



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation d'un écoulement sous vibration. Application au soudage par ultrasons de composites à matrice thermoplastique.

Arthur Lévy

► **To cite this version:**

Arthur Lévy. Modélisation et simulation d'un écoulement sous vibration. Application au soudage par ultrasons de composites à matrice thermoplastique.. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2010. Français. NNT: . tel-00464071v2

**HAL Id: tel-00464071**

**<https://theses.hal.science/tel-00464071v2>**

Submitted on 22 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Centrale de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE

SPIGA

Année 2010

N° B.U. :

**Thèse de DOCTORAT**

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

**ARTHUR LEVY**

Le 1er Mars 2010  
à l'Ecole Centrale de Nantes

**MODÉLISATION ET SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT SOUS VIBRATION.  
APPLICATION AU SOUDAGE PAR ULTRASONS DE COMPOSITES À MATRICE THERMOPLASTIQUE.**

**JURY**

Président :	Philippe Boisse	Professeur, INSA Lyon
Rapporteurs :	Gilles Regnier Philippe Boisse	Professeur, Ecole des Arts et Métiers de Paris
Examineurs :	Eric Soccard Arnaud Poitou Steven Le Corre Didier Delaunay	Ingénieur, EADS IW Nantes Professeur, Ecole Centrale de Nantes Maître de conférence, Ecole Centrale de Nantes Directeur de recherche, Polytech' Nantes

---

# *Remerciements*

Si j'ai tant apprécié ces trois années de thèse, c'est pour deux raisons. D'abord, sans doute, grâce à mon amour pour la mécanique, mais aussi indubitablement grâce à l'environnement humain dans lequel j'ai évolué.

Je tiens d'abord à remercier les rapporteurs et les membres du jury d'avoir bien voulu prendre le temps d'évaluer mon travail. Merci également d'avoir participé à ma formation (PIAM à Aussois, ESAFORM à Lyon et les JNC à Toulouse).

Il y a certaines personnes sans qui ça n'aurait pas été possible. Merci Arnaud d'avoir su être là quand il fallait. Merci Steven, d'avoir été là tout le temps. Merci Eric pour nous avoir proposé un problème si joli et pour nous avoir fait confiance. Merci à Didier Delaunay qui a rendu ce projet réalisable.

Il y a des personnes sans qui ça aurait été beaucoup plus difficile. Merci Nicolas (Chevaugeon) pour les nombreux débuggages et les heures d'explications associées. Merci Erwan, merci Guillaume, Bertrand, que ce soit pour l'aspect recherche ou l'enseignement.

Il y a des personnes sans qui ça n'aurait pas été si complet. Ce sont les stagiaires, master et élèves de projet qui ont contribué à cette étude. Parmi eux, merci à Julien, Apichan, Estelle . . .

Même si toutes les personnes déjà citées y ont contribué, il y en a d'autres sans qui ça aurait été beaucoup moins drôle. Merci Corentin, Yanneck, Marion, Malik, François, Nicolas (Bonfils), Stéphanie, Paco, Adrien, Loïc.

Il y a des personnes sans qui il y aurait beaucoup plus de fautes d'orthographe. Merci à l'équipe matériau.

Il y a deux personnes sans qui je ne serais pas là. Merci maman, merci papa.

Il y a enfin une personne sans qui tout le reste n'aurait pas été aussi merveilleux. Merci AnaMa.

---

# Table des matières

Notations . . . . .	ix
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<hr/>	
<b>I SOUDAGE COMPOSITE, TECHNIQUE ULTRASON</b>	<b>5</b>
<b>1 Contexte industriel . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1 Conditions pour souder des polymères . . . . .	9
1.2 Techniques de soudage existantes . . . . .	14
1.3 Le procédé ultrasons . . . . .	17
<b>2 Position de l'étude . . . . .</b>	<b>23</b>
2.1 Echelle de travail . . . . .	23
2.2 Essais préliminaires . . . . .	25
2.3 Analyse de la zone soudée . . . . .	27
<b>3 Phénomènes physiques . . . . .</b>	<b>34</b>
3.1 Thermique . . . . .	35
3.2 Écoulement à l'interface . . . . .	37
3.3 Cristallisation . . . . .	40
<hr/>	
<b>II MODÉLISATION PAR HOMOGENÉISATION TEMPORELLE</b>	<b>43</b>
<b>1 Mise en équation . . . . .</b>	<b>44</b>
1.1 Mécanique . . . . .	44
1.2 Thermique . . . . .	48
1.3 Bilan . . . . .	49
<b>2 Homogénéisation temporelle . . . . .</b>	<b>50</b>
2.1 Deux variables de temps indépendantes . . . . .	52
2.2 Analyse dimensionnelle . . . . .	53



---

2.1	Géométrie du directeur . . . . .	148
2.2	Matériau . . . . .	155
2.3	Procédé . . . . .	158
2.4	Récapitulatif . . . . .	160
<b>3</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>162</b>
3.1	Efficacité de l'outil numérique . . . . .	162
3.2	Perspectives . . . . .	163
3.3	Difficultés et perspectives à long terme . . . . .	165

---

<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	<b>167</b>
-----------------------------------	------------

---

<b>ANNEXES</b>	<b>171</b>
----------------	------------

<b>A</b>	<b>Mesures de température . . . . .</b>	<b>173</b>
A.1	Mesures par thermocouple . . . . .	173
A.2	Méthode inverse. . . . .	173
A.3	Positionnement des thermocouples . . . . .	174
A.4	Résultats . . . . .	174
<b>B</b>	<b>Extension de l'homogénéisation . . . . .</b>	<b>176</b>
B.1	Basses températures . . . . .	176
B.2	Maxwell généralisé . . . . .	178
B.3	Prise en compte de la dynamique . . . . .	180
B.4	Grandes déformations . . . . .	184
<b>C</b>	<b>Code éléments finis . . . . .</b>	<b>187</b>
C.1	Implémentation de l'élasticité . . . . .	187
C.2	Implémentation de la mécanique des fluides . . . . .	188
C.3	Thermique stationnaire . . . . .	192
C.4	Thermique transitoire . . . . .	192
<b>D</b>	<b>Contact par pénalité . . . . .</b>	<b>196</b>
D.1	Méthode de pénalisation adoptée . . . . .	196
D.2	Optimisation de la loi de contact . . . . .	197
	› <i>Cas test 8 : Contact sur un pion en élasticité</i> . . . . .	199
<b>E</b>	<b>X-FEM et interface matériau . . . . .</b>	<b>201</b>
E.1	Champ thermique . . . . .	201
E.2	Champ de déplacement . . . . .	201
E.3	Formulation mixte . . . . .	201

TABLE DES MATIÈRES

---

> Cas test 9 : Thermique dans un bi-matériau . . . . .	201
<b>F Paramètres matériau de l'APC2 et du PEEK . . . . .</b>	<b>205</b>
F.1 Propriétés thermiques . . . . .	205
F.2 Propriétés mécaniques . . . . .	208
<hr/>	
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>215</b>
<b>INDEX</b>	<b>223</b>

# Notations

$\bar{s}$	Vecteur contrainte imposé sur la frontière $\Gamma_{sup}$ dans le problème macro-chronologique d'écoulement.
$\chi$	Coefficient de pénalisation de la formulation du contact.
$\chi_{max}$	Cristallinité maximale du polymère.
$\{X\}$	Vecteur colonne d'inconnues.
$\Delta H_c$	Enthalpie de cristallisation.
$\delta_{tol}$	Pénétration autorisée lors du calcul du coefficient de pénalisation de la loi de contact.
$\epsilon$	Tolérance du critère de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson.
$\eta$	Viscosité.
$\Gamma$	Frontière du domaine $\Omega$ . $\Gamma_{sup} \cup \Gamma_{\sigma} \cup \Gamma_0$
$\Gamma_0$	Frontière inférieure du domaine $\Omega$ .
$\Gamma_u$	Frontière de Dirichlet du domaine $\Omega$ . $\Gamma_0 \cup \Gamma_{sup}$ .
$\Gamma_{\sigma}$	Frontière latérale du domaine $\Omega$ .
$\Gamma_{sup}$	Frontière supérieure du domaine $\Omega$ .
$\kappa$	Période ultrasonore.
$\lambda$	Temps de relaxation de la loi de comportement de Maxwell.
$\lambda_{lam}, \mu_{lam}$	Coefficients de Lamé.
$\mathcal{F}_e$	Résidu de la formulation faible du problème élastique.
$\mathcal{F}_t$	Résidu de la formulation faible du problème thermique.
$\mathcal{F}_v$	Résidu de la formulation faible du problème d'écoulement.
$\mathcal{P}$	Puissance dissipée à l'interface.
$\Omega$	Domaine d'étude.
$\omega$	Pulsation de la sonotrode. $\omega = 2\pi f$ .

$\psi$	Champ levelset.
$\rho$	Masse volumique du polymère.
$\tau^*$	Echelle de temps adimensionnelle micro-chronologique.
$\mathbf{D}$	Tenseur des taux de déformations.
$\mathbf{F}$	Gradient de transformation.
$\mathbf{I}$	Tenseur identité d'ordre 2.
$\mathbf{J}$	Matrice tangente d'un système non linéaire.
$\tilde{\mathbf{E}}$	Tenseur d'élasticité d'ordre quatre.
$\Sigma$	Tenseur des extra contraintes.
$\varepsilon$	Tenseur des déformations.
$\mathbf{F}$	Tenseur des gradients de transformations.
$\Theta$	Paramètre d'intégration temporelle dans le schéma des résidus pondérés.
$\theta$	Température.
$\theta_0$	Température ambiante. $23^\circ C$
$\theta_f$	Température de fusion du polymère. $334^\circ C$ .
$\theta_g$	Température de transition vitreuse. $143^\circ C$ .
$\mathbf{q}$	Flux de chaleur diffusif. $-k\nabla\theta$
$\Delta\mathbf{U}$	Incrément de solution dans le cadre de la résolution par méthode de Newton-Raphson.
$\xi$	Facteur d'échelle entre le temps court micro-chronologique $\tau$ et le temps long macro-chronologique $T$
$A$	Facteur préexponentiel de la loi d'Arrénus.
$b$	Largeur du rectangle.
$c$	Capacité calorifique spécifique.
$d$	Dimension des champs solution.
$D_c$	Degré de cicatrisation.
$D_{ic}$	Degré de contact intime.
$E_a$	Energie d'activation de la loi d'Arrhenius.
$f$	Fréquence de vibration de la sonotrode. $20\text{ kHz}$ .
$h$	Hauteur initiale du directeur d'énergie.
$H^1(\Omega)$	Espace de Sobolev.

---

$h_e$	Taille de l'élément courant.
$H_{0,h}^1(\Omega)$	Espace vectoriel de dimension finie approximant $H_0^1(\Omega)$ .
$h_0$	Hauteur initiale du lopin dans le cas test.
$H_0^1(\Omega)$	Ensemble des éléments de $H_0^1(\Omega)$ s'annulant sur le bord $\Gamma$ de $\Omega$ .
$H_h^1(\Omega)$	Espace vectoriel de dimension finie approximant $H^1(\Omega)$ .
$h_{sim}$	Hauteur du domaine de simulation. $6.3 \cdot 10^{-3} m$ .
$k$	Conductivité thermique du polymère
$k_t$	Conductivité thermique transverse du composite.
$K_{comp}^{inf}$	Raideurs équivalentes de la plaque de composite inférieure.
$K_{comp}^{sup}$	Raideurs équivalentes de la plaque de composite supérieure.
$K_d$	Raideurs équivalentes du directeur.
$L$	Epaisseur d'une plaque de composite. $3 mm$
$L^2(\Omega)$	Espace de Lebesgue des fonctions à carré sommable sur $\Omega$ .
$L_h^2(\Omega)$	Espace vectoriel de dimension finie approximant $L^2(\Omega)$ .
$l_{sim}$	Largeur du domaine de simulation. $9 \cdot 10^{-4} m$ .
$M$	Grandeur caractéristique de la formulation faible d'un problème dimensionnel.
$N$	Facteur d'échelle géométrique.
$N_i$	Fonctions d'interpolations du champ $i$ .
$p$	Pression hydrostatique.
$Pe$	Nombre de Peclet.
$Q_{Ma}$	Terme source du problème thermique macro-chronologique issu du problème mécanique macro-chronologique.
$Q_{mi}$	Terme source du problème thermique macro-chronologique issu du problème mécanique micro-chronologique.
$R$	Constante des gaz parfaits.
$R_g$	Rayon de giration d'une macromolécule.
$S$	Sensibilité du résidu $F(U)$ au vecteur $U$
$T^*$	Echelle de temps adimensionnelle macro-chronologique.
$t^*$	Echelle de temps adimensionnelle.
$t_c$	Temps caractéristique de l'écrasement d'un directeur d'énergie.
$t_r$	Temps de reptation.



# Introduction

Les matériaux composites occupent une place de plus en plus importante dans l'industrie, en particulier aéronautique. Les composites à matrice thermoplastique suscitent aujourd'hui dans ce secteur un très fort engouement par rapport à leurs concurrents thermodurcissables, limités principalement par la durée de leur étape de cuisson, qui induit nécessairement des temps de cycle longs. Les matériaux composites à matrice thermoplastique ouvrent la voie à de nouvelles applications. De nouveaux procédés, généralement inspirés de l'industrie des matériaux métalliques, sont nécessairement associés. Des procédés de mise en forme ou d'assemblage tels que l'estampage ou le soudage voient alors le jour. Le présent travail de thèse se concentre sur le soudage de matériaux composites à matrice thermoplastique. Ce procédé présente de nombreux attraits industriels. Il est plus simple d'utilisation que le collage. Ses perspectives de performances mécaniques sont meilleures que pour le rivetage, puisqu'il ne nécessite pas de percer les pièces. Enfin, il permet, de par sa nature, d'obtenir un assemblage étanche.

Lors d'un assemblage par soudage, la cicatrisation de deux pièces thermoplastiques nécessite des conditions physiques spécifiques à l'interface : d'une part un *contact intime* [Lee et Springer, 1987, Mantell et Springer, 1992] et d'autre part une température élevée permettant la diffusion des macro-molécules [De Gennes, 1971]. A cause de la faible diffusivité thermique des composites, une température élevée à l'interface ne peut être assurée qu'avec un chauffage local de l'interface. De nombreux procédés mécaniques ou électromagnétiques permettent d'assurer un tel chauffage. Le soudage par induction ou par résistance permet, par exemple, d'obtenir une bonne cicatrisation ; toutefois, il nécessite la présence d'une grille conductrice qui reste à l'interface après soudage, ce qui peut nuire à une bonne qualité mécanique de l'assemblage. La présente thèse se concentre sur le procédé de soudage par ultrasons, pour lequel un travail mécanique est dissipé au niveau de l'interface et permet l'augmentation locale de la température.

Le soudage par ultrasons est connu dans l'industrie des polymères depuis quelques décennies. Il est utilisé pour l'assemblage de pièces non-structurels dans les domaines automobile, médical, électronique, agro-alimentaires. . . Récemment, EADS IW a proposé un procédé innovant appelé soudage "continu", où l'outil se déplace le long de l'interface et permet d'effectuer une ligne de soudure. L'écoulement induit à l'interface est alors tridimensionnel. Ce procédé permet d'obtenir des assemblages bien meilleurs qu'avec le soudage par point, en particulier un taux de porosité quasiment nul à l'interface. D'autre part il permet de souder des pièces de plusieurs mètres, dimension courante dans l'industrie aéronautique. L'utilisation du procédé de soudage continu par ultrasons pour des assemblages structurels aéronautiques est alors aujourd'hui envisageable à l'échelle industrielle.

Bien évidemment, une bonne compréhension du procédé est un préalable indispensable à une telle application aéronautique. C'est l'objet de la présente étude. Comme le montre la figure 1, plusieurs échelles de travail sont possibles. En premier lieu, une approche dite structure, se situe à l'échelle du mètre. En s'intéressant à l'ensemble de

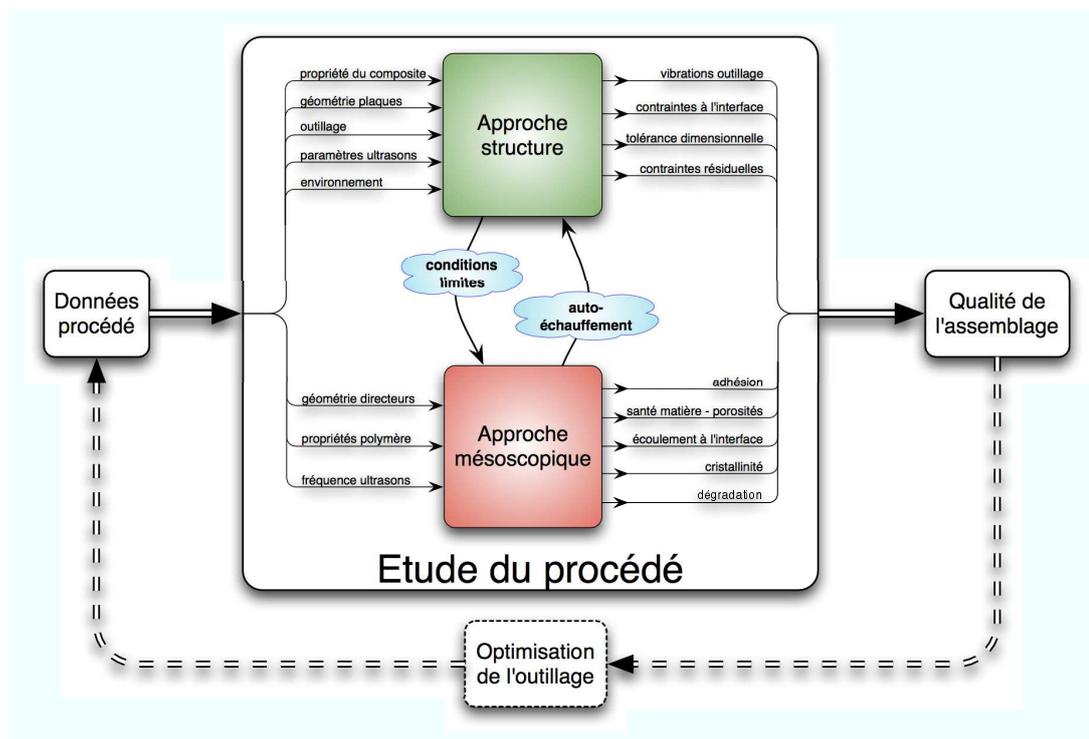


FIG. 1: Problématiques scientifiques et techniques associées au procédé de soudage par ultrasons.

la pièce composite, de son environnement et de l'outillage, elle permettrait d'analyser les phénomènes de vibration, la tolérance géométrique ou les contraintes résiduelles. C'est l'échelle macroscopique du procédé, celle où se posent essentiellement des questions d'ordre technologiques. Néanmoins, seule une étude de l'interface, à l'échelle plus fine dite *mésoscopique*, de quelques millimètres, peut permettre de prédire la qualité de l'adhésion. Quelques études proposent déjà une modélisation de l'auto-échauffement à l'aide de la théorie de la viscoélasticité linéaire [Tolunay et al., 1983, Benatar et Gutowski, 1989, Nonhof et Luiten, 1996, Suresh et al., 2007]. De manière plus globale, le présent travail vise à modéliser puis simuler numériquement simultanément l'écoulement, les vibrations et la thermique à l'interface. L'objectif est de mieux comprendre les liens entre :

- les différents paramètres du procédé,
- les phénomènes physiques à l'interface
- la qualité de la soudure.

Dans cette optique, le premier chapitre situe le procédé étudié dans son environnement industriel ; quelques observations expérimentales permettent de valider la pertinence de l'échelle de travail retenue à savoir l'échelle mésoscopique de l'interface. Les phénomènes physiques prépondérants sont ensuite identifiés. Dans le second chapitre, après la mise en équations du problème, un verrou important est identifié : l'existence simultanée de phénomènes rapides et lents. Une méthode d'homogénéisation temporelle permet alors d'obtenir une description de l'écoulement à l'aide de trois problèmes aux limites définis

sur des échelles de temps distinctes. Le troisième chapitre commence par décrire les spécificités de ces problèmes aux limites, puis le développement d'un outil de calcul éléments finis adapté y est présenté ; de nombreuses méthodes numériques spécifiques font l'originalité du logiciel développé. Dans le dernier chapitre, cet outil numérique est utilisé afin de simuler différents cas de soudage. L'effet des paramètres du procédé sur l'écoulement à l'interface et sur la qualité de la soudure est alors discuté.

# Chapitre I

## Soudage composite, technique ultrason

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Contexte industriel</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1	Conditions pour souder des polymères . . . . .	9
1.2	Techniques de soudage existantes . . . . .	14
1.3	Le procédé ultrasons . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Position de l'étude</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1	Echelle de travail . . . . .	23
2.2	Essais préliminaires . . . . .	25
2.3	Analyse de la zone soudée . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Phénomènes physiques</b> . . . . .	<b>34</b>
3.1	Thermique . . . . .	35
3.2	Écoulement à l'interface . . . . .	37
3.3	Cristallisation . . . . .	40

---

## Composites à matrice thermoplastique

Un matériau composite est obtenu à l'aide d'au moins deux matériaux desquels on tire des propriétés complémentaires. Généralement, ce sont les complémentarités des propriétés mécaniques qui font l'attractivité de ces matériaux. On peut citer comme vieil exemple le bois. A de multiples échelles, c'est bien la combinaison de ses différents composants qui en fait un matériau composite encore compétitif aujourd'hui dans de nombreux domaines. Les torchis puis les mortiers et les bétons, eux aussi, sont des matériaux composites granulaires. La présente étude s'intéresse au domaine des matériaux composites à matrice organique. Ils ont fait leurs apparition dans l'industrie il y a une cinquantaine d'années. Ils sont constitués de fibres (habituellement des fibres de verre ou de carbone) et d'une matrice de polymère. Les fibres confèrent des propriétés mécaniques intéressantes (rigidité, résistance...) tandis que le polymère permet la transmission des efforts inter-fibres et la mise en forme. Il en existe deux grandes classes :

- Les matériaux composites à matrices thermodurcissables. Ils sont très répandus dans l'industrie automobile et nautique. Leurs matrices sont en polymères thermodurcissables. De nombreuses techniques de mise en forme existent pour de tels matériaux. Leurs spécificités viennent du fait que la résine non polymérisée est très peu visqueuse. Des procédés d'infusion ou de RTM peuvent alors être mis en œuvre. C'est au moment de la cuisson que l'on obtient le polymère réticulé et les propriétés finales de la pièce.
- Les matériaux composites à matrices thermoplastiques. Ils sont en plein essor, dans l'industrie aéronautique en particulier. Nous pouvons citer le verre/PET, le verre/PA ou le carbone/PEEK, matériau composite haute technologie sur lequel porte cette étude. La possibilité de fusion de la matrice ouvre de nombreuses perspectives de mise en œuvre pour les composites thermoplastiques. En particulier les distributeurs proposent des produits semi-finis de fibres préimprégnées de polymères.

Outre les nombreuses nouvelles possibilités de mise en œuvre de composites thermoplastiques, la fusion de la matrice permet de les souder. Tout comme dans l'industrie métallurgique, nous parlons de soudage de matériaux lorsque l'adhésion a lieu directement sur les matériaux de base, sans matériau d'apport de nature différente.

Cette première partie présente la problématique de la présente étude. Dans un premier temps, l'étude est située dans son contexte industriel, le domaine de soudage des matériaux composites à matrices thermoplastiques. Ensuite, une première analyse permet de justifier l'échelle de travail, à savoir l'échelle de la zone soudée. Enfin, les phénomènes physiques ayant lieu dans la zone de soudage sont passés en revue. Ceci permet de conclure en introduisant l'objectif de la modélisation développée par la suite.

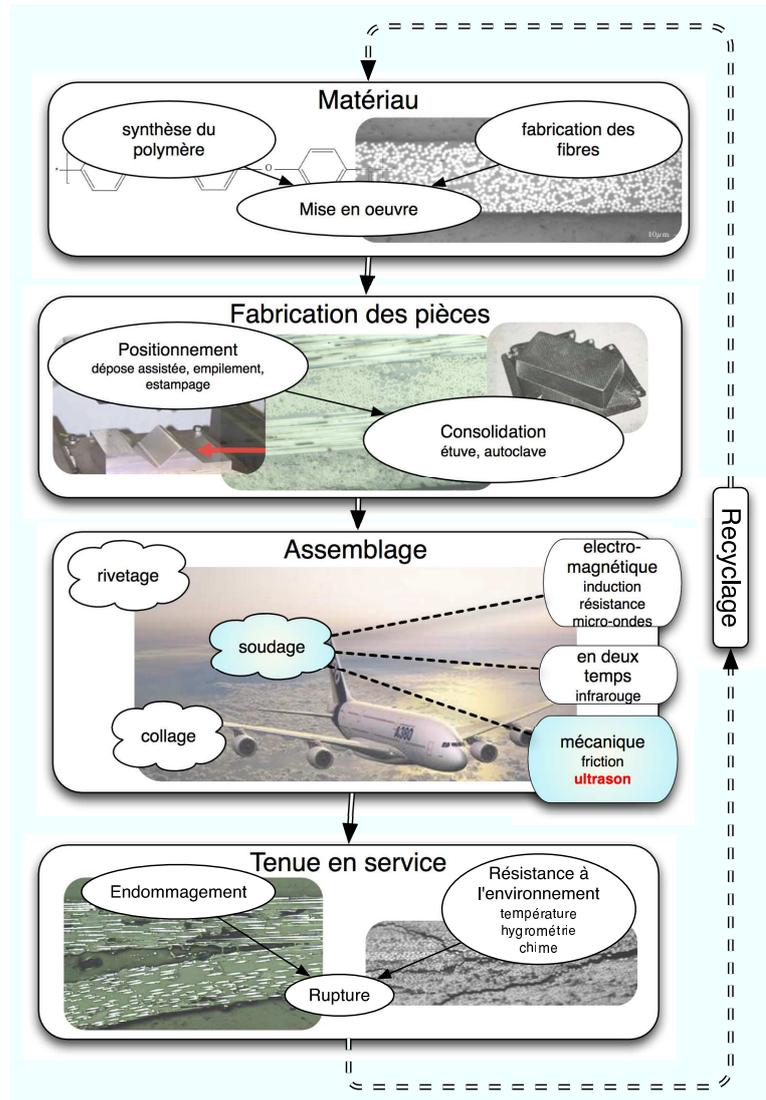


FIG. I.1: Cycle de vie d'une pièce composite

## 1 Contexte industriel

Cette section situe le procédé de soudage par ultrasons dans son environnement industriel. L'intérêt de ce procédé pour l'assemblage de composites thermoplastiques y est alors justifié.

### Positionnement dans la chaîne de production

Tout d'abord, le procédé doit être positionné dans le cycle de vie d'une pièce composite. Ce cycle est récapitulé sur le schéma I.1. La première étape, la fabrication du composite, consiste à synthétiser les constituants afin d'obtenir des produits semi-finis. Dans notre cas, le produit semi-fini est une bande de préimprégné. La seconde étape

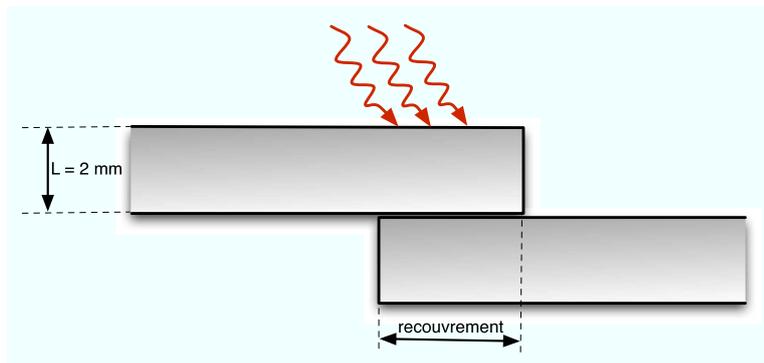


FIG. I.2: Un assemblage soudé type

consiste à mettre en forme ces produits afin d'obtenir des pièces. Ces pièces tendent à être de plus en plus complexes (en particulier de formes non-développables). Elles nécessitent donc des procédés de fabrication de plus en plus originaux et adaptés aux résines thermoplastiques. De plus, l'utilisation de matrices thermoplastiques permet de s'affranchir des problèmes de conservation et de péremption des résines thermodurcissables. Une fois ces pièces obtenues, l'assemblage permet d'obtenir le produit fini. C'est dans cette étape d'assemblage que s'insère la présente étude. L'étape suivante est sa tenue en service. Le recyclage ou la revalorisation vient clore le cycle de vie d'un matériau composite. La possibilité de fusion de la matrice des composites thermoplastiques en fin de vie ouvre une voie pour la revalorisation.

Il existe plusieurs techniques d'assemblages de composites. Les assemblages mécaniques tels que le boulonnage ou le rivetage ont l'inconvénient de nécessiter un perçage des pièces composites. Ce perçage pose des problèmes de concentration de contraintes et d'étanchéité. Les techniques de collage, assez largement utilisées aujourd'hui ont d'autres limites. Outre le fait que la résistance de l'assemblage collé est généralement limitée, la manipulation et la conservation des colles sont assez contraignantes. Finalement, les assemblages par soudage sont une voie prometteuse, pour peu que l'on traite des matériaux à matrices thermoplastiques.

Afin d'assurer la tenue mécanique d'un assemblage soudé, certains auteurs proposent de compléter l'adhésion par des renforts qui traversent l'interface [Pérès et al., 2007]. Dans le cas du procédé étudié, seul un recouvrement important permet d'assurer un transfert d'efforts suffisant entre les deux pièces à assembler (cf. figure I.2). Dans ce cadre où seule la matrice assure l'adhésion, les différentes techniques de soudage existantes sont principalement issues du domaine du soudage de polymères.

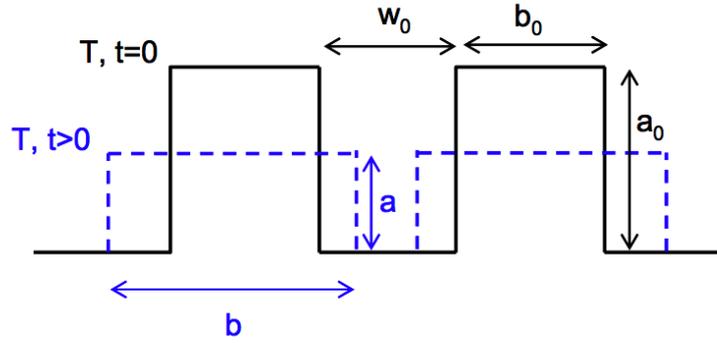


FIG. I.3: Modélisation du contact intime selon Lee, Mantell et Springer [Lee et Springer, 1987, Mantell et Springer, 1992].

## 1.1 État de l'art sur les conditions nécessaires à la soudure de polymères

Avant d'introduire les différentes techniques de soudages de composites, il faut présenter les conditions physiques nécessaires à l'interface pour assurer l'adhésion de deux polymères. Ces différentes conditions déterminent la qualité du soudage.

### 1.1.a Le contact intime

**Principe** Dans un premier temps, les deux parties à souder doivent être en contact d'un point de vue microscopique. La qualité du contact est fortement liée à l'état de surface et à la rugosité de l'interface. Lee, Mantell et Springer [Lee et Springer, 1987, Mantell et Springer, 1992] proposent de modéliser cette rugosité à l'aide d'une succession de rectangles (cf. figure I.3). Ils définissent alors un degré de contact intime  $D_{ic}$  tel que :

$$D_{ic} = \frac{b}{w_0 + b_0} \quad (\text{I.1})$$

où  $b$  est la largeur du rectangle et  $w_0 + b_0$  est la longueur du motif répété. Le degré de contact  $D_{ic}$  tend alors vers 1 quand le contact est achevé. Yang et Pitchumani [Yang et Pitchumani, 2001] proposent une modélisation plus réaliste de la rugosité, basée sur la théorie fractale.

**Obtention** Le contact intime est assuré en appliquant un effort entre les deux plaques. Des modélisations de l'évolution du degré de contact intime en fonction de la pression et de la température peuvent être retrouvées dans [Lee et Springer, 1987, Mantell et Springer, 1992, Ageorges et al., 2001]. On retiendra que le contact intime ne peut être obtenu qu'à l'aide d'une pression suffisante sur l'assemblage. De plus, il est fortement amélioré si la température à l'interface augmente.

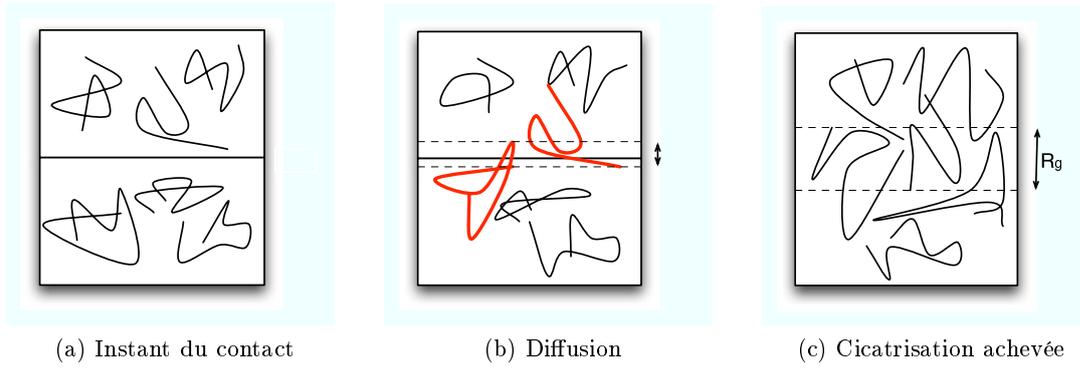


FIG. I.4: Diffusion des macro-molécules à l'interface

### 1.1.b Cicatrisation

Une fois que les deux matériaux à souder sont en contact au niveau microscopique, la phase de cicatrisation commence.

**Principe de diffusion** La cicatrisation est parfaite si l'interface initiale a complètement disparue et que les deux matériaux n'en forment plus qu'un [Lamethe, 2004]. Initialement, à l'instant où le contact intime est obtenu, aucune macromolécule ne traverse l'interface (figure I.4a). Le mécanisme de cicatrisation commence et les macromolécules diffusent à l'interface (figure I.4b). La cicatrisation est complète lorsque la longueur de diffusion atteint le rayon de giration  $R_g$  des macromolécules (figure I.4c). L'interface n'est alors plus discernable, la randomisation du polymère est effective.

**La reptation** La théorie de De Gennes [De Gennes, 1971] permet de déterminer la vitesse de diffusion des macromolécules à l'interface. Il considère l'ensemble des enchevêtrements auquel une macromolécule est soumise dans un fondu. Il suppose alors que le déplacement de cette chaîne ne peut se faire que dans un tube défini par la configuration de l'ensemble des voisins (figure I.5a). Le changement de configuration, et donc la diffusion des macromolécules, ne peut avoir lieu qu'en extrayant la chaîne de son tube. Un premier temps de relaxation court, appelé temps de Rouse (dont on peut trouver une définition dans [Brostow, 2000]) est nécessaire pour effectuer un déplacement élémentaire de la chaîne dans son tube. Ce déplacement élémentaire permet d'extraire une chaîne mineure à l'extrémité du tube initial (figure I.5b). Ce n'est qu'après une succession d'aller-retours que ces chaînes mineures atteignent la longueur du tube initial. Le temps de relaxation long, appelé temps de reptation  $t_r$ , est écoulé. La macromolécule a complètement changé de conformation.

Ces deux temps de relaxation dépendent fortement de la longueur des chaînes [De Gennes, 1971], mais également de la température  $\theta$ . La thermo-dépendance du temps

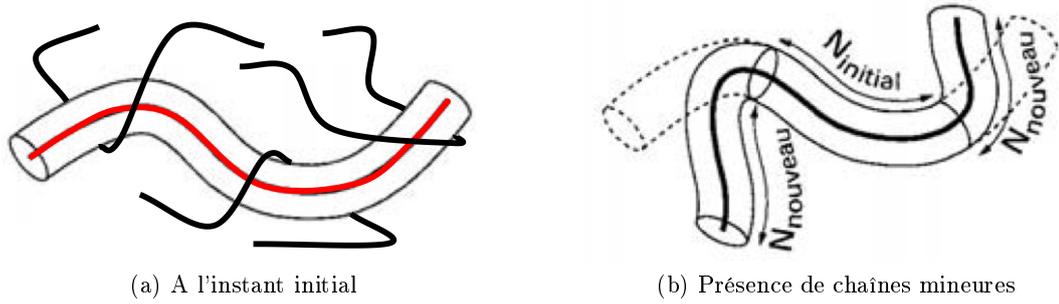


FIG. I.5: La reptation des macromolécules selon De Genne [De Gennes, 1971].

de reptation peut être modélisée par une loi d'Arrhenius [Wool et O'connor, 1981, Pitchumani et al., 1996, Lamethe, 2004, Nicodeau, 2005] :

$$t_r = A \exp\left(\frac{E_a}{R\theta}\right). \quad (\text{I.2})$$

L'énergie d'activation  $E_a$  et le facteur préexponentiel  $A$  dépendent du matériau,  $R$  est la constante des gaz parfaits.

**Définition d'un degré de cicatrisation** Afin de décrire la qualité de l'adhésion, une variable appelée degré de cicatrisation peut être définie comme le nombre de fois où la chaîne macro-moléculaire a complètement changé de conformation :

$$D_c = \int_0^t \frac{d\tau}{t_r} \quad (\text{I.3})$$

où  $\tau = 0$  est l'instant initial auquel le contact intime a lieu. Nicodeau et Regnier [Nicodeau, 2005, Regnier et al., 2007] utilisent par exemple cette définition. Certains auteurs [Bourban et al., 2001, Yang et Pitchumani, 2002] définissent le degré de cicatrisation à l'aide de considérations mécaniques comme

$$D_c = \frac{\sigma}{\sigma_\infty} \quad (\text{I.4})$$

où  $\sigma$  est la résistance mécanique de l'assemblage et  $\sigma_\infty$  la résistance obtenue pour une cicatrisation complète. Ils obtiennent alors une évolution du degré de cicatrisation de la forme :

$$D_c = \int_0^t \left(\frac{dt}{t_w}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{I.5})$$

où  $t_w$  est le temps de soudage, défini comme le temps nécessaire pour que la chaîne mineure atteigne la longueur pour laquelle la résistance mécanique maximum est obtenue.  $t_w(\theta)$  est également identifié à l'aide d'une loi d'Arrhenius.

Finalement si la cicatrisation est achevée (*ie.* si un temps supérieur au temps de reptation s'est écoulé) le degré de cicatrisation a atteint 1 quelque soit sa définition. On retiendra la définition relativement empirique donnée par l'équation (I.2) et (I.3). Cette définition a le mérite de faire intervenir le temps de reptation  $t_r$ , à la signification plus physique que le temps de soudage  $t_w$ .

Pour assurer une cicatrisation rapide de l'interface, la température doit être élevée. Néanmoins, il ne faut pas atteindre la température de dégradation du polymère. Le procédé de soudage doit donc assurer une température d'interface se situant dans une fenêtre de soudabilité relativement restreinte. Le travail de Nicodeau [Nicodeau, 2005] propose une étude complète de ce type de fenêtre de soudabilité sur un procédé original.

### 1.1.c Influence de la cristallisation

De nombreux polymères tels que le Polyéthylène terephthalate (PET) [Kong et Hay, 2002] le polypropylène (PP) ou le polyéthylène (PE) sont semi-cristallins. Le polyéther-éther-cétone (PEEK) étudié ici est également un semi-cristallin [Cogswell, 1992]. Les conséquences de la cristallisation sont multiples sur le mécanisme d'adhésion.

**Thermique** Tout d'abord, la cristallisation est une réaction exothermique. La thermique de l'interface est donc modifiée par l'avancement de la cristallisation ou de la fusion des cristaux. Le nombre de Stefan  $S_t$  permet d'évaluer si ce dégagement de chaleur est important dans le procédé.

$$S_t = \frac{c\Delta\theta}{\chi_{max}\Delta H_c} \quad (\text{I.6})$$

où  $c$  est la capacité calorifique du PEEK qui vaut environ [Ageorges et al., 1998b, Cogswell, 1992]  $c \sim 2000 \text{ J.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$ ;  $\Delta H_c$  sa chaleur latente de cristallisation mesurée par Lamèthe [Lamethe, 2004] et valant  $\Delta H_c = 122.10^3 \text{ J.kg}^{-1}$ ;  $\chi_{max}$  la cristallinité maximum du polymère semi-cristallin, pour le PEEK,  $\chi_{max} \sim 40\%$  [Cogswell, 1992]; et  $\Delta\theta$  une variation de température représentative du procédé, elle est prise égale à  $\theta_f - \theta_0$  où  $\theta_f = 334^\circ\text{C}$  est la température de fusion et  $\theta_0 = 23^\circ\text{C}$  est la température ambiante. Le nombre de Stefan est alors de l'ordre de :

$$S_t \sim 20 \quad (\text{I.7})$$

Les effets thermiques de la cristallisation ne sont donc pas prépondérants dans le procédé.

**Reptation** En revanche, la cristallisation du polymère a un effet notable sur les phénomènes de reptation. La théorie de la reptation s'applique en effet à une chaîne

macromoléculaire à l'état amorphe. Les sphérolites du matériau cristallisé forment des obstacles et limitent la diffusion des macro-molécules. La cicatrisation n'a alors lieu que sur la phase amorphe et de manière réduite [Lamethe et al., 2005]. Afin de prendre en compte cet effet, Nicodeau et Regnier *et al.* considèrent que la cicatrisation n'a plus lieu en dessous de la température de fusion et écrivent donc que le degré de cicatrisation final vaut :

$$D_c = \int_0^{t(\theta=\theta_m)} \frac{d\tau}{t_r} \quad (\text{I.8})$$

De manière plus générale, la thermo-dépendance du temps de reptation  $t_r$  permet d'intégrer directement cet aspect. En effet la loi d'Arrhenius (I.2) donne pour le PEEK  $t_r(300^\circ\text{C}) = 1,6$  s alors que  $t_r(250^\circ\text{C}) = 5,2$  s. Les augmentations de degré de cicatrisation  $d\tau/t_r$  pour des températures faibles seront donc directement négligeables sur des procédés industriels rapides (cf. section 3.1.b (p. 37)).

Finalement, ceci confirme la nécessité de dépasser la température de fusion pour assurer la cicatrisation du polymère.

**Mécanique** Les propriétés mécaniques des polymères sont augmentées avec la cristallisation. Outre l'augmentation des modules élastiques, la propagation de fissures est ralentie par la présence de sphérolites. Cogswell [Cogswell, 1992] confirme en effet que les meilleures propriétés sont obtenues autour de 30% de cristallinité. Il est donc intéressant d'obtenir, après refroidissement de l'assemblage, une interface cristallisée.

#### 1.1.d Bilan

**Diffusion thermique** Comme montré précédemment, pour assurer le soudage, l'interface doit atteindre la température de fusion. En procédant à un chauffage surfacique tel que celui présenté sur la figure I.2 (p. 8), un temps de diffusion est nécessaire pour que le front de chaleur atteigne l'interface. En considérant un matériau composite, dont la diffusivité thermique transverse est de l'ordre de  $4.10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , le temps caractéristique de diffusion à travers une plaque de 2 mm est de l'ordre de 10 s. Dès lors un chauffage surfacique ne peut être appliqué à un procédé industriel, dont les cadences doivent nécessairement être plus rapides. D'autre part, outre le risque de dégradation de la zone chauffée, un tel chauffage implique que l'ensemble de la plaque supérieure fonde. Ceci entraîne d'évidentes contraintes sur l'intégrité de la pièce.

**Chauffage local** Finalement, une technique de chauffage local, au niveau de l'interface seule, doit être mise en œuvre. Elle doit permettre d'obtenir les conditions de

température nécessaires au déroulement des phénomènes physiques présentés précédemment. Plus précisément, la température de fusion doit être atteinte à l'interface, ceci en des temps suffisamment rapides pour être applicable à des procédés industriels.

**Pression** D'autre part, afin d'assurer le contact intime à l'interface, l'outillage doit permettre d'appliquer une pression entre les deux pièces à souder.

## 1.2 Techniques de soudage existantes

De nombreux procédés permettent de remplir ces conditions nécessaires au soudage. Ils sont présentés, dans cette section, en fonction de la manière dont le chauffage est effectué à l'interface.

### 1.2.a Soudage en deux temps

Pour obtenir un chauffage local, un soudage en deux temps peut être envisagé. Dans un premier temps, les deux zones qui formeront l'interface sont chauffées, puis dans un deuxième temps, les deux parties sont mises en place et la pression nécessaire au contact intime est appliquée. Le chauffage peut se faire par plusieurs moyens tels que lampes infrarouges [Lamethe et al., 2005] ou torches azotes (cf. par exemple [Nicodeau, 2005, Pitchumani et al., 1996] pour un procédé de dépose de bandes).

**Efficacité** Le soudage en deux étapes permet de chauffer de manière très locale l'interface. Néanmoins, ce chauffage ne peut continuer une fois que les deux pièces sont en place. La mise en position doit donc être effectuée rapidement pour assurer la température nécessaire à la cicatrisation. Les résultats sont donc très variables d'un procédé à l'autre. Le procédé de dépose de bandes par chauffage à torche azote s'est avéré non applicable. Il nécessiterait un chauffage trop important qui dégrade la matrice [Nicodeau, 2005]. En revanche, le chauffage par lampes infrarouges permet d'obtenir des soudures de bonne qualité avec fusion à l'interface [Lamethe et al., 2005].

**Limite** Le soudage en deux temps présente des limites de mise en œuvre. En particulier, la manutention de grandes pièces industrielles peut être difficile. Finalement la mise en position rapide et l'application de pression s'avèrent souvent impossibles. Les procédés présentés par la suite permettent d'outrepasser ces limites en assurant un chauffage à distance de l'interface d'un assemblage déjà positionné.

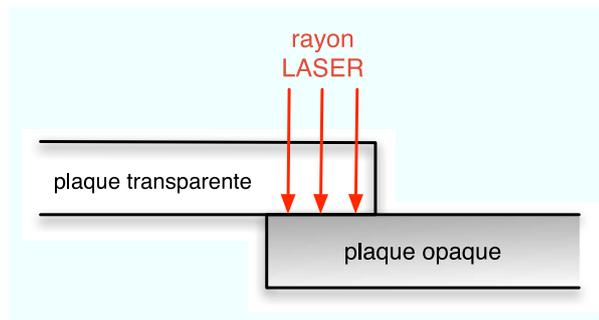


FIG. I.6: Principe du soudage laser par transparence

### 1.2.b Procédés électromagnétiques

Les phénomènes électromagnétiques peuvent assurer un chauffage à distance et localisé de l'interface.

**Laser par transparence** Une première technique est le soudage par transparence. Elle consiste à chauffer l'interface d'un assemblage tel que celui présenté figure I.6. Le faisceau laser traverse le matériau transparent avec un minimum d'atténuation tandis qu'il est absorbé au niveau de l'interface du fait de l'opacité de la deuxième pièce. Cette méthode de chauffage n'est applicable que dans le cas de polymères transparents (tels que PP, PA6 or PC) soudés sur polymères opaques. Les composites, et en particulier ceux à fibres de carbone, ne peuvent donc pas être soudés par transparence. Le carbone a effectivement un comportement de corps noir sur une très large gamme de longueurs d'ondes.

**Résistance** Afin de souder de tels composites, le soudage par résistance peut être envisagé [Stavrov et Bersee, 2005]. Un élément résistif est positionné à l'interface, puis un courant électrique est imposé dans l'élément (cf. figure I.7). L'élément va chauffer par effet Joule. La pression nécessaire au contact intime est alors appliquée entre les deux pièces à souder. Ce procédé permet un bon contrôle de la température d'interface. Il présente néanmoins quelques difficultés de mise en œuvre, en particulier en ce qui concerne les connections électriques.

**Induction** Le soudage par induction permet de s'affranchir de ces problèmes de connections. Il consiste à disposer un élément métallique, appelé suscepteur, à l'interface de soudage (cf. figure I.8), puis à plonger l'ensemble de l'assemblage dans un champ magnétique variable. Les courants de Foucault induits dans le suscepteur entraînent son chauffage par effet Joule [Ahmed et al., 2006]. Ce procédé permet le chauffage localisé de l'interface à distance et même sans contact avec l'interface. Sa mise en œuvre est donc

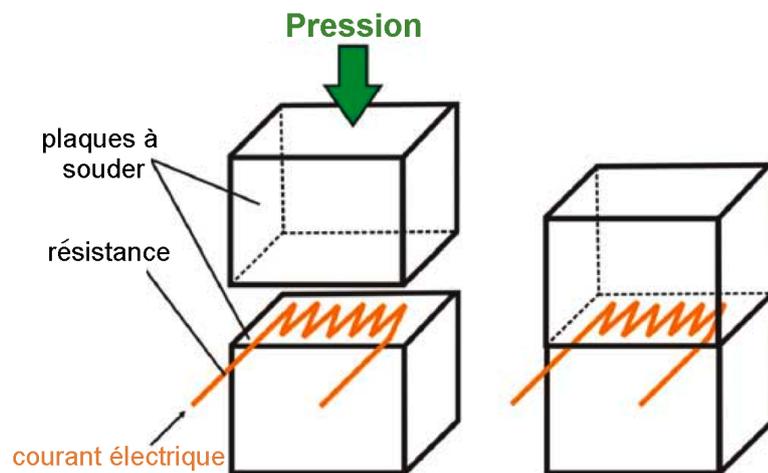


FIG. I.7: Principe du soudage par résistance [Stavrov et Bersee, 2005]

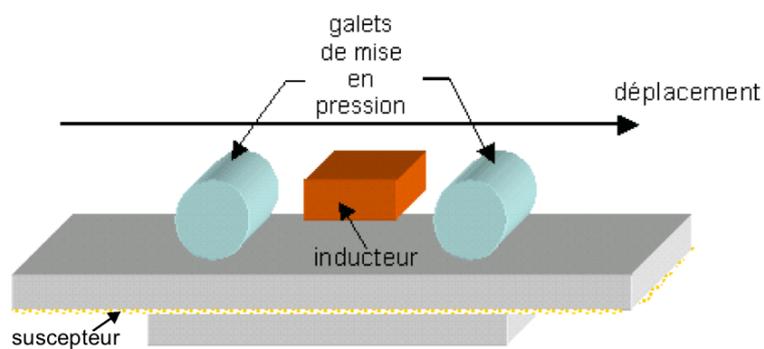


FIG. I.8: Principe du soudage par induction

plus simple puisque seul le déplacement de l'inducteur générant le champ magnétique doit être contrôlé. La phase de mise en pression est par contre toujours nécessaire pour assurer le contact intime. Elle est généralement obtenue à l'aide de rouleaux presseurs.

**Limite** Le soudage par résistance ou par induction posent cependant le problème de l'élément métallique resté à l'interface. Mahdi [Mahdi et al., 2003] montre qu'il n'a pas d'effet notable sur la résistance mécanique de l'assemblage. Néanmoins, la présence d'une grille à l'interface semble néfaste, en particulier pour la propagation de fissure. Il faut toutefois noter que dans le domaine aéronautique, la présence de grille peut être mise à profit pour assurer la continuité électrique nécessaire à la résistance à la foudre.

### 1.2.c Procédés mécaniques

Plutôt que d'utiliser les phénomènes électromagnétiques pour produire de la chaleur à l'interface, les procédés de soudage mécanique consistent à dissiper un travail mécanique en chaleur, de manière locale.

**Vibration** Le soudage par vibration consiste à appliquer un déplacement relatif oscillant des deux pièces à souder, tout en les maintenant en pression l'une contre l'autre. Le frottement permet alors de dissiper l'énergie mécanique en chaleur. Ce procédé est plus connu dans l'industrie métallurgique (LFW ou friction inertielle [Maalekian, 2007]). En outre, la vibration couplée à la pression des deux plaques l'une sur l'autre permet d'améliorer le contact intime.

**Ultrasons** Le soudage par ultrasons nécessite une étape préalable : des picots appelés directeurs d'énergie sont moulés sur une des plaques à souder. L'assemblage est ensuite disposé sous un outillage qui applique une compression sinusoïdale à fréquence ultrasonore aux deux plaques. La déformation se concentre alors dans les directeurs qui assurent le chauffage par dissipation visqueuse.

## 1.3 Le procédé ultrasons

Dans ce procédé, le chauffage par dissipation visqueuse chauffe les directeurs qui fondent, puis s'écoulent à l'interface et assurent le soudage. Outre le procédé classique, dit "statique", connu depuis quelques décennies déjà dans l'industrie des polymères, EADS IW propose une innovation du procédé : le procédé continu, ou "dynamique" [Soccard, 2007].

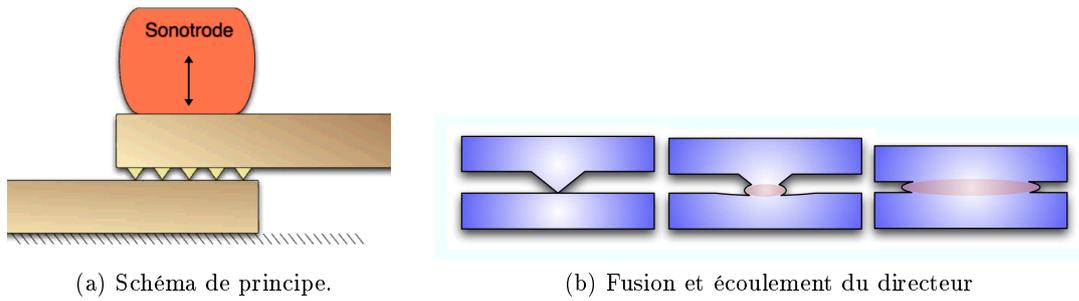


FIG. I.9: Principe du soudage par ultrasons

### 1.3.a Soudage par ultrasons “statique”

**Mise en œuvre** La sonotrode est l’outillage qui permet d’appliquer la compression ultrasonore à l’assemblage. Sa forme peut être très variable. L’objectif est en général d’obtenir un déplacement le plus uniforme possible sur l’ensemble de la surface utile. Par contre, elle est toujours conçue de manière à avoir une fréquence propre qui est la fréquence d’utilisation, comprise entre 15 kHz et 30 kHz. La fréquence de vibration de la sonotrode est considérée par la suite de  $f = 20\text{ kHz}$ . L’amplitude de vibration de la sonotrode est de quelques dizaines de microns. De telles conditions sont obtenues à l’aide d’un ensemble électro-mécanique [Nonhof et Luiten, 1996] composé : d’un générateur qui crée un signal électrique souhaité, d’un convertisseur piézoélectrique transformant ce signal en déformation, d’un booster permettant d’amplifier le déplacement engendré par le convertisseur, puis de la sonotrode.

En plus de la vibration, la sonotrode impose une pression constante à l’assemblage. Ceci permet d’assurer la pression nécessaire au contact intime sans outillage supplémentaire (cf. figure I.9a).

La rigidité en compression de la plaque composite est beaucoup plus élevée que la rigidité des directeurs d’énergie. D’abord que le matériau constituant la plaque est un composite et possède un module plus important que les directeurs en matrice seule ; mais aussi parce que la surface utile des directeurs d’énergie est bien moins importante que la surface du composite (cf figure I.15 (p. 28)).

D’autre part, la vitesse de propagation d’une onde mécanique dans l’épaisseur de la plaque composite est :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{I.9})$$

où  $E$  est le module transverse du composite et  $\rho$  sa masse volumique. Pour des composites industriels à fibres de carbone ou de verre, le module d’Young transverse est de l’ordre de 10 GPa et la masse volumique de  $2000\text{ kg/m}^3$ . La vitesse de propagation d’une

onde dans le sens transverse est donc d'environ :

$$c \sim 2000 \text{ m/s} \quad (\text{I.10})$$

La longueur d'onde  $\lambda$  d'un signal mécanique vaut donc environ :

$$\lambda = \frac{c}{f} \sim 0,1 \text{ m} \quad (\text{I.11})$$

Pour des pièces à souder de quelques millimètres d'épaisseur seulement, comme l'assemblage représenté figure I.2 (p. 8), aucune onde ne peut se propager dans la plaque. Le système est donc en équilibre statique. Ce procédé est nommé soudage "*near field*" [Grewell et al., 2003]. Il faut insister sur le fait que l'on ne parle de soudage ultrasons qu'à cause de la fréquence des sollicitations. Aucun effet acoustique ne sera étudié par la suite.

Nonhof et Luiten [Nonhof et Luiten, 1996] ont étudié les ordres de grandeur du procédé. Ils ont montré qu'à 20 kHz la sonotrode est probablement rarement en contact avec la plaque. La sonotrode martèle alors l'assemblage [Ha Minh, 2009]. Conscients de cette réalité, l'approche retenue dans cette étude reste que la sonotrode impose une compression sinusoïdale à l'assemblage [Tolunay et al., 1983, Benatar, 1987, Wang et al., 2006, Suresh et al., 2007].

**Applications** Le procédé de soudage par ultrasons est classique dans l'industrie des polymères. Il est rapide (temps de cycle d'environ une seconde) et économique. L'outillage doit néanmoins être adapté à la géométrie de la soudure à effectuer. Le soudage par ultrasons est utilisé dans des domaines aussi différents que l'industrie automobile, l'agro-alimentaire (emballages), le médical ou l'aéronautique. Disquettes, boîtiers électroniques, pots de yaourts ou téléphones portables sont autant d'objets d'usage quotidien pouvant être soudés à l'aide de ce procédé.

Les polymères amorphes tels que l'Acrylonitrile-butadiène-styrène (ABS) [Benatar et al., 1989], le polystyrène [Benatar et al., 1989, Tolunay et al., 1983], le polycarbonate et le polychlorure de vinyle (PVC) se soudent bien par ultrasons. D'une part car les problèmes de cristallinité sont évités mais d'autre part car leur rigidité est suffisante pour assurer la transmission des efforts. Les polymères semi-cristallins tels que le polyéthylène (PE), le polypropylène (PP) [Benatar et al., 1989], le polyéthylène terephthalate (PET), le poly-ether-cetone-cetone (PEKK), le polyether imide (PEI) ou le poly-ether-ether-cétone (PEEK) [Ageorges et al., 2001, Benatar et Gutowski, 1989] sont aussi de bons candidats pour la soudure par ultrasons.

Le procédé de soudage par ultrasons est particulièrement intéressant dans la fabrication de pièces de grande distribution nécessitant un temps de cycle court. Néanmoins,

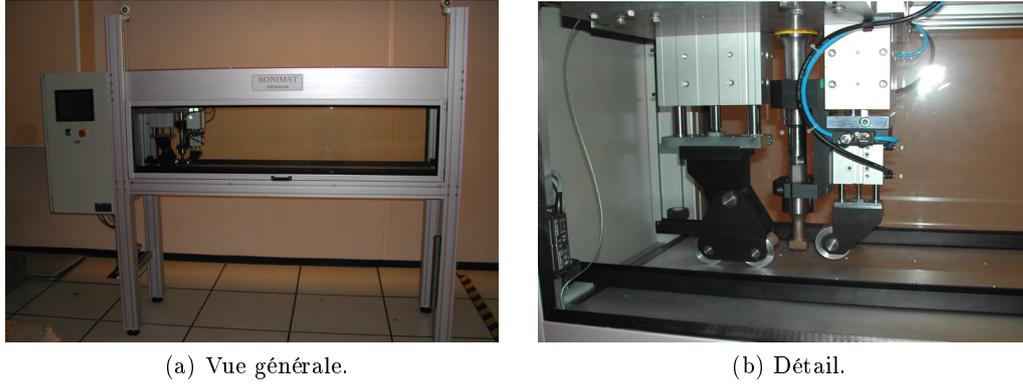


FIG. I.10: Banc d'essai de soudage en continu.

pour le soudage de pièces de haute technologie telles que celles rencontrées dans le domaine aéronautique, le procédé “statique” présente une limite. De nombreux vides persistent à l’interface, après soudure, résultant de l’écoulement limité des directeurs d’énergie fondus. Afin d’améliorer la qualité de soudure, EADS IW propose un nouveau procédé dit “dynamique” ou “continu”.

### 1.3.b Soudage par ultrasons “dynamique”

Le soudage par ultrasons en continu, ou soudage “dynamique”, consiste à appliquer une vitesse d’avance à la sonotrode. La sonotrode se déplace ainsi le long des directeurs d’énergie et forme un joint soudé [Soccard, 2007]. Dès lors, l’écoulement du directeur d’énergie à l’interface est changé par rapport au soudage dit “statique”.

**Le banc d’essais** Afin d’effectuer des soudures continues sur des plaques de composite, EADS IW a développé un démonstrateur (cf. figure I.10). Le banc d’essai fabriqué par Sonimat permet de déplacer la sonotrode à une vitesse donnée. La pression constante est appliquée à la sonotrode à l’aide d’un vérin hydraulique. La pression dans le vérin est de 6 bar pour un diamètre de  $D_{verin} = 63$  mm. L’effort constant de la sonotrode vaut donc :

$$F_{sono} = \frac{\pi}{4} D_{verin}^2 P \sim 2000 \text{ N} \quad (\text{I.12})$$

Pour faciliter le déplacement de la sonotrode, en contact avec la plaque composite, son extrémité est légèrement cylindrique. Il en résulte que l’aire de contact sonotrode / plaque supérieur n’est pas connue. Néanmoins, l’effort (I.12) appliqué par la sonotrode étant important, celle-ci laisse une empreinte sur la surface du composite. La longueur de l’aire de contact a pu être estimée à environ 2 mm. Quant à la largeur de contact,

elle est également au recouvrement visible figure I.2 (p. 8). La sonotrode surplombe donc l'ensemble des directeurs d'énergie.

Le banc d'essai possède également des rouleaux presseurs. Ils permettent d'améliorer le contact intime à l'interface en appliquant un effort de compression entre les deux plaques en amont et en aval de la sonotrode. Du fait de l'effort appliqué par la sonotrode elle même, le rouleau presseur amont a plutôt un rôle de maintien de l'assemblage à l'initiation du procédé.

Bien que la sonotrode soit en contact sur une surface faible, la rigidité de la plaque composite fait que les efforts sur les directeurs sont beaucoup mieux répartis. L'amplitude de déformation que subit le directeur au passage de la sonotrode évolue donc de manière progressive.

**Déroulement** La fréquence de vibration de la sonotrode est de 20 kHz. La vitesse d'avance peut aller jusqu'à 5 mm/s environ. Bien que l'amplitude de vibration de la sonotrode puisse atteindre 80  $\mu\text{m}$ , généralement, les essais sont fait autour de 50  $\mu\text{m}$ . La puissance dissipée par le générateur est alors de 25 W soit 125 J/mm environ. Ceci confirme bien le caractère économique du procédé, au moins d'un point de vue énergétique.

Quatre grandes phases peuvent être identifiées dans le procédé :

1. Durant la phase initiale, la sonotrode vient au contact de la plaque. La vibration est alors transmise au directeur d'énergie. Le directeur est initialement froid et ne s'écoule donc pas. Par contre, sa température augmente rapidement du fait de la dissipation d'énergie mécanique.
2. Pendant la deuxième phase transitoire, le directeur d'énergie commence à s'écouler. La sonotrode commence à avancer. Cette phase est encore une phase d'amorce transitoire. L'écoulement ne permet en effet pas d'obtenir une qualité de soudure optimale comme le montrent les porosités visibles sur la micrographie I.11.

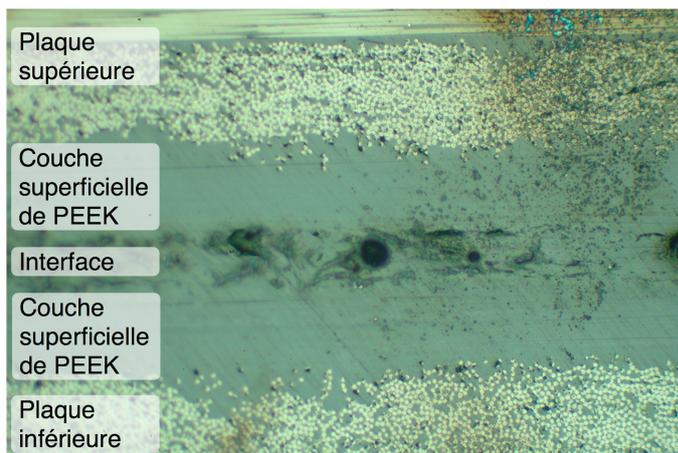


FIG. I.11: Phase d'amorce présentant des porosités.

3. Le régime permanent de soudage est atteint durant la troisième phase. Le bilan de matière est alors équilibré : l'avance de la sonotrode contre l'écoulement des directeurs. Durant cette phase, l'écoulement peut être optimal, comme le montre la micrographie I.12.

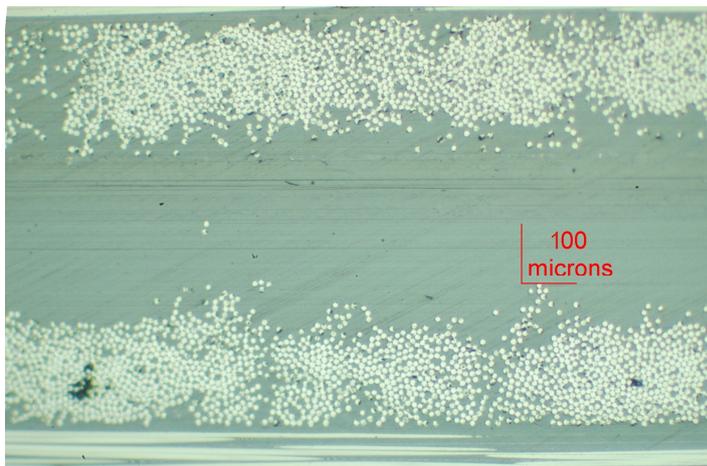


FIG. I.12: Régime de soudage établi.

4. Le procédé se termine lorsque la sonotrode quitte l'assemblage. Il n'y a alors plus de vibrations de l'ensemble. Le refroidissement de l'interface se fait de manière naturelle. Puisque la sonotrode n'applique plus d'effort de compression entre les deux plaques, seuls les rouleaux presseurs peuvent assurer le contact intime jusqu'au refroidissement de l'assemblage.

**Avantages** L'innovation dite "dynamique" permet d'ouvrir de nouvelles perspectives au procédé. Outre le fait qu'elle permette d'obtenir des pièces assemblées finies, elle peut être appliquée à de grandes pièces complexes puisque la sonotrode ne fait que suivre un

chemin de soudure. Ceci permet de s'affranchir de la limite du procédé dit "statique", pour lequel une sonotrode spécifique est nécessaire pour chaque géométrie de soudage. De plus, la tenue mécanique des assemblages soudés en continu permettrait d'utiliser ce procédé pour l'assemblage de pièces de structure.

**Bilan** Vis à vis des différentes possibilités existantes, le procédé de soudage par ultrasons est simple à mettre en œuvre, rapide et économique. Bien qu'il soit connu dans l'industrie des polymères depuis quelques dizaines d'années, l'innovation consistant à déplacer la sonotrode le rend tout à fait novateur. L'application à des pièces complexes peut être envisagée. De plus la qualité de soudure obtenue permettrait de souder des pièces de structures nécessitant une bonne tenue mécanique de l'assemblage.

Aujourd'hui, la détermination des fenêtres procédés optimales ne se fait encore qu'à l'aide de campagnes d'essais exhaustives. L'objectif de cette étude est donc de mieux cerner les liens entre paramètres procédés et qualité du soudage. Une modélisation du procédé permettrait d'investiguer ces différents liens. Elle ne peut se faire sans une étape préalable de compréhension des phénomènes physiques.

## 2 Position de l'étude

Une modélisation complète directe du procédé qui décrirait à la fois la physique de la plaque de composite et l'évolution au niveau du directeur d'énergie est trop complexe. De plus, elle serait peu pertinente puisqu'elle ne permettrait pas d'analyser de manière isolée les différents phénomènes ayant lieu aux différentes échelles.

### 2.1 Echelle de travail

Dans cette section sont présentées deux approches possibles en fonction de l'échelle d'observation retenue (cf. fig. 1 (p. 3)).

#### 2.1.a Définitions

Nous définissons d'abord l'*approche structure* qui se situe à l'échelle de la plaque de composite. A cette échelle macroscopique, l'outillage et la géométrie des plaques et de l'assemblage doivent être pris en compte. Nous définissons d'autre part l'*approche mésoscopique* à l'échelle d'un directeur d'énergie. Cette approche, retenue dans cette étude, se concentre sur la zone soudée.

