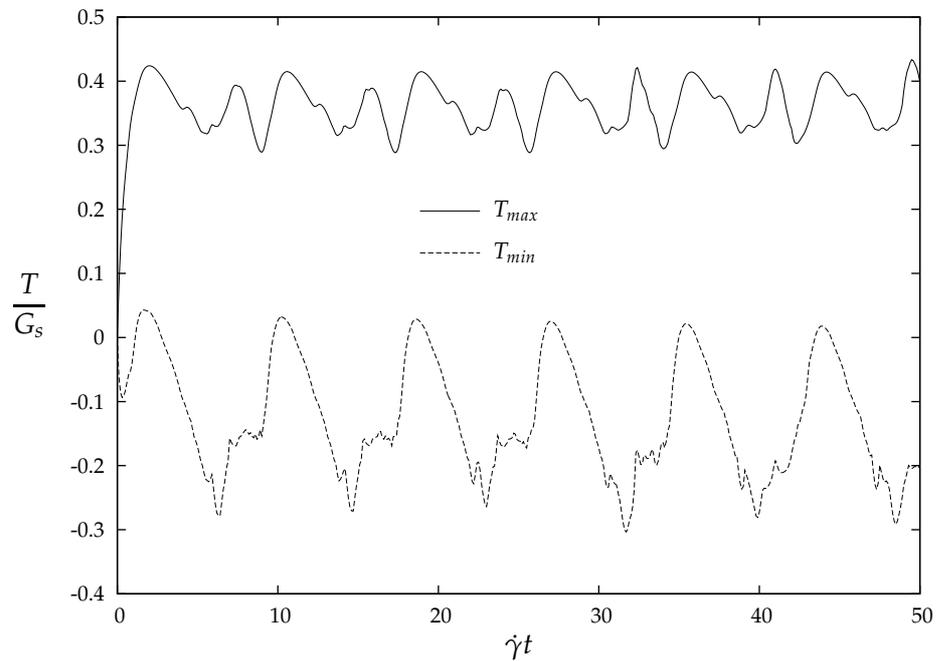


Figure 3.4 – Maximum et minimum des tensions durant le régime de tumbling. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.1$.

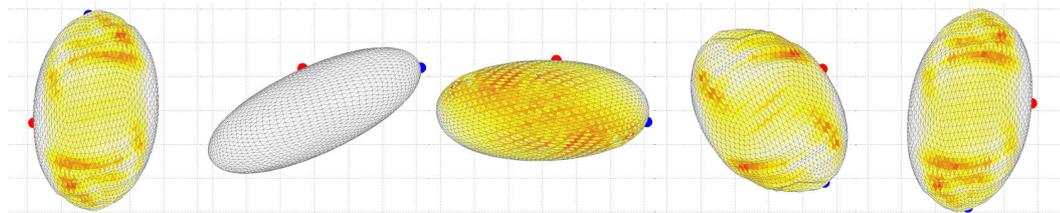


Figure 3.5 – Capsule dans le plan de cisaillement aux instants $\dot{\gamma}t = 16.5, 19, 21.5, 24, 25$. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.1$. Les zones blanches sont en traction, tandis que les zones colorées subissent des tensions négatives. Les points colorés permettent de suivre deux points matériels ; dans la configuration de référence, le point bleu est sur le grand axe et le point rouge sur le petit axe.

Toutefois, le modèle numérique demeure stable.

3.2 Swinging

On étudie maintenant la même capsule, mais pour un nombre capillaire $Ca = 1.2 > Ca^*$. On est alors dans le régime de swinging. L'allure à divers instants est montrée à la figure 3.6.

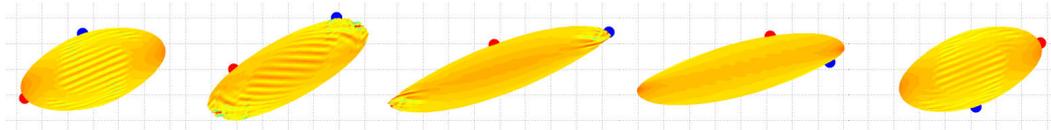


Figure 3.6 – Capsule dans le plan de cisaillement aux instants $\dot{\gamma}t = 21, 23, 25.5, 28, 32.5$. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 1.2$. Même légende que la figure 3.1.

On observe ici un phénomène de tank-treading, la membrane tournant autour d'une forme déformée. Cette rotation s'accompagne d'une variation de la forme de la capsule ainsi que d'une oscillation de l'angle d'inclinaison. Comme pour le tumbling, on peut quantifier ces phénomènes en mesurant l'évolution des angles, comme représenté figure 3.7. Cette fois-ci, β oscille, tandis que δ fait un tour complet.

Le paramètre de Taylor varie aussi au cours de la rotation, comme montré sur la figure 3.8. La capsule atteint sa déformation maximum quand les points se trouvant sur le grand axe de l'ellipsoïde de référence (le point bleu de la figure 3.6) sont dans la direction d'élongation. Inversement, le minimum de D_{12} est obtenu quand les points sur le petit axe de l'ellipsoïde de référence sont dans la direction d'élongation. On note que la déformation est toujours supérieure à la déformation initiale, contrairement à ce qui est observé pour le tumbling. Cela est dû au fait que les forces visqueuses sont plus importantes que dans le cas précédent.

Les tensions oscillent avec la même période que la déformation, comme montré sur les figures 3.9 et 3.10. Quand les axes principaux des ellipsoïdes initial et déformé concordent (c'est-à-dire quand un point matériel initialement sur le grand axe est sur le grand axe de l'ellipsoïde déformé), l'élongation est maximale et les tensions sont partout positives ; dans le cas contraire, de nombreuses tensions

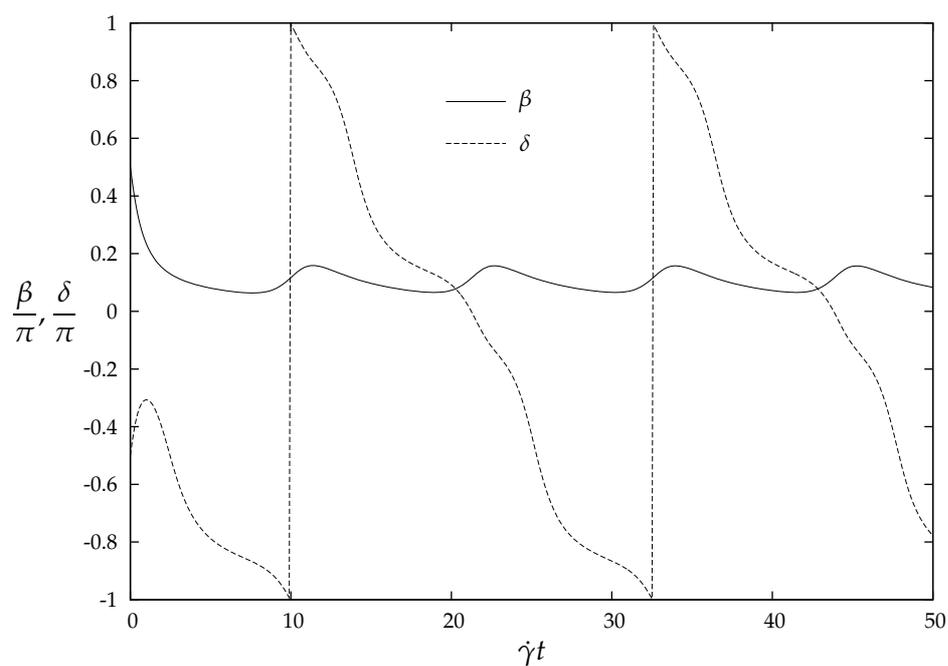


Figure 3.7 – Angles β et δ durant le régime de swinging. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 1.2$.

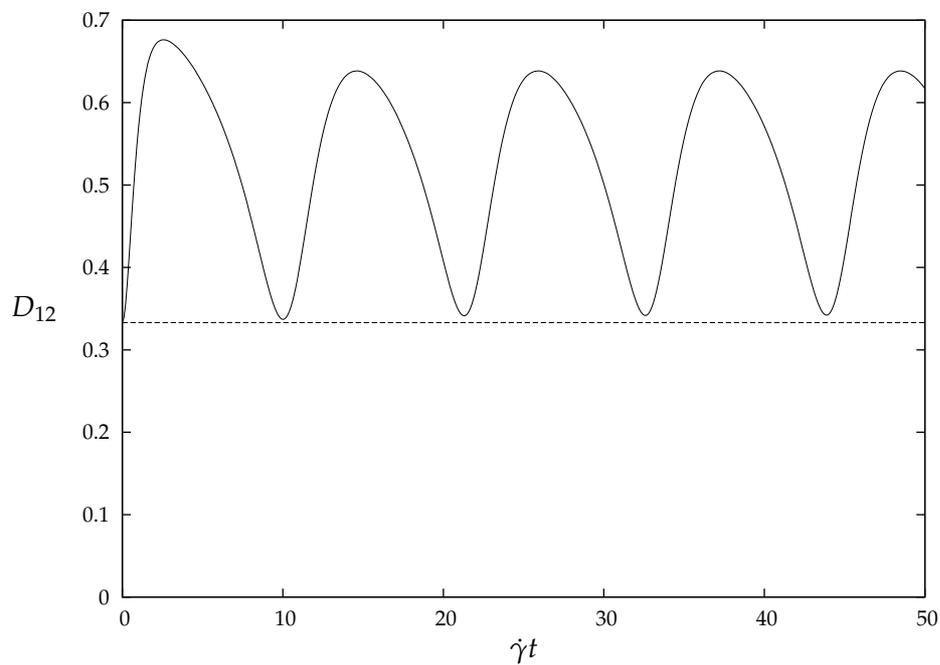


Figure 3.8 – Paramètre de Taylor D_{12} durant le régime de swinging. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 1.2$. La déformation est supérieure à sa valeur initiale, repérée par la ligne pointillée.

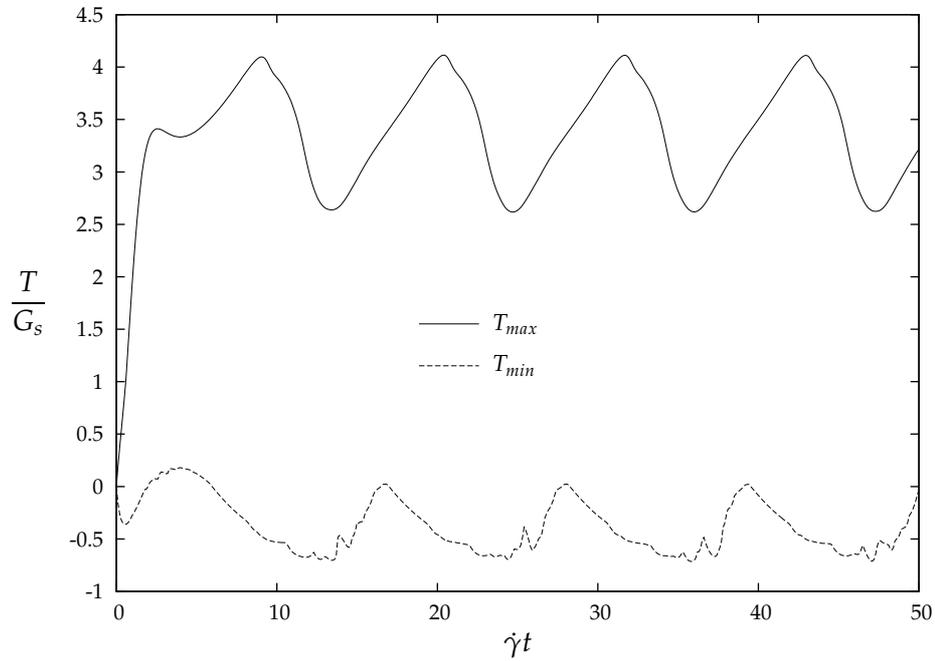


Figure 3.9 – Maximum et minimum des tensions durant le régime de swinging. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 1.2$.

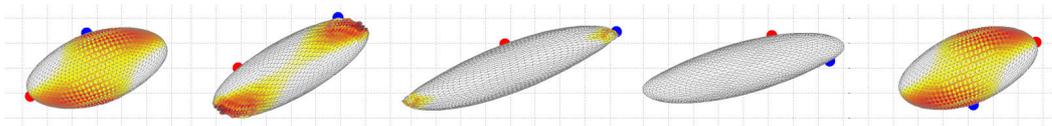


Figure 3.10 – Capsule dans le plan de cisaillement aux instants $\dot{\gamma}t = 21, 23, 25.5, 28, 32.5$. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 1.2$. Même légende que la figure 3.5.

négatives et des plis apparaissent. Si l'on compare au cas du tumbling, on note que les valeurs de T_{max} sont bien plus élevées (car Ca est plus grand), tandis que les valeurs de T_{min} sont du même ordre de grandeur.

3.3 Transition

Le passage d'un régime à l'autre est un phénomène complexe, qui s'accompagne de fortes oscillations des angles et du paramètre de Taylor, comme on va maintenant le voir. On rappelle que, pour la capsule étudiée, $Ca^* = 0.29$, et on se place à un nombre capillaire légèrement supérieur, à savoir $Ca = 0.4$.

L'allure de la capsule dans le plan de cisaillement est donnée à la figure 3.11. On remarque en particulier une phase ($\dot{\gamma}t = 26.5$ sur la figure 3.11) lors de laquelle la longueur des deux axes devient très proche : D_{12} devient donc très faible. Comme montré sur la figure 3.13, l'amplitude $[D_{12}]$ est plus élevée que dans les autres cas étudiés précédemment (fig. 3.3 et 3.8). Les instants où D_{12} devient très faible correspondent à une variation brusque de l'inclinaison β , comme montré figure 3.12. On note aussi que l'amplitude $[\beta]$ est nettement supérieure à celle observée à plus grand nombre capillaire (fig 3.7). Ainsi, la transition se caractérise par des oscillations brusques et de forte amplitude des angles et du paramètre de Taylor.

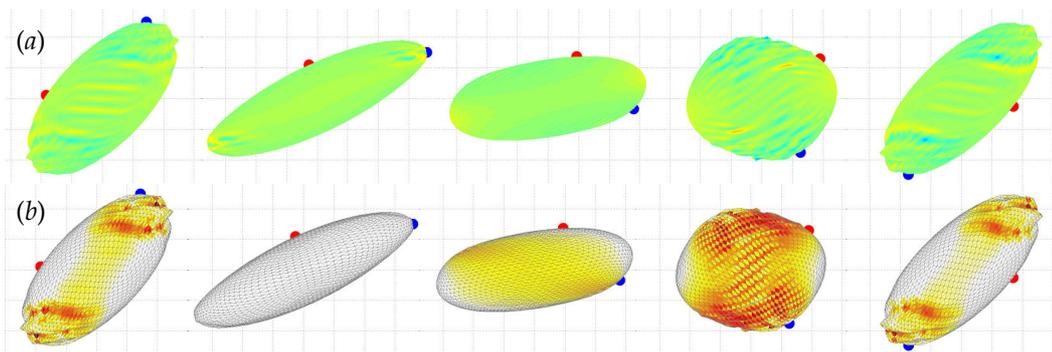


Figure 3.11 – Capsule dans le plan de cisaillement aux instants $\dot{\gamma}t = 19, 21, 24, 26.5, 28.5$. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.4$. (a) Chargement normal. (b) Tensions négatives. Même légende que les figures 3.1 et 3.5.

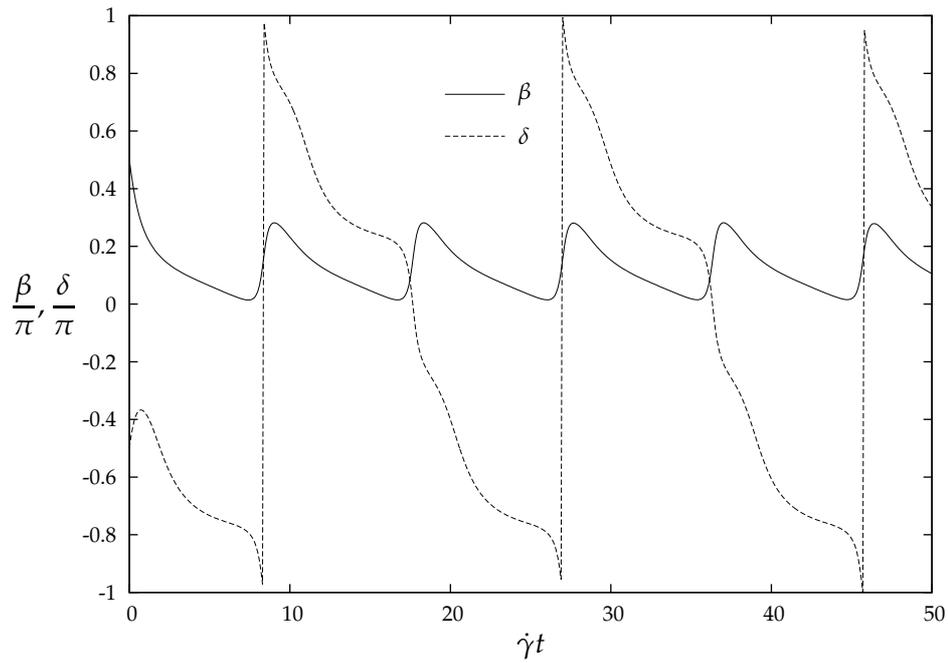


Figure 3.12 – Angles β et δ durant le régime de swinging, proche de la transition. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.4$.

