HAL
open science

De la rupture des materiaux à comportement fragile

François Hild

To cite this version:

François Hild. De la rupture des materiaux à comportement fragile. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1992. Français. NNT : . tel-00460367

HAL Id: tel-00460367

https://theses.hal.science/tel-00460367

Submitted on 27 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité :

MECANIQUE DES SOLIDES ET DES STRUCTURES

Présentée
à l'Université Pierre et Marie Curie
- PARIS 6 -

par **François HILD**

pour obtenir le titre de :
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

DE LA RUPTURE DES MATERIAUX A COMPORTEMENT FRAGILE

Soutenue le 16 décembre 1992 devant le jury composé de :

A. ZAOUI	Président
J.-J. MARIGO	Rapporteur
S. ROUX	Rapporteur
J. LEMAITRE	Examinateur
D. MARQUIS	Examinateur
J.-F. VITTORI	Examinateur
F.A. LECKIE	Membre invité

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET TECHNOLOGIE
E.N.S. de Cachan / C.N.R.S. / Université Pierre et Marie Curie
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex, France

Titre de la thèse en français

De la rupture des matériaux à comportement fragile

Titre de la thèse en anglais

On the rupture of brittle materials

Résumé de la thèse en français

La rupture des matériaux à comportement fragile est causée par la présence de défauts initiaux. Ces derniers conduisent à une rupture brutale dans le cas de composés monolithiques. Dans le cas de céramiques renforcées par des fibres, la rupture finale est le résultat d'un processus de fragmentation progressive des fibres.

Des essais ont été effectués sur deux céramiques monolithiques et sur des bétons. Ils ont pour but d'étudier l'influence du type de sollicitation et de la distribution initiale de défauts sur la contrainte de rupture.

Une première approche de prévision de la probabilité cumulée de rupture est présentée. Elle tient compte explicitement de la présence des défauts, modélisés par une valeur initiale d'une variable scalaire d'endommagement, dans le calcul du champ de contrainte. Une seconde approche, qui néglige les interactions entre défauts ainsi que leur influence sur le champ de contrainte macroscopique, est ensuite introduite. Elle permet un traitement analytique de l'expression de la probabilité cumulée de rupture en fonction de la distribution initiale de défauts. Une implémentation en tant que post-processeur de code E.F. est ainsi possible. Elle peut également être étendue à des sollicitations cycliques.

Enfin, toutes ces notions peuvent conduire *in fine* à l'élaboration d'une loi d'endommagement anisotrope de céramiques renforcées par des fibres. La condition de rupture fondée sur un critère de localisation conduit à une estimation de l'endommagement critique en fonction du module de Weibull.

Mots-clés

Céramiques
Probabilité cumulée de rupture
Weibull
Chargement monotone
Béton
Défauts initiaux
méthode de Monte-Carlo
Chargement cyclique

Résumé de la thèse en anglais

The rupture of brittle materials is due to initial flaws. In the case of monolithic materials, the latter lead to catastrophic failures. On the other hand, in the case of fiber reinforced ceramics, the final rupture is due to gradual fiber fragmentation.

Experiments were conducted on specimens made of two different ceramics and on concrete. They demonstrate the influence of the stress field pattern and the initial flaw distribution upon the failure stresses.

A first approach to take these initial flaws into account is through an initial value of a scalar damage variable, randomly distributed within the structure according to the flaw distribution. It allows to get the value of the cumulative failure probability. A second approach assumes that interactions between flaws and their influence on the macroscopic stress field is negligible. This approach is implemented as a post-processor to a F.E. code. It also enables to derive a closed-form expression of the cumulative failure probability related to initial flaw distributions. An extension to cyclic loading is given.

Lastly, all these considerations can be utilized to derive a constitutive equation of fiber reinforced ceramics in the framework of continuum damage mechanics. By using the localization theory, the condition of macroscopic rupture can be described by a critical value of a scalar anisotropic damage variable related to the Weibull modulus.

A mes parents, à Anne

Et si nous apprenions un peu de mécanique des matériaux ? Elle montre qu'une philosophie du fragment est conservatrice. Pourquoi ? Prenons un vase ou quelque objet plus solide, grand et construit : plus il est grand, plus il est fragile. Le cassez-vous ? Plus le fragment est petit, plus il résiste. Par conséquent, lorsque vous fabriquez du fragment, vous vous réfugiez en des lieux, en des localités qui résisteront plus que la construction globale [Michel Serres, Eclaircissements, Editions F. Bourin, p. 176].

Avez-vous observé la mode, parmi les savants, du mot "interface" qui suppose qu'entre deux sciences ou entre deux concepts, la jonction, parfaitement dominée ou annulée, ne pose pas vraiment de problème ? Je crois, au contraire, que ces espaces entre sont plus compliqués qu'on ne le pense : c'est pourquoi je les ai comparés au Passage du Nord-Ouest, à des côtes, des îles et des parties de banquise fractales [Michel Serres, Eclaircissements, Editions F. Bourin, p. 106].

Remerciements

Nombreux sont les maîtres, amis et relations qui ont guidé, ou accompagné la préparation et la rédaction de cette thèse. Qu'ils me permettent de les associer aux résultats du travail que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui et qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude à leur égard. Mes remerciements s'adressent en particulier

– à MM. Zaoui, président de jury, Marigo et Roux, rapporteurs.

– à Didier Marquis qui a encadré ce travail au Laboratoire de Mécanique et Technologie. Il m'a permis de m'épanouir tout au long de ma démarche scientifique.

– à Jean Lemaitre dont les conseils et les encouragements m'ont été particulièrement utiles. Grâce à Jean, le cadre géographique dans lequel a commencé ce travail au Laboratoire de Mécanique et Technologie s'est déplacé à la côte ouest des Etats-unis ; en effet, durant 16 mois, j'ai pu poursuivre mes recherches à l'Université de Californie à Santa Barbara.

– à Fred Leckie, chef du département de génie mécanique de l'Université de Californie à Santa Barbara où mes recherches se sont développées dans le cadre d'un contrat avec l'U.S. Air Force. Par sa grande compétence, sa disponibilité et sa paternelle sollicitude Fred, avec la complicité de Liz, son épouse, a créé environnement matériel, scientifique et humain hors du commun. Thank you very much Liz and Fred.

Cette thèse s'est effectuée en partie sur un contrat entre Renault et le Laboratoire de Mécanique et Technologie. Que Madame Amar, Messieurs Guéret, Vittori, Dussaut et Bailloux soient remerciés pour leur participation active à cette collaboration.

J'exprime enfin ma reconnaissance toute particulière à René Billardon dont les discussions tout au long de ce travail ont été très appréciables, ainsi qu'à Jean-Yves Cognard. Beaucoup d'autres personnes ont participé de près ou de loin à ce travail, en France comme aux Etats-Unis. Je ne puis toutes les citer nommément, mais je les prie de trouver, ici, l'expression de ma gratitude.

Table des matières

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 : ANALYSE EXPERIMENTALE DE LA RUPTURE DE MATERIAUX A COMPORTEMENT FRAGILE 4

Notations 5
1. Comportement expérimental de l'alumine (Al_2O_3) 7
   1.1. Propriétés physiques et microstructure de l'alumine 7
   1.2. Résultats d'essais de traction 10
2. Comportement expérimental du nitrure de silicium (Si_3N_4) 13
   2.1. Propriétés physiques et microstructure du nitrure de silicium 13
   2.2. Résultats et analyse d'essais de traction monotone 15
      2.2.1. Résultats d'essais de traction monotone 15
      2.2.2. Analyses fractographiques 17
   2.3. Résultats et analyse d'essais de traction cyclique 21
      2.3.1. Résultats d'essais de fatigue 21
      2.3.2. Analyse de raideur 22
      2.3.3. Analyses fractographiques 22
   2.4. Analyses d'essais de flexion monotone 24
      2.4.1. Essais de flexion 4 points 24
      2.4.2. Essais de flexion 3 points 24
      2.4.3. Essais de flexion biaxiale 25
      2.4.4. Effet de volume 26
3. Comportement expérimental du béton avec défauts 27
   3.1. Effet de volume 27
   3.2. Effet d'hétérogénéité des contraintes 27
   3.3. Effet de la distribution des défauts 28
4. Découplage des effets expérimentaux : effets D.V.H. 38
   4.1. Effet V : effet de volume 40
   4.2. Effet H : effet d'hétérogénéité des contraintes 41
   4.3. Analyse des résultats par le volume effectif 41
   4.4. Effet D : effet de la distribution des défauts 43
5. Conclusions 44

CHAPITRE 2 : APPROCHE ENTIEREMENT COUPLEE DE LA RUPTURE DE MATERIAUX A COMPORTEMENT FRAGILE 45

Notations 46
1. Introduction 49
2. Une approche entièrement couplée 50
   2.1. Modélisation physique de la distribution de défauts 50
   2.2. Modélisation mécanique du V.E.R. 52
   2.3. Etude de la rupture locale 54
3. Simulation des effets D.V.H. pour les matériaux à comportement fragile 60
   3.1. Etude de la dispersion 60
   3.2. Effet V : effet de volume 62
   3.3. Effet H : effet d'hétérogénéité des contraintes 63
   3.4. Effet D : effet de la distribution des défauts 65
      3.4.1. Etude de l'influence du maillage sur le champ de contrainte et sur l'effort de rupture 69

3.4.2. Etude de l'influence du maillage sur la discrétisation du champ d'endommagement initial 74
4. Conclusions 76

CHAPITRE 3 : APPROCHE LOCALEMENT COUPLEE DE LA RUPTURE DE MATERIAUX A COMPORTEMENT FRAGILE 77

Notations 78
1. Une approche localement couplée 82
2. Mise en oeuvre numérique de l'approche localement couplée 83
2.1. Effet de la distribution des défauts 83
2.2. Etude de l'influence du maillage à champ d'endommagement constant sur le V.E.R. 85
2.3. Simulation des effets D.V.H. pour les matériaux à comportement fragile 87
3. Etude analytique de l'approche localement couplée 90
3.1. Hypothèses du maillon le plus faible et indépendance des événements 90
3.2. Distribution de défauts et probabilité de rupture 91
3.3. Etude mésomécanique de la rupture d'un maillon 92
3.3.1. Cas général uniaxial 93
3.3.1.1. Cas où la taille maximale de défaut est bornée 94
3.3.1.2. Cas où la taille maximale de défaut n'est pas bornée 95
3.3.2. Applications 95
3.3.2.1. Mécanique linéaire de la rupture 95
3.3.2.2. Mécanique de l'endommagement continu 96
3.3.3. Cas bidimensionnel 98
3.3.3.1. Cas où la taille maximale de défaut est bornée 98
3.3.3.2. Cas où la taille maximale de défaut n'est pas bornée 99
3.3.4. Cas tridimensionnel 99
3.3.5. Analyse des essais sur nitrure de silicium 100
4. Simulations pour une fonction de répartition bêta 102
4.1. Effet D : effet de la distribution de défauts 103
4.1.1. Simulations numériques 103
4.1.2. Etude analytique 103
4.2. Effet V : effet de volume 104
4.2.1. Simulations numériques 104
4.2.2. Etude analytique 105
4.3. Effet H : effet d'hétérogénéité des contraintes 106
4.3.1. Simulations numériques 106
4.3.2. Etude analytique 107
4.3.2.1. Introduction des facteurs d'hétérogénéité des contraintes 107
4.3.2.2. Remarque 109
4.3.2.3. Facteurs d'hétérogénéité des contraintes de Weibull 110
4.3.2.4. Application à la rupture des matériaux à comportement fragile 110
4.3.2.5. Un essai de discrimination des facteurs d'hétérogénéité des contraintes d'ordre n 112
4.4. Analyse des essais monotones sur nitrure de silicium 113
5. Etude de la probabilité de rupture d'une structure 116
6. Extensions au cas de chargements cycliques 117
6.1. Quelques propriétés pour les chargements cycliques 120
6.2. Simulations de la probabilité de rupture en fatigue 121
7. Conclusions 125

CHAPITRE 4 : ANALYSE DE LA RUPTURE DE CERAMIQUES RENFORCEES PAR DES FIBRES 126

Notations 127
1. Introduction : comment renforcer les céramiques 130

2. Mécanismes de rupture de matrices céramiques renforcées par des fibres céramiques 132
2.1. Fissuration matricielle et décohésion fibre-matrice 133
2.2. Fragmentation des fibres 135
3. Etude de la contrainte ultime de traction 139
3.1. Expression de la contrainte ultime de traction 139
3.2. Comparaison avec des résultats expérimentaux 143
4. Etude de la résistance ultime dans le cadre de la localisation 145
4.1. Localisation et perte d'unicité 145
4.2. Particularisation 146
4.3. Applications à des structures tournantes 150
5. Conclusions 153

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 154

ANNEXE 156

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 161

INTRODUCTION

L'objectif de ce mémoire est la prise en compte des défauts initiaux dans la prévision de la rupture de matériaux à comportement fragile. En effet dans la plupart des matériaux à comportement fragile, les défauts initiaux sont la principale cause de rupture.

La prise en compte de défauts initiaux s'inscrit dans une stratégie de conception de structures contenant des défauts. Cette stratégie commence a être employée dans l'aéronautique où les composants tels que les disques de turbine sont conçus en tenant compte de l'influence des défauts sur leur tenue mécanique. Cette technique est également appliquée dans le domaine de l'automobile où sont utilisés des matériaux tels que les céramiques techniques ou des fontes à graphite sphéroïdal. Dans tous les cas la prise en compte de la nocivité des défauts pour la conception et la maintenance des structures devient nécessaire.

Bien que contrôlés, les matériaux à comportement fragile renferment des inclusions, des porosités, des retassures,... dont la présence est liée à la structure même du matériau et/ou au mode d'obtention. Ces défauts initiaux risquent ainsi de donner lieu à un amorçage et à la propagation catastrophique d'une fissure. Il apparaît donc nécessaire de construire des modèles mécaniques dans lesquels les aspects statistiques liés à la distribution aléatoire de ces défauts sont pris en considération. Cette prise en compte peut passer par l'analyse des mécanismes de détérioration et leur modélisation dans le cadre de la mécanique des milieux continus. La mécanique de l'endommagement continu et la mécanique linéaire de la rupture présentent deux voies possibles.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à l'analyse du comportement de deux céramiques techniques (alumine et nitrure de silicium) ainsi que d'une céramique plus classique (béton). La première partie porte sur l'étude du comportement expérimental de l'alumine, et la seconde partie à celui de la rupture en traction du nitrure de silicium. La troisième partie consiste en l'analyse de l'influence de la distribution de défauts initiaux dans le cas d'une série d'essais sur un matériau modèle (béton). Tous ces essais permettent de caractériser l'effet des défauts initiaux sur la contrainte de rupture macroscopique ce qui est analysé dans la quatrième partie.

Le second chapitre est consacré au développement d'une méthode de prévision de la rupture en prenant directement en compte la distribution de défauts dans un calcul de structure : cette approche est dite entièrement couplée. Elle est ensuite utilisée afin de simuler numériquement les effets des défauts sur la contrainte de rupture macroscopique, en particulier pour les essais sur matériau modèle présentés dans le permier chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation d'une méthode de prévision de la rupture en ne prenant en compte la distribution de défauts qu'en aval d'un calcul de structure : cette approche est dite localement couplée. Cette approche néglige l'influence de la distribution des défauts sur le champ de contrainte macroscopique. Toutes les analyses numériques effectuées montrent que cette approche donne des résultats conservatifs par rapport à l'approche entièrement couplée. Elle peut être soit numérique, soit analytique. Dans le cas analytique, des corrélations avec une loi de Weibull sont obtenues et les effets de la distribution de défauts sur la contrainte de rupture sont analysés de manière très générale. Les essais sur du nitrure de silicium sont ensuite analysés. Enfin une extension dans le cas de sollicitations de fatigue est effectuée.

Le quatrième chapitre porte sur l'étude de la rupture de céramiques renforcées par des fibres en céramique. Ce chapitre résume une partie du travail effectué à l'Université de Californie à Santa Barbara (U.S.A.) [Hild, 1992] effectué sous la direction du Professeur Frederick A. Leckie. L'association de matrices céramiques avec des fibres céramiques constitue l'une des possibilités de renforcer les céramiques et permet de rendre la rupture moins brutale sans pour autant devenir ductile. Après avoir analysé les mécanismes de détérioration de ce type de composite, on se concentre sur la phase proche de la résistance ultime. Celle-ci est étudiée en traction en postulant que le mécanisme fondamental d'amorçage des fissures responsables de la rupture macroscopique du composite est à nouveau due à des défauts initiaux dans les fibres. Elle est généralisée à des sollicitations bidimensionnelles dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu et de la théorie de la localisation. Le composite est considéré comme un milieu

homogène endommageable dont l'endommagement initial est défini en fonction de la statistique de défauts. Un critère de rupture est déduit de cette étude de localisation. Il peut s'exprimer soit en fonction de la contrainte ultime de traction du matériau, soit en fonction d'un paramètre de la densité de répartition des défauts. Deux structures tournantes sont étudiées par deux approches. L'approche entièrement couplée conduit à une analyse par éléments finis en utilisant une loi d'élasticité couplée à l'endommagement et le critère de localisation. Cette première approche est comparée à une approche découplée qui consiste en un calcul purement élastique car avec l'utilisation d'un critère de rupture qui ne fait pas explicitement référence à l'endommagement.

CHAPITRE 1

ANALYSE EXPERIMENTALE DE LA RUPTURE DE MATERIAUX A COMPORTEMENT FRAGILE

Notations

$< . >$	crochets de Macauley (i.e. partie positive)
a	taille de défaut initial
D	diamètre de défaut initial
E	module d'Young
Γ	fonction eulérienne de seconde espèce
H_m	facteur d'hétérogénéité des contraintes de Weibull
i	indice de maillon
K_I	facteur d'intensité des contraintes en mode I
K_{Ic}	facteur d'intensité des contraintes critique
M	nombre d'essais, point courant
P_F	probabilité cumulée de rupture de la structure Ω
P_{Fi}	probabilité cumulée de rupture du i-ème maillon
R_a	rugosité effective
σ	contrainte de traction à l'infini
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes
$\sigma(M)$	contrainte uniaxiale du point M de la structure Ω
S_0 , S_u , V_0 , m	paramètres du modèle de Weibull
σ_0, δ_0	paramètres du modèle de Dugdale
σ_1, σ_2, et σ_3	contraintes principales
σ_F	contrainte de rupture
σ_{Fi}	contrainte de rupture du i-ème maillon
$\bar{\sigma}_F$	contrainte moyenne de rupture
V	volume d'une structure Ω
V_{eff}	volume effectif
$\lVert \boldsymbol{\sigma} \rVert$	contrainte équivalente arbitraire

Ce premier Chapitre est consacré à l'analyse expérimentale de la rupture de matériaux à comportement fragile. Par comportement fragile, nous entendons des matériaux dont les réponses contrainte–déformation macroscopiques sont essentiellement linéaires. D'autre part, pour ce type de matériaux, la déformation totale à rupture ne dépasse pas quelques 10^{-2}. Ceci est notamment le cas des céramiques massives (par exemple le nitrure de silicium et l'alumine), des bétons et des composites à matrice céramique renforcés par des fibres longues. Ces matériaux sont plus particulièrement analysés dans ce document.

La première partie (§ 1 et 2) de ce Chapitre concerne l'analyse de la rupture en traction de deux céramiques massives : d'une part l'alumine et d'autre part le nitrure de silicium. Cette analyse est rendue possible par la mise au point d'un montage d'essai de traction pour des matériaux à comportement fragile. Dans le cas du nitrure de silicium, les essais sont comparés à d'autres types d'essais en flexion. Des essais de fatigue en traction sont également réalisés sur du nitrure de silicium.

Dans la seconde partie (§3), nous étudions la rupture d'éprouvettes en béton dans le cas où la population des défauts est contrôlée. Dans ce cas, un seul type d'essai est envisagé (i.e. la flexion 4 points), et seule la distribution spatiale de défauts est modifiée.

A l'aide de ces deux analyses expérimentales et d'essais rapportés dans la littérature, nous analysons qualitativement dans la dernière partie (§4) l'influence des défauts sur la rupture de matériaux à comportement fragile.

1. Comportement expérimental de l'alumine (Al_2O_3)

1.1. Propriétés physiques et microstructure de l'alumine

L'alumine est une céramique à liaison ionique prépondérante. La liaison ionique est essentiellement obtenue par un lien entre un métal et un non métal (l'alumine (Al_2O_3), la magnésie (MgO), la zircone (ZrO_2), ...). Les deux composants ont des charges électriques opposées. Les forces électrostatiques sont la principale cause de liaison. Ainsi, les ions sont disposés de manière très dense (pour avoir en regard le plus possible de charges de signe opposé) avec la restriction que les ions de même charge ne doivent pas se toucher. L'alumine (Al_2O_3) est constituée d'un assemblage d'ions O^{2-} en structure hexagonale compacte, les ions Al^{3+} remplissant les deux tiers des sites octaédriques pour réaliser l'équilibre électrique entre les charges : cf. Figure 1.1.

Figure 1.1 : Structure de l'alumine (Al_2O_3).

Le lien ionique (comme le lien métallique) est de nature électrostatique. Ainsi, lorsqu'une dislocation traverse un plan atomique à 45° (Figure 1.2), les cations ne se retrouvent pas en face d'ions de même signe : le passage est très facile. Par contre, quand la dislocation traverse horizontalement (Figure 1.2), les ions de même signe se retrouvent en regard ; ce qui met en oeuvre des énergies considérables. Sachant que la plupart des céramiques ioniques sont polycristallines, les possibilités de mouvement de dislocations étant très limitées, ces matériaux sont très durs.

Figure 1.2 : Le mouvement d'une dislocation à travers une structure ionique est difficile dans certains plans et plus facile dans d'autres (l'aspect difficile prédomine).

En revanche, la plasticité ne pouvant pas se développer, ce type de matériaux n'emmagasine que très peu d'énergie, et a donc une faible résilience : ceci conduit à un comportement fragile (les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes critiques sont d'un ordre de grandeur inférieur à celles des métaux). Pour l'alumine, le facteur d'intensité des contraintes critique, K_{Ic}, est de l'ordre de 4 MPa$\sqrt{m}$ pour des essais macroscopiques. On notera cependant qu'un modèle faisant intervenir une zone de cohésion (modèle de Dugdale [Dugdale, 1960] par exemple) avec une contrainte de cohésion constante, σ_0 de l'ordre de 40 GPa (i.e. E/10, où E correspond au module d'Young de l'alumine), et une longueur de cohésion, δ_0, de l'ordre de 1 Å (représentative de l'alumine), prédit un facteur d'intensité des contraintes critiques de l'ordre de 1.3 MPa$\sqrt{m}$ ($=\sqrt{E\sigma_0\delta_0}$)! La valeur trois fois plus élevée observée expérimentalement peut s'expliquer par trois mécanismes différents [Hutchinson, 1988]. La première cause serait due à la bifurcation de la fissure lors de son avancée le long des joints de grain. La seconde cause serait la création d'un réseau de micro-fissures à l'avant de la pointe de fissure qui ferait écran à la fissure principale. Enfin un pontage dû à des grains non rompus à l'arrière de la pointe de fissure pourrait également être la cause d'une augmentation de la résilience. Malgré certaines observations expérimentales, aucune conclusion définitive n'a pu être tirée.

D'autre part, de nombreuses céramiques ne sont pas entièrement denses. On observe des porosités allant jusqu'à 20% du volume apparent. Les pores constituent autant d'amorces de fissures. D'autres défauts apparaissent également aux joints de grains. Ils sont dus à des contraintes d'origine thermique ou mécanique (Figure 1.3).

Figure 1.3 : Microstructure d'une céramique cristalline : grains, joints de grains, pores, microfissures et phases secondaires (d'après [Ashby et Jones, 1986]).

Les défauts sont dus à la fabrication. Les céramiques techniques ayant des points de fusion très hauts (plus de 2000 K), les processus de fonderie ou de fusion ne sont pas envisageables. Comme ces matériaux ne présentent pratiquement pas de plasticité, on ne peut pas faire appel aux techniques de mise en forme et d'usinage utilisées pour les métaux. Ainsi les céramiques techniques sont élaborées à partir de poudres qui sont pressées, séchées (ou chamottées) et cuites de différentes manières.

Le frittage (c'est-à-dire l'agglomération de particules sous phase solide) est directement lié au mécanisme de diffusion des atomes. Les particules sont, suivant le cas, préalablement compactées (à froid) pour former un "cru". Lors du frittage, les particules forment des liaisons appelées "cous" ou "ponts de raccordement" en réduisant les surfaces libres donc en densifiant le composant. Il subsiste néanmoins une porosité dite "porosité résiduelle" qui n'a que peu d'influence sur le comportement mécanique. Lorsque la poudre est compactée puis cuite (aux alentours de deux tiers de la température absolue de fusion), le processus de diffusion est très rapide. De plus, lors du frittage la taille des grains formés augmente, si bien que la taille des grains est plus grande que la taille initiale des particules. Pour augmenter la densité et diminuer la taille des grains, on peut faire appel au procédé de pressage à chaud : on applique simultanément de fortes températures et pressions. La poudre est compactée soit dans une matrice (pressage

uniaxial à chaud) soit enfermée dans une enveloppe mince et compactée dans une enceinte sous pression (pressage isostatique à chaud). La diffusion pilote toujours le frittage ; l'application d'une pression permet de diminuer le temps de frittage, mais il subsiste une porosité résiduelle.

Pour annuler la porosité résiduelle (avec perte des caractéristiques mécaniques à haute température), on peut rajouter de faibles quantités d'additifs. Ainsi, l'adjonction d'un peu de magnésie (MgO) lors du frittage de l'alumine (Al_2O_3) ou du nitrure de silicium (Si_3N_4) permet non seulement de diminuer la porosité mais également d'augmenter la vitesse de frittage. Ces additifs réagissent avec la poudre pour former une phase vitreuse qui fond et coule entre les grains. C'est un frittage sous phase liquide. Les deux autres types de frittage sont le frittage sous phase solide (grâce aux propriétés viscoplastiques des grains) et sous phase gazeuse (par des processus d'évaporation–condensation : cf. [Kingery et al., 1976]).

Il peut apparaître des défauts de frittage sous forme de pores de plusieurs dizaines de microns ou d'inclusions si la poudre et les manipulations ne sont pas suffisamment contrôlées. Ces *défauts initiaux* (présents avant toute application de chargement mécanique) déterminent, comme nous allons le voir par la suite, la résistance mécanique de la céramique. C'est pourquoi, de récents développements tendent à améliorer les procédés d'obtention des céramiques en vue de diminuer ces défauts créés lors de la fabrication du matériau [Hoshide et al., 1984], [Lucas, 1990].

1.2. Résultats d'essais de traction

Dans ce paragraphe, les résultats obtenus sur une alumine fournie par Renault sont présentés. Contrairement aux matériaux à comportement ductile, lorsque l'on effectue plusieurs fois le même essai, on n'observe pas la même contrainte de rupture dans le cas de matériaux à comportement fragile. Ceci nécessite de faire un nombre suffisant d'essais pour qu'ils soient représentatifs du matériau. Les essais présentés ici sont effectués sur un montage de traction développé dans le cadre de cette étude (cf. Annexe). Les résultats sont présentés en terme de probabilité cumulée de rupture, P_F, en fonction de la contrainte appliquée, σ_F. Si l'on effectue M fois le même type d'essai et si l'on ordonne les contraintes de rupture par ordre croissant : $\sigma_{F1} \leq \sigma_{F2} \leq ... \leq \sigma_{Fi} \leq ... \leq \sigma_{FM}$, on peut alors définir la probabilité cumulée de rupture P_{Fi} associée à la i-ème contrainte de rupture σ_{Fi} par :

$$P_{Fi} = \frac{i}{M+1} \tag{1.1}$$

et la contrainte moyenne de rupture $\bar{\sigma}_F$:

$$\bar{\sigma}_F = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\sigma_{Fi} \tag{1.2}$$

Sur une série de seize éprouvettes en alumine (Al_2O_3), la rupture a toujours eu lieu dans la partie cylindrique de révolution (zone utile). On obtient un diagramme probabilité cumulée de rupture, P_F, en fonction de la contrainte de rupture, σ_F donné en Figure 1.4.

Figure 1.4 : Probabilité cumulée de rupture en traction sur de l'alumine.

En supposant que le défaut de rupture est en forme de disque (*penny-shaped crack*), le facteur d'intensité des contraintes en mode I, K_I, est donné par :

$$K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}} \tag{1.3}$$

où σ représente la contrainte de traction à l'infini, et a le rayon du disque d'épaisseur négligeable. A la contrainte moyenne de rupture (de l'ordre de 240 MPa) correspond une taille de défaut de l'ordre de 55 µm de rayon (pour K_{Ic} de l'ordre de 2 MPa$\sqrt{m}$). Ce premier calcul montre que l'ordre de grandeur du défaut qui conduit à la rupture de ce type d'alumine est nettement supérieur à la taille des grains (de l'ordre de 10 µm). Enfin, des observations micrographiques lors de cette première série d'essais montrent que les

défauts initiaux sont à l'origine de la rupture des éprouvettes d'alumine en traction et que la taille des défauts initiaux est de l'ordre de plusieurs dizaines de microns.

2. Comportement expérimental du nitrure de silicium (Si_3N_4)

2.1. Propriétés physiques et microstructure du nitrure de silicium

Le nitrure de silicium est une céramique à liaison covalente prépondérante. Dans ce cas tous les composants sont non métalliques. Un atome crée une liaison avec ses voisins en partageant des électrons pour obtenir un nombre donné de liaisons directionnelles (données par les orbitales atomiques).

Contrairement aux structures ioniques, les structures covalentes ne conduisent pas à la structure la plus dense. Ainsi le diamant est composé de quatre arrangements tétraédriques de carbone en quinconce dans un cube : chaque atome de carbone est au centre d'un tétraèdre dont les liaisons sont dirigées vers les quatre coins du tétraèdre (Figure 1.5.1). Ce type d'assemblage n'est pas dense (il faudrait douze voisins au lieu de

Figure 1.5.1 : Structure cristalline du diamant.

Figure 1.5.2 : Structure cristalline du carbure de silicium.

quatre). Les structures du carbure de silicium (SiC) et du nitrure de silicium (Si_3N_4) sont très proches de celle du diamant. Par exemple, pour le carbure de silicium (SiC), chaque second atome de carbone est remplacé par un atome de silicium (Figure 1.5.2). Ces céramiques qui sont parmi les plus dures, ont des points de fusion très hauts, et de faibles conductivités électriques à basse température (lorsque le composé est pur).

Les liaisons ioniques et covalentes sont plus fortes que les liaisons métalliques. Ceci explique d'une part des valeurs de module d'Young plus importantes que celles des métaux (400 GPa pour l'alumine, et 320 GPa pour le nitrure de silicium), et d"autre part des valeurs de la température de fusion plus élevées (2300 K pour l'alumine, et 2200 K pour le nitrure de silicium). Les liaisons covalentes sont localisées et se comportent comme des liens élastiques. Lorsqu'une dislocation les traverse, elle doit casser puis reformer la liaison (Figure 1.6). Ainsi la plasticité peut difficilement se développer à

température ambiante. Pour le nitrure de silicium, le facteur d'intensité des contraintes critiques, K_{Ic}, est de l'ordre de 5 MPa$\sqrt{m}$.

