



HAL
open science

Contribution à la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes à événements discrets par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus) : Application aux systèmes de transport

Ahmed Nait-Sidi-Moh

► **To cite this version:**

Ahmed Nait-Sidi-Moh. Contribution à la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes à événements discrets par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus) : Application aux systèmes de transport. Mathématiques [math]. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 2003. Français. NNT: . tel-00467580

HAL Id: tel-00467580

<https://theses.hal.science/tel-00467580>

Submitted on 26 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

préparée à

L'UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE BELFORT-MONTBELIARD

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard
et l'Université de Franche-Comté**

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE

Par

Ahmed NAIT-SIDI-MOH

**Contribution à
la Modélisation, à l'Analyse et à la Commande
des Systèmes de Transport Public
par les Réseaux de Petri et l'Algèbre (Max, Plus).**

soutenue le 17 décembre 2003

Composition du Jury :

Président : **Jean-Louis BOIMOND**, Professeur, Université d'Angers, Angers.
Rapporteurs : **Saïd HAYAT**, Chargé de recherche, HDR, INRETS-ESTAS, Lille.
Dimitri LEFEBVRE, Professeur, Université du Havre, Le Havre.
Directeur de thèse : **Abdellah EL MOUDNI**, Professeur, UTBM, Belfort.
Co-encadrante : **Marie-Ange MANIER**, Maître de conférences, UTBM, Belfort.

Table des matières

| | |
|----------------|---|
| NOTATIONS..... | 4 |
|----------------|---|

| | |
|-----------------------------|---|
| INTRODUCTION GENERALE | 6 |
|-----------------------------|---|

CHAPITRE 1 : Etude des systèmes de transport

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUCTION..... | 9 |
| 2 | PROBLEMATIQUE..... | 10 |
| 3 | GENERALITES SUR LES SYSTEMES DE TRANSPORT PUBLIC | 10 |
| 3.1 | SYSTEME PHYSIQUE | 11 |
| 3.1.1 | <i>Infrastructure</i> | <i>11</i> |
| 3.1.2 | <i>Entités de transport.....</i> | <i>13</i> |
| 3.2 | SYSTEME DE GESTION | 13 |
| 3.2.1 | <i>Planification.....</i> | <i>15</i> |
| 3.2.2 | <i>Exploitation.....</i> | <i>17</i> |
| 4 | DESCRIPTION D’UN SYSTEME DE TRANSPORT PUBLIC VU EN TANT QUE SDED..... | 19 |
| 5 | MODELISATION ET ETUDE DES SYSTEMES DE TRANSPORT PUBLIC..... | 21 |
| 5.1 | INTRODUCTION | 21 |
| 5.2 | MODELISATION DES SYSTEMES DE TRANSPORT PUBLIC..... | 22 |
| 6 | LES RESEAUX DE PETRI ET L’ALGEBRE DES DIOÏDES | 24 |
| 6.1 | INTRODUCTION | 24 |
| 6.2 | RESEAUX DE PETRI | 25 |
| 6.3 | ALGEBRE DES DIOÏDES | 26 |
| 6.3.1 | <i>Dioïdes : définitions et exemples.....</i> | <i>27</i> |
| 6.3.2 | <i>Structure ordonnée dans un dioïde</i> | <i>28</i> |
| 6.3.3 | <i>Théorie de la résiduation dans les dioïdes.....</i> | <i>29</i> |
| 6.3.4 | <i>Résolution d’équations dans les dioïdes.....</i> | <i>31</i> |
| 6.3.5 | <i>Graphe associé à une matrice.....</i> | <i>32</i> |
| 6.3.6 | <i>Propriétés spectrales des matrices dans les dioïdes</i> | <i>34</i> |
| 6.3.7 | <i>Extension au cas des matrices non irréductibles</i> | <i>34</i> |
| 7 | CONCLUSION..... | 35 |

CHAPITRE 2 : Modélisation d'un système de transport public par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus)

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUCTION..... | 37 |
| 2 | DESCRIPTION DU SYSTEME DE TRANSPORT PUBLIC ETUDIE..... | 37 |
| 3 | ÉTUDE DU SYSTEME DANS LE CAS DE SYNCHRONISATION DES BUS..... | 39 |
| 3.1 | MODELISATION PAR UN GRAPHE D'ÉVENEMENTS TEMPORISES | 39 |
| 3.1.1 | <i>Premier modèle réseau de Petri.....</i> | <i>39</i> |
| 3.1.2 | <i>Interprétation du modèle graphique.....</i> | <i>41</i> |
| 3.1.3 | <i>Modèle graphe d'événements temporisés.....</i> | <i>42</i> |
| 3.2 | REPRESENTATION D'ÉTAT DANS L'ALGÈBRE (MAX, PLUS) | 43 |
| 3.3 | RESOLUTION DU MODELE ET EVALUATION DES TEMPS DE CORRESPONDANCE | 45 |
| 3.4 | EXEMPLE D'APPLICATION | 47 |
| 4 | ÉTUDE DU SYSTEME DANS LE CAS DE NON-SYNCHRONISATION DES BUS..... | 48 |
| 4.1 | EXTENSION DU MODELE GET INITIAL | 48 |
| 4.2 | LES GETARDJ : UNE CLASSE DE RESEAUX DE PETRI AVEC CONFLITS | 49 |
| 4.3 | MODELE GET AVEC RETRAIT DYNAMIQUE DE JETONS | 50 |
| 4.4 | MODELE (MAX, PLUS) LINEAIRE NON-STATIONNAIRE..... | 52 |
| 5 | RESOLUTION DU MODELE (MAX, PLUS) LINEAIRE NON-STATIONNAIRE | 58 |
| 5.1 | RESOLUTION DES CONFLITS STRUCTURELS | 58 |
| 5.2 | SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT | 61 |
| 5.3 | EVALUATION DE PERFORMANCES | 62 |
| 5.4 | EXEMPLE D'APPLICATION | 64 |
| 6 | ANALYSE D'UN SYSTEME LINEAIRE NON-STATIONNAIRE | 70 |
| 6.1 | THEORIE SPECTRALE DE LA MATRICE CARACTERISTIQUE..... | 70 |
| 6.1.1 | <i>Valeurs propres.....</i> | <i>70</i> |
| 6.1.2 | <i>Vecteurs propres</i> | <i>71</i> |
| 6.2 | IDENTIFICATION DES VECTEURS PROPRES | 72 |
| 6.3 | EXEMPLE D'APPLICATION | 74 |
| 7 | SIMULATION DES TEMPS MOYENS DE CORRESPONDANCE | 76 |
| 8 | CONCLUSION..... | 80 |

CHAPITRE 3 : Commande d'un système de transport public

| | | |
|----------|-------------------------------------|-----------|
| 1 | INTRODUCTION..... | 83 |
| 2 | PRINCIPE DE LA COMMANDE..... | 84 |
| 2.1 | RESEAU ETUDIE | 84 |
| 2.2 | CALCUL DE LA COMMANDE..... | 84 |

| | | |
|---------------------------------|---|------------|
| 2.3 | STRATEGIE DE COMMANDE ADOPTEE..... | 85 |
| 3 | COMMANDE D'UN SYSTEME SYNCHRONISE..... | 86 |
| 3.1 | MODELISATIONS..... | 86 |
| 3.2 | CALCUL DE LA COMMANDE..... | 89 |
| 3.3 | ALGORITHME DE COMMANDE..... | 90 |
| 4 | COMMANDE D'UN SYSTEME NON-SYNCHRONISE..... | 94 |
| 4.1 | REPRESENTATION GRAPHIQUE : MODELE GETRDJ..... | 94 |
| 4.2 | MODELE (MAX, PLUS) LINEAIRE NON-STATIONNAIRE..... | 94 |
| 4.3 | RESOLUTION DU MODELE MATHEMATIQUE..... | 97 |
| 4.4 | ALGORITHME DE COMMANDE..... | 98 |
| 5 | APPLICATION AU RESEAU URBAIN DE MONTBELIARD..... | 101 |
| 5.1 | STRUCTURE PHYSIQUE DU RESEAU DE TRANSPORT DE MONTBELIARD..... | 101 |
| 5.1.1 | <i>Description du réseau de la CTPM.....</i> | <i>101</i> |
| 5.1.2 | <i>Partie du réseau étudiée.....</i> | <i>102</i> |
| 5.1.3 | <i>Données du réseau.....</i> | <i>103</i> |
| 5.1.4 | <i>Modélisations du réseau.....</i> | <i>104</i> |
| 5.2 | EVALUATION DES PERFORMANCES DU RESEAU..... | 107 |
| 5.3 | AMELIORATION DES PERFORMANCES DU RESEAU..... | 110 |
| 5.4 | SYNTHESE DES RESULTATS..... | 118 |
| 6 | UNE DEUXIEME STRUCTURE DE COMMANDE..... | 119 |
| 6.1 | INTRODUCTION..... | 119 |
| 6.2 | DESCRIPTION DU RESEAU..... | 120 |
| 6.3 | MODELE GRAPHE D'EVENEMENTS TEMPORISES..... | 120 |
| 6.4 | REPRESENTATION D'ETAT..... | 121 |
| 6.5 | EXPRESSION DU VECTEUR DE COMMANDE..... | 122 |
| 6.6 | EVALUATION DES TEMPS DE CORRESPONDANCE..... | 123 |
| 6.7 | MINIMISATION DES TEMPS DE CORRESPONDANCE..... | 124 |
| 6.8 | EXEMPLE D'APPLICATION..... | 125 |
| 6.9 | AMELIORATION DES TEMPS DE CORRESPONDANCE PAR LES VOIES PROPRES AUX VEHICULES..... | 127 |
| 7 | CONCLUSION..... | 128 |
| CONCLUSION GENERALE..... | | 129 |
| ANNEXE A..... | | 132 |
| ANNEXE B..... | | 141 |
| LEXIQUE..... | | 145 |
| BIBLIOGRAPHIE..... | | 146 |

NOTATIONS

| | |
|------------------------------------|---|
| \oplus | addition dans un dioïde (max, plus). |
| \oplus' | addition dans un dioïde (min, plus). |
| \otimes | multiplication dans un dioïde. |
| \otimes | borne inférieure dans un dioïde. |
| \backslash | soustraction à gauche dans un dioïde. |
| $/$ | soustraction à droite dans un dioïde. |
| ε | élément neutre pour la loi \oplus . |
| e | élément neutre pour la loi \otimes . |
| E | matrice identité dans un dioïde D . |
| T | plus grand élément dans un dioïde. |
| A | matrice à coefficients dans un dioïde. |
| A^T | transposée de A . |
| A^* | étoile de Kleene de la matrice A ($A^* = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots$). |
| A^+ | dérivée de l'étoile de Kleene A^* ($A^+ = A \oplus A^2 \oplus \dots$). |
| A_{ij} | élément de la matrice A ($i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne). |
| $A_{\bullet j}$ | $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A . |
| $A_{i \bullet}$ | $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A . |
| D | dioïde. |
| $D^{n \times m}$ | dioïde matriciel. |
| \mathbb{R}_{\max} | algèbre (max, plus) : dioïde (max, plus). |
| \mathbb{R}_{\min} | algèbre (min, plus) : dioïde (min, plus). |
| Id_D | application identité dans un dioïde D . |
| λ | valeur propre. |
| V^λ | vecteur propre associé à la valeur propre λ . |
| $\text{Sp}\{A\}$ | spectre de la matrice A (l'ensemble des valeurs propres). |
| $\text{Card}(J)$ | nombre d'éléments de l'ensemble J . |
| $\mathbf{1}_{\{a \geq b\}}^{\max}$ | fonction indicatrice dans un dioïde. |
| \mathcal{P} | ensemble des places $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. |
| \mathcal{T} | ensemble des transitions $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$. |
| W | fonction poids associée aux arcs $(\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{P})$. |
| M_0 | vecteur marquage initial. |
| $\bullet T$ | ensemble des places en amont de la transition T . |
| $T \bullet$ | ensemble des places en aval de la transition T . |
| $\bullet P$ | ensemble des transitions en amont de la place P . |
| $P \bullet$ | ensemble des transitions en aval de la place P . |
| $G(A)$ | graphe de précédence de la matrice A . |
| τ_i (ou $\tau_{i,j}$) | temporisation associée à une place P_i (ou $P_{i,j}$). |

| | |
|----------|---|
| U | vecteur de commande. |
| u_i | composante du vecteur de commande. |
| X | vecteur d'état. |
| x_i | composante du vecteur d'état. |
| $x_i(k)$ | date de $k^{\text{ème}}$ tir de la transition x_i . |
| Y | vecteur de sortie. |
| ϕ | matrice de transition. |
| H | matrice de transfert. |
| Y_d | sortie désirée d'un système. |

Introduction générale

Elément capital dans le fonctionnement des économies modernes, le transport doit faire face à la demande d'une société toujours plus exigeante de mobilité et une opinion publique qui supporte de moins en moins les retards chroniques et la médiocre qualité des prestations qu'offrent certains services. Face à une demande croissante des transports et de leurs services, les organismes et les collectivités responsables des transports collectifs ainsi que les compagnies de transport ont mis en œuvre des politiques communes de gestion pour préserver ou améliorer la qualité des transports en commun.

Le principal atout des transports en commun réside dans leur capacité à transporter des passagers au sein d'une agglomération dans les meilleures conditions et avec le moindre coût. Le transport public occupe déjà une place importante pour un bon nombre des voyageurs. En effet, il constitue, pour la plupart d'entre eux, le moyen le plus sûr et le plus efficace pour se déplacer.

Plusieurs questions pertinentes se posent au sujet de la gestion des systèmes de transport public (STP). Les exploitants visent essentiellement à répondre à ces questions dans les meilleures conditions tout en optimisant des ressources des systèmes sous des contraintes bien définies. Pour ce faire, plusieurs études ont été menées dans ce domaine. Leur but est de proposer des améliorations qui peuvent assurer l'évolution et la rentabilité des systèmes et contribuer à l'efficacité de différents services proposés aux voyageurs.

Parmi les STP dont l'importance ne cesse d'évoluer, nous considérons les réseaux de bus. Dans ces réseaux plusieurs problématiques peuvent être envisagées. Nous nous intéressons dans ce mémoire aux points suivants :

- l'évaluation des performances des réseaux notamment les dates de passage des bus aux différents arrêts, les temps de parcours des passagers et les temps d'attente des passagers effectuant une ou plusieurs correspondances tout au long de leur trajet.
- l'amélioration de la qualité des services offerts aux usagers. Nous proposons des planifications d'horaire pour les bus permettant, d'une part, de minimiser les temps d'attente excessifs des passagers aux points d'échange du réseau, d'autre part, d'optimiser les ressources matérielles en termes de nombre de véhicules nécessaires pour assurer toutes les correspondances dans des tolérances d'attente prédéfinies.

Ces problématiques s'inscrivent dans le cadre de la gestion des correspondances aux points d'échange de passagers dans les réseaux de bus. Elles concernent les actions de mobilité des voyageurs qui changent de bus une ou plusieurs fois durant leurs déplacements.

Les systèmes de transport public peuvent être vus comme une classe des systèmes dynamiques à événements discrets (SDED). La dynamique de cette classe est gouvernée par l'occurrence d'événements dans un espace d'état discret (par exemple l'arrivée et le départ

d'un bus dans un arrêt). D'une façon similaire à d'autres classes de SDED tels que les systèmes de production et les systèmes informatiques, les STP ont une dynamique régie par différents phénomènes dont la synchronisation, le parallélisme et la concurrence. La diversité de ces phénomènes rend l'étude des STP plus difficile et nécessite l'exploitation de plusieurs théories complémentaires permettant de décrire les systèmes d'une façon concrète.

Les travaux présentés dans cette thèse constituent **“une contribution à la modélisation, à l'analyse et à la commande des réseaux de transport public”**. Cette contribution concerne plus précisément l'adaptation, pour l'étude de ces réseaux, des concepts et des résultats théoriques formalisés graphiquement par les réseaux de Petri (RdP) [Ren et al, 92] et mathématiquement par l'algèbre des dioïdes [Bac et al, 92] [Gaub, 92]. Notre étude se concrétise donc par le développement de modèles capables d'apporter des solutions aux problèmes d'évaluation des performances et d'amélioration de la qualité des services des réseaux de bus. Ces modèles graphiques et mathématiques facilitent l'analyse structurelle et comportementale de ces réseaux de bus, ainsi que leur commande.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous situons le contexte général de cette étude en faisant le point sur notre problématique. Tout d'abord, nous donnons quelques généralités sur les STP en spécifiant les deux composantes qui les constituent, à savoir le système physique et le système de gestion. Ensuite, nous décrivons quelques méthodes de modélisation développées dans le cadre des systèmes de transport public. Par ailleurs, nous faisons le point sur les outils utilisés pour ces modélisations, ainsi que sur un ensemble de travaux effectués dans le cadre de ces études.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la modélisation d'un STP par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus). Deux cas de fonctionnements possibles y sont étudiés :

- le fonctionnement dit synchronisé pour lequel les véhicules s'attendent aux points d'échange de voyageurs ;
- et le fonctionnement non-synchronisé pour lequel les véhicules ne s'attendent pas.

Pour chacun de ces deux fonctionnements, nous utilisons une classe des réseaux de Petri qui répond aux exigences et hypothèses gouvernant le système. Nous construisons les modèles graphiques et les représentations (max, plus) qui décrivent le comportement du système. Nous nous intéressons ensuite, en appliquant la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, à la résolution des modèles d'état obtenus. Ceci nous permet d'évaluer les performances du réseau considéré. Une étude des propriétés spectrales des matrices caractéristiques des modèles (max, plus) linéaires est effectuée.

Le troisième chapitre aborde le problème de la commande des STP. Nous proposons deux structures de commande qui permettent d'améliorer les performances des réseaux de bus. La première de ces structures se base sur la théorie de la résiduation dans les dioïdes. La deuxième utilise des résultats de simulation.

L'objectif de la commande étudiée est double : il s'agit dans un premier temps, de concevoir une planification “horaires” du réseau (ou éventuellement améliorer les horaires déjà existants) tout en minimisant les temps de correspondance des passagers. Et dans un second temps, de minimiser les ressources utilisées.

Nous validons nos structures de commande notamment par application sur un réseau réel constitué d'une partie du réseau de bus de la CTPM (Compagnie de Transport du Pays de Montbéliard).

Chapitre 1

Etude des systèmes de transport

1 Introduction

L'importance des systèmes de transport public (STP) ne cesse de croître. D'une part, ces systèmes doivent répondre à une demande croissante de mobilité d'une population qui se montre de plus en plus exigeante face à des retards chroniques et à une faible qualité des performances de certains des services actuellement proposés. D'autre part, les transports individuels présentent une flexibilité évidente face aux transports collectifs et ont donc pris ces dernières années une part de plus en plus importante. Ceci explique en partie la forte croissance du trafic constatée notamment en milieu urbain. Les problèmes de congestion, de pollution (atmosphérique et sonore) et d'insécurité routière qui en découlent, incitent les pouvoirs publics et les compagnies de transport à multiplier les efforts pour maintenir, voire améliorer la qualité des services offerts aux usagers, afin de rendre les modes de transports collectifs plus attractifs. L'étude et l'analyse de tels systèmes sont ainsi devenues parmi les préoccupations majeures des chercheurs dans le domaine des transports publics, dans le but de remédier aux problèmes identifiés en apportant des améliorations et des changements. Ces derniers portent notamment sur l'infrastructure, la quantité et la qualité des ressources, les horaires. L'étude des systèmes de transport s'effectue en trois importantes phases :

- la première phase est celle de la collecte des informations sur tous les paramètres influant sur l'évolution du système et qui sont nécessaires pour son exploitation. Cette phase, qui permet d'acquérir une bonne connaissance du système, joue un rôle important dans cette étude en termes de modélisation, analyse et commande.
- la deuxième phase est celle de la modélisation. Cette étape mobilise les chercheurs et les experts du domaine pour trouver des modèles simples et efficaces pour les STP. Les résultats obtenus dépendent de la prise en compte des informations de la première phase.
- la phase finale concerne l'analyse du système en exploitant le modèle décrivant son comportement. Cette phase se fait en deux étapes. La première consiste à évaluer les performances du système afin d'identifier ses forces et ses faiblesses. La seconde étape s'intéresse à l'amélioration de ces performances en optimisant, par exemple, les ressources afin de réduire les coûts des compagnies de transport. Cette phase vise à fournir à la clientèle des transports publics un maximum de services : la régularité de passage des entités de transport, le respect des horaires théoriques, la rapidité de déplacement, etc.

Dans ce chapitre, nous définissons la problématique que nous allons aborder dans notre étude. Nous rappelons quelques généralités sur les systèmes de transport considérés, en décrivant les principaux éléments qui les composent. Nous établissons une analogie entre un

système de type à événements discrets (les systèmes de production) et les systèmes de transport en mettant en évidence l'appartenance de ces derniers au réseau de systèmes dynamiques à événements discrets (SDED). La suite de ce chapitre est consacrée aux définitions et aux rappels sur les outils de modélisation que nous allons utiliser tout au long de ce travail sur l'étude des systèmes de transport public.

2 Problématique

La planification des horaires est une tâche primordiale en raison d'une complexité croissante des conditions de travail, de la nécessité accrue d'adapter les ressources aux besoins de l'entreprise et de l'utilisateur en termes de qualité de service. La planification et l'optimisation sous contraintes des horaires sont un facteur clé de la performance des entreprises (compagnies de transport, postes, banques, etc.), que ce soit :

- pour améliorer la qualité du service : gestion de trafic, gestion des files d'attente aux guichets, durée de réponses aux appels téléphoniques, etc. ;
- pour optimiser l'utilisation des véhicules : bus, camion, train, avion, etc..

Dans le domaine des transports publics, que ce soit un réseau de bus, trains ou autres, la planification des horaires joue un rôle important. En effet, après la configuration du réseau routier, on s'intéresse à la conception d'horaires qui doivent obéir à de nombreuses règles. Ils doivent satisfaire, d'une part, les règles des conventions collectives, et d'autre part, les règles ayant pour but l'optimisation de la qualité des services. Les gestionnaires essaient ainsi d'obtenir une planification réalisable sous les contraintes liées à l'infrastructure du système, aux ressources en véhicule et en personnel et à la demande de transport.

La problématique abordée dans ce travail porte sur la planification des horaires d'un système de transport public composé de lignes de bus. Notre objectif est double : d'une part, nous évaluons les performances du système au regard de la qualité des correspondances ; d'autre part, nous concevons les horaires du système (ou améliorons les horaires déjà existants) tout en assurant les correspondances des usagers avec des temps d'attente minimaux aux points d'échange du réseau, en optimisant si possible le nombre de bus à utiliser.

3 Généralités sur les systèmes de transport public

Le principal objectif de l'étude des systèmes de transport public est de trouver des solutions à de nombreuses questions pertinentes qui se posent au sujet de leur fiabilité et de leur efficacité. Parmi ces questions, on trouve : *Comment répondre de façon optimale aux besoins des usagers des transports publics, dans les meilleures conditions tout en procédant à l'optimisation des ressources disponibles vis à vis de divers critères de performance concernant la mobilité et la sécurité ?*. Afin de répondre à ce genre de questions, il est nécessaire tout d'abord de disposer de systèmes fiables et efficaces en termes de services proposés aux utilisateurs. Or, l'accroissement de l'efficacité d'un système de transport nécessite la réalisation et la gestion d'infrastructures et d'équipements affectés au transport public et leur mise à la disposition des usagers. Deux composants principaux sont donc à considérer :

- ◆ *le système physique ;*
- ◆ *le système de gestion.*

Dans ce qui suit nous définissons ces deux composantes d'un système de transport public et donnons leurs caractéristiques.

3.1 Système physique

Le système physique est représenté par deux éléments principaux : l'infrastructure (ou la topologie qui représente la structure du système) et les entités de transport (bus, train, etc.).

3.1.1 Infrastructure

Cette partie du système physique concerne les éléments qui permettent de décrire le réseau routier physique, c'est à dire l'intégralité des voies carrossables ouvertes aux véhicules. Il s'agit des entités arrêts et tronçons (ou éventuellement zones), lignes et itinéraires (figure 1.1). Chacune de ces entités est définie de la façon suivante :

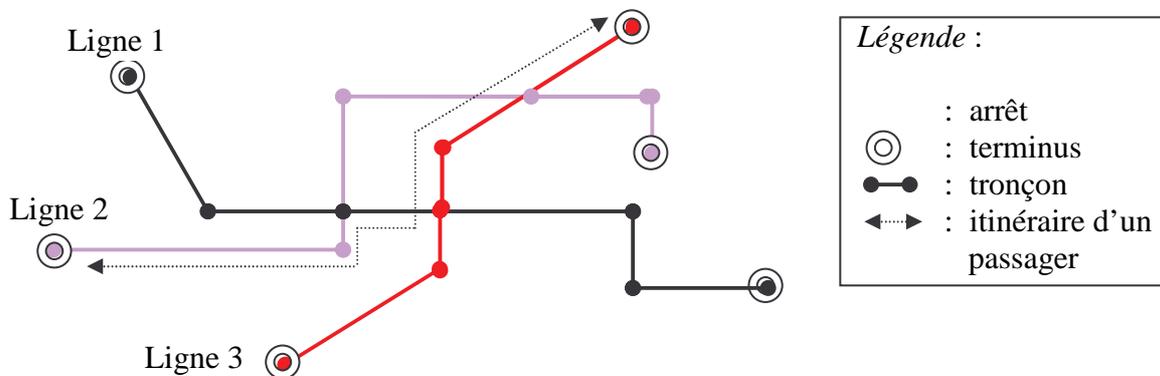


Figure 1.1 : Composition de l'infrastructure d'un STP.

◆ Arrêts et tronçons (ou zones)

Ce sont des éléments de base de la représentation spatiale du réseau. Dans une telle description, les arrêts (ou les stations) représentent les nœuds du réseau, et les tronçons représentent des connexions unidimensionnelles entre les arrêts. Chaque tronçon est limité par deux arrêts (appelés arrêts extrémités ou terminus). Les tronçons sont considérés comme des liaisons orientées (sens unique ou double sens) entre leurs arrêts extrémités. L'ensemble des tronçons dans un réseau peut être décomposé en plusieurs classes : certains tronçons présentent la particularité d'être associés à des couloirs réservés aux transports publics appelés *voies propres* ou *sites propres* [Tran, 00]. Les autres, correspondent à des voies partagées par plusieurs modes de transport (véhicules particuliers, transports collectifs, transport de marchandises). Un tronçon est caractérisé par sa longueur, et la vitesse commerciale de déplacement de l'entité de transport. Ceci permet de déterminer un temps de déplacement entre deux arrêts.

Un arrêt est caractérisé par un espace où les véhicules effectuant une tournée s'arrêtent pendant un certain temps afin de permettre aux passagers de descendre ou de monter dans les véhicules. Les arrêts peuvent être classés en fonction des objectifs opérationnels qui leurs sont assignés. Ainsi, selon [Des, 02], il existe :

- des arrêts simples (ou arrêts de montée) où l'échange de passagers ne s'effectue pas (cas desservis par une seule ligne) ;
- points d'échange des passagers : points de correspondance desservis par au moins deux lignes, et centres d'échanges desservis par un nombre important de lignes ;
- points de retournement (demi-tour) : lieux où un véhicule a la possibilité de faire demi-tour. Ce sont en général les points de départ ou d'arrivée des lignes (terminus).

Grâce à ces arrêts qui ont un rôle fonctionnel important dans le déplacement des passagers dans le transport public, on peut définir la notion de parcours d'une ligne par le déplacement d'un véhicule entre deux terminus opposés. Le temps de parcours est le temps s'écoulant entre le départ d'un véhicule d'un terminus et son arrivée au terminus opposé. Ce temps de parcours inclut :

- les conditions de circulation (temps d'attente aux feux, aux stops, temps d'accélération et décélération des véhicules, etc.) ;
- les temps d'arrêt incluant les temps d'ouverture des portes, ainsi que les temps d'attente hors échange de passagers.

◆ Lignes

Une ligne est un ensemble fini d'arrêts et de tronçons alternés regroupés par l'exploitant du réseau en une entité d'exploitation. Les arrêts extrémités de cette entité sont appelés terminus de la ligne (c'est à dire les arrêts de début et de fin). La structure d'une ligne peut être plus au moins complexe suivant le nombre d'éléments qui la composent, le rôle de ces éléments par rapport au reste du réseau (connexions assurées avec d'autres lignes). La conception d'une nouvelle ligne se fait souvent en concertation avec les instances communales concernées et les différents utilisateurs (écoles, centres commerciaux, hôpitaux, etc.). Elle doit tenir compte de la demande et des contraintes liées à la circulation des véhicules et aux possibilités d'aménagement. Sur chaque ligne, un véhicule réalise un circuit (ou une course) au cours de laquelle il s'arrête aux stations qui constituent cette ligne. Ceci se fait suivant une planification d'horaires imposée par les exploitants du système, et avec une fréquence qui peut être constante (dans le cas où le passage du véhicule est périodique) ou variable sinon.

◆ Itinéraires

Dans un système de transport, nous définissons l'itinéraire d'un usager comme une suite alternée d'arrêts et de tronçons d'une ligne ou de plusieurs lignes (figure 1.1). Un itinéraire peut contenir une partie d'une ligne ou la ligne entièrement. Une ligne peut être un itinéraire d'un usager si ce dernier n'effectue pas de correspondances au cours de son trajet. Chaque itinéraire permet donc d'assurer le transport en commun de passagers d'un arrêt origine à un arrêt destination. Selon [Lai, 02], il existe deux types d'itinéraires : commercial et spécial. Dans un itinéraire commercial, la montée et la descente des clients s'effectuent aux différents arrêts de cet itinéraire. Tandis que dans un itinéraire spécial, la montée et la descente des clients s'effectuent uniquement aux terminus.

3.1.2 Entités de transport

Le deuxième élément composant le système physique des transports publics est représenté par les entités ou ressources de transport : bus, trains, tramway, etc. Dans un système de transport public, un exploitant dispose d'une flotte de véhicules caractérisée par :

- le nombre global de véhicules ;
- le type de véhicule et ses caractéristiques (identiques pour toutes les entités dans le cas d'une flotte homogène, variables pour une flotte hétérogène : minibus, bus articulé, etc.) : capacité, dimensions (longueur), caractéristiques dynamiques (accélération, décélération) et environnementales (mode d'énergie, bruit, etc.).

Dans cet élément nous pouvons également considérer les personnes qui conduisent les véhicules (conducteurs ou chauffeurs). Leur gestion doit prendre en compte des contraintes législatives, tels que les temps de repos physiologiques.

Chaque ligne d'un STP est desservie par des entités de transport, selon son importance (zones desservies, tranche horaire du déplacement considéré au cours d'une journée, fréquence de passage souhaitée, niveau de la demande, etc.), de sorte à renforcer le service sur les lieux où la charge en usagers est importante.

3.2 Système de gestion

Le deuxième composant des STP est le système de gestion. Il pilote le système physique pour qu'il atteigne certains objectifs, en assurant entre autres la conception des horaires et l'information des usagers.

Plusieurs travaux de recherche dans le domaine du transport public portent sur la conception et le développement d'outils d'aide à la gestion qui permettent aux exploitants d'intervenir dans la résolution de différents problèmes. Parmi les questions principales auxquelles ces recherches tentent de répondre, on trouve :

- Quels sont les objectifs "pertinents" que doivent se fixer les exploitants afin de gérer efficacement ces systèmes de transport ?
- Quelles sont les méthodes et les outils à mettre en œuvre par les exploitants pour atteindre leurs objectifs ?

Notons que même si les exploitants sont les principales entités citées ici intervenant dans la gestion d'un STP, il est utile de rappeler que d'autres acteurs sont également concernés, de près ou de loin, par cette gestion. En effet, les systèmes de transport public sont souvent exploités, en tenant compte de l'ensemble des paramètres liés aux différents acteurs. Le but de cette exploitation est d'assurer la coordination des services et leur qualité et de résorber les perturbations survenues sur une partie du système. Trois types d'acteurs collaborent ainsi entre eux ou interagissent au sein d'un même système de transport public :

- les usagers : ce sont les utilisateurs et les bénéficiaires des services offerts par les transports en commun. On peut les répartir en deux classes : usagers captifs et non captifs. Les usagers captifs sont ceux qui ne disposent pas d'alternative de transport. Tandis que les usagers non captifs ont d'autres moyens de transport possibles (véhicule personnel par exemple). C'est cette catégorie de clientèle qu'il est plus difficile de capter et pour laquelle les plus gros efforts d'amélioration sont souvent réalisés ;
- les autorités organisatrices de transport. Cet acteur externe représente divers organismes civils, à différents niveaux de juridiction locale : conseils régional et général, ministère des transports, villes, communautés urbaines, etc. Ces organismes interviennent

notamment dans la définition des stratégies ou des politiques de transport au niveau de l'exploitation des transports publics [Its-actif, 99] ;

- les exploitants ou opérateurs de transport : ce sont souvent des sociétés et des compagnies de transport du secteur privé à qui une collectivité locale confie la responsabilité de l'exploitation des transports collectifs. Ainsi trois groupes majeurs se partagent plus de 70% du marché des transports urbains : Via GTI (30% des réseaux), Transdev (17%) et CGEA-CGFTE (14%) [GART, 98].

La gestion opérationnelle du transport public opère classiquement à deux niveaux temporels différents [Tran, 00] : lors de la phase de planification réalisée en temps anticipé, et lors de la phase d'exploitation à proprement parler, en temps réel. Celles-ci sont schématisées par la figure 1.2 [Lai, 02]. La limite entre ces deux phases est fixée arbitrairement dans la plupart des cas. Elle peut se situer au début d'une journée d'exploitation, deux jours à l'avance, etc. Cette limite est souvent marquée par l'instant où un "plan" est "gelé".

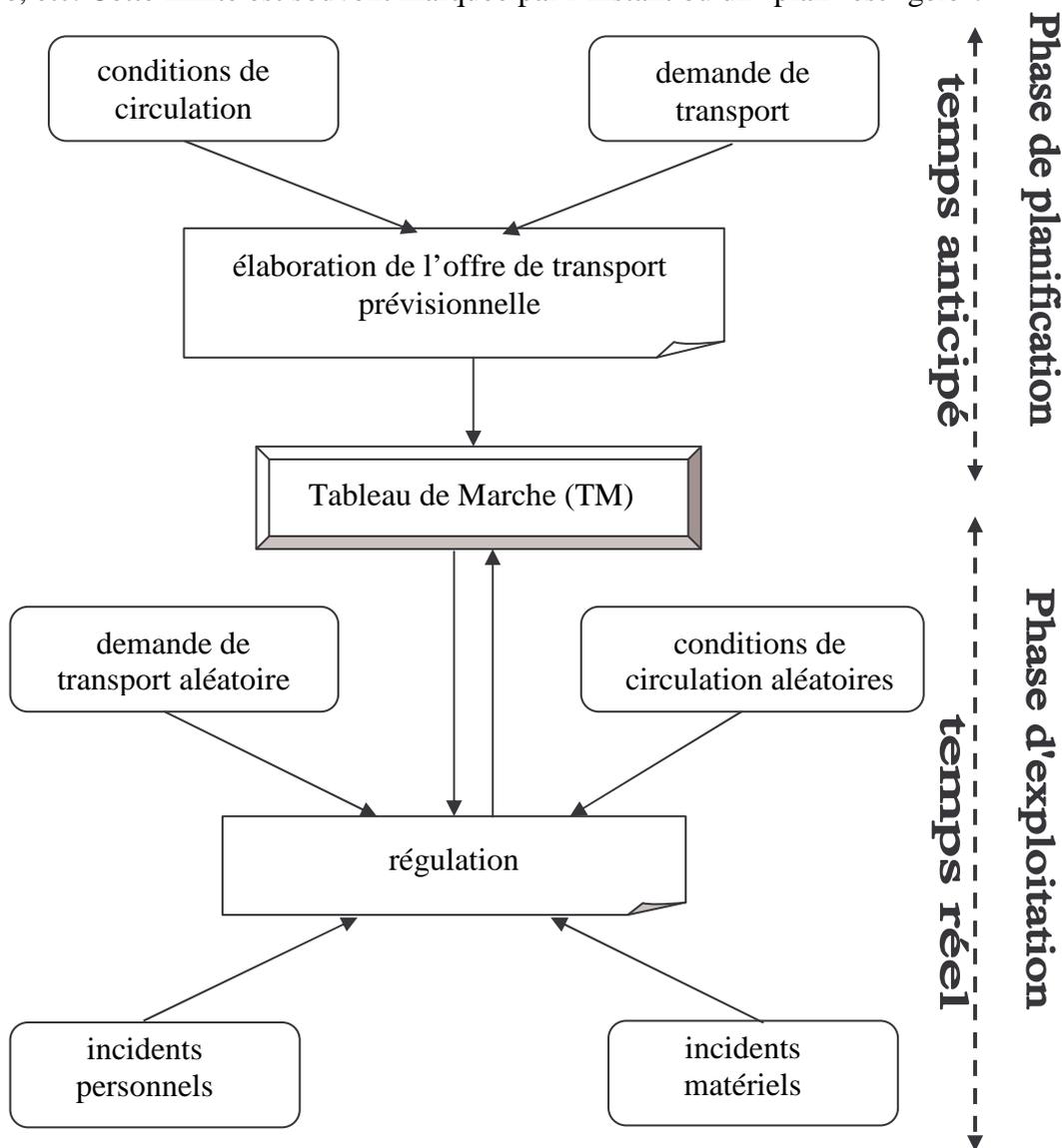


Figure 1.2 : Phases de planification et d'exploitation d'un STP.

3.2.1 Planification

Il s'agit de la conception et la construction d'un horaire de référence. Cette référence est définie pour une période donnée (par exemple "période de pointe", vacances d'été) et pour un type donné de jour d'exploitation (par exemple un jour de la semaine). L'horaire de référence décrit l'offre de transport théorique. Il est optimisé pour répondre aux objectifs de qualité de service en tenant compte d'une part, des facteurs liés à la nature du réseau, des temps de parcours des lignes, des poids des lignes, etc.. D'autre part, de la demande des usagers et des éléments liés à la gestion des moyens nécessaires (véhicules et conducteurs) pour satisfaire cette demande.

Plusieurs études ont été développées dans le but de définir plus précisément ces objectifs de qualité de service [Bus et al, 97], [Fro et al, 89], [Riz et al, 97] et [Tran, 00]. Elles visent à construire un ensemble d'indicateurs de performances pertinents relatifs à la qualité de service rendu aux usagers. Ces indicateurs, retenus pour la satisfaction des clients, se répartissent selon quatre logiques liées à la configuration de la demande de transport [Riz et al, 97] :

- **Régularité** : la régularité est un objectif où on s'intéresse, dans un premier temps à réduire les temps d'attente aux différents arrêts du réseau, et dans un deuxième temps à équilibrer les charges entre les véhicules. En effet, on montre que l'attente en un point donné du réseau et le taux de charge moyen des véhicules sont minimaux lorsque les intervalles en ce point sont égaux (exemple : passage toutes les 5 minutes). En un point donné du réseau (arrêt), un intervalle représente le temps entre les départs ou les passages de deux véhicules successifs circulant dans le même sens. Cet objectif de régularité rentre dans le cadre de l'optimisation du confort des voyageurs à bord des véhicules.
- **Ponctualité** : un système de transport public est souvent muni d'une planification d'horaires programmée et annoncée au public. L'arrivée des voyageurs aux arrêts du réseau s'effectue donc en fonction de ces horaires. La ponctualité est une logique où l'exploitant cherche à respecter les horaires théoriques planifiés. Toutefois en pratique, des phénomènes aléatoires ou récurrents (accidents, congestions, etc.) rendent difficile à atteindre cet objectif.
- **Enlèvement de la charge** : pendant les heures de pointe, la densité des voyageurs à certains arrêts devient plus forte. L'objectif est de prendre en charge tous les voyageurs en concentrant les moyens de transport sur les arrêts les plus importants (en termes de niveau de demande).
- **Correspondance** : cette logique concerne l'assurance des correspondances entre deux lignes d'un réseau ou bien entre une ligne d'un réseau et un autre mode de transport (cas d'une ligne desservant une station de taxis, une gare de chemin de fer, un métro, etc.). Le ou les exploitants visent à assurer la coordination et l'harmonisation des horaires aux points d'échange de passagers. Leur objectif consiste donc à minimiser l'écart entre les arrivées des véhicules aux stations de correspondance. Ceci permet aux passagers en transit d'effectuer leurs correspondances avec un temps d'attente minimal.

Il est évident qu'un exploitant d'un système de transport public ne peut pas atteindre tous ces objectifs d'une façon univoque. Pendant une période de travail (une journée d'exploitation par exemple), ces objectifs interfèrent entre eux selon des priorités qui se

modifient suivant différentes circonstances, à savoir les zones critiques du réseau, les heures de voyage dans la journée, etc. Selon ces priorités, l'exploitant est incité à pratiquer un arbitrage entre les différents objectifs.

Au cours de la phase de planification, le concepteur chargé d'élaborer l'horaire de référence regroupe un ensemble de données, concernant le fonctionnement du système durant une période de travail, dans un document appelé *Tableau de Marche* (TM) qui peut être vu comme un plan ou un programme de production. Les dates de départ et d'arrivée des véhicules aux différents arrêts du réseau sont préétablies et enregistrées dans ce tableau. Selon [Tran, 00], un horaire planifié dans un TM comprend :

- des activités composant strictement la carte de l'offre de transport (les activités des véhicules couvrant des parcours le long desquels les passagers sont autorisés à voyager à bord, les services spéciaux, etc.) ;
- les temps couvrant des parcours haut-le-pied (sans passagers) entre des terminus ou en provenance ou à destination des arrêts de stationnement ;
- les périodes de stationnement ;
- les pauses véhicules ;
- les temps annexes liés à l'exploitation des véhicules (temps de préparation des véhicules).

Pendant une année par exemple, il y a plusieurs TM conçus pour une ligne donnée d'un réseau [Lai, 02]. La construction du TM comprend plusieurs tâches distinctes [Riz et al, 97] : tout d'abord la définition de l'offre de service, c'est-à-dire des courses. Cette définition nécessite au préalable une analyse de la demande de transport, afin de cerner les objectifs poursuivis et leurs priorités tout au long d'une journée d'exploitation : niveau de charge (enlèvement de la charge), départs et passages à assurer impérativement (ponctualité), heures de correspondance à respecter, etc. La principale difficulté rencontrée dans cette phase est la variation de la demande d'une ligne à une autre et d'un moment à un autre. Puis on analyse les conditions de circulation qui permettent notamment de déterminer les temps de parcours à allouer pour les différentes périodes. A partir de ces données, l'exploitant définit les courses à effectuer avec leur mission et leurs horaires. Une course relie un terminus départ à un terminus arrivée en desservant des points d'arrêt. Sur une ligne donnée, il y a donc plusieurs missions (types de courses) possibles selon les points d'arrêt desservis, l'itinéraire emprunté ou les consignes d'exploitation. Les courses sont ensuite découpées en services voiture et services agent, où un service peut englober plusieurs courses : c'est la phase d'affectation des moyens matériels et humains.

Dans la pratique, les tâches associées à la constitution d'un TM sont regroupées dans les fonctions de graphycage et d'habillage [Giro, 79]. Chacune de ces tâches aboutit à l'élaboration d'un graphique où le temps figure en abscisse et la distance en ordonnée. Le graphycage permet de planifier les véhicules sur différentes courses, tandis que l'habillage permet d'affecter les conducteurs sur une ou plusieurs lignes au cours d'une même journée d'exploitation, afin de couvrir les courses planifiées au coût minimum. L'habillage doit respecter la législation sur les temps de travail (temps de conduite maximale sans pause,...).

Parmi les outils informatiques d'aide à la planification existants, nous pouvons citer ALLEGRA, mis en place et utilisé depuis 1985 par la RATP (Régie Autonome des Transports Parisiens). Ce projet vise à renouveler les outils utilisés pour élaborer les horaires des bus et des agents de conduite. ALLEGRA est conçu pour s'adapter aux différents types

d'exploitation des systèmes de transport public et différentes conditions de travail des personnels de conduite. Il contient les modules suivants :

- description des données topologiques et environnementales du réseau ;
- saisie des paramètres d'un tableau de marche ;
- analyse des chronométrages ;
- gestion des conditions de travail ;
- graphycage manuel et automatique ;
- habillage manuel et automatique.

La phase de la planification se déroule en temps anticipé avant l'implémentation en ligne (mise en exploitation). Les horaires conçus à l'avance sont en principe valables pour une longue période. Le succès des concepteurs reste toutefois à prouver en faisant la comparaison entre les données théoriques (TM) et les conditions réelles obtenues lors de l'exploitation.

3.2.2 Exploitation

On s'intéresse ici à l'exploitation du système et aux différentes fonctions opérationnelles liées au transport des usagers. Un des objectifs de base poursuivis lors de cette phase est d'effectuer un suivi des véhicules en vue de réaliser diverses actions : suivi du service, actions correctives de régulation, activation des mécanismes d'information des usagers ou des priorités aux feux de signalisation, etc. En particulier nous détaillerons plus spécifiquement la partie qui consiste à adapter l'horaire de référence décrit dans le tableau de marche aux conditions réelles d'exploitation, dans un plan constamment remis à jour en cours d'exploitation. Cette démarche est connue sous le nom "contrôle en temps réel" [Trans, 00], ou encore "régulation se déroulant en temps réel" [Riz et al, 97].

L'élaboration du TM se fait en temps anticipé et nécessite en particulier la formulation d'hypothèses sur les conditions de circulation (travaux, accidents,...), sur l'état des véhicules et du personnel conducteur (panne, absentéisme), et sur la demande de transport. Or ces facteurs sont des phénomènes complexes, souvent de nature aléatoire. Le TM est donc défini pour des conditions moyennes d'exploitation. Dès que l'on s'écarte de ces conditions moyennes, il devient nécessaire de réguler pour faire face à la dégradation de la qualité de service qui découle de cette dérive. Des agents appelés régulateurs sont ainsi incités à modifier, si nécessaire, les données dont ils disposent (TM de base) en les adaptant aux conditions réelles du trafic. Différentes actions de régulation sont envisageables pour essayer de « revenir à l'horaire de référence » malgré les perturbations : création/suppression de courses, échange de véhicules et/ou de conducteurs, modification d'horaire de course (heure de départ), changement de parcours,... Dans le cas où le retour du réseau à l'état initialement prévu est difficile, les modifications et les améliorations apportées sur le système conduisent à la conception d'un nouveau tableau de marche.

Comme nous venons de l'expliquer, les données issues de l'exploitation (contrôle en temps réel) viennent alimenter en permanence la réflexion sur le programme théorique et sont ainsi susceptibles de se traduire par des modifications du tableau de marche de base valable pour la période considérée (représenté sur la figure 1.2 par une flèche montante du module régulation vers le module TM). Toutefois ces données peuvent également être utilisées en temps différé lors de la prochaine phase de planification, pour la constitution du TM de la période suivante. Elles permettent donc d'assurer un suivi *a posteriori* des opérations réalisées

en temps anticipé (graphicage et habillage). Ce suivi concerne plusieurs fonctionnalités parmi lesquelles on trouve :

- l'utilisation du matériel et du personnel : véhicules (consommation, remplacement en cas de panne), chauffeurs, régulateurs, etc. ;
- le recueil de données sur le trafic voyageur et sur les points de charge importante ;
- le recueil de données sur les temps des parcours réels sur un tronçon, sur un itinéraire ou sur l'ensemble d'une ligne ;
- l'offre de service en termes d'analyse des relevés journaliers d'exploitation et les incidents de l'exploitation.

Les réseaux de transport public sont équipés d'outils automatiques capables de faciliter le contrôle en temps réel. Ces outils sont habituellement appelés Systèmes d'Aide à l'Exploitation (SAE). Leurs fonctions principales sont :

- la localisation de véhicules ;
- le traitement des alarmes ;
- des fonctions d'activation variées (par exemple la priorité aux feux de signalisation) [Sou, 00] ;
- le contrôle des valeurs limites relatives aux objectifs de service, afin d'aider le régulateur dans la détection des perturbations et les conducteurs dans l'adaptation de la conduite ;
- l'élaboration de données pour l'information des usagers et leur diffusion en temps réel (exemple : système AGORA utilisé par la SNCF, service d'infobus concrétisé par des bornes d'information présentés aux principaux arrêts du réseau et mises en place par la Compagnie des Transports du Pays de Montbéliard) ;
- la collecte des données dans un but statistique ;
- ...

Parmi les outils d'exploitation des transports publics (bus, trains, etc.) nous citons le projet ECLER. Ce projet a pour objectifs d'une part de suivre ou d'adapter l'offre de transport en optimisant l'exploitation des ressources en situation normale comme en situation perturbée, d'autre part d'accompagner les actions techniques par des actions commerciales (information, assistance, ...) en prenant en compte les attentes des voyageurs dans l'adaptation en temps réel du plan de transport proprement dit lorsque la circulation est perturbée.

Notons que de nombreuses sociétés de transport informent désormais leur clientèle via l'InterNet. Ce service permet aux utilisateurs de consulter les horaires qui les intéressent. Mais étant donné que l'InterNet et le Web représentent des technologies assez nouvelles, les méthodes utilisées ne sont pas encore standardisées. A titre d'exemple nous citons le réseau des transports en commun lyonnais (TCL) qui a lancé dans les dernières années un site Internet, le plus abouti pour l'instant, pour l'information des voyageurs des transports publics. Parmi les tous premiers en France, le réseau TCL a été présent sur le Web, et riche en information. De plus son site propose un système de recherche d'itinéraire, une véritable information voyageurs interactive. A partir d'un point de départ et d'arrivée de passagers, le système détermine le meilleur itinéraire, les horaires, ainsi que le temps de parcours estimé.

La fiabilité des SAE réside dans le fait qu'ils sont couplés avec des réseaux de communication radiotéléphonique qui facilitent l'échange des informations entre les exploitants et les autres acteurs du système. Ces informations concernent les appels radio vers les véhicules pour assurer une tâche donnée (satisfaire une demande, assurer une permanence,

etc.), la demande de dépannage d'un véhicule en panne, la demande d'acheminement de véhicules d'un point de ligne (le dépôt en général) vers un arrêt de la ligne en prévision du remplacement d'un véhicule ou pour assurer une correspondance.

Nous venons de détailler les deux phases de gestion des systèmes de transport public. Toutefois les travaux que nous avons effectués et que nous décrivons dans ce mémoire concernent exclusivement un problème de planification des horaires et de gestion des correspondances dans un réseau de transport public constitué de lignes de bus. Nos objectifs se concrétisent essentiellement par le développement de méthodes et de modèles qui visent à apporter des solutions aux différents problèmes envisagés au niveau de la gestion des correspondances et qui permettent de décrire le comportement des systèmes de transport public étudiés et d'analyser leurs propriétés structurelles. Pour cela nous avons pris le parti de considérer le système de transport public comme un système dynamique à événements discrets (SDED). Le paragraphe suivant permet de justifier ce choix.