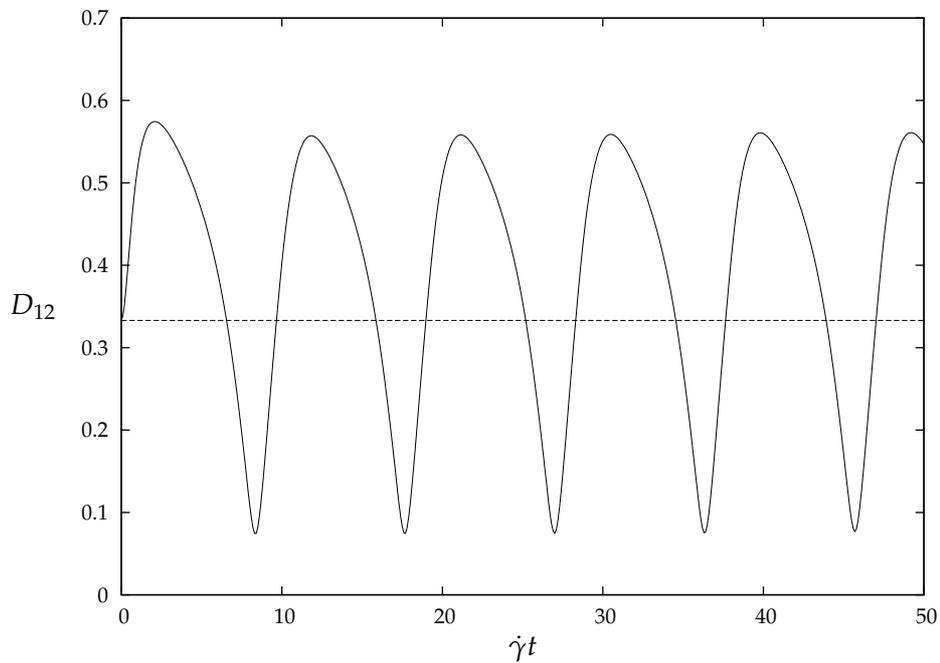


Figure 3.13 – Paramètre de Taylor D_{12} durant le régime de swinging, proche de la transition. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 0.4$.

4 Influence de Ca et de la loi de comportement

On a décrit les deux régimes et vu qu'ils pouvaient être distingués à l'aide des angles β et δ . On se propose maintenant de conduire une étude systématique en fonction du nombre capillaire. On étudie deux lois de comportement, déjà utilisées pour la sphère et ayant le même comportement en petite déformation : la loi néo-hookienne et la loi de Skalak avec $C = 1$. On travaillera avec deux rapports d'aspect : $a/b = 0.5$ et $a/b = 2$, ce qui permettra de voir les différences de comportement entre sphéroïdes aplatis et allongés. Toutefois, on ne conduira pas ici d'étude systématique de l'influence du rapport d'aspect.

4.1 Détermination de Ca^*

La transition entre les deux régimes est caractérisée par un passage d'une situation où l'angle d'inclinaison β fait un tour complet à une situation où c'est l'angle δ qui le fait. Les amplitudes $[\beta]$ et $[\delta]$ des oscillations de ces deux angles permettent donc de délimiter les régimes, comme montré aux figures 4.1(a) et 4.1(d) : on a $[\beta] = 2\pi$ en tumbling et $[\delta] = 2\pi$ en swinging. Les valeurs de Ca^* déterminées par cette méthode pour les quatre cas considérés sont données dans le tableau 4.1. Pour $a/b = 0.5$, Ca^* est très petit ; travailler à de tels nombres capillaires nécessite d'utiliser des pas de temps très faibles ce qui implique des temps de calcul élevés. On constate pour les deux lois que la capsule est en tumbling à $Ca = 0.02$ et est en swinging à $Ca = 0.03$, sans chercher à déterminer avec plus de précision Ca^* à ce rapport d'aspect. Pour $a/b = 2$, on note que Ca^* dépend faiblement de la loi considérée (25% d'écart néanmoins) ; ceci s'explique par le fait que Ca^* correspond ici à un régime de déformations modérées, où la loi NH et la loi Sk avec $C = 1$ ont un comportement proche.

4.2 Évolutions des caractéristiques du mouvement

L'évolution des caractéristiques du mouvement en fonction du nombre capillaire est donnée dans les figures 4.1, 4.2 et 4.3 pour les deux lois et les deux rapports d'aspects considérés.

On note tout d'abord que l'on retrouve en régime de swinging des comportements similaires à ceux observés pour les capsules sphériques : quand Ca aug-

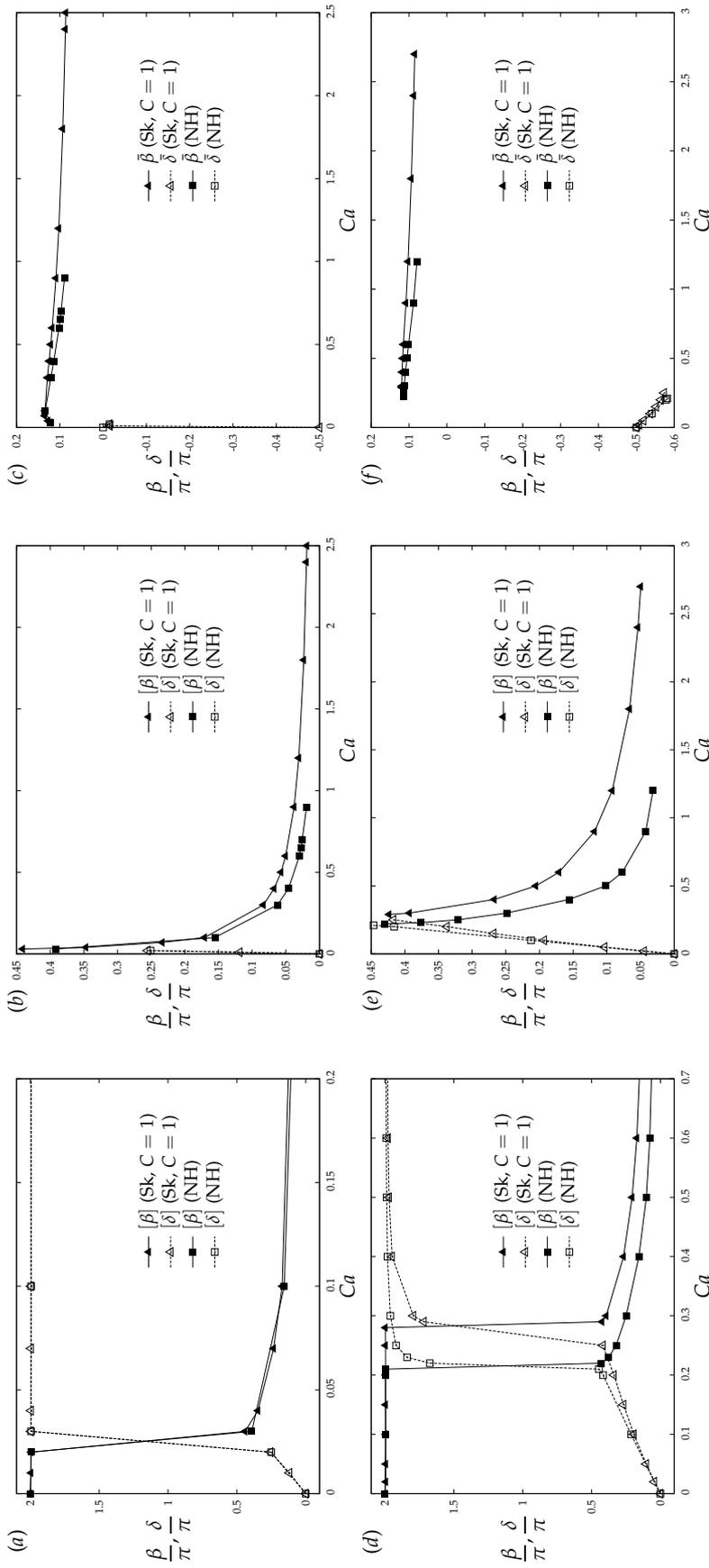


Figure 4.1 – Oscillations de β et δ . (a, d) Amplitude crête à crête au voisinage de Ca^* . (b, e) Amplitude crête à crête quand l'angle ne fait pas un tour complet. (c, f) Valeur moyenne. (a, b, c) Sphéroïde aplati, $a/b = 0.5$. (d, e, f) Sphéroïde allongé, $a/b = 2$.

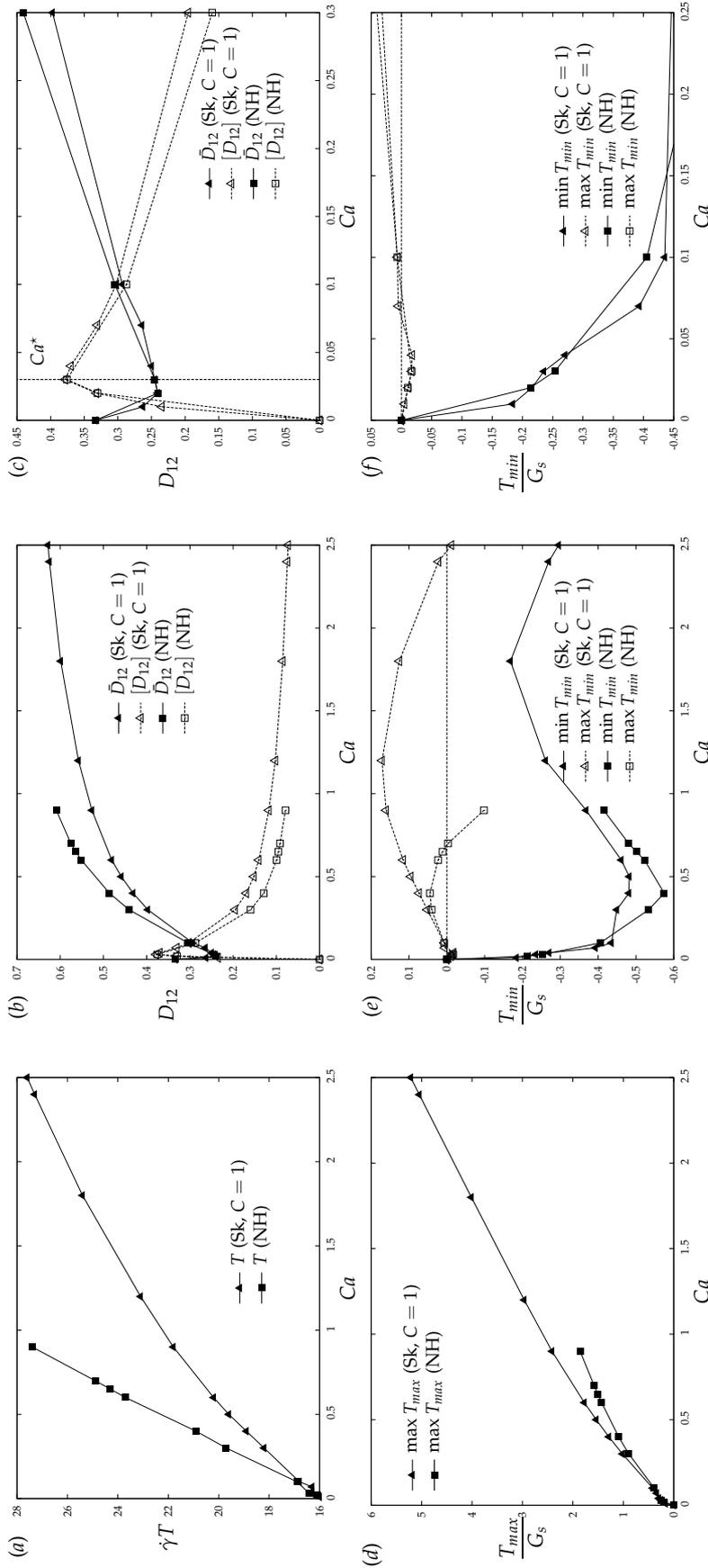


Figure 4.2 – Évolutions de diverses caractéristiques du mouvement en fonction de Ca pour des sphéroïdes aplatis ($a/b = 0.5$), pour les lois NH et Sk ($C = 1$). (a) Période du mouvement. (b) Amplitude et valeur moyenne des oscillations du paramètre de Taylor ; (c) détail au voisinage de Ca^* . (d) Maximum temporel du maximum des tensions. (e) Extrema temporels du minimum des tensions ; (f) détail au voisinage de Ca^* .

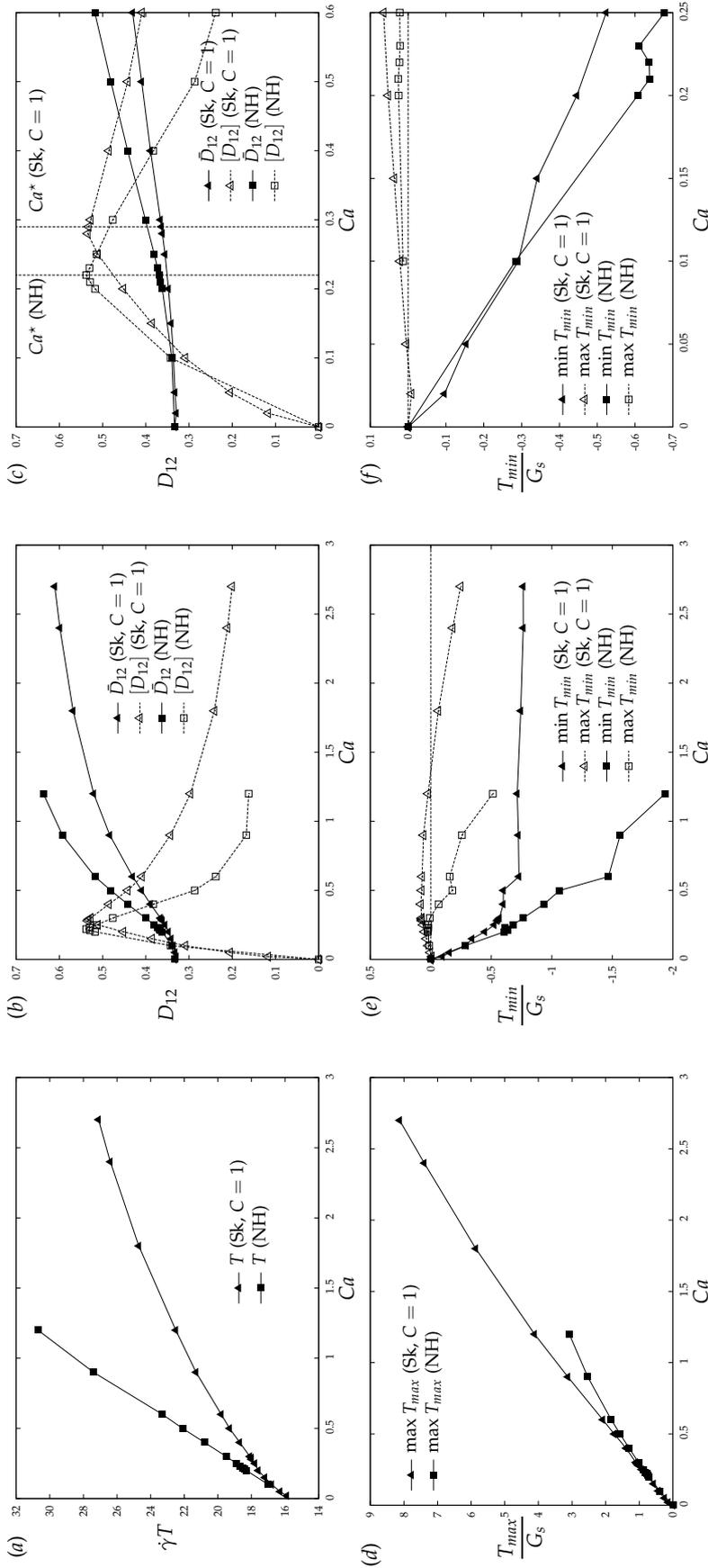


Figure 4.3 – Évolutions de diverses caractéristiques du mouvement en fonction de Ca pour des sphéroïdes allongés ($a/b = 2$), pour les lois NH et Sk ($C = 1$). (a) Période du mouvement. (b) Amplitude et valeur moyenne des oscillations du paramètre de Taylor; (c) détail au voisinage de Ca^* . (d) Maximum temporel du maximum des tensions. (e) Extrema temporels du minimum des tensions; (f) détail au voisinage de Ca_L .