Figure 1.6 : Le mouvement d'une dislocation à travers une structure covalente est difficile (les liaisons doivent être rompues puis reformées).

Dans le cas du nitrure de silicium (Si_3N_4), il existe en-dehors des procédés d'obtention présentés dans le paragraphe précédent, un procédé de frittage par réaction (moins coûteux). Lorsqu'une poudre de silicium est chauffée sous atmosphère riche en azote, on a une réaction immédiate lors du frittage :

$$3Si + 2N_2 \rightarrow Si_3N_4$$

En pratique, les composés précédents sont mélangés avec un polymère pour rendre l'ensemble plastique. Pour mettre en forme l'ensemble, on peut ainsi utiliser des techniques conçues initialement pour les matières plastiques Lors du chauffage, la phase plastique est brûlée et il ne reste que la céramique très dense, dont les formes peuvent être complexes. Ce procédé peut également être combiné à un pressage isostatique à chaud.

Enfin, certaines céramiques (par exemple le nitrure de silicium (Si_3N_4)) peuvent être obtenues par dépôts sous phase gazeuse. Des défauts voisins de ceux observés en fonderie (dendrites) sont présents dans ces céramiques et conduisent à des propriétés mécaniques plus faibles que celles obtenues par l'un des procédés précédents.

2.2. Résultats et analyse d'essais de traction monotone

2.2.1. Résultats d'essais de traction monotone

18 éprouvettes sont testées avec le montage de traction (cf. Annexe). Les échantillons sont fabriqués (par rectification) à partir de barres (diamètre : 18 mm) de nitrure de silicium pressé isostatiquement à froid (SN 220M, Kyocera, Kyoto, Japon, masse volumique : 3200 kg/m^3). La rugosité effective, R_a est inférieure à 0.6 µm. Les essais sont effectués avec asservissement du déplacement du vérin de la machine d'essai à une vitesse de 5.10^{-2} mm/s. Le comportement du nitrure de silicium est élastique fragile (Figure 1.7).

Figure 1.7 : Réponse contrainte-déformation d'une éprouvette en traction.

Il n'y a ni non-linéarité, ni adoucissement : la rupture est brutale au pic. Par contre il y a une dispersion importante sur la contrainte de rupture qui varie entre 374 MPa et 635 MPa (Figure 1.8). La contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, est égale à 526 MPa.

Le diagramme dit "de Weibull" est une manière classique de présenter ces résultats [Weibull, 1939] : on trace $\ln(\ln(1/(1-P_F)))$ en fonction de $\ln(\sigma_F)$. En effet, dans le cas de la traction, une loi de Weibull à deux paramètres s'écrit [Weibull, 1939], [Weibull, 1951] :

$$P_F = 1 - \exp\left\{-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma_F}{S_0}\right)^m\right\} \tag{1.4}$$

où S_0 correspond à la contrainte dite "de Weibull", m à l'exposant dit "de Weibull", V_0 à un volume de référence (par exemple, le volume de la partie utile des éprouvettes pour lesquelles l'identification des paramètres a eu lieu), et V au volume de la structure analysée (ici pris égal à V_0). Les deux paramètres de la loi sont m et le produit $V_0 S_0^m$. On remarquera que cette loi, postulée de manière entièrement heuristique, ne prend pas directement en compte la cause de la rupture (i.e. les défauts initiaux). Si un matériau obéit à une loi de Weibull, la relation entre $\ln(\ln(1/(1-P_F)))$ et $\ln(\sigma_F)$ est linéaire. Dans le cas des essais effectués sur le nitrure de silicium, la Figure 1.9 montre le type de corrélation que l'on peut obtenir.

Figure 1.8 : Probabilité cumulée de rupture en traction sur du nitrure de silicium.

Figure 1.9 : Essais de traction sur du nitrure de silicium présentés dans un diagramme de Weibull.

La valeur du paramètre de Weibull m est de 8.0 et de la contrainte de Weibull S_0 est de 1360 MPa pour la loi à deux coefficients (1.4) avec une identification par la méthode des moindres carrés ($V_0 = 1\ mm^3$).

2.2.2. Analyses fractographiques

Cette analyse a été effectuée à la Régie Renault sous la direction de Madame Elisabeth Amar. L'analyse fractographique a pour but de déterminer le lieu, la taille et la nature du défaut sur lequel s'est amorcée la rupture. Ces observations sont faites dans un microscope électronique à balayage. Pour les céramiques, le lieu d'amorçage est caractérisé par une zone dite "miroir" très lisse (Figure 1.10). En dehors de cette zone, le faciès de rupture est très accidenté.

Figure 1.10 : Faciès de rupture au microscope optique.

Figure 1.11 : Définition de la taille D d'un défaut.

La première étape consiste donc à localiser cette zone. La seconde consiste à trouver le défaut proprement dit, et sa taille, D = 2*a* (Figure 1.11).

Sur les 18 essais effectués, 17 ont conduit à des ruptures en volume. La taille des défauts d'amorçage de la rupture varie entre 20 et 250 µm (Figure 1.12).

Figure 1.12 : Corrélation entre la contrainte de rupture et la taille du défaut ayant conduit à la rupture en traction pour le nitrure de silicium.

Les courbes sont tracées à partir de l'équation $\sigma_F = K_{Ic}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{D}}$.

Ces résultats montrent une corrélation entre la contrainte à rupture et la taille du défaut sur lequel s'amorce la rupture : plus le défaut est petit, plus la contrainte à rupture, en moyenne, est grande. On remarquera qu'à part le plus gros défaut de taille 250 µm, tous les autres correspondent à des facteurs d'intensité des contraintes critiques inférieurs à la valeur maximale généralement admise pour le nitrure de silicium (5 MPa$\sqrt{m}$). Pour les défauts de petite taille, une corrélation de type $\sigma_F D^{1/2}$ = constante est mise à défaut, comme il avait été observé dans le cas du béton par Bazant et Oh [Bazant et Oh, 1983].

Les défauts sont soit des porosités, soit des inclusions (Figures 1.13). Ces défauts sont typiques du mode d'obtention des céramiques massives. On voit ici toute l'importance de la maîtrise du mode d'obtention de ces matériaux quant à leur résistance à la rupture.

Grâce à l'homogénéité du champ des contraintes, les défauts de surface ne jouent pas un rôle prépondérant (contrairement à ce qui est observé lors d' essais de flexion). D'autre part, quelle que soit la taille du défaut d'amorçage, ce défaut est probablement le plus grand de l'éprouvette (i.e. correspond au maillon le plus faible [Weibull, 1951], [Freudenthal, 1968]). Cette première série d'essais montre que les défauts *initiaux*

conduisent à la rupture dans le cas d'essais en traction monotone. D'autre part, ces essais montrent qu'on ne peut plus parler pour les matériaux à comportement fragile, d'*une* contrainte à rupture mais d'*une* contrainte à rupture pour *une* probabilité de rupture donnée.

Figure 1.13.1 : Fractographie d'une trace d'inclusion riche en fer (D = 250 μm).

Figure 1.13.2 : Fractographie d'une porosité (D = 150 μm).

2.3. Résultats et analyse d'essais de traction cyclique

Les céramiques techniques utilisées dans les moteurs à allumage commandé de l'industrie automobile la plupart du temps sont soumises à des sollicitations répétées (axe de piston, culbuteur, ...). Il s'agit ainsi d'étudier leur tenue et leur comportement à la fatigue. Comme pour l'essai de traction monotone, il s'agit de mettre au point une stratégie d'essais de fatigue de traction ondulée (cf. Annexe).

2.3.1. Résultats d'essais de fatigue

Le type d'essai envisagé est un essai de traction ondulée. Le pilotage de l'essai est à effort imposé à 10 Hz. L'essai se déroule par blocs de 10000 cycles. Chaque bloc se décompose en deux étapes. La première étape est constituée d'un cycle à 5.10^{-3} Hz. La seconde étape est constituée de 9999 cycles à 10 Hz. Les niveaux de chaque bloc sont déterminés de la manière suivante : le premier niveau correspond à une probabilité de rupture en traction monotone de 10% (soit 422 MPa : cf. Figure 1.14), le second niveau correspond à 20% (soit 470 MPa), etc. Chaque essai est mené jusqu'à rupture de l'éprouvette. 17 essais ont été effectués. 7 essais ont conduit à un nombre de cycles de rupture égal à 1 (c'est-à-dire correspondant à un essai monotone : d'où l'intérêt du premier cycle de chaque bloc conduit à une fréquence plus faible que les 9999 suivants).

Figure 1.14 : Résultats des essais de fatigue avec la stratégie employée.

2.3.2. Analyse de raideur

Lors d'un des essais, quatre jauges ont été collées sur la circonférence de l'éprouvette. Le premier objectif est de vérifier l'homogénéité des déformations et par là de vérifier l'homogénéité du chargement. Les résultats sont très voisins de ceux observés en traction monotone (cf. Figure A.2 en Annexe). Le second objectif est de suivre l'évolution de la raideur tous les 2000 cycles (cf. Figure 1.15). Il n'apparaît pas d'évolution significative du module d'Young en fonction du nombre de cycles effectués. Contrairement à l'étude d'éprouvettes en béton soumises à des sollicitations de fatigue [Bazant et Xu, 1989], la méthode de la complaisance ne donne pas de résultats très probants dans le cas du nitrure de silicium (la variation est inférieure à 1%).

Figure 1.15 : Evolution du module d'Young en fonction du nombre de cycles (éprouvette N°3, nombre de cycles à rupture : 28600, contrainte de rupture : 507 MPa).

2.3.3. Analyses fractographiques

Les analyses fractographiques ont pour but :

– d'une part de déterminer la cause de rupture,

– d'autre part d'analyser les couches proches du faciès de rupture afin d'observer une éventuelle microfissuration créée par le processus de dégradation par fatigue.

Les faciès de rupture par fatigue observés à la loupe binoculaire et au microscope électronique à balayage sont pratiquement identiques à ceux observés lors de rupture sous chargement monotone. La "zone miroir" existe également. Le Tableau 1.1 résume les données expérimentales collectées lors de la campagne d'essai.

On pourra remarquer dans un premier temps que la plupart des ruptures au premier cycle de chargement sont vraisemblablement dues à des défauts liés à l'usinage: l'amorçage a lieu en surface. Ce phénomène a été plus rare pour le premier lot d'éprouvettes : ceci peut s'expliquer par le fait que le lot d'éprouvettes n'a pas été usiné en même temps que celles testées en traction monotone.

Enfin, les défauts initiaux jouent encore un rôle prépondérant dans le cas de chargement cycliques pour les céramiques techniques. Ces résultats montrent également qu'un phénomène de rupture par fatigue des céramiques techniques est possible (cf. remarque dans [Evans, 1980]).

Eprouvette	Nombre de cycles à rupture	Contrainte de rupture (MPa)	Cause de rupture
1	33275	523	?
2	1512	422	Porosité en volume (60 µm)
3	28600	507	Porosité en volume
4	1	317	Porosité en volume
5	20001	510	Porosité en volume (100 µm)
6	11820	467	Porosité en volume
7	10001	469	?
8	22123	507	Porosité de volume (150 µm)
9	45716	545	Porosité de volume (120 µm)
10	20001	503	Porosité de volume (160 µm)
11	1	317	Rupture en surface
12	1	333	Rupture en surface
13	1	313	Rupture en surface
14	1	353	Rupture en surface
15	1	351	Rupture en surface
16	2431	402	Porosité en volume
17	1	403	Porosité en volume ?

Tableau 1.1 : Résultats des essais de traction ondulée sur du nitrure de silicium.

2.4. Analyses d'essais de flexion monotone

L'ensemble de ces essais a été réalisé à la Régie Renault [Amar et al., 1989], [Hild et al., 1992] sous la responsabilité de Madame Elisabeth Amar. Cette partie les résume afin d'en comparer les résultats à ceux des essais de traction monotone.

2.4.1. Essais de flexion 4 points

Les éprouvettes sont des parallélépipèdes dont la taille est de 35 x 4 x 3 mm^3, la rugosité R_a est inférieure à 1 µm. Cent échantillons sont obtenus à partir de nitrure de silicium pressé isostatiquement à froid. La distance entre les deux point d'appui est de 24 mm et celle entre les deux points d'application de l'effort est de 12.5 mm. La contrainte à rupture correspond à la valeur de la plus grande contrainte dans la structure (pour l'effort de rupture enregistré) calculée en théorie des poutres. La courbe effort-déplacement a la même allure que celle donnée sur la Figure 1.7. Il y a également une dispersion sur les contraintes de rupture qui varient entre 448 MPa et 780 MPa (Figure 1.16). Par contre la taille des défauts de volume (88% des causes de rupture) varie entre 15 et 110 µm. Ces défauts sont tous situés dans la zone en traction. De plus, pour ce type de chargement, les plus gros défauts ne sont pas obligatoirement détectés parce qu'ils ne se trouvent pas forcément dans une zone critique. En effet, la nocivité d'un défaut est donnée non seulement par sa taille mais également par les contraintes qui lui sont appliquées. Enfin la contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, est supérieure à celle observée en traction (629 MPa contre 526 MPa) Le paramètre de Weibull m est égal à 8.9 et la contrainte de Weibull S_0 est égale à 875 MPa pour une loi à deux coefficients avec une identification par la méthode des moindres carrés (V_0 = 1 mm^3).

2.4.2. Essais de flexion 3 points

La taille des cinquante éprouvettes est de 70 x 4 x 3 mm^3, les autres caractéristiques sont identiques à celles de la flexion 4 points. La distance entre points d'appui est de 60 mm. Le comportement effort-déplacement est identique aux précédents. Il y a également une dispersion dans les valeurs des contraintes à rupture : entre 491 MPa et 801 MPa (Figure 1.16). La taille et la nature des défauts sont identiques à celles observées en flexion 4 points. 97% des ruptures observées sont en volume. La contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, augmente et passe à 660 MPa (au lieu de 629 MPa en flexion 4 points). Le paramètre de Weibull est égal à 9.6 et la contrainte de Weibull S_0 est égale à 780 MPa

pour une loi à deux coefficients avec une identification par la méthode des moindres carrés (V_0 = 1 mm^3).

2.4.3. Essais de flexion biaxiale

Pour étudier l'influence d'un comportement multiaxial, un essai de flexion biaxiale a été envisagé. Le chargement est imposé par un anneau de diamètre moyen 2.5 mm et le rayon de maintien est de 12 mm. Les éprouvettes sont des disques de diamètre 30 mm et d'épaisseur 3 mm. Ils sont obtenus à partir de nitrure de silicium pressé uniaxialement à froid. La rugosité R_a est inférieure à 1 µm. La contrainte maximale dans la structure est obtenue par un calcul utilisant la méthode des éléments finis. La contrainte de rupture varie de 513 MPa à 918 MPa (Figure 1.16). La contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, augmente encore pour atteindre 721 MPa. Le paramètre de Weibull m vaut 8.4 et la contrainte de Weibull S_0 vaut 720 MPa pour une loi à deux coefficients avec une identification par la méthode des moindres carrés (V_0 = 1 mm^3).

Figure 1.16 : Essais de traction et de flexion monotones sur du nitrure de silicium présentés dans un diagramme de Weibull.

Ces essais de flexion montrent d'une part que les exposants de Weibull sont différents d'une série d'essais à l'autre. D'autre part ils montrent que la contrainte de

rupture n'est pas une quantité déterministe pour un même type de sollicitation. Elle dépend du type de sollicitation. On pourra remarquer que plus le champ de contrainte est hétérogène, plus la contrainte de rupture est élevée, à probabilité de rupture donnée. Cet effet est appelé *effet d'hétérogénéité des contraintes* [Hild et al., 1992], [Hild et al., 1992]. Il est à noter que cet effet d'hétérogénéité des contraintes s'accompagne d'un effet de volume car les volumes sont différents pour les quatre séries d'essais.

2.4.4. Effet de volume

D'autres essais de la littérature mettent en évidence un effet de volume seul. Par exemple, il a été observé dans le cas du nitrure de silicium sollicité en flexion 3 points (Figure 1.17) : plus le volume augmente, plus la contrainte moyenne de rupture diminue. On notera que pour des volumes supérieurs à 300 mm^3 la variation de contrainte moyenne de rupture est inférieure à 100 MPa. A ce moment, l'effet d'hétérogénéité des contraintes devient prépondérant comme le montrent les résultats expérimentaux de la Figure 2.16.

Figure 1.17 : Effet de volume en flexion 3 points sur du nitrure de silicium (d'après [Katamaya et Hattori, 1982]).

3. Comportement expérimental du béton avec défauts

Les effets de volume et d'hétérogénéité des contraintes observés dans le cas d'essais sur céramiques techniques, objet des deux paragraphes précédents, sont également observés sur le matériau fragile béton.

3.1. Effet de volume

Un effet de volume est également observé dans le cas du béton (cf. par exemple [Kadlecek et Spetla, 1967]). Plus le volume augmente, plus la contrainte moyenne de rupture diminue : cf. Figure 1.18.

Figure 1.18. : Effet de volume observé sur un béton (d'après [L'Hermite, 1973]).

3.2. Effet d'hétérogénéité des contraintes

Un effet d'hétérogénéité des contraintes seul a été observé dans le cas du béton Figure 1.19. Plus le champ de contrainte est hétérogène, plus la contrainte de rupture est élevée pour une probabilité de rupture fixée. Quand ces résultats sont comparés à ceux de la Figure 1.18, on remarque que l'effet d'hétérogénéité des contraintes est plus important

que l'effet de volume. On notera également que la différence de contrainte de rupture est plus importante entre la traction et la flexion 4 points, qu'entre la flexion 4 points et la flexion 3 points.

Figure 1.19 : Effet d'hétérogénéité des contraintes (d'après [L'Hermite, 1973]).

3.3. Effet de la distribution des défauts

Afin de mettre en évidence un troisième effet, celui dû à la distribution de défauts initiaux proprement dit, une étude expérimentale a été menée dans le cadre d'une action thématique programmée "Matériaux hétérogènes" en collaboration avec Denys Breysse, Didier Fokwa, Guiseppe Geymonat et Gilles Pijaudier-Cabot. Cet effet est étudié sur un matériau modèle (un béton) soumis à une sollicitation de flexion 4 points. 14 types de distributions de défauts contrôlés ont été analysées. Pour chaque type de distribution, 15 éprouvettes ont été testées, soit 210 éprouvettes au total. Le détail des observations est consigné dans le rapport final [Breysse et al., 1992]. Après l'élimination des sources de biais quantifiables (age, type de gâchée, ...), les résultats en termes d'efforts moyens sont obtenus. Les "défauts contrôlés" rajoutés aux hétérogénéités naturelles du béton employé sont des trous traversants de diamètre D. La légende 1.1 employée dans les Figures 1.20 est présentée ci-dessous. Toutes les éprouvettes sont de dimensions 50 mm x 50 mm x 170 mm. La distance entre les deux points d'appui est de 150 mm et la distance entre points d'application des efforts est de 50 mm.

Légende 1.1. : Taille de défauts initiaux dans des cellules de 5 mm x 5 mm x 50 mm.

Série P (Figure 1.20.1). Cette série est la série de référence ; elle ne contient aucun défaut d'origine contrôlée. Dans la zone centrale de l'éprouvette, les sites d'amorçage expérimentalement observés sont distribués de manière uniforme. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 1 (cf. Figure 1.20.15) et l'écart type correspondant est égal à 0.075.

Figure 1.20.1 : Série P.

Les séries R contiennent beaucoup de défauts répartis de manière uniforme sur la structure. Le but est d'étudier l'influence de leur nombre et de leur taille sur l'effort de rupture.

– Série R_3 (Figure 1.20.2). Cette série comporte 10 défauts de diamètre 3 mm uniformément répartis. Une seule perforation se trouve sur la "fibre inférieure" en zone centrale et conduit à l'amorçage pour tous les essais. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.695 et l'écart type correspondant est égal à 0.053.

Figure 1.20.2 : Série R_3.

– Série R_{2-} (Figure 1.20.3). Cette série comporte 10 défauts de diamètre 2 mm uniformément répartis. Une seule perforation se trouve sur la "fibre inférieure" en zone centrale et conduit à l'amorçage pour 14 essais. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.780 et l'écart type correspondant est égal à 0.037.

Figure 1.20.3 : Série R_{2-}.

– Série R_1 (Figure 1.20.4). Cette série comporte 75 défauts de diamètre 1 mm uniformément répartis. Les perforations qui se trouvent sur la "fibre inférieure" en zone centrale conduisent à l'amorçage pour tous les essais. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.868 et l'écart type correspondant est égal à 0.102.

Figure 1.20.4 : Série R_1.

– Série R_{2+} (Figure 1.20.5). Cette série comporte 75 défauts de diamètre 2 mm uniformément répartis. Les perforations de diamètre 2 mm qui se trouvent sur la "fibre inférieure" en zone centrale conduisent à l'amorçage pour 13 essais. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.687 et l'écart type correspondant est égal à 0.090.

Figure 1.20.5 : Série R_{2+}.

– Série R_2 (Figure 1.20.6). Cette série comporte 24 défauts de diamètre 2 mm uniformément répartis. Les deux perforations qui se trouvent sur la "fibre inférieure" en zone centrale conduisent à l'amorçage pour 11 essais et les deux perforations sur la "fibre inférieure" les plus proches de la zone centrale conduisent à l'amorçage pour 4 essais. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.771 et l'écart type correspondant est égal à 0.115.

Figure 1.20.6 : Série R_2.

On observe qu'entre la série R_2 et R_{2-} l'effort de rupture ne varie pratiquement pas, on mesure davantage l'effet d'un défaut unique que l'effet d'interaction entre défauts. L'effet d'interaction est plus sensible pour la structure R_{2+} et conduit à une diminution de l'effort moyen de rupture. Le classement entre les séries R_3, R_2, et R_1 conduit à un résultat attendu : à nombre de défaut constant, l'effort à rupture décroît lorsque la taille de défaut croît.

Les séries U contiennent peu de défauts. Le but est de caractériser l'interaction entre défauts quand ils sont peu nombreux.

– Série U_{MD} (Figure 1.20.7). Cette série comporte 2 défauts de diamètre 2 mm. Les deux défauts qui se situent en zone centrale conduisent à l'amorçage pour tous les essais. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.832 et l'écart type correspondant est égal à 0.073.

Figure 1.20.7 : Série U_{MD}.

– Séries U_D et U_M (Figures 1.20.8 et 1.20.9). Ces deux séries comportent un défaut de diamètre 2 mm. Ce défaut en zone centrale (série U_D) ou au droit de l'un des points de chargement (série U_M) conduit à l'amorçage pour tous les essais. L'effort moyen normalisé de rupture est respectivement égal à 0.839, 0.832 et les écarts types correspondants sont égaux à 0.057, 0.067.

Figure 1.20.8 : Séries U_D.

Figure 1.20.8 : Séries U_M.

– Série U_G (Figure 1.20.10). Cette série comporte un défaut de diamètre 2 mm. Le défaut conduit à l'amorçage pour 8 essais. Pour les 7 essais restants, l'amorçage a lieu dans la zone centrale. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.890 et l'écart type correspondant est égal à 0.066.

Figure 1.20.10 : Série U_G.

– Série U (Figure 1.20.11). Cette série comporte 4 défauts de diamètre 2 mm uniformément répartis. Les défauts en zone centrale conduisent à l'amorçage pour tous les essais. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.840 et l'écart type correspondant est égal à 0.062.

Figure 1.20.11 : Série U.

– Série U_{GM} (Figure 1.20.12). Cette série comporte 2 défauts de diamètre 2 mm. Le défaut en zone centrale conduit à l'amorçage pour 13 essais. Pour les 2 essais restants, l'amorçage a lieu sur le défaut en dehors de la zone centrale. Ce phénomène a également été observé dans le cas de la série R_2. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.830 et l'écart type correspondant est égal à 0.046.

Les séries U, U_{MD}, et U_{GM} conduisent à une valeur similaire de l'effort à rupture. Dans ces cas, les interactions semblent identiques et probablement très faibles. Les séries U_D, U_M, et U_G mettent en évidence la sensibilité à l'état de contrainte et la limite entre la zone centrale à moment constant et les zones extrémités.

Figure 1.20.12 : Série U_{GM}.

Pour comparer l'effet de la distribution, on compare la structure R_2 à deux autres structures avec le même nombre de défauts, mais avec une répartition aléatoire.

– Série A_1 (Figure 1.20.13). Cette série comporte 24 défauts de diamètre 2 mm répartis de manière aléatoire. Les deux défauts de diamètre 2 mm sur la fibre inférieure conduisent à l'amorçage. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.663 et l'écart type correspondant est égal à 0.091.

Figure 1.20.8 : Séries A_1.

– Série A_2 (Figure 1.20.14). Cette série comporte 24 défauts de diamètre 2 mm répartis de manière aléatoire. Les défauts les plus proches de la "fibre inférieure" en zone centrale conduisent à l'amorçage. L'effort moyen normalisé de rupture est égal à 0.820 et l'écart type correspondant est égal à 0.115.

Figure 1.20.14 : Série A_2.

Les séries A_1, A_2, et R_2 ont le même nombre de défauts. La différence entre les trois efforts à rupture montre l'effet de la distribution des défauts. Les efforts moyens de rupture sont regroupés dans la Figure 1.20.15. Ces données constituent la base de donnée expérimentale pour le béton utilisée dans la suite de ce mémoire.

Figure 1.20.15 : Base de donnée expérimentale dans le cas du béton.

4. Découplage des effets expérimentaux : effets D.V.H.

Les études expérimentales réalisées dans le cadre de ce travail ou par d'autres auteurs dont les résultats sont consignés dans les paragraphes précédents permettent de mettre en évidence pour des matériaux à comportement fragile différents :

1– le concept de probabilité de rupture (P_F) associée à une valeur de contrainte de rupture (σ_F),

2– une corrélation entre contrainte de rupture (σ_F) et taille de défaut initial (D),

3.1– un effet de volume,

3.2– un effet d'hétérogénéité des contraintes,

3.3– un effet de la distribution des défauts.

Ci-dessous nous essayons de découpler ces effets (3) dans le cadre de la théorie statistique de Weibull courramment utilisée dans ce domaine.

Pour étudier le cas de la flexion 3 et 4 points (états de contraintes uniaxiaux non-homogènes), la loi de Weibull (1.4) est généralisée en faisant appel à la théorie du maillon le plus faible (cf. Chapitre 3, §3) de la manière suivante :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ - \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \left(\frac{<\sigma(M)>}{S_0} \right)^m dV \right\} \tag{1.5}$$

où $\sigma(M)$ est la contrainte uniaxiale dépendant du point M de la structure Ω de volume V, et $< . >$ sont les crochets de Macauley (i.e. partie positive). On ne conserve que les contraintes de traction car ce sont les seules qui conduisent à des ruptures. L'équation (1.5) peut être réécrite sous la forme :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ - \frac{V_{eff}}{V_0} \left(\frac{\sigma_F}{S_0} \right)^m \right\} \tag{1.6}$$

où σ_F correspond au maximum de la contrainte de traction sur la structure, et V_{eff} est appelé volume effectif [Davies, 1973]. Cette expression peut être généralisée à des états de contraintes non uniaxiaux. Plusieurs stratégies sont possibles ; la première consiste à considérer une contrainte équivalente de rupture (par exemple la plus grande des contraintes principales). La seconde consiste à supposer l'indépendance des actions de chaque contrainte principale positive ce qui conduit à l'expression suivante :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ -\frac{1}{V_0} \int_\Omega \left(\frac{<\sigma_1(M)>}{S_0} \right)^m + \left(\frac{<\sigma_2(M)>}{S_0} \right)^m + \left(\frac{<\sigma_3(M)>}{S_0} \right)^m dV \right\} \quad (1.7)$$

où $\sigma_1(M)$, $\sigma_2(M)$, et $\sigma_3(M)$ correspondent aux contraintes principales au point M. Aucune des possibilités citées n'est complètement satisfaisante [Lamon, 1988]. Au Chapitre 2, nous considérons deux définitions différentes de la contrainte équivalente. En cas d'utilisation d'une contrainte équivalente de rupture (quelle que soit sa forme exacte), on montre que la contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, est liée au volume effectif, V_{eff}, par :

$$\bar{\sigma}_F = S_0 \left(\frac{V_0}{V_{eff}} \right)^{1/m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m} \right) \quad (1.8)$$

où Γ correspond à la fonction eulérienne de seconde espèce $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt$. Dans les cas considérés, on peut montrer que le volume effectif peut être décomposé en un produit du volume total de la structure, V, par un facteur dit d'*hétérogénéité des contraintes de Weibull*, H_m, [Hild et al., 1992] (cf. Chapitre 3, §4) :

$$V_{eff} = V H_m \quad (1.9.1)$$

$$H_m = \left\{ \frac{1}{V} \int_\Omega \| \sigma \|^m dV \right\} \Big/ \sigma_F^m \quad (1.9.2)$$

où $\| \sigma \|$ correspond à une contrainte équivalente arbitraire, et σ_F désigne le maximum de la contrainte équivalente, $\| \sigma \|$, sur le domaine Ω. Le facteur d'hétérogénéité des contraintes de Weibull, H_m, est indépendant du niveau de chargement.

L'expression (1.9.1) montre que l'effet dû au volume effectif, V_{eff}, sur la contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, peut être découplé en un effet de volume et un effet d'hétérogénéité des contraintes en réécrivant l'expression (1.8) sous la forme :

$$\bar{\sigma}_F = S_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1/m} (H_m)^{-1/m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \tag{1.10.1}$$

4.1. Effet V : effet de volume

Cet effet a été observé la première fois par Léonard de Vinci lorsqu'il a testé la "résistance en traction" de fils (cf. par exemple [Lemaitre, 1992]). Il observa une décroissance de la "résistance en traction" en fonction de la longueur des fils. Plus le volume est élevé, plus la contrainte moyenne de rupture est faible (car la probabilité de trouver un gros défaut augmente).

L'effet de volume, observé dans le cas des céramiques et les bétons s'explique par le fait que plus le volume augmente, plus la probabilité de trouver un gros défaut augmente et par conséquent plus la contrainte moyenne de rupture diminue. Si le matériau obéit à une loi de Weibull, la décroissance de la contrainte moyenne de rupture en fonction du volume est donnée par le facteur $V^{-1/m}$ de l'équation (1.10).

Galilée a par contre trouvé que dans le cas de traction de colonnes, la "résistance en traction" est invariante en fonction de la longueur. Les volumes testés étaient cependant du même ordre de grandeur [Lemaitre, 1992]. Dans ce cas, il se peut que la probabilité de trouver un gros défaut de taille donnée était très importante, si bien que cet effet disparaît.