### 2.1.b Apports potentiels

Dans une approche structure, les outils de mécanique des structures peuvent être mis à profit pour décrire les flexions dans les plaques ou les modes de vibration en fonction des efforts de l'outillage. Une telle approche peut alors aider à concevoir l'outillage en fonction de la géométrie des pièces à assembler, du recouvrement ou du type de stratifications. D'autre part, ce n'est qu'à l'aide d'une approche structure que les contraintes ou déformations résiduelles induites par le procédé peuvent être déterminées.

Cette étude *macroscopique* sera également utile pour caractériser la qualité d'un assemblage soudé. En effet, ce sont bien des critères macroscopiques tels que la résistance en cisaillement ou le taux de restitution d'énergie qui sont nécessaires pour le dimensionnement et la conception. Néanmoins, cette approche présente des limites.

### 2.1.c Limites

Dans cette approche structure, seul un modèle empirique permettrait de décrire l'influence thermique et mécanique du passage de la sonotrode. Un tel modèle empirique ne peut être validé qu'à l'aide d'une campagne d'essais. C'est en effet à l'échelle mésoscopique du directeur d'énergie que les conditions mécaniques et thermiques induites par le passage de la sonotrode peuvent être modélisées de manière plus fidèle. Par exemple, la production de chaleur, suffisante pour fondre l'ensemble de l'interface, est probablement fortement liée à la géométrie des directeurs et de leur écoulement. Seule une approche mésoscopique peut donc permettre de comprendre l'influence de la géométrie de ces directeurs.

D'autre part, la qualité de la soudure ne peut être discutée qu'à l'aide de considérations mésoscopiques. En effet, c'est l'étude de l'écoulement dans la zone soudée qui permet de prédire l'adhésion, la porosité ou la cristallinité de l'interface discutées section 1.1.

Enfin, l'influence du matériau sur la qualité de la soudure reste un point clef. Seule une description pertinente de l'échauffement peut apporter des éléments d'explications. Une fois encore, elle n'est possible qu'en adoptant une approche mésoscopique et en se concentrant à l'échelle de la zone soudée.

Finalement une étude locale de l'interface est donc indispensable pour caractériser la qualité de l'adhésion.

TAB. I.1: Masses molaires pour les deux grades de PEEK, Victrex

Grade	Masse molaire en poids (g/mol)	Masse molaire en nombre (g/mol)	Indice de polydispersité
G151	75900	28700	2,6
G450	106900	37000	2,9
Écart relatif	40%	30%	10%

## 2.2 Essais préliminaires

L'étude expérimentale préliminaire proposée dans cette section permet de confirmer la complexité des phénomènes physiques ayant lieu dans la zone de soudage et la nécessité d'une étude spécifique à cette échelle.

Des plaques d'APC2 (Aromatic Polymer Composite 2) ont été soudées à l'aide du démonstrateur d'EADS IW présenté section 1.3.b. Ce matériau composite est constitué de fibres de carbone AS4, et d'une matrice de PEEK. Il présente des propriétés intéressantes en termes de résistance mécanique mais aussi en termes de résistance thermique et chimique. Ces bonnes propriétés en font un matériau prometteur pour des applications aéronautiques telles que des éléments de structure ou des réservoirs à carburant.

### 2.2.a Le matériau

**Matrice** Il existe différents grades de PEEK. La longueur des chaînes, et donc la masse moléculaire, peut varier énormément d'un grade à l'autre. Il en découle des variations de propriétés mécaniques ou de cristallisation. Néanmoins, comme l'explique Nicodeau [Nicodeau, 2005], le fournisseur de préimprégné ne donne pas le grade exact du PEEK utilisé mais deux bornes extrêmes récapitulés dans le tableau I.1

**Préimprégné** Le composite thermoplastique utilisé est livré par Cytex sous forme de bandes de préimprégné unidirectionnel. Les bandes utilisées ont une épaisseur d'environ 0,13 mm. Comme le montre la micrographie I.13, les fibres sont majoritairement situées au milieu de la bande et une couche de matrice est généralement surabondante sur la surface des bandes. Cette inhomogénéité est due au mode d'imprégnation des mèches de fibres. Elle permet accessoirement d'améliorer l'adhésion inter-laminaire lors de la fabrication des pièces. Ce type de préimprégnés étant utilisé depuis récemment seulement dans l'industrie, le fournisseur ne communique pas tous les détails concernant les composants utilisés.

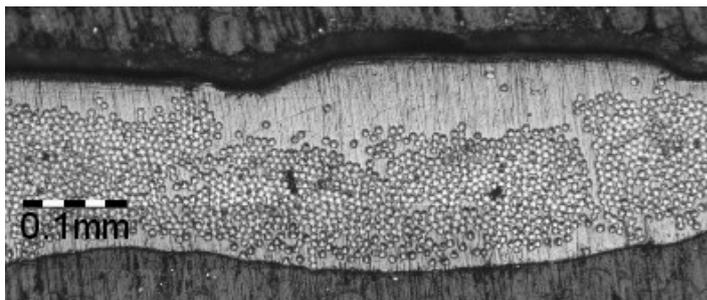


FIG. I.13: Micrographie d'une bande de préimprégné.

TAB. I.2: Fabrication des plaques Carbones / PEEK

Consigne température	410°C
Temps chauffage	150 mn
Temps palier	30 mn
Temps refroidissement	150 mn
Consigne pression	chauffage : 14 bar refroidissement : 35 bar
Empilement quasi-iso	$[90, -45, 0, 45, 90, -45, 0, 45]_s$
Dimension des plis	$303 \times 303 \text{ mm}^2$
Epaisseur d'un pli	0,136 mm
Epaisseur totale	2,18 mm

De nombreux auteurs ont effectué des campagnes d'essai pour déterminer les propriétés du matériau. Un récapitulatif des propriétés matériau du PEEK et de l'APC2 est donné en annexe F (p. 205).

### 2.2.b La fabrication des plaques

Afin d'effectuer une soudure type sur le démonstrateur, des plaques de composites ont été fabriquées.

**Empilement** Les plaques sont obtenues par empilement de seize bandes, de façon à obtenir un stratifié quasi-isotrope. La consolidation est effectuée en étuve sous vide, afin de réduire la porosité inter-laminaire. Le récapitulatif de la fabrication est donné tableau I.2.

**Dimensions et applications** Les plaques fabriquées sont de dimensions relativement réduite. Elles ne servent qu'à effectuer les essais de soudure. Les plaques utilisées ont une dimension de  $300 \times 300 \text{ mm}^2$  et sont ensuite découpées en une série d'éprouvette permettant de souder sur une longueur suffisante pour atteindre le régime permanent. L'épaisseur des éprouvettes est d'environ 2 mm.

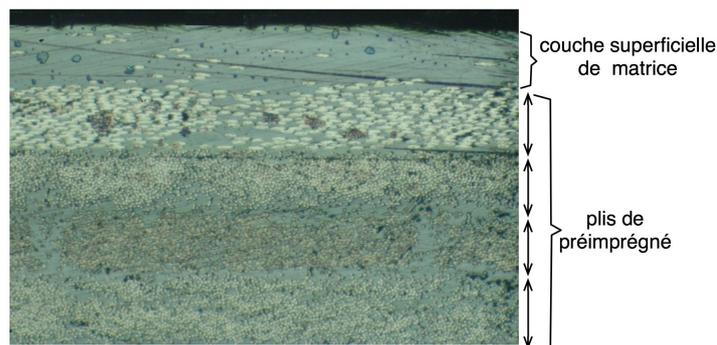


FIG. I.14: Couche superficielle de PEEK.

### 2.2.c Le moulage des directeurs

**Couche superficielle de PEEK** Au dessus des bandes de préimprégné empilées, on dispose un film de matrice PEEK pure de  $80\ \mu\text{m}$  d'épaisseur. Après consolidation, la plaque stratifiée présente donc une couche superficielle de matrice visible sur la figure I.14. Cette couche a deux utilités. D'une part elle permet d'améliorer l'adhésion puisqu'elle assure une présence suffisante de polymère et évite donc l'assèchement des fibres en surface. D'autre part elle permet de mouler les directeurs d'énergie qui sont constitués de matrice seule.

**Dimensions des directeurs** Les directeurs d'énergie sont moulés sur la plaque au moment de la fabrication. Pour ce faire, le moule supérieur est usiné. Lors de la mise en température, une partie de la matrice située dans la couche superficielle remplit le moule et constitue ainsi les directeurs d'énergie. Les directeurs d'énergie sont des prismes dont l'axe est perpendiculaire à la direction des fibres du dernier pli. Ceci permet de s'assurer qu'aucune fibre ne migre dans un directeur, comme le montre la photographie I.15, où les directeurs sont blancs donc vraisemblablement vierges de fibre de carbone. On note que les directeurs sont très espacés et ne représentent qu'une section d'environ 20% de la surface de soudage.

La fabrication de ces éprouvettes est différente des procédés utilisés industriellement. Les éprouvettes réalisées permettent simplement d'effectuer des essais de soudage "statique" et continu. L'objectif étant de caractériser la qualité du soudage.

## 2.3 Analyse de la zone soudée

Une simple observation visuelle, éventuellement microscopique, des assemblages soudés, permet de tirer des premières conclusions sur le procédé.

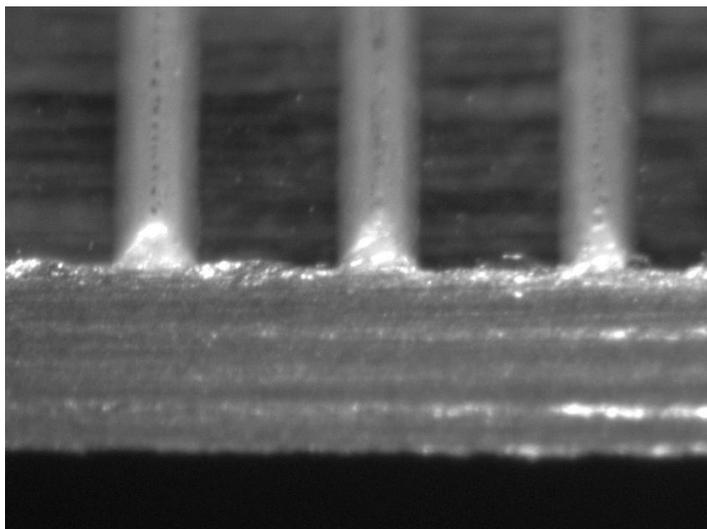


FIG. I.15: Les directeurs d'énergie.

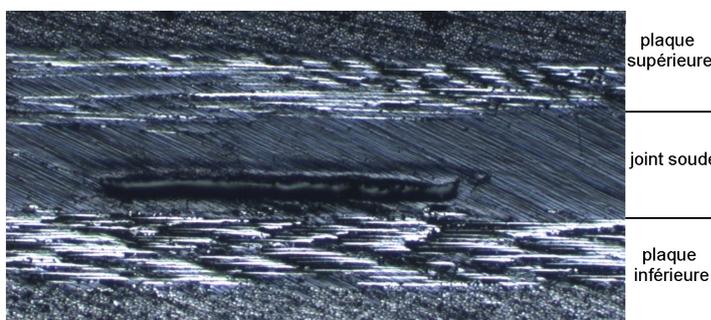


FIG. I.16: Dans le procédé statique, une bulle d'air persiste à l'interface

### 2.3.a Procédé "Statique"

Quelques éprouvettes ont été soudées à l'aide du procédé dit "statique". Ces essais ont été effectués à Sonimat avec l'aide d'Eric Violleau. La zone soudée de ces éprouvettes a une dimension de  $15 \times 20 \text{ mm}^2$

**Vide** Une observation de l'interface soudée après essai (figure I.16) montre qu'un vide persiste après soudure au niveau de l'interface. Une explication plausible est que l'air emprisonné entre les deux directeurs d'énergie ne peut s'échapper et reste donc bloqué à l'interface où il forme une bulle.

**Détérioration de la plaque** Afin d'essayer de faire disparaître cette macro-porosité à l'interface, un essai prolongé a été effectué. Il ne permet pas de faire disparaître cette bulle. Au contraire, plutôt que d'améliorer l'écoulement du directeur à l'interface, l'énergie apportée par la sonotrode est dissipée au sein de la plaque supérieure. Ceci entraîne sa détérioration, visible sur la figure I.17.

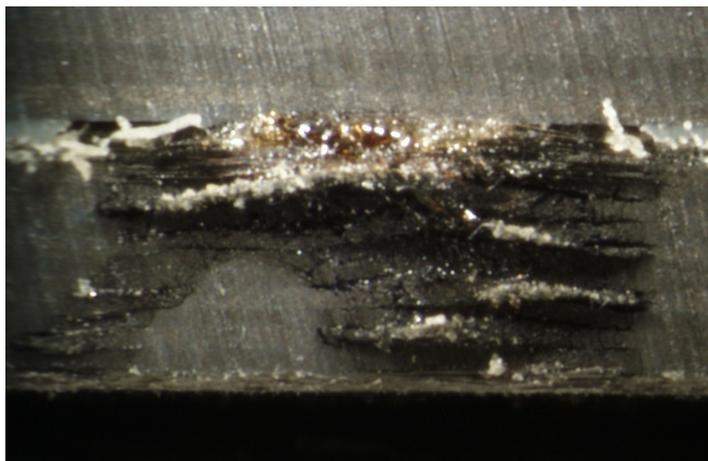


FIG. I.17: Détérioration de la plaque lors d'un essai prolongé.

Finalement le procédé de soudage “statique” ne permet pas de refermer complètement l'interface. La zone d'air contenue entre les directeurs est réduite mais n'est pas supprimée complètement. Le procédé permet par contre d'assurer l'étanchéité pour peu que les directeurs d'énergie soient moulés de manière continue. Ceci explique son utilisation dans le domaine des emballages. Par contre, la présence de ces bulles d'air est néfaste pour les propriétés mécaniques de l'assemblage. C'est pourquoi le procédé “statique” n'est pas applicable pour l'assemblage structurel.

### 2.3.b Procédé “Dynamique”

**Écoulement tridimensionnel** Un essai arrêté de soudage dynamique a été effectué. En supposant que l'écoulement après décollement de la sonotrode est très limité, nous pouvons considérer que la morphologie de l'interface solidifiée est identique à l'écoulement durant le régime permanent. Dès lors, une série de coupes micrographiques permet de reconstituer la géométrie de l'écoulement durant cette phase de régime permanent. Le schéma I.18 récapitule cette géométrie. L'écoulement est tridimensionnel et permet à la bulle d'air qui était emprisonnée dans le procédé “statique” de s'échapper.

La micrographie I.12 (p. 22) montre effectivement qu'aucun vide n'est présent à l'interface après soudure.

**Effet de flexion de la plaque** De plus, la figure I.19 montre bien que la fusion du directeur commence avant le passage de la sonotrode.

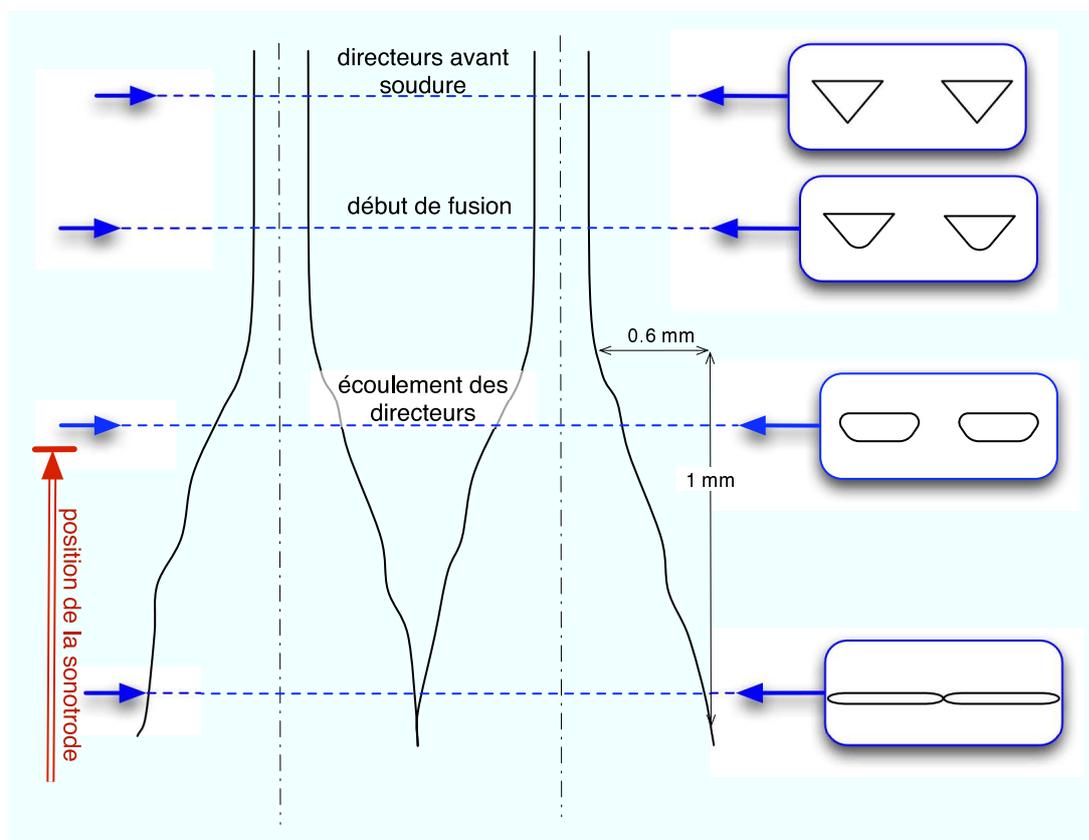


FIG. I.18: Morphologie de l'écoulement des picots à l'interface.

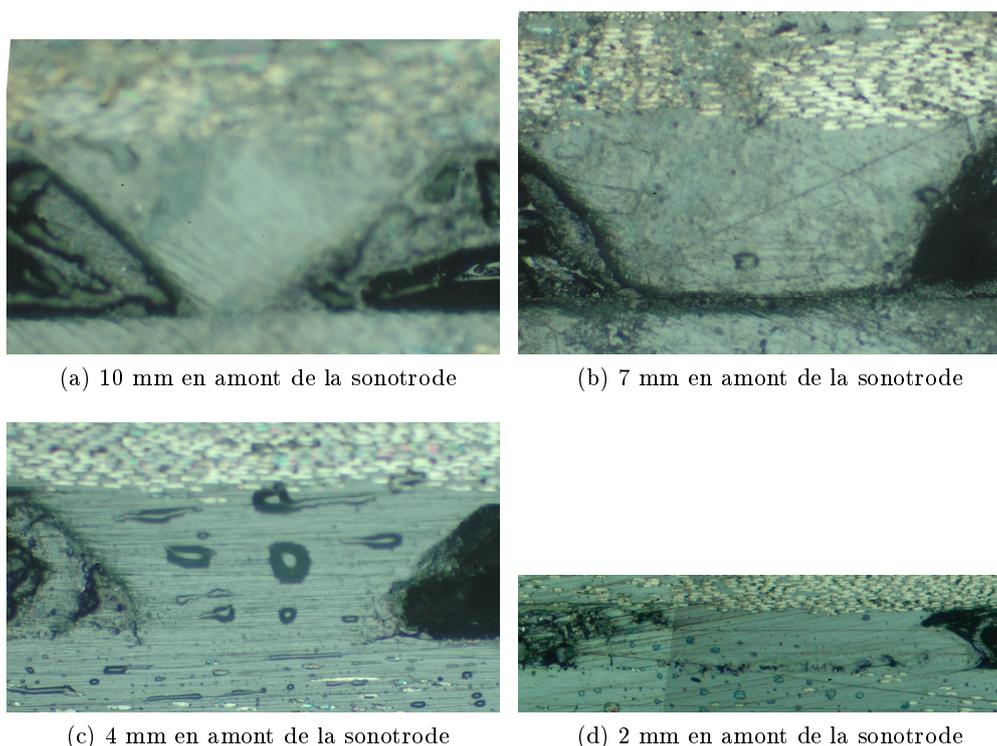


FIG. I.19: Picot en cours de fusion.

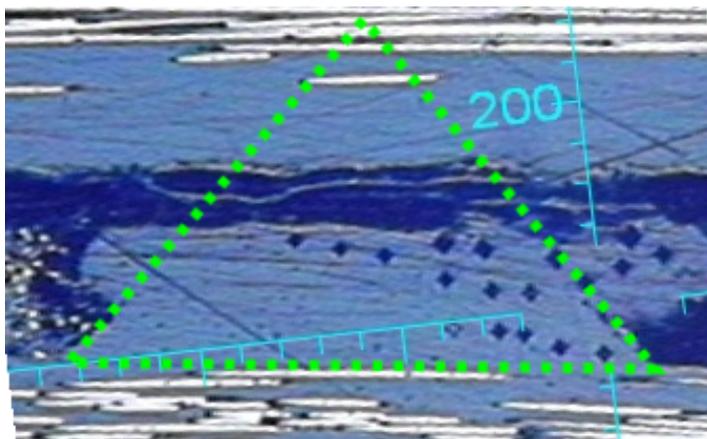
La rigidité de la plaque supérieure permet en effet d'appliquer une déformation au directeur en amont de la sonotrode.

**Rupture dans la plaque** Des essais de tractions effectués sur des éprouvettes soudées confirme la tenue mécanique des assemblages soudés. En effet, pour certains essais, la rupture ne s'est pas faite au niveau de l'assemblage, mais par délaminage des premiers plis de l'une des plaques.

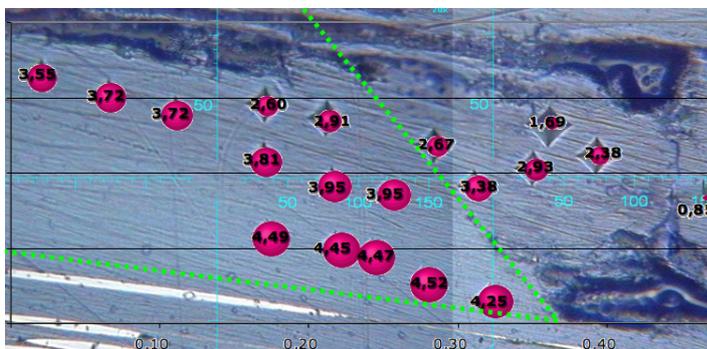
### 2.3.c Analyse mécanique par micro-indentation

Des essais de micro-indentation à l'aide d'une pointe Vickers donnent des informations sur l'écoulement à l'interface à une échelle plus fine. La force appliquée et le déplacement de l'indenteur sont mesurés durant tout l'essai d'indentation. A l'aide des premiers points de mesures durant la décharge, des informations sur l'élasticité du matériau sont obtenus. La méthode de Oliver et Pharr [Oliver et Pharr, 1992, Pharr et al., 1992, Sneddon, 1965] permet de calculer un module élastique équivalent.

**Amorce de fusion** Par exemple sur un échantillon obtenu par essai interrompu, une coupe est effectuée à la position où le directeur commence à fondre, figure I.20a. La



(a) Vue générale.



(b) Zoom et modules mesurés (GPa).

FIG. I.20: Indentation de l'échantillon à l'amorçage du procédé.

figure I.20b est une cartographie de modules équivalents mesurés de manière locale par micro-indentation.

Les modules mesurés sur les parties fondues sont plus faibles que dans la masse du directeur. Ceci est dû à une différence de cristallinité. Le picot, fabriqué par moulage, a subi un cycle thermique lent et a donc une cristallinité élevée. La partie fondue, par contre, a refroidi très vite dans cet essai arrêté. Elle est donc davantage amorphe et plus souple. Le refroidissement rapide de la partie fondue dans cet essai est confirmé par le faible volume de polymère fondu. L'inertie thermique est donc moindre.

La micro-indentation est donc un moyen expérimental qui permet d'obtenir des informations sur l'histoire thermique du matériau. Dans le cas présent, cette méthode permet de conclure que la fusion est rapidement amorcée en pointe de directeur puisque les cristaux ont effectivement disparu.

**Durant la soudure** Une cartographie du module équivalent, effectuée sur une coupe d'un directeur dans un stade plus avancé de fusion, confirme les résultats précédents (cf. fig. I.21). Les parties fondues ont un module plus faible que les parties restées intactes

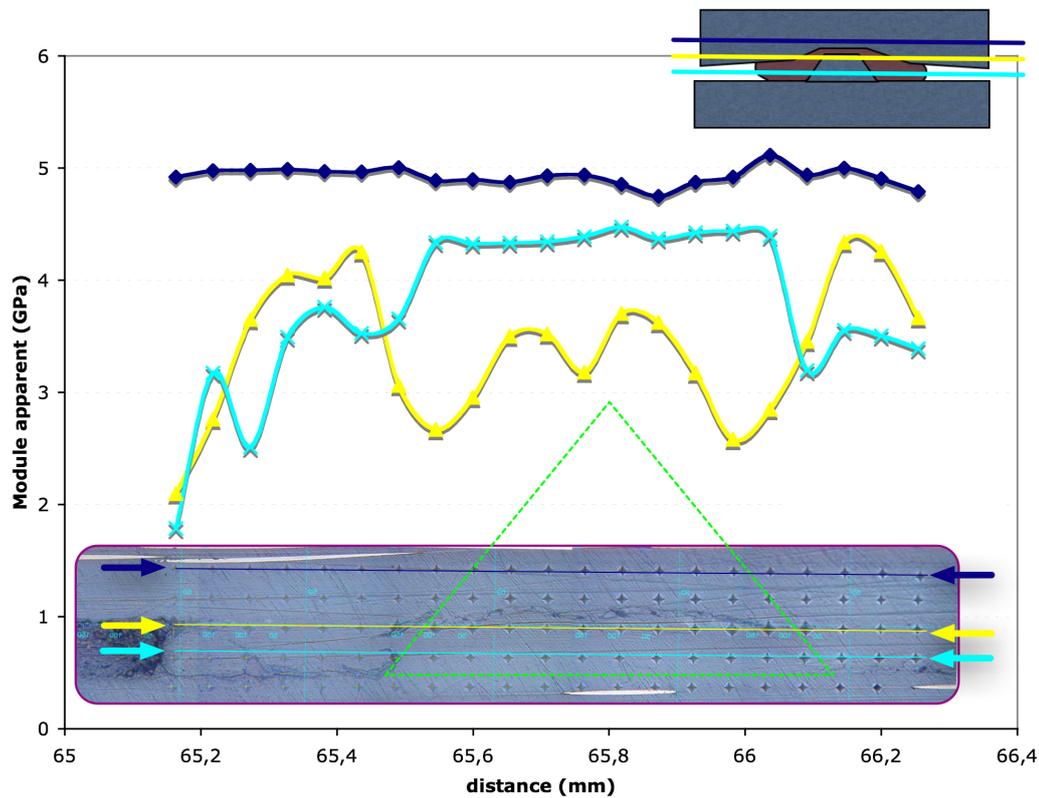


FIG. I.21: Indentation de l'échantillon après fusion du directeur.

dans le directeur ou dans les plaques inférieure ou supérieure. La température de fusion a donc bien été atteinte dans les zones déformées.

**Après soudure** Une coupe de l'échantillon soudé en continu, après passage de la sonotrode, a également été analysée. On observe sur la ligne de micro-indentation de la figure I.22, que la valeur du module équivalent est uniforme le long de l'interface soudée. Les quelques points singuliers sont liés à des défauts tels qu'inclusions ou porosités, visibles sur la micrographie. L'ensemble de l'interface est donc dans le même état cristallin, elle a complètement fondu. En particulier, les directeurs initiaux (matérialisés par les pointillés verts) ont également fondu à la fin du procédé. On peut également noter que la valeur du module mesuré, de l'ordre de 4 GPa, est plus élevée que les modules mesurés dans les parties fondues à l'amorce du procédé (figure I.20b) qui sont plutôt de l'ordre de 2,5 GPa. L'interface soudée en fin d'essai est donc plus cristalline.

Bien que les essais de micro-indentation donnent quelques informations locales sur l'histoire thermique qu'a subi le matériau, une étude plus poussée serait nécessaire pour analyser la cristallinité de l'interface. Des moyens de DSC, ou de mesure de diffraction par rayon X sont à envisager.

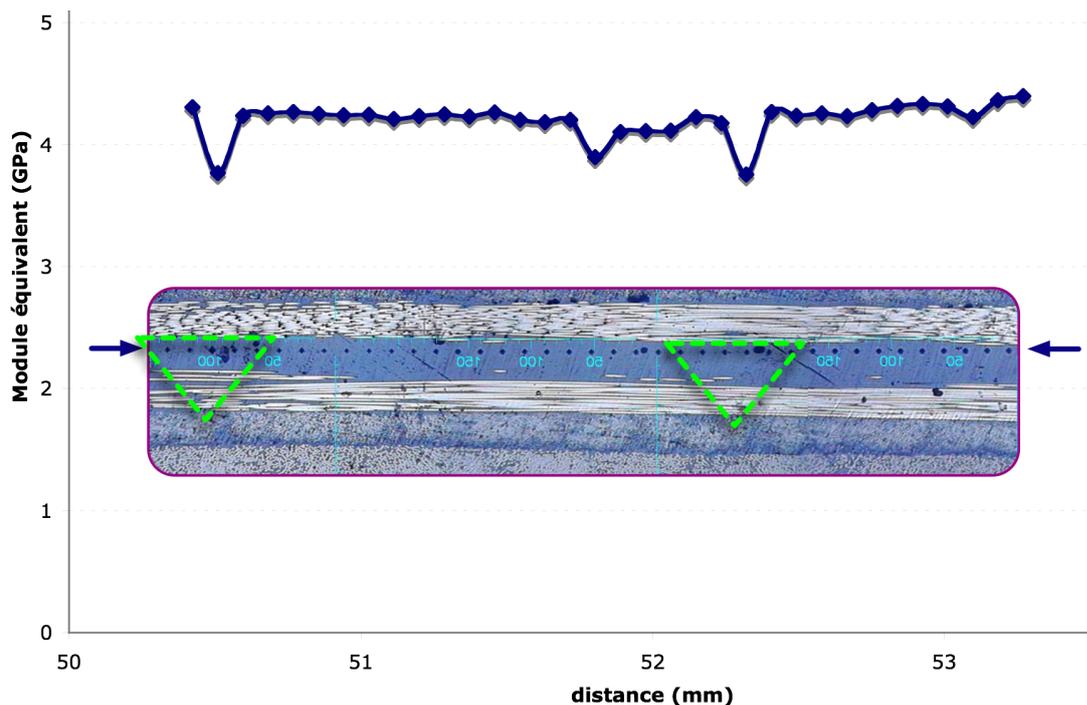


FIG. I.22: Indentation de l'échantillon après soudure.

Cette étude préliminaire montre que les phénomènes physiques à l'interface tels que l'écoulement, la thermique ou la cristallisation sont complexes. Ces considérations confortent l'intérêt d'une étude à l'échelle mésoscopique pour analyser la qualité de la soudure. Cette approche mésoscopique ne s'intéresse qu'au directeur d'énergie et à son voisinage.

### 3 Phénomènes physiques en jeu et ordres de grandeurs

Lors du passage de la sonotrode, de nombreux phénomènes physiques ont lieu dans la zone de soudage. Quelques auteurs ont déjà proposé une modélisation du procédé "statique". Benatar et Grewell [Benatar, 1987, Grewell et al., 2003] analysent le procédé en cinq étapes :

1. Une étude de la mécanique et des vibrations dans les plaques. Cette étude s'insère donc dans ce que l'on a déjà identifié comme l'approche macroscopique.
2. Une description du terme de chauffage comme dissipation viscoélastique, qui sera discuté dans le présent travail.
3. Une modélisation des transferts thermiques.
4. Une analyse de l'écoulement à l'interface. Écoulement qui est primordial sur la qualité de l'adhésion.

5. Une détermination de l'adhésion à l'aide de considération sur la diffusion des chaînes macromoléculaires. Nous avons déjà présenté ces considérations dans la section 1.1.b

Cette vision est assez globale mais cette analyse à l'aide d'étapes successives est quelque peu restrictive par rapport à la physique réelle où tous ces phénomènes sont simultanés. Nous retiendrons toutefois l'analyse du terme d'auto-échauffement. D'autres auteurs tels que Tolunay [Tolunay et al., 1983], Wang *et al.* [Wang et al., 2006] ou Suresh *et al.* [Suresh et al., 2007] modélisent aussi l'auto-échauffement à l'aide de la théorie de la viscoélasticité. Néanmoins, nul n'a proposé de modéliser simultanément l'écoulement du directeur et la vibration ultrasonore.

Afin de justifier la modélisation retenue par la suite, cette section présente les différents phénomènes physiques ayant lieu à l'interface. Ils peuvent être regroupés dans deux grandes phases : une phase de chauffage et d'écoulement puis une phase de refroidissement. L'application de modèles simplifiés permet de dégager des ordres de grandeur et de déterminer les phénomènes prépondérants.

### 3.1 Thermique

A l'aide de modèles thermiques simples, les ordres de grandeurs de l'histoire thermique de l'interface peuvent être dégagés.

#### 3.1.a Le chauffage

En premier lieu, l'ordre de grandeur de l'augmentation de température dans les picots est évalué. En effet c'est ce chauffage au niveau de l'interface qui permet le soudage des deux plaques.

**Ordre de grandeur** L'étude préalable 2.3 a montré que l'ensemble de l'interface a fondu durant le procédé. La durée du procédé étant d'environ 1s, l'augmentation de température à l'interface est de l'ordre de :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} \sim 300 \text{ K/s.} \quad (\text{I.13})$$

La puissance  $\mathcal{P}$  dissipée à l'interface peut être minorée en considérant un chauffage adiabatique des directeurs d'énergie :

$$\mathcal{P} \gtrsim \rho c \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (\text{I.14})$$

où  $\rho c$  est la capacité calorifique spécifique du PEEK. Les valeurs de la littérature [Cogswell, 1992, Ageorges et al., 1998b, Nicodeau, 2005] donnent environ  $\rho c \sim 2.10^6 \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$ . Ce qui nous permet d'évaluer le terme source à l'interface à :

$$\mathcal{P} \gtrsim 6.10^8 \text{ W/m}^3. \quad (\text{I.15})$$

**Chauffage adiabatique** Approximons le terme de diffusion de chaleur dans la plaque de composite par  $k_t \Delta \theta / L^2$  où  $k_t \sim 0,7 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  est la conductivité thermique transverse du composite [Ageorges et al., 1998b, Nicodeau, 2005],  $\Delta \theta = \theta_f - \theta_0 \sim 300 \text{ }^\circ\text{C}$  est une variation de température caractéristique de l'interface et  $L \sim 3 \text{ mm}$  est l'épaisseur d'une plaque de composite. On obtient une puissance diffusée de l'ordre de  $8.10^7 \text{ W/m}^3$ . En première approximation, le chauffage de la zone soudée est donc adiabatique.

**Approche viscoélastique** Afin de décrire l'échauffement du directeur de manière plus fidèle, la plupart des auteurs [Tolunay et al., 1983, Benatar et Gutowski, 1989, Benatar et al., 1989, Nonhof et Luiten, 1996, Suresh et al., 2007] utilisent une loi de comportement viscoélastique linéaire. Néanmoins, la sonotrode ayant une amplitude de déplacement de  $20 \text{ }\mu\text{m}$  et la hauteur du directeur étant d'environ  $300 \text{ }\mu\text{m}$ , sa déformation est de l'ordre de 10%. Elle est donc relativement grande et l'utilisation d'une loi de comportement linéaire peut sembler peu pertinente pour décrire l'influence de la vibration de la sonotrode sur le directeur. Cette loi linéaire permet toutefois de tirer un ordre de grandeur de l'échauffement. Sous l'hypothèse des petites perturbations, si la déformation  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ , le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  vaut :

$$\mathbf{D} = \dot{\varepsilon} = \omega \varepsilon_0 \cos(\omega t), \quad (\text{I.16})$$

et la loi de comportement viscoélastique linéaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = E' \varepsilon_0 \sin(\omega t) + E'' \varepsilon_0 \cos(\omega t) \quad (\text{I.17})$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}$  est le tenseur des extra-contraintes. Si la pression ne travaille pas, le travail mécanique dissipé à chaque cycle ultrasonore de période  $\kappa$  s'écrivant :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\kappa} \int_0^\kappa \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} dt \quad (\text{I.18})$$

on obtient la dissipation d'énergie mécanique :

$$\mathcal{P} = \frac{E'' \omega}{2} \varepsilon_0 : \varepsilon_0. \quad (\text{I.19})$$

Les valeurs de  $E''$  à 20 kHz étant de l'ordre de  $E'' \sim 10^8$  Pa (cf. annexe F.2.a) et la déformation équivalente  $\varepsilon_0$  de l'ordre de 10%,

$$\mathcal{P} \sim 10^{10} \text{ W/m}^3. \quad (\text{I.20})$$

Finalement, cette dissipation est plus importante que les valeurs attendues dans le procédé (I.15). Plusieurs hypothèses permettent d'expliquer cette différence.

- D'abord les déformations ne sont pas uniformes. Une analyse spatiale est donc nécessaire pour décrire ce terme source.
- Ensuite, le déplacement que subit le directeur n'est pas le déplacement de la sonotrode (cf. section 1.3.a (p. 19)).
- Enfin, l'échauffement du directeur n'est probablement pas adiabatique. L'équation I.15 donne bien une borne inférieure.

### 3.1.b Temps de refroidissement

Après la phase d'échauffement dont les ordres de grandeur viennent d'être dégagés, la phase de refroidissement s'opère. La chaleur diffuse de la zone soudée vers les plaques de composites qui agissent comme des puits thermiques. Un temps caractéristique de refroidissement  $t_{ref}$  est alors donné par le temps de diffusion de la chaleur dans l'épaisseur de la plaque de composite :

$$\begin{aligned} t_{ref} &\sim L^2 \frac{\rho c}{k_t} \\ t_{ref} &\sim 3 \text{ s.} \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

La vitesse de refroidissement est donc de l'ordre de 100 K/s.

## 3.2 Écoulement à l'interface

Une fois que la température est suffisante, le directeur d'énergie commence à s'écouler. Il passe d'une forme triangulaire à un film à l'interface. Cette section vise à dégager des ordres de grandeur caractéristiques de cette déformation.

### 3.2.a Écrasement d'un lopin

En considérant le procédé "statique", le directeur initialement triangulaire est soumis à une compression. Cette déformation peut être modélisée de manière simplifiée par le cas d'école de l'écrasement lubrifié présenté sur la figure I.23. Le cinématique dans le

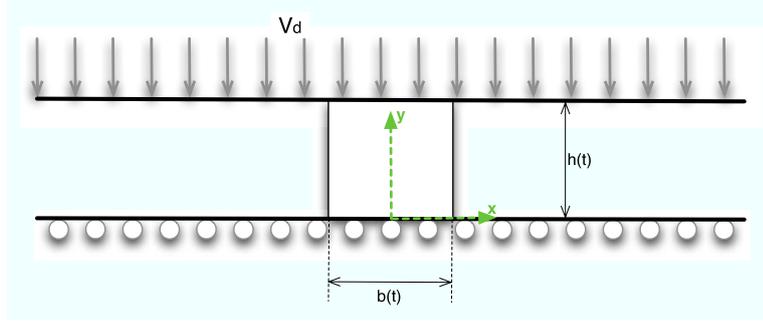


FIG. I.23: Géométrie du problème d'écrasement d'un lopin.

rectangle est homogène et s'écrit à l'aide de la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  :

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{V_d}{h}x \\ v_y &= \frac{V_d}{h}y \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

où  $h$  est la hauteur du directeur. D'autre part, l'incompressibilité permet d'écrire :

$$b \cdot h = b(t=0)h(t=0). \quad (\text{I.23})$$

En considérant une loi de comportement de fluide newtonien, la dissipation d'énergie mécanique  $\mathcal{P}$  due à l'écrasement du lopin s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \eta \mathbf{D} : \mathbf{D} \\ &= 2\eta \left( \frac{V_d}{h} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

et la force linéique  $\mathbf{F}$  nécessaire pour appliquer la condition d'écrasement  $V_d$  est :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -b \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_y \\ &= -\eta b(t=0)h(t=0) \frac{V_d}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

### 3.2.b Ordres de grandeur

En considérant les soudages statiques effectués dans l'étude préliminaire 2.2, l'effort linéique par directeur d'énergie vaut :

$$F = 18.10^3 \text{ N/m} \quad (\text{I.26})$$

Dans le cas hypothétique de directeurs initialement carrés de dimension :

$$h(t=0) = 300 \mu\text{m}, \quad b(t=0) = 300 \mu\text{m}, \quad (\text{I.27})$$

et pour une viscosité newtonienne :

$$\eta = 10^4 \text{ Pa} \quad (\text{I.28})$$

qui est la valeur obtenue par Nicodeau [Nicodeau, 2005] et Lamèthe [Lamethe, 2004] à 340 °C, la vitesse d'écrasement initiale  $V_d(t = 0)$  vaut :

$$V_d(t = 0) = 0,1 \text{ m/s} \quad (\text{I.29})$$

Pour des températures proches de la température de fusion, la vitesse d'écrasement du directeur est donc très rapide. Néanmoins, les essais statiques effectués montrent que l'écrasement se fait en environ 1 s. Cette différence confirme que la phase d'échauffement est couplée à la phase d'écrasement. La vitesse d'écrasement est en effet plutôt de l'ordre de :

$$V_d(t = 0) \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}. \quad (\text{I.30})$$

### 3.2.c Effets sur la thermique

En prenant une vitesse d'écrasement de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ , la puissance dissipée (équation (I.24)) est d'environ :

$$\mathcal{P} \sim 2 \cdot 10^4 \text{ W/m}^3. \quad (\text{I.31})$$

La dissipation d'énergie mécanique due à l'écrasement du directeur d'énergie est donc négligeable par rapport à la dissipation d'énergie due aux vibrations de la sonotrode (équation (I.20)).

### 3.2.d Effet 3D

Dans le procédé continu, l'écoulement que subit le directeur d'énergie est tridimensionnel. En se plaçant au niveau de la structure, le passage de la sonotrode peut être comparé à un procédé de calandrage. L'écoulement entre les deux plaques est alors assimilable à un écoulement en couche mince. Les hypothèses de lubrification hydrodynamique sont alors applicables et l'équation de Reynolds, que l'on peut retrouver dans Agassant *et al.* [Agassant et al., 1986], permet une modélisation simplifiée.

Néanmoins dans le cas d'une approche mésoscopique, la simultanéité avec l'écrasement du directeur d'énergie que l'on vient de proposer est à l'origine d'un écoulement tridimensionnel complexe. De plus, l'effet de la température est prépondérant. Dès lors, une étude plus générale des phénomènes thermo-mécaniques de l'écoulement dans la zone soudée est indispensable.

### 3.3 Cristallisation

Comme dans l'analyse mécanique précédente, cette section vise à appliquer des modèles simplifiés pour déterminer les ordres de grandeur des phénomènes de cristallisation dans le procédé.

#### 3.3.a État initial du PEEK

Premièrement, il faut souligner que le PEEK, bien que semi-cristallin, présente une cristallinité maximum peu élevée. Cogswell [Cogswell, 1992] propose une valeur maximale de  $\chi_{max} = 40\%$ . Les effets de la cristallisation sur les propriétés du PEEK, que ce soit thermique ou mécanique ne seront donc pas aussi importants qu'avec des polymères semi-cristallins dont la cristallinité maximum est plus importante (70% pour le PET, par exemple). D'autre part, l'état initial des directeurs d'énergie dépend fortement de l'histoire thermo-mécanique qu'ils ont subi. Suivant le procédé de mise en forme utilisé, les directeurs peuvent donc présenter des cristallinités très différentes. Néanmoins, à l'heure actuelle les procédés de fabrication sont encore relativement lents. Les plaques utilisées dans l'étude préliminaire, par exemple, ont été consolidées à l'aide de cycles thermiques de quelques heures. La cristallinité des directeurs avant le procédé de soudage ultrasons est donc élevée.

#### 3.3.b Cristallisation thermique

**Modèles existants** De nombreux modèles cinétiques permettent de décrire la cristallisation des polymères. Le modèle d'Avrami [Avrami, 1939, Avrami, 1940, Avrami, 1941] s'applique pour un cas isotherme, le modèle d'Ozawa [Ozawa, 1971] pour des rampes de température. Des modèles plus généraux, tels que le modèle de Nakamura [Nakamura et al., 1972, Nakamura et al., 1973], permettent de décrire la cristallisation induite par un cycle quelconque de température. Une étude de la cristallisation thermique du PEEK peut être trouvée dans [Bas et al., 1995, Lamethe, 2004, Nicodeau, 2005].

**Grandes vitesses de refroidissement** L'estimation du refroidissement de l'interface après soudage, effectuée section 3.1.b (p. 37), permet d'évaluer le refroidissement à plus de 100 K/s. Toutefois, la caractérisation de la cristallisation a de telles vitesses de refroidissement est inédite. La DSC ne peut, par exemple, pas être utilisée au dessus de 1 K/s, au risque de voir apparaître des gradients thermiques dans l'échantillon. Une analyse a posteriori, telle que l'analyse par diffraction ou par densimétrie, permettrait de déterminer la cristallisation finale de l'interface. Ce travail est actuellement en cours.

Néanmoins, la vitesse de refroidissement est extrêmement élevée par rapport aux identifications de cinétiques de cristallisation effectuées par Nicodeau [Nicodeau, 2005], Lamèthe [Lamethe, 2004] ou Bas [Bas et al., 1995]. La cristallisation thermique est donc vraisemblablement très faible. De plus, la section 1.1.c montre que la chaleur latente de cristallisation a des effets négligeables sur la thermique.

### 3.3.c Cristallisation induite par la mécanique

Outre la cristallisation thermique, la déformation d'un polymère entraîne des déplacements des chaînes macromoléculaires qui peuvent influencer grandement la vitesse de cristallisation.

La cristallisation des polymères induite par la mécanique fait l'objet de nombreuses études [Chien et Weiss, 1988, Ammar, 2001, Marco, 2003]. Pratiquement, la vitesse de cristallisation peut être augmentée d'un ordre de grandeur par l'écoulement.

**Influence de l'écoulement** Pour le procédé considéré ici, l'ordre de grandeur du taux de déformation équivalent  $D_{eq}^2 = 2\mathbf{D} : \mathbf{D}$  peut être estimé à l'aide des équations (I.24) et (I.30) à :

$$D_{eq} \sim 4 \text{ s}^{-1}. \quad (\text{I.32})$$

D'après les travaux de Chien et Weiss [Chien et Weiss, 1988], la vitesse de cristallisation peut alors être augmentée d'un facteur dix environ. Ceci explique que l'état final de la zone soudée, discuté section I. 2.3.c (p. 33), n'est pas amorphe.

**Influence des vibrations** Les effets de la vibration de la sonotrode sur la cristallisation sont quant à eux inconnus. Le taux de déformation équivalent est élevé du fait de la fréquence élevée des vibrations. Par contre, la déformation elle-même est faible (quelques pourcents), ce qui laisse supposer que la cristallisation induite reste faible. Cette hypothèse est également confortée par le fait que la vibration entraîne des déformations alternées dont l'effet moyen sur la cristallisation est probablement limité. Conscient de la nécessité d'études complémentaires, l'approche retenue par la suite ne considère pas ces effets de cristallisation induite.

Finalement, durant la phase initiale du procédé, où les directeurs chauffent fondent puis s'écoulent, la température de fusion est atteinte très rapidement. Les phénomènes de cristallisation sont donc négligeables. Seule la thermo-mécanique de la zone soudée sera modélisée.

## **Bilan**

Les ordres de grandeurs estimés dans cette section permettent de définir l'approche retenue. La modélisation de la dissipation d'énergie trouvée dans la littérature ne prend en compte que la vibration due à la sonotrode. Néanmoins, l'écoulement entraîne un changement de géométrie du directeur. Ce changement de géométrie influence grandement la dissipation d'énergie et la thermique. C'est pourquoi cette étude propose une modélisation thermo-mécanique de la phase de chauffage et d'écoulement. Le problème mécanique traité est un problème complexe d'écoulement sous vibrations. Il faut néanmoins garder à l'esprit qu'une analyse de la phase suivante de refroidissement sera nécessaire pour la caractérisation de l'adhésion. Ceci à l'aide de considérations microscopiques telles que la diffusion ou la cristallisation.

## Chapitre II

# Proposition de modélisation de l'écoulement à l'interface à l'aide d'une méthode d'homogénéisation temporelle

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Mise en équation</b> . . . . .	<b>44</b>
1.1	Mécanique . . . . .	44
1.2	Thermique . . . . .	48
1.3	Bilan . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Homogénéisation temporelle</b> . . . . .	<b>50</b>
2.1	Deux variables de temps indépendantes . . . . .	52
2.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	53
2.3	Développements asymptotiques . . . . .	57
2.4	Identification . . . . .	58
2.5	Bilan . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Résultats et discussion</b> . . . . .	<b>66</b>
3.1	Cas test uniforme . . . . .	66
3.2	Perspectives d'extension du modèle . . . . .	73
3.3	Modélisation simplifiée . . . . .	75

---

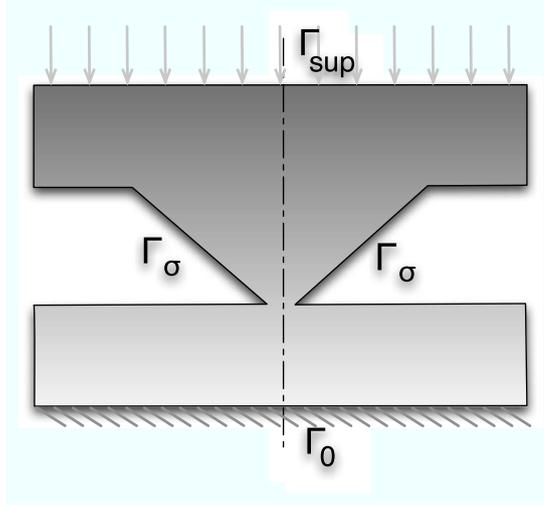


FIG. II.1: Domaine de résolution.

## 1 Mise en équation

Cette partie propose une modélisation de la thermo-mécanique de l'écoulement dans la zone de soudage. L'écriture du problème mécanique va naturellement faire apparaître une condition limite "multi-échelle". Le travail présenté ici fait en grande partie l'objet de l'article [Levy et al., 2010].

**Domaine** L'étude se restreint à un domaine  $\Omega$ , formé du picot et de son voisinage. Ce voisinage est suffisamment grand pour appliquer des conditions limites que l'on suppose connues. Ce domaine est défini sur la figure II.1. Nous appellerons par la suite  $\Gamma = \Gamma_{sup} \cup \Gamma_{\sigma} \cup \Gamma_0$  la frontière du domaine  $\Omega$ .

### 1.1 Mécanique

#### 1.1.a Équilibre mécanique

Comme évoqué à la section I. 1.3.a (p. 18), les plaques composites sont trop fines pour qu'une onde mécanique se propage dans leur épaisseur. A l'échelle des directeurs d'énergie, l'équilibre dynamique est donné par :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot \sigma + f. \quad (\text{II.1})$$

Le terme de force volumique  $f$  ne concerne que la gravité. Il est de l'ordre de :

$$f = \rho g \sim 10^4 \text{ N/m}^3. \quad (\text{II.2})$$

La vitesse  $\mathbf{v}$  dans le directeur d'énergie est la superposition de deux vitesses. La première, due aux vibrations, peut être estimée en considérant que le haut du directeur a le même déplacement que la sonotrode, soit :

$$\|\mathbf{v}_{vib}\| \sim a\omega \cos(\omega t) \sim 3 \text{ m/s}, \quad (\text{II.3})$$

où  $a = 20 \mu\text{m}$  est l'amplitude de vibration de la sonotrode et  $\omega = 2\pi f$  sa pulsation. On trouve :

$$\left\| \rho \frac{d^2 \mathbf{v}_{vib}}{dt} \right\| \sim \rho a \omega^2 \sim 10^8 \text{ N/m}^3. \quad (\text{II.4})$$

La seconde, due à l'écrasement, a été estimée dans l'équation (I.30) à une valeur largement inférieure à  $\|\mathbf{v}_{vib}\|$ . Les effets dynamiques de l'écrasement sont donc naturellement négligeables devant les effets dynamiques de vibration. En considérant un comportement élastique du matériau avec un module d'Young  $E \sim 10^9 \text{ Pa}$  et une déformation due à la vibration de l'ordre de  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\| \sim 0.1$ , le terme  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  peut être approché par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \sim \frac{E \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|}{h} \sim 10^{12} \text{ N/m}^3 \quad (\text{II.5})$$

et donc

$$\left\| \rho \frac{d^2 \mathbf{v}_{vib}}{dt} \right\| \ll \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\|. \quad (\text{II.6})$$

Le système peut être considéré à l'équilibre statique, même pour les grandes vitesses engendrées par la vibration de la sonotrode, à 20 kHz. Les termes de gravité et d'inertie pouvant être négligés, l'équilibre mécanique dans le directeur est régit par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{II.7})$$

*Remarque : Bien que le développement présenté par la suite soit effectué sous cette hypothèse d'équilibre statique, une étude plus générale prenant en compte les termes dynamiques est présentée en annexe B.3*

### 1.1.b Loi de comportement

**Incompressibilité** Le polymère est supposé incompressible se qui se traduit par la condition :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{II.8})$$

Il en résulte que la contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  n'est connue qu'à une contrainte hydrostatique près. La loi de comportement ne permettra de déterminer qu'un tenseur des

extra-contraintes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I} \quad (\text{II.9})$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre 2 et  $p$  est le multiplicateur de Lagrange permettant d'assurer la contrainte d'incompressibilité (II.8).

**Loi de Maxwell** Le chauffage nécessaire au soudage se fait par dissipation d'énergie mécanique. Afin de pouvoir modéliser de manière réaliste cette dissipation, la loi de comportement doit être adaptée. Bien qu'en pointe de directeur, des phénomènes de plasticité puissent apparaître, une loi de comportement visco-élastique semble suffisante, en première approche, pour décrire la vibration du directeur et son écoulement, en particulier lorsqu'il atteint des températures supérieures à la température de transition vitreuse. Cette modélisation viscoélastique est conforme à ce que l'on peut trouver dans la littérature [Benatar et Gutowski, 1989, Benatar et al., 1989, Tolunay et al., 1983, Suresh et al., 2007, Nonhof et Luiten, 1996, Roylance et al., 2004].

Une loi de Maxwell en petite perturbation permet une première modélisation :

$$\lambda \frac{d\boldsymbol{\Sigma}}{dt} + \boldsymbol{\Sigma} = 2\eta \mathbf{D} \quad (\text{II.10})$$

où  $\lambda$  est le temps de relaxation de Maxwell et  $\eta$  est la viscosité de Maxwell. Cette loi idéale est assez peu réaliste mais a l'avantage de pouvoir être généralisée (cf. annexe B.2). D'autre part, l'hypothèse des petites perturbations n'est pas rigoureusement assurée. En effet les déformations dans le directeur sont de l'ordre de 10% pour la vibration mais deviennent bien plus élevées quand l'écrasement a lieu. Néanmoins, dans cette première étude générale, c'est l'hypothèse retenue.

### 1.1.c Conditions aux limites

Pour simplifier l'analyse du problème, le comportement macroscopique des plaques composites et de l'outillage est supposé connu. Les conditions limites sur les frontières supérieure  $\Gamma_{sup}$  et inférieure  $\Gamma_0$  sont donc données.

**Déplacement imposé** Le déplacement est supposé nul sur la frontière inférieure :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Gamma_0) \quad (\text{II.11})$$

et est imposé égal au déplacement de la sonotrode sur la frontière supérieure. Le déplacement de la sonotrode est la superposition de deux déplacements : une oscillation

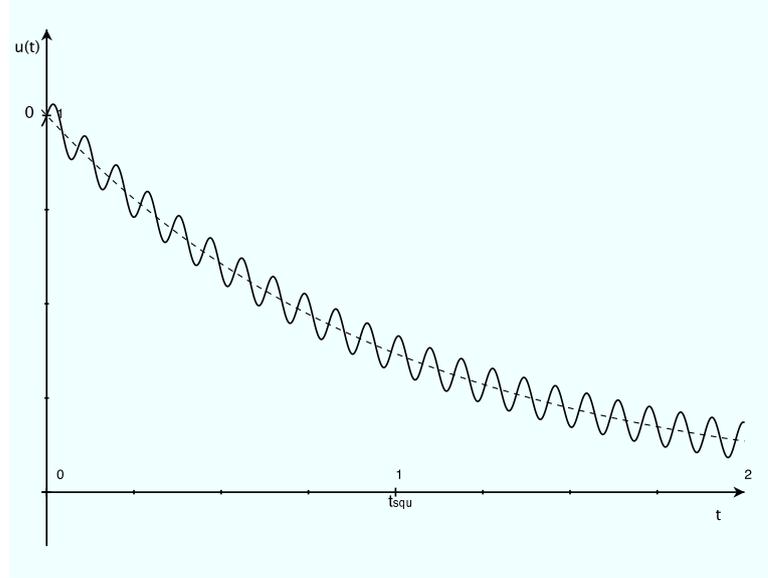


FIG. II.2: Illustration de l'évolution temporelle du déplacement imposé sur  $\Gamma_{sup}$ .

harmonique due à la vibration de la sonotrode et un déplacement lent du à l'écrasement des directeurs (cf. figure II.2) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(t) + \mathbf{a} \sin(\omega t) \quad \text{sur } (\Gamma_{sup}) \quad (\text{II.12})$$

D'autre part la frontière latérale  $\Gamma_\sigma$  est supposée libre :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Gamma_\sigma) \quad (\text{II.13})$$

Pour alléger les écritures, nous définissons la frontière de Dirichlet  $\Gamma_u = \Gamma_0 \cup \Gamma_{sup}$ . En définissant :

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_d = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Gamma_0), \quad (\text{II.14})$$

on peut écrire, de manière générale :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(t) + \mathbf{a} \sin(\omega t) \quad \text{sur } (\Gamma_u). \quad (\text{II.15})$$

**Condition initiale** A l'instant initial, le déplacement est supposé nul et la configuration libre de toute contrainte :

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\Sigma}(t=0) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(t=0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{0} \end{array} \right] \quad \text{sur } (\Omega). \quad (\text{II.16})$$

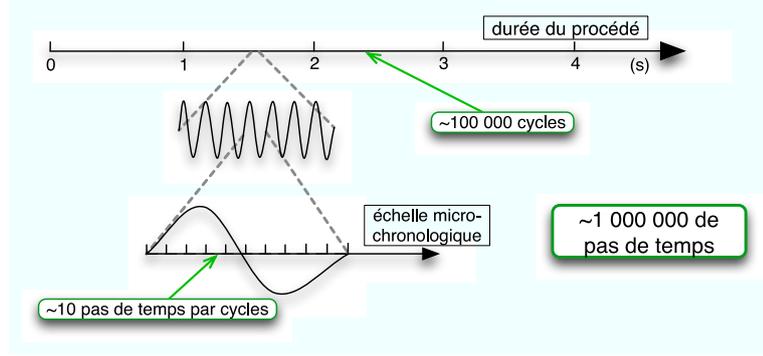


FIG. II.3: Les deux échelles de temps.

### 1.1.d Spécificité de la condition d'écrasement sous vibration

Dans le cadre adopté, le directeur est soumis à une double sollicitation. La condition limite (II.15) fait intervenir simultanément les effets de l'écrasement et de la vibration. Il est important de noter que ceux-ci se font sur deux échelles de temps différentes. Le terme  $\mathbf{u}_d$  est appliqué sur un temps long, qui est le temps total du procédé, tandis que la vibration  $\mathbf{a} \sin(\omega t)$  se fait sur un temps court, lié à la vibration de la sonotrode.

**Verrou** Seule une résolution numérique du problème permettra à terme de prendre en compte les couplages des différentes physiques et l'évolution de la géométrie. L'application de cette double sollicitation dans un cadre de résolution numérique doit donc être envisagée. Mais l'application directe de cette condition limite nécessiterait une discrétisation temporelle suffisamment fine pour décrire chaque cycle ultrasonore. La fréquence ultrasonore étant de 20 kHz, le nombre de pas de temps serait alors de l'ordre de  $10^6$  comme illustré sur la figure II.3. Dans un cadre de résolution classique une telle discrétisation est inenvisageable.

## 1.2 Thermique

Comme montré précédemment, l'écoulement à l'interface et l'évolution de température sont intimement liés. La résolution simultanée des deux problèmes est donc nécessaire. Cette section présente la modélisation thermique que nous avons retenue.

### 1.2.a Bilan énergétique et terme source

De manière classique le bilan énergétique s'écrit :

$$\rho \frac{de}{dt} = \nabla \cdot k \nabla \theta + \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{II.17})$$

où  $e$  est l'énergie interne et  $k$  la conductivité thermique du polymère. En considérant une décomposition de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en une partie élastique et une partie visqueuse, nous pouvons appliquer des concepts de thermodynamique avec variable interne, comme par exemple dans [Lemaître et al., 1996]. En considérant que l'élasticité ne provient que d'effets entropiques, l'équation de la chaleur précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\rho c \frac{d\theta}{dt} = \nabla \cdot k \nabla \theta + \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{II.18})$$

En prenant en compte les effets d'élasticité énergétique, on peut se ramener à une équation de la même forme avec un facteur  $\alpha$ , qui détermine la proportion d'élasticité entropique, devant le terme  $\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}/dt$ . Peters et Baaijens [Peters et Baaijens, 1997] l'utilisent par exemple dans une modélisation d'écoulement visco-élastique thermo-dépendant.

### 1.2.b Conditions aux limites

**Isolation** Le point clef du soudage est l'augmentation de température au niveau de l'interface, due à la dissipation d'énergie mécanique en énergie thermique. Afin de s'assurer qu'aucune quantité d'énergie autre n'est apportée au système par conduction sur la frontière, le domaine  $\Omega$  est considéré comme isolé.

**Taille du domaine** On prend soin de définir une taille de domaine  $\Omega$  suffisamment grande pour que l'augmentation de température localisée au niveau de l'interface ne soit pas influencée par la condition limite d'isolation. En effet, le PEEK ayant une diffusivité thermique d'environ  $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ , en considérant un domaine  $\Omega$  de 3 mm environ, le temps nécessaire pour que la température diffuse dans l'ensemble du domaine est d'environ 10s, bien supérieure à la durée du procédé.

La condition limite thermique s'écrit donc :

$$k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma). \quad (\text{II.19})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à la frontière.

La condition initiale du problème thermique s'écrit :

$$\theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{II.20})$$

## 1.3 Bilan

Le problème thermo-mécanique qui régit l'écoulement à l'interface peut être décrit par les deux problèmes aux limites suivants

– Un problème thermique :

$$\begin{cases} \rho c \frac{d\theta}{dt} = \nabla \cdot k \nabla \theta + \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} & \text{sur } (\Omega) \\ k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

– Un problème mécanique :

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial t} + \boldsymbol{\Sigma} = 2\eta \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{sur } (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } (\Gamma_\sigma) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d(t) + \mathbf{a} \sin(\omega t) & \text{sur } (\Gamma_u) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

présentant une condition limite sur deux échelles de temps. Une méthode d'homogénéisation temporelle est mise à profit pour s'affranchir de cette double échelle.

## 2 Homogénéisation temporelle

Des doubles échelles peuvent apparaître lorsque l'on traite de problèmes de fatigue de structures. Dans un cadre continu de modélisation de l'endommagement, certains auteurs proposent la technique dite du *saut de cycle*. Cette méthode, que l'on retrouve dans le travail de Van-Paepegem *et al* [Van Paepegem et al., 2001] ou Cojocaru et Karlsson [Cojocaru et Karlsson, 2006], consiste à résoudre une fois le problème en temps court pour chaque pas de temps long. La difficulté réside alors dans la détermination du pas de temps macro-chronologique raisonnable et donc du nombre de cycles que l'on peut sauter sans affecter la précision globale. Dans le présent travail, une méthode plus rigoureuse d'homogénéisation temporelle est appliquée.

Les méthodes d'homogénéisation sont d'abord apparues pour traiter le cas de structures hétérogènes présentant une double échelle spatiale. Au début des années 80, Bensoussan Lions and Papanicolaou [Bensoussan et al., 1978], suivis de Sanchez-Palencia [Sanchez-Palencia, 1980], ont considéré un matériau présentant une structure périodique à l'échelle du volume élémentaire représentatif. La solution est alors supposée périodique selon la petite échelle. La solution est recherchée comme un développement asymptotique en puissance de  $\xi$ , le facteur d'échelle. Le problème multi-échelle initial est alors séparé en plusieurs sous-problèmes relativement standards. Francfort et Suquet [Francfort et Suquet, 1986] ont confirmé et étendu les résultats de convergence pour un matériau thermo-visco-élastique.

Contrairement à l'homogénéisation spatiale, une méthode d'homogénéisation temporelle peut être appliquée quand il existe deux échelles de temps séparées dans le problème. En ce qui concerne le problème de fatigue, par exemple, à partir d'un modèle

élastoviscoplastique initial, Guennouni [Guennouni, 1988] obtient deux sous-problèmes : un problème élastique qui décrit les effets micro-chronologiques et un comportement élastoviscoplastique pour le problème homogénéisé macro-chronologique. L'évolution du domaine et la dépendance des paramètres matériaux n'étant pas prises en compte, le problème micro-chronologique ne dépend pas de l'échelle macro-chronologique. Il peut alors être résolu indépendamment une seule et unique fois. Avec les mêmes outils mathématiques, Oskay et Fish [Oskay et Fish, 2004] ont décrit les phénomènes de fatigues à l'aide d'une approche en endommagement. Ils obtiennent deux problèmes micro- et macro-chronologiques et une loi d'évolution de l'endommagement. La validation est ensuite faite sur des cas tests résolus par éléments finis. En pratique, ces approches consistent à résoudre un problème micro-chronologique pour déterminer l'évolution d'un champ spécifique, ici l'endommagement.

Plus proche du procédé ultrasons, Boutin et Wong [Boutin et Wong, 1998] ont traité un problème thermo-visco-élastique. Ils commencent par homogénéiser en espace le problème mécanique. Ensuite ils discutent les cas où l'homogénéisation temporelle peut également être applicable. Enfin ils proposent une homogénéisation temporelle simplifiée qui consiste simplement en un moyennage par période. Ils ne définissent donc pas de développement asymptotique en temps. Pour une homogénéisation complète simultanée en espace et en temps, le lecteur pourra se référer à [Yu et Fish, 2002] qui proposent un développement asymptotique sur deux échelles. Il faudra néanmoins prendre garde à certaines situations qui nécessitent des hypothèses assez restrictives sur la nature des sollicitations.

De manière similaire, dans l'approche développée par la suite, la résolution micro-chronologique va permettre de déterminer le terme source et donc l'évolution du champ de température.

## Grandes lignes

La méthode d'homogénéisation temporelle par développements asymptotiques s'opère en plusieurs étapes.

1. La définition de deux échelles de temps indépendantes. Elle permet la réécriture du problème à l'aide de ces deux échelles. Le facteur d'échelle apparaît alors naturellement.
2. Une analyse dimensionnelle. L'adimensionnalisation du problème est indispensable à une identification raisonnée des ordres de grandeurs. L'identification des différents paramètres adimensionnels en fonction du facteur d'échelle est alors discutée en fonction des grandeurs du procédé.
3. La définition des développements asymptotiques. La solution sera recherchée comme un de ces développements. La substitution peut ensuite être effectuée.

4. L'identification aux différents ordres. Elle permet de faire apparaître les physiques prépondérantes et d'obtenir les problèmes homogénéisés.
5. Le moyennage sur une période. Cette étape peut éventuellement être nécessaire pour déterminer certaines inconnues du problème.