	$a/b = 0.5$	$a/b = 1$	$a/b = 2$
NH	$Ca^* \approx 0.03$	*	$Ca^* = 0.22$
	$0.03 < Ca_L < 0.10$	$Ca_L = 0.45$	$0.02 < Ca_L < 0.05$
	$Ca_H = 0.70$	$Ca_H = 0.63$	$Ca_H = 0.32$
Sk, $C = 1$	$Ca^* \approx 0.03$	*	$Ca^* = 0.29$
	$0.04 < Ca_L < 0.07$	$Ca_L = 0.40$	$0.02 < Ca_L < 0.05$
	$Ca_H = 2.5$	$Ca_H = 2.4$	$Ca_H = 1.4$

Tableau 4.1 – Valeurs des nombres capillaires critiques Ca^* , Ca_L et Ca_H pour les cas étudiés, ainsi que, pour rappel, les valeurs pour les capsules sphériques.

mente, la période $\dot{\gamma}T$ et la déformation \bar{D}_{12} augmentent, tandis que l'angle d'inclinaison $\bar{\beta}$ diminue. On remarque que les évolutions du paramètre de Taylor D_{12} permettent de retrouver la transition. En effet, l'amplitude $[D_{12}]$ des oscillations est maximale à la transition. La valeur moyenne \bar{D}_{12} présente un point d'inflexion pour $a/b = 2$, et même une inversion de pente pour $a/b = 0.5$ à la transition.

Comme dans le cas des capsules sphériques, on observe que les lois NH et Sk ($C = 1$) ont le même comportement en petites déformations, puis se différencient quand Ca augmente. Le caractère durcissant de la loi de Skalak est apparent, un nombre capillaire plus élevé étant nécessaire pour atteindre la même période ou la même déformation moyenne qu'avec la loi néo-hookienne. Enfin, il est remarquable que, pour les deux rapports d'aspect considérés, on n'observe pas de différences qualitatives entre le comportement d'un sphéroïde allongé et celui d'un sphéroïde aplati. Même si les résultats sont quantitativement différents, l'allure générale des courbes (angles, période, paramètre de Taylor au delà de Ca^*) est très similaire.

4.3 Étude des tensions

Les tensions maximales⁽¹⁾ et minimales sont tracées aux figures 4.2(d-f) et 4.3(d-f). Il est intéressant de noter que, contrairement au cas des capsules initialement sphériques, T_{min} conserve une valeur négative à un moment du cycle,

1. La valeur de $\max T_{max}$ peut être intéressante pour prévoir la rupture; en revanche, $\min T_{max}$ n'a pas d'intérêt particulier et n'a donc pas été tracée.

quel que soit le nombre capillaire. On a vu de plus à la section 3 que les zones de tensions négatives étaient généralement très étendues. On peut donc s'interroger sur la pertinence d'un modèle de membrane pour traiter de tels cas. On y reviendra à la section 6.

Les valeurs de $\max T_{min}$ sont particulièrement intéressantes. Elles permettent de déterminer si les tensions négatives persistent durant toute la période. On voit qu'il existe une large plage de valeurs où ce n'est pas le cas et où la capsule est en traction en tout point pendant une partie du cycle. Mais on remarque que, pour les grandes valeurs de Ca , $\max T_{min}$ devient négative, c'est-à-dire que l'on a des tensions négatives pendant toute la période. On observe alors le même phénomène que celui connu pour les capsules initialement sphériques quand $Ca > Ca_H$: les pointes de la capsule flambent du fait de la vorticité de l'écoulement. Ce phénomène est illustré figure 4.4. Par analogie avec le cas des capsules sphériques, on choisit de définir pour les capsules ellipsoïdales Ca_H comme le nombre capillaire à partir duquel $\max T_{min} < 0$. Les valeurs de Ca_H pour les cas étudiés ici sont données dans le tableau 4.1.

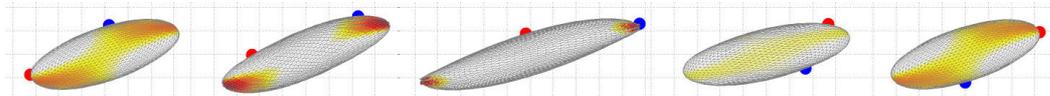


Figure 4.4 – Capsule dans le plan de cisaillement aux instants $\dot{\gamma}t = 25, 27, 30, 36, 38$. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 2$, $Ca = 2.4$. Même légende que la figure 3.5.

On remarque aussi sur les figures 4.2(f) et 4.3(f) que $\max T_{min}$ est négatif à très petit capillaire, avant de redevenir positif à partir d'environ $Ca \approx 0.05$ (pour les deux rapports d'aspect). Il s'agit évidemment du phénomène de plis à l' quateur d j   repéré pour les capsules sphériques quand $Ca < Ca_L$, et l'on peut donc, par analogie, définir pour les capsules ellipsoïdales Ca_L comme la valeur à partir de laquelle $\max T_{min}$ est positif. On remarque que le Ca_L trouvé ici est considérablement plus faible que dans le cas des capsules sphériques (on avait alors $Ca_L \approx 0.4$ pour les deux lois considérées). Ceci est dû au fait que la sphère doit s' tirer dans une direction pour se déformer, tandis qu'une capsule ellipsoïdale a de la surface disponible. Comme pour la détermination de Ca^* quand $a/b = 0.5$, les temps

de calcul à de si faibles valeurs de Ca deviennent rédhibitoires. On ne cherche donc pas à déterminer plus précisément les valeurs de Ca_L , et l'on se contente des intervalles donnés dans le tableau 4.1.

5 Influence du coefficient de Poisson

Les deux lois considérées jusqu'ici ont le même comportement en petite déformation, c'est-à-dire qu'elles correspondent au même coefficient de Poisson surfacique $\nu_s = 0.5$, ou encore au même module de dilatation surfacique $K_s = 3G_s$. Toutefois, un des intérêts de l'étude des capsules ellipsoïdales est qu'elles peuvent constituer un modèle mécanique pour le globule rouge ; or, pour celui-ci, on a $K_s/G_s \sim 6 \times 10^4$. Il peut donc être intéressant d'étudier l'influence d'une variation de K_s/G_s , en faisant varier le paramètre C de la loi de Skalak. On rappelle que :

$$\nu_s = \frac{C}{1+C}, \quad \frac{K_s}{G_s} = 1 + 2C. \quad (5.1)$$

5.1 Évolution des caractéristiques du mouvement

On étudie l'influence du paramètre C sur la déformation de capsules, pour des valeurs allant de $C = 0$ ($\Leftrightarrow \nu_s = 0 \Leftrightarrow K_s/G_s = 1$) à $C = 20$ ($\Leftrightarrow \nu_s = 0.95 \Leftrightarrow K_s/G_s = 41$).⁽²⁾ On considère les deux rapports d'aspects, $a/b = 0.5$ et $a/b = 2$, à un nombre capillaire fixé, $Ca = 1.2$. On verra que tous les cas considérés sont dans le régime de swinging, et on s'intéresse aux résultats en régime établi.

Les résultats sont présentés figure 5.1. Quand C augmente, la capsule est plus rigide : en conséquence, $\bar{\Delta}$, \bar{D}_{12} et T diminuent, tandis que $\bar{\beta}$ augmente. On note que ces valeurs moyennes continuent d'évoluer pour les grandes valeurs de C , et il serait donc hasardeux d'extrapoler leurs valeurs pour une paroi tendant vers l'incompressibilité de surface, c'est-à-dire $\nu_s \rightarrow 1$ (à part évidemment Δ , qui tend alors vers 0 par définition). En particulier, il n'y a pas de raison de penser que le paramètre de Taylor \bar{D}_{12} tende vers sa valeur initiale (0.33 pour les deux rapports d'aspects considérés), car il faut prendre en compte les phénomènes 3D : la conservation de la surface de l'ellipsoïde n'implique pas la conservation de la géométrie

2. Pour les valeurs importantes de C , la stabilité du schéma numérique nécessite de diminuer le pas de temps proportionnellement à $1/C$. Les temps de calcul deviennent donc rédhibitoires pour de plus grandes valeurs de C .

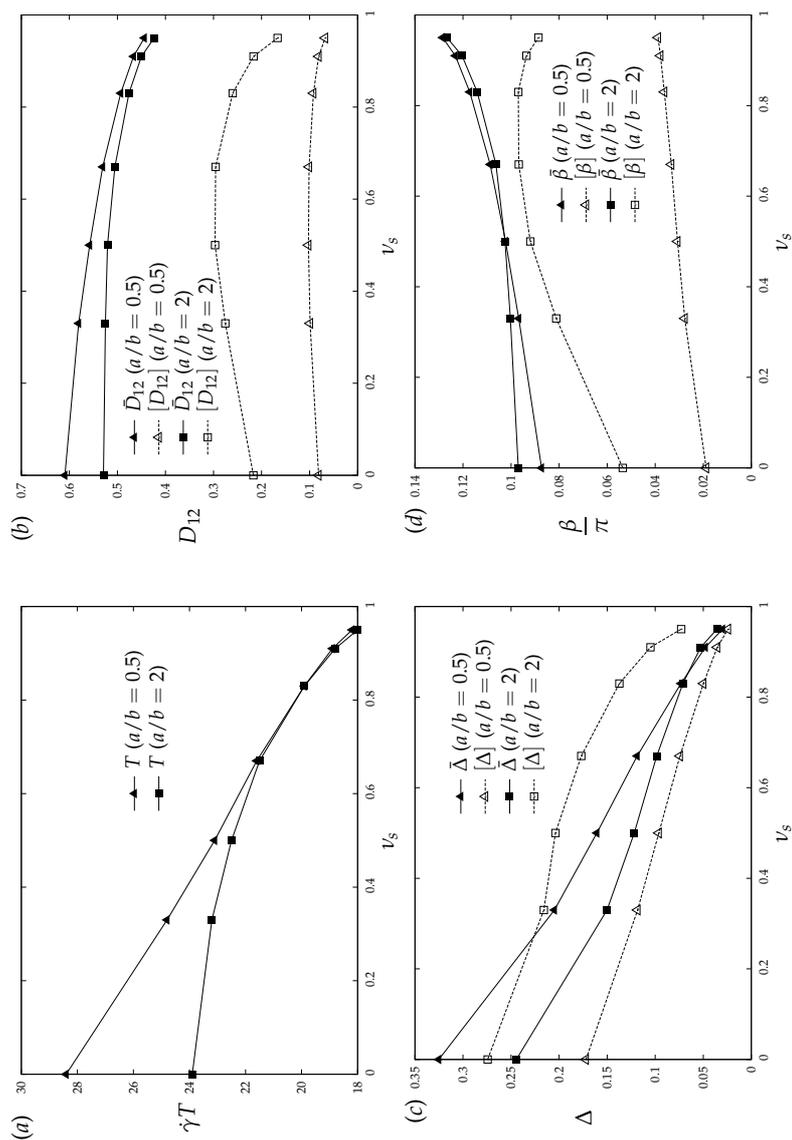


Figure 5.1 – Évolutions de diverses caractéristiques du mouvement en fonction de v_s pour des sphéroïdes aplatis ($a/b = 0.5$) et allongés ($a/b = 2$) dont la membrane suit la loi Sk. (a) Période du mouvement. (b–d) Amplitude et valeur moyenne des oscillations (b) du paramètre de Taylor, (c) de la variation relative de surface, (d) de l’angle d’inclinaison.

du contour de l'ellipse dans le plan de cisaillement.

Si les valeurs moyennes ont un comportement attendu, il n'en est pas de même pour les amplitudes, en particulier $[D_{12}]$ et $[\beta]$. Dans les deux cas étudiés, $[D_{12}]$ a un comportement complexe, passant par un maximum en $\nu_s = 0.5$ ($C = 1$) avant de décroître. On voit là encore combien le comportement de la capsule est un phénomène tridimensionnel et qu'il ne peut se réduire à la déformation dans le plan de cisaillement. L'évolution de $[\beta]$ est un des rares cas pour lesquels on note une différence de comportements entre sphéroïdes aplatis et allongés. Pour les seconds, $[\beta]$ passe par un maximum puis décroît. En revanche, il semble continuer d'augmenter quand ν_s augmente dans le cas du sphéroïde aplati. Dans les deux cas, l'amplitude $[\beta]$ ne tend clairement pas vers 0 quand $\nu_s \rightarrow 1$; ceci explique par exemple que le mouvement de swinging soit parfaitement détectable expérimentalement pour un globule rouge (Abkarian *et al.*, 2007).

5.2 Évolution de Ca^*

Pour le cas d'une capsule de rapport d'aspect $a/b = 2$ dont la membrane obéit à la loi de Skalak, on cherche à déterminer comment Ca^* varie en fonction de ν_s . Les résultats obtenus sont représentés figure 5.2. On remarque immédiatement un phénomène intéressant : à partir de $\nu_s = 0.5$ (c'est-à-dire $C = 1$), Ca^* n'évolue plus⁽³⁾. Il faut bien noter que ce phénomène dépend de la construction du nombre capillaire : on a choisi de le définir à partir de G_s , mais on aurait aussi pu utiliser des définitions faisant intervenir le module de dilatation K_s ou le module d'Young E_s ⁽⁴⁾ :

$$Ca_K = \frac{\mu \dot{\gamma} a_V}{K_s}, \quad \text{ou bien} \quad Ca_E = \frac{\mu \dot{\gamma} a_V}{E_s}. \quad (5.2)$$

On observe alors à la figure 5.2 que l'on ne retrouve pas le même phénomène si l'on adopte ces définitions.

Le phénomène visible à la figure 5.2 est donc le suivant : à partir de $\nu_s = 0.5$, la transition ne dépend que de G_s , et pas du tout de ν_s ou de K_s . Pour comprendre ce résultat, il faut considérer ce qui différencie les deux régimes. Dans le cas du

3. Pour être précis, pour tous les tests effectués avec C allant de 1 à 20, la capsule est en tumbling à $Ca = 0.28$ et en swinging à $Ca = 0.29$.

4. On notera que Ca_E est utilisé régulièrement dans la littérature, depuis Barthès-Biesel (1980) jusqu'à Doddi & Bagchi (2008b).

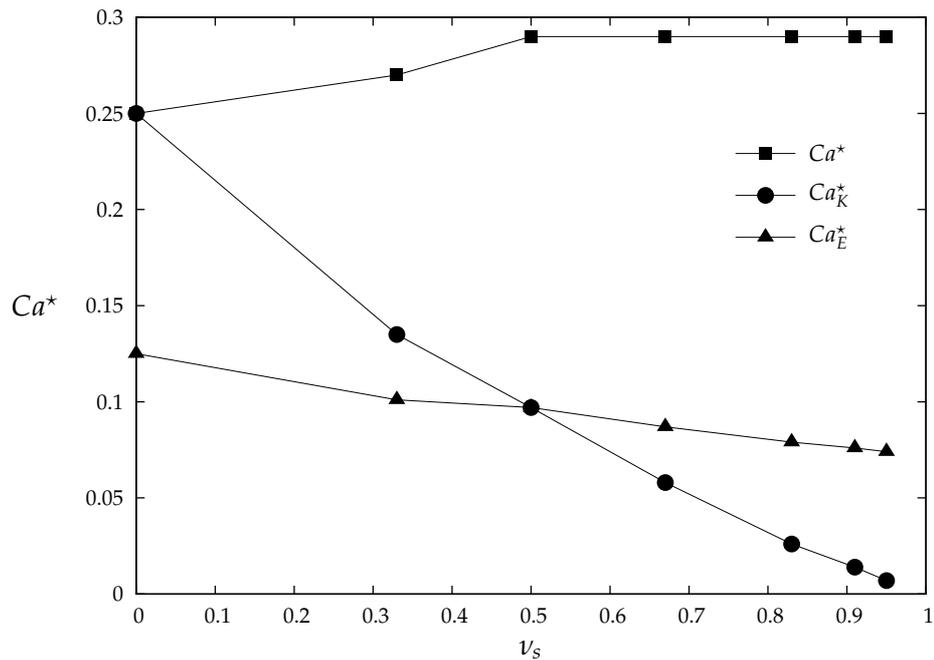


Figure 5.2 – Valeurs du nombre capillaire à la transition tumbling–swinging, en fonction du coefficient de Poisson surfacique, pour un sphéroïde allongé ($a/b = 2$) obéissant à la loi de Skalak avec $C = \nu_s / (1 - \nu_s)$. Les nombres capillaires alternatifs Ca_K et Ca_E sont définis à l'équation (5.2).