4 Description d'un système de transport public vu en tant que SDED

Les systèmes de transport public sont caractérisés par un espace d'état discret et un changement d'état produit par des événements. Ce sont des systèmes pour lesquels les variables d'état changent seulement à certains instants associés à des événements ponctuels. Les STP sont composés de ressources (entités de transport, infrastructure, etc.) partagées par plusieurs utilisateurs (passagers par exemple) contribuant tous aux mêmes objectifs (transporter des passagers, transmettre des informations, etc.). Le fonctionnement des STP est caractérisé par :

- le parallélisme : de nombreux événements peuvent se dérouler simultanément et indépendamment dans diverses parties du système (par exemple, l'arrivée ou le départ de deux entités de transport d'un arrêt du réseau) ;
- la synchronisation : c'est un phénomène qui nécessite la disponibilité simultanée de plusieurs ressources ou la vérification simultanée de plusieurs conditions afin d'exécuter une tâche. Par exemple, pour qu'un passager puisse se déplacer entre deux arrêts, il faut d'une part la présence du passager, et d'autre part la disponibilité d'un véhicule qui assure son déplacement ;
- la concurrence : elle apparaît au moment où un utilisateur doit choisir une ressource parmi plusieurs. Citons par exemple le cas d'un passager ayant plusieurs choix d'itinéraires pour se rendre à une destination sur un réseau de transport, ou le cas de n utilisateurs ($n > 1$) ayant besoin simultanément d'une même ressource de capacité inférieure à n . Pour ce phénomène, certains événements excluent l'apparition simultanée d'autres événements. Par exemple, à la SNCF, les voies sont divisées en tronçons appelés "cantons". Le "cantonnement" consiste à exclure par un système de feux rouges la présence simultanée de deux trains sur le même canton.

Les STP peuvent ainsi être considérés comme des systèmes à événements discrets, voire comme des systèmes dynamiques à événements discrets (SDED), au même titre que les systèmes de production et les systèmes informatiques, l'aspect dynamique d'un STP étant décrit par l'évolution de son comportement au cours du temps [Gaub, 99] et [Gauj, 94]. D'ailleurs d'une manière générale, les systèmes de transport et ceux de production ont

plusieurs caractéristiques communes. Dans le tableau 1.1, nous décrivons l'analogie entre les éléments qui composent ces deux types de systèmes à événements discrets.

| Composants | Systèmes de production | Systèmes de transport |
|--------------------------|---|--|
| Ressources | <ul style="list-style-type: none"> machines, moyens de transport (palettes, robots, chariots), hommes (exploitants, main-d'œuvre). | <ul style="list-style-type: none"> moyens de transport (bus, train, métro), infrastructure, hommes (exploitants, régulateurs, conducteurs). |
| Tâches | <ul style="list-style-type: none"> usinage d'un produit, assemblage des produits, maintenance des machines. | <ul style="list-style-type: none"> transport de passagers, information de passagers, maintenance des moyens de transport. |
| Evénements | <ul style="list-style-type: none"> début de traitement d'un produit, fin de traitement, arrivée d'un produit au stock amont ou aval d'une machine. | <ul style="list-style-type: none"> départ d'un véhicule d'un arrêt, son arrivée à un arrêt, dépôt de passagers, échange de passagers. |
| Etats | <ul style="list-style-type: none"> disponibilité d'un produit ou d'une machine, machine en panne, traitement d'un produit, attente d'un produit dans un stock. | <ul style="list-style-type: none"> attente d'un véhicule à un arrêt, attente d'un passager, véhicule en panne, en circulation ou en pause. |
| Prise de décision | <ul style="list-style-type: none"> traiter un produit sur une machine, faire varier la capacité d'une machine, faire fonctionner une machine ou non. | <ul style="list-style-type: none"> affecter un véhicule à une ligne, faire varier la fréquence d'une ligne, modifier les données du réseau (TM, infrastructure, ...). |

Tableau 1.1 : Analogie entre un système de production et un système de transport.

Parmi les problématiques qui préoccupent les chercheurs dans le domaine des SDED, notamment les STP, nous citons :

- la spécification des systèmes à événements discrets : description de leurs comportements que ce soit logique ou temporel ;
- la conception de ce type de systèmes : implantation, dimensionnement, etc. ;
- l'étude et l'analyse de leur comportement, et la mise en évidence d'un régime stationnaire/non-stationnaire et périodique/non-périodique de leur fonctionnement ;
- l'évaluation de leurs performances : par exemple, l'évaluation des temps de correspondance pour un système de transport ;
- l'optimisation : optimisation du nombre de processeurs pour réaliser une tâche donnée ;
- la stabilité, la robustesse des systèmes : recherche des solutions pour lesquelles des perturbations ne modifient pas les performances de manière trop importante.

Pour analyser et résoudre ces problématiques de nature et de complexité diverses, de nombreuses techniques et méthodes ont été développées. Elles s'appuient sur divers outils reconnus, tels que les réseaux de Petri, l'algèbre des diodes, les chaînes de Markov, les files d'attente, les langages et les automates, etc.

Compte tenu de l'analogie identifiée entre les différents éléments d'un système de production et un système de transport, et en raison de l'appartenance de ces deux types de systèmes à la classe de systèmes dynamiques à événements discrets, nous cherchons à adapter les formalismes de modélisation, les techniques et les méthodes développées dans le domaine des systèmes de production, pour l'étude des systèmes de transport. Dans un premier temps, il faut réaliser une représentation abstraite du système sous forme d'un modèle. Cette représentation est certes réductrice de la réalité, mais elle doit être suffisamment complète pour rendre compte au mieux des différents aspects de ce système.

5 Modélisation et étude des systèmes de transport public

5.1 Introduction

La modélisation d'un système (que ce soit un système de production, un système de transport ou autres) est une transition primordiale entre la réalité et un objet graphique ou mathématique qui le représente. L'idée de la modélisation est de représenter de manière simplifiée le monde réel afin que l'homme puisse l'étudier et l'analyser. Le but de cette phase importante, dans l'étude des systèmes, est non seulement de comprendre le système et de prévoir son comportement mais aussi de pouvoir agir sur celui-ci (commande). Néanmoins l'assimilation du STP étudié à un SDED ne simplifie pas pour autant la phase de modélisation préliminaire à toute résolution de problème. En effet, cette modélisation peut être abordée de différentes façons. Par exemple, notre premier objectif est de minimiser les temps d'attente des passagers en transit aux différentes stations de correspondance sélectionnées, donc d'harmoniser au mieux les horaires de passage des bus des différentes lignes assurant ces correspondances. Ainsi un modèle peut prendre le parti de représenter les passagers se déplaçant sur le réseau, ou bien uniquement les bus en circulation, ou encore ces deux entités simultanément. Chaque choix possible présente des avantages et des inconvénients qu'il n'est pas évident d'évaluer *a priori*. Nous verrons au chapitre 2 que nous avons choisi la troisième option présentée ici.

Comme dans le cas des systèmes de production ou les systèmes informatiques, la modélisation des systèmes de transport est ainsi une étape difficile. Cette difficulté est accrue par la complexité du système étudié due par exemple à la diversité des paramètres à prendre en compte lors de la modélisation, aux conditions variables de la circulation et à l'aspect aléatoire de la demande de transport. Plusieurs recherches ont été menées dans ce cadre [Bar, 91], [Bus et al, 97], [Ols et al, 98], [Vri et al, 98]. Elles utilisent différents outils et méthodes de modélisation et d'analyse dont la fiabilité et l'efficacité varient suivant la nature de la problématique étudiée. Les modèles obtenus se présentent sous une forme graphique (modélisation par un outil graphique) et/ou analytique (modélisation par des équations mathématiques). Parmi les outils utilisés pour l'étude des systèmes de transport public, nous citons :

- l'intelligence artificielle, en particulier la théorie des systèmes flous [Sou, 00] et [Hay et al, 97] ;
- les systèmes multi-agents [Böc et al, 01] et [Bal, 00] ;
- les réseaux de Petri, notamment les graphes d'événements temporisés, les RdP hybrides et les RdP stochastiques [Ols et al, 98], [Feb et al, 98] et [Wan et al, 99] ;
- l'algèbre des dioïdes [Bar, 91], [Rob et al, 98] et [Sch, 96] ;

- le processus de Markov [Wan et al, 91].

5.2 Modélisation des systèmes de transport public

Dans ce qui suit nous rappelons brièvement quelques travaux qui ont été développés au sujet de la modélisation et l'analyse des systèmes de transport public.

Les travaux de recherche présentés dans [Sou, 00] et [Hay et al, 97] ont pour objectif la modélisation de la régulation du trafic d'un réseau de transport urbain collectif en utilisant quelques méthodes de l'intelligence artificielle notamment la théorie des ensembles flous. Les travaux présentés dans [Sou, 00] concernent la modélisation de l'information incertaine dans un système de transport urbain, ainsi que l'élaboration d'un modèle d'aide à la décision. Ce modèle propose des stratégies de régulation sous forme de classes de décisions aux régulateurs qui restent les maîtres de la situation. L'étude présentée dans [Hay et al, 97] traite l'utilisation de la théorie des sous-ensembles flous pour la régulation des lignes de métros VAL à Lille et MAGGALY à Lyon.

Un autre outil de modélisation et d'analyse utilisé pour l'exploitation des systèmes de transport public est les systèmes Multi-agents (SMA). L'étude réalisée dans [Böc et al, 01] a porté sur la conception d'une planification des horaires d'un réseau de trains par les techniques des SMA. Ces horaires concernent essentiellement :

- les dates de départ et d'arrivée des trains aux différentes stations du réseau ;
- les dates de début et fin de chargement et déchargement des passagers ;
- les temps d'accouplement ;
- les temps d'attente des passagers.

Les réseaux de Petri Hybride (RdPH) constituent une classe des réseaux de Petri dont l'utilité réside essentiellement dans la modélisation d'évolution des systèmes très variés. Ils sont largement admis en modélisation et en évaluation de performances. Plusieurs travaux de recherche apportent une contribution à l'étude des systèmes de transport par les RdPH. Par exemple, l'étude présentée dans [Feb et al, 98] a pour objectifs la modélisation et l'analyse des performances d'un système de transport public, à savoir :

- modéliser d'une façon convenable toutes les variations apportées à l'écoulement d'un trafic ;
- agir d'une façon ou d'une autre sur le système afin de récupérer des situations dégradées et reconstruire le fonctionnement du système nominal aussitôt que possible.

La partie continue du modèle RdPH représente le fonctionnement du système de transport lorsque aucun changement de comportement du trafic ne se produit. La partie discrète sert à la modélisation et à la gestion de tous les changements apportés au comportement du trafic ou encore toutes les perturbations qui peuvent se produire au cours du temps.

Une autre classe des RdP utilisée pour l'étude des systèmes de transport public est celle des réseaux de Petri stochastiques (RdPS). Cet outil est souvent utilisé pour la modélisation, l'évaluation de performances et la simulation des problèmes liés à la sûreté de fonctionnement. Quelques études ont porté sur la modélisation et l'évaluation de performances des systèmes de transport par cette classe de RdP. Nous citons par exemple les

recherches effectuées par [Wan et al, 99] dont le but est de contrôler les feux de signalisation de toutes les rues d'un secteur de trafic donné.

Les graphes d'événements temporisés (GET) représentent également une classe intéressante des réseaux de Petri pour la modélisation de certains systèmes de transport public. L'utilisation de cet outil pour la modélisation et l'analyse de ces systèmes remonte aux années 60 et s'est maintenant généralisée. Dans le contexte de l'utilisation de cet outil pour la modélisation de STP, des études ont été faites dans [Ols, 98] et [Ols et al, 98]. Il s'agit de l'étude et l'analyse d'un réseau de transport fermé composé de plusieurs lignes de trains (réseau Hollandais). Afin d'étudier ce réseau à partir d'une représentation d'état, il est modélisé dans un premier temps par un graphe d'événements temporisés. Cette étape de modélisation constitue un état intermédiaire avantageux entre le système physique et le modèle mathématique. L'analyse du comportement du modèle GET obtenu permet d'étudier quelques propriétés structurelles du réseau telles que la commandabilité et l'observabilité, comme cela a été fait pour les systèmes de production [Spa, 98].

La dernière approche que nous évoquerons ici est celle de l'algèbre (max, plus) dédiée à la détermination et à l'analyse des propriétés de certains systèmes dont le comportement peut être représenté sous forme de modèles mathématiques (max, plus) linéaires.

L'étude réalisée par J.G. Barker dans [Bar, 91] traite de la modélisation et de l'analyse d'un réseau de train liant trois villes. La ligne locale de chaque ville est liée au réseau global, cette liaison permet aux passagers de changer de trains. L'objectif de cette étude est d'évaluer la propagation des retards des trains du réseau sachant que :

- la planification des horaires des trains est périodique ;
- toutes les correspondances doivent être assurées (les trains doivent s'attendre pour effectuer les correspondances) ;
- un train ne peut pas quitter une station du réseau avant la date prévue dans le tableau de marche.

Dans la première phase de cette modélisation l'outil GET est utilisé pour décrire le comportement graphique du réseau étudié. Dans la deuxième phase de modélisation, le comportement du modèle graphique est représenté à l'aide de l'algèbre (max, plus), sous forme d'un modèle mathématique (max, plus) linéaire. Les retards des trains aux différents arrêts du réseau sont évalués en analysant les équations du modèle obtenu. Cette évaluation est faite à l'aide d'un algorithme itératif dans la structure algébrique (max, plus).

Toujours dans le cadre de l'étude du réseau de trains hollandais par Olsder, un modèle mathématique (max, plus) linéaire est déduit à partir du modèle GET décrivant le comportement graphique du réseau [Ols, 98]. L'analyse des équations de ce modèle a permis d'évaluer les dates de passage des trains aux arrêts du réseau. L'analyse des résultats obtenus a montré qu'il n'est pas possible de concevoir une meilleure planification d'horaires du réseau avec les mêmes données initiales. Il a été montré que l'étude des propriétés spectrales de la matrice caractéristique du modèle (max, plus) permet d'améliorer la planification du réseau en incrémentant le nombre de trains sur la ligne identifiée comme étant critique (ligne sur laquelle il faut augmenter le nombre de trains pour assurer certaines correspondances, ou stabiliser les perturbations survenues sur le réseau). Dans le but d'attribuer les trains aux lignes du réseau d'une façon optimale, une stratégie est proposée aux régulateurs du réseau. Il s'agit de chercher, dans le réseau, la ligne de plus petite fréquence (ligne critique) et la ligne

de plus grande fréquence. Alors au lieu d'ajouter un nouveau train (introduire un train externe) à la ligne critique, on en retire un de la ligne de plus grande fréquence et on l'ajoute à la ligne critique. On répète le même processus jusqu'à ce qu'on rééquilibre le réseau et ainsi on optimise l'utilisation de trains sur le réseau.

Dans [Vri et al, 98], la modélisation d'un réseau de train par l'approche (max, plus) a été proposée. Cette étude a un objectif double : il s'agit dans un premier temps d'évaluer les performances du réseau (temps d'attente des passagers aux stations de correspondance, dates de passage des trains aux stations du réseau et temps d'attente des trains pour effectuer les correspondances); et dans un deuxième temps, de définir une fonction objectif proportionnelle au retard des trains qui s'attendent pour effectuer les échanges de passagers. Une procédure de minimisation de cette fonction objectif est proposée. Dans cette procédure la notion de poids sur les stations est introduite afin de prendre en considération les stations utilisées par des flots importants de passagers.

Le paragraphe suivant est consacré aux deux derniers formalismes de modélisation que nous venons d'évoquer et que nous allons utiliser dans cette thèse. En effet, notre objectif est d'adapter les outils réseaux de Petri et algèbre des dioïdes, ainsi que les techniques associées développées pour l'étude des systèmes de production, à la modélisation et l'étude des systèmes de transport public. Nous allons nous servir, pour cette adaptation, de l'analogie qui existe entre ces deux types de systèmes. Il a été montré que l'algèbre (max, plus) est un outil bien adapté à l'étude et à l'analyse des systèmes de production grâce à la possibilité qu'elle offre pour la description mathématique de tels systèmes afin d'évaluer leurs performances, et dans une certaine mesure, de les optimiser. Dans le même contexte et de la même manière, nous essayons d'adapter cette approche mathématique pour l'étude analytique des systèmes de transport en traduisant le comportement des modèles graphiques qui les représentent en modèles d'équations (max, plus) linéaires. Nous présentons donc tout d'abord ces deux outils et en introduisons les principaux éléments.

6 Les réseaux de Petri et l'algèbre des dioïdes

6.1 Introduction

L'étude d'un système (notamment l'évaluation de ses performances) peut se faire en plusieurs phases qui se distinguent selon l'outil de modélisation utilisé et la nature du modèle obtenu. D'une façon générale, deux phases d'évaluation de performances sont envisageables : la première s'applique dans le cas de la représentation du système sous forme d'un modèle graphique. Elle permet d'une part, d'étudier le comportement structurel du système, et d'autre part de dégager les propriétés qualitatives du système. La deuxième phase se consacre à l'évaluation analytique qui se fait à partir des modèles mathématiques retenus. Cette méthode permet d'effectuer une analyse algébrique et une validation des modèles. Notons que l'analyse et l'évaluation de performances d'un système correspondent à l'analyse et l'évaluation des caractéristiques suivantes :

- les composants du système : infrastructure, entités de transport, acteurs, etc. ;
- le contexte d'exploitation de ces composants : régulation, maintenance, sûreté du fonctionnement, etc. ;
- l'économie du système : coût d'une tâche, etc.

6.2 Réseaux de Petri

Les réseaux de Petri (RdP) permettent de construire des modèles graphiques de systèmes logiques. Ils constituent un outil riche en termes de propriétés et de résultats analytiques [Pro et al, 95] et [Ren et al, 92]. Par rapport à d'autres modèles, leur principal avantage est de proposer une modélisation graphique simple, et qui permet de plus, l'utilisation d'une algèbre mathématique (algèbre linéaire usuelle ou algèbre des dioïdes) pour l'analyse du système étudié. On constate alors qu'ils forment un outil puissant qui permet d'utiliser des techniques algébriques qui dépendent peu du modèle sous-jacent avec des considérations plus structurelles pour établir certains résultats.

Les réseaux de Petri constituent un formalisme bien adapté à la modélisation de systèmes discrets qui permet d'inclure de façon naturelle leurs modes de fonctionnement. Plusieurs classes de réseaux de Petri ont été utilisées pour la description du comportement des systèmes de transport. Nous rappelons ici la description de ce formalisme graphique et ses quelques définitions ainsi que son principe de fonctionnement. Pour plus de détails à propos de cet outil voir [Ren et al, 92], [Gauj, 94] et [Pro et al, 95].

Définition 1.1 Un réseau de Petri est un graphe biparti fait de deux types de sommets : *places* (représentées par des cercles) et *transitions* (représentées par des barres). Des *arcs* orientés relient certaines places à certaines transitions, ou certaines transitions à certaines places (voir figure 1.3). A chaque arc on associe un *poids* (entier positif). On associe 1 par défaut aux arcs sur lesquels il ne figure aucun poids. Dans un RdP, le nombre de places (resp. de transitions) est fini, et non nul. Chaque place, peut contenir un ou plusieurs *jetons* (représentés par des points) qui modélisent la dynamique du système.

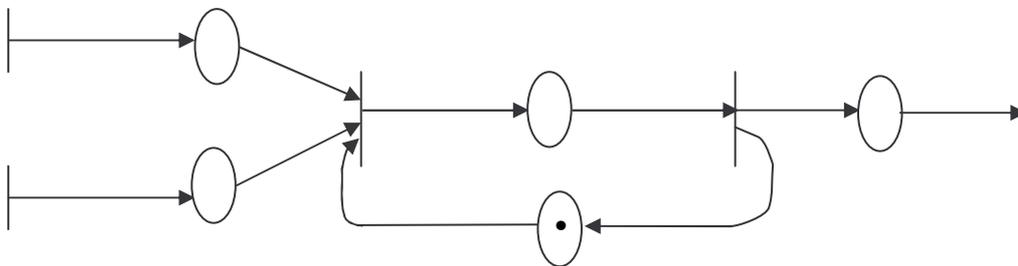


Figure 1.3 : Exemple de réseau de Petri.

D'une façon plus formelle, un RdP est un 5-uple $PN = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, W, M_0)$ où :

$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini, non vide de places ;

$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini, non vide de transitions ;

$\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{P})$ est l'ensemble fini des arcs ;

$W : \mathcal{A} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ est la fonction poids associée aux arcs ;

$M_0 : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ est le marquage initial (nombre total de jetons qui se trouvent initialement dans les places du RdP).

Définition 1.2 Un graphe d'événements (GE) est une classe des RdP pour laquelle :

- (i) chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie ;
- (ii) tous les arcs orientés place-transition ou transition-place sont pondérés à 1.

Dans le cas où on associe aux places (resp. aux transitions du modèle) des entiers, appelés par la suite *temporisations*, le graphe d'événements sera appelé graphe d'événements P-temporisés (resp. T-temporisés). Dans notre étude, nous allons nous intéresser à la classe graphe d'événements P-temporisés que nous appelons tout simplement graphes d'événements temporisés (GET).

Dans la suite, nous considérons les notations suivantes:

- T : l'ensemble des places amont de la transition T , ou encore l'ensemble des places P telles que $(P,T) \in A$;
- T^* : l'ensemble des places aval de la transition T , ou encore l'ensemble des places P telles que $(T,P) \in A$;
- P : l'ensemble des transitions d'entrée de la place P , ou encore l'ensemble des transitions T telles que $(T,P) \in A$;
- P^* : l'ensemble des transitions de sortie de la place P , ou encore l'ensemble des transitions T telles que $(P,T) \in A$.

Définition 1.3 Une transition T dans un RdP est dite franchissable si quelque soit $P \in \bullet T$, $M(P) \geq W(P,T)$, c-à-d, si toute place d'entrée P de T contient un nombre de jetons au moins égal au poids associé à l'arc qui relie P à T .

Dans un GE, pour qu'une transition soit franchissable il suffit que toutes ses places d'entrée contiennent au moins chacune un jeton.

La représentation graphique d'un système apporte un aspect visuel qui peut faciliter la compréhension du système et de son fonctionnement. L'analyse de certaines propriétés des outils de modélisation notamment les réseaux de Petri, participe à l'évaluation graphique du système modélisé. Parmi ces propriétés, il y a :

- Les propriétés structurelles qui dépendent uniquement de la structure du modèle, et non des intervenants dans la gestion de cette structure. Dans le cas des réseaux de Petri, nous citons parmi ces propriétés :
 - la vivacité ;
 - le blocage ;
 - la bornitude.
- Les propriétés comportementales qui dépendent à la fois de la structure du réseau et de ses états dont :
 - la commandabilité ;
 - l'observabilité ;
 - l'atteignabilité ;
 - la réversibilité.

6.3 Algèbre des diodes

Plusieurs systèmes complexes, dont les systèmes de transport public, peuvent être définis comme des systèmes dont la dynamique est exclusivement gouvernée par un modèle

d'équations mathématiques dans une structure algébrique. L'évaluation de performances de ces systèmes se fait à partir des solutions du modèle. Certaines caractéristiques du modèle mathématique peuvent influencer (simplifier ou compliquer) son analyse, et par suite l'évaluation analytique du système en question. Parmi ces caractéristiques nous citons : la non-stationnarité, la non-linéarité, la non-périodicité, etc. Donc pour faciliter l'analyse et l'étude d'un modèle complexe (non-linéaire par exemple), on essaye souvent de simplifier ses équations en les approximant par d'autres équations ou en les exprimant à l'aide d'une structure algébrique adéquate. Parmi les structures algébriques qui répondent à ces exigences, nous citons l'algèbre des dioïdes. Son efficacité réside essentiellement dans la simplicité d'étude et d'analyse qu'elle offre lors de la manipulation d'un modèle.

Avoir un modèle théorique linéaire dans une structure algébrique non usuelle (algèbre des dioïdes par exemple) contre un modèle non forcément linéaire dans l'algèbre usuelle est certainement un atout, encore faut-il que cela s'accompagne d'une puissance de modélisation raisonnable. Les modèles (max, plus) ou (min, plus) linéaires réalisent ce compromis pour certains systèmes complexes. Il a été justifié à plusieurs reprises que la théorie des dioïdes est une théorie riche en propriétés pour l'étude et l'analyse des SDED ainsi que l'évaluation de leurs performances. Notre but ici est d'utiliser cette théorie ainsi que ses techniques de calcul et d'analyse pour représenter et étudier le comportement d'un système de transport public par une représentation d'état dans l'algèbre des dioïdes.

Comme nous l'avons déjà exposé, nous allons nous intéresser à la planification d'horaires des réseaux de transport public, donc aux "dates" de passage des véhicules aux différents arrêts d'un réseau. Nous allons donc choisir dans la structure algébrique, sur laquelle nous allons travailler, les représentations d'état de type (max, plus) linéaires où les équations manipulent les dates d'occurrence des événements (départ ou arrivée d'un bus à une station). Dans le cas contraire, si nous nous intéressions au comptage des événements (par exemple : nombre de passage d'un véhicule à un arrêt), nous manipulerions les modèles (min, plus). La recherche des solutions de ces modèles revient à déterminer, à un instant donné, combien de fois un événement est exécuté. Dans ce qui suit, nous allons nous servir uniquement des équations (max, plus) linéaires dans l'algèbre des dioïdes.

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons un ensemble de définitions et de résultats relatifs à la théorie des dioïdes. Nous décrivons la représentation d'état des modèles graphiques sous forme d'équations (max, plus) linéaires dans un dioïde. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes : [Bac et al, 92], [Gaub, 99] et [Sch, 96].

6.3.1 Dioïdes : définitions et exemples

Définition 1.4. On appelle un dioïde un ensemble D muni de deux lois internes, une première loi notée additivement " \oplus " et une deuxième notée multiplicativement " \otimes ", telles que, pour tout a, b et c dans D on a :

- la loi \oplus est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- la loi \oplus est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;
- la loi \oplus est idempotente : $a \oplus a = a$;
- la loi \oplus admet un élément neutre noté " ε " et appelé *zéro* : $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$;
- la loi \otimes est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
- la loi \otimes admet un élément neutre noté " e " et appelé *identité* : $a \otimes e = e \otimes a = a$;

- la loi \otimes est distributive par rapport à la loi \oplus : $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$, idem pour la multiplication à droite ;
- l'élément "ε" est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;
- pour tout élément $a \in D$, et $n \in \mathbb{N}$ nous avons : $a^{\otimes n} = a \otimes a \otimes \dots \otimes a$, (n fois).

Si aucun risque d'ambiguïté n'existe pas, le signe multiplicatif \otimes sera parfois omis comme dans l'algèbre classique, et nous écrivons ab (ou $a.b$) au lieu de $a \otimes b$. De même, nous pouvons écrire a^n au lieu de $a^{\otimes n}$.

Nous citons, par la suite, quelques exemples de dioïdes :

- L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni de deux opérations "max" (notée \oplus) et l'addition usuelle "+" (notée \otimes) est un dioïde commutatif. Les éléments neutre pour les lois \oplus et \otimes sont respectivement : $-\infty = \varepsilon$ et $0 = e$ ($1 \oplus \varepsilon = 1$, $2 \otimes e = 2$). Ce dioïde noté \mathbb{R}_{\max} est appelé traditionnellement "algèbre (max, plus)".
- L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de "min" (notée \oplus) et de l'addition usuelle est un dioïde isomorphe au dioïde \mathbb{R}_{\max} , ($1 \oplus 2 = 1$, $e \oplus +\infty = e$). Il est noté \mathbb{R}_{\min} et appelé "algèbre (min, plus)", l'élément $+\infty$ est noté T (Top).
- L'ensemble des parties de \mathbb{R}^n (y compris \emptyset et \mathbb{R}^n lui même) muni de l'union ($\oplus = \cup$) et de la somme vectorielle ($\otimes = +$) a une structure de dioïde. Cette somme est définie par : $A + B = \cup_{x \in A} \{x + B\}$ où $x + B$ est le translaté de B par le vecteur x.
- Un dioïde matriciel ($D^{n \times n}$, \oplus , \otimes) est l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients dans le dioïde scalaire D. La somme et le produit de deux matrices ou d'une matrice avec un scalaire sont définies par :

pour $A, B \in D^{n \times n}$ et pour $a \in D$:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} ;$$

$$(A.B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik}.B_{kj} ;$$

$$a.(A_{ij}) = (a.A_{ij}).$$

Les éléments neutres pour les deux lois \oplus et \otimes dans un dioïde matriciel $D^{n \times n}$ sont respectivement : la matrice nulle composée exclusivement de ε et notée aussi ε, et la matrice identité notée E et composée de e sur la diagonale, de ε partout ailleurs. D'une façon générale, la somme et le produit des matrices (non forcément carrées) dans un dioïde matriciel sont bien définis à condition qu'ils soient compatibles, à savoir :

$$\forall A \in D^{n \times m}, B \in D^{n \times m} ; \quad (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} ;$$

$$\forall A \in D^{n \times m}, B \in D^{m \times p} ; \quad (A.B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^m A_{ik}.B_{kj}.$$

Il est évident que cette structure obéit bien aux axiomes des dioïdes. En revanche, on observe que le dioïde matriciel associé à un dioïde scalaire commutatif n'est pas en général commutatif.

6.3.2 Structure ordonnée dans un dioïde

La nature de la loi additive \oplus permet de définir une relation d'ordre naturel dans un dioïde ; nous la définissons ci-dessous.

Définition 1.5 Dans un dioïde (D, \oplus, \otimes) , une relation d'ordre naturel notée " \leq " est définie par : $a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$.

Pour le dioïde \mathbb{R}_{\max} , cette relation correspond à la relation d'ordre dans l'algèbre usuelle ($1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \oplus 2 = 2$). Dans le dioïde \mathbb{R}_{\min} , l'ordre " \leq " défini par : $2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \oplus 2 = 1$ est le dual de l'ordre naturel défini dans \mathbb{R}_{\max} .

A partir de la compatibilité de cette relation avec la structure des dioïdes et avec les deux lois \oplus et \otimes nous pouvons déduire la proposition suivante :

Proposition 1.1 Soit un dioïde commutatif (D, \oplus, \otimes) . La relation d'ordre \leq vérifie les implications suivantes :

$$\forall a, b \in D, \quad a \leq b \Rightarrow \forall c \in D, a \oplus c \leq b \oplus c ;$$

$$a \leq b \Rightarrow \forall c \in D, a.c \leq b.c.$$

Comme dans l'algèbre usuelle, plusieurs notions sont définies dans la théorie des dioïdes. Nous pouvons parler, par exemple, d'un dioïde complet, d'une borne inférieure et d'une borne supérieure d'un dioïde, des treillis, applications, etc.

Définition 1.6 Un dioïde (D, \oplus, \otimes) est dit *complet* si toute somme infinie d'éléments de D est définie, et si la loi \otimes est distributive (à gauche et à droite) par rapport à la loi \oplus et cette distributivité s'étend aux sommes infinies. C'est-à-dire pour tout $a \in D$ et pour tout $S \subset D$, nous avons :

$$(i) \quad \bigoplus_{x \in S} x \in D ;$$

$$(ii) \quad \left(\bigoplus_{x \in S} x \right).a = \bigoplus_{x \in S} (x.a) \text{ et } a.\left(\bigoplus_{x \in S} x \right) = \bigoplus_{x \in S} (a.x).$$

En rajoutant l'élément $+\infty$ aux ensemble \mathbb{R}_{\max} , \mathbb{Z}_{\max} , \mathbb{N}_{\max} on obtient des dioïdes complets.

Définition 1.7

- Pour toute paire d'éléments a et b dans un dioïde (D, \oplus, \otimes) , il est possible de définir la borne inférieure, notée \mathbb{R} , par : $a \mathbb{R} b = \bigoplus_{\{x / x \leq a, x \leq b\}} x ;$
- Tout dioïde complet (D, \oplus, \otimes) admet une borne supérieure, noté T , qui correspond à la somme de tous les éléments de D , $T = \bigoplus_{x \in D} x.$

6.3.3 Théorie de la résiduation dans les dioïdes

La théorie de la résiduation est utilisée d'une part pour manipuler les applications, dites résiduables, définies sur des dioïdes complets, et d'autre part pour caractériser les solutions, ou les solutions extrêmes (la plus grande et la plus petite solution) des équations de types $a.x \leq b$ ou $x.a \leq b$. Plus de détails sur cette théorie et ses résultats ainsi que les démonstrations des propositions et des théorèmes présentés dans ce paragraphe sont donnés dans [Bac et al, 92].

Définition 1.8 (*Applications résiduables*) Soient deux dioïdes complets (D_1, \oplus, \otimes) et (D_2, \oplus, \otimes) . Une application croissante $f: D_1 \rightarrow D_2$ est dite résiduable si l'inéquation $f(x) \leq b$ admet une plus grande solution dans D_1 pour tout élément b dans D_2 .

Proposition 1.2 Une application croissante $f : D_1 \rightarrow D_2$ est résiduable si, et seulement si, pour tout sous ensemble S de D_1 on a :

$$f\left(\bigoplus_{x \in S} x\right) = \bigoplus_{x \in S} f(x); \quad (1.1)$$

$$f(\varepsilon) = \varepsilon. \quad (1.2)$$

Théorème 1.1 Soit $f : D_1 \rightarrow D_2$ une application croissante. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est résiduable ;
- (ii) il existe une application $g : D_2 \rightarrow D_1$, croissante telle que :

$$f \circ g \leq \text{Id}_{D_2}; \quad (1.3)$$

$$g \circ f \geq \text{Id}_{D_1}. \quad (1.4)$$

Exemple 1.1 L'application $f : D_1 \rightarrow D_2$ définie par $f(x) = a.x$ est une application résiduable. Considérons l'inéquation $f(x) \leq b$, si l'élément a est inversible (c.-à-d. il existe $a^{\otimes(-1)} \in D_1$ tel que $a a^{\otimes(-1)} = a^{\otimes(-1)} a = e$), alors la plus grande solution (en x) de cette inéquation est de la forme :

$$a^{\otimes(-1)} b = a \setminus b. \quad (1.5)$$

Le signe “ \setminus ” apparaît dans cette expression correspond à la soustraction à gauche dans les dioïdes. Le signe de la soustraction à droite est donné par “ $/$ ” et $a / b = a b^{\otimes(-1)}$.

Extension aux dioïdes matriciels

Comme dans le cas précédent où nous avons travaillé sur les dioïdes scalaires, il est possible d'appliquer toutes les techniques et tous les résultats de la théorie de la résiduation dans le cas des dioïdes matriciels. Nous considérons donc dans cette extension, des dioïdes matriciels complets.

Théorème 1.2 Soit $D^{n \times n}$ un dioïde matriciel complet, soit L_A une application définie par $L_A : D^{n \times n} \rightarrow D^{n \times n}$, ($X \mapsto A.X$), et une matrice $B \in D^{n \times n}$. La plus grande solution de $A.X \leq B$ est la matrice $L_{\tilde{A}}(B) \in D^{n \times n}$, définie par $L_{\tilde{A}}(B) = A \setminus B$. Les coefficients de cette matrice sont donnés par l'expression :

$$(A \setminus B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^n A_{ki} \setminus B_{kj} \quad (1.6)$$

Remarque : La plus grande solution d'une inéquation de type $A.X \leq B$ où $A \in D^{n \times n}$, X et B sont deux vecteurs ($B \in D^{n \times 1}$ et $X \in D^{n \times 1}$), est le vecteur $A \setminus B \in D^{n \times 1}$ dont les coefficients sont :

$$(A \setminus B)_i = \bigwedge_{k=1}^n A_{ki} \setminus B_k \quad (1.7)$$

6.3.4 Résolution d'équations dans les dioïdes

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à la résolution de certains systèmes d'équations (ou d'inéquations) linéaires dans l'algèbre des dioïdes. Parmi ces systèmes on trouve :

- les équations implicites de type : $a.x \oplus b = c.x \oplus d$; (1.8)

- les inéquations de type : $a.x \oplus b \leq c.x \oplus d$. (1.9)

La résolution de ces équations (ou inéquations) peut être faite dans le cas scalaire, où a , b , c et d sont des scalaires dans un dioïde complet, et dans le cas matriciel, où a et c sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans un dioïde complet, b et d sont des n -vecteurs.

Dans le cas de la résolution d'un système linéaire matriciel (1.8) de type $x = A.x \oplus B$, il s'avère nécessaire de calculer la *quasi-inverse* de la matrice A . C est une matrice connue dans l'algèbre des dioïdes sous le nom "*étoile de Kleene*" et notée A^* .

Définitions 1.9 Dans un dioïde complet D , l'application étoile de Kleene définie sur D , et notée K est donnée par :

$$K : D \rightarrow D$$

$$x \mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^{\otimes k}.$$

La dérivée de l'étoile de Kleene est une application donnée par :

$$P : D \rightarrow D$$

$$x \mapsto x^+ = \bigoplus_{k \geq 1} x^{\otimes k}.$$

Les applications K et P sont croissantes et sont liées par la relation suivante : $x^* = e \oplus x^+$. Dans la proposition suivante nous donnons quelques relations vérifiées par les applications K et P .

Proposition 1.3 Soit D un dioïde complet. Pour tout a et b dans D , nous avons :

$$a^+ \leq a^* ; \quad (1.10)$$

$$(a^*)^* = a^* ; \quad (1.11)$$

$$(a^+)^+ = a^+ ; \quad (1.12)$$

$$(a \oplus b)^* = (b^* . a)^* b^* ; \quad (1.13)$$

Si en plus D est commutatif :

$$(a \oplus b)^* = a^* . b^* . \quad (1.14)$$

Théorème 1.3 Soient a et b deux éléments dans un dioïde complet D . La plus petite solution de l'équation implicite $x = a x \oplus b$ est donnée sous la forme suivante :

$$x = a^* . b = \bigoplus_{k \geq 0} a^{\otimes k} . b.$$

Théorème 1.4 Soit D un dioïde complet, et soient a et b deux éléments dans D . La plus grande solution de l'équation $a.x = b$ existe, et est donnée par :

$$x = b.a^{-1}.$$

D'une façon générale, pour une équation linéaire et affine $a.x \oplus b = c.x \oplus d$, la résolution dépend de la relation existant entre les coefficients a, b, c et d . Nous donnons à ce propos le théorème suivant.

Théorème 1.5 Soit $D = \mathbb{R}_{\max}$. La solution de l'équation linéaire et affine (1.8) est obtenue comme suit :

- si $(c < a \text{ et } b < d)$ ou $(a < c \text{ et } d < b)$, alors la solution est unique et donnée par : $x = (b \oplus d)/(a \oplus c)$;
- si $(a \neq c)$, $(b \neq d)$ et le premier point n'est pas vérifiée, alors (1.8) n'admet pas de solution dans D ;
- si $(a = c)$ et $(b \neq d)$, la solution existe et non unique. Toutes les solutions vérifient : $x \geq (b \oplus d)/a$;
- si $(a \neq c)$ et $(b = d)$, la solution est non unique et toutes les solutions sont données par : $x \leq b/(a \oplus c)$;
- si $(a = c)$ et $(b = d)$, alors quelque soit $x \in D$, x est une solution.

Remarque : Une inéquation de type $x \geq A.x \oplus b$, où les vecteurs x et b , la matrice A sont définis sur des dioïdes complets, admet la quantité $A^* b$ comme plus petite solution.

6.3.5 Graphe associé à une matrice

Dans certains cas où la manipulation des matrices devient difficile ou impossible, on se base sur la théorie des graphes pour l'interprétation et la manipulation de ces matrices. Dans ce paragraphe nous donnons quelques rappels qui nous seront utiles à propos des interprétations des systèmes étudiés en termes de graphes des matrices qui les représentent [Bac et al, 92] et [Coh et al, 85].

Définition 1.10. On appelle graphe associé à une matrice A ($n \times n$) à coefficients dans \mathbb{R}_{\max} , le graphe $G(A)$ formé d'un ensemble $S = \{1, 2, \dots, n\}$ de sommets (ou nœuds) et des arcs $(i, j) \in S^2$. On associe à chaque arc du graphe $j \rightarrow i$ le poids a_{ij} (coefficient non nul de la matrice A). Si $a_{ij} = \epsilon$, alors il n'existe aucun arc liant les deux nœuds i et j . On appelle $G(A)$ le *graphe de précedence de la matrice A*.

Exemple 1.2 Nous donnons dans cet exemple une matrice A à coefficients dans \mathbb{R}_{\max} et son graphe de précedence (figure 1.4).

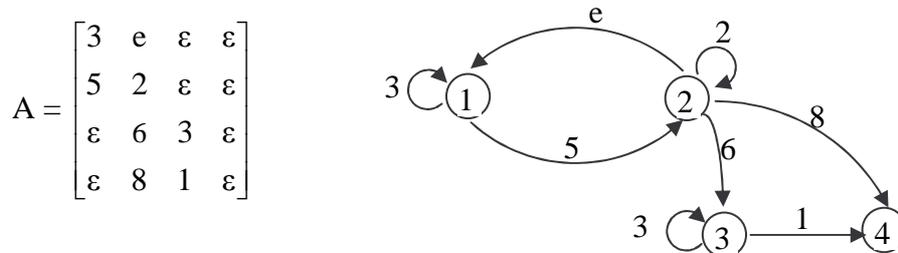


Figure 1.4 : Une matrice et son graphe de précedence.

Dans le cas où le coefficient a_{ij} est non nul ($a_{ij} \neq \epsilon$), on dit que i communique avec j , et on associe à l'arc $j \rightarrow i$ le poids a_{ij} . Et dans le cas contraire, où $a_{ij} = \epsilon$, on dit que i ne

communiquant pas avec j . Soit un ensemble $I \subset S$, on définit l'ensemble $\Gamma(I)$ des successeurs de I de la façon suivante :

$$\Gamma(I) = \{j \in S \text{ tel que } \exists i \in I, \quad i \rightarrow j\}.$$

On note $i \xrightarrow{*} j$ s'il existe dans le graphe un chemin allant de i à j . On définit alors l'ensemble :

$$\Gamma^*(I) = \{j \in S \text{ tel que } \exists i \in I, i \xrightarrow{*} j\}.$$

Définition 1.11 On définit une relation d'équivalence \mathfrak{R} sur l'ensemble S par :

$$i \mathfrak{R} j \Leftrightarrow i \xrightarrow{*} j \text{ et } j \xrightarrow{*} i.$$

Les classes d'équivalence pour la relation \mathfrak{R} seront appelées *classes* ou *composantes fortement connexes* du graphe.

Si on note $C = (C_1, \dots, C_p)$ l'ensemble des classes dans un graphe associé à une matrice, la relation $\xrightarrow{*}$ induit une relation d'ordre entre les différentes classes C_i .

$$C_i \leq C_j \Leftrightarrow C_i \xrightarrow{*} C_j.$$

A partir de cette équivalence il est clair que l'ensemble des classes supérieures à la classe C_k est donné par :

$$\Gamma^*(C_k) = \{C_i \in C \text{ tel que } C_k \xrightarrow{*} C_i\}.$$

Une classe C_k est dite finale si elle est maximale pour l'ordre $\xrightarrow{*}$ (C_k est supérieure à toutes les autres classes).

Exemple 1.3 Les classes de la matrice A donnée dans l'exemple 1.2 sont C_1, C_2 et C_3 , avec $C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{3\}$ et $C_3 = \{4\}$. Dans la figure 1.5 on représente les trois classes qui composent le graphe de précedence de la matrice A .

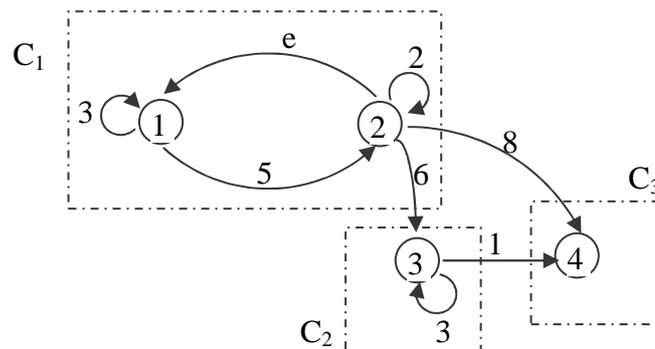


Figure 1.5 : Les classes du graphe associé à la matrice A .

On remarque à partir de ce graphe que la classe C_1 est la classe finale $\Gamma^*(C_1) = \{C_1, C_2, C_3\}$, et les relations entre les autres composantes du graphe $G(A)$ en utilisant l'opérateur Γ^* sont données par : $\Gamma^*(C_2) = \{C_2, C_3\}$ et $\Gamma^*(C_3) = \{C_3\}$.

6.3.6 Propriétés spectrales des matrices dans les dioïdes

Dans ce paragraphe nous rappelons quelques résultats concernant la théorie spectrale dans les dioïdes [Gon et al, 77]. Nous donnons également quelques conditions sur l'existence et l'unicité des éléments propres d'une matrice.

La recherche des éléments propres d'une matrice carrée ($n \times n$) A revient à la recherche d'un couple (λ, v) , où v est un n -vecteur non nul et λ et un scalaire, qui vérifie le système suivant :

$$A \otimes v = \lambda \otimes v. \quad (1.15)$$

Définition 1.12. Une matrice carrée ($n \times n$) à coefficients dans un dioïde est dite *irréductible* si son graphe de précédence $G(A)$ est fortement connexe.

On constate à partir de cette définition que le graphe de précédence d'une matrice irréductible ne contient qu'une unique classe C (autrement dit : $G(A) = C$).

Théorème 1.6 Une matrice irréductible $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ admet une unique valeur propre, notée $\rho(A)$, et donnée par :

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n (\text{tr } A^{\otimes k}) \otimes_k^{\left(\frac{1}{k}\right)}. \quad (1.16)$$

En relation avec son graphe $G(A)$, l'unique valeur propre d'une matrice A peut s'exprimer, en fonction des poids et des longueurs des circuits qui constituent $G(A)$, par :

$$\rho(A) = \bigoplus_c (w(c)) \otimes_{l(c)}^{\left(\frac{1}{l(c)}\right)}, \quad (1.17)$$

où $w(c)$ représente le poids d'un circuit du graphe $G(A)$ de longueur $l(c)$. $\rho(A)$ s'interprète donc comme le poids moyen maximum des circuits du graphe $G(A)$. Pour la matrice donnée dans l'exemple 1.2, nous avons $\rho(A) = 3$.

Proposition 1.4 Si A est une matrice irréductible, alors il existe un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont non nulles (différentes de ε).

6.3.7 Extension au cas des matrices non irréductibles

Dans le cas où une matrice est réductible, il est possible de chercher les éléments propres, mais cette fois-ci l'unicité de la valeur propre n'est pas garantie. Nous rappelons que toute matrice non irréductible B peut s'écrire sous la forme suivante :

$B = P^{-1}AP$, où P est une matrice de permutation et A est une matrice bloc triangulaire, les blocs étant associés aux classes de A . Chaque bloc de la matrice A est une matrice irréductible, donc on peut appliquer le théorème 1.6 (cas irréductible) à chaque bloc de A . Par conséquent, les valeurs propres de B seront fonctions des valeurs propres des matrices blocs de A .

Soit une matrice non irréductible B , et soit P une matrice de permutation telle que : $B = P^{-1}AP$. La matrice A peut s'écrire alors sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} M & C \\ \varepsilon & N \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

où M et N sont des blocs irréductibles.

Le graphe $G(A)$ associé à la matrice A est donné par la figure 1.6. Les blocs M, N et C présentés dans ce graphe représentent les composantes fortement connexes du graphe de précedence $G(A)$.

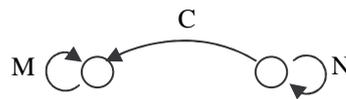


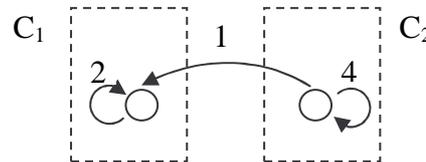
Figure 1.6 : Le graphe associé à la matrice A.

Théorème 1.7 La matrice (1.18) admet deux valeurs propres distinctes $\rho(M)$ et $\rho(N)$ si, et seulement si, $\rho(M) \leq \rho(N)$. Sinon, elle admet l'unique valeur propre $\rho(M)$.

Nous constatons, d'après ce théorème, que la valeur $\lambda = \max(\rho(M), \rho(N))$ est toujours une valeur propre, même si la matrice étudiée est non irréductible.

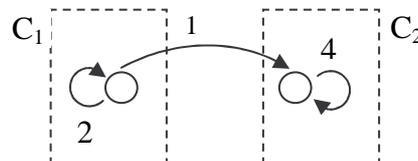
Exemple 1.4 Dans l'exemple suivant nous reprenons la matrice (1.18) et sa transposée, où les blocs M, N et C sont des scalaires. Nous associons à chacune des deux matrices (A et sa transposée A^T) son graphe de précedence, et nous déduisons, en appliquant le théorème 1.7, les valeurs propres des deux matrices ainsi que les vecteurs propres associés.

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$, son graphe est donné par :



C_1 est la composante aval et $\rho(C_1) \leq \rho(C_2)$. Alors l'ensemble des valeurs propres de A, noté $Sp\{A\}$, est donné par : $Sp(A) = \{2,4\}$. Les vecteurs propres associés à $\rho(C_1)$ et $\rho(C_2)$ sont respectivement : $V_2 = [e, \varepsilon]$ et $V_4 = [-3, e]$;

Soit $A^T = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, son graphe est donnée par :



Pour cette matrice la composante aval est C_2 , or l'inégalité $\rho(C_2) \leq \rho(C_1)$ n'est pas vérifiée. Alors d'après le théorème 1.7, la matrice A^T ne possède qu'une seule valeur propre, $Sp(A) = \{\rho(C_2) = 4\}$. Le vecteur propre associé est : $V_4 = [\varepsilon, e]$.

7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les systèmes de transport public comme une sous-classe des systèmes dynamiques à événements discrets. L'étude de ce type de systèmes représente la base des travaux que nous allons développer dans les chapitres suivants. Nous

avons brièvement annoncé la problématique. Quelques généralités sur les systèmes de transport public ont été données dans la troisième partie. Nous avons plus particulièrement décrit leur système physique et leur système de gestion. Pour le système physique, nous avons décrit les composants d'un réseau de transport public. Pour le système de gestion nous avons mis l'accent sur les deux phases principales qui le composent, planification et exploitation, en définissant ses principaux objectifs et en décrivant brièvement quelques outils employés. Dans la quatrième partie, nous avons identifié une analogie entre les systèmes de production et les systèmes de transport public en précisant l'appartenance de ces derniers à l'ensemble des systèmes dynamiques à événements discrets. Cette analogie nous a incité à utiliser les outils et techniques de modélisation déjà employés pour l'étude et l'analyse des systèmes de production. Dans la cinquième partie, nous avons cité brièvement quelques recherches relatives à la modélisation et à l'étude des systèmes de transport public. La sixième partie a été consacrée aux deux formalismes de modélisation que nous allons utiliser dans la suite : réseaux de Petri et algèbre des dioïdes. Nous avons introduit chacun de ces deux outils en rappelant les différentes définitions et caractéristiques qui seront utiles pour notre travail.

Par rapport au processus de gestion décrit dans ce chapitre, nous situons nos travaux essentiellement au niveau de la phase de planification d'un réseau de bus. Nous nous intéressons plus particulièrement à la conception voire à l'amélioration des horaires clients issus du tableau de marche. Parmi les objectifs cités, nous considérons prioritairement celui lié à la correspondance. Nos travaux ne concernent pas l'affectation des ressources de transport (bus et conducteurs) et ne tiennent pas compte de notions afférentes telles que la capacité des véhicules. Par contre, une partie de notre étude intègre comme second critère le nombre d'entités de transport d'un réseau, en ajoutant un véhicule en cas de besoin ou en le retirant dans le cas contraire. De même la modification des temps alloués peut être considérée dans le cas où le réseau contient des voies réservées aux véhicules. Cette modification permet d'accélérer ou de ralentir les véhicules tout en respectant les intervalles de variation des vitesses.