## 2.1 Deux variables de temps indépendantes

### 2.1.a Adimensionnalisation du temps

Le temps

$$\lambda_0 = 1 \text{ s} \tag{II.23}$$

est choisi comme temps caractéristique. Il représente plus ou moins la durée du procédé. Il permet de définir une échelle de temps adimensionnel :

$$t^* = \frac{t}{\lambda_0}. \tag{II.24}$$

### 2.1.b Les deux échelles de temps

Deux échelles de temps différentes, considérées comme indépendantes par la suite, sont définies. Elles permettent de séparer les deux échelles de temps présentes dans la condition limite du problème (II.43). Les deux échelles sont définies de manière adimensionnelle :

- Une échelle de temps courte, de coordonnée  $\tau^* = ft$ . Elle représente les variations rapides dues à la vibration de la sonotrode.
- Une échelle de temps longue  $T^*$ . Elle représente les variations lentes qui durent le temps du procédé. C'est l'échelle de temps d'observation. On peut prendre comme coordonnée  $T^* = t^* = t/\lambda_0$  du fait que  $\lambda_0 = 1 \text{ s}$  est le temps caractéristique du procédé.

La condition limite (II.15) s'écrit alors :

$$u(t^*) = \mathbf{u}_d(T^*) + \mathbf{a} \sin(2\pi\tau^*). \tag{II.25}$$

### 2.1.c Facteur d'échelle

Définissons le facteur d'échelle

$$\xi = \frac{T^*}{\tau^*} = \frac{1}{f\lambda_0} \sim 5.10^{-5}. \tag{II.26}$$

Ce facteur  $\xi$ , très petit, est déterminant dans le processus d'homogénéisation temporelle.

En considérant alors, de manière plus générale, les problèmes multi-échelles que l'on peut rencontrer en mécanique,  $\xi$  peut prendre différentes valeurs. Les phénomènes de fatigue abordés précédemment peuvent se dérouler sur plusieurs centaines de milliers de cycles et  $\xi$  peut atteindre des valeurs de  $10^{-9}$ . Des applications de génie civil peuvent par contre présenter des durées de vie de quelques centaines à quelques milliers de cycles, et  $\xi \sim 10^{-3}$ . Pour un facteur d'échelle différent, l'étude doit être reprise ; en particulier l'estimation des paramètres adimensionnels qui suit. Cette étude se restreint finalement au cas d'un procédé ultrasons où  $\xi \sim 5.10^{-5}$ .

## 2.2 Analyse dimensionnelle

Afin de pouvoir traiter des grandeurs comparables, le problème thermo-mécanique (II.21) et (II.22) doit être adimensionnalisé.

### 2.2.a Grandeurs caractéristiques

Un ensemble de grandeurs caractéristiques permet d'écrire le problème sous forme adimensionnelle. Elles sont définies à partir de valeurs typiques du procédé.

**Longueur** L'unité de longueur caractéristique choisie est la hauteur  $h$  initiale du directeur d'énergie :

$$h = 300 \mu\text{m} \quad (\text{II.27})$$

**Contraintes** En considérant une viscosité caractéristique

$$\eta_0 = 10^7 \text{ Pa.s} \quad (\text{II.28})$$

qui équivaut à une extrapolation de la viscosité newtonienne aux alentours de la température de transition vitreuse  $\theta_g = 143^\circ\text{C}$  d'après Nicodeau [Nicodeau, 2005], on définit une contrainte caractéristique

$$\sigma_c = \frac{\eta_0}{\lambda_0} = 10^7 \text{ Pa.} \quad (\text{II.29})$$

**Température** Comme présenté précédemment (section 1.1.c (p. 12)), une variation de température caractéristique du procédé est prise égale à :

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_0 = 324^\circ\text{C.} \quad (\text{II.30})$$

### 2.2.b Variables adimensionnelles

**Coordonnées** L'échelle adimensionnelle d'espace  $\mathbf{x}^*$  est définie :

$$\mathbf{x} = h\mathbf{x}^* \quad (\text{II.31})$$

**Variabes** Ensuite, une série de variables adimensionnelles  $\boldsymbol{\sigma}^*$ ,  $\mathbf{u}^*$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  et  $\theta^*$  est déduite des variables du problème :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(x=ex^*, t=\lambda_0 t^*) &= \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\sigma}^*(x^*, t^*) \\ \boldsymbol{\Sigma}(x=ex^*, t=\lambda_0 t^*) &= \boldsymbol{\sigma}_c \cdot \boldsymbol{\Sigma}^*(x^*, t^*) \\ \mathbf{u}(x=ex^*, t=\lambda_0 t^*) &= h \cdot \mathbf{u}^*(x^*, t^*) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(x=ex^*, t=\lambda_0 t^*) &= \boldsymbol{\varepsilon}^*(x^*, t^*) \\ \theta(x=ex^*, t=\lambda_0 t^*) &= \Delta\theta \cdot \theta^*(x^*, t^*) + \theta_0. \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

On note que la définition de la température adimensionnelle permet à  $\theta^*$  de varier environ entre 0 et 1 durant le procédé.

**Opérateurs** Enfin, les opérateurs de dérivation adimensionnels sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \nabla^*(\cdot) &\equiv h \cdot \nabla(\cdot) \\ \nabla^* \cdot (\cdot) &\equiv h \cdot \nabla \cdot (\cdot) \\ \Delta^*(\cdot) &\equiv \nabla^* \cdot (\nabla^*(\cdot)) = h^2 \Delta(\cdot) \\ \frac{d(\cdot)}{dt^*} &\equiv \lambda_0 \frac{d(\cdot)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

### 2.2.c Paramètres adimensionnels obtenus

**Problème adimensionnel** Le problème thermique obtenu s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{d\theta^*}{dt^*} = A\Delta^*\theta^* + B\boldsymbol{\sigma}^* : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^*}{dt^*} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^*\theta^* \cdot \mathbf{n}^* = 0 & \text{sur } (\Gamma) \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

où  $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}/h$ . Le problème mécanique s'écrit :

$$\begin{cases} \Lambda \frac{d\boldsymbol{\Sigma}^*}{dt^*} + \boldsymbol{\Sigma}^* = 2N \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^*}{dt^*} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{0} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 & \text{sur } (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n}^* = \mathbf{0} & \text{sur } (\Gamma_\sigma) \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{U}_d(T^*) + \mathbf{R} \sin(2\pi\tau^*) & \text{sur } (\Gamma_u) \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Une série de paramètres adimensionnels apparaît dans ces systèmes d'équations :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{a}/h \\
 \mathbf{U}_d &= \mathbf{u}_d/h \\
 A &= (k\lambda_0) / (\rho ch^2) \\
 B &= \sigma_c / (\rho c \Delta\theta_c) \\
 \Lambda &= \lambda/\lambda_0 \\
 N &= \eta/\eta_0
 \end{aligned} \tag{II.36}$$

Ces paramètres adimensionnels doivent être évalués par rapport au facteur d'échelle  $\xi$ .

**Conditions limites** La vibration de la sonotrode étant de quelques pourcents de la hauteur du directeur,

$$\|\mathbf{R}\| \sim \xi^0. \tag{II.37}$$

Cet ordre de grandeur de  $\mathbf{R}$  reste vrai sur une très large gamme d'amplitudes de vibrations. Pour passer à l'ordre  $\xi^1$ , il faudrait appliquer des vibrations de l'ordre de  $10^{-5}$  fois la hauteur du directeur d'énergie. De telles amplitudes n'auraient évidemment aucun effet et ne sont dès lors pas utilisées dans des procédés ultrasons. L'écrasement  $\mathbf{U}_d$  est lui aussi d'environ la hauteur du directeur :

$$\|\mathbf{U}_d\| \sim \xi^0. \tag{II.38}$$

**Thermique** La diffusivité  $k/\rho c$  du polymère valant environ  $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ,

$$A \sim \xi^0. \tag{II.39}$$

Sa capacité calorifique spécifique valant  $3.10^6 \text{ W.m}^{-3}\text{K}^{-1}$ ,  $B \sim 3.10^{-2}$ . Puisque  $\xi = 5.10^5$  :

$$B \sim \xi^0. \tag{II.40}$$

**Loi de comportement** L'adimensionnalisation de la loi de comportement (II.10) fait intervenir deux nombres adimensionnels moins triviaux.  $\Lambda$  et  $N$  sont en effet très thermo-dépendants et la variation de température s'étend sur une plage de plus de  $300^\circ\text{C}$ . Certains auteurs tels que Boutin et Wong [Boutin et Wong, 1998] proposent un développement en série de Taylor des paramètres thermo-dépendants. Néanmoins, dans le cas présent, les variations de  $\Lambda$  et  $N$  ne peuvent être considérées comme petites.

TAB. II.1: Récapitulatif des paramètres adimensionnels du système

Terme associé	Nom	Expression	Valeur	Identification
Diffusion thermique	$A$	$\frac{\lambda_0 k}{\rho c h^2}$	1	$\xi^0$
Dissipation mécanique	$B$	$\frac{\sigma_c}{\Delta \theta_c \rho c}$	$10^{-2}$	$\xi^0$
Temps de Maxwell	$\Lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	$[1; 10^5]$	$\xi^0, \xi^{-1}$
Viscosité de Maxwell	$N$	$\frac{\eta}{\sigma_c \lambda_0}$	$[1; 10^4]$	$\xi^0, \xi^{-1}$
Amplitude des vibrations	$R$	$\frac{a}{h}$	0.1	$\xi^0$
Ecrasement	$U_d$	$\frac{u_d}{h}$	1	$\xi^0$

**Restriction autour de  $T_g$**  La bonne séparation d'échelles permet de surmonter la difficulté.  $\xi$  étant très petit, même si les deux paramètres de Maxwell varient sur plusieurs décades, il ne vont vraisemblablement pas varier sur plus d'un ordre de grandeur de  $\xi$ . Dès lors, deux cas physiques sont considérés par la suite :

1.  $\Lambda \sim \xi^0$  et  $N \sim \xi^0$  est le cas valide au dessus de la température de transition vitreuse. Le polymère est alors pleinement viscoélastique. Il présente des temps de relaxation compris entre 10 ms et 100 s et des viscosités comprises entre  $10^7$  Pa.s et  $10^4$  Pa.s.
2.  $\Lambda \sim \xi^{-1}$  et  $N \sim \xi^{-1}$  représente le comportement autour de la température ambiante. En effet, le terme visqueux de l'équation de Maxwell devient négligeable devant le terme élastique. Ce cas, traité en annexe B.1, mène à un système d'équations similaire.

Pour commencer, l'hypothèse d'une température aux alentours de  $\theta_g$  est retenue. C'est le cas 1 :

$$\begin{aligned} \Lambda &\sim \xi^0 \\ N &\sim \xi^0 \end{aligned} \tag{II.41}$$

## 2.2.d Récapitulatif

Finalement le problème thermo-mécanique à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\theta^*}{dt^*} = A \nabla^* \cdot k \nabla^* \theta^* + B \sigma^* : \frac{d\varepsilon^*}{dt^*} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \theta^* \cdot \mathbf{n}^* = 0 & \text{sur } (\Gamma) \end{cases} \tag{II.42}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Lambda \frac{d\Sigma^*}{dt^*} + \Sigma^* = 2N \frac{d\varepsilon^*}{dt^*} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \cdot \sigma^* = \mathbf{0} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 & \text{sur } (\Omega) \\ \sigma^* \cdot \mathbf{n}^* = \mathbf{0} & \text{sur } (\Gamma_\sigma) \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{U}_d(T^*) + \mathbf{R} \sin(2\pi\tau^*) & \text{sur } (\Gamma_u) \end{array} \right. \quad (\text{II.43})$$

où tous les paramètres adimensionnels représentés par des lettres majuscules sont d'ordre 0 en  $\xi$ . La condition de Dirichlet du problème mécanique s'écrit sur deux échelles de temps différentes, ce qui rend sa résolution numérique directe impossible par des méthodes numériques classiques.

### 2.3 Développements asymptotiques

La clef de la méthode présentée est de rechercher les champs résultats comme des développements asymptotiques en puissance de  $\xi$ . Ainsi une variable  $\phi(t^*)$  du problème est remplacée par :

$$\phi(t^*) = \phi_0(T^*, \tau^*) + \phi_1(T^*, \tau^*) \xi + \phi_2(T^*, \tau^*) \xi^2 + \dots \quad (\text{II.44})$$

où  $\phi$  peut être  $\sigma^*$ ,  $p^*$ ,  $\Sigma^*$ ,  $\mathbf{u}^*$ ,  $\varepsilon^*$  ou  $\theta^*$ . Les deux échelles de temps étant indépendantes, une hypothèse classique consiste à chercher chaque  $\phi_i$  comme périodique en  $\tau^*$  [Guennouni, 1988, Boutin et Wong, 1998]. Ainsi l'évolution globale est décrite par la dépendance en  $T^*$  alors que la vibration périodique est contenue dans la dépendance en  $\tau^*$ .

**Dérivation temporelle** En considérant ces deux échelles de temps indépendantes, une fonction  $\varphi$  de  $T^*$  et de  $\tau^*$  présente une dérivation temporelle originale :

$$\frac{d\varphi(T^*, \tau^*)}{dt^*} = \frac{\partial\varphi}{\partial T^*} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial\varphi}{\partial\tau^*} \quad (\text{II.45})$$

**Formulation vitesse** La vitesse adimensionnelle est définie comme :

$$\mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{u}^*}{dt^*} \quad (\text{II.46})$$

Le développement asymptotique associé démarre donc à l'ordre  $-1$ , et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{-1}^* = \frac{\partial\mathbf{u}_0^*}{\partial\tau^*} \\ \mathbf{v}_i^* = \frac{\partial\mathbf{u}_i^*}{\partial T^*} + \frac{\partial\mathbf{u}_{i+1}^*}{\partial\tau^*} \quad \forall i \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.47})$$

De la même manière, le tenseur des taux de déformation peut être développé comme :

$$\begin{cases} D_{-1}^* = \nabla_s^* \mathbf{v}_{-1}^* = \frac{\partial \varepsilon_0^*}{\partial \tau^*} \\ D_i^* = \nabla_s^* \mathbf{v}_{-1}^* = \frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial T^*} + \frac{\partial \varepsilon_{i+1}^*}{\partial \tau^*} \quad \forall i \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Par la suite, pour faciliter la lecture, la notation étoilée est abandonnée. Il faut tout de même garder à l'esprit que toutes les variables sont adimensionnelles.

**Moyenne** L'opérateur

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{|\kappa|} \int_0^\kappa (\bullet) d\tau \quad (\text{II.49})$$

est défini comme la moyenne temporelle sur une période micro-chronologique  $\kappa^*$ . La périodicité des variables  $\phi_i$  permet d'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial \tau} \right\rangle = 0. \quad (\text{II.50})$$

## 2.4 Identification

Les identités (II.45) et (II.44) peuvent être substituées dans les systèmes d'équation (II.42) et (II.43). Chaque terme peut alors être identifié en fonction de son ordre en  $\xi$ .

### 2.4.a Problème mécanique

**Équilibre et conditions limites** Les équations ne faisant pas intervenir de dérivées temporelles sont identifiées de manière triviale à chaque ordre de  $\xi$ . L'incompressibilité, l'équilibre et la condition de Neumann donnent :

$$\forall i \geq 0 \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{sur } (\Gamma_\sigma) \quad (\text{II.51})$$

soit en formulation vitesse :

$$\forall i \geq -1 \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{sur } (\Gamma_\sigma) \quad (\text{II.52})$$

---

\*Du fait que  $\tau^* = ft^*$ ,  $\kappa = 1$ .

La condition en déplacement n'apparaît qu'à l'ordre 0 en  $\xi$  :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = 0 & \forall i > 0 \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u} = \mathbf{U}_d(T) + \mathbf{R} \sin(2\pi\tau) \end{cases} \quad \text{sur } (\Gamma_u) \quad (\text{II.53})$$

soit en formulation vitesse :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{-1} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \tau} = 2\pi \mathbf{R} \cos(2\pi\tau) \\ \mathbf{v}_0 = \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial T} = \frac{d\mathbf{U}_d}{dT} = \mathbf{V}_d \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{0} & \forall i > 0 \end{cases} \quad \text{sur } (\Gamma_u) \quad (\text{II.54})$$

où  $\mathbf{V}_d$  est la vitesse de déplacement macroscopique imposée par la sonotrode lors de l'écrasement du directeur d'énergie.

**Conditions initiales** Les conditions (II.16) s'identifient également à chaque ordre en :

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_i(T=0, \tau=0) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_i(T=0, \tau=0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_i(T=0, \tau=0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right] \quad \text{sur } (\Omega). \quad (\text{II.55})$$

**Loi de comportement** La loi de comportement de Maxwell fait intervenir une dérivation temporelle, un croisement des différents ordres apparaît donc à l'identification. En  $\xi^{-1}$ , on obtient :

$$\Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial \tau} = 2N \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0}{\partial \tau} = 2N \mathbf{D}_{-1}, \quad (\text{II.56})$$

et en  $\xi^0$ ,

$$\Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial T} + \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_1}{\partial \tau} + \boldsymbol{\Sigma}_0 = 2N \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0}{\partial T} + 2N \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial \tau} = 2N \mathbf{D}_0. \quad (\text{II.57})$$

En appliquant l'opérateur de moyennage et à l'aide de l'assertion (II.50),

$$\Lambda \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial T} + \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle = 2N \frac{\partial \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle}{\partial T} = 2N \langle \mathbf{D}_0 \rangle. \quad (\text{II.58})$$

**Problème micro** Finalement, en combinant les différentes équations précédentes, on obtient un système d'équation qui ne concerne que les temps courts  $\tau$ . C'est le problème

*micro-chronologique* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \tau} = 2N \mathbf{D}_{-1} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_{-1} = 0 \\ \mathbf{v}_{-1} = 2\pi \mathbf{R} \cos(2\pi\tau) \\ \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } (\Omega) \\ \text{sur } (\Gamma_u) \\ \text{sur } (\Gamma_\sigma) \end{array} \quad (\text{II.59})$$

C'est un problème hypo-élastique équivalent à un problème élastique sous l'hypothèse des petites perturbations. En effet, pour des sollicitations rapides, le modèle de Maxwell est principalement élastique. Ce problème lie une contrainte oscillante d'amplitude d'ordre 0 en  $\xi$  à une vitesse d'ordre  $-1$ . En intégrant ce problème en  $\tau$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_0 = \frac{2N}{\Lambda} \boldsymbol{\varepsilon} + \Sigma_0(T, \tau = 0) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{R} \sin(2\pi\tau) \\ \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } (\Omega) \\ \text{sur } (\Gamma_u) \\ \text{sur } (\Gamma_\sigma) \end{array} \quad (\text{II.60})$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}$ . L'équation constitutive montre bien que  $\Sigma_0$  peut se décomposer en deux termes : un terme d'évolution micro-chronologique  $\frac{2\Lambda}{N} \boldsymbol{\varepsilon}$  et une constante d'intégration  $\Sigma_0(T, \tau = 0)$  qui décrit l'évolution macro-chronologique. Puisque la condition limite sur  $\Gamma_u$  est sinusoïdale et le problème est linéaire, le déplacement micro-chronologique  $\mathbf{u}$  peut être cherché comme harmonique en  $\tau$  :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \sin(\tau). \quad (\text{II.61})$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$  est également sinusoïdal et le moyennage de la loi de comportement donne :

$$\langle \Sigma_0 \rangle = \Sigma_0(T, \tau = 0). \quad (\text{II.62})$$

Ceci confirme que  $\Sigma_0(T, \tau = 0)$  représente l'évolution macro-chronologique de  $\Sigma_0$ .

**Problème macro**  $\langle \Sigma_0 \rangle$  est déterminée à l'aide du second problème, en temps long  $T$ . C'est le problème *macro-chronologique* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \frac{\partial \langle \Sigma_0 \rangle}{\partial T} + \langle \Sigma_0 \rangle = 2N \langle \mathbf{D}_0 \rangle \\ \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{v}_0 \rangle = \mathbf{v}_d(T) \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } (\Omega) \\ \text{sur } (\Gamma) \\ \text{sur } (\Gamma_\sigma) \end{array} \quad (\text{II.63})$$

avec la condition initiale

$$\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle (T = 0) = \boldsymbol{\Sigma} (T = 0, \tau = 0) = \mathbf{0} \quad (\text{II.64})$$

Ce système décrit les déformations lentes comme un écoulement viscoélastique de Maxwell. La contrainte d'ordre 0,  $\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle$ , est cette fois liée à une vitesse d'ordre 0,  $\langle \mathbf{v}_0 \rangle$ . La condition limite est une condition en vitesse d'écrasement macro-chronologique seulement.

#### 2.4.b Problème thermique

De même, l'identification des différents ordres sur le problème thermique (II.42) est opéré.

**Conditions limites** Les conditions limites d'isolation thermique sont identifiées de manière triviale à chaque ordre :

$$\forall i, \quad \nabla \theta_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma). \quad (\text{II.65})$$

**Condition initiale** La condition initiale thermique donnée par l'équation (II.20) s'identifie à chaque ordre en :

$$\forall i, \quad \theta_i (T = 0, \tau = 0) = 0 \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{II.66})$$

**Ordre  $-1$**  Le bilan thermique du système (II.42) s'identifie à l'ordre  $-1$  en :

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = B \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathbf{D}_{-1}. \quad (\text{II.67})$$

A l'aide de la loi de comportement du problème micro-chronologique (II.59), on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathbf{D}_{-1} \rangle = \left\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial \tau} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0^2}{\partial \tau} \right\rangle = 0 \quad (\text{II.68})$$

car  $\boldsymbol{\Sigma}_0^2$  est  $\tau$ -périodique. Ce problème ne décrit qu'une évolution périodique rapide. Pour obtenir l'évolution globale de température, il faut identifier le problème thermique aux ordres supérieurs.

**Problème macro-chronologique** A l'ordre 0 en  $\xi$ , on obtient :

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial T} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = A \Delta \theta_0 + B \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathbf{D}_0 + B \boldsymbol{\Sigma}_1 : \mathbf{D}_{-1}, \quad (\text{II.69})$$

qui peut être moyenné en :

$$\frac{\partial \langle \theta_0 \rangle}{\partial T} = A\Delta \langle \theta_0 \rangle + B \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathbf{D}_0 \rangle + B \langle \boldsymbol{\Sigma}_1 : \mathbf{D}_{-1} \rangle. \quad (\text{II.70})$$

En remplaçant  $\mathbf{D}_0$  et  $\mathbf{D}_{-1}$  par leurs expressions (II.56) et (II.57),

$$\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathbf{D}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\Sigma}_1 : \mathbf{D}_{-1} \rangle = \left\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \left( \frac{\Lambda}{2N} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial T} + \frac{\Lambda}{2N} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2N} \boldsymbol{\Sigma}_0 \right) \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{\Sigma}_1 : \frac{\Lambda}{2N} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial \tau} \right\rangle. \quad (\text{II.71})$$

A l'aide de la périodicité des  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  et de l'équation (II.50), on peut écrire

$$\left\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_1}{\partial \tau} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{\Sigma}_1 : \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial \tau} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial (\boldsymbol{\Sigma}_0 : \boldsymbol{\Sigma}_1)}{\partial \tau} \right\rangle = 0 \quad (\text{II.72})$$

et finalement

$$\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathbf{D}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\Sigma}_1 : \mathbf{D}_{-1} \rangle = \frac{1}{2N} \left\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \left( \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial T} + \boldsymbol{\Sigma}_0 \right) \right\rangle. \quad (\text{II.73})$$

En décomposant la contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  en une partie micro-chronologique  $\frac{2N}{\Lambda} \boldsymbol{\varepsilon}$  et une partie macro-chronologique  $\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle$ , on peut écrire le problème thermique macro-chronologique comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle \theta_0 \rangle}{\partial T} = A\Delta \langle \theta_0 \rangle + BQ_{mi} + BQ_{Ma} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \theta_0 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma) \\ \langle \theta_0 \rangle (T=0) = 0 & \text{sur } (\Omega) \end{cases} \quad (\text{II.74})$$

où :

$$\begin{cases} Q_{mi} = \frac{2N}{\Lambda^2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : (\Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial T} + \boldsymbol{\varepsilon}) \rangle \\ Q_{Ma} = \frac{1}{2N} \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle : \left( \Lambda \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial T} + \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle \right). \end{cases} \quad (\text{II.75})$$

## 2.5 Bilan

Le problème initial, écrit sous forme de deux systèmes d'équations (II.42) et (II.43), présente une condition limite qui s'applique sur deux échelles de temps. La méthode d'homogénéisation temporelle par développements asymptotiques présentée permet de séparer ce problème thermo-mécanique initial en trois sous problèmes s'appliquant chacun sur une unique échelle de temps.

### 2.5.a Écriture des 3 problèmes

Les trois problèmes obtenus sont les suivants :

- Un problème thermique macro chronologique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle \theta_0 \rangle}{\partial T} = A\Delta \langle \theta_0 \rangle + BQ_{micro} + BQ_{macro} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \theta_0 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma) \\ \langle \theta_0 \rangle (T = 0) = 0 & \text{sur } (\Omega) \end{cases} \quad (\text{II.76})$$

où :

$$Q_{mi} = \frac{2N}{\Lambda^2} \left\langle \varepsilon : \left( \Lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \varepsilon \right) \right\rangle \quad (\text{II.77})$$

$$Q_{Ma} = \frac{1}{2N} \langle \Sigma_0 \rangle : \left( \Lambda \frac{\partial \langle \Sigma_0 \rangle}{\partial T} + \langle \Sigma_0 \rangle \right). \quad (\text{II.78})$$

dont l'inconnue est la moyenne de température  $\langle \theta_0 \rangle$ .

- Un problème mécanique macro-chronologique :

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \Lambda \frac{\partial \langle \Sigma_0 \rangle}{\partial T} + \langle \Sigma_0 \rangle = 2N \langle \mathbf{D}_0 \rangle \\ \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \end{array} \right] & \text{sur } (\Omega) \\ \langle \mathbf{v}_0 \rangle = \mathbf{v}_d(T) & \text{sur } (\Gamma) \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } (\Gamma_\sigma) \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

avec la condition initiale :

$$\langle \Sigma_0 \rangle (T = 0) = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{II.80})$$

dont la résolution pour les inconnues  $\langle \Sigma_0 \rangle$ ,  $\langle \mathbf{D}_0 \rangle$ ,  $p_0$ ,  $\langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle$  et  $\langle \mathbf{v}_0 \rangle$  peut se faire de manière classique sur un intervalle de temps  $T \in [0, t_f]$  macroscopique donné.

- Un problème mécanique micro-chronologique :

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \Sigma_0 = \frac{2N}{\Lambda} \varepsilon + \langle \Sigma_0 \rangle \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{array} \right] & \text{sur } (\Omega) \\ \mathbf{u} = \mathbf{R} \sin(2\pi\tau) & \text{sur } (\Gamma_u) \\ \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } (\Gamma_\sigma) \end{cases} \quad (\text{II.81})$$

dont la résolution en  $\tau$  pour les inconnues  $\Sigma_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $p_0$  et  $\mathbf{u}$  est paramétrée par le temps macroscopique  $T$  pour lequel on connaît  $\langle \Sigma_0 \rangle (T)$ .

### 2.5.b Les échelles sont séparées

Chaque problème précédent est défini sur une échelle de temps unique. Néanmoins, les trois problèmes sont couplés :

- Bien que défini sur le temps court  $\tau$ , le problème micro-chronologique est paramétré par le temps long  $T$  via :
  - Le terme  $\langle \Sigma_0 \rangle$  qui ne peut être obtenu qu'en résolvant le problème macro-chronologique.
  - La géométrie qui évolue avec l'écrasement du directeur.
  - L'évolution des paramètres matériau thermo-dépendants.

La résolution du problème micro-chronologique est donc nécessaire à chaque pas de temps long  $T$ , contrairement à [Guennouni, 1988].

- Le terme source  $Q_{mi}$  du problème thermique macro-chronologique ne dépend pas du temps court  $\tau$ . En effet, même si la déformation  $\varepsilon(\tau)$  y apparaît, nous avons seulement besoin de la moyenne  $\langle \varepsilon : (\Lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \varepsilon) \rangle$  qui peut être post-traitée une fois que  $\varepsilon$  est connu sur une période micro-chronologique.

### 2.5.c Proposition d'un schéma de résolution

Finalement, nous pouvons proposer un schéma d'intégration où chaque résolution est effectuée sur une discrétisation temporelle réaliste. Il est illustré sur le diagramme II.4 .

En conclusion il est nécessaire de souligner l'avantage de la méthode proposée sur celles plus pragmatiques de [Tolunay et al., 1983, Grewell et al., 2003, Wang et al., 2006, Suresh et al., 2007]. Elle est d'abord systématique et rigoureuse et ne nécessite aucune autre hypothèse que la séparation des échelles pour obtenir la formulation finale. Ensuite, le terme source original, défini par les équations (II.77) et (II.78) n'aurait pu être obtenu sans appliquer une méthode stricte d'homogénéisation temporelle. Enfin, la méthode permet, de surcroît, de donner les ordres de grandeur des inconnues en jeu ; à savoir une contrainte de l'ordre de  $\xi^0$  induite par une vitesse de l'ordre de  $\xi^{-1}$  dans le problème micro-chronologique et de l'ordre de  $\xi^0$  dans le problème macro-chronologique.

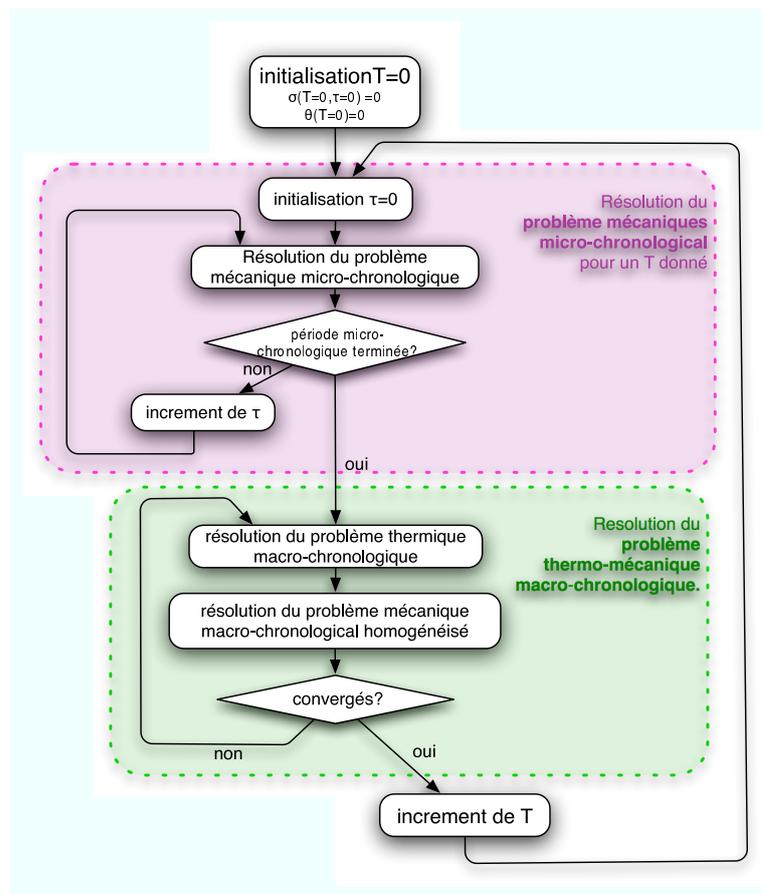


FIG. II.4: Schéma de résolution proposé.

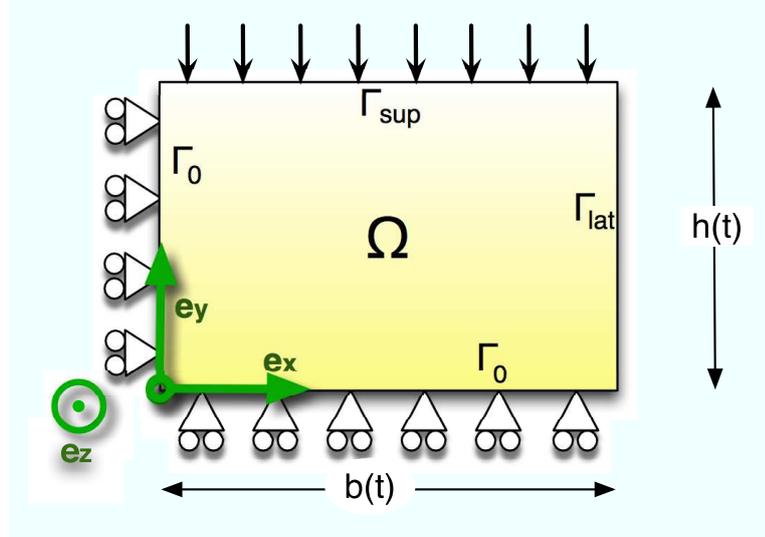


FIG. II.5: Géométrie du cas test uniforme.

### 3 Résultats et discussion

Cette section propose une validation de la méthode d'homogénéisation temporelle développée. Une discussion sur les hypothèses de départ permet ensuite d'analyser ses limites. Enfin, quelques simplifications permettent d'obtenir une modélisation simplifiée du procédé.

#### 3.1 Cas test uniforme

Afin de valider la pertinence de la méthode présentée, elle est appliquée sur un cas test simple. Un cas test uniforme en espace est proposé. Ainsi les équations aux dérivées partielles deviennent des équations différentielles ordinaires en temps seulement. La résolution du problème direct, non homogénéisé, est alors possible numériquement. Ceci permet de comparer ces résultats à ceux obtenus à l'aide de la solution homogénéisée.

##### 3.1.a Présentation du cas

Un cas de compression homogène est traité afin de s'assurer que les variables ne dépendent plus de l'espace.

**Géométrie** Le problème d'écrasement homogène présenté section 3.2.a est repris. La géométrie du problème est représentée figure II.5. Une condition aux limites présentant

TAB. II.2: Paramètres matériaux utilisés dans le cas test.

$\eta = 3.10^4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$		
$\lambda = 0,1 \text{ s}$		
$\rho c = 2,6.10^6 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-3}$		
$h_0 = 300 \mu\text{m}$		
$t_s = 4 \text{ s}$		
$a = 40 \mu\text{m}$		
Cas A	Cas B	Case C
$f = 1 \text{ Hz}$	$f = 100 \text{ Hz}$	$f = 10\,000 \text{ Hz}$
$\omega = 6,3 \text{ rad/s}$	$\omega = 630 \text{ rad/s}$	$\omega = 6,3.10^4 \text{ rad/s}$
$\xi \sim 0,16$	$\xi \sim 1,6.10^{-3}$	$\xi \sim 1,6.10^{-5}$

les deux sollicitations telle que représentée figure II.2 (p. 47) est appliquée :

$$h(t) = h_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{t_c}\right) + a \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{II.82})$$

où  $h_0 = h(t=0)$  est la hauteur initiale du lopin et  $t_c$  est un temps caractéristique de l'écrasement du rectangle. La condition limite en vitesse s'écrit alors

$$\mathbf{v}_d = \dot{h} = (v_s(t) + a\omega \cdot \cos(\omega t)) \cdot \mathbf{e}_y, \quad (\text{II.83})$$

avec

$$v_s(t) = -\frac{h_0}{t_c} \exp\left(-\frac{t}{t_c}\right). \quad (\text{II.84})$$

En considérant le rectangle thermiquement isolé, le cadre de l'étude précédente est bien respecté. Les résultats obtenus peuvent être appliqués.

**Paramètres matériaux** Les paramètres matériau utilisés sont issues de la littérature (cf. annexe F). La résolution pour trois fréquences de vibration permet de conclure sur la convergence du modèle homogénéisé. Une fréquence basse de 1 Hz est choisie dans le cas A. Elle permet d'étudier le cas où les deux échelles sont très mal séparées. Une fréquence de 100 Hz, déjà suffisante pour avoir une bonne séparation d'échelle, est retenue dans le cas B. Le cas C est proche du cas industriel avec une fréquence de 10 kHz. Les valeurs sont récapitulées dans le tableau II.2.

### 3.1.b Résolution

**Résolution directe** Avec de telles conditions limites, la cinématique est homogène et :

$$\mathbf{D} = \frac{v_d}{h} (-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y). \quad (\text{II.85})$$

La loi de comportement de Maxwell (II.10) donne alors six équations différentielles scalaires parmi lesquelles quatre donnent trivialement :

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{33} = 0 \quad \forall i \neq j, \quad \forall t. \quad (\text{II.86})$$

De plus,  $\Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{22}$  sont données par deux équations différentielles opposées :

$$\begin{aligned} \lambda \dot{\Sigma}_{11} + \Sigma_{11} &= 2\eta \frac{v_d}{h} \\ \lambda \dot{\Sigma}_{22} + \Sigma_{22} &= -2\eta \frac{v_d}{h} \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

avec la même condition initiale  $\Sigma_{11}(t=0) = \Sigma_{22}(t=0) = 0$ , donc  $\Sigma_{11} = -\Sigma_{22}$ . En définissant le scalaire  $\Sigma(t) = \Sigma_{11}$ , on peut écrire :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma(t) (-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) \quad (\text{II.88})$$

avec :

$$\lambda \dot{\Sigma} + \Sigma = 2\eta \frac{v_d(t)}{h(t)}; \quad \Sigma(t=0) = 0. \quad (\text{II.89})$$

Puisque les paramètres matériau ne dépendant pas de la température, le problème thermique et mécanique sont résolus indépendamment. Extra contraintes  $\boldsymbol{\Sigma}$  et taux de déformation  $\mathbf{D}$  étant uniformes sur l'espace, le terme de dissipation  $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}$  l'est aussi. Les conditions limites adiabatiques permettent de conclure que le champ de température est uniforme lui aussi. L'équation différentielle (II.21) se réduit alors à :

$$\rho c \dot{\theta} = 2\Sigma \frac{v_d}{h}; \quad \theta(t=0) = 0. \quad (\text{II.90})$$

**Résolution homogène** Concernant la résolution du problème homogénéisé, étant donné la cinématique du problème,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{a}{h} \sin(2\pi\tau) (-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y). \quad (\text{II.91})$$

L'extra-contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  est donc connue si  $\boldsymbol{\Sigma}_0(t, \tau=0)$  l'est.

Comme dans la résolution directe précédente, le taux de déformation macro-chronologique s'écrit :

$$\langle \mathbf{D}_0 \rangle = \frac{v_s}{h} (-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y). \quad (\text{II.92})$$

La loi de comportement du problème macro-chronologique (II.79) devient :

$$\Lambda \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial t} + \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle = 2N \frac{v_s}{h} (-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y), \quad (\text{II.93})$$

et l'extra contrainte  $\langle \Sigma_0 \rangle$  peut être recherchée dans la direction de  $\langle \mathbf{D}_0 \rangle$ , comme lors de la résolution directe :

$$\langle \Sigma_0 \rangle = \Sigma_M (-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y), \quad (\text{II.94})$$

où  $\Sigma_M$  obéit à l'équation différentielle :

$$\Lambda \frac{\partial \Sigma_M}{\partial t} + \Sigma_M = 2N \frac{v_s}{h} \quad \Sigma_M(t=0) = 0. \quad (\text{II.95})$$

Finalement l'extra contrainte peut s'écrire :

$$\Sigma_0 = \Sigma_0 (-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) \quad (\text{II.96})$$

avec :

$$\Sigma_0 = \frac{2N a}{\Lambda h} \sin(2\pi\tau) + \Sigma_M. \quad (\text{II.97})$$

Comme dans la résolution directe, le champ de température est uniforme et est obtenu en résolvant l'équation différentielle :

$$\rho c \dot{\theta} = BQ_{mi} + BQ_{Ma}; \quad \theta(t=0) = 0 \quad (\text{II.98})$$

où  $Q_{mi}$  et  $Q_{Ma}$  sont données par les équations (II.77) et (II.78) :

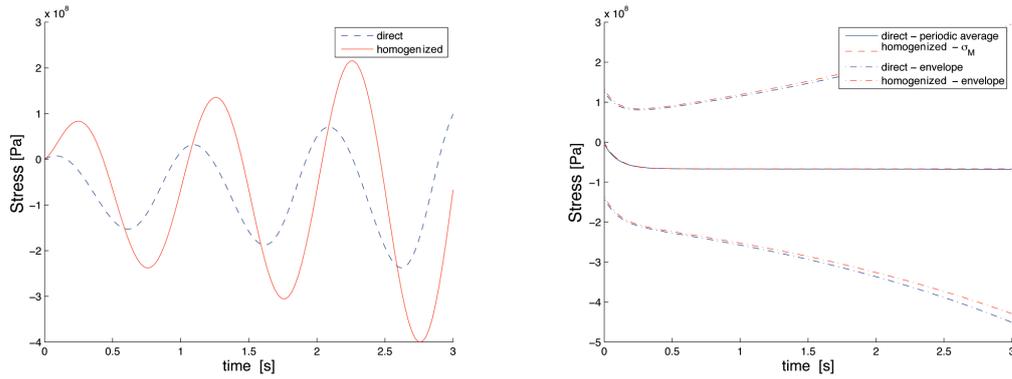
$$Q_{mi} = \frac{4N}{\Lambda^2} \left\langle \frac{a^2}{h^2} \sin^2(2\pi\tau) \left( 1 - \Lambda \frac{\dot{h}}{h} \right) \right\rangle \quad (\text{II.99})$$

$$Q_{Ma} = \frac{2}{N} \Sigma_M \left( \Lambda \frac{\partial \Sigma_M}{\partial t} + \Sigma_M \right). \quad (\text{II.100})$$

### 3.1.c Efficacité de la méthode

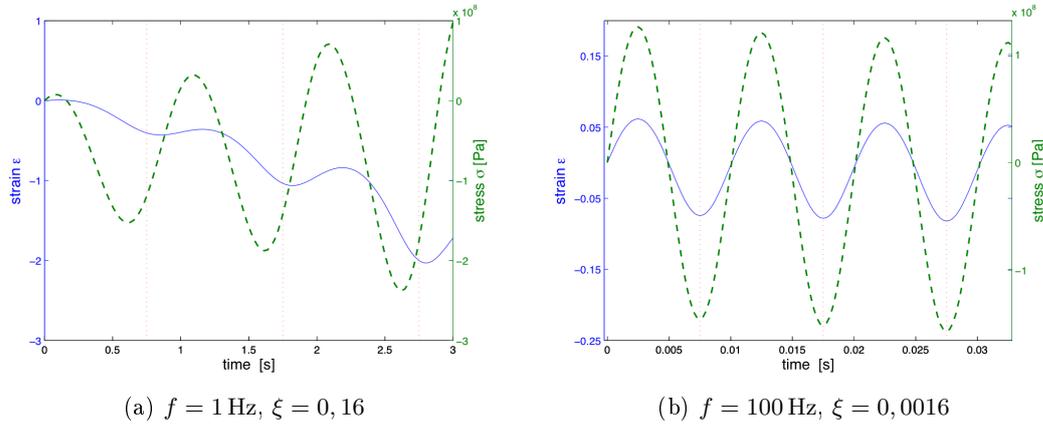
Les équation obtenues sont des équations différentielles en temps seulement. Dès lors, la résolution du problème, même de façon directe peut être faite de manière numérique. Une méthode de Runge-Kutta est utilisée dans Matlab, sur un intervalle temporel  $t \in [0; 1\text{s}]$ . Par la suite, nous appellerons *valeurs directes* les valeurs obtenues par la résolution directe des équations (II.89) et (II.90) ; et *valeurs homogènes* les valeurs obtenues par la résolution du système homogène (II.95), (II.98), (II.99) et (II.100). Cette section compare ces résultats directs et homogènes.

**Convergence de la mécanique** La contrainte directe  $\Sigma$  est comparée à la contrainte homogène associée  $\Sigma_0$ . Elles sont représentées sur les figures II.6. Pour une valeur



(a)  $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $\xi = 0,16$  : mauvaise séparation d'échelles. (b)  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $\xi = 0,0016$  : bonne séparation d'échelles.

FIG. II.6: Comparaison des contraintes calculées à l'aide de la méthode directe et homogène.



(a)  $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $\xi = 0,16$

(b)  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $\xi = 0,0016$

FIG. II.7: Contraintes et déformations sur les premières périodes calculées à l'aide de la méthode directe.

faible de la fréquence  $f$ , la figure II.6a montre que les contraintes homogènes ne correspondent pas aux contraintes directes. Ceci est en partie confirmé par le fait que le problème micro-chronologique, sensé être élastique, ne l'est pas à basse fréquence. En effet, comme le montre la figure II.7a, contraintes et déplacements ne sont pas en phase. Le cas B concerne des fréquences de 100 Hz où  $\xi \sim 10^{-3}$ . Étant donnée la fréquence élevée, seule l'enveloppe des contraintes est représentée figure II.6b. L'adéquation est bonne, la technique d'homogénéisation est donc applicable sur la mécanique. Ceci est partiellement expliqué par la réponse quasi-élastique aux variations rapides, comme le montre la figure II.7b, où contraintes et déformations sont en phase.

**Convergence de la thermique** La température calculée à partir du problème direct (II.90) est comparée à celle issue du problème thermique macro-chronologique (II.98). Pour une mauvaise séparation d'échelles (cas A), la figure II.8a montre que l'erreur re-

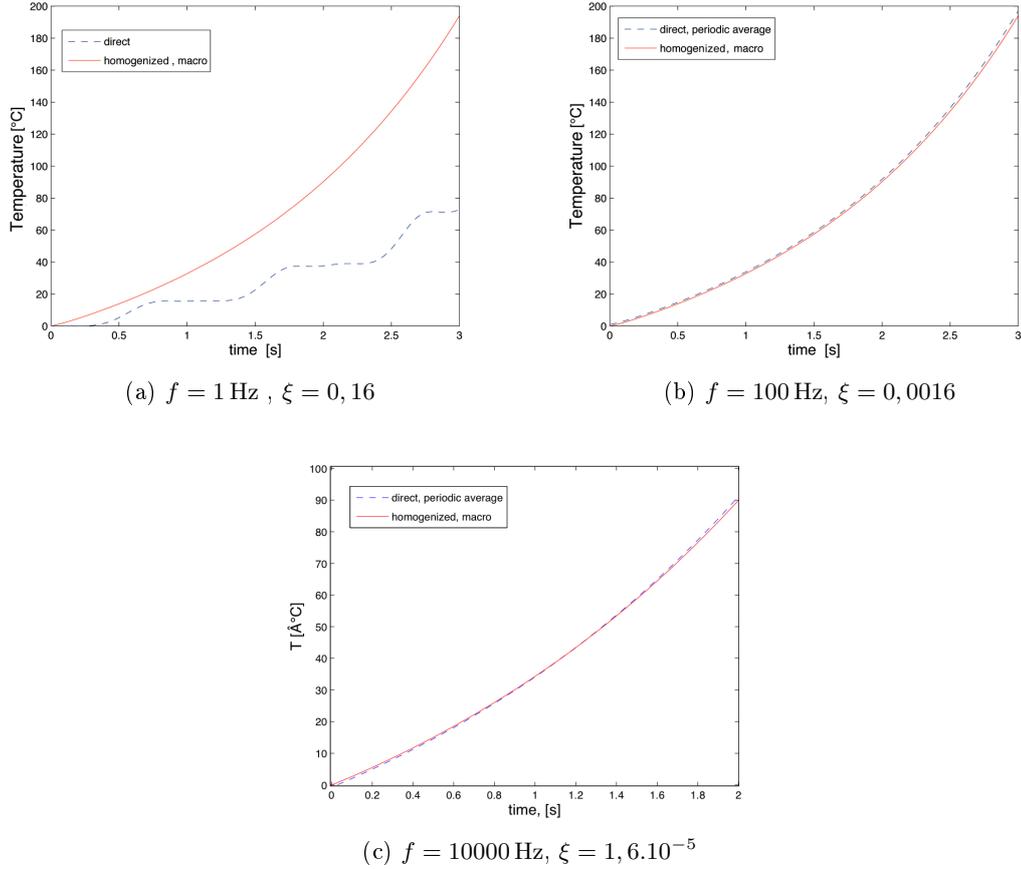


FIG. II.8: Comparaison des températures calculées à l'aide des méthode directe et homogène.

relative sur les températures finales est autour de 150%. La méthode d'homogénéisation n'est clairement pas applicable dans ce cas où  $\xi$  est trop important. Par contre, pour des fréquences plus élevées (cas B et C), les figures II.8b et II.8c permettent de comparer les températures homogénéisées à une moyenne par cycle de la température directe. L'erreur relative finale tombe alors sous les 2% pour le cas B où  $\xi = 10^{-3}$  et sous 1% pour le cas C, où  $\xi = 10^{-5}$ .

La résolution du problème homogénéisé est donc pertinente pour des fréquences élevées. En particulier autour des fréquences industrielles.

**Speed up** En ce qui concerne le gain de temps de calcul, dans le cas B, la méthode d'homogénéisation permet d'accélérer la résolution d'un facteur 10 par rapport à la méthode directe. Ceci s'explique, évidemment, par la régularisation des conditions limites. La résolution du problème homogène est plus rapide puisque la discrétisation est plus grossière pour une même précision. Dans le cas industriel C, le gain de temps atteint un facteur 1800 (cf. table II.3). Ces résultats sont à mettre en perspective avec une résolution spatiale plus proche du cas industriel. La résolution pour des géométries complexes

TAB. II.3: Efficacité de la méthode.

	Cas A	Cas B	Cas C	
Facteur d'échelle $\xi$	0,16	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	
Fréquence $f$ (Hz)	1	100	10 000	
Temps CPU (s)	directe	0,39	10,51	219
	homogène	0,17	0,16	0,12
Speed up	2.3	65	1820	
Erreur relative température finale	160%	1.8%	0.8%	

telles qu'un directeur d'énergie triangulaire et un écoulement tridimensionnel pose déjà des problèmes de convergence sur des temps longs. La méthode d'homogénéisation présentée est donc un préalable indispensable à la simulation de l'écoulement.

### 3.1.d Discussion des valeurs obtenues

Ces premiers résultats ne concernent qu'un cas idéal. Néanmoins ils permettent de tirer quelques conclusions sur le procédé.

**Ordre de grandeur** En ce qui concerne la valeur de l'élévation de température, la figure II.8c montre que la fusion est atteinte en environ 3 secondes. Toutefois, le procédé permet au passage de la sonotrode de fondre l'ensemble de l'interface en moins d'une seconde. Même dans le procédé statique, une partie du directeur fond très rapidement. Ce cas test sous-estime donc de manière importante le terme de chauffage.

**Importance de la géométrie** Deux hypothèses permettent d'expliquer cette différence. D'une part la modélisation retenue ne prend pas en compte la thermo-dépendance des paramètres matériaux. D'autre part, les directeurs d'énergie et leur géométrie ont probablement un rôle important de concentrateurs d'énergie. Le chauffage et la fusion sont effectivement des phénomènes locaux, au moins dans la phase initiale du procédé. Une résolution du problème en espace est donc indispensable.

**Bilan** Finalement, le cas test proposé dans cette section a permis de valider la méthode d'homogénéisation temporelle. La méthode est efficace dès que les échelles sont séparées. C'est le cas du procédé étudié où la séparation d'échelles est largement suffisante pour que la méthode soit applicable. De plus la résolution du cas test permet de tirer une première conclusion sur le procédé : la géométrie du directeur est primordiale. C'est probablement l'effet de pointe qui permet de fondre le polymère aussi rapidement.

### 3.2 Perspectives d'extension du modèle

La méthode d'homogénéisation semble pertinente, principalement par sa rigueur. Néanmoins, le développement précédent présente quelques limites. En particulier en ce qui concerne les hypothèses initiales retenues. Quelques possibilités d'extension de la méthode sont proposées ici.

#### 3.2.a Autre modèle rhéologique

**Basse température** Tout d'abord, les hypothèses retenues pour déterminer les paramètres adimensionnels  $\Lambda$  et  $N$  ne sont pas justifiées à basse température. Comme décrit précédemment, le modèle présenté se limite à des température aux alentours et au dessus de  $\theta_g$ . Une première extension du modèle est développée en annexe B.1. Elle montre que les modèles homogénéisés obtenus à basse température obéissent à des systèmes d'équations analogues aux systèmes (II.76) à (II.81). Ainsi, le système d'équations obtenu peut être généralisé sur toute la plage de températures, pour peu que l'on autorise une thermo-dépendance des paramètres  $\Lambda$  et  $N$ .

**Kelvin-Voigt** D'autre part, la loi de Maxwell (II.10) utilisée n'est pas apte à décrire un comportement de solide visco-élastique. En considérant initialement un comportement de Kelvin Voigt :

$$\Sigma = \eta_{kv} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + e \varepsilon. \quad (\text{II.101})$$

et à l'aide des valeurs mesurées des modules complexes du PEEK (cf. annexe F.2.a), on peut identifier les ordres de grandeur de  $\eta_{kv}$  et  $e$  :

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{kv}}{\eta_0} &\sim \xi^1 \\ \frac{e}{\sigma_c} &\sim \xi^0 \end{aligned} \quad (\text{II.102})$$

En définissant

$$\begin{aligned} N &= \frac{\eta}{\eta_0} \xi^{-1} \\ E &= \frac{e}{\sigma_c} \end{aligned}, \quad (\text{II.103})$$

l'identification de l'ordre 0 de la loi de comportement donne :

$$\Sigma_0 = N \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \tau} + E \varepsilon_0 \quad (\text{II.104})$$

qui par moyennage donne une loi élastique :

$$\langle \Sigma_0 \rangle = E \langle \varepsilon_0 \rangle. \quad (\text{II.105})$$

Bien que cette loi moyennée élastique permette de décrire l'évolution macro-chronologique, la loi de comportement (II.104) ne décrit pas le comportement micro-chronologique. En effet, cette loi de comportement en déplacement doit être associée à la condition limite

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{U}_d(t) + \mathbf{R} \sin(\tau) \quad (\text{II.106})$$

qui présente toujours les deux sollicitations. Finalement, dans le cas d'une loi de Kelvin-Voigt, le développement asymptotique ne permet pas d'identifier deux modèles micro et macro-chronologique. Les deux sollicitations en déplacement interviennent, en effet, au même ordre,  $\xi^0$ .

**Maxwell généralisé** Que ce soit avec une loi de Maxwell ou de Kelvin Voigt, la modélisation à l'aide d'une unique branche est limitée. En effet, le système est amené à décrire des sollicitations lentes (l'écrasement) et rapides (la vibration). Un modèle généralisé à plusieurs branches semble donc indispensable pour décrire plus fidèlement la sollicitation. La méthode d'homogénéisation a été appliquée pour un modèle de Maxwell généralisé à deux branches. Les calculs sont détaillés en annexe B.2. La méthode s'avère efficace pour discriminer les branches utiles aux différentes échelles de temps. Bien que le développement ne soit présenté que sur un cas simple à deux branches, la généralisation à une loi de comportement comportant plus de branches est possible de la même manière. Ceci permettrait donc de généraliser la méthode présentée.

### 3.2.b Grandes déformations

Une perspective d'extension à une description à l'aide d'un modèle en grande déformation est proposée en annexe B.4. Le développement asymptotique additif semble peu adapté pour identifier une loi de comportement de Maxwell surconvecté. En effet, en grande déformation, la décomposition des déformations est plutôt multiplicative. Une analyse plus poussée des non-linéarités géométriques est donc nécessaire pour décomposer les effets lents et rapides.

### 3.2.c Dynamique

Afin de prendre en compte les effets d'inertie dans la loi d'équilibre dynamique, une extension de la méthode est proposée. Les développements, présentés en annexe B.3, montrent qu'en ayant soin de redéfinir un nouveau facteur d'échelle

$$\xi' = \sqrt{\xi} = 7.10^{-3}, \quad (\text{II.107})$$

les termes d'inertie n'apparaissent qu'aux ordres supérieurs et ne modifient pas les résultats obtenus précédemment.

## Bilan

La méthode appliquée au modèle de Maxwell en petites perturbations a permis de découpler les deux échelles de temps présentes dans le procédé. Quelques extensions de la méthode ont été présentées et sont envisageables. Finalement, par la suite, les systèmes d'équations (II.76) à (II.81) sont considérés comme acquis. Bien qu'obtenus à l'aide du modèle idéal de Maxwell (II.10), ces systèmes conservent l'essence même du processus d'homogénéisation. En se détachant de la rigueur mathématique du cadre d'homogénéisation, une simplification du modèle permet de représenter le problème géométrique d'écrasement en grande déformation de manière simplifiée.

### 3.3 Modélisation simplifiée

La méthode d'homogénéisation a permis de découpler de manière rigoureuse les effets de vibrations rapides des effets d'écrasement. Le problème thermo-mécanique à deux échelles de temps se réécrit alors en trois sous problèmes (équations (II.76) à (II.81)). Dorénavant, le cadre rigoureux d'homogénéisation par développement asymptotique est abandonné pour ne retenir que l'idée générale d'une décomposition en trois sous-problèmes. Quelques hypothèses supplémentaires permettent de modéliser le procédé à l'aide de deux problèmes mécaniques et d'un problème thermique relativement similaires. Ces nouveaux problèmes sont écrits en gardant comme objectif une résolution numérique.

#### 3.3.a Problème d'élasticité

Le problème mécanique micro-chronologique obtenu par homogénéisation a montré que le polymère a un comportement élastique à hautes fréquences. D'autre part, les modules élastiques et modules de pertes mesurés par DMA et par méthode dynamique avec barres de Hopkinson (cf annexe F.2.a) confirment que le PEEK a un comportement principalement élastique à haute vitesse de sollicitation.

Par contre, la caractérisation de l'élasticité du PEEK trouvée dans la littérature [Cogswell, 1992] montre une élasticité compressible avec un coefficient de Poisson  $\nu \sim 0,4$  à température ambiante. Afin de décrire au mieux la phase d'initiation du procédé où l'auto-échauffement est primordial, on se propose donc de modéliser les déformations induites par la vibration de la sonotrode à l'aide du problème d'élasticité linéaire

compressible :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}_e = \lambda_{lam} Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_{lam} \boldsymbol{\varepsilon} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{0} & \text{sur } (\Omega) \\ \left[ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \mathbf{a} \sin(\omega t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{sur } (\Gamma_{sup}) \\ \text{sur } (\Gamma_0) \\ \text{sur } (\Gamma_{lat}) \end{array} \end{array} \right. \quad (\text{II.108})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_e$  est le tenseur des contraintes,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur des déformations,  $\mathbf{a}$  est l'amplitude de vibration de la sonotrode,  $\omega$  sa pulsation et  $\lambda_{lam} = E\nu / [(1 - \nu)(1 + \nu)]$  et  $\mu_{lam} = E / [2(1 + \nu)]$  les deux coefficients de Lamé.

L'amplitude de vibration de la sonotrode est de l'ordre de 40  $\mu\text{m}$ .  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est donc de l'ordre de quelques pour-cents. L'hypothèse des petites perturbations effectuée dans la partie précédente (section 1 (p. 44)) et conservée ici est donc relativement réaliste pour modéliser les effets de la vibration de la sonotrode.

Puisque ce système est linéaire, on peut rechercher les solutions sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_e &= \hat{\boldsymbol{\sigma}} \sin(\omega t) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \sin(\omega t) \\ \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{II.109})$$

vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{E}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} & \text{sur } (\Omega), \\ \left[ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{a} \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{sur } (\Gamma_{sup}) \\ \text{sur } (\Gamma_0) \\ \text{sur } (\Gamma_{lat}) \end{array} \end{array} \right. \quad (\text{II.110})$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}$  est le tenseur d'ordre 4 défini par  $\tilde{\mathbf{E}}(\cdot) = \lambda_{lam} Tr(\cdot) + 2\mu_{lam}(\cdot)$ .

### 3.3.b Problème thermique

L'assemblage à souder est disposé sur une table. En toute rigueur, il y a donc une condition limite en flux non nulle sur la partie inférieure du domaine  $\Gamma_0$ . Dans une moindre mesure, le contact avec l'air ambiant devrait aussi être pris en compte sur  $\Gamma_{sup}$ . Néanmoins, le domaine  $\Omega$  est considéré comme isolé thermiquement. Ceci permet de se concentrer sur l'auto-échauffement en s'assurant de ne pas apporter de chaleur au système par conduction à travers la frontière. Le problème thermique à résoudre

s'écrit :

$$\begin{cases} \rho c \frac{D\theta}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla \theta) + Q & \text{sur } (\Omega) \\ k \cdot \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma_{lat} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_{sup}) \\ \theta(t=0) = 0 & \text{sur } (\Omega) \end{cases} \quad (\text{II.111})$$

où  $\theta$  est la température,  $\rho c$  est la capacité calorifique,  $k$  est la conductivité thermique et  $\frac{D}{Dt}$  est la dérivée particulaire, qui, dans un cadre eulérien peut faire intervenir un terme de transport. La dissipation d'énergie mécanique sous forme de chaleur  $Q$  a été obtenue de manière rigoureuse à l'aide de la méthode d'homogénéisation (cf équation (II.76), (II.77) et (II.78)). Elle est formée de deux termes, le premier est lié au problème micro-chronologique de vibration, le deuxième au problème macro-chronologique d'écrasement.

**Terme source.** De nouvelles hypothèses concernant ce terme source  $Q$  permettent de décrire au mieux l'échauffement au moment de l'initiation du procédé. En considérant des températures basses, et donc une viscosité  $N$  élevée, le terme  $Q_{Ma}$  de l'équation (II.78) devient négligeable devant le terme  $Q_{mi}$  lié à la vibration. D'autre part, en supposant que la déformation induite par la vibration de la sonotrode évolue peu durant le procédé, le terme  $\Lambda \partial \varepsilon / \partial T$  devient négligeable devant la déformation elle-même :  $\varepsilon$ . On propose alors une simplification du terme source  $Q$  :

$$\begin{aligned} Q &= \alpha \langle \varepsilon : \varepsilon \rangle \\ &= \frac{\alpha}{2} \hat{\varepsilon} : \hat{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{II.112})$$

où  $\alpha$  est un paramètre matériau obtenu à partir du facteur  $B \frac{2N}{\lambda^2}$  de l'équation (II.77) :

$$\alpha = \frac{2\eta}{\lambda^2}. \quad (\text{II.113})$$

**Comparaison avec la littérature** Le terme source obtenu par homogénéisation temporelle est à comparer aux modèles d'auto-échauffement trouvés dans la littérature et présentés section 3.1.a. Les modèles de la littérature ne considèrent qu'un échauffement dû aux vibrations de la sonotrode. Ceci revient à négliger le terme  $Q_{Ma}$  dans l'équation II.76. D'autre part, en considérant la loi de comportement de Maxwell :

$$\lambda \dot{\Sigma} + \Sigma = 2\eta \dot{\varepsilon}, \quad (\text{II.114})$$

sous sollicitation harmonique, le module complexe  $\bar{E}$  n'est autre que :

$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= \frac{\bar{\Sigma}}{\bar{\varepsilon}} \\
 &= \frac{2\eta i\omega}{1 + \lambda i\omega} \\
 &= \frac{2\eta\lambda\omega^2}{1 + \lambda^2\omega^2} + i \frac{2\eta\omega}{1 + \lambda^2\omega^2}
 \end{aligned} \tag{II.115}$$

Le module de perte  $E''$  s'écrit alors, pour des fréquences grandes devant la fréquence de relaxation  $\lambda^{-1}$  :

$$E'' = 2 \frac{\eta}{\lambda^2 \omega} \tag{II.116}$$

et l'expression (I.19) :

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{E''\omega}{2} \hat{\varepsilon} : \hat{\varepsilon} \\
 &= \frac{\eta}{\lambda^2} \hat{\varepsilon} : \hat{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{II.117}$$

revient donc à ne considérer qu'une partie du terme  $Q_{mi}$  obtenu par homogénéisation (équation (II.77)). L'expression du terme de dissipation d'énergie mécanique que l'on peut trouver dans la littérature [Tolunay et al., 1983, Benatar et Gutowski, 1989, Suresh et al., 2007] n'est finalement qu'une restriction du terme source obtenu à l'aide de la méthode d'homogénéisation.

**Justification** Afin de valider cette restriction admise dans la littérature, la figure II.9 représente les contributions des différents termes dans la dissipation d'énergie mécanique calculée dans le cas test de la section précédente. Nous définissons les quatre termes :

$$\begin{aligned}
 Q_{mi}^A &= \frac{2N}{\Lambda} \langle \varepsilon : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \rangle \\
 Q_{mi}^B &= \frac{2N}{\Lambda^2} \langle \varepsilon : \varepsilon \rangle \\
 Q_{Ma}^C &= \frac{\Lambda}{2N} \langle \Sigma_0 \rangle : \frac{\partial \langle \Sigma_0 \rangle}{\partial t} \\
 Q_{Ma}^D &= \frac{1}{2N} \langle \Sigma_0 \rangle : \langle \Sigma_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{II.118}$$

Dans le cas test effectué, c'est bien le terme  $Q_{mi}^A$  qui est prépondérant. Par la suite le modèle homogénéisé est donc restreint afin de ne conserver que l'expression (II.112) du terme de dissipation d'énergie mécanique :

$$Q = \frac{\eta}{\lambda^2} \hat{\varepsilon} : \hat{\varepsilon} \tag{II.119}$$

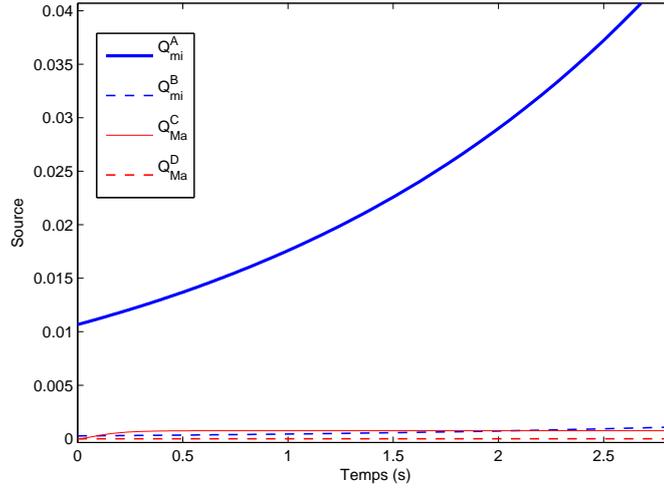


FIG. II.9: Comparaison des différentes contributions du terme source pour le cas test uniforme C.

### 3.3.c Problème d'écoulement

**Simplification en un problème visqueux** Le problème d'écrasement macro-chronologique obtenu par homogénéisation est un problème d'écoulement visco-élastique de Maxwell. Ce comportement est simplifié afin de modéliser l'écoulement du polymère à l'interface à l'aide d'un fluide visqueux pur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\Sigma}_v = 2\eta \cdot \mathbf{D} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_v) = \underline{\mathbf{0}} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{sur } (\Omega) \\ \left[ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}_v \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{s}} & \text{sur } (\Gamma_{sup}) \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{sur } (\Gamma_0) \\ \boldsymbol{\sigma}_v \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } (\Gamma_{lat}) \end{array} \right. & \end{array} \right. \quad (\text{II.120})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_v$  est le tenseur des contraintes,  $\boldsymbol{\Sigma}_v$  le tenseur des extra-contraintes, et  $v_d$  la vitesse imposée par l'écrasement de la sonotrode. La simplification du comportement à un fluide visqueux peut sembler éloignée de la physique, toutefois elle permet de mieux décrire la morphologie de l'écoulement. D'une part parce que des lois de fluide visqueux non-linéaire peuvent décrire plus fidèlement le comportement du polymère. Une loi de fluide de Carreau :

$$\eta = \eta_0 \left( 1 + (\lambda D_{eq})^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \quad (\text{II.121})$$

a par exemple été identifiée par Nicodeau [Nicodeau, 2005] pour décrire l'écoulement du PEEK. D'autre part parce qu'une description en vitesse seule permet de s'affranchir des problèmes de grandes déformations.

**Thermo-dépendance.** En reprenant toujours le travail de Nicodeau [Nicodeau, 2005] ou de Lamèthe [Lamethe, 2004], la viscosité dépend de la température selon une loi d'Arrhénius :

$$\eta_0(\theta) = A \exp\left(\frac{E_a}{R\theta [K]}\right) \quad (\text{II.122})$$

Cette dépendance permet de mettre en œuvre l'hypothèse d'un polymère solide rigide à froid et fluide visqueux à chaud.

**Effort** La modélisation à l'aide d'une vitesse d'écrasement imposée sur la frontière  $\Gamma_{sup}$  a été utile pour appliquer la méthode d'homogénéisation temporelle. En effet elle a permis, en la complétant avec la sollicitation vibratoire, de supposer une condition de Dirichlet multi-échelle connue (équation (II.15)). Néanmoins, maintenant que la méthode d'homogénéisation a permis d'écrire un problème macro-chronologique d'écrasement consistant, la condition de Dirichlet sur la frontière  $\Gamma_{sup}$  est modifiée. En effet, dans le procédé réel, la sollicitation est autre. Un vérin hydraulique situé entre le bâti et la sonotrode permet d'appliquer un effort d'écrasement à l'extrémité de la sonotrode. Dans le problème d'écoulement, c'est donc plutôt une condition de Neumann qui devrait être appliquée sur  $\Gamma_{sup}$ . La condition

$$\boldsymbol{\sigma}_v \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{s}} \quad (\text{II.123})$$

permet donc d'assurer une condition limite plus réaliste sur cette frontière, où  $\bar{\mathbf{s}}$  est un vecteur contrainte supposé connu.