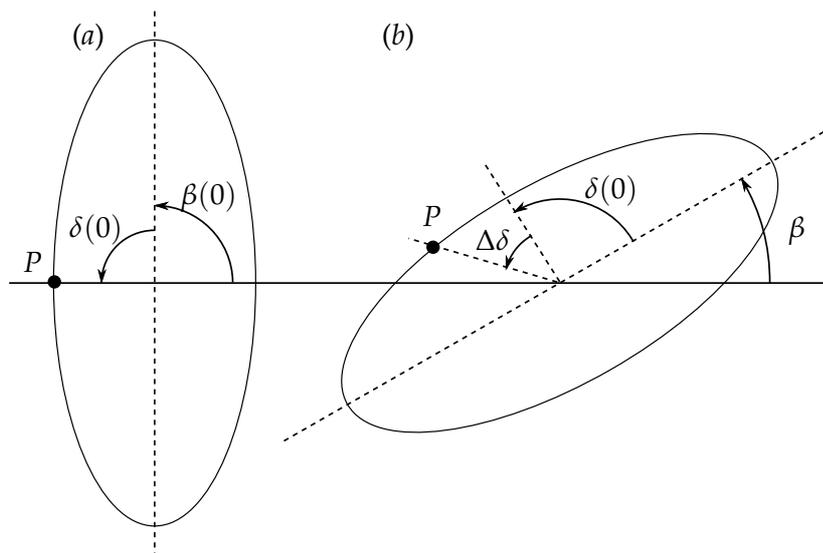


Figure 5.3 – Définition de l'angle $\Delta\delta$ pour le point matériel P . (a) Configuration de référence; (b) configuration actuelle.

tumbling, les points matériels ont une position par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde déformé qui est proche de celle qu'ils avaient par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde de référence. Par exemple, un point matériel situé initialement sur le petit axe demeure proche du petit axe de l'ellipsoïde déformé. En revanche, dans le cas du swinging, le point matériel tourne autour de l'ellipsoïde déformé. Pour quantifier la variation de position relativement aux axes principaux de l'ellipsoïde, on introduit, pour un point matériel dans le plan de cisaillement, la quantité $\Delta\delta = \delta(t) - \delta(0)$, comme représenté figure 5.3. Dans le régime de tumbling, $\Delta\delta$ oscille autour de 0 ; dans le régime de swinging, il fait des tours complets au cours du mouvement de tank treading.

Le changement de régime correspond à une plus grande quantité d'énergie apportée par l'écoulement. On s'intéresse donc maintenant à l'énergie de déformation d'un point matériel en fonction de $\Delta\delta$. Celle-ci est représentée⁽⁵⁾ à la figure 5.4 pour la capsule considérée, avec $C = 1$, pour différentes valeurs du nombre capillaire proches de $Ca^* = 0.29$. Dans le cas du swinging ($\Delta\delta$ non-borné), l'énergie est maximale quand $\Delta\delta = \pm\pi/2$, c'est-à-dire quand le point matériel considéré, initialement sur le petit axe de l'ellipse, passe sur le grand axe. Ainsi, le swinging a un coût énergétique supérieur au tumbling et la transition correspond au franchissement de la *barrière d'énergie* en $\Delta\delta = \pm\pi/2$. On observe sur les courbes en tumbling ($\Delta\delta$ borné) que le point ne parvient pas à franchir cette barrière d'énergie et oscille autour de 0.

On cherche maintenant à étudier l'influence du cisaillement et de la dilatation dans la formation de cette barrière. On rappelle l'expression de l'énergie de déformation dans le cas de la loi Skalak :

$$w_s = \frac{G_s}{4} (I_1^2 + 2I_1 - 2I_2 + CI_2^2) . \quad (5.3)$$

Comme expliqué au chapitre 2, cette énergie est composée de deux termes : $w_G = \frac{G_s}{4} (I_1^2 + 2I_1 - 2I_2)$ qui correspond principalement au cisaillement surfacique, et $w_K = \frac{G_s C}{4} I_2^2$ qui correspond à la dilatation de surface. On donne à la figure 5.5 la décomposition de w_s en ces deux termes pour $Ca = 0.4 > Ca^*$. Il apparaît clairement que w_G est quasiment l'unique responsable de la barrière

5. En pratique, avec notre méthode numérique, w_s est, comme la métrique, discontinue aux nœuds. On donne donc ici une moyenne des valeurs calculées en ce nœud sur chaque élément touchant le nœud.

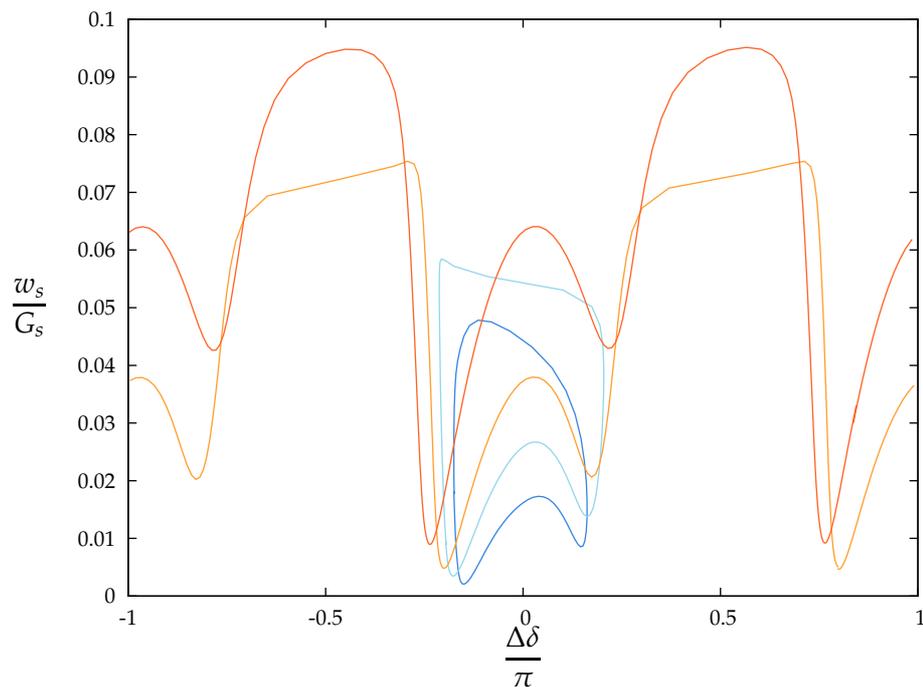


Figure 5.4 – Énergie de déformation d'un point matériel en fonction de son éloignement à sa position initiale sur l'ellipsoïde en régime établi. La membrane suit la loi Sk avec $C = 1$, et $a/b = 2$. Les nombres capillaires considérés sont : $Ca = 0.20$ (bleu), $Ca = 0.25$ (bleu clair), $Ca = 0.30$ (jaune), $Ca = 0.40$ (orange).

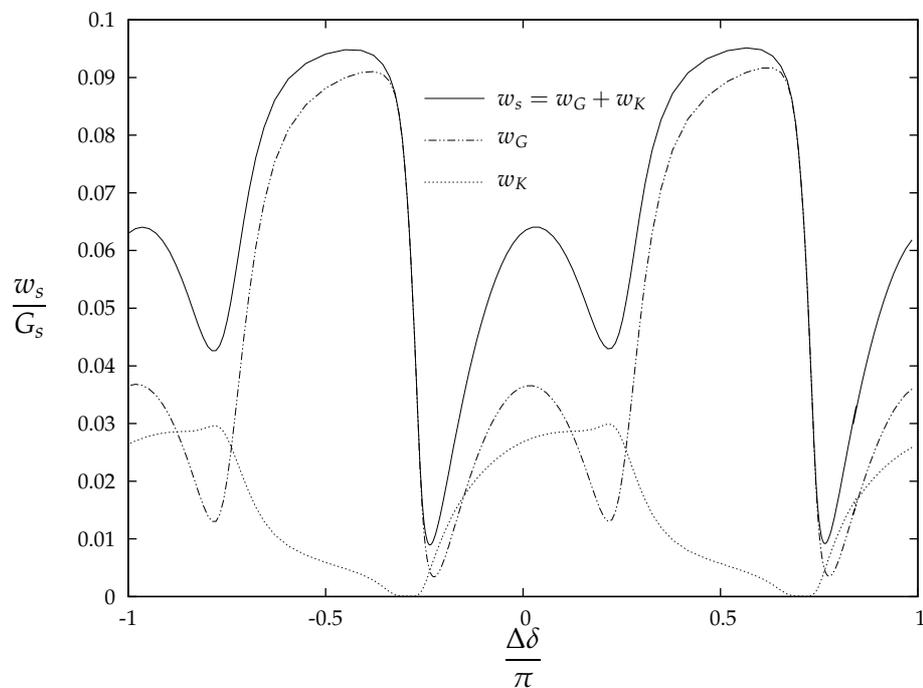


Figure 5.5 – Composantes de l'énergie de déformation pour le cas $Ca = 0.4$.

d'énergie en $\Delta\delta = \pm\pi/2$, puisque w_K est presque nulle en ces points. Cette dernière constatation n'est pas surprenante : si l'on observe la figure 3.11(b) pour $\dot{\gamma}t = 26.5$, il est visible que la membrane de la capsule n'est pas du tout tendue quand $\Delta\delta \approx \pm\pi/2$, et donc que l'énergie de dilatation de surface est alors très faible. On conclut donc que la transition entre tumbling et swinging est déterminée par l'énergie de cisaillement, et donc par G_s , et non par l'énergie de dilatation, c'est-à-dire par K_s ou ν_s ; ceci explique les résultats observés figure 5.2.

On notera que le mécanisme de la transition tumbling/swinging décrit ici correspond qualitativement à celui postulé dans le modèle analytique de Skotheim & Secomb (2007), même si l'hypothèse $[D_{12}] = 0$ utilisée dans ce modèle n'est absolument pas valable à proximité de la transition. En revanche le modèle analytique n'étudiait pas l'influence relative de la résistance au cisaillement et à la dilatation dans le déclenchement de la transition, ce qui a été effectué ici.

6 Discussion

L'étude numérique effectuée ici confirme la robustesse de la méthode numérique présentée au chapitre 3 et présente de nombreux résultats nouveaux sur le sujet encore mal exploré que constituent les capsules non-sphériques. Elle a permis de retrouver les principales caractéristiques du mouvement de telles capsules telles que décrites expérimentalement et numériquement, en particulier l'existence de deux régimes : le tumbling à faibles nombres capillaires, et le swinging pour des valeurs plus élevées. Les cas étudiés ne correspondent que très rarement à ceux traités par les études de Ramanujan & Pozrikidis (1998), Sui *et al.* (2008) et Kessler *et al.* (2008), qui n'ont généralement pas étudié les mêmes rapports d'aspect. Il n'est donc pas possible de faire des comparaisons quantitatives avec celles-ci, sauf dans un cas : pour un sphéroïde aplati de rapport d'aspect $a/b = 0.5$ obéissant à la loi NH, Sui *et al.* trouvent $0.0375 < Ca^* < 0.075$, ce qui est cohérent avec la valeur $Ca^* \approx 0.03$ trouvée ici. Si l'on ne peut pas faire d'autres comparaisons quantitatives, on note que l'on retrouve qualitativement les phénomènes décrits par les études précédentes quant aux évolutions des oscillations des angles et du paramètre de Taylor en fonction du nombre capillaire.

6.1 Limites de l'étude

Le comportement en écoulement des capsules non-sphériques est un sujet très riche, et l'étude effectuée ici ne prétend pas l'épuiser. Kessler *et al.* (2008) avaient principalement cherché à comparer leurs résultats numériques au modèle analytique de Skotheim & Secomb (2007); ils ont donc travaillé à déformations modérées et établi un diagramme de phase déterminant la transition entre les régimes en fonction du rapport des viscosités λ et du nombre capillaire Ca . Ils ne considèrent que la loi de Hooke et des capsules dont la forme initiale diffère peu de sphère ($a/b = 0.9$). On a choisi ici de travailler dans des domaines de plus grandes déformations, avec des capsules initialement très éloignées de la sphère, et d'explorer l'influence de la loi de comportement de la membrane.

Cette étude s'est limitée à deux rapports d'aspects : $a/b = 0.5$ et $a/b = 2$. Une étude explorant systématiquement l'influence de ce paramètre reste donc à conduire. On imagine évidemment que le nombre capillaire critique Ca^* séparant les deux régimes augmente plus la forme initiale de la capsule s'éloigne de la sphère. Mais une étude complète est nécessaire pour préciser ces intuitions.⁽⁶⁾ Toutefois, notons que l'étude menée ici est, à notre connaissance, la seule à étudier des sphéroïdes allongés. On montre qu'ils se comportent qualitativement comme les sphéroïdes aplatis, mais avec des différences significatives sur le plan quantitatif, tant pour la valeur de Ca^* que pour les oscillations des diverses caractéristiques du mouvement. Remarquons en particulier que les deux cas traités ici ont le même paramètre de Taylor initial, mais se comportent quantitativement très différemment. Pourtant, du point de vue d'un modèle 2D du type de ceux de Barber *et al.* (2008), ils seraient identiques; on voit bien là la limite de tels modèles pour l'étude d'objets comme les capsules.

On n'a pas cherché à comparer les résultats obtenus au modèle analytique de Skotheim & Secomb (2007). Ce modèle prend en effet en compte λ mais pas la loi de comportement, et ne se prête donc pas bien à l'étude conduite ici. Kessler *et al.* (2008) ont mené une telle comparaison et ont montré les limites du modèle

6. Il est important de noter qu'une étude systématique de l'influence du rapport d'aspect nécessite de réfléchir à la définition du nombre capillaire. En effet, l'échelle de longueur a_V , construite à partir du volume, varie avec le rapport d'aspect. Il peut donc être nécessaire, dans l'optique d'une telle étude, de construire un nombre capillaire dont la définition ne varie pas avec a/b .

analytique. En particulier, ils notent que ce modèle suppose que la forme de l'ellipsoïde reste fixe au cours du mouvement, c'est-à-dire en particulier que $[D_{12}] = 0$. Comme mentionné par Kessler *et al.*, cette hypothèse n'est absolument pas respectée à proximité de Ca^* . On voit avec les résultats présentés ici que l'hypothèse $[D_{12}] = 0$ n'est jamais vraiment valable, même si l'on s'éloigne de la transition. On pourrait penser que l'hypothèse de forme constante aurait une meilleure validité pour des capsules à membrane incompressible, c'est-à-dire $\nu_s \rightarrow 1$, ce que ne pouvaient vérifier Kessler *et al.* qui travaillaient à $\nu_s = 0.5$. Les résultats obtenus ici pour de plus grandes valeurs de ν_s montrent que les réserves de Kessler *et al.* restent valables et que D_{12} continue à osciller. Par exemple, pour $a/b = 2$ et $\nu_s = 0.95$ (loi Sk, $C = 20$), on a $[D_{12}] = 0.41$ quand $Ca = Ca^*$; on a aussi $[D_{12}] = 0.17$ pour $Ca = 1.2$, soit plus d'un tiers de la valeur moyenne $\bar{D}_{12} = 0.42$. Cette étude montre donc les carences des hypothèses du modèle analytique, même pour les grandes valeurs de ν_s .

6.2 Importance des propriétés mécaniques de la membrane

Cette étude est la première à considérer l'effet des propriétés mécaniques de la membrane d'une capsule ellipsoïdale en écoulement. Elle montre que celles-ci ont une influence considérable sur le comportement de la capsule, y compris pour des nombres capillaires relativement faibles. Comme dans le cas d'une capsule initialement sphérique, on note que la loi néo-hookienne et la loi de Skalak avec $C = 1$ ont le même comportement en petites déformations mais conduisent rapidement à des différences quand Ca augmente. On remarque une fois encore le caractère *durcissant* de la loi Sk, qui nécessite plus d'énergie pour conduire à une déformation équivalente à celle obtenue avec la loi NH. De même, les oscillations des angles et du paramètre de Taylor faiblissent plus rapidement quand on s'éloigne de Ca^* avec la loi NH qu'avec la loi Sk.

Dans le cas de la loi Sk, on a aussi effectué une étude de l'influence du coefficient de Poisson ν_s . Ce paramètre est important, car il est très différent selon que l'on considère une capsule artificielle avec une membrane protéique (on trouve généralement $\nu_s \approx 0.5$) ou un globule rouge ($\nu_s \rightarrow 1$). Alors que les grandes valeurs de ν_s n'ont pas beaucoup d'intérêt pour les capsules sphériques (qui doivent augmenter leur surface pour se déformer), les capsules ellipsoïdales peuvent se

déformer à surface constante. La loi de comportement régissant le mode de cisaillement joue alors un rôle important. Les simulations conduites au cours de cette étude montrent que, si l'on fixe a/b , la loi et G_s , le coefficient de Poisson a une influence sur la plupart des caractéristiques du mouvement, mais pas de manière homogène. Ainsi, ν_s influe fortement sur T et D_{12} , faiblement sur β , et, pour $\nu_s \geq 0.5$, pas du tout sur Ca^* . Ce phénomène peut être intéressant dans la perspective de la détermination des propriétés de capsules par analyse inverse : la détermination de Ca^* permet de trouver G_s, ν_s pouvant ensuite être obtenu en examinant d'autres valeurs de Ca .