Dans le chapitre suivant nous allons dans un premier temps nous intéresser à la modélisation des réseaux de bus par des modèles mathématiques obtenus à partir des modèles réseaux de Petri. Au cours de cette modélisation, nous allons tout d'abord prendre en considération le phénomène de synchronisation des entités de transport. En d'autres termes, nous considérons le cas où les attentes des bus sont imposées aux stations de correspondances, afin de permettre un échange de passagers. Dans un deuxième temps, nous étudions ces réseaux sans que les bus s'attendent aux arrêts de correspondance. L'étude analytique de ces systèmes, que ce soit avec ou sans synchronisation, nécessite un support mathématique adéquat permettant de décrire et d'évaluer les performances de ce type de SDED qui mettent en jeu les phénomènes de synchronisation et de concurrence. Nous allons étudier deux types de modèles mathématiques : des modèles (max, plus) linéaires stationnaires déduits à partir des modèles graphes d'événements temporisés ; et des modèles (max, plus) linéaires non-stationnaires obtenus en utilisant une classe de réseaux de Petri dédiée à la modélisation des SDED en absence de phénomène de synchronisation.

Chapitre 2

Modélisation d'un système de transport public par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus)

1 Introduction

Dans les différentes phases correspondant à la gestion d'un réseau de transport public, nous situons nos travaux au stade de la planification, avec pour objectif l'élaboration du tableau de marche pour un nouveau système (par exemple lors de la création d'une nouvelle ligne), ou bien l'évaluation des performances (forces et faiblesses) d'un système existant, suivie de propositions d'amélioration du fonctionnement de celui-ci. Cette évaluation ou cette amélioration est ciblée à certains points d'échange du réseau. Le principal critère considéré est ici la minimisation des temps de correspondance. Pour atteindre cet objectif, modélisation, analyse et commande sont les trois phases clés de nos travaux. Ce chapitre est consacré plus particulièrement aux phases de modélisation et d'analyse pour lesquelles nous utilisons essentiellement deux outils : les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus).

Nous avons choisi pour cadre de nos travaux l'étude d'un réseau de bus. La structure du réseau considéré présente des spécificités que nous détaillons tout d'abord avant d'axer notre étude sur les deux cas de fonctionnement possibles de ce réseau au niveau des arrêts de correspondance où des échanges de passagers sont susceptibles de se produire : le premier cas est celui où les bus concernés par ce type d'échange doivent « s'attendre » au(x) point(s) considéré(s). Cependant ce cas de figure arrive assez rarement sur des réseaux de bus, compte tenu de la fréquence relativement importante des passages de véhicules. Cette situation est observée plus souvent pour les réseaux de chemin de fer, où les passages de train sont plus espacés dans le temps. Nous montrons dans ce chapitre comment modéliser cette problématique, qui a par ailleurs déjà été étudiée, par un graphe d'événements temporisé et un système d'équations stationnaires dans l'algèbre (max, plus), et ce à condition que certaines hypothèses soient vérifiées. Le deuxième cas de fonctionnement étudié relève de ce que nous appellerons la non-synchronisation des bus (les bus ne s'attendent pas aux stations de correspondance). La contrainte d'attente précédente ainsi que certaines hypothèses sont alors relaxées, ce qui nous conduit à un modèle graphique dans lequel des conflits structurels apparaissent et à une représentation d'état dans l'algèbre (max, plus) non-stationnaire.

2 Description du système de transport public étudié

Nous considérons un STP composé de n lignes de bus (avec $n \geq 2$) (figure 2.1). Chacune est desservie par un nombre fixé de bus qui réalisent un circuit et passent au même endroit avec une fréquence donnée (fonction du temps de parcours du circuit et de la demande

de transport). Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où chaque ligne L_i ($1 \leq i \leq n$) est desservie par un unique bus B_i qui se trouve initialement à sa station de départ. Certaines lignes sont connectées entre elles par des arrêts de correspondance qui permettent aux passagers de changer de ligne selon leurs destinations. Le réseau considéré est composé de $n-1$ arrêts de correspondance. Chaque ligne L_i ($2 \leq i \leq n-1$) est représentée par sa station de départ Sd_i , deux stations de correspondance (notées resp. $Sc_{i-1,i}$, et $Sc_{i,i+1}$, communes resp. avec les lignes L_{i-1} et L_{i+1}), et une station d'arrivée notée Sa_i . La ligne L_1 (resp. L_n) a une seule station de correspondance commune avec la ligne L_2 (resp. avec L_{n-1}). Pour ce réseau, nous ne considérons que les arrêts que nous venons de définir ; les autres arrêts simples ne sont pas explicités ici (ils sont agrégés dans les déplacements des bus entre les arrêts définis). La course d'un bus B_i s'effectue dans le sens suivant : $Sd_i \rightarrow Sc_{i-1,i} \rightarrow Sc_{i,i+1} \rightarrow Sa_i \rightarrow Sd_i$. Le temps de déplacement des bus entre chaque couple d'arrêts successifs du réseau est connu. Il intègre les temps de montée et descente de passagers dans les bus. Dans ce chapitre nous nous intéressons au fonctionnement périodique des bus du réseau : chaque bus B_i passe à un arrêt toutes les λ_i unités du temps. λ_i est appelée période de la ligne L_i . C'est le temps nécessaire à B_i pour effectuer une course. Enfin le réseau étudié est muni d'une planification d'horaires initiale : la première date de départ (depuis Sd_i) de chaque bus B_i au cours d'une journée est connue.

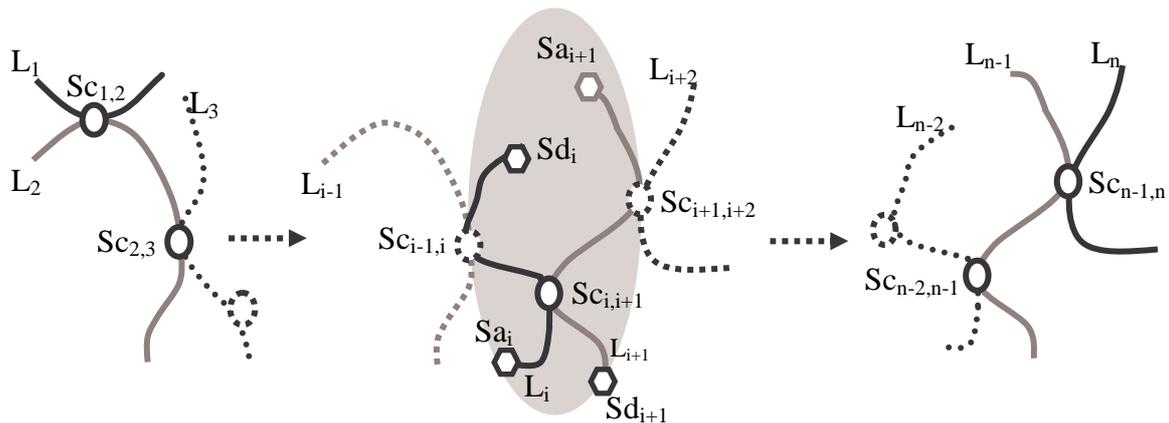


Figure 2.1 : Un réseau de bus composé de n lignes et n-1 arrêts de correspondance.

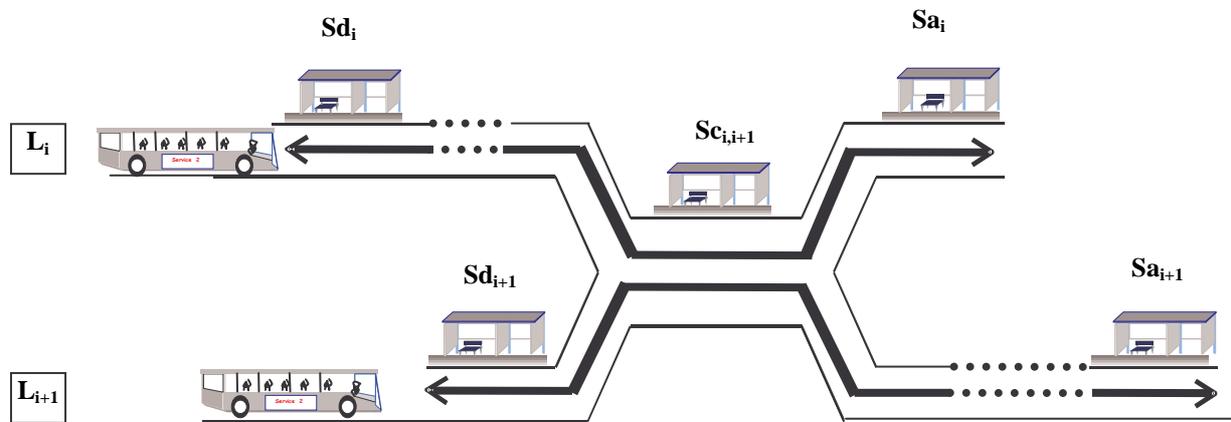


Figure 2.2 : La structure physique de deux lignes L_i et L_{i+1} et de la station $Sc_{i,i+1}$.

Dans cette étude, nous nous intéressons à la gestion des correspondances des passagers effectuant un aller simple sur le réseau au cours d'une période donnée (exemple : un jour de la semaine) en empruntant un bus à un arrêt d'une ligne L_i ($1 \leq i \leq n-1$) pour se rendre à un arrêt destination d'une autre ligne L_j ($1 \leq i < j \leq n$). L'étude des trajets de retour s'effectue de la même façon. Dans ce chapitre, nous évaluons les temps d'attente des passagers aux différentes stations de correspondance $Sc_{i,i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$), dans les deux cas possibles de fonctionnement du réseau : synchronisé et non-synchronisé. La figure 2.2 présente la structure physique d'une portion du réseau plus particulièrement étudiée et pouvant être considérée comme « générique » du réseau global. Elle est composée de deux lignes L_i et L_{i+1} (partie grisée de la figure 2.1), et fait notamment apparaître leur station de correspondance commune $Sc_{i,i+1}$. Les voyageurs peuvent ainsi emprunter un bus à la station de départ Sd_i (resp. Sd_{i+1}) soit pour se rendre à la station d'arrivée Sa_i (resp. Sa_{i+1}) en se déplaçant sur une seule ligne, soit pour se rendre à la station Sa_{i+1} (resp. Sa_i) en utilisant les deux lignes et en changeant de bus à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$.

3 Étude du système dans le cas de synchronisation des bus

3.1 Modélisation par un graphe d'événements temporisés

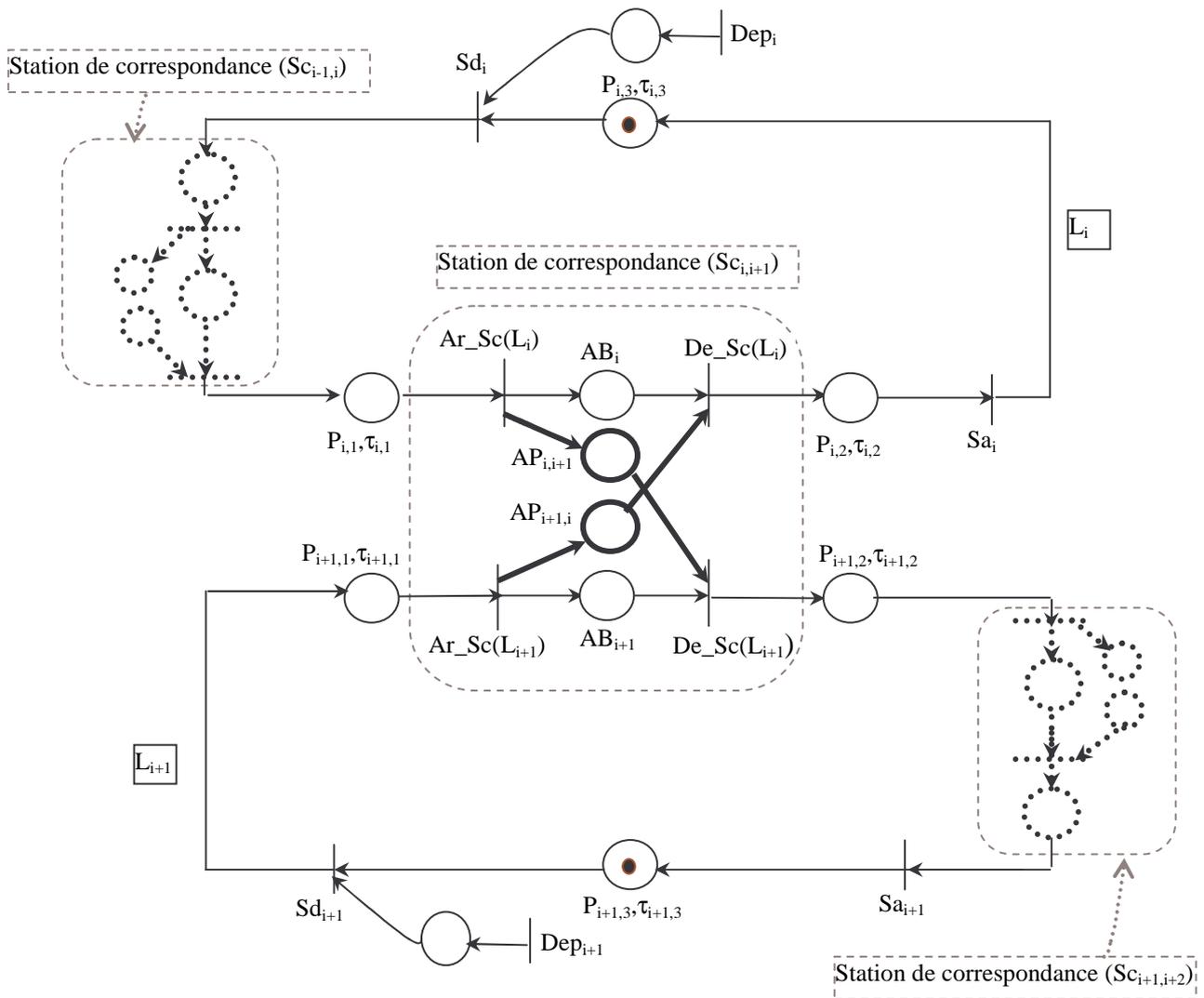
3.1.1 Premier modèle réseau de Petri

Nous utilisons le formalisme RdP pour modéliser le réseau de bus de la figure 2.1. Comme nous l'avons évoqué en introduction de ce chapitre, l'attente des bus aux arrêts de correspondance est un phénomène peu courant, comparé à d'autres systèmes de transport public. Toutefois, la synchronisation des bus peut malgré tout être imposée par les exploitants en certains points d'échange jugés critiques, et à des périodes particulières (heures de pointe par exemple). Nous considérons donc ici un fonctionnement synchronisé du réseau : les bus de chaque couple de lignes s'attendent à leur arrêt de correspondance commun pour permettre aux passagers de changer de ligne. Après l'échange de passagers, chaque bus poursuit son trajet vers d'autres arrêts. Nous définissons alors les éléments suivants du modèle RdP :

- les transitions sont assimilées aux arrêts du réseau ;
- les places et les arcs associés représentent :
 - soit l'autorisation de début d'une course pour un bus ;
 - soit le trajet d'un bus entre deux arrêts non obligatoirement successifs du réseau ;
 - soit l'attente de passagers à une station de correspondance. Pour distinguer ces places des autres places du modèle, nous les représentons, ainsi que les arcs associés, par des traits épais ;
- les jetons représentent de la même façon :
 - soit un ordre de commencement d'une course pour un bus depuis son arrêt de départ ;
 - soit un bus en circulation sur une ligne, dans le cas où le jeton se trouve dans une place qui modélise le déplacement d'un bus ;
 - soit un lot de passagers en attente dans le cas où le jeton se trouve dans une place associée à l'attente de passagers ;
- les temporisations associées aux places du modèle représentent les temps de déplacement des bus entre les arrêts du réseau. Les temporisations associées aux

places qui représentent l'attente de passagers sont nulles : en effet, d'une part les temps de montée et de descente de passagers dans les véhicules sont contenus dans le temps de déplacement des bus ; d'autre part nous négligeons ici le temps de déplacement (à pied) des passagers entre les deux bus concernés par l'échange. Enfin les temporisations des places représentant une autorisation de début de course sont également nulles : en effet, une telle autorisation est immédiatement effective.

En tenant compte des éléments donnés ci-dessus, et en supposant que les poids associés aux arcs du modèle RdP sont égaux à 1, le graphe de la figure 2.3 modélise les deux lignes L_i et L_{i+1} de la figure 2.2 (partie grisée de la figure 2.1).



Légende : - trait fin : circuit d'un bus ;
 - trait gras : connexion entre deux lignes (attente de passagers en $Sc_{i,i+1}$, ou information sur l'arrivée d'un bus en $Sc_{i,i+1}$).

Figure 2.3 : Modèle RdP du système considéré.

Le reste du réseau se comporte comme ces deux lignes. Le modèle obtenu est composé de deux circuits. Chacun représente une ligne L_j ($j \in \{i, i+1\}$) de la façon suivante :

- la ligne L_j est représentée par le circuit $(Sd_j, P_{j,1}, Ar_Sc(L_j), AB_j, De_Sc(L_j), P_{j,2}, Sa_j, P_{j,3}, Sd_j)$. Les transitions $Ar_Sc(L_j)$ et $De_Sc(L_j)$ ainsi que la place AB_j modélisent la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$, où $Ar_Sc(L_j)$ (resp. $De_Sc(L_j)$) représente l'arrivée (resp. le départ) du bus B_j en $Sc_{i,i+1}$ (resp. de $Sc_{i,i+1}$) ; la place AB_j représente l'attente du bus B_j en $Sc_{i,i+1}$ pour effectuer la correspondance. Les places $P_{j,1}$, $P_{j,2}$ et $P_{j,3}$ (resp. les temporisations $\tau_{j,1}$, $\tau_{j,2}$ et $\tau_{j,3}$) modélisent les trajets (resp. les temps de déplacement) entre les stations Sd_j et $Sc_{i,i+1}$, $Sc_{i,i+1}$ et Sa_j et enfin entre Sa_j et Sd_j . Le jeton se trouvant initialement dans la place $P_{j,3}$ représente le bus B_j . La période λ_j est donnée par : $\lambda_j = \tau_{j,1} + \tau_{j,2} + \tau_{j,3}$;
- à chaque transition Sd_j on associe une transition Dep_j et une place (de temporisation nulle) modélisant l'entrée de la ligne à partir de laquelle il est possible de commander cette ligne en imposant des dates de départ des bus pour effectuer une course ;
- la correspondance entre les deux lignes est représentée par la connexion entre les deux circuits du modèle. Cette connexion est composée des places $AP_{i,i+1}$ et $AP_{i+1,i}$, qui représentent les attentes des passagers pour effectuer la correspondance, et des arcs orientés suivant le déplacement de ces passagers (de la ligne L_i vers L_{i+1} et de la ligne L_{i+1} vers L_i).

3.1.2 Interprétation du modèle graphique

Dans ce paragraphe nous expliquons le fonctionnement du modèle de la figure 2.3. Le bus de chaque ligne se trouve initialement à sa station de départ (Sd_i et Sd_{i+1}) (présence d'un jeton dans chacune des places $P_{i,3}$ et $P_{i+1,3}$). Le tir de la transition Dep_i équivaut à un ordre (autorisation) de départ donné au bus B_i . Le tir de la transition Sd_i signifie que le bus B_i commence son circuit à partir de cet arrêt. Après $\tau_{i,1}$ unités de temps, l'arrivée de B_i à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$ valide la transition $Ar_Sc(L_i)$. Le franchissement de cette dernière met un jeton (qui modélise les passagers) à la place $AP_{i,i+1}$, et un autre (qui modélise le bus) à la place AB_i . La présence d'un jeton à la place $AP_{i+1,i}$ signifie que le bus B_{i+1} est déjà arrivé et a déposé des passagers souhaitant effectuer une correspondance avec B_i . Ceci autorise alors le tir de la transition $De_Sc(L_i)$ et le bus B_i peut donc quitter la station $Sc_{i,i+1}$. Si aucun jeton ne se trouve dans $AP_{i+1,i}$, le bus B_i , arrivé le premier en $Sc_{i,i+1}$, doit attendre l'arrivée de B_{i+1} pour récupérer les passagers. Le tir de la transition $De_Sc(L_i)$ met un jeton en $P_{i,2}$ (déplacement de B_i entre $Sc_{i,i+1}$ et la station d'arrivée Sa_i). Après $\tau_{i,2}$ unités de temps, le tir de la transition Sa_i met à nouveau un jeton dans la place $P_{i,3}$: B_i est ainsi sur le trajet de retour vers sa station de départ. Le franchissement des transitions du circuit associé à la ligne L_{i+1} se fait de la même façon que celui des transitions du circuit qui modélise la ligne L_i .

Ce premier modèle graphique fonctionne à condition de considérer l'hypothèse suivante : les bus B_i et B_{i+1} passent alternativement à la station $Sc_{i,i+1}$, et ce dès la première course des bus. La séquence de passage peut alors être par exemple $B_i- B_{i+1}- B_i- B_{i+1}- B_i \dots$, ou encore $B_i- B_{i+1}- B_{i+1}- B_i- B_i- B_{i+1}- B_{i+1}- B_i \dots$. En fait, c'est l'alternance du couple (B_i, B_{i+1}) qui importe, ce qui autorise notamment B_{i+1} à arriver en premier à l'arrêt de correspondance. Une telle séquence peut être atteinte si les longueurs des circuits qui représentent les deux lignes sont équivalentes, ou encore, si nous imposons une attente à chaque course pour le bus ayant le circuit le plus court (en temps). Si l'alternance de bus des deux lignes n'est pas vérifiée, il y a incompatibilité avec le fonctionnement même du RdP puisque, de toute manière, le bus arrivant le premier à l'arrêt de correspondance ne pourra pas continuer sa

route tant que le bus de l'autre ligne ne l'aura pas rejoint (pas de franchissement de $De_Sc(L_j)$ donc situation de blocage sur le circuit associé). Compte tenu de cette attente obligatoire du bus ayant le circuit le plus court, la période des deux lignes L_i et L_{i+1} est donc en réalité égale à λ telle que : $\lambda = \text{Max}(\lambda_i, \lambda_{i+1})$. L'alternance du passage des bus en $Sc_{i,i+1}$ est en fait ici une conséquence du phénomène de synchronisation. Notons que si nous considérons l'insertion de ces deux lignes dans le réseau global étudié, donc si nous prenons en compte d'autres stations de correspondance (en l'occurrence $Sc_{i-1,i}$ et $Sc_{i+1,i+2}$, modélisés en pointillés sur la figure 2.3), alors de telles attentes peuvent se produire ailleurs qu'en $Sc_{i,i+1}$ sur les lignes L_i et/ou L_{i+1} .

Toujours dans le cadre de cette hypothèse d'alternance, et si nous autorisons plusieurs bus sur chacune des deux lignes (plusieurs jetons initialement aux places $P_{i,3}$ et $P_{i+1,3}$), alors le « blocage » risque de se doubler d'un phénomène d'accumulation de jetons : par exemple, si plusieurs bus B_i arrivent à l'arrêt de correspondance $Sc_{i,i+1}$ entre deux passages de bus B_{i+1} , alors un nombre de jetons égal au nombre de bus B_i considérés s'accumulera dans les places AB_i et $AP_{i,i+1}$. Plusieurs lots de passagers de provenances différentes sont donc susceptibles d'attendre le prochain bus B_{i+1} . Or un seul jeton est prélevé de chacune de ces places lors du tir de $De_Sc(L_i)$ et $De_Sc(L_{i+1})$. Ceci implique deux conséquences : d'une part des jetons restant dans $AP_{i,i+1}$ signifient que tous les passagers n'ont pu embarquer dans le bus B_{i+1} , alors que la capacité des bus n'est pas prise en compte dans notre modèle (elle est supposée infinie par défaut) ; d'autre part des jetons restent aussi dans AB_i : le passage de B_{i+1} autorise donc un seul bus B_i à continuer sa course, même en supposant que tous les passagers aient pu réaliser leur correspondance. L'hypothèse d'alternance du passage des bus en $Sc_{i,i+1}$ est donc aussi dans ce cas de figure un gage de non-accumulation de jetons dans les places citées.

3.1.3 Modèle graphe d'événements temporisés

Les graphes d'événements temporisés (GET) sont considérés comme une relative nouveauté dans le contexte de la modélisation des STP [Bar, 91], [Nait et al, 01b]. Dans ce cadre, une étude a été faite dans [Ols, 98] pour l'étude d'un réseau de trains (réseau Hollandais). Un modèle mathématique (max, plus) linéaire est déduit à partir du modèle GET décrivant le comportement du réseau. Cette étude est limitée au cas où les trains s'attendent systématiquement aux stations de correspondance pour effectuer les échanges de passagers. Dans le même contexte, et afin d'évaluer les performances d'un réseau de bus, notamment les dates de passage des véhicules aux différents arrêts du réseau et les temps de correspondance des usagers, nous étudions le système donné dans la figure 2.2 en utilisant les GET et l'algèbre (max, plus).

Dans le cas d'un réseau synchronisé (les bus doivent s'attendre), nous ne considérons toujours que la partie du réseau représentée par les deux lignes L_i et L_{i+1} de la figure 2.2. De plus nous nous intéressons ici uniquement à la gestion des correspondances des passagers sur un itinéraire donné : par exemple, les passagers venant de la station de départ Sd_i et se rendant à la station d'arrivée Sa_{i+1} . Le modèle GET associé est donné par la figure 2.4. C'est une version simplifiée du modèle précédent (figure 2.3) dans le sens où l'échange de passagers de la ligne L_{i+1} vers la ligne L_i n'est pas représenté. La synchronisation désigne ici l'obligation d'attente du bus B_{i+1} pour assurer les correspondances. Pour ce nouveau modèle, la transition qui représente la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$ est notée $Sc(L_j)$ pour la ligne L_j (avec $j \in \{i, i+1\}$) ; elle regroupe les éléments $Ar_Sc(L_j)$, AB_j et $De_Sc(L_j)$ donnés dans le modèle de la figure 2.3. Comme pour le modèle précédent et bien que nous ne considérons l'échange de passagers que dans un seul sens à la station de correspondance, le modèle graphique de la

figure 2.4 fonctionne avec l'hypothèse d'alternance des bus en $Sc_{i,i+1}$ déjà énoncée au paragraphe 3.1.2. Dans le cas contraire, il y a risque d'accumulation de jetons en $AP_{i,i+1}$.

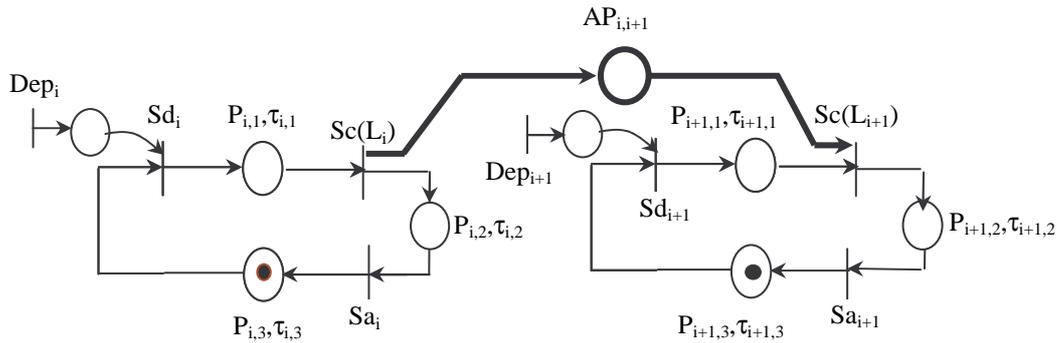


Figure 2.4 : Le modèle GET représentant les deux lignes L_i et L_{i+1} : cas d'attente des bus.

3.2 Représentation d'état dans l'algèbre (max, plus)

Afin de faciliter la représentation des éléments du modèle graphique, et ensuite la description de ce dernier sous forme d'équations mathématiques, nous affectons aux transitions et aux places de la figure 2.4 des notations que nous explicitons dans le tableau 2.1. Ceci nous permet d'obtenir le modèle GET de la figure 2.5. Dans celui-ci, chaque arrêt Sa_j ($j \in \{i, i+1\}$) est "agrégé" dans le trajet $Sc(L_j) \rightarrow Sd_j$; de même le temps de déplacement du bus B_j sur ce trajet est $\tau_{j,2}$ au lieu de $\tau_{j,2} + \tau_{j,3}$. Cette agrégation s'explique par le fait que nous nous intéressons dans cette étude uniquement aux stations de correspondance et aux stations de départ des deux lignes.

| Eléments de réseau pour la ligne L_j avec $j \in \{i, i+1\}$ | Correspondances dans le GET |
|--|-----------------------------|
| Dep_j | u_j |
| Sd_j | $x_{j,1}$ |
| $Sc(L_j)$ | $x_{j,2}$ |
| $AP_{i,i+1}$ | P_i |
| $P_{j,1}$ | $P_{j,1}$ |
| $P_{j,2}, Sa_j$ et $P_{j,3}$ | $P_{j,2}$ |

Tableau 2.1 : Correspondance entre les éléments du réseau de bus et ceux du GET.

Pour le modèle GET de la figure 2.5, à chaque transition x nous associons une variable d'état $x(k)$, appelée dateur, qui représente la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement de cette transition. L'évolution au cours du temps des différents franchissements des transitions se traduit analytiquement dans l'algèbre usuelle par le système d'équations linéaires (2.1), sachant que chaque transition validée est franchie immédiatement. Dans ce système, on considère l'opérateur "max" habituel comme un opérateur d'assemblage de deux grandeurs (produits dans un système de production, bus-passagers dans un système de transport, etc.). Cet assemblage peut être effectué uniquement au moment où la grandeur qui arrive au plus tard au lieu d'assemblage est disponible, c'est à dire à la date qui correspond au maximum des dates

de disponibilité de deux grandeurs. De même, la notion d'*addition* de deux ou plusieurs grandeurs correspond à l'opérateur "+" usuel. Les deux opérateurs (max et +) sont propres aux cas discrets, où on s'intéresse à la date d'occurrence des événements.

En définissant les variables d'état associées à la station de correspondance des deux lignes et ainsi que les dateurs associés à ces variables, il est temps d'exprimer les critères à évaluer, à savoir les dates de passage des bus aux arrêts considérés et le temps de correspondance. Compte tenu de l'hypothèse émise précédemment sur l'alternance des bus des deux lignes, la $k^{\text{ème}}$ correspondance est assurée par le $k^{\text{ème}}$ passage du bus B_{i+1} à l'arrêt $Sc_{i,i+1}$. Ce bus récupère alors uniquement les passagers descendant du bus B_i passant également à ce niveau pour la $k^{\text{ème}}$ fois. Nous notons donc par $T_{i,i+1}(k, k)$ le $k^{\text{ème}}$ temps de correspondance en $Sc_{i,i+1}$. Ce temps s'exprime en effectuant la différence des dates d'arrivée (et/ou de départ) à l'arrêt $Sc_{i,i+1}$ des bus B_i et B_{i+1} , soit des dates de franchissement des transitions $x_{i,2}$ et $x_{i+1,2}$. Les critères à évaluer sont donc les suivants :

- $x_{i,1}(k), x_{i,2}(k), x_{i+1,1}(k)$ et $x_{i+1,2}(k)$, pour tout $k \geq 1$;
- $T_{i,i+1}(k, k) = x_{i+1,2}(k) - x_{i,2}(k)$, pour tout $k \geq 1$.

A partir des éléments du tableau 2.1, nous obtenons le modèle graphique suivant :

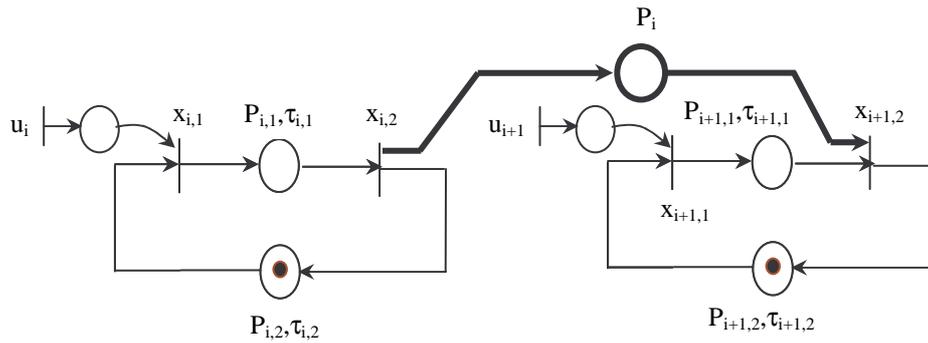


Figure 2.5 : Le modèle GET des deux lignes L_i et L_{i+1} .

$$\forall k > 1, \quad \begin{cases} x_{i,1}(k) = \max[\tau_{i,2} + x_{i,2}(k-1), u_i(k)] \\ x_{i,2}(k) = \tau_{i,1} + x_{i,1}(k) \\ x_{i+1,1}(k) = \max[\tau_{i+1,2} + x_{i+1,2}(k-1), u_{i+1}(k)] \\ x_{i+1,2}(k) = \max[\tau_{i+1,1} + x_{i+1,1}(k), x_{i,2}(k)] \end{cases} \quad (2.1)$$

En utilisant les notations des dioïdes, nous traduisons ensuite le système (2.1) sous forme d'un système d'équations (max, plus) linéaires stationnaires. Nous obtenons ainsi :

$$\forall k > 1, \quad \begin{cases} x_{i,1}(k) = \tau_{i,2} \otimes x_{i,2}(k-1) \oplus u_i(k) \\ x_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k) \\ x_{i+1,1}(k) = \tau_{i+1,2} \otimes x_{i+1,2}(k-1) \oplus u_{i+1}(k) \\ x_{i+1,2}(k) = \tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k) \oplus x_{i,2}(k) \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous définissons le vecteur d'état $X(k) = [x_{i,1}(k), x_{i,2}(k), x_{i+1,1}(k), x_{i+1,2}(k)]^T$ dont les composantes sont les variables internes du système, et le vecteur d'entrée

$U(k) = [u_i(k), u_{i+1}(k)]^T$. La représentation matricielle du système (2.2) est alors donnée sous forme de l'équation implicite (2.3).

$$\forall k > 1, \quad X(k) = A_0 \otimes X(k) \oplus A_1 \otimes X(k-1) \oplus B \otimes U(k). \quad (2.3)$$

A_0 et A_1 représentent les matrices caractéristiques du système, et sont à coefficients constants dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} (ces coefficients représentent les données du système), avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau_{i+1,1} & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_{i,2} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{i+1,2} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{et } B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'effet des conditions initiales sur la réponse du système, c'est pourquoi nous considérons, dans ce qui suit, le système à entrée nulle : $\forall k \geq 1, U(k) = [\varepsilon, \varepsilon]^T$. Sous cette hypothèse, l'équation implicite (2.3) peut être transformée en une équation de récurrence explicite en calculant l'étoile de Kleene A_0^* (cf. chapitre 1, § 6.3.4, définition 1.9). La plus petite solution de (2.3) est alors donnée sous forme de l'équation récurrente d'ordre 1 (2.4).

$$\forall k > 1, \quad \begin{aligned} X(k) &= A_0^* \otimes A_1 \otimes X(k-1), \\ &= A \otimes X(k-1). \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{avec } A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \tau_{i+1,1} & e \end{bmatrix}, \quad \text{et } A = A_0^* \otimes A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_{i,2} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{i,1} & \tau_{i,2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{i+1,2} \\ \varepsilon & \tau_{i,1} & \tau_{i,2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{i+1,1} & \tau_{i+1,2} & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

De l'expression (2.4), les composantes du vecteur d'état $X(k)$ sont données par :

$$\forall r = 1, \dots, 4, \quad X_r(k) = \max_{j=1, \dots, 4} (A_{rj} + X_j(k-1)) = \bigoplus_{j=1}^4 (A_{rj} \otimes X_j(k-1)). \quad (2.5)$$

X_r est la $r^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'état X . A_{rj} correspond à la $r^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A .

3.3 Résolution du modèle et évaluation des temps de correspondance

L'état initial du système est donné par le vecteur $X(1)$ dont les composantes représentent les premières dates de franchissement des différentes transitions du modèle GET de la figure 2.5. En d'autres termes, il s'agit des premières dates de passage des bus aux différents arrêts du réseau de bus présenté dans la figure 2.2. Soit :

$$X(1) = [x_{i,1}(1), x_{i,2}(1), x_{i+1,1}(1), x_{i+1,2}(1)]^T. \quad (2.6)$$

En réalité, la planification initiale connue par hypothèse donne les dates $x_{i,1}(1)$ et $x_{i+1,1}(1)$. Les autres composantes de $X(1)$ ($x_{i,2}(1)$ et $x_{i+1,2}(1)$) en sont déduites à l'aide du système (2.2). Nous supposons que pour tout $k \leq 0$, $X_r(k) = \varepsilon$ (pour $1 \leq r \leq 4$), les jetons de marquage initial sont ainsi disponibles depuis l'instant " $-\infty$ ". A partir de l'équation de récurrence (2.4), nous déduisons la solution de l'équation d'état (2.3) en fonction de la condition initiale (2.6) :

$$\forall k > 1, \quad X(k) = A^{\otimes(k-1)} \otimes X(1). \quad (2.7)$$

L'expression (2.7) permet de déterminer tous les états du système et de calculer les dates de franchissement des transitions du modèle graphique. Le temps d'attente des passagers associé à une correspondance réalisée au niveau de la station $Sc_{i,i+1}$ est alors évalué. Comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe précédent, et lors d'une période de temps donnée (une journée par exemple), le temps de correspondance s'exprime de la manière suivante :

$$\forall k \geq 1, \quad T_{i,i+1}(k, k) = x_{i+1,2}(k) - x_{i,2}(k) = x_{i+1,2}(k) / x_{i,2}(k). \quad (2.8)$$

Nous rappelons que l'opérateur " $/$ " exprimé dans l'algèbre (max, plus) équivaut à la soustraction dans l'algèbre usuelle. L'expression (2.8) est bien sûr valable si B_{i+1} passe avant ou après B_i en $Sc_{i,i+1}$ (pour la $k^{\text{ème}}$ fois). En effet, dans ces deux cas nous avons toujours $T_{i,i+1}(k, k) \geq 0$ puisque d'après le système (2.2), $x_{i+1,2}(k) = \tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k) \oplus x_{i,2}(k)$, donc $x_{i+1,2}(k) \geq x_{i,2}(k)$: B_{i+1} ne peut quitter l'arrêt considéré qu'après l'arrivée de B_i .

En tenant compte de la périodicité des franchissements des transitions, nous constatons que ce temps $T_{i,i+1}(k, k)$ peut également s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, \quad T_{i,i+1}(k, k) &= \lambda_{i+1} \otimes x_{i+1,2}(k-1) / \lambda_i \otimes x_{i,2}(k-1), \\ &= (\lambda_{i+1} / \lambda_i) \otimes [x_{i+1,2}(k-1) / x_{i,2}(k-1)], \\ &= (\lambda_{i+1} / \lambda_i) \otimes T_{i,i+1}(k-1, k-1), \\ &= (\lambda_{i+1} / \lambda_i)^{\otimes(k-1)} \otimes T_{i,i+1}(1, 1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

A partir de (2.9), nous remarquons que les temps de correspondance entre L_i et L_{i+1} sont exprimés en fonction des périodes de ces deux lignes λ_i et λ_{i+1} et du temps d'attente $T_{i,i+1}(1, 1)$ associé à la première course des bus. Notons que si $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, alors le bus B_{i+1} attendra à la station de correspondance l'arrivée de B_i . Dans ce cas, et conformément aux explications fournies au paragraphe 3.1.2 relatives à l'hypothèse d'alternance des bus, la période de la ligne L_{i+1} est en réalité $\lambda = \text{Max}(\lambda_i, \lambda_{i+1}) = \lambda_i$. Ainsi, $T_{i,i+1}(k, k) = 0$: les passagers venant de la ligne L_i pourront prendre B_{i+1} sans attente.

Si le nombre de voyages à effectuer par les bus pendant une période donnée de travail est fixé à N_{max} voyages, alors le temps de correspondance total pendant cette période est la somme des temps $T_{i,i+1}(k, k)$ pour $1 \leq k \leq N_{\text{max}}$, soit :

$$T_{\text{corr}}(N_{\text{max}}) = \bigotimes_{k=1}^{N_{\text{max}}} T_{i,i+1}(k, k) = \bigotimes_{k=1}^{N_{\text{max}}} (\lambda_{i+1} / \lambda_i)^{\otimes(k-1)} \otimes T_{i,i+1}(1, 1).$$

Afin d'améliorer le service offert aux usagers en terme de correspondances, nous proposerons dans le chapitre suivant quelques politiques de commande permettant de minimiser les temps d'attente des passagers aux arrêts de correspondance.

3.4 Exemple d'application

Soient deux lignes de bus L_i et L_{i+1} telles que représentées par la figure 2.2 et caractérisées par les données suivantes :

- la période de L_i est : $\lambda_i = \tau_{i,1} + \tau_{i,2} = 60$ min, avec $\tau_{i,1} = 33$ min et $\tau_{i,2} = 27$ min ;
- pour L_{i+1} : $\lambda_{i+1} = \tau_{i+1,1} + \tau_{i+1,2} = 67$ min, avec $\tau_{i+1,1} = 30$ min et $\tau_{i+1,2} = 37$ min.

En outre, la date du premier départ du bus B_i (resp. B_{i+1}) de l'arrêt Sd_i (resp. Sd_{i+1}) est $t_i = 0 = x_{i,1}(1)$ (resp. $t_{i+1} = 0 = x_{i+1,1}(1)$). En tenant compte de ces dates, la condition initiale du système est $X(1) = [0, 33, 0, 33]$. La matrice caractéristique du système (2.4) est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 27 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 60 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 37 \\ \varepsilon & 60 & \varepsilon & 67 \end{bmatrix}.$$

En utilisant l'équation (2.7), nous avons évalué les dates des douze premiers passages des bus aux arrêts du réseau, donnés par les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} X(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix}, & X(2) &= \begin{pmatrix} 60 \\ 93 \\ 70 \\ 100 \end{pmatrix}, & X(3) &= \begin{pmatrix} 120 \\ 153 \\ 137 \\ 167 \end{pmatrix}, & X(4) &= \begin{pmatrix} 180 \\ 213 \\ 204 \\ 234 \end{pmatrix}, & X(5) &= \begin{pmatrix} 240 \\ 273 \\ 271 \\ 301 \end{pmatrix}, & X(6) &= \begin{pmatrix} 300 \\ 333 \\ 338 \\ 368 \end{pmatrix}, \\ X(7) &= \begin{pmatrix} 360 \\ 393 \\ 405 \\ 435 \end{pmatrix}, & X(8) &= \begin{pmatrix} 420 \\ 453 \\ 472 \\ 502 \end{pmatrix}, & X(9) &= \begin{pmatrix} 480 \\ 513 \\ 539 \\ 569 \end{pmatrix}, & X(10) &= \begin{pmatrix} 540 \\ 573 \\ 606 \\ 636 \end{pmatrix}, & X(11) &= \begin{pmatrix} 600 \\ 633 \\ 673 \\ 703 \end{pmatrix}, & X(12) &= \begin{pmatrix} 660 \\ 693 \\ 740 \\ 770 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Compte tenu du cas traité ($\lambda_{i+1}/\lambda_i = 7$ min) et de l'expression (2.9), les dix premiers temps de correspondance regroupés dans le vecteur $T_{i,i+1}$ sont alors déterminés :

$$T_{i,i+1} = [T_{i,i+1}(1,1), T_{i,i+1}(2,2), T_{i,i+1}(3,3), \dots, T_{i,i+1}(8,8), T_{i,i+1}(9,9), T_{i,i+1}(10,10)]^T,$$

$$T_{i,i+1} = [0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63]^T.$$

Le temps total de correspondance associé à ces dix premiers voyages est $T_{\text{corr}}(10) = 315$ min.

Dans cet exemple, le bus B_{i+1} passe pour la première fois en $Sc_{i,i+1}$ avant le bus B_i (arrivée effective à la date 30). Il devra donc attendre ce dernier pendant un temps $(x_{i,1}(1) \otimes \tau_{i,1}) / (x_{i+1,1}(1) \otimes \tau_{i+1,1}) = 3$ minutes. Il ne pourra donc quitter cet arrêt qu'à l'instant $x_{i+1,2}(1) = 33$ minutes (au lieu de 30 minutes). A partir du deuxième passage, c'est B_i qui arrivera en premier à la station de correspondance. La planification initialement prévue pour B_{i+1} sera alors modifiée par la contrainte de synchronisation imposée à la ligne L_{i+1} . Elle devra donc subir globalement un décalage égal au temps d'attente de ce bus lors de son premier passage.

Au delà des dix premières correspondances, la formule (2.9) ne permet plus de déterminer le temps d'attente associé. En effet, l'hypothèse relative à l'alternance entre les

passages des bus des deux lignes à la station de correspondance ne se trouve plus vérifiée. Or le onzième passage de B_i se produit avant le dixième passage de B_{i+1} (et non entre le dixième et le onzième). Il en résulte une accumulation de deux jetons dans la place P_i dont un seul sera prélevé au dixième tir de la transition $x_{i+1,2}$. Le fonctionnement du modèle graphique ne correspondra donc plus à la réalité du réseau, ce qui s'identifie dès lors que $x_{i,2}(k+1)$ devient inférieur à $x_{i+1,2}(k)$. Ainsi, dans notre exemple, la formule (2.9) fournit le résultat $T_{i,i+1}(11, 11)=703/633=70$ min, alors qu'en réalité $T_{i,i+1}(11, 11)$ n'existe pas et nous devrions trouver $T_{i,i+1}(11, 10)=x_{i+1,2}(10)/x_{i,2}(11)=636/633=3$ min. Mais $T_{i,i+1}(k_i, k_{i+1})$, où $k_i \neq k_{i+1}$, n'a pas été défini ici. Il est important de noter que le phénomène d'accumulation des jetons est indépendant du fonctionnement en mode synchronisé du réseau de transport considéré.

En conclusion, si pour le nombre de voyages N_{\max} étudiés, ou si sur la période d'évaluation considérée, toutes les hypothèses posées précédemment sont respectées, le modèle proposé permet d'évaluer les performances du réseau dans le cas de la synchronisation des bus. Par contre, si lors de l'étude il se produit une accumulation de jetons, alors le modèle graphique proposé ne permet pas de représenter le fonctionnement réel du réseau, même si les bus de deux lignes successives doivent s'attendre aux points d'échange. Nous avons donc été amenés à enrichir le modèle initial afin d'éviter ce problème. Toutefois, les solutions apportées sont similaires à celles considérées lors de l'étude d'un mode de fonctionnement non-synchronisé des bus. Le problème d'accumulation des jetons sera donc traité directement dans le paragraphe suivant dans le cas de ce deuxième mode de fonctionnement.

4 Étude du système dans le cas de non-synchronisation des bus

4.1 Extension du modèle GET initial

Dans ce paragraphe, nous étudions le réseau de bus à n lignes décrit initialement sans prendre en compte la synchronisation des bus. Nous supposons que chaque bus arrivant à la station de correspondance quitte celle-ci juste après la descente et/ou la montée de passagers. Dans ce cas, le temps d'attente des bus aux arrêts de correspondance n'existe pas (seuls les passagers attendent). L'hypothèse d'alternance des bus donnée dans le paragraphe précédent (§ 3.1.3) relative à l'ordre de passage des bus à la station de correspondance ne s'impose plus ici et n'est donc plus considérée. Pour l'étude de ce nouveau fonctionnement, la représentation GET que nous avons utilisée ne suffit plus pour modéliser le système. Nous devons donc tout d'abord enrichir le modèle utilisé dans le paragraphe précédent (figure 2.5), ce qui nous permet d'obtenir le graphe de la figure 2.6, associé aux lignes L_i et L_{i+1} .

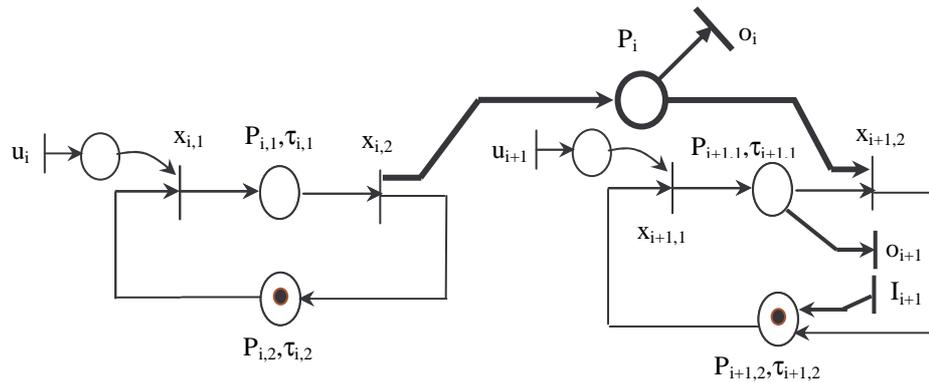


Figure 2.6 : Le nouveau modèle avec les modifications considérées.

Sur ce graphe nous avons ajouté à certaines places des transitions appelées sources et/ou puits afin de modéliser tous les passages possibles des bus aux arrêts du réseau. Cet ajout de transitions a pour objectif d'éliminer les deux problèmes identifiés précédemment : tout d'abord l'accumulation de jetons représentant des lots de passagers en attente provenant de différents passages du (ou des) bus B_i . L'ajout d'une transition puits o_i au niveau de la place P_i du modèle GET de la figure 2.5 sert à regrouper ces lots en un seul groupe de passagers que le prochain bus B_{i+1} pourra emmener. Pour cela, le tir de cette transition doit se produire dès que deux jetons se trouvent en P_i . Le jeton restant dans cette place représente alors l'ensemble des passagers en attente. Le second problème concerne le blocage d'un jeton (bus) au niveau de la place $P_{i+1,1}$ du GET, qui se justifiait jusqu'alors par le fonctionnement synchronisé du réseau au point d'échange. La transition $x_{i+1,2}$ symbolise toujours le départ de la station de correspondance d'un bus B_{i+1} qui vient d'embarquer des passagers en attente. Toutefois si aucun passager n'est en attente au moment du passage de B_{i+1} , ce bus doit désormais continuer sa course. Dans ce cas, le départ du bus de $Sc_{i,i+1}$ est rendu possible si nous associons à la place $P_{i+1,1}$ une transition puits o_{i+1} . Le tir de cette transition est provoqué si un jeton est présent dans la place $P_{i+1,1}$ (depuis $\tau_{i+1,1}$ unités de temps) mais pas dans P_i , ce qui interdit le franchissement de $x_{i+1,2}$. Ensuite, pour permettre la poursuite effective du trajet de B_{i+1} sur L_{i+1} , nous associons une transition source I_{i+1} à la place $P_{i+1,2}$. Lorsqu'un jeton est retiré de la place $P_{i+1,1}$ par le tir de o_{i+1} , le tir de I_{i+1} doit être déclenché pour ajouter un jeton à la place $P_{i+1,2}$.

Le modèle que nous proposons appartient à une classe de RdP qui a été introduite dans [Lah et al, 99] pour la modélisation d'un système de production. Il s'agit des *graphes d'événements temporisés avec ajout/retrait dynamique de jetons* (GETARDJ).

4.2 Les GETARDJ : une classe de réseaux de Petri avec conflits

L'ajout et le retrait de transitions sur le modèle GET permettent de décrire le fonctionnement réel du réseau. Cependant, au niveau du modèle graphique, le retrait provoque des conflits structurels qui sont en général difficiles à résoudre. La configuration d'un conflit structurel dans un RdP est représentée par le graphe de la figure 2.7. Cette situation correspond à un ensemble d'au moins deux transitions (ici T_3 et T_4) qui ont une place d'entrée P_2 en commun (le marquage de P_2 étant nul). On note ce conflit par $K = \langle P_2, \{T_3, T_4, \dots\} \rangle$. Les RdP avec conflits forment un sur-ensemble des graphes d'événements temporisés qui

constitue un bon compromis entre la puissance de modélisation et la possibilité de résoudre certains problèmes.