### 3.3.d Couplages

La modélisation du procédé a été effectuée à l'aide de trois sous problèmes. Ces trois problèmes présentent plusieurs types de couplages :

**Un couplage fort** Entre le problème d'élasticité et le problème thermique par la présence du terme source de dissipation d'énergie mécanique, primordiale dans notre procédé.

**De nombreux couplages faibles** La thermo-dépendance des paramètres  $\rho(\theta)$ ,  $c(\theta)$  et  $k(\theta)$  rend le système (II.111) non-linéaire. D'autre part, la thermo-dépendance des paramètres mécaniques induit des couplages entre le champ thermique, le problème élastique (II.110) et le problème d'écoulement (II.120).

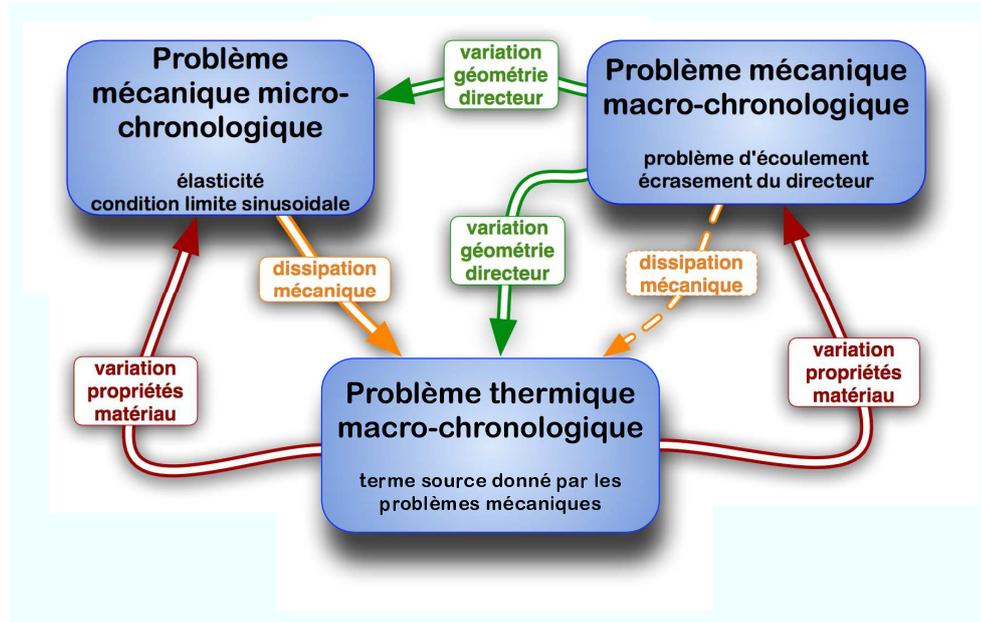


FIG. II.10: Les trois problèmes obtenus.

**Un couplage géométrique** La modélisation a pour objectif de décrire l'évolution du front de matière à l'interface. Dès lors, les trois problèmes physiques doivent être résolus sur une géométrie qui évolue. Ce changement de géométrie ne peut être considéré comme secondaire puisque l'écrasement du picot est important : il passe d'une forme triangulaire à un film soudé à l'interface. La résolution des problèmes physiques précédents est donc fortement couplé à l'évolution de cette géométrie. C'est en partie la présence de cette surface mobile qui justifiera le développement d'un code de simulation maison.

Les différents couplages sont résumés sur la figure II.10.

## Bilan

Ce chapitre a permis de proposer une modélisation de la thermo-mécanique de l'écoulement à l'interface. La mise en équation fait apparaître deux échelles de temps. La première, rapide, est liée à la vibration de la sonotrode, l'autre, lente, est liée à l'écrasement. Une méthode d'homogénéisation temporelle est une étape préalable à la résolution numériquement du problème multi-échelles. Cette méthode, basée sur le développement asymptotique de la solution, permet d'obtenir trois sous-problèmes relativement standards. La validation de la méthode sur un cas test uniforme a montré des gains de temps de calcul de l'ordre de 1000. En outre, le cas test laisse supposer que la géométrie du directeur d'énergie et la thermo-dépendance des paramètres matériaux jouent un rôle primordial sur l'initiation du procédé. La résolution numérique du problème complexe est donc nécessaire. Dans ce cas, l'application de la méthode

d'homogénéisation est efficace, voire indispensable. Afin de résoudre numériquement les sous-problèmes obtenus, en se détachant du cadre rigoureux de l'homogénéisation temporelle, une modélisation simplifiée de la physique à l'interface est finalement proposée. Un outil numérique spécifique est nécessaire pour résoudre les trois problèmes physiques obtenus. La présentation du développement de cet outil numérique fait l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre III

## Développement d'un outil numérique adapté

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Méthodes standards</b> . . . . .	<b>86</b>
1.1	Formulations faibles . . . . .	86
1.2	Discrétisation . . . . .	88
	› <i>Cas test 1 : Compression homogène</i> . . . . .	90
1.3	Cadre de résolution non linéaire . . . . .	92
	› <i>Cas test 2 : Ecoulement de Poiseuille, loi puissance</i> . . . . .	94
1.4	Spécificité du problème thermique . . . . .	95
	› <i>Cas test 3 : Choc thermique</i> . . . . .	97
	› <i>Cas test 4 : Convection diffusion</i> . . . . .	99
<b>2</b>	<b>Méthodes spécifiques</b> . . . . .	<b>101</b>
2.1	Géométrie et level-set . . . . .	101
	› <i>Cas test 5 : Bulle dans un écoulement de poiseuille</i> . . . . .	104
2.2	Contact . . . . .	106
	› <i>Cas test 6 : Contact entre deux level-sets mobiles</i> . . . . .	109
2.3	Résolution multiphysique . . . . .	111
<b>3</b>	<b>Implémentation</b> . . . . .	<b>115</b>
3.1	Les bases utilisées . . . . .	116
3.2	Architecture du code développé . . . . .	120
3.3	Bilan . . . . .	125
	› <i>Cas test 7 : Remplissage d'un moule cubique</i> . . . . .	128

---

La partie précédente montre que l'échauffement volumique calculé à l'aide du cas test uniforme de la section II. 3.1 (p. 66) n'est pas suffisant pour expliquer l'augmentation de température qui a effectivement lieu dans le procédé. La forme particulière du directeur d'énergie, la morphologie de l'écoulement, ainsi que les phénomènes de thermo-dépendance semblent donc être des caractéristiques primordiales pour assurer les conditions nécessaires à la soudure. Afin de confirmer cette hypothèse, les systèmes d'équations (II.110), (II.111) et (II.120) doivent être résolus sur un domaine bidimensionnel, voire tridimensionnel. Pour ce faire, un code éléments finis maison a été spécifiquement développé.

Dans ce chapitre, les spécificités du problème à résoudre sont d'abord présentées. Elles justifient, dans un premier temps, la nécessité de développer un code maison. Ensuite, les méthodes numériques utilisées sont exposées, d'abord les méthodes classiques, puis les outils plus originaux, spécifiques au code. L'implémentation retenue est enfin décrite dans une section plutôt orientée génie logiciel. Chaque nouvelle méthode numérique implémentée est validée par un cas test. Ces cas tests permettent d'illustrer le propos mais n'entravent en rien le corps du texte.

### **Justification de la nécessité de développement d'un code maison**

Le problème est résolu à l'aide d'une méthode des éléments finis qui a fait ses preuves pour traiter les problèmes aux limites thermiques ou mécaniques. Cette introduction consiste en une évaluation des capacités des codes commerciaux existant, vis à vis du problème à résoudre. Les différentes caractéristiques numériques nécessaires à notre problème sont listées ci-dessous :

**Multiphysique** Il existe de nombreux codes permettant de simuler un problème thermo-mécanique d'écoulement tels que Forge, Abaqus ou Ansys. Néanmoins, la modélisation du procédé est effectuée à l'aide de trois problèmes physiques. L'implémentation d'une physique supplémentaire est mal intégrée voire impossible dans ces logiciels. Un code permettant de gérer de manière transparente des problèmes multiphysiques est donc nécessaire.

**Grandes déformations de la géométrie** L'évolution de la géométrie est gouvernée par le problème d'écoulement (II.120). Sachant que la déformation du directeur d'énergie est très importante, des méthodes spécifiques sont nécessaires.

Des codes comme Abaqus ou Forge résolvent des problèmes de grandes déformations par méthodes Lagrangiennes. Néanmoins, si la déformation devient trop importante le maillage devient distordu. Afin d'éviter la dégradation de la solution, il est

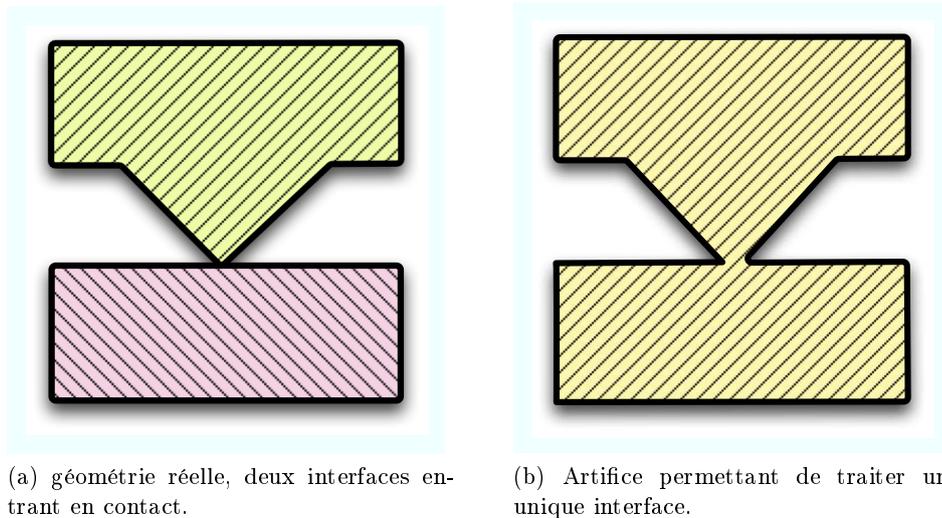


FIG. III.1: Artifice pour éviter de traiter le contact explicitement

alors nécessaire de remailler le domaine, puis de projeter les champs sur ce nouveau maillage [Terada et al., 2007]. Cette étape de projection ajoute des erreurs à la solution. Dans le procédé étudié, la déformation est importante et de nombreuses étapes de projections seraient nécessaires. Une modélisation purement lagrangienne de l'écrasement du picot est alors peu adaptée. Hormis les logiciels développés par le CEMEF ou transvalor, aucun code standard ne propose cette fonctionnalité avancée et le développement d'algorithme de remaillage est un travail énorme.

Les méthodes Eulériennes consistent à considérer que la matière se déplace dans un maillage qui reste fixe dans l'espace. Il n'y a donc plus de déformation de maillage. Par contre, pour modéliser une évolution de géométrie, de nouvelles méthodes doivent être mises en œuvre. Certains logiciels, en particulier dans le domaine de l'injection plastique, permettent de gérer une surface libre dans une description éléments finis eulérienne.

**Contact** En plus des grandes déformations que subit le directeur d'énergie lors de son écrasement, il entre en contact avec la plaque inférieure. Des artifices peuvent être mis en œuvre pour éviter de traiter ce problème de contact. Ainsi, on peut considérer que le contact est immédiatement parfait et que le directeur et la plaque inférieure ne forment qu'un matériau (cf. figure III.1) . Il n'existe alors qu'une interface entre ce matériau et l'air. Néanmoins, pour une description plus physique du problème, il est nécessaire de décrire le contact entre ces deux matériaux. De plus, afin de pouvoir analyser des phénomènes de cicatrisation, il est faut conserver l'histoire de l'interface et décrire de manière explicite le contact entre le directeur et la plaque inférieure. La résolution d'un problème d'écoulement avec contact, dans un cadre eulérien, nécessite alors des outils numériques adéquats. Elle rejette a priori tous les codes basés sur une

approche de type Volume of Fluid (VoF), avec une simple fonction de présence.

**Possibilités restantes** Une solution possible serait d'utiliser Comsol Multiphysics, logiciel de calcul élément finis multiphysique. Le couplage multiphysique y est résolu de manière forte, c'est à dire que le vecteur solution recherché est formé de la concaténation de l'ensemble des vecteurs solutions de chaque physique. Les couplages forts entre physiques peuvent être ainsi résolus de manière rigoureuse. Néanmoins, quelques limites du logiciel le rendent inadéquat. En ce qui concerne la gestion de la surface libre, il existe des level-sets sous forme simplifiée, mais leur manipulation n'est pas accessible. D'autre part, la résolution de problèmes complexes pose des problèmes de robustesse, comme a pu le montrer Amélie Burel [Burel, 2009].

Ainsi, nous nous sommes orientés vers une approche de type eulérienne avec level-sets pour écrire l'évolution des domaines. Nous nous sommes basés sur la librairie X-FEM développée au laboratoire. Relativement souple et générale, elle permet de résoudre ses propres formulations éléments finis. La difficulté consiste à développer un environnement multiphysique intégrant au mieux les problèmes physiques nécessaires à l'application ultrasons.

## 1 Méthodes numériques standards utilisées

Cette section présente les méthodes numériques considérées comme suffisamment classiques pour ne pas être exposées de manière exhaustive.

### 1.1 Formulations faibles

#### 1.1.a Définitions

En premier lieu, il est utile de donner quelques définitions. Les champs inconnus  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\theta$  sont recherchés dans l'espace  $(H^1(\Omega))^d$  où  $d$  est la dimension du champ et  $H^1(\Omega)$  est l'espace de Sobolev. L'espace de Sobolev est inclus dans l'espace de Lebesgue de fonction à carré sommable sur  $\Omega$  que l'on note  $L^2(\Omega)$ . Nous définissons également  $H_0^1(\Omega)$  le sous espace de Sobolev dont les éléments s'annulent sur la frontière de  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{ \phi / \int_{\Omega} \phi^2 < \infty \} \\ H^1(\Omega) &= \{ \phi \in L^2(\Omega) / \nabla \phi \in (L^2(\Omega))^d \} \\ H_0^1(\Omega) &= \{ \phi \in H^1(\Omega) / \phi = 0 \quad \text{sur } (\Gamma) \} \end{aligned} \tag{III.1}$$

### 1.1.b Formulation faible

**Élasticité** Le problème d'élasticité (II.110) s'écrit de manière classique sous forme faible :

$$\mathcal{F}_e(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in (H^1(\Omega))^d. \quad (\text{III.2})$$

En intégrant par partie et en utilisant les conditions limites,

$$\mathcal{F}_e(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in (H_0^1(\Omega))^d \quad (\text{III.3})$$

$\mathbf{u}^*$  est un champ test cinématiquement admissible. C'est ce problème écrit sous forme faible qui sera résolu de manière discrète en s'assurant que le résidu  $\mathcal{F}_e(\mathbf{u})$  est nul pour un ensemble discret de champs test  $\mathbf{u}^*$  bien choisis.

**Thermique** De manière similaire le problème thermique (II.111) s'écrit sous forme faible :

$$\mathcal{F}_t(\theta) = \int_{\Omega} \theta^* \rho c \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \right) - \int_{\Omega} \nabla \theta^* \cdot \mathbf{q} - \int_{\Omega} \theta^* Q = 0 \quad \forall \theta^* \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{III.4})$$

où :

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta \quad (\text{III.5})$$

est le flux de chaleur.

**Écoulement incompressible** Le problème incompressible, quant à lui, est écrit sous forme faible à l'aide d'une formulation mixte en vitesse et pression :

$$\mathcal{F}_v(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^* : \boldsymbol{\sigma}_v - \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v}^* \in (H_0^1(\Omega))^d \quad \forall p^* \in L^2(\Omega) \quad (\text{III.6})$$

où  $\mathbf{D}^* = \nabla_s \mathbf{v}^*$ . Or  $\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\Sigma} - p\mathbf{I}$ , on peut donc écrire :

$$\mathcal{F}_v(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \mathbf{D}^* : \boldsymbol{\Sigma} - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}^* p - \int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{III.7})$$

Cette formulation mixte traite la pression comme un multiplicateur de Lagrange qui permet d'assurer la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

## 1.2 Discrétisation

La discrétisation du problème s'effectue ensuite de manière classique en approximant les espaces  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$  par des espaces vectoriels  $H_h^1(\Omega)$ ,  $H_{0,h}^1(\Omega)$  et  $L_h^2(\Omega)$  de dimensions finies. Les vecteurs de fonctions d'interpolations  $\{N(\mathbf{x})\}^T$  permettent alors d'écrire les champs  $\mathcal{U}(x) \in L_h^2(\Omega)$  comme :

$$\mathcal{U}(x) = \{N(\mathbf{x})\}^T \cdot \{X\}. \quad (\text{III.8})$$

$\mathcal{U}(\mathbf{x})$  est alors représenté par le vecteur colonne inconnu  $\{X\}$ . Par la suite nous appellerons  $\{N_i(\mathbf{x})\}^T$  les fonctions d'interpolation et  $\{X_i\}$  les vecteurs colonne d'inconnues où  $i$  prend respectivement la valeur  $u$ ,  $v$ ,  $p$  et  $\theta$  pour les champs respectivement de déplacement  $\mathbf{u}$ , de vitesse  $\mathbf{v}$ , de pression  $p$  et de température  $\theta$ .

### 1.2.a Interpolations

Le logiciel GMSH [Geuzaine et Remacle, ] est utilisé pour créer un maillage de triangles (ou de tétraèdre, en trois dimensions). Bien que de nombreuses interpolations soient possibles, les interpolations lagrangiennes utilisées permettent aux inconnues de représenter les valeurs des champs en certains points physiques (les nœuds, par exemple).

La discrétisation des champs à l'aide de fonctions d'interpolations permet alors d'écrire les formulations faibles précédentes sous forme discrète :

$$\begin{aligned} F_e(X_u) &= 0 \quad \forall u^* \in H_{0,h}^1(\Omega) \\ F_t(X_\theta) &= 0 \quad \forall \theta^* \in H_{0,h}^1(\Omega) \\ F_v(X_v, X_p) &= 0 \quad \forall v^* \in H_{0,h}^1(\Omega) \forall p^* \in L_h^2(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

En choisissant un ensemble de fonctions test, on peut alors écrire un vecteur de résidus à éliminer :

$$\{F_i(X)\} = \{0\} \quad (\text{III.10})$$

où  $i \in \{e, t, v\}$ . En appliquant une méthode classique de Galerkin, les fonctions test sont choisies comme étant les fonctions d'interpolation.

### 1.2.b Cas particulier de la formulation mixte

**Condition LBB** La formulation mixte (III.7) est résolue en recherchant un vecteur d'inconnus  $\{X\}$  formé de la concaténation du vecteur inconnu vitesse et du vecteur inconnu pression. Le problème mixte à résoudre est un problème d'écoulement

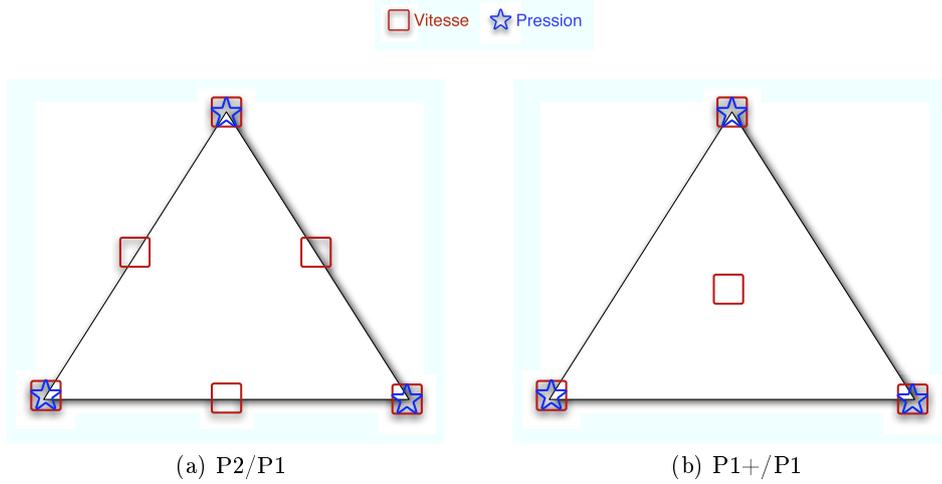


FIG. III.2: Interpolations admissibles pour la vitesse et la pression

sous contrainte d'incompressibilité. Babuška [Babuška, 1973] et Brezzi [Brezzi, 1974] montrent que la condition suivante, également connue sous le nom de condition inf-sup, doit être remplie :

$$\inf_{p^* \in L_h^2(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v} \in H_{0,h}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} p^* \nabla \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_1 \|p\|_0} \geq k_0 > 0 \quad (\text{III.11})$$

où  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_0$  sont les normes respectives de  $H^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ . Cette condition ne peut être remplie que pour des choix particuliers d'interpolations pour les champs  $p^*$  et  $\mathbf{v}$ . Une interpolation P2 pour la vitesse et P1 pour la pression permet par exemple d'assurer la condition inf-sup [Zienkiewicz et al., 2009].

**Elément P1+ / P1** Arnold *et al.* [Arnold et al., 1984] proposent une interpolation originale assurant la condition inf-sup, le *MINI élément*. Une interpolation P1 est utilisée pour le champ de vitesse et de pression, mais l'interpolation du champ de vitesse est enrichi d'un nouveau degré de liberté par élément, appelé *degré bulle*. Cette fonction d'interpolation est une fonction Lagrangienne d'ordre 3 qui s'annule sur le bord de chaque élément. Ainsi, la connectivité de ce degré de liberté est limité aux nœuds de l'élément courant.

Une élimination locale de la bulle, par éléments, peut alors être effectuée pour réduire le nombre de degrés de liberté avant de résoudre le problème global. C'est ce que Basset [Basset, 2006] appelle la *condensation de la bulle*. Même sans effectuer cette résolution locale, le degré bulle n'interagissant pas avec les éléments voisins, les matrices engendrées ont une largeur de bandes inférieure à une interpolation P2/P1. En effet, comme le montre la figure III.2a, pour une interpolation P2/P1, les degrés d'ordres supérieurs en vitesse, qui sont les valeurs du champ au milieu de chaque arête, induisent une connectivité entre deux éléments voisins.

TAB. III.1: Nombre de degré de liberté par nœud dans un maillage régulier pour le problème en vitesse / pression.

	P1+/P1	P2/P1
2 dimensions	7	9
3 dimensions	19	22

En considérant un maillage régulier, on peut estimer le nombre de degrés de libertés global engendré par ces deux interpolations :

P2/P1 : En deux dimensions, deux degrés de libertés en vitesse par arête, 2 degrés de liberté en vitesse par nœud et 1 degré de liberté en pression par nœud. Pour un maillage régulier, en deux dimensions, il y a trois fois plus d'arêtes que de nœuds. Soit 9 degrés de libertés par nœud.

En trois dimensions, il y a six fois plus d'arêtes que de nœuds, soit 22 degrés de libertés par nœuds.

P1+/P1 : En deux dimensions, 2 degrés de libertés en vitesse par nœuds, 1 degré en pression par nœud et 2 degrés en vitesse par triangles (tétraèdre en trois dimensions). En deux dimensions, avec deux fois plus d'éléments que de nœuds, il y a donc 7 degrés de libertés par nœuds.

En trois dimensions, il y a 5 tétraèdres par nœuds, soit 19 degrés de libertés par nœuds.

L'interpolation P1+/P1 donne donc moins de degrés de liberté qu'une interpolation P2/P1 pour le même nombre de nœuds. Néanmoins, le degré bulle ajouté ne permet pas de gagner en précision, contrairement à l'interpolation d'ordre élevée P2/P1.

---

### Cas test 1 : Compression homogène

*Un cas test de compression homogène a été effectué pour valider la convergence des formulation avec interpolation P2/P1 et P1+/P1. Un problème d'écoulement newtonien avec  $\eta = 1$  est résolu sur un carré de dimension  $1 \times 1$ . Les conditions limites sont récapitulées figure III.3. Le cas test est homogène,  $D_{xx} = -D_{yy} = 1$  et  $D_{xy} = 0$ . Les résolutions avec interpolation P1+/P1 et interpolation P2/P1 donnent bien la solution exacte. Comme le montre la figure III.4. La contrainte d'incompressibilité est bien assurée au niveau élémentaire pour les deux types d'interpolations, à la précision numérique près.*

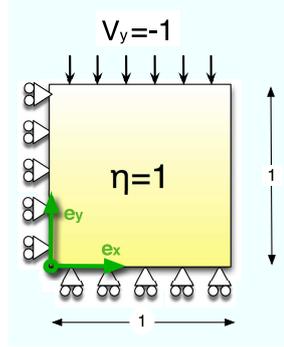


FIG. III.3: Cas test d'écrasement incompressible, conditions limites.

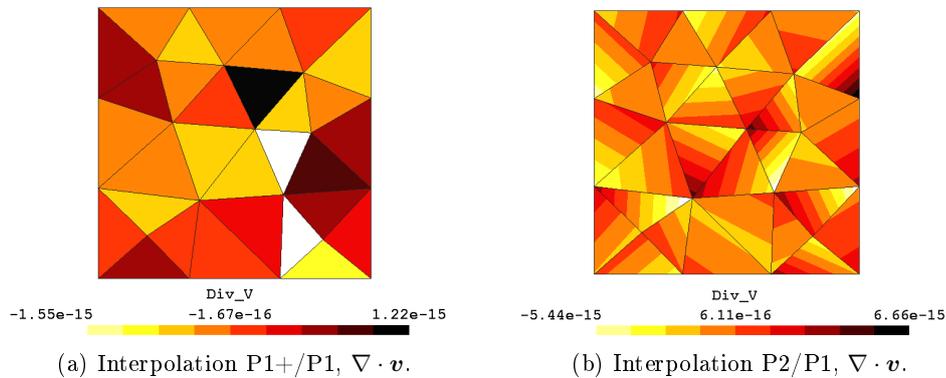


FIG. III.4: Cas test de compression homogène, résultats.

### 1.2.c Cohérence entre les physiques

Suivant les applications, l'une ou l'autre des interpolations peut être utilisée. Néanmoins dans un cadre de résolution multiphysique, il est préférable d'utiliser les mêmes interpolations  $\{N_i\}^T$  pour les différents champs physiques. Ceci permet en effet d'être cohérent quant au stockage des données et d'éviter des étapes de projections. De manière générale, une interpolation P1+/P1 sera utilisée pour le champ de vitesse et de pression et des interpolations P1 pour les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de température  $\theta$ . Nous avons par ailleurs vérifié sur de nombreux cas la concordance des résultats entre les approximations d'ordre 2 et d'ordre 1. Bien que l'approximation P2 permette de gagner en précision, elle perd son intérêt lors du calcul des vitesses normales à une level-set d'ordre 1. Par soucis de cohérence, une interpolation P1 est donc retenue.

### 1.3 Cadre de résolution non linéaire

De par sa linéarité, le problème élastique III.3 peut s'écrire sous la forme :

$$\{F_e(\{X\})\} = \underbrace{\left[ \int_{\Omega} \nabla N : \tilde{\mathbf{E}} \nabla N \right]}_{[K]} \{X\} + \{b\} = \{0\} \quad (\text{III.12})$$

où la matrice raideur  $[K]$  du problème ne dépend pas de  $\{U\}$ . Par contre le problème thermique fait intervenir des paramètres matériau thermo-dépendants et le problème d'écoulement a une loi de comportement rhéofluidifiante (cf équation (II.121)). Ces deux formulations sont donc non-linéaires. Un algorithme de résolution non linéaire est nécessaire pour les résoudre.

#### 1.3.a Newton-Raphson

Un algorithme classique de Newton-Raphson est utilisé pour résoudre les problèmes non-linéaires de la forme :

$$\{F(X)\} = \{0\}. \quad (\text{III.13})$$

Pour ce faire, on recherche de manière itérative la solution du système en résolvant à chaque itération  $n$  :

$$[J_n] \{\Delta X\} = \{F_n\} \quad (\text{III.14})$$

où  $\{\Delta X\} = \{X_{n+1}\} - \{X_n\}$  est l'incrément de solution et :

$$[J_n] = \left. \frac{\partial \{F\}}{\partial \{X\}} \right|_{\{X_n\}} \quad (\text{III.15})$$

est la matrice tangente, ou Jacobienne, du système à résoudre.

Pour des lois de comportements plus complexes, la matrice tangente peut être obtenue de manière numérique. Cette technique ajoute un surcoût en temps de calcul. Dans notre cas, où les lois de comportements sont suffisamment simples, les matrices tangentes peuvent être assemblées en écrivant :

$$[J] = \int_{\Omega} \mathcal{L}_g(N) S \mathcal{L}_d(N) \quad (\text{III.16})$$

où  $\mathcal{L}_g$  et  $\mathcal{L}_d$  sont deux opérateurs qui en général sont l'identité ou le gradient et  $S$  est la sensibilité du résidu  $\{F\}$  qui peut être un scalaire, un vecteur ou un tenseur d'ordre deux ou quatre. Ces sensibilités sont déterminées directement, pour chaque formulation, et permettent d'assembler la matrice globale  $\mathbf{J}$  sans avoir recours à un

calcul numérique. Le détail des développements, pour chaque formulation, est donnée en annexe C.

### 1.3.b Critère de convergence

Plusieurs critères existent et permettent de considérer que la boucle itérative a convergé [Zienkiewicz et Taylor, 1988]. Nous pouvons citer le critère de stabilité qui consiste à considérer qu'il y a convergence quand l'incrément de solution devient négligeable :

$$\|\Delta X\| < \epsilon. \quad (\text{III.17})$$

Ce critère ne permet pas de détecter si la convergence s'effectue sur un minimum local. Le critère retenu, dit de tolérance absolue, consiste à évaluer une norme du résidu et à considérer que la méthode a convergé lorsque :

$$\|F(X_n)\| < \epsilon \quad (\text{III.18})$$

où  $\epsilon$  est arbitrairement fixé à  $10^{-6}$ . Dans le cas de résolution sur des problèmes dimensionnels, il faut prendre soin de modifier le critère précédent en :

$$\|F(X_n)\| < \epsilon.M \quad (\text{III.19})$$

où  $M$  est une grandeur caractéristique du résidu.

### 1.3.c Line search - Amélioration de la convergence

L'algorithme de résolution de Newton-Raphson est très classique et efficace pour des problèmes faiblement non-linéaires. Néanmoins, le problème d'écoulement non-Newtonien peut présenter des non-linéarités importantes. En particulier quand l'indice puissance  $m$  de la loi de comportement de Carreau (II.121) s'approche de 0. Pour pallier cette difficulté, un algorithme de recherche linéaire basé sur les travaux de [Zienkiewicz et Taylor, 1988] est développé. Il consiste à rechercher un scalaire  $\alpha$  tel que la grandeur  $\{\Delta X\} \cdot \{F\}|_{\{X_n\} + \alpha\{\Delta X\}}$  soit nulle, ce qui est possible au voisinage de la convergence. En pratique,  $\alpha$  est calculé par :

$$\alpha = \frac{\{F_n\} \cdot \{\Delta X\}}{\{F_n\} \cdot \{\Delta X\} - \{F_{n+1}\} \cdot \{\Delta X\}}. \quad (\text{III.20})$$

Si  $\alpha < 1$ , alors le pas  $\Delta X$  est modifié en :

$$\widetilde{\Delta X} = \alpha \Delta X. \quad (\text{III.21})$$

Cette méthode nécessite le calcul d'un résidu  $\{F\}$  supplémentaire. Néanmoins, en accélérant la convergence elle peut économiser des pas de Newton-Raphson, beaucoup plus coûteux puisqu'ils nécessitent l'assemblage de la Jacobienne et la résolution d'un système (III.14).

### Cas test 2 : Écoulement de Poiseuille, loi puissance

Nous considérons un écoulement de poiseuille bi-dimensionnel dans un carré de dimension  $1 \times 1$ . Les vitesses sont nulles sur les bords inférieurs et supérieurs. Les vitesses sont imposées perpendiculaires en entrée et en sortie pour éviter l'effet fontaine qui induirait des singularités au niveau des coins. Une force de traction  $\sigma \cdot \mathbf{n} = -1$  est imposée sur le bord gauche. Une loi

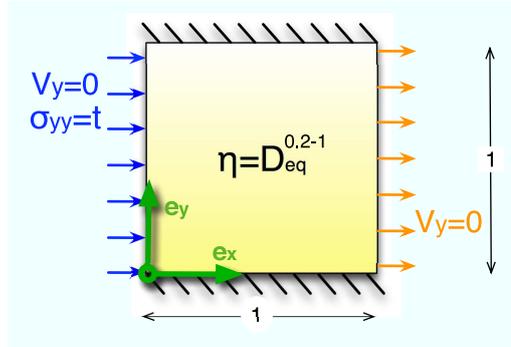


FIG. III.5: Cas test d'écoulement de Poiseuille en loi puissance, conditions limites.

de comportement quasi-newtonienne est utilisée afin d'obtenir un problème d'écoulement non-linéaire. La loi puissance

$$\begin{aligned} \Sigma &= 2\eta(\mathbf{D})\mathbf{D} \\ \eta(\mathbf{D}) &= KD_{eq}^{m-1} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

où  $D_{eq} = \sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}}$  permet une résolution analytique du problème [Agassant et al., 1986]. Nous avons fixé la consistance  $K$  à 1 et l'indice de loi puissance  $m$  à 0.2 afin d'avoir un problème fortement non-linéaire. La résolution numérique a été effectuée avec une interpolation P2/P1 avec et sans l'algorithme de recherche linéaire. Le calcul sans recherche linéaire ne converge pas tandis que le calcul avec recherche linéaire converge avec  $\|\mathbf{F}\| < 10^{-6}$  après 11 itérations. La figure III.6 montre que le champ de vitesse calculé est en accord parfait avec la solution analytique.

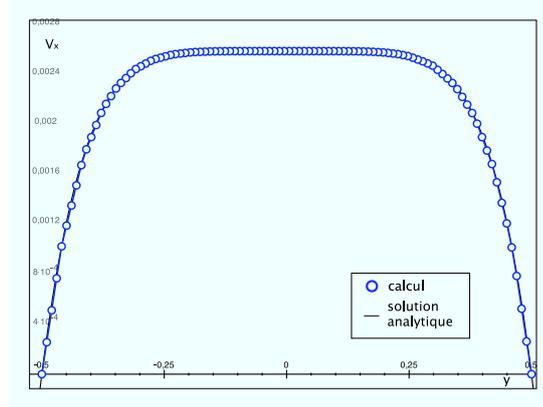


FIG. III.6: Cas test d'écoulement de Poiseuille, profil de vitesses horizontales.

## 1.4 Spécificité du problème thermique

Le problème thermique écrit sous forme faible (III.4) présente un terme de dérivation temporelle.

### 1.4.a Intégration temporelle

La condition à assurer sur le résidu thermique s'écrit :

$$\forall \theta^*, \forall t \mathcal{F}_t(\theta, \theta^*, t) = 0. \quad (\text{III.23})$$

En se limitant à un pas de temps,  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , et en notant  $t' = t - t_n$  et  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  le pas de temps, la résolution incrémentale retenue consiste à chercher  $\theta(t_{n+1})$  connaissant  $\theta(t_n)$ . L'intégration temporelle est assurée par la méthode des résidus pondérés :

$$\forall \theta^*, \forall W(t') \int_0^{\Delta t} W(t') \mathcal{F}_t(\theta, \theta^*, t_n + t') dt' \quad (\text{III.24})$$

où  $W(t)$  est la fonction de pondération temporelle.

**Theta method** On suppose, comme dans [Zienkiewicz et Taylor, 1988] une évolution temporelle affine de la température :

$$\theta = \theta(t_{n+1}) \frac{t'}{\Delta t} + \theta(t_n) \frac{\Delta t - t'}{\Delta t}, \quad (\text{III.25})$$

et :

$$\dot{\theta} = \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_n)}{\Delta t}. \quad (\text{III.26})$$

En choisissant la fonction de pondération  $W(t')$  comme un Dirac :

$$W(t') = \delta(\Theta\Delta t), \quad (\text{III.27})$$

on obtient la formulation dite de la *theta method* où le résidu a annuler s'écrit :

$$\forall \theta^* \mathcal{F}_t(\theta_\Theta, \theta^*, t_n + \Theta\Delta t), \quad (\text{III.28})$$

avec  $\theta_\Theta = \Theta\theta(t_{n+1}) + (1 - \Theta)\theta(t_n)$ .

$\Theta$  varie entre 0 et 1. Si  $\Theta = 0$ , la formulation est explicite, le problème (III.28) est linéaire. Par contre, pour tout  $\Theta < 1/2$ , la résolution n'est stable qu'en assurant une condition sur le pas de temps. Pour  $\Theta > 1/2$ , l'algorithme est inconditionnellement stable. En particulier, une formulation implicite peut être obtenue avec  $\Theta = 1$ . Par contre, le problème à résoudre devient non linéaire si  $\Theta > 0$ .

**Non linéarité** Afin de résoudre le problème non-linéaire précédant dans un cadre de résolution de Newton-Raphson, il est nécessaire de calculer la matrice tangente

$$[J] = \frac{\partial \{F_t\}}{\partial \{X_{n+1}\}} \quad (\text{III.29})$$

où le vecteur inconnu  $\{X_{n+1}\}$  représente le champ de température à l'instant  $t_{n+1}$ , c'est à dire que  $\theta_{n+1} = \{N\}^T \{X_{n+1}\}$ . Cette matrice est constituée de plusieurs contributions. Le détail est développé en annexe C.4. Il montre que certaines contributions originales apparaissent du fait de non linéarités liées à la dépendance des paramètres matériaux à la température. Par exemple, la contribution

$$\Theta \int_{\Omega} \{\nabla N\} \underbrace{\frac{\partial k}{\partial \theta} \nabla \theta_\Theta}_{S_4} \{N\}^T + \Theta \int_{\Omega} \{\nabla N\} \underbrace{k}_{S_3} \{\nabla N\}^T \quad (\text{III.30})$$

amène deux remarques. D'une part, le paramètre  $\Theta$  de la méthode apparaît dans les deux termes. Comme précisé précédemment, la non linéarité du problème dépend donc du schéma d'intégration temporel (de la valeur de  $\Theta$ ). D'autre part, outre la contribution classique issue de la sensibilité  $S_3$ , on note une nouvelle contribution due à la dépendance de la conductivité  $k$  à la température. Cette nouvelle contribution issue de la sensibilité  $S_4$  est assemblée de manière non symétrique (opérateur gradient à gauche et identité à droite). La matrice tangente qui en résulte est donc non symétrique. Il faudra prendre soin, à la résolution du pas de Newton-Raphson, d'utiliser un solveur linéaire pour matrice non-symétriques.

### Cas test 3 : Choc thermique

Un rectangle de largeur  $l = 1$  et de longueur  $L = 10$ , de capacité calorifique  $\rho c = 1$  et de conductivité thermique  $k = 1$  est initialement à la température uniforme  $T = 0$ . La température sur une des largeurs est maintenue à 1 et toutes les autres frontières sont laissées libres, c'est à dire isolées.

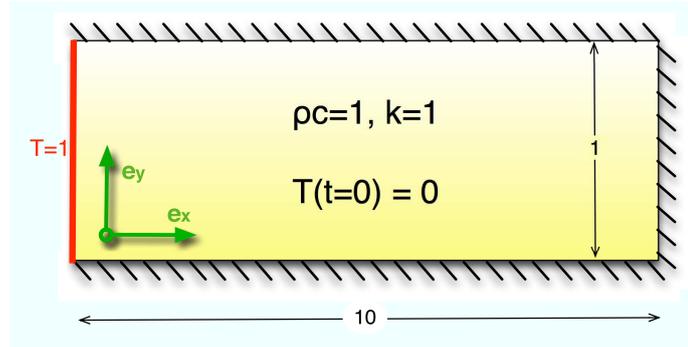


FIG. III.7: Cas test du choc thermique, conditions limites.

Le problème est résolu par un schéma d'intégration temporelle implicite :  $\Theta = 1$  et une intégration spatiale P1. La solution analytique du problème est connue [Carslaw et Jaeger, 1959] dans le cas d'un espace semi-infini :

$$T(x, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{kt}{\rho c}}}\right) \quad (\text{III.31})$$

Afin de la comparer à cette solution, nous considérons la résolution sur un intervalle de temps  $[0, t_f]$  avec 50 pas de temps égaux, où  $t_f$  est très inférieur au temps caractéristique de diffusion dans le rectangle qui vaut  $L^2 k / (\rho c) \sim 100$ . Nous prenons  $t_f = 1$ . La figure III.8 montre le profil de température sur l'axe central du rectangle à différents instants. Il y a une bonne adéquation avec la solution analytique. Les erreurs sont de l'ordre de la discrétisation, ici la taille des éléments est de l'ordre 0.1. Il faut noter que ce cas test du choc thermique est très sévère sur les premiers instants où tout le gradient de température est concentré dans les premiers éléments.

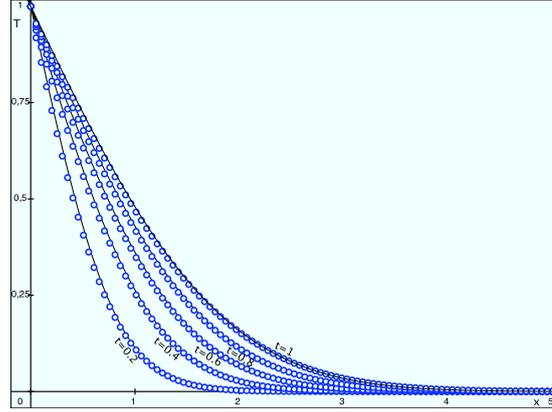


FIG. III.8: Cas test du choc thermique, profils de température à différents instants.

#### 1.4.b Convection / SUPG

**Champ test** Dans le problème thermique complet, le terme de transport

$$\int_{\Omega} \theta^* \rho c (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) \quad (\text{III.32})$$

de la formulation faible (III.4) fait perdre le caractère elliptique pur du problème. Si le caractère hyperbolique induit par ce terme convectif devient trop important, la résolution numérique par une méthode de Galerkin classique ne converge pas vers la solution et des instabilités oscillantes, visibles sur la figure III.10b, apparaissent. Afin de stabiliser la solution, la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) est proposée, initialement par Brooks et Hughes [Brooks et Hughes, 1982]. Ces auteurs proposent une modification des fonctions test de la forme :

$$\{\theta^*\} = \{N_t\} + \tau_{supg} \{\nabla N_t\} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{III.33})$$

Le second terme de cette définition ajoute donc une diffusion artificielle au problème thermique hyperbolique, et ce, seulement dans la direction de la convection. Le facteur  $\tau_{supg}$  est déterminé par Brooks et Hughes sur un cas unidimensionnel :

$$\tau_{supg} = \frac{1}{2} \frac{h_e}{\|v\|_e} \left( \coth(P_e) - \frac{1}{P_e} \right) \quad (\text{III.34})$$

où  $h_e$  est la taille de l'élément,  $\|v\|_e$  la moyenne de vitesse dans l'élément et  $P_e$  est le nombre de Péclet de maille, défini par :

$$P_e = \frac{h_e \|v\|_e}{2k}. \quad (\text{III.35})$$

**Calcul du résidu** Le résidu  $F_t$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 F_t(\theta) = & \int_{\Omega} \left[ \underbrace{N\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{N\rho c \nabla \theta \cdot \mathbf{v}}_{(2)} + \underbrace{\nabla N \cdot \mathbf{q}}_{(3)} - \underbrace{NQ}_{(4)} \right] \\
 & + \int_{\Omega} \tau_{supg} \left[ \underbrace{\nabla N \cdot \mathbf{v} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}}_{(5)} + \underbrace{\nabla N \cdot \mathbf{v} \cdot \rho c \nabla \theta \cdot \mathbf{v}}_{(6)} + \underbrace{\nabla \nabla N(\mathbf{q})}_{(7)} - \underbrace{\nabla N \cdot \mathbf{v} Q}_{(8)} \right]
 \end{aligned}
 \tag{III.36}$$

Les termes (1), (3) et (4) sont les termes classiques du résidu de la formulation de diffusion transitoire traitée dans le paragraphe précédant. Seule la contribution hyperbolique (2) induit l'oscillation dans la résolution. Les termes (5) et (7) sont négligés pour ne conserver de la méthode SUPG que les termes de stabilisation suivant : la contribution (6) liée au terme hyperbolique et la contribution (8), liée à la source  $Q$ . Russo [Russo, 2006] dans la résolution du problème en régime permanent ne tient pas non plus compte du terme (7). Il semble que ce soit une pratique courant bien que peu justifiée mathématiquement.

Pour alléger l'écriture du résidu (III.36), les notations liées au schéma d'intégration temporel ont été abandonnées. Néanmoins, le lecteur doit garder à l'esprit que chaque variable  $\phi$  est calculée en fonction de  $\Theta$  par

$$\phi = \Theta \phi_{n+1} + (1 - \Theta) \phi_n
 \tag{III.37}$$

où  $\phi$  désigne  $\rho c$ ,  $q$ , ou  $\theta$ . Par contre,  $\mathbf{v}$  est considéré comme fixe lors de la résolution thermique. Ce ne serait plus le cas avec une résolution forte avec couplage entre la thermique et la mécanique des fluides, si le schéma de résolution est semi-implicite ( $\Theta > 0$ ).

**Matrices tangentes** Le calcul de la matrice tangente complète est développé en annexe C.4. Le terme issu de la dérivation de (6), bien que faisant intervenir une sensibilité originale  $\tau_{supg} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ , est une matrice symétrique. Par contre, le terme issu de la dérivation de (2) est une matrice non symétrique. Les mêmes précautions sont à prendre quant à la résolution du problème non symétrique qui en résulte.

---

#### Cas test 4 : Convection diffusion

*Un champ de vitesse uniforme  $\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{e}_x$  est appliqué sur un carré de coté 2. Le matériau a une diffusivité  $\alpha$  et une source uniforme  $s = 1$ . La température*

des deux cotés latéraux du carré est imposée à 0, les deux autres cotés sont isolés.

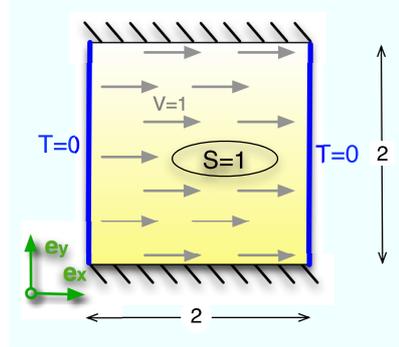
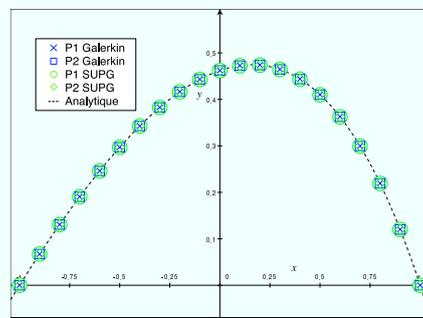
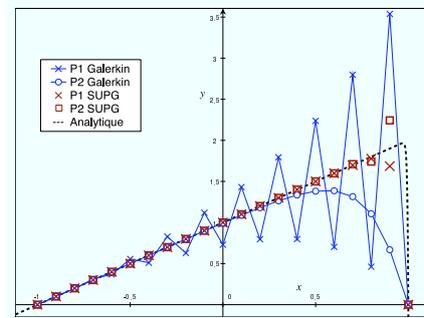


FIG. III.9: Cas test de convection diffusion, conditions limites.

Le problème est résolu en régime permanent. La figure III.10a montre les résultats obtenus pour une forte diffusivité  $\alpha = 1$  où le nombre de Péclet est faible. Quel que soit l'interpolation utilisée, la méthode SUPG est inutile puisque le problème est principalement elliptique. La solution de Galerkin est alors très proche de la solution analytique. Par contre, la figure III.10b montre les résultats pour une diffusivité plus faible,  $\alpha = 0,05$  et un nombre



(a) Pour  $\alpha = 1$ , faible nombre de Péclet



(b) Pour  $\alpha = 0.05$  nombre de Péclet fort.

FIG. III.10: Cas test de convection diffusion.

de Péclet plus important. La résolution par la méthode de Galerkin montre des oscillations très importantes (environ 100%) de la solution obtenue à l'aide d'une interpolation P1. Une interpolation du second ordre permet de stabiliser la solution, mais l'erreur reste importante (plus de 30% en de nombreux points). Avec la méthode SUPG seuls les derniers points présentent une erreur qui n'est due qu'à la taille des éléments.

**Bilan sur la résolution d'un problème thermique transitoire** Les méthodes présentées pour résoudre le problème de thermique transitoire sont déjà relativement singulières. L'association d'une theta-method à une interpolation SUPG dans un cadre de résolution non-linéaire de Newton Raphson nécessite le développement de quelques calculs non-triviaux (cf. annexe C.4). La résolutions nécessite alors l'inversion d'un système linéaire non-symétrique : d'une part à cause de la dépendance des paramètres matériaux à la température et d'autre part à cause de la formulation SUPG.

Cette section a consisté à présenter les outils numériques standards mis à contribution dans le code élément fini développé. Ils permettent de s'affranchir de quelques spécificités du problème à traiter : la forte non-linéarité de la loi de comportement ou la présence du terme hyperbolique dans l'équation de la chaleur avec transport. Même si l'association de ces méthodes demande une certaine rigueur dans le développement des calculs, elles restent classiques et sont déjà développées dans de nombreux codes éléments finis. L'outil développé présente cependant quelques spécificités détaillées ci-après.

## 2 Méthodes numériques spécifiques utilisées

### 2.1 Géométrie et level-set

Le problème d'écoulement (II.120) permet de déterminer l'évolution de la géométrie du directeur. Nous avons déjà souligné le fait que la déformation est importante. Plusieurs techniques existent pour simuler les grandes déformations à l'aide d'une méthode par éléments finis. Nous rappelons que nous avons opté pour un cadre eulérien pour éviter les étapes de remaillage et de projection inévitables dans une description lagrangienne. La stratégie consiste ici à décrire la géométrie à l'aide d'une interface mobile sur un maillage fixe.

#### Revue des méthodes existantes

Certains auteurs cités par Ammar [Ammar, 2001], proposent de décrire la surface libre à l'aide d'une fonction géométrique de l'espace. Ammar conclut que cette méthode pose des problèmes lors du passage en trois dimensions, ou pour la description de surfaces complexes. La méthode des marqueurs consiste à répartir des particules dans la zone de l'espace remplie par le fluide. Ces particules sont convectées par le fluide. La surface libre est alors déterminée par la limite entre les zones avec et sans marqueurs. Cette méthode reste peu précise bien qu'elle nécessite le stockage de la position de chaque marqueur.

La méthode VoF (Volume of Fluid) initialement proposée par Hirt et Nichols [Hirt et Nichols, 1981] consiste à définir, à l'aide d'un nouveau champ  $I$ , le taux de remplissage des éléments. On a alors  $I = 1$  pour les éléments intégralement dans le fluide,  $I = 0$  pour les éléments intégralement à l'extérieur de la matière et  $0 < I < 1$  si l'élément est coupé par le front de matière. En supposant que l'on connaisse le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ , on peut simplement écrire la loi d'évolution du champ  $I$  à l'aide d'une équation de convection pure :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I = 0 \quad (\text{III.38})$$

Bien que le champ  $I$  ait une définition bien physique, il ne permet pas de déterminer précisément la position du front de matière (si ce n'est à un élément près). Or, dans notre application, la description précise de la surface libre est nécessaire pour déterminer l'éventuelle formation de porosité et gérer le problème de contact.

### 2.1.a La distance algébrique comme level-set

La méthode des level-sets consiste à définir une interface à l'aide d'un champ scalaire  $\psi$  positif à l'extérieur du matériau (dans l'air) et négatif à l'intérieur (le polymère). L'iso-valeur 0 du champ, appelée par la suite "iso-zéro", coïncide alors avec la surface libre. Un cas particulier est celui où la level-set correspond à la distance algébrique à l'interface. Nous adoptons cette définition pour des raisons pratiques, en particulier pour la gestion du contact, comme décrit en annexe D. Le gradient de  $\psi$  représente la normale aux surfaces d'iso-distance et est alors normé :

$$\|\nabla\psi\| = 1, \quad \mathbf{n} = \nabla\psi. \quad (\text{III.39})$$

**Mise en œuvre** Dans le cadre eulérien retenu, l'ensemble du domaine, constitué du polymère et de l'air, est maillé. Deux stratégies existent alors. La première consiste à adopter une résolution dite *matériau / vide* où la résolution n'est faite que sur le domaine contenant le polymère. La seconde est une résolution dite *inclusion / matériau*. La résolution se fait sur l'ensemble du domaine constitué du polymère et de l'air. C'est lors de l'intégration que les paramètres matériaux utilisés diffèrent suivant le signe de la level-set. Cette approche permet de décrire une éventuelle porosité ou bulle d'air. En outre, d'un point de vue pratique, elle permet de conserver le même nombre de degrés de liberté lors du déplacement de l'interface. C'est cette approche qui est finalement retenue, où le champ level-set est défini par une interpolation P1. Il faut noter que l'intégration se fait en sous-découpant les éléments traversés par l'interface, tel que présenté dans [Moës et al., 1999].

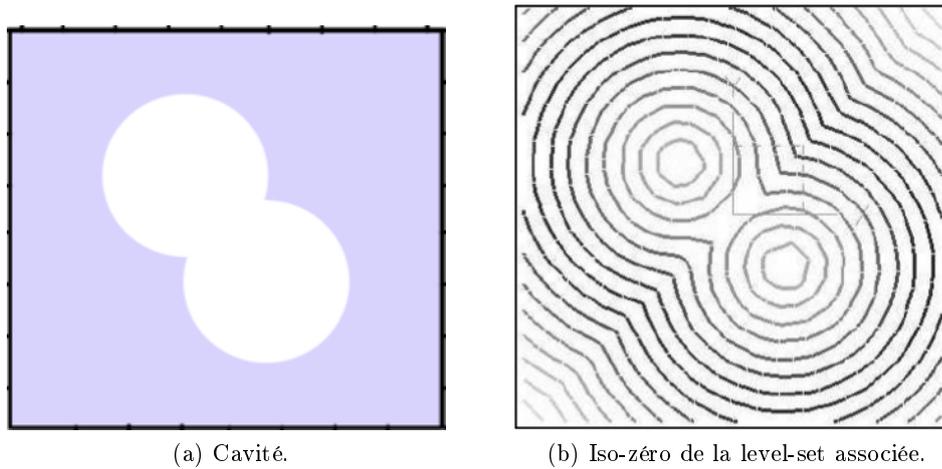


FIG. III.11: Exemple d'une level-set décrivant une cavité.

**Avantages** La description d'interface par level-set est pratique car elle peut être traitée puis stockée comme un champ physique. Les méthodes numériques existantes peuvent ainsi être mises à profit. De plus, elle permet de décrire l'interface de manière précise. Par exemple, avec une interpolation P1, l'interface est décrite par un segment (ou un triangle en trois dimensions) dans chaque élément. En outre, la description de l'interface à l'aide d'une fonction distance permet naturellement la rencontre de deux interfaces. Nous pouvons citer l'exemple d'union ou de séparation de bulles calculé par Smolianski [Smolianski, 2005].

La description de l'interface à l'aide d'une level-set est plus précise que par une méthode des VoF. De plus, la définition de la level-set comme la distance algébrique à l'interface peut être utile à d'autres méthodes numériques comme la gestion du contact.

### 2.1.b Propagation

**Convection** L'évolution de la géométrie se fait par le déplacement de l'interface. De manière analogue à la propagation du champ de taux de remplissage dans une description VoF, la propagation de l'interface décrite par une level-set se fait par simple convection du champ  $\psi$ .

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (\text{III.40})$$

où  $\mathbf{v}$  est le champ de vitesse.

**Hamilton Jacobi** L'équation de convection (III.40) n'est pas résolue directement, mais est modifiée en :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_n = 0 \quad (\text{III.41})$$

où  $v_n$  est la vitesse normale aux iso-valeurs de la level-set. Sur l'interface,  $v_n$  est donc la vitesse normale à l'interface. Cette équation est résolue à l'aide d'une méthode de Hamilton Jacobi [Sethian, 1999]. Elle nécessite de connaître la vitesse normal partout sur le maillage.

**Condition CFL** C'est cette étape de convection qui fixe un pas de temps maximal possible. Nous imposons une condition CFL [Courant et al., 1967] où le nombre de Courant  $C_0$  est inférieur à 0,5 :

$$C_0 = \frac{\|v\| \Delta t}{h_e} < 0,5. \quad (\text{III.42})$$

Ceci permet de s'assurer que l'interface ne se déplace pas de plus d'un élément en un pas de temps et garantit la stabilité de la propagation.

**Réinitialisation** Après convection du champ level-set  $\psi$ , la propriété  $\|\nabla \psi\| = 1$  n'est pas conservée. Le champ level-set ne représente alors plus une distance. Bien que l'iso-zéro décrive toujours l'interface, nous souhaitons conserver cette propriété de distance, d'une part parce qu'elle s'avèrera utile à d'autres méthodes numériques comme le contact, et d'autre part car en décrivant une distance, on s'assure d'une certaine régularité du champ qui nous évite des divergences numériques. Pour ce faire, une réinitialisation de la level-set est opérée après chaque étape de propagation.

---

### Cas test 5 : Bulle dans un écoulement de poiseuille

*Nous considérons un écoulement de poiseuille bidimensionnel dans un rectangle de dimension  $2 \times 1$ . La vitesse est imposée nulle sur les longueurs du rectangle et est imposée perpendiculaire à l'entrée et à la sortie. Un effort de traction perpendiculaire de valeur 1 est appliqué en entrée. Une bulle est initialement définie par une level-set dont l'iso-zéro est un cercle de diamètre 0,5 dont le centre est sur l'axe, à 0,3 de l'entrée. Les deux matériaux ont un comportement newtonien. Le matériau à l'intérieur de la bulle à une viscosité de 0,5 et le matériau l'englobant une viscosité de 10. A chaque pas de temps, le problème visqueux statique est résolu, puis l'interface est propagée. La résolution est effectuée sur l'intervalle temporel  $[0; 160]$ . Les pas de temps*

sont déterminés à chaque itération par la condition CFL. La figure III.12a montre l'iso-zéro de la level-set à différents instants. La figure III.12b montre bien que la contrainte de cisaillement dans la bulle est négligeable par rapport à la contrainte à l'extérieur du fait de la différence des viscosités.

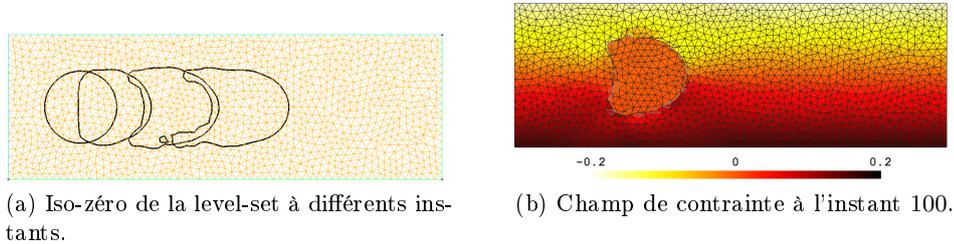


FIG. III.12: Cas test de la bulle dans un écoulement de Poiseuille.

### 2.1.c Enrichissement à l'interface

Étant donné le point de vue eulérien retenu, l'interface ne passe pas nécessairement par les nœuds du maillage. Or, le champ solution peut éventuellement présenter des discontinuités au niveau de l'interface. Les interpolations standard ne permettent donc généralement pas de décrire la solution de manière optimale, comme le montre la figure III.12 ou III.13. Afin d'améliorer la description de la solution, deux techniques sont envisageables.

1. Le raffinement du maillage au niveau de l'interface. Dans le cas d'une interface mobile, des algorithmes de raffinement automatique sont nécessaires. Ceci entraîne donc des étapes de projections, qui font finalement perdre l'attrait de l'approche eulérienne par rapport à une approche lagrangienne.
2. La méthode X-FEM qui consiste à enrichir l'interpolation des champs à l'aide de fonction présentant les discontinuités recherchées [Sukumar et al., 2001]. De telles résolutions X-FEM sont présentées en annexe E. Néanmoins, nous verrons dans la section 3.1.a que le déplacement de l'interface pose des problèmes d'implémentation qui n'ont pu être résolus à ce jour.

Pour résumer, la méthode des level-sets permet de décrire de manière optimale une interface dans un cadre eulérien. La propagation de l'interface se fait en résolvant une équation de convection classique à l'aide de méthodes numériques éprouvées. La description par level-set permet en outre une gestion plus aisée du contact.

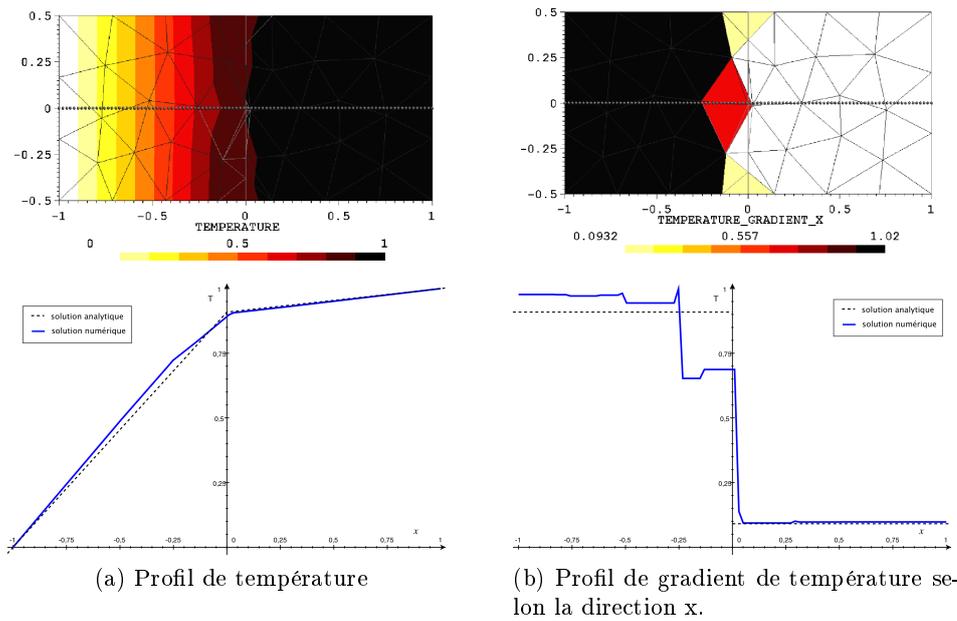


FIG. III.13: Erreur à l'interface de deux matériaux sur le champ thermique calculé à l'aide d'une interpolation P1 sans enrichissement.

## 2.2 Contact

Nous avons expliqué en introduction que la gestion du contact est nécessaire pour une meilleure description de la physique et pour d'éventuelles considérations de phénomènes de cicatrisation. D'un point de vue numérique, la description d'une géométrie telle que celle présentée figure III.14, n'est pas possible avec une unique level-set. Si le contact de deux interfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  a lieu dans un élément  $e_1$ , une unique level-set  $\psi$  de degré 1, ne permet pas de décrire ces deux interfaces. De même, Guetari [Guetari, 2005] montre que la description d'un coin dans un élément à l'aide d'une unique level-set entraîne un rognage : sans traitement particulier, les coins sont généralement biseau-

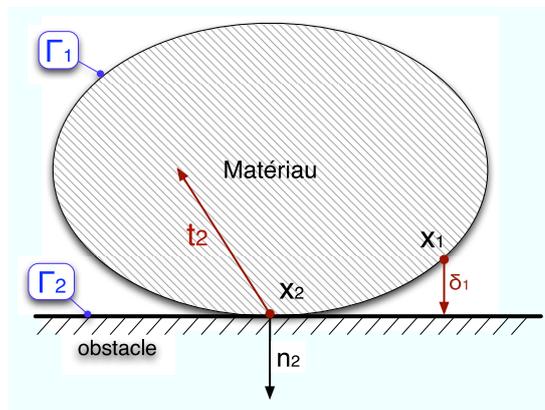


FIG. III.14: Définition d'un contact.

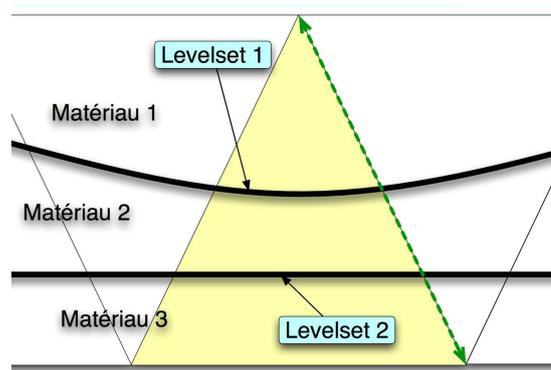
tés. Nous proposons donc dans cette section deux méthodes numériques de gestion du contact dans une résolution éléments finis eulérienne.

### 2.2.a Contact naturel

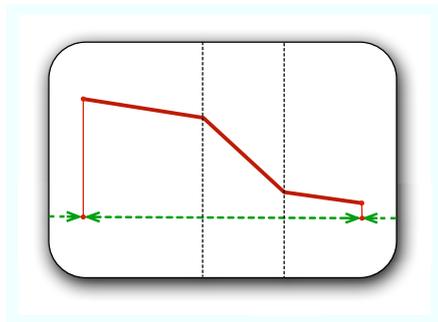
La première technique, la plus simple, consiste à décrire les deux surfaces à l'aide de deux level-sets distinctes que l'on propage successivement. Dans le cadre eulérien retenu, il n'existe qu'un seul champ de vitesse. Les deux surfaces libres peuvent se rapprocher, mais si elles sont en contact, chaque point de la surface possède la même vitesse. Les deux matériaux ne peuvent donc pas s'interpénétrer. En outre, la continuité du champ ne permet pas de traiter le contact glissant sans enrichissement.

**Limite** Si les deux surfaces libres évoluent librement, certains éléments sont traversés par les deux iso-zéros (cf. figure III.15a). Une interpolation classique linéaire ou même un enrichissement à l'aide d'une discontinuité de gradient ne permet pas de décrire les deux discontinuités de gradients aux interfaces. La figure III.15b montre qu'une interpolation originale, autorisant deux discontinuités de gradient dans l'élément, est nécessaire. Un sous-découpage adéquat de l'élément serait alors indispensable pour évaluer précisément les intégrales (cf. fig. III.15c). De plus, le déplacement des level-sets poserait toujours le problème d'implémentation lié au transport de discontinuités traité section 3.1.a. Le cas test suivant permet de confirmer la nécessité d'un enrichissement spécifique.

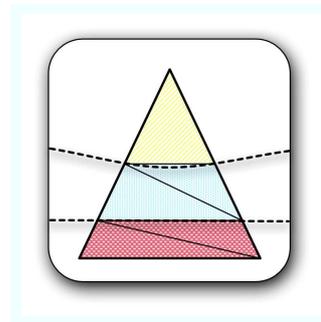
Un traitement complet de ce type de problème est envisageable, mais les traitements numériques associés sont très complexes et devront faire l'objet d'approfondissements ultérieurs.



(a) Deux level-sets traversent un élément.



(b) Interpolation avec enrichissement spécifique.



(c) Double sous-découpage.

FIG. III.15: Cas de deux interfaces traversant un élément.