Cette observation tendrait à justifier l'introduction d'un concept nouveau viz. celui d'un volume "critique", V_c, caractéristique du matériau et de son procédé d'obtention, pour lequel il y a certitude de trouver le plus gros défaut (cf. Figure 1.21). Autrement dit, la relation (1.10.1) serait alors écrite :

$$\bar{\sigma}_F = S_0 \left\{ \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^{1/m} + \left\langle \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1/m} - \left(\frac{V_0}{V_c}\right)^{1/m} \right\rangle \right\} (H_m)^{-1/m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \tag{1.10.2}$$

Figure 1.21 : Evolution de la contrainte moyenne de rupture en fonction du volume.

4.2. Effet H : effet d'hétérogénéité des contraintes

Cet effet s'explique par une diminution de la probabilité de trouver un défaut critique avec l'augmentation de l'hétérogénéité du champ de contrainte dans la structure, et conduit à une augmentation de la contrainte moyenne de rupture.

Si le matériau obéit à une loi de Weibull, la croissance de la contrainte moyenne de rupture en fonction de l'hétérogénéité des contraintes (caractérisée par le facteur d'hétérogénéité des contraintes de Weibull) est donnée par le facteur $(H_m)^{-1/m}$ de l'équation (1.10).

4.3. Analyse des résultats par le volume effectif

L'équation (1.8) montre que si le matériau obéit à une loi de Weibull, la contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, est inversement proportionnelle à la puissance 1/m du volume effectif, V_{eff}. Dans un diagramme ln-ln ceci conduit à une droite de pente −1/m. La Figure 1.22 correspond aux résultats obtenus dans le cadre de ce travail sur le nitrure de silicium (cf. §2). Cette figure montre que la corrélation entre la contrainte moyenne de

rupture, $\bar{\sigma}_F$, et le volume effectif, V_{eff} est décrite par une puissance –0.04 (= –1/25) avec un coefficient de corrélation égal à 99.5%. Ceci conduit à une valeur du coefficient de Weibull, m, très différente de celle qui est trouvée par application directe de (1.4) : de l'ordre de 8-9 (Figure 1.16).

Figure 1.22 : Corrélation entre la contrainte moyenne de rupture, $\bar{\sigma}_F$, et le volume effectif, V_{eff}

On remarquera que les lots de matériau testé en traction, flexion 3 et 4 points, et en flexion biaxiale sont différents ce qui peut expliquer l'échec de la méthode du volume effectif. Ainsi, il se peut que ces quatre séries d'essais aient mis en évidence un troisième type d'effet à considérer : l'effet de la distribution de défauts, non modélisé directement par la formule de Weibull (1.10).

4.4. Effet D : effet de la distribution des défauts

L'origine de cet effet peut être décomposée en deux causes. La première est directement reliée à la distribution de défauts en fonction de leur taille. Ceci est probablement le cas dans les essais sur du nitrure de silicium. Il a également été observé dans le cas des essais sur béton.

La seconde est liée à la notion de voisinage ou à la distance (autrement dit à l'interaction) entre défauts. Cet effet a été partiellement étudié dans le cas des essais sur béton. Dans le cas du nitrure de silicium, cet effet peut également exister. Cependant aucune conclusion définitive ne peut être tirée des informations expérimentales en notre possession à l'heure actuelle.

On remarquera que cet effet n'est pas directement décrit par une loi de Weibull (cf. équation (1.10)). Un moyen d'en rendre compte est de corréler les paramètres de Weibull à des informations sur la distribution des défauts. Ce point est traité dans le Chapitre 3.

5. Conclusions

Pour les matériaux à comportement ductile, la contrainte moyenne de rupture *est la* contrainte de rupture car il y a peu de dispersion et elle ne dépend pas du type de chargement. Par contre, pour les matériaux à comportement fragile, la contrainte moyenne de rupture dépend de plusieurs facteurs et doit être associée à une probabilité de rupture.

Les défauts initiaux jouent un grand rôle dans la tenue des matériaux à comportement fragile. Dans tous les types d'essais, ils sont la principale cause de rupture. Il ressort également des résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre que l'analyse statistique est le meilleur moyen de prendre en compte les défauts. Ces aspects statistiques conduisent à des propriétés caractéristiques des matériaux à comportement fragile, en particulier les céramiques massives : les effets D.V.H. (D : effet de la distribution de défauts, V : effet de volume, H : effet d'hétérogénéité des contraintes sur la contrainte de rupture).

Ces différents essais sont rarement découplés dans une série d'essais effectuée sur le même matériau, ce qui rend leur identification précise difficile. Par exemple, seuls les essais sur béton permettent d'isoler l'influence de l'effet de la distribution de défauts seul. A contrario, les essais monotones sur du nitrure de silicium couplent tous les effets.

CHAPITRE 2

APPROCHE ENTIEREMENT COUPLEE DE LA RUPTURE DE MATERIAUX A COMPORTEMENT FRAGILE

Notations

$\mathbb{1}$	tenseur unité
:	produit contracté sur deux indices
$< . >$	crochets de Macauley (i.e. partie positive)
a , a_M , a_c	taille initiale de défaut, taille maximale, taille critique
$\mathcal{C}$	domaine des forces admissibles
Δ , Δ^*	force thermodynamique associée à la variable de dégradation δ
D	variable d'endommagement scalaire
d	diamètre de défaut cylindrique
δ	variable interne de dégradation
D_0	valeur initiale de la variable d'endommagement scalaire
δ_0	valeur initiale de la variable interne de dégradation
$\Delta\sigma$	variation de contrainte due aux défauts
E	module d'Young
$\mathbb{E}$	tenseur d'élasticité du matériau non endommagé
ε	tenseur des petites déformations
err(./.), Err(./.)	erreur, erreur globale
$\mathcal{G}$	taux de restitution d'énergie
H	facteur d'hétérogénéité des contraintes
h, h_1, h_2	fonctions liant la taille de défaut à la variable d'endommagement initial
i, I	indices
L	taille caractéristique d'un V.E.R.
ν	coefficient de Poisson
P_F	probabilité cumulée de rupture de la structure
ρ	masse volumique
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}^+$	tenseur des contraintes de Cauchy positif
σ_H^+ , σ_{eq}^+	premier et second invariant de $\boldsymbol{\sigma}^+$
σ_0	contrainte uniaxiale en flexion 4 points dans le cas sans défaut
σ_1, σ_2, σ_3	contraintes principales
$(\sigma_r)^*$	contrainte équivalente d'endommagement positive
σ_F	contrainte de rupture
σ_M	contrainte maximale

$\bar{\sigma}_F$	contrainte moyenne de rupture
V	volume d'une structure Ω
V_1, V_2, et V_3	vecteurs propres normés
Y	taux de restitution d'énergie d'endommagement
Y^+	taux de restitution d'énergie d'endommagement positif
Y_c	taux de restitution d'énergie critique
Ψ	potentiel de Helmholtz (ou énergie libre spécifique)
$\lVert \sigma \rVert$	contrainte équivalente arbitraire
$\otimes$	produit tensoriel

Ce deuxième Chapitre est consacré au développement d'une approche entièrement couplée de la rupture de matériaux à comportement fragile.

La première partie de ce Chapitre concerne la présentation de la méthode numérique entièrement couplée qui constitue l'une des stratégies possibles pour modéliser la rupture de matériaux à comportement fragile.

Dans la seconde partie, nous analysons les prévisions qualitatives des effets de volume et d'hétérogénéité des contraintes. Nous étudions également les prévisions quantitatives dans le cas des essais de flexion effectués sur le béton et présentés dans le Chapitre 1. Nous analysons enfin l'influence du maillage sur les résultats tant globaux que locaux.

1. Introduction

Dans le Chapitre 1, on a montré que les défauts initiaux sont la principale cause de la rupture des matériaux monolithiques à comportement fragile. Dans les Chapitres 2 et 3, nous allons étudier deux méthodes qui permettent la modélisation de la rupture de ce type de matériaux.

Dans le Chapitre 2, on introduit une méthode dite *entièrement couplée*. Dans ce cas, le calcul du champ de contrainte est effectué en tenant compte de la détérioration due aux défauts initiaux. Cette méthode est numérique et nécessite l'utilisation d'un code de calcul par éléments finis. La distribution des défauts est obtenue en faisant appel à une méthode de Monte-Carlo. Le calcul étant élastique linéaire, on l'effectue pour une charge unitaire. La contrainte de rupture est déterminée au point le plus chargé au sens d'un critère de rupture en utilisant la propriété de linéarité. Avec l'approche entièrement couplée, les interactions entre défauts sont prises en compte. En effet, le calcul du champ de contrainte s'effectue avec des défauts modélisés dans le cadre de la mécanique de l'endommagement.

Dans le Chapitre 3, on étudie une méthode dite *localement couplée*. Dans ce cas le champ de contrainte est calculé sans tenir compte des défauts initiaux. Il correspond au champ de contrainte macroscopique. En chaque point analysé, le champ de contrainte microscopique est recalculé en utilisant la notion de contrainte effective. La contrainte de rupture est à nouveau déterminée au sens d'un critère de rupture en utilisant la propriété de linéarité. Contrairement à l'approche entièrement couplée, l'approche localement couplée suppose que les interactions entre défauts sont faibles. Ainsi des phénomènes d'écran entre défauts ne sont pas pris en compte par cette approche.

2. Une approche entièrement couplée

La prévision de la rupture de matériaux à comportement fragile passe par la prise en compte de la distribution des défauts dans une structure. En effet, dans le Chapitre 1, nous avons vu que les défauts initiaux sont la cause principale de la rupture de ce type de matériaux. Il existe des méthodes de prévision de la probabilité de rupture qui font, pour la plupart, appel à la notion d'indépendance des événements (i.e. les interactions entre défauts sont négligées) et à l'hypothèse du maillon le plus faible (i.e. lorsque la rupture s'amorce en un point de la structure, elle conduit à la ruine totale de la structure). Le modèle de Weibull est le plus populaire et le plus simple [Weibull, 1939]. Ce modèle, postulé de manière heuristique, ne prévoit pas le comportement dès que le champ de contrainte devient multidimensionnel. On peut reprendre la critique émise par Evans : "*This approach does not recognize the flaws as being unique entities operated on by the multiaxial stress and does not, therefore, represent a fundamental way of treating the multiaxial effect.*" [Evans, 1978]. Lorsque l'on veut prendre en compte cet aspect multiaxial, la prise en compte des défauts devient la préoccupation principale. Ainsi Batdorf et al. [Batdorf et Crose, 1974], [Batdorf et Heinisch Jr., 1978] proposent un traitement en terme de contrainte prenant davantage en compte les défauts initiaux. Cependant, on est souvent conduit à des calculs géométriques complexes. Sur une formulation de départ de [Evans, 1978], [Lamon, 1988] améliore le modèle qui devient plus prédictif. Néanmoins tous ces modèles supposent, *a priori*, que le champ de contrainte est peu affecté par la présence des défauts. Une autre approche est proposée en faisant l'hypothèse du maillon le plus faible [Berdin et al., 1991].

D'un point de vue numérique citons les travaux de l'institut Batelle à Genève [Lamon, 1988], [Amar et al., 1989], de la NASA à Cleveland [Nemeth et al., 1989], et de l'Ecole des Mines à Paris [Berdin, 1989]. Ces travaux ont principalement conduit à développer des post-processeurs de codes de calcul par Elements Finis (E.F.). en supposant l'indépendance des événements ainsi que l'hypothèse du maillon le plus faible. Cette stratégie est également employée dans ce document et fait l'objet du troisième Chapitre.

2.1. Modélisation physique de la distribution de défauts

Dans ce qui suit, nous proposons une méthode où les défauts sont directement pris en compte, avant d'effectuer le calcul de structure proprement dit, d'où le nom d'*approche entièrement couplée*, car lors du calcul des champs de contrainte et de déformation, les défauts sont modélisés.

Au départ de cette étude, nous disposons de résultats concernant les propriétés de la microstructure des céramiques techniques. En effet, des études menées à la Régie Renault ont notamment nécessité l'obtention de la répartition volumique des défauts en fonction de leur taille (Ø apparents). La technique exposée par Lalouette [Lalouette, 1988] a permis de déterminer la répartition surfacique, voire volumique, des défauts en fonction de leurs diamètres réels (cf. Figure 2.1).

Figure 2.1 : Distribution de taille de défauts dans le cas du nitrure de silicium (d'après [Lalouette, 1988]).

Ces informations, bien qu'incomplètes (distance moyenne entre défauts de même taille, défauts de surface, défauts de volume, ...), ont constitué la base de départ de notre étude: c'est ce que nous appellerons l'information sur la microstructure.

Ensuite, nous sommes amenés à définir un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) qui dans notre cas contient un défaut de géométrie sphérique (circulaire dans le cas plan) : sa taille est obtenue par tirage à partir des informations sur la microstructure, alors que la taille du V.E.R. est définie *a priori* et reste constante. Elle est caractérisée par la grandeur L (Figure 2.2).

V.E.R. défaut mis dans le V.E.R.

Figure 2.2 : Défaut mis dans un V.E.R.

Nous sommes en mesure de modéliser *numériquement* le matériau par un ensemble de tirages qui respecte, en moyenne, non seulement la distribution de taille de défauts mais également la distance moyenne entre défauts est supérieure ou égale à 2L.

Ce type de reconstitution numérique a déjà été utilisé dans d'autres domaines tels que le béton ([Marigo, 1982], [Roelfstra et al., 1985]), les poudres métalliques frittées [Abouaf, 1985], en utilisant d'autres techniques ou par une technique assez voisine [Andrieux et al., 1986] avec une fonction de répartition d'orientation et non de tailles de défauts.

Notre but est de modéliser par tirage plusieurs éprouvettes non identiques d'un point de vue physique (matériau avec des défauts différents d'une éprouvette à l'autre). Pour cela, nous utilisons une méthode de Monte-Carlo qui a été employée dans d'autres domaines tels que le nucléaire [Doig, 1985], la fatigue d'alliages d'aluminium et d'aciers [Cox et Morris, 1988], la rupture de matériaux ductiles [Needlemann, 1988],...

Une fois le matériau *reconstitué numériquement* , nous sommes en mesure de passer à l'approche mécanique du problème.

2.2. Modélisation mécanique du V.E.R.

Pour continuer notre démarche, il est maintenant nécessaire de modéliser l'élément de volume de la mécanique des milieux continus que nous appelons V.E.R. Lorsque l'on utilise la mécanique de l'endommagement continu, les défauts initiaux représentent une dégradation initiale que l'on caractérise par une variable d'endommagement scalaire D, de valeur initiale D_0, uniforme dans tout le V.E.R. considéré. Nous obtenons un élément très simple dans lequel, par homogénéisation, est affectée une valeur d'endommagement initial D_0 (Figure 2.3).

Figure 2.3 : Modélisation du défaut dans le V.E.R.

Cet endommagement initial, D_0, est supposé lié au rapport a/L par une fonction positive, croissante et définie entre 0 et 1 telle que :

$$D_0 = h(a/L) \tag{2.1}$$

Pour passer définitivement du défaut réel à sa représentation mécanique, nous avons décidé de modifier la raideur de l'élément : l'endommagement est représenté ici par l'un de ses indicateurs caractéristiques [Lemaitre et Dufailly, 1987]. L'endommagement initial, D_0, influence le comportement mécanique par le couplage d'état entre l'élasticité et l'endommagement [Marquis, 1989] qui se traduit par une diminution de la raideur de l'élément endommagé par rapport à l'élément vierge. En utilisant la notion de contrainte effective [Rabotnov, 1963] et le principe d'équivalence en déformation [Lemaitre et Chaboche, 1985] la loi d'élasticité devient :

$$\sigma = \mathbb{E}\,(1-D) : \varepsilon \tag{2.2}$$

où σ représente le tenseur des contraintes de Cauchy, ε le tenseur des petites déformations, $\mathbb{E}$ le tenseur d'élasticité du matériau non endommagé et : le produit contracté sur deux indices. Cette loi peut également être obtenue par dérivation du potentiel de Helmholtz (ou énergie libre spécifique) Ψ définie par :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}\,\varepsilon : \mathbb{E}\,(1-D) : \varepsilon \tag{2.3.1}$$

où ρ désigne la masse volumique, ainsi :

$$\sigma = \rho\,\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon} = \mathbb{E}\,(1-D) : \varepsilon \tag{2.3.2}$$

$$Y = \rho\,\frac{\partial\Psi}{\partial D} = -\,\frac{1}{2}\;\mathbb{E} : \varepsilon : \varepsilon \tag{2.3.3}$$

où Y représente la variable thermodynamique associée à la variable d'état d'endommagement D, et représente le taux de restitution d'énergie d'endommagement [Chaboche, 1978]. Cette variable joue un rôle similaire au taux de restitution d'énergie, $\mathcal{G}$, associé à la taille d'une fissure dans le cadre de la mécanique de la rupture.

2.3. Etude de la rupture locale

Dans cette partie, on étudie la rupture d'un V.E.R. contenant un et un seul défaut supposé sphérique. Ce V.E.R. est un cube de côté 2L et le défaut est caractérisé par la sphère qui le contient. Sa taille est définie comme le rayon a de la sphère (Figure 2.4).

Figure 2.4 : Définition du V.E.R. : cube de côté 2L contenant une sphère de rayon a.

On notera que la longueur L est au moins égale au rayon a_M de la plus grande sphère que l'on peut rencontrer dans le matériau. Il est rappelé que par homogénéisation ce modèle de V.E.R. est analysé mécaniquement comme un cube (carré en 2-D) avec un endommagement initial $D_0(a/L)$.

Les observations expérimentales n'ayant pas décelé de comportement non linéaire au niveau de la rupture du nitrure de silicium et de l'alumine, nous supposons un comportement élastique associé à une rupture brutale. Par contre, dans le cas du béton, des comportements non linéaires ont été observés et les résultats simulés ne rendront pas compte de ces phénomènes.

De manière générale, un défaut initial représente une dégradation initiale que l'on suppose être modélisée par une variable interne de dégradation δ de valeur initiale δ_0 (caractérisant l'état local ou global du système : par exemple un endommagement initial ou une fissure initiale). Soit Δ la force thermodynamique associée à la variable de dégradation δ. En faisant l'hypothèse de dissipation maximale [Nguyen, 1984], [Nguyen, 1987], l'évolution de δ obéit à la règle de normalité généralisée :

$$(\Delta-\Delta^*)\,\dot{\delta} \geq 0 \qquad \forall\, \Delta^* \in C \tag{2.4}$$

où C représente le domaine des forces admissibles. Pour un état de chargement donné, le convexe C permet de déterminer une taille critique a_c de défaut initial, en-dessous de laquelle la variable de dégradation δ, de valeur initiale δ_0 liée à la modélisation du défaut initial, n'évolue pas. Lorsque la taille de défaut est supérieure à a_c, la relation (2.4) conduit à une évolution brutale de la variable de dégradation δ. Cette modélisation constitue un cadre général d'étude des matériaux à comportement fragile.

Dans ce Chapitre nous travaillons dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu, c'est-à-dire avec une variable de dégradation δ égale à la variable d'endommagement scalaire définie dans le paragraphe précédent. Dans les essais en flexion, nous avons remarqué que la rupture se produit toujours dans la zone en traction. C'est pourquoi le critère de rupture sera écrit à partir du tenseur des contraintes positif σ^+ défini par :

$$\sigma^+ = \sum_{I=1,3} (V_I \otimes V_I) \langle \sigma_I \rangle \tag{2.5}$$

où σ_I sont les contraintes principales et V_I sont les vecteurs propres normés à 1. Deux critères de rupture sont employés. Le premier fait directement référence à la mécanique de l'endommagement. Le second correspond à une modification du critère de Rankine.

Le premier fait référence à la contrainte équivalente d'endommagement positive [Hild et al., 1989] définie à partir de la contrainte équivalente d'endommagement [Lemaitre et Chaboche, 1985] en considérant le tenseur des contraintes positif :

$$(\sigma_r)^* = \sqrt{\frac{2}{3}(1+\nu)\,(\sigma^+_{eq})^2 + 3(1-2\nu)\,(\sigma^+_H)^2} \tag{2.6}$$

où ν est le coefficient de Poisson, σ^+_H et σ^+_{eq} représentent respectivement le premier et le second invariant de σ^+ :

$$\sigma_H^+ = J_1(\bar{\sigma}^+) = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^+) \tag{2.7.1}$$

$$\sigma_{eq}^+ = J_2(\bar{\sigma}^+) = \left\{ \frac{3}{2}(\bar{\sigma}^+ - \sigma_H \mathbb{1}) : (\bar{\sigma}^+ - \sigma_H \mathbb{1}) \right\}^{1/2} \tag{2.7.2}$$

où $\mathbb{1}$ est le tenseur unité. A partir de la contrainte $(\sigma_r)^*$ on peut définir le taux de restitution d'énergie d'endommagement positif Y^+ par :

$$Y^+ = \frac{1}{2E}\left\{ \frac{(\sigma_r)^*}{1-D_0} \right\}^2 \tag{2.8}$$

Finalement le critère de rupture s'écrit :

$$Y^+ \geq Y_c \quad \text{ou} \quad (\sigma_r)^* \,/\, (1-D_0) \;\geq \sigma_M \tag{2.9}$$

où Y_c est le taux de restitution d'énergie critique caractéristique du matériau, la contrainte maximale σ_M étant liée à Y_c par :

$$\sigma_M = \sqrt{2EY_c} \tag{2.10}$$

A partir du critère de Rankine (ou critère de contrainte principale maximale), en utilisant la notion de contrainte effective, on obtient :

$$\max_{I=1,3} \langle \sigma_I \rangle \,/\, (1-D_0) \;\geq \sigma_M \tag{2.11}$$

Enfin, nous supposons que lorsque la rupture a lieu au niveau d'un V.E.R., elle conduit à la ruine instantanée de toute la structure. Ceci sous-entend que le matériau n'est pas capable de redistribuer les contraintes au voisinage d'un point de rupture local. Cela revient à faire une hypothèse du maillon le plus faible. La *théorie du maillon le plus faible* fut introduite par Pierce en 1926 pour l'étude du comportement des fils de coton [Pierce, 1926]. Cela est également traduit par le fait que le facteur d'intensité critique de ce type de matériau est constant en fonction de la variation de longueur de la fissure.

L'esprit de la méthode est résumé par la Figure 2.5.1. Dans cette approche le calcul du champ de contrainte et de déformation se fait au même niveau que la distribution des défauts (en amont) et que l'analyse de la rupture (en aval). On remarquera que cette

approche nécessite autant de calculs que de configurations de défauts. Ainsi, pour simuler la fiabilité d'une structure, 50 tirages sont envisagés. Les calculs sont effectués sur un ordinateur ALLIANT FX80 à l'aide du code de calcul industriel ABAQUS (version 4.8 [Hibbitt et al., 1989]). Le tirage est effectué à l'aide d'un générateur aléatoire (bibliothèque Harwell) de manière à respecter une distribution donnée de taille de défauts et la distance moyenne entre défauts. Un moyen de procéder est de discrétiser la courbe de répartition des défauts, puis de déterminer le nombre de V.E.R. affectés par une dégradation non nulle de manière à vérifier la distance moyenne entre défauts. Le nombre de V.E.R. étant déterminé, un générateur aléatoire détermine les V.E.R. affectés sur l'ensemble des réalisations (Figure 2.5.2).

Les calculs sont entièrement élastiques. L'ensemble de la procédure est programmée à l'aide d'un fichier de commande en Bourne Shell et ne nécessite aucune intervention autre que la mise en marche, et la patience (!) de l'utilisateur (cf. Figure 2.5.3).

Figure 2.5.1 : Approche entièrement couplée de la rupture de matériaux à comportement fragile.

Figure 2.5.2 : Méthode de distribution des défauts dans le cas d'un calcul plan.

Figure 2.5.3 : Approche entièrement couplée de la rupture de matériaux à comportement fragile : détail des étapes.

3. Simulation des effets D.V.H. pour les matériaux à comportement fragile

3.1. Etude de la dispersion

La Figure 2.6.1 montre un exemple de réalisation dans le cas d'une sollicitation de traction macroscopique, et la Figure 2.6.2 montre que le champ de contrainte local est affecté par la présence des défauts. Tous les V.E.R. contiennent un défaut initial. On notera en particulier une redistribution du champ de contrainte autour des cellules les plus endommagées.

Figure 2.6.1 : Exemple de structure avec endommagement initial.
(■ : $D_0 = .221$, ▨ : $D_0 = .159$, ▨ : $D_0 = .119$, □ : $0 < D_0 < .119$, ▩ : $D_0 = 0$)

Figure 2.6.2 : Champ de contrainte principale maximale.

Pour un ensemble de réalisations à partir de la méthode de Monte-Carlo il est possible de modéliser la dispersion de la contrainte de rupture. En effet, les causes potentielles de rupture (i.e. les défauts initiaux) sont effectivement distribuées de manière aléatoire et vérifient, en moyenne, la courbe de répartition des défauts (Figure 2.1). Les résultats présentés en Figure 2.6.3 correspondent à une simulation de 50 essais de traction. Le calcul est effectué sous l'hypothèse de contrainte plane. Les éléments employés sont des quadrilatères à 8 noeuds et 9 points d'intégration. La valeur du coefficient de Weibull m est égale à 4.2.

Figure 2.6.3 : Courbe de probabilité de rupture en utilisant la courbe de répartition de défauts de la Figure 2.1, et avec 2L = 150 μm.

3.2. Effet V : effet de volume.

Une différence fondamentale entre les matériaux à comportement fragile et à comportement ductile est la variation de la contrainte moyenne de rupture en fonction du volume. Pour les premiers, elle diminue lorsque le volume augmente, alors que pour les seconds elle reste essentiellement constante. En Figure 2.7 on remarquera que l'effet de volume est qualitativement décrit : plus le volume augmente, plus la contrainte moyenne de rupture diminue, car la probabilité de trouver un gros défaut augmente.

A l'aide d'un modèle de Weibull on peut analyser les résultats de la Figure 2.7. Ainsi on obtient un exposant de Weibull égal à 36. Cette valeur est différente de celle obtenue à partir de l'analyse des simulations de la Figure 2.6.3. Enfin, pour ces simulations, une valeur de du volume critique V_c (cf. Chapitre 1) de l'ordre de 300 mm^3 semble raisonnable.

Figure 2.7 : Variation de la contrainte moyenne de rupture en fonction du volume.

3.3. Effet H : effet d'hétérogénéité des contraintes

Une autre différence entre les matériaux à comportement fragile et à comportement ductile est la sensibilité de la contrainte de rupture au type de sollicitation. Dans le cas des matériaux à comportement fragile la contrainte moyenne de rupture dépend du type de sollicitation. Plus le champ de contrainte est hétérogène, plus la contrainte moyenne de rupture est élevée. On peut comparer les prévisions numériques à celles obtenues à partir de la valeur de m = 36 identifiée en traction (Figure 2.8.1). Dans les cas analysés, on peut remarquer que les prévisions à partir du modèle de Weibull ne sont pas quantitativement satisfaisantes.

Figure 2.8.1 : Variation de la contrainte moyenne de rupture normée en fonction du type de sollicitation. Comparaison avec un modèle de Weibull.

Pour caractériser qualitativement le type de sollicitation, nous utilisons le facteur d'hétérogénéité des contraintes de Weibull défini par (1.9.2) en choisissant m = 1 que nous appelons *facteur d'hétérogénéité des contraintes* $H = H_1$:

$$H = H_1 = \left\{ \frac{1}{V} \int_{\Omega} \| \sigma \| \, dV \right\} / \sigma_F \tag{2.12}$$

où $\| \sigma \|$ correspond à une contrainte équivalente arbitraire, et σ_F désigne le maximum de la contrainte équivalente, $\| \sigma \|$, sur le domaine Ω. Plus H est petit, plus le champ de contrainte est hétérogène. Dans le cas de la Figure 2.8.2 où toutes les sollicitations sont uniaxiales, la contrainte équivalente correspond à la partie positive de la contrainte uniaxiale. La Figure 2.8.2 montre que H est capable de simuler qualitativement l'effet d'hétérogénéité des contraintes. Plus H est petit, plus la contrainte moyenne de rupture est grande. On notera la différence de simulations par rapport à celles qui ne prennent pas en compte les défauts initiaux.

Figure 2.8.2 : Variation de la contrainte moyenne de rupture normée en fonction du type de sollicitation.

3.4. Effet D : effet de la distribution des défauts

Cette partie correspond à des comparaisons quantitatives entre des essais réalisés sur des structures modèles en béton dans lesquelles des défauts ont été créés de manière contrôlée (ils seront appelés "défauts contrôlés"). Bien que le béton soit un matériau à comportement fragile, l'hypothèse du maillon le plus faible est une hypothèse forte. En effet, le comportement du béton peut être décrit dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu par des évolutions non brutales des variables d'endommagement. Ainsi, l'approche développée ici n'est qu'une approximation du comportement du béton. La problématique est de savoir jusqu'à quel point la méthode peut prévoir l'effet des défauts sur la contrainte moyenne de rupture.

Les structures analysées expérimentalement possèdent la particularité d'avoir une distance minimale entre défauts "contrôlés" de 5 mm [Breysse et al., 1992]. C'est pourquoi le V.E.R. est choisi comme ayant une taille de 5 x 5 x 50 mm^3. On peut remarquer que seuls les défauts contrôlés sont pris en compte, c'est pourquoi on n'effectue qu'un calcul par structure et on le compare à la valeur moyenne de la contrainte à rupture mesurée expérimentalement. Ce V.E.R. peut soit contenir un défaut qui le traverse de part en part parallèlement au côté le plus long (de diamètre 1, 2, ou 3 mm

suivant la série étudiée : Figure 2.9), soit ne contenir aucun défaut. Les calculs sont effectués par la méthode des E.F. en hypothèse de contrainte plane. Dans un premier temps nous supposons que le V.E.R. est modélisé par un seul E.F. isoparamétrique à 8 noeuds. Les structures analysées sont regroupées dans les Figures 1.20 du Chapitre 1.

Figure 2.9 : V.E.R. contenant un défaut.

Dans tout ce qui suit, nous notons "erreur" entre la grandeur g_a et la grandeur g_b, la quantité $err(g_a/g_b)$:

$$err(g_a/g_b) = \left(\frac{g_a - g_b}{g_a + g_b}\right)^2 \tag{2.13}$$

et erreur globale entre les n grandeurs g_a et les grandeurs g_b correspondantes, la quantité $Err(g_a/g_b)$:

$$Err(g_a/g_b) = \sum_{i=1}^{n} err(g_{ai}/g_{bi}) \tag{2.14}$$

Le comportement mécanique est caractérisé par un module d'élasticité E = 26300 MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.2$. Tous les résultats sont comparés à la structure sans défaut (série P) pour laquelle l'effort de rupture est pris égal à 1. Deux types de description de l'endommagement sont envisagés (cf. relation (2.1)) :

$$h_1(d/L) = 1/2\ (d/L) \tag{2.15.1}$$

$$h_2(d/L) = \pi/16\ (d/L)^2 \tag{2.15.2}$$

ainsi que les deux critères (2.9) et (2.11). Ces deux descriptions correspondent à une définition de l'endommagement à partir du rapport de longueur ou de surface. Les résultats correspondant à la description linéaire (2.15.1) sont donnés en Figure 2.10.1, et ceux correspondant à la description parabolique (2.15.2) sont donnés en Figure 2.10.2. Dans les deux cas ils sont comparés aux résultats expérimentaux.