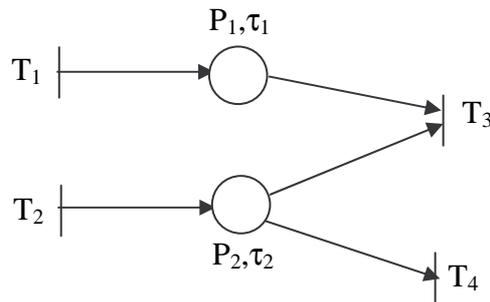


Figure 2.7 : Configuration d'un conflit structurel dans un réseau de Petri.

Pour le graphe 2.7, si la place P_2 ne contient qu'un seul jeton, alors seule une des deux transitions T_3 ou T_4 peut être franchie. La résolution du conflit revient donc à choisir la transition à franchir. D'un point de vue structurel, les transitions en situation de conflit sont validées en fonction de la disponibilité des jetons dans leurs places en amont. En effet, pour les transitions T_3 et T_4 , où $T_3 \in P_1^\bullet \cap P_2^\bullet$ et $T_4 \in P_2^\bullet$, la règle du franchissement est donnée comme suit :

- si chacune des deux places P_1 et P_2 contient un jeton, et les temps de séjour τ_1 et τ_2 sont achevés, alors le privilège de franchissement est donné à la transition T_3 et pas à la transition T_4 ;
- si la place P_1 ne contient aucun jeton, tandis qu'un jeton se trouve dans la place P_2 et le temps de séjour τ_2 est achevé, alors T_4 sera franchie et pas T_3 ;
- si la place P_1 contient un jeton et P_2 ne contient aucun jeton, alors aucune de ces deux transitions n'est validée. Dans ce cas, pour franchir T_3 ou T_4 , il faut attendre l'arrivée d'un autre jeton dans la place P_2 .

Selon cette règle de franchissement, nous constatons que le tir de la transition T_3 dépend à la fois du tir de T_1 et de T_2 , tandis que celui de la transition T_4 dépend seulement du tir de la transition T_2 .

Dans le modèle de la figure 2.6, deux conflits apparaissent : le premier, noté $K_1 = \langle P_i, \{x_{i+1,2}, o_i\} \rangle$, est associé au phénomène d'accumulation de jetons ; le second, noté $K_2 = \langle P_{i+1,1}, \{x_{i+1,2}, o_{i+1}\} \rangle$, est associé au phénomène de blocage. La règle de franchissement que nous venons d'énoncer s'applique donc bien dans le cas de ces deux conflits

4.3 Modèle GET avec retrait dynamique de jetons

En utilisant la classe de RdP avec conflits définie précédemment, nous modélisons le réseau global de bus de la figure 2.1 par un modèle GET avec retrait dynamique de jetons (GETRDJ), dans lequel il n'y a plus d'ajout dynamique de jetons. En effet, à partir des règles de tir des transitions adjointes aux places du modèle de la figure 2.6, nous constatons que le jeton qui franchit la transition o_{i+1} est celui qui franchit immédiatement après, la transition I_{i+1} . Compte tenu de cette remarque, il est possible de simplifier le comportement du modèle GETARDJ proposé en créant une connexion entre la transition puits o_{i+1} et la transition source I_{i+1} , ou en fusionnant les deux transitions. Dans ce dernier cas, le tir de la transition résultante interne au modèle, notée $x_{i+1,3}$, provoque le retrait du jeton de la place $P_{i+1,1}$ et l'ajout du même jeton à la place $P_{i+1,2}$.

Dans ce nouveau modèle graphique, nous représentons les arrêts, les trajets et les temps de déplacement des bus sur chaque ligne L_i ($1 \leq i \leq n$) du réseau par les éléments suivants (figure 2.8) :

- Transitions :
 - u_i : transition associée à l'autorisation de début d'une course depuis la station de départ Sd_i ;
 - $x_{i,1}$: station de départ Sd_i ;
 - $x_{i,2}$: station de correspondance $Sc_{i-1,i}$ dans le cas où le bus de L_i effectue une correspondance avec un bus de la ligne L_{i-1} ;
 - $x_{i,3}$: station de correspondance $Sc_{i-1,i}$ dans le cas où le bus B_i n'effectue pas de correspondance avec la ligne L_{i-1} ;
 - $x_{i,4}$: station de correspondance $Sc_{i,i+1}$;
 - o_i : transition puits donnée dans la figure 2.6 ;
- Places et arcs associés :
 - $P_{i,1}$, $P_{i,2}$ et $P_{i,3}$: déplacements des bus B_i respectivement entre les arrêts Sd_i et $Sc_{i-1,i}$, $Sc_{i-1,i}$ et $Sc_{i,i+1}$ et enfin entre $Sc_{i,i+1}$ et Sd_i ;
 - P_i : attente de passagers venant de B_i à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$;
 - E_i : autorisation de début d'une course ;
- Temporisations :
 - $\tau_{i,1}$, $\tau_{i,2}$ et $\tau_{i,3}$: temps de déplacement associés respectivement aux places $P_{i,1}$, $P_{i,2}$ et $P_{i,3}$. La somme de ces temporisations représente le temps de parcours de L_i . Les temporisations des autres places du réseau (P_i et E_i) sont nulles.

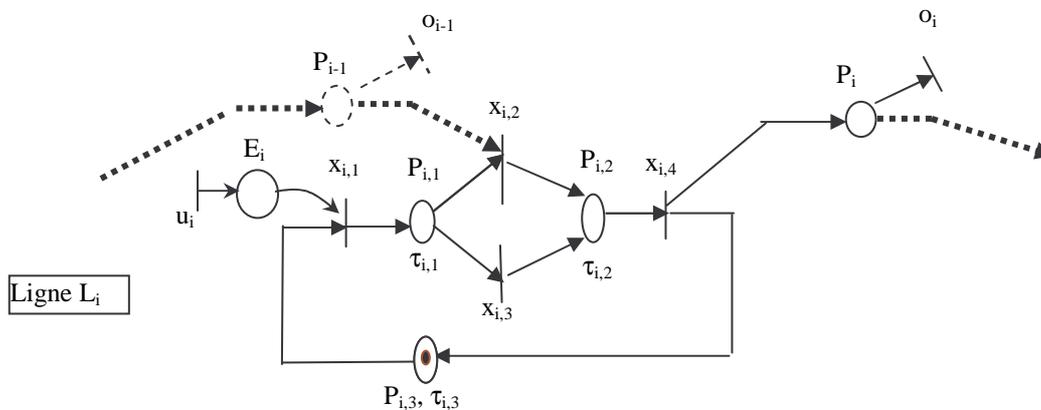


Figure 2.8 : GETRDJ d'une ligne L_i .

Compte tenu de ces notations, le modèle GETRDJ, qui représente le réseau global de bus étudié, est donné par la figure 2.9. Il se comporte comme celui donné dans la figure 2.6.

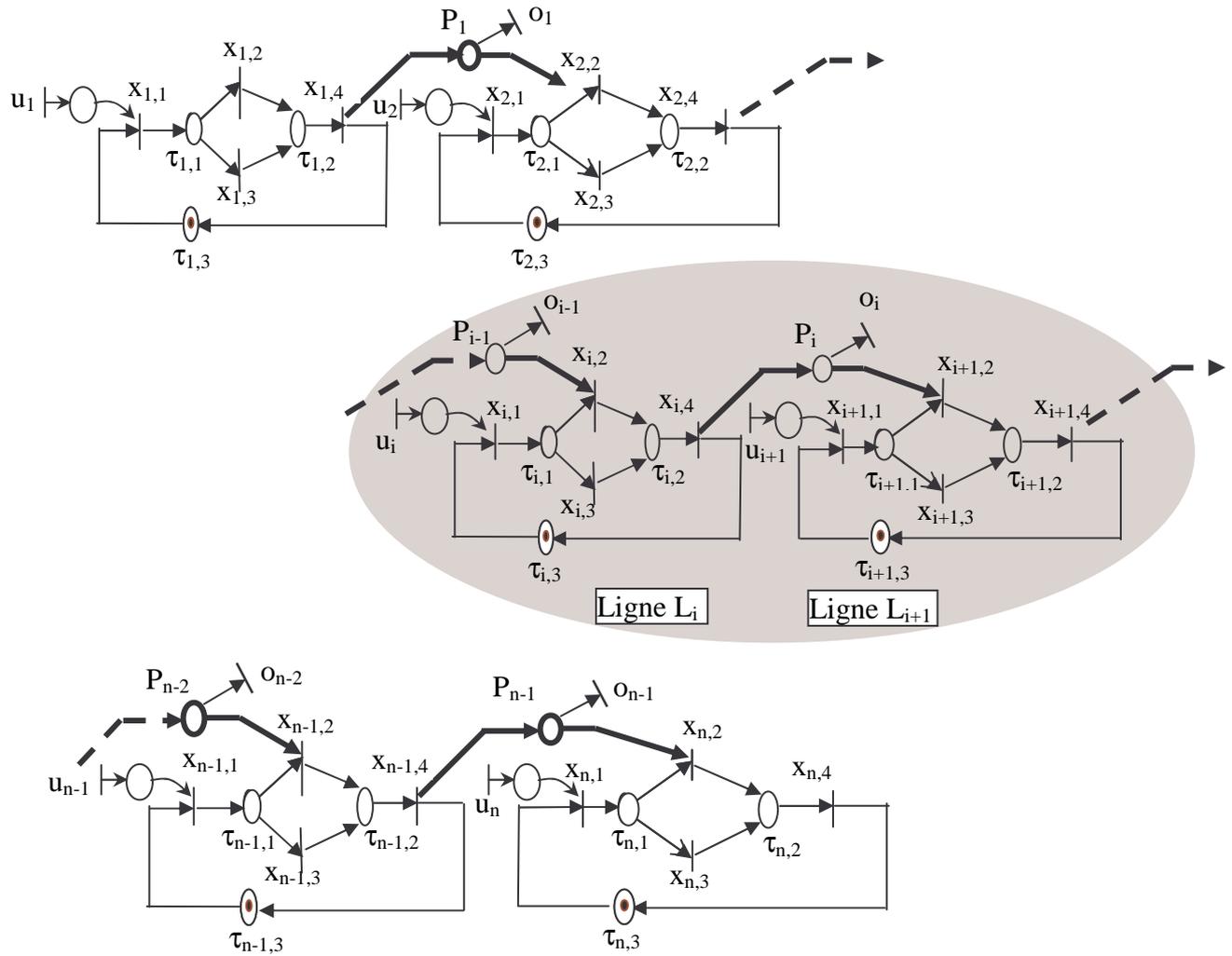


Figure 2.9 : Le modèle GETRDJ modélisant le réseau de bus étudié.

Remarque : La ligne L_1 possède une seule station de correspondance avec la ligne L_2 (modélisée par la transition $x_{1,4}$) ; il est donc possible de représenter cette ligne par un circuit composé de transitions associées aux stations de départ et de correspondance Sd_1 et $Sc_{1,2}$ et de places qui relient ces transitions. Mais, afin d'homogénéiser les circuits du modèle graphique de la figure 2.9 (chaque circuit contient quatre transitions $x_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq 4$), nous avons ajouté au circuit qui modélise L_1 la transition $x_{1,2}$ qui ne sera jamais franchie ainsi que la transition $x_{1,3}$ qui sera validée après chaque tir de la transition $x_{1,1}$.

4.4 Modèle (max, plus) linéaire non-stationnaire

Il a été montré dans [Lah, 00] qu'un GET sur lequel des transitions sources et/ou puits sont adjointes à certaines places, peut être représenté par un modèle linéaire à paramètres variables dans l'algèbre (min, plus). Dans notre cas, nous allons étendre cette étude en montrant qu'un modèle GETRDJ peut être représenté également par une représentation d'état à paramètres variables dans l'algèbre (max, plus). La démarche adoptée pour établir les équations d'évolution dans l'algèbre (max, plus) d'un GETRDJ est proche de celle connue pour les GET. Un soin particulier doit être prêté aux conflits structurels dans un tel modèle ([Lah, 00] et [Nait et al, 02a]).

Dans le but d'étudier quelques propriétés analytiques du réseau de bus global donné dans la figure 2.1 et d'évaluer ses performances en termes de temps de correspondance, nous décrivons le modèle graphique qui le représente par un modèle mathématique linéaire dans l'algèbre des dioïdes. L'apparition des conflits structurels sur ce modèle graphique nous conduit à obtenir un modèle linéaire non-stationnaire.

Pour le modèle GETRDJ de la figure 2.9, le nombre de tirs d'une transition en aval et celui d'une transition en amont d'une place en situation de conflits ne sont pas identiques en général. Nous donnons un tableau récapitulatif dans lequel nous exprimons les différentes correspondances entre les nombres de franchissement des transitions du modèle.

| $k^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $k^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $(k-1)^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $k_{i,3}^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $k_{i,4}^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $k_{i,5}^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $k_{i,6}^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $k_{i,7}^{\text{ème}}$ tir de | correspond au $k_{i,8}^{\text{ème}}$ tir de |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{i,1}$ | u_i | $X_{i,4}$ | | | | | | |
| $X_{i,2}$ | | | $X_{i,1}$ | $X_{i-1,4}$ | | | | |
| $X_{i,3}$ | | | | | | $X_{i,1}$ | | |
| $X_{i,4}$ | | | | | | | $X_{i,2}$ | $X_{i,3}$ |
| O_i | | | | | $X_{i,4}$ | | | |

Tableau 2.2 : Correspondances entre les nombres de franchissement des transitions du modèle GETRDJ.

Dans un premier temps, nous décrivons le comportement dynamique du graphe par un système d'équations exprimées dans l'algèbre usuelle. Par exemple, pour le circuit associé à une ligne L_i ($2 \leq i \leq n-1$), nous obtenons :

$$x_{i,1}(k) = \text{Max} [x_{i,4}(k-1) + \tau_{i,3}, u_i(k)]$$

$$x_{i,2}(k) = \text{Max} [\tau_{i,1} + x_{i,1}(k_{i,3}), x_{i-1,4}(k_{i,4})]$$

$$x_{i,3}(k) = x_{i,1}(k_{i,6}) + \tau_{i,1}$$

$$x_{i,4}(k) = \text{Max} [\tau_{i,2} + x_{i,2}(k_{i,7}), \tau_{i,2} + x_{i,3}(k_{i,8})]$$

$$o_i(k) = x_{i,4}(k_{i,5})$$

le bus B_i commence son $k^{\text{ème}}$ tour après avoir achevé le tour $k-1$, et si l'autorisation lui en est donnée.

le $k^{\text{ème}}$ tir de la transition $x_{i,2}$ est déclenché si à la fois des passagers et le bus B_i sont présents à l'arrêt de correspondance $Sc_{i-1,i}$. Les passagers descendent du bus B_{i-1} qui accomplit son $k_{i,4}^{\text{ème}}$ tour ($k_{i,4}^{\text{ème}}$ tir de $x_{i-1,4}$); B_i réalise son $k_{i,3}^{\text{ème}}$ tour.

B_i effectue un $k_{i,6}^{\text{ème}}$ tour; il n'embarque aucun passager (venant de L_{i-1}) à l'arrêt de correspondance $Sc_{i-1,i}$. C'est la $k^{\text{ème}}$ fois que cette situation se produit ($k^{\text{ème}}$ tir de $x_{i,3}$).

le dernier passage de B_i à l'arrêt $Sc_{i-1,i}$ correspond au $k^{\text{ème}}$ tour de ce bus. Sur ces k tours, $k_{i,7}$ correspondances ont été assurées et $k_{i,8}$ passages en $Sc_{i-1,i}$ n'ont pas donné lieu à un échange entre les lignes L_{i-1} et L_i .

le $k^{\text{ème}}$ retrait d'un jeton de la place P_i correspond au $k_{i,5}^{\text{ème}}$ tir de $x_{i,4}$ ($k_{i,5}^{\text{ème}}$ arrivée du bus B_i à l'arrêt $Sc_{i-1,i}$).

Pour la ligne L_1 la transition $x_{1,2}$ n'est jamais franchie, et pour la ligne L_n , o_n n'existe pas. Les autres équations sont identiques pour $i=1$ et $i=n$.

Dans les équations précédentes, nous remplaçons l'opérateur "Max" par l'opérateur " \oplus " et "+" par " \otimes " (ou par "." tout simplement). De plus, nous posons : $\forall k \geq 1, x_{1,2}(k) = \varepsilon$, puisque $x_{1,2}$ n'est jamais franchie. Donc pour notre réseau global, nous pouvons déduire du modèle GETRDJ de la figure 2.9 le modèle d'état suivant exprimé dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \quad (\text{Ligne } L_1) & \left\{ \begin{array}{l} x_{1,1}(k) = \tau_{1,3} \otimes x_{1,4}(k-1) \oplus u_1(k) \\ x_{1,2}(k) = \varepsilon \\ x_{1,3}(k) = \tau_{1,1} \otimes x_{1,1}(k) \\ x_{1,4}(k) = \tau_{1,2} \otimes x_{1,3}(k) \end{array} \right. \\ (\text{Ligne } L_i) \quad \forall 2 \leq i \leq n & \left\{ \begin{array}{l} x_{i,1}(k) = \tau_{i,3} \otimes x_{i,4}(k-1) \oplus u_i(k) \\ x_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k_{i,3}) \oplus x_{i-1,4}(k_{i,4}) \\ x_{i,3}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k_{i,6}) \\ x_{i,4}(k) = \tau_{i,2} \otimes x_{i,2}(k_{i,7}) \oplus \tau_{i,2} \otimes x_{i,3}(k_{i,8}) \\ o_i(k) = x_{i,4}(k_{i,5}) \end{array} \right. \quad (2.10) \\ \text{et } \forall k \geq 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1, & \left\{ \begin{array}{l} x_{i,1}(k) = \tau_{i,3} \otimes x_{i,4}(k-1) \oplus u_i(k) \\ x_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k_{i,3}) \oplus x_{i-1,4}(k_{i,4}) \\ x_{i,3}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k_{i,6}) \\ x_{i,4}(k) = \tau_{i,2} \otimes x_{i,2}(k_{i,7}) \oplus \tau_{i,2} \otimes x_{i,3}(k_{i,8}) \\ o_i(k) = x_{i,4}(k_{i,5}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \forall 2 \leq i \leq n \\ \forall 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{3, 4, 6\} \\ \forall 7 \leq j \leq 8 \end{array} \right. \begin{array}{l} k_{i,j} \geq k \\ k_{i,j} \leq k \\ k_{i,5} \geq k \end{array}$

Remarque : Comme pour les modèles précédents, les égalités du système (2.10) sont en réalité des inégalités (par exemple $x_{1,1}(k) \geq \tau_{1,3} \otimes x_{1,4}(k-1) \oplus u_1(k)$). En effet, la temporisation associée à chaque place du réseau de Petri correspond à une durée minimale de station dans cette place. Le temps réel pourrait être égal à ce temps minimal plus un temps d'attente (correspondant à une attente d'un bus à un arrêt quelconque du réseau en dehors des temps de montée et descente des passagers déjà inclus). Néanmoins, pour ce système, nous cherchons la plus petite solution pour ce système (évolution la plus rapide du graphe : celle où chaque transition est franchie dès que possible), d'où les égalités.

Après avoir donné le modèle d'état décrivant le comportement du système considéré, nous définissons les critères à évaluer à partir de la solution de ce modèle. Comme dans le cas précédent, cas de synchronisation, nous évaluons les différentes dates de passage des bus aux arrêts du réseau, les temps de correspondance aux différentes stations de correspondance et, d'une manière générale, le temps de parcours d'un passager d'une ligne L_i à une ligne L_j , à savoir :

- $x_{i,1}(k), x_{i,2}(k), x_{i,3}(k)$ et $x_{i,4}(k)$, pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $k \geq 1$;
- $T_{i,i+1}(k_i, k_{i+1}) = x_{i+1,2}(k_{i+1}) - x_{i,4}(k_i)$: temps de correspondance entre le $k_i^{\text{ème}}$ bus B_i et $k_{i+1}^{\text{ème}}$ bus B_{i+1} ;
- $T_{\text{voyage}}(i, j, t)$: temps de voyage d'un passager, arrivant à la station S_{d_i} à la date t , de la ligne L_i à la ligne L_j .

Le système (2.10) représente le fonctionnement d'un réseau dans le cas le plus général où les bus s'attendent ou ne s'attendent pas selon les points d'échange considérés. Lorsque le bus B_i doit attendre systématiquement à l'arrêt $Sc_{i-1,i}$ pour que les passagers venant de L_{i-1} puissent réaliser leur correspondance, alors la transition $x_{i,3}$ du modèle GETRDJ de la figure

2.9 n'est jamais franchie. Dans le modèle (max, plus) correspondant à cette situation, l'équation associée devient : $\forall k \geq 2, \forall 2 \leq i \leq n, x_{i,3}(k) = \varepsilon$. Par rapport au modèle du §3 (étude du cas de non-synchronisation), la différence essentielle réside dans l'ajout de la transition puits o_{i-1} qui permet de résoudre le problème d'accumulation de jetons à la place P_{i-1} . Ceci implique une équation supplémentaire associée à $o_{i-1}(k)$, telle qu'elle apparaît dans le système (2.10). L'hypothèse d'alternance des bus à la station de correspondance peut alors être supprimée.

Pour résoudre le système (2.10), nous l'écrivons d'abord sous forme d'un système d'équations de récurrence d'ordre 1. Pour cela, nous supposons que les bus du réseau étudié fonctionnent d'une façon périodique. Ainsi, le bus B_i passe à chaque arrêt de la ligne L_i ($1 \leq i \leq n$) toutes les β_i unités de temps, où β_i est donné selon l'attente ou non des bus aux stations de correspondance d'une partie du réseau terminée par la ligne L_i ($(L_r, L_{r+1}, \dots, L_{i-1}, L_i)$, avec $r < i$). En effet, si les attentes des bus sont imposées aux stations de correspondance $Sc_{r,r+1}$ jusqu'à $Sc_{i-1,i}$ alors la période de la ligne L_i sera β_i et non plus λ_i (avec $\lambda_i = \tau_{i,1} + \tau_{i,2} + \tau_{i,3}$), avec :

- $\beta_1 = \lambda_1,$
- $\forall 2 \leq i \leq n,$
- $\beta_i = \lambda_i \oplus \bigoplus_{j=r}^{i-1} \lambda_j$, où $r \geq 1$ est donné tel que l'attente des bus est imposée aux arrêts de correspondance de la ligne L_r à la ligne L_i (et pas d'attente en $Sc_{r-1,r}$),
- $\beta_i = \lambda_i$, s'il n'existe pas d'attente entre L_i et L_{i-1} .

La date de chaque franchissement d'une transition qui représente un arrêt du réseau peut alors s'exprimer en fonction des dates antérieures de franchissement de la même transition et de β_i :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2 \text{ et } j = 1, 3; & - x_{1,j}(k) = \beta_1 \otimes x_{1,j}(k-1), \\ \forall i = 2, \dots, n; & - x_{i,4}(k) = \beta_i \otimes x_{i,4}(k-1), \\ & - x_{i,1}(k_{i,3}) = \beta_i \otimes x_{i,1}(k_{i,3}-1) = \dots = \beta_i^{\otimes[(k_{i,3}/k) \otimes 1]} \otimes x_{i,1}(k-1), \\ \text{De même :} & - x_{i-1,4}(k_{i,4}) = \beta_{i-1}^{\otimes[(k_{i,4}/k) \otimes 1]} \otimes x_{i-1,4}(k-1), \\ & - x_{i,1}(k_{i,6}) = \beta_i^{\otimes[(k_{i,6}/k) \otimes 1]} \otimes x_{i,1}(k-1), \\ & - x_{i-1,4}(k_{i-1,5}) = \beta_{i-1}^{\otimes[k_{i-1,5}/k]} \otimes x_{i-1,4}(k). \end{aligned}$$

Le système (2.10) peut alors être mis sous la forme du système d'équations de récurrence d'ordre 1 suivant :

$$\begin{aligned}
 & \forall k \geq 2, \text{ (Ligne } L_1) \\
 & \text{(Ligne } L_i) \quad \forall 2 \leq i \leq n \quad \left\{ \begin{array}{l}
 x_{1,1}(k) = \tau_{1,3} \otimes x_{1,4}(k-1) \oplus u_1(k) \\
 x_{1,2}(k) = \varepsilon \\
 x_{1,3}(k) = \tau_{1,1} \otimes \beta_1 \otimes x_{1,1}(k-1) \\
 x_{1,4}(k) = \beta_1 \otimes x_{1,4}(k-1) \\
 x_{i,1}(k) = \tau_{i,3} \otimes x_{i,4}(k-1) \oplus u_i(k) \\
 x_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes \beta_i^{\otimes[(k_{i,3}/k) \otimes 1]} x_{i,1}(k-1) \oplus \beta_{i-1}^{\otimes[(k_{i,4}/k) \otimes 1]} x_{i-1,4}(k-1) \\
 x_{i,3}(k) = \tau_{i,1} \otimes \beta_i^{\otimes[(k_{i,6}/k) \otimes 1]} \otimes x_{i,1}(k-1) \\
 x_{i,4}(k) = \beta_i \otimes x_{i,4}(k-1) \\
 \text{et } \forall 1 \leq i \leq n-1 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 o_i(k) = \beta_i^{\otimes(k_{i,5}/k)} \otimes x_{i,4}(k)
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l}
 \forall 2 \leq i \leq n \quad \forall j \in \{3, 4, 6\} \quad k_{i,j} \geq k \\
 \forall 1 \leq i \leq n-1 \quad k_{i,5} \geq k
 \end{array} \right.$$

Pour mettre le système (2.11) sous une forme matricielle, nous définissons les vecteurs :
 $X(k) = [x_{1,1}(k), x_{1,2}(k), x_{1,3}(k), x_{1,4}(k), \dots, x_{n,1}(k), x_{n,2}(k), x_{n,3}(k), x_{n,4}(k)]^T$: vecteur d'état;
 $U(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)]^T$: vecteur d'entrée ;
 $Y(k) = [o_1(k), o_2(k), \dots, o_{n-1}(k)]^T$: vecteur des transitions puits.

Nous obtenons donc :

$$\forall k \geq 2, \quad \left\{ \begin{array}{l}
 X(k) = A(k-1) \otimes X(k-1) \oplus B \otimes U(k) \\
 Y(k) = C(k) \otimes X(k)
 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Les matrices caractéristiques du système sont $A(k-1)$, B et $C(k)$, avec $A(k-1) \in \mathbb{R}_{\max}^{(4n) \times (4n)}$,
 $B \in \mathbb{R}_{\max}^{(4n) \times (n)}$ et $C(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{(n-1) \times (4n)}$. Elles sont définies par :

et

$$B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & e \end{bmatrix}.$$

Dans ces matrices, nous identifions plusieurs coefficients non constants :

- $k_{i,3}$, $k_{i,4}$ et $k_{i,6}$ ($2 \leq i \leq n$) pour la matrice $A(k-1)$;
- $k_{i,5}$ ($1 \leq i \leq n-1$) pour la matrice $C(k)$.

Pour la suite du chapitre, et comme dans le cas du système (2.4), nous considérons que l'entrée du système est nulle. En effet, dans ce chapitre, nous souhaitons évaluer les performances d'un réseau existant et non agir sur ce système par l'intermédiaire d'une commande représentée par le vecteur U . Alors le système (2.12) devient :

$$\forall k \geq 2, \quad \begin{cases} X(k) = A(k-1) \otimes X(k-1) \\ Y(k) = C(k) \otimes X(k) \end{cases} \quad (2.15)$$

5 Résolution du modèle (max, plus) linéaire non-stationnaire

5.1 Résolution des conflits structurels

Comme nous l'avons déjà signalé, l'aspect non-stationnaire du système obtenu est dû aux conflits structurels associés au modèle GETRDJ de la figure 2.9. Pour résoudre le système (2.15) et évaluer les différents états du système, nous résolvons au préalable tous les conflits liés au modèle graphique en déterminant *a priori* les différentes relations entre les franchissements des transitions concernées. Elles permettent de définir les expressions de certains éléments des matrices caractéristiques $A(k-1)$ et $C(k)$ (2.13) et (2.14), en particulier les paramètres non-constants $k_{i,j}$. Ces coefficients dépendent de la valeur de k ; nous les notons $k_{i,j} = f_{i,j}(k)$, pour $2 \leq i \leq n$ et $j \in \{3, 4, 6\}$ (resp. $k_{i,5} = f_{i,5}(k)$ pour $1 \leq i \leq n-1$), et nous les appelons fonctions de routage. Ces fonctions autorisent ensuite l'évaluation des états du système à partir d'un état initial. Elles peuvent être déterminées en tenant compte des séquences de passage des bus aux arrêts de correspondance du réseau. Ces séquences dépendent des données du système étudié (l'état initial du réseau, les périodes des lignes, les

temps de déplacement entre les arrêts, etc.). Par exemple, si $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ (où λ_i et λ_{i+1} sont les périodes respectives des lignes L_i et L_{i+1}), alors, à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$, on constate que plusieurs passages de bus B_i peuvent se produire entre deux passages successifs de bus B_{i+1} . Ceci explique que, dans ce cas, le nombre de franchissements de la transition $x_{i+1,2}$ est plus grand que celui de la transition $x_{i+1,3}$. Par la suite nous déterminons les relations entre le passage de différents bus aux différentes stations du réseau. Pour cette démonstration, nous choisissons arbitrairement deux lignes du réseau L_i et L_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$). Nous en déduisons ensuite toutes les fonctions de routage pour l'ensemble des lignes du réseau. Le modèle GETRDJ qui représente un couple de lignes (L_i, L_{i+1}) est donné par la figure 2.10, correspondant à la partie grisée de la figure 2.9.

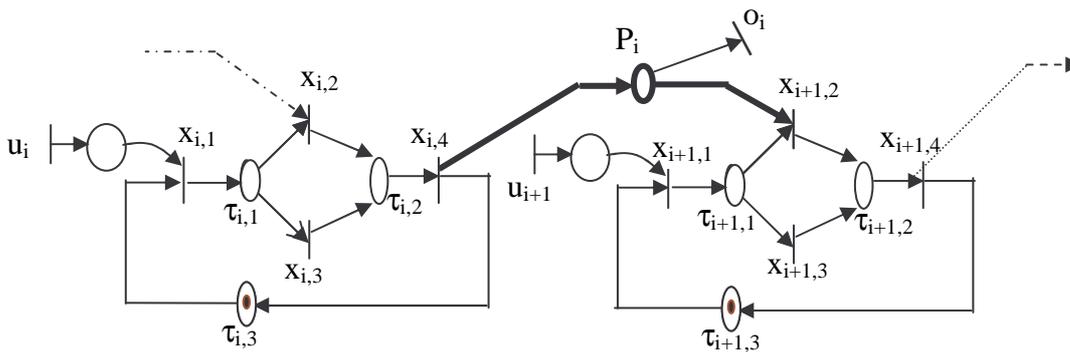


Figure 2.10 : GETRDJ représentant deux lignes L_i et L_{i+1} du réseau.

Le modèle mathématique (max, plus) linéaire non-stationnaire associé à ce système est obtenu à partir du modèle général (2.15) pour $n=2$. En effet, nous avons pris en compte les éléments suivants : puisque nous ne considérons que deux lignes du réseau, alors nous supposons qu'il n'existe pas de connexion, d'une part entre la ligne L_i et L_{i-1} , et d'autre part entre L_{i+1} et L_{i+2} . Il n'y a pas de perte de généralité, puisque si cette hypothèse n'est pas prise en compte ; nous aurons de plus d'autres fonctions de routage à considérer et dont les démonstrations sont similaires à celles des fonctions liées aux deux lignes L_i et L_{i+1} . En tenant compte de cette hypothèse, la ligne L_i de la figure 2.10 a un fonctionnement similaire à celui de la ligne L_1 du réseau global. Ainsi la transition $x_{i,2}$ ne sera jamais franchie ($\forall k \geq 2, x_{i,2}(k) = \varepsilon$). Il en résulte que le $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition $x_{i,3}$ correspondra au $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition $x_{i,1}$ ($\forall k \geq 2, x_{i,3}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k)$). Le système résultant ici équivaut donc :

- pour la ligne L_i , aux équations associées aux transitions de L_1 du système (2.10) ;
- pour la ligne L_{i+1} , aux équations tirées du système (2.10) pour une ligne quelconque du réseau global autre que L_1 .

Afin de résoudre ce système non-stationnaire, nous cherchons à déterminer les expressions explicites des éléments des matrices $A(k-1)$ et $C(k)$ associées. Les fonctions de routage auxquelles nous nous intéressons dépendent de l'état initial du système. Nous notons par $X(1)$ la condition initiale dont les composantes représentent les premières dates de franchissement des transitions du modèle GETRDJ de la figure 2.10 :

$$X(1) = [x_{i,1}(1), x_{i,2}(1), x_{i,3}(1), x_{i,4}(1), x_{i+1,1}(1), x_{i+1,2}(1), x_{i+1,3}(1), x_{i+1,4}(1)]^T.$$

Nous exprimons les fonctions de routage du système suivant la relation d'ordre qui existe entre les deux périodes β_i et β_{i+1} . Pour ce faire, nous introduisons la fonction indicatrice suivante :

$$\mathbf{1}_{\{a \geq b\}}^{\max} = \begin{cases} e & \text{si } a \geq b \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction nous permet de distinguer les cas suivants :

- $\beta_i < \beta_{i+1}$: cela signifie que la fréquence de passage réelle des bus à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$ est plus élevée pour la ligne L_i que pour la ligne L_{i+1} ;
- $\beta_i > \beta_{i+1}$.

De même, on définit $\gamma_{i+1}(1)$ tel que :

$$\gamma_{i+1}(1) = \begin{cases} x_{i+1,1}(1) + \tau_{i+1,1} & \text{si pas d'attente entre } L_i \text{ et } L_{i+1} \\ x_{i+1,2}(1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le cas où les deux périodes sont égales ($\beta_i = \beta_{i+1}$) ne sera pas traité ici puisqu'il représente un cas trivial où les horaires des bus peuvent être planifiés de telle sorte à ce que les temps de correspondance soient nuls pour chaque voyage des bus. La démonstration des différentes fonctions de routage $k_{i,j} = f_{i,j}(k)$, données ci-après, est exposée dans l'annexe A.1.

$$\triangleright \left| \begin{aligned} k_{i+1,3} = & [S_{i+1,3}(k) \otimes \mathbf{1}_{\{S_{i+1,3}(k) \in \mathbb{N}\}}^{\max} \oplus E(S_{i+1,3}(k)+1) \otimes \mathbf{1}_{\{S_{i+1,3}(k) \notin \mathbb{N}\}}^{\max}] \otimes \mathbf{1}_{\{\beta_i > \beta_{i+1}\}}^{\max} \\ & \oplus [k \otimes k'_{0,i+1}] \otimes \mathbf{1}_{\{\beta_i < \beta_{i+1}\}}^{\max}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{avec } S_{i+1,3}(k) = \frac{k\beta_i + x_{i,4}(1) - \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1} + \beta_i(k_{0,i+1} - 2)}{\beta_{i+1}}.$$

$$\triangleright \left| k_{i+1,4} = [k \otimes k_{0,i+1} / 1] \otimes \mathbf{1}_{\{\beta_i > \beta_{i+1}\}}^{\max} \oplus [E(S_{i+1,4}(k) + 1)] \otimes \mathbf{1}_{\{\beta_i < \beta_{i+1}\}}^{\max}, \right.$$

$$\text{avec } S_{i+1,4}(k) = \frac{k\beta_{i+1} - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1}(k'_{0,i+1} - 1)}{\beta_i}.$$

$$\triangleright \left| \begin{aligned} k_{i,5} = & [(k \otimes 1) \otimes \mathbf{1}_{\{x_{i,4}(1) \otimes \beta_i^k \leq \gamma_{i+1}(1)\}}^{\max}] \otimes \mathbf{1}_{\{\beta_i > \beta_{i+1}\}}^{\max} \oplus \\ & [(k \otimes 1) \otimes \mathbf{1}_{\{x_{i,4}(1) \otimes \beta_i^k < \gamma_{i+1}(1)\}}^{\max}] \oplus \\ & S_{i+1,5}(k) \otimes \mathbf{1}_{\{(x_{i,4}(1) \otimes \beta_i^k > \gamma_{i+1}(1)), \text{ avec } S_{i+1,5}(k) \in \mathbb{N} \text{ et } \beta_{i+1} \neq \beta_i\}}^{\max} \oplus \\ & E(S_{i+1,5}(k)+1) \otimes \mathbf{1}_{\{(x_{i,4}(1) \otimes \beta_i^k > \gamma_{i+1}(1)), \text{ avec } S_{i+1,5}(k) \notin \mathbb{N} \text{ et } \beta_{i+1} \neq \beta_i\}}^{\max}] \otimes \mathbf{1}_{\{\beta_i < \beta_{i+1}\}}^{\max}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{avec } S_{i+1,5}(k) = \frac{\beta_{i+1}k + x_{i,4}(1) - \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1} - \beta_i - \beta_{i+1}k'_{0,i+1}}{\beta_{i+1} - \beta_i}.$$

$$\triangleright k_{i+1,6} = [[k \otimes \mathbf{1}^{\max}_{\{\gamma_{i+1}(1) \otimes \beta_{i+1}^{k-1} \leq x_{i,4}(1)\}} \oplus E(S_{i+1,6}(k)+1) \otimes \mathbf{1}^{\max}_{\{(\gamma_{i+1}(1) \otimes \beta_{i+1}^{k-1} > x_{i,4}(1)), \text{ avec } \beta_{i+1} \neq \beta_i\}}] \otimes \mathbf{1}^{\max}_{\{\beta_i > \beta_{i+1}\}} \oplus [k \otimes \mathbf{1}^{\max}_{\{\gamma_{i+1}(1) \otimes \beta_{i+1}^{k-1} \leq x_{i,4}(1)\}}] \otimes \mathbf{1}^{\max}_{\{\beta_i < \beta_{i+1}\}}] \otimes \mathbf{1}^{\max}_{\{\text{si pas d'attente entre } Li \text{ et } Li+1\}} ,$$

$$\text{avec } S_{i+1,6}(k) = \frac{k\beta_i - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_i(1 - k_{0,i+1}) - \beta_{i+1}}{\beta_i - \beta_{i+1}} .$$

Ces fonctions de routage nous permettent d'exprimer explicitement les coefficients des matrices caractéristiques du système (2.15), puis de calculer ses solutions afin d'évaluer les temps de passage des bus aux différents arrêts du réseau étudié.

Les résultats obtenus ci-dessus peuvent être généralisés et appliqués au modèle global de la figure 2.9. En effet, pour chaque $1 \leq i \leq n-1$ (avec $n > 2$) et $3 \leq j \leq 6$, chaque fonction de routage $k_{i,j}$ détermine la transition du modèle GETRDJ (figure 2.9) qui doit être franchie.

5.2 Solution de l'équation d'état

L'état initial du système global est donné par la condition initiale $X(k_0)$. Souvent on prend $k_0 = 1$. Comme nous l'avons déjà signalé, certaines composantes du vecteur $X(1)$ sont des données initiales du système (dates de démarrage des bus de leurs stations de départ) ; les autres sont déduites en utilisant les temps de déplacement des bus sur le réseau et les fonctions de routage définies ci-dessus. Nous sommes alors en mesure de déterminer l'état du système à un moment donné $X(k)$. A partir du modèle (2.15) nous constatons que l'équation d'état est une récurrence linéaire homogène :

$$\forall k > 1, \quad X(k) = A(k-1) \otimes X(k-1).$$

La solution s'obtient par simple récurrence :

$$\begin{aligned} \forall k > k_0, \quad X(k) &= A(k-1) \otimes A(k-2) \otimes \dots \otimes A(k_0) \otimes X(k_0), \\ &= \Phi(k, k_0) \otimes X(k_0). \end{aligned} \tag{2.16}$$

où Φ peut être considérée comme une *matrice de transition* [Lah, 00] définie par :

$$\Phi(k, k_0) = \begin{cases} \text{Id} & \text{si } k = k_0 \\ A(k-1) \otimes A(k-2) \otimes \dots \otimes A(k_0) & \text{si } k > k_0 \\ \varepsilon & \text{si } k < k_0 \end{cases}$$

où Id (égale à E) est la matrice Identité dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} .

A partir du vecteur initial $X(1)$, la solution du système (2.15) est donc :

$$\forall k > 1, \quad X(k) = \Phi(k, 1) \otimes X(1). \tag{2.17}$$

5.3 Evaluation de performances

Dans ce paragraphe, notre objectif est d'évaluer et d'analyser la force et/ou la faiblesse d'un réseau de transport existant. L'évaluation est basée sur des critères temporels. Après avoir déterminé les équations de routage et ainsi résolu les conflits structurels du modèle graphique associé au réseau global, nous pouvons non seulement calculer les temps de correspondance entre chaque couple de ligne (L_i, L_{i+1}), mais nous pouvons aussi évaluer les temps de parcours des passagers sur les différents itinéraires du réseau. Considérons un passager qui arrive à l'instant (ou date) t , et par ses propres moyens (à pied par exemple), à un arrêt de départ Sd_i d'une ligne L_i ($1 \leq i \leq n$) du réseau global considéré. Ce passager désire se rendre à un arrêt destination Sa_j desservi par une autre ligne L_j (avec $1 \leq i < j \leq n$). Il emprunte le premier bus arrivant à la station de départ à partir de l'instant t . Il monte donc dans le bus B_i à l'instant $x_{i,1}(k_i)$ (correspondant au $k_i^{\text{ème}}$ passage de B_i à l'arrêt Sd_i), tel que $x_{i,1}(k_i-1) < t \leq x_{i,1}(k_i)$. $x_{i,1}(k_i-1)$ est l'instant du dernier départ d'un bus de Sd_i avant l'arrivée du passager à cette station. Si $i < j$, le passager effectue sa première correspondance à l'arrêt $Sc_{i,i+1}$ en changeant de bus et en empruntant le $(k_{i+1})^{\text{ème}}$ bus de la ligne L_{i+1} . Ce bus a quitté l'arrêt Sd_{i+1} à l'instant $x_{i+1,1}(k_{i+1})$ et arrive à la station de correspondance à l'instant $\tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k_{i+1})$. Nous notons $T_{i,i+1}(k_i, k_{i+1})$ le temps d'attente du passager lors de sa première correspondance. Ce temps est obtenu dans l'algèbre (max, plus) à partir de certaines composantes du vecteur d'état $X(k)$:

$$\forall 1 \leq i < n, \quad T_{i,i+1}(k_i, k_{i+1}) = x_{i+1,2}(k_{i+1}) / x_{i,4}(k_i), \quad (2.18)$$

où $x_{i+1,2}(k_{i+1})$ (resp. $x_{i,4}(k_i)$) représente la date de départ du bus B_{i+1} (resp. d'arrivée de B_i) à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$ pour la $k_{i+1}^{\text{ème}}$ (resp. $k_i^{\text{ème}}$) fois. Pour k_i donné, le paramètre k_{i+1} est déduit de la façon suivante :

$$k_{i+1} = \inf_p \{ p \in \mathbb{N} / x_{i+1,2}(p) \geq x_{i,4}(k_i) \}. \quad (2.19)$$

Après avoir effectué sa correspondance à la station $Sc_{i,i+1}$, et pour se rendre à un arrêt destination sur la ligne L_j ($i < j \leq n$), le passager considéré doit à nouveau changer de bus respectivement aux arrêts $Sc_{i+1,i+2}, \dots, Sc_{j-1,j}$. Le temps d'attente à chaque station de correspondance est calculé de la même façon que dans la formule (2.18). Le temps total d'attente de ce passager au cours de son trajet (de l'arrêt de départ Sd_i à l'arrêt d'arrivée Sa_j) est donné par la formule suivante :

$$\forall 1 \leq i < j \leq n, \quad T_{\text{corresp}}(i, j, t) = \bigotimes_{l=i}^{j-1} T_{l,l+1}(k_l, k_{l+1}). \quad (2.20)$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{où } k_l = \inf_m \{ m \in \mathbb{N} / x_{l,1}(m) \geq t \}, \\ \text{et } k_{l+1} = \inf_m \{ m \in \mathbb{N} / x_{l+1,2}(m) \geq x_{l,4}(k_l) \}. \end{array} \right.$$

Si $i = j$, alors le passager emprunte un seul bus durant son voyage. Dans ce cas aucune correspondance n'est effectuée, et le temps d'attente est nul. Nous signalons que le seul temps d'attente de ce type de passagers est celui de la station de départ Sd_i qui est égal à $x_{i,1}(k_i) / t$ dans l'algèbre (max, plus). Dans la suite, ce temps d'attente ne sera pas considéré puisqu'il

$$M_{ij} = M_{ij}(t) = \begin{cases} T_{\text{deplacement}}(i, j, t) & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq n \\ \varepsilon & \text{si } j < i \end{cases} \quad (2.24)$$

$$W_{ij}(t) = \begin{cases} T_{\text{corresp}}(i, j, t) & \text{si } 1 \leq i < j \leq n \\ e & \text{si } i = j \\ \varepsilon & \text{si } j < i \end{cases} \quad (2.25)$$

où t est la date d'arrivée du passager à la station de départ de la ligne L_i .

Notons que ces matrices dépendent du $k_i^{\text{ème}}$ bus emprunté par le passager à l'arrêt de départ de la ligne L_i . En effet, le temps d'attente d'un passager voyageant sur une partie du réseau dépend de l'heure de départ des bus (fonction des paramètres : nombre, fréquence, distribution des heures de départ au cours d'une période de travail).

5.4 Exemple d'application

Le modèle détaillé dans le paragraphe 5 est à même de modéliser le réseau étudié et de permettre son évaluation dans le cas général de non-synchronisation. Toutefois, nous avons aussi montré qu'il est adapté aux lignes synchronisées, dès lors que, dans le modèle (max, plus) considéré, nous posons la contrainte : $\forall k \geq 2, \forall 2 \leq i \leq n, x_{i,3}(k) = \varepsilon$. L'exemple suivant traite les deux cas d'application possibles faisant apparaître des conflits structurels dans les réseaux de Petri associés : le cas d'un fonctionnement non-synchronisé, et le cas d'un fonctionnement synchronisé (attente des bus, mais sans hypothèse d'alternance). Considérons ainsi un réseau de bus composé de trois lignes L_1 , L_2 et L_3 , et de deux stations de correspondance $Sc_{1,2}$ et $Sc_{2,3}$. Les données du système sont fournies par le tableau 2.3 (l'unité de temps est la minute). Le modèle GETRDJ représentant le système dans ces conditions est donné par la figure 2.11. Nous supposons en outre que :

- à la première station de correspondance $Sc_{1,2}$, un bus de L_2 n'attend pas celui de L_1 pour effectuer un échange de passagers ;
- le bus de L_3 attend celui de L_2 à la station de correspondance $Sc_{2,3}$ pour échanger les passagers.

Pour cet exemple, nous avons $\beta_i = \lambda_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

| Ligne L_1 | | | | Ligne L_2 | | | | Ligne L_3 | | | |
|-------------|--------------|--------------|--------------|-------------|--------------|--------------|--------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| λ_1 | $\tau_{1,1}$ | $\tau_{1,2}$ | $\tau_{1,3}$ | λ_2 | $\tau_{2,1}$ | $\tau_{2,2}$ | $\tau_{2,3}$ | λ_3 | $\tau_{3,1}$ | $\tau_{3,2}$ | $\tau_{3,3}$ |
| 64 | 18 | 20 | 26 | 60 | 17 | 16 | 27 | 67 | 15 | 15 | 37 |

Tableau 2.3 : Données du réseau.

❶ $\beta_1 > \beta_2$, ($\beta_i > \beta_{i+1}$ avec $i=1$), donc l'ensemble $\xi_{1,2}$ est vide, alors on a $k_{0,i+1} = k_{0,2} = 1$. Par conséquent les fonctions de routage $k_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta}(k)$ sont : $\forall k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \bullet f_{2,3}(k) &= \begin{cases} S_{2,3}(k) & \text{si } S_{2,3}(k) \in \mathbb{IN} \\ E(S_{2,3}(k) \otimes 1) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{avec } S_{2,3}(k) = \frac{64k + 17}{60}; \\ \bullet f_{2,4}(k) &= k; \\ \bullet f_{1,5}(k) &= \varepsilon; \\ \bullet f_{2,6}(k) &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ E(S_{2,6}(k) \otimes 1) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{où } S_{2,6}(k) = \frac{64k - 81}{4}; \end{aligned}$$

❷ $\beta_3 > \beta_2$, ($\beta_{i+1} > \beta_i$ avec $i=2$) où l'ensemble $\Omega_{2,3}$ est non vide et l'attente est imposée en $Sc_{2,3}$, alors $k'_{0,i+1} = k'_{0,3} = 0$. On obtient : $\forall k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \bullet f_{3,3}(k) &= k; \\ \bullet f_{3,4}(k) &= E(S_{3,4}(k) \otimes 1), \quad \text{où } S_{3,4}(k) = \frac{67k - 67}{60}; \\ \bullet f_{2,5}(k) &= \begin{cases} S_{3,5}(k) & \text{si } S_{3,5}(k) \in \mathbb{IN} \\ E(S_{3,5}(k) \otimes 1) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{où } S_{3,5}(k) = \frac{67k + 7}{7}; \\ \bullet f_{3,6}(k) &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Les dates des premiers départs des bus B_i de leurs arrêts respectifs Sd_i nous fournissent certaines composantes de la condition initiale $X(1)$. Les autres composantes de ce vecteur sont déduites en utilisant les fonctions de routage ci-dessus et certaines équations du modèle mathématique. Nous obtenons alors :

$$X(1) = [0, \varepsilon, 18, 38, 0, 77, 17, 33, 0, 33, \varepsilon, 48]^T.$$

A partir de cette condition initiale, nous remarquons que la 1^{ère} correspondance L_1 vers L_2 se fait à la date 77 min, ce qui donne le temps d'attente des passagers $T_{1,2}(1,1) = 77/38 = 39$ min. Ce premier échange correspond au second passage de B_2 . En effet, B_2 passe pour la première fois en $Sc_{1,2}$ à $t=33$ min. A cette date, B_1 n'étant pas encore arrivé, il n'y a pas de passager en attente, donc B_2 continue sa course. D'autre part, le bus B_3 arrive pour la 1^{ère} fois en $Sc_{2,3}$ à la date $t=15$ min, tandis que le bus B_2 arrive à la même station à la date $t=33$ min, donc la 1^{ère} correspondance en $Sc_{2,3}$ est faite à la date $t = 33$ min : ainsi le bus B_3 attend le bus B_2 pendant 18 min ($x_{3,2}(1) = 33$ et non 15), tandis que les passagers n'attendent pas ($T_{2,3}(1,1) = 0$ min).

Nous supposons que la période du travail des bus est composée de N_{\max} voyages (avec $N_{\max} = 30$). Dans le tableau 2.4, nous présentons les résultats d'évaluation concernant l'exemple étudié : nous donnons notamment les dates où les bus quittent les stations de correspondance, ainsi que les valeurs numériques des fonctions de routage et les temps de correspondance en $Sc_{1,2}$ et $Sc_{2,3}$.