6.3 Tensions négatives, rigidité de flexion

On remarque sur les cas testés l'importance des tensions négatives. S'il existe pour les capsules sphériques une gamme de nombres capillaires au sein de laquelle les tensions négatives disparaissent à l'état stationnaire, ce n'est pas le cas pour les capsules ellipsoïdales, pour lesquelles on a toujours $\min T_{min} < 0$. Il existe une gamme de nombres capillaires, $Ca_L < Ca < Ca_H$, pour laquelle les tensions négatives ne persistent pas pendant la période complète. Les valeurs de Ca_L sont très faibles et ne sont donc sans doute pas intéressantes en pratique ; en revanche Ca_H joue un rôle important, car la capsule commence alors à flamber aux pointes au delà de cette valeur. Il convient donc de se demander quelle importance a la rigidité de flexion de la capsule et si le modèle de membrane employé ici a un sens. On notera que Kessler *et al.* (2008) incorporent une légère rigidité de flexion dans leur modèle, avec une énergie de flexion proportionnelle au carré de la courbure moyenne, mais ils ne font aucune étude quant à l'influence de celle-ci sur leurs résultats.

Comme dans le cas de la capsule sphérique, la méthode numérique employée ici introduit une faible rigidité de flexion non physique, qui stabilise les calculs. On sait que, dans les cas où des plis apparaissent, les déformations locales calculées par cette méthode (longueur d'onde des plis...) sont fausses, mais on peut supposer qu'elles n'ont pas de grande influence sur le comportement global de la capsule. Ainsi, pour $Ca < Ca_H$, on s'attend à ce que les résultats obtenus avec notre méthode numérique donnent pour les caractéristiques globales du mouvement (angles, D_{12}) des résultats très proches de ceux que l'on obtiendrait avec une

méthode incorporant une rigidité de flexion physique mais modérée. La transition tumbling–swinging étant, comme on l’a montré précédemment, pilotée par le cisaillement de surface, on peut aussi supposer que Ca^* serait peu modifié. Enfin, un modèle de membrane est parfaitement suffisant pour déterminer les zones où apparaissent des tensions négatives, et l’on trouverait donc les mêmes valeurs de Ca_L et Ca_H . Ainsi, pour $Ca < Ca_H$, on peut considérer que le modèle de membrane employé ici fournit une *très bonne approximation* du comportement d’une capsule ayant une résistance à la flexion faible devant la résistance au cisaillement de surface ; un modèle plus complet aurait principalement pour effet de régulariser et de préciser les plis dans les zones de compression. En revanche, si l’on s’intéresse à des capsules pour lesquelles la résistance à la flexion est comparable à la résistance au cisaillement, un modèle de coque complet est indispensable.

Le modèle de membrane employé ici est par contre beaucoup moins satisfaisant au delà de Ca_H . La capsule commence alors à flamber aux pointes et la rigidité de flexion en vient à déterminer sa forme globale. Pour mettre en valeur ce phénomène, on peut s’intéresser à une capsule plus élancée, avec $a/b = 4$. On trouve alors que ce phénomène apparaît pour des nombres capillaires modérés, à partir de $Ca_H \approx 0.3$ ⁽⁷⁾. On montre figure 6.1 le comportement d’une telle capsule pour $Ca = 0.9 > Ca_H$. On voit que le phénomène de flambage devient majeur, et que l’on ne peut même plus définir D_{12} ou les angles sur de tels profils. Ainsi, au delà de Ca_H , la rigidité de flexion de la capsule devient cruciale pour déterminer le comportement de celle-ci.

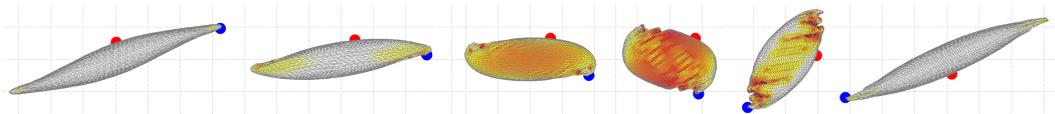


Figure 6.1 – Capsule dans le plan de cisaillement aux instants $\dot{\gamma}t = 18, 22, 26, 28, 30, 32$. La membrane suit la loi Sk ($C = 1$), $a/b = 4$, $Ca = 0.9$. Même légende que la figure 3.5.

Le comportement de capsules ellipsoïdales en écoulement est donc un problème intéressant et complexe, qui mérite d’être exploré plus avant. En particulier, il faut considérer plusieurs effets distincts et complémentaires pour complètement

7. On comprend sans mal que Ca_H diminue quand le paramètre de Taylor initial augmente.

cerner le comportement de la capsule : la résistance de la paroi de la capsule au cisaillement, à la dilatation de surface et à la flexion ; le rapport des viscosités ; et la forme de la capsule.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

1 Bilan général

Les travaux effectués durant cette thèse ont été marqués par la nécessité de remplacer le code numérique utilisé jusqu'alors au sein de l'équipe. Celui-ci reposait sur une discrétisation de la paroi de la capsule à l'aide d'une base de fonctions B-spines cubiques. Il présentait l'avantage d'être très précis, mais devenait instable en présence de compression plane, sans qu'il soit possible d'étendre le code pour prendre en compte une rigidité de flexion.

Pour résoudre le problème, on a mis en place une méthode numérique différente, jusqu'ici inédite pour le traitement des capsules, couplant des intégrales de frontière et des éléments finis de membrane. La méthode utilisée pour résoudre le problème solide est peu classique : d'une part, elle décrit des grandes déformations, avec diverses lois de comportement non-linéaires, et, d'autre part, elle fonctionne avec des déplacements imposés, et non des déplacements inconnus comme c'est généralement le cas avec les éléments finis. On a montré que cette méthode donnait d'excellents résultats ; elle est aussi précise que la méthode par B-splines quand la membrane est tendue, mais présente l'avantage d'être considérablement plus stable en présence de compression plane. Elle est de plus générale et pourra servir de base à l'ajout d'une rigidité de flexion.

L'introduction de cette nouvelle méthode a permis de parfaire l'étude de la déformation d'une capsule sphérique dans un écoulement infini, en confirmant ou en précisant les valeurs données précédemment pour les nombres capillaires critiques Ca_L et Ca_H . Surtout, elle a permis d'effectuer une étude du comportement d'une capsule ellipsoïdale dans un écoulement infini. Ce sujet est particulièrement inté-

ressant, non seulement pour mieux comprendre la mécanique du globule rouge, mais aussi parce que les capsules artificielles présentent souvent un faible écart à la sphéricité. On observe alors des phénomènes suffisamment prononcés pour être quantifiables expérimentalement, mais dont un modèle de capsule sphérique ne peut rendre compte. Il semble ainsi que le modèle de capsule sphérique soit trop idéalisé pour rendre compte complètement du comportement d'une capsule expérimentale, même lorsqu'elle semble quasi-sphérique. De plus, le développement des techniques microfluidiques permet d'envisager la fabrication de capsules artificielles présentant un fort écart à la sphéricité, ce qui augmente le rapport surface/volume et présente donc de fortes applications pratiques.

L'étude conduite sur les capsules ellipsoïdales est la première étude systématique de tels objets hors du domaine des petites déformations. Elle met en valeur la richesse et la complexité des phénomènes qui apparaissent quand la symétrie de la forme de référence de la capsule est brisée. Deux régimes différents ont pu être distingués et la limite entre eux a pu être établie avec précision pour les cas testés. La détermination de caractéristiques cinématiques (les angles) et dynamiques (les tensions) du mouvement et l'observation de leur évolution ont permis d'étudier l'influence de certains paramètres de l'écoulement tels que le nombre capillaire, la loi de comportement et le coefficient de Poisson. Il serait intéressant de tenter d'imposer l'incompressibilité surfacique, comme cela est fait pour les vésicules, pour étudier ce cas limite qui présente un grand intérêt pour la mécanique des cellules.

Les travaux menés sur les capsules ellipsoïdales, plus encore que ceux sur les capsules sphériques, ont montré que les phénomènes de compression plane étaient très souvent présents et mettaient en doute la pertinence du modèle de membrane. Il est remarquable que la méthode numérique employée parvienne à rester stable en présence de compression ; néanmoins, le modèle physique qui la sous-tend est alors faux et ne peut donner qu'une solution approchée. On peut considérer que, tant que les zones de compression ne sont pas étendues, l'erreur commise reste locale et n'affecte pas la déformation générale de la capsule.

L'étude sur les capsules ellipsoïdales est intéressante aussi parce qu'elle montre un cas où les modules de cisaillement G_s et de dilatation K_s ne jouent pas un rôle équivalent : la transition entre les régimes de tumbling et de swinging dépend

essentiellement de G_s et non de K_s . De manière générale, l'augmentation de l'un ou de l'autre ont des effets similaires : la capsule est plus rigide, et ainsi la déformation diminue, l'angle d'inclinaison augmente (en cisaillement simple), etc. Il peut ainsi sembler difficile, dans un contexte expérimental ou d'analyse inverse, de séparer les deux effets, et il est donc important de connaître les cas pour lesquels un seul des deux intervient. On peut s'interroger sur l'effet global qu'aurait l'ajout d'une rigidité de flexion dans le cas où la résistance à la flexion serait comparable à la résistance au cisaillement ou à la dilatation. Ceci aurait pour effet de rigidifier encore la capsule, et il sera donc nécessaire de trouver des situations permettant de distinguer les trois rigidités. Une telle étude nécessite auparavant de parvenir à incorporer cette rigidité de flexion dans un modèle de coque en grande déformation.

Dans tous ces travaux, on s'est attaché non seulement à expliquer la physique des phénomènes observés mais aussi à obtenir des résultats ayant une valeur *quantitative*. C'est pourquoi on s'est employé à mettre en place une méthode numérique fiable, qui ne fait pas intervenir de techniques de lissage ou de moyennes reposant sur des coefficients arbitraires. C'est pourquoi aussi on a cherché à mettre en valeur les différences entre les lois de comportement en grande déformation, même si ces différences sont rarement qualitatives⁽¹⁾. C'est pourquoi enfin des contacts sont en cours avec plusieurs équipes extérieures pour envisager des comparaisons entre de nouvelles expériences et les modèles numériques ; sans des confrontations régulières et quantitatives avec l'expérience, les modèles numériques n'ont que peu de valeur scientifique.

2 Perspectives

Les perspectives des travaux effectués lors de cette thèse sont nombreuses, la robustesse et la flexibilité de la méthode numérique développée encourageant à enrichir le modèle. On se propose dans cette section de présenter deux extensions de ces travaux actuellement en cours de mise en œuvre : l'étude du comportement d'une capsule dans un écoulement confiné et l'incorporation d'une rigidité de flexion par couplage avec un autre code solide.

1. À l'exception notable du cas de l'extension infinie dans l'écoulement hyperbolique plan.

Avant cela, on peut envisager d'autres sujets d'étude qui pourraient être examinés à l'avenir. Une grande priorité semble être la possibilité de prendre en compte des viscosités différentes pour les fluides interne et externe. Avec la méthode des intégrales de frontière, cette hypothèse alourdit les équations, la vitesse des points de la paroi de la capsule devenant la solution d'un système linéaire. On peut néanmoins supposer qu'une méthode itérative devrait permettre de résoudre celui-ci dans un temps raisonnable. Il ne semble en tout cas pas pertinent d'abandonner la méthode des intégrales de frontière, qui a montré sa grande précision et son adaptation face aux grands déplacements des domaines fluides. Elle est limitée au cas des écoulements de Stokes, mais la richesse des applications vérifiant cette hypothèse semble suffisante pour ne pas nécessiter de changer cette méthode dans l'immédiat.

Parmi les autres perspectives à envisager en priorité se trouve l'étude des interactions entre capsules. Même s'il reste encore des phénomènes à explorer sur le cas d'une capsule isolée, on peut penser que la mécanique d'une capsule commence à être suffisamment maîtrisée pour pouvoir traiter les interactions de manière fiable. Lac *et al.* (2007) ainsi que Doddi & Bagchi (2008a) ont étudié l'interaction de deux capsules en écoulement de cisaillement simple, mais il reste encore beaucoup à explorer.

2.1 Capsule en écoulement confiné

Les techniques microfluidiques offrent de nombreuses perspectives pour la synthèse de capsules et leur analyse mécanique. Le passage de capsules dans des canaux dont la section est de taille proche de la leur est une technique utilisée pour la caractérisation des propriétés mécaniques de capsules par analyse inverse (Lefebvre *et al.*, 2008). Toutefois, les techniques de stéréolithographie, couramment utilisées pour fabriquer des canaux microfluidiques, leur confèrent une section rectangulaire et non circulaire. Il peut donc être intéressant d'étudier le mouvement et la déformation d'une capsule dans un tel canal. Ceci ne peut être effectué avec un modèle axisymétrique. On a donc étendu le modèle numérique 3D développé au cours de cette thèse pour prendre en compte des parois extérieures. On choisit d'étudier en premier lieu le cas d'une capsule sphérique dans un canal cylindrique, afin de valider le nouveau code à partir des résultats du code

axisymétrique utilisé au sein de l'équipe (Diaz & Barthès-Biesel, 2002; Lefebvre & Barthès-Biesel, 2007). On présente ici brièvement la méthode employée, avant de montrer quelques résultats préliminaires mais encourageants.

On s'appuie sur les équations développées à la section 2.5 du chapitre 2, dans le cas d'un canal infini de section constante, avec le rapport des viscosités $\lambda = 1$. Le problème est donc défini par les équations (2.22)–(2.24) du chapitre 2. On rappelle ces équations, où S , S_w , S_1 et S_2 sont respectivement la paroi de la capsule, la paroi du canal, l'entrée et la sortie du canal. On a fait l'hypothèse que S_1 et S_2 étaient suffisamment éloignées de la capsules pour y retrouver l'écoulement non-perturbé. Les équations prennent alors une forme simple, faisant intervenir deux inconnues intermédiaires (définies comme des perturbations par rapport à la situation sans capsule) : la force pariétale $\underline{\Delta f_w}$ et la perte de charge Δp_2 .

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S, \quad \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^{np} - \frac{1}{8\pi\mu} \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ - \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_w} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\Delta f_w}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{S_2} \Delta p_2(\underline{y}) \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S_w, \quad - \int_{S_2} \Delta p_2(\underline{y}) \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ + \int_{S_w} \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\Delta f_w}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} = - \int_S \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in S_2, \quad - \int_{S_2} \Delta p_2(\underline{y}) \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} \\ + \int_{S_w} \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{\Delta f_w}(\underline{y}) dS_{\underline{y}} = - \int_S \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{J}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n}(\underline{y}) dS_{\underline{y}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

On se place dans un canal cylindrique de rayon R ; l'écoulement non perturbé a donc pour expression en coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) :

$$\underline{v}^{np} = 2V_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \underline{e}_3, \quad (2.4)$$

où V_m est la vitesse moyenne de l'écoulement non perturbé.

On suppose le chargement sur la paroi de la capsule, $[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = \underline{q}$, connu, obtenu par la résolution du problème solide comme dans le cas de l'écoulement infini. Pour obtenir la vitesse des points de la paroi de la capsule, il faut d'abord calculer la perte de charge Δp_2 et la force pariétale $\underline{\Delta f_w}$. On choisit de discrétiser la surface

S_w du canal et les faces S_1 et S_2 d'entrée et de sortie avec des éléments triangulaires P_1 . Les termes des équations (2.2)–(2.3) dépendent linéairement de $\underline{\Delta f_w}$ et Δp_2 ; ces équations peuvent donc être écrites en considérant comme points \underline{x} les positions des nœuds de S_w et S_2 et discrétisées sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} J_{ww} & J_{w2} \\ J_{2w} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta f_w \\ \Delta p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{wc} \\ Q_{2c} \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Dans cette équation $\{\Delta f_w\}$ et $\{\Delta p_2\}$ désignent les valeurs nodales de, respectivement, $\underline{\Delta f_w}$ et Δp_2 (cf. chap. 3, §2.3); les $[J_{ij}]$ sont des matrices correspondant aux intégrales des membres de gauche des équations (2.2) et (2.3), les indices indiquant les surfaces auxquelles appartiennent les points \underline{x} et \underline{y} dans les intégrales; les $\{Q_{ij}\}$ correspondent aux membres de droite et dépendent du chargement \underline{q} sur la paroi de la capsule ainsi que de la position de celle-ci. On note que, dans ce système linéaire, la matrice ne fait intervenir que les positions de S_2 et S_w , qui sont fixes. Elle peut donc être calculée et inversée une fois au début du calcul plutôt qu'à chaque itération.

La méthode adoptée est donc la suivante. Connaissant \underline{q} par résolution du problème solide, on calcule le membre de droite de l'équation (2.5), puis on résout cette équation à l'aide de la matrice précédemment inversée. On obtient ainsi les valeurs de $\underline{\Delta f_w}$ et Δp_2 . La vitesse des points de la paroi de la capsule est alors donnée explicitement par l'équation (2.1).