Figure 2.10.1 : Comparaison entre efforts moyens de rupture normés obtenus expérimentalement et numériquement avec une description linéaire de l'endommagement.

Figure 2.10.2 : Comparaison entre efforts moyens de rupture normés obtenus expérimentalement et numériquement avec une description parabolique de l'endommagement.

Figure 2.10.3 : Erreur globale entre résultats expérimentaux et numériques en fonction des l'hypothèses de calculs

L'influence du critère de rupture est très faible dans les cas étudiés. Ceci provient du fait que la contrainte longitudinale de flexion est prépondérante par rapport à la contrainte de cisaillement et que les perturbations dues aux défauts contrôlés restent faibles. Ainsi l'écart entre les deux critères mesuré comme l'erreur globale entre le critère

(2.9) et le critère (2.11) est de 1.1 10^{-2} avec la fonction h_1 et de 8.9 10^{-3} avec la fonction h_2.

L'influence de la description de l'endommagement est également relativement faible lorsque sont comparées les erreurs globales de chacune des modélisations par rapport aux expériences (cf. Figure 2.10.3).

On peut remarquer que les bonnes tendances entre les séries R_1, R_{2+} d'une part, et R_{2-}, R_3 d'autre part, sont obtenues. Ces séries comportent le même nombre de défauts avec des diamètres respectifs de 1 ou 2, et 2 ou 3 mm. Par contre pour les séries R_2, R_{2-}, R_{2+} l'approche donne une tendance inverse à celle observée expérimentalement. Notons cependant que l'ordre de grandeur des contraintes à rupture étant relativement proche, et les dispersions observées expérimentalement importantes, il est difficile de conclure quant à la tendance expérimentale exacte (diminution ou augmentation de la contrainte en fonction du nombre de défauts). Pour les séries U les simulations donnent un ordre de grandeur voisin sauf pour la série U_G (ce qui est également observé de manière expérimentale). Enfin en ce qui concerne les séries A, le classement est correctement simulé.

Malgré le caractère approximatif de l'approche entièrement couplée dans le cas du béton, les tendances générales sont assez bien modélisées et sont très peu influencées par le critère de rupture et par la description de l'endommagement.

Il est également reamrquable que les erreurs les plus importantes correspondent, dans le cas de la description parabolique de l'endommagement initial, aux situations pour lesquelles les interactions entre défauts sont certainement les plus importantes dans la réalité (c'est-à-dire R_{2+}, U_{MD}, U_{GM}, A_1, A_2). Ceci amène à discuter l'influence du raffinement du maillage sur la discrétisation du champ des contraintes d'une part et sur le champ d'endommagement initial d'autre part.

3.4.1. Etude de l'influence du maillage sur le champ de contrainte et sur l'effort de rupture

Dans tous les résultats précédents, un V.E.R. a été modélisé par un seul E.F. Ceci n'est pas une nécessité même si le coût numérique s'en trouve réduit. Pour s'assurer que la méthode est peu sensible au nombre d'éléments utilisés, nous avons étudié quatre situations dans lesquelles le V.E.R. est modélisé par 1, 4, 9, ou 16 éléments, l'endommagement initial restant uniformément réparti sur les 1, 4, 9, ou 16 éléments. Autrement dit, dans ces quatre situations, la modélisation du champ d'endommagement initial reste la même.

Les Figures 2.11 donnent les valeurs obtenues par les quatre modélisations dans le cas des deux descriptions de l'endommagement. On notera que les fluctuations de l'effort

de rupture restent très faibles. Pour la Figure 2.11.1, les fluctuations mesurées comme l'erreur de la plus grande par rapport à la plus petite valeur de l'effort de rupture normé pour une série donnée, sont maximales pour la série U_G et l'erreur vaut 6.44 10^{-4}. Ceci peut s'expliquer par le fait que le raffinement du maillage permet une meilleure prise en compte du gradient longitudinal dans le V.E.R. endommagé. Cet effet disparaît dans le cas de la Figure 2.11.2 car la rupture n'a alors plus lieu sur le défaut contrôlé mais au centre de l'éprouvette. On peut noter qu'expérimentalement ces deux situations ont été observées [Breysse et al., 1992]. C'est la structure A_1 qui maximise l'erreur (1.23 10^{-4}). Ceci est dû au fait que pour le maillage E.F./V.E.R. = 1 le point de rupture n'est pas détecté sur un défaut contrôlé alors que dans les autres cas c'est un défaut qui est à l'origine de la rupture. Dans tous les autres cas le même défaut conduit à la rupture et les fluctuations sont très faibles. On peut donc conclure qu'au niveau de l'effort de rupture, la méthode est peu sensible au maillage.

Figure 2.11.1 : Evolution de l'effort de rupture normé pour toutes les séries en fonction du maillage (critère (2.9), D_0 = 1/2 (d/L)).

Figure 2.11.2 : Evolution de l'effort de rupture normé pour toutes les séries en fonction du maillage (critère (2.9), $D_0 = \pi/16\ (d/L)^2$).

Les Figures 2.12.2 à 2.12.6 montrent qu'au niveau local il y a également une bonne concordance entre les différents maillages. Les variations $\Delta\sigma\ /\ \sigma_0$, où σ_0 représente la contrainte équivalente de rupture qui existerait s'il n'y avait pas de défaut et $\Delta\sigma$ l'écart entre σ_0 et la contrainte équivalente de rupture mesurée au même point dans la structure avec défaut, sont peu affectées par le maillage. L'ordonnée est définie par rapport à la fibre la plus chargée en traction (Figure 2.12.1)

Figure 2.12.1 : Définition de l'ordonnée.

La Figure 2.12.2 montre que dans le cas d'une structure avec des défauts distribués de manière aléatoire, les variations $\Delta\sigma / \sigma_0$, sont faiblement dépendantes du nombre d'éléments autour d'un défaut soumis à une sollicitation de traction maximale.

Figure 2.12.2 : Variations du champ de contrainte $\Delta\sigma / \sigma_0$ pour la série A_1 en fonction de l'ordonnée pour un calcul avec l'approche entièrement couplée.

La Figure 2.12.3 montre que dans le cas d'une structure avec des défauts distribués de manière aléatoire les variations $\Delta\sigma / \sigma_0$, sont faiblement dépendantes du nombre d'éléments avec un défaut qui n'est pas situé dans la zone de traction maximale.

Figure 2.12.3 : Variations du champ de contrainte $\Delta\sigma / \sigma_0$ pour la série A_2 en fonction de l'ordonnée pour un calcul avec l'approche entièrement couplée.

La Figure 2.12.4 montre que dans le cas d'une structure avec des défauts distribués de manière uniforme les variations $\Delta\sigma / \sigma_0$, sont faiblement dépendantes du nombre d'éléments avec deux défauts.

Figure 2.12.4 : Variations du champ de contrainte $\Delta\sigma / \sigma_0$ pour la série R_{2+} en fonction de l'ordonnée pour un calcul avec l'approche entièrement couplée.

La Figure 2.12.5 montre que dans le cas d'une structure avec des défauts distribués de manière uniforme les variations $\Delta\sigma / \sigma_0$, sont faiblement dépendantes du nombre d'éléments avec un gros défaut dans la partie en traction maximale.

Figure 2.12.5 : Variations du champ de contrainte $\Delta\sigma / \sigma_0$ pour la série R_3 en fonction de l'ordonnée pour un calcul avec l'approche entièrement couplée.

La Figure 2.12.6 montre que dans le cas d'une structure avec des défauts distribués de manière uniforme les variations $\Delta\sigma / \sigma_0$, sont faiblement dépendantes du nombre d'éléments avec un défaut hors de la partie en traction maximale.

Figure 2.12.6 : Variations du champ de contrainte $\Delta\sigma / \sigma_0$ pour la série U_G en fonction de l'ordonnée pour un calcul avec l'approche entièrement couplée.

En ce qui concerne le temps de calcul, celui-ci augmente considérablement avec le nombre d'éléments comme le montre le Tableau 2.1. D'un point de vue pratique on a intérêt à diminuer le plus possible le nombre d'éléments par V.E.R. puisque celui-ci n'affecte que très peu les résultats tant locaux (champs de contrainte locaux) que globaux (efforts de rupture).

V.E.R. / E.F.	1	4	9	16
Temps C.P.U.	00 38 16	01 41 31	07 50 39	23 20 52

Tableau 2.1 : Temps de calcul (hh mm ss)
en fonction du maillage adopté (V.E.R. / E.F.).

3.4.2. Etude de l'influence du maillage sur la discrétisation du champ d'endommagement initial

Il convient de rappeler que "l'homogénéisation" très simple utilisée ici pour modéliser un V.E.R. avec endommagement initial conduit à un endommagement homogène sur le V.E.R et égal à h(D/L) : cf. relation (2.1) où L caractérise la taille du

V.E.R. Par ailleurs, les critères de rupture sont locaux et pratiquement tous les sites d'amorçage ont lieu sur des éléments endommagés initialement.

On peut ainsi imaginer un raffinement des V.E.R. sans pour autant conserver la même modélisation du champ d'endommagement intial. Ceci est particulièrement important dans le cas de valeus faibles d'endommagement initial. En effet, dans le cas des petits défauts, lors d'un raffinement, un certain nombre d'éléments apparaîtront comme sains et auront une valeur nulle d'endommagement initial.

4. Conclusions

Dans ce Chapitre nous avons étudié la mise en place d'une approche entièrement couplée de la rupture de matériaux à comportement fragile dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu. Les défauts initiaux sont modélisés par une valeur initiale d'une variable d'endommagement scalaire. Par l'intermédiaire d'une méthode de Monte-Carlo, on peut modéliser numériquement un matériau par la connaissance de la distribution aléatoire de défauts.

L'approche entièrement couplée permet de simuler qualitativement les effets de volume et d'hétérogénéité des contraintes sur la contrainte de rupture. Elle permet également de modéliser l'effet de la distribution des défauts sur la contrainte de rupture dans le cas des structures en béton. Malgré son caractère approché, cette méthode donne d'assez bons résultats par rapport aux expériences.

L'inconvénient de cette méthode est le temps de calcul qui augmente très rapidement avec le nombre de V.E.R. analysés. C'est pourquoi une méthode plus économe en temps de calcul est envisagée. C'est l'approche localement couplée, objet du Chapitre 3.

CHAPITRE 3

APPROCHE LOCALEMENT COUPLEE DE LA RUPTURE DE MATERIAUX A COMPORTEMENT FRAGILE

Notations

:	produit contracté sur deux indices
$< . >$	crochets de Macauley (i.e. partie positive)
$\mathcal{A}$	homothétie
a , a_M , a_c, a_{th}	taille de défaut initial, taille maximale, taille critique, taille seuil
A, B, B_1, B_2	constantes
α, β, k, $B_{\alpha\beta}$	paramètres de la densité de probabilité pour le cas où la taille maximale de défaut est bornée
α_n	constantes
$\overline{a}$, $\overline{\overline{a}}$	taille moyenne de défaut et écart type correspondant
B	fonction eulérienne de première espèce
C, q, s	paramètres d'une loi de Paris
$\mathcal{D}$	ensemble de tous les défauts que l'on est susceptible de trouver dans une structure
Δ	force thermodynamique associée à la variable de dégradation δ
D	variable d'endommagement scalaire
d	diamètre de défaut cylindrique de révolution
δ	variable interne de dégradation
D_0	valeur initiale de la variable d'endommagement scalaire
δ_0	valeur initiale de la variable interne de dégradation
D_{0M}	valeur maximale de l'endommagement initial
$\mathcal{D}_c$	ensemble des défauts critiques
δ_c	valeur critique de la variable interne de dégradation
$\mathcal{D}_{nc}$	ensemble des défauts non critiques
$\Delta\sigma$	variation de contrainte équivalente due aux défauts
E	module d'Young
$\mathbb{E}$	tenseur d'élasticité du matériau non endommagé
ε	tenseur des petites déformations
err(./.), Err(./.)	erreur, erreur globale
F	fréquence cumulée associée à la distribution f
f	densité de probabilité associée à la distribution de défauts
f_N	densité de probabilité associée à la distribution de défauts après N cycles
$\mathcal{G}$	taux de restitution d'énergie
γ	angle caractérisant l'orientation de défaut
g, G	densité de probabilité et fréquence cumulée

H	facteur d'hétérogénéité des contraintes
h	fonction liant la taille de défaut à la variable d'endommagement initial
H_m	facteur d'hétérogénéité des contraintes de Weibull
H_n, $(H_n)_I$, $(H_n)^*$	facteurs d'hétérogénéité des contraintes
i, I	indices
φ	loi d'évolution de la taille de défaut en fonction du nombre N de cycles
k	rapport de deux rayons
K, n	paramètres de la densité de probabilité dans le cas où la taille maximale de défaut n'est pas bornée
κ, p	paramètres de la relation entre contrainte et taille de défaut critique dans le cas où la taille maximale de défaut n'est pas bornée
K_c	facteur d'intensité des contraintes critique
K_I	facteur d'intensité des contraintes en mode I
K_{II}	facteur d'intensité des contraintes en mode II
K_{th}	facteur d'intensité des contraintes seuil
L	taille caractéristique d'un V.E.R.
M, M_1, M_2	points d'un domaine
$\mathcal{M}_n$	moments non centrés d'ordre n associés à la densité g
ν	coefficient de Poisson
n	nombre de maillons élémentaires
N, N_1, N_2	nombres de cycles
$\vec{n}$	normale caractérisant l'orientation de défaut
P_F, P_{F1}, P_{F2}	probabilités cumulées de rupture
P_{F0}	probabilité cumulée de rupture d'un maillon élémentaire
P_{Fi}	probabilité cumulée de rupture du maillon i
P_I	probabilité cumulée d'amorçage
P_s	probabilité de survie
ρ	masse volumique
r_2, r_1	rayons extérieur et intérieur d'un tube
Ψ	potentiel de Helmholtz (ou énergie libre spécifique)
σ	contrainte uniaxiale, valeur maximale sur un cycle d'une contrainte équivalente
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\boldsymbol{\sigma}^+$	tenseur des contraintes de Cauchy positif
σ_H^+, σ_{eq}^+	premier et second invariants de $\boldsymbol{\sigma}^+$
$(\sigma_r)^*$	contrainte équivalente d'endommagement positive

S_0 , S_u, m	paramètres du modèle de Weibull
σ_0	contrainte équivalente dans le cas sans défaut
σ_1, σ_2, σ_3	contraintes principales
$\sigma_{cr}(i)$	contrainte critique de rupture du maillon i
σ_F	contrainte de rupture
σ_M	contrainte maximale
$\overline{\sigma}_F$, $\overline{\overline{\sigma}}_F$	contrainte moyenne de rupture et écart type correspondant
V, V_1, V_2, V_Ω	volumes
V_0	volume d'un maillon élémentaire
V_{eff}	volume effectif
V_σ	volume occupé par Ω_σ
ω	paramètre, ou ensemble de paramètres, vitesse de rotation
Ω, Ω_1, Ω_2, Ω_σ	domaines
Y	taux de restitution d'énergie d'endommagement
$\mathcal{Y}$	facteur de forme adimensionnel
ψ	fonction liant la taille de défaut initiale à la taille de défaut après N cycles
Y^+	taux de restitution d'énergie d'endommagement positif
Y_c	taux de restitution d'énergie critique
$\Vert\sigma\Vert$, $\Vert\sigma\Vert_I$, $\Vert\sigma\Vert^*$	contraintes équivalentes
$\otimes$	produit tensoriel
$\varnothing$	ensemble vide

Ce troisième Chapitre est consacré au développement d'une approche localement couplée de la rupture de matériaux à comportement fragile. Contrairement à l'approche entièrement couplée présentée au Chapitre précédent, cette approche s'inscrit dans une stratégie de post-processeur.

La première partie de ce Chapitre concerne la présentation de la méthode localement couplée numérique. On étudie les différences en termes de prévisions par rapport à une approche entièrement couplée dans le cas des essais de flexion sur béton présentés au premier Chapitre.

Dans la seconde partie, nous étudions la méthode localement couplée d'un point de vue analytique. Dans un premier temps, on s'attache à présenter le cadre général de l'approche, ainsi que son extension dans le cas sollicitations cycliques. Une étude générale de l'effet de volume et de l'effet d'hétérogénéité des contraintes est ensuite présentée.

Une corrélation entre contrainte de rupture et distribution initiale de défauts est présentée dans une troisième partie. On montre en particulier que dans certains cas les paramètres de Weibull peuvent être reliés à des caractéristiques statistiques de la distribution initiale de défauts.

Enfin, dans la quatrième partie, des simulations numériques sont présentées. Elles montrent que la rupture de matériaux à comportement fragile sous sollicitation de fatigue peut être modélisée dans le cadre de l'approche localement couplée.

1. Une approche localement couplée

L'esprit de la méthode localement couplée est le même celui de l'approche entièrement couplée présentée dans le Chapitre 2. Les défauts sont pris en compte à travers leur distribution statistique. La notion de volume élémentaire représentatif est aussi conservée. Contrairement à l'approche entièrement couplée, l'approche localement couplée ne prend pas en compte l'influence des défauts sur le comportement élastique macroscopique de la structure. En conséquence, les interactions entre défauts sont négligées, ainsi que les perturbations des champs de contrainte et de déformation (ce qui revient à faire une hypothèse d'indépendance des événements). Le calcul du champ de contraintes est effectué une seule fois dans chaque cas d'étude (structure et chargement, indépendamment de la statistique des défauts : cf. Figure 3.1). Bien sûr, ce calcul n'est pas obligatoirement numérique (on peut utiliser des solutions analytiques dans le cas où elle existent) et ne suppose donc pas nécessairement l'utilisation d'un code E.F. Cette approche entre dans le cadre d'une approche par post-traitement du problème de la rupture [Lemaitre et Chaboche, 1985]. Cette méthode est d'autant plus fiable que les défauts interagissent peu entre eux. Le post-traitement peut être soit numérique (en faisant appel à une méthode de Monte-Carlo), soit analytique en établissant une expression explicite de la probabilité de rupture en fonction de la distribution de défauts.

Figure 3.1 : Approche localement couplée de la rupture de matériaux contenant des défauts.

2. Mise en oeuvre numérique de l'approche localement couplée

2.1. Effet de la distribution des défauts

Dans cette première partie, nous analysons les essais sur le béton présentés dans le premier Chapitre. Nous considérons uniquement les défauts dits "contrôlés" ce qui conduit à un seul calcul par configuration de défauts sans faire appel à une méthode de Monte-Carlo. Nous étudions de la même manière que dans le Chapitre 2 les résultats obtenus afin de comparer les deux approches. Les résultats numériques sont présentés dans les Figures 3.2.1 et 3.2.2. Comme pour l'approche entièrement couplée, un V.E.R. est modélisé par un seul élément fini (E.F.).

Ainsi, la mise en oeuvre de la méthode schématisée en Figure 3.1 consiste en deux étapes :

– calcul pour une charge unitaire du champ de contrainte dans la poutre supposée élastique sans défaut (solution E.F. qui, dans ce cas, pourrait être remplacée par la solution R.d.M.),

– calcul de la contrainte effective $\sigma_{eff} = \sigma / (1 - D_0)$ en chaque point (E.F.) de la structure et de la contrainte équivalente $\| \sigma \|$ correspondante, d'où localisation du point le plus chargé; calcul au point le plus chargé de la charge pour laquelle le critère de rupture est satisfait, i.e. $\| \sigma \| = \sigma_M$.

Dans le cas de l'approche localement couplée les deux critères donnent le même résultat. Ceci n'est pas surprenant car le champ de contrainte est essentiellement uniaxial.

L'influence de la description de l'endommagement est plus marquée lorsque sont comparées les erreurs globales de chacune des modélisations par rapport aux expériences (cf. Figure 3.2.3). L'erreur globale obtenue pour la description parabolique est nettement plus faible que celle obtenue pour la description linéaire. Dans cette série d'exemples, la méthode localement couplée permet d'obtenir de meilleurs résultats que la méthode entièrement couplée.

Figure 3.2.1 : Comparaison entre efforts moyens de rupture normés obtenus expérimentalement et numériquement avec une description linéaire de l'endommagement.

Figure 3.2.2 : Comparaison entre efforts moyens de rupture normés obtenus expérimentalement et numériquement avec une description parabolique de l'endommagement.

Figure 3.2.3 : Comparaisons des erreurs globales en fonction des l'hypothèses de calculs obtenues par les deux approches

Au niveau des tendances générales, on peut remarquer que les bonnes tendances entre les séries R_1, R_{2+} d'une part, et R_{2-}, R_3 d'autre part, sont obtenues. Ces séries comportent le même nombre de défauts avec des diamètres respectifs de 1 ou 2, et 2 ou 3 mm. respectivement. Pour les séries R_2, R_{2-}, R_{2+}, l'approche localement couplée donne les mêmes résultats dans tous les cas (l'approche localement couplée ne prend pas en compte les interactions) ce qui est approximativement vérifié expérimentalement dans ce cas. Pour les séries U les simulations donnent la même valeur sauf pour la série U_G (inflence directe du champ de contrainte qui est également observée expérimentalement). Enfin en ce qui concerne les séries A le classement est correctement simulé avec des ordres de grandeur comparables aux expériences.

En conclusion, les résultats obtenus sur cette série d'essais permettent de vérifier que cette approche localement couplée, malgré sa limitation (impossibilité de prendre en compte une éventuelle redistribution des contraintes au voisinage de gros défauts proches) et son faible coût numérique, permet dans un grand nombre de situations d'obtenir des résultats de bonne qualité.

2.2. Etude de l'influence du maillage à champ d'endommagement constant sur le V.E.R.

Dans tous les résultats précédents, un V.E.R a été modélisé par un seul E.F. Dans le cas de la flexion 4 points, le maillage choisi permet d'obtenir la solution exacte, dans le cas où les contraintes de cisaillement sont négligeables par rapport aux contraintes

uniaxiales. C'est pourquoi il n'y a aucune influence du maillage pour une modélisation de V.E.R. donnée.

En ce qui concerne le temps de calcul, celui-ci n'augmente que très peu avec le nombre d'éléments (cf. Tableau 3.1). D'un point de vue pratique on a également intérêt à diminuer le plus possible le nombre d'éléments par V.E.R. puisque celui-ci n'affecte que très peu les résultats. La comparaison avec la méthode entièrement couplée montre tout l'avantage d'une stratégie de post-traitement. Le temps de calcul est réduit considérablement.

On peut noter que même si d'un point de vue pratique il est plus aisé de décrire un V.E.R. par au moins un élément fini, ceci n'est pas forcément nécessaire pour cette approche localement couplée. En effet, en utilisant les fonctions de forme associées aux champs de contrainte, il est possible de considérer un maillage mécanique qui soit nettement plus grossier que le maillage physique [Saurel, 1991]. De plus cette méthode peut également être utilisée dans le cas de sollicitations cycliques [Hachich, 1990].

V.E.R. / E.F.	1	4	9	16
M.L.C.	00 00 42	00 00 58	00 01 35	00 02 31
M.E.C.	00 38 16	01 41 31	07 50 39	23 20 52

Tableau 3.1 : Temps de calcul (hh mm ss)
pour les méthodes localement (M.L.C.) et entièrement couplées (M.E.C.).
en fonction du maillage adopté (V.E.R. / E.F.).

Dans le cas d'une approche localement couplée, on peut quantifier explicitement les variations $\Delta\sigma / \sigma_0$, où σ_0 représente la contrainte équivalente de rupture qui existerait s'il n'y avait pas de défaut et $\Delta\sigma$ l'écart entre σ_0 et la contrainte équivalente de rupture mesurée au même point avec défaut. Dans le cas de sollicitations uniaxiales, les variations $\Delta\sigma / \sigma_0$ s'écrivent :

$$\Delta\sigma / \sigma_0 = \left(\frac{\sigma_0}{1 - D_0} - \sigma_0 \right) / \sigma_0 = D_0 / (1 - D_0) \tag{3.1}$$

Dans tous les cas, la variation de contrainte est surestimée et conduit à un effort normé de rupture plus faible dans le cas localement couplé par rapport au cas entièrement couplé. Toutes ces simulations indiquent que l'approche localement couplée conduit à des résultats conservatifs par rapport à l'approche entièrement couplée. Ceci est dû au fait que

l'approche localement couplée ne tient pas compte de la redistribution des contraintes autour des cellules fortement endommagées.

2.3. Simulation des effets D.V.H. pour les matériaux à comportement fragile

Enfin cette approche numérique, comme l'approche entièrement couplée est capable de simuler les effets liés à une répartition aléatoire de défauts tels que les effets D.V.H. [Hild et Marquis, 1990]. Ainsi, la mise en oeuvre de la méthode schématisée en Figure 3.1 consiste en trois étapes :

– faire appel à une méthode de Monte-Carlo afin de simuler une distribution aléatoire de défauts,

– calcul pour une charge unitaire du champ de contrainte dans la structure supposée élastique sans défaut,

– calcul de la contrainte équivalente $\|\sigma\|$ correspondante, d'où localisation du point le plus chargé; calcul au point le plus chargé de la charge pour laquelle le critère de rupture est satisfait, i.e. $\|\sigma\| = \sigma_M$.

Ces trois étapes sont répétées 50 fois afin de réaliser, en moyenne, la courbe de répartition des défauts. Dans la Figure 3.3.1 sont représentées les contraintes moyennes de rupture et les écarts types de rupture. On remarquera une diminution de la contrainte moyenne de rupture avec le volume. Par contre, l'écart type de rupture croît puis décroît en fonction du volume.

Figure 3.3.1 : Effet de volume en traction.

L'effet d'hétérogénéité des contraintes est visualisé dans la Figure 3.3.2. On obtient également l'évolution en fonction du volume. On notera que les tendances générales en fonction du volume sont identiques à celles de la Figure 3.3.1. L'hétérogénéité des contraintes retarde la décroissance de la contrainte moyenne de rupture ainsi que les variations de l'écart type de rupture.

Figure 3.3.2 : Effet d'hétérogénéité des contraintes.

Figure 3.3.3 : Effet de la distribution de défauts.

La Figure 3.3.3 montre l'influence de la distribution des défauts sur la contrainte moyenne de rupture ainsi que sur l'écart type de rupture. La variation en fonction du volume des deux grandeurs est identique. Plus la distribution contient de gros défauts, plus la contrainte moyenne de rupture est faible à volume fixé. La variation générale de l'écart type de rupture est identique. Cependant le niveau ainsi que la zone de croissance et de décroissance dépendent des détails de la distribution de défauts initiaux.

Ces résultats mettent en lumière le fait qu'une approche statistique n'est pas toujours nécessaire (cf. Figure 3.3.4). En effet, la rupture de petits volumes soumis à des champs de contrainte hétérogènes peut être décrite par un critère $\|\sigma\| = \sigma_M$, où σ_M correspond à la contrainte critique sans défaut. D'autre part pour des volumes très grands on obtient également un comportement déterministe donné par un critère $\|\sigma\| = \sigma_M (1 - D_{0M})$, où D_{0M} correspond à l'endommagement initial créé par le plus gros défaut. Entre ces deux régions une approche statistique est nécessaire. Bien sûr, ce raisonnement n'est valable que si la distribution de défauts initiaux est indépendante du volume considéré ! On peut remarquer que le point C de la figure 3.3.4 correspond au volume critique caractéristique du matériau introduit dans le Chapitre 1.

Figure 3.3.4 : Illustration schématique des zones où les approches statistique et déterministe peuvent être utilisées dans le cas d'une distribution de défauts indépendante du volume de la structure.

3. Etude analytique de l'approche localement couplée

L'approche localement couplée décrite précédemment peut également être présentée sous forme analytique. Elle est basée sur le principe d'indépendance des événements et sur l'hypothèse du maillon le plus faible.

3.1. Hypothèses du maillon le plus faible et indépendance des événements

Dans tout le paragraphe précédent, on a supposé que la rupture d'un volume élémentaire représentatif (i.e. un maillon), qui constitue la phase d'amorçage au niveau macroscopique local, conduit à la rupture de toute la structure (autrement dit la phase de propagation au niveau de la structure est supposée instable). Ceci revient à faire l'hypothèse du maillon le plus faible.

Supposons une structure constituée de n maillons (i.e. de n V.E.R.) en série. On fait l'hypothèse du maillon le plus faible et d'indépendance des événements. La probabilité de survie, $P_s(\sigma)$ des n maillons sous une contrainte σ est donnée par :

$$P_s(\sigma) = P\left(\sigma < \inf_{i=1,n} \sigma_{cr}(i) \right) \tag{3.2}$$

où $\sigma_{cr}(i)$ représente la contrainte critique de rupture du maillon i. Pour que $\sigma < \inf_{i=1,n} \sigma_{cr}(i)$ il faut et il suffit que pour chacun des maillons on ait $\sigma < \sigma_{cr}(i)$, soit :

$$P_s(\sigma) = P\left(\bigcap_{i=1,n} \left\{ \sigma < \sigma_{cr}(i) \right\} \right) \tag{3.3}$$

En supposant qu'il n'y a aucune interaction entre défauts, que leur distribution spatiale est décorrélée, il y a indépendance des événements et on peut écrire :

$$P_s(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} P_{si}(\sigma) \tag{3.4}$$

où $P_{si}(\sigma)$ correspond à la probabilité de survie du maillon i. L'équation (3.4) peut également s'écrire :

$$\ln(1-P_F) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1-P_{Fi}) \tag{3.5}$$

Ce raisonnement peut être généralisé dans le cas où le champ de contrainte n'est plus un champ de traction uniforme. De plus dans le cas où le nombre n de maillons est grand, on peut faire le passage à la limite suivant :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1-P_{Fi}) \cong \frac{1}{V_0}\int_{\Omega} \ln(1-P_{F0})\, dV \tag{3.6}$$

D'où finalement :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ \frac{1}{V_0}\int_{\Omega} \ln(1-P_{F0})\, dV \right\} \tag{3.7}$$

où P_{F0} désigne la probabilité cumulée de rupture d'un maillon élémentaire de volume V_0. Nous supposons que ce volume élémentaire contient un et un seul défaut, ce qui signifie que V_0 est plus grand que le volume du plus grand des défauts que l'on puisse rencontrer dans la structure. Dans la suite, nous supposons que le volume V_0 est lié à la distance moyenne entre deux défauts voisins (il sera pris égal au cube de cette distance moyenne). Ceci constitue le point de départ de l'étude analytique. L'expression (3.7) a été le point de départ de la théorie de Weibull [Weibull, 1939] et a été longuement étudiée (cf. par exemple [Freudenthal, 1968]).