Remarques :

- la $k^{\text{ème}}$ (resp. $k^{\text{ème}}$) correspondance effectuée en $Sc_{1,2}$ (resp. $Sc_{2,3}$) représente la $k^{\text{ème}}$

course de B_1 (resp. B_2). k' et k'' sont donnés par la formule $\inf_p \{p \in \mathbb{N} / x_{i+1,2}(p) \geq x_{i,4}(k)\}$

pour $i \in \{1, 2\}$;

- dans cet exemple, $k' = k$ pour les 30 premiers voyages ;
- pour les échanges de voyageurs entre L_1 et L_2 , la $k^{\text{ème}}$ correspondance correspond au $h^{\text{ème}}$ passage de B_2 en $Sc_{1,2}$;

| | | | | | | | | | | |
|-------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| h | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| k'' | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $k_{2,3}$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $k_{2,4}=k_{3,3}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $k_{2,6}$ | 1 | 12 | 28 | 44 | 60 | 76 | 92 | 108 | 124 | 140 |
| $k_{3,4}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| $k_{2,5}$ | 11 | 21 | 30 | 40 | 49 | 59 | 68 | 78 | 88 | 97 |
| $x_{1,4}(k)$ | 38 | 102 | 166 | 230 | 294 | 358 | 422 | 486 | 550 | 614 |
| $x_{2,2}(k)$ | 77 | 137 | 197 | 257 | 317 | 377 | 437 | 497 | 557 | 617 |
| $x_{2,4}(k)$ | 33 | 93 | 153 | 213 | 273 | 333 | 393 | 453 | 513 | 573 |
| $x_{3,2}(k)$ | 33 | 100 | 167 | 234 | 301 | 368 | 435 | 502 | 569 | 636 |
| $T_{1,2}(k,k')$ | 39 | 35 | 31 | 27 | 23 | 19 | 15 | 11 | 7 | 3 |
| $T_{2,3}(k,k'')$ | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |

| | | | | | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| k | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| h | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| k'' | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| $k_{2,3}$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| $k_{2,4}=k_{3,3}$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $k_{2,6}$ | 156 | 172 | 188 | 204 | 220 | 236 | 252 | 268 | 284 | 300 |
| $k_{3,4}$ | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 |
| $k_{2,5}$ | 107 | 116 | 126 | 135 | 145 | 155 | 164 | 174 | 183 | 193 |
| $x_{1,4}(k)$ | 678 | 742 | 806 | 870 | 934 | 998 | 1062 | 1126 | 1190 | 1254 |
| $x_{2,2}(k)$ | 737 | 797 | 857 | 917 | 977 | 1037 | 1097 | 1157 | 1217 | 1277 |
| $x_{2,4}(k)$ | 633 | 693 | 753 | 813 | 873 | 933 | 993 | 1053 | 1113 | 1173 |
| $x_{3,2}(k)$ | 703 | 770 | 837 | 904 | 971 | 1038 | 1105 | 1172 | 1239 | 1306 |
| $T_{1,2}(k,k')$ | 59 | 55 | 51 | 47 | 43 | 39 | 35 | 31 | 27 | 23 |
| $T_{2,3}(k,k'')$ | 3 | 10 | 17 | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | 59 | 66 |

| | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| k | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| h | 23 | 24 | 25 | 26 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 |
| k'' | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 27 |
| k _{2,3} | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
| k _{2,4} =k _{3,3} | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| k _{2,6} | 316 | 332 | 348 | 364 | 380 | 396 | 412 | 428 | 444 | 460 |
| k _{3,4} | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 30 | 31 | 32 | 33 |
| k _{2,5} | 202 | 212 | 222 | 231 | 241 | 250 | 260 | 269 | 279 | 289 |
| x _{1,4} (k) | 1318 | 1382 | 1446 | 1510 | 1574 | 1638 | 1702 | 1766 | 1830 | 1894 |
| x _{2,2} (k) | 1337 | 1397 | 1457 | 1517 | 1577 | 1697 | 1757 | 1817 | 1877 | 1937 |
| x _{2,4} (k) | 1233 | 1293 | 1353 | 1413 | 1473 | 1533 | 1593 | 1653 | 1713 | 1773 |
| x _{3,2} (k) | 1373 | 1440 | 1507 | 1574 | 1641 | 1708 | 1775 | 1842 | 1909 | 1976 |
| T _{1,2} (k,k') | 19 | 15 | 11 | 7 | 3 | 59 | 55 | 51 | 47 | 43 |
| T _{2,3} (k,k'') | 6 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | 2 |

Tableau 2.4 : Résultats obtenus à partir de la résolution de l'équation d'état.

Dans le cas d'un fonctionnement synchronisé (pour les lignes L₂ et L₃), le tableau 2.4 montre que :

- la synchronisation est bien assurée dès le premier passage des bus des deux lignes L₂ et L₃ : B₃ attend pendant 3 min l'arrivée du bus B₂ à la station de correspondance (x_{3,2}(1) = 33 min au lieu de 30 min) ;
- les résultats obtenus, en termes d'évaluation des temps d'attente, sont identiques avec ceux du paragraphe 3.4 pour les dix premières correspondances (pour lesquelles les données du problème confirment l'hypothèse d'alternance) ;
- les résultats obtenus à partir de la onzième correspondance correspondent bien à la réalité du système, même si l'alternance des bus des deux lignes n'est pas vérifiée : les 10 et 11^{èmes} correspondances (valeur de k) sont assurées par le bus B₃ effectuant son 10^{ème} tour (valeur de k''). Ainsi on obtient bien un temps d'attente de 3 min pour la onzième correspondance. De même, les 20 et 21^{èmes} correspondances (respectivement 29 et 30^{èmes} correspondances) sont assurées par le bus B₃ effectuant son 19^{ème} tour (respectivement son 27^{ème} tour) ;
- il existe une périodicité de 15 tours pour le temps de correspondance T_{1,2}(k,k') (observation faite sur un nombre de voyages plus important que 30) : pour tout k, k₁', k₂', et pour tout n ≥ 0, T_{1,2}(k+15n, k₂') = T_{1,2}(k, k₁'), avec : k₁' = inf_p {p ∈ IN / x_{2,2}(p) ≥ x_{1,4}(k)} et k₂' = inf_p {p ∈ IN / x_{2,2}(p) ≥ x_{1,4}(k+15n)}. Notons que, comme pour cet exemple nous avons T_{1,2}(k,k') avec k' = k, alors ici k₁' = k et k₂' = k₁' + 15n = k + 15n. Cette périodicité P=15 est obtenue par la formule :

$$P = \frac{\lambda_2}{\text{pgcd}(\lambda_1, \lambda_2)} = \frac{60}{\text{pgcd}(64, 60)} = \frac{60}{4} = 15.$$

D'autre part, sur une période de 15 tours (par exemple entre k=11 et k=25), T_{1,2}(k,k') est une suite arithmétique décroissante de raison $\lambda_2 / \lambda_1 = 60 / 64 = -4$.

Dans le cas d'un fonctionnement non-synchronisé (pour les lignes L_1 et L_2), nous observons également dans le tableau 2.4 un comportement périodique du temps de correspondance $T_{2,3}(k, k'')$:

- d'une part, pour tout k tel que $1 \leq k \leq \lambda_3 = 67$, pour tout $n \geq 0$, et pour tout k'' tel que $k'' = \inf_p \{p \in \mathbb{N} / x_{3,2}(p) \geq x_{2,4}(k)\}$, on a :

$$T_{2,3}(k + \lambda_3 n, k'' + \lambda_2 n) = T_{2,3}(k + 67n, k'' + 60n) = T_{2,3}(k, k'').$$

Cette périodicité de 67 tours a bien sûr été observée sur un nombre de voyages largement supérieur à 30 ;

- d'autre part, pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$, pour tout couple (k, m) tel que $(k, m) \in \{(1,9), (11,9), (21,8), (30,9), (40,8), (49,9), (59,8)\}$, et pour tout k'' tel que $k'' = \inf_p \{p \in \mathbb{N} / x_{3,2}(p) \geq x_{2,4}(k)\}$, on a :

$$T_{2,3}(k+i, k''+i) = T_{2,3}(k, k'') + 7i.$$

$T_{2,3}(k, k'')$ est donc une suite croissante sur des périodes de 9 ou 10 tours (comprises entre les tours k à $k+m$) et de raison $\lambda_3 - \lambda_2 = 67 / 60 = 7$;

De cette analyse (étendu à des observations sur plus de 130 tournées) du tableau 2.4, nous aboutissons à deux conclusions principales :

- les temps de correspondance présentent un comportement périodique, quel que soit le mode de fonctionnement des deux lignes (synchronisé ou non). Ceci est en fait dû à la périodicité des lignes elles-mêmes ;
- l'évaluation dans un premier temps des temps de correspondances aux points d'échange d'un réseau jugés importants (voire critiques) permet dans un deuxième temps (et dans une certaine mesure) de proposer une nouvelle planification, sans modifier les caractéristiques du système existant, mais en calant les premières dates de départ effectives des bus depuis leurs stations initiales de sorte que les temps de correspondance soient minimaux aux heures de pointe de la période de travail considérée.

A l'aide de la solution du système (2.15), nous déduisons les différentes dates d'arrivée des bus, non seulement aux points d'échange, mais aussi aux autres arrêts du réseau. Nous exprimons les résultats obtenus à l'aide des matrices M , $W(t)$ et $J(t)$ données auparavant, en termes de temps de déplacement, de correspondance et de parcours, pour des passagers arrivant respectivement aux stations de départ des trois lignes aux dates $t_1=190$ min (9h10min), et $t_2=240$ min (ou 10h00min). Nous considérons que la date de référence $t=0$ correspond au début d'une journée (par exemple 6h00 du matin). Nous supposons de plus que les temps de déplacement d_i entre Sd_i et Sa_i ($1 \leq i \leq 3$) sont respectivement : $d_1=44$ min, $d_2=40$ min et $d_3=35$ min. Nous obtenons alors :

$$M = M(190) = M(240) = \begin{bmatrix} 44 & 61 & 74 \\ \varepsilon & 40 & 53 \\ \varepsilon & \varepsilon & 35 \end{bmatrix} ;$$

$$W(190) = \begin{bmatrix} e & 27 & 55 \\ \varepsilon & e & 28 \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \text{ et } J(190) = \begin{bmatrix} 44 & 88 & 129 \\ \varepsilon & 40 & 81 \\ \varepsilon & \varepsilon & 35 \end{bmatrix} ;$$

$$W(240) = \begin{bmatrix} e & 23 & 58 \\ \varepsilon & e & 28 \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \text{ et } J(240) = \begin{bmatrix} 44 & 84 & 132 \\ \varepsilon & 40 & 81 \\ \varepsilon & \varepsilon & 35 \end{bmatrix} .$$

Remarque : Pour cet exemple et pour $t=190$, les temps d'attente des passagers allant de la ligne L_1 à L_2 , de la ligne L_1 à L_3 et enfin de la ligne L_2 à L_3 sont donnés respectivement par :

- $W_{12}(190) = T_{\text{corresp}}(1,2,190) = T_{1,2}(4,4) = 27$ min, (en plus de ce temps, le passager attend l'arrivée de bus à la station Sd_1 pendant 2 min) ;
- $W_{13}(190) = T_{\text{corresp}}(1,3,190) = T_{1,2}(4,4) + T_{2,3}(5,5) = 27 + 28 = 55$;
- $W_{23}(190) = T_{2,3}(5,5) = 28$.

Les résultats obtenus dans ces matrices, (notamment W) constituent une source d'information pour un voyageur désireux d'effectuer un trajet particulier à une heure précise, ou qui souhaite savoir pour le même trajet, à quelle heure il doit se rendre à un arrêt en vue d'optimiser le temps de parcours.

6 Analyse d'un système linéaire non-stationnaire

6.1 Théorie spectrale de la matrice caractéristique

L'étude d'un très grand nombre de problèmes de cheminement dans les graphes se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires non-stationnaire dans une structure algébrique. En résolvant un tel système, nous proposons dans ce paragraphe d'étudier l'existence des éléments propres (valeurs et vecteurs propres) d'une matrice à coefficients non-constants dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} . Nous donnons également une interprétation physique de ces éléments. Pour cette étude, nous considérons alors la matrice caractéristique $A(k-1)$ (2.13) associé au réseau de la figure 2.9, et dont les éléments sont variables. De plus, nous nous plaçons ici dans le cas où le fonctionnement du réseau global est non-synchronisé ($\forall 1 \leq i \leq n, \beta_i = \lambda_i$).

6.1.1 Valeurs propres

Afin de déterminer les valeurs propres de la matrice $A(k-1)$, nous utilisons son graphe de précedence $G(A(k-1))$ représenté par la figure 2.12 ([Bac et al, 92] et [Sch, 96]). Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre 1, les nœuds du graphe de précedence associé à la matrice $A(k-1)$ représentent les composantes du vecteur d'état $X(k)$. Le poids associé à chaque arc $j \rightarrow i$ du graphe correspond à l'élément $a_{ij}(k-1)$ de la matrice correspondante.

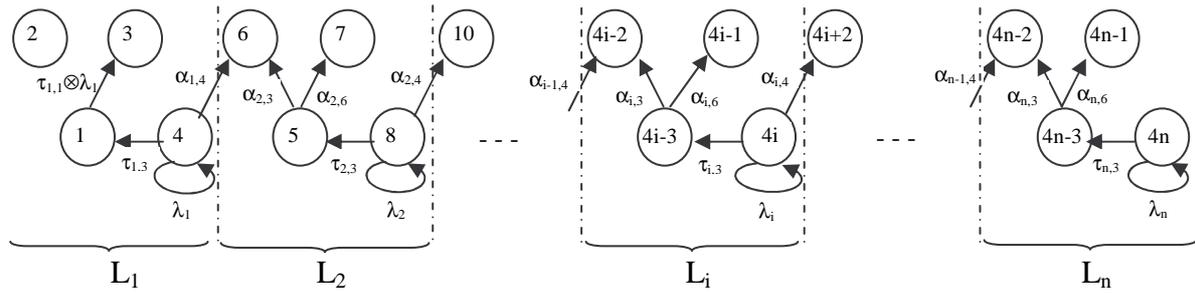


Figure 2.12 : Graphe de précedence associé à la matrice $A(k-1)$.

La méthode de recherche des valeurs propres à partir du graphe de précedence peut être trouvée dans [Gaub, 92]. On peut montrer que chaque matrice carrée (dans \mathbb{R}_{\max}) possède au moins une valeur propre ([Bac et al, 92]). En général, le nombre de valeurs propres d'une matrice carrée d'ordre n est inférieur ou égal à n . Si une matrice est irréductible, elle aura une seule valeur propre. Sinon, le nombre de valeurs propres d'une matrice carrée A dépend des circuits élémentaires C_i du graphe de précedence $G(A)$ ([Sch, 96]). Dans le cas d'existence

d'une valeur propre d'une matrice A , l'expression déterminant sa valeur est : $\text{Max}_{C_i} \frac{\sum_{l=1}^r w_l}{r}$, où

le circuit C_i est composé de r arcs (a_1, a_2, \dots, a_r) ; w_l est le poids associé à chaque arc a_l (avec $l \in \{1, \dots, r\}$). Comme on peut le voir sur la figure 2.12, nous obtenons pour le graphe $G(A(k-1))$ un ensemble de n valeurs propres : $\text{Sp}(A(k-1)) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (toutes ces valeurs sont distincts, cf. théorème 1.7 du chapitre 1). Cet ensemble est appelé *Spectre* de $A(k-1)$.

Dans le cas d'un système de production, la valeur propre d'une matrice (max, plus), si elle existe, s'interprète comme le taux de production du système. Nous remarquons que dans notre cas, les éléments de l'ensemble $\text{Sp}(A(k-1))$ correspondent aux périodes λ_i des n lignes du réseau étudié. En outre, ils ne dépendent pas de la variable k . Ainsi même si la matrice considérée est à coefficients non constants, ses valeurs propres sont fixes.

6.1.2 Vecteurs propres

Rappelons que pour l'analyse spectrale dans la théorie conventionnelle des systèmes linéaires, chaque valeur propre est associée à un ou plusieurs vecteurs propres. Dans le contexte des dioïdes, nous déterminons les vecteurs propres V^{λ_i} associés à chaque valeur propre λ_i ($1 \leq i \leq n$) de la matrice $A(k-1)$. Ces vecteurs propres vérifient le système (2.26).

$$\forall k > 1, \quad A(k-1) \otimes V^{\lambda_i}(k) = \lambda_i \otimes V^{\lambda_i}(k). \quad (2.26)$$

Nous signalons que $V^{\lambda_i} \in \mathbb{R}_{\max}^{(4n) \times 1}$, où $4n$ est le nombre de transitions internes du modèle GETRDJ qui représente le réseau de bus étudié (composé de n lignes et $n-1$ stations de correspondance). En développant le système (2.26), avec pour chaque i ($1 \leq i \leq n$), $V^{\lambda_i} = [v_{1,1}^{\lambda_i}, v_{1,2}^{\lambda_i}, v_{1,3}^{\lambda_i}, v_{1,4}^{\lambda_i}, \dots, v_{n,1}^{\lambda_i}, v_{n,2}^{\lambda_i}, v_{n,3}^{\lambda_i}, v_{n,4}^{\lambda_i}]^T$, nous obtenons le système (2.27).

$$\forall j, 2 \leq j \leq n \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \tau_{1,3} \otimes v_{1,4}^{\lambda_i} = \lambda_i \otimes v_{1,1}^{\lambda_i} \\
 \varepsilon = \lambda_i \otimes v_{1,2}^{\lambda_i} \\
 \tau_{1,1} \otimes \lambda_1 \otimes v_{1,1}^{\lambda_i} = \lambda_i \otimes v_{1,3}^{\lambda_i} \\
 \lambda_1 \otimes v_{1,4}^{\lambda_i} = \lambda_i \otimes v_{1,4}^{\lambda_i} \\
 \tau_{j,3} \otimes v_{j,4}^{\lambda_i} = \lambda_i \otimes v_{j,1}^{\lambda_i} \\
 \\
 \alpha_{j-1,4} \otimes v_{j-1,4}^{\lambda_i} \oplus \alpha_{j,3} \otimes v_{j,1}^{\lambda_i} = \lambda_i \otimes v_{j,2}^{\lambda_i} \\
 \alpha_{j,6} \otimes v_{j,1}^{\lambda_i} = \lambda_i \otimes v_{j,3}^{\lambda_i} \\
 \lambda_j \otimes v_{j,4}^{\lambda_i} = \lambda_i \otimes v_{j,4}^{\lambda_i}
 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

La résolution de ce système nous permet d'obtenir les vecteurs propres (équations (2.28)), dont les coefficients dépendent des données du système.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 V^{\lambda_1}(k) = [e, \varepsilon, \tau_{1,1}, \tau_{1,1} \otimes \tau_{1,2}, \varepsilon, (\alpha_{1,4}(k) \otimes \tau_{1,1} \otimes \tau_{1,2}) / \lambda_1, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{4n-6}]^T \\
 V^{\lambda_2}(k) = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, e, \alpha_{2,3}(k) / \lambda_2, \alpha_{2,6}(k) / \lambda_2, \tau_{2,1} \otimes \tau_{2,2}, \varepsilon, (\alpha_{2,4}(k) \otimes \tau_{2,1} \otimes \tau_{2,2}) / \lambda_2, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{4n-10}]^T \\
 \dots \\
 V^{\lambda_i}(k) = [\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{4i-4}, e, \alpha_{i,3}(k) / \lambda_i, \alpha_{i,6}(k) / \lambda_i, \tau_{i,1} \otimes \tau_{i,2}, \varepsilon, (\alpha_{i,4}(k) \otimes \tau_{i,1} \otimes \tau_{i,2}) / \lambda_i, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{4(n-i)-2}]^T \\
 \dots \\
 V^{\lambda_n}(k) = [\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{4n-4}, e, \alpha_{n,3}(k) / \lambda_n, \alpha_{n,6}(k) / \lambda_n, \tau_{n,1} \otimes \tau_{n,2}]^T.
 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Nous remarquons à partir des expressions de (2.28) que :

- les vecteurs propres de la matrice $A(k-1)$ sont à composantes variables ;
- le nombre de composantes de chaque vecteur propre V^{λ_i} correspond au nombre de composantes du vecteur d'état X ;
- toutes les composantes de V^{λ_i} sont nulles (égales à ε) à l'exception des composantes $v_{i,1}^{\lambda_i}, v_{i,2}^{\lambda_i}, v_{i,3}^{\lambda_i}, v_{i,4}^{\lambda_i}$ et $v_{i+1,2}^{\lambda_i}$. Les positions de celles-ci dans le vecteur propre correspondent aux positions des composantes $x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, x_{i,4}$ (transitions associées à la ligne L_i) et $x_{i+1,2}$ (transition associée à l'arrêt Sc_{i+1}) dans le vecteur d'état X .

6.2 Identification des vecteurs propres

Dans ce paragraphe nous cherchons la signification physique de chaque vecteur propre V^{λ_i} en déterminant l'expression de chacune de ses composantes non nulles. En analysant ces composantes, nous constatons que : $\forall k > 1$,

- pour i tel que $1 \leq i \leq n$:

$$v_{i,1}^{\lambda_i}(k) = x_{i,1}(k) / x_{i,1}(k) = 0,$$

$$v_{i,2}^{\lambda_i}(k) = x_{i,2}(k) / x_{i,1}(k),$$

$$v_{i,3}^{\lambda_i}(k) = x_{i,3}(k) / x_{i,1}(k),$$

$$v_{i,4}^{\lambda_i}(k) = x_{i,4}(k) / x_{i,1}(k).$$

- pour i tel que $1 \leq i \leq n-1$:

$$v_{i+1,2}^{\lambda_i}(k) = (x_{i+1,2}(k) / x_{i,1}(k)) / (x_{i+1,2}(k) / x_{i,4}(p)) = x_{i,4}(p) / x_{i,1}(k).$$

Les démonstrations de ces expressions sont données dans l'annexe A.2.

D'une manière générale, l'expression d'une composante d'un vecteur propre V^{λ_i} ($1 \leq i \leq n$) est donnée par la formule suivante :

$$\forall k > 1, v_{j,r}^{\lambda_i}(k) = \begin{cases} x_{j,r}(k) / x_{j,1}(k), & \text{si } j = i \text{ et } 1 \leq r \leq 4 \\ (x_{i+1,2}(k) / x_{i,1}(k)) / (x_{i+1,2}(k) / x_{i,4}(p)), & \text{si } j = i+1 \text{ et } r = 2 \text{ (avec } i < n) \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\text{où } p = \sup_j \{j \in \mathbf{N}^* \text{ tel que } x_{i+1,2}(k) \geq x_{i,4}(j)\}.$$

Si $i = n$, la deuxième équation de l'expression de $v_{j,r}^{\lambda_i}(k)$ ne sera pas considérée étant donné que le réseau ne contient que n lignes et que la dernière station de correspondance est $Sc_{n-1,n}$.

Nous remarquons que ces composantes sont exprimées en fonction des dates de franchissement de certaines transitions du modèle graphique (dates de passage de bus aux différents arrêts considérés de la ligne L_i).

Un intérêt du calcul des vecteurs propres de la matrice $A(k-1)$ réside dans l'utilisation de certaines composantes de ces vecteurs pour le calcul de temps d'attente de certains passagers. En effet, dans la seconde équation du système (2.29), nous constatons la présence de l'expression : $x_{i+1,2}(k) / x_{i,4}(p)$. D'après le paragraphe 5.3, cette expression correspond au temps de correspondance $T_{i,i+1}(p, k)$. Ainsi, à partir de la deuxième équation du système (2.29), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \forall k > 1, v_{i+1,2}^{\lambda_i}(k) &= (x_{i+1,2}(k) / x_{i,1}(k)) / (x_{i+1,2}(k) / x_{i,4}(p)), \\ &= x_{i+1,2}(k) / x_{i+1,1}(k) \otimes x_{i+1,1}(k) / x_{i,1}(k) / T_{i,i+1}(p, k), \\ &= v_{i+1,2}^{\lambda_{i+1}}(k) \otimes x_{i+1,1}(k) / x_{i,1}(k) / T_{i,i+1}(p, k). \end{aligned}$$

Par suite, l'expression du temps de correspondance $T_{i,i+1}(p, k)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\forall k > 1, T_{i,i+1}(p, k) = [v_{i+1,2}^{\lambda_{i+1}}(k) / v_{i+1,2}^{\lambda_i}(k)] \otimes [x_{i+1,1}(k) / x_{i,1}(k)].$$

Nous remarquons, à partir de cette expression, qu'il est possible de calculer les temps de correspondance de certains passagers (ou de tous les passagers si $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$), arrivant à la station de correspondance, en utilisant d'une part les composantes des vecteurs propres associés à λ_i et λ_{i+1} , et d'autre part les dates de départ des bus de deux lignes L_i et L_{i+1} de leurs stations de départ.

6.3 Exemple d'application

Nous reprenons l'exemple à trois lignes développé dans le paragraphe 5.4. Malgré l'hypothèse d'attente entre les deux lignes L_2 et L_3 , la théorie développée précédemment s'applique encore ici car : $\forall 1 \leq i \leq 3, \beta_i = \lambda_i$. Pour cet exemple, nous déterminons les éléments propres de la matrice caractéristique du système (max, plus) linéaire non-stationnaire. Les valeurs propres de cette matrice sont $\text{Sp}(A(k-1)) = \{64, 60, 67\}$, et représentent les périodes des lignes L_1, L_2 et L_3 ; les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont donnés par : $\forall k, 1 \leq k \leq 30$,

- $V^{64}(k) = [e, \varepsilon, 18, 38, \varepsilon, 38 \otimes 64^{\otimes(f_{2,4}(k)/k)}, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon]^T$;
- $V^{60}(k) = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, e, 17 \otimes 60^{\otimes(f_{2,3}(k)/k)}, 17 \otimes 60^{\otimes(f_{2,6}(k)/k)}, 33, \varepsilon, 33 \otimes 60^{\otimes(f_{3,4}(k)/k)}, \varepsilon, \varepsilon]^T$;
- $V^{67}(k) = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, e, x_{32}(k)/x_{31}(k), 15 \otimes 67^{\otimes(f_{3,6}(k)/k)}, x_{34}(k)/x_{31}(k)]^T$.

Le tableau 2.5 contient certaines valeurs numériques des vecteurs propres. Pour les autres valeurs, nous avons : $V_{1,1}^{64}(k) = V_{2,1}^{60}(k) = V_{3,1}^{67}(k) = e$; $V_{1,2}^{64}(k) = V_{3,1}^{60}(k) = V_{3,3}^{67}(k) = \varepsilon$; $V_{1,3}^{64}(k) = 18$; $V_{1,4}^{64}(k) = V_{2,2}^{64}(k) = 38$; $V_{2,4}^{60}(k) = 33$. Les valeurs des autres composantes qui ne sont pas figurées ici sont nulles. Dans le cas de l'exemple traité, on constate que l'attente du bus B_3 en $Sc_{2,3}$ est imposée uniquement pour la première course, pour effectuer la correspondance avec le bus B_2 . Pour les courses suivantes, cette attente est nulle. En effet, chaque fois que B_3 arrive en $Sc_{2,3}$, il trouve des passagers en attente. Ainsi, à cause de cette attente de bus lors du premier tour, les valeurs des composantes $V_{3,2}^{67}(1) (= 33)$ et $V_{3,4}^{67}(1) (= 48)$ sont différentes des autres valeurs $V_{3,2}^{67}(k)$ et $V_{3,4}^{67}(k)$ qui restent constantes pour $k \geq 2$.

Dans le tableau 2.6, nous fournissons les temps d'attente de passagers aux stations de correspondance $Sc_{1,2}$ et $Sc_{2,3}$. Ils sont déterminés à partir des composantes des vecteurs propres de la matrice caractéristique du système (max, plus) linéaire non-stationnaire. Nous retrouvons les mêmes résultats qu'au paragraphe 5.4 en termes de temps de correspondance, excepté en ce qui concerne certaines valeurs associées au point d'échange $Sc_{2,3}$, telles que $T_{2,3}(10,10)$, $T_{2,3}(20,19)$ $T_{2,3}(29,27)$ qui n'apparaissent pas dans le tableau 2.6. En effet, ces temps ne peuvent pas être calculés à partir des vecteurs propres de la matrice caractéristique du modèle mathématique. Ceci vient du fait que si plusieurs lots de passagers venant de la ligne L_2 montent dans un même bus B_3 , alors la formule de $T_{2,3}(k, k')$ nous permet de calculer uniquement le temps de correspondance du dernier lot de passagers arrivant en $Sc_{2,3}$. Pour cet exemple, les 10 et 11^{èmes} lots de passagers arrivant en $Sc_{2,3}$ sont transportés par le bus B_3 effectuant sa 10^{ème} course; alors seul le temps de correspondance associé au 11^{ème} lot de passagers sera calculé en utilisant les vecteurs propres. Il n'y a donc pas de valeur réelle associée à $T_{2,3}(10,10)$ puisque seul $T(11,10)$ est donné; en effet d'après la remarque précédente, pour $T(k,10)$, alors $k = \sup_j \{j \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_{3,2}(10) \geq x_{2,4}(j)\} = 11$. La même remarque est faite pour les 20 et 21^{èmes} lots de passagers, ainsi que pour les 29 et 30^{èmes} lots. Enfin dans le tableau 2.6, nous constatons que les changements de valeurs de $V_{2,2}^{60}(k')$ et de $V_{3,2}^{60}(k'')$ se produisent respectivement :

- lorsque l'on change de période pour $T_{1,2}(k, k')$: chaque fois que le temps de correspondance prend à nouveau sa valeur maximale (59 ici) la composante $V_{2,2}^{60}$ du vecteur propre V^{60} est augmentée de 60 unités de temps (correspond à λ_2) ;
- lorsque le bus B_2 passe deux fois à la station de correspondance $Sc_{2,3}$ avant un passage de B_3 : chaque fois que le temps de correspondance $T_{2,3}(k, k')$ décroît (prend à nouveau une valeur minimale comprise entre 0 et 6, donc strictement inférieure à $7=\lambda_3 / \lambda_2$), la composante $V_{3,2}^{60}$ du vecteur propre V^{60} est également augmentée de 60 ($=\lambda_2$) unités de temps.

| k | $V_{2,2}^{60}(k)$ | $V_{2,3}^{60}(k)$ | $V_{3,2}^{60}(k)$ | $V_{3,2}^{67}(k)$ | $V_{3,4}^{67}(k)$ |
|----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | 77 | 17 | 33 | 33 | 48 |
| 2 | 77 | 617 | 33 | 15 | 30 |
| 3 | 77 | 1517 | 33 | 15 | 30 |
| 4 | 77 | 2417 | 33 | 15 | 30 |
| 5 | 77 | 3317 | 33 | 15 | 30 |
| 6 | 77 | 4217 | 33 | 15 | 30 |
| 7 | 77 | 5117 | 33 | 15 | 30 |
| 8 | 77 | 6017 | 33 | 15 | 30 |
| 9 | 77 | 6917 | 33 | 15 | 30 |
| 10 | 77 | 7817 | 93 | 15 | 30 |
| 11 | 137 | 8717 | 93 | 15 | 30 |
| 12 | 137 | 9617 | 93 | 15 | 30 |
| 13 | 137 | 10517 | 93 | 15 | 30 |
| 14 | 137 | 11417 | 93 | 15 | 30 |
| 15 | 137 | 12317 | 93 | 15 | 30 |
| 16 | 137 | 13217 | 93 | 15 | 30 |
| 17 | 137 | 14117 | 93 | 15 | 30 |
| 18 | 137 | 15017 | 93 | 15 | 30 |
| 19 | 137 | 15917 | 153 | 15 | 30 |
| 20 | 137 | 16817 | 153 | 15 | 30 |
| 21 | 137 | 17717 | 153 | 15 | 30 |
| 22 | 137 | 18617 | 153 | 15 | 30 |
| 23 | 137 | 19517 | 153 | 15 | 30 |
| 24 | 137 | 20417 | 153 | 15 | 30 |
| 25 | 137 | 21317 | 153 | 15 | 30 |
| 26 | 197 | 22217 | 153 | 15 | 30 |
| 27 | 197 | 23117 | 213 | 15 | 30 |
| 28 | 197 | 24017 | 213 | 15 | 30 |
| 29 | 197 | 24917 | 213 | 15 | 30 |
| 30 | 197 | 25817 | 213 | 15 | 30 |

Tableau 2.5 : Les valeurs numériques des vecteurs propres.

Remarques : dans le tableau 2.6, nous notons :

- k' (resp. k'') est la $(k')^{\text{ème}}$ (resp. $(k'')^{\text{ème}}$) correspondance effectuée en Sc_{12} (resp. Sc_{23}) avec les passagers venant sur la $k^{\text{ème}}$ course de bus de la ligne L_1 (resp. L_2). k est donné par :
 - pour $Sc_{1,2}$: $k = \sup_j \{j \in \mathbb{N}^* / x_{2,2}(k') \geq x_{1,4}(j)\}$;
 - pour $Sc_{2,3}$: $k = \sup_j \{j \in \mathbb{N}^* / x_{3,2}(k'') \geq x_{2,4}(j)\}$;

- h : représente le passage de bus de L_1 en Sc_{12} qui correspond à la (k') ^{ème} correspondance.

| k | k' | h | $V_{2,2}^{60}(k')$ | $V_{2,2}^{64}(k')$ | $x_{2,1}(k')$ | $x_{1,1}(k')$ | $T_{1,2}(k,k')$ | k'' | $V_{3,2}^{67}(k'')$ | $V_{3,2}^{60}(k'')$ | $x_{3,1}(k'')$ | $T_{2,3}(k,k'')$ |
|----|----|----|--------------------|--------------------|---------------|---------------|-----------------|-----|---------------------|---------------------|----------------|------------------|
| 1 | 1 | 2 | 77 | 38 | 0 | 0 | 39 | 1 | 33 | 33 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 77 | 38 | 60 | 64 | 35 | 2 | 15 | 33 | 85 | 7 |
| 3 | 3 | 4 | 77 | 38 | 120 | 128 | 31 | 3 | 15 | 33 | 152 | 14 |
| 4 | 4 | 5 | 77 | 38 | 180 | 192 | 27 | 4 | 15 | 33 | 219 | 21 |
| 5 | 5 | 6 | 77 | 38 | 240 | 256 | 23 | 5 | 15 | 33 | 286 | 28 |
| 6 | 6 | 7 | 77 | 38 | 300 | 320 | 19 | 6 | 15 | 33 | 353 | 35 |
| 7 | 7 | 8 | 77 | 38 | 360 | 384 | 15 | 7 | 15 | 33 | 420 | 42 |
| 8 | 8 | 9 | 77 | 38 | 420 | 448 | 11 | 8 | 15 | 33 | 487 | 49 |
| 9 | 9 | 10 | 77 | 38 | 480 | 512 | 7 | 9 | 15 | 33 | 554 | 56 |
| 10 | 10 | 12 | 77 | 38 | 540 | 576 | 3 | 10 | 15 | 93 | 621 | -- |
| 11 | 11 | 13 | 137 | 38 | 600 | 640 | 59 | 10 | 15 | 93 | 621 | 3 |
| 12 | 12 | 14 | 137 | 38 | 660 | 704 | 55 | 11 | 15 | 93 | 688 | 10 |
| 13 | 13 | 15 | 137 | 38 | 720 | 768 | 51 | 12 | 15 | 93 | 755 | 17 |
| 14 | 14 | 16 | 137 | 38 | 780 | 832 | 47 | 13 | 15 | 93 | 822 | 24 |
| 15 | 15 | 17 | 137 | 38 | 840 | 896 | 43 | 14 | 15 | 93 | 889 | 31 |
| 16 | 16 | 18 | 137 | 38 | 900 | 960 | 39 | 15 | 15 | 93 | 956 | 38 |
| 17 | 17 | 19 | 137 | 38 | 960 | 1024 | 35 | 16 | 15 | 93 | 1023 | 45 |
| 18 | 18 | 20 | 137 | 38 | 1020 | 1088 | 31 | 17 | 15 | 93 | 1090 | 52 |
| 19 | 19 | 21 | 137 | 38 | 1080 | 1152 | 27 | 18 | 15 | 93 | 1157 | 59 |
| 20 | 20 | 22 | 137 | 38 | 1140 | 1216 | 23 | 19 | 15 | 153 | 1224 | -- |
| 21 | 21 | 23 | 137 | 38 | 1200 | 1280 | 19 | 19 | 15 | 153 | 1224 | 6 |
| 22 | 22 | 24 | 137 | 38 | 1260 | 1344 | 15 | 20 | 15 | 153 | 1291 | 13 |
| 23 | 23 | 25 | 137 | 38 | 1320 | 1408 | 11 | 21 | 15 | 153 | 1358 | 20 |
| 24 | 24 | 26 | 137 | 38 | 1380 | 1472 | 7 | 22 | 15 | 153 | 1425 | 27 |
| 25 | 25 | 28 | 137 | 38 | 1440 | 1536 | 3 | 23 | 15 | 153 | 1492 | 34 |
| 26 | 26 | 29 | 197 | 38 | 1500 | 1600 | 59 | 24 | 15 | 153 | 1559 | 41 |
| 27 | 27 | 30 | 197 | 38 | 1560 | 1664 | 55 | 25 | 15 | 153 | 1626 | 48 |
| 28 | 28 | 31 | 197 | 38 | 1620 | 1728 | 51 | 26 | 15 | 153 | 1693 | 55 |
| 29 | 29 | 32 | 197 | 38 | 1680 | 1792 | 47 | 27 | 15 | 213 | 1760 | -- |
| 30 | 30 | 33 | 197 | 38 | 1740 | 1856 | 43 | 27 | 15 | 213 | 1827 | 2 |

Tableau 2.6 : Calcul des temps de correspondance $T_{1,2}$ et $T_{2,3}$ à partir des vecteurs propres.

7 Simulation des temps moyens de correspondance

Les modèles (max, plus) développés dans ce chapitre permettent, pour un ensemble de paramètres donnés du réseau, de déterminer les temps de correspondance des bus durant une période de travail aux différents points d'échange considérés. A partir de ce type de résultat, nous avons analysé les temps de correspondance moyens associés, en simulant le fonctionnement du système pour différentes valeurs de certains de ses paramètres, à savoir les périodes des lignes ainsi que les conditions initiales du réseau. Pour illustrer notre propos, nous présentons les conclusions de notre analyse après simulation du réseau de bus dont le modèle GETRDJ est donné dans la figure 2.11, et pour lequel deux points d'échange sont étudiés : $Sc_{1,2}$ et $Sc_{2,3}$.

➤ **Simulation du temps de correspondance moyen en $Sc_{1,2}$**

Nous nous intéressons aux temps de correspondance moyens à la station $Sc_{1,2}$, que nous notons $Tm_{1,2}$. Nous faisons varier les périodes de la ligne L_1 (resp. de la ligne L_2) en fixant celles de L_2 et L_3 (resp. L_1 et L_3). Les courbes suivantes représentent la variation du temps de correspondance moyen en fonction de λ_1 (resp. de λ_2). De plus, afin de mettre en évidence l'influence des conditions initiales sur le temps de correspondance moyen, nous effectuons cette étude de simulation pour deux valeurs différentes de ces conditions initiales (deux dates différentes de départ des bus B_1 (resp. B_2) de la station Sd_1 (resp. Sd_2)).

Cas N°1 : $1 \leq \lambda_1 \leq 140$, $\lambda_2 = 60$, $\lambda_3 = 67$,

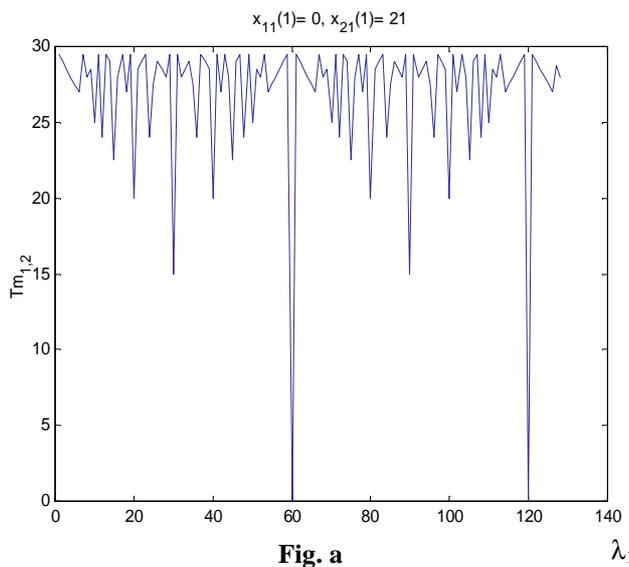


Fig. a

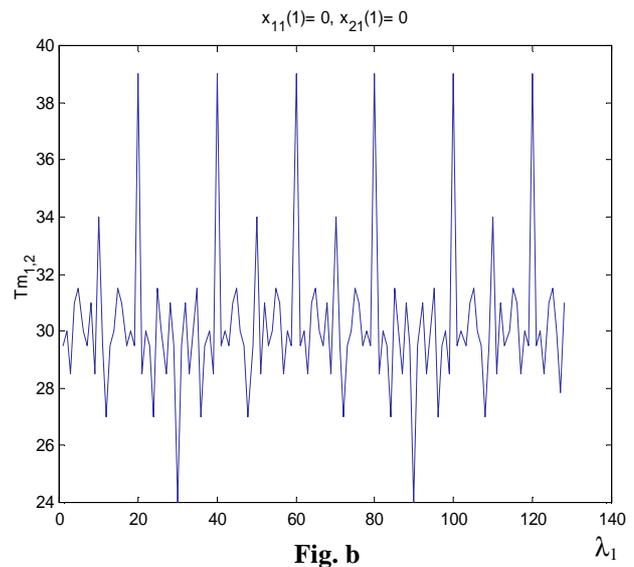


Fig. b

Fig. a : cette courbe représente la variation de $Tm_{1,2}$ en fonction de λ_1 . Nous remarquons qu'elle contient des minima locaux et des minima globaux qui correspondent aux périodes λ_1 de la ligne L_1 pour lesquelles les temps de correspondance sont faibles. Ces périodes sont proportionnelles à la période λ_2 de la ligne L_2 ($\lambda_1 = n\lambda_2$ ou $\lambda_1 = \frac{2n-1}{2}\lambda_2$ où $n \in \mathbb{N}^*$). Pour d'autres valeurs de λ_1 le temps de correspondance $Tm_{1,2}(\lambda_1)$ varie, avec de faibles variations entre 20 min et 30 min. Nous remarquons également qu'autour des minima de la courbe, le temps $Tm_{1,2}$ évolue d'une façon symétrique.

Fig. b : à partir de cette courbe, nous remarquons que les conditions initiales du système ont une grande influence sur le temps de correspondance moyen. En effet, par rapport au cas précédent (Fig. a) nous avons modifié les premiers départs des bus de leurs stations initiales de telle sorte que les arrivées (pour la première fois) des bus de L_1 et L_2 à la station $Sc_{1,2}$ ne se produisent pas en même temps. Ceci entraîne notamment un déplacement des extrema de $Tm_{1,2}$. Pour $\lambda_1 = \frac{2n-1}{2}\lambda_2$, le temps de correspondance moyen devient important (égal à 24 min au lieu de 15 min dans Fig. a), tandis que pour $\lambda_1 = n\lambda_2$ le temps de correspondance moyen est plus important (39 min). A l'exception des valeurs de λ_1 proportionnelles à λ_2 , le temps $Tm_{1,2}$ reste presque le même que dans le cas précédent (Fig. a) et varie autour de 30 min.

Cas N°2 : $\lambda_1 = 64$, $1 \leq \lambda_2 \leq 140$, $\lambda_3 = 67$,

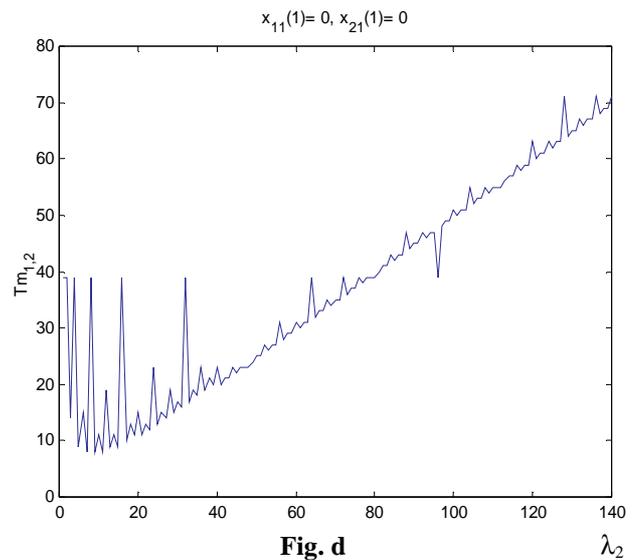
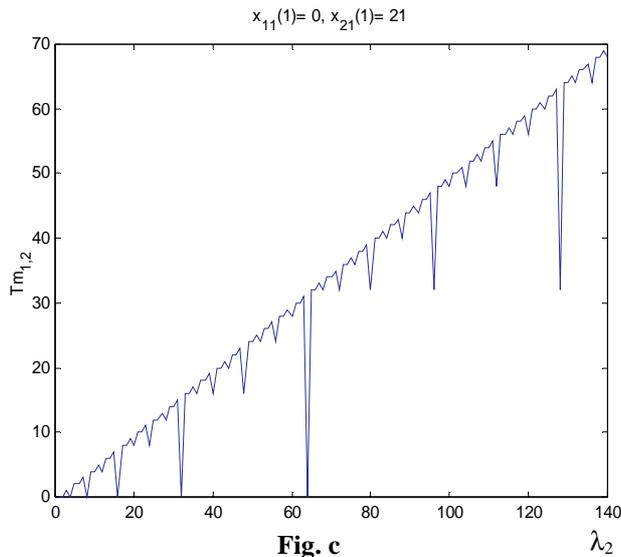


Fig. c et Fig. d : nous remarquons à partir de ces deux courbes que le temps de correspondance moyen croît de manière monotone en fonction de λ_2 . Ceci est dû à l'augmentation de l'écart entre les arrivées des bus B_1 et B_2 à la station de correspondance $Sc_{1,2}$. Dans la figure Fig. c, des minima locaux sont observés pour les valeurs de la période λ_2 proportionnelles à λ_1 ; les temps d'attente moyens y sont moins importants par rapport à d'autres valeurs voisines de λ_2 . Pour la figure Fig. d, sous l'influence des conditions initiales du système, les optima changent. De plus, il existe certaines valeurs de λ_2 proportionnelles à λ_1 et pour lesquelles le temps de correspondance moyen devient au contraire plus important.

➤ **Simulation du temps de correspondance moyen en $Sc_{2,3}$**

Nous simulons ici les temps de correspondance moyens $Tm_{2,3}$ à la deuxième station de correspondance $Sc_{2,3}$. Cette étude est effectuée d'abord dans le cas où les deux bus B_2 et B_3 arrivent en même temps en $Sc_{2,3}$ (c'est à dire que les départs de ces deux bus aux stations Sd_1 et Sd_2 sont effectués respectivement aux dates $x_{21}(1) = 0$ et $x_{31}(1) = 3$). Puis nous considérons le cas où les deux bus n'arrivent pas en même temps à la station de correspondance (nous choisissons par exemple $x_{21}(1) = 0$ et $x_{31}(1) = 0$). Les résultats obtenus sont présentés par les courbes suivantes :

Cas N°3 : $\lambda_1 = 64, 1 \leq \lambda_2 \leq 140, \lambda_3 = 67,$

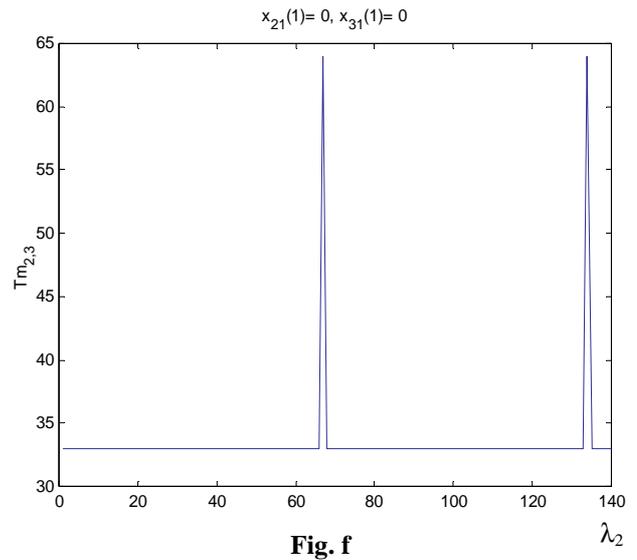
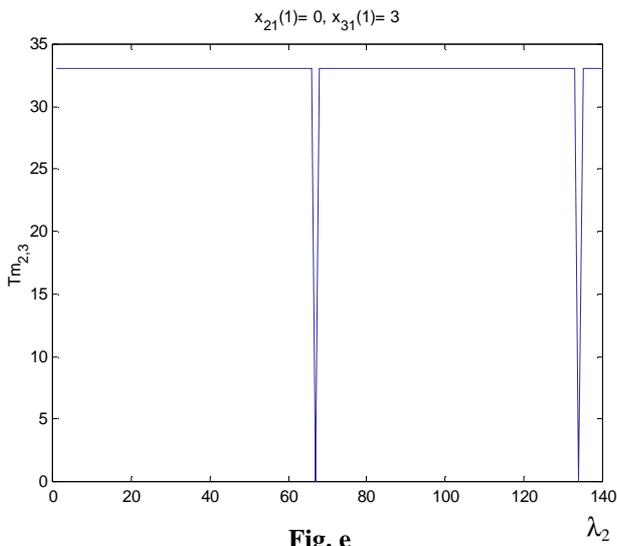


Fig. e et Fig. f : pour ces deux courbes nous observons les mêmes phénomènes que dans les figures Fig. a et Fig. b. En effet, pour Fig. e le temps de correspondance moyen est minimal si la période $\lambda_2 = n\lambda_3$ (dans ce cas les bus B_1 et B_2 arrivent en même temps pour la première fois à la station Sc_{23}), tandis que, sous l'influence des conditions initiales, pour Fig. f le temps de correspondance moyen est plus important pour les valeurs de λ_2 qui sont proportionnelles à λ_3 . Pour d'autres valeurs de λ_2 , ce temps moyen reste constant et égale à 33 min. Nous constatons donc qu'un changement des conditions initiales a toujours une influence sur les valeurs minimales du temps de correspondance moyen $Tm_{2,3}$.

Cas N°4 : $\lambda_1 = 64, \lambda_2 = 60, 1 \leq \lambda_3 \leq 140,$

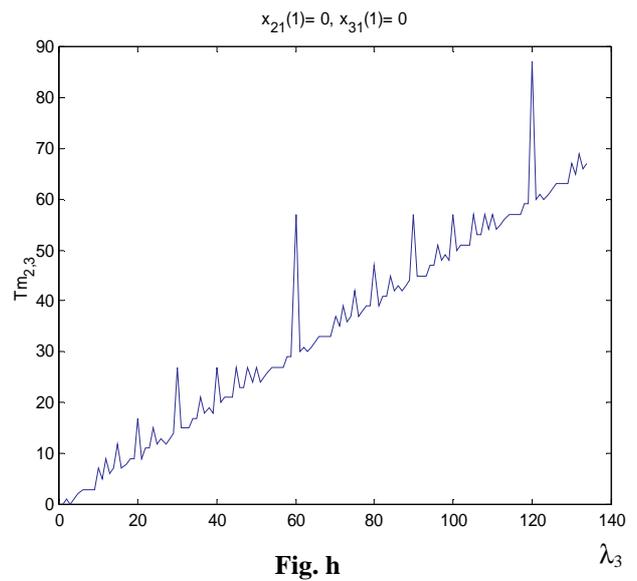
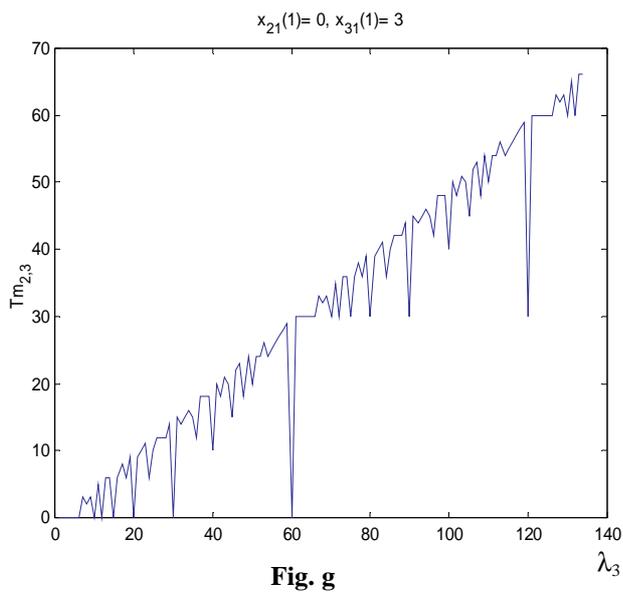


Fig. g et Fig. h : Ce cas est similaire au cas N° 2 ; et les mêmes remarques peuvent être faites.