### Cas test 6 : Contact entre deux level-sets mobiles

Dans un rectangle de dimension  $1 \times 1$ , deux level-sets initiales représentent deux demi-cercles de fluide newtonien de viscosité 5 (cf. figure III.16). L'air

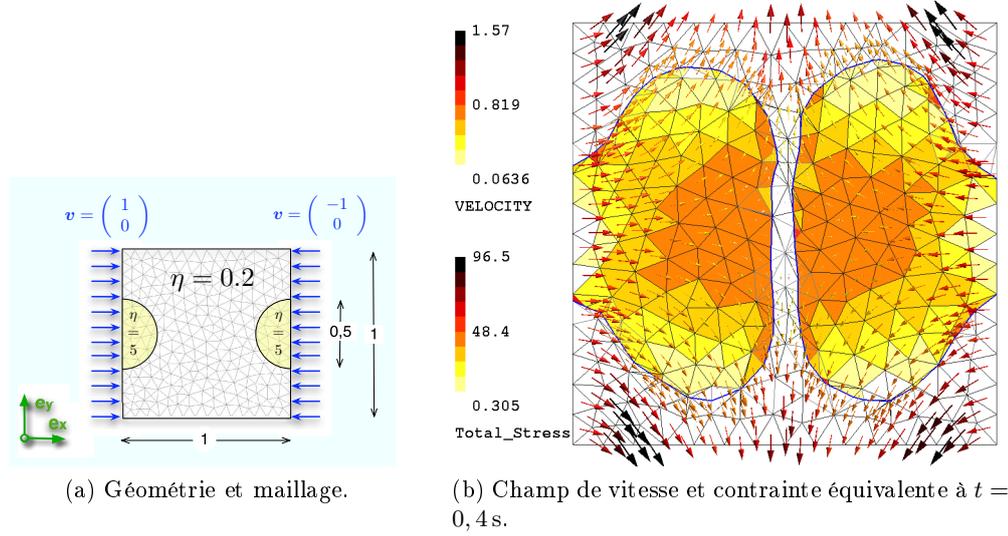


FIG. III.16: Contact entre deux level-set mobiles.

environnant est supposé newtonien de viscosité 0,2. Sur les deux frontières gauches et droites, la vitesse est imposée normale entrante, de norme 1. Les deux frontières supérieure et inférieure sont laissées libres pour permettre à l'air de s'échapper. Le maillage est grossier afin de mettre en exergue les défauts lors du contact. On observe que lorsque les surface libres atteignent les mêmes éléments au centre, l'interpolation  $P1+/P1$  ne permet plus aux level-sets de se rapprocher. Le contact est en quelque sorte anticipé à la taille de l'élément près.

#### 2.2.b Méthode de pénalité

Afin de contourner cette difficulté, une méthode plus classique de contact sur surface analytique est envisagée. En considérant qu'un matériau limité par l'interface  $\Gamma_1$  entre en contact avec une surface analytique  $\Gamma_2$ , les conditions de contact, qui doivent être assurées en chaque point  $\mathbf{x}$  de l'interface  $\Gamma_1$ , sont résumées par le système suivant :

$$\begin{cases} t = 0 & \text{si } \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} < 0 \\ \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{si } \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante,  $\mathbf{t}$  est la force exercée par l'obstacle sur le matériau et  $\delta$  est le vecteur distance du point  $\mathbf{x}$  à l'obstacle. Ces définitions sont résumées sur la figure III.14. Le système précédent résume la condition simple qui consiste à dire que s'il n'y a pas contact, l'effort de l'obstacle sur le matériau est nul, et si cet effort n'est pas nul, il y a contact. De plus, l'effort de contact est répulsif et il ne peut pas y avoir de pénétration.

**État de l'art** Le système (III.43), exprimé sous forme d'inégalités, est fortement non-linéaire. De nombreuses méthodes existent pour le résoudre numériquement. Belytschko et Neal [Belytschko et Neal, 1991] ou Chaudhary et Bathe [Chaudhary et Bathe, 1986] proposent une méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode rigoureuse est relativement similaire à la gestion de la condition d'incompressibilité du problème de mécanique des fluides. Elle demande un effort d'implémentation important qui passe par la définition d'un nouveau vecteur d'inconnues, les multiplicateurs de Lagrange. Dans le contexte X-FEM, l'imposition de ces multiplicateurs nécessitent la recherche d'un espace d'approximation adéquat tel que proposé dans [Moës et al., 2006]. Kikuchi et Oden [Kikuchi et Oden, 1988] proposent une méthode de pénalisation reprise par Perić et Owen [Perić et Owen, 1992].

**Principe** Cette méthode de pénalisation, plus simple à implémenter, a été testée [Guetari, 2005, Dubois et al., 2009, Levy et al., 2009]. Elle consiste à autoriser une pénétration du matériau dans la surface analytique et à appliquer un effort de contact dépendant de cette pénétration. La force de contact induit donc un terme fortement non-linéaire dans le problème. Alors que la méthode classique consiste à imposer un effort de contact proportionnel à la pénétration, une régularisation est possible avec un effort proportionnel au carré de la pénétration. L'efficacité de la méthode étant très dépendante du choix du coefficient de pénalisation, il est déterminé à l'aide de la matrice tangente du résidu volumique. Ceci permet d'obtenir un coefficient qui soit en accord avec le problème physique global. En effet, les efforts de contact ne peuvent pas être déterminés localement puisqu'ils dépendent du problème complet. Le détail de la méthode et de l'implémentation est donné en annexe D.

### 2.2.c Discussion

La méthode de contact par pénalité permet une implémentation rapide sans nécessiter de stockage numérique supplémentaire. Dans le cadre retenu de définition des surfaces par level-set, elle est très efficace, puisque la pénétration est directement connue en chaque point, via le champ level-set. Néanmoins, nous avons considéré que le matériau vient au contact d'une surface analytique. Cette surface ne définit pas de matériau

et possède donc les propriétés de l'air dans le formalisme que nous nous sommes donné. D'autre part, cette surface analytique décrit un obstacle indéformable. Afin de simuler le contact de deux corps déformables, des développements supplémentaires sont nécessaires. Une résolution itérative avec interface maître et interface esclave semble alors incontournable.

La résolution du problème avec contact pénalisé ajoute une forte non-linéarité au problème et nécessite une dizaine d'itérations de Newton-Raphson avant convergence, comme le montre le cas test en annexe D.

### 2.3 Résolution multiphysique

Le problème à résoudre, inspiré par l'approche d'homogénéisation, est un problème multiphysique. Les trois formulations présentent de nombreux couplages (cf. § II.3.3.d). Cette section présente les schémas de résolutions retenus et les méthodes spécifiques associées.

#### 2.3.a Résolution itérative

Dans le problème multiphysique général, en notant  $\{X\}$  le vecteur solution concaténé

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} X_u \\ - \\ X_\theta \\ - \\ X_v \\ X_p \end{array} \right\}, \quad (\text{III.44})$$

la résolution consiste à annuler le résidu général

$$F(\{X\}) = 0. \quad (\text{III.45})$$

En posant le problème non-linéaire de façon globale, à chaque itération de Newton-Raphson, il s'agit de résoudre le système :

$$[J] \{X\} = \{b\} \quad (\text{III.46})$$

où  $[J]$  est la matrice tangente globale qui s'écrit par blocs :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_e}{\partial X_u} & \frac{\partial F_e}{\partial X_\theta} & \frac{\partial F_e}{\partial X_v} & \frac{\partial F_e}{\partial X_p} \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial X_u} & \frac{\partial F_\theta}{\partial X_\theta} & \frac{\partial F_\theta}{\partial X_v} & \frac{\partial F_\theta}{\partial X_p} \\ \frac{\partial F_v}{\partial X_u} & \frac{\partial F_v}{\partial X_\theta} & \frac{\partial F_v}{\partial X_v} & \frac{\partial F_v}{\partial X_p} \\ \frac{\partial F_p}{\partial X_u} & \frac{\partial F_p}{\partial X_\theta} & \frac{\partial F_p}{\partial X_v} & \frac{\partial F_p}{\partial X_p} \end{bmatrix} \quad (\text{III.47})$$

Plutôt que de résoudre ce problème global de manière directe nous proposons une résolution itérative.

**Gauss-Seidel** La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de type point fixe pour la résolution de systèmes linéaires. Elle permet d'inverser le problème précédent en cherchant le vecteur solution  $\{X\}$  de manière itérative à l'aide de la suite :

$$([D] - [L]) \{X_{n+1}\} = [U] \{X_n\} + \{F\}. \quad (\text{III.48})$$

où  $[D]$  est la partie diagonale par bloc de  $[J]$ ,  $[L]$  sa partie triangulaire inférieure par bloc et  $[U]$  sa partie triangulaire supérieure par bloc, de sorte que :

$$[J] = [D] - [L] - [U] \quad (\text{III.49})$$

Une itération de Gauss-Seidel consiste à opérer une descente sur chaque bloc de la matrice  $[J]$ . Dans la définition (III.44), la descente consiste à calculer successivement chaque  $\{X_i^{n+1}\}$  à l'aide des  $\{X_j^n\}$ , ou des  $\{X_j^{n+1}\}$  s'ils ont déjà été calculés. Chacune de ces résolutions est une résolution éléments finis d'une des physiques. La méthode de Gauss-Seidel consiste finalement à résoudre successivement chaque problème physique en réactualisant les matrices tangentes  $[J_i]$  à chaque fois. Cette méthode a l'avantage de nécessiter le stockage d'un seul vecteur solution à chaque instant :

$$\begin{pmatrix} X_1^{n+1} \\ X_2^{n+1} \\ \vdots \\ X_{i-1}^{n+1} \\ X_i^n \\ \vdots \\ X_{N_p}^n \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

(où  $N_p$  est le nombre de physiques) mais ne permet pas une résolution parallèle, contrairement à une méthode plus classique de Jacobi.

**Algorithme développé** Nous nous basons sur cette méthode pour proposer l'algorithme de résolution itératif schématisé figure III.17b. Il consiste à résoudre successi-

vement chaque physique, à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson au cas où elle est non-linéaire, et ce jusqu'à ce que l'ensemble des résidus ait convergé au sens défini précédemment (§ 1.3.b).

La convergence de l'algorithme de Gauss-Seidel n'est assurée que sous certaines conditions. Une condition suffisante est que la matrice tangente soit à dominante diagonale. De même, l'algorithme proposé n'est adapté que pour un couplage faible entre les problèmes physiques.

Afin d'optimiser la convergence de la méthode, l'ordre de concaténation du vecteur  $\{X\}$  (III.44) a un rôle important. Ainsi, la matrice  $[J]$ , donnée formule (III.47), doit être le plus proche possible d'une matrice triangulaire inférieure. De manière plus pragmatique, dans notre cas, la résolution de l'élasticité doit se faire en premier afin de résoudre au mieux le problème thermique avec terme source, pour finir par l'écoulement fortement thermo-dépendant.

### 2.3.b Operator Splitting

La résolution globale du problème multiphysique se fait sur une géométrie en évolution. Toutefois, la résolution s'effectue à chaque pas de temps sur un domaine fixe, de manière lagrangienne avant de propager la level-set. Dans un souci de cohérence, nous appliquons donc la méthode de l'operator splitting proposée par Smolianski [Smolianski, 2005]. Le problème de conduction convection est résolu en deux temps. Un problème de diffusion, défini de manière lagrangienne, est résolu sur un domaine fixe à l'aide de la méthode itérative présentée. Un problème de convection pure est résolu, après déplacement de l'interface, afin de transporter le champ de température. Par contre, les champs mécaniques n'ont pas besoin d'être transportés. En effet, les problèmes mécaniques sont résolus en statique et toutes les variables associées peuvent être recalculées à chaque instant.

**Cohérence** Le problème de convection pure

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \theta \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{III.51})$$

ne fait intervenir aucune variable matériau. Sa solution est donc identique quelle que soit la position de la level-set. Ainsi l'ordre dans lequel la propagation de la level-set et la convection du champ thermique sont effectuées n'est pas déterminant.

**Schéma de résolution retenu** Le schéma de résolution du problème multiphysique avec déplacement d'interface est récapitulé sur la figure III.17. A chaque pas de temps,

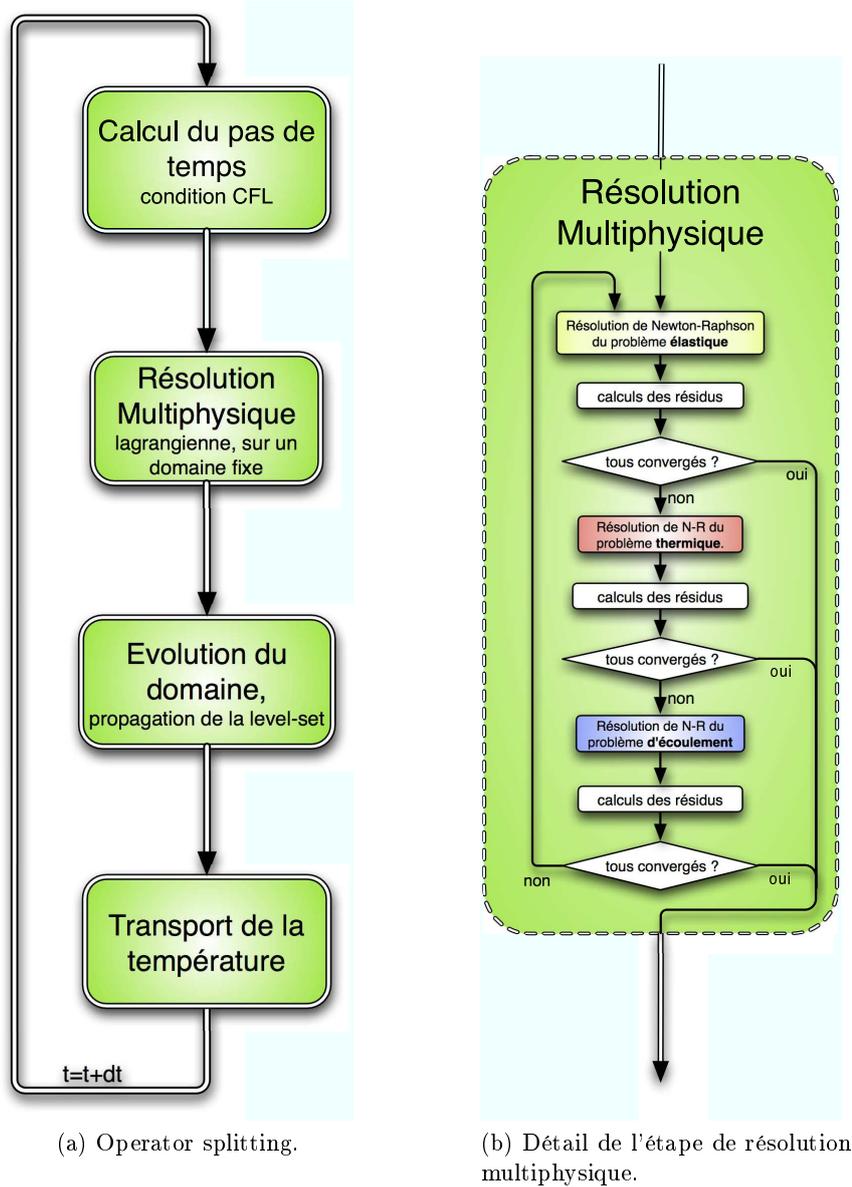


FIG. III.17: Schéma de résolution d'un problème multiphysique.

déterminé à l'aide de la condition CFL, le problème est résolu de manière itérative, le champ de vitesse obtenu permet alors de propager l'interface, et enfin, le champ de température, qui est le seul champ présentant des variables d'histoire, est convecté à l'aide d'une méthode SUPG (cf. § 1.4.b).

**Bilan** La spécificité des problèmes obtenus à la fin de la partie précédente impose l'utilisation de méthodes numériques spéciales. Bien que chacune des méthodes présentées soit relativement standard, c'est l'utilisation simultanée de tous ces outils qui fait l'originalité du code développé. L'interaction entre ces différentes techniques présente quelques difficultés d'implémentation. La section suivante expose les choix effectués quant à cette implémentation.

### 3 Implémentation

Bien qu'adapté à la résolution du problème d'écoulement à l'interface dans le procédé de soudage US, notre code est développé de manière suffisamment générique pour permettre d'autres simulations multiphysiques. C'est pourquoi, dans cette section, l'implémentation du code multiphysique est abordée de manière générique. La base utilisée, la librairie éléments finis X-FEM, est d'abord présentée. L'architecture du code est ensuite développée pour enfin présenter la résolution d'un cas d'école. Cette section est donc une partie génie logiciel. L'application à notre problème spécifique n'apparaît que dans le chapitre suivant.

#### La librairie X-FEM

##### Historique

La méthode X-FEM est utilisée pour résoudre des problèmes où la géométrie présente des singularités. Elle consiste à ne pas mailler la géométrie, mais à autoriser des discontinuités des champs au niveau de la singularité. Initialement, elle est utilisée pour des problèmes de mécanique de la rupture qui sont résolus sans maillage de la fissure. Une level-set décrit la géométrie de la fissure. L'enrichissement des fonctions d'interpolations, à l'aide d'une fonction discontinue Heavyside au niveau de l'iso zéro de la level-set, permet de décrire le saut de déplacement entre les deux lèvres de la fissure [Moës et al., 1999]. Une seconde level-set, appelée fonction racine, est nécessaire pour décrire la pointe de fissure. La méthode X-FEM est aujourd'hui synonyme d'enrichissement + level-set. Elle est par exemple utilisée pour décrire des interfaces matériaux où les champs sont à dérivées discontinues (cf. annexe E). La librairie C++ d'éléments finis X-FEM a été développée spécifiquement pour résoudre de tels problèmes. C'est sur celle-ci que nous nous basons pour construire notre code multiphysique.

## Avantages

Ce choix est motivé par les nombreux avantages que possède cette librairie :

- Les level-sets sont implémentées. Les algorithmes de propagation et la possibilité de gestion de front de matière sont déjà intégrés à la librairie.
- Du fait de ses objectifs initiaux, elle présente une très grande flexibilité quand aux interpolations utilisées.
- La structure sous forme de librairie permet de développer un code très versatile. En particulier nous restons parfaitement maîtres des interpolations, des formulations et des lois de comportement.
- La gestion du contact par pénalité à déjà été expérimentée.
- Il est envisageable d'enrichir les interpolations des champs pour autoriser des discontinuités à l'interface.
- Un dernier avantage important est la propriété de la librairie X-FEM. Outre la base qui est sous licence libre GNU, de nombreuses extensions sont développées au sein du laboratoire.

### 3.1 Les bases utilisées

La librairie X-FEM, utilisée comme base de développement, est une librairie éléments finis. Il faut tout d'abord préciser que le pré-traitement (définition de géométries et maillages) ainsi que le post-traitement (visualisation) sont effectués à l'aide du logiciel GMSH. Les systèmes linéaires sont également résolus à l'aide de bibliothèques externes. La librairie X-FEM fournit donc les outils nécessaires au stockage de données et à l'assemblage d'un problème élément fini.

#### 3.1.a Interpolations

Un des points forts de la librairie X-FEM est la souplesse d'utilisation des interpolations. Les interpolations sont hiérarchiques. L'extraction de l'interpolation linéaire sous-jacente à une interpolation d'ordre supérieure est alors facilitée. Cette extraction, illustrée sur la figure III.18, est mise à profit pour l'application de conditions aux limites, où les valeurs nodales des parties linéaires ( $u_1$  et  $u_2$ ) sont imposées tandis que les valeurs nodales d'ordre supérieures ( $u_3$ ) sont nulles.

L'extrait de code III.1 montre la construction d'une interpolation P1+/P1 en deux dimensions. Les deux premières lignes définissent une interpolation de Lagrange de degré 1 pour les deux composantes du vecteur vitesse, les deux suivantes une interpolation d'ordre 3 nécessaire à la construction de la bulle. La classe *xSpaceFiltered* permet de filtrer ces fonctions d'ordre 3 afin de ne conserver que les valeurs nodales se trouvant sur

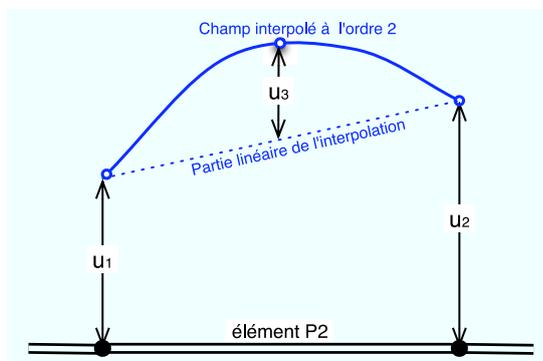


FIG. III.18: Élément fini P2 hiérarchique de dimension 1.  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont les valeurs nodales.

---

**Algorithme III.1** Implémentation d'une interpolation P1+/P1.

---

```
//Vitesse :
xSpaceLagrange laglinx("VELOCITY_X", xSpace : :VECTOR_X,
                      xSpaceLagrange : :DEGREE_ONE);
xSpaceLagrange lagliny("VELOCITY_Y", xSpace : :VECTOR_Y,
                      xSpaceLagrange : :DEGREE_ONE);
xSpaceLagrange lag3x("VELOCITY_X", xSpace : :VECTOR_X,
                    xSpaceLagrange : :DEGREE_THREE);
xSpaceLagrange lag3y("VELOCITY_Y", xSpace : :VECTOR_Y,
                    xSpaceLagrange : :DEGREE_THREE);
xSpaceFiltered bubx(lag3x, bubbleFunction(2));
xSpaceFiltered buby(lag3y, bubbleFunction(2));
xSpaceComposite interpolation_V(laglinx,bubx,lagliny,buby);
//Pression :
xSpaceLagrange lagpr("PRESSURE", xSpace : :SCALAR,
                    xSpaceLagrange : :DEGREE_ONE);
xSpaceComposite interpolation_P(lagpr);
```

---

une facette (fonction `bubbleFunction(2)`). Les interpolations sont ensuite assemblées dans un espace dit composite. Suit enfin la construction de l'interpolation P1 pour le champ de pression.

**Enrichissement et déplacement d'interface** Afin de définir les interpolations spécifiques à la méthode X-FEM, une level-set permet de donner la position de l'enrichissement. Des fonctions d'enrichissement sont déclarées sur les éléments coupés par l'iso-zéro de la level-set. Cependant, l'interpolation est indépendante de la physique et n'est déclarée qu'à l'aide du maillage et de la level-set initiale. Dans le cas où la level-set décrit une surface libre qui évolue, l'interpolation doit donc être redéfinie à chaque déplacement de level-set. En particulier, si l'iso-zéro de la level-set change d'élément, l'enrichissement doit également changer d'élément. Le nombre de degrés de liberté peut alors changer, et le transport des variables d'histoire est difficile.

Bien que les interpolations soient implémentées de manière très souple dans la librairie X-FEM l'enrichissement associé à une interface mobile pose des difficultés. C'est pourquoi les simulations effectuées dans cette étude ne présentent pas d'enrichissement à l'interface.

### 3.1.b Le stockage des données

**Les champs et le *double manager*** Dans la librairie éléments finis X-FEM, le stockage des données est effectué à l'aide de plusieurs classes. Les valeurs nodales d'un champ sont stockées dans une classe appelée *double manager*. Cette classe permet d'attacher à chaque valeur des informations telles que l'entité géométrique à laquelle elle correspond, la physique qu'elle représente et le type d'interpolation associée. Cette étape de déclaration d'interpolation s'effectue en itérant sur l'ensemble des éléments du maillage.

Une fois ce gestionnaire de valeur déclaré, un champ est défini. Le champ permet simplement, à partir de l'interpolation et des valeurs nodales, de retourner la valeur en chaque point de l'espace. La librairie X-FEM contient une classe nommée *xField* que l'on définit à l'aide d'une interpolation et d'un *double manager*. Cette classe *xField* ne contient aucune donnée, mais permet seulement de faire le lien entre interpolations et valeurs nodales. L'extrait de code III.2 montre l'instanciation d'un champ et d'un gestionnaire de valeur à partir de l'interpolation présentée précédemment (Algorithme III.1) .

**Les variables internes** Outre les valeurs nodales, il est souvent utile de stocker des valeurs nécessaires à la construction des résidus. Par abus de langage, nous appellerons

---

**Algorithme III.2** Instanciation du champ et du *double manager*.

---

```
xDoubleManager double_manager ;
xField V(double_manager) ;
V.insert(interpolation_V) ;
xValueCreator<ValueOldAndCurrentDouble_c> creator ;
DeclareInterpolation(V, creator, mesh.begin(), mesh.end()) ;
```

---

ces valeurs les *variables internes*. Elles peuvent être un flux de chaleur, un tenseur des contraintes ou encore la taille de l'élément courant (nécessaire pour le résidu de la formulation SUPG). Puisque le résidu est intégré à l'aide d'une méthode de quadrature de Gauss classique, seules les valeurs de ses variables internes aux points de Gauss sont nécessaires. Afin de stocker et de mettre à jour ces valeurs, la librairie X-FEM contient deux classes utiles. La classe *gestionnaire de variables* et les classes *matériau*.

La classe *gestionnaire de variables* permet de stocker des valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles identifiées à l'aide d'une chaîne de caractères. La classe *matériau* définit les variables internes à stocker dans le gestionnaire de variables. De plus cette classe *matériau* a accès aux valeurs ainsi qu'au jeu de données utilisateur (tels que les paramètres matériaux) et permet ainsi de mettre à jour certaines variables internes (comme par exemple la contrainte). D'autres sont mises à jour à l'aide des champs (comme par exemple le taux de déformation).

### 3.1.c L'assemblage et la résolution

**Formes** La librairie X-FEM est développée de manière générique en définissant de nombreuses classes à l'aide de patrons. Des formes linéaires ou formes bilinéaires permettent de décrire de manière abstraite les opérandes des intégrales de résidus ou de matrice tangente. Le résidu du problème élastique donné équation (III.3) et la matrice tangente associée, donnée par l'équation (III.16) où  $\tilde{\mathbf{S}}$  est la matrice d'élasticité et  $\mathcal{L}_g$  et  $\mathcal{L}_d$  sont les opérateurs gradients, peuvent ainsi être implémentés de manière très générique, comme le montre l'extrait de code III.3. La contrainte, ainsi que la sensibilité  $\tilde{\mathbf{S}}$  sont données par le gestionnaires de variables internes. Des formes linéaires et bilinéaires sont ensuite définies à l'aide de ces lois. L'assemblage est enfin effectué à l'aide du champ de déplacement  $U$  pour obtenir le résidu et la matrice tangente (Jacobienne).

**Résolution** Les vecteurs et les matrices obtenus permettent de définir un système linéaire, résolu de manière externe. Nous utilisons généralement la librairie de résolution de système linéaire SuperLu. Néanmoins, pour des problèmes de grandes dimensions, un solveur itératif est nécessaire. La librairie ITL issue de MTL a été utilisée. La librairie PETSc est également envisageable.

---

**Algorithme III.3** Assemblage d'un résidu et d'une matrice tangente.

---

```

// résidu :
GetMaterialVariable_c<xTensor2> stress("stress",* variab_manager);
xFormLinearWithLoad<xGradOperator<xIdentity<xTensor2> >,
                GetMaterialVariable_c<xTensor2>>
                stress_contribution(stress);
Assemble(stress_contribution, residu, intrule_uu, U,
        mesh.begin(), mesh.end());
// matrice tangente :
NonUniformMaterialSensitivity_c<xTensor4>
        sensibility("strain",*variab_manager);
xFormBilinearWithLaw<xGradOperator<xSymmetrize >,
        NonUniformMaterialSensitivity_c<xTensor4>,
        xGradOperator<xSymmetrize > > J(sensibility);
Assemble(J, jacobienne, intrule_uu, U, U,
        mesh.begin(), mesh.end());

```

---

### 3.1.d Récapitulatif

La figure III.19 récapitule les interactions entre les principales classes utilisées dans la librairie X-FEM. En outre, la librairie possède de nombreux outils permettant de gérer les level-sets. A l'heure actuelle, la boîte centrale du schéma que nous avons dénommé "librairie X-FEM" est un exécutable qui doit être reconstruit à chaque nouvelle application. Nous proposons donc de développer un vrai code éléments finis multiphysique permettant de capitaliser les différents outils existant dans la librairie X-FEM. Le développement de ce code, bien que motivé par notre application, le soudage par ultrasons, est effectué en vue d'être utile à d'autres simulations.

## 3.2 Architecture du code développé

**Orienté objet** Le code est structuré en tirant profit de l'architecture objet. La librairie X-FEM se prête parfaitement à ce jeu puisqu'elle est écrite en C++. Le développement orienté objet est parfaitement adapté à l'implémentation d'un code multiphysique. En effet, chaque formulation étant relativement similaire, de nombreuses bases sont communes. La redondance des écritures est alors minime et le code présente un esthétisme et une visibilité qui permet un développement souple. Dans ce cadre, la capitalisation est telle que l'implémentation d'une nouvelle physique ou d'une nouvelle loi de comportement est simplifiée.

### 3.2.a Formulations

**Cadre général** Dans le cadre de résolution itérative présenté section 2.3.a (p. 111), la formulation associée à chaque physique est résolue indépendamment. Nous définissons

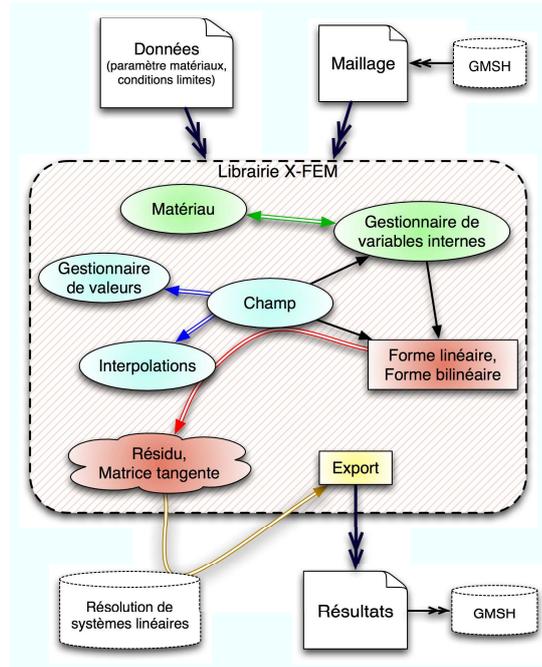


FIG. III.19: Schéma général d'un résolution éléments finis à l'aide de la librairie X-FEM.

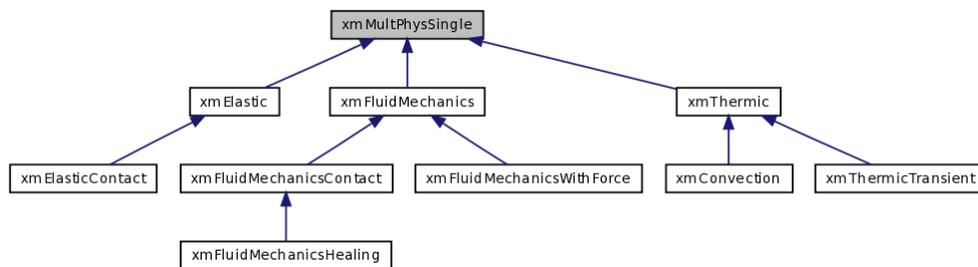


FIG. III.20: Diagramme d'héritage des formulations.

donc une classe *formulation* dont chaque instance définit une physique. Ces formulations doivent permettre une résolution dans un cadre non-linéaire. Elle possèdent donc, de manière incontournable, deux méthodes qui retournent le vecteur résidu et la matrice tangente. De plus, ces formulations ont comme attribut le champ et le *double manager*. Elles doivent donc aussi contenir une méthode permettant de mettre à jour le champ à partir d'un incrément de Newton-Raphson  $\{\Delta X\}$  et une méthode d'export de solution, afin de pouvoir visualiser le champ. Afin d'initialiser le champ, une méthode permet de déclarer l'interpolation. Une classe parent appelée *xmMultPhysSingle* permet de fixer cette structure.

**Les classes dérivées** De nombreuses classes dérivées permettent d'implémenter les formulations nécessaires (cf. figure III.20). Le langage orienté objet est mis à profit pour simplifier au maximum l'implémentation de nouveaux termes dans les résidus et les matrices. Par exemple, pour assembler le résidu d'un problème élastique avec contact

---

**Algorithme III.4** Calcul de la vitesse normale.

---

- Pour chaque nœud  $i$  du maillage
    - Pour chaque élément  $e$  adjacent à  $i$ 
      - récupérer la normale à la level-set  $n_e$
      - calculer la vitesse normal en effectuant le produit scalaire  $V_i \cdot n_e$
      - moyenner les  $V_i \cdot n_e$  obtenus
      - stocker cette valeur comme vitesse normale au nœud.
    - fin
  - fin
- 

pénalisé, la classe *xmElasticContact* appelle la classe parent pour assembler les termes volumique et n'ajoute que les termes de pénalisation nécessaires. Bien évidemment, les classes dérivées peuvent avoir de nouvelles méthodes ou attributs spécifiques. La classe *xmElasticContact*, par exemple, contient un attribut *coefficient de pénalisation* et une méthode *SetCoefficient* qui permet de définir le coefficient  $\chi_2$  de l'équation (D-8) à partir d'un  $\delta_{tol}$  donné.

**Mécanique des fluides** La formulation de mécanique des fluides présente une spécificité importante : c'est à partir de son champ de vitesse que la level-set est propagée. La classe *xmFluidMechanics* contient donc deux nouvelles méthodes. La première définit un champ d'ordre 1 de vitesse normale à une level-set donnée (cf. algorithme III.4). La seconde méthode permet de propager une level-set à l'aide de la méthode d'Hamilton Jacobi et du champ de vitesses normales calculé précédemment.

**Gestion incrémentale temporelle** Une classe appelée *pilote temporel* est dédiée à la gestion de la dimension temps. Outre les méthodes classiques d'incrément, d'affichage du temps courant ou de critère d'arrêt, une méthode spécifique permet d'appliquer la condition CFL (cf. § 2.1.b (p. 104)). Cette méthode prend en argument le champ de vitesse normale et incrémente le pilote temporel du pas de temps adéquat.

Le pilote temporel étant nécessaire à chaque problème multiphysique, il est déclaré dans le code principal exécutable. Par contre, son adresse est transféré aux formulations qui en ont besoin, comme la thermique transitoire, *xmThermicTransient*. En outre la classe *thermique transitoire* possède comme attribut le paramètre  $\Theta$  de la theta-méthod. Le pas de temps et le paramètre  $\Theta$  sont ainsi accessibles au moment de l'assemblage du résidu et de la matrice tangente.

*N.B : C'est peut-être une faiblesse de l'implémentation actuelle, mais il est difficile d'externaliser complètement l'intégration temporelle de la résolution des physiques.*

### 3.2.b Les variables internes

**Gestionnaire de variables** Bien que la résolution de chaque problème se fasse de manière indépendante, certaines informations sont communes aux différentes physiques. C'est pourquoi le gestionnaire de variables est commun à toutes les formulations. Les variables internes sont ainsi accessibles indifféremment par les méthodes de différentes formulations. Le gestionnaire de variables n'est donc déclaré qu'une seule fois, dans le programme principal. Son adresse est ensuite transférée à chaque formulation. Afin de mettre à jour les variables à l'aide des champs, chaque formulation possède une méthode *UpdateInternalVariables*. Par exemple, la variable interne "gradient de température" est mise à jour par la formulation thermique.

**Matériaux** Suivant le type de problème traité, les variables internes nécessaires peuvent différer. C'est là qu'interviennent les classes *matériau*. Elles ont quatre grands objectifs :

1. Définir les variables internes nécessaires. Certaines seront directement mises à jour à l'aide des champs, d'autres seront calculées à l'aide de lois de comportement.
2. Récupérer et stocker les paramètres matériaux enregistrés dans le fichier de données. Ces paramètres matériaux sont généralement nécessaires dans la loi de comportement
3. Mettre à jour ces variables à l'aide d'une méthode appelée *ComputeCurrentState*, qui contient la définition des lois de comportement.
4. Retourner les sensibilités nécessaires à la construction de la matrice tangente et dépendantes de la loi de comportement. Par sensibilité, on entend ici la dérivée d'une loi constitutive.

L'implémentation d'un problème multiphysique n'est effectuée qu'à l'aide d'une unique classe *matériau*. Néanmoins, le langage orienté objet permet de conserver une certaine flexibilité en ayant recours à des matériaux hybrides comme le montre la figure III.21. La définition d'un nouveau matériau à partir de briques élémentaires peut alors se faire rapidement. Seuls les termes de couplages doivent être traités. Par exemple le matériau *xThermoFluid* appelle les méthodes des classes parents, corrige la viscosité thermodépendante et ajoute à la variable *terme source* la dissipation mécanique.\* Le matériau *xThermoViscoElastic* a été spécifiquement codé pour la simulation du procédé de soudage ultrasons.

**Classe *application*** Afin de gérer de manière plus transparente les transferts du pilote temporel et du gestionnaire de variable, nous avons défini une classe *application*.

---

\* A cause du problème technique appelé *diamond of doom* [Truyen et al., 2004], les classes *matériau* doivent être virtuelles pour pouvoir créer des classes hybrides.

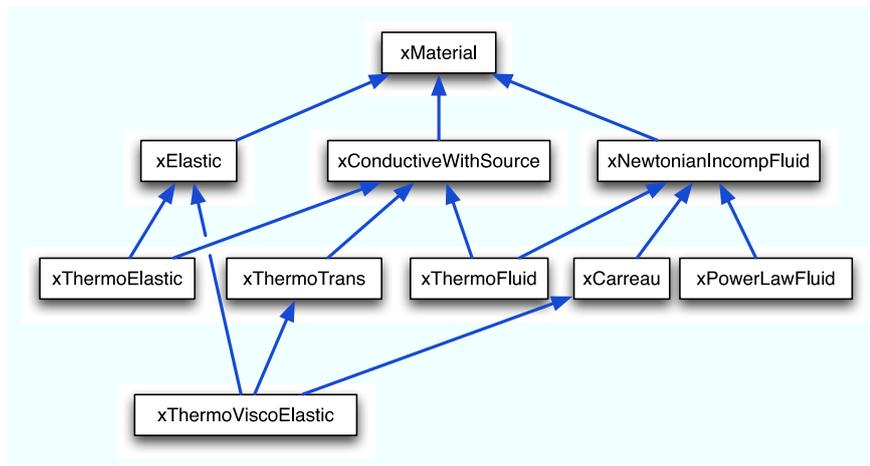


FIG. III.21: Diagramme d'héritage des matériaux.

Cette classe possède trois attributs principaux : un vecteur de formulations contenant les physiques élémentaires, un gestionnaire de variables et un pilote temporel. Elle permet de distribuer les opérations sur chaque formulation. Par ailleurs cette classe possède des méthodes d'export d'informations telles que date et heure, nature du problème, fichiers de données, historique de convergence *etc.*

### 3.2.c Solveurs

Deux types de solveurs sont nécessaires pour résoudre un problème multiphysique défini par un ensemble de formulations. D'une part un solveur permettant de résoudre une formulation. Ce solveur utilise un algorithme de Newton-Raphson (cf § 1.3 (p. 92)). Et d'autre part un solveur multiphysique itératif, basé sur la méthode de Gauss-Seidel (cf. § 2.3.a (p. 111)).

**Solveur de Newton-Raphson** Le solveur implémenté possède une méthode de résolution prenant en argument une instance de la classe de formulation *xmMultPhysSingle*. Il appelle les méthodes d'assemblage de résidu et de matrice tangente de la formulation. A chaque mise à jour du champ à l'aide d'un incrément de vecteur solution, les variables internes doivent être mises à jour. Cette classe de solveur non-linéaire est implémentée à l'aide d'un patron dont l'argument est le type de solveur linéaire nécessaire à la résolution de chaque pas de Newton-Raphson. Le changement du solveur linéaire se fait donc de manière transparente, directement à l'instanciation du solveur de Newton-Raphson.

**Solveur itératif multiphysique** Le solveur itératif implémenté dérive d'une classe plus générale de *schémas de résolution*. Cette classe générale permet de fixer le cadre

d'un solveur multiphysique éventuellement autre. A l'heure actuelle, seule une classe dérivée appelée *LoopSolver* permet la résolution itérative d'un vecteur de formulation. Cette classe possède donc comme attribut principal un solveur non-linéaire de Newton-Raphson. La méthode *solve* prend comme argument un vecteur de formulation et permet la résolution itérative multiphysique. L'algorithme de résolution multiphysique a déjà été présenté figure III.17. Il ne présente pas de difficulté particulière d'implémentation. Il faut noter, pour finir, que la classe *application* possède un attribut de type *schéma de résolution*. Ainsi, une méthode *solve* est directement implémentée dans la classe *application*.

### 3.3 Bilan

Un code élément fini a été développé à l'aide de la librairie X-FEM. Il permet de traiter des problèmes multiphysiques couplés à l'aide d'une résolution itérative. De nombreuses méthodes numériques spécifiques sont implémentées. Prises chacune séparément, ces méthodes peuvent sembler relativement classiques, néanmoins de leur association résulte une structure complexe. Le développement orienté objet permet alors de constituer un ensemble cohérent. De plus, bien que développée dans le but de simuler un procédé particulier, la philosophie orientée objet permet d'étendre le code de manière assez simple. Une nouvelle formulation ou de nouvelles lois de comportement peuvent être ajoutées sans modification du code existant.

#### 3.3.a Schéma général

La figure III.22 récapitule les différentes interactions.

#### 3.3.b Une résolution type

L'algorithme III.5 présente un exemple d'exécutable écrit à l'aide du code développé. Il permet de résoudre le cas test 7. La figure III.24 présente les résultats à quelques instants.

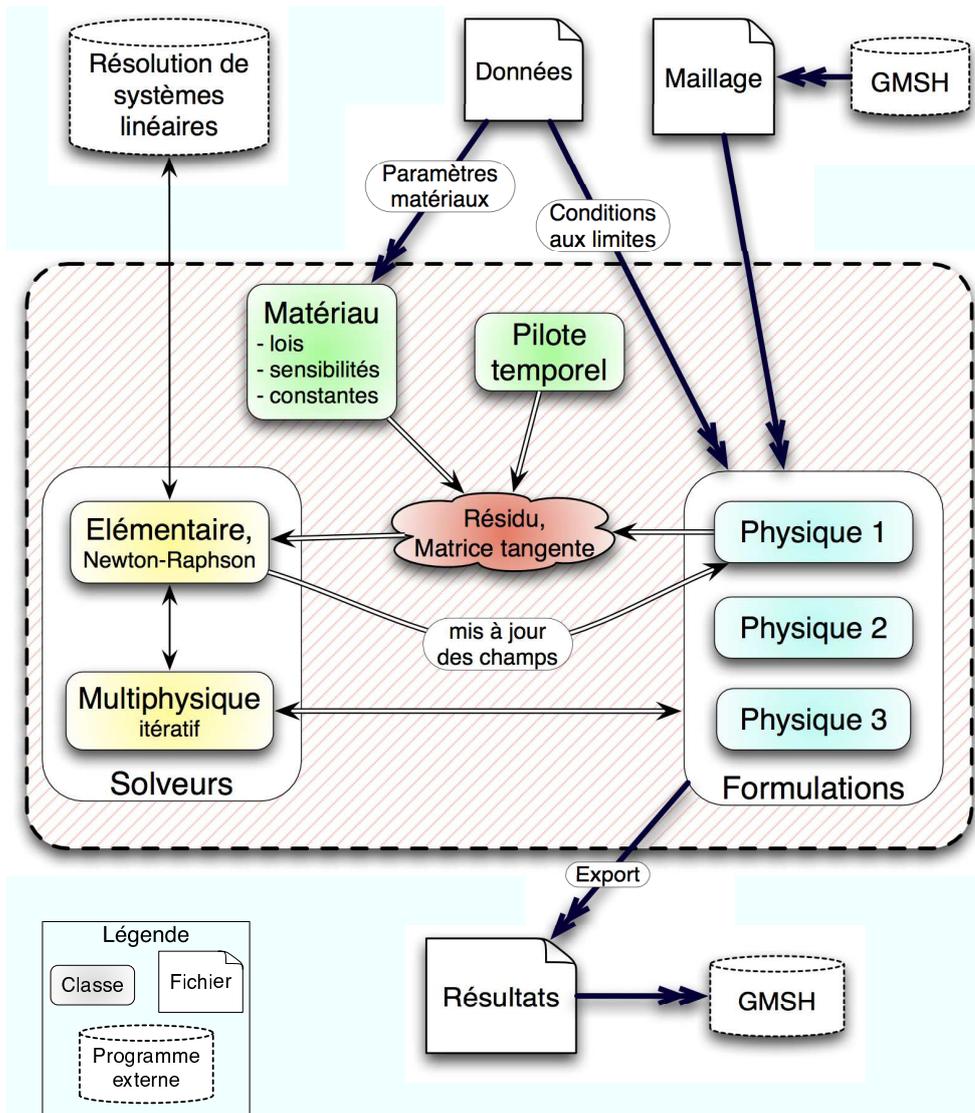


FIG. III.22: Schéma récapitulatif du code développé.

---

**Algorithme III.5** Exemple de programme principale permettant de simuler le remplissage du moule carré.

---

```

void main(int argc, char *argv[])
{
    //declaration du materiau
    xMaterialManagerSingleton : :instance().registerMaterial("ThermoFluide",
        xMaterialCreator<xThermoFluid>() );
    //lecture fichiers de données
    [...]
    //+++++
    //LEVELSET INITIALE
    xPlane plane1(mPoint(-0.5,0,0.), xVector(1.,0.,0.));
    xLevelSet interface(all, plane1);

    //+++++
    // SOLVEURS
    [...]
    xeNLSolve<xLinearSystemSolverLU > newton_raphson(nitmax, tol, lin_search );
    xmLoopSolver<xLinearSystemSolverLU > iterative_solver(newton_raphson, 5);
    //+++++
    // PILOTE TEMPOREL : (temps max, iter_max)
    BasicSteps_c timePilot(200, 2);
    //+++++
    // PROBLEMES PHYSIQUES
    xmThermicTransient thermique(&d, interface, 1.0, 2);
    xmFluidMechanics ecoulement(&d, interface, 2);
    //+++++
    //APPLICATION et ses modèles
    xmAppli appli [...]
    //-----
    // RESOLUTION
    //résolution du problème d'écoulement pour fixer le premier pas de temps
    my_nonlinear_solver.solve(&ecoulement);
    xLevelSet vitesse_normale = ecoulement.compute_vnorm(interface);

    //Boucle temporelle
    while (!appli.Timepilot.finished())
    {
        appli.Timepilot.increment_with_CFL_Condition(vitesse_normale);

        // RESOLUTION
        appli.solve();
        appli.exportFields(0, appli.Timepilot.step2string());
        thermique.ShiftFieldCurrentToOld(); //changement de pas de temps (n+1->n)

        // PROPAGATION Levelset
        vitesse_normale = ecoulement.compute_vnorm(interface);
        interface = ecoulement.propagateLevelSet(interface, vitesse_normale);
        // CONVECTION temperature
        thermique.setToConvection();
        my_nonlinear_solver.solve(&thermique);
        thermique.ShiftFieldCurrentToOld();
        thermique.setToDiffusion();
        // mise à jour de l'interface dans les formulations.
        appli.updateDomain(interface);
    }
}

```

---

**Cas test 7 : Remplissage d'un moule cubique**

Un moule cubique de dimensions  $2 \times 2 \times 2$  est rempli à l'aide d'un fluide newtonien. Sa viscosité dépend de la température selon une loi d'Arrhenius :

$$\eta_0 = 100 \exp\left(\frac{10^4}{R(T + 276)}\right) \quad (\text{III.52})$$

L'entrée de matière se fait sur une des faces du cube où un effort de traction perpendiculaire  $\sigma \cdot e_x = 100$  est appliqué. Le cube est isolé thermiquement. Aucun effort n'est appliqué en sortie. Un contact collant est imposé sur les autres bords du cube. La capacité calorifique du matériau vaut 3 et sa conduc-

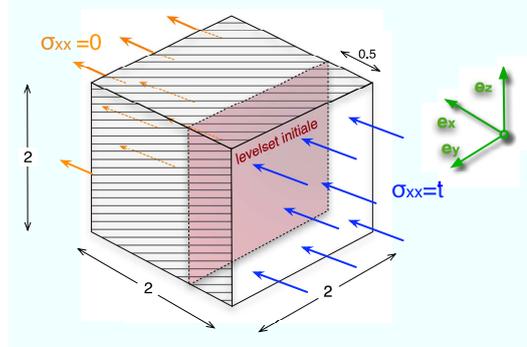


FIG. III.23: Cas test de remplissage d'un moule cubique, conditions aux limites.

tivité thermique 0,05. Une level-set plane initialement positionnée à 0.5 de l'entrée sépare le matériau de l'air. L'air à une viscosité newtonienne arbitrairement faible de 0.01, une capacité calorifique de 10 et une conductivité de  $10^{-4}$  afin que la diffusivité thermique soit négligeable face à celle du matériau. En tirant partie des symétries du problème, la résolution n'est effectuée que sur un quart de cube. Le champ de température obtenu et la position de la level-set sont visibles à différents instant sur la figure III.24. Comme attendu, l'augmentation de température est plus importante dans les zones où le cisaillement est maximum. La figure III.24c montre qu'après un certain temps de diffusion, la température devient homogène dans le matériau.

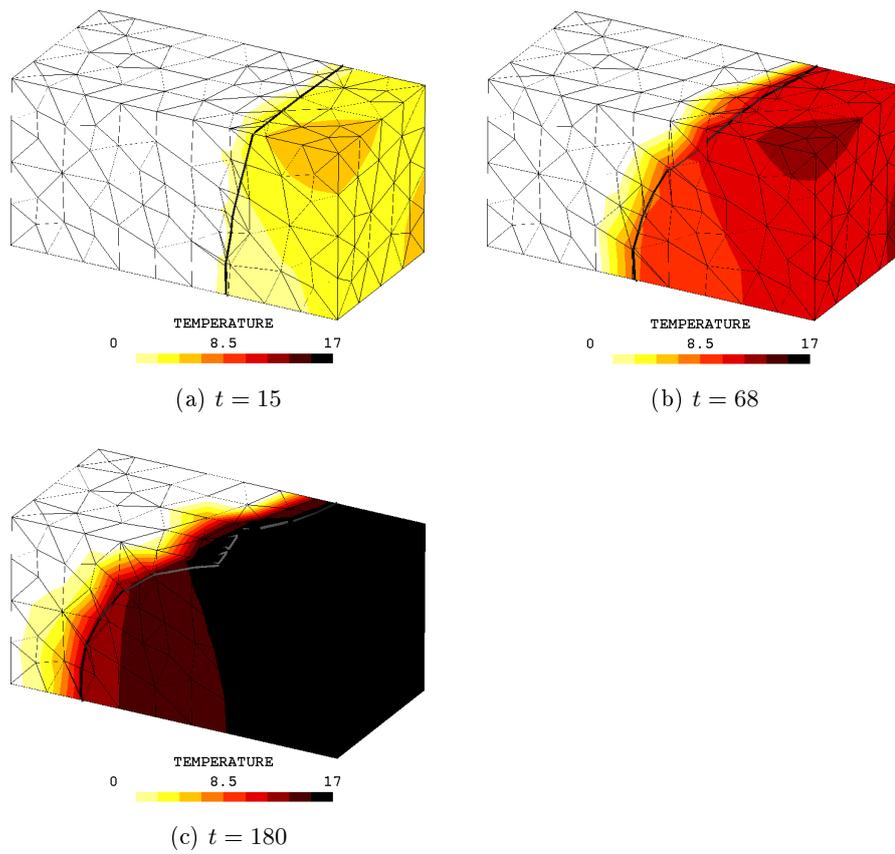


FIG. III.24: Cas test de remplissage d'un moule cubique. Champ de température.



# Chapitre IV

## Résultats et Discussion

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Simulation de référence</b>	<b>132</b>
1.1	Implémentation du modèle type	132
1.2	Résultats types	138
<b>2</b>	<b>Etude paramétrique</b>	<b>147</b>
2.1	Géométrie du directeur	148
2.2	Matériau	155
2.3	Procédé	158
2.4	Récapitulatif	160
<b>3</b>	<b>Bilan</b>	<b>162</b>
3.1	Efficacité de l'outil numérique	162
3.2	Perspectives	163
3.3	Difficultés et perspectives à long terme	165

---

Dans le chapitre II une modélisation originale de la thermo-mécanique de l'interface a été présentée tandis que le chapitre III a décrit l'outil numérique permettant de résoudre le système d'équations proposé. Dans ce chapitre, l'outil numérique est utilisé pour simuler le procédé. Cette partie s'articule en trois sections. Tout d'abord, une simulation type est décrite. Les premiers résultats permettent de valider les hypothèses de la modélisation. Ensuite, l'influence des paramètres sur le procédé est étudiée à l'aide de nombreuses simulations. Enfin, dans la dernière section, une discussion sur le domaine d'application de l'outil numérique est développée. Elle ouvre quelques perspectives à la présente étude.

## 1 Simulation de référence

Cette section expose une première simulation du procédé à l'aide de l'outil numérique. Cette simulation type fera référence par la suite, lors de l'analyse de l'influence des différents paramètres. Cette simulation est effectuée avec des données géométriques et matériau aussi précises que possible. Après présentation du modèle numérique, les premiers résultats sont présentés. Ils permettent de valider l'outil de calcul éléments finis par rapport à des données expérimentales, en termes qualitatif et quantitatif.

### 1.1 Implémentation du modèle type

#### 1.1.a Géométrie

**Domaine de résolution** Comme discuté précédemment (section II. 1 (p. 44)), le choix du domaine de simulation doit être suffisamment grand pour que la condition limite d'isolation thermique soit réaliste. La distance de diffusion  $L_{dif}$  du front de chaleur pendant la durée du procédé  $t_p = 3$  s peut être évaluée à l'aide de la diffusivité thermique du polymère :

$$L_{dif} = \sqrt{\frac{k}{\rho c t_p}} \sim 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (\text{IV.1})$$

Les plaques de composite ont une épaisseur  $L$  d'environ 10 fois cette distance caractéristique. La simulation de l'ensemble des plaques composites permet donc d'assurer des conditions limites thermique réalistes. La hauteur du domaine simulé vaut (voir figure IV.1a) :

$$h_{sim} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \quad (\text{IV.2})$$

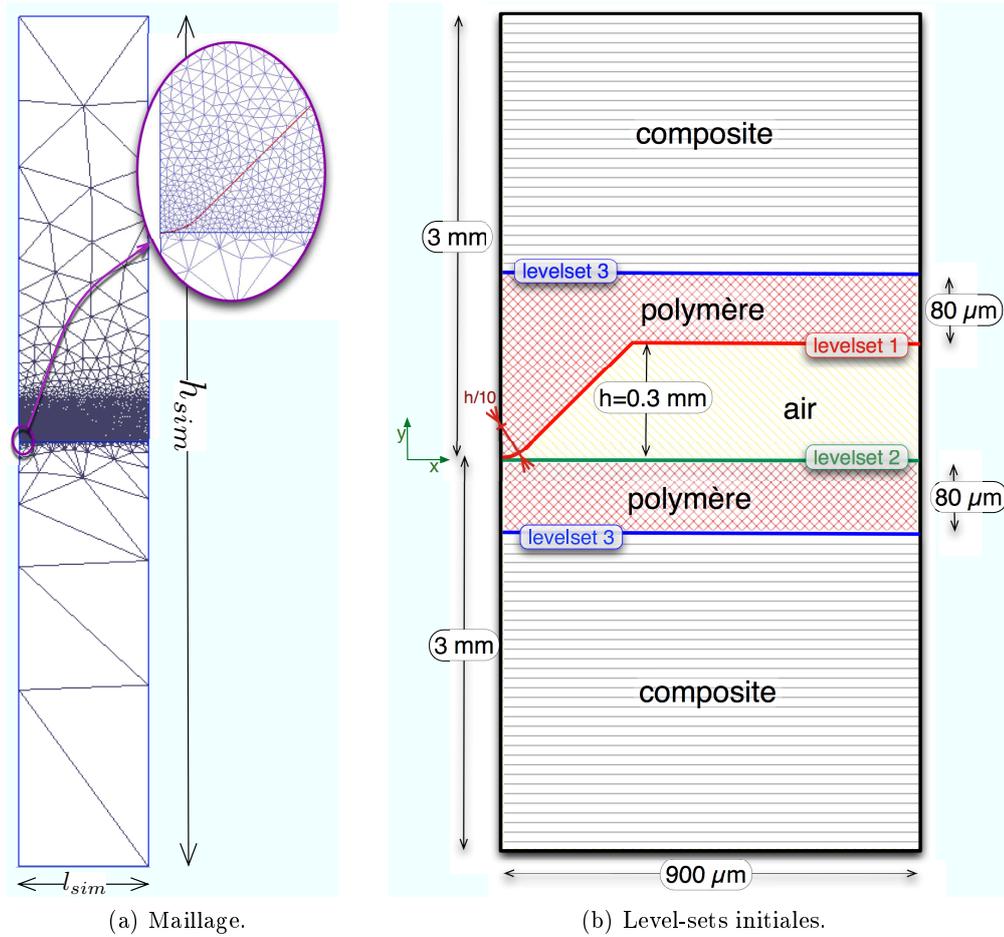


FIG. IV.1: Domaine de résolution.

De par la symétrie du problème, la résolution n'est effectuée que sur un demi directeur d'énergie. La largeur du domaine est fixée ici à une demi distance entre deux directeurs, soit :

$$l_{sim} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \quad (\text{IV.3})$$

**Maillage** Bien que le domaine soit étendu en hauteur, seule la partie centrale où se situe le directeur d'énergie doit être décrite avec précision. En effet, la plaque supérieure subit quasiment un déplacement de corps rigide et les gradients thermiques y sont faibles. Le maillage du domaine n'est donc pas homogène. Un maillage triangulaire non structuré tel que présenté sur la figure IV.1a permet un raffinement dans la zone d'intérêt. Il est constitué de 2676 nœuds avec des éléments d'une taille caractéristique de  $2 \cdot 10^{-6}$  m au voisinage de la pointe du directeur.

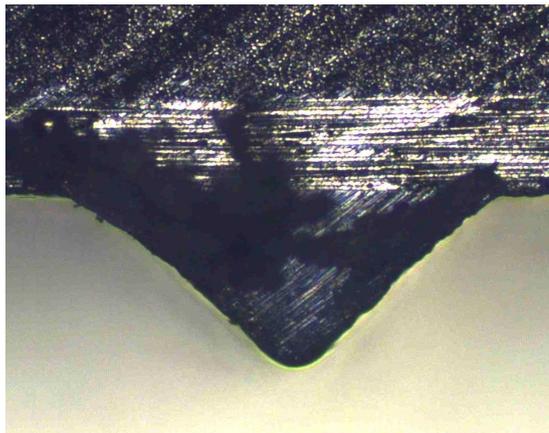


FIG. IV.2: Coupe micrographique permettant de déterminer le rayon du congé à appliquer en pointe de directeur.

**Level-set initiale** Dans la simulation type proposée, trois level-sets sont nécessaires (voir figure IV.1b). Une première pour décrire le directeur d'énergie et la couche de PEEK superficielle de la plaque supérieure, une seconde pour décrire l'interface polymère/air de la plaque inférieure et une troisième pour décrire les interfaces polymère/composite dans les deux plaques. Dans cette simulation de référence, la hauteur initiale  $h$  du directeur d'énergie est fixée à :

$$h = 3.10^{-4} \text{ m.} \quad (\text{IV.4})$$

Un congé est appliqué en pointe de directeur. En se référant à des coupes microscopiques telles que celle de la figure IV.2, le rayon de courbure de ce congé est fixé à 10% de la hauteur du directeur.

### 1.1.b Matériau

**Implémentation numérique** Le matériau numérique utilisé est implémenté à l'aide d'une classe dérivée de trois matériaux parents :

- Un matériau élastique permet de simuler le problème mécanique micro-chronologique. Le module d'Young  $E$  est thermo-dépendant. Il est mis à jour à l'aide de la température avant le calcul du résidu ou le calcul de la sensibilité.
- Un matériau de Carreau (cf. annexe C.2.c) permet de simuler l'écoulement. La thermo-dépendance en loi d'Arrhenius de la consistance est implémentée en multipliant la consistance par le facteur thermo-dépendant.
- Un matériau thermique transitoire pour simuler les problèmes de conduction et de convection transitoires.

**Polymère** Les paramètres matériau retenus pour la simulation de référence sont adaptés de la littérature (cf. annexe F). La loi de comportement de Carreau identi-

TAB. IV.1: Paramètres matériaux utilisés.

		Polymère	Air	Composite
Élasticité	Module d'Young $E$ (Pa)	cf. équation (IV.7)	$5.10^3$	$9,3.10^9$
	Coefficient de Poisson $\nu$	0,4	0	0,2
Écoulement	Coefficient pré-exponentiel de la viscosité $A$ (Pa.s <sup>m</sup> )	$5,6.10^{-3}$	$2.10^{-5}$	10
	Énergie d'activation $E_a$ (J)	$7,44.10^4$	0	$7,44.10^4$
	Temps caractéristique de la loi de Carreau $\lambda$ (s)	1	0	1
	Indice puissance de la loi de Carreau $m$	0,54	1	1
Thermique	Conductivité thermique $k$ (Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )	0,24	$2,6.10^{-2}$	0,72
	Capacité calorifique $\rho c$ (Jm <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> )	$1,3.10^6 + 4500 \cdot \theta$ [°C]	$10^3$	$2,22.10^6$
	Module de perte $E''$ (Pa) (eq.IV.1b)	$20.10^6$	0	0
	Pulsation de la sonotrode $\omega$ (rad/s)	$1,25.10^5$		

fiée par Nicodeau [Nicodeau, 2005] a été simplifiée afin de l'écrire :

$$\eta = \eta_0 \left( 1 + (\lambda D_{eq})^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \quad (\text{IV.5})$$

où  $\lambda = 1$  s est le temps caractéristique de Carreau et  $\eta_0$  est la viscosité Newtonienne dont la thermo-dépendance est assurée à l'aide d'une loi d'Arrhenius (équation (II.122)) :

$$\eta_0(\theta) = A \cdot \exp\left(\frac{E_a}{R\theta [K]}\right). \quad (\text{IV.6})$$

En adaptant les résultats de Goyal [Goyal et al., 2007], le module d'Young est modélisé en fonction de la température par :

$$E(\theta) = 2,8.10^9 \left[ 0,5 - \frac{\arctan\left(\frac{\theta[^\circ\text{C}] - 140}{20}\right)}{\pi} \right] + 1,6.10^8 \text{ Pa} \quad (\text{IV.7})$$

Le coefficient de Poisson est fixé à  $\nu = 0,4$  [Cogswell, 1992].

La capacité calorifique est modélisée à l'aide d'une dépendance linéaire tandis que la conductivité thermique est prise constante.

**Air** Comme décrit section III.2.1.a, la résolution est effectuée sur l'ensemble du domaine constitué du polymère, de l'air et du composite. Des paramètres matériaux doivent donc être affectés à l'air et au composite. Pour l'air, les paramètres mécaniques sont fixés de manière à ne pas influencer la résolution dans le polymère. Le module d'Young est choisi très faible, le coefficient de Poisson est fixé à 0 et les paramètres visqueux décrivent un comportement Newtonien à viscosité très basse. Tous ces paramètres sont récapitulés dans le tableau IV.1.

Un soin plus important est à porter au choix des paramètres thermiques. D'abord, l'auto-échauffement de l'air est négligeable face au terme d'auto-échauffement dans le polymère. Numériquement, il n'est simplement pas pris en compte. Le module de perte, nécessaire au calcul de la dissipation visqueuse de l'équation (II.112), est donc fixé à 0 pour l'air. La conductivité et la capacité thermique de l'air immobile à  $20^\circ\text{C}$  sont retenues :

$$\begin{aligned} k &= 0.026 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \\ \rho c &= 10^3 \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-1}. \end{aligned} \tag{IV.8}$$

La diffusivité thermique  $k/(\rho c)$  de l'air est donc environ 100 fois plus importante que celle du polymère. Toutefois, son effusivité, de l'ordre de  $\sqrt{k\rho c} \sim 5 \text{ JK}^{-1}\text{m}^{-2}\text{s}^{-0.5}$  est négligeable devant celle du PEEK, de l'ordre de  $500 \text{ JK}^{-1}\text{m}^{-2}\text{s}^{-0.5}$ . L'air aura donc vraisemblablement peu d'influence sur la thermique dans le directeur d'énergie.

**Composite** Afin d'appliquer des conditions aux limites réalistes au système, la résolution est effectuée dans les deux plaques de composite. Néanmoins, le domaine d'observation privilégié est l'interface et l'écoulement du directeur. Dès lors, les plaques ne sont modélisées qu'à l'aide d'un matériau isotrope. Ses propriétés mécaniques sont les propriétés transverse du composite, ceci afin de transmettre au mieux les efforts appliqués par la sonotrode dans l'épaisseur de la plaque.

### 1.1.c Conditions aux limites

**Symétries** Afin d'assurer les conditions de symétrie sur la frontière de gauche de la figure IV.3, les composantes horizontales de la vitesse et du déplacement sont imposées nulles et le domaine est isolé thermiquement. En toute rigueur, la périodicité des directeurs d'énergie impose les mêmes conditions de symétrie sur la frontière latérale  $\Gamma_d$ . Toutefois, dans l'approche retenue, les lois de comportement des différents matériaux sont les mêmes, et seuls les paramètres matériaux varient en fonction des positions des level-set. Dans le problème d'écoulement, l'air est considéré comme incompressible. En imposant une vitesse horizontale sortante nulle sur cette frontière, il ne pourrait

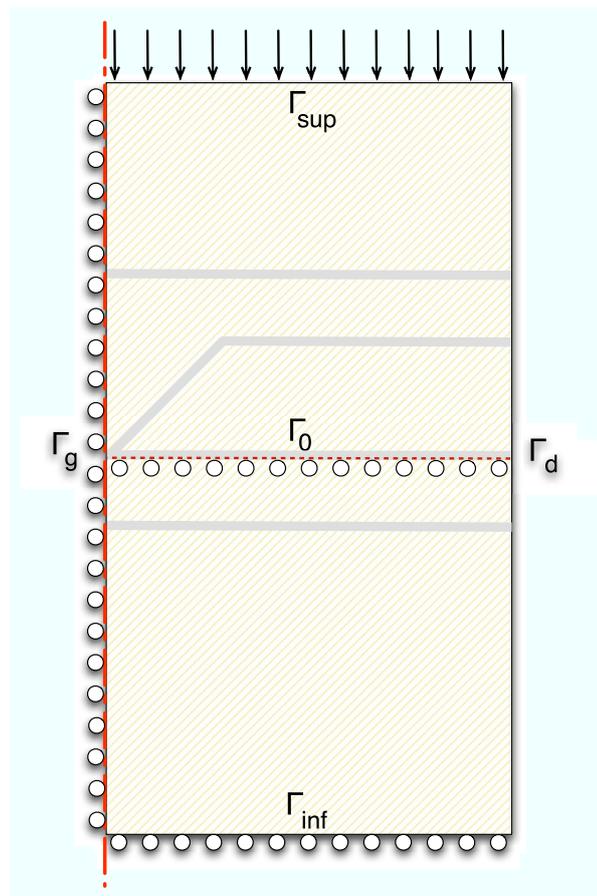


FIG. IV.3: Conditions limites mécaniques.

pas s'échapper, et l'écrasement de directeur ne pourrait pas avoir lieu. Dans cette simulation bidimensionnelle, à défaut de pouvoir simuler un matériau compressible, la frontière  $\Gamma_d$  est laissée parfaitement libre. Ceci permet dans un premier temps d'étudier l'écrasement du directeur d'énergie en autorisant l'air à s'échapper. Il faut également remarquer qu'à terme, une simulation tridimensionnelle permettrait d'assurer l'évacuation de l'air dans la direction d'avance de la sonotrode. Cette remarque vaut aussi pour le procédé réel où l'effet tridimensionnel permet probablement d'aider l'évacuation de l'air et donc la fermeture de l'interface (cf. section 2.3 (p. 27)).