On remarquera enfin que lorsque la probabilité cumulée de rupture d'un maillon élémentaire devient négligeable devant 1, on peut obtenir l'expression simplifiée suivante :

$$P_F \cong 1 - \exp\left\{ -\frac{1}{V_0}\int_{\Omega} P_{F0}\, dV \right\} \tag{3.8}$$

3.2. Distribution de défauts et probabilité de rupture

Les défauts sont supposés ici être répartis de manière aléatoire dans la structure. Leur distribution est caractérisée par une densité de probabilité f. Cette distribution f correspond à la distribution de défauts initiaux (i.e. avant l'application de tout chargement). La fonction f peut dépendre de plusieurs paramètres. Elle dépend de la

nature physique des défauts et de leur modélisation mécanique viz. : tout d'abord de la taille du défaut, a ; puis son orientation caractérisée par une normale $\vec{n}$; enfin d'autres paramètres si nécessaire caractérisés par ω. On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble de tous les défauts que l'on est susceptible de trouver dans une structure. Pour un niveau de chargement donné, l'ensemble $\mathcal{D}$ se partage en deux sous ensembles : le premier $\mathcal{D}_c$ fait référence aux défauts critiques pour lesquels il y a rupture locale, le second $\mathcal{D}_{nc}$ fait référence aux défauts non critiques. Plus le chargement est élevé, plus $\mathcal{D}_c$ prend de l'ampleur au détriment de $\mathcal{D}_{nc}$. Le calcul des défauts critiques dépend de la modélisation mécanique choisie. Des expressions particulières peuvent ainsi être déduites (cf. [Batdorf et Crose, 1974], [Jayatilaca et Trustrum, 1977], [Evans, 1978], [Lamon, 1988], ...).

La probabilité cumulée de rupture d'un maillon élémentaire est définie comme la probabilité que la contrainte équivalente $\|\sigma\|$ soit supérieure à la contrainte critique de rupture du maillon σ_{cr}, c'est-à-dire :

$$P_{F0} = P_{F0}(\|\sigma\|) = P(\sigma_{cr} < \|\sigma\|) \tag{3.9}$$

Cette définition revient à dire qu'il faut trouver les défauts tels que $\sigma_{cr} < \|\sigma\|$, c'est-à-dire les défauts appartenant à $\mathcal{D}_c$. Ainsi, la probabilité cumulée de rupture d'un maillon élémentaire est définie comme la fraction de défauts critiques parmi l'ensemble de défauts que l'on peut trouver dans la structure :

$$P_{F0} = \int_{\mathcal{D}_c} f(a,\vec{n},\omega)\, da\, d\vec{n}\, d\omega \tag{3.10}$$

la fonction f étant une fonction de distribution, on vérifie bien que P_{F0} varie entre 0 (i.e. $\mathcal{D}_c = \varnothing$: aucun défaut n'est critique) et 1 ($\mathcal{D}_c = \mathcal{D}$: tous les défauts sont critiques).

3.3. Etude mésomécanique de la rupture d'un maillon

Cette partie est consacrée à la modélisation mécanique d'un défaut dans un maillon et à l'expression de la probabilité cumulée de rupture correspondante. En ce qui concerne le comportement local du maillon, nous nous plaçons dans le même formalisme que celui exposé dans le Chapitre 2 (voir équation (2.4)). Les critères de rupture sont identiques à ceux utilisés dans le Chapitre 2 (critères (2.9) et (2.11)). Ainsi, l'équation (2.4) donne l'expression, pour un niveau de chargement donné, de la dégradation critique δ_c en-dessous de laquelle la dégradation n'évolue pas. Lorsque la dégradation est supérieure à δ_c, sa vitesse d'évolution est infinie et conduit à la rupture fragile du maillon. Ceci nous

permet de trouver, pour un chargement donné, l'ensemble des défauts critiques $\mathcal{D}_c$. Dans ce cadre, un défaut initial est à nouveau modélisé par un endommagement initial δ_0.

3.3.1. Cas général uniaxial

La densité de probabilité f est supposée ne dépendre que de la taille a des défauts initiaux. La probabilité cumulée de rupture P_{F0} est la probabilité de trouver un défaut dont la taille est supérieure à la taille critique du défaut, a_c. La taille du défaut critique correspond à la borne inférieure de l'ensemble $\mathcal{D}_c$: $\mathcal{D}_c = \{ a / a \geq a_c \}$ et à la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{D}_{nc}$: $\mathcal{D}_{nc} = \{ a / a < a_c \}$. En utilisant l'expression (3.10), la probabilité cumulée de rupture d'un seul maillon s'écrit :

$$P_{F0} = \int_{a_c}^{+\infty} f(a)\, da \tag{3.11}$$

Le taille du défaut critique, a_c, est supposée liée à une contrainte uniaxiale, σ, par l'intermédiaire d'un critère de rupture général :

$$\sigma = g(a_c) \tag{3.12}$$

où g est ici une fonction de classe C^1, positive, strictement décroissante et définie entre 0 et 1. La fonction g sera particularisée par la suite. En utilisant les expressions (3.7) et (3.11), la probabilité cumulée de rupture s'écrit :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \ln\left(1 - \int_{a_c}^{+\infty} f(a)\, da \right) dV \right\} \tag{3.13}$$

L'expression (3.13) exprime la relation entre une distribution de défauts initiaux et la probabilité cumulée correspondante pour une structure Ω. La taille du défaut critique ($a_c = g^{-1}(\sigma)$) est obtenue à l'aide d'une analyse mésomécanique.

Ci-après, on montre qu'avec quelques hypothèses supplémentaires, l'expression générale (3.13) conduit à une expression de Weibull. Lorsque la taille maximale de défaut n'est pas bornée, une loi de Weibull à deux paramètres est obtenue. Par contre lorsque la taille maximale de défaut est bornée, une loi de Weibull à trois paramètres est déduite.

3.3.1.1. Cas où la taille maximale de défaut est bornée

Dans ce paragraphe, on supposer que la taille maximale de défaut est bornée ($0 < a < a_M < +\infty$). Dans ce cas on obtient une contrainte seuil, S_u, qui correspond à la contrainte en-dessous de laquelle la probabilité de rupture est exactement égale à zéro :

$$S_u = g(a_M) \tag{3.14}$$

Pour des valeurs de taille de défaut proches de la valeur maximale a_M, nous supposons que la fonction de répartition des défauts est équivalente à $k\,(a_M - a)^{\beta}$, avec $k > 0$ et $\beta > 0$. En faisant l'hypothèse que a_c est proche de a_M, la probabilité cumulée de rupture d'un seul maillon s'écrit alors :

$$P_{F0} \cong k\,(a_M - a_c)^{\beta+1} / (\beta + 1) \tag{3.15}$$

En utilisant l'expression (3.12), la quantité $a_M - a_c$ est approchée par :

$$a_M - a_c \cong \frac{\sigma - S_u}{g'(a_M)} \tag{3.16}$$

Finalement, l'expression de P_{F0} est approximativement donnée par :

$$P_{F0} \cong \left(\frac{\langle \sigma - S_u \rangle}{S_0} \right)^{\beta+1} \quad , \quad S_0 = -\,g'(a_M) \left(\frac{\beta + 1}{k} \right)^{1/(\beta+1)} \tag{3.17}$$

On peut remarquer que l'hypothèse a_c est proche de a_M utilisée pour obtenir l'expression (3.17) est cohérente avec l'hypothèse $P_{F0} << 1$ faite pour obtenir l'expression (3.8). En utilisant les équations (3.8) et (3.17) on obtient une loi de Weibull à trois paramètres dans laquelle l'exposant de Weibull, m , est lié à la puissance β (un des paramètres de la distribution de défauts) par :

$$m = \beta + 1 \tag{3.18}$$

Le paramètre β donne la tendance de la distribution de défauts initiaux pour les grandes tailles (i.e. a proche de a_M). La relation (3.17) donne la relation entre un paramètre de la distribution de défauts (i.e. un paramètre physique) et l'exposant de Weibull (i.e. un paramètre mécanique) qui peut être obtenu à partir de l'analyse phénoménologique d'essais macroscopiques (cf. Chapitre 1).

3.3.1.2. Cas où la taille maximale de défaut n'est pas bornée

Dans ce paragraphe, nous envisageons une fonction de répartition de taille de défauts non bornée. Précisons cependant que ce cas "général" n'est plus cohérent avec la notion de V.E.R. base de cette approche dès l'instant où la taille de défaut atteint la dimension du V.E.R.

Nous supposons que la fonction f est équivalente à Ka^{-n} pour des valeurs élevées de a. La relation entre la taille de défaut critique a_c et la contrainte appliquée σ est supposée donnée par :

$$\sigma = \kappa\,(a_c)^{-1/p} \tag{3.19}$$

En utilisant les expressions (3.13) et (3.19), la probabilité cumulée de rupture est approchée par une loi de Weibull à deux paramètres :

$$P_{F0} \cong \left(\frac{<\sigma>}{S_0} \right)^{p(n-1)} \quad , \quad S_0 = \kappa \left(\frac{n-1}{K} \right)^{1/p(n-1)} \tag{3.20}$$

L'exposant de Weibull s'écrit :

$$m = p\,(n-1) \tag{3.21}$$

On remarquera que le cas p = 2 correspond au cas étudié par Jayatilaca et Trustrum [Jayatilaca et Trustrum, 1977] dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture.

3.3.2. Applications

3.3.2.1. Mécanique linéaire de la rupture

En mécanique de la rupture, les défauts sont modélisés par des fissures initiales. Les fissures sont supposées perpendiculaires à la direction de traction (cf. Figure 3.4). Ici Δ représente le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ (équation (2.4)). Lorsque la taille d'un défaut est petite par rapport à la structure et que la distance moyenne entre défauts est grande, les expressions (3.17) et (3.20) peuvent être réécrites en termes de facteur d'intensité des contraintes critique K_c du matériau. On obtient dans le cas où la valeur maximale de défaut est bornée :

$$S_u = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a_M}} \quad , \quad S_0 = \frac{S_u}{2a_M}\left(\frac{\beta + 1}{k}\right)^{1/(\beta+1)} \tag{3.22}$$

et dans le cas d'une valeur maximale non bornée :

$$S_0 = \frac{K_c}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{n - 1}{K}\right)^{1/2(n-1)} \tag{3.23}$$

La Figure (3.4) représente l'évolution de la contrainte de rupture en fonction de la taille des défauts dans le cas d'une sollicitation uniaxiale .

Figure 3.4 : Tailles de défauts critiques pour une sollicitation en mode I dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture.

3.3.2.2. Mécanique de l'endommagement continu

Une alternative à la modélisation de l'évolution de la dégradation est offerte par la mécanique de l'endommagement continu. La mécanique de l'endommagement fait référence à la notion de contrainte effective (cf. Chapitre 2). La présence d'un défaut dans

un élément de volume est modélisée par un endommagement initial D_0. La taille du défaut est définie comme la plus petite sphère contenant le défaut. Le maillon a une taille L (cf. Figure 3.5). Nous supposons à nouveau que l'endommagement initial est lié à la taille de défaut par une fonction de classe C^1, positive, croissante et définie entre 0 et 1 telle que :

$$D_0 = h(a/L) \tag{3.24}$$

Nous considérons que la taille maximale de défaut est bornée et que la taille L est supérieure ou égale à la taille du plus grand des défauts. La rupture est décrite par le critère (2.9). Avec ce type de modélisation nous obtenons les résultats suivants :

$$S_u = \sigma_M \left(1 - D_{0M}\right) \quad , \quad S_0 = \sigma_M\, h'(a_M/L) \left(\frac{\beta + 1}{k} \right)^{1/(\beta+1)} \tag{3.25}$$

où D_{0M} correspond à la valeur maximale de l'endommagement initial : $D_{0M} = h(a_M/L)$.

La Figure (3.5) représente l'évolution de la contrainte de rupture en fonction de la taille des défauts (caractérisée par un endommagement initial) dans le cas d'une sollicitation uniaxiale .

Figure 3.5 : Tailles de défauts critiques dans le cas uniaxial dans le cadre de la mécanique de l'endommagement.

3.3.3. Cas bidimensionnel

Les fissures sont supposées de taille variable (caractérisée par a) et de direction variable (caractérisée par l'angle γ : cf. Figure 3.6) : l'ensemble $\mathcal{D}$ est donné par : $\mathcal{D} = \{a, \gamma / 0 < a < a_M , 0 < \gamma < \pi/2\}$. Le critère de rupture est alors approximativement [Amestoy et al., 1979] donné par : $K_c^2 = K_I^2 + K_{II}^2$ pour des contraintes positives. La probabilité cumulée de rupture P_{F0} s'exprime par :

$$P_{F0} = \int_{K_c^2 / \pi\sigma^2}^{+\infty} \left\{ \int_{\sin^{-1}\left(K_c / \sigma\sqrt{\pi a}\right)}^{\pi/2} f(a,\gamma)\ d\gamma \right\} da \tag{3.26}$$

Si l'on suppose une équirépartition angulaire, la probabilité cumulée de rupture P_{F0} peut être s'écrire :

$$P_{F0} = \int_{K_c^2 / \pi\sigma^2}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cos^{-1}\left(K_c / \sigma\sqrt{\pi a}\right) f(a)\ da \tag{3.27}$$

Cette expression est similaire à l'expression (3.11) et utilisée dans la Figure (3.6).

3.3.3.1. Cas où la taille maximale de défaut est bornée

Lorsque la taille de défaut critique ($a_c = K_c^2 / \pi\sigma^2$) est proche de la taille maximale a_M, l'expression (3.27) peut être approchée par l'expression (3.17) qui est identique à une loi de Weibull à trois paramètres. Pour cela on utilise le fait qu'au voisinage de 1, la fonction $\cos^{-1}(x)$ est équivalente à la fonction $\sqrt{2\ (1 - x)}$. Dans ces conditions, la contrainte seuil est donnée par celle trouvée dans l'expression (3.22). Ceci correspond à la rupture du défaut le plus critique, c'est-à-dire le défaut le plus grand avec une orientation orthogonale à la direction de chargement (i.e. une sollicitation en mode I pur). La prise en compte du mode II conduit à une modification de la relation entre m et β :

$$m = \beta + 1 + \frac{1}{2} \tag{3.28}$$

Dans le Chapitre 1 on a obtenu des valeurs de m nettement plus grandes que 1/2 (de l'ordre de 10 pour le nitrure de silicium). La comparaison entre les relations (3.18) et (3.28) montre donc que dans le cas d'une répartition équiangulaire de défauts, l'influence du mode II est faible.

Figure 3.6 : Taille et orientation critiques pour une contrainte σ donnée dans le cas de défauts en mode I et II.

3.3.3.2. Cas où la taille maximale de défaut n'est pas bornée

Ce cas a été étudié par [Jayatilaca et Trustrum, 1977]. La relation (3.27) est maintenant approchée par une loi de Weibull à deux paramètres. La relation entre la puissance n de la distribution de défauts et l'exposant de Weibull est alors donnée par :

$$m = 2\,(n-1) \tag{3.29}$$

Cette relation est identique à celle obtenue dans le cas uniaxial (3.21).

3.3.4. Cas tridimensionnel

Dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, nous supposons que la relation de l'endommagement initial *scalaire et isotrope*, D_0, avec la taille de défaut initial, a, est encore donnée par la relation (3.24) et que la taille maximale de défaut est bornée.

Ceci est cohérent dans le cas de défauts modélisés par des sphères. Nous utilisons à nouveau le critère (2.9). Quand l'endommagement initial critique, D_{0c}, est proche de l'endommagement initial maximal, D_{0M}, une expression de la contrainte seuil et une relation entre la puissance β et l'exposant de Weibull peuvent être obtenues, et les realtions (3.17) et (3.18) deviennent :

$$m = \beta + 1 \quad , \quad S_u = \sigma_M \left(1 - D_{0M}\right) \tag{3.30}$$

Ces relations sont identiques à celles obtenues dans le cas unidimensionnel. Une variable scalaire d'endommagement est alors suffisante pour décrire le caractère statistique de la rupture de matériaux à comportement fragile. Ainsi une expression prenant en compte uniquement la taille des défauts semble suffisante [Hild et Marquis, 1990] pour décrire la probabilité cumulée de rupture :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \ln\left(1 - \int_{a_c}^{+\infty} f(a)\, da\right) dV \right\} \tag{3.31.1}$$

$$a_c = L\, h^{-1}\left(1 - \frac{(\sigma_r)^*}{\sigma_M}\right) \tag{3.31.2}$$

3.3.5. Analyse des essais sur nitrure de silicium

Par exemple, dans le cas où la distribution de défauts est bornée, la corrélation entre paramètres de la distribution de défauts (β et a_M) et les paramètres de Weibull (m, S_0, et S_u) peut être utilisée pour obtenir des informations sur la répartition des défauts dans un matériau à comportement fragile par l'intermédiaire d'une analyse d'un ensemble d'essais macroscopiques. Il convient cependant de rappeler que l'information ainsi obtenue est incomplète et ne concerne que les plus gros défauts qui conduisent à la rupture (i.e. la partie "droite" de la distribution). Cette information est par contre plus difficile à obtenir à partir d'une étude systématique de la distribution de défauts par observation microscopique car la probabilité de trouver le plus grand défaut dans une structure donnée est très faible.

D'autre part, sachant que l'exposant de Weibull, et la contrainte S_0 sont différents d'une série d'essais à l'autre dans le cas du nitrure de silicium (cf. Chapitre 1), cela nous permet de conclure que la distribution initiale de gros défauts n'est pas la même pour les

quatre séries. Ceci est dû au fait que le mode d'obtention est différent pour les quatre séries d'éprouvettes. D'autre part les lots de matériaux sont également différents.

Ces analyses sont reprises au paragraphe suivant pour une forme particulière de la fonction de répartition f.

4. Simulations pour une fonction de répartition bêta

La densité de probabilité utilisée dans ce paragraphe est une fonction bêta (cf. Figure 3.7) qui vérifie les hypothèses énoncées lors de l'étude du cas uniaxial lorsque la taille de défaut maximale est bornée :

$$f(a) = \frac{a_M^{-1-\alpha-\beta}}{B_{\alpha\beta}} a^{\alpha} (a_M - a)^{\beta} \quad 0 < a < a_M \ , \ \alpha > -1, \beta > -1 \tag{3.32}$$

où α et β sont des paramètres de la fonction Bêta, et $B_{\alpha\beta}$ est égal à $B(\alpha+1,\beta+1)$, où B correspond à la fonction eulérienne de première espèce $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$. La description de l'endommagement est donnée par la fonction $h(a/L) = a/L = D_0$ dans les trois premiers paragraphes.

On remarquera que la fonction bêta est est équivalente à $k\ (a_M - a)^{\beta}$, pour des valeurs de taille de défaut proches de la valeur maximale a_M, et vérifie ainsi l'hypothèse du paragraphe précédent.

Figure 3.7 : densité de probabilité bêta pour différentes valeurs de α et β.

Le but de ces simulations numériques est d'une part d'étudier l'influence du volume, du type de contrainte et de la distribution des défauts en utilisant l'expression

(3.31), car nous avons vu dans le Chapitre 1 que ces paramètres avaient une influence sur la probabilité de rupture d'une structure. D'autre part, les séries d'essais monotones seront également analysées dans ce cadre.

4.1. Effet D : effet de la distribution de défauts.

4.1.1. Simulations numériques

Pour différentes valeurs des paramètres α et β de la distribution de défauts, la probabilité de rupture est étudiée en traction pure. En utilisant l'expression (3.31), la probabilité cumulée de rupture calculée pour un maillon élémentaire est donnée en Figure 3.8.

Figure 3.8 : effet de la distribution des défauts en traction ($V = V_0$).

4.1.2. Etude analytique

Dans le cas analysé, il est possible de relier les deux premiers moments de la contrainte à rupture et les deux premiers moments de la distribution de défauts :

$$\overline{\sigma}_F = \sigma_M\left(1 - \frac{\overline{a}}{L}\right) \quad , \quad \overline{\overline{\sigma}}_F = \sigma_M \frac{\overline{\overline{a}}}{L} \tag{3.33}$$

où $\overline{\sigma}_F$ et $\overline{\overline{\sigma}}_F$ désignent la contrainte moyenne de rupture et l'écart type correspondant, $\overline{a}$ et $\overline{\overline{a}}$ la taille moyenne de défaut et l'écart type correspondant. On remarque que lorsque $\alpha = \beta = 1$, $\alpha = \beta = 5$, $\alpha = \beta = 10$, la taille moyenne des défauts est égale à 0.5 a_M et la contrainte moyenne de rupture correspondante est égale à 0.5 σ_M. Dans ce cas la contrainte moyenne de rupture n'est pas sensible à l'écart type de la distribution de défauts. Ceci est dû à la forme particulière de la fonction h ($h(a/L) = a/L = D_0$).

4.2. Effet V : effet de volume

4.2.1. Simulations numériques

L'hypothèse du maillon le plus faible combinée avec une hypothèse d'indépendance des événements intègre directement l'effet de volume. Ainsi, l'effet de volume est directement intégré dans l'expression (3.31).

L'effet du volume de la structure sur la contrainte de rupture est analysé pour une sollicitation de traction avec une densité de probabilité Bêta (α=1, β=10). La contrainte moyenne de rupture décroît et tend asymptotiquement vers $S_u = \sigma_M \left(1 - D_{0M}\right)$ lorsque le volume de la structure devient très grand. Dans le cas où le volume de la structure devient très petit, la contrainte moyenne de rupture $\overline{\sigma}_F$ tend vers $S_u = \sigma_M$. Ces résultats sont cohérents avec ceux montrés en Figure 3.3.4. Les résultats sont présentés à la Figure 3.9 pour des volumes variant de cinq ordres de grandeur. Le modèle de rupture permet de retrouver que pour une distribution de défauts et une sollicitation fixées, lorsque le volume de la structure augmente, la probabilité de trouver un défaut de taille supérieure à la taille critique augmente, donc la probabilité de rupture augmente. Lorsque l'on augmente le volume de deux ordres de grandeur, la contrainte moyenne de rupture diminue d'un tiers ce qui est cohérent avec les résultats expérimentaux observés sur du nitrure de silicium [Katamaya et Hattori, 1982].

Figure 3.9 : Effet de volume en traction (α=1, β=10).

4.2.2. Etude analytique

De manière plus générale, l'effet de volume peut être décrit de la manière suivante. Soit une homothétie $\mathcal{A}$ transformant un domaine Ω_1 de volume V_1 en un domaine Ω_2 de volume V_2 telle que $M_2 = \mathcal{A}(M_1)$. Dans ces conditions le même champ de contrainte peut exister dans les deux domaines considérés. On obtient ainsi : $P_{F0}(M_1) = P_{F0}(M_2)$. Sachant que le Jacobien de la transformation $\mathcal{A}$, $J(\mathcal{A})$ est constant et vaut $J(\mathcal{A}) = V_1 / V_2$ on obtient :

$$\frac{1}{V_1}\int_{\Omega_1} \ln(1-P_{F0})\,dV = \frac{1}{V_2}\int_{\Omega_2} \ln(1-P_{F0})\,dV \tag{3.34}$$

La relation liant les probabilités de rupture des domaines Ω_1 et Ω_2 définies par :

$$P_{F1} = 1-\exp\left\{\frac{1}{V_0}\int_{\Omega_1} \ln(1-P_{F0})\,dV\right\} \tag{3.35.1}$$

$$P_{F2} = 1-\exp\left\{\frac{1}{V_0}\int_{\Omega_2} \ln(1-P_{F0})\,dV\right\} \tag{3.35.2}$$

devient :

$$P_{F2} = 1 - (1 - P_{F1})^{V_2/V_1} \tag{3.36}$$

De plus on montre que :

$$V_2 > V_1 \;\Rightarrow\; \bar{\sigma}_{F1} > \bar{\sigma}_{F2} \tag{3.37.1}$$

$$V_2 > V_1 \;\Rightarrow\; \bar{\bar{\sigma}}_{F1} \lesseqgtr \bar{\bar{\sigma}}_{F2} \tag{3.37.2}$$

On ne peut pas donner de sens de variation de l'écart type contrairement à la contrainte moyenne qui diminue lorsque le volume augmente. Ceci est confirmé par le fait que pour de très petits volumes le comportement devient déterministe (écart type nul) avec une contrainte moyenne égale à σ_M, ainsi que pour de très grands volumes le comportement devient également déterministe (écart type nul) avec une contrainte moyenne égale à $\sigma_M\left(1 - D_{0M}\right)$.

Enfin, l'effet de volume a également été étudié de manière plus approfondie d'un point de vue physique notamment par Roux (cf. par exemple [Roux, 1990]) à l'aide de descriptions différentes du matériau.

4.3. Effet H : effet d'hétérogénéité des contraintes

4.3.1. Simulations numériques

L'expression (3.31) est également capable de simuler l'effet d'hétérogénéité des contraintes. Afin de distinguer qualitativement les différentes sollicitations nous utilisons à nouveau le facteur d'hétérogénéité des contraintes H (cf. (2.12))

L'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la contrainte de rupture est analysé pour un volume $10000V_0$ avec une densité de probabilité Bêta (α=1, β=10). A la Figure 3.10 les effets d'une sollicitation de traction (H=1), de torsion (H=0.667), de flexion-traction (H=0.5), de flexion pure (H=0.25), de flexion 3 points (H=0.125) et de flexion biaxiale (H=0.086) sont comparés. On retrouve que pour un volume de structure et une distribution de défauts arbitraires, plus le champ de contraintes est hétérogène (plus le *facteur d'hétérogénéité des contraintes* H diminue), plus la probabilité de trouver un défaut de taille supérieure à la taille critique a_c est faible, donc plus la probabilité de rupture est faible.

Figure 3.10 : Effet d'hétérogénéité des contraintes pour $V = 10000V_0$ (α=1, β=10).

Toutes ces simulations montrent que l'expression (3.31) permet de simuler les effets de la distribution de défauts, de volume et d'hétérogénéité des contraintes sur la probabilité de rupture.

4.3.2. Etude analytique

4.3.2.1. Introduction des facteurs d'hétérogénéité des contraintes

On peut également étudier de manière plus générale l'effet d'hétérogénéité des contraintes [Hild et al., 1992]. On considère une structure occupant le domaine Ω de volume V_Ω. On caractérise en chaque point P de Ω l'état de contrainte σ, en général tridimensionnel, par une contrainte équivalente, égale à une semi-norme notée $\| \sigma \|$ et on fait l'hypothèse suivante :

$$\sigma_F \equiv \underset{\Omega}{\mathrm{Max}} \| \sigma \| \neq 0 \tag{3.38}$$

On peut remarquer que cette contrainte équivalente est finie tant qu'il n'y a pas rupture à l'échelle macroscopique (alors que les contraintes microscopiques peuvent être infinies au voisinage immédiat d'un défaut). On suppose que la probabilité de rupture est donnée par l'expression (3.31). La taille critique a_c est directement reliée au critère de rupture

caractéristique du matériau ainsi qu'à la modélisation des défauts que l'on adopte. Ainsi de manière générale, on peut supposer que :

$$\ln\left(1 - P_{F0}\right) = -\sum_{n\geq 1} \alpha_n \left(\|\sigma\| / S_0 \right)^n \tag{3.39}$$

où les constantes α_n et S_0 sont directement fonction de la modélisation adoptée ainsi que de la distribution initiale de défauts (cause de la rupture). La probabilité cumulée de rupture P_F de la structure Ω peut alors s'écrire :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ - \frac{V_\Omega}{V_0} \sum_{n\geq 1} \alpha_n H_n \left(\sigma_F / S_0 \right)^n \right\} \tag{3.40}$$

et la moyenne des contraintes de rupture est donnée par :

$$\overline{\sigma}_F = \int_0^{+\infty} \frac{V_\Omega}{V_0} \left\{ \sum_{n\geq 1} n\, \alpha_n H_n \left(\sigma_F / S_0 \right)^n \right\} \exp\left\{ - \frac{V_\Omega}{V_0} \sum_{n\geq 1} \alpha_n H_n \left(\sigma_F / S_0 \right)^n \right\} d\sigma_F \tag{3.41}$$

où les facteurs H_n sont donnés par :

$$H_n = \left\{ \frac{1}{V} \int_\Omega \|\sigma\|^n dV \right\} \Big/ \sigma_F^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \tag{3.42}$$

En notant qu'en élasticité linéaire le rapport ($\|\sigma\| / \sigma_F$) est indépendant de σ_F, les facteurs H_n sont indépendants du niveau de chargement. En revanche, les facteurs H_n dépendent de la nature du chargement. Enfin, en remarquant qu'en traction pure $H_n = 1$ quel que soit n, la définition du volume effectif [Davies, 1973] peut être généralisée comme suit :

$$V_{eff} = V_{\Omega} \frac{\sum_{n\geq 1} \alpha_n H_n \, (\sigma_F / S_0)^n}{\sum_{n\geq 1} \alpha_n \, (\sigma_F / S_0)^n} \tag{3.43}$$

L'ensemble des facteurs H_n, $n \in \mathbb{N}^*$, caractérise donc globalement la probabilité cumulée de rupture P_F, la moyenne des contraintes de rupture $\overline{\sigma}_F$, une mesure du volume effectif V_{eff}, et par là l'effet de l'hétérogénéité des contraintes. Ces facteurs seront appelés facteurs d'hétérogénéité des contraintes d'ordre n.

On notera que le facteur d'hétérogénéité des contraintes H défini dans le Chapitre 2 (cf. relation (2.12)) correspond au facteur d'hétérogénéité des contraintes d'ordre 1, H_1.

4.3.2.2. Remarque

On note Ω_σ tel que $\Omega \supset \Omega_\sigma$, l'ensemble des points P de la structure tels que $\| \underline{\sigma} \| \leq \sigma$, avec $\min_{\Omega} \| \underline{\sigma} \| \leq \sigma \leq \mathrm{Max}_{\Omega} \| \underline{\sigma} \|$, et par V_σ tel que $0 \leq V_\sigma \leq V_\Omega$ le volume occupé par Ω_σ. On définit la fonction $G(\sigma)$ associée à ce volume par :

$$G(\sigma) = \frac{V_\sigma}{V_\Omega} \tag{3.44}$$

En supposant G presque partout dérivable, on peut définir la densité associée :

$$g(\sigma) = \frac{dG(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{V_\Omega} \frac{dV_\sigma}{d\sigma} \tag{3.45}$$

Les moments non centrés d'ordre n associés à la densité g sont définis par :

$$\mathcal{M}_n = \int_0^{+\infty} \sigma^n \, g(\sigma) \, d\sigma = \frac{1}{V_\Omega} \int_\Omega \| \underline{\sigma} \|^n dV \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \tag{3.46}$$

Les facteurs d'hétérogénéité des contraintes (cf. (3.42)) apparaissent alors comme étant les moments normés et non centrés d'ordre n :

$$H_n = \mathcal{M}_n \Big/ \sigma_F^n \tag{3.47}$$

4.3.2.3. Facteurs d'hétérogénéité des contraintes de Weibull

Dans le cas où $\alpha_i = 1$ et $\alpha_n = 0 \ \forall \ n \neq i$, on obtient :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ - \frac{V_\Omega \, H_i}{V_0} \, (\sigma_F \, / \, S_0)^i \right\} \tag{3.48.1}$$

$$\overline{\sigma}_F = S_0 \left(\frac{V_0}{H_i \, V_\Omega} \right)^{1/i} \Gamma\left(1 + \frac{1}{i} \right) \tag{3.48.2}$$

$$V_{eff} = H_i \, V_\Omega \tag{3.48.3}$$

Si le comportement à rupture du matériau vérifie la loi de Weibull à deux paramètres, on obtient les mêmes résultats que ceux donnés dans le Chapitre 1 (équations (1.6), (1.8), (1.9.2)) avec $i = m \in \mathbb{R}^{+*}$. Le moment H_m caractérise alors l'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la probabilité cumulée de rupture, la moyenne des contraintes de rupture et le volume effectif. Il a été appelé "facteur d'hétérogénéité des contraintes de Weibull".