Bilan des observations des courbes de simulation :

Par simulation on observe un comportement périodique des temps de correspondance moyens en fonction des périodes des lignes, ou monotone croissant avec une reproduction périodique (par translation) d'un motif (un motif par période). Dans chaque motif, on peut identifier une valeur moyenne (constante) et des minima et/ou maxima locaux. Dans le but de minimiser les temps de correspondance moyens sur le réseau de bus considéré, nous remarquons à partir des courbes données ci-dessus qu'il est préférable de choisir les périodes λ_i et λ_j de chaque couple de lignes L_i et L_j qui ont un arrêt de correspondance en commun telles que λ_i soit proportionnel à λ_j . Nous remarquons aussi que les conditions initiales du système ont une influence non négligeable sur les temps de correspondance moyens. Nous constatons alors, d'après ces résultats, qu'il est possible de minimiser les temps de correspondance des passagers en agissant sur les périodes des lignes et/ou sur les conditions initiales du système (les dates des premiers départs des bus au début de leur travail).

En conclusion de cette étude, et dans le cas d'un fonctionnement périodique du réseau de bus, il serait intéressant d'une part de déterminer et puis de minimiser la fonction mathématique associée aux temps de correspondance moyens. D'autre part, l'identification des minima de cette fonction nous permet de dire qu'il existe des couples de périodes des lignes pour lesquels le temps de correspondance moyen est minimal. La détermination de ces valeurs revient soit à imposer des pauses aux bus circulant sur les circuits les plus courts, soit à choisir le nombre nécessaire de bus à employer sur les lignes. Ces décisions peuvent se concrétiser par une action sur les vitesses des bus (si le réseau est équipé de voies propres), ou par des ajouts/retraits de bus sur une ligne. Quoi qu'il en soit, il convient d'agir sur le système initialement défini par l'intermédiaire d'une commande telle que nous l'avons définie dans les différents modèles proposés dans ce chapitre. Après avoir évalué les performances du système existant, l'étape suivante consiste donc à déterminer la commande permettant d'aboutir à l'objectif fixé, c'est à dire minimiser le critère considéré (temps d'attente des passagers).

8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence que la modélisation du système de transport étudié par un GET est loin d'être triviale, même sous des hypothèses simplificatrices, et même dans le cas le plus simple (mais le moins réaliste) de synchronisation des bus. La suppression de ces hypothèses dans le but d'étudier des cas concrets a nécessité l'introduction d'une nouvelle classe de RdP : les graphes d'événements temporisés avec retrait dynamique de jetons. Ceux-ci nous ont permis d'une part de traiter le cas de la non-synchronisation des bus, d'autre part d'éviter le problème de l'accumulation des jetons qui induit un fonctionnement du RdP non conforme à la réalité. Rappelons que ce dernier problème est indépendant du phénomène de synchronisation ou de non-synchronisation des bus. Dans ces deux cas de figure, le modèle mathématique obtenu dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} est non-stationnaire. Ceci nous a conduit à la résolution *a priori* de conflits structurels générés dans le modèle graphique afin d'être en mesure d'évaluer les performances du réseau étudié, notamment en termes de temps de correspondance.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à la commande des réseaux de bus. Nous commencerons d'abord par un réseau de bus où la synchronisation des bus est prise en compte ; dans un deuxième temps, nous étudierons un réseau de bus où cette hypothèse ne

sera plus considérée. Nous synthétiserons une commande du réseau afin de réduire au maximum, les temps de correspondance aux points d'échange de passagers.

Chapitre 3

Commande d'un système de transport public

1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la commande d'un système de transport public modélisé par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus). Dans cette étude, le concept "**Amélioration de la qualité du service**" est considéré sous deux aspects concernant les utilisateurs pour l'un, les opérateurs de gestion pour l'autre, à savoir :

- la réduction des temps d'attente des passagers aux stations de correspondance. Ceci revient à déterminer les dates d'envoi des véhicules à partir des stations de départ des lignes. Ces dates doivent garantir l'occurrence de toutes les correspondances avec un temps d'attente minimum qui reste toujours inférieur à une limite donnée M ($M \geq 0$). M représente le seuil de tolérance des passagers ;
- l'optimisation des ressources en termes de nombre de véhicules qui circulent sur le réseau. En tenant compte de la contrainte forte de respect des tolérances définies dans le premier point, l'objectif de la commande est double : économiser quelques tournées de bus en mettant ceux-ci en pause (donc réduire les coûts d'exploitation associés), ou réutiliser certains bus qui devraient être en pause pour renforcer, en cas de besoin ponctuel, d'autres lignes du réseau.

Nous nous intéressons à la synthèse des structures de commande afin d'obtenir ces performances.

- la première structure concerne la poursuite de trajectoire. Notre objectif est de synthétiser une trajectoire d'entrée du système telle que la réponse soit la plus proche possible d'un comportement désiré en sortie du système. La méthode adoptée pour synthétiser cette commande est basée sur les techniques développées dans le cadre de la théorie de la résiduation dans les dioïdes. Cette approche sera appliquée dans les deux cas considérés dans notre étude : le cas synchronisé (modélisation du système par un GET), et le cas non-synchronisé (modélisation par un GETRDJ);
- la seconde structure proposée se base sur des résultats de simulation permettant d'obtenir le vecteur de commande à partir des optima globaux des fonctions objectifs.

Afin d'appliquer ces structures de commande, nous choisissons deux modèles différents de réseaux de bus. Pour la première structure, nous reprenons le réseau étudié au deuxième chapitre. Pour la deuxième structure, nous considérons une infrastructure de réseau différente de celle étudiée auparavant. Pour chaque structure, nous proposons un algorithme de commande qui permet de concevoir (ou d'améliorer) la planification d'horaires du système étudié tout en respectant certaines tolérances définies.

2 Principe de la commande

2.1 Réseau étudié

Nous reprenons le réseau donné dans la figure 2.2 (cf. Chap. 2, § 2.). Il est composé de deux lignes L_i et L_{i+1} , connectées par une station de correspondance $Sc_{i,i+1}$. Nous supposons que chacune des deux lignes est desservie par un nombre donné de bus qui se trouvent initialement aux stations de départ ($n \in \mathbb{N}^*$ bus pour la ligne L_i et $m \in \mathbb{N}^*$ pour la ligne L_{i+1}).

2.2 Calcul de la commande

Nous considérons l'équation de récurrence d'ordre 1 décrivant le comportement analytique du système considéré (cf. Chap. 2, § 4.4, équation (2.12)).

$$\forall k \geq 2, \quad \begin{cases} X(k) = A(k-1) \otimes X(k-1) \oplus B(k) \otimes U(k) \\ Y(k) = C(k) \otimes X(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

L'objectif de la commande étudiée est double : minimiser les temps d'attente des passagers aux stations de correspondance du réseau, et minimiser l'utilisation des bus sur le réseau en assurant toutes les correspondances entre les lignes avec des temps d'attente inférieurs à une limite donnée M . Nous allons donc nous intéresser à un problème de poursuite de trajectoire. En effet, nous cherchons à synthétiser une commande à l'entrée du système qui permet à la sortie de se produire à un instant sollicité. Ceci consiste à déterminer la relation entrée-sortie (ou la matrice de transfert) du système d'évolution présenté par (3.1).

Dans le cas où les matrices caractéristiques du système (3.1) sont à coefficients constants ($\forall k, A(k) = A, B(k) = B$ et $C(k) = C$), nous avons :

$$\begin{aligned} X(k) &= A X(k-1) \oplus B U(k), \\ &= A^{\otimes 2} X(k-2) \oplus A B U(k-1) \oplus B U(k), \\ &= \dots \\ &= A^{\otimes(k-p)} X(p) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-p-1} A^{\otimes j} B U(k-j). \end{aligned} \quad (3.2)$$

On en déduit que :

$$\forall k \geq p+1, \quad Y(k) = CA^{\otimes(k-p)} X(p) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-p-1} CA^{\otimes j} B U(k-j). \quad (3.3)$$

La relation entrée-sortie est alors définie par :

$$\forall j \geq 0, \quad H(j) = C A^{\otimes j} B.$$

l'équation (3.3) devient :

$$\begin{aligned} \forall k \geq p+1, \quad Y(k) &= CA^{\otimes(k-p)} X(p) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-p-1} H(j) \otimes U(k-j), \\ &= CA^{\otimes(k-p)} X(p) \oplus (H * U)(k). \end{aligned} \quad (3.4)$$

où l'opérateur $*$, appelé produit de sup-convolution, est défini d'une façon générale par :

$$(f * g)(k) = \text{Sup}_{j \in \mathbb{Z}} \{f(k-j) + g(j)\}.$$

Dans ce qui suit nous cherchons les dates $\{U(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ où il faut envoyer les bus de leurs stations de départ pour que leurs arrivées aux stations de correspondance aient lieu aux dates désirées $Y_d = \{Y_d(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. La sortie du système calculée à partir des dates $\{U(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ doit vérifier l'égalité suivante :

$$\forall k > p+1, \quad Y(k) = CA^{\otimes(k-p)} X(p) \oplus (H * U)(k) = Y_d(k).$$

Cet objectif peut être atteint en utilisant la théorie de la résiduation dans l'algèbre des dioïdes.

Pour déterminer la commande du système $U(k)$ à l'étape k , nous supposons que les $(k-1)$ précédentes $(U(1), \dots, U(k-1))$ ont déjà été calculées. La relation entrée-sortie sera donc :

$$H = H(0) = C \otimes B.$$

En utilisant cette relation, l'expression de la commande U_{opt} est donnée par :

$$\begin{aligned} U_{\text{opt}}(k) &= \text{Sup}\{U \text{ tel que } Y(k) = CA^{\otimes(k-p)} X(p) \oplus (H * U)(k) = Y_d(k), \forall k > p+1\}, \\ &= (Y_d / H)(k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

2.3 Stratégie de commande adoptée

Dans le système étudié, nous supposons que les horaires de la ligne L_i sont planifiés pendant une période donnée de service des bus (cette période est composée de N_{max} tournées des bus, avec $N_{\text{max}} \in \mathbb{N}^*$), et nous désirons commander la ligne L_{i+1} . Commander la ligne L_{i+1} revient à envoyer les bus (notés B_{i+1}) à partir de la station de départ pour assurer les correspondances au niveau de la station d'échange de passagers tout en minimisant les temps de correspondance. Chaque voyageur ne doit pas attendre à la station de correspondance plus de M unités de temps.

En considérant cette hypothèse, on s'intéresse à la synthèse d'une commande optimale à partir d'une seule entrée du système, celle de la ligne à commander. Par ailleurs, l'entrée de la ligne L_i et la sortie désirée du système sont connues. On montre donc que la synthèse de cette commande revient à résoudre un problème d'optimisation sous contraintes.

Le système considéré est à deux entrées, soit :

$$U = [u_i, u_{i+1}]^T.$$

On suppose que u_i (entrée de la ligne L_i appelée : *entrée connue*) est planifiée, et u_{i+1} (entrée de la ligne L_{i+1} appelée : *entrée non connue*) est à déterminer. On définit alors la partition suivante du vecteur U et de la relation entrée-sortie H du système :

$$\forall k, \quad H \otimes U(k) = C \otimes B_{.1} \otimes u_i(k) \oplus C \otimes B_{.2} \otimes u_{i+1}(k),$$

où $\forall j \in \{1, 2\}$, B_j représente la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B .

Dans cette expression nous allons nous intéresser au deuxième membre qui contient la commande u_{i+1} et la relation entrée-sortie $C \otimes B_{.2}$ de la ligne L_{i+1} .

Nous supposons que les éléments de la suite $Y_d = \{Y_d(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ correspondent aux dates désirées d'arrivée des bus de la ligne L_{i+1} à la station de correspondance. Notre objectif est d'appliquer une suite de commande $u_{i+1} = \{u_{i+1}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ à l'entrée de la ligne L_{i+1} qui nous permettra d'atteindre la suite de sorties Y_d . Formellement, la sortie $Y = \{Y(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ calculée à partir de la commande u_{i+1} , en décomposant le vecteur U et la matrice H , doit satisfaire l'égalité (3.6) :

$$\begin{aligned} \forall k \geq p+1, Y(k) &= CA^{\otimes(k-p)} X(p) \oplus C \otimes \bigoplus_{j=1}^{k-p-1} A^{\otimes j} BU(k-j) \oplus C B_{.1} u_i(k) \oplus C B_{.2} u_{i+1}(k), \\ &= Y_d(k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'expression de la commande donnée par (3.5) devient :

$$\begin{aligned} \forall k \geq p+1, \quad u_{i+1, \text{opt}}(k) &= \text{Sup}\{u_{i+1} \text{ tq } : Y(k) = Y_d(k), \forall k > p\}, \\ &= Y_d(k) / C B_{.2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Par la suite nous appliquons cette stratégie de commande pour les deux configurations de fonctionnement des bus : la synchronisation, et la non-synchronisation.

3 Commande d'un système synchronisé

3.1 Modélisations

Nous supposons que le réseau considéré fonctionne avec attente des bus à la station de correspondance. Nous nous plaçons donc dans le cas d'un système synchronisé (cf. Chap. 2 §3.). Nous supposons de plus qu'il y a au moins autant de bus circulant sur L_{i+1} que sur L_i ($m \geq n$). Dans le cas d'un fonctionnement avec synchronisation, cette hypothèse permet d'assurer toutes les correspondances des passagers provenant de la ligne L_i tout en évitant de bloquer l'évolution du modèle GET qui représente le réseau (pas d'accumulation de jetons).

La figure 3.1 représente le modèle GET du système considéré. Il s'agit du modèle de la figure 2.5 (cf. Chap. 2, § 3.2) auquel une sortie, notée y , a été ajoutée, et pour lequel plus d'un jeton circule dans les deux circuits associés aux deux lignes. Les n jetons (resp. m jetons) qui représentent les bus circulant sur L_i (resp. sur L_{i+1}) se trouvent initialement dans la place $P_{i,3}$ (resp. $P_{i+1,3}$) qui représente avec les transitions $x_{i,1}$ et $x_{i,3}$ (resp. les transitions $x_{i+1,1}$ et $x_{i+1,3}$) la station de départ de L_i (resp. de L_{i+1}). Pour ce graphe, chaque franchissement de la transition u_j ($j \in \{i, i+1\}$) signifie qu'un ordre (autorisation) de départ est donné à un bus de la ligne L_j à partir de la station Sd_j . Le dateur $u_j(k)$ représente la date de l'occurrence de cet ordre ou de cet événement. Ces ordres sont donnés en fonction de l'état du réseau et des besoins des usagers.

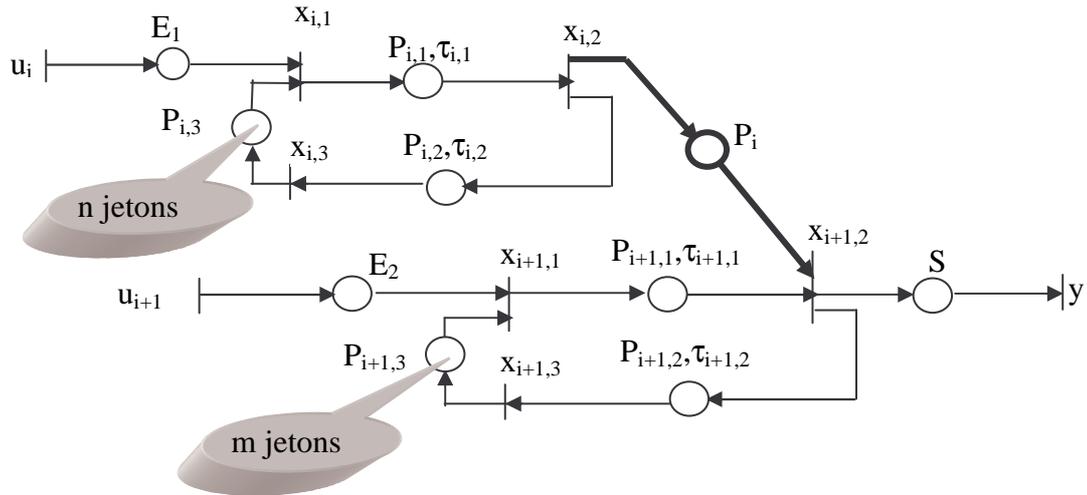


Figure 3.1 : Le modèle GET du système à commander.

Le contrôle du système se fait en agissant d'une façon dynamique sur la commande appliquée à son entrée. Un jeton présent à la place E_1 (resp. E_2) signifie qu'un ordre de départ est donné à un bus de cette ligne L_i (resp. L_{i+1}). Le jeton qui s'ajoute à la place S , après le franchissement de la transition $x_{i+1,2}$, signifie qu'une correspondance de la ligne L_i vers la ligne L_{i+1} est effectuée à la date $x_{i+1,2}(k)$ ou $y(k)$ (les deux transitions $x_{i+1,2}$ et y modélisent le même événement). Les temporisations associées aux places E_j ($j \in \{1, 2\}$) et S sont nulles par défaut.

Le modèle (max, plus) linéaire stationnaire déduit à partir du modèle GET de la figure 3.1, est donné par le système d'équations (3.8).

$$\forall k \geq m+1 \text{ et } m \geq n, \quad \begin{cases} x_{i,1}(k) = u_i(k) \oplus x_{i,3}(k-n) \\ x_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k) \\ x_{i,3}(k) = \tau_{i,2} \otimes x_{i,2}(k) \\ x_{i+1,1}(k) = u_{i+1}(k) \oplus x_{i+1,3}(k-m) \\ x_{i+1,2}(k) = x_{i,2}(k) \oplus \tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k) \\ x_{i+1,3}(k) = \tau_{i+1,2} \otimes x_{i+1,2}(k) \\ y(k) = x_{i+1,2}(k) \end{cases} \quad (3.8)$$

Les vecteurs d'état $X(k)$ et de commande $U(k)$ (tel que $U(k)=[u_i(k), u_{i+1}(k)]^T$) sont définis comme au chapitre 2 (§3.2) avec une légère modification de $X(k)$ due à l'introduction de deux transitions $x_{i,3}$ et $x_{i+1,3}$ dans le GET, soit $X(k)=[x_{i,1}(k), x_{i,2}(k), x_{i,3}(k), x_{i+1,1}(k), x_{i+1,2}(k), x_{i+1,3}(k)]^T$. Nous définissons en outre la sortie du système par : $Y(k) = y(k)$.

Compte tenu des places et transitions supplémentaires, ainsi que du nombre de bus sur chaque ligne, la forme matricielle implicite (3.9) du système (3.8) diffère légèrement du système (2.3) du chapitre 2, tout en étant définies suivant le même principe.

$$\forall k \geq m+1 \text{ et } m \geq n, \quad \begin{cases} X(k) = A_0 \otimes X(k) \oplus A_n \otimes X(k-n) \oplus A_m \otimes X(k-m) \oplus B \otimes U(k) \\ Y(k) = C \otimes X(k) \end{cases} \quad (3.9)$$

A_0 , A_n , A_m , B et C sont les matrices caractéristiques du système dont les coefficients représentent les données du réseau, à savoir :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{i,2} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \tau_{i+1,1} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{i+1,2} & \varepsilon \end{bmatrix}, A_n = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A_m = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } C = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad \varepsilon].$$

En calculant l'étoile de Kleene de la matrice A_0 , nous mettons le système (3.9) sous la forme explicite suivante :

$\forall k \geq m+1$ et $m \geq n$,

$$\begin{cases} X(k) = A_0^* \otimes A_n \otimes X(k-n) \oplus A_0^* \otimes A_m \otimes X(k-m) \oplus A_0^* \otimes B \otimes U(k) \\ Y(k) = C \otimes \{A_0^* \otimes A_n \otimes X(k-n) \oplus A_0^* \otimes A_m \otimes X(k-m) \oplus A_0^* \otimes B \otimes U(k)\} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{avec } A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} \tau_{i,2} & \tau_{i,2} & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \varepsilon & \tau_{i+1,1} & e & \varepsilon \\ \tau_{i,1} \tau_{i+1,2} & \tau_{i+1,2} & \varepsilon & \tau_{i+1,1} \tau_{i+1,2} & \tau_{i+1,2} & e \end{bmatrix}.$$

Les dates de franchissement de l'entrée $u_i(k)$ et pour $1 \leq k \leq m$ sont supposées connues. L'état initial du système correspond aux conditions $X(1), \dots, X(m)$ qui sont connues également. Afin d'assurer les correspondances entre les lignes L_i et L_{i+1} , les dates $u_{i+1}(k)$ de franchissement de la transition u_{i+1} sont données pour $1 \leq k \leq m$ en fonction des dates des m premiers passages des bus de la ligne L_i à la station de correspondance. Le même scénario se répète pour les autres courses des bus du réseau ($k > m$). Les états du système seront calculés en résolvant le système (3.10).

Pour faciliter la résolution du système (3.10), nous le mettons sous forme d'une équation de récurrence d'ordre 1. Nous définissons alors les vecteurs suivants :

$$\forall k \geq m+1 \text{ et } m \geq n, \begin{cases} \tilde{X}(k) = [X(k), X(k-1), \dots, X(k-n), \dots, X(k-m+1)]^T \in (\mathbb{R}_{\max})^{6m \times 1}; \\ \tilde{U}(k) = [\tilde{u}_i(k), \tilde{u}_{i+1}(k)]^T = [u_i(k), u_{i+1}(k)]^T \in (\mathbb{R}_{\max})^{2 \times 1}; \\ \tilde{Y}(k) = Y(k) \in \mathbb{R}_{\max}. \end{cases}$$

En utilisant ces vecteurs, nous déduisons le système de récurrence (3.11).

$$\forall k \geq m+1 \text{ et } m \geq n, \quad \begin{cases} \tilde{X}(k) = \tilde{A} \otimes \tilde{X}(k-1) \oplus \tilde{B} \otimes \tilde{U}(k) \\ \tilde{Y}(k) = \tilde{C} \otimes \tilde{X}(k) \end{cases} \quad (3.11)$$

Les matrices \tilde{A} , \tilde{B} et \tilde{C} sont données par :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon & .. & A_0^* \otimes A_n & \varepsilon & .. & A_0^* \otimes A_m \\ E & \varepsilon & \varepsilon & . & . & \varepsilon \\ \varepsilon & E & \varepsilon & . & . & \varepsilon \\ . & \varepsilon & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \varepsilon & . & . & \varepsilon & E & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} A_0^* \otimes B \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{C} = [C \ \varepsilon \ \varepsilon \ \dots \ \varepsilon].$$

où les éléments de $\tilde{A} \in (\mathbb{R}_{\max})^{6m \times 6m}$ sont des blocs de dimensions (6x6) à coefficients dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} ; $\tilde{B} \in (\mathbb{R}_{\max})^{6m \times 2}$ et $\tilde{C} \in (\mathbb{R}_{\max})^{1 \times 6m}$. La solution du système (3.11) est donnée en fonction de la condition initiale $\tilde{X}(m)$ et du vecteur d'entrée $\tilde{U}(k)$ par :

$$\forall k \geq m+1 \text{ et } m \geq n, \quad \tilde{X}(k) = \tilde{A}^{\otimes(k-m)} \tilde{X}(m) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-m-1} \tilde{A}^{\otimes j} \tilde{B} \tilde{U}(k-j). \quad (3.12)$$

Par conséquent, nous déduisons l'expression de la deuxième équation de (3.11) :

$$\forall k \geq m+1 \text{ et } m \geq n, \quad \tilde{Y}(k) = \tilde{C} \tilde{A}^{\otimes(k-m)} \tilde{X}(m) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-m-1} \tilde{C} \tilde{A}^{\otimes j} \tilde{B} \tilde{U}(k-j). \quad (3.13)$$

A partir de l'équation (3.12), il est possible d'évaluer les différentes dates de passage des bus aux arrêts du réseau.

3.2 Calcul de la commande

Nous réécrivons l'expression de la commande donnée dans l'équation (3.7) en considérant les matrices caractéristiques du système (3.11). Nous obtenons :

$$\forall k \geq m+1, \quad u_{i+1, \text{opt}}(k) = Y_d(k) / \tilde{C} \tilde{B}_{.2}$$

Nous exprimons la quantité $\tilde{C} \tilde{B}_{.2}$ en fonction des matrices A , B et C du système (3.9). Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{C} \tilde{B}_{.2} &= [C \ \varepsilon \ \varepsilon \ \dots \ \varepsilon] \otimes \begin{bmatrix} A_0^* \otimes B_{.2} \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \\ &= C A_0^* B_{.2} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\forall k \geq m+1, \quad u_{i+1,opt}(k) = \text{Sup}\{u_{i+1} \text{ tq : } Y(k) = Y_d(k), \text{ pour } k > m\}, \\ = Y_d(k) / C A_0^* B_{.2}$$

L'expression (3.6) de la sortie du système, calculée à partir de cette commande optimale $u_{i+1,opt}$, est définie par : $\forall k \geq m+1$,

$$Y(k) = \tilde{C} \tilde{A}^{\otimes(k-m)} \tilde{X}(m) \oplus \tilde{C} \otimes \bigoplus_{j=1}^{k-m-1} \tilde{A}^{\otimes j} \tilde{B} \tilde{U}(k-j) \oplus \tilde{C} \tilde{B}_{.1} u_i(k) \oplus C A_0^* B_{.2} u_{i+1,opt}(k).$$

A partir de l'expression de la commande proposée, nous déterminons les dates d'envoi des bus de la station de départ de la ligne L_{i+1} pour assurer toutes les correspondances avec la ligne L_i et avec des temps d'attente minimums.

3.3 Algorithme de commande

Soit N_{max} le nombre de tournées de bus à effectuer sur la ligne L_i pendant une période de service. Les dates de différents passages des bus aux arrêts de cette ligne sont planifiées. A partir de ces dates, nous déterminons celles des premiers passages des m bus de la ligne L_{i+1} à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$. Nous obtenons donc les dates $y(k)$ (pour $1 \leq k \leq m$). Le choix de la sortie désirée du système Y_d se fait, en fonction de ces dates, de la façon suivante :

- dans un premier temps, nous choisissons parmi les m bus B_{i+1} de la ligne L_{i+1} ceux qui peuvent assurer la $k^{\text{ème}}$ ($k \geq m+1$) correspondance avec la ligne L_i . Y_d sera donc donné en fonction de la disponibilité de ces bus. Dans le cas où aucun des m bus ne répond pas à cette exigence, nous introduisons un nouveau bus sur la ligne L_{i+1} pour assurer cette correspondance ;
- ensuite nous choisissons la sortie sollicitée Y_d de sorte qu'il n'y ait pas d'accumulation de jetons à la place P_i du modèle GET. Cette dernière contrainte est formulée par :

$$\forall k \geq m+1, \quad Y_d(k) < x_{i,2}(k+1). \quad (3.14)$$

Compte tenu de ces deux points, nous posons pour le choix de Y_d à l'étape k :

$$\forall k \geq m+1, \forall j \in \{1, \dots, m\}, Y_d^j(k) = Z(j) \lambda_{i+1}, \quad (3.15)$$

où $Z(j)$ correspond à la date du dernier franchissement de la transition $x_{i+1,2}$ par le $j^{\text{ème}}$ jeton ($1 \leq j \leq m$), ou encore la date du dernier passage du $j^{\text{ème}}$ bus B_{i+1} à la station de correspondance.

Le temps de correspondance $T^j(k)$ associé à chaque date $Y_d^j(k)$ est donné par :

$$\forall k \geq m+1, \forall j \in \{1, \dots, m\}, T^j(k) = Y_d^j(k) / x_{i,2}(k). \quad (3.16)$$

En analysant ces temps de correspondance, nous envisageons trois cas possibles :

- $T^j(k) < 0$, pour tout $j \in I \subset \{1, \dots, m\}$, où I correspond à l'ensemble des bus qui sont en pause et qui peuvent être utilisés en cas de besoin ;
- $0 \leq T^j(k) \leq M$, pour tout $j \in J \subset \{1, \dots, m\}$, où J correspond à l'ensemble des bus de la ligne L_{i+1} qui peuvent assurer la $k^{\text{ème}}$ correspondance avec la ligne L_i ;
- $M < T^j(k)$, pour tout $j \in K \subset \{1, \dots, m\}$, où K correspond à l'ensemble des bus qui ne peuvent pas être disponibles pour effectuer la $k^{\text{ème}}$ correspondance avec la ligne L_i .

Ces bus sont en circulation et ne pourront pas arriver à temps en $Sc_{i,i+1}$ pour respecter la contrainte de tolérance.

Posons $\{1, \dots, m\} = I \cup J \cup K$, où I, J et K sont disjoints deux à deux. Selon la circulation des bus sur le réseau, nous pouvons envisager les deux cas suivants :

- $J \neq \emptyset$: il existe au moins un bus B_{i+1} disponible pour assurer la $k^{\text{ème}}$ correspondance avec la ligne L_i dans les tolérances définies. Si $\text{Card}(J) \geq 2$, alors nous aurons deux possibilités pour le choix du bus qui va effectuer cette correspondance. Nous pouvons choisir entre le premier bus disponible, i.e. le bus arrivant le premier à la station de départ de la ligne L_{i+1} et le dernier bus disponible, i.e. celui qui arrive le dernier à la station de départ de la ligne L_{i+1} de sorte que la limite M soit respectée. Les temps de correspondance pour ces deux choix sont différents et sont donnés par :

- ◆ $T^{j_0}(k) = \text{Inf}_{j \in J} \{T^j(k)\}$, relatif au premier bus disponible. C'est donc un temps d'attente minimum qui est plus avantageux pour les passagers ;

- ◆ $T^{j_0}(k) = \text{Sup}_{j \in J} \{T^j(k)\}$, relatif au dernier bus disponible. Ce cas est moins intéressant pour les passagers mais peut permettre une gestion plus efficace des bus. En effet, plus les temps de pause d'un bus sont importants, plus il est possible d'utiliser ce bus pour d'autres tâches pendant ces périodes d'inoccupation.

Tout au long de cette étude, nous allons considérer la sortie désirée $Y_d(k)$ pour laquelle le temps de correspondance est $T^{j_0}(k) = \text{Sup}_{j \in J} \{T^j(k)\}$. Nous choisissons donc le $j_0^{\text{ème}}$ bus B_{i+1} ($j_0 \in J$) pour effectuer la $k^{\text{ème}}$ correspondance avec un bus B_i pour un temps de correspondance égal à $T^{j_0}(k)$. Ensuite, nous déduisons la sortie désirée (3.15) qui sera $Y_d(k) = Z(j_0) \lambda_{i+1}$. L'expression de la commande devient :

$$\forall k \geq m+1, \quad u_{i+1,\text{opt}}(k) = Z(j_0) \lambda_{i+1} / C A_0^* B.2$$

- $J = \emptyset$: dans ce cas, aucun des bus B_{i+1} en circulation ne peut assurer la correspondance avec la ligne L_i dans les tolérances requises. Ainsi, pour chaque $j \in I \cup K$, nous avons soit $T^j(k) > M$, soit $T^j(k) < 0$. Le choix de $Y_d(k)$ se fera alors en fonction de l'arrivée du bus B_i à la station de correspondance pour la $k^{\text{ème}}$ fois. Le cas idéal est de choisir la sortie désirée du système telle que $Y_d(k) = x_{i,2}(k)$ où le temps d'attente $T(k)$ sera nul. La commande est alors donnée par :

$$\forall k \geq m+1, \quad u_{i+1,\text{opt}}(k) = x_{i,2}(k) / C A_0^* B.2$$

Il reste à savoir, après avoir déterminé l'expression de la commande $u_{i+1,\text{opt}}$ de la ligne L_{i+1} , si nous allons réutiliser un bus déjà employé sur cette ligne (bus en pause) ou bien s'il faut introduire un nouveau bus sur le réseau. Face à cette situation nous distinguons les deux cas suivants :

- ◆ $I \neq \emptyset$: il existe au moins un bus B_{i+1} en pause à la station de départ Sd_{i+1} . La correspondance avec la ligne L_i sera donc effectuée avec un de ces bus en appliquant l'heuristique utilisée dans le cas où $J \neq \emptyset$;
- ◆ $I = \emptyset$: tous les bus B_{i+1} sont en circulation et la contrainte de seuil M ne peut être respectée par aucun. Ceci nous ramène au cas où l'ajout d'un nouveau bus sur la ligne L_{i+1} est nécessaire ; on incrémente donc le nombre de bus sur le réseau de 1.

Remarque : Dans le cas où $J = \emptyset$ et $K \neq \emptyset$, et pour maintenir la qualité du service proposé, nous interrompons la pause d'un bus (si $I \neq \emptyset$) ou nous ajoutons un nouveau bus sur la ligne secondaire. Mais si une augmentation de la borne maximale M du temps d'attente peut être acceptée par les passagers, alors cette dernière solution peut être évitée, en favorisant l'utilisation des bus déjà en circulation sur le réseau.

Notons que, conformément à ce qui vient d'être expliqué relativement à la tolérance M , la sortie choisie parmi les dates possibles doit être comprise entre les dates $x_{i,2}(k)$ et $x_{i,2}(k)+M$, donc au plus tard M unités de temps après le passage du bus B_i considéré. En conséquence, d'après (3.14), cette date au plus tard doit être inférieure à $x_{i,2}(k+1)$. Il est donc nécessaire que la condition suivante soit remplie :

$$\forall k \geq m+1, \quad M < x_{i,2}(k+1) / x_{i,2}(k).$$

Cette méthode de commande est schématisée par l'organigramme suivant :

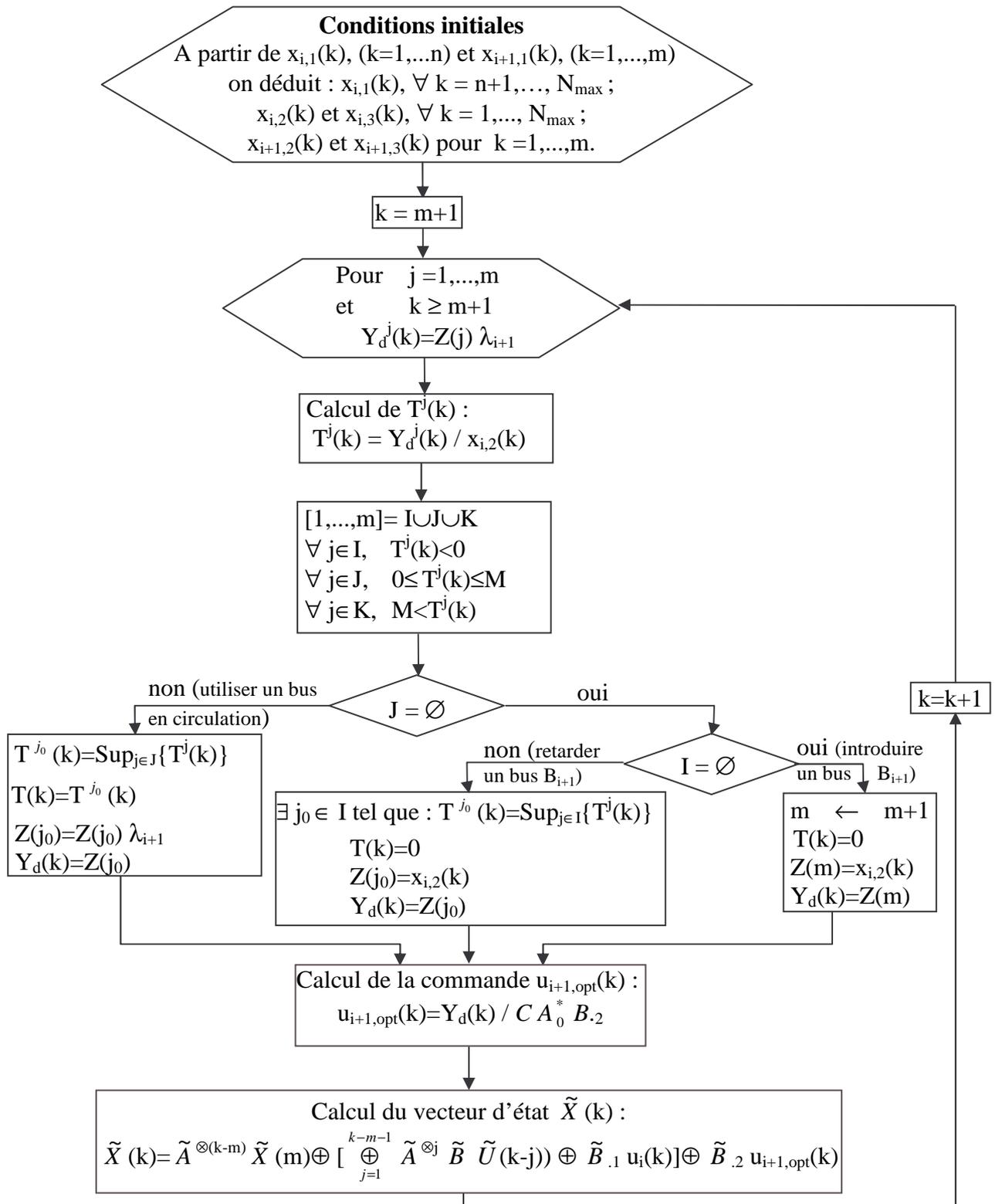


Figure 3.2 : Organigramme de commande du système : configuration synchronisée.

$\forall k \geq n+1$ et $\forall k \geq m+1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,1}(k) = u_i(k) \oplus x_{i,3}(k-n) \\ x_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes x_{i,1}(k) \\ x_{i,3}(k) = \tau_{i,2} \otimes x_{i,2}(k) \\ x_{i+1,1}(k) = u_{i+1}(k) \oplus x_{i+1,3}(k-m) \\ x_{i+1,2}(k) = \tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k) \oplus [x_{i+1,4}(k) \oplus x_{i,2}(k')] \\ x_{i+1,3}(k) = \tau_{i+1,2} \otimes x_{i+1,2}(k) \\ x_{i+1,4}(k) = \tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k) \\ y(k) = x_{i+1,2}(k) \\ o(k) = x_{i,2}(k_1) \oplus x_{i+1,4}(k_2) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Remarques :

- $X(1), \dots, X(m)$: conditions initiales du système. Les dates $x_{i,j}(k)$ (pour $1 \leq k \leq N_{\max}$ et $1 \leq j \leq 3$) sont planifiées, et $x_{i+1,j}(k)$ (pour $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq j \leq 3$) sont données en fonction des dates $x_{i,j}(k)$ de sorte qu'un bus B_{i+1} peut embarquer plusieurs groupes de voyageurs dont les temps d'attente sont inférieurs à la limite M ;
- Si $n \geq m$, les dates $x_{i+1,1}(k)$ (ou bien $u_{i+1}(k)$), pour $k \in \{m+1, \dots, n\}$, sont données de sorte qu'un bus B_{i+1} , qui part de la station de départ de L_{i+1} puisse embarquer tous les passagers qui sont arrivés à la station de correspondance et dont les temps d'attente ne dépassent pas la limite M (seuil de tolérance). Les autres dates $x_{i+1,2}(k)$, $x_{i+1,3}(k)$ et $x_{i+1,4}(k)$ (pour $k \in \{m+1, \dots, n\}$) sont déduites à partir de la cinquième, la sixième et la septième équation du système (3.17). Nous concevons donc les états du systèmes $X(m+1)$ jusqu'à $X(n)$. Nous reviendrons sur les détails du calcul de ces dates dans le paragraphe 4.4.

L'aspect non stationnaire de ce modèle est représenté par la cinquième et la dernière équation où k' , k_1 et k_2 sont des fonctions de la variable k . L'apparition de ces fonctions, dont les expressions ne sont pas définies, rend plus difficile la résolution du modèle mathématique ainsi que la commande du système qu'il modélise. Toutefois, en observant la cinquième équation du modèle (3.17), la date du $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition $x_{i+1,2}$ peut s'écrire, pour tout $k \geq n+1$ et $k \geq m+1$, sous la forme :

$$x_{i+1,2}(k) = x_{i+1,4}(k) \oplus \tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k) = x_{i+1,4}(k) \quad (3.18)$$

En effet : $x_{i+1,2}$ est franchie si chacune de ses places en amont contient au moins un jeton. Nous remarquons, dans un premier temps, que le $k^{\text{ème}}$ jeton qui arrive à la place $P_{i+1,1}$ correspond au $k^{\text{ème}}$ jeton qui arrive à la place $P_{i+1,4}$ et qui valide la transition $x_{i+1,4}$. Donc le $k^{\text{ème}}$ franchissement de $x_{i+1,2}$ correspond au $k^{\text{ème}}$ franchissement de $x_{i+1,4}$, et par suite nous choisissons le même paramètre k pour les transitions $x_{i+1,2}$ et $x_{i+1,4}$ dans la 5^{ème} équation du système (3.17). Dans un deuxième temps, le $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition $x_{i,2}$ ne correspond pas en général au $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition $x_{i+1,4}$ (la transition $x_{i,2}$ peut être franchie plusieurs fois entre deux franchissements successifs de $x_{i+1,4}$), donc pour exprimer cette différence entre les nombres de franchissements des transitions $x_{i,2}$ et $x_{i+1,4}$, on note par k' le $k'^{\text{ème}}$ franchissement de $x_{i,2}$ qui correspond au $k^{\text{ème}}$ franchissement de la transition $x_{i+1,4}$ tel que $k' \geq k$. Or la transition $x_{i+1,2}$ ne peut pas être franchie sauf si $x_{i+1,4}$ l'est aussi puisque leurs places en amont ($P_{i+1,1}$ et $P_{i+1,4}$) ont une même transition d'entrée $x_{i+1,1}$ et les temporisations associées à ces deux places sont identiques. Donc, le franchissement de

$$A_\beta = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \mathbf{1}_{\{n \geq m\}}^{\max} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mathbf{1}_{\{m \geq n\}}^{\max} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } C = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e \ \varepsilon \ \varepsilon],$$

où $\mathbf{1}_{\{a \geq b\}}^{\max}$ est la fonction indicatrice (égale à "e" si $a \geq b$, et "ε" sinon).

Avant de synthétiser une commande du système pour améliorer ses horaires ou pour procéder à la conception d'une nouvelle planification de ses horaires, nous résolvons d'abord son modèle mathématique donné par (3.20).

4.3 Résolution du modèle mathématique

La forme explicite du système (3.20) est donnée par :

$$\forall k \geq \beta + 1, \quad \begin{cases} X(k) = A_0^* A_\alpha X(k-\alpha) \oplus A_0^* A_\beta X(k-\beta) \oplus A_0^* B U(k) \\ Y(k) = C \otimes \{A_0^* A_\alpha X(k-\alpha) \oplus A_0^* A_\beta X(k-\beta) \oplus A_0^* B U(k)\} \end{cases} \quad (3.21)$$

Comme dans le cas du système (3.11), nous réécrivons les équations (3.21) sous forme d'une équation de récurrence d'ordre 1. Définissons alors les vecteurs suivants :

$$\forall k > \beta, \quad \begin{cases} \tilde{X}(k) = [X(k), X(k-1), \dots, X(k-\alpha), \dots, X(k-\beta+1)]^T; \\ \tilde{U}(k) = U(k); \\ \tilde{Y}(k) = Y(k). \end{cases}$$

Nous obtenons donc la même représentation d'état de (3.11), à savoir :

$$\forall k \geq \beta + 1, \quad \begin{cases} \tilde{X}(k) = \tilde{A} \otimes \tilde{X}(k-1) \oplus \tilde{B} \otimes \tilde{U}(k) \\ \tilde{Y}(k) = \tilde{C} \otimes \tilde{X}(k) \end{cases} \quad (3.22)$$

avec :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \dots & A_0^* \otimes A_\alpha & \dots & \varepsilon & A_0^* \otimes A_\beta \\ E & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & E & \varepsilon & \dots & \dots & \varepsilon \\ \dots & \varepsilon & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & \dots & \dots & \varepsilon & E & \varepsilon \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} A_0^* \otimes B \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{C} = [C \ \varepsilon \ \varepsilon \ \dots \ \varepsilon]$$

Dans ce cas, l'ordre du vecteur $\tilde{X}(k)$ ainsi que celui des matrices caractéristiques du système (3.22) sont les suivants : $\tilde{X}(k) \in (\mathbb{R}_{\max})^{7\beta \times 1}$, $\tilde{A} \in (\mathbb{R}_{\max})^{7\beta \times 7\beta}$, $\tilde{B} \in (\mathbb{R}_{\max})^{7\beta \times 2}$ et $\tilde{C} \in (\mathbb{R}_{\max})^{1 \times 7\beta}$.

Les éléments de la matrice \tilde{A} sont des blocs (7x7), et ceux de la matrice \tilde{B} sont des blocs (7x2), et enfin les éléments du vecteur \tilde{C} sont des blocs (1x7).

La résolution et l'analyse du système (3.22) se fait de la même façon que le système (3.11) en remplaçant m par β (car si $n > m$, $\beta = n$ et non m). La solution est :

$\forall k \geq \beta + 1,$

$$\tilde{X}(k) = \tilde{A}^{\otimes(k-\beta)} \tilde{X}(\beta) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-\beta-1} \tilde{A}^{\otimes j} \tilde{B} \tilde{U}(k-j),$$

et
$$\tilde{Y}(k) = \tilde{C} \tilde{A}^{\otimes(k-\beta)} \tilde{X}(\beta) \oplus \left[\bigoplus_{j=1}^{k-\beta-1} \tilde{C} \tilde{A}^{\otimes j} \tilde{B} \tilde{U}(k-j) \oplus \tilde{C} \tilde{B}_{.1} u_i(k) \right] \oplus \tilde{C} \tilde{B}_{.2} u_{i+1, \text{opt}}(k).$$

De même, la synthèse de la commande est identique à celle du cas précédent. L'expression de la commande $u_{i+1, \text{opt}}$ est la même que celle donnée auparavant (cf. § 2.3). En revanche, le choix de la sortie désirée Y_d est différent pour les deux cas. Cette différence est due au fait que dans le premier cas on envoie un bus B_{i+1} pour embarquer un seul lot de passagers. Alors que dans ce deuxième cas, il est possible d'embarquer plusieurs lots de passagers par un même bus B_{i+1} .

4.4 Algorithme de commande

Le principe du choix de la sortie désirée Y_d se base, comme dans le cas précédent, sur les conditions initiales du système. De la deuxième équation du système (3.20) nous calculons les dates de franchissement de la sortie du système $Y(k)$ pour $1 \leq k \leq m$. En analysant ces dates, nous choisissons Y_d de la manière suivante :

- dans un premier temps, nous allons choisir parmi les bus de la ligne L_{i+1} , celui qui doit assurer la (ou les) prochaine(s) correspondance(s) avec la ligne L_i tout en respectant la contrainte relative à M (attente maximale $\leq M$). Dans le cas où aucun des m bus ne répond à cette exigence, nous rajouterons un nouveau bus sur la ligne L_{i+1} pour assurer ces correspondances ;
- le deuxième point lié au choix de la sortie Y_d correspond au regroupement de plusieurs lots de passagers venant de plusieurs bus de la ligne L_i pour emprunter un même bus de la ligne L_{i+1} .

Le choix d'un bus revient donc à fixer une date de sortie sollicitée $Y_d(k)$ en fonction des passages des bus de la ligne L_i au niveau de la station de correspondance telle que :

$$\forall k \geq m+1, \quad Y_d(k) \in [R, R \otimes M], \quad (3.23)$$

où M est le seuil que peut tolérer un passager à un arrêt de correspondance, et R est une constante définie comme suit :

à l'étape 0 : $k = m+1$ et $k_0 = \sup\{r \text{ tel que } x_{i,2}(r) \leq \max_{1 \leq i \leq m} Z(i)\}$,

$$R = R_0 = x_{i,2}(k_0+1) ;$$

à l'étape k : $k > m+1$, k_0 est donné tel que : $x_{i,2}(k_0) = \text{Sup}\{x_{i,2}(r), \text{ tq } x_{i,2}(r) \leq R_{k-1} \otimes M\}$

$$R = R_k = x_{i,2}(k_0+1) ;$$

Pour choisir un bus parmi les m qui circulent sur la ligne L_{i+1} , nous définissons une suite de sorties $\{Y_d^j(k)\}_{1 \leq j \leq m}$ par $Y_d^j(k) = Z(j) \otimes \lambda_{i+1}$ (pour $(1 \leq j \leq m)$). $Z(j)$ est défini dans (3.15) (date du dernier tir de la transition $x_{i+1,2}$), et λ_{i+1} représente la période de la ligne L_{i+1} . Le temps de correspondance associé à chaque date $Y_d^j(k)$ est exprimé par :

$$\forall k \geq m+1, \quad T^j(k+1) = Y_d^j(k) / x_{i,2}(k), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Si (3.23) est vérifiée pour une seule valeur de $j \in \{1, \dots, m\}$, alors le bus B_{i+1} associé assure toutes les correspondances avec les bus B_i (bus de la ligne L_i) dont la date de passage reste inférieure à $R \otimes M$. Si cette relation est vérifiée pour plusieurs valeurs de j , alors le bus B_{i+1} choisi est celui qui passe le plus tard à la station $Sc_{i,i+1}$ (on lui associe l'indice j_0). Les autres bus B_{i+1} (associés aux autres valeurs de j) sont mis en pause au dépôt Sd_{i+1} . Notons que si cela s'avère nécessaire, on fait attendre le bus choisi jusqu'à la date $x_{i,2}(k_0)$ définie ci-dessus, de sorte que le maximum de correspondances soient assurées par un même bus B_{i+1} tout en satisfaisant la tolérance M . Ainsi $Y_d(k) = x_{i,2}(k_0) \oplus Y_d^j(k)$.

Si pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, la condition (3.23) n'est pas vérifiée, alors nous pouvons envisager les deux cas suivants :

- si $Y_d^j(k) > R \otimes M$, aucun bus disponible ne peut assurer la correspondance des passagers arrivant entre les dates R et $R \otimes M$ à la station de correspondance. Alors, nous devons introduire un nouveau bus sur la ligne L_{i+1} pour effectuer cette correspondance, de sorte que ce bus arrive en $Sc_{i,i+1}$ en même temps que le $k^{\text{ème}}$ bus B_i à la date $x_{i,2}(k_0)$ (dernier bus B_i arrivant en $Sc_{i,i+1}$ avant la date $R \otimes M$);
- si $Y_d^j(k) < R$, il existe au moins un bus, en pause au dépôt Sd_{i+1} ou en circulation, capable d'assurer toutes les correspondances dans l'intervalle du temps $[R, R \otimes M]$. Dans ce cas, nous réutilisons le dernier bus disponible de la ligne L_{i+1} afin de pouvoir transporter tous les passagers en attente (même ceux qui arrivent à la station de correspondance à la date $R \otimes M$). Cette heuristique correspond à celle déjà utilisée pour la configuration synchronisée.

La stratégie de commande proposée est formulée dans l'organigramme de la figure 3.4.