**Autres conditions aux limites** Les conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma_{sup}$  des systèmes (II.110) et (II.120) sont appliquées perpendiculairement à la surface. Seule la composante verticale du déplacement est fixée. L'amplitude de vibration  $\|\mathbf{a}\|$  est fixée à :

$$\|\mathbf{a}\| = 3.10^{-5} \text{ m.} \quad (\text{IV.9})$$

En se référant aux essais statiques discutés chapitre I, la force équivalente d'écrasement est traduite par une distribution de contrainte normale d'intensité :

$$\|\bar{\mathbf{s}}\| = 6.10^6 \text{ Pa.} \quad (\text{IV.10})$$

Dans le problème élastique, le déplacement de la frontière inférieure  $\Gamma_{inf}$  est imposé nul :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Gamma_{inf}). \quad (\text{IV.11})$$

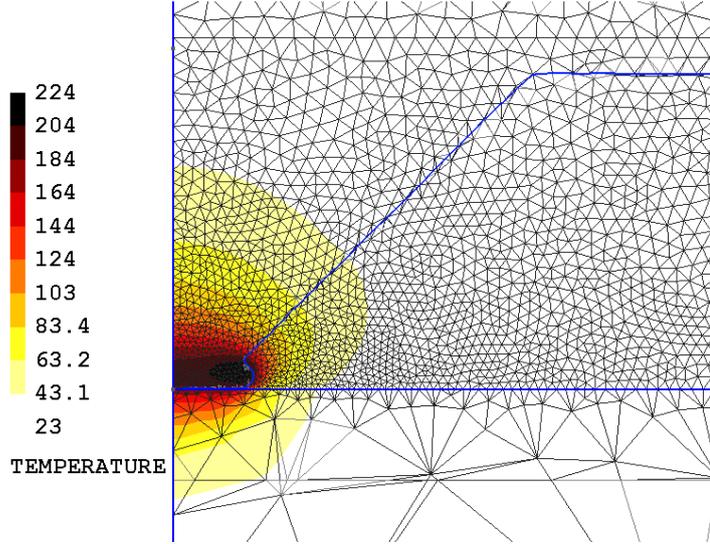
Dans le problème d'écoulement, la plaque inférieure est supposée rigide, et la vitesse verticale est supposée nulle sur la surface  $\Gamma_0$  :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_0). \quad (\text{IV.12})$$

Ceci permet de s'assurer que la level-set modélisant la plaque inférieure reste immobile, c'est-à-dire confondue avec la frontière du maillage et donc les arrêtes. On élude ainsi les problèmes de contact discutés section III 2.2 (p. 106) puisqu'une discontinuité est possible. Cette condition est assurée en bloquant les degrés de libertés de  $\Gamma_0$ , définie comme une surface physique lors du maillage.

## 1.2 Résultats types

Le problème est simulé pendant la phase d'écoulement du directeur. Les pas de temps sont fixés à l'aide de la condition CFL décrite section III.2.1.b. Le calcul dure

FIG. IV.4: Champ de température simulé à l'instant  $t = 0.05$  s

environ une journée sur un ordinateur de bureau, la résolution de la mécanique des fluides étant la phase la plus longue.

### 1.2.a Phase d'échauffement

**Effet de pointe** Pendant les premiers instant de la simulation, on observe une localisation des effets thermo-mécaniques dans le directeur d'énergie. Le terme source de dissipation d'énergie mécanique est concentré à la pointe du directeur. La température y évolue donc rapidement et de manière localisée comme le montre la figure IV.4. Ceci confirme l'utilité du directeur d'énergie. On peut également noter une diffusion importante de chaleur dans la plaque inférieure. Ceci est en accord avec la littérature [Benatar et Gutowski, 1989].

**Mesures macroscopiques** Les mesures de température effectuées et présentées en annexe A ont permis de déterminer un flux de chaleur équivalent maximum à l'interface de soudage lors du passage de la sonotrode :

$$\phi_{max} = 155 \pm 15 \text{ kW/m}^2. \quad (\text{IV.13})$$

Afin de comparer cette mesure macroscopique aux simulations effectuées, le flux de chaleur vertical  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}$  est intégré sur la surface  $y = 0$ . Le flux moyen, obtenu en divisant par  $l_{sim}$ , est représenté en fonction du temps figure IV.5. Il est en accord avec la mesure effectuée.

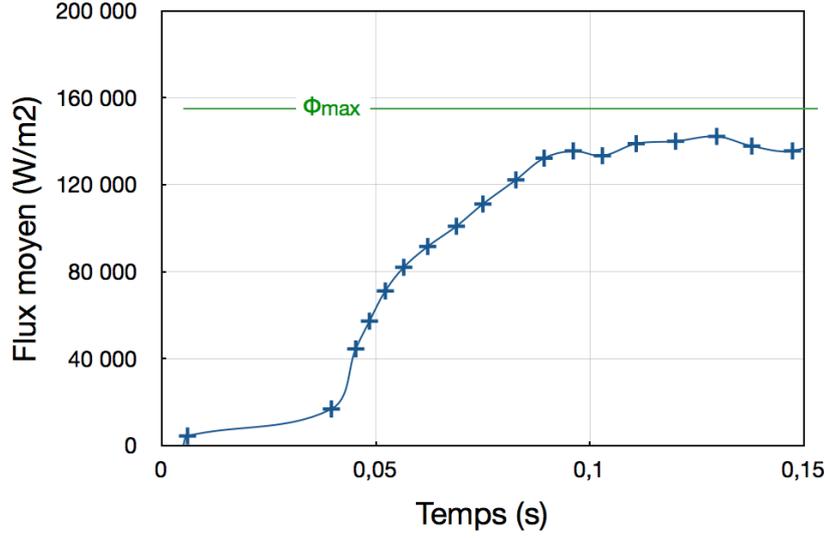


FIG. IV.5: Flux de chaleur macroscopique en fonction du temps.

**Energie** Afin de quantifier la quantité d'énergie que le procédé permet de dissiper dans le directeur, un évaluateur ad-hoc est défini. La quantité d'énergie thermique  $E_g$  générée dans le directeur s'écrit :

$$E_g = \int_{\Omega} \int_0^t \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t'} dt'. \quad (\text{IV.14})$$

En considérant que la capacité calorifique  $\rho c$  est constante, cette intégrale se simplifie en :

$$E_g = \int_{\Omega} \rho c (\theta - \theta(t=0)) = (\rho c)_0 \int_{\Omega} (\theta - \theta_0) \quad (\text{IV.15})$$

L'intégrale de la température dans le directeur d'énergie permet donc de quantifier de manière approchée la quantité de chaleur dissipée. A l'instant  $t = 0,14$ s cette intégrale vaut :

$$E_g = (\rho c)_0 \int_{\Omega} \theta(t=0,14) = (1,3 \cdot 10^6) 7,3 \cdot 10^{-5} = 95 \text{ J}. \quad (\text{IV.16})$$

Le calcul étant bidimensionnel, cette valeur de 95 J est valable pour une longueur de un mètre. Pour comparer avec le cas expérimental présenté en section 1.3.b (p. 20) et 2.3 (p. 27), il faut tenir compte de la longueur effectivement sollicitée par la sonotrode et du nombre de directeur à l'interface. Ce calcul donne environ 15 J/m en 0,14s, soit environ 10 W/m. Elle correspond à une puissance en accord avec celle du banc d'essai, d'une centaine de Watts.

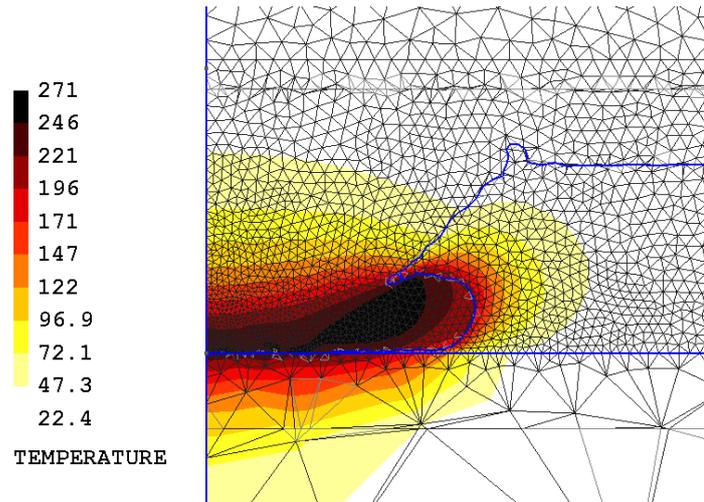


FIG. IV.6: Champ de température à l'instant  $t = 0,1$  s.

### 1.2.b Validation

**Isolation thermique** La figure IV.6 présente le champ de température simulé à l'instant  $t = 0,1$  s. Elle montre que l'augmentation de température reste localisée dans le directeur pendant toute la durée de l'écoulement. Le profil de température le long de la surface  $x = 0$  (figure IV.7) permet de valider l'hypothèse d'isolation thermique appliquée sur les deux surfaces  $\Gamma_{inf}$  et  $\Gamma_{sup}$ . En effet, l'augmentation de température aux bords est négligeable. De plus, la diffusion importante dans la plaque inférieure, visible figure IV.6 montre que le chauffage du directeur n'est pas adiabatique. La modélisation des plaques est donc indispensable si l'on souhaite décrire la thermique fidèlement durant le temps d'écoulement du directeur.

**Convergence** Afin de valider la solution obtenue dans cette résolution type, le même problème est résolu sur un maillage plus fin (16 144 nœuds) sur quelques pas de temps. La figure IV.8 permet de comparer les champs de température obtenus avec ces deux maillages.

Avant la phase d'écoulement, les champs de température diffèrent d'environ  $9^\circ\text{C}$ . Ceci revient à une erreur de moins de 10%. La différence de température, visible figure IV.8b, montre que l'erreur dans la simulation de référence provient principalement d'une surestimation de la température dans le directeur et d'une sous estimation dans la plaque inférieure, au voisinage de la pointe du directeur. Cette erreur peut être expliquée par l'artefact discuté section III.2.2.a : du fait de l'interpolation retenue, qui ne présente pas d'enrichissement, une couche d'air d'épaisseur directement dépendante à la taille des éléments est artificiellement introduite au niveau du contact sur la plaque inférieure. Cette couche d'air entraîne donc une isolation du directeur directement liée au maillage.

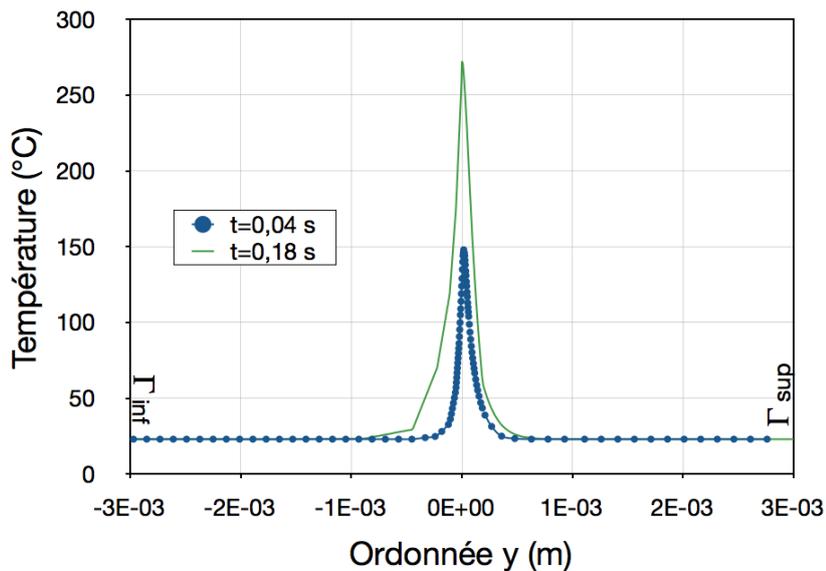
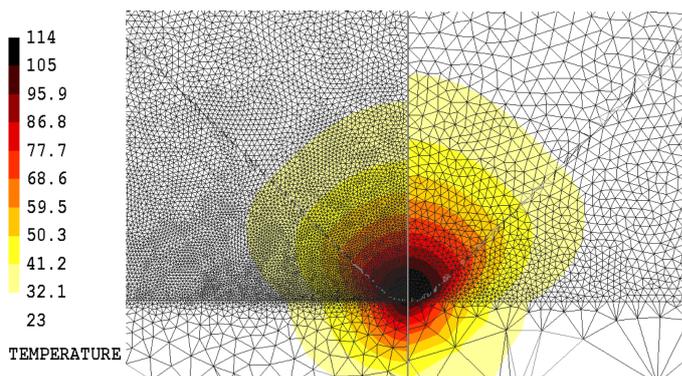
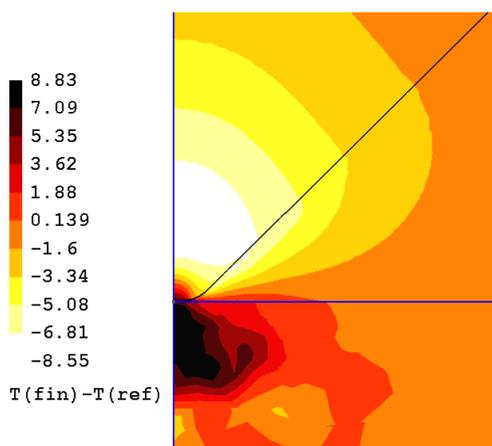


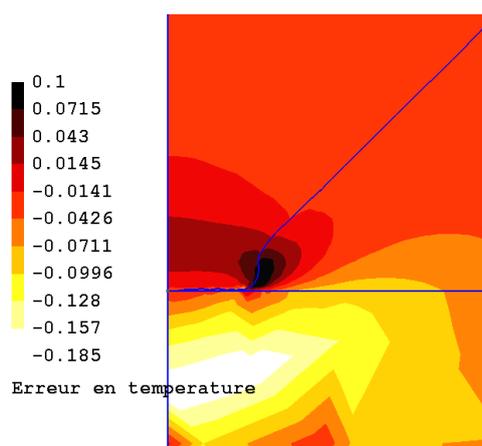
FIG. IV.7: Profils de température sur l'axe  $x = 0$ .



(a) Champs de températures à l'instant  $t = 0,027$ s.



(b) Différence de température à  $t = 0,027$ s.



(c) Ecart relatif entre les champs simulés à  $t = 0,055$ s pour le maillage fin et  $t = 0,046$ s pour le maillage de référence.

FIG. IV.8: Dépendance au maillage. Simulations avec le maillage de référence et le maillage plus fin.

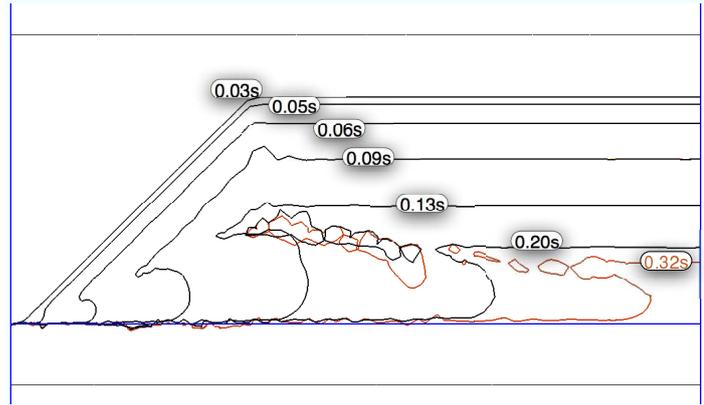


FIG. IV.9: Morphologie de l'écoulement : évolution de l'iso-zéro des level-sets.

Durant la phase d'écoulement cette erreur se traduit également par une avance sur l'échelle des temps. La figure IV.8c montre par exemple que la même déformation est obtenue à l'instant  $t = 0,055$  s avec le maillage fin et  $t = 0,046$  s pour le maillage de référence. Les champs de température présentent alors toujours une erreur d'environ 10%.

Bien que les erreurs discutées puissent être limitées par un simple raffinement du maillage, le maillage de référence, constitué de 2 676 nœuds, est retenu dans la suite de l'étude. Dès lors, les valeurs quantitatives simulées seront entachées d'une erreur numérique d'environ 10%. Ceci n'empêchera en rien de tirer des conclusions quant aux tendances observées lors de la variation des différents paramètres procédé.

### 1.2.c Phase d'écoulement

**Morphologie** L'augmentation de température dans le directeur entraîne une chute de la viscosité du polymère. L'écoulement est alors localisé au niveau de l'interface. La figure IV.9 représente l'évolution de l'iso-zéro de la level-set. Après échauffement, à  $t = 0,05$  s, un bourrelet de résine se forme en pointe de directeur. Il se propage ensuite au fur et à mesure de l'écrasement du directeur. Alors que le taux de déformation équivalent dans l'ensemble du directeur est de l'ordre de l'unité, il dépasse la centaine dans le bourrelet. La figure IV.10 permet de comparer la morphologie simulée à celle observée par microscope sur une coupe d'un échantillon obtenu par un essai arrêté (cf. section I.2.3). L'expérience montre qu'il existe effectivement un bourrelet de morphologie semblable.

**Temps d'écoulement** La simulation est effectuée sur quelques dixièmes de secondes seulement. En effet, numériquement, avec les conditions limites choisies, l'écoulement

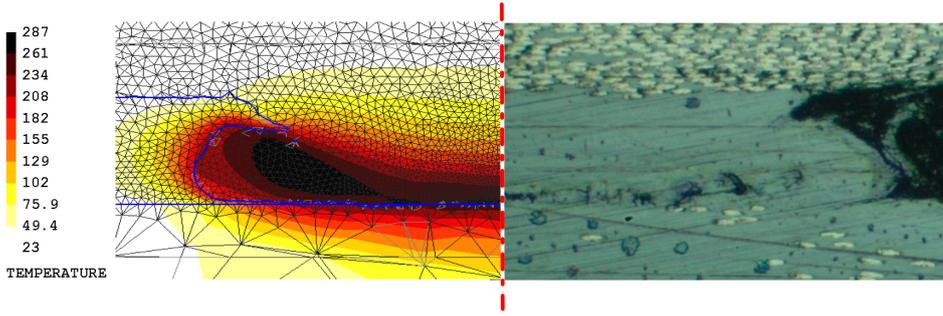


FIG. IV.10: Comparaison entre une observation microscopique sur un essai arrêté et la simulation de référence (surface libre et champ de température à l'instant  $t = 0, 12$  s).

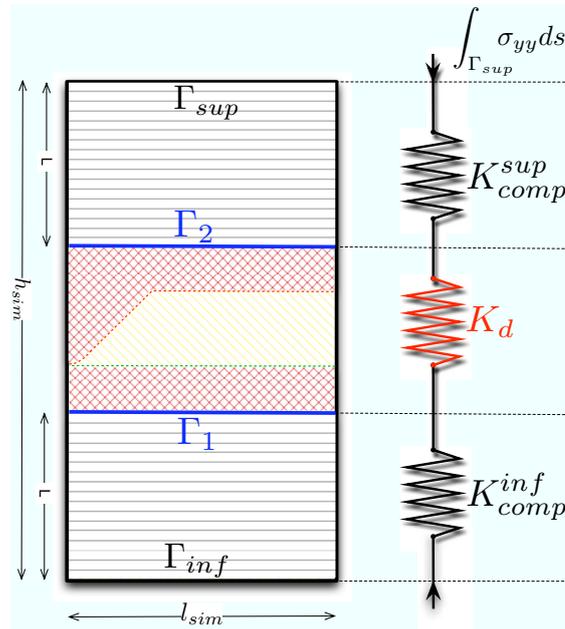


FIG. IV.11: Raideurs équivalentes des différents éléments du système.

du directeur est rapide et vient remplir l'interface en environ 0,4 s. Pour les écrasements importants, des erreurs numériques, dépendantes de la taille du maillage, apparaissent. Les simulations présentées ne permettent donc pas de dire si les porosités visibles figure IV.9 sont de nature numérique. Par la suite, nous nous limiterons donc principalement à l'analyse de l'échauffement puis de la première phase d'écoulement.

**Raideur équivalente** Afin de déterminer l'influence de l'épaisseur des plaques sur le terme d'échauffement, une analyse en raideur équivalente du système est proposée. En se concentrant sur le problème d'élasticité, le domaine  $\Omega$  est décomposé en trois sous-systèmes modélisés par trois éléments élastiques en série, comme le montre la figure IV.11. Deux ressorts de raideurs  $K_{comp}^{inf}$  et  $K_{comp}^{sup}$  modélisent les plaques composites ; un ressort de raideur  $K_d$  modélise le directeur d'énergie et les couches superfi-

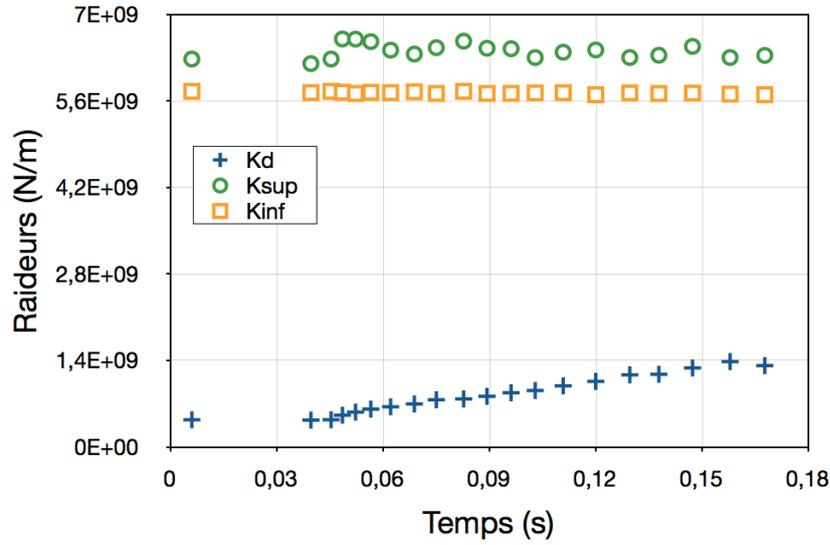


FIG. IV.12: Raideurs équivalentes.

cielles de matrice. La raideur équivalente de chaque élément est obtenue en effectuant le rapport de l'effort normal sur la différences des moyennes des déplacements normaux :

$$\begin{aligned}
 K_{comp}^{inf} &= \frac{\int_{\Gamma_{sup}} \sigma_{yy} ds}{\frac{1}{l_{sim}} \int_{\Gamma_1} u_y ds}, \\
 K_d &= \frac{\int_{\Gamma_{sup}} \sigma_{yy} ds}{\frac{1}{l_{sim}} \int_{\Gamma_2} u_y ds - \frac{1}{l_{sim}} \int_{\Gamma_1} u_y ds}, \\
 K_{comp}^{sup} &= \frac{\int_{\Gamma_{sup}} \sigma_{yy} ds}{\frac{1}{l_{sim}} \int_{\Gamma_{sup}} u_y ds - \frac{1}{l_{sim}} \int_{\Gamma_2} u_y ds},
 \end{aligned} \tag{IV.17}$$

où les surfaces  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont définies sur la figure IV.11. Dans ce dépouillement, les trois frontières  $\Gamma_i$  sont supposées de longueur constante  $l_{sim}$ .

Il faut noter que la raideur des plaques est sous-estimée par le fait que la surface de droite  $\Gamma_d$  est laissée libre. Dans le cas où la contrainte de symétrie serait imposée, la déformation serait verticale :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{yy} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$ ,  $\sigma_{yy} = (\lambda_{comp} + 2\mu_{comp}) \varepsilon_{yy}$  avec  $\lambda_{comp}$  et  $\mu_{comp}$  les deux coefficients de Lamé du composite et donc :

$$K_{comp}^{sup} = K_{comp}^{inf} = \frac{(\lambda_{comp} + 2\mu_{comp}) l_{sim}}{L} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}. \tag{IV.18}$$

La figure IV.12 montre l'évolution de ces rigidités équivalentes en fonction du temps. La raideur des plaques de composites est sous-estimée d'un facteur 2 environ. La rigidité du directeur  $K_d$  est bien inférieure à celle des plaques. Au fur et à mesure de l'écoulement, elle augmente pour des raisons géométriques jusqu'à atteindre environ 30% de celle des plaques. Même en tenant compte de la sous-estimation,  $K_d$  n'est alors plus négligeable et la modélisation des plaques est indispensable.

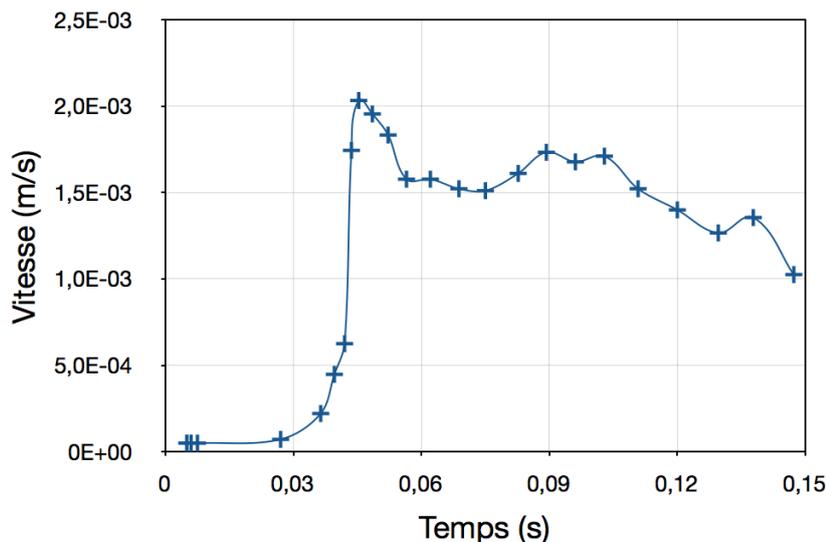


FIG. IV.13: Vitesse d'écrasement en fonction du temps.

**Vitesse d'écrasement** La condition limite du problème d'écoulement est une condition en effort, la vitesse d'écrasement sur la frontière supérieure évolue donc avec le temps. La figure IV.13 représente la moyenne de la vitesse verticale sur la frontière supérieure en fonction du temps. On y observe bien trois phases distinctes : une première phase d'échauffement, jusqu'à  $t = 0,04$  s, où la vitesse d'écrasement est faible ; une seconde phase d'écoulement aux alentours de  $t = 0,05$  s, où la vitesse d'écrasement augmente brusquement du fait de la localisation en pointe de directeur. Durant la troisième phase, après  $t = 0,06$  s, l'écoulement entraîne un changement de géométrie. De manière analogue à l'augmentation de raideur équivalente traitée précédemment, la vitesse d'écrasement diminue donc progressivement.

**Cicatrisation** Afin de caractériser la qualité de l'adhésion, le degré de cicatrisation  $D_c$  défini à la section 1.1.b est calculé en chaque point de l'interface  $\Gamma_0$ , et incrémenté lorsqu'il y a contact\*. La courbe IV.14 montre l'évolution de ce degré de cicatrisation en fonction de la position sur l'interface à deux instants  $t = 0,10$  s et  $t = 0,15$  s. A l'heure actuelle, la simulation n'est effectuée que sur un temps très court correspondant à la phase d'écoulement. Les degrés de cicatrisation atteints restent donc très faibles. Afin de conclure sur une qualité d'adhésion, la phase suivante de refroidissement devrait être analysée. Toutefois l'augmentation importante du degré de cicatrisation, même sur ces temps très courts (de l'ordre de 0,1 s) est encourageante et pousse à croire à une adhésion rapide du polymère sur la plaque inférieure. De manière qualitative, l'objectif de chauffage localisé et de contact intime semble assuré.

\*Pour des raisons pratiques dues aux artefacts de contact et afin de s'assurer que l'on traite un champ de température dans le matériau, le dépouillement est effectué sur le plan défini par  $y = 10^{-5}$  m proche de  $\Gamma_0$ .

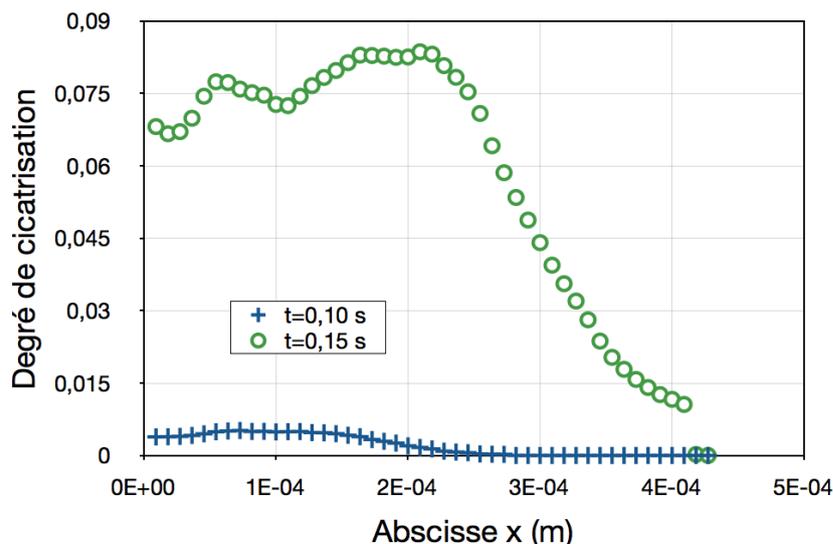


FIG. IV.14: Degré de cicatrisation de l'interface.

**Bilan** Les premiers résultats obtenus permettent de valider les quelques hypothèses effectuées dans la modélisation, en particulier en ce qui concerne les conditions limites. L'erreur numérique a pu être évaluée à une dizaine de pourcents. Cette erreur est encourageante compte tenu de l'absence de travaux antérieurs à cette étude. Les simulations ne permettent pas de conclure sur des valeurs quantitatives mais représentent plutôt un outil d'analyse qualitative de l'influence des différents paramètres sur la qualité de la soudure. Il en est de même pour les outils théoriques tels que l'analyse de la cicatrisation à l'interface. Les simulations n'ont été présentées que pour proposer d'éventuelles possibilités et perspectives de dépouillement des simulations. Elles n'ont pas pour ambition, à l'heure actuelle, de quantifier mécaniquement avec précision une qualité d'adhésion.

Les premiers résultats présentés dans cette section constitue une base de travail que nous appellerons par la suite *simulation type* ou *simulation de référence*.

## 2 Utilisation du modèle : influence des paramètres sur la qualité de la soudure

L'outil numérique développé permet d'étudier l'influence de différents paramètres procédé sur l'écoulement à l'interface. Cette section présente quelques utilisations de l'outil et les conclusions qu'elles permettent de tirer sur le procédé.

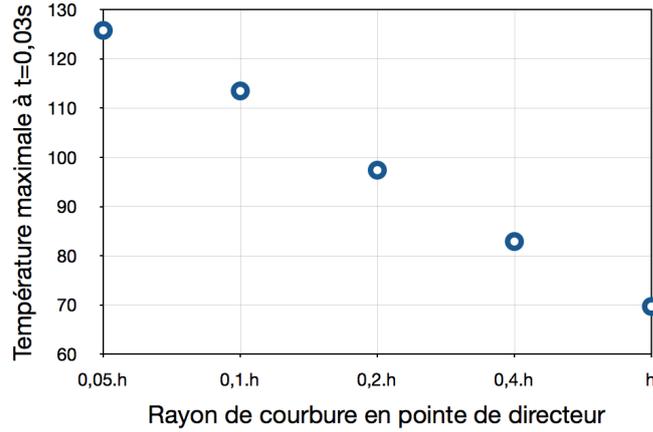


FIG. IV.15: Température maximale en pointe de directeur à l'instant  $t = 0,03$  s en fonction du rayon de courbure initial en pointe de directeur.

## 2.1 Géométrie du directeur

En fin de chapitre II, la probable influence de la géométrie du directeur à été soulevée. Le code numérique à d'abord été développé dans le but d'analyser les effets de cette géométrie sur l'écoulement à l'interface. C'est naturellement ce point qui fait l'objet de cette première section.

### 2.1.a Effet de pointe

Dans la simulation de référence, le rayon de courbure de la pointe du directeur est fixé à 10% de sa hauteur, en accord avec la géométrie réelle. Plusieurs simulations sont effectuées en faisant varier ce rayon de courbure. La figure IV.15 présente la température maximale atteinte en pointe de directeur en fonction du rayon de courbure  $r$  durant la première phase d'auto-échauffement. On observe que la température à l'instant  $t = 0,03$  s est inversement proportionnelle au rayon de courbure. Durant cette première phase d'échauffement, des directeurs d'énergies pointus permettent donc d'assurer un chauffage local plus rapide. Pour la phase d'écoulement, la figure IV.16 montre que la déformée et le champ de température obtenu avec des rayons de courbure de  $r = 0,05h$  et  $r = 0,2h$  sont très proches. En effet l'écart relatif

$$\frac{\theta(r = 0,05h) - \theta(r = 0,2h)}{\theta(r = 0,2h)} \quad (\text{IV.19})$$

ne dépasse pas 14%. Un directeur plus émoussé entraîne simplement un retard de l'écoulement.

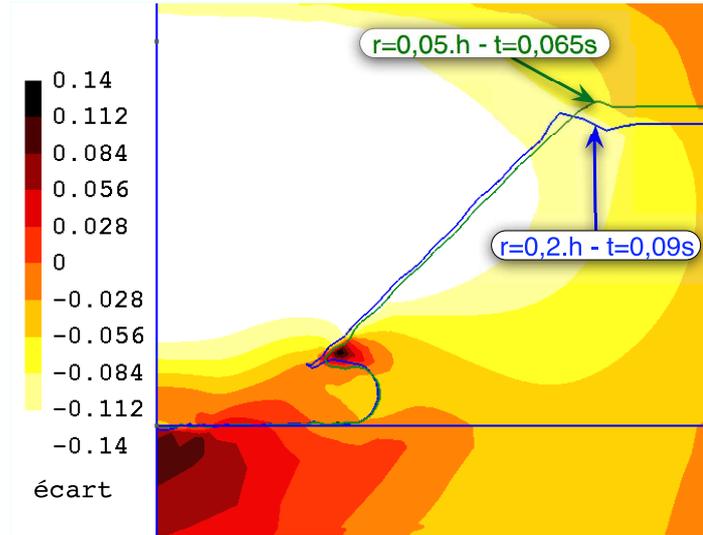


FIG. IV.16: Cas  $r = 0,05h$  à l'instant  $t = 0,065s$  et  $r = 0,2h$  à l'instant  $t = 0,09s$ . Surfaces libres et isovaleurs de l'écart relatif entre les champs de température.

### 2.1.b Forme

**Demi-cercle** Après avoir mis en évidence l'effet de pointe indispensable du directeur d'énergie, ce paragraphe propose d'étendre l'étude géométrique au cas limite. Une simulation est effectuée sur un directeur d'énergie semi-circulaire. Le rayon de courbure est alors égal à la hauteur  $h = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  du directeur. La figure IV.17 montre qu'il y a toujours une localisation et la formation d'un bourrelet. Toutefois, à cause du rayon de courbure important, l'échauffement maximum est obtenu à une certaine distance du point de contact, repéré par une flèche sur la figure. Le point de contact central ne subit donc pas un échauffement aussi important que le reste de l'interface. Ceci peut nuire à la bonne cicatrisation en ce point. Ce type de géométrie doit donc, a priori, être évité.

**Angle** L'effet de pointe du directeur joue un rôle important dans l'initiation de l'écoulement. Ce paragraphe se concentre maintenant sur l'effet de pointe global de la géométrie en proposant des simulations pour différents angles initiaux de directeurs. Elle sont effectuées à rayon de courbure en pointe de directeur ( $h/10$ ) et volume total de directeur identiques. Le graphique de la figure IV.18a représente la température en pointe de directeur ( $y = 10^{-5} \text{ m}$ ) en fonction du temps et en fonction de l'angle. Puisque le congé en pointe de directeur reste identique (un dixième de la hauteur du directeur), aux premiers instants l'augmentation de température est indépendante de l'angle. La phase suivante, où la température se stabilise, est liée à l'initiation de l'écoulement. Cette phase d'écoulement apparaît plus tard dans le cas d'angles plus importants (plus évasés). Ceci s'explique par le fait qu'un directeur plus pointu (un angle moins important) limite la diffusion de la chaleur dans le directeur et permet une augmentation de

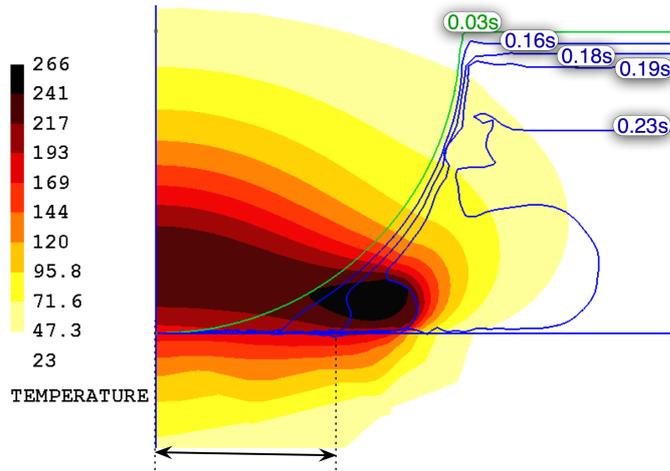
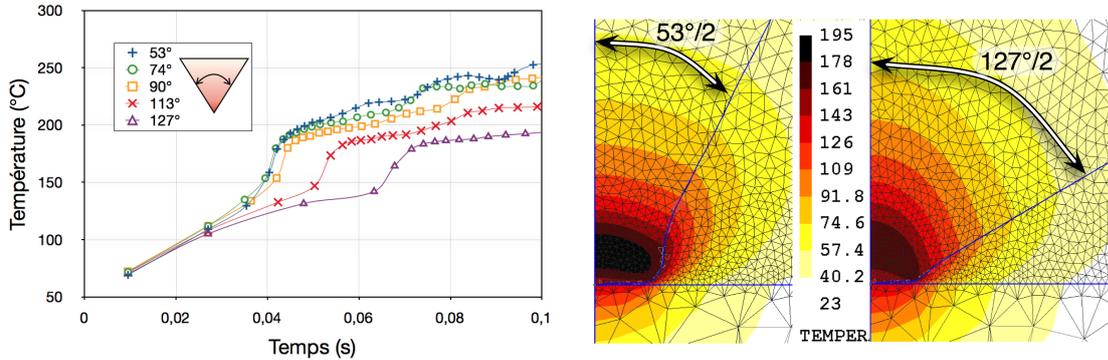


FIG. IV.17: Directeur semi-circulaire, champ de température à  $t = 0,19$  s et évolution de la surface libre.

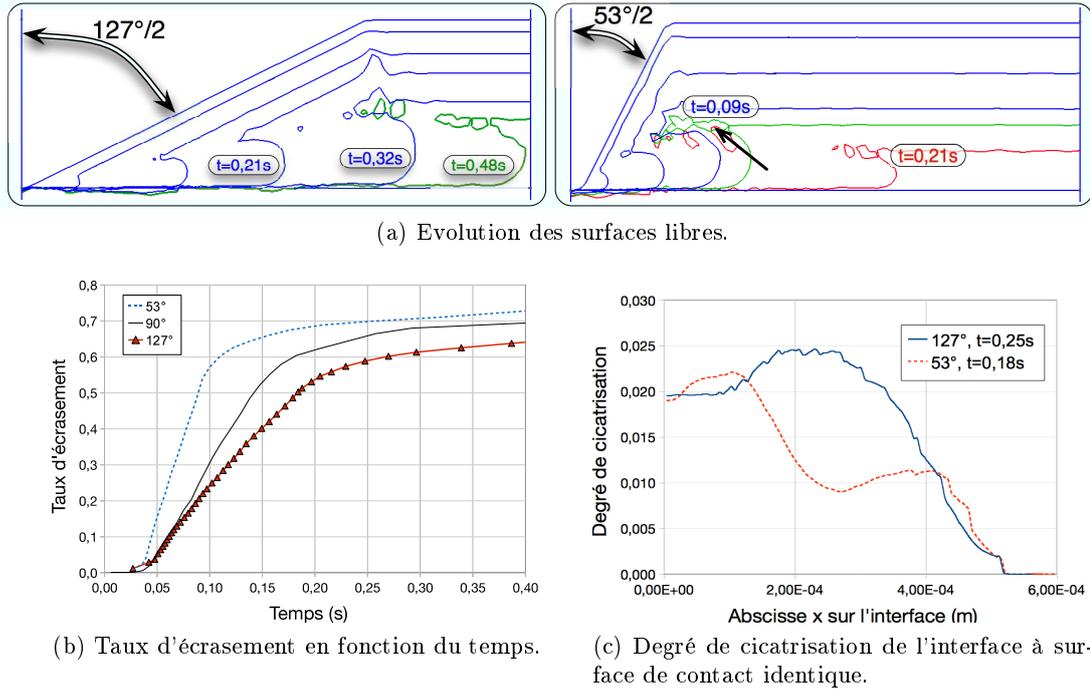


(a) Température en pointe de directeur en fonction du temps. (b) Champs de température à déformation équivalente. Angle initial de  $53^\circ$  à  $t = 0,035$  s et de  $127^\circ$  à  $t = 0,05$  s.

FIG. IV.18: Effets du changement d'angle initial de directeur sur la thermique.

température plus localisée, comme le montre la figure IV.18b.

Malgré cette première conclusion en faveur d'un directeur plus pointu, la phase d'écoulement montre que le directeur évasé présente d'autres avantages. Le taux d'écrasement du directeur, défini comme le déplacement de la plaque supérieure divisé par la hauteur initiale du directeur est visible figure IV.19b. Il montre qu'un angle plus important permet une écrasement plus lent durant plus longtemps. En effet, dans le cas évasé, l'évolution du bourrelet est progressive jusqu'à atteindre quasiment l'ensemble de l'interface. Par contre, l'écoulement du directeur pointu montre une transition brusque lorsque le bourrelet atteint la hauteur du directeur. Ceci favorise l'emprisonnement de porosité au niveau de la flèche sur la figure IV.19a. Il en résulte que le degré de cicatrization dans le cas d'un directeur plus évasé est plus homogène le long de l'interface (cf. figure IV.19c).

FIG. IV.19: Analyse qualitative d'adhésion pour des angles initiaux de  $23^\circ$  et  $67^\circ$ .

Finalement, une optimisation possible de la forme du directeur serait de mouler une pointe de directeur très effilée pour améliorer l'initiation et une base évasée pour favoriser un écoulement progressif.

**Rectangle** Afin de compléter l'étude sur les effets de la forme initiale, une simulation a été effectuée avec un directeur rectangulaire. Une largeur de  $3 \cdot 10^{-4}$  m assure un même volume de matière que dans la simulation de référence. La dissipation thermique est uniforme dans le rectangle initial. Du fait de la conduction dans les plaques, le maximum de température est donc atteint au milieu du directeur. L'écoulement est alors initié au milieu du directeur, comme le montre la figure IV.20. L'inefficacité d'un directeur rectangulaire observée expérimentalement peut être justifiée à l'aide de cette simulation. En premier lieu, le rôle de directeur d'énergie n'est pas rempli puisque la température atteinte reste faible par rapport à celle visible sur la figure IV.4. Ensuite, l'écoulement initié au milieu du directeur ne permettra vraisemblablement pas la cicatrisation de l'interface. En effet, les conditions nécessaires de contact intime et de température élevée ne seront pas remplies localement au niveau de l'interface. Enfin, la morphologie de l'écoulement semble propice à l'emprisonnement de porosités aux endroits indiqués par des flèches sur la figure IV.20.

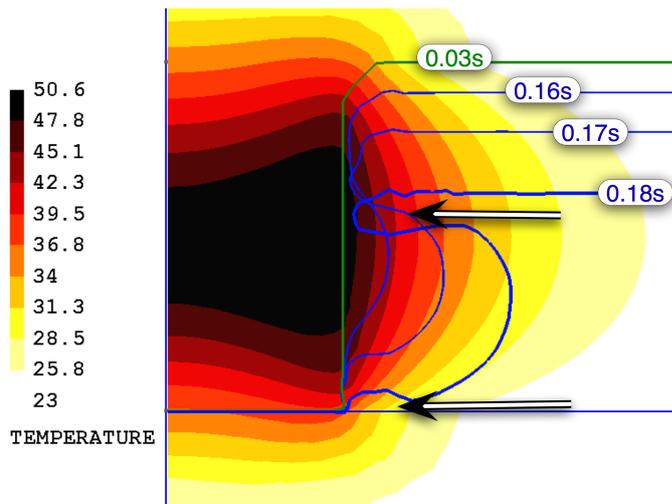


FIG. IV.20: Directeur rectangulaire. Champ de température à  $t = 0,03s$  et évolution de la surface libre.

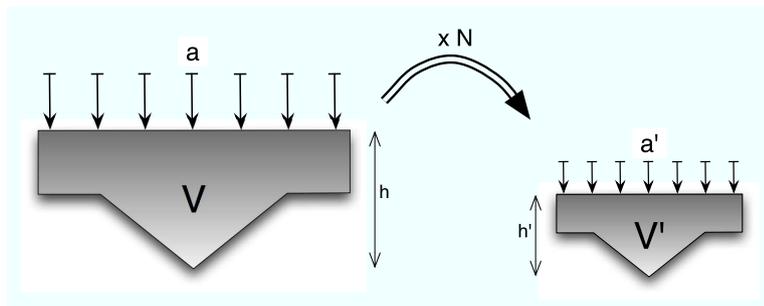


FIG. IV.21: Effet d'échelle, facteurs géométriques.

### 2.1.c Effet d'échelle

D'un point de vue technologique, il est intéressant de déterminer la taille optimale des directeurs. Doit-on en effet choisir beaucoup de petits directeurs ou plutôt opter pour quelques gros directeurs? Cette question de l'effet d'échelle est étudié ici via plusieurs simulations.

**Géométrie** La simulation type développée dans la section précédente est toujours considéré comme référence. Nous définissons un facteur d'échelle  $N$  tel que la hauteur  $h'$  du nouveau directeur d'énergie soit :

$$h' = Nh \tag{IV.20}$$

où  $h$  est la hauteur du directeur de référence (cf. figure IV.21). Le volume de matière

$V'$  est alors relié au volume de référence par :

$$V' = N^2 V \quad (\text{IV.21})$$

puisque la troisième dimension, la hauteur des prismes que constituent les directeurs d'énergie, reste identique. Pour conserver un volume de directeur identique, leur nombre doit être augmenté d'un facteur  $N^{-2}$ . Ceci peut être obtenu en multipliant le pas entre directeurs par  $N^2$ .

Finalement, lors d'un changement d'échelle d'un facteur  $N$ , le domaine de simulation garde la même hauteur  $h_{sim}$  puisqu'on conserve la même épaisseur de plaques<sup>†</sup>. En revanche, sa largeur  $l_{sim}$  est multipliée par  $N^2$  :

$$l'_{sim} = N^2 l_{sim}. \quad (\text{IV.22})$$

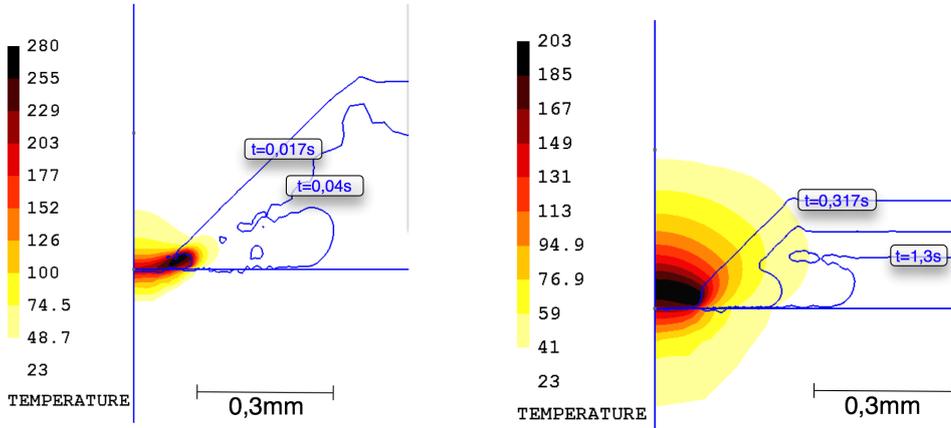
**Similitude et conditions aux limites** La condition sur  $\Gamma_{sup}$  dans le problème d'écoulement étant une contrainte imposée, elle reste identique lors du changement d'échelle. Cependant, dans le problème d'élasticité, où l'amplitude de déplacement est imposée, des considérations de similitudes sont nécessaires et demandent plus d'attention.

L'objectif est d'appliquer un déplacement permettant d'obtenir une même valeur de dissipation mécanique, ceci afin d'assurer une augmentation de température similaire et une puissance totale de l'outillage identique puisque le volume de directeurs reste le même. Dans ce cas, puisque le terme de dissipation dépend du carré de la déformation, la déformation doit être identique. Puisque la hauteur est multipliée par  $N$ , l'amplitude des vibrations à appliquer sur la nouvelle géométrie est également multipliée par  $N$ . Ceci revient à appliquer un principe d'homothétie naturelle sur la condition en déplacement :

$$a' = Na, \quad (\text{IV.23})$$

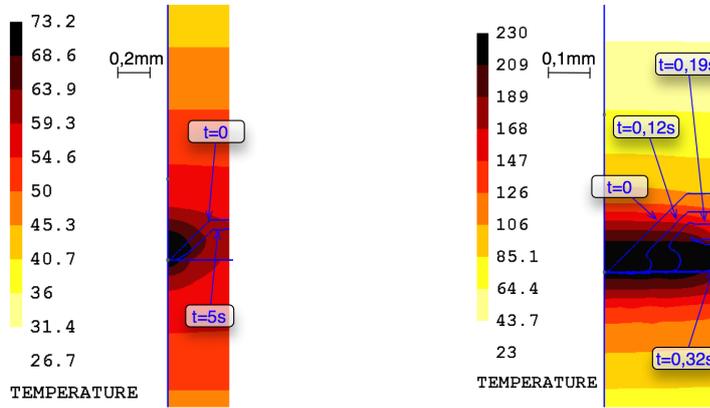
La similitude pour les augmentations de température et la similitude pour l'énergie mécanique apportée par l'outillage sont ainsi assurées.

**Résultats** Les figures IV.22a à IV.22c montrent les champs de température simulés avec le principe de similitude (IV.23) pour des facteurs d'échelle de 1, 5 ; 0, 8 et 0, 5. On observe qu'un directeur d'énergie plus grand entraîne une localisation plus importante. Du point de vue thermique, tout d'abord, un petit directeur induit une proximité et donc une diffusion plus importante dans les plaques. Ensuite d'un point de vue mécanique, comme le montre la figure IV.23 de nombreux petits directeurs donnent



(a)  $N = 1,5$  instant  $t = 0,017s$

(b)  $N = 0,8$  instant  $t = 0,317s$



(c)  $N = 0,5$ . Déplacement imposé  $a' = N.a$ . Instant  $t = 5s$ .

(d)  $N = 0,5$ . Déplacement imposé  $a' = a$ . Instant  $t = 0,317s$

FIG. IV.22: Effet d'échelle. Champ de température et surface libre simulés pour différentes tailles de directeurs.

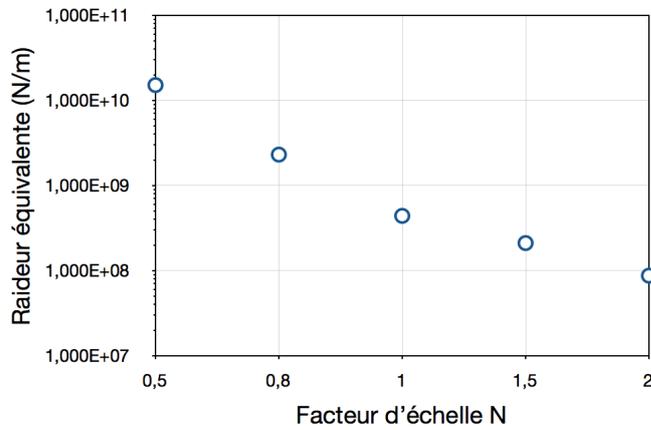


FIG. IV.23: Raideurs équivalentes  $N^2 K_d$  des directeurs à l'instant initial, régularisées par rapport au nombre de directeurs.

une rigidité équivalente plus importante que quelques gros directeurs. La concentration d'énergie est donc favorisée avec un facteur d'échelle grand et des gros directeurs.

Dans le cas où  $N = 0,5$  (fig. IV.22c), on observe même que le mécanisme de localisation n'est pas initié. Afin de forcer cette localisation, un cas où  $N = 0,5$  a donc été simulé avec une amplitude de vibration égale à celle de référence. La figure IV.22d montre que l'écoulement qui en résulte est progressif. De plus, les dimensions réduites permettent l'homogénéité du champ de température sur l'ensemble de l'interface. La quantité d'énergie dissipée à la fin de l'écoulement ( $t = 0,32$  s) est évaluée à 32 J par directeur. Puisqu'il y a  $N^2 = 4$  fois plus de directeurs que dans le cas de référence où l'énergie dissipée était de 95 J par directeur (équation (IV.16)), l'efficacité est diminuée.

Pour résumer ces résultats, on peut en conclure qu'un grand directeur d'énergie permet une meilleure concentration. Toutefois, une localisation trop importante ne permet pas un écoulement progressif à l'interface. Outre le risque de piéger des porosités, le contact intime n'est alors pas aussi bien assuré et la cicatrisation risque d'être diminuée. A contrario, des directeurs plus petits diminuent l'efficacité du procédé, il faut leur apporter plus d'énergie. Il y a donc un optimum de taille à trouver.

## 2.2 Matériau

Après avoir proposé quelques influences de la géométrie initiale du directeur sur l'écoulement à l'interface, cette section présente l'influence des propriétés des matériaux avec quelques études de sensibilité.

### 2.2.a Thermo-dépendance du module d'Young

Dans le problème d'élasticité, du fait de la géométrie, une diminution du module d'Young entraîne une déformation plus importante en pointe de directeur, à déplacement imposé identique. L'auto-échauffement, proportionnel au carré de la déformation, est alors quadratiquement augmenté. La figure IV.24 présente la morphologie d'écoulement à mi-déformation dans le cas où le module d'Young  $E = E_0 = 0,5$  GPa est indépendant de la température. La localisation de la déformation et du terme source est favorisée par la thermo-dépendance du module d'Young. Le ramollissement du polymère avec la température favorise la formation du bourrelet et permet d'atteindre la température élevée nécessaire à l'adhésion.

---

<sup>†</sup>La diminution de la hauteur du domaine liée à la diminution de la hauteur du directeur est ici négligée par rapport à la hauteur des plaques composites.

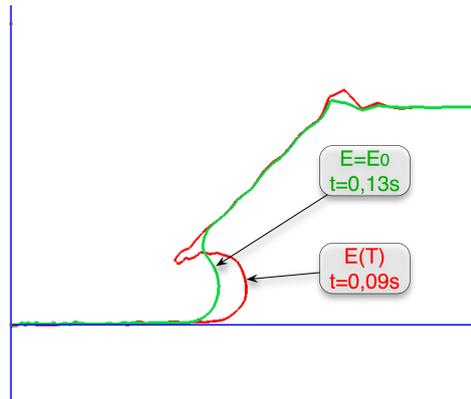


FIG. IV.24: Module d'Young indépendant de la température. Comparaison avec le cas de référence de la surface libre à mi-écrasement.

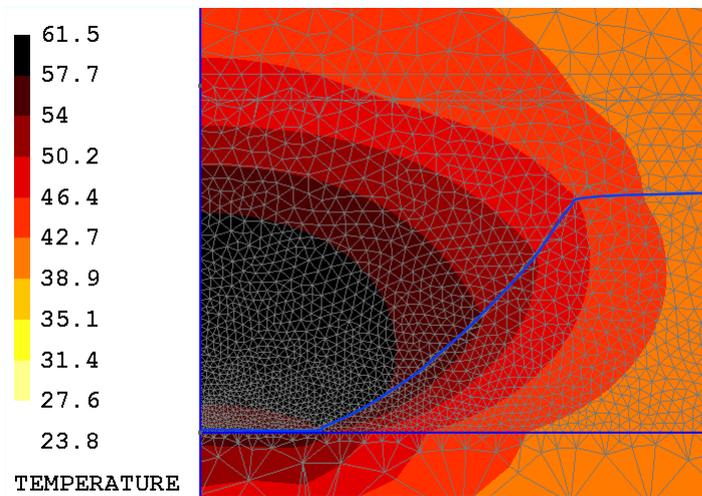


FIG. IV.25: Champ de température à  $t = 5$  s pour des plaques souples où  $E = 2$  GPa.

### 2.2.b Raideurs des plaques

La section 1.2.c a permis d'évaluer la raideur équivalente des plaques composites à environ cinq fois celle du directeur. En pratique si la raideur des plaque est diminuée d'un facteur 5 ou plus, elle atteint la raideur équivalente du directeur d'énergie qui n'assurera alors plus son rôle de concentrateur d'énergie. La figure IV.25 montre que pour des plaques de composites très souple (où le module d'Young vaut 2 GPa), la température n'augmente pas suffisamment pour initier l'écoulement. Cette perte de raideur peut être due, outre l'utilisation d'un matériau plus souple, à l'augmentation de l'épaisseur des plaques. Cette remarque est confirmée par l'expérience où l'on constate qu'il est difficile, voire impossible, de souder des plaques très épaisses par ce procédé.

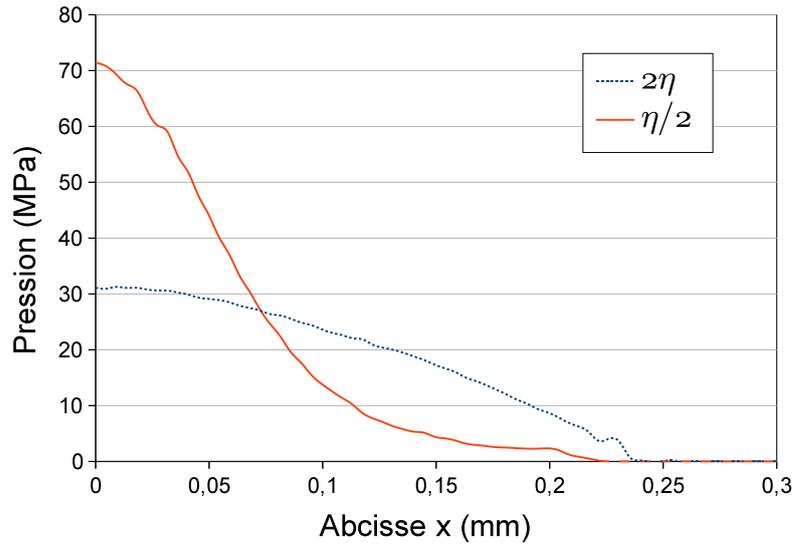


FIG. IV.26: Effet de la viscosité. Profils de la pressions à l'interface à déformation équivalente. (—) viscosité divisée par deux,  $t = 0,03$  s; (··) viscosité multipliée par deux,  $t = 0,8$  s.

### 2.2.c Viscosité

Entre les grades 150 et 450 du PEEK, la masse molaire moyenne en nombre varie d'un facteur 1,3 environ (cf. tableau I.1). La viscosité étant à la puissance 3,4 de la masse molaire, celle-ci peut alors varier d'un facteur de plus de 2. Le temps caractéristique de Maxwell  $\lambda$  varie également à la puissance 3,4. Le terme d'auto-échauffement proportionnel à  $\eta/\lambda^2$  d'après l'équation (II.112), (p. 77) varie alors d'un facteur 1/2. Une diminution du grade du polymère entraîne ainsi deux effets sur le procédé : une augmentation du terme de dissipation mécanique et un effet direct sur l'écoulement, évidemment lié à la viscosité  $\eta$ .

Deux simulations sont effectuées avec un facteur 0,5 puis 2 sur la viscosité par rapport au cas de référence. Ceci est assuré en modifiant le facteur pré-exponentiel  $A$  dans la loi de Carreau (IV.6). Dans le cas où la viscosité est réduite, le terme d'échauffement est plus important. L'écoulement est alors plus rapide et localisé. La figure 2.2.c confirme qu'à déformation équivalente, une diminution de la viscosité donne une répartition de pression plus homogène à l'interface.

### 2.2.d Amortissement

D'après l'équation (II.117), le terme de dissipation d'énergie mécanique

$$Q = \frac{E''\omega}{2} \hat{\varepsilon} : \hat{\varepsilon} \quad (\text{IV.24})$$

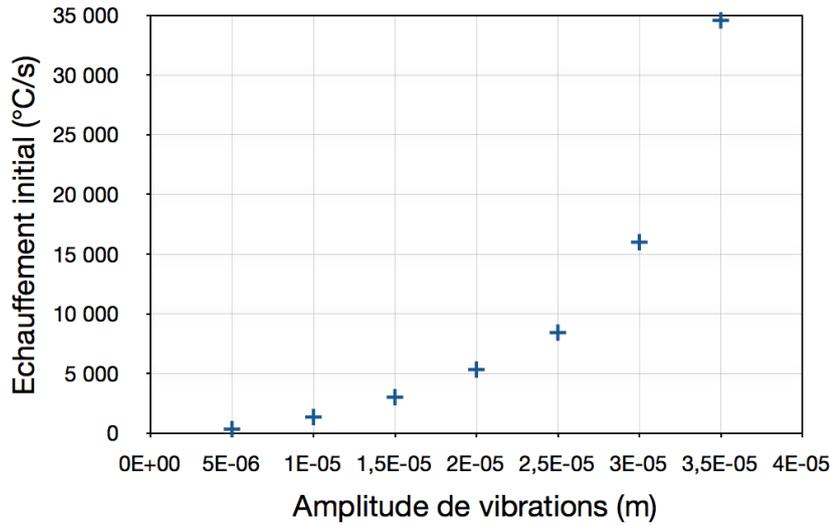


FIG. IV.27: Vitesse d'échauffement maximale à l'instant initial.

est proportionnel au module de perte. L'utilisation d'un matériau présentant un module de perte plus important induit donc une augmentation proportionnelle de la dissipation. De plus, les figures F-6 et F-7b données en annexe F montrent pour le PEEK un pic de  $E''$  en fonction de la température, au dessus de la température de la transition vitreuse  $\theta_g = 143^\circ\text{C}$ . Une augmentation de la dissipation a donc lieu une fois la température de transition vitreuse dépassée. Ceci amplifie encore le phénomène de localisation de l'échauffement et de l'écoulement.

## 2.3 Procédé

Les propriétés du matériau sont généralement imposées par l'application et la géométrie du directeur est un paramètre difficile à modifier puisqu'il nécessite un changement du moule lors de la fabrication du composite. Cette section discute l'influence des paramètres plus facilement modifiables que sont les paramètres de l'outillage.

### 2.3.a Amplitude de vibration

**Effet quadratique** Le terme de dissipation d'énergie mécanique est proportionnel au carré de la déformation. Le procédé est donc fortement dépendant de l'amplitude de vibration de la sonotrode. La vitesse initiale d'échauffement maximale en pointe de directeur est représentée en fonction de l'amplitude sur la figure IV.27. L'effet quadratique est retrouvé numériquement. Néanmoins, pour une amplitude de vibration trop importante, le couplage entre les différentes physiques devient trop important. L'algorithme itératif utilisé pour la résolution multiphysique atteint alors ses limites de robustesse. Cet aspect sera discuté plus en détail section 3.2.c.

**Contact sonotrode/plaque** Il faut également rappeler que la sonotrode n'impose pas un déplacement strictement sinusoïdal à la plaque supérieure. Il y a une perte de contact et un effet de martelage. Ainsi, même si les simulations montrent que l'échauffement augmente avec l'amplitude de vibration, ce n'est pas ce que l'on observera en pratique. En effet augmenter l'amplitude de vibration résultera en une diminution du temps de contact sonotrode/plaque supérieure. L'influence quadratique n'est donc probablement pas conservée en pratique.

Alors que l'amplitude de vibration à l'extrémité de la sonotrode peut atteindre  $80\ \mu\text{m}$ , dans la modélisation de référence, l'amplitude a été fixée à  $20\ \mu\text{m}$ . Cette valeur inférieure permet de retrouver l'échauffement de l'expérience, comme le montrent les validations de la section 1.2.b. Mais nous avons bien conscience qu'il s'agit là d'un artifice qui permet de prendre en compte l'effet de perte de contact. La compréhension fine de ce phénomène passerait par des développements numériques complémentaires qui n'ont pas pu être menés à ce jour.

### 2.3.b Effort de maintien la sonotrode

Outre l'amplitude des vibrations imposées par la sonotrode, le temps de contact sonotrode/plaque supérieure est intimement lié à l'effort constant de maintien de la sonotrode. C'est ce qu'a montré Duc Ha Minh [Ha Minh, 2009] dans son travail de thèse sur l'étude macroscopique des effets dynamiques dans l'outillage. La dissipation d'énergie augmente ainsi fortement avec la pression constante de la sonotrode. Ce paragraphe laisse de côté ces effets macroscopiques et se concentre sur l'effet d'une variation de l'effort de la sonotrode sur l'écoulement mésoscopique à l'interface, dans l'hypothèse d'un contact permanent.

La figure IV.28 montre qu'en augmentant l'effort constant de la sonotrode, la température maximale en pointe de directeur est diminuée. En effet, en appliquant un effort plus important, l'écrasement du directeur se produit plus tôt. L'effet de pointe est alors perdu et l'échauffement reste limité. De façon un peu surprenante, ceci montre qu'un effort plus faible de la sonotrode permet d'assurer un chauffage localisé pendant plus longtemps et donc d'atteindre des températures plus importantes à l'interface.

Ces constats permettent de dégager une conclusion importante d'un point de vue pratique. L'application de la force de maintien sur la sonotrode a deux effets antagonistes qui nécessitent la recherche d'un optimum : l'augmentation de la force de maintien permet d'assurer un temps de contact plus important et donc une dissipation plus importante, mais entraîne un écrasement plus rapide et donc un temps d'auto-échauffement plus court.

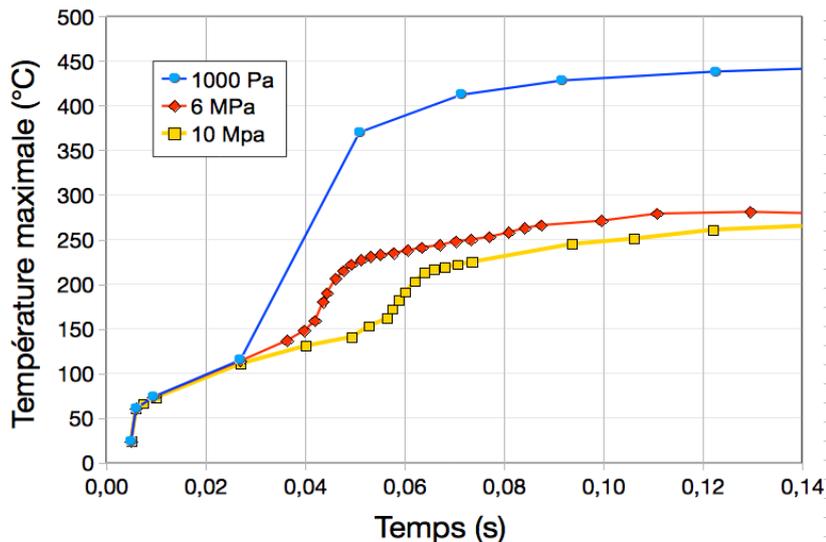


FIG. IV.28: Température maximale en pointe de directeur en fonction du temps pour différents efforts de sonotrode.

### 2.3.c Fréquence ultrasonore

L'outil numérique développé, qui se base sur une modélisation homogénéisée de l'écoulement, ne permet pas d'étudier l'influence de la variation de la fréquence de vibration de la sonotrode sur l'écoulement. Pour ce faire, il serait nécessaire de revenir aux expressions des termes sources (II.77) et (II.78). Cependant, ces expressions restent le fruit de la méthode d'homogénéisation, qui prenait comme point de départ un modèle de Maxwell. Pour déterminer l'influence de la fréquence de vibration sur l'écoulement, une étude spécifique du matériau, est alors nécessaire. Une mesure *in situ* de l'auto-échauffement induit par un essai de DMA ou de barres de Hopkinson est envisagée.

## 2.4 Récapitulatif

La tableau IV.2 récapitule l'influence des paramètres procédés sur la phase de chauffage et la phase d'écoulement. En conclusion, l'étude effectuée dans cette section est loin d'être exhaustive. Elle propose simplement quelques applications originales du logiciel développé qui permettent de mieux comprendre le procédé industriel. Bien que les simulations effectuées se limitent à des calculs bidimensionnels, les conclusions peuvent généralement être étendues au procédé dit "continu". La section suivante présente les limites de l'outil numérique développé et les raisons pour lesquelles un calcul tridimensionnel n'est toujours pas abordable, à l'heure actuelle.

TAB. IV.2: Récapitulatif : influence des paramètres sur le procédé.