4.3.2.4. Application à la rupture des matériaux à comportement fragile

Dans ce paragraphe, on constate que dans certains cas, le facteur H_1 est suffisant pour caractériser qualitativement l'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la contrainte moyenne de rupture.

Associées aux critères (2.9) et (2.11), nous considérons les deux contraintes équivalentes suivantes :

$$\| \sigma \|_I = \max_{I=1,3} \langle \sigma_I \rangle \tag{3.49.1}$$

$$\| \sigma \|^* = \sqrt{\frac{2}{3} (1+\nu) \, (\sigma_{eq}^+)^2 + 3(1-2\nu) \, (\sigma_H^+)^2} \tag{3.49.2}$$

Selon la contrainte équivalente de rupture utilisée pour leur évaluation, les moments normés d'ordre n sont notés :

$$(H_n)_I = H_n \left(\| \sigma \|_I \right) \quad , \quad (H_n)^* = H_n \left(\| \sigma \|^* \right) \tag{3.50}$$

Leurs valeurs respectives sont données dans les Tableaux 3.2 et 3.3 pour des structures soumises aux sollicitations suivantes : traction pure, flexion 4-points, flexion 3-points et flexion biaxiale. On peut remarquer que les deux définitions (3.50) sont identiques dans le cas de sollicitations telles que σ^+ n'a qu'une seule valeur propre non nulle.

SOLLICITATION	CONTRAINTE MOYENNE DE RUPTURE	$(H_1)_I$	$(H_1)^*$	$(H_2)_I$	$(H_2)^*$
TRACTION	2.7 MPa	1.000	1.000	1.000	1.000
FLEXION 4 POINTS	5.4 MPa	0.188	0.188	0.111	0.111
FLEXION 3 POINTS	5.9 MPa	0.125	0.125	0.056	0.056

Tableau 3.2 : Contrainte moyenne de rupture en fonction du type d'essai (béton), et valeurs correspondantes des facteurs d'hétérogénéité des contraintes d'ordre 1 et 2.

SOLLICITATION	CONTRAINTE MOYENNE DE RUPTURE	$(H_1)_I$	$(H_1)^*$	$(H_2)_I$	$(H_2)^*$
TRACTION	526 MPa	1.000	1.000	1.000	1.000
FLEXION 4 POINTS	629 MPa	0.188	0.188	0.111	0.111
FLEXION 3 POINTS	660 MPa	0.125	0.125	0.056	0.056
FLEXION BIAXIALE	721 MPa	0.101	0.086	0.032	0.024

Tableau 3.3 : Contrainte moyenne de rupture en fonction du type d'essai (nitrure de silicium), et valeurs correspondantes des facteurs d'hétérogénéité des contraintes d'ordre 1 et 2.

Le Tableau 3.2 donne également les valeurs de la contrainte moyenne de rupture mesurée expérimentalement par L'Hermite [L'Hermite, 1973] sur un béton. Le Tableau 3.3 donne la même information pour les essais réalisés sur le nitrure de silicium. Dans les deux cas, une diminution de la moyenne des contraintes de rupture correspond à une augmentation, de H_1 d'une part, et de H_2 d'autre part. Le seul facteur H_1 apparaît donc, dans ces cas, suffisant pour caractériser *qualitativement* l'effet de l'hétérogénéité des contraintes sur la contrainte moyenne de rupture.

4.3.2.5. Un essai de discrimination des facteurs d'hétérogénéité des contraintes d'ordre n

L'essai d'un tube aux extrémités libres (cf. Figure 3.11) soumis à une pression interne uniforme permet d'obtenir des valeurs de H_1 et H_2 variables en fonction du rapport $k = r_2 / r_1$ des rayons extérieur et intérieur du tube (quelle que soit celle des deux contraintes équivalentes qui est employée) :

$$H_1(k) = \frac{1}{1+k^2} + \frac{2k^2}{k^4-1}\ln(k) \tag{3.51.1}$$

$$H_2(k) = \frac{1}{1+k^2} + \frac{4k^2}{(k^4-1)(k^2+1)}\ln(k) \tag{3.51.2}$$

Ainsi, pour des valeurs de H_1 identiques à celles obtenues pour les essais décrits précédemment, cet essai permet d'obtenir des valeurs de H_2 différentes (cf. Tableau 3.4). La mesure de la moyenne des contraintes de rupture, obtenue au cours de l'essai, permettrait donc de mesurer l'influence de H_2, voire de moments normés d'ordre supérieur. Pour k de l'ordre de 5., la pression à appliquer dans un tel essai est de l'ordre de 4 MPa dans le cas du béton et de 500 MPa dans le cas du nitrure de silicium.

Figure 3.11 : Tube sous pression interne.

SOLLICITATION	H_1	$k=\frac{r_2}{r_1}$	H_2	$H_2(k)$
TRACTION	1.000	1.00	1.000	1.000
TORSION	0.667	1.72	0.500	0.462
FLEXION PURE	0.250	3.81	0.167	0.089
FLEXION 4 POINTS	0.188	4.64	0.111	0.057
FLEXION 3 POINTS	0.125	6.05	0.056	0.032
FLEXION	0.101	6.93	0.032	0.024
BIAXIALE	0.086	7.67	0.024	0.019

Tableau 3.4 : Valeurs de H_2 pour un tube sous pression interne ($H_2(k)$) et pour différents autres types d'essais (H_2).

4.4. Analyse des essais monotones sur nitrure de silicium

On reprend ci-dessous l'analyse des essais sur nitrure de silicium présentés au Chapitre 1 en utilisant les relations (3.31) et (3.32). On peut identifier directement les paramètres de la distribution de défauts à partir des essais de traction. Pour cela on suppose que la valeur critique du facteur d'intensité des contraintes est égale à 4 MPa$\sqrt{m}$ et que la valeur du volume V_0 vaut 1 mm^3. Pour la taille maximale de défaut on prendra celle observée expérimentalement c'est-à-dire a_M = 125 µm (S_u = 357 MPa). L'identification à partir d'une loi de Weibull à trois coefficients (i.e. à partir d'une "généralisation 3-D" des relations (3.30) en considérant des *penny-shaped cracks*) conduit à des valeurs de α et β qui sont respectivement égales à –0.99 et 2. La figure 3.12 montre que l'identification à partir des relations (3.31) et (3.32) et des résulats expérimentaux est valable pour des tailles critiques de défaut proches de la taille maximale (i.e; pour des contraintes à rupture faibles).

Figure 3.12 : Comparaisons entre expériences et simulations à partir d'une loi de Weibull en traction.

On peut également effectuer une identification sur tout le domaine de contrainte. On remarquera néanmoins le caractère approché de cette démarche qui n'est plus en accord avec les hypothèses faites pour établir la relation (3.31). D'autre part, il est rappelé qu'un critère faisant référence à un facteur d'intensité des contraintes critique n'est pas forcément descriptif de la rupture sur toute la plage de taille de défauts initiaux (cf. Chapitre 1). On obtient ainsi $\alpha = -0.81$ et $\beta = 7.11$. La corrélation est montrée en Figure 3.13.

Figure 3.13 : Comparaison entre expériences et simulations en traction.

En utilisant cette dernière distribution, on peut également calculer la probabilité cumulée de rupture pour les trois autres types d'essais. La Figure 3.14 montre que la distribution de défauts en traction n'est pas identique à celles en flexion. Ainsi on peut à nouveau conclure à partir de ces courbes de probabilité cumulée de rupture que la distribution initiale de défauts est différente pour les quatre séries d'essais. Cette différence est vraisemblablement due à la différence de mode d'obtention entre les quatre séries d'éprouvettes.

Figure 3.14 : Comparaisons entre expériences et prévisions sur la base d'une identification en traction.

5. Etude de la probabilité de rupture d'une structure

Une analyse de faisabilité basée sur l'expression (3.31) est envisagée sur une pale de turbine de turbocompresseur. La pale de turbine (cf. Figure 3.15) est supposée être soumise uniquement aux forces centrifuges induites par sa rotation. La conception d'un tel composant nécessite une analyse de fiabilité. Une analyse de la rupture locale est effectuée en chaque point de la structure (i.e. en chaque point de Gauss) à l'aide d'un post-processeur à un code de calcul E.F. La Figure 3.16 montre l'évolution de la probabilité cumulée de rupture en fonction de la vitesse de rotation de la pale.

Figure 3.15 : Maillage de la structure.

Figure 3.16 : Probabilité cumulée de rupture
en fonction de la vitesse de rotation de la pale (α=1, β=10).

6. Extensions au cas de chargements cycliques

Dans ce paragraphe, on considère des structures tridimensionnelles contenant des défauts de type *penny-shaped cracks* ce qui correspond à des V.E.R. du type représenté en Figure 3.17. Ces structures sont supposées soumises à des chargements cycliques constants et proportionnels. On considère le plan perpendiculaire au vecteur propre associé à la plus grande des contraintes principales. Ce plan correspondra au plan d'extension d'une fissure en forme de pièce de monnaie en mode I pur.

Figure 3.17 : Définition de la fissure équivalente pour le V.E.R.
($\vec{V}_1$: vecteur propre associé à la contrainte principale maximale).

Il est à noter que la cellule ainsi définie peut également constituer un point de départ aux études faites par Onat et Leckie [Onat, 1984], [Onat et Leckie, 1988], et par Krajcinovic et Sumarac [Krajcinovic et Sumarac, 1987], [Krajcinovic, 1987], [Krajcinovic, 1989] sur l'endommagement anisotrope. Si l'on suppose que l'extension de la fissure se fait en mode I pur, un critère associé à une généralisation du facteur d'intensité des contraintes est :

$$\mathcal{Y} \max_{I=1,3} (\sigma_I) \sqrt{a} = K_c \tag{3.52}$$

où $\mathcal{Y}$ est un facteur de forme adimensionnel dépendant du type de défaut modélisé. Dans le cas d'un *penny-shaped crack*, $\mathcal{Y} = 2 / \sqrt{\pi}$. La taille de défaut critique devient :

$$a_c = \left\{ K_c / (\mathcal{Y} \max_{I=1,3} (\sigma_I)) \right\}^2 \tag{3.53}$$

Dans le cas de chargements cycliques, nous étudierons l'évolution des défauts initiaux par l'intermédiaire de la mécanique linéaire de la rupture. Pour les céramiques techniques, bien que la rupture sous chargement monotone soit très brutale, il existe une phase de propagation stable au niveau des défauts sous chargement cyclique (cf. Chapitre 1) qui peut être modélisée par une forme généralisée de la loi de Paris (cf. par exemple [Billardon et al., 1986]) :

$$\frac{da}{dN} = 0 \qquad a \leq a_{th} \tag{3.54.1}$$

$$\frac{da}{dN} = C \sigma^q \left(\sqrt{a} - \sqrt{a_{th}} \right)^s \qquad a_{th} < a < a_c \tag{3.54.2}$$

$$\frac{da}{dN} = +\infty \qquad a \geq a_c \tag{3.54.3}$$

où da / dN désigne l'accroissement de rayon de la fissure au cours d'un cycle, C, q, s désignent des paramètres du matériau et σ la valeur maximale sur un cycle d'une contrainte équivalente (par exemple la contrainte principale maximale). Enfin a_{th} désigne la taille seuil en-dessous de laquelle il n'y a pas de propagation. Cette taille est obtenue à partir du facteur d'intensité des contraintes seuil, K_{th} par :

$$a_{th} = \left\{ K_{th} / (\mathcal{Y} \sigma) \right\}^2 \tag{3.55}$$

Dans le cas de chargements cycliques, la répartition de défauts évolue avec le nombre de cycles, N, et avec la contrainte supposée constante, σ (elle correspond au maximum sur le cycle de la contrainte équivalente) : la densité de probabilité f est notée $f_N(a)$. En utilisant la loi d'évolution (3.54) on peut obtenir l'évolution de f_N et la relier à la distribution initiale de défauts f. L'intégration de la loi (3.54) donne la taille de défaut $a(N)$, après N cycles, connaissant la taille initiale $a(0)$:

$$a(N) = a(0) \qquad \text{si } a(0) < a_{th} \tag{3.56.1}$$

$$\varphi\left(\sqrt{a(N)}\right) - \varphi\left(\sqrt{a(0)}\right) = C\,\sigma^q\,N \qquad \text{si } a(0) \geq a_{th} \tag{3.56.2}$$

où la fonction φ s'écrit :

$$s \neq 1,\ s \neq 2 \qquad \varphi(x) = 2\,\frac{\left(x - x_{th}\right)^{1-s}\left((1-s)x + x_{th}\right)}{(2-s)(1-s)} \tag{3.57.1}$$

$$s = 1 \qquad \varphi(x) = 2\left(x + x_{th}\ln\left(x - x_{th}\right)\right) \tag{3.57.2}$$

$$s = 2 \qquad \varphi(x) = 2\ln\left(x - x_{th}\right) - \frac{2\,x}{x - x_{th}} \tag{3.57.3}$$

Il est utile d'introduire la fonction ψ définie par $a(0) = \psi(a(N))$, qui peut être obtenue à partir des expressions (3.57). La loi d'évolution (3.54) étant déterministe, la probabilité de trouver un défaut de taille a après N cycles est égale à la probabilité de trouver un défaut de taille initiale $\psi(a(N))$. Si l'on suppose qu'aucun nouveau défaut n'amorce durant le chargement de fatigue, la distribution f_N peut être liée à la distribution initiale f_0 par [Hild et Roux, 1991] :

$$f_N(a,N) = f_0\left(\psi(a(N))\right)\frac{\partial\psi}{\partial a} \tag{3.58}$$

La probabilité de rupture d'un maillon élémentaire sous chargement cyclique est donnée par la probabilité de trouver un défaut de taille supérieure à a_c (car le critère de rupture est supposé identique à celui sous chargement monotone) :

$$P_{F0} = \int_{a_c}^{+\infty} f_N(a)\ \mathrm{d}a \tag{3.59}$$

En utilisant le résultat (3.58), on peut également écrire :

$$P_{F0} = \int_{\psi(a_c)}^{+\infty} f_0(a)\ \mathrm{d}a \tag{3.60}$$

où $\psi(a_c)$ représente la taille de défaut initial qui après N cycles atteint la taille critique a_c. La relation (3.60) a la même forme que la relation (3.11) donnée dans le cas de

chargements monotones. La relation (3.60) constitue ainsi une généralisation aux cas cycliques de la relation donnée dans le cas de chargements monotones.

A l'échelle de la structure, dans le cas des chargements cycliques, l'expression de la probabilité de rupture devient :

$$P_F = 1 - \exp\left\{ \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \ln\left(1 - \int_{\psi(a_c,\sigma,N)}^{+\infty} f(a)\, da \right) dV \right\} \tag{3.61}$$

A nouveau, pour des chargements monotones, le même type de relation est obtenu : il suffit de substituer $\psi(a_c)$ par $\psi(a_c(N=0)) = a_c$.

6.1. Quelques propriétés pour les chargements cycliques

Dans ce paragraphe, nous considérons les iso-probabilités de rupture d'une structure, autrement dit les courbes $\sigma(N)$ telles que P_F = constante, pour des chargements cycliques proportionnels et constants. La condition P_F = constante se transforme naturellement en P_{F0} = constante ou encore en $F\left(\psi(a_c)\right)$ = constante, où F représente la probabilité cumulée associée à la distribution f, soit :

$$\psi(K_c / (\mathcal{Y}\sigma)) = A \tag{3.62}$$

où A est une constante. Ainsi on obtient le résultat suivant : la forme des iso-probabilités de rupture dans un diagramme de Wöhler ou courbes de Wöhler apparaissent comme indépendantes de la distribution de défauts proprement dite. Cette dernière permet de quantifier les iso-probabilités mais n'influence pas leur allure générale. Les iso-probabilités sont principalement déterminées par la loi d'évolution des défauts. Le nombre N de cycles correspondant à une iso-probabilité donnée peut être obtenu à partir des équations (3.56) :

$$N = \frac{1}{C\,\sigma^q} \left\{ \psi(K_c / (\mathcal{Y}\sigma)) - B \right\} \tag{3.63}$$

où B est une autre constante ($B = \varphi(\sqrt{A})$). L'expression (3.63) montre que l'on vérifie bien quelle que soit les valeurs de q et s, $dN / d\sigma < 0$, c'est-à-dire qu'une diminution du niveau de chargement implique une augmentation du nombre de cycles. Ce résultat est également indépendant de la distribution de défauts proprement dite.

6.2. Simulations de la probabilité de rupture en fatigue

Dans ce paragraphe, on étudie numériquement quelques propriétés obtenues dans le cas de chargement cycliques. On n'étudie en bidimensionnel que la probabilité cumulée de rupture sur un maillon élémentaire. La généralisation à un champ de contrainte quelconque et à un volume donné est identique à celle obtenue dans le cas monotone. Pour simplifier les résultats, nous supposons que le V.E.R. contient une fissure perpendiculaire à la direction de contrainte principale maximale ($\mathcal{Y} = \sqrt{\pi}$). La loi d'évolution des fissures est donnée par :

$$\frac{da}{dN} = 0 \qquad a \leq a_{th} \qquad (3.64.1)$$

$$\frac{da}{dN} = C\,\sigma^q \left(\sqrt{a} \right)^q \qquad a_{th} < a < a_c \qquad (3.64.2)$$

$$\frac{da}{dN} = +\infty \qquad a \geq a_c \qquad (3.64.2)$$

Le nombre corrigé de cycles à rupture, définit par : $N^* = C\,K_{Ic}^n / a_M\ N$ (C : constante de la loi de fatigue), est donné par ($q \neq 2$) :

$$N^* = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sigma}{S_u} \qquad (3.65.1)$$

$$N^* = \frac{x^{(2-q)/2}\,(\sigma/S_u)^{2-q} - 1}{\frac{q-2}{2}\,(\sigma/S_u)^2} \qquad \frac{K_{th}}{K_c}\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{\sigma}{S_u} < \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (3.65.2)$$

$$N^* = +\infty \qquad \frac{K_{th}}{K_c}\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{\sigma}{S_u} \qquad (3.65.3)$$

avec $x = \psi(a_c) / a_M$.

Dans un premier temps, on étudie les résultats pour une densité de probabilité particulière (densité Bêta avec $\alpha = 1$ et $\beta = 5$). Les densités de probabilité et la probabilité cumulée correspondant aux relations (3.60) et (3.32) sont représentées sur les Figures 3.17.1 et 3.17.2 respectivement.

Figure 3.17.1 : Densité de probabilité Bêta normée
en fonction de la taille de défaut normée ($\alpha = 1$ et $\beta = 5$).

Figure 3.17.2 : Probabilité Bêta cumulée en fonction de la taille de défaut normée.

Dans la Figure 3.18 sont représentées les probabilités cumulées de rupture en fonction du nombre corrigé de cycles à rupture N^* pour différents niveaux de chargement caractérisés par le rapport σ/S_u avec $q = 4$. On remarquera que pour des niveaux tels que $\sigma/S_u < 1$, il faut appliquer un nombre de cycles non nuls avant de voir la probabilité évoluer. Ceci est dû à l'introduction du seuil K_{th}. La rupture ne peut avoir lieu qu'en chargement cyclique. Pour des niveaux de contraintes tels que $\sigma \leq K_{th} / (\mathcal{Y}\sqrt{a_M})$ il n'y

aucune rupture possible. Les niveaux tels que $\sigma/S_u \geq 1$, une rupture sous chargement monotone est possible. Ceci est dû à l'introduction du facteur d'intensité des contraintes critiques K_c. Enfin, à nombre corrigé de cycles de rupture donné, plus le niveau de chargement est élevé, plus la probabilité de rupture est élevée.

Dans la Figure 3.19.1 sont représentées les iso-probabilités de rupture. On remarquera que l'introduction du seuil K_{th} conduit à des contraintes seuil pour les différentes valeurs de la probabilité de rupture. Pour tracer les courbes d'iso-probabilité il faut déterminer la valeur de la variable $\psi(a_c)$ telle que la probabilité P_{F0} soit égale à e.g. 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 et 0.9. Les valeurs correspondantes de $\psi(a_c) / a_M$ sont respectivement égales à 0, 0.547435, 0.685717, 0.771510, 0.844079 et 0.9211766 dans le cas d'une fonction Bêta avec $\alpha = 1$ et $\beta = 5$. La Figure 3.19.2 correspond à un passage en échelle logarithmique de l'axe des abscisses. Dans ce cas on peut noter un "resserrement" des courbes d'iso-probabilité lorsque la contrainte appliquée diminue, puis un "écartement" brusque au niveau des différents seuils. Ceci est dû à la forme particulière de la loi de Paris (3.56)

Figure 3.18 : Probabilité cumulée à rupture
en fonction du nombre corrigé de cycles de rupture pour différents niveaux de chargement σ/S_u = 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75 ($q = 4$, $K_{th}/K_c = 0.5$, $\alpha = 1$ et $\beta = 5$).

Figure 3.19.1 : Iso-probabilité cumulée de rupture en fonction du nombre corrigé de cycles à rupture.

Figure 3.19.2 : Diagramme semi-logarithmique de la Figure 3.19.1.

7. Conclusions

Dans ce Chapitre, une méthode localement couplée a été mise au point. Cette méthode ne permet pas de prendre en compte les interactions entre défauts. Cependant, elle permet de simuler qualitativement les effets de volume, d'hétérogénéité des contraintes, et de distribution de défauts sur la contrainte de rupture (effets D.V.H.). Il est remarquable que la simulation des essais sur béton permet d'obtenir des résultats plus proches des résultats expérimentaux que l'approche entièrement couplée dans le cas d'une description parabolique de l'endommagement. Par contre, pour une description linéaire de l'endommagement, l'approche entièrement couplée donne de meilleurs résultats.

En développant cette approche de manière analytique, nous avons pu obtenir une corrélation entre les caractéristiques de distribution de défauts initiaux et les paramètres de Weibull dans le cadre de la mécanique de l'endommagement et celui de la mécanique linéaire de rupture. Les effets D.V.H sont alors également modélisés.

Les analyses des quatre séries d'essais monotones sur nitrure de silicium montrent que la répartition initiale de défauts est différente. Ceci est probablement dû aux différents modes de fabrication employés.

Une extension à des cas de chargements cycliques est obtenue et conduit à une expression unifiée de la probabilité de rupture d'une structure en fonction de la distribution statistique de défauts initiaux. L'application quantitative des résultats obtenus dans le cas d'une fonte à graphite sphéroïdal a fait l'objet des travaux de [Cano, 1991] et [Berrah et Fodil, 1992].

Il convient de remarquer que dans ce mémoire la "probabilité de rupture" correspond à la probabilité de rupture d'un volume élémentaire représentatif de la mécanique des milieux continus (autrement dit à l'échelle mésoscopique). Cette rupture locale correspond donc au concept d'amorçage d'une macro fissure. Cet amorçage peut être issu d'une rupture microscopique brutale, ou le résultat d'une phase de propagation stable. Les probabilités *d'amorçage* d'une macro fissure ainsi définies ne peuvent être confondues avec les probabilités de *rupture* d'une *structure* que si la phase de propagation de la macro fissure à l'échelle de cette structure est négligeable ou instable. Ces probabilités d'amorçage apparaissent donc naturellement comme des bornes inférieures (en terme de durée de vie) des probabilités de rupture.

CHAPITRE 4

ANALYSE DE LA RUPTURE DE CERAMIQUES RENFORCEES PAR DES FIBRES

Notations

$\cdot$	produit contracté sur un indice
$:$	produit contracté sur deux indices
$\mathbb{A}$	tenseur d'ordre 2
a, b	rayons intérieur et extérieur
a, b, c	coefficients d'une équation quadratique bicarrée
a_R	rayon de la zone miroir
D	variable d'endommagement
D_2	variable scalaire d'endommagement
D_c	valeur critique variable scalaire d'endommagement
δ_c	longueur caractéristique
E	module d'Young du composite
$\mathbb{E}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}_s$	tenseurs d'ordre 4
$\dot{\varepsilon}$	tenseurs des taux de déformation
$\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{21}$, $\tilde{G}_{12}$	constantes élastiques d'un matériau endommagé
E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21}, G_{12}	constantes élastiques d'un matériau non endommagé
E_f	module d'Young des fibres
ε_{ij}	composantes du tenseur des petites déformations
E_M	module d'Young de la matrice
E_r, E_φ, $\nu_{r\varphi}$, $\nu_{\varphi r}$, $G_{r\varphi}$	constantes élastiques d'un matériau non endommagé
$\bar{\varepsilon}$	déformation moyenne dans le composite
f	fraction volumique de fibres
f(t,s)	distribution des lieux de rupture sous une charge s.
F_i	fonctions auxiliaires
$\gamma(.,.)$	fonction gamma incomplète
$\mathcal{G}_{fc}$	résilience de la fibre
$\mathcal{G}_{Ic}$	résilience de l'interface
$\mathcal{G}_{Mc}$	résilience de la matrice
h	hauteur
H_{ijkl}	composantes de l'opérateur tangent
K_f	facteur d'intensité des contraintes critique des fibres
L_m	espacement moyen entre fissures matricielles à saturation
L_R	longueur de recouvrement
$\bar{L}_F$	longueur moyenne des fragments

$\mathbf{n}$	vecteur
n_i	composantes du vecteur $\mathbf{n}$
P_F	probabilité cumulée de rupture
θ	angle
q	contrainte résiduelle dans la matrice
R	rayon de fibre
ρ	masse volumique
σ	contrainte de traction à l'infini
s	contrainte uniaxiale
σ_*	borne inférieure de la contrainte de début de fissuration matricielle lorsque les contraintes résiduelles sont négligées
$\dot{\bar{\sigma}}$	tenseurs des taux de contrainte
S_0 , L_0 , m	paramètres du modèle de Weibull
σ_0	borne inférieure de la contrainte de début de fissuration matricielle
S_c	contrainte caractéristique
$\sigma_f(x,T)$	contrainte longitudinale dans la fibre
σ_{ij}	composantes du tenseur des contraintes
$\sigma_T(T)$	composante de contrainte due au tirage dans la matrice
$\bar{\sigma}$	contrainte moyenne appliquée sur le composite
$\bar{\sigma}_R(s)$	contrainte moyenne de tirage pour la contrainte s et à l'abscisse $x = 0$
$\bar{\sigma}_{UT}$	contrainte ultime de traction
T	contrainte de traction de référence
τ	contrainte de cisaillement d'interface
ω	vitesse de rotation angulaire
X	variable

Ce quatrième Chapitre est consacré à l'analyse de la rupture de céramiques renforcées par des fibres longues (C.R.F.) dans une seule direction. Le comportement de ce type de composite reste fragile. Néanmoins, ce matériau n'obéit plus à l'hypothèse de maillon le plus faible, dans le sens où il est possible que plusieurs fibres cassent et que chaque fibre se rompe plusieurs fois avant que ces amorçages locaux n'entraînent la rupture complète de la structure.

La première partie de ce Chapitre concerne la présentation des mécanismes de rupture de ce type de matériaux. Deux mécanismes sont mis en jeu ; le premier fait référence à la fissuration de la matrice et le second à la rupture des fibres. Nous n'étudions que le deuxième mécanisme dans le cas d'essais de traction.

Dans la seconde partie, nous étudions le comportement en traction de ces composites dans le cas d'essais de traction. Nous limitons notre étude au cas où la contrainte de cisaillement à l'interface est faible (de l'ordre de 5-10 MPa) comparée aux contraintes de rupture (de l'ordre de 400 à 800 MPa). Nous considérons ces composites comme un milieu continu anisotrope élastique endommageable, la loi d'évolution étant choisie comme un modèle statistique de rupture des fibres. Une analyse de localisation permet de définir un critère d'amorçage de fissure que l'on peut relier à d'autres critères dérivés d'analyses micromécaniques plus classiques.

1. Introduction : comment renforcer les céramiques

Dans l'état actuel de développement, les céramiques utilisées dans l'automobile ne le sont que sur des prototypes (à l'exception des turbines de turbocompresseurs des Farlady Z vendues par Nissan au Japon [Huber et Heinrisch, 1989], des chambres de précombustion [Huber et Heinrisch, 1989] et des pièces en céramiques implantées sur une version turbocompressée du moteur de type 513 commercialisé par KHD Deutz MWD [Vilnat, 1988]). L'utilisation de céramiques dans l'automobile se réduit à des composants du moteur. Elles ont pour but d'améliorer :

– l'isolation thermique,
– la résistance à l'usure par frottement,
– l'allégement des masses en mouvement.

L'allégement des masses en mouvement peut être atteint par l'utilisation du nitrure de silicium (masse volumique : 3200 kg/m^3). Cette option est envisagée pour les axes de pistons, la soupape d'échappement : reste le problème de la tenue aux chocs. Par contre la turbine du turbocompresseur ne pose pas de problèmes dans des pays où le style de conduite est calme (par exemple le Japon) et permet d'améliorer considérablement le temps de réponse [Huber et Heinrisch, 1989].

Les céramiques techniques, en particulier le nitrure de silicium, ont atteint un stade où la faisabilité est acquise, mais elles nécessitent encore de nombreuses études de caractérisation pour mieux maîtriser et prévoir leur comportement thermomécanique. Le comportement de ces matériaux à très haute température conditionnera vraisemblablement le développement des futures générations de moteurs [Harmon, 1992].

Dans le Chapitre 1, nous avons vu d'une part que les céramiques techniques sont sensibles à la présence de défauts initiaux et que d'autre part dès qu'une fissure s'amorce, elle conduit à une rupture brutale de la structure. Ce comportement est souvent redouté et a conduit à la mise "en veille" d'applications faisant appel à des céramiques monolithiques. Le domaine de l'automobile constitue certainement un bon exemple. On notera cependant que dans des applications où les propriétés réfractaires sont primordiales, les céramiques techniques constituent le meilleur candidat actuel (cf. par exemple des applications dans les convertisseurs [Berthaud et al., 1990]). Deux possibilités sont offertes pour améliorer les performances des céramiques techniques. La première consiste à un contrôle plus strict des méthodes de mise en oeuvre qui conduit à des surcoûts de production importants. La seconde consiste à renforcer les céramiques autrement dit à obtenir des composites à matrice céramique.

Plusieurs procédés existent pour renforcer une céramique [Evans, 1990]. Le premier fait appel à un renforcement à l'aide de dispersoïdes tels que des particules (e.g.