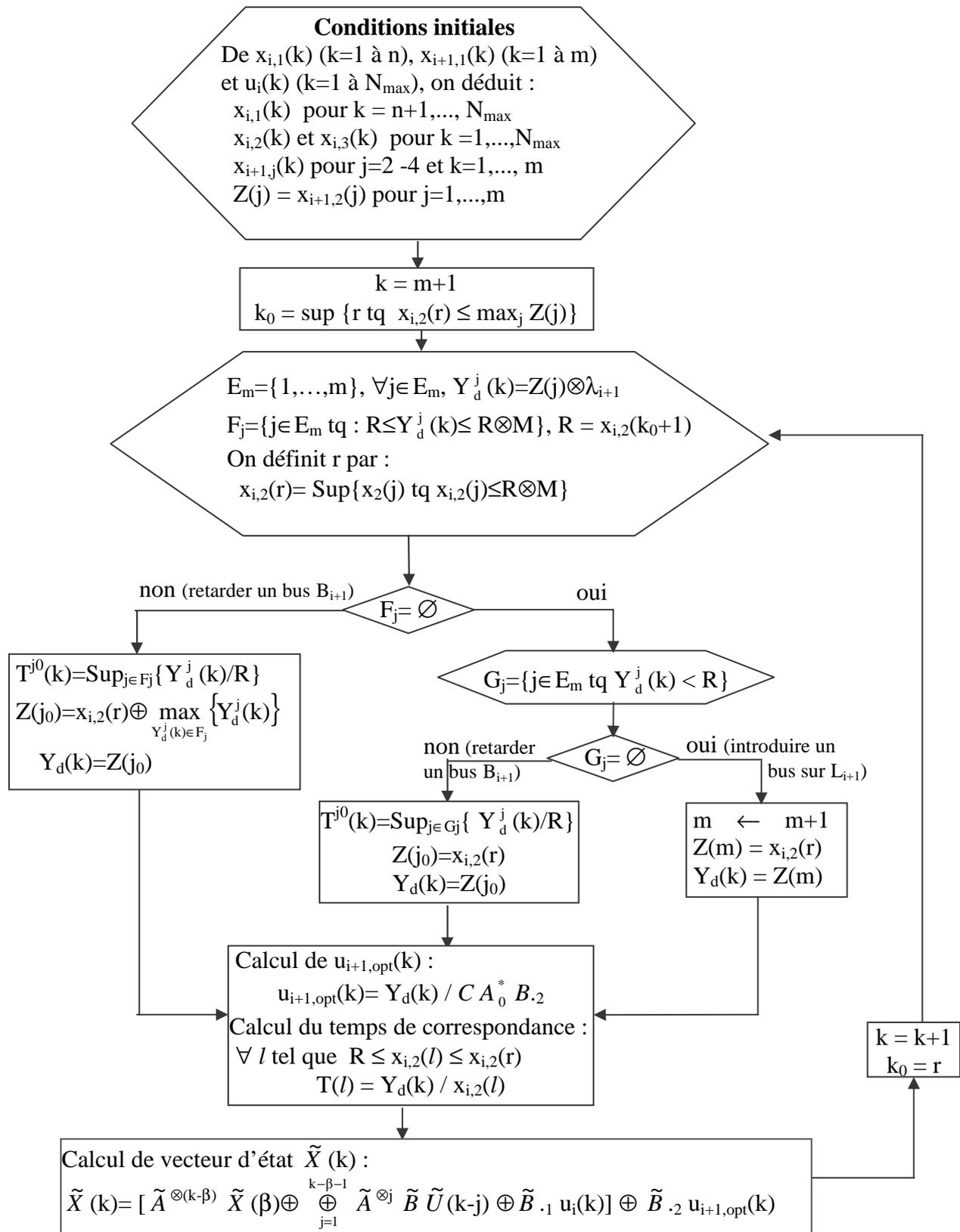


Figure 3.4 : Organigramme de commande du système : configuration non-synchronisée.

5 Application au réseau urbain de Montbéliard

5.1 Structure physique du réseau de transport de Montbéliard

5.1.1 Description du réseau de la CTPM

Le réseau que nous étudions fait partie du réseau global de la *Compagnie des Transports du Pays de Montbéliard* (CTPM). L'architecture du réseau de transport urbain de Montbéliard repose sur le principe de la structure qui a été mise au point par les compagnies de transports aériennes aux Etats-Unis [Sou, 00]. Il s'agit d'une structure du réseau aérien par rabattement systématique du trafic sur des aéroports servant de pivots. Ce qui permet d'accroître les flux des passagers dans les correspondances, d'accroître les fréquences des avions. Cette structure permet de focaliser les transits vers les points d'échange de passagers. Ces derniers jouent un rôle fondamental pour le déplacement de passagers. Le schéma de la figure 3.5 représente la structure physique du réseau de la CTPM.

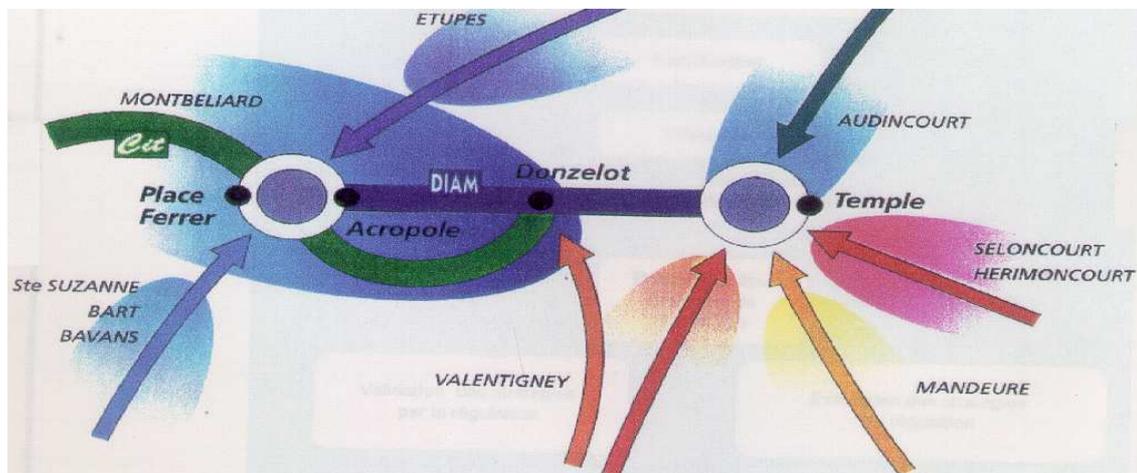


Figure 3.5 : Structure physique du réseau de transport de Montbéliard.

Le réseau de la CTPM est composé de plusieurs lignes qui desservent plusieurs agglomérations et qui assurent le déplacement des voyageurs entre les différents endroits de la région. Il est articulé autour de deux grands axes, appelés respectivement DIAM (Direct Interurbain Audincourt Montbéliard) et Cit (Citadine). Ces deux axes relient deux grandes agglomérations : Montbéliard et Audincourt. L'infrastructure du réseau ainsi que le nombre de stations de correspondance qu'il contient justifient l'intérêt particulier que les exploitants de la CTPM portent notamment à la gestion des correspondances (minimisation des temps d'attente des passagers). Le passage des bus aux arrêts de la ligne DIAM (dont la structure physique est représentée dans la figure 3.6) est régulier (environ 10 minutes entre deux passages successifs des bus dans un arrêt). Cette ligne principale est connectée, via les stations de correspondance, à d'autres lignes du réseau appelées *lignes secondaires* où les passages des bus ne sont en général pas réguliers. L'intervalle de temps entre le passage de deux bus successifs à un arrêt d'une ligne secondaire varie en fonction de la période du voyage et en fonction des déplacements des voyageurs. Ce temps dépasse parfois les 30 minutes.

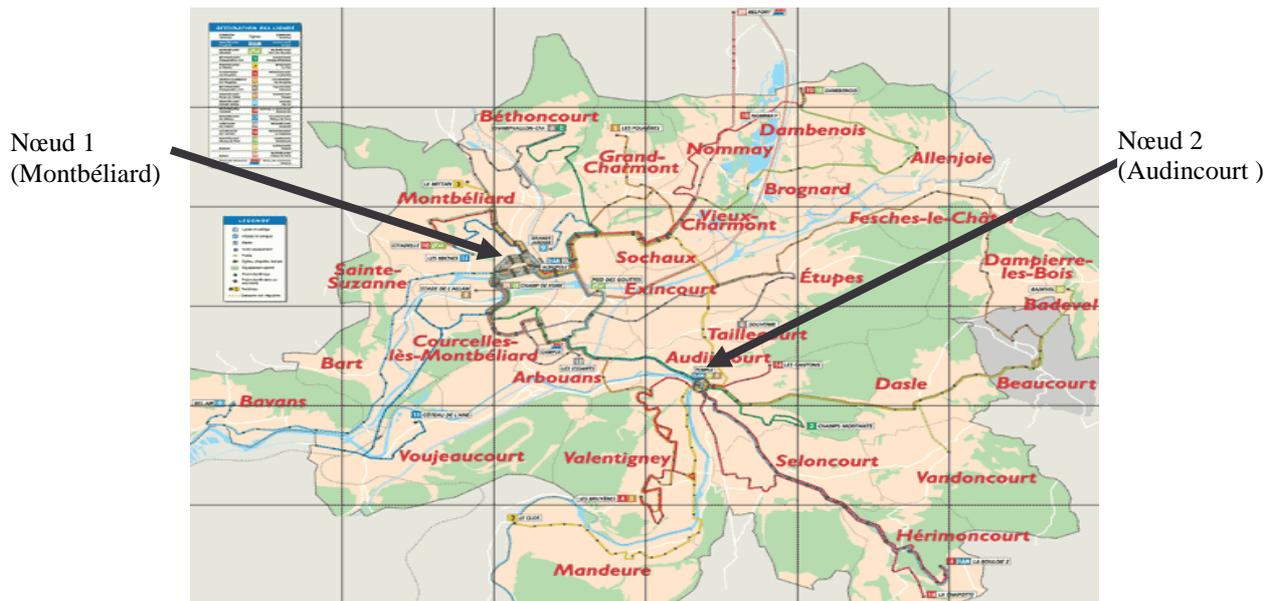


Figure 3.6 : La ligne DIAM liant les deux nœuds principaux du réseau.

La CTPM exploite une flotte de 80 véhicules avec un effectif de 220 personnes. Le réseau comporte 18 % de stations de correspondance. Le taux est supérieur de 10 % en moyenne à celui des autres réseaux de même taille en raison de la répartition géographique des agglomérations desservies.

5.1.2 Partie du réseau étudiée

Dans cette étude nous nous intéressons essentiellement à la gestion de deux lignes du réseau. Il s'agit de la ligne principale DIAM et la ligne secondaire N°9 liées par une station de correspondance à Montbéliard (*Acropole*). La structure physique de ces deux lignes est donnée dans la figure 3.7.

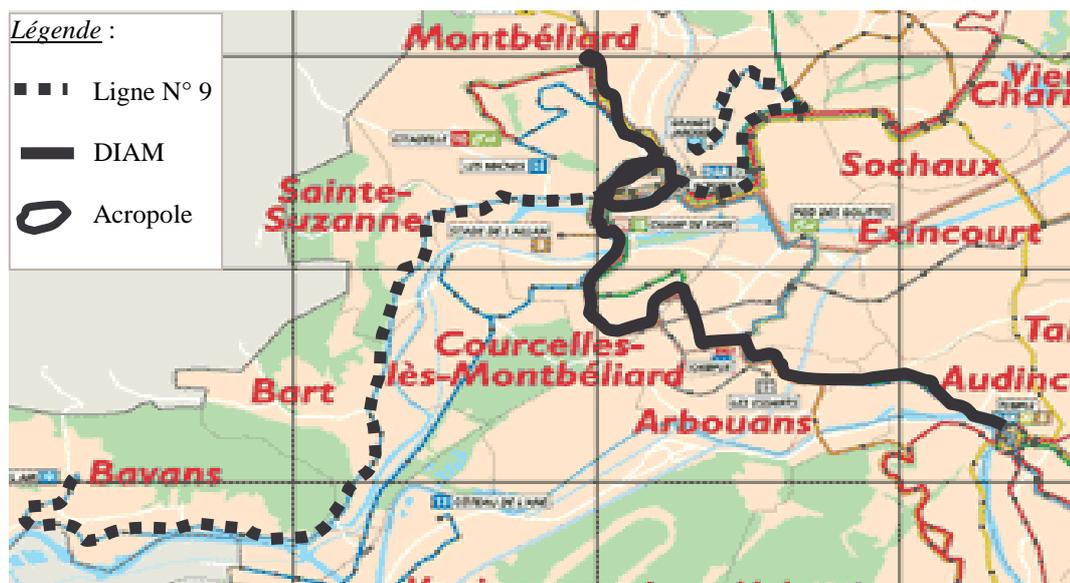


Figure 3.7 : Réseau étudié : DIAM - Ligne N°9.

5.1.3 Données du réseau

Dans le cas étudié, nous nous basons sur les données publiées dans le guide horaires de la CTPM de l'année 2001. Dans les figures 3.8 et 3.9 suivantes, nous donnons pour chaque ligne les temps moyens de déplacement des bus entre les arrêts consécutifs considérés. Nous faisons apparaître les stations de correspondance pour lesquelles la charge de voyageurs qui effectuent les correspondances est dense. Les autres arrêts (arrêts simples) sont inclus dans les trajets des bus. Les temps d'arrêt des bus à ces arrêts simples sont inclus dans leurs temps de déplacement.

Légende :

- : Arrêt de correspondance;
- : Arrêt simple.

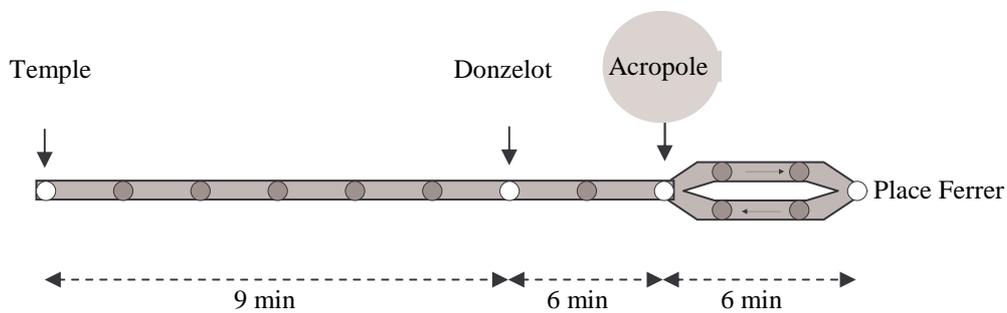


Figure 3.8 : La ligne DIAM du réseau de la CTPM.

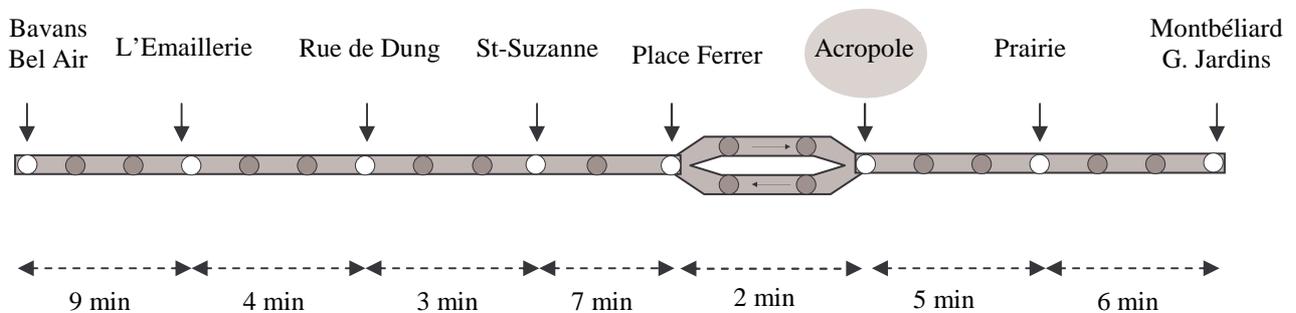


Figure 3.9 : La ligne N°9 liant Bel Air et Montbéliard (Grand Jardins).

Nous nous intéressons à la gestion des correspondances au niveau de la station *Acropole*. Plus particulièrement, nous considérons les voyageurs venant de différents arrêts de la ligne DIAM et qui désirent se rendre à un arrêt destination sur la ligne N°9. Dans ce qui suit, nous notons $\tau_{i,1}$ (resp. $\tau_{i,2}$) le temps de déplacement des bus entre la station de départ de la ligne DIAM *Temple* et la station de correspondance *Acropole* (resp. entre *Acropole* et *Temple*). De même, pour la ligne N°9, nous notons $\tau_{i+1,1}$ (resp. $\tau_{i+1,2}$) le temps de déplacement de la station de départ *Bel Air* à la station de correspondance *Acropole* (resp. *Acropole* à *Bel Air*). Les temps de parcours (ou périodes) de ces deux lignes sont données alors par : $\lambda_{DIAM} = \lambda_i = \tau_{i,1} + \tau_{i,2}$, et $\lambda_{ligne9} = \lambda_{i+1} = \tau_{i+1,1} + \tau_{i+1,2}$. Dans le tableau 3.1, nous regroupons ces données.

| Lignes | Nombre de bus | Temps de déplacement (min) | Temps de parcours (min) |
|-----------|---------------|--|---|
| DIAM | $n = 7$ | $\tau_{i,1} = 15, \tau_{i,2} = 27$ | $\lambda_i = \lambda_{DIAM} = 42$ |
| Ligne N°9 | $m = 3$ | $\tau_{i+1,1} = 25, \tau_{i+1,2} = 47$ | $\lambda_{i+1} = \lambda_{ligne9} = 72$ |

Tableau 3.1 : Données numériques du réseau considéré.

5.1.4 Modélisations du réseau

Afin de pouvoir modéliser le réseau par un réseau de Petri (RdP), nous supposons que le nombre de bus qui desservent les différentes lignes est connu. Ce nombre constitue le marquage initial du modèle RdP. Dans cette étude nous allons procéder de la façon suivante :

- dans un premier temps, nous supposons que toutes les données du réseau sont connues (état actuel du système). Nous allons donc, modéliser et évaluer les performances du réseau avec ces données ;
- dans un deuxième temps, nous allons commander le système afin d'améliorer les horaires actuellement définis. Nous supposons donc que le nombre de bus utilisés sur la ligne DIAM est connu durant la période de service, et nous cherchons le nombre de bus nécessaire sur la ligne N°9 (ligne à commander). Pour ce faire, et afin de constituer le marquage initial du RdP qui représente le système, nous desservons la ligne N°9 par un nombre provisoire de bus. Ce nombre peut être diminué ou augmenté, au cours du temps, selon la période des voyages et la charge des voyageurs.

Dans le premier cas d'évaluation et le deuxième cas d'amélioration, le modèle graphique décrivant le comportement du réseau est un GETRDJ. Ce dernier est représenté, compte tenu des données du tableau 3.1 et des structures des deux lignes (figures 3.8 et 3.9), par la figure 3.10.

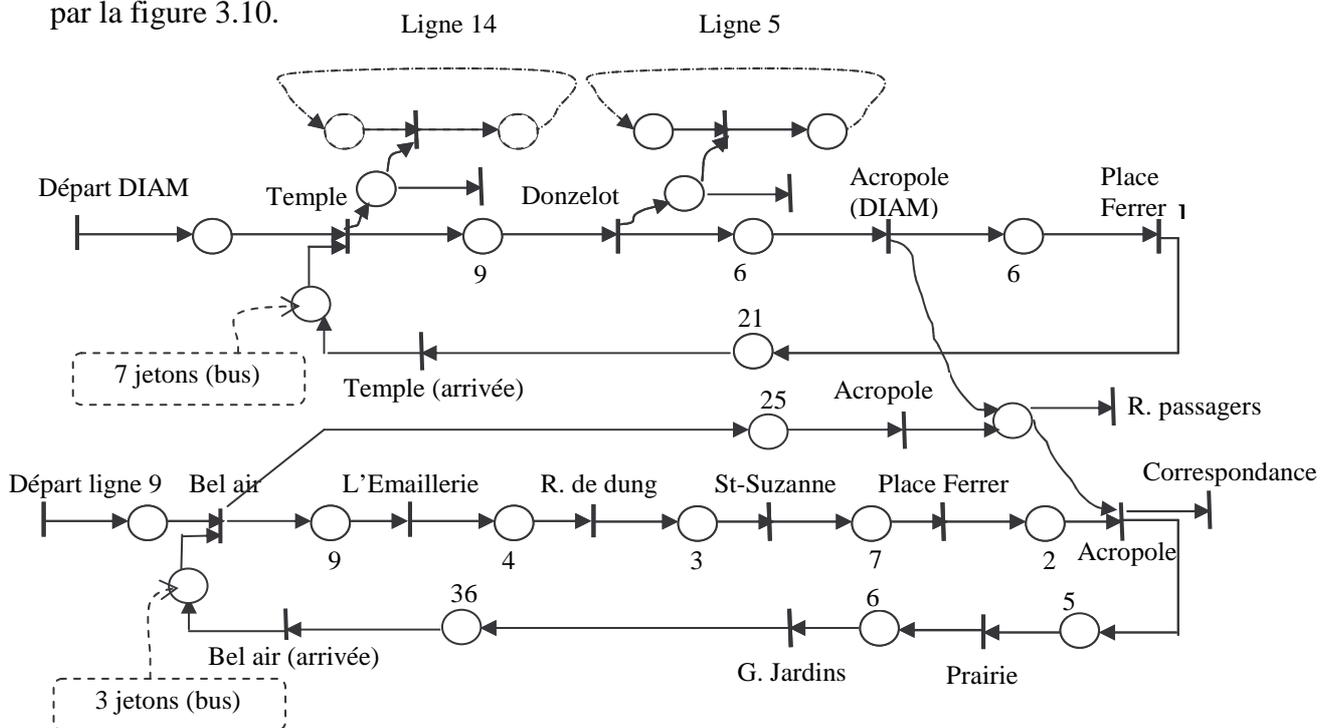


Figure 3.10 : Modèle GETRDJ associé au réseau considéré.

Dans ce réseau, nous nous intéressons à la gestion des correspondances à la station *Acropole*. Il est donc possible de simplifier le modèle de la figure 3.10 en regroupant toutes les stations qui ne nous intéressent pas au cours des trajets de bus. Nous reprenons le modèle graphique de la figure 3.10 avec les simplifications suivantes :

- pour la ligne DIAM, nous considérons uniquement la station de départ *Temple*, *Temple* (arrivée) et la station de correspondance *Acropole* ;
- pour la ligne N°9, nous considérons la station de départ *Bel air*, *Bel air* (arrivée) et la station de correspondance *Acropole*.

Le modèle graphique de la figure 3.10 peut être représenté par la forme simplifiée de la figure 3.11.

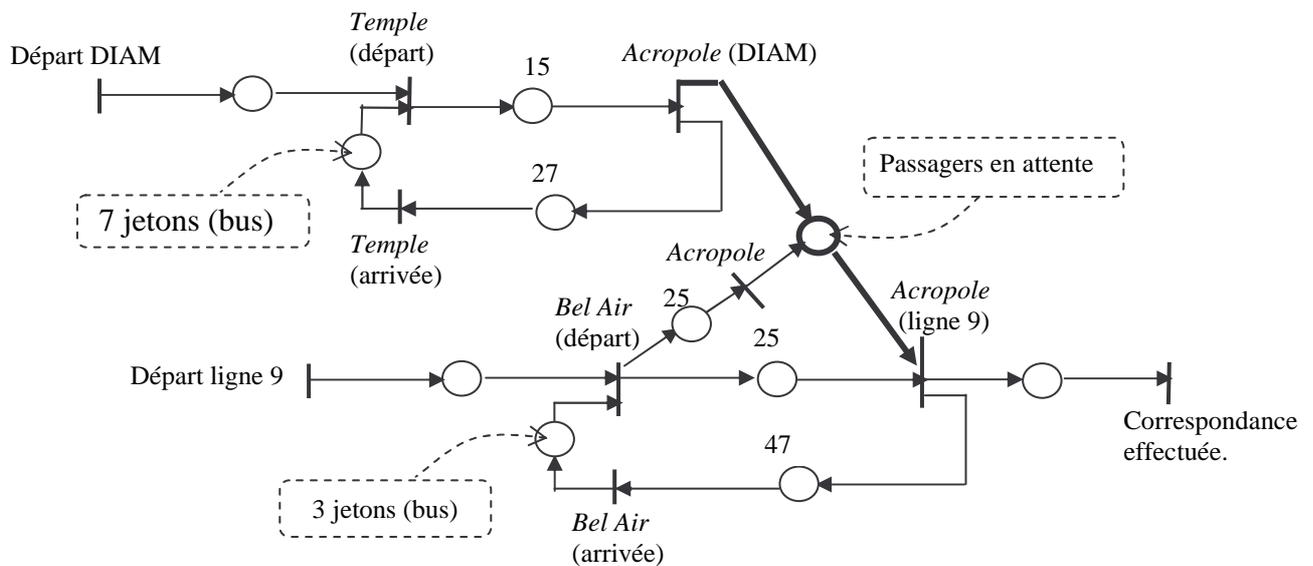


Figure 3.11 : Modèle graphique simplifié.

Afin de mettre en équation ce modèle graphique, nous affectons aux arrêts du réseau des différentes variables (d'état, d'entrée et de sortie). Dans le tableau suivant nous présentons cette affectation.

| Arrêt du réseau | variable |
|--------------------------|-------------|
| Départ DIAM | u_i |
| Temple (départ) | $x_{i,1}$ |
| Acropole (DIAM) | $x_{i,2}$ |
| Temple (arrivée) | $x_{i,3}$ |
| Départ ligne 9 | u_{i+1} |
| Bel Air (départ) | $x_{i+1,1}$ |
| Acropole (ligne 9) | $x_{i+1,2}$ |
| Bel Air (arrivée) | $x_{i+1,3}$ |
| Acropole | $x_{i+1,4}$ |
| Correspondance effectuée | y |

Tableau 3.2 : Affectation des variables aux transitions du modèle GET.

En tenant compte des variables d'état du tableau 3.2 et des données numériques du réseau, le modèle mathématique décrivant le comportement du système dont l'expression est donnée dans (3.19) devient :

$$\forall k \geq 8,$$

$$\begin{cases} x_{i,1}(k) = u_i(k) \oplus x_{i,3}(k-7) \\ x_{i,2}(k) = 15 \otimes x_{i,1}(k) \\ x_{i,3}(k) = 27 \otimes x_{i,2}(k) \\ x_{i+1,1}(k) = u_{i+1}(k) \oplus x_{i+1,3}(k-3) \\ x_{i+1,2}(k) = x_{i+1,4}(k) \\ x_{i+1,3}(k) = 47 \otimes x_{i+1,2}(k) \\ x_{i+1,4}(k) = 25 \otimes x_{i+1,1}(k) \\ y(k) = x_{i+1,2}(k) \end{cases}$$

La mise en forme matricielle de ce système est identique à celle du système (3.19) (cf. § 4.2), avec : $n = \beta = 7$ et $m = \alpha = 3$. Soit :

$$\forall k \geq 8, \quad \begin{cases} X(k) = A_0 \otimes X(k) \oplus A_3 \otimes X(k-3) \oplus A_7 \otimes X(k-7) \oplus B \otimes U(k) \\ Y(k) = C \otimes X(k) \end{cases} \quad (3.24)$$

Les expressions numériques des matrices caractéristiques de ce modèle sont données par :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 47 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } C = [\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e \ \varepsilon \ \varepsilon].$$

Le système de récurrence d'ordre 1 déduit de ce modèle est le suivant :

$$\forall k \geq 8, \quad \begin{cases} \tilde{X}(k) = \tilde{A} \otimes \tilde{X}(k-1) \oplus \tilde{B} \otimes \tilde{U}(k) \\ \tilde{Y}(k) = \tilde{C} \otimes \tilde{X}(k) \end{cases} \quad (3.25)$$

avec $\tilde{X}(k) \in (\mathbb{R}_{\max})^{49 \times 1}$, $\tilde{U}(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 1}$ et $\tilde{Y}(k) \in \mathbb{R}_{\max}$; $\tilde{A} \in (\mathbb{R}_{\max})^{49 \times 49}$, $\tilde{B} \in (\mathbb{R}_{\max})^{49 \times 2}$ et $\tilde{C} \in (\mathbb{R}_{\max})^{1 \times 49}$.

En résolvant ce système, nous obtenons la solution suivante :

$$\forall k \geq 8, \quad \begin{cases} \tilde{X}(k) = \tilde{A}^{\otimes(k-7)} \tilde{X}(7) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-8} \tilde{A}^{\otimes j} \tilde{B} \tilde{U}(k-j) \\ \tilde{Y}(k) = \tilde{C} \tilde{A}^{\otimes(k-7)} \tilde{X}(7) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k-8} \tilde{C} \tilde{A}^{\otimes j} \tilde{B} \tilde{U}(k-j) \end{cases} \quad (3.26)$$

La condition initiale du système est représentée par les dates des trois premiers passages des bus aux arrêts du réseau $X(1)$ à $X(3)$. De cette condition initiale, nous déduisons les autres dates de passage des bus aux arrêts du réseau $X(4)$, ..., $X(7)$ de façon à pouvoir transporter tous les passagers, dont le temps d'attente ne dépasse pas M , par un même bus. Ainsi nous obtenons le vecteur $\tilde{X}(7) = [X(7), X(6), \dots, X(1)]^T$.

Le temps de correspondance est calculé en fonction des dates d'arrivée des bus de deux lignes à la station de correspondance $x_{i+1,2}(k)$ et $x_{i,2}(k)$. Ce temps est exprimé par :

$$\forall k \geq 1, \quad T(k, k') = x_{i+1,2}(k) / x_{i,2}(k'),$$

où $k' \in \{p \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{i+1,2}(k-1) < x_{i,2}(p) \leq x_{i+1,2}(k)\}$.

5.2 Evaluation des performances du réseau

D'après la planification actuelle du réseau, le bus de la ligne N°9 qui fait son premier départ de la station *Bel Air* commence à 5h59min du matin. Nous prenons donc la référence du temps $t = 0$ correspondant à $t = 5h 59min$. La période de travail des bus que nous allons considérer ici correspond à l'intervalle de temps $[5h 59min, 13h 02min]$ ($\approx [0, 426min]$), soit environ une demi journée. Le nombre de tournées de bus sur la ligne DIAM vaut $N_{\max} = 45$ pour cette période. Le temps de correspondance maximal identifié pendant la période de service considérée est $M = 34$ min.

L'analyse des solutions (3.26) du modèle (max, plus) nous permet d'évaluer les temps de passage des bus aux arrêts du réseau ainsi que les temps d'attente des voyageurs à la station *Acropole*. Si nous notons par :

- \mathbf{k} : le $k^{\text{ème}}$ voyage d'un bus de la ligne N°9 ;
- \mathbf{k}' : le $(k')^{\text{ème}}$ voyage d'un bus sur la ligne DIAM ;
- $x_{i,2}(\mathbf{k}')$: date de $(k')^{\text{ème}}$ passage d'un bus de ligne DIAM à la station de correspondance ;
- $x_{i+1,2}(\mathbf{k})$: date de $k^{\text{ème}}$ passage d'un bus de ligne N°9 à la station de correspondance ;
- $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$: temps de correspondance entre le $(k')^{\text{ème}}$ voyage d'un bus de DIAM et le $k^{\text{ème}}$ voyage d'un bus de ligne N°9.

Les résultats d'évaluation obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

| k | k' | $x_{i,2}(k')$ | $x_{i+1,2}(k)$ | T(k,k') | k | k' | $x_{i,2}(k')$ | $x_{i+1,2}(k)$ | T(k,k') |
|---|----|---------------|----------------|---------|----|----|---------------|----------------|---------|
| | 1 | 28 | | 15 | | 24 | 208 | | 27 |
| 1 | 2 | 35 | 43 | 8 | | 25 | 218 | | 17 |
| | 3 | 47 | | 26 | 8 | 26 | 232 | 235 | 3 |
| | 4 | 57 | | 16 | | 27 | 242 | | 18 |
| | 5 | 64 | | 9 | 9 | 28 | 254 | 260 | 6 |
| 2 | 6 | 70 | 73 | 3 | | 29 | 262 | | 32 |
| | 7 | 77 | | 18 | | 30 | 276 | | 14 |
| | 8 | 83 | | 12 | 10 | 31 | 287 | 290 | 3 |
| 3 | 9 | 88 | 95 | 7 | | 32 | 296 | | 16 |
| | 10 | 99 | | 17 | 11 | 33 | 309 | 312 | 3 |
| | 11 | 106 | | 10 | | 34 | 320 | | 18 |
| | 12 | 109 | | 7 | 12 | 35 | 331 | 338 | 7 |
| 4 | 13 | 114 | 116 | 2 | | 36 | 340 | | 29 |
| | 14 | 120 | | 34 | | 37 | 353 | | 16 |
| | 15 | 127 | | 27 | 13 | 38 | 364 | 369 | 5 |
| | 16 | 136 | | 18 | | 39 | 372 | | 22 |
| | 17 | 144 | | 10 | | 40 | 381 | | 13 |
| 5 | 18 | 153 | 154 | 1 | 14 | 41 | 390 | 394 | 4 |
| | 19 | 164 | | 13 | | 42 | 397 | | 32 |
| 6 | 20 | 174 | 177 | 3 | | 43 | 407 | | 22 |
| | 21 | 181 | | 24 | | 44 | 415 | | 14 |
| | 22 | 189 | | 16 | 15 | 45 | 425 | 429 | 4 |
| 7 | 23 | 197 | 205 | 8 | | | | | |

Tableau 3.3 : Résultats d'évaluation obtenus en considérant les données actuelles du réseau.

A partir de ce tableau nous déduisons ce qui suit :

- temps minimal de correspondance : $T_{\min}=1$ min ;
- temps maximal de correspondance : $T_{\max}=34$ min ;
- temps moyen de correspondance : $T_{\text{moyen}}= 13.97$ min ;
- somme des temps de correspondance : $\sum_{k=1}^{N_{\max}} T_{\text{corres}}(k) = 629$ min ;
- Le nombre de voyages effectués, les dates de passage à la station de correspondance *Acropole* et le temps de pause pour chaque bus de la ligne N°9 sont donnés dans le tableau 3.4.

| Bus de la ligne N°9 | B ₁ | B ₂ | B ₃ |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Nombre de voyages effectués | 5 | 5 | 5 |
| Dates de passage des bus de la ligne N°9 à la station de correspondance <i>Acropole</i> . | 43 116 205 290 369 | 73 154 235 312 394 | 95 177 260 338 429 |
| Temps de pause (min) | 1+17+13+7 = 38 | 9+9+4+10 = 32 | 10+11+6+19 = 46 |

Tableau 3.4 : Exploitation des bus : l'état actuel du réseau.

Résultats obtenus par simulation :

Remarque : Dans la courbe suivante, nous notons par $x_{i,2}(k)$ (resp. $x_{i+1,2}(k)$) les dates de passage des bus de la ligne DIAM (resp. de la ligne N°9) au niveau de la station de correspondance *Acropole*, et par T_{corres} le temps de correspondance à la même station.

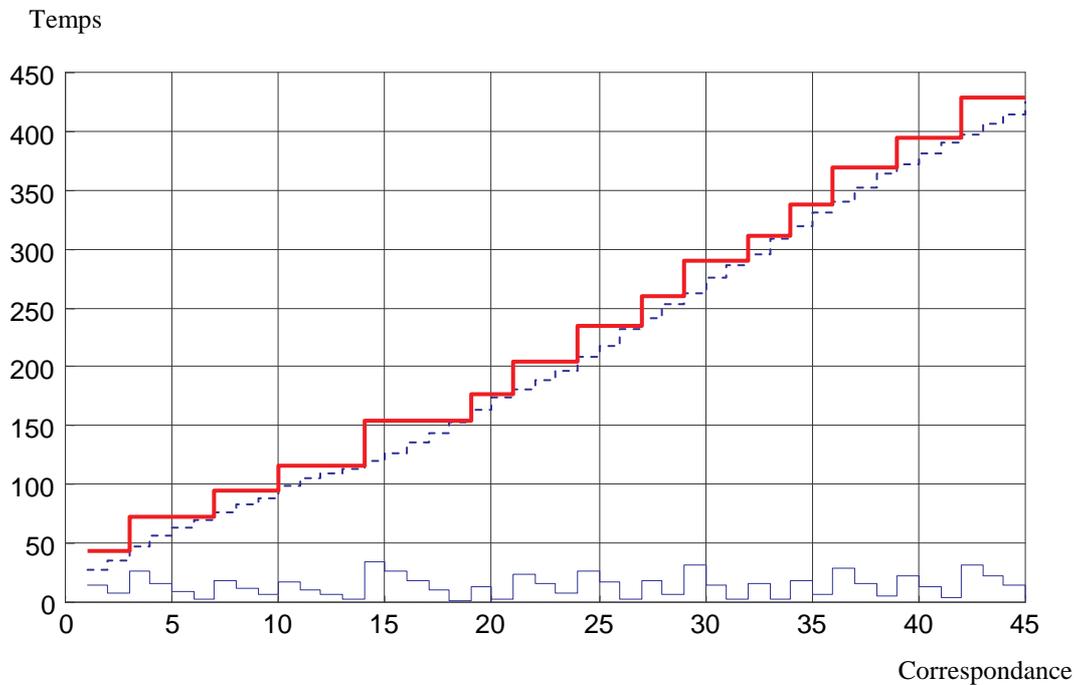


Figure 3.12 : Représentation graphique de $x_{i+1,2}$ (trait épais), $x_{i,2}$ (pointillés), T_{corres} (trait fin).

Dans la figure suivante, nous représentons l'allure des valeurs modales des temps de correspondance durant la période de service des bus. Ici, ces valeurs représentent les nombres d'occurrences des temps de correspondance.

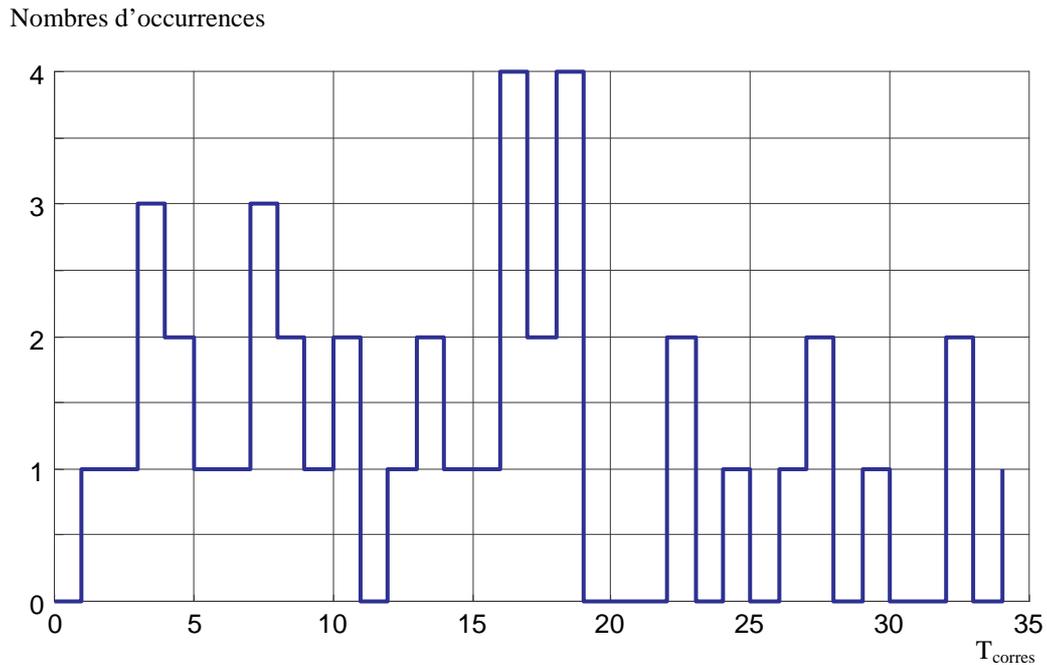


Figure 3.13 : Représentation graphique du temps modal de correspondance.

Nous constatons à partir de ces résultats, que les temps de correspondance atteints pendant la période de service considérée sont importants. L'attente de certains passagers dépasse les 30 minutes et le temps moyen de correspondance dépasse les 13 minutes. Dans le but de diminuer ces temps de correspondance, nous proposons d'améliorer la planification actuelle du réseau.

5.3 Amélioration des performances du réseau

Nous reprenons la démarche de commande de la ligne L_{i+1} , proposée dans le paragraphe 2.3, pour commander la ligne N°9. L'expression de la commande dans ce cas d'application est :

$$\forall k \geq 8, \quad u_{opt}(k) = u_{i+1,opt}(k) = Y_d(k) / C A_0^* B_{.2}$$

avec :

$$C A_0^* B_{.2} = 25.$$

On en déduit que : $\forall k \geq 8, \quad u_{opt}(k) = Y_d(k) / 25.$

Etant donné le nombre initial de bus qui desservent la ligne DIAM ainsi que les différentes dates de passages des bus au niveau de ses arrêts, nous cherchons à améliorer les horaires actuels de la ligne N°9. En appliquant l'algorithme de commande, donné dans la figure 3.4, nous déterminons la nouvelle planification du réseau. Ainsi, nous obtenons le nombre de bus nécessaires qui doivent desservir la ligne N°9 pour assurer toutes les correspondances avec la ligne DIAM tout en minimisant les temps d'attente des passagers.

Nous proposons donc des résultats suivants relatifs à des valeurs différentes de seuil de tolérance M .

- dans un premier temps, nous vérifions s'il est possible d'utiliser moins de trois bus (effectif actuel) sur la ligne N°9 avec la même valeur maximale du temps de correspondance atteinte dans le cas de l'évaluation. Nous allons donc commander la ligne N°9 avec $M = 34$ min ;
- dans un deuxième temps, nous reprenons la même étude en affectant à M la valeur modale du temps de correspondance de la planification actuelle. Soit $M = 16$ min ;
- enfin, nous affectons à M une valeur arbitraire comprise entre les deux valeurs 34 et 16. Nous choisissons par exemple : $M = 21$ min.

Pour chacune de ces valeurs nous élaborons une planification d'horaires de la ligne N°9 et nous déterminons le nombre de bus nécessaires sur cette ligne. Pour ce faire, nous analysons les données de la ligne DIAM et nous prenons en compte la valeur de M . A partir de cette analyse, nous desservons initialement la ligne N°9 par un nombre provisoire de bus. En appliquant notre algorithme de commande, nous vérifions si ces bus sont suffisants. Si tel n'est pas le cas (certaines correspondances ne peuvent pas être assurées), nous introduisons alors d'autres bus pour renforcer le trafic sur la ligne N°9. Nous évaluons, ensuite, les différents temps de correspondance. Nous indiquons la façon dont les bus sont utilisés sur cette ligne. Enfin, nous illustrons tous les cas étudiés par des résultats de simulation.

◆ Cas N°1 : $M = 34$

Pour ce premier cas, nous allons améliorer les horaires de la ligne N°9 en supposant que le temps d'attente d'un voyageur au niveau de la station de correspondance peut atteindre 34 min (seuil de la planification actuelle du réseau DIAM-ligne N°9). Nous supposons, dans un premier temps, que la ligne N°9 est desservie par deux bus.

En appliquant les résultats théoriques concernant la commande proposée (figure 3.4, § 4.4), nous constatons qu'il est possible de concevoir une planification d'horaires de la ligne N°9. Dans les tolérances définies (temps maximal de correspondance ≤ 34 min), les deux bus considérés initialement sur la ligne N°9 peuvent assurer toutes les correspondances avec la ligne DIAM.

Les résultats optimisés relatifs à ce cas sont les suivants :

- temps minimal de correspondance : $T_{\min} = 0$;
- temps maximal de correspondance : $T_{\max} = 34$;
- nombre de bus nécessaires sur la ligne N°9 : 2 bus ;
- temps moyen de correspondance : $T_{\text{moyen}} = 15.17$ min ;
- somme des temps de correspondance : $\sum_{k=1}^{N_{\max}} T_{\text{corres}}(k) = 683$ min.

| Bus | B ₁ | B ₂ |
|--|---------------------------------------|--------------------------------|
| Nombre de voyages effectués | 6 | 5 |
| Dates de passage des bus de la ligne N°9 au niveau de la station de correspondance <i>Acropole</i> | 57 129 208 287 364 436 | 88 164 242 320 397 |
| Temps de pause (min) | 7+7+5 = 19 | 4+6+6+5 = 21 |

Tableau 3.5 : Exploitation des bus sur la ligne N°9 (M = 34 min).

Dans l'annexe B (Tableau b.1), nous détaillons ces résultats en donnant les différentes dates de passage des bus au niveau de la station de correspondance ainsi que les différents temps de correspondance.

Résultats obtenus par simulation :

Dans ces résultats de simulation nous présentons : l'évolution du temps de passage des bus de la ligne DIAM au niveau de la station de correspondance ($x_{i,2}(k)$). Le temps de passage des bus de la ligne N°9 à la même station ($x_{i+1,2}(k)$). Enfin le temps de correspondance durant la période de travail des bus (T_{corres}).

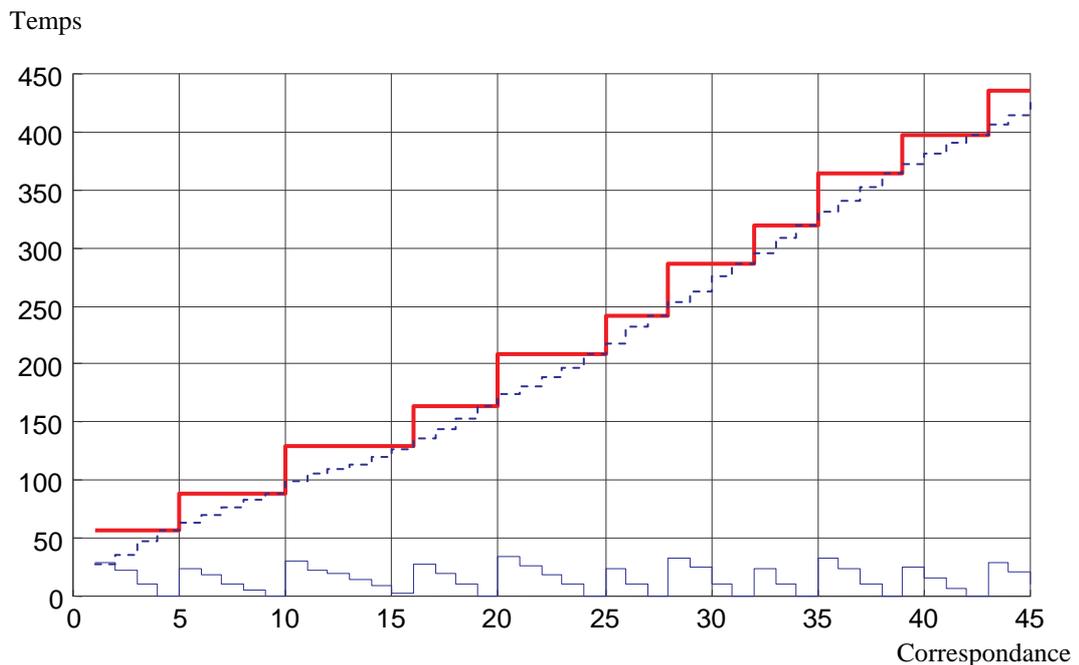


Figure 3.14 : Représentation graphique de $x_{i+1,2}$ (trait épais), $x_{i,2}$ (pointillés), T_{corres} (trait fin).

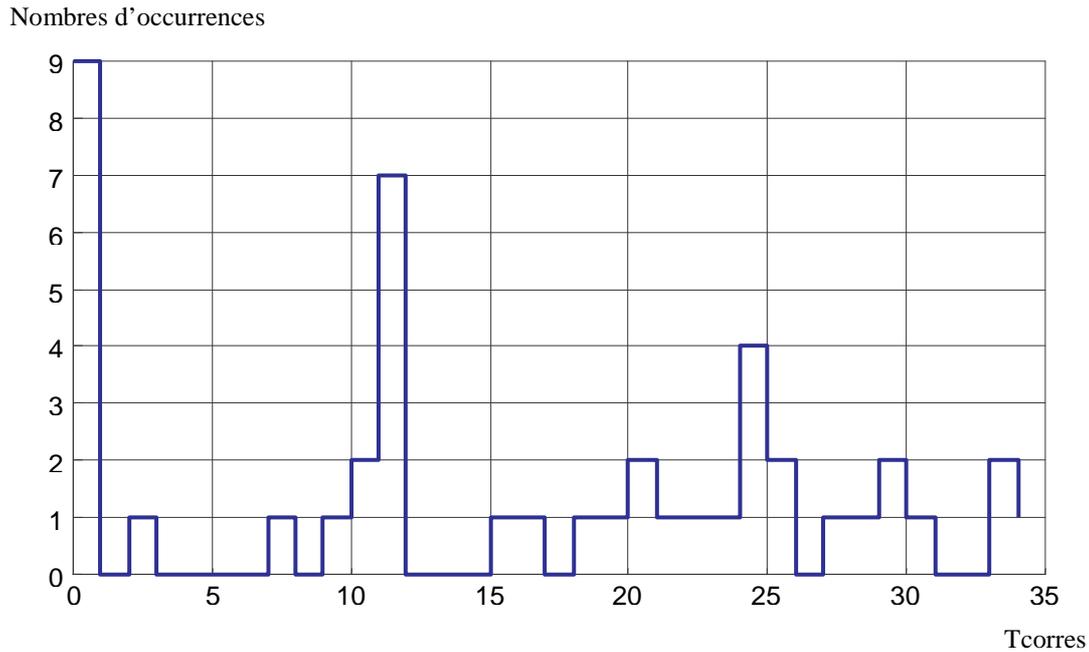


Figure 3.15 : Représentation graphique du temps modal de correspondance.

Dans ce premier cas, nous remarquons que :

- les deux bus utilisés sur la ligne N°9 peuvent bel et bien assurer toutes les correspondances avec la ligne DIAM sans que les temps de correspondance dépassent le seuil fixé (34 min) ;
- en faisant la comparaison entre l'allure de $x_{i,2}$ et celle de $x_{i+1,2}$ à partir de la courbe de la figure 3.14, il apparaît que plusieurs valeurs de $x_{i,2}$ sont associées à une valeur de $x_{i+1,2}$. Ceci est expliqué par le fait que plusieurs lots de passagers venant d'un ou de plusieurs arrêts de la ligne DIAM empruntent un même bus de la ligne N°9 à la station de correspondance ;
- de la figure 3.15, la valeur modale des temps de correspondance est $T_{\text{corres}} = 0$ (elle est atteinte 9 fois), puis $T_{\text{corres}} = 11$ min. Les nombres d'occurrences des autres valeurs, notamment les plus élevées, ne sont pas importants ;
- à partir du tableau 3.5, le nombre de tournées effectuées dans ce cas est plus petit que celui de l'état actuel. En effet, les deux bus ont effectué seulement 11 tournées alors que dans le cas actuel, les trois bus ont effectué 15 tournées (Tableau 3.4).

◆ Cas N°2 : M = 16

A partir des horaires actuels de la ligne DIAM-ligne N°9, nous remarquons que la valeur modale des temps de correspondance de la planification actuelle est 16 min. Nous choisissons alors, dans ce deuxième cas, cette valeur comme valeur maximale de temps de correspondance. Nous cherchons à établir une bonne gestion des correspondances en tenant compte de cette contrainte associée au seuil $M = 16$ min (chaque passager ne doit pas attendre plus de 16 min). L'application de l'algorithme de commande montre qu'il faut desservir la ligne N°9 avec un effectif de 4 bus, afin de satisfaire les exigences souhaitées. En utilisant cet effectif de bus sur la ligne N°9, nous obtenons les résultats suivants :

- temps minimal de correspondance : $T_{\min} = 0$;
- temps maximal de correspondance : $T_{\max} = 16$;
- nombre de bus nécessaires sur la ligne N°9 : 4 bus ;
- temps moyen de correspondance $T_{\text{moyen}} = 6.26$ min ;
- somme des temps de correspondance : $\sum_{k=1}^{N_{\max}} T_{\text{corres}}(k) = 282$ min.

| Bus | B ₁ | B ₂ | B ₃ | B ₄ |
|--|---------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| Nombre de voyages effectués | 6 | 5 | 5 | 4 |
| Dates de passage des bus au niveau de la station de correspondance <i>Acropole</i> (min) | 35 120 197 269 353 425 | 57 136 218 290 372 | 77 153 242 331 415 | 99 174 309 397 |
| Temps de pause (min) | 13+5+12 = 30 | 7+10+10 = 27 | 4+17+17+12 = 60 | 3+63+16 = 82 |

Tableau 3.6 : Résultats optimisés pour M = 16 min.