	<b>Phase initiale, chauffage</b>	<b>Phase d'écoulement et cicatrisation</b>
<b>Forme des directeurs</b>	Effet de pointe : initiation améliorée pour des directeurs pointus. Localisation thermique plus importante pour des directeurs pointus.	Écoulement et procédé plus lent avec un directeur évasé. L'écoulement plus progressif piège moins de porosités.
<b>Taille des directeurs</b>	Raideur équivalente de l'interface plus faible avec de grands directeurs peu nombreux ; Concentration d'énergie meilleure. De nombreux petits directeurs diminuent l'efficacité du procédé.	Des directeurs trop grands empêchent un écoulement progressif et diminuent le contact intime. Plusieurs petits directeurs assurent une température plus homogène. Meilleur pour la cicatrisation.
<b>Raideur des plaques</b>	Il faut assurer une raideur de directeurs bien inférieure à la raideur équivalente des plaques. Des plaques plus souples ou plus épaisses diminuent la concentration d'énergie et entraînent une dissipation dans les plaques.	Si la raideur transverse des plaques est inférieure à une raideur critique, la concentration n'est pas suffisante pour initier le procédé et l'écoulement.
<b>Viscosité</b>	Le terme d'échauffement est inversement proportionnel à la viscosité. Un grade plus faible et une viscosité plus faible du polymère diminuent l'auto-échauffement.	Température plus homogène et écoulement plus lent avec une viscosité plus importante. Une viscosité trop faible entraîne une localisation importante et un écoulement n'assurant pas le contact intime.
<b>Module d'Young</b>	Echauffement augmente quadratiquement avec la diminution du module d'Young. La chute de raideur avec la température assure une localisation plus importante.	Localisation et écoulement plus rapide grâce à la thermo-dépendance. Température atteinte plus élevée permettant une meilleure cicatrisation.
<b>Module de perte</b>	Echauffement proportionnel au module de perte. Le pic au dessus de $\theta_g$ augmente la localisation des effets thermo-mécaniques.	
<b>Amplitude des vibrations</b>	Echauffement dépendant quadratiquement de l'amplitude de sollicitation. Effet du martelage non étudié.	Une amplitude trop importante localise trop l'échauffement et ne permet pas un écoulement progressif.
<b>Effort de maintien</b>	Écoulement plus rapide et échauffement moins important pour un effort de sonotrode plus important. Effet de martelage diminué avec la pression de la sonotrode [Ha Minh, 2009].	Un effort de maintien trop important entraîne une diminution des températures atteintes. La cicatrisation risque d'être diminuée.
<b>Fréquence ultrasonore</b>	Non analysable avec l'approche homogénéisée.	

### 3 Bilan

Les résultats présentés précédemment ont été obtenus à l'aide d'outils développés dans un cadre spécifique. Cette dernière section permet de conclure en discutant l'intérêt et les limites des différents outils utilisés. Cette discussion permet de proposer des perspectives envisageables pour l'outil numérique.

#### 3.1 Efficacité de l'outil numérique

##### 3.1.a L'approche eulérienne avec surface libre

Bien que dans le domaine de la mécanique des structures, il soit commun d'adopter une approche lagrangienne, les grandes déformations que subit le directeur ont poussé à adopter un point de vue eulérien. L'approche eulérienne est toutefois couplée à une méthode de level-set qui permet de décrire avec précision l'évolution de la surface libre. Cette surface libre est une information matérielle mobile dans notre maillage fixe. Elle est donc un outil lagrangien qui font de l'approche retenue une sorte de méthode ALE.

**Bourrelet** Les simulations montrent une forte localisation des effets thermo-mécaniques en pointe de directeurs. Il en résulte un bourrelet très localisé en pointe de directeur, où les déformations locales sont de l'ordre de 100. L'approche eulérienne est alors complètement justifiée puisqu'elle permet de conserver une précision constante lors de l'écoulement. Cette précision est éventuellement améliorable avec un outil de raffinement de maillage automatisé.

##### 3.1.b Résolution multiphysique itérative

La résolution multiphysique à l'aide de la méthode itérative présentée section III.2.3.a est efficace puisque dans la majorité des cas présentés elle converge en moins de trois itérations. Il faut rappeler que cette méthode permet d'assurer une résolution rigoureuse du problème multiphysique puisque le critère de convergence est assuré simultanément pour chaque résidu. Cependant, dans certains cas présentant des couplages forts (par exemple pour une augmentation de température trop rapide), la méthode itérative ne s'avère pas robuste et la convergence entre les différentes physiques n'est pas atteinte.

##### 3.1.c Equations de transport

Le transport de la température et des level-sets est assuré jusqu'à l'écrasement complet du directeur. Les méthodes utilisées sont robustes. La perte de précision dans

la description de l'interface semble d'abord être liée au maillage et pourrait donc être limitée par un raffinement adéquat.

### 3.1.d Etude paramétrique

L'outil de calcul numérique développé a permis d'étudier les effets de différents paramètres procédés. L'influence de la géométrie initiale, de certains paramètres matériaux du polymère et des plaques, de l'amplitude des vibrations ou de l'effort de maintien de la sonotrode a pu être étudié. En général, un retour à des considérations physiques a permis d'expliquer ces différents effets. L'outil numérique est donc finalement une aide à l'investigation. Il permet d'isoler un paramètre et d'en étudier l'influence sur le procédé.

## 3.2 Perspectives

### 3.2.a 3D

Les simulations présentées dans cette étude se limitent à des calculs bidimensionnels. Toutefois, afin de mieux comprendre l'écoulement à l'interface, une simulation tridimensionnelle semble indispensable. En effet, comme présenté dans le chapitre I, le soudage continu, avec déplacement de la sonotrode, semble favoriser l'adhésion. En vue d'étudier l'écoulement qui en résulte, le code a été développé dans une optique de simulation tri-dimensionnelle. Apichan Sripien [Sripien, 2009] a montré, à l'aide d'une série de cas tests, que le code fonctionne en trois dimensions. Néanmoins, le passage à une description 3D augmente le nombre de degrés de libertés (en particulier avec des interpolation P1+/P1, comme le montre le tableau III.1 (p. 90)) et leurs connectivités.

Malgré les temps de calculs très long, une simulation tridimensionnelle du procédé a été effectuée avec Apichan Sripien. Le domaine de calcul se limite à une plaque de quelques éléments d'épaisseur (cf. fig. IV.29). Les effets 3D ne peuvent donc pas être étudiés à l'aide d'une telle simulation. Toutefois, elle valide le fonctionnement du code de simulation en 3D et confirme la nécessité d'optimisation.

### 3.2.b Conditions aux limites

La description eulérienne mène à une réflexion quant aux conditions limites appliquées. Du fait que le maillage ne se déplace pas, la frontière  $\Gamma_{sup}$  ne se déplace pas non plus. La condition limite sur  $\Gamma_{sup}$  ne s'applique donc pas sur une surface matérielle. Elle revient à introduire de la matière dans le système. Ceci, que l'on impose un effort ou un déplacement.

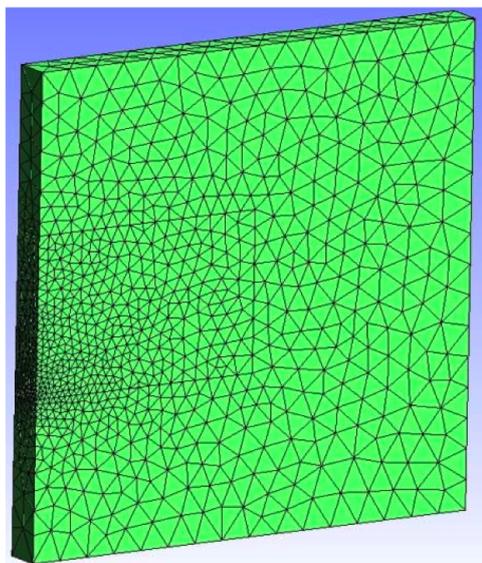


FIG. IV.29: Maillage tridimensionnel.

Dans les simulations présentés, la sonotrode est suffisamment loin de l'interface pour ne pas y perturber la solution. Afin de traiter cette condition limite plus rigoureusement, la sonotrode pourrait être modélisée à l'aide d'un matériau indéformable défini par une autre level-set entrant en contact avec la plaque supérieure.

### 3.2.c Couplage fort

Afin de traiter de cas multiphysiques sévères, présentant des couplages forts, il faut revenir à la formulation multiphysique générale constituée des vecteurs concaténés (III.44)

$$\left\{ \begin{array}{c} X_u \\ X_\theta \\ X_v \\ X_p \end{array} \right\} \quad (\text{IV.25})$$

et des matrices (III.47). Une résolution multiphysique globale ferait alors intervenir les sensibilités croisés (termes hors diagonaux). Elle nécessiterait alors un travail supplémentaire d'implémentation mais semble incontournable pour assurer une résolution robuste de problèmes fortement couplés.

Bien que la taille des systèmes à inverser soit augmentée, une telle résolution permettrait de s'affranchir de la boucle itérative de résolution multiphysique. Par contre les itérations de Newton-Raphson dues aux non linéarités restent indispensables.

### 3.3 Difficultés et perspectives à long terme

#### 3.3.a Contact

**Plaque inférieure** Dans la simulation effectuée, la thermique et l'élasticité dans la plaque inférieure sont résolues. Toutefois, du fait des conditions limites appliquées sur  $\Gamma_0$  (eq. (IV.12)), le problème de mécanique des fluides n'y est pas résolu. En toute rigueur, il faudrait donc appliquer les conditions sur la frontière inférieure  $\Gamma_{inf}$  et modéliser le contact du directeur sur la plaque inférieure.

**Limite** Pour étendre la simulation et décrire la déformation de la plaque inférieure les deux level-set doivent pouvoir évoluer. Certains éléments sont alors traversés par deux surfaces libres. Ce cas de figure présente alors les difficultés détaillées section III.2.2. Outre un éventuel enrichissement spécifique, de nouvelles méthodes doivent être implémentées pour assurer l'évacuation de l'air et le contact (avec la transformation de deux interfaces matière/air et air/matière en une interface matière/matière). Une réflexion amont poussée est alors nécessaire.

#### 3.3.b Enrichissement

D'autre part, ajouter l'enrichissement aux interpolations permettrait de gagner en précision au niveau des surfaces libres. Implémenter cette méthode X-FEM présente toutefois les difficultés discutées section III.3.1.a. Lors de l'évolution de la surface libre, les variables aux points de Gauss, en particulier dans un cadre multiphysique, ainsi que les discontinuités des champs doivent être traitées de manière spécifique. Le passage de l'interface d'un élément à un autre demande un travail spécifique complémentaire au niveau de la librairie utilisée. Freiné par ces difficultés, le travail actuel s'est limité à une méthode classique sans enrichissement. Néanmoins, avec un maillage suffisamment raffiné, l'erreur induite est moindre.



# Conclusion et Perspectives

## Conclusions

Le soudage de matériaux composites à matrice thermoplastique par ultrasons est un procédé qui fait intervenir de nombreux phénomènes physiques couplés. Un travail préliminaire d'ingénierie a permis d'identifier une problématique clef : la modélisation de la thermo-mécanique de l'écoulement à l'interface lors du soudage.

Après identification des phénomènes physiques prépondérants, la mise en équations de cet écoulement révèle la co-existence de phénomènes rapides et lents. Une méthode systématique d'homogénéisation temporelle par développements asymptotiques permet alors de contourner cette difficulté en modélisant le procédé à l'aide de trois problèmes aux limites couplés. La résolution numérique de ces problèmes, de par leur spécificité, fait apparaître de nouvelles difficultés telles que l'évolution de géométrie ou l'aspect multiphysique. Des méthodes numériques particulières sont alors nécessaires pour la simulation. Finalement, l'outil numérique développé permet une analyse de l'influence des paramètres procédés sur la qualité de l'écoulement et du soudage.

L'originalité de ce travail se traduit, à notre avis, par les trois contributions suivantes :

- La **modélisation** puis l'identification des **phénomènes physiques prépondérant** dans un procédé ultrasonore, rendue possible avec l'application d'une méthode d'**homogénéisation** temporelle.
- Le développement d'un **outil logiciel** conséquent pour simuler un problème multiphysique avec évolution de la géométrie. Cet outil est à la fois adapté au procédé industriel étudié et suffisamment générique pour être appliqué à d'autres problématiques.
- **La compréhension du procédé** grâce aux outils développés. En particulier, l'analyse de l'influence de paramètres procédé sur la qualité du soudage.

## Perspectives

Le travail présenté a permis de mieux comprendre certains phénomènes à l'interface de soudage et d'identifier leur lien avec les paramètres du procédé. Toutefois, l'objectif d'optimisation présenté sur la figure 1 (p. 3) nécessite encore des travaux complémentaires. Ils constituent les perspectives du présent travail.

A court terme, la validation de l'outil numérique développé est nécessaire. Une campagne expérimentale ainsi que des mesures des paramètres matériau peu connus sont nécessaires. Avec les améliorations de l'outil numérique proposées section IV.3 elles devraient permettre d'obtenir un outil de simulation numérique plus précis quantitativement.

A moyen terme, en vue de modéliser le procédé de manière globale, l'étude peut s'orienter vers une approche dite *macroscopique équivalente*. Celle-ci consisterait à proposer des grandeurs équivalentes nécessaires à la description de la structure macroscopique de la figure 1 (p. 3) à l'aide de simulations mésoscopiques telles que celles proposées dans ce travail. Des abaques obtenues à l'aide de telles simulations permettraient par exemple de déterminer un terme source équivalent ou une raideur équivalente directement en fonction des paramètres du procédé.

A long terme, une approche macroscopique équivalente permettrait une modélisation méso-macro complète du procédé. La modélisation macroscopique considérerait alors l'interface comme surfacique. La physique y serait introduite en simulant un écoulement à l'échelle mésoscopique.

Outre ces perspectives pour le procédé de soudage par ultrasons, la présente étude pourrait être étendue afin d'appliquer des méthodes similaires à d'autres procédés : soit à d'autres procédés ultrasonores, soit de manière plus générale, à des procédés présentant un phénomène rapide (tel qu'une vibration) qui entraînent une évolution lente (telle qu'un écoulement).



# Annexes

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Mesures de température</b> . . . . .	<b>173</b>
A.1	Mesures par thermocouple . . . . .	173
A.2	Méthode inverse. . . . .	173
A.3	Positionnement des thermocouples . . . . .	174
A.4	Résultats . . . . .	174
<b>B</b>	<b>Extension de l'homogénéisation</b> . . . . .	<b>176</b>
B.1	Basses températures . . . . .	176
B.2	Maxwell généralisé . . . . .	178
B.3	Prise en compte de la dynamique . . . . .	180
B.4	Grandes déformations . . . . .	184
<b>C</b>	<b>Code éléments finis</b> . . . . .	<b>187</b>
C.1	Implémentation de l'élasticité . . . . .	187
C.2	Implémentation de la mécanique des fluides . . . . .	188
C.3	Thermique stationnaire. . . . .	192
C.4	Thermique transitoire . . . . .	192
<b>D</b>	<b>Contact par pénalité</b> . . . . .	<b>196</b>
D.1	Méthode de pénalisation adoptée . . . . .	196
D.2	Optimisation de la loi de contact . . . . .	197
	› <i>Cas test 8 : Contact sur un pion en élasticité</i> . . . . .	199
<b>E</b>	<b>X-FEM et interface matériau</b> . . . . .	<b>201</b>
E.1	Champ thermique . . . . .	201
E.2	Champ de déplacement . . . . .	201
E.3	Formulation mixte . . . . .	201
	› <i>Cas test 9 : Thermique dans un bi-matériau</i> . . . . .	201
<b>F</b>	<b>Paramètres matériau de l'APC2 et du PEEK</b> . . . . .	<b>205</b>
F.1	Propriétés thermiques . . . . .	205

F.2	Propriétés mécaniques . . . . .	208
-----	---------------------------------	-----

---

## A Mesures de température

Les chapitres II et III ont donné des éléments pour caractériser l'augmentation de température au niveau du directeur. En parallèle de cette étude microscopique, nous poursuivons une analyse macroscopique, au niveau des plaques de composites. Cette analyse a consisté dans un premier temps en une campagne d'essais de mesures de températures au sein de la plaque de composite. Elle a été effectuée par Fabien Conte et Régis Loubatière au laboratoire de thermocinétique de Nantes [Conte et Loubatière, 2008]. L'objectif étant d'appliquer une méthode inverse pour quantifier de manière globale le chauffage à l'interface.

### A.1 Mesures par thermocouple

Les mesures de température sont effectuées à l'aide de thermocouples de type K (Alumel / Chromel). Les thermocouples sont obtenus en brasant bout à bout un fil d'alumel et un fil de chromel. Les trois constituants du thermocouple (chromel, alumel et brasure d'argent) sont donc métalliques et ont une conductivité thermique de l'ordre de  $\lambda_{thcouple} \sim 100 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Les conductivités thermiques des fibres carbonées ou de la matrice PEEK sont de l'ordre de  $\lambda_{composite} \sim 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Cette simple différence démontre l'intrusivité des thermocouple dans le procédé. En outre, le contact entre le thermocouple et le matériau à étudier n'étant jamais parfait, une résistance thermique vient encore augmenter l'intrusivité des thermocouples. Une étude de sensibilité a préalablement été effectuée à l'aide de simulations numériques effectuées sous Comsol et d'expérimentations ad-hoc. Elles montrent que l'erreur est de quelques degrés pour des diamètres de thermocouples de  $50 \mu\text{m}$ .

### A.2 Méthode inverse.

Une modélisation macroscopique est proposée. L'interface et les directeurs sont réduits à une surface. Le chauffage des directeurs est alors modélisé par un flux surfacique équivalent. La simulation du problème direct se fait en 1D sous Matlab. Une fois fixé un flux à l'interface  $\phi_0(t, x = 0)$ , qui est une des conditions limites, la résolution du problème direct permet d'obtenir le champ de température dans l'épaisseur  $T_{\phi_0}(x, t)$ . L'application d'une méthode inverse consiste à déterminer, à partir de  $N$  mesures de température effectuées dans la plaque, notées  $\hat{T}(x = x_i, t)$   $1 \leq i \leq N$ , le flux optimal  $\phi_{opt}$  qui minimise la fonction coût :

$$S(\phi) = \sum_{i=1}^N \left| T_{\phi}(x = x_i, t) - \hat{T}(x = x_i, t) \right| \quad (\text{A-1})$$

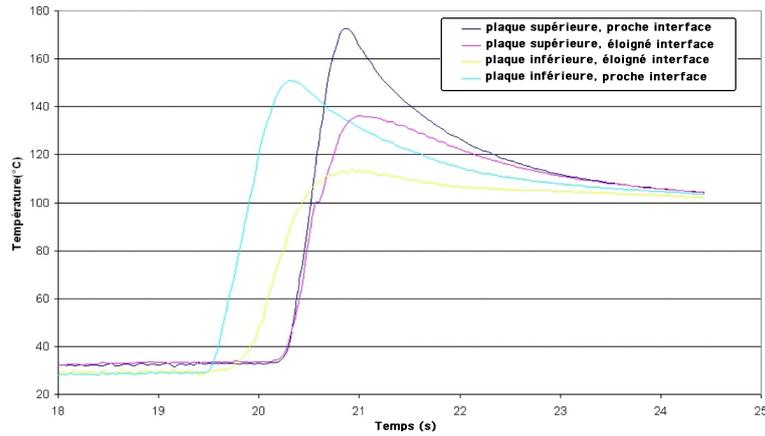


FIG. A-1: Températures mesurées par les thermocouples.

où le symbole  $|\cdot|$  est une norme de  $\mathcal{C}^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . De nombreuses méthodes d'optimisation peuvent alors être mises à profit. Nous avons ici appliqué une méthode de Gauss-Newton tel que celle présentée dans [Rappaz et al., 1998].

### A.3 Positionnement des thermocouples

Les thermocouples sont disposés dans la plaque d'APC2, au plus près de la source de chaleur afin d'avoir un maximum de sensibilité pour l'application de la méthode inverse. Par contre, seule la plaque de composite a été modélisée dans le problème direct, les thermocouples doivent donc être suffisamment loin de l'interface pour ne pas mettre à défaut la modélisation macroscopique à l'aide d'un flux surfacique.

La fabrication d'une plaque instrumentée permet de positionner les thermocouples au cœur de la plaque. Sur un empilement de 16 couches de préimprégné, une première série de thermocouples a été disposée entre le deuxième et le troisième pli de la plaque à environ 400  $\mu\text{m}$  de l'interface, une deuxième série, plus éloignée, à environ 800  $\mu\text{m}$  de l'interface. Leurs positions précises sont déterminées a posteriori par des coupes et par identification à l'aide de microscopes optiques de la boule de brasure.

### A.4 Résultats

Les deux plaques à souder sont instrumentées. Nous appellerons "plaque supérieure" la plaque sur laquelle sont moulés les directeurs et "plaque inférieure" celle en contact avec la table. Les mesures de température en fonction du temps visibles sur la figure A-1, permettent de déterminer par méthode inverse le flux à l'interface (figure A-2a) et la température à l'interface (figure A-2b). On note en particulier que le flux à l'interface est moins important vers la plaque inférieure. Ceci s'explique d'une part par l'asymétrie

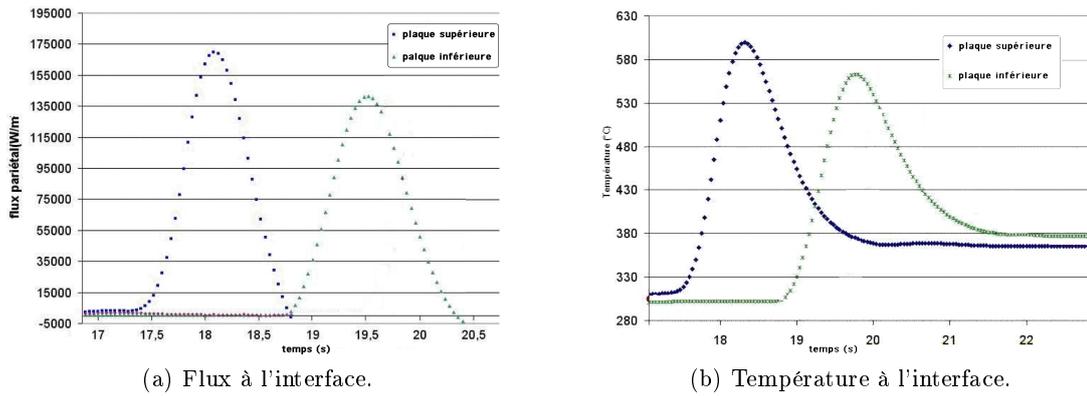


FIG. A-2: Application de la méthode inverse.

du montage (la plaque inférieure est en contact avec la table), et d'autre part par le contact moindre des directeurs avec la plaque inférieure. Bien entendu la modélisation macroscopique à l'aide d'une source surfacique n'est pas suffisamment réaliste. Néanmoins cette modélisation permet de déterminer de manière quantitative relativement précise un flux maximum à l'interface d'environ :

$$\phi_{max} = 155 \pm 15 \text{ kW/m}^2 \quad (\text{A-2})$$

## B Extension de l'homogénéisation

Dans cette annexe, nous présentons les propositions d'extension de la méthode d'homogénéisation temporelle, présentée dans le chapitre II, à d'autres modèles rhéologiques.

### B.1 Basses températures

Si le polymère a un comportement viscoélastique de Maxwell. A basse température, l'identification des paramètres matériaux effectuée paragraphe II.2.2.c est changée. En effet, le temps de relaxation  $\lambda$  et la viscosité  $\eta$  augmentent quand la température baisse. Ceci peut être confirmé par les mesures des modules viscoélastiques proposés annexe F.2.a. Ils permettent en effet d'identifier les ordres de grandeur suivant à température ambiante :

$$\begin{cases} \lambda \sim 10^5 \text{ s} \\ \eta \sim 10^{11} \text{ Pa.s} \end{cases} \quad (\text{B-1})$$

Dans ce cas, les paramètres adimensionnels ne sont plus du même ordre en  $\xi$  :

$$\begin{cases} \Lambda \sim \xi^{-1} \\ N \sim \xi^{-1} \end{cases} \quad (\text{B-2})$$

En définissant  $\Lambda_0 = \Lambda \xi \sim \xi^0$  et  $N_0 = N \xi \sim \xi^0$ , la loi de comportement du système (II.43) devient :

$$\Lambda_0 \xi^{-1} \frac{\partial \Sigma^*}{\partial t^*} + \Sigma^* = 2N_0 \xi^{-1} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*}. \quad (\text{B-3})$$

L'identification donne alors les trois problèmes suivants :

**Problème micro-chronologique** A l'ordre  $-2$  en  $\xi$  :

$$\Lambda_0 \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \tau} = 2N_0 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \tau} = 2N_0 \mathbf{D}_{-1} \quad (\text{B-4})$$

Le problème micro-chronologique (II.81) reste donc inchangé. En particulier, on a :

$$\Sigma_0 = \frac{2N_0}{\Lambda_0} \varepsilon + \langle \Sigma_0 \rangle. \quad (\text{B-5})$$

**Problème macro-chronologique** A l'ordre  $-1$  en  $\xi$  :

$$\Lambda_0 \frac{\partial \Sigma_0}{\partial T} + \Lambda_0 \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \tau} = 2N_0 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial T} + 2N_0 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau} = 2N_0 \mathbf{D}_0 \quad (\text{B-6})$$

peut être moyenné et donne :

$$\Lambda_0 \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial T} = 2N_0 \frac{\partial \langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle}{\partial T}. \quad (\text{B-7})$$

A basse température, le problème macro-chronologique d'écoulement visco-élastique (II.79) devient un problème hypo-élastique (ou élastique sous l'hypothèse des petites perturbations) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_0 \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial T} = 2N_0 \langle \boldsymbol{D}_0 \rangle \\ \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \langle \boldsymbol{v}_0 \rangle = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } (\Omega) \quad . \quad (\text{B-8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \boldsymbol{v}_0 \rangle = \boldsymbol{v}_d(T) \quad \text{sur } (\Gamma_u) \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle \cdot \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Gamma_\sigma) \\ \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\text{pour } t = 0) \end{array} \right.$$

Ce système n'est autre que le système précédent (II.79) dans lequel on a négligé le terme de viscosité face au terme d'élasticité.

**Problème thermique** L'identification du problème thermique est inchangée. La température est d'ordre 0 en  $\xi$  et l'évolution macro-chronologique est toujours donnée par moyennage de l'équation (II.70) :

$$\frac{\partial \langle \theta_0 \rangle}{\partial T} = A\Delta \langle \theta_0 \rangle + B \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \boldsymbol{D}_0 \rangle + B \langle \boldsymbol{\Sigma}_1 : \boldsymbol{D}_{-1} \rangle. \quad (\text{B-9})$$

Toutefois  $\boldsymbol{D}_0$  est maintenant donné par l'équation (B-6). En développant de la même manière que ce qui a été présenté dans le corps du texte, paragraphe II.2.4.b, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \boldsymbol{D}_0 \rangle + \langle \boldsymbol{\Sigma}_1 : \boldsymbol{D}_{-1} \rangle = \frac{\Lambda_0}{2N_0} \left\langle \boldsymbol{\Sigma}_0 : \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial T} \right\rangle \quad (\text{B-10})$$

et un problème thermique macro-chronologique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \langle \theta_0 \rangle}{\partial T} = A\Delta \langle \theta_0 \rangle + BQ_{Ma} + BQ_{mi} \\ \nabla \theta_i \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad (\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma) \end{array} \right. \quad (\text{B-11})$$

avec les termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{mi} = \frac{2N_0}{\Lambda_0} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial T} \rangle \\ Q_{Ma} = \frac{\Lambda_0}{2N_0} \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle : \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial T} \end{array} \right. \quad (\text{B-12})$$

simplifiés par rapport au cas précédent

Les trois problèmes obtenus sont donc très semblables à ceux discutés dans le pre-

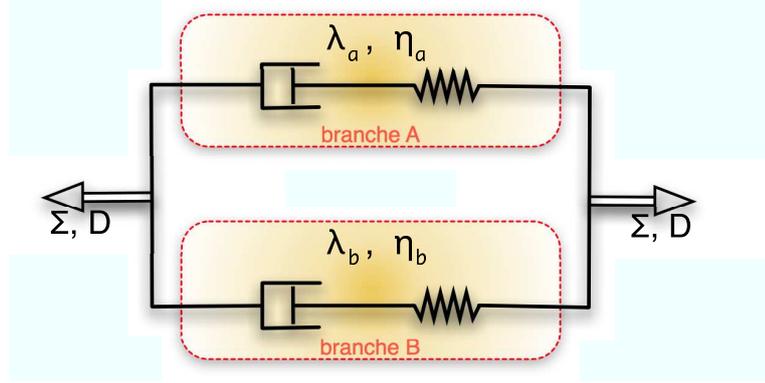


FIG. B-1: Modèle de Maxwell à deux branches.

mier cas. Seule la contribution visqueuse disparaît. Un traitement général sur toute la plage de température peut donc être envisagé avec le système, plus riche, obtenu dans le premier cas, si les paramètres sont thermo-dépendants.

## B.2 Maxwell généralisé

Une loi de comportement de Maxwell généralisée permet d'étendre la méthode présentée à des modèles rhéologiques plus réalistes. Une illustration avec un modèle à deux branches A et B, tel que celui présenté figure B-1, est proposé. La loi de comportement adimensionnelle de chaque branche s'écrit alors :

$$\lambda_a \frac{\partial \Sigma^a}{\partial t} + \Sigma^a = 2\eta_a \mathbf{D} \quad (\text{B-13})$$

$$\lambda_b \frac{\partial \Sigma^b}{\partial t} + \Sigma^b = 2\eta_b \mathbf{D} \quad (\text{B-14})$$

et l'extra contrainte globale :

$$\Sigma = \Sigma^a + \Sigma^b. \quad (\text{B-15})$$

**Identification des ordres de grandeur** Pour fixer les idées, on suppose que chaque branche a un comportement différent :

$$\begin{aligned} \lambda_a &\sim \xi^0 \\ \eta_a &\sim \xi^0 \\ \lambda_b &\sim \xi^{-1} \\ \eta_b &\sim \xi^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

On définit alors :

$$\begin{aligned}
 \Lambda_a &= \frac{\lambda_a}{\lambda_0} \\
 N_a &= \frac{\eta_a}{\eta_0} \\
 \Lambda_b &= \xi \frac{\lambda_b}{\lambda_0} \\
 N_b &= \frac{\eta_b}{\eta_0}
 \end{aligned} \tag{B-17}$$

La branche A représente la comportement à chaud, la branche B le comportement à froid, comme détaillé en annexe B.1. Par des considérations d'équivalence temps température, la branche B peut aussi être représentative du polymère à haute vitesse de sollicitation tandis que la branche A permet de décrire les vitesses de sollicitations lentes.

**Problème micro-chronologique** L'identification des systèmes est identique soit au développement présenté dans le corps du texte, soit à celui présenté en annexe B.1. En identifiant l'équation (B-13) à l'ordre  $-1$  et l'équation (B-14) à l'ordre  $-2$ , on obtient deux lois de comportement micro-chronologiques :

$$\begin{cases} \Lambda_a \frac{\partial \Sigma_0^a}{\partial \tau} = 2N_a \mathbf{D}_{-1} \\ \Lambda_b \frac{\partial \Sigma_0^b}{\partial \tau} = 2N_b \mathbf{D}_{-1} \end{cases} . \tag{B-18}$$

Le problème micro-chronologique est donc dégénéré en un problème élastique dont le comportement est analogue à deux ressorts en parallèle. De manière semblable aux problèmes précédemment traités, les  $\Sigma_0^i$  sont déterminés à des constantes d'intégration près,  $\langle \Sigma_0^i \rangle$ . Ces constantes sont obtenues en résolvant les problèmes macro-chronologiques.

**Problème macro-chronologique** L'identification du comportement (B-13) à l'ordre 0 et du comportement (B-14) à l'ordre 1 donne, après moyennage :

$$\begin{cases} \Lambda_a \frac{\partial \langle \Sigma_0^a \rangle}{\partial t} = 2N_a \langle \mathbf{D}_0 \rangle \\ \Lambda_b \frac{\partial \langle \Sigma_0^b \rangle}{\partial t} + \Sigma_0^b = 2N_b \langle \mathbf{D}_0 \rangle \end{cases} . \tag{B-19}$$

La loi de comportement du problème macro-chronologique est donc un loi de maxwell généralisée à deux branches où la branche A ne contient pas d'amortisseur.

Finalement, l'homogénéisation pour une loi de comportement à plusieurs branches se fait naturellement en appliquant la même méthode. La méthode des développements asymptotiques permet alors de discriminer les branches utiles dans les comportement mécaniques globaux.

### B.3 Prise en compte de la dynamique

Lors de la mise en équation du problème, section II.1.1.a, l'évaluation des termes dynamiques a permis de supposer que le domaine est à l'équilibre statique. Néanmoins, la méthode appliquée consiste à comparer les ordres de grandeurs des différents termes. Cette contribution dynamique doit donc être conservée lors de la mise en équation, au risque de la voir apparaître lors de l'identification à un ordre supérieur. Cette annexe montre qu'en appliquant la méthode sur le problème dynamique complet, les termes dynamiques disparaissent naturellement et permettent de retrouver le système d'équation obtenu dans le corps de texte.

#### B.3.a Deux variables de temps

Les deux échelles de temps indépendantes  $T^* = t/\lambda_0$  et  $\tau^* = ft$  sont conservées. Par contre, le facteur d'échelle

$$\xi = \frac{T^*}{\tau^*} \sim 5.10^{-5} \quad (\text{B-20})$$

est très faible. Afin de discriminer les ordres éventuellement intermédiaires qui peuvent apparaître, nous définissons un nouveau facteur d'échelle  $\xi'$  tel que  $\xi'^2 = \xi$ . Ainsi :

$$\xi' = \left( \frac{T^*}{\tau^*} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 7.10^{-3}. \quad (\text{B-21})$$

Finalement, la définition de ce nouveau facteur d'échelle revient à considérer que les deux échelles de temps sont séparées de deux ordres de grandeur  $\xi'$ .

#### B.3.b Analyse dimensionnelle

L'équation d'équilibre statique (II.7) est alors modifiée afin de traduire l'équilibre dynamique du système :

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (\text{B-22})$$

L'adimensionnalisation de cette équation d'équilibre fait apparaître un nouveau paramètre adimensionnel :

$$\nabla^* \cdot \sigma^* = F \frac{\partial v^*}{\partial t^*} \quad (\text{B-23})$$

où :

$$F = \frac{\rho h^2}{\sigma_c \lambda_0^2} \sim 2.10^{-11} \quad (\text{B-24})$$

TAB. B-1: Nouveaux paramètres adimensionnels du problème dynamique

Terme associé	Nom	Expression	Valeur	Identification
Diffusion thermique	$A$	$\frac{\lambda_0 k}{\rho c h^2}$	1	$\xi'^0$
Dissipation mécanique	$B$	$\frac{\sigma_c}{\Delta \theta_c \rho c}$	$10^{-2}$	$\xi'^1, B = B_0 \xi'^1$
Temps de Maxwell	$\Lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	$[1; 10^5]$	$\xi'^0, \xi'^{-1}, \xi'^{-2}$
Viscosité de Maxwell	$N$	$\frac{\eta}{\sigma_c \lambda_0}$	$[1; 10^4]$	$\xi'^0, \xi'^{-1}, \xi'^{-2}$
Amplitude des vibrations	$R$	$\frac{a}{h}$	0, 1	$\xi^0$
Ecrasement	$U_d$	$\frac{u_d}{h}$	1	$\xi^0$
Dynamique	$F$	$\frac{\rho h^2}{\sigma_c \lambda_0^2}$	$2.10^{-11}$	$\xi^5, F = F_0 \xi'^5$

est de l'ordre de  $(\xi')^5$ . Le problème thermo-mécanique s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{d\theta^*}{dt^*} = A \nabla^* \cdot k \nabla^* \theta^* + B_0 \xi' \sigma^* : \frac{d\epsilon^*}{dt^*} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \theta^* \cdot \mathbf{n}^* = 0 & \text{sur } (\Gamma) \end{cases} \quad (\text{B-25})$$

$$\begin{cases} \Lambda \frac{d\Sigma^*}{dt^*} + \Sigma^* = 2N \frac{d\epsilon^*}{dt^*} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \cdot \sigma^* = F_0 \xi^5 \frac{\partial v^*}{\partial t^*} & \text{sur } (\Omega) \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 & \text{sur } (\Omega) \\ \sigma^* \cdot \mathbf{n}^* = \mathbf{0} & \text{sur } (\Gamma_\sigma) \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{U}_d(t^*) + \mathbf{R} \sin(\omega \lambda_0 t^*) & \text{sur } (\Gamma_u) \end{cases} \quad (\text{B-26})$$

à l'aide des paramètres adimensionnels récapitulés et identifiés en fonction de  $\xi'$  dans le tableau B-1.

### B.3.c Développements asymptotiques

Les développements asymptotiques s'écrivent toujours :

$$\phi(t^*) = \phi_0(T^*, \tau^*) + \phi_1(T^*, \tau^*) \xi' + \phi_2(T^*, \tau^*) \xi'^2 + \dots \quad (\text{B-27})$$

Par contre la dérivation temporelle d'un de ces termes  $\varphi(T^*, \tau^*)$  s'écrit maintenant :

$$\frac{d\varphi(T^*, \tau^*)}{dt^*} = \frac{\partial \varphi}{\partial T^*} + \xi'^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau^*} \quad (\text{B-28})$$

Le développement asymptotique de la vitesse commence donc à l'ordre  $-2$  :

$$v = v_{-2}\xi'^{-2} + v_{-1}\xi'^{-1} + v_0 + v_1\xi' + v_2\xi'^2 \dots \quad (\text{B-29})$$

avec :

$$\begin{aligned} v_{-2} &= \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \\ v_{-1} &= \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \\ v_i &= \frac{\partial u_{i+2}}{\partial \tau} + \frac{\partial u_i}{\partial T} \quad \forall i \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B-30})$$

et celui du taux de déformation également :

$$D = D_{-2}\xi'^{-2} + D_{-1}\xi'^{-1} + D_0 + D_1\xi' + D_2\xi'^2 \dots \quad (\text{B-31})$$

### B.3.d Identification

**Problème mécanique micro-chronologique** La loi de comportement identifiée à l'ordre  $-2$  en  $\xi'$  donne :

$$\Lambda \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \tau} = 2N D_{-2}. \quad (\text{B-32})$$

Les termes dynamiques n'apparaissent pas à l'ordre 0 du fait que  $F \sim \xi'^5$  :

$$\nabla \cdot \sigma_0 = \mathbf{0}. \quad (\text{B-33})$$

La condition limite en vitesse à l'ordre  $-2$  s'écrit :

$$\mathbf{v}_{-2} = 2\pi \mathbf{R} \cos(2\pi\tau) \quad \text{sur } (\Gamma_u). \quad (\text{B-34})$$

Le problème micro-chronologique s'écrit donc finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \frac{\partial \Sigma_0}{\partial \tau} = 2N D_{-2} \\ \nabla \cdot \sigma_0 = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_{-2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } (\Omega) \quad . \quad (\text{B-35})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{-2} = 2\pi \mathbf{R} \cos(2\pi\tau) \\ \sigma_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad \text{sur } (\Gamma_u) \quad \text{sur } (\Gamma_\sigma)$$

A l'ordre  $-1$  en  $\xi'$ , la loi de comportement s'écrit :

$$\Lambda \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \tau} = 2N D_{-1}. \quad (\text{B-36})$$

**Problème mécanique macro-chronologique.** La loi de comportement à l'ordre 0 en  $\xi'$

$$\Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial T} + \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_2}{\partial \tau} + \boldsymbol{\Sigma}_0 = 2N \mathbf{D}_0 \quad (\text{B-37})$$

est moyennée en :

$$\Lambda \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial T} + \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle = 2N \langle \mathbf{D}_0 \rangle \quad (\text{B-38})$$

et permet d'écrire le problème mécanique macro-chronologique :

$$\left[ \begin{array}{l} \Lambda \frac{\partial \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle}{\partial T} + \langle \boldsymbol{\Sigma}_0 \rangle = 2N \langle \mathbf{D}_0 \rangle \\ \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_0 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{v}_0 \rangle = \mathbf{v}_d(T) \quad \text{sur } (\Gamma) \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } (\Gamma_\sigma) \end{array} \right] \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{B-39})$$

**Problème thermique.** A l'ordre  $-2$  en  $\xi'$ , le bilan énergétique permet d'identifier :

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{B-40})$$

tandis qu'à l'ordre 0 en  $\xi'$ , il s'écrit :

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial T} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = A \Delta \theta_0 + B_0 (\boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{D}_{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{D}_{-2}) \quad (\text{B-41})$$

en remplaçant  $\mathbf{D}_{-1}$  et  $\mathbf{D}_{-2}$  par leurs expressions (B-36) et (B-35),

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial T} + \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = A \Delta \theta_0 + B_0 \frac{\Lambda}{2N} \left( \boldsymbol{\Sigma}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_1}{\partial \tau} + \boldsymbol{\Sigma}_1 \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0}{\partial \tau} \right). \quad (\text{B-42})$$

En moyennant, du fait que  $\theta_0$  ne dépende que de  $T$ , il reste :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_0}{\partial T} &= A \Delta \theta_0 + B_0 \frac{\Lambda}{2N} \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_0 \boldsymbol{\Sigma}_1}{\partial \tau} \right\rangle \\ &= A \Delta \theta_0. \end{aligned} \quad (\text{B-43})$$

Le problème en  $\theta_0$  est donc un problème thermique de diffusion isolé sans terme source avec condition initiale nulle. Il vient

$$\theta_0 \equiv 0 \quad \text{sur } (\Omega). \quad (\text{B-44})$$

A l'ordre  $-1$  en  $\xi'$ , on identifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} &= B_0 \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{D}_{-2} \\ &= B_0 \frac{\Lambda}{4N} \frac{\partial (\boldsymbol{\Sigma}_0^2)}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (\text{B-45})$$

qui décrit la fluctuation micro-chronologique de la température.

A l'ordre 1 en  $\xi'$ ,

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial T} + \frac{\partial\theta_3}{\partial\tau} = A\Delta\theta_1 + B_0(\Sigma_0\mathbf{D}_0 + \Sigma_1\mathbf{D}_{-1} + \Sigma_2\mathbf{D}_{-2}). \quad (\text{B-46})$$

En remplaçant  $\mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{D}_{-1}$  et  $\mathbf{D}_{-2}$  par leurs expressions (B-37), (B-36) et (B-35), le terme source précédent peut être développé à l'aide des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma_0\mathbf{D}_0 &= \frac{\Lambda}{2N} \left( \Sigma_0 \frac{\partial\Sigma_0}{\partial T} + \Sigma_0 \frac{\partial\Sigma_2}{\partial\tau} + \frac{1}{\Lambda} \Sigma_0 : \Sigma_0 \right) \\ \Sigma_1\mathbf{D}_{-1} &= \frac{\Lambda}{2N} \left( \Sigma_1 \frac{\partial\Sigma_1}{\partial\tau} \right) = \frac{\Lambda}{4N} \left( \frac{\partial\Sigma_1^2}{\partial\tau} \right) \\ \Sigma_2\mathbf{D}_{-2} &= \frac{\Lambda}{2N} \left( \Sigma_2 \frac{\partial\Sigma_0}{\partial\tau} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-47})$$

et en moyennant le bilan énergétique précédent, on obtient :

$$\frac{\partial\langle\theta_1\rangle}{\partial T} = A\Delta\langle\theta_1\rangle + \frac{B_0}{2N} \left\langle \Sigma_0 : \left( \Lambda \frac{\partial\Sigma_0}{\partial T} + \Sigma_0 \right) \right\rangle \quad (\text{B-48})$$

qui est identique au cas traité dans le chapitre II, équations (II.70) et (II.73).

## B.4 Grandes déformations

L'hypothèse des petites perturbations retenue lors de la modélisation initiale est relativement limitante sur le procédé. Bien que les vibrations induites par la sonotrode puissent éventuellement rentrer dans ce cadre (elles induisent une déformation de quelques pourcents), l'écrasement macroscopique du directeur induit de grandes déformations. Une loi de comportement en grandes déformations serait donc nécessaire pour décrire le système.

### B.4.a Maxwell surconvectée

Une première idée est d'étendre la loi de Maxwell (II.10) aux grandes déformations. Pour ce faire, une dérivée objective telle que la dérivée surconvectée :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\phi} &= \mathbf{F} \frac{D}{Dt} (\mathbf{F}^{-1} \phi \mathbf{F}^{-T}) \mathbf{F}^T \\ &= \frac{D\phi}{Dt} - \nabla \mathbf{v} \phi - \phi \nabla^T \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (\text{B-49})$$

où  $\mathbf{F}$  est le gradient de la transformation, permet d'écrire la loi de Maxwell surconvectée :

$$\lambda \left[ \frac{d\Sigma}{dt} - \nabla \mathbf{v} \Sigma - \Sigma \nabla^T \mathbf{v} \right] + \Sigma = 2\eta \mathbf{D} \quad (\text{B-50})$$

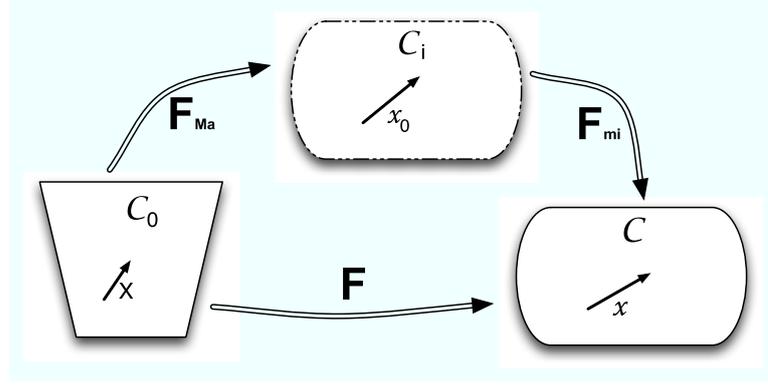


FIG. B-2: Décomposition multiplicative des transformations.

L'identification de la loi de comportement adimensionnée à l'ordre  $-1$  en  $\xi$  se fait alors de manière similaire :

$$\Lambda \left[ \frac{d\Sigma_0}{d\tau} - \nabla \mathbf{v}_{-1} \Sigma_0 - \Sigma_0 \nabla^T \mathbf{v}_{-1} \right] = 2\eta \mathbf{D}_{-1}. \quad (\text{B-51})$$

On obtient un problème micro-chronologique hypo-élastique avec une loi de dérivation temporelle originale :

$$\frac{d\phi}{d\tau} - \nabla \mathbf{v}_{-1} \phi_0 - \phi_0 \nabla^T \mathbf{v}_{-1}. \quad (\text{B-52})$$

A l'ordre 0, par contre, on obtient :

$$\Lambda \left[ \frac{d\Sigma_1}{d\tau} + \frac{d\Sigma_0}{dt} \underbrace{- \nabla \mathbf{v}_{-1} \Sigma_1 - \Sigma_1 \nabla^T \mathbf{v}_{-1}}_{\text{}} - \nabla \mathbf{v}_0 \Sigma_0 - \Sigma_0 \nabla^T \mathbf{v}_0 \right] + \Sigma_0 = 2\eta \mathbf{D}_0 \quad (\text{B-53})$$

où les termes en  $\Sigma_1$  ne disparaissent pas avec la moyenne temporelle. On ne peut donc pas écrire une loi de comportement macro-chronologique. L'homogénéisation par développement asymptotique ne permet donc d'obtenir que le problème micro-chronologique. En effet, le développement asymptotique (II.44) est un développement additif et n'est pas adapté à un problème non linéaire faisant intervenir des produits tel que celui de la loi de comportement (B-50).

#### B.4.b Modélisation multiplicative

Une modélisation par décomposition multiplicative peut alors être envisagée. Elle consiste à écrire que la déformation totale est la composition d'une transformation macro-chronologique, qui fait passer de la configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  à une configuration intermédiaire  $\mathcal{C}_i$ , et d'une transformation micro-chronologique, permettant d'obtenir la configuration actuelle  $\mathcal{C}$ . La figure B-2 récapitule cette décomposition. Un vecteur

position  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{C}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\mathbf{X}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_0(\mathbf{X})) \quad (\text{B-54})$$

Le tenseur des gradients de transformation  $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$  est alors recherché comme un produit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{mi} \mathbf{F}_{Ma} \quad (\text{B-55})$$

où  $\mathbf{F}_{mi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}$  et  $\mathbf{F}_{Ma} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{X}}$ . La méthode des développements asymptotiques est alors abandonnée au profit d'une méthode de décomposition en deux transformations. Une hypothèse qui peut s'avérer utile dans l'application d'une telle méthode est que la transformation micro-chronologique se fait sous l'hypothèse des petites perturbations :

$$\mathbf{F}_{mi} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{mi}. \quad (\text{B-56})$$

Boyce *et al.* [Boyce et al., 1989] proposent une décomposition multiplicative de l'élasto-plasticité relativement similaire. Dans le présent travail, nous ne nous sommes pas engagés sur une telle modélisation en grandes déformations.

## C Implémentation des physiques dans le code éléments finis

Dans cette annexe sont présentés les développements nécessaires à l'implémentation du code. Les trois formulations physiques sont passées en revue. A chaque fois, les variables internes et les propriétés matériaux nécessaires sont listées, puis le détail du calcul du résidu et de la matrice tangente est donné.

### C.1 Implémentation de l'élasticité

L'élasticité linéaire isotrope est implémentée de manière classique.

#### C.1.a Variables internes et propriétés matériaux

##### Propriétés matériaux

- Module d'Young  $E$  : scalaire
- Coefficient de Poisson  $\nu$  : scalaire

##### Variables internes

- Déformation  $\varepsilon$  : tenseur d'ordre 2. Mis à jour par la formulation.
- Rigidité  $\tilde{\mathbf{E}}$  : tenseur d'ordre 4. Nécessaire en temps que variable interne pour une élasticité thermodépendante. La souplesse est alors en effet stockée à chaque point. Mise à jour par le matériau à l'aide de la loi de thermo-dépendance.
- Contrainte  $\sigma$  : tenseur d'ordre 2. Mise à jour par le matériau  $\sigma = \tilde{\mathbf{E}}\varepsilon$ .

#### C.1.b Assemblage du résidu

Le résidu de la formulation d'élasticité est assemblé à l'aide de la contrainte stockée comme variable interne :

$$F_e = \int_{\Omega} \nabla \{N\} : \sigma \quad (\text{C-1})$$

#### C.1.c Assemblage de la matrice tangente

La matrice tangente s'écrit également de manière triviale :

$$\frac{\partial \{F_e\}}{\partial \{X\}} = \int_{\Omega} \nabla \{N\} : \tilde{\mathbf{E}} \nabla \{N\} \quad (\text{C-2})$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}$  est la sensibilité retournée par le matériau.

## C.2 Implémentation de la mécanique des fluides

La formulation implémentée permet de traiter un problème d'écoulement quasi-newtonien incompressible. Pour commencer le cas Newtonien est traité. Le code est ensuite étendu à des cas rhéofluidifiants classiques.

### C.2.a Fluide newtonien

#### Paramètres matériaux

- Viscosité Newtonienne  $\eta_0$  : scalaire.

#### Variables internes

- Taux de déformation  $\mathbf{D}$  : tenseur d'ordre 2. Mis à jour par la formulation.
- Extra contrainte  $\mathbf{\Sigma}$  : tenseur d'ordre 2. Mise à jour à l'aide de la loi de comportement  $\mathbf{\Sigma} = \eta_0 \mathbf{D}$ .
- Pression  $p$  : scalaire. Mise à jour par la formulation.
- Contrainte totale  $\boldsymbol{\sigma}$  : tenseur d'ordre 2. Mise à jour par le matériau  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{\Sigma} - p\mathbf{I}$ .
- Divergence de vitesse  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  : vecteur. Mise à jour par le matériau  $D_{ii}$ .
- Vitesse  $\mathbf{v}$  : vecteur. Mise à jour par la formulation. Cette variable matériau sera utile, par exemple, lors de la résolution du problème thermique de convection.

#### Assemblage du résidu Le résidu

$$\{F_v\} = \int_{\Omega} \nabla \{N_v\} : \mathbf{\Sigma} - \int_{\Omega} \nabla \cdot \{N_v\} p - \int_{\Omega} \{N_p\} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{C-3})$$

présente deux termes assemblés à l'aide des fonctions d'interpolations en vitesse et le dernier à l'aide des fonctions d'interpolations en pression.

#### Matrice tangente Les deux derniers termes de la matrice tangente

$$\frac{\partial \{F_v\}}{\partial \{X\}} = \int_{\Omega} \nabla \{N_v\} : \underbrace{\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \mathbf{D}}}_{\tilde{\mathbf{S}}} \nabla \{N_v\} - \int_{\Omega} \nabla \cdot \{N_v\} \{N_p\} - \int_{\Omega} \{N_p\} \nabla \cdot \{N_v\} \quad (\text{C-4})$$

sont transposés l'un de l'autre. L'assemblage se fait donc de manière optimisée à l'aide d'un assembleur spécifique. La sensibilité  $\tilde{\mathbf{S}}$  dans le cas newtonien est simplement

$$\tilde{\mathbf{S}} = \eta_0 \tilde{\mathbf{I}} \quad (\text{C-5})$$

où  $\tilde{\mathbf{I}}$  est le tenseur identité d'ordre 4.

### C.2.b Loi Puissance

Afin de modéliser le caractère rhéofluidifiant du polymère, un premier modèle en loi puissance a été implémenté. La loi de comportement est une loi quasi-newtonienne où l'on a toujours  $\boldsymbol{\Sigma} = \eta \mathbf{D}$  si ce n'est que :

$$\eta = K D_{eq}^{m-1} \quad (\text{C-6})$$

où  $K$  est la consistance,  $D_{eq} = \sqrt{2\mathbf{D}:\mathbf{D}}$  le taux de déformation équivalent, et  $m$  est l'indice de la loi puissance. Si  $m = 1$ , on retrouve un comportement newtonien, tandis que si  $m$  tend vers 0, on s'approche d'un comportement d'écoulement plastique parfait. Pour un polymère, l'exposant est de l'ordre de 0.3.

Une classe matériau loi puissance est dérivée de la classe de matériau newtonien.

#### Paramètres matériau

- Indice de loi puissance  $m$  : scalaire.
- Consistance  $K$  : on prend la viscosité newtonienne définie dans la classe parent.
- coefficient de régulation  $\epsilon$  : scalaire

**Variables internes** outre celles de la classe parent.

- Taux de déformation équivalent  $D_{eq}$  : scalaire. Mis à jour à l'aide du tenseur  $\mathbf{D}$ . Du fait que  $\lim_{D_{eq} \rightarrow 0} \|\boldsymbol{\sigma}\| = +\infty$  si  $m < 1$ , une valeur seuil est imposée à  $D_{eq}$ , c'est le coefficient de régularisation  $\epsilon$ . Elle revient à imposer une viscosité newtonienne à très basse vitesse de déformation.
- Extra contrainte : mise à jour à l'aide de la loi de comportement C-6.

**Assemblage du résidu** L'assemblage est identique au cas newtonien.

**Assemblage de la matrice tangente** Il est également identique à l'assemblage précédent si ce n'est que la sensibilité  $\tilde{\mathbf{S}}$  diffère. En notant que

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{eq}^2}{\partial \mathbf{D}} &= 2 \frac{\partial \mathbf{D}:\mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}} \\ &= 4\mathbf{D}, \end{aligned} \quad (\text{C-7})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{D}} \\ &= \eta \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}} \otimes \mathbf{D} \end{aligned} \quad (\text{C-8})$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}} &= K \frac{\partial D_{eq}^{m-1}}{\partial D_{eq}^2} \frac{\partial D_{eq}^2}{\partial \mathbf{D}} \\
&= K \frac{m-1}{2} (D_{eq}^2)^{\frac{m-1}{2}-1} (4\mathbf{D}) \\
&= K [2(m-1) D_{eq}^{m-3} \mathbf{D}]
\end{aligned} \tag{C-9}$$

on obtient donc une sensibilité :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{D}} = K \left( 2(m-1) D_{eq}^{m-3} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + D_{eq}^{m-1} \tilde{\mathbf{I}} \right) \tag{C-10}$$

qui peut être calculée en utilisant les valeurs de  $D_{eq}$  et  $\mathbf{D}$  stockées comme variables internes.

### C.2.c Loi de Carreau

Une loi de Carreau permet de modéliser les effets rhéofluidifiants tout en conservant un comportement Newtonien à basses vitesses de déformation. Cette loi est pseudo-newtonienne, le tenseur des extra-contraintes s'exprime toujours comme :

$$\Sigma = \eta \mathbf{D}. \tag{C-11}$$

Mais la viscosité  $\eta$  dépend de  $\mathbf{D}$  suivant la loi :

$$\eta = \eta_0 \left( 1 + (\lambda D_{eq})^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \tag{C-12}$$

où  $\eta_0$  est la viscosité newtonienne,  $\lambda$  est le temps caractéristique de Carreau, et  $m$  est l'exposant de Carreau. Pour des vitesses de sollicitation telles que  $D_{eq} \ll \lambda^{-1}$ , on retrouve un comportement newtonien, tandis que pour des vitesses de sollicitation telles que  $D_{eq} \gg \lambda^{-1}$ , on retrouve un comportement de fluide en loi puissance.

Une nouvelle classe de matériau suivant cette loi de Carreau est dérivée de la classe de matériau newtonien.

### Paramètres matériau

- Temps de carreau  $\lambda$  : scalaire.
- Exposant de Carreau  $m$  : scalaire.
- Viscosité newtonienne  $\eta_0$  : déjà stockée dans la classe parent.

**Variables internes** outre celles de la classe parent

- Taux de déformation équivalent  $D_{eq}$  : scalaire. Mis à jour à l'aide du tenseur  $\mathbf{D}$ .
- Extra-contrainte : mise à jour à l'aide de la loi de comportement C-12. .

**Assemblage du résidu** Identique au cas newtonien

**Assemblage de la matrice tangente** Identique au cas newtonien, si ce n'est que la sensibilité vaut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{D}} &= \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{D}} \otimes \mathbf{D} + \eta \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial D_{eq}^2} \frac{\partial D_{eq}^2}{\partial \mathbf{D}} \otimes \mathbf{D} + \eta \tilde{\mathbf{I}}\end{aligned}\quad (\text{C-13})$$

Or, puisque

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial D_{eq}^2} &= \eta_0 \frac{m-1}{2} \left( \frac{\partial (1+(\lambda D_{eq})^2)}{\partial D_{eq}^2} \right) \left( 1 + (\lambda D_{eq})^2 \right)^{\frac{m-1}{2}-1} \\ &= \eta_0 \frac{m-1}{2} \lambda^2 \left( 1 + (\lambda D_{eq})^2 \right)^{\frac{m-3}{2}}\end{aligned}\quad (\text{C-14})$$

on obtient une sensibilité :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{D}} = 4\eta_0 \frac{m-1}{2} \lambda^2 \left( 1 + (\lambda D_{eq})^2 \right)^{\frac{m-3}{2}} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \eta_0 \left( 1 + (\lambda D_{eq})^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \tilde{\mathbf{I}} \quad (\text{C-15})$$

qui peut être calculée à l'aide de  $D_{eq}$  et  $\mathbf{D}$  stockés comme variables internes.

### C.2.d Thermo-dépendance

Pour une mécanique des fluides où seuls les paramètres matériaux sont thermo-dépendants, ils sont simplement mis à jour en fonction de la température (stockée alors comme variable interne) au moment de l'application de la loi de comportement. En pratique c'est avant le calcul du tenseur des extra-contraintes et avant le calcul de la sensibilité.

Il est à noter que puisque notre code ne résout pas les couplages thermo-mécaniques de manière forte mais de manière itérative, la sensibilité de la contrainte à la température (qui apparaît dans les termes non-diagonaux de la matrice III.47) n'est jamais nécessaire. C'est d'ailleurs ce qui rend possible et rapide d'implémentation de nouveaux matériaux hybrides tels que ceux présentés figure III.21. Pour fixer les idées, le matériau hybride thermo-visco-élastique représente un code d'environ 50 lignes. Par contre, dans un cadre de résolution multiphysique forte, l'implémentation d'un nouveau matériau hybride demanderait de traiter à chaque fois toute une série de sensibilités. La structure perdrait alors son intérêt à moins d'utiliser de nouveaux outils de manipulation formelle des lois de comportements.

### C.3 Thermique stationnaire

#### Paramètres matériau

- conductivité thermique  $k$  : scalaire. Une extension à une conductivité tensorielle est envisageable à moindre coût.
- terme source : scalaire.

#### Variables internes

- Gradient de température  $\nabla\theta$  : vecteur. Mis à jour par la formulation.
- Flux de chaleur  $\mathbf{q}$  : vecteur. Mis à jour par le matériau à l'aide de la loi de Fourier.
- Source thermique volumique : scalaire. Stockée comme variable interne dans le cas d'une source hétérogène. La dissipation d'énergie mécanique, par exemple.

**Assemblage du résidu** Le résidu :

$$\{F_t\} = - \int_{\Omega} \nabla \{N\} \cdot \mathbf{q} - \int_{\Omega} \{N\} Q \quad (\text{C-16})$$

ne pose pas de problème.

**Assemblage de la matrice tangente** La matrice tangente :

$$[J] = \int_{\Omega} \nabla \{N\} \cdot \underbrace{\frac{\partial(-\mathbf{q})}{\partial \nabla \theta}}_{\tilde{\mathbf{S}}} \cdot \nabla \{N\} \quad (\text{C-17})$$

s'assemble à l'aide de la sensibilité  $\tilde{\mathbf{S}} = k\tilde{\mathbf{I}}$ .

### C.4 Thermique transitoire

Le problème thermique de conduction convection est traité à l'aide de la méthode de l'operator splitting. Ainsi, les deux problèmes de conduction et de convection sont traités successivement. Néanmoins, un unique matériau appelé *xThermoTrans* dérivé du matériau de thermique stationnaire, permet de gérer ces deux formulations. En effet c'est bien la même classe *formulation* qui doit pouvoir soit diffuser soit convecter le même champ de température. C'est pourquoi la classe formulation de thermique transitoire possède un attribut permettant de fixer le type de problème. Pour des raisons de clarté, nous présentons néanmoins ces deux cadres de résolution séparément.

**Theta method** Afin de traiter l'aspect temporel, la résolution du problème transitoire est effectuée à l'aide de la theta-method. Pour ce faire, chaque variable matériau stockée est une variable pondérée. Par exemple, la variable *température* est mise à jour par la formulation comme  $\Theta\theta_{n+1} + (1 - \Theta)\theta_n$ . L'assemblage à l'aide des variables matériau va ainsi directement donner le résidu pondéré en  $\Theta$  du paragraphe III. 1.4.a (p. 95).

#### C.4.a Diffusion

##### Paramètres matériau

- Capacité calorifique  $\rho c(\theta)$  : fonction scalaire de la température.
- Conductivité thermique  $k(\theta)$  : fonction scalaire de la température.

##### Variables internes stockées

- Température  $\theta$  : scalaire. Mise à jour à l'aide de la formulation (en tenant compte du paramètre  $\Theta$ ).
- Dérivée temporelle de la température  $\dot{\theta}$  : scalaire. Mise à jour à l'aide de la formulation (en tenant compte du paramètre  $\Theta$ ).
- Capacité calorifique  $\rho c$  : scalaire. Mise à jour à l'aide de la fonction donné en paramètre matériau et de la température.
- Conductivité thermique  $k$  : scalaire. Mise à jour à l'aide de la fonction donné en paramètre matériau et de la température.

**Assemblage du résidu** Le résidu est constitué de trois contributions :

$$\{F_t\} = \int_{\Omega} \{N\} \rho c \dot{\theta} - \int_{\Omega} \nabla \{N\} \cdot \mathbf{q} - \int_{\Omega} \{N\} Q \quad (\text{C-18})$$

Comme expliqué précédemment, chacune de ces valeurs est une variable matériau. Elle est pondérée par le paramètre  $\Theta$  et est en accord avec le schéma d'intégration temporel.

**Matrice tangente** Du fait des dépendances des paramètres matériau à la température, le problème thermique est non linéaire et la matrice tangente associée au résidu précédant s'écrit :

$$[J] = \underbrace{\frac{\partial \int_{\Omega} \{N\} \rho c \dot{\theta}}{\partial \{X_{n+1}\}}}_{J_1} - \underbrace{\frac{\partial \int_{\Omega} \{\nabla N\} \cdot \mathbf{q}}{\partial \{X_{n+1}\}}}_{J_2} - \underbrace{\frac{\partial \int_{\Omega} \{N\} Q}{\partial \{X_{n+1}\}}}_{J_3} \quad (\text{C-19})$$

si la source  $Q$  est indépendante de la température,  $[J_3] = [0]$ . D'autre part, puisque :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{X_{n+1}\}} = \frac{\partial (\Theta X_{n+1} N + (1 - \Theta) X_n N)}{\partial \{X_{n+1}\}} = \Theta N \quad (\text{C-20})$$

les deux autres contributions peuvent être développées en :

$$\begin{aligned}
 [J_1] &= \int_{\Omega} \{N\} \frac{\partial \rho c}{\partial \{X_{n+1}\}} \dot{\theta} + \int_{\Omega} \{N\} \rho c \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \{X_{n+1}\}} \\
 &= \int_{\Omega} \{N\} \frac{\partial \rho c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{X_{n+1}\}} \dot{\theta} + \int_{\Omega} \{N\} \rho c \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial (\theta_{n+1} - \theta_n)}{\partial \{X_{n+1}\}} \\
 &= \Theta \int_{\Omega} \{N\} \underbrace{\frac{\partial \rho c}{\partial \theta} \dot{\theta}}_{S_2} \{N\}^T + \int_{\Omega} \{N\} \underbrace{\frac{\rho c}{\Delta t}}_{S_1} \{N\}^T
 \end{aligned} \tag{C-21}$$

$$\begin{aligned}
 [J_2] &= \int_{\Omega} \{\nabla N\} \frac{\partial k \nabla \theta}{\partial \{X_{n+1}\}} \\
 &\quad \int_{\Omega} \{\nabla N\} \left[ \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{X_{n+1}\}} \nabla \theta + k \Theta \{\nabla N\}^T \right] \\
 &= \Theta \int_{\Omega} \{\nabla N\} \underbrace{\frac{\partial k}{\partial \theta} \nabla \theta}_{S_4} \{N\}^T + \Theta \int_{\Omega} \{\nabla N\} \underbrace{k}_{S_3} \{\nabla N\}^T
 \end{aligned} \tag{C-22}$$

C'est au moment de l'assemblage, que la formulation a accès à  $\Delta t$  et  $\Theta$ . Les autres valeurs nécessaires aux calculs des sensibilités  $S_1$  à  $S_4$  sont données par le matériau.

On note bien que pour une intégration temporelle explicite,  $\Theta = 0$ , et la matrice tangente se réduit au terme :

$$\int_{\Omega} N S_1 N. \tag{C-23}$$

#### C.4.b Convection

##### Variables internes stockées

- Taille de l'élément  $h_e$  : mise à jour à l'aide de la formulation qui a accès au maillage.
- Temps caractéristique  $\tau_{supg}$  : scalaire. Mise à jour par le matériau à l'aide de la taille d'élément courant et de l'équation III.34.
- Variable interne spécifique, résidu de convection artificielle : Mis à jour par le matériau. Nécessaire pour l'assemblage du résidu.

**Assemblage du résidu** Dans le cadre de convection pure, le résidu donné § III.1.4.b s'écrit :

$$\{F_t(\theta)\} = \int_{\Omega} \left[ \{N\} \dot{\theta} + \{N\} \nabla \theta \cdot \mathbf{v} \right] + \int_{\Omega} \left[ \nabla \{N\} \cdot \tau_{supg} \mathbf{v} \dot{\theta} + \nabla \{N\} \cdot \underbrace{\tau_{supg} \mathbf{v} \cdot \nabla \theta \cdot \mathbf{v}}_{\text{convection artificielle}} \right] \tag{C-24}$$

La vitesse nécessaire à l'assemblage de cette forme est stockée comme variable matériau lors de la résolution du problème d'écoulement.