Si_3N_4 + Particules ZrO_2), ou des trichites encore appelés whiskers (e.g. Si_3N_4 + whiskers SiC). Dans ces cas, le renforcement est dû au "pontage" des fissure dans la matrice céramique autour d'éléments durs. Ceci permet de doubler la résilience par rapport à celle observée dans le cas des céramiques monolithiques.

Un autre moyen est un renforcement par changement de phase. L'exemple le plus célèbre est celui de la zircone (ZrO_2). Avec le chargement mécanique, on transforme la structure tétragonale en structure monoclinique ce qui conduit à une dissipation d'énergie et à des blocages de fissures dues à des contraintes de compression en tête de fissure. On obtient une augmentation du facteur d'intensité des contraintes critique qui peut atteindre des valeurs de 20 $MPa\sqrt{m}$ [Evans, 1990], [Hom et McMeeking, 1990]. Il faut néanmoins remarquer que ces valeurs élevées de la résilience s'accompagnent d'une diminution de la résistance et d'une augmentation de la dispersion.

Enfin, une autre méthode consiste à renforcer les céramiques techniques par des fibres longues. Plusieurs architectures existent. La première utilise uniquement des fibres dans une direction. La seconde consiste à utiliser des architectures 2D telles que des fibres tissées, ou 2D et demi avec des fibres perpendiculaires dans la troisième direction. Enfin une dernière alternative est d'utiliser des architectures 3D. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons au cas de fibres dans une seule direction.

2. Mécanismes de rupture de matrices céramiques renforcées par des fibres céramiques

Dans ce chapitre, les matériaux étudiés sont des céramiques renforcées par des fibres unidirectionnelles cylindriques de révolution. En ce qui concerne les fibres, parmi les matériaux les plus fréquemment employés on peut citer le carbure de silicium (SiC), le saphir (Al_2O_3 monocristalline) et le carbone (C). Ces fibres sont soit utilisées à l'état brut soit revêtues pour diminuer les contraintes résiduelles dues à la différence de coefficients de dilatation thermique. Les revêtements ont également pour fonction de protéger les fibres dans le cas de sollicitations à haute température. Les matrices sont pour la plupart en alumine (Al_2O_3), carbure de silicium (SiC), carbone (C), silice (LAS, CAS) et nitrure de silicium (Si_3N_4) [U.R.I., 1992].

Dans la direction des fibres, le comportement des C.R.F. peut être présenté en plusieurs étapes lorsque l'on analyse un diagramme contrainte-déformation (Figure 4.1). La première partie (AB) du comportement est essentiellement élastique linéaire et une bonne description est obtenue par une loi de mélange au niveau des fibres et de la matrice. La seconde partie (BC), qui constitue une première zone non linéaire, correspond à une fissuration progressive de la matrice. Petit à petit, des fissures se développent et se propagent perpendiculairement à la direction de chargement. Ce mécanisme est très fortement influencé par l'état de contrainte résiduelle qui existe dans le composite. Ces contraintes sont d'origine thermique et sont dues à la différence de coefficient de dilatation entre la fibre et la matrice. Dans la troisième partie (CD) une fragmentation progressive des fibres a lieu de manière entièrement décorrélée. Lorsque l'on atteint la contrainte ultime $\bar{\sigma}_{UT}$, une macrofissure se développe le long d'une des fissures matricielles existantes et s'accompagne d'une rupture des fibres dans le voisinage. La partie (DF) correspond à la réponse dans le cas où le "tirage" des fibres est suffisamment important pour ne pas conduire à une rupture brutale au point D.

Figure 4.1 : Comportement schématique d'un composite à matrice céramique.

2.1. Fissuration matricielle et décohésion fibre-matrice

La fissuration transverse de la matrice n'est possible que si les fissures dans la matrice laissent intactes les fibres qu'elles contournent. Cette fissuration transverse est importante car elle conduit à une augmentation de la ductilité observée dans ce type de matériaux. Soit $\mathcal{G}_{Ic} / \mathcal{G}_{Fc}$ le rapport des taux de restitution critiques dans l'interface et dans la fibre ou rapport de résilience interface-fibre. En négligeant les contraintes d'origine thermique, une condition nécessaire de fissuration matricielle multiple est :

$$\mathcal{G}_{Ic} / \mathcal{G}_{Fc} \leq 1/4 \tag{4.1}$$

Ce résultat peut être obtenu en étudiant le problème donné en Figure 4.2 et en utilisant les fonctions poids au voisinage de la pointe de fissure macroscopique [Rice, 1972]. Ce résultat peut être généralisé en tenant compte des contraintes résiduelles (cf. par exemple [Evans, 1990]).

Figure 4.2 : Etude de la fissuration matricielle.

Très rapidement, la fissuration matricielle entraîne des ruptures de l'interface entre fibre et matrice. Différentes analyses de micromécanique ont été effectuées pour étudier ces décohésions perpendiculaires à la fissuration matricielle et calculer la contrainte de début de fissuration matricielle. Quand la décohésion peut s'effectuer, elle s'accompagne d'un mécanisme de friction le long des fibres traversées par la fissure (cf. Figure 4.3). Une borne inférieure σ_0 à la contrainte uniaxiale de traction dans l'axe des fibres à partir de laquelle la décohésion prend place est donnée dans [Budiansky et al., 1986] sous la forme :

$$\sigma_0 = \sigma_* - q\,E / E_M \tag{4.2.1}$$

où E et E_M correspondent au module d'Young du composite et de la matrice, q à la contrainte résiduelle dans la matrice d'origine thermique, et σ_* une borne inférieure de σ_0 sans contrainte résiduelle donnée par :

$$\sigma_* = \left\{ \frac{6\,\tau\,\mathcal{G}_M\,E_f\,E^2}{(1-f)\,E_M^2\,R} \right\}^{1/3} \tag{4.2.2}$$

où E_f) correspond au module d'Young des fibres, R au rayon des fibres, f à la fraction volumique des fibres, $\mathcal{G}_M$ à la résilience de la matrice, et τ à la contrainte de rupture par cisaillement de l'interface supposée constante caractéristique du matériau.

Dans la plupart des cas, la saturation de ce mécanisme s'effectue sans la rupture d'un nombre important de fibres. Le chargement continuant à augmenter, les fibres commencent à se fragmenter à cause du glissement le long de l'interface fibre / matrice. Cette fissuration multiple se développe lorsque le chargement extérieur augmente jusqu'à atteindre la saturation qui correspond à une matrice dans laquelle la zone de glissement a atteint la longueur totale du composite (cf. par exemple [Aveston et al., 1971]).

Figure 4.3 : Illustration schématique de la décohésion et du frottement à l'interface fibre-matrice(d'après [Evans, 1990]).

2.2. Fragmentation des fibres

La fragmentation des fibres peut être décomposée en deux mécanismes. Le premier mécanisme est caractérisée par une fragmentation multiple décorrélée de la fissuration matricielle. Dans ce cas, dans une éprouvette sollicitée en traction, La fragmentation est distribuée de manière statistiquement uniforme. Ce premier mécanisme correspond à un amorçage sur des défauts initiaux dans la fibre. Il s'accompagne d'un deuxième mécanisme qui correspond à un phénomène dit "de tirage" (ou arrachement, *pull-out*) au voisinage de la zone rompue, caractérisé par une longueur de tirage (L.T.) : Figure 4.4.

Grâce à ce mécanisme, la fibre peut se fragmenter en plusieurs morceaux. En effet, en supposant la contrainte de rupture de l'interface par cisaillement, τ, constante, on peut montrer que la longueur de fibre affectée par la rupture, en générale différente de la longueur de tirage et appelée longueur de recouvrement, est donnée par :

$$L_R = R\,T / \tau \tag{4.3}$$

où T correspond à la contrainte de traction dite de référence agissant dans les fibres non rompues dans le plan d'une fissure matricielle. Ainsi seule la zone $\pm\, L_R / 2$ autour du point de rupture est affectée par la rupture.

Figure 4.4 : Mécanisme de tirage au voisinage d'une fibre rompue caractérisé par une longueur de tirage (L.T.) par rapport à la fissure matricielle la plus proche.

Par ailleurs, on peut relier la longueur L_R à la longueur moyenne de tirage (L.M.T.) que l'on peut observer expérimentalement après rupture (cf. Figure 4.5). La mesure de la longueur moyenne de tirage (L.M.T.), donne accès à la valeur de la contrainte de cisaillement τ [Curtin, 1991], [Curtin, 1991], [Heredia et al., 1991] : cf. Figure 4.5.

Figure 4.5 : Longueur moyenne de tirage (L.M.T.).

La fragmentation des fibres s'accompagne d'un tirage au voisinage de la rupture provoqué par le glissement fibre/matrice. Ce tirage est également décorrélé, c'est pourquoi on appellera ce mécanisme *tirage distribué*. Après avoir atteint la contrainte ultime de traction, $\bar{\sigma}_{UT}$, la rupture des fibres s'effectue au voisinage de la macrofissure. Il y a apparition d'un phénomène de localisation dans le sens où la dégradation se concentre dans un petit volume autour de la macrofissure. Ceci correspond à un changement de mécanisme que l'on appelle *tirage localisé*.

Les causes principales sont des défauts distribués de manière statistique comme pour ceux observés dans le Chapitre 1. Bien que la caractérisation des propriétés mécaniques des fibres peut être effectuée avant de les enrober de matrice, le procédé de fabrication s'accompagne souvent d'une dégradation des propriétés des fibres et ces mesures ne sont qu'indicatives, souvent optimistes. Dans le cas de fibres en carbure de silicium (SiC), des mesures permettent de déterminer les caractéristiques des fibres *in situ*. [Heredia et al., 1991]. Ces mesures *in situ* s'effectuent de la manière suivante. Par analyse des fibres le long du faciès de rupture dans un M.E.B., on peut mesurer le rayon de la zone miroir, a_R, de chaque fibre rompue. Une méthode empirique permet de relier la taille de la zone miroir à la contrainte de rupture σ [Heredia et al., 1991] :

$$\sigma = 3.5\ K_f / \sqrt{a_R} \tag{4.4}$$

où K_f correspond au facteur d'intensité des contraintes critique des fibres. Dans le cas de fibres en Nicalon (une variété de carbure de silicium, rayon 6 µm), K_f est de l'ordre de 1 MPa$\sqrt{m}$. Ainsi on obtient les caractéristiques de la distribution de défaut que l'on peut modéliser par une distribution de Weibull en terme de contraintes (cf. Chapitre 3).

3. Etude de la contrainte ultime de traction

3.1. Expression de la contrainte ultime de traction

On étudie un composite avec une densité de fissures matricielles saturée caractérisée par un espacement L_m (Figure 4.6). On considère une cellule élémentaire de longueur L_R. Cette longueur, appelée longueur de recouvrement, correspond à la longueur maximale de fibre qui peut être tirée et conduire à une diminution de la charge dans le plan médian correspondant à une fissure matricielle. Nous supposons que lorsqu'une fibre casse à un endroit, la charge qu'elle supportait est également distribuée sur toutes les fibres adjacentes non rompues. Ceci correspond à une hypothèse de partage global de chargement. Cette hypothèse est valable dans les cas où l'interface est dite "faible" (i.e. τ très faible par rapport à la contrainte de rupture).

Figure 4.6 : Cellule élémentaire.

En supposant que $L_R >> L_m$ la contrainte le long d'une fibre non rompue dans la cellule élémentaire peut être supposée constante et égale à T. La probabilité de rupture d'une fibre dans la longueur de recouvrement est alors donnée par :

$$P_F(T) = 1 - \exp\left\{ - \left(\frac{T}{S_c}\right)^{m+1} \right\} \tag{4.5}$$

où S_c est une contrainte caractéristique [Henstenburg et Phoenix, 1989] :

$$S_c = \left(L_0\, S_0^m\, \tau \,/\, R\right)^{1/(m+1)} \tag{4.6}$$

où m, S_0 correspondent au paramètres de Weibull, L_0 à une longueur de référence. Cette probabilité cumulée de rupture apparaît alors indépendante de la longueur du composite, mais bien sûr l'expression (4.5) n'est valable que si la longueur du composite est plus grande que la longueur de recouvrement L_R. La contrainte moyenne appliquée sur le composite, $\bar{\sigma}$ est liée à la contrainte de référence T par une loi de mélange telle que :

$$\bar{\sigma} = f\,T \left\{ 1 - P_F(T) \right\} + f\,\sigma_T(T) \tag{4.7}$$

où $\sigma_T(T)$ correspond à la composante due au tirage dans la matrice, et f désigne la fraction volumique de fibres. Par ailleurs, en supposant un partage global d'effort, la contrainte de tirage est donnée par :

$$\sigma_T(T) = \int_0^T \frac{dP_F}{ds}\,\bar{\sigma}_R(s)\,ds \tag{4.8}$$

où $\bar{\sigma}_R(s)$ correspond à la contrainte moyenne de tirage pour la charge s et à l'abscisse x = 0. Lorsqu'une fibre casse à l'abscisse x = t à un niveau de chargement s, la contrainte moyenne de tirage à l'abscisse x = 0 est $\bar{\sigma}_R(t)$. Ainsi la contrainte moyenne de tirage $\bar{\sigma}_R(s)$ est donnée par :

$$\bar{\sigma}_R(s) = \int_{-L_R/2}^{L_R/2} \sigma_R(t)\,f(t,s)\,dt \tag{4.9}$$

où f(t,s) correspond à la densité de probabilité qu'une rupture ait lieu à l'abscisse x = t, sous une charge s. Lorsque le chargement est uniforme sur la cellule ($f(t,s) = 1 / L_R$), on peut montrer que la contrainte moyenne de tirage à la charge s se simplifie :

$$\bar{\sigma}_R(s) = s / 2 \tag{4.10}$$

et la contrainte extérieure moyenne (relation (4.7)) devient :

$$\bar{\sigma} = f\,T \left\{ 1 - P_F(T) \right\} + \frac{fS_c}{2}\,\gamma \left\{ \frac{m+2}{m+1}\,,\ \left(\frac{T}{S_c}\right)^{m+1} \right\} \tag{4.11}$$

où $\gamma(.,.)$ correspond à la fonction gamma incomplète : $\gamma(n,x) = \int_0^x t^{n-1}\, e^{-t}\, dt$.

On peut remarquer que dans tous les calculs, les fibres qui ont cassé à l'extérieur de la longueur de recouvrance et qui se trouvent à l'intérieur par augmentation du chargement ne sont pas prises en compte. Cette hypothèse n'est pas très forte quand les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par Phoenix [Phoenix, 1992]. Dans le cas où on néglige le tirage, la relation (4.7) devient :

$$\bar{\sigma}(T) = f\,T \left\{ 1 - P_F(T) \right\} \tag{4.12}$$

Cette expression peut être directement rapprochée au concept de contrainte effective introduit dans le cadre de la mécanique de l'endommagement [Rabotnov, 1963], [Lemaitre et Chaboche, 1985] En effet, en définissant la variable d'endommagement scalaire, D, comme la proportion de fibres rompues dans la cellule de longueur L_R [Krajcinovic et Silva, 1982], [Hult et Travnicek, 1983], [Hild et al., 1992] la relation (4.12) est équivalente à :

$$\bar{\sigma} = fT\,(1 - D) \tag{4.13.1}$$

En utilisant l'expression (4.6), l'évolution de l'endommagement est donnée par une relation implicite en fonction de la contrainte $\bar{\sigma}$:

$$D = 1 - \exp\left\{ - \left(\frac{\bar{\sigma}}{f\,S_c\,(1 - D)} \right)^{m+1} \right\} \tag{4.13.2}$$

La contrainte ultime est définie par la condition :

$$d\bar{\sigma} / d\bar{\varepsilon} = 0 \tag{4.14.1}$$

où $\bar{\varepsilon}$ représente la déformation moyenne dans le composite définie par :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{L_R} \int_0^{L_R/2} \frac{\sigma_f(x,T)}{E_F}\, dx \tag{4.14.2}$$

où $\sigma_f(x,T)$ est la contrainte longitudinale dans la fibre, ou encore :

$$d\bar{\sigma} / dT = 0 \tag{4.14.3}$$

Ces deux conditions sont équivalentes car la contrainte de référence T est proportionnelle à la déformation moyenne du composite :

$$\bar{\varepsilon} = T / E_F \tag{4.15}$$

La contrainte ultime calculée à partir de (4.14) correspond à :

$$\frac{T}{S_c} = \left(\frac{2}{m+1} \right)^{1/(m+1)} \tag{4.16}$$

En introduisant une longueur caractéristique [Curtin, 1991], [Curtin, 1991] définie par :

$$\delta_c = \left(S_0 \, L_0^{1/m} \, R / \tau \right)^{m/(m+1)} \tag{4.17}$$

on peut remarquera que $\delta_c = R \, S_c / \tau$. Cette relation est identique à celle liant la longueur L_R à la contrainte T. A partir de la relation (4.3), la longueur de recouvrement est alors donnée par :

$$\frac{L_R}{\delta_c} = \left(\frac{2}{m+1} \right)^{1/(m+1)} \tag{4.18}$$

L'expression de la contrainte ultime de traction est donnée par confrontation de (4.11) et (4.17) :

$$\bar{\sigma}_{UT} = fS_c \left\{ \left(\frac{2}{(m+1)e^2} \right)^{1/(m+1)} + \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{m+2}{m+1} , \frac{2}{m+1} \right) \right\} \tag{4.19}$$

La contrainte ultime de traction est indépendante de la longueur des fibres et elle est proportionnelle à la contrainte caractéristique. Par contre, pour les composites dont la longueur L est inférieure à la longueur caractéristique ultime (4.18), la contrainte ultime de traction dépend de la longueur du composite [Hild et al., 1992]. Ce résultat

correspond à un effet de volume qui est différent que celui observé dans le cas des matériaux monolithiques à comportement fragile.

En développant l'expression (4.19) en séries on peut obtenir une expression de la contrainte ultime dans le cas d'une sollicitation de flexion pure [Hild et al., 1992]. L'interaction traction-flexion peut également être étudiée de manière analytique [Hild, 1992].

3.2. Comparaison avec des résultats expérimentaux

Nous allons comparer l'expression (4.19) avec trois résultats expérimentaux différents. Les résultats expérimentaux sur une matrice LAS (silicate d'aluminium lithium) renforcée par des fibres en carbure de silicium (Nicalon) sont consignés dans le Tableau 4.1 [Prewo, 1986]. Les prédictions sont assez bonnes surtout pour la valeur $\tau = 3$ MPa.

					Prévision	Prévision
Eprouvette	f	m	S_0 (MPa)	$\bar{\sigma}_{UT}$ (MPa)	$\tau = 2$ MPa	$\tau = 3$ MPa
2369 (p)	0.46	3.8	1740	758	695	755
2369 (c)	0.46	2.7	1740	664	710	790
2376 (p)	0.44	3.9	1632	670	625	680
2376 (c)	0.44	3.1	1632	680	635	700

Tableaux 4.1 : Résultats expérimentaux et prévisions pour une matrice LAS renforcée par des fibres de carbure de silicium
(longueur du composite : L = 25 mm, R = 8 μm, L_0 = 25 mm).

Le second type de matériau est une matrice au carbone (matériaux A et C) renforcée par des fibres en Nicalon [Heredia et al., 1991] tissées dans deux directions perpendiculaires. Les résultats sont consignés dans le Tableau 4.2. A nouveau les prévisions sont en bon accord avec les expériences.

						Prévision
Matériau	f	m	S_0 (MPa)	τ (MPa)	$\bar{\sigma}_{UT}$ (MPa)	$\bar{\sigma}_{UT}$ (MPa)
A	0.2	4.5	1165	10	290	300
C	0.2	4.5	1140	14	345	315

Tableaux 4.2 : Résultats expérimentaux et prévisions pour une matrice carbone renforcée par des fibres de carbone
(longueur du composite : L = 25 mm, R = 8 µm, L_0 = 25 mm).

4. Etude de la résistance ultime dans le cadre de la localisation

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que le stade ultime de la rupture des C.R.F. correspond à l'apparition d'une macrofissure au voisinage de laquelle toutes les fibres cassent. Ce mécanisme est supposé être décrit par une localisation des déformations. L'amorçage de macrofissures constitue souvent le premier stade de la rupture complète de la structure. En partant d'un matériau supposé sans défaut, l'amorçage d'une macrofissure peut être calculé en utilisant la mécanique de l'endommagement continu. Cette approche a été utilisée pour prédire l'amorçage dans le cas de matériaux à comportement ductile [Billardon et Doghri, 1989], [Doghri, 1989]. L'amorçage correspond à l'apparition d'une surface au travers de laquelle le gradient du champ de vitesse est discontinu. Dans le cadre des petites perturbations, ce mécanisme est dû à l'adoucissement provoqué par l'endommagement. Dans le cas des C.R.F., le mécanisme d'endommagement correspond à la fragmentation progressive des fibres.

Les discontinuités stationnaires ont été étudiées en élasticité par Hadamard [Hadamard, 1903]. Les ondes d'accélération en plasticité ont été analysées par Hill [Hill, 1962] et Mandel [Mandel, 1962]. Rice [Rice, 1976] a lié la localisation des bandes de cisaillement à des sauts du gradient des vitesses. Borré et Maier [Borré et Maier, 1989] ont donné les conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition de modes localisés à l'intérieur d'un solide. Ces conditions correspondent à une généralisation des conditions nécessaires données par Rice [Rice, 1976] et Rice et Rudnicki [Rudnicki et Rice, 1975], [Rice et Rudnicki, 1980].

Bien que le phénomène de localisation puisse être étudié au niveau des fibres et de la matrice et implique également la perte de la condition complémentaire au niveau des différentes frontières [Benallal et al., 1991], nous menons l'analyse à un niveau mésoscopique, pour lequel le matériau peut être supposé homogène. Dans la suite nous étudions les conditions de localisation dans le cas d'un modèle obtenu à partir de l'étude en traction. Ce modèle est utilisé pour l'étude d'un disque tournant qui correspond à l'une des applications de ce type de matériau dans le futur [U.R.I., 1992].

4.1. Localisation et perte d'unicité

La rupture au niveau mésoscopique, i.e. l'amorçage d'une macrofissure, est définie comme la bifurcation du problème en vitesses, c'est-à-dire l'apparition d'une surface au travers de laquelle le gradient de vitesse est discontinu. Ce phénomène est appelé localisation, qui peut être comparée à la perte d'unicité du problème en vitesse. La localisation correspond à la perte d'ellipticité du problème en vitesse.

Sous l'hypothèse des petites perturbations, dans le cadre de l'élasticité couplée à l'endommagement, on peut supposer que le comportement du matériau peut être décrit par :

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} \mathbb{E} : \dot{\varepsilon} & \text{si } \dot{D} = 0 \\ \mathbb{H} : \dot{\varepsilon} & \text{si } \dot{D} \neq 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

où $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ correspondent au tenseurs des taux de contrainte et de déformation, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{H}$ sont des tenseurs d'ordre 4, $\mathbb{E}$ est supposé défini positif, et D est soit une variable d'endommagement unique, soit un ensemble de variables.

La localisation apparaît en un point à l'intérieur d'un solide Ω si et seulement si [Rudnicki et Rice, 1975], [Borré et Maier, 1989] il existe un vecteur $\mathbf{n} \neq 0$ tel que :

$$\text{Det } (\mathbf{n} \,.\, \mathbb{H} \,.\, \mathbf{n}) = 0 \tag{4.21}$$

De plus, la perte d'unicité, considérée comme la bifurcation du problème en vitesse, est exclue tant que l'opérateur :

$$\mathbb{H}_s = \frac{1}{2}(\mathbb{H}+\mathbb{H}^T) \tag{4.22}$$

est strictement défini positif en tout point de la structure. Cette condition est équivalente à une condition de durcissement :

$$\dot{\sigma} : \dot{\varepsilon} > 0 \tag{4.23}$$

4.2. Particularisation

Dans ce qui suit, nous allons étudier des états pour lesquels :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \alpha\, \varepsilon_{22} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ \varepsilon_{12} = 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

Ces conditions particulières sont satisfaites dans le cas de calculs axisymétriques. Ces états conduisent à un opérateur tangent de la forme :

$$\mathbb{H} = \begin{Bmatrix} H_{1111} & H_{1122} & 0 \\ H_{2211} & H_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & H_{1212} \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

Sous les hypothèses (4.24), les composantes non nulles du vecteur **n** sont n_1 et n_2, et l'opérateur $\mathbb{A} = \mathbf{n} \,.\, \mathbb{H} \,.\, \mathbf{n}$ s'écrit [Ortiz et al., 1987] :

$$\mathbb{A} = \begin{Bmatrix} n_1^2 H_{1111} + n_2^2 H_{1212} & n_1 n_2 (H_{1212} + H_{1122}) \\ n_1 n_2 (H_{1212} + H_{2211}) & n_1^2 H_{1212} + n_2^2 H_{2222} \end{Bmatrix} \tag{4.26}$$

En réécrivant $(n_1,n_2) = (\cos\theta,\sin\theta)$, $X = \tan^2\theta$, la condition de localisation correspond à la recherche des racines réelles positives de l'équation :

$$a X^2 + b X + c = 0 \tag{4.27}$$

avec :

$$a = H_{1212} H_{2222} \tag{4.28.1}$$
$$b = H_{1111} H_{2222} - H_{1122} H_{2211} - H_{1122} H_{1212} - H_{2211} H_{1212} \tag{4.28.2}$$
$$c = H_{1212} H_{1111} \tag{4.28.3}$$

Lorsque une racine réelle positive est trouvée, le plan de localisation est perpendiculaire au vecteur **n**.

Nous allons particulariser l'étude à une généralisation bidimensionnelle du modèle uniaxial utilisé dans le paragraphe précédent. Les fibres sont supposées parallèles à la direction 2. En élasticité, sous hypothèse de contrainte plane on a :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2G_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

Lorsque l'on considère la rupture progressive des fibres dans la direction 2, l'état endommagé est décrit par les constantes $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{21}$, $\tilde{G}_{12}$ à la place des constantes E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21}, G_{12}. Le module d'Young E_2 n'est plus constant mais dépend de la dégradation des fibres caractérisée par la variable d'endommagement scalaire D_2, et on a :

$\tilde{E}_2 = E_2(1-D_2)$. Lorsque l'on soumet le composé endommagé à une traction dans la direction 1, il n'y a aucune influence de l'état d'endommagement sur les déformations dans la direction 2, et on suppose que $\tilde{\nu}_{12}$ est constant et est égal à ν_{12}. De plus on suppose que $\tilde{E}_1 = E_1$ (il n'y a pas d'effet de l'endommagement dans la direction 1) et que $\tilde{G}_{12} = G_{12}$ (les propriétés de cisaillement sont peu affectées par l'endommagement). De plus l'hypothèse d'hyperélasticité permet d'écrire :

$$\frac{\tilde{\nu}_{21}}{\tilde{E}_2} = \frac{\tilde{\nu}_{12}}{\tilde{E}_1} \tag{4.30}$$

Ainsi on a $\tilde{\nu}_{21} = \nu_{21}(1-D_2)$. De plus lorsque $D_2 = 0$ le comportement est à nouveau donné par le comportement élastique décrit par les équations (4.29). Ce modèle a une expression proche de celle proposée par [Allix et al., 1985]. La relation contrainte déformation est alors donnée par :

$$\sigma_{11} = \frac{E_2}{k\{1-\nu_{12}^2(1-D_2)k\}}\{\varepsilon_{11}+\nu_{12}(1-D_2)k\varepsilon_{22}\} \tag{4.31.1}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_2(1-D_2)}{1-\nu_{12}^2(1-D_2)k}(\varepsilon_{22}+\nu_{12}\varepsilon_{11}) \tag{4.31.2}$$

$$\sigma_{12} = 2\,G_{12}\,\varepsilon_{12} \tag{4.31.3}$$

où $k = E_2 / E_1$.

En utilisant les résultats des équations (4.14) et en supposant que seul le mécanisme de rupture de fibre est pris en compte, l'évolution de la variable d'endommagement est donnée par une relation implicite :

$$D_2 = 1-\exp\left(-\left\{\frac{\sigma_{22}}{f\,S_c\,(1-D_2)}\right\}^{m+1}\right) \quad \text{si } \varepsilon_{22} > 0 \text{ et } \dot{\varepsilon}_{22} > 0 \tag{4.32}$$

On peut remarquer que cette expression devient explicite en terme de la déformation ε_{22} [Hild et al., 1992] mais n'est pas étudiée dans ce document. L'opérateur tangent prend la forme :

$$H_{1111} = F_1 - \frac{F_2F_4F_7}{1+F_5F_7} \tag{4.33.1}$$

$$H_{2222} = \frac{F_6}{1+F_5F_7} \tag{4.33.2}$$

$$H_{1122} = H_{2211} = \nu_{12}\,H_{2222} \tag{4.33.3}$$

$$H_{1212} = 2G_{12} \tag{4.33.4}$$

avec :

$$F_1 = \frac{E_2}{k(1-\nu_{12}^2(1-D_2)k)} \tag{4.34.1}$$

$$F_2 = \frac{E_2\nu_{12}(\nu_{12}\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{(1-\nu_{12}^2(1-D_2)k)^2} \tag{4.34.2}$$

$$F_4 = \frac{E_2\nu_{12}(1-D_2)}{1-\nu_{12}^2(1-D_2)k} \tag{4.34.3}$$

$$F_5 = \frac{E_2(\nu_{12}\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{(1-\nu_{12}^2(1-D_2)k)^2} \tag{4.34.4}$$

$$F_6 = \frac{E_2(1-D_2)}{1-\nu_{12}^2(1-D_2)k} \tag{4.34.5}$$

$$F_7 = \frac{\frac{m+1}{f\,S_c}\left\{\frac{\sigma_{22}}{f\,S_c\,(1-D_2)}\right\}^m}{1-(m+1)\left\{\frac{\sigma_{22}}{f\,S_c\,(1-D_2)}\right\}^{m+1}} \tag{4.34.6}$$

On peut remarquer que lorsque $D_2 = D_c = 1 - \exp\{-1/(m+1)\}$, F_7 tend vers l'infini : H_{1122}, H_{2211} et H_{2222} tendent vers zéro, et H_{1111}, H_{1212} sont strictement positifs. Ce point correspond à une perte d'unicité et à une localisation avec $\theta = \pi/2$ (i.e. perpendiculaire à la direction des fibres). On démontre aisément que cette condition correspond à une condition nécessaire et suffisante de perte d'unicité et de perte d'ellipticité. La relation :

$$D_2 = D_c = 1 - \exp\{-1/(m+1)\} \tag{4.35.1}$$

est donc considérée comme critère d'amorçage. Par confrontation entre (4.35.1) et (4.32), on montre que ce critère d'amorçage peut aussi s'écrire :

$$\sigma_{22} = \bar{\sigma}_{UT} = f\, S_c \left\{ \left(\frac{1}{(m+1)e} \right)^{1/(m+1)} \right\} \tag{4.35.2}$$

Une condition en terme de densité d'énergie d'endommagement peut également être obtenue [Hild et al., 1992].