Pour tester la méthode, on considère un canal cylindrique de rayon R et de longueur $20R$, orienté selon l'axe \underline{e}_3 et s'étendant de $x_3 = -10R$ à $x_3 = +10R$. On maille la paroi du canal et la face de sortie avec des éléments triangulaires P_1 ; on a 2880 éléments sur S_w et 50 éléments sur S_2 . Le maillage de S_w est raffiné entre $x_3 = -2R$ et $x_3 = +2R$ (taille de maille $\approx 0.1R$) et plus grossier ailleurs (taille de maille $\approx 0.5R$). À l'instant initial, une capsule sphérique (maillée avec $N_E = 1280$ éléments P_2), de rayon $a_V = 0.8R$ et dont la membrane obéit à la loi de Skalak avec $C = 1$, est placée dans le canal, centrée sur l'origine. À chaque itération, on résout les problèmes solide et fluide et l'on calcule la nouvelle position de la capsule. Après chaque déplacement, on calcule la position du centre de masse de la capsule et, le canal étant supposé infini, on translate la capsule de sorte à ramener son centre de masse en $x_3 = 0$. Ainsi, la capsule reste toujours éloignée des faces d'entrée et de sortie S_1 et S_2 et se trouve toujours dans la zone où S_w est

maillée finement.

On présente à la figure 2.1 la comparaison entre l'allure de la capsule à l'état stationnaire obtenu par cette méthode et le profil calculé par le code axisymétrique, dans un régime de grandes déformations. Notons que, suivant la littérature relative aux capsules en canaux, on utilise ici la rayon R du canal plutôt que celui a_V de la capsule comme échelle de longueur du problème, de même que l'on utilise R/V_m comme échelle de temps. Le nombre capillaire est donc défini comme :

$$Ca = \frac{\mu V_m}{G_s}. \quad (2.6)$$

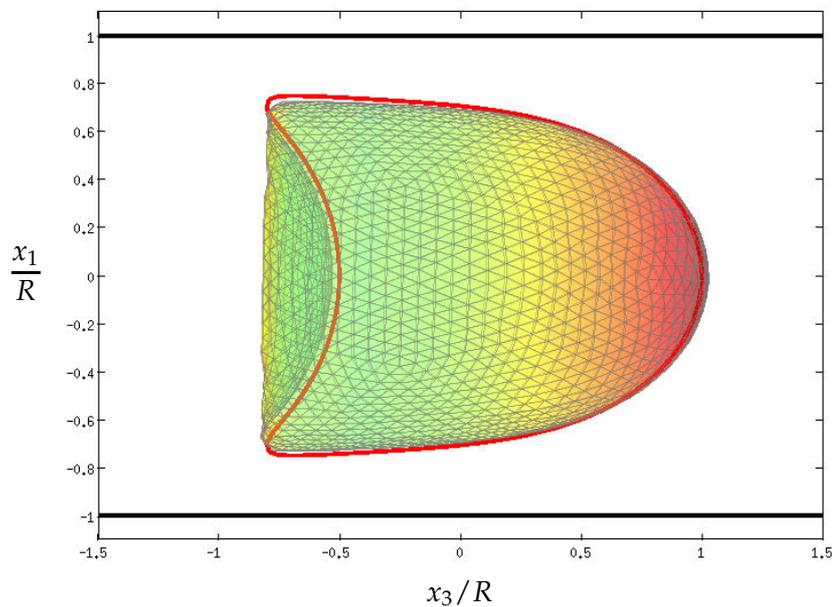


Figure 2.1 – Capsule sphérique de rayon $a_V = 0.8R$ dans un canal cylindrique de rayon R , pour $Ca = 0.3$. Les couleurs correspondent à la composante normale du chargement, tandis que la ligne rouge correspond au profil obtenu avec le code axisymétrique.

Les résultats obtenus montrent une bonne correspondance entre le code axisymétrique et la nouvelle méthode 3D. Des tests supplémentaires sont néanmoins nécessaires pour pleinement valider la méthode ; en particulier, il faudra étudier la convergence des résultats par rapport à la longueur et au maillage du canal. Il faudra aussi étudier le cas de capsules de rapport de taille $a_V/R > 1$. Il n'est pas possible de placer de telles capsules à l'origine dans leur état de référence,

car elles dépasseraient des bords du canal. Pour résoudre ce problème, Diaz & Barthès-Biesel (2002) modélisent le processus d'entrée de la capsule dans le canal à travers un convergent. Cette opération a un coût de calcul élevé. On envisage plutôt d'utiliser comme condition initiale une capsule pré-déformée, étirée suffisamment dans la direction e_3 pour ne pas dépasser – la forme de référence restant la sphère. Cette technique permettrait d'économiser un temps de calcul considérable, mais demande à être validée minutieusement.

Une fois la nouvelle méthode numérique validée, de nombreuses études pourront être conduites : comportement d'une capsule dans un canal de section carrée ou rectangulaire ; étude de la migration d'une capsule placée hors de l'axe du canal ; comportement d'une capsule non-sphérique – les expériences sur les globules rouges montrent en effet l'existence de phénomènes plus riches que dans le cas des capsules sphériques (déstabilisation de la forme axisymétrique). Il pourra aussi être intéressant de généraliser la méthode pour étudier des canaux de section non constante : constriction, etc.

2.2 Couplage avec Modulf, introduction d'une rigidité de flexion

L'incorporation d'une rigidité de flexion à notre méthode numérique est une opération complexe. Divers points délicats doivent être traités, à commencer par la formulation du problème. Traditionnellement, les éléments finis de coque font intervenir deux inconnues cinématiques : le déplacement \underline{U} de la surface moyenne et les rotations $\underline{\theta}$ de lignes matérielles initialement normales à celle-ci (Batoz & Dhatt, 1992; Chapelle & Bathe, 2003). Pour le cas d'une capsule, il faut travailler avec le déplacement \underline{U} imposé par le fluide tandis que le chargement *et les rotations* sont inconnus. Par ailleurs, il faut choisir des éléments de coque évitant les phénomènes de verrouillage numérique. En effet, quand on traite une structure mince avec des éléments finis incorporant plusieurs modes de déformation (élasticité plane, rigidité de flexion, cisaillement transverse), certains types d'éléments peuvent inhiber numériquement un des modes et donc conduire à une rigidification artificielle de la structure (Bathe, 1996). Certaines classes d'éléments finis de coque, comme les MITC, sont adaptées au traitement de ce problème ; toutefois, le choix du meilleur élément à utiliser dépend du problème physique considéré et de l'importance relative des modes de déformation.

Pour avancer dans le traitement de ces problèmes complexes, une collaboration a été mise en place avec D. Chapelle et M. Vidrascu (INRIA Rocquencourt) et avec P. Le Tallec (École Polytechnique). L'objectif est de coupler la méthode numérique développée pendant ces travaux de thèse (qu'on désignera dans cette section par *code UTC*) avec le code *Modulef* de l'INRIA, qui incorpore des éléments de coque.

Toutefois, *Modulef* doit être modifié pour s'adapter au problème considéré. En effet, il ne prend actuellement en compte qu'une loi de comportement linéaire (la loi de Hooke généralisée). De plus, il faut l'utiliser pour résoudre le problème solide à déplacements imposés et non à déplacements inconnus. On notera aussi que *Modulef* calcule le travail virtuel des forces interne sur la configuration de référence, plutôt que sur la configuration actuelle (comme effectué au chapitre 2). Le principe des travaux virtuels peut en effet s'écrire de manière équivalente (on donne ici les expressions pour un modèle de membrane, mais la même opération est possible pour un modèle de coque) :

$$\begin{aligned} & \forall \underline{\hat{u}} \text{ déplacement virtuel,} \\ & \int_S \underline{\hat{u}} \cdot \underline{q} dS = - \int_S \underline{\hat{\varepsilon}} : \underline{T} dS, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \forall \underline{\hat{u}} \text{ déplacement virtuel,} \\ & \int_S \underline{\hat{u}} \cdot \underline{q} dS = - \int_{S_0} \underline{\hat{\varepsilon}} : \underline{S} dS_0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où l'on rappelle que S_0 et S sont respectivement la surface de référence et la surface actuelle et que \underline{S} et \underline{T} sont respectivement les tensions de Piola-Kirchhoff (de seconde espèce) et de Cauchy. Si l'on note \underline{U} le champ de déplacement pour passer de S_0 à S et $\underline{\hat{u}}$ le déplacement virtuel, on définit la variation du tenseur de Green-Lagrange :

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon}(\underline{U} + \underline{\hat{u}}) - \underline{\varepsilon}(\underline{U}) \quad (2.9)$$

où l'on note que tous les gradients surfaciques sont calculés sur la surface de référence S_0 . L'expression du problème solide repose sur l'équation (2.8) dans *Modulef*. Dans les cas où les efforts extérieurs sont connus et peuvent être exprimés sur la configuration de référence, on peut alors travailler uniquement sur celle-ci, sans avoir à recalculer la métrique à chaque itération. Dans le cas d'une capsule, où il faut calculer les efforts externes sur la configuration actuelle, le choix de la

configuration sur laquelle on exprime les travaux des efforts internes est indifférent.

Une première étape a consisté à effectuer le couplage des deux codes dans le cas d'un modèle de membrane (c'est-à-dire sans rigidité de flexion), pour la loi de Hooke généralisée. Un programme maître a été créé, pour transférer, via l'architecture PVM (*parallel virtual machine*), les informations nécessaires entre le code UTC, chargé de la résolution du problème fluide, et Modulef, chargé de la résolution du problème solide. La résolution du problème fluide dans le cas couplé est identique à celle présentée au chapitre 3. Pour ce qui est du problème solide, des modifications ont été effectuées par M. Vidrascu dans Modulef pour permettre la résolution à déplacement imposé et le calcul du travail virtuel des efforts externes à chaque itération sur la configuration actuelle.

Les résultats donnés par ce nouveau code couplé en l'absence de rigidité de flexion sont identiques à ceux obtenus avec le code UTC, comme apparent sur la figure 2.2. Ceci montre que le couplage entre les deux codes est faisable et prometteur. Des travaux sont maintenant en cours pour incorporer une rigidité de flexion, en faisant appel tout d'abord aux éléments de coque MITC3 (Lee & Bathe, 2004) pour tester la faisabilité de l'opération. Une étude plus théorique doit aussi être conduite pour s'assurer de la capacité de la méthode à fournir une solution fiable à ce problème numérique très particulier.

Si cette méthode fonctionne, une étude très intéressante peut être conduite comparant modèles de membrane et de coque pour décrire le comportement d'une capsule en se limitant à la loi de Hooke généralisée, comme c'est le cas de Modulef. Toutefois, la prise en compte ultérieure de lois de comportement non-linéaires (et éventuellement isotropes transverses) sera de toute évidence complexe à mettre en œuvre dans le contexte d'un modèle de coque.

S'il reste, donc, encore beaucoup de travail à effectuer, les premiers résultats obtenus montre que le choix des éléments finis pour décrire la paroi de la capsule était judicieux et va permettre d'enrichir la mécanique de la capsule. À l'heure où les recherches sur les capsules s'intensifient, avec l'entrée dans le domaine de plusieurs nouvelles équipes au cours des cinq dernières années, on peut espérer que le code numérique développé au cours de ces travaux de thèse constituera une fondation solide pour les travaux à venir au sein du laboratoire.

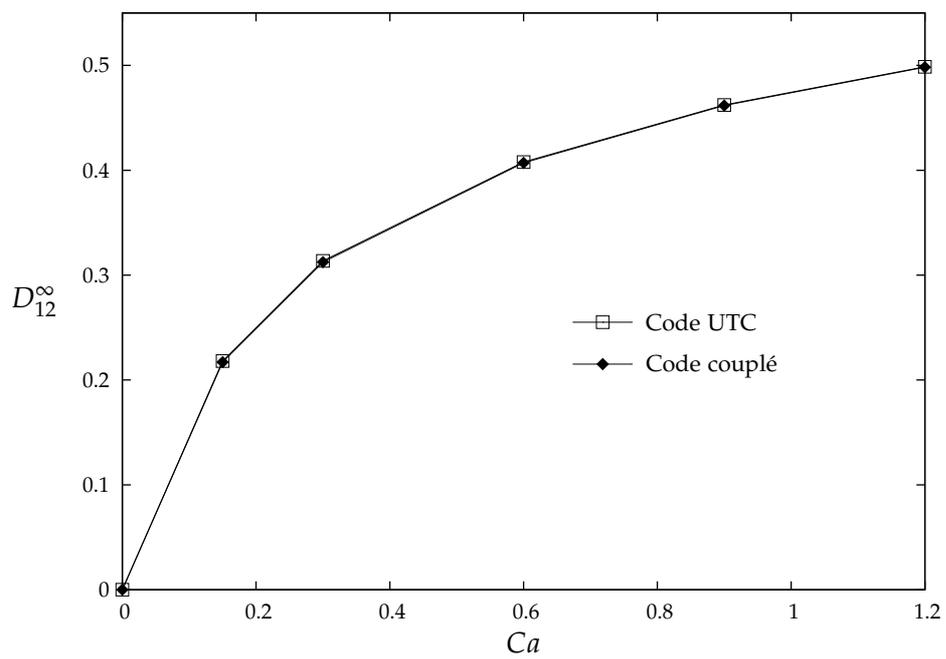


Figure 2.2 – Paramètre de Taylor dans le plan de cisaillement à l'état stationnaire en fonction du nombre capillaire pour une capsule dans un écoulement de cisaillement simple infini. La membrane de la capsule obéit à la loi de Hooke généralisée.

Annexe A

Surfaces courbes, calcul tensoriel

On donne ici quelques éléments relatifs à la description des surfaces courbes et au calcul tensoriel en base non-orthonormée. On se contente d'un certain nombre de résultats utiles pour les travaux développés dans ce manuscrit, sans souci d'exhaustivité, et l'on renvoie à l'annexe I de Salençon (2002) et au chapitre 1 de Green & Zerna (1968) pour plus de détails.

REM. : Quand on se place en coordonnées curvilignes, les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$ tandis que les lettres latines $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Le symbole de Kronecker est noté δ . Sauf mention contraire, on applique la convention de sommation sur les indices répétés.

1 Description d'une surface

1.1 Représentation paramétrique

On considère S une surface, potentiellement courbe, dans l'espace à trois dimensions. L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

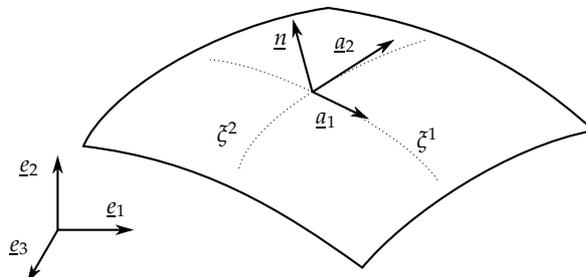


Figure 1.1 – Surface décrite par les coordonnées (ζ^1, ζ^2) et base covariante.

On paramètre S par deux coordonnées indépendantes ζ^1 et ζ^2 , telles que la

position $\overrightarrow{OM} = \underline{x}$ de chaque point M de la surface s'écrive sous la forme (fig. 1.1) :

$$\overrightarrow{OM} = \underline{x}(\zeta^1, \zeta^2) \quad \forall M \in S. \quad (1.1)$$

1.2 Bases locales, tenseur métrique

Pour tout point M de S , on souhaite construire une base $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ telle que le plan $(M, \underline{a}_1, \underline{a}_2)$ soit tangent à S en M . À cet effet, on pose :

$$\underline{a}_\alpha = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \zeta^\alpha}. \quad (1.2)$$

Si les deux premiers vecteurs de base sont tangents à S , il peut alors être commode que le troisième soit normal à la surface. On choisit de poser :

$$\underline{a}_3 = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{\|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2\|}. \quad (1.3)$$

Si \underline{a}_3 est normé et orthogonal aux deux autres vecteurs de base, \underline{a}_1 et \underline{a}_2 , eux, sont a priori de norme quelconque et non orthogonaux entre eux. On pourrait orthonormer la base, mais sa définition actuelle se révélera particulièrement adaptée à l'écriture des lois de la mécanique, et on la conserve donc.

On définit le *tenseur métrique* $a_{\alpha\beta}$ par :

$$a_{\alpha\beta} = \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta. \quad (1.4)$$

On note que, si la base est orthonormée, on a $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

La base $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ n'étant généralement pas orthonormée, il va se révéler nécessaire pour les calculs d'introduire une base duale $(\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3)$ définie par le produit de dualité :

$$\underline{a}^i \cdot \underline{a}_j = \delta_j^i. \quad (1.5)$$

On vérifie sans peine que, défini ainsi, $\underline{a}^3 = \underline{a}_3$, et on posera dorénavant :

$$\underline{n} = \underline{a}_3 = \underline{a}^3. \quad (1.6)$$

On appellera $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{n})$ la *base covariante* et $(\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{n})$ la *base contravariante* (voir fig. 1.2).