**Assemblage de la matrice tangente** En se restreignant au cas implicite, où  $\Theta = 1$ , la matrice tangente s'écrit à l'aide de quatre contributions :

$$\begin{aligned}
 [J] &= \int_{\Omega} \left[ \{N\} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \{X\}} + \{N\} \frac{\partial \nabla \theta}{\partial \{X\}} \cdot \mathbf{v} \right] \\
 &\quad + \int_{\Omega} \tau_{supg} \left[ \{\nabla N\} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial X} + \{\nabla N\} \cdot \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \nabla \theta}{\partial \{X\}} \cdot \mathbf{v} \right] \\
 &= \int_{\Omega} \left[ \{N\} \frac{1}{\Delta t} \{N\}^T + \{N\} \{\nabla N\}^T \cdot \mathbf{v} \right] \\
 &\quad + \int_{\Omega} \tau_{supg} \left[ \{\nabla N\} \cdot \mathbf{v} \frac{1}{\Delta t} \{N\}^T + \{\nabla N\} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \{\nabla N\}^T \right] \\
 &= \int_{\Omega} \{N\} \frac{1}{\Delta t} \{N\}^T + \int_{\Omega} \{N\} \mathbf{v} \cdot \{\nabla N\}^T \\
 &\quad + \int_{\Omega} \{\nabla N\} \cdot (\tau_{supg} \mathbf{v} \frac{1}{\Delta t}) \{N\}^T + \int_{\Omega} \{\nabla N\} (\tau_{supg} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \{\nabla N\}^T
 \end{aligned} \tag{C-25}$$

## D Implémentation du contact par pénalité dans le code éléments finis

Cette annexe détaille la méthode de contact pénalisé implémentée dans le code élément fini introduite section III.2.2.b.

### D.1 Méthode de pénalisation adoptée

#### D.1.a Formulation

Plutôt que d'interdire la pénétration ( $\delta \cdot \mathbf{n} > 0$ ), la méthode de pénalisation consiste à appliquer une force sur l'interface qui pénètre l'obstacle. Ceci permet de pénaliser toute pénétration en ajoutant un terme d'effort surfacique au résidu de la formulation variationnelle. De manière classique, cet effort est proportionnel à la pénétration. Le facteur de proportionnalité  $\chi$  s'appelle coefficient de pénalisation. Le système (III.43) devient alors :

$$\begin{cases} \mathbf{t} = 0 & \text{si } \delta < 0 \\ \mathbf{t} = -\chi\delta\mathbf{n} & \text{si } \delta > 0 \end{cases} \quad (\text{D-1})$$

où  $\delta = \|\delta\|$ . Cette formulation permet de pénaliser toute pénétration à l'aide d'un effort normal à la surface. Il permet donc de modéliser un contact parfaitement glissant  $(\mathbf{t} // \mathbf{n})$ .<sup>‡</sup>

#### D.1.b Efficacité

L'implémentation d'une telle loi de contact par pénalisation est très simple. En effet elle ne nécessite que l'ajout d'un terme dans la formulation variationnelle. Aucun degré de liberté ou stockage supplémentaire n'est nécessaire ; et les interpolations restent inchangées. D'autre part, le fait de décrire les interfaces dans un cadre eulérien à l'aide d'une levelset qui est la distance algébrique, le terme  $\delta$  précédent est connu en chaque point, tout comme la normale qui n'est autre que le gradient de la levelset. Dans notre cas, la méthode de pénalisation est donc très efficace puisqu'elle ne nécessite finalement que l'assemblage d'une nouvelle force, et ceci seulement sur l'interface du matériau.

---

<sup>‡</sup>La méthode peut être étendue et permettre de modéliser du contact avec frottement en ajoutant un terme tangentiel à l'équation précédente.

### D.1.c Mise en œuvre

A chaque itération de Newton-Raphson, les termes volumiques issus de la formulation (III.3) et les termes de flux pour une éventuelle condition naturelle de Neumann sont d'abord assemblés. Ensuite, pour chaque point de l'interface  $\boldsymbol{x}$ , la distance  $\delta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u})$  est déterminée pour le point déplacé  $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$  où  $\boldsymbol{u}$  est le déplacement déterminé à l'itération précédente. L'assemblage du terme (D-1) est alors effectué. Dans le cas d'un problème formulé en vitesse, le déplacement  $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\Delta t$

### D.1.d Non linéarité

La contrepartie de cette méthode est la non linéarité importante de la formulation. En effet, la sensibilité de la force  $\boldsymbol{t}$  à la pénétration  $\delta$  présente un saut que l'on peut observer figure D-1b. La résolution d'un problème, même linéaire avec contact pénalisé présente alors des vitesses de convergence très basses.

## D.2 Optimisation de la loi de contact

Afin de régulariser la formulation (D-1), nous proposons une loi de contact régularisée à l'aide d'un second ordre :

$$\begin{cases} \boldsymbol{t} = 0 & \text{si } \delta < 0 \\ \boldsymbol{t} = -\chi_2 \delta^2 \boldsymbol{n} & \text{si } \delta > 0 \end{cases} \quad (\text{D-2})$$

où  $\chi_2$  est le coefficient de pénalisation. Cette loi régularisée revient en fait à écrire que le coefficient de pénalisation de la loi de contact (D-1) s'écrit :

$$\chi = \chi(\delta) = \chi_2 \delta. \quad (\text{D-3})$$

Bellet et Heinrich [Bellet et Heinrich, 2004] proposent une régularisation relativement similaire.

### D.2.a Matrice tangente

Le terme additionnel du résidu (III.3) s'écrit alors :

$$\mathcal{F}_e^{cont}(U) = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}^* \quad (\text{D-4})$$

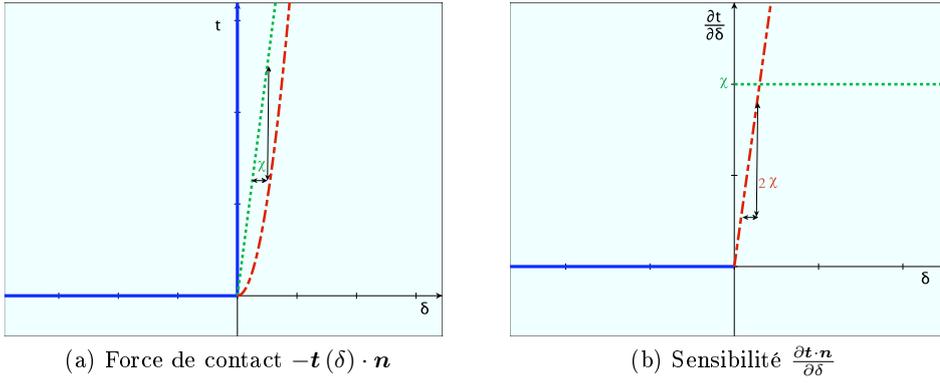


FIG. D-1: Lois de contact.

(—) idéale (équation (III.43)).

(⋯) classique (équation (D-1)).

(-·-) régularisée (équation (D-2)).

et sa matrice tangente associée :

$$\begin{aligned} [J_e^{cont}] &= \frac{\partial \{F_e^{cont}\}}{\partial \{X\}} \\ &= \int_{\Gamma_1} \{N_u\}^T \frac{\partial t}{\partial \mathbf{u}} \{N_u\}. \end{aligned} \quad (\text{D-5})$$

Dans le cas où il y a pénétration ( $\delta > 0$ ), la sensibilité de la loi de contact (D-2) peut se développer en :

$$\frac{\partial t}{\partial \mathbf{u}} = -\chi_2 \left( 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} \right) \quad (\text{D-6})$$

or  $\delta$  est la distance algébrique à l'obstacle. Son gradient  $\partial \delta / \partial \mathbf{u}$  est donc la normale à l'obstacle. En considérant que les normales de l'outil et du matériau sont opposées s'il y a contact, on obtient

$$\frac{\partial t}{\partial \mathbf{u}} = \chi_2 (2\delta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (\text{D-7})$$

La sensibilité  $\partial \delta / \partial \mathbf{u}$  est alors proportionnelle à  $\delta$ . La non linéarité précédente est donc bien régularisée comme le montre la figure D-1.

## D.2.b Détermination du coefficient

La méthode de pénalisation est efficace mais la détermination du coefficient de pénalisation est difficile. C'est cependant ce paramètre qui va déterminer la convergence et l'efficacité de la méthode. Pour un paramètre trop important, la non linéarité est très importante et la convergence de l'algorithme de Newton Raphson peut ne pas être atteinte au sens d'une tolérance fixée (cf § (p. 83).1.3.b). Pour un paramètre trop faible, l'interpénétration n'est pas suffisamment pénalisée et la solution obtenue est loin du

cas de contact idéal (III.43) recherché.

Dans le résidu de la formulation, la contribution due au contact par pénalité doit être de l'ordre de la contribution volumique du problème standard. La norme de la matrice tangente  $J_u$  permet d'évaluer l'importance de ces termes volumiques. A partir de l'équation (D-7), on choisit alors le coefficient de contact  $\chi_2$  par :

$$\chi_2 = \frac{\| [J_2] \|}{2\delta_{tol}} \quad (D-8)$$

où  $\delta_{tol}$  est la pénétration autorisée que l'on choisit en fonction des dimensions du problème.

### Cas test 8 : Contact sur un pion en élasticité

Nous considérons un rectangle de dimension  $4 \times 4$  constitué de deux matériaux de coefficient de Poisson 0,3 et de modules d'Young 1 et 0,01. Le matériau plus rigide vient au contact d'un obstacle circulaire. Un déplacement est imposé à 0.1 sur le bord. La géométrie du problème est détaillée figure D-2. La

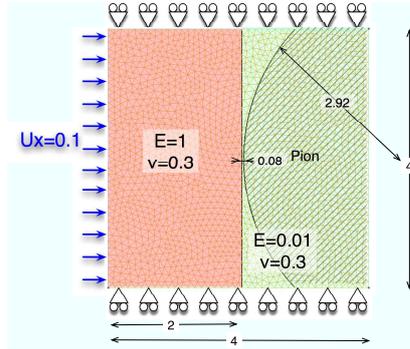


FIG. D-2: Cas test du contact sur un pion, conditions limites.

résolution se fait en appliquant la loi de contact pénalisé d'ordre 2 présentée. Le paramètre  $\delta_{tol}$  est fixé à 0,05. 10 itérations de Newton-Raphson sont nécessaires pour converger. Une loi classique d'ordre 1 a également été testée. La convergence n'a pas été obtenue, probablement à cause du coefficient de pénalisation toujours difficile à évaluer. La figure D-3a montre que la pénétration de l'interface matériau dans le pion est très faible (de l'ordre de  $10^{-5}$ ). La figure D-3b représente le champ de déplacement obtenu à la vingtième itération de Newton-Raphson de la résolution avec une loi classique d'ordre 1. Bien que l'allure des champs soit semblable, la pénétration est plus importante (de l'ordre de  $10^{-2}$ ). Ceci confirme l'efficacité de la loi de contact proposée.

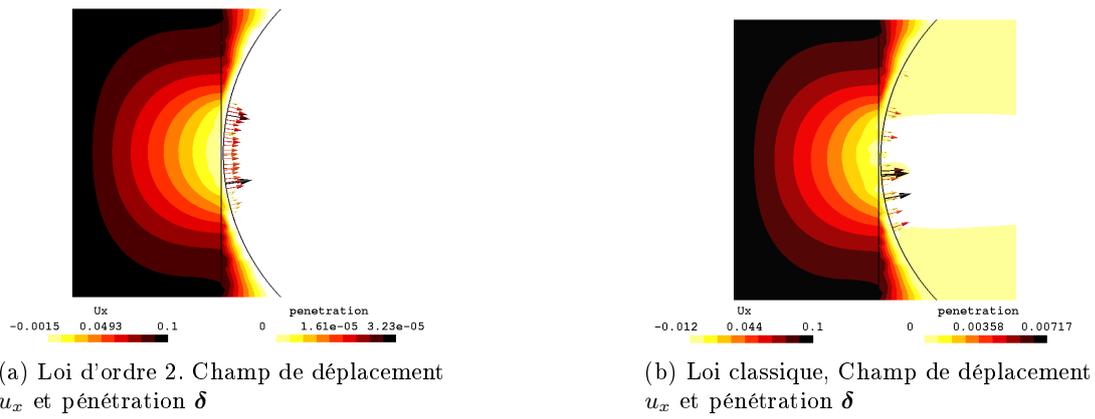


FIG. D-3: Cas test du contact. Comparaison entre loi classique et d'ordre 2.

---

## E X-FEM et interface matériau

Cette annexe présente les enrichissements nécessaires aux interpolations éléments finis classiques dans le cas où une interface matériau traverse un élément.

### E.1 Champ thermique

Considérons deux matériaux en contact parfait. Il y a continuité de la température et du flux de chaleur à l'interface. Par contre, si les deux matériaux présentent une conductivité thermique différente, le gradient de température peut être discontinu. L'enrichissement à envisager est donc un champ continu à dérivé discontinue à l'interface. Sukumar *et al.* [Stavrov et Bersee, 2005] proposent d'utiliser la valeur absolue de la fonction levelset :  $|\psi|$ .

### E.2 Champ de déplacement

De la même manière, le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  peut être enrichi par des fonctions à dérivés discontinues. Il est utile de noter que dans le cas où l'iso-zéro de la levelset décrit une fissure, le champ de déplacement est enrichi par une fonction Heavyside qui représente alors le saut de déplacement au niveau de la fissure. La méthode X-FEM est issue de ce cas historique de description de fissures [Moës et al., 1999].

### E.3 Formulation mixte

Dans le cas de la formulation mixte (III.7) en vitesse / pression, Legrain *et al.* [Legrain et al., 2008] proposent un enrichissement par des fonctions continues à dérivés discontinues pour le champ de vitesse et le champ de pression. Ils montrent que la condition LBB reste remplie et que la vitesse de convergence est inchangée.

---

#### Cas test 9 : Thermique dans un bi-matériau

*Dans ce cas test, nous résolvons le problème de conduction thermique dans un rectangle constitué de deux matériaux. La géométrie et les conditions limites sont récapitulées figure E-1. La résolution est effectuée à l'aide d'une interpolation P1 et d'un maillage grossier. Comme montré figure III.13 (p. 106), les champs calculés sans enrichissement présentent des erreurs importantes par rapport à la solution analytique, au niveau de l'interface. L'interpolation*

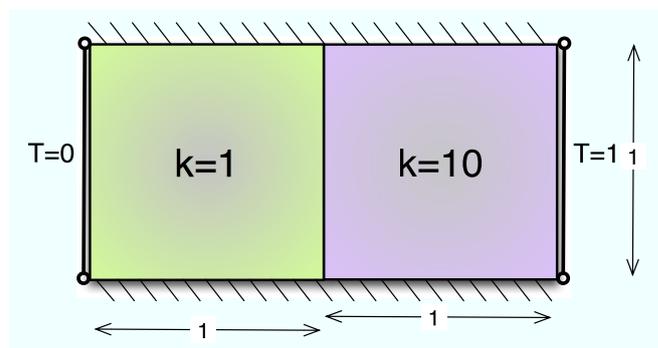


FIG. E-1: Cas test thermique dans un bi-matériau. Géométrie du problème.

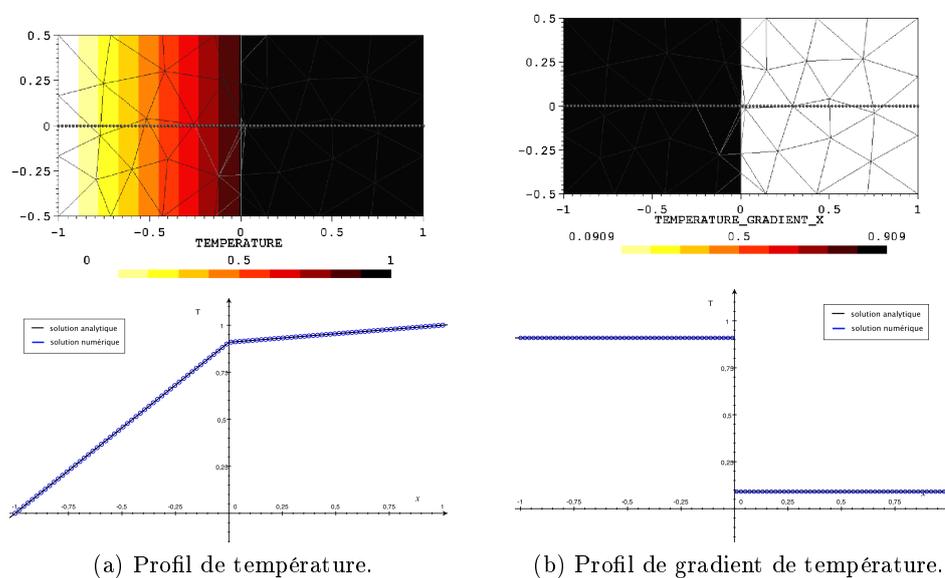


FIG. E-2: Erreur à l'interface de deux matériaux sur le champ thermique calculé à l'aide d'une interpolation P1 avec enrichissement.

*du champ de température a donc été enrichie à l'aide de fonctions à dérivés discontinues. La figure E-2 montre que l'enrichissement permet dans ce cas d'obtenir la solution exacte.*



## F Paramètres matériau de l'APC2 et du PEEK

Cette section consiste en une revue bibliographique des paramètres thermiques et mécaniques des matériaux traités dans notre étude.

### F.1 Propriétés thermiques

#### F.1.a PEEK

Le PEEK est un polymère linéaire semi-cristallin. La littérature [Cogswell, 1992, Gardner, 1998, Lamethe et al., 2005] s'accorde sur sa température de transition vitreuse :

$$\theta_g = 143^\circ\text{C} \quad (\text{F-1})$$

et sa température de fusion :

$$\theta_f = 345^\circ\text{C}. \quad (\text{F-2})$$

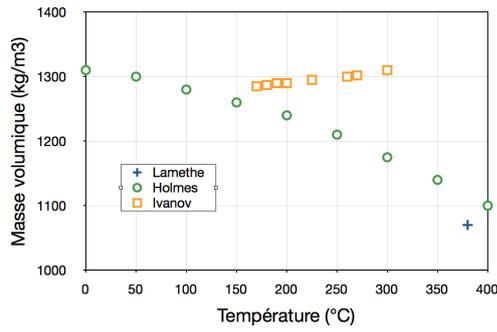
Il existe plusieurs grades de PEEK suivant la longueur des chaînes macromoléculaires [Nicodeau, 2005]. Les propriétés thermo-mécaniques dépendent du grade. Malheureusement, les fabricants de produits semi-finis ne fournissent généralement pas d'information sur le grade utilisé. Bien que les valeurs présentées par la suite soient généralement données pour du grade 450, les fortes dispersions des mesures sont principalement dues à cette différence de grade.

**Masse volumique** La masse volumique du PEEK a été mesurée par Ivanov [Ivanov et al., 2000] et Holmes [Holmes et Gillespie Jr., 1993]. La dispersion de leurs mesures visible figure F-1a peut s'expliquer par une différence d'état cristallin. En effet, alors qu'Ivanov précise l'histoire thermique du matériau, Holmes ne donne pas d'information sur sa cristallinité. Pourtant, les mesures de Cogswell [Cogswell, 1992], visibles figure F-1b, montrent que la masse volumique dépend fortement de la cristallinité du PEEK.

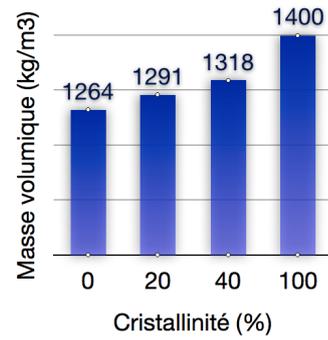
**Chaleur spécifique** Lamethe [Lamethe, 2004] propose une modélisation linéaire de la chaleur spécifique  $c_p$  du PEEK :

$$c_p(\theta) = 2,5.\theta [^\circ\text{C}] + 1250 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}. \quad (\text{F-3})$$

Les valeurs trouvées dans la littérature sont reportées figure F-2a. Ces valeurs sont données sans information sur la cristallinité. La capacité calorifique massique retenue

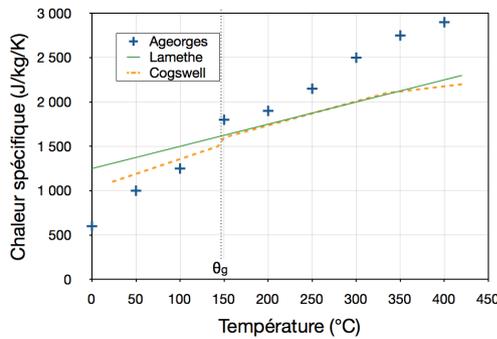


(a) En fonction de la température, à l'état amorphe.

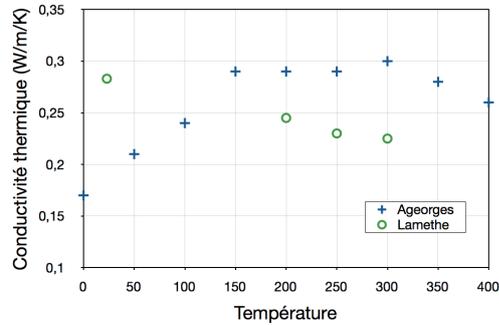


(b) En fonction de la cristallinité, à température ambiante [Cogswell, 1992].

FIG. F-1: Masse volumique du PEEK



(a) Chaleur spécifique.



(b) Conductivité thermique.

FIG. F-2: Propriétés thermiques du PEEK.

dans notre modèle est finalement une fonction linéaire de la température adaptée de ces valeurs :

$$4500 \cdot \theta[^\circ\text{C}] + 1,3 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \text{ K}^{-1}. \quad (\text{F-4})$$

**Conductivité thermique** La figure F-2b présente les conductivités thermiques trouvées dans la littérature [Ageorges et al., 1998a, Lamethe, 2004]. Etant donnée la dispersion importante des données, une valeur constante de

$$k = 0,24 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3} \text{ K}^{-1} \quad (\text{F-5})$$

est arbitrairement retenue dans notre étude.

TAB. F-1: Propriétés thermique des fibres de carbone AS4 [Ageorges et al., 1998a].

Conductivité thermique	longitudinale $9,1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ transverse $0,43 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
Masse volumique	$1790 \text{ kg/m}^3$
Chaleur spécifique	$1296 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$

### F.1.b Composite

L'APC2 est un préimprégné constitué de 62% en masse de fibres de carbone AS4. Du fait de leur structure cristalline, les fibres de carbones sont anisotropes. En effet, elles sont constituées d'un empilement de plans cristallins. D'autre part, en général, les fibres sont traitées en surface afin d'obtenir une interface, voire une interphase optimale lors de l'utilisation dans un matériau composite. Ageorges [Ageorges et al., 1998a] donne les propriétés thermiques des fibres comme indépendantes de la température (cf. tableau F-1).

Le principal problème rencontré lors de la comparaison des données matériau trouvées dans la littérature vient de la provenance du matériau. En effet, les différentes chaînes de fabrication produisent des matériaux différents. Ainsi même si la dénomination APC2 (AS4/PEEK) reste la même, il faut tenir compte du producteur, voire de la chaîne de fabrication du matériau. Les deux micrographies d'APC2 de la figure F-3 montrent, par exemple, une forte différence de morphologie.

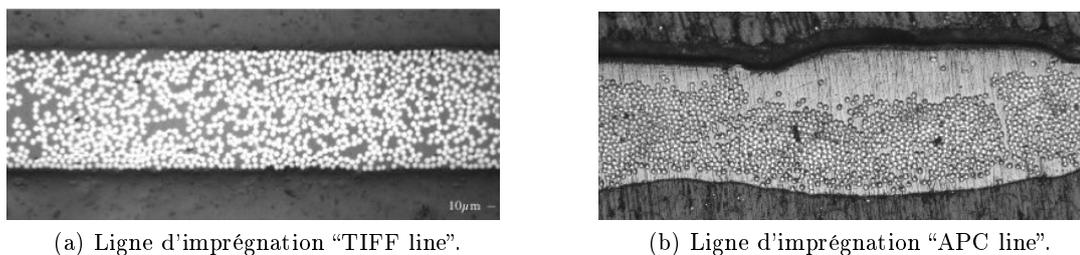


FIG. F-3: Micrographies de deux échantillons d'APC2 du même fournisseur : Cyttec.

La masse volumique et la chaleur spécifique de l'APC2 peuvent être obtenues par la loi des mélanges. Un récapitulatif est donné tableau F-2. On note une dispersion des mesures. Dans notre étude, nous avons retenu une valeur moyenne constante

$$\rho_c = 2,2 \cdot 10^6 \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-1} \quad (\text{F-6})$$

**Conductivité thermique** La dépendance avec la température des conductivités thermiques transverses et longitudinales de l'APC2 ont été mesurées par Ageorges [Ageorges

TAB. F-2: Propriétés thermiques de l'APC2.

		Masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )	Chaleur spécifique ( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )
Nicodeau		1560	1700
Lamèthe		1560	1425
Cogswell		1780	1700
Ageorges	23 °C	1584	900
	400 °C		1700
Fournisseur ICI	23 °C	1600	1100
	400 °C	1524	1800

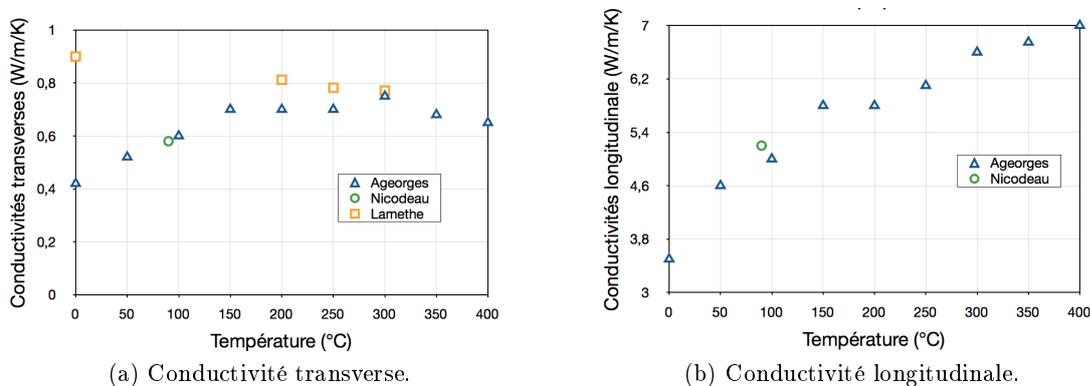


FIG. F-4: Conductivités thermique de l'APC2.

et al., 1998a]. Lamèthe a mesuré des diffusivités transverse. Nous en avons tiré les conductivités transverses ) l'aide des capacités calorifiques et des masses volumiques de l'APC obtenues avec la loi des mélanges. Nicodeau a également fait des mesures à 90 °C. Ces valeurs sont récapitulées figure F-4.

## F.2 Propriétés mécaniques

Cette section présente les propriétés élastiques et viscoélastiques des matériaux. La première partie se concentre sur les paramètres du PEEK, utiles en particulier dans les simulations présentées chapitre IV. Les propriétés des fibres de carbone et du composite APC2 sont ensuite abordées.

### F.2.a PEEK

L'étude présentée se concentre sur l'écoulement sous vibration du PEEK. En accord avec la loi de comportement viscoélastique retenue dans notre étude, une revue des propriétés viscoélastiques en régime linéaire du PEEK est proposée.

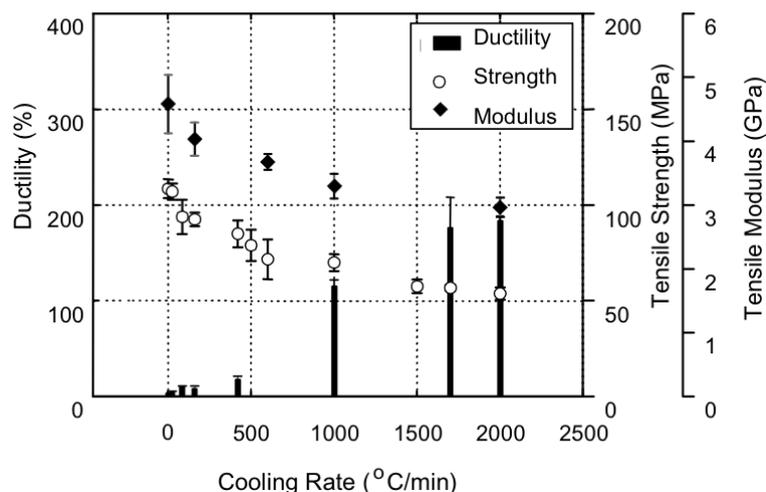


FIG. F-5: Propriétés du PEEK en fonction de la vitesse de refroidissement [KIM, 2003].

**Elasticité** Les propriétés élastiques à température ambiante ont été mesurées par de nombreux auteurs [Cogswell, 1992, Nicodeau, 2005, Lamèthe, 2004, Zhou et al., 2004, Gardner, 1998]. Ces valeurs sont récapitulées dans le tableau F-3. . Il faut no-

TAB. F-3: Caractéristique mécanique du PEEK en élasticité

	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Module de cisaillement (GPa)
Cogswell à 23 °C	3,6	0,40	1,3
Nicodeau à 25 °C	3,5		1,3
Lamèthe à l'ambiante	4		3,69 ± 0,09
Zhou à l'ambiante	1,72		3,37
Gardner à l'ambiante	3,6	0,34	3,53(grade 150) 3,66(grade 450)

ter qu'elles sont données sans préciser l'histoire thermique du matériau. En particulier la cristallinité influence beaucoup la rigidité. Seul Lamèthe indique que le module de cisaillement a été obtenu par un essai de flexion trois points après un recuit à 250 °C. Kim [KIM, 2003] a également étudié la variation des propriétés mécaniques du PEEK avec la vitesse de refroidissement (cf. figure F-5).

**Modules viscoélastiques à basse fréquence** Goyal *et al* [Goyal et al., 2006], Li *et al* [Li, 1999] ou Benatar et Gutowski [Benatar et Gutowski, 1989] donnent la valeur du module viscoélastique  $E^*$  à basse fréquence, pour le PEEK, jusqu'à 250 °C. En dessous de la température de transition vitreuse, le module élastique en fonction de

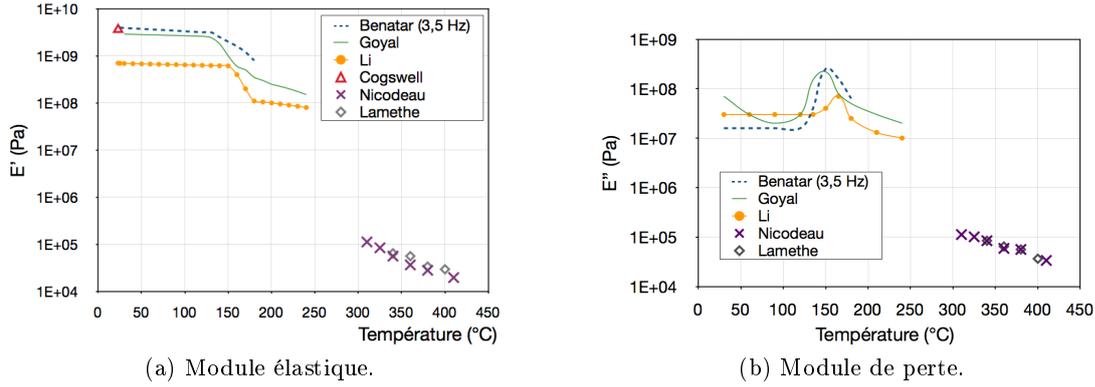


FIG. F-6: Modules viscoélastiques à un Hertz en fonction de la température.

la température atteint un plateau. Ceci montre les bonnes propriétés de ce matériaux même jusqu'à des températures proches de la transition vitreuse.

Nicodeau [Nicodeau, 2005] et Lamèthe [Lamethe, 2004] proposent des essais de rhéométrie aux alentours de la température de fusion. En supposant un coefficient de poisson  $\nu = 0,4$ , le module viscoélastique  $E^*$  peut en être déduit par :

$$\begin{aligned} E^* &= 2(1 + \nu) G^* \\ &= 2,8.G^* \end{aligned} \quad (\text{F-7})$$

La figure F-6 présente ces mesures. Malgré la dispersion des données, l'investigation a été faite sur quasiment toute la gamme de température du procédé.

**Propriétés à hautes fréquences** Un verrou important dans l'étude du procédé est la connaissance des propriétés à fréquence de sollicitation élevée. Plusieurs moyens peuvent être envisagés pour déterminer les propriétés viscoélastiques du PEEK à 20 kHz.

Une première méthode, expérimentale, permet d'atteindre de telles vitesses de sollicitation. Elle consiste à effectuer des essais d'impact. Des mesures par barres Hopkinson ont été effectuées avec l'aide de Ramzi Othman et Franck Pasco. Elles ont permis de déterminer le module élastique et le module de perte à des fréquences variant entre  $2.10^3$  et  $20.10^3$  Hz, à température ambiante (cf. figure F-7a).

Une seconde méthode, consiste à appliquer un principe de superposition temps température. A l'aide de mesures effectuées à basse température et à basse fréquence, le principe de superposition temps température permet d'obtenir des informations à haute fréquence et à haute température. C'est ce que proposent Benatar et Gutowski [Benatar et Gutowski, 1989], qui obtiennent les modules visco-élastiques à 20 kHz sur la plage de température du procédé (cf. figure F-7b). Toutefois afin de pouvoir atteindre des fréquences aussi élevées que 20 kHz, le principe de superposition doit être étendu à des températures très basses. Finalement, bien que cette application à des températures

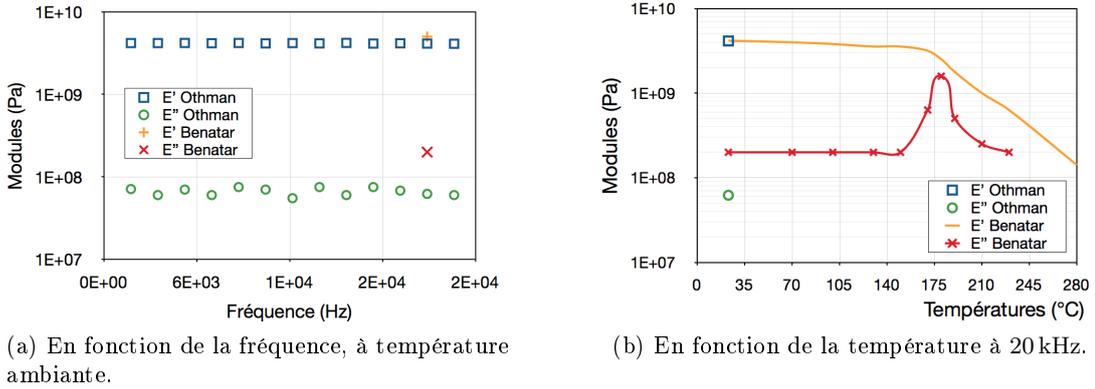


FIG. F-7: Modules viscoélastiques à haute fréquence.

TAB. F-4: Temps de relaxation de Carreau d'après Nicodeau [Nicodeau, 2005].

Température (°C)	310	325	340	360	380	410
$\lambda_{Carreau}$ (s)	2	1,1	1,1	0,9	0,67	0,5

inférieures à la température de transition vitreuse soit discutable, les valeurs obtenues, au moins pour le module d'élasticité, semblent en accord avec les valeurs mesurées expérimentalement.

**Viscosité** Les mesures dynamiques effectuées par Nicodeau et Lamèthe ont permis de déterminer un comportement rhéofluidifiant pour le PEEK. La figure F-8a montre un bon accord des viscosités newtoniennes  $\eta_0$  obtenues en fonction de la température. Nicodeau propose de la modéliser à l'aide de la fonction d'Arrhenius :

$$\eta_0(\theta) = 5,6 \cdot 10^{-3} \exp\left(\frac{7,44 \cdot 10^4}{R\theta [K]}\right) \text{ Pa.s.} \quad (\text{F-8})$$

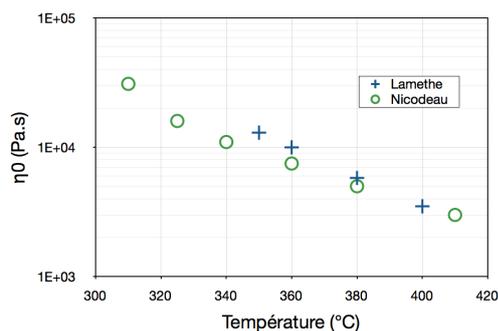
Les viscosités complexes mesurées en fonction de la pulsation sont comparables, comme le montre la figure F-8b. Elles accusent un comportement rhéofluidifiant. Nous retenons la modélisation de Carreau proposée par Nicodeau :

$$\eta = \eta_0 \left[1 + (\lambda_{Carreau} D_{eq})^{0,7}\right]^{\frac{0,54-1}{0,7}} \quad (\text{F-9})$$

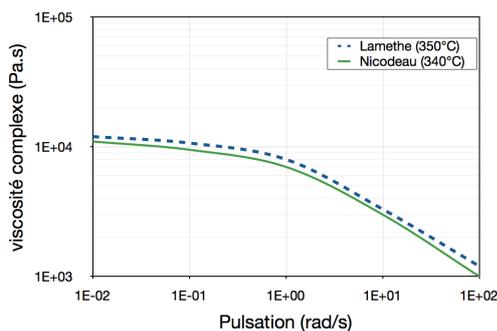
où  $\lambda_{Carreau}$  est donné en fonction de la température dans le tableau F-4.

### F.2.b Composite

Le tableau F-5 récapitule les propriétés mécaniques des fibres de carbone AS4.



(a) Viscosité newtonienne en fonction de la température.



(b) Viscosité complexe en fonction de la fréquence.

FIG. F-8: Viscosité du PEEK aux alentours de sa température de fusion.

TAB. F-5: Propriétés mécaniques des fibres de carbone d'après [Cogswell, 1992].

Module d'Young		contrainte à la rupture	Module de cisaillement		Coefficients de poisson		
longitudinal	transverse		axial	en torsion	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$	$\nu_{23}$
227 GPa	15 GPa	3,65 GPa	20 GPa	5 GPa	0,25	0,013	0,40

**Propriétés élastiques de l'APC2 à l'ambiante** Les valeurs des modules élastiques trouvés dans la littérature sont reportées dans le tableau F-6. On note que ces propriétés sont valables à 23°C, mais que dès que l'on monte en température, le matériau ne peut plus être considéré comme élastique. Cervenka [Cervenka et al., 1992] parle ainsi de propriétés "*pseudo-élastiques*".

On note des valeurs de module d'Young assez peu dispersées, si ce n'est la valeur donnée par Ramulu [RAMULU ET AL., 2004]. Ramulu a en effet effectué ses essais sur un stratifié non unidirectionnel. Le problème de la cristallinité est également toujours existant, seul Harras [HARRAS ET AL., 2002] en tient compte. Finalement, alors que les propriétés dans le plan de la plaque sont beaucoup étudiées, les coefficients de poisson et modules de cisaillement dans les deux autres plans ne sont que peu étudiés, du fait de la difficulté de la mise en œuvre d'un essai dans l'épaisseur de la plaque.

TAB. F-6: Caractéristiques mécaniques de l'APC2 en élasticité

	Module d'Young (GPa)			Coefficient de Poisson					Module de cisaillement (GPa)						
	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{33}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{21}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$	$\nu_{32}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{21}$	$G_{23}$	$G_{31}$	$G_{32}$
Cogswell [Cogswell, 1992]	137	9,4	9,1	0,33	0,32	0,04	0,04	0,40	0,40	5,1	4,7	5,1	3,2	4,6	3,2
Kawai [Kawai et al., 2001] à 100 °C	137,9	9,77		0,305		0,0189				5,88					
Ramulu [Ramulu et al., 2004]		57,2													
Cervenka [CERVENKA ET AL., 1992]	132,6	9,45		0,35	0,3	0,04				4,9	5,5		4,4		
Fournisseur ICI	134	8,9								5,1					
Harras [Harras et al., 2002]	131	8,7		0,28						5					
0,66 cristallinité	134	8,9		0,28						5,1					



# Bibliographie

- [Agassant et al., 1986] Agassant, J.-F., Avenas, P., Sergent, J.-P., Vergnes, B., et Vincent, M. (1986). *La Mise en forme des Matieres Plastiques*. Tec et Doc.
- [Ageorges et al., 2001] Ageorges, C., Ye, L., et Hou, M. (2001). Advances in fusion bonding techniques for joining thermoplastic matrix composites : a review. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, 32(6) :839–857.
- [Ageorges et al., 1998a] Ageorges, C., Ye, L., Mai, Y.-W., et Hou, M. (1998a). Characteristics of resistance welding of lap shear coupons : Part i : Heat transfer. *Composites*, 29A :899–909.
- [Ageorges et al., 1998b] Ageorges, C., Ye, L., Mai, Y.-W., et Hou, M. (1998b). Characteristics of resistance welding of lap shear coupons : Part iii : Crystallinity. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(8) :921–932.
- [Ahmed et al., 2006] Ahmed, T., Stavrov, D., Bersee, H., et Beukers, A. (2006). Induction welding of thermoplastic composites—an overview. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(10) :1638–1651.
- [Ammar, 2001] Ammar, A. (2001). *Modélisation numérique de la cristallisation induite par l'écoulement d'un thermoplastique. Application à l'injection*. Thèse de Doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan.
- [Arnold et al., 1984] Arnold, D., Brezzi, F., et Fortin, M. (1984). A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo*, 21(4) :337–344.
- [Avrami, 1939] Avrami, M. (1939). Kinetics of phase change. i general theory. *The Journal of Chemical Physics*, 7 :1103.
- [Avrami, 1940] Avrami, M. (1940). Kinetics of phase change. ii transformation-time relations for random distribution of nuclei. *The Journal of Chemical Physics*, 8 :212.
- [Avrami, 1941] Avrami, M. (1941). Kinetics of phase change. iii. granulation, phase change, and microstructure. *The Journal of Chemical Physics*, 9 :177–184.
- [Babuška, 1973] Babuška, I. (1973). The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*, 27(22) :221–228.
- [Bas et al., 1995] Bas, C., Grillet, A., Thimon, F., et Alberola, N. (1995). Crystallization kinetics of poly(aryl ether ether ketone) : Time-temperature-transformation

- and continuous-cooling-transformation diagrams. *European Polymer Journal*, 31(10) :911–921.
- [Basset, 2006] Basset, O. (2006). *Simulation numérique d'écoulements multifluides sur grille de calcul*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Bellet et Heinrich, 2004] Bellet, M. et Heinrich, A. (2004). A two-dimensional finite element thermomechanical approach to a global stress-strain analysis of steel continuous casting. *ISIJ International*, 44(10) :1686–1695.
- [Belytschko et Neal, 1991] Belytschko, T. et Neal, M. (1991). Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(3) :547–572.
- [Benatar, 1987] Benatar, A. (1987). *Ultrasonic welding of advanced thermoplastic composites*. Thèse de Doctorat, Massachusetts Institute of Technology.
- [Benatar et al., 1989] Benatar, A., Eswaran, R., et Nayar, S. (1989). Ultrasonic welding of thermoplastics in the near-field. *Polymer Engineering and Science*, 29(23) :1689–1698.
- [Benatar et Gutowski, 1989] Benatar, A. et Gutowski, T. G. (1989). Ultrasonic welding of peek graphite apc-2 composites. *Polymer Engineering and Science*, 29(23) :1705.
- [Benssousan et al., 1978] Benssousan, A., Lions, J. L., et Papanicoulau, G. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures.*, volume 5. North Holland.
- [Bourban et al., 2001] Bourban, P.-E., Bernet, N., Zanetto, J.-E., Jan-Anders, et Manson, E. (2001). Material phenomena controlling rapid processing of thermoplastic composites. *Composites Part A : applied Science and manufacturing*, 32(8) :1045–1057.
- [Boutin et Wong, 1998] Boutin, C. et Wong, H. (1998). Study of thermosensitive heterogeneous media via space-time homogenisation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(6) :939–968.
- [Boyce et al., 1989] Boyce, M., Weber, G., et Parks, D. (1989). On the kinematics of finite strain plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37(5) :647–665.
- [Brezzi, 1974] Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Operationnelle Ser. Rouge*, 8 :129–151.
- [Brooks et Hughes, 1982] Brooks, A. N. et Hughes, T. (1982). Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :199–259.
- [Brostow, 2000] Brostow, W. (2000). *Performance of plastics*. Hanser.
- [Burel, 2009] Burel, A. (2009). Numerical implementation of a non-linear constitutive equations for hydrogels. Thèse de Master, Master Erasmus Mundus in Computational Mechanics, Ecole Centrale de Nantes.

- [Carslaw et Jaeger, 1959] Carslaw, H. S. et Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press – Oxford.
- [Cervenka et al., 1992] Cervenka, A., Moore, D. R., et Seferis, J. C. (1992). Pseudo-elastic constants for aromatic polymer (apc-2). *Pure and Applied Chemistry*, 64(11) :1801–1808.
- [Chaudhary et Bathe, 1986] Chaudhary, A. et Bathe, K. (1986). A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. *Computers & structures*, 24(6) :855–873.
- [Chien et Weiss, 1988] Chien, M. et Weiss, R. (1988). Strain-induced crystallization behavior of poly (ether ether ketone)(peek). *Polymer Engineering & Science*, 28(1) :6–12.
- [Cogswell, 1992] Cogswell, F. (1992). *Thermoplastic aromatic polymer composites*. Woodhead.
- [Cojocaru et Karlsson, 2006] Cojocaru, D. et Karlsson, A. M. (2006). A simple numerical method of cycle jumps for cyclically loaded structures. *International Journal of Fatigue*, 28(12) :1677–1689.
- [Conte et Loubatière, 2008] Conte, F. et Loubatière, R. (2008). Thermique du soudage par ultrasons de composites thermoplastiques. Rapport technique, Polytech’Nantes, LTN.
- [Courant et al., 1967] Courant, R., Friedrichs, K., et Lewy, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2) :215.
- [De Gennes, 1971] De Gennes, P. (1971). Reptation of a polymer chain in the presence of fixed obstacles. *The Journal of Chemical Physics*, 55 :572.
- [Dubois et al., 2009] Dubois, C., Le Corre, S., Zarroug, M., Rozicki, P., et Moës, N. (2009). Impact on highly compressible media in explicit dynamics using the x-fem. *Computational Mechanics*, 46(2) :329–348.
- [Francfort et Suquet, 1986] Francfort, G. et Suquet, P. (1986). Homogenization and mechanical dissipation in thermoviscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 96(3) :265–293.
- [Gardner, 1998] Gardner, S. H. (1998). *An Investigation of the Structure-Property Relationships for High Performance Thermoplastic Matrix, Carbon Fiber Composites with a Tailored Polyimide Interphase*. Thèse de Doctorat, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [Geuzaine et Remacle, ] Geuzaine, C. et Remacle, J.-F. Gmsh, a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.
- [Goyal et al., 2006] Goyal, R., Tiwari, A. N., Mulik, U. P., et Negi, Y. S. (2006). Dynamic mechanical properties of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/poly(ether ether ketone) composites. *Journal of Applied Polymer Science*, 104(1) :568–575.

- [Goyal et al., 2007] Goyal, R. K., Tiwari, A., Mulik, U., et Y.S.Negi (2007). Effect of aluminum nitride on thermomechanical properties of high performance peek. *Composites Part A : applied Science and manufacturing*, 38(2) :516–524.
- [Grewell et al., 2003] Grewell, D. A., Benatar, A., et Park, J. B. (2003). *Plastics and Composites Welding Handbook*. Hanser.
- [Guennouni, 1988] Guennouni, T. (1988). Sur une méthode de calcul de structures soumises à des chargements cycliques : l’homogénéisation en temps. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 22(3) :417–455.
- [Guétari, 2005] Guétari, Y. (2005). *Vers une meilleure compréhension de la coupe. Aspects rhéologiques et simulation numérique par l’approche X-FEM*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes.
- [Ha Minh, 2009] Ha Minh, D. (2009). *Couplages thermo-mécaniques lors de la soudure par ultrasons. Application aux thermoplastiques*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. ParisTech.
- [Harras et al., 2002] Harras, B., Benamar, R., et White, R. (2002). Investigation of non-linear free vibrations of fully clamped symmetrically laminated carbon-fibre-reinforced peek (as4/apc2) rectangular composite panels. *Composite Science and Technology*, (62) :719–727.
- [Hirt et Nichols, 1981] Hirt, C. et Nichols, B. (1981). Volume of fluid/vof/ method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, 39 :201–225.
- [Holmes et Gillespie Jr., 1993] Holmes, S. T. et Gillespie Jr., J. (1993). Thermal analysis for resistance welding of large-scale thermoplastic composite joints. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 12 :723–736.
- [Ivanov et al., 2000] Ivanov, D. A., Legras, R., et Jonas, A. M. (2000). The crystallization of poly(aryl-ether-ether-ketone) (peek) : reorganization processes during gradual reheating of cold-crystallized samples. *Polymer*, 41(10) :3719–3727.
- [Kawai et al., 2001] Kawai, M., Yajima, S., Hachinohe, A., et Kawase, Y. (2001). High-temperature off-axis fatigue behaviour of unidirectional carbon-fibre-reinforced composites with different resin matrices. *Composite Science and Technology*, (61) :1285–1302.
- [Kikuchi et Oden, 1988] Kikuchi, N. et Oden, J. (1988). *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. Studies in applied mathematics.
- [KIM, 2003] KIM, J.-K. (2003). Optimization of processing conditions and mechanical properties and applications of carbon/peek composites. In *2nd International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology*.
- [Kong et Hay, 2002] Kong, Y. et Hay, J. N. (2002). The measurement of the crystallinity of polymers by dsc. *Polymer*, 43(14) :3873–3878.

- [Lamethe, 2004] Lamethe, J.-F. (2004). *Etude de l'adhésion de composites semi-cristallins ; Application a la mise en oeuvre par soudure*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI – Pierre et Marie Curie.
- [Lamethe et al., 2005] Lamethe, J.-F., Beauchene, P., et Leger, L. (2005). Polymer dynamics applied to peek matrix composite welding. *Aerospace Science and Technology*, 9(3) :233–240.
- [Lee et Springer, 1987] Lee, W. et Springer, G. (1987). A model of the manufacturing process of thermoplastic matrix composites. *Journal of Composite Materials*, 21(11) :1017.
- [Legrain et al., 2008] Legrain, G., Moes, N., et Huerta, A. (2008). Stability of incompressible formulations enriched with x-fem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24) :1835–1849.
- [Lemaître et al., 1996] Lemaître, J., Chaboche, J., et Germain, P. (1996). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- [Levy et al., 2009] Levy, A., Le Corre, S., Poitou, A., et Chevaugéon, N. (2009). Développement d'un code éléments finis pour simuler le soudage par ultrasons de matériaux composites. In *16èmes Journées Nationales des Composites (JNC 16)*, Toulouse, France. AMAC. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00387409/>.
- [Levy et al., 2010] Levy, A., Le Corre, S., Poitou, A., et Soccard, E. (2010). Ultrasonic welding of thermoplastic composites, modeling of the process using time homogenization. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, In Press.
- [Li, 1999] Li, R. (1999). Time-temperature superposition method for glass transition temperature of plastic materials. *Materials Science and Engineering A*, 278(1-2) :36–45.
- [Maalekian, 2007] Maalekian, M. (2007). Friction welding critical assessment of literature. *Science and Technology of Welding & Joining*, 12(8) :708–729.
- [Mahdi et al., 2003] Mahdi, S., Kim, H., Gama, B., Yarlagadda, S., et Gillespie Jr, J. (2003). A comparison of oven-cured and induction-cured adhesively bonded composite joints. *Journal of Composite Materials*, 37(6) :519.
- [Mantell et Springer, 1992] Mantell, S. et Springer, G. (1992). Manufacturing process models for thermoplastic composites. *Journal of Composite Materials*, 26(16) :2348.
- [Marco, 2003] Marco, Y. (2003). *Caractérisation multi-axiale du comportement et de la micro-structure d'un semi-cristallin : application au cas du P.E.T.* Thèse de Doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan.
- [Moës et al., 2006] Moës, N., Béchet, E., et Tourbier, M. (2006). Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(12) :1641–1669.
- [Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., et Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150.

- [Nakamura et al., 1973] Nakamura, K., Katayama, K., et Amano, T. (1973). Some aspects of nonisothermal crystallization of polymers. ii. consideration of the isokinetic condition. *Journal of Applied Polymer Science*, 17(4) :1031–1041.
- [Nakamura et al., 1972] Nakamura, K., Watanabe, T., Katayama, K., et Amano, T. (1972). Some aspects of nonisothermal crystallization of polymers. i. relationship between crystallization temperature, crystallinity, and cooling conditions. *Journal of Applied Polymer Science*, 16(5) :1077–1091.
- [Nicodeau, 2005] Nicodeau, C. (2005). *Modélisation du Soudage en Continu des composites a Matrice Thermoplastique*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris.
- [Nonhof et Luiten, 1996] Nonhof, C. et Luiten, G. (1996). Estimates for process conditions during the ultrasonic welding of thermoplastics. *Polymer Engineering and Science*, 36(9) :1177.
- [Oliver et Pharr, 1992] Oliver, W. et Pharr, G. (1992). Improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, 7(6) :1564–1583.
- [Oskay et Fish, 2004] Oskay, C. et Fish, J. (2004). Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(3) :329–359.
- [Ozawa, 1971] Ozawa, T. (1971). Kinetics of non-isothermal crystallization. *Polymer*, 12(3) :150–158.
- [Pérès et al., 2007] Pérès, P., Desmars, B., et Léard, J.-P. (2007). Comportement d'assemblages composites via le procédé aerotiss 03s. In *15èmes Journées Nationales des Composites (JNC 15)*. Ch. Hochard et J. Lamon.
- [Perić et Owen, 1992] Perić, D. et Owen, D. (1992). Computational model for 3-d contact problems with friction based on the penalty method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(6) :1289–1309.
- [Peters et Baaijens, 1997] Peters, G. W. M. et Baaijens, F. P. T. (1997). Modelling of non-isothermal viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 68(2-3) :205 – 224. Papers presented at the Polymer Melt Rheology Conference.
- [Pharr et al., 1992] Pharr, G., Oliver, W., et Brotzen, F. (1992). On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation. *Journal of Materials Research*, 7(3) :613–617.
- [Pitchumani et al., 1996] Pitchumani, R., Ranganathan, S., Don, R. C., Gillespie, Jr., J. W., et Lamontia, M. A. (1996). Analysis of transport phenomena governing interfacial bonding and void dynamics during thermoplastic tow-placement. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(9) :1883–1897.
- [Ramulu et al., 2004] Ramulu, M., Stickler, P., McDevitt, N., Datar, I., Kim, D., et al., M. J. (2004). Influence of processing methods on the tensile and flexure properties of high temperature composites. *Composite Science and Technology*, (64) :1763–1772.

- [Rappaz et al., 1998] Rappaz, M., Bellet, M., et Deville, M. (1998). *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*. Traité des matériaux. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [Regnier et al., 2007] Regnier, G., Nicodeau, C., Verdu, J., Chinesta, F., et Cinquin, J. (2007). Une approche multi-physique du soudage en continu des composites à matrice thermoplastique : vers une modélisation multi-échelle. In *18ème Congrès Français de Mécanique*. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc-92400 Courbevoie.
- [Roylance et al., 2004] Roylance, M., Zukas, J. P. W., et Roylance, D. (2004). Modeling of ultrasonic processing. *Journal of Applied Polymer Science*, 93(4) :1609–1615.
- [Russo, 2006] Russo, A. (2006). Streamline-upwind petrov/galerkin method (supg) vs residual-free bubbles (rfb). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(13-16) :1608–1620.
- [Sanchez-Palencia, 1980] Sanchez-Palencia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, 127.
- [Sethian, 1999] Sethian, J. (1999). *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press.
- [Smolianski, 2005] Smolianski, A. (2005). Finite-element / level-set / operator-splitting (FELSOS) approach for computing two-fluid unsteady flows with free moving interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48 :231–269.
- [Sneddon, 1965] Sneddon, I. (1965). The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *International Journal of Engineering Science*, 3(1) :47–57.
- [Soccard, 2007] Soccard, E. (2007). Ultrasonic assembly method.
- [Sripien, 2009] Sripien, A. (2009). Numerical method of ultrasonic welding process. Thèse de Master, Ecole Centrale de Nantes. Master Erasmus Mundus. Computational mechanics.
- [Stavrov et Bersee, 2005] Stavrov, D. et Bersee, H. (2005). Resistance welding of thermoplastic composites-an overview. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(1) :39–54.
- [Sukumar et al., 2001] Sukumar, N., Chopp, D., Moes, N., et Belytschko, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47) :6183–6200.
- [Suresh et al., 2007] Suresh, K., Roopa Rani, M., Prakasan, K., et Rudramoorthy, R. (2007). Modeling of temperature distribution in ultrasonic welding of thermoplastics for various joint designs. *Journal of Materials Processing Technology*, 186(1-3) :138–146.
- [Terada et al., 2007] Terada, K., Maruyama, A., et Kurumatani, M. (2007). Eulerian finite cover method for quasi-static equilibrium problems of hyperelastic bodies. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23(12).

- [Tolunay et al., 1983] Tolunay, M. N., Dawson, P. R., et Wang, K. K. (1983). Heating and bonding mechanisms in ultrasonic welding of thermoplastics. *Polymer Engineering and Science*, 23(13) :726–733.
- [Truyen et al., 2004] Truyen, E., Joosen, W., Jørgensen, B., et Verbaeten, P. (2004). A generalization and solution to the common ancestor dilemma problem in delegation-based object systems. In *Dynamic Aspects Workshop (DAW04)*, pages 103–119.
- [Van Paepegem et al., 2001] Van Paepegem, W., Degrieck, J., et De Baets, P. (2001). Finite element approach for modelling fatigue damage in fibre-reinforced composite materials. *Composites Part B : Engineering*, 32(7) :575–588.
- [Wang et al., 2006] Wang, X., Yan, J., Li, R., et Yang, S. (2006). FEM investigation of the temperature field of energy director during ultrasonic welding of peek composites. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 19(5) :593.
- [Wool et O’connor, 1981] Wool, R. et O’connor, K. (1981). A theory crack healing in polymers. *Journal of Applied Physics*, 52(10) :5953–5963.
- [Yang et Pitchumani, 2001] Yang, F. et Pitchumani, R. (2001). A fractal cantor set based description of interlaminar contact evolution during thermoplastic composites processing. *Journal of Materials Science*, 36(19) :4661–4671.
- [Yang et Pitchumani, 2002] Yang, F. et Pitchumani, R. (2002). Healing of thermoplastic polymers at an interface under nonisothermal conditions. *Macromolecules*, 35(8) :3213–3224.
- [Yu et Fish, 2002] Yu, Q. et Fish, J. (2002). Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales : a coupled thermo-viscoelastic example problem. *International Journal of Solids and Structures*, 39(26) :6429–6452.
- [Zhou et al., 2004] Zhou, B., Ji, X., Sheng, Y., Wang, L., et Jiang, Z. (2004). Mechanical and thermal properties of poly-ether ether ketone reinforced with caco3. *European Polymer Journal*, (40) :2357–2363.
- [Zienkiewicz et al., 2009] Zienkiewicz, O., Liu, Y., et Huang, G. (2009). Error estimates and convergence rates for various incompressible elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(9) :2191–2202.
- [Zienkiewicz et Taylor, 1988] Zienkiewicz, O. et Taylor, R. (1988). *The finite element method : Solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity*, volume 2. McGraw-Hill Book Company Europe.

# Index

- adhésion, 144
- adiabatique, 139
- air, 134
- amplitude, 20, 156
- analyse dimensionnelle, 53
- angle, 147
- approche mésoscopique, 22
- approche structure, 22
- architecture, 120
- Arrhénius, 80, 133
- assemblages, 8
  
- banc d'essais, 19
- blocs, 110
- bouffant, 141, 160
  
- C++, 114
- Carreau, 79
- cas test, 66
- CFL, 104
- chaîne de production, 7
- champ, 117
- chauffage, 34
- cicatrisation, 10, 144
- code, 114
- coefficient de pénalisation, 196
- composite, 134
- condition initiale, 47
- conditions limites, 46, 136, 161
- conduction, 112
- congé, 132, 146
- contact, 85, 106, 163
- contact intime, 9
- contrainte, 89
  
- convection, 98, 103, 112
- convergence, 93, 139
- couche superficielle, 26, 132
- couplages, 110
- crystallisation, 12, 38
  
- démonstrateur, 19
- dérivation temporelle, 57
- détérioration, 27
- développements asymptotiques, 57
- degré de cicatrisation, 11
- degré de contact intime, 9
- directeurs, 26
- discontinuité, 105
- discrétisation, 88
- domaine, 44, 130
- dynamique, 178
  
- échelle, 150
- échelle de temps, 52
- écoulement, 79, 141
- efficacité, 69
- effort de maintien, 157
- élasticité, 75
- électromagnétique, 14
- elliptique, 98
- empilement, 25
- énergie, 137
- enrichissement, 106, 117, 163, 199
- épaisseur des plaques, 142
- équilibre mécanique, 45
- espaces vectoriels, 88
- étuve, 25
- eulérien, 85, 160

- évacuation, 136
- évaluateur, 137
- extension, 73
  
- facteur d'échelle, 52
- flux de chaleur équivalent, 137
- fonctions d'interpolation, 88
- forme faible, 87
- formes, 118, 147
- formulations, 120
- fréquence, 20
- froid, 174
  
- génie logiciel, 114
- géométrie, 72
- Galerkin, 88, 98
- Gauss Seidel, 111
- géométrie, 146
- grade, 24
- grandes déformations, 84, 182
  
- Hamilton Jacobi, 103
- haute fréquence, 208
- hauteur, 130
- homogène, 153
- homothétie, 151
- hyperbolique, 98
  
- identification, 58
- implémentation, 114, 185
- inclusion, 103
- incompressibilité, 45, 134
- induction, 16
- inf-sup, 89
- influence, 145
- infrarouges, 14
- initiation, 149
- intégration temporelle, 95
- interface, 102, 199
- interpolation, 115
- isolation, 49, 139
  
- jacobienne, 92
  
- Kelvin Voigt, 73
  
- lagrangien, 84, 160
- largeur, 131
- laser, 15
- LBB, 88
- Lebesgue, 86
- level-sets, 102
- localisation, 137
- loi de comportement, 45
  
- macro-chronologique, 60
- maillage, 131, 139
- marqueurs, 101
- martelage, 18, 157
- matériau, 103, 118, 122
- matériau composite, 6
- Maxwell, 46
- Maxwell généralisée, 176
- mesures, 137, 171
- micro-chronologique, 60
- micro-indentation, 30
- MINI élément, 89
- mixte, 87
- modèles simplifiés, 34
- module de perte, 156
- modules viscoélastiques, 207
- morphologie, 141
- moyenne temporelle, 58
- multiphysique, 86, 110
- multiplicateur de Lagrange, 87, 109
- multiplicative, 183
  
- Newton-Raphson, 92
- nœuds, 131
- non symétrique, 96, 99
  
- operator splitting, 112
- optimisation, 161
- ordres de grandeurs, 33
  
- pénétration, 194
- pénalisation, 194

- 
- paramètre, 145
  - paramètre matériau, 132, 203
  - paramètres adimensionnels, 54
  - pas, 93
  - pas de temps, 104
  - point fixe, 111
  - pointe, 132, 137
  - porosités, 149
  - préimprégné, 24
  - progressif, 149, 153
  - propriété, 132, 203
  
  - quadratique, 156
  
  - résidu, 92
  - résistance, 15
  - raideurs équivalentes, 142, 154
  - ramollissement, 153
  - récapitulatif, 158
  - recherche linéaire, 93
  - rectangle, 149
  - refroidissement, 36
  - rendement, 153
  - reptation, 10
  - résidu, 185
  - ressorts, 142
  - robustesse, 86
  - rouleaux presseurs, 20
  
  - schéma de résolution, 112
  - sensibilité, 92, 185
  - similitude, 151
  - simplifiée, 75
  - simulation type, 130
  - Sobolev, 86
  - sonotrode, 157
  - soudage en deux temps, 14
  - speed up, 71
  - Stefan, 12
  - stratifié, 25
  - SUPG, 98
  - symétrie, 134
  
  - tangente, 92, 185
  - temporel, 95, 121
  - temps de contact, 157
  - terme source, 48
  - thermique, 48, 61, 76
  - thermo-dépendance, 153
  - thermocouple, 171
  - thermodurcissables, 6
  - thermoplastique, 6
  - torches azotes, 14
  - transport, 98
  - transverse, 134
  - tri-dimensionnelle, 161
  - triangulaire, 131
  - tridimensionnel, 28
  
  - ultrasons dynamique, 19
  - ultrasons statique, 17
  
  - variables adimensionnelles, 54
  - variables internes, 118
  - variationnelle, 86
  - vide, 103
  - viscosité, 155
  - vitesse d'avance, 20
  - vitesse d'écrasement, 38, 144
  - VoF, 102
  - volume, 151
  
  - Watts, 138

**Résumé :** Les matériaux composites occupent une place de plus en plus importante dans l'industrie, en particulier aéronautique. Les composites à matrice thermoplastique suscitent aujourd'hui dans ce secteur un très fort engouement par rapport à leurs concurrents thermodurcissables. Le présent travail de thèse se concentre sur le soudage de matériaux composites à matrice thermoplastique. Le procédé de soudage ultrasons consiste à dissiper un travail mécanique au niveau de l'interface. La température augmente alors localement et entraîne un écoulement dans la zone soudée. Le procédé dit "continu", proposé par EADS IW, permet aujourd'hui d'envisager l'assemblage de structures aéronautiques à l'échelle industrielle par la technique ultrason.

Bien évidemment, une bonne compréhension du procédé est un préalable indispensable à une telle application aéronautique. Afin d'étudier la qualité de l'adhésion, la présente étude se situe à l'échelle dite *mésoscopique*, de quelques millimètres. La problématique consiste à modéliser puis simuler numériquement la thermo-mécanique de l'écoulement à l'interface lors du soudage. L'objectif est de mieux comprendre les liens entre les différents paramètres du procédé, les phénomènes physiques dans la zone soudée et la qualité de la soudure.

Après identification des phénomènes physiques prépondérants, la mise en équations de cet écoulement révèle la co-existence de phénomènes rapides (vibration) et lents (écoulement). Une méthode d'homogénéisation temporelle par développements asymptotiques permet alors de modéliser le procédé à l'aide de trois problèmes aux limites couplés. La résolution numérique de ces problèmes nécessite l'utilisation de méthodes particulières permettant de gérer les couplages multiphysiques et les grandes déformations de la géométrie. Finalement, l'outil numérique développé permet une analyse de l'influence des paramètres procédés sur la qualité de l'écoulement et du soudage.

**Mots-clés :** procédé, modélisation thermo-mécanique, homogénéisation temporelle, simulation numérique, multiphysique, éléments finis, level-sets.

**Title :** Modeling and simulation of a vibrating flow.  
Application to the ultrasonic welding of thermoplastic composites.

**Abstract :** Nowadays, composite materials tend to take a prominent position in the mechanical industry, especially aeronautical industry. Thermoplastic matrix composites offer a solution to reduce the long cycle time associated to thermoset matrix. New process are therefore associated to these materials. The present work focuses on the welding of thermoplastic composites. The ultrasonic welding process consists in dissipating a mechanical work at the interface. The temperature rises and induces a flow in the welding zone. The so called "continuous" process, proposed by EADS IW, may allow the assembling of aeronautical structures at an industrial scale using the ultrasonic technique.

Of course, a good understanding of the process is essential before such an aeronautical application. In order to study the quality of the adhesion, the present work stands at the mesoscopic scale of few millimeters. The problematic consists in modeling and simulating numerically the thermo-mechanics of the flow at the interface during the welding process. It aims at better understanding the links between the process parameters, the physical phenomena in the welding zone, and the quality of the joining.

After having identified the dominating physical phenomena, the modeling of this flow reveals the coexistence of fast (vibration) and slow (flow) phenomena. A time homogenization technique using asymptotic expansion allows to model the process with three coupled boundary value problems. The numerical solving of those problems needs specific methods in order to manage multi-physical coupling and large deformation of the geometry. Finally, the numerical tool developed allows to study the influence of different process parameters on the quality of the flow and the welding.

**Keywords :** process, thermo-mechanical modeling, time homogenization, numerical simulation, multiphysics, finite elements, level-sets.