Ces résultats montrent que le critère de localisation peut être traduit en terme de critères très simples faisant référence à un pourcentage de fibres rompues critique et à une contrainte critique correspondant à la contrainte maximale en traction. Quelle que soit la longueur du composite, le critère (4.35.1) ne fait référence qu'à la dispersion caractérisée par l'exposant de Weibull. Au contraire, le critère (4.35.2) peut devenir dépendant de la longueur du composite quand celle-ci devient petite [Hild et al., 1992].

D'autre part les critères précédents peuvent être généralisés dans le cas de fibres dans deux directions perpendiculaires [Hild et al., 1992].

4.3. Applications à des structures tournantes

Les disques tournants correspondent à une analyse simplifiée de composés tels que des turbines pour lesquelles ce type de matériau est envisagé. La particularité de cette analyse par rapport au paragraphe précédent est l'hétérogénéité du champ de contrainte. La géométrie des deux systèmes est montrée en Figures 4.7.

Les géométries analysées sont axisymétriques (Figure 4.7.a). La grandeur ω représente la vitesse de rotation angulaire. Les rayons extérieurs $r = a$ sont supposés libres en effort (Figures 4.7.b et 4.7.c) et le rayon intérieur $r = b$ également (Figure 4.7.c). Le problème peut ainsi être considéré à effort imposé (composante dynamique : $\rho\omega^2$). Le système de coordonnée est cylindrique ce qui revient à remplacer les indices 1 et 2 par les indices r et φ dans les résultats précédents. Dans les deux calculs, nous supposons que les fibres sont orientées dans la direction circonférentielle.

La résolution du problème d'élasticité couplée à l'endommagement s'avère impossible analytiquement. C'est pourquoi nous utilisons un code E.F. Les lois de comportement (4.31) et (4.32) sont implantées dans le code E.F. industriel ABAQUS [Hibbitt et al., 1989]. Ceci est rendu possible par l'utilisation de la routine UMAT dans laquelle la loi de comportement, le module tangent $\mathbb{H}$, et un détecteur de localisation sont introduits. Ce calcul s'inscrit à nouveau dans une optique entièrement couplée.

Les paramètres du matériau sont les suivants : $a = 0.3$ m, $h = 0.01$ m, $E_r = 20$ GPa, $E_\varphi = 140$ GPa, $G_{r\varphi} = 13$ GPa, $\nu_{r\varphi} = .0214$, $m = 4$, $S_c = 1324$ MPa. Ils correspondent à des caractéristiques d'une matrice L.A.S. renforcée par des fibres Nicalon. La contrainte normale maximale dans la direction des fibres à localisation est

Figure 4.7 : Structures analysées. (a) Coordonnées cylindriques (r,φ) et vitesse de rotation ω, (b) Disque plein tournant (fibres dans la direction circonférentielle), (c) Disque creux tournant (fibres dans la direction circonférentielle).

trouvée égale à 786 MPa par application du critère (4.27). Cette valeur correspond à la valeur prévue par le critère (4.35.2) : $\bar{\sigma}_{UT}$ = 785.7 MPa. La valeur maximale de l'endommagement est trouvée égale à 0.1813 ce qui est également confirmé par le critère (4.35.1) : $1-\exp(-1/5) = 0.1812692...$ Enfin l'angle à localisation est trouvé égal à 89.0° ce qui est très proche de la valeur 90°. Enfin, des simulations numériques montrent que la condition de localisation nécessite d'être très proche de la solution analytique pour avoir des informations précises, surtout au niveau de l'angle de localisation. Ces premiers résultats montrent que numériquement les critères (4.35) peuvent être atteints mais nécessitent des incréments tels que la solution soit aussi proche que possible du point de localisation.

En terme de vitesse de rotation critique à la localisation on obtient pour le disque plein :

$$\rho\omega^2 = 1.87\ 10^{10}\ \mathrm{kg/m^3/s^2} \tag{4.36.1}$$

et pour le disque creux :

$$\rho\omega^2 = 2.26\ 10^{10}\ \mathrm{kg/m^3/s^2} \tag{4.36.2}$$

Les rayons à localisation sont égaux à 0.234 m ($0 < r < 0.3$ m) pour le disque plein et 0.259 m ($0.15 < r < 0.3$ m) pour le disque creux c'est-à-dire à l'intérieur des disques.

Enfin le critère (4.35.2) ne nécessite pas un calcul entièrement couplé. En effet à l'aide d'un calcul élastique, on peut déterminer les charges $\rho\omega^2$ et les comparer à celles obtenues par un calcul entièrement couplé. Cette approche est appelée découplée dans le sens où l'endommagement n'est pas pris en compte. Ainsi on obtient en terme de vitesse de rotation pour le disque plein :

$$\rho\omega^2 = 1.75\ 10^{10}\ \mathrm{kg/m^3/s^2} \tag{4.37.1}$$

et pour le disque creux :

$$\rho\omega^2 = 2.05\ 10^{10}\ \mathrm{kg/m^3/s^2} \tag{4.37.2}$$

ce qui correspond à 3.1 % et 4.5 % de diminution de la vitesse de rotation par rapport aux valeurs obtenues par la méthode entièrement couplée. Dans les cas étudiés les résultats obtenus avec une méthode découplée sont très proches de ceux obtenus par une méthode entièrement couplée. Cette méthode constitue un bon moyen de pré-dimensionnement ce type de structures.

5. Conclusions

Dans ce Chapitre, on a montré que l'un des moyens de renforcer les céramiques est d'utiliser des fibres longues.

Le comportement moyen en traction au voisinage du point ultime est constitué :
– du comportement des fibres non rompues dans le V.E.R.,
– du tirage au voisinage de la rupture des fibres dans le V.E.R.
Dans la majeure partie des cas pratiques, la contrainte ultime de traction est indépendante de la longueur des fibres. Ce résultat constitue une différence fondamentale avec les céramiques monolithiques : pas d'effet de volume en pratique.

On montre que l'endommagement peut être défini à partir d'un modèle statistique de rupture des fibres (modèle de Weibull). Si on homogénéise le comportement de ces composites comme étant élastique endommageable anisotrope, sous certaines hypothèses, on montre qu'un critère de localisation est traduit en terme de contrainte normale dans la direction des fibres égale à la contrainte ultime de traction. La localisation apparaît également lorsque la valeur de l'endommagement atteint une valeur critique qui dépend uniquement de l'exposant de Weibull.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Un montage d'essai en traction sur céramique technique a été développé. Il est utilisé sous sollicitations monotones et cycliques à température ambiante. Un dispositif de refroidissement a été prévu si bien que des essais à haute température peuvent être envisagés. Ils ont été effectués sur des céramiques réfractaires. Il est également possible de les effectuer sur des céramiques techniques.

Pour prévoir la rupture de matériaux à comportement fragile une première approche consiste à modéliser les défauts et à les prendre en compte dans le calcul du champ de contrainte. C'est l'approche entièrement couplée. Cette approche numérique fait appel à une méthode de Monte-Carlo. La prévision qualitative des effets de volume et d'hétérogénéité des contraintes est obtenue. Une comparaison avec d'autres méthodes prenant en compte les interactions entre défauts serait souhaitable (cf. par exemple [Kachanov, 1985], [Benveniste, 1988] et pour des milieux finis [Fond, 1992]).

D'autre part cette approche devrait pouvoir être employée en fatigue nombres de cycles, i.e. dans le cas d'évolutions lentes de la variable d'endommagement. Elle permettra ainsi d'étudier les conditions de rupture macroscopique en fonction de la répartition microscopique de défauts initiaux. On pourra également étudier les influences de la distribution de défauts, du volume et du champ de contrainte. L'anisotropie induite pourra également être analysée.

Une seconde approche consiste à négliger les interactions entre défauts et conduit ainsi à une approche localement couplée. Cette approche est soit numérique, soit analytique. Dans le cas analytique, une expression liant la distribution statistique de défauts à la probabilité de rupture d'une structure est établie. Sous certaines hypothèses

une corrélation avec une loi de Weibull est possible. Elle permet de donner des bases physiques aux paramètres de ce modèle. Bien sûr, de plus amples analyses micrographiques sur matériaux industriels devraient pouvoir permettre de qualifier quantitativement cette approche.

A partir de l'étude dans le cas de chargement monotones, une généralisation aux cas de chargements cycliques est obtenue. Des tendances générales sont déduites sans faire explicitement référence à une distribution de défauts donnée. Des simulations numériques montrent que les effets généraux observés en fatigue sont modélisés correctement. A terme elle peut constituer un outil pour prévoir la tenue de structures connaissant la distribution de défauts initiaux.

Enfin, nous avons étudié l'une des possibilités de renforcer les céramiques. Nous avons concentré notre attention au stade proche du point de résistance ultime. Une expression de la contrainte de rupture en traction a été obtenue. Elle constitue la grandeur de base utilisée dans le cadre de la théorie de localisation lorsque l'on étudie la rupture de structure. En effet un critère obtenu à partir de la condition générale de localisation fait directement référence à cette contrainte ultime. Ce critère peut également s'écrire en terme d'une valeur critique de l'endommagement qui dépend de l'exposant de Weibull, qui dépend lui-même de la distribution de défauts initiaux dans les fibres.

Cette partie de l'étude est menée à l'Université de Californie, à Santa Barbara et la présentation faite dans ce document est un résumé de quelques résultats obtenus dans un travail sous la direction du professeur Frederick A. Leckie. De nombreux points restent à développer. En particulier l'étude dans le cas de sollicitations non homogènes le long des fibres ainsi que la prise en compte de la fissuration matricielle et de la contribution venant du mécanisme de tirage. Les premiers résultats en traction et en flexion sont prometteurs mais nécessiteront d'autres développements. Des confrontations avec des essais réalisés sur des structures sont également envisagées dans un proche futur. Mais peut-être que *l'idée de l'avenir est plus féconde que l'avenir lui-même* [Bergson].

ANNEXE

MISE AU POINT D'UN MONTAGE D'ESSAI DE TRACTION SUR MATERIAU A COMPORTEMENT FRAGILE

Ce montage a fait l'objet d'un brevet français n° 90 06848, intitulé "Dispositif de traction-compression d'une éprouvette", déposé le 01 juin 1990, publié dans le Bulletin Officiel de la propriété industrielle, 92/33 14 août 1992, n° de publication 2 662 801. Les demandeurs sont la Régie Nationale des Usines Renault et l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, l'inventeur est François Hild.

Conduire un essai de traction sur matériaux à comportement fragile est plus délicat que sur des matériaux à comportement ductile. En effet les déformations à rupture restent faibles (de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-2}). Il s'agit donc d'éliminer toute déformation parasite (de flexion principalement) qui fausserait considérablement les résultats. Les montages d'essais disponibles sont en général très complexes et nécessitent des installations hydrauliques auxiliaires (cf. par exemple [Gram, 1989], [Liu, 1987]). Nous avons décidé de mettre en oeuvre un montage qui soit le plus simple possible, moins cher que ceux qui existent et qui permette d'éviter les déformations de flexion. Il s'agit de libérer les degrés de liberté qui ne participent pas à la sollicitation c'est-à-dire les rotations dans un plan perpendiculaire à la direction de chargement. D'un point de vue cinématique, il faut concevoir l'équivalent d'un joint de cardan. Pratiquement, ce comportement peut être obtenu par l'utilisation de liaisons élastiques (Figure A.1.1). Le montage comporte quatre parties principales :

– une éprouvette (1) sans singularité géométrique pour éviter les concentrations de contrainte. Elle est composée d'une partie cylindrique de révolution (de volume 1000 mm^3), d'une surface de raccordement torique et d'une surface conique de révolution pour l'application des efforts (Figure A.1.2). La rugosité R_a est inférieure à 0.6 µm,

– deux têtes d'amarrage (2) entièrement axisymétriques qui empêchent toute concentration de contrainte à l'amarrage,

– deux couples de demi-coquilles (3) qui permettent la mise en position de l'éprouvette dans la tête d'amarrage et l'application d'efforts par la surface conique de révolution,

– deux cardans élastiques (4) permettent d'éviter les déformations de flexion. Ils sont réalisés à partir de deux liaisons élastiques orthogonales.

Figure A.1.1 : Montage d'essai de traction pour matériau à comportement fragile.
(1- éprouvette, 2- tête d'amarrage, 3- demi-coquilles, 4- cardan élastique)

Figure A.1.2 : Eprouvette de traction en nitrure de silicium.

Le montage est utilisé de la manière suivante. Les deux têtes de l'éprouvette sont passées à travers le haut des têtes d'amarrage. Le montage des deux couples de demi-coquilles est effectué à travers les orifices transversaux des têtes d'amarrage (Figure A.1.3). L'accostage de l'ensemble sur l'épaulement des têtes d'amarrage est réalisé avec un asservissement contrôlé en effort avec une consigne nulle. Une fois l'accostage effectué, l'asservissement est conservé dans le cas d'essais de fatigue à effort imposé. Dans le cas d'essais de traction monotone, l'asservissement est à déplacement imposé.

Figure A.1.3 : Photographie du montage d'essai.

Le montage a été testé en vue de déterminer la valeur des déformations de flexion par rapport à celles de traction. On remarque sur la Figure A.2 que les déformations maximales diffèrent peu les unes des autres. En effet, la différence maximale observée est inférieure à 1.3 10^{-4}, ce qui correspond à 7.4% de la déformation en traction. Ceci prouve, a posteriori, que les déformations de flexion (moins de 11% de la déformation de traction) sont faibles par rapport aux déformations de traction.

On remarquera que dans le cas d'application de charges cycliques en traction uniquement, le montage peut être utilisé sans modification. Ce montage d'essai permet d'étudier la rupture en traction monotone et cyclique. Un dispositif de refroidissement a également été prévu mais n'a pas été utilisé dans cette étude.

Figure A.2 : Réponse de quatre jauges de déformation lors d'un essai de traction.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abouaf, M. (1985). Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées - Approche par la mécanique des milieux continus. Thèse d'état. Université Scientifique et Médicale et l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

Allix, O., D. Gilletta, et P. Ladeveze (1985). Mechanical Behavior of Elementary Constituents of Laminates, 5th International Conference on Composites Materials, San Diego, CA.

Amar, E., F. Gauthier, et J. Lamon (1989). Reliability Analysis of a Si_3N_4 Ceramic Piston Pin for Automotive Engines, 3rd Int. Symp. Ceramic Materials and Components for Engines, Las Vegas, Nevada, V. J. Tennery (Edt.), American Ceramic Society, pp. 1334-1356.

Amestoy, M., H. D. Bui, et K. Dang-Van (1979). Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire, C. R. Acad. Sci. Paris, **289** (II), pp. 99-102.

Andrieux, S., Y. Bamberger, et J.-J. Marigo (1986). Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches, J. Mec. Th. Appl., **5** (3), pp. 471-513.

Ashby, M. F., et D. R. J. Jones (1986). Engineering Ceramics, in *Engineering materials 2: an introduction to microstructures, processing and design.* Pergamon press, **39**, pp. 145-198.

Aveston, J., G. A. Cooper, et A. KellyY (1971). Single and Multiple Fracture, in Conference Proceedings of the National Physical Laboratory : Properties of Fiber Composites, IPC Science and Technology Press, Surrey, England, pp. 15-26.

Batdorf, S. B., et J. G. Crose (1974). A Statistical Theory for the Fracture of Brittle Structures Subjected to Polyaxial Stress States, J. Appl. Mech., **41** , pp. 459-465.

Batdorf, S. B., et H. L. Neinisch Jr. (1978). Weakest Link Theory Reformulated for Arbitrary Fracture Criterion, J. Am. Ceram. Soc., **61** (7-8), pp. 355-358.

Bazant, Z. P., et B. H. Oh (1983). Crack Band Theory for Fracture of Concrete, Mater. & Struct. RILEM, **16** , pp. 155-177.

Bazant, Z. P., et K. Xu (1989). Size effect in fatigue fracture, Center for Advanced Cement-based Materials, McCormick School of Engineering and Applied Science, Northwestern University, 89-12/498f.

Benallal, A., R. Billardon, et G. Geymonat (1991). Localization Phenomena at the Boundaries and Interfaces of Solids, 3rd Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications, Tucson, AZ (U.S.A.).

Benveniste, Y., G. J. Dvorack, J. Zarzour, et E. C. Wung (1988). On Interacting Cracks and Complex Configurations in Linear Elastic Materials, R.P.I., Troy (U.S.A.).

Berdin, C. (1989). Evaluation des modèles de rupture pour matériaux fragiles, Centre des matériaux, Ecole des Mines de Paris, mémoire de D.E.A.

Berdin, C., D. Baptiste, D. Jeulin, et G. Cailletaud (1991). Failure models for brittle materials, International RILEM/ESIS Conference, Noordwijk (The Netherlands), J. G. M. van Mier, J. G. Rots and A. Bakker (Edt.), Spon E. & F.N., pp. 83-92.

Berrah, E.-H., et A. Fodil (1992). Analyse statistique de l'amorçage des fissures en fatigue dans la fonte G.S., L.M.T. Cachan, mémoire de D.E.A.

Berthaud, Y., N. Schmitt, J.-M. Robin, D. Marquis, F. Hild, et A. Burr (1990). Comportement mécanique des réfractaires à haute température, contrat L.M.T. Cachan / Sollac, rapport annuel n°1.

Billardon, R., C. Adam, et J. Lemaitre (1986). Study of the Non-Uniform Growth of a Plane Crack in a Three-Dimensional Body Subjected to Non-Proportional Loadings, Int. J. Solids Structures, **27** (7), pp. 677-692.

Billardon, R., et I. Doghri (1989). Prévision de l'amorçage d'une macro-fissure par la localisation de l'endommagement, C. R. Acad. Sci. Paris, **308** (II), pp. 347-352.

Borré, G., et G. Maier (1989). On Linear versus Nonlinear Flaw Rules in Strain Localization Analysis, Meccanica, **24**, pp. 36-41.

Breysse, D., D. Fokwa, G. Geymonat, F. Hild, et G. Pijaudier-Cabot (1992). Approche expérimentale et numérique pour la prise en compte du désordre initial, L.M.T. Cachan, Rapport interne N° 133.

Budiansky, B., J. W. Hutchinson, et A. G. Evans (1986). Matrix Fracture in Fiber-Reinforced Ceramics, J. Mech. Phys. Solids, **34** , pp. 167-189.

Cano, V. (1991). Etude de la probabilité d'amorçage d'une macrofissure dans la fonte à graphite sphéroïdal, L.M.T. Cachan, mémoire de D.E.A.

Chaboche, J.-L. (1978). Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement. Thèse d'Etat. Université Paris 6.

Cox, B. N., et W. L. Morris (1988). Monte Carlo simulations of the growth of small fatigue cracks, Eng. Frac. Mech., **31** (4), pp. 591-610.

Curtin, W. A. (1991). Exact Theory of Fiber Fragmentation in Single-Filament Composite, J. Mat. Sci., **26**, pp. 5239-5253.

Curtin, W. A. (1991). Theory of Mechanical Properties of Ceramic Matrix Composites, J. Am. Ceram. Soc., **74** (11), pp. 2837–2845.

Davies, D. G. S. (1973). The Statistical Approach to Engineering Design in Ceramics, Proceeding Brit. Ceram. Soc., **22** , pp. 429-452.

Doghri, I. (1989). Etude de la localisation de l'endommagement. Université Paris 6.

Doig, P. (1985). Evaluation of lower bound fracture toughness values using Weibull analysis of single specimen data, Int. J. Frac., **21** (5), pp. 963-967.

Dugdale, D. S. (1960). Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, **8** , pp. 100-104.

Evans, A. G. (1978). A General Approach for the Statistical Analysis of Multiaxial Fracture, J. Am. Ceram. Soc., **61** (7-8), pp. 302-308.

Evans, A. G. (1980). Fatigue in ceramics, Int. J. Fract., **16** (5), pp. 485-498.

Evans, A. G. (1990). Perspectives on the Development of High-Thoughness Ceramics, J. Am. Ceram. Soc., **73** (2), pp. 187-206.

Fond, C. (1992). Interaction entre fissures et cavités circulaires dans des milieux élastiques plans. Thèse de l'Université Paris 6.

Freudenthal, A. M. (1968). Statistical approach to brittle fracture, in *Fracture (an advanced treatrise)*. Academic Press, **2**, pp. 591-619.

Gram, M. M. (1989). Self aligning test grip, United States Patent, Patent number 4,843,888, Jul. 4.

Hachich, M. (1990). Comportement de matériaux fragiles soumis à des sollicitations de fatigue, L.M.T. Cachan, mémoire de D.E.A.

Hadamard, J. (1903). *Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Paris,

Harmon, R. (1992). Alternative Vehicle-Propulsion Systems, Mechanical Enginnering, **114** (3), pp. 58-65.

Henstenburg, . B., et . L. Phoenix (1989). Interfacial Shear Strength Using Single-Filament-Composite Test. Part II: A Probability Model and Monte Carlo Simulations, Polym. Comp., **10** (5), pp. 389-406.

Heredia, F. E., S. M. Spearing, . G. Evans, . Mosher, et . A. Curtin (1991). Mechanical Properties of Carbon Matrix Composites Reinforced with Nicalon Fibers, J. Am. Ceram. Soc., sous presse.

Hibbitt, H. D., B. I. Karlsson, et P. Sorensen (1989). Abaqus, version 4.8.

Hild, F. (1992). Ultimate Strength of Fiber Reinforced Composites, Mechanical Engineering Department, U.C.S.B., Thesis proposal.

Hild, F., E. Amar, et D. Marquis (1989). Prévision de la rupture des céramiques par la mécanique de l'endommagement, Réunion MECAMAT, Senlis, France.

Hild, F., E. Amar, et D. Marquis (1992). Stress Heterogeneity Effect on the Strength of Silicon Nitride, J. Am. Ceram. Soc., **75** (3), pp. 700-702.

Hild, F., R. Billardon, et D. Marquis (1992). Hétérogénéité des contraintes et rupture des matériaux fragiles, C. R. Acad. Sci. Paris, sous presse.

Hild, F., J.-M. Domergue, A. G. Evans, et F. A. Leckie (1992). Tensile and Flexural Ultimate Strength of Fiber Reinforced Ceramic-Matrix Composites, Int. J. Solids Structures, soumis.

Hild, F., P.-L. Larsson, et F. A. Leckie (1992). Criteria Based on Localization for the Design of Fiber Reinforced Brittle-Matrix Composites, Recent Advances in Damage Mechanics and Plasticity, Phoenix, Arizona, (Edt.), ASME, pp. 77-90.

Hild, F., P.-L. Larsson, et F. A. Leckie (1992). Localization Due to Damage in Fiber Reinforced Composites, Int. J. Solids Structures, **29** (24), pp. 3221-3238.

Hild, F., et D. Marquis (1990). Corrélation entre la distribution des défauts et la distribution de la contrainte à rupture pour des matériaux à comportement fragile, C. R. Acad. Sci. Paris, **311** (II), pp. 573-578.

Hild, F., et D. Marquis (1990). Influence des défauts sur la rupture des céramiques massives, 3ème colloque annuel Mecamat, Evian, France.

Hild, F., P.-L. Larsson, et F. A. Leckie (1992). Localization due to Damage in two Direction Fiber-Reinforced Composites, J. Appl. Mech., soumis.

Hild, F., et S. Roux (1991). Fatigue Initiation in Heterogeneous Brittle Materials, Mech. Res. Comm., **18** (6), pp. 409-414.

Hill, R. (1962). Acceleration Waves in Solids, J. Mech. Phys. Solids, **10** , pp. 1-16.

Hom, C. L., et R. M. McMeeking (1990). Numerical Results for Transformation Toughneing in Ceramics, Int. J. Solids Structures, **26** (11), pp. 1211-1223.

Hoshide, T., H. Furuya, Y. Nagase, et T. Yamada (1984). Fracture mechanics approach to evaluation of strength in sintered silicon nitride, Int. J. Frac., **26** (3), pp. 229-239.

Hoshide, T., T. Ohara, et T. Yamada (1988). Fatigue crack growth from indentation flaw in ceramics, Int. J. Fract., **37** , pp. 47-59.

Huber, J., et J. Heinrisch (1989). Ceramics in internal combustion engines, 2nd symposium on engineering ceramics, F. L. Ridley (Edt.), Elsevier applied science, pp. 203-228.

Hult, J. et L. Travnicek (1983). Carrying Capacity of Fiber Bundles with Varying Strength and Stiffness, J. Méc. Th. Appl., **2** (2), pp. 643-657.

Hutchinson, J. W. (1988). Mechanisms of Toughning in Ceramics, Theoretical and Applied Mechanics, Grenoble, France, P. Germain, M. Piau and D. Caillerie (Edt.), Elsevier Science, pp. 139-144.

Jayatilaca, A. D. S., et K. Trustrum (1977). Statistical approach to brittle fracture, J. Mat. Sci., **12** , pp. 1426-1430.

Kachanov, M. (1985). Elastic Solids with Many Cracks, Int. J. Fract., **28** , pp. R11-R19.

Kadlecek, V., et Z. Spetla (1967). Effect of size and shape of test specimens on the direct tensile strength of concrete, Bull. RILEM, **36** , pp. 175-184.

Katamaya, Y., et Y. Hattori (1982). Effects of Specimen Size on Strength of Sintered Silicon Nitride, C. of J. Am. Ceram. Soc., pp. C-164/C-165.

Kingery, W. D., H. K. Bowen, et D. R. Uhlmann (1976). *Introduction to ceramics*, John Wiley and Sons, Inc.

Krajcinovic, D. (1989). Damage Mechanics, Mech. of Mat., **8** , pp. 117-197.

Krajcinovic, D. (1987). Micromechanical Basis of Phenomenological Models, in *Continuum Damage Mechanics: Theory and Applications*. Springer Verlag, **295**, pp. 195-206.

Krajcinovic, D., et D. Sumarac (1987). Micromechanics of the Damage Processes, in *Continuum Damage Mechanics: Theory and Applications*. Springer Verlag, **295**, pp. 135-194.

L'Hermite, S. (1973). Influence de la dimension absolue sur la résistance de flexion, Annales de l'I.T.B.T.P., **309-310** , pp. 39-41.

Lalouette, O. (1988). Modélisation de la rupture des céramiques, Ecole Centrale de Paris, Rapport de fin d'étude.

Lamon, J. (1988). Statistical Approaches to Failure for Ceramic Reliability Assement, J. Am. Ceram. Soc., **71** (2), pp. 106-112.

Lemaitre, J. (1992). Histoire des essais mécaniques, Journée "3 D au L.M.T. Cachan".

Lemaitre, J., et J.-L. Chaboche (1985). *Mécanique des matériaux solides*, Paris, Dunod, et aussi, *Mechanics po Solid Materials*, Cambridge University Press (1990).

Lemaitre, J., et J. Dufailly (1987). Damage measurements, Eng. Frac. Mech., **28** (5-6), pp. 643-661.

Liu, K. C. (1987). Self-aligning hydraulic piston assembly for tensile testing of ceramic, United States Patent, Patent number 4,686,860, Aug. 18.

Lucas, T. (1990). Céramiques techniques: fiabilité renforcée, Technologies-Usine nouvelle, (juin), pp. 46.

Mandel, J. (1962). Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimensions, J. de Mécanique, **1** (1), pp. 3-30.

Marigo, J.-J. (1982). Etude numérique de l'endommagement, E.D.F. Bulletin de la D.E.R. série C - Mathématiques informatique, **2** , pp. 27-48.

Marquis, D. (1989). Phénoménologie et thermodynamique : couplages entre thermoélasticité, plasticité, vieillissement et endommagement. Thèse d'Etat. Université Paris 6.

Needlemann, A. (1988). Computational micromechanics, Theoretical and Applied Mechanics, Grenoble, France, P. Germain, M. Piau and D. Caillerie (Edt.), Elsevier, pp. 217-240.

Nemeth, N. N., J. M. Manderscheid, et J. P. Gyekeneysi (1989). Designing Ceramic Components with the CARES Computer Program, Ceram. Bull., **68** (12), pp. 2064-2072.

Nguyen, Q. S. (1984). Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale (Bifurcation and stability of irreversible systems obeying to the maximal dissipation principle), J. Méc. Th. Appl., **3** (1), pp. 41-61.

Nguyen, Q. S. (1987). Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture, J. Mech. Phys. Solids, **35** (3), pp. 303-324.

Onat, E. T. (1984). Effective Properties of Elqstic Materials that Contain Penny Shaped Voids, Int. J. Eng. Sci., **22** (8-10), pp. 1013-1021.

Onat, E. T., et F. A. Leckie (1988). Representation of Mechanical Behavior in the Presence of Changing Internal Structure, J. Appl. Mech., **55** , pp. 1-10.

Ortiz, M., Y. Leroy, et A. Needelman (1987). A Finite Element Method for Localized Failure Analysis, Comput. Meths Appl. Engrg., **61** , pp. 189-214.

Phoenix, S.L., (1992). Statistical Issues in the Fracture of Brittle Matrix Composites, Composites Science & Technology, soumis.

Pierce, F. T. (1926). Tensile Tests for Cotton Yarns, V. The 'Weakest Link' Theorems on the Strength of Long Composite Specimens, J. Text. Inst., **17** , pp. T355-T368.

Prewo, . M. (1986). Tension and Flexural Strength of Silicon Carbide Fibre-Reinforced Glass Ceramics, J. Mat. Sci., **21** , pp. 3590–3600.

Rabotnov, Y. N. (1963). On the Equation of State for Creep, in *Prager Aniversary Vol.* New-York, McMillan.

Rice, J. R. (1972). Some Remarks on Elastic Crack-Tip Stress Fields, Int. J. Solids & Structures, **8** , pp. 751-758.

Rice, J. R. (1976). The Localization of Plastic Deformations, Theoretical and Applied Mechanics, W. T. Koiter (Edt.), North-Holland, pp. 207-220.

Rice, J. R., et J. W. Rudnicki (1980). A Note on Some Features of the Theory of Localization of Deformation, Int. J. Solids & Structures, **16** , pp. 597-605.

Roelfstra, P. E., H. SadoukiI, et F. H. Wittmann (1985). Le béton numérique, Matériaux et Constructions, **18** (107), pp. 327-335.

Roux, S. (1990). Structures et Désordre. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Rudnicki, J. W., et J. R. Rice (1975). Conditions for Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials, J. Mech. Phys. Solids, **23** , pp. 371-394.

Saurel, J.-L. (1991). Programmation de l'approche localement couplée de prédiction de la rupture des matériaux à comportement fragile, Rapport de maîtrise. Maîtrise de technologie Mécanique. E.N.S. de Cachan-Université Paris 6.

U.R.I. (1992). University Research Initiative, University of California, Santa Barbara, (U.S.A.).

Vilnat, M. (1988). Céramiques dans les diesels: attention à l'overdose, Usine nouvelle, (27).

Weibull, W. (1939). The phenomenon of rupture in solids, Ing. Vetenskap. Akad., 153.

Weibull, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials, Ing. Vetenskap Akad., 151.

Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability, J. Appl. Mech., **18** (3), pp. 293-297.