Comme pour la base covariante, on peut définir la représentation contravariante du tenseur métrique, $a^{\alpha\beta}$:

$$\underline{a}^\alpha \cdot \underline{a}^\beta = a^{\alpha\beta}. \quad (1.7)$$

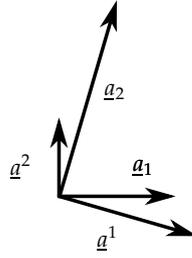


Figure 1.2 – Bases covariante et contravariante dans le plan tangent.

On montre alors sans mal que :

$$\underline{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \underline{a}_\beta, \quad (1.8)$$

et que :

$$\underline{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \underline{a}^\beta. \quad (1.9)$$

Il ressort de ces deux dernières équations que :

$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{12} & a^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (1.10)$$

c'est-à-dire :

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{|a_{\alpha\beta}|} \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{|a_{\alpha\beta}|} \quad a^{12} = -\frac{a_{12}}{|a_{\alpha\beta}|} \quad \text{où } |a_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}. \quad (1.11)$$

1.3 Représentations d'un vecteur

Soit $\underline{v} = v_{Xi} \underline{e}_i$ un vecteur, où v_{Xi} désigne la i -ème composante cartésienne de \underline{v} . Il peut être représenté dans les bases covariante et contravariante. On note alors ses composantes :

$$\underline{v} = v^i \underline{a}_i = v_i \underline{a}^i, \quad (1.12)$$

où (v^1, v^2, v^n) est la *représentation contravariante* de \underline{v} et où (v_1, v_2, v_n) est la *représentation covariante*.

Le calcul de $\underline{v} \cdot \underline{a}_i$ montre que

$$v_\alpha = a_{\alpha\beta} v^\beta, \quad (1.13)$$

et que

$$v^n = v_n. \quad (1.14)$$

On montre de même que

$$v^\alpha = a^{\alpha\beta} v_\beta. \quad (1.15)$$

Il existe plusieurs formules pour le calcul du produit scalaire $\underline{u} \cdot \underline{v}$, selon les bases dans laquelle on exprime les vecteurs. D'après (1.5), la manière la plus économique est de faire intervenir le produit de dualité ; on a alors simplement :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u^i v_i = u_i v^i. \quad (1.16)$$

2 Tenseurs d'ordre 2

2.1 Représentations d'un tenseur d'ordre 2

Soit $\underline{\underline{T}}$ un tenseur euclidien d'ordre 2. Ce tenseur admet plusieurs représentations, correspondant aux différentes bases. Ainsi, on note la représentation cartésienne de $\underline{\underline{T}}$ sous la forme :

$$\underline{\underline{T}} = T_{Xij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j. \quad (2.1)$$

Avec les coordonnées curvilignes, on peut représenter $\underline{\underline{T}}$ par le *tenseur deux fois covariant* T_{ij} ou par le *tenseur deux fois contravariant* T^{ij} , tels que :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j, \quad (2.2)$$

$$\underline{\underline{T}} = T^{ij} \underline{a}_i \otimes \underline{a}_j. \quad (2.3)$$

On introduit aussi les *tenseurs mixtes* T^i_j et T_i^j tels que :

$$\underline{\underline{T}} = T^i_j \underline{a}_i \otimes \underline{a}^j, \quad (2.4)$$

$$\underline{\underline{T}} = T_i^j \underline{a}^i \otimes \underline{a}_j. \quad (2.5)$$

L'intérêt des tenseurs mixtes est que T^i_j et T_i^j sont les *coefficients de matrices* représentant $\underline{\underline{T}}$. Ceci permet par exemple de calculer aisément les invariants de $\underline{\underline{T}}$: le polynôme caractéristique de $\underline{\underline{T}}$ (et donc sa trace, son déterminant, ses valeurs propres, etc.) est aussi celui de la matrice de terme général $(T^i_j)_{ij}$, ainsi que de la matrice de terme général $(T_i^j)_{ij}$, et il peut donc être calculé aisément par les méthodes classiques du calcul matriciel⁽¹⁾.

1. Ce résultat n'est *absolument pas valable* avec les matrices de terme général $(T^{ij})_{ij}$ et $(T_{ij})_{ij}$!

2.2 Transposition

La transposition du produit tensoriel de deux vecteurs revient à échanger la place des deux vecteurs dans le produit tensoriel. Ainsi :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})^T = \underline{b} \otimes \underline{a}. \quad (2.6)$$

La transposition étant distributive, on peut calculer la transposée d'un tenseur d'ordre 2. Ainsi, si $\underline{\underline{B}} = B_{ij} \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j$, alors :

$$\underline{\underline{B}}^T = B_{ij} \underline{a}^j \otimes \underline{a}^i \quad (= B_{ji} \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j \text{ en jouant sur les indices muets}).$$

Si l'on note $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{B}}^T$, on montre que :

$$T_{ij} = B_{ji}, \quad (2.7a)$$

$$T^{ij} = B^{ji}, \quad (2.7b)$$

$$T_i^j = B_j^i, \quad (2.7c)$$

$$T^i_j = B_j^i. \quad (2.7d)$$

Si $\underline{\underline{B}}^T = \underline{\underline{B}}$, on dit que le tenseur $\underline{\underline{B}}$ est *symétrique*.

2.3 Produit contracté

Le *produit contracté* est une opération, notée « \cdot », sur deux tenseurs, d'ordre respectivement m et n , dont le résultat est un tenseur d'ordre $m + n - 2$. Le *produit doublement contracté* est une opération, notée « $:$ », sur deux tenseurs dont le résultat est un tenseur d'ordre $m + n - 4$. Ces deux opérations sont distributives.

On se propose de donner quelques formules utiles de calcul de produits (doublement) contractés.

Produit contracté de deux vecteurs

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 1 (vecteurs) est égal au produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u^i v_i = u_i v^i. \quad (2.8)$$

Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 suit la formule suivante :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot (\underline{c} \otimes \underline{d}) = (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \otimes \underline{d}. \quad (2.9)$$

En exploitant la distributivité, on obtient sans mal les formules de calcul pour diverses représentation d'un tenseur. Par exemple :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} &= (B^i_j \underline{a}_i \otimes \underline{a}^j) \cdot (C^k_l \underline{a}_k \otimes \underline{a}^l) \\ &= B^i_j C^k_l (\underline{a}^j \cdot \underline{a}_k) \underline{a}_i \otimes \underline{a}^l \\ &= B^i_j C^j_l \underline{a}_i \otimes \underline{a}^l. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}$, alors :

$$A^i_l = B^i_j C^j_l, \quad (2.10)$$

ce qui est la formule classique du produit matriciel : pour les tenseurs mixtes, calcul tensoriel et calcul matriciel se confondent.

Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 (dont le résultat est un scalaire) suit la formule suivante :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) : (\underline{c} \otimes \underline{d}) = (\underline{b} \cdot \underline{c})(\underline{a} \cdot \underline{d}). \quad (2.11)$$

Par distributivité, on établit la formule utile suivante :

$$\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{C}} = B^{ij} C_{ji} = B_{ij} C^{ji}. \quad (2.12)$$

Produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2

Le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2 suit la formule suivante :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) : (\underline{e} \otimes \underline{f}) = (\underline{d} \cdot \underline{e})(\underline{c} \cdot \underline{f}) \underline{a} \otimes \underline{b}. \quad (2.13)$$

Par distributivité, on a la formule utile suivante :

$$\underline{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{B}} = D^{ijkl} B_{lk}, \quad (2.14)$$

où l'on note que l'on a bien B_{lk} et non B_{kl} ; cette différence disparaît si le tenseur $\underline{\underline{B}}$ est symétrique.

2.4 Tenseur identité

On note $\underline{\underline{1}}$ le *tenseur identité*, qui possède les propriétés suivantes :

$$\forall \underline{v}, \quad \underline{\underline{1}} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{\underline{1}} = \underline{v}, \quad (2.15a)$$

$$\forall \underline{T}, \quad \underline{\underline{1}} \cdot \underline{T} = \underline{T} \cdot \underline{\underline{1}} = \underline{T}. \quad (2.15b)$$

La matrice représentative de $\underline{\underline{1}}$ est la matrice identité, de terme général $(\delta_j^i)_{ij}$.

On a donc :

$$\underline{\underline{1}} = \delta_j^i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad (2.16a)$$

$$= \delta_j^i \underline{a}_i \otimes \underline{a}^j, \quad (2.16b)$$

$$= \delta_i^j \underline{a}^i \otimes \underline{a}_j. \quad (2.16c)$$

Application aux formules de passage

L'écriture du tenseur identité permet de retrouver aisément les formules de passage entre les représentations d'un même tenseur euclidien. Par exemple :

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{\underline{1}} \cdot \underline{v} \\ \Rightarrow v_i \underline{a}^i &= \underline{a}^i \otimes \underline{a}_i \cdot v_{Xj} \underline{e}_j \\ \Rightarrow v_i \underline{a}^i &= (\underline{a}_i \cdot \underline{e}_j) v_{Xj} \underline{a}^i. \end{aligned}$$

Si l'on note $a_i^{Xj} = \underline{a}_i \cdot \underline{e}_j$ et $a_{Xj}^i = \underline{a}^i \cdot \underline{e}_j$ la j -ième composante cartésienne de, respectivement, \underline{a}_i et \underline{a}^i , on a donc

$$v_i = a_i^{Xj} v_{Xj}. \quad (2.17)$$

De même, on montre que :

$$v_{Xi} = a_{Xi}^j v_j. \quad (2.18)$$

Prenons maintenant l'exemple d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{1}} \\ \Rightarrow T^{ij} \underline{a}_i \otimes \underline{a}_j &= \underline{a}_i \otimes \underline{a}^i \cdot T_{kl} \underline{a}^k \otimes \underline{a}^l \cdot \underline{a}^j \otimes \underline{a}_j \\ \Rightarrow T^{ij} \underline{a}_i \otimes \underline{a}_j &= a^{ik} a^{jl} T_{kl} \underline{a}_i \otimes \underline{a}_j, \end{aligned}$$

et donc :

$$T^{ij} = a^{ik} a^{jl} T_{kl}. \quad (2.19)$$

Opérateur de projection surfacique

On définit l'opérateur $\underline{\underline{\mathbb{1}}}_S$ par :

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}}_S = \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}}, \quad (2.20)$$

ce qu'on peut représenter par :

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}}_S = \delta_\alpha^\beta \underline{\underline{a}}^\alpha \otimes \underline{\underline{a}}_\beta \quad (2.21a)$$

$$= \delta_\beta^\alpha \underline{\underline{a}}_\alpha \otimes \underline{\underline{a}}^\beta \quad (2.21b)$$

$$= a^{\alpha\beta} \underline{\underline{a}}_\alpha \otimes \underline{\underline{a}}_\beta \quad (2.21c)$$

$$= a_{\alpha\beta} \underline{\underline{a}}^\alpha \otimes \underline{\underline{a}}^\beta. \quad (2.21d)$$

Ainsi, $\underline{\underline{\mathbb{1}}}_S$ n'est autre que le tenseur métrique introduit plus haut. On peut voir ce tenseur de deux manières : du point de vue de l'espace tridimensionnel, c'est l'opérateur de projection sur S ; du point de vue surfacique, c'est le tenseur identité.

On décide alors d'appeler *tenseur surfacique* tout tenseur $\underline{\underline{T}}$ d'ordre 2 vérifiant :

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}}_S \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{1}}}_S = \underline{\underline{T}}. \quad (2.22)$$

Il est clair qu'un tel tenseur est de rang 2.

2.5 Dérivation par rapport à un tenseur d'ordre 2

Soit $\underline{\underline{T}}$ un tenseur d'ordre 2 et $f(\underline{\underline{T}})$ une fonction scalaire. On définit la dérivée de f par rapport à $\underline{\underline{T}}$ par la relation suivante :

$$\forall \underline{\underline{U}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{T}}} : \underline{\underline{U}} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\underline{\underline{T}} + \alpha \underline{\underline{U}}) \right)_{\alpha=0}. \quad (2.23)$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{T}}}$ est un tenseur d'ordre 2.

On peut montrer les formules utiles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{T}}} (\text{tr } \underline{\underline{T}}) = \underline{\underline{\mathbb{1}}}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{T}}} (\text{tr } \underline{\underline{T}}^2) = 2\underline{\underline{T}}^T, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{T}}} (\det \underline{\underline{T}}) = (\det \underline{\underline{T}}) \underline{\underline{T}}^{-T}. \quad (2.26)$$

On considère maintenant $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{T}})$ une fonction tensorielle. On définit la dérivée de $\underline{\underline{F}}$ par rapport à $\underline{\underline{T}}$ par :

$$\forall \underline{\underline{U}}, \quad \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{T}}} : \underline{\underline{U}} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{T}} + \alpha \underline{\underline{U}}) \right)_{\alpha=0}. \quad (2.27)$$

Ainsi, $\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{T}}}$ est un tenseur d'ordre 4.

On a les formules utiles suivantes :

$$\frac{\partial \underline{\underline{1}}}{\partial \underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{0}}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{1}}, \quad (2.29)$$

$$\forall \underline{\underline{U}}, \quad \frac{\partial (\underline{\underline{T}}^{-1})}{\partial \underline{\underline{T}}} : \underline{\underline{U}} = -\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}. \quad (2.30)$$

3 Dérivées spatiales

3.1 Gradient

Soit $\underline{\underline{v}}(\zeta^1, \zeta^2)$ un tenseur d'ordre $n \geq 0$. Le *gradient* de $\underline{\underline{v}}$ est un tenseur d'ordre $n + 1$, noté $\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{v}}$, tel que :

$$d\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{v}} \cdot d\underline{\underline{x}}. \quad (3.1)$$

En remarquant que $d\underline{\underline{x}} = \frac{\partial \underline{\underline{x}}}{\partial \zeta^\alpha} d\zeta^\alpha = \underline{\underline{a}}_\alpha d\zeta^\alpha$, on trouve que l'on peut poser de manière équivalente :

$$\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial \zeta^\alpha} \otimes \underline{\underline{a}}^\alpha. \quad (3.2)$$

Pour les besoins de la mécanique des membranes, on est amené à définir aussi le *gradient surfacique* du tenseur $\underline{\underline{v}}$, noté $\underline{\underline{\nabla}}_s \underline{\underline{v}}$ et défini par :

$$\underline{\underline{\nabla}}_s \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{1}}_s \cdot \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{v}}. \quad (3.3)$$

À titre d'exemple, considérons $\underline{\underline{u}} = u_i(\zeta^1, \zeta^2) \underline{\underline{a}}^i$ un vecteur et cherchons à calculer son gradient surfacique. On a tout d'abord :

$$\underline{\underline{\nabla}}_s \underline{\underline{u}} = \frac{\partial \underline{\underline{u}}}{\partial \zeta^\beta} \otimes \underline{\underline{a}}^\beta, \quad (3.4)$$

d'où l'on tire :

$$\underline{\underline{\nabla}}_s u = \left(\underline{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \xi^\beta} \right) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta. \quad (3.5)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\nabla}}_s u &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi^\beta} \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}^i + u_i \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}^i_{,\beta} \right) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta \\ &= \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^\beta} + u_i \left(\frac{\partial (\underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}^i)}{\partial \xi^\beta} - \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}^i \right) \right) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta \\ &= \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^\beta} - u_i \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}^i \right) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta, \end{aligned}$$

ce que l'on va écrire :

$$\underline{\underline{\nabla}}_s u = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u_\gamma - b_{\alpha\beta} u_n \right) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta, \quad (3.6)$$

où l'on a introduit les *symboles de Christoffel de seconde espèce* :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}^\gamma, \quad (3.7)$$

et le *tenseur des courbures* :

$$b_{\alpha\beta} = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{n}. \quad (3.8)$$

Comme leurs noms respectifs l'indiquent, le tenseur des courbures a une structure de tenseur (c'est-à-dire qu'on peut définir un tenseur euclidien $\underline{b} = b_{\alpha\beta} \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta$), ce qui n'est pas le cas des symboles de Christoffel.