Dans l'annexe B (Tableau b.2), nous représentons le détail de ces résultats.

Résultats obtenus par simulation :

Dans les figures suivantes, nous représentons quelques résultats obtenus par simulation concernant ce cas. La figure 3.16 représente la façon dont les bus de la ligne N°9 sont exploités, ainsi que les temps de pause imposés à chaque bus.

Nombre de voyages

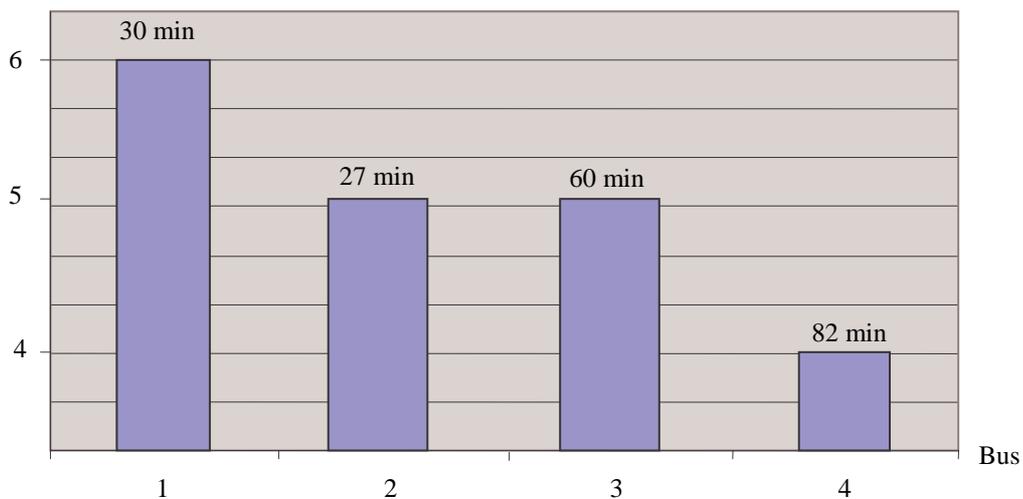


Figure 3.16 : Exploitation des bus de la ligne N°9 : M = 16 min.

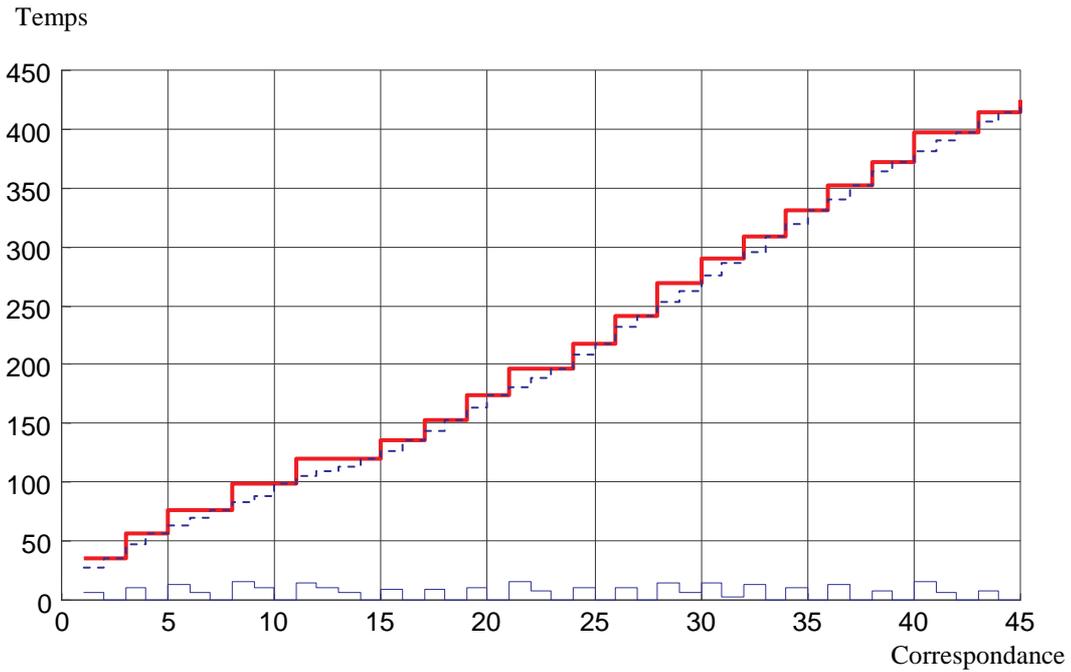


Figure 3.17 : Représentation graphique de $x_{i+1,2}$ (trait épais), $x_{i,2}$ (pointillés), T_{corres} (trait fin).

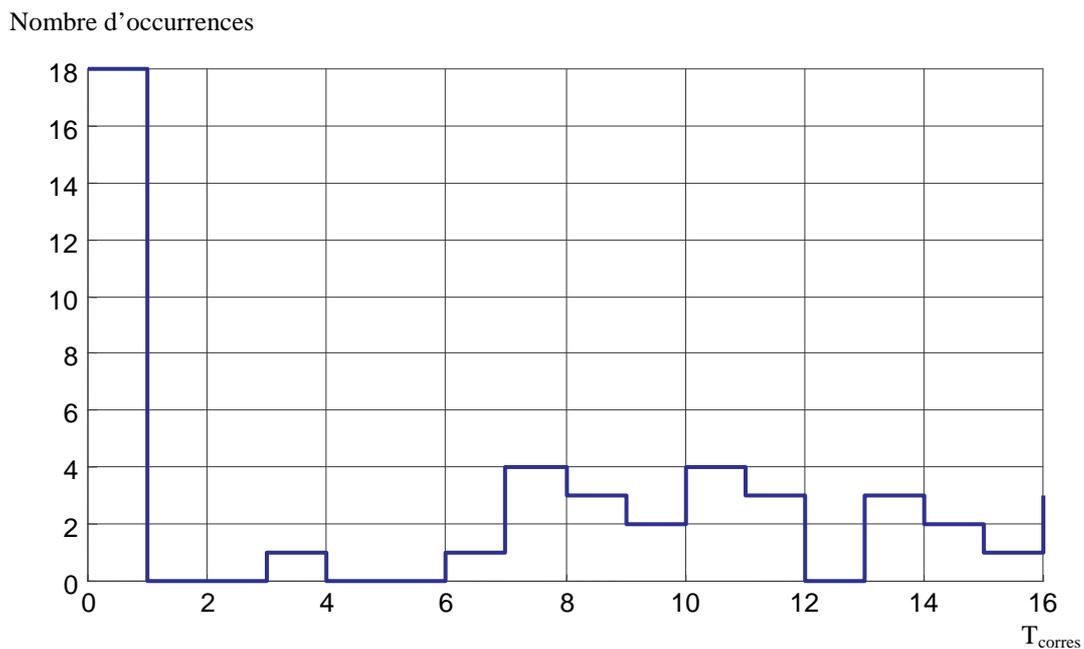


Figure 3.18 : Représentation graphique du temps modal de correspondance ($M = 16$ min).

Le seuil M que nous avons considéré dans ce deuxième cas est plus petit que celui considéré précédemment ($16 \text{ min} \ll 34 \text{ min}$). Avec ce seuil, il est difficile d'assurer toutes les correspondances DIAM – ligne N°9 avec le même effectif de bus que celui considéré dans le cas précédent. Nous avons donc utilisé 4 bus sur la ligne N°9 pour que tous les temps de correspondance restent inférieurs à 16 min. Nous pouvons alors remarquer les points suivants :

- nous avons pu respecter le seuil de tolérance considéré, réduire (à plus de 50 %) la somme des temps de correspondance, assurer toutes les correspondances avec la ligne DIAM ;
- à partir du tableau 3.6 et de la figure 3.16, les bus de la ligne N°9 sont exploités d'une façon maximale. En effet, chaque bus doit effectuer entre 4 et 6 voyages avec des temps de pause qui ne sont pas en général importants. Les trois bus B₁, B₂ et B₃ ne peuvent pas être utilisés pour renforcer le trafic sur d'autres lignes du réseau. Par contre le bus B₄ peut desservir une autre ligne dont la période est inférieure à 63 min (temps de pause imposé au bus entre son deuxième et son troisième voyage).

♦ **Cas N°3 : M = 21**

Nous choisissons, pour ce dernier cas, une valeur arbitraire de M. Soit M = 21 min. Cette valeur est comprise entre les deux valeurs considérées dans les deux premiers cas (M = 34 min et M = 16 min). Le nombre de bus que nous allons choisir initialement pour desservir la ligne N°9 est également compris entre les effectifs des deux cas précédents. Nous supposons donc que cette ligne est desservie initialement par 3 bus. Nous donnons dans ce qui suit, les résultats obtenus après l'application de notre approche de commande. Le détail de ces résultats se trouve dans l'annexe B, Tableau b.3.

- temps minimal de correspondance : $T_{\min} = 0$;
- temps maximal de correspondance : $T_{\max} = 21$;
- nombre de bus nécessaires sur la ligne N°9 : 3 bus ;
- temps moyen de correspondance : $T_{\text{moyen}} = 9.06$ min ;
- somme des temps de correspondance : $\sum_{k=1}^{N_{\max}} T_{\text{corres}}(k) = 408$ min.

| Bus | B ₁ | B ₂ | B ₃ |
|--|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Nombre de voyages effectués | 5 | 5 | 5 |
| Dates de passage des bus de la ligne N°9 au niveau de la station de correspondance <i>Acropole</i> (min) | 47 127 208 296 372 | 77 153 232 320 392 | 99 181 262 340 425 |
| Temps de pause (min) | 8+4+16+9 = 37 | 4+5+16+7 = 32 | 10+13+6+11 = 40 |

Tableau 3.7 : Résultats correspondant au seuil M = 21 min.

Résultats obtenus par simulation :

Nombre de voyages

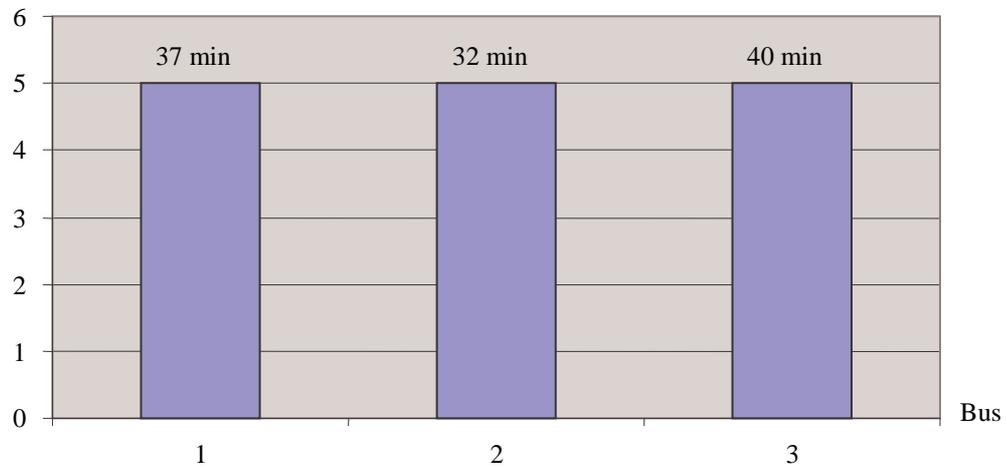


Figure 3.19 : Exploitation des bus de la ligne N°9 : M = 21 min.

Temps

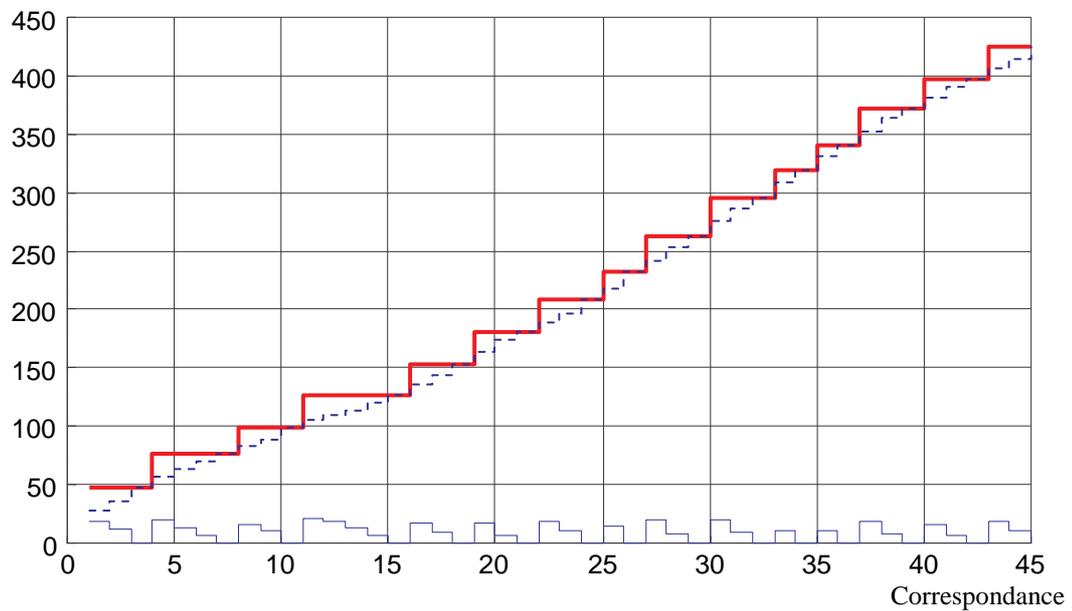


Figure 3.20 : Représentation graphique de $x_{i+1,2}$ (trait épais), $x_{i,2}$ (pointillés), T_{corres} (trait fin).

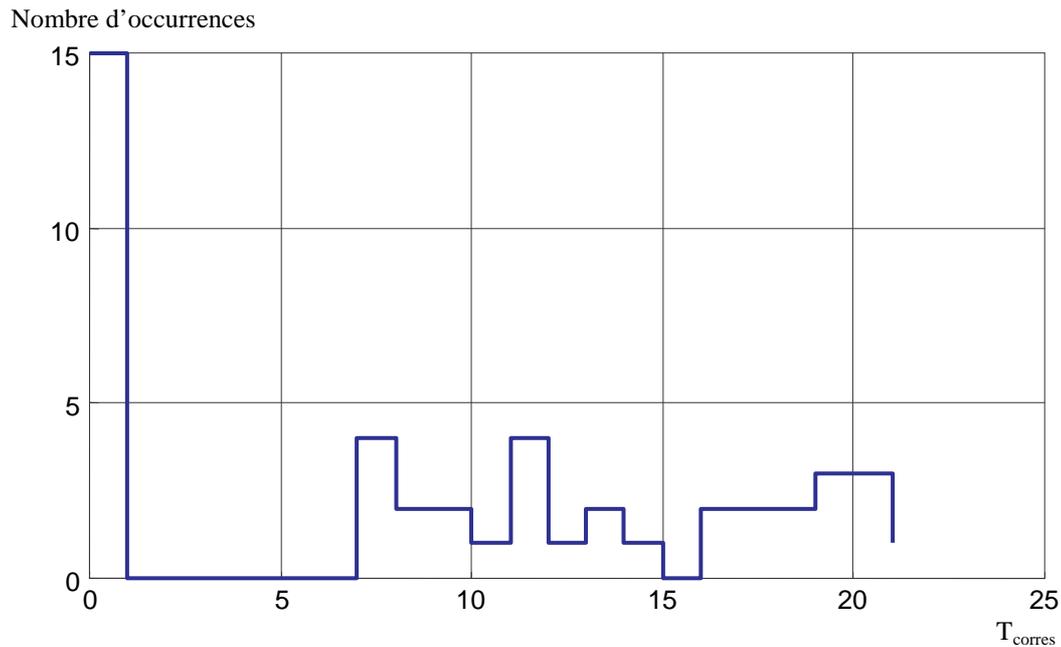


Figure 3.21 : Représentation graphique du temps modal de correspondance ($M = 21$ min).

Dans ce cas, nous constatons que :

- avec un effectif de 3 bus (le même que celui de la planification actuelle), il est possible de limiter le temps maximal de correspondance à 21 min au lieu de 34 min ;
- avec ces trois bus, nous avons pu construire une planification d'horaires de la ligne N°9 meilleure que la planification actuelle en terme de temps de correspondance ;
- la valeur modale des temps de correspondance est égale à 0 (elle est atteinte 15 fois). Les nombres d'occurrences des autres valeurs sont moins importants ;
- le nombre de tournées effectuées est réparti d'une façon homogène sur le nombre de bus utilisés. Les temps de pause de chaque bus ne sont pas suffisants pour renforcer le trafic sur d'autres points du réseau.

5.4 Synthèse des résultats

Nous allons faire une étude comparative entre les résultats de l'évaluation obtenus à partir des données actuelles du réseau, et les résultats optimisés que nous proposons. Dans le tableau 3.8, nous regroupons tous ces résultats.

| Seuil de tolérance M (min) | Nombre de bus sur la ligne N°9 | $\sum_{k=1}^{N_{\max}} T_{\text{corres}}$ (min) | T_{moyen} (min) | Somme des temps de pause (min) |
|----------------------------|--------------------------------|---|--------------------------|--------------------------------|
| Etat actuel M = 34 | 3 | 629 | 13.97 | 116 |
| M = 34 | 2 | 683 | 15.17 | 40 |
| M = 21 | 3 | 408 | 9.06 | 109 |
| M = 16 | 4 | 282 | 6.26 | 199 |

Tableau 3.8 : Comparaison de résultats.

En comparant les résultats, nous mettons en évidence la pertinence de la commande proposée. En effet, nous constatons que grâce à cette nouvelle approche, il est possible d'améliorer la planification d'horaires du réseau étudié. Cette amélioration concerne la minimisation des temps de correspondance et l'exploitation d'un nombre minimum de bus sur la ligne N°9. Nous remarquons ainsi, à partir du tableau 3.8, que :

- avec le temps de correspondance maximal de la planification actuelle du réseau (M = 34 min), il suffit d'utiliser seulement deux bus sur la ligne N°9 pour assurer toutes les correspondances avec la ligne DIAM. Les temps d'attente des passagers ne dépassent jamais le seuil défini. De même nous observons qu'il n'y a pas une grande différence entre les temps moyens de correspondance obtenus dans les deux cas. Nous constatons donc que ces résultats sont beaucoup plus avantageux pour la CTPM (exploitation de moins de bus : minimisation de coût) que pour les usagers ;
- pour d'autres valeurs du seuil M (M = 16 et 21 min), nous constatons qu'il est toujours possible d'améliorer les résultats en termes de temps de correspondance et du nombre de bus exploités sur le réseau. Par exemple, pour M = 21 min, nous observons qu'il est possible de desservir la ligne N°9 par le même nombre de bus que dans l'état actuel (3 bus) mais avec un temps moyen de correspondance moins important. Nous constatons également, que pour l'autre valeur de M (16 min), il suffit d'introduire un 4^{ème} bus sur la ligne N°9 pour obtenir des améliorations de l'état actuel meilleures que ceux obtenus dans le cas où M = 21 min. Ces résultats sont avantageux pour les usagers qui se déplacent sur leurs itinéraires avec des temps de correspondance acceptables et raisonnables (gain de temps).

6 Une deuxième structure de commande

6.1 Introduction

Dans ce paragraphe nous étudions une structure de commande différente de celle abordée dans le paragraphe précédent. Nous proposons une deuxième approche de commande qui permet de planifier les horaires d'un réseau de transport en commun tout en minimisant les temps de correspondance des voyageurs. Le principe de cette approche se base sur la détermination des composantes du vecteur de commande à partir des optima globaux des fonctions objectifs proportionnelles au temps de correspondance.

Afin d'étudier des réseaux dont les structures physiques sont différentes, nous proposons d'appliquer cette commande sur un réseau de bus composé de plusieurs lignes et plusieurs stations de correspondance. Nous modélisons donc ce réseau par un GET et une

équation d'état dans l'algèbre (max, plus). A partir des solutions de cette équation d'état et de la commande considérée, nous calculons les horaires du réseau qui permettent aux voyageurs de se rendre à leurs destinations en optimisant les temps de parcours.

6.2 Description du réseau

Nous allons maintenant étudier un STP avec une structure physique différente de celle considérée dans le paragraphe précédent. Il s'agit d'un réseau composé de quatre lignes de bus et quatre stations de correspondance (voir Figure 3.22). Ce système contient quatre entrées, qui correspondent aux stations de départ des lignes, et quatre sorties, qui correspondent aux terminus d'arrivée des lignes. Chaque ligne du réseau est alimentée à partir de son entrée. Nous représentons dans la figure 3.22 la structure physique de ce réseau.

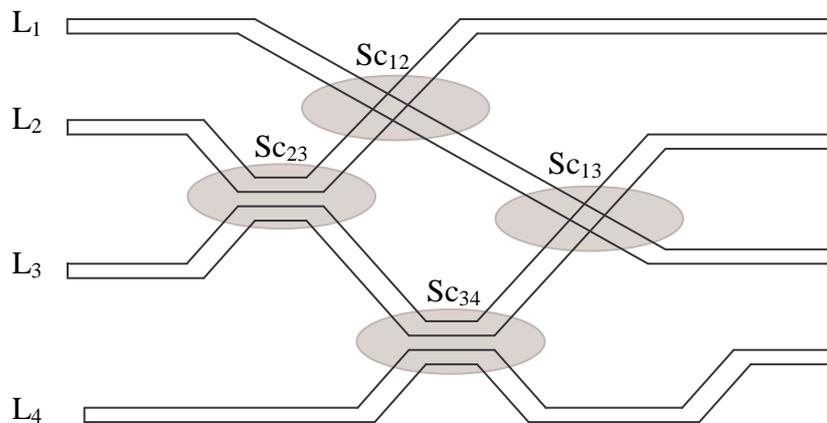


Figure 3.22 : Structure physique du réseau étudié.

Dans cette étude, nous nous intéressons à la gestion des correspondances pour les allers simples des passagers. Nous signalons que seuls les arrêts de départ, les arrêts de correspondance et les terminus d'arrivée seront considérés au cours de la modélisation. Les autres arrêts simples sont inclus dans les trajets du réseau. Le phénomène de synchronisation est pris en compte (les bus s'attendent aux stations de correspondance pour échanger les passagers). A chaque station de correspondance, nous nous intéressons à la correspondance de passagers qui viennent d'un arrêt d'une ligne L_i pour se rendre à un arrêt de la ligne L_j pour $1 \leq i, j \leq 4$. Nous supposons également que le temps d'arrêt des bus dans les stations ainsi que les temps de montée et de descente de passagers dans les bus sont négligeables (ils sont inclus dans les temps de parcours des trajets).

6.3 Modèle graphe d'événements temporisés

En utilisant le formalisme GET, le modèle graphique qui représente ce système est donné par la figure 3.23.

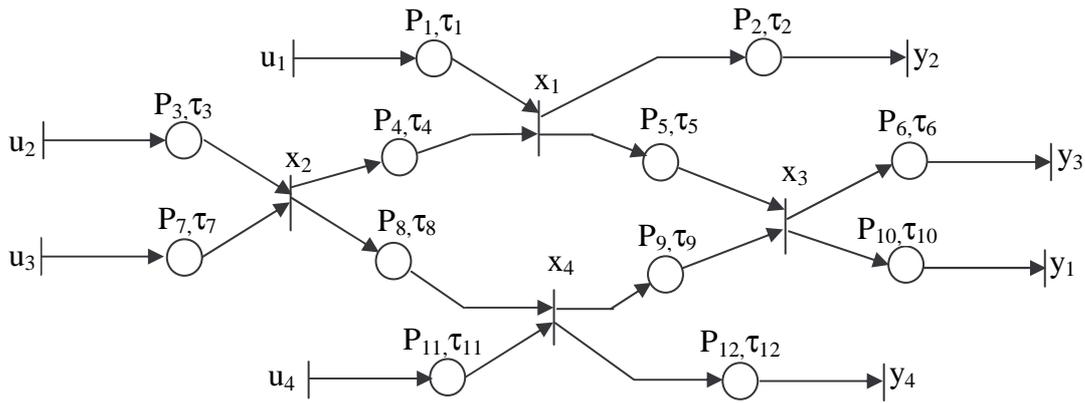


Figure 3.23 : Le modèle GET du réseau étudié.

Les lignes du réseau sont représentées dans ce modèle par :

- $L_1 : u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow y_1 ;$
- $L_2 : u_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow y_2 ;$
- $L_3 : u_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow y_3 ;$
- $L_4 : u_4 \rightarrow x_4 \rightarrow y_4.$

Nous remarquons à partir du modèle GET de la figure 3.23 que toutes les transitions internes sont synchronisées. Le franchissement de chaque transition nécessite la disponibilité des jetons au sein des places en amont. Ceci incite les bus à s'attendre aux stations de correspondance afin d'échanger les passagers (le premier bus arrivant à une station de correspondance doit attendre l'arrivée de bus de l'autre ligne).

Remarque : Dans le graphe 3.23, aucune place ne contient de jetons (marquage initial nul). Dans cette étude, nous nous intéressons à la conception des horaires de toutes les lignes du réseau. Le marquage initial du modèle graphique n'a pas d'influence sur les résultats que nous allons obtenir. Les mêmes résultats sont obtenus si on rajoute des jetons sur les places du modèle.

6.4 Représentation d'état

Le modèle (max, plus) linéaire déduit du modèle GET (Figure 3.23) est donné dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} sous la forme du système matriciel suivant :

$$\forall k \geq 1, \quad \begin{cases} X(k) = A X(k) \oplus B U(k) \\ Y(k) = C X(k) \end{cases} \quad (3.27)$$

- Où - $X(k)$ est le vecteur d'état regroupant toutes les transitions internes du modèle ;
 - $U(k)$ est le vecteur de commande regroupant toutes les transitions d'entrée ;
 - $Y(k)$ est le vecteur de sortie regroupant toutes les transitions de sortie.

A, B et C sont les matrices caractéristiques du système dont les coefficients sont dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} .

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_5 & \varepsilon & \varepsilon & \tau_9 \\ \varepsilon & \tau_8 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \tau_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_3 & \tau_7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{11} \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \tau_{10} & \varepsilon \\ \tau_2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{12} \end{bmatrix}.$$

La première équation du système (3.27) est une équation implicite de type point fixe. En calculant la matrice A^* (l'étoile de Kleene), la plus petite solution de cette équation implicite est donnée par :

$$\forall k \geq 1, \quad X(k) = A^* B U(k). \quad (3.28)$$

A partir de (3.28), nous obtenons l'expression de la sortie du système :

$$\forall k \geq 1, \quad Y(k) = C A^* B U(k). \quad (3.29)$$

La relation entrée-sortie du système est donc donnée par : $H = C A^* B$. Les matrices A^* , $A^* B$ et H sont données par :

$$A^* = \begin{bmatrix} e & \tau_4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_5 & \tau_4 \tau_5 \oplus \tau_8 \tau_9 & e & \tau_9 \\ \varepsilon & \tau_8 & \varepsilon & e \end{bmatrix},$$

$$A^* B = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_3 \tau_4 & \tau_4 \tau_7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_3 & \tau_7 & \varepsilon \\ \tau_1 \tau_5 & \tau_3(\tau_4 \tau_5 \oplus \tau_8 \tau_9) & \tau_7(\tau_4 \tau_5 \oplus \tau_8 \tau_9) & \tau_9 \tau_{11} \\ \varepsilon & \tau_3 \tau_8 & \tau_8 \tau_7 & \tau_{11} \end{bmatrix},$$

et

$$H = \begin{bmatrix} \tau_2 \tau_3 \tau_4 & \varepsilon & \tau_1 \tau_{10} \oplus \tau_4 \tau_6 \tau_7 & \varepsilon \\ \tau_2 \tau_3 & \varepsilon & \tau_6 \tau_7 & \varepsilon \\ \tau_2 \tau_3(\tau_4 \tau_5 \oplus \tau_8 \tau_9) & \varepsilon & \tau_1 \tau_5 \tau_{10} \oplus \tau_6 \tau_7(\tau_4 \tau_5 \oplus \tau_8 \tau_9) & \tau_9 \tau_{11} \tau_{12} \\ \tau_2 \tau_3 \tau_8 & \varepsilon & \tau_6 \tau_7 \tau_8 & \tau_{11} \tau_{12} \end{bmatrix}.$$

6.5 Expression du vecteur de commande

L'objectif de la commande dans ce cas est de concevoir une planification d'horaires du réseau considéré. Soit $U(1)$ un vecteur dont les composantes représentent les premières dates de départ des bus. Nous notons par λ la période de la ligne de plus grand circuit (ligne critique). Afin de concevoir les horaires des lignes, nous choisissons une période (qui sera notée τ) dite "*période de la planification du réseau*" telle que $\tau \geq \lambda$. Alors, compte tenu de cette période, un bus desservant une ligne du réseau passe chaque τ unités de temps à chaque station de cette ligne. En considérant la période τ et le vecteur $U(1)$ nous pouvons déterminer les différentes dates de départ $U(k)$ (avec $k > 1$) des bus de leurs terminus de départ. D'une façon formelle, ces dates sont données par l'équation de récurrence suivante :

$$\forall k \geq 1, \quad U(k+1) = \tau U(k) = \tau^{\otimes k} U(1). \quad (3.30)$$

D'après cette récurrence, les égalités (3.28) et (3.29) peuvent s'écrire sous la forme du système suivant :

$$\forall k \geq 1, \quad \begin{cases} X(k) = \tau^{\otimes(k-1)} A^* B U(1) \\ Y(k) = \tau^{\otimes(k-1)} C A^* B U(1) \end{cases} \quad (3.31)$$

6.6 Evaluation des temps de correspondance

Nous allons nous servir de l'expression (3.31) pour le calcul des différentes dates de passage des bus aux stations du réseau, et par la suite de l'évaluation des temps d'attente des voyageurs aux arrêts de correspondance. Nous définissons le vecteur "temps de correspondance" $T(k) = [T_{12}(k), T_{23}(k), T_{13}(k), T_{34}(k)]$ (pour $k \geq 1$) dont les composantes $T_{ij}(k)$ (pour $k \geq 1$, $1 \leq i \leq 3$ et $2 \leq j \leq 4$) représentent les temps d'attente des voyageurs aux arrêts de correspondance. Chaque composante $T_{ij}(k)$ est exprimée en fonction du $k^{\text{ème}}$ arrivée d'un bus de la ligne L_i et du $k^{\text{ème}}$ arrivée d'un bus de la ligne L_j à la station de correspondance $Sc_{i,j}$. Les expressions de différentes composantes de vecteur $T(k)$ sont données par :

$$\forall k \geq 1, \quad \begin{cases} T_{12}(k) = (x_1(k) / \tau_1 u_1(k)) \oplus (x_1(k) / \tau_4 x_2(k)) \\ T_{23}(k) = (x_2(k) / \tau_3 u_2(k)) \oplus (x_2(k) / \tau_7 u_3(k)) \\ T_{13}(k) = (x_3(k) / \tau_5 x_1(k)) \oplus (x_3(k) / \tau_9 x_4(k)) \\ T_{34}(k) = (x_4(k) / \tau_8 x_2(k)) \oplus (x_4(k) / \tau_{11} u_4(k)) \end{cases} \quad (3.32)$$

Si une composante $T_{ij}(k)$ est non nulle et si le bus de la ligne L_i arrive en premier à la station $Sc_{i,j}$ (avant l'arrivée d'un bus de la ligne L_j), alors le temps de correspondance L_j vers L_i est nul (nous notons $T_{j \rightarrow i} = 0$). En revanche, celui de la ligne L_i vers la ligne L_j est non nul et devient égal à la différence des dates d'arrivée des bus à la station de correspondance. Considérons par exemple la première équation du système (3.32). Si un bus de L_1 arrive le premier à la station $Sc_{1,2}$, alors les temps de correspondance des deux groupes de passagers dans cette station (les passagers de L_1 vers L_2 et les passagers de L_2 vers L_1) sont donnés par :

- $T_{1 \rightarrow 2}(k) = x_1(k) / \tau_1 u_1(k)$; les passagers venant de la ligne L_1 doivent attendre l'arrivée d'un bus de la ligne L_2 . Ici, $x_1(k) \geq \tau_1 u_1(k)$; cette inégalité devient une égalité si les deux bus arrivent en même temps à la station de correspondance ;
- $T_{2 \rightarrow 1}(k) = x_1(k) / \tau_4 x_2(k) = 0$. La $k^{\text{ème}}$ correspondance entre L_1 et L_2 se produit au moment où le bus de la ligne L_2 arrive en $Sc_{1,2}$.

Dans le cas contraire pour lequel le bus de la ligne L_2 arrive le premier en $Sc_{1,2}$, les temps de correspondance seront : $T_{1 \rightarrow 2}(k) = 0$ et $T_{2 \rightarrow 1}(k) = x_1(k) / \tau_4 x_2(k)$. Ainsi, pour les deux cas l'expression du temps de correspondance en $Sc_{1,2}$ est :

$$\forall k \geq 1, \quad \begin{aligned} T_{12}(k) &= T_{1 \rightarrow 2}(k) \otimes T_{2 \rightarrow 1}(k), \\ &= (x_1(k) / \tau_1 u_1(k)) \oplus (x_1(k) / \tau_4 x_2(k)). \end{aligned}$$

Les autres composantes $T_{ij}(k)$ du vecteur $T(k)$ sont déduites de la même façon que $T_{12}(k)$.

En utilisant l'équation de récurrence (3.30) ainsi que la solution du modèle (max, plus) linéaire (3.31), nous pouvons exprimer les composantes du vecteur $T(k)$ (pour tout $k \geq 1$) en

fonction des composantes du vecteur de commande $U(1)$. En effet, d'après le système (3.31), chaque composante $x_i(k)$ du vecteur d'état $X(k)$ est donnée par :

$$\text{pour } 1 \leq i \leq 4, \forall k \geq 1, \quad x_i(k) = \tau^{\otimes(k-1)} \otimes \left[\bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{ij} u_j(1) \right]. \quad (3.33)$$

En utilisant cette expression, et en se basant sur l'égalité $a/b \oplus a/c = a / (b \oplus c)$, le système (3.32) devient : $\forall k \geq 1$,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{12}(k) = \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{1j} u_j(1) / [\tau_1 u_1(1) \oplus (\tau_4 \otimes \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{2j} u_j(1))] \\ T_{23}(k) = \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{2j} u_j(1) / [\tau_3 u_2(1) \oplus \tau_7 u_3(1)] \\ T_{13}(k) = \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{3j} u_j(1) / [(\tau_5 \otimes \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{1j} u_j(1)) \oplus (\tau_9 \otimes \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{4j} u_j(1))] \\ T_{34}(k) = \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{4j} u_j(1) / [(\tau_8 \otimes \bigoplus_{j=1}^4 (A^* B)_{2j} u_j(1)) \oplus \tau_{11} u_4(1)] \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Nous constatons, à partir des équations de ce système, que le vecteur des temps de correspondance $T(k)$ ne dépend pas de la variable k . Il est donc possible d'écrire :

$$\forall k \geq 1, \quad T(k) = T(1).$$

6.7 Minimisation des temps de correspondance

Pour procéder à la minimisation des temps de correspondance dans un STP, il existe plusieurs éléments sur lesquels on peut agir. Ici, nous agissons sur les premières dates de départ des bus. A partir du système (3.34), nous constatons que les temps d'attente de passagers pour la 1^{ère} et la $k^{\text{ème}}$ ($k > 1$) correspondance sont identiques. Ainsi, pour minimiser ces temps d'attente, il suffit de considérer les premières tournées des bus. Ceci revient à déterminer le vecteur de commande $U(1)$ de telle sorte que les temps d'attente de passagers aux différentes stations de correspondance soient minimums. Par la suite, nous proposons un algorithme de commande qui permet de déterminer le vecteur de commande $U(1)$.

Algorithme

$$U = U^0 = [u_1^0, u_2^0, \dots, u_N^0]^T \text{ est connu, } T^0 = \sum_{i=1}^N T_i^0$$

$$J = 1$$

Tant que $j \leq N$ et $T > 0$: on fait varier u_j de 0 à $u_j + \text{Max}(\lambda, \max_{1 \leq i \leq N} (u_i^0))$

$$u_j^{\text{opt}} = u_{i_0} \text{ tel que } T(u_{i_0}) = \text{Inf}_{u_j} (T(u_j))$$

$$u_j = u_j^{\text{opt}}$$

$$\text{Calcul de } T = \sum_{i=1}^N T_i^j$$

$$j = j+1.$$

Nous initialisons l'algorithme par un vecteur arbitraire U^0 . A partir de ce vecteur initial, nous calculons le vecteur de temps de correspondance T^0 . A l'étape j ($1 \leq j \leq N$, N étant le nombre de stations de correspondance du réseau, dans notre cas $N = 4$) nous cherchons la composante optimale u_j^{opt} du vecteur de commande U^j . Ce calcul se fait en faisant varier la $j^{\text{ème}}$ composante u_j^j du vecteur U^j entre 0 et une valeur donnée en fonction de la période de la ligne critique (la période λ), et en fixant les autres composantes. La composante optimale u_j^{opt} obtenue nous permet donc d'améliorer la $j^{\text{ème}}$ composante T_j^j du vecteur de temps de correspondance T^j . Nous poursuivons la procédure jusqu'à ce qu'on améliore toutes les composantes du vecteur T . Le vecteur de commande s'écrira alors $U^{opt} = U^N = [u_1^{opt}, u_2^{opt}, \dots, u_N^{opt}]^T$.

6.8 Exemple d'application

Afin d'illustrer les résultats de la commande proposée, nous supposons que le réseau de la figure 3.22 est décrit par les données du tableau 3.9.

| Lignes | L ₁ | | | L ₂ | | | L ₃ | | | | L ₄ | |
|---------------------------------|------------------|----------|-------------|------------------|----------|----------|------------------|----------|----------|----------|------------------|-------------|
| Périodes (min) | $\lambda_1 = 41$ | | | $\lambda_2 = 43$ | | | $\lambda_3 = 63$ | | | | $\lambda_4 = 37$ | |
| τ_i ($1 \leq i \leq 12$) | τ_1 | τ_5 | τ_{10} | τ_3 | τ_4 | τ_2 | τ_7 | τ_8 | τ_9 | τ_6 | τ_{11} | τ_{12} |
| (min) | 12 | 11 | 18 | 9 | 19 | 15 | 16 | 14 | 20 | 13 | 20 | 17 |

Tableau 3.9 : Données numériques du réseau de la figure 3.22.

La ligne L₃ représente la ligne critique du réseau ($\lambda_3 = 63$ min). La période de la planification d'horaires du réseau τ vérifie $\tau \geq 63$. Prenons par exemple $\tau = \lambda_3 = 63$ min. Au terme de chaque période de 63 min, un bus d'une ligne du réseau doit effectuer son départ à partir de sa station de départ.

Afin d'appliquer l'algorithme proposé ci-dessus pour obtenir une commande du système, nous l'initialisons par le vecteur $U^0 = U(1) = [0, 0, 0, 0]^T$. Le vecteur d'état donné dans le système (3.31) devient :

$$\forall k \geq 1, \quad X(k) = 63^{\otimes(k-1)} A^* B U(1) = 63^{\otimes(k-1)} \begin{bmatrix} 12 & 28 & 35 & \varepsilon \\ \varepsilon & 9 & 16 & \varepsilon \\ 23 & 43 & 50 & 40 \\ \varepsilon & 23 & 30 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 63^{\otimes(k-1)} \begin{bmatrix} 35 \\ 16 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur des temps de correspondance associé au vecteur $U(1)$ est le suivant :

$$T(1) = [T_{12}(1), T_{23}(1), T_{13}(1), T_{34}(1)]^T = [23, 7, 4, 10]^T,$$

soit : $T_{tot} = \sum_{i=1}^4 T_i = 44$ min, où T_i représente la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $T(1)$.

En appliquant l'algorithme de commande proposé, les meilleures dates de départ des bus du réseau sont données par les composantes optimales du vecteur de commande du système. A partir des courbes de la figure 3.24, nous cherchons ces composantes optimales en étudiant l'évolution du temps de correspondance en fonction de la variation de chaque composante du vecteur U .

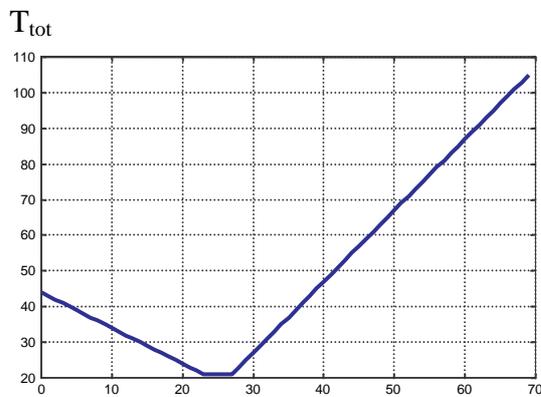
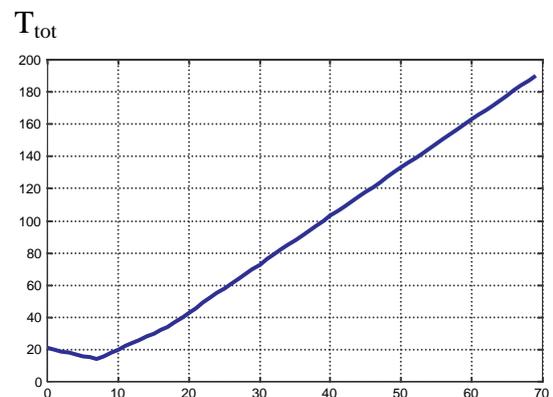
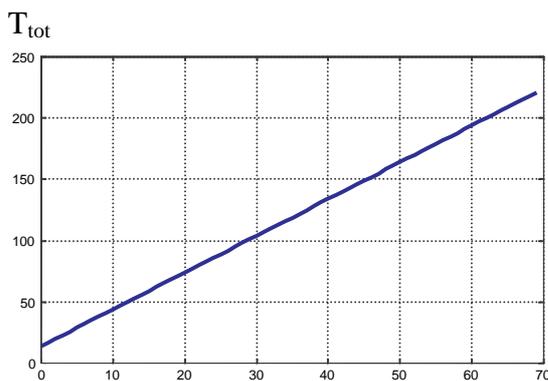
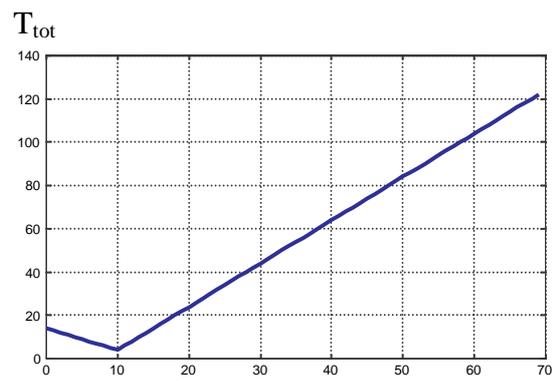
(a) Composante u_1 .(b) Composante u_2 .(c) Composante u_3 .(d) Composante u_4 .

Figure 3.24 : Variation des temps de correspondance en fonction des composantes de U .

A partir des optima des courbes représentées dans la figure 3.24, nous obtenons les composantes du vecteur de commande U^{opt} . Nous remarquons d'après la courbe (a) qu'il existe plusieurs valeurs de la composante u_1 pour lesquelles le temps de correspondance est identique ($T_{\text{tot}} = 23$ min). Après l'analyse de ces composantes optimales, nous constatons que la distribution des temps de correspondance sur les stations du réseau varie d'une valeur de la composante u_1 à une autre. En revanche, la somme de ces temps de correspondance reste constant. Ainsi, pour construire le vecteur de commande, nous choisissons arbitrairement une de ces composantes. Les optima des courbes des figures (b), (c) et (d) sont globaux, ce qui fournit les autres composantes du vecteur de commande. Dans le tableau 3.10, nous représentons les résultats obtenus. Le vecteur de commande est $U^{\text{opt}} = [23, 7, 0, 10]^T$, et le vecteur de temps de correspondance associé est $T = [0, 0, 4, 0]^T$; soit $T_{\text{tot}} = 4$ min.

| Vecteur de commande | Vecteur des temps de correspondance | La somme des temps de correspondance | La composante u_i^{opt} |
|------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| $U^0 = [0, 0, 0, 0]^T$ | $[23, 7, 4, 10]^T$ | 44 | |
| $U^1 = [23, 0, 0, 0]^T$ | $[0, 7, 4, 10]^T$ | 21 | $u_1^{opt} = 23$ |
| $U^2 = [23, 7, 0, 0]^T$ | $[0, 0, 4, 10]^T$ | 14 | $u_2^{opt} = 7$ |
| $U^3 = [23, 7, 0, 0]^T$ | $[0, 0, 4, 10]^T$ | 14 | $u_3^{opt} = 0$ |
| $U^4 = U^{opt} = [23, 7, 0, 10]^T$ | $[0, 0, 4, 0]^T$ | 4 | $u_4^{opt} = 10$ |

Tableau 3.10 : Résultats de la commande.

6.9 Amélioration des temps de correspondance par les voies propres aux véhicules

D'autres éléments peuvent être mis en œuvre pour la minimisation des temps de correspondance dans un STP. L'architecture d'un tel système joue un rôle important pour l'amélioration des conditions de circulation des transports publics ainsi que leur gestion. C'est pour cette raison qu'on trouve des couloirs réservés aux véhicules (ou voies propres) dans certains réseaux. L'utilisation de ces couloirs permet de :

- faciliter la circulation des véhicules qui est le principal objectif escompté ;
- veiller à la fluidité du trafic sur les voies qui y restent affectées ;
- assurer de bonnes conditions de sécurité, et avec la moindre gêne pour les usagers ;
- respecter les horaires théoriques du réseau indiqués sur le tableau de marche, et ensuite assurer les correspondances aux points d'échange de passagers.

Afin de réaliser les objectifs énumérés ci-dessus dans le cadre d'un réseau de transport en commun, les couloirs sont strictement réservés aux bus. Il est donc possible d'augmenter ou diminuer les vitesses commerciales des bus suivant la nature de la ligne parcourue, la demande de transport, la gestion des correspondances, etc.. Dans ces conditions, on associe à chaque couloir un intervalle de temps [min, max]. Le paramètre min (resp. max) représente le temps minimal (resp. le temps maximal) de parcours que peut faire un bus pour se déplacer entre deux stations de réseau. Souvent, et dans les meilleures conditions du trafic, le temps de déplacement des bus entre deux stations du réseau est la moyenne de deux valeurs min et max. L'accélération et/ou la décélération des bus constitue un moyen efficace sur lequel il est possible d'agir pour minimiser les temps de correspondance. La figure 3.25 représente une portion d'un modèle GET qui modélise un réseau de bus ou la variation des vitesses des bus est possible.

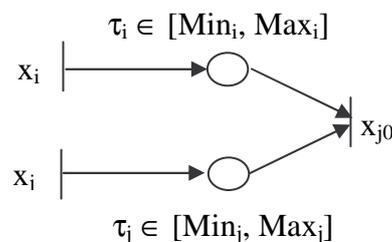


Figure 3.25 : GET modélisant une station de correspondance d'un réseau muni de couloirs réservés aux bus (voies propres).

- où :
- x_i (resp. x_j) : représente une station d'une ligne L_i (resp. L_j) ;
 - x_{j0} : représente la station commune de deux lignes L_i et L_j ;
 - $[\text{Min}_i, \text{Max}_i]$ et $[\text{Min}_j, \text{Max}_j]$: représentent respectivement les intervalles de temps de déplacement des bus sur les trajets $(x_i \rightarrow x_{j0})$ et $(x_j \rightarrow x_{j0})$;
 - τ_i et τ_j : temporisations variables associées respectivement aux trajets $(x_i \rightarrow x_{j0})$ et $(x_j \rightarrow x_{j0})$.

L'équation mathématique qui représente ce GET dans l'algèbre (max, plus) est donnée par :

$$\forall k \geq 1, \quad x_{j0}(k) = \tau_i \otimes x_i(k) \oplus \tau_j \otimes x_j(k).$$

De la même façon on peut obtenir les autres équations du modèle graphique décrivant le comportement d'un système muni des voies propres. Ainsi, on aboutit à un système non-stationnaire de type (3.27) où les matrices caractéristiques A , B et C sont à coefficients variables.

7 Conclusion

La détermination des horaires d'un réseau de transport public est une tâche assez complexe. Elle nécessite la définition de tous les trajets sur le réseau et la prise en compte de toutes les correspondances entre les lignes du réseau et éventuellement avec celles d'autres modes de transport.

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé deux structures de commande des réseaux de bus. Elles concernent essentiellement l'amélioration de la planification "horaires" des bus dans le but de minimiser les temps de correspondance en exploitant un minimum de bus. Dans un premier temps, nous avons proposé une commande basée sur la théorie de la résiduation dans les dioïdes. Il s'agit de trouver les dates d'envoi des bus de la station de départ pour assurer des correspondances aux dates désirées à la station d'échange de passagers. Nous avons proposé, dans un deuxième temps, une autre structure de commande basée sur la recherche des optimums globaux des fonctions objectifs par simulation. Nous avons également évoqué l'avantage et le rôle des couloirs réservés aux bus dans la minimisation des temps de correspondance au sein d'un réseau de transport en commun.

Pour appliquer nos approches de commande et améliorer la qualité du service des réseaux de bus nous avons étudié deux exemples d'application. Pour la première approche proposée, nous avons considéré une partie du réseau de bus géré par la CTPM. Nous avons pu évaluer les temps de passage des bus aux différents arrêts ainsi que les temps de correspondance des voyageurs. Ensuite, et dans le but d'améliorer la planification actuelle, nous avons proposé de nouveaux horaires qui permettent de minimiser les temps de correspondance en employant un minimum de bus. Afin d'apprécier la pertinence et l'efficacité de cette nouvelle approche, nous avons réalisé une étude de comparaison entre les horaires actuels et les horaires optimisés proposés. Les résultats de la deuxième approche ont été illustrés à partir d'un réseau de bus dont l'infrastructure est différente de celle du réseau étudié pour la première approche .

Conclusion Générale

Nous présentons dans ce mémoire des travaux et des résultats relatifs à la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes de transport public. L'étude de ces systèmes est abordée dans le cadre des systèmes dynamiques à événements discrets. Pour mener cette étude, nous adaptons les outils de modélisation développés pour les systèmes de production, à savoir les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus).

L'objectif principal de cette étude est de répondre aux exigences de qualité des services de transport en commun. Il consiste à assurer, d'une part, une meilleure gestion des correspondances en minimisant les temps d'attente de passagers, et d'autre part, une exploitation optimale des ressources matérielles. Notre étude est effectuée en considérant deux cas possibles de fonctionnement des bus au niveau des arrêts de correspondance où des échanges de passagers sont susceptibles de se produire :

- dans le premier cas, les bus s'attendent pour échanger les passagers aux arrêts de correspondance. Pour modéliser ce système, nous utilisons un graphe d'événements temporisés et un modèle (max, plus) linéaire stationnaire. Dans le but d'assurer le fonctionnement normal du modèle GET (sans accumulation de jetons dans certaines places), nous considérons que les bus passent d'une façon alternative aux stations de correspondance. Cette hypothèse n'est toujours pas vérifiée, ce qui nous incite à modifier le comportement du modèle GET qui représente le système ;
- dans le deuxième