3.2 Divergence

Soit $\underline{v}(\xi^1, \xi^2)$ un tenseur d'ordre $n \geq 1$. La *divergence* de \underline{v} est un tenseur d'ordre $n - 1$, noté $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$, défini par :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{\nabla}} \underline{v} : \underline{\mathbb{1}}. \quad (3.9)$$

On définit aussi la *divergence surfacique* de \underline{v} , notée $\underline{\nabla}_s \cdot \underline{v}$, définie par :

$$\underline{\nabla}_s \cdot \underline{v} = \underline{\underline{\nabla}}_s \underline{v} : \underline{\mathbb{1}}_s. \quad (3.10)$$

Par exemple, soit $\underline{T} = T^{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2) \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta$ un tenseur surfacique d'ordre 2. On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\nabla}} \underline{T} &= \frac{\partial \underline{T}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \underline{a}^\gamma \\ &= \left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma} \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta + T^{\alpha\beta} (\underline{a}_{\alpha,\gamma} \otimes \underline{a}_\beta + \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_{\beta,\gamma}) \right) \otimes \underline{a}^\gamma. \end{aligned}$$

On en tire :

$$\underline{\nabla}_s \cdot \underline{T} = \frac{\partial T^{\alpha\gamma}}{\partial \xi^\gamma} \underline{a}_\alpha + T^{\alpha\gamma} \underline{a}_{\alpha,\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\gamma T^{\alpha\beta} \underline{a}_\alpha. \quad (3.11)$$

En notant que :

$$\underline{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \underline{a}_\gamma + b_{\alpha\beta} \underline{n}, \quad (3.12)$$

il vient

$$\underline{\nabla}_s \cdot \underline{T} = \left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha T^{\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\gamma T^{\alpha\beta} \right) \underline{a}_\alpha + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \underline{n}. \quad (3.13)$$

3.3 Courbures

Notons que :

$$b^\alpha_\beta = a^{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}.$$

On peut alors déterminer les invariants de \underline{b} :

$$\text{tr } \underline{b} = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}, \quad (3.14)$$

$$\det \underline{b} = |a^{\alpha\beta}| |b_{\alpha\beta}|. \quad (3.15)$$

On définit alors la *courbure moyenne* $\bar{\kappa}$ et la *courbure gaussienne* κ^* telles que :

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{2} \text{tr } \underline{b}, \quad (3.16)$$

$$\kappa^* = \det \underline{b}. \quad (3.17)$$

Soit κ_1 et κ_2 les valeurs propres de \underline{b} , appelées *courbures principales*. Par définition du polynôme caractéristique de \underline{b} , ce sont les racines de l'équation :

$$\kappa^2 - 2\bar{\kappa}\kappa + \kappa^* = 0. \quad (3.18)$$

On a donc :

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad (3.19)$$

$$\kappa^* = \kappa_1 \kappa_2. \quad (3.20)$$

Bibliographie

- ABKARIAN, M., FAIVRE, M. & VIALLAT, A. 2007 Swinging of red blood cells under shear flow. *Phys. Rev. Lett.* **98** (18), 188302.
- AKCHICHE, M. 1987 Étude expérimentale du mouvement et de la déformation d'une capsule sous l'effet de l'écoulement d'un fluide visqueux. Application au globule rouge. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- BARBER, J., ALBERDING, J., RESTREPO, J. & SECOMB, T. 2008 Simulated two-dimensional red blood cell motion, deformation, and partitioning in microvessel bifurcations. *Ann. Biomed. Eng.* **36** (10), 1690–1698.
- BARTHÈS-BIESEL, D. 1980 Motion of a spherical microcapsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **100**, 831–853.
- BARTHÈS-BIESEL, D. 1991 Role of interfacial properties on the motion and deformation of capsules in shear flow. *Physica A : Statist. Theor. Phys.* **172**, 103–124.
- BARTHÈS-BIESEL, D., DIAZ, A. & DHENIN, E. 2002 Effect of constitutive laws for two dimensional membranes on flow-induced capsule deformation. *J. Fluid Mech.* **460**, 211–222.
- BARTHÈS-BIESEL, D. & RALLISON, J. M. 1981 The time-dependent deformation of a capsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **113**, 251–267.
- BATHE, K. J. 1996 *Finite element procedures*. Prentice Hall.

- BATOZ, J.-L. & DHATT, G. 1990 *Modélisation des structures par éléments finis : Solides élastiques*. Hermès.
- BATOZ, J.-L. & DHATT, G. 1992 *Modélisation des structures par éléments finis : Coques*. Hermès.
- BRODY, J., YAGER, P., GOLDSTEIN, R. & AUSTIN, R. 1996 Biotechnology at low Reynolds numbers. *Biophys. J.* **71** (6), 3430–3441.
- CARIN, M., BARTHÈS-BIESEL, D., EDWARDS-LÉVY, F., POSTEL, C. & ANDREI, D. 2003 Compression of biocompatible liquid-filled HSA-alginate capsules : determination of the membrane mechanical properties. *Biotechnol. Bioeng.* **82**, 207–212.
- CHANG, K. S. & OLBRICHT, W. L. 1993a Experimental studies of the deformation and breakup of a synthetic capsule in extensional flow. *J. Fluid Mech.* **250**, 587–608.
- CHANG, K. S. & OLBRICHT, W. L. 1993b Experimental studies of the deformation and breakup of a synthetic capsule in steady and unsteady simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **250**, 609–633.
- CHANG, T. M. S. 1999 Future prospects for artificial blood. *Trends Biotechnol.* **17** (2), 61–67.
- CHAPELLE, D. & BATHE, K. J. 2003 *The finite element analysis of shells – Fundamentals*. Springer.
- CHARRIER, J.-M., SHRIVASTAVA, S. & WU, R. 1989 Free and constrained inflation of elastic membranes in relation to thermoforming – non-axisymmetric problems. *J. Strain Anal.* **24** (2), 55–74.
- CHO, K., WANG, X., NIE, S., CHEN, Z. & SHIN, D. 2008 Therapeutic nanoparticles for drug delivery in cancer. *Clin. Cancer Res.* **14** (5), 1310–1316.
- COUPIER, G., KAOUÏ, B., PODGORSKI, T. & MISBAH, C. 2008 Noninertial lateral migration of vesicles in bounded Poiseuille flow. *Phys. Fluids* **20** (11), 111702.
- DAO, M., LIM, C. & SURESH, S. 2003 Mechanics of the human red blood cell deformed by optical tweezers. *J. Mech. Phys. Solid* **51** (11-12), 2259–2280.

- DIAZ, A. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2002 Entrance of a bioartificial capsule in a pore. *CMES* **3** (3), 321–337.
- DIAZ, A., BARTHÈS-BIESEL, D. & PELEKASIS, N. 2001 Effect of membrane viscosity on the dynamic response of an axisymmetric capsule. *Phys. Fluids* **13** (12), 3835–3838.
- DIAZ, A., PELEKASIS, N. A. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2000 Transient response of a capsule subjected to varying flow conditions : effect of internal fluid viscosity and membrane elasticity. *Phys. Fluids* **12**, 948–957.
- DODDI, S. & BAGCHI, P. 2008a Effect of inertia on the hydrodynamic interaction between two liquid capsules in simple shear flow. *Int. J. Multiphase Flow* **34**, 375–392.
- DODDI, S. & BAGCHI, P. 2008b Lateral migration of a capsule in a plane Poiseuille flow in a channel. *Int. J. Multiphase Flow* **34** (10), 966–986.
- DODSON, W. R. & DIMITRAKOPOULOS, P. 2008 Spindles, cusps, and bifurcation for capsules in Stokes flow. *Phys. Rev. Lett.* **101** (20), 208102.
- EDWARDS-LÉVY, F. & LÉVY, M.-C. 1999 Serum albumin-alginate coated beads : mechanical properties and stability. *Biomaterials* **20**, 2069–2084.
- EGGLETON, C. D. & POPEL, A. S. 1998 Large deformation of red blood cell ghosts in a simple shear flow. *Phys. Fluids* **10**, 1834–1845.
- EVANS, E. A. & SKALAK, R. 1980 *Mechanics and thermodynamics of biomembranes*. CRC Press.
- FINKEN, R. & SEIFERT, U. 2006 Wrinkling of microcapsules in shear flow. *J. Phys. : Condens. Matter* **18** (15), L185–L191.
- FISCHER, T. M. 2004 Shape memory of human red blood cells. *Biophys. J.* **86** (5), 3304–3313.
- GREEN, A. E. & ADKINS, J. E. 1970 *Large elastic deformations*, 2nd edn. Oxford University Press.
- GREEN, A. E. & ZERNA, W. 1968 *Theoretical elasticity*, 2nd edn. Oxford University Press.

- HAMMER, P., MARLOWE, O. & STROUD, A. 1956 Numerical integration over simplexes and cones. *Math. Tables Aids Comput.* **10** (55), 130–137.
- HELFRICH, W. 1973 Elastic properties of lipid bilayers : theory and possible experiments. *Z. Naturforsch. (C)* **28** (11), 693.
- JOHNSTON, A. P., CORTEZ, C., ANGELATOS, A. S. & CARUSO, F. 2006 Layer-by-layer engineered capsules and their applications. *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* **11** (4), 203–209.
- KESSLER, S., FINKEN, R. & SEIFERT, U. 2008 Swinging and tumbling of elastic capsules in shear flow. *J. Fluid Mech.* **605**, 207–226.
- KÜHTREIBER, W. M., LANZA, R. P. & CHICK, W. L., ed. 1999 *Cell encapsulation technology and therapeutics*. Birkhäuser.
- LAC, É. 2003 Déformation et convection d'une capsule dans un écoulement de Stokes tridimensionnel infini. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- LAC, É., BARTHÈS-BIESEL, D., PELEKASIS, N. A. & TSAMOPOULOS, J. 2004 Spherical capsules in three-dimensional unbounded Stokes flow : effect of the membrane constitutive law and onset of buckling. *J. Fluid Mech.* **516**, 303–334.
- LAC, É., MOREL, A. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2007 Hydrodynamic interaction between two identical capsules in a simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **573**, 149–169.
- LADYZHENSKAYA, O. A. 1969 *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, 2nd edn. Gordon and Breach.
- LE TALLEC, P. & MOURO, J. 2001 Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **190** (24-25), 3039–3067.
- LEE, J. S., DYLLA-SPEARS, R., TECLEMARIAM, N. P. & MULLER, S. J. 2007 Microfluidic four-roll mill for all flow types. *Appl. Phys. Lett.* **90** (7), 074103.
- LEE, P.-S. & BATHE, K.-J. 2004 Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Comput. Struct.* **82** (11-12), 945–962.
- LEFEBVRE, Y. & BARTHÈS-BIESEL, D. 2007 Motion of a capsule in a cylindrical tube : effect of membrane pre-stress. *J. Fluid Mech.* **589**, 157–181.

- LEFEBVRE, Y., LECLERC, E., BARTHÈS-BIESEL, D., WALTER, J. & EDWARDS-LEVY, F. 2008 Flow of artificial microcapsules in microfluidic channels : A method for determining the elastic properties of the membrane. *Phys. Fluids* **20** (12), 123102.
- LENORMAND, G., HÉNON, S., RICHERT, A., SIMÉON, J. & GALLET, F. 2001 Direct measurement of the area expansion and shear moduli of the human red blood cell membrane skeleton. *Biophys. J.* **81** (1), 43–56.
- LI, S., NICKELS, J. & PALMER, A. F. 2005 Liposome-encapsulated actin-hemoglobin (LEAcHb) artificial blood substitutes. *Biomaterials* **26** (17), 3759–3769.
- LI, X. & SARKAR, K. 2008 Front tracking simulation of deformation and buckling instability of a liquid capsule enclosed by an elastic membrane. *J. Comp. Phys.* **227** (10), 4998–5018.
- LI, X. Z., BARTHÈS-BIESEL, D. & HELMY, A. 1988 Large deformations and burst of a capsule freely suspended in an elongational flow. *J. Fluid Mech.* **187**, 179–196.
- LIU, L., YANG, J.-P., JU, X.-J., XIE, R., YANG, L., LIANG, B. & CHU, L.-Y. 2009 Microfluidic preparation of monodisperse ethyl cellulose hollow microcapsules with non-toxic solvent. *J. Colloid Interface Sci.* **336** (1), 100–106.
- LIU, Y., MIYOSHI, H. & NAKAMURA, M. 2006 Encapsulated ultrasound microbubbles : Therapeutic application in drug/gene delivery. *J. Controlled Release* **114** (1), 89–99.
- MOHANDAS, N. & EVANS, E. 1994 Mechanical properties of the red cell membrane in relation to molecular structure and genetic defects. *Annu. Rev. Biophys. Biomol. Struct.* **23** (1), 787–818.
- NAGLE, J. F. & TRISTRAM-NAGLE, S. 2000 Structure of lipid bilayers. *Biochim. Biophys. Acta* **1469** (3), 159–195.
- ORIVE, G., HERNÁNDEZ, R. M., GASCÓN, A. R., CALAFIORE, R., CHANG, T. M. S., DE VOS, P., HORTELANO, G., HUNKELER, D., LACÍK, I. & PEDRAZ, J. L. 2004 History, challenges and perspectives of cell microencapsulation. *Trends Biotechnol.* **22** (2), 87–92.
- PESKIN, C. S. 2002 The immersed boundary method. *Acta Numerica* **11**, 479–517.

- POZRIKIDIS, C. 1990 The axisymmetric deformation of a red blood cell in uniaxial straining Stokes flow. *J. Fluid Mech.* **216**, 231–254.
- POZRIKIDIS, C. 1992 *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press.
- POZRIKIDIS, C. 1995 Finite deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **297**, 123–152.
- POZRIKIDIS, C. 2001 Effect of membrane bending stiffness on the deformation of capsules in simple shear flow. *J. Fluid Mech.* **440**, 269–291.
- RAMANUJAN, S. & POZRIKIDIS, C. 1998 Deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow : Large deformations and the effect of capsule viscosity. *J. Fluid Mech.* **361**, 117–143.
- REHAGE, H., HUSMANN, M. & WALTER, A. 2002 From two-dimensional model networks to microcapsules. *Rheol. Acta* **41**, 292.
- RISSE, F., COLLÉ-PAILOT, F. & ZAGZOULE, M. 2006 Experimental investigation of a bioartificial capsule flowing in a narrow tube. *J. Fluid Mech.* **547**, 149–173.
- RIVERA, E. 2003 Current status of liposomal anthracycline therapy in metastatic breast cancer. *Clin. Breast Cancer* **4**, S76–S83.
- SALENÇON, J. 2002 *Mécanique des milieux continus*. Éditions de l'École polytechnique.
- SCHENK, O. & GÄRTNER, K. 2004 Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. *Future Generation Computer Systems* **20** (3), 475–487.
- SCHENK, O. & GÄRTNER, K. 2006 On fast factorization pivoting methods for sparse symmetric indefinite systems. *Electronic Transactions on Numerical Analysis* **23**, 158–179.
- SECOMB, T., STYP-REKOWSKA, B. & PRIES, A. 2007 Two-dimensional simulation of red blood cell deformation and lateral migration in microvessels. *Ann. Biomed. Eng.* **35** (5), 755–765.
- SEIFERT, U. 1997 Configurations of fluid membranes and vesicles. *Adv. Phys.* **46** (1), 13–137.

- SEIFERT, U. 1999 Fluid membranes in hydrodynamic flow fields : Formalism and an application to fluctuating quasispherical vesicles in shear flow. *Eur. Phys. J. B* **8** (3), 405–415.
- SKALAK, R. & BRANEMARK, P. 1969 Deformation of red blood cells in capillaries. *Science* **164**, 717–719.
- SKALAK, R., TOZEREN, A., ZARDA, R. P. & CHIEN, S. 1973 Strain energy function of red blood cell membranes. *Biophys. J.* **13**, 245–264.
- SKOTHEIM, J. M. & SECOMB, T. W. 2007 Red blood cells and other nonspherical capsules in shear flow : Oscillatory dynamics and the tank-treading-to-tumbling transition. *Phys. Rev. Lett.* **98** (7), 078301.
- STUART, A. M. & HUMPHRIES, A. R. 1998 *Dynamical systems and numerical analysis*. Cambridge University Press.
- SUI, Y., LOW, H. T., CHEW, Y. T. & ROY, P. 2008 Tank-treading, swinging, and tumbling of liquid-filled elastic capsules in shear flow. *Phys. Rev. E* **77** (1), 016310.
- TAYLOR, G. I. 1934 The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proc. R. Soc. Lond. A* **146**, 501–523.
- TRELOAR, L. R. G. 1976 The mechanics of rubber elasticity. *Proc. R. Soc. Lond. A* **351**, 301–322.
- VLAHOVSKA, P. M. & GRACIA, R. S. 2007 Dynamics of a viscous vesicle in linear flows. *Phys. Rev. E* **75** (1), 016313.
- WALTER, A., REHAGE, H. & LEONHARD, H. 2000 Shear-induced deformation of polyamid microcapsules. *Colloid Polymer Sci.* **278**, 169–175.
- WALTER, A., REHAGE, H. & LEONHARD, H. 2001 Shear induced deformation of microcapsules : shape oscillations and membrane folding. *Colloids and Surfaces A : Physicochem. Eng. Aspects* **183-185**, 123–132.
- WANG, Y. & DIMITRAKOPOULOS, P. 2006 A three-dimensional spectral boundary element algorithm for interfacial dynamics in Stokes flow. *Phys. Fluids* **18** (8), 082106.

- WRIGGERS, P. & TAYLOR, R. 1990 A fully non-linear axisymmetrical membrane element for rubber-like materials. *Engrg. Comput.* **7**, 303–310.
- XIANG, Z., LU, Y., ZOU, Y., GONG, X. & LUO, G. 2008 Preparation of microcapsules containing ionic liquids with a new solvent extraction system. *React. Funct. Polym.* **68** (8), 1260–1265.
- YIH, T. & AL-FANDI, M. 2006 Engineered nanoparticles as precise drug delivery systems. *J. Cell. Biochem.* **97** (6), 1184–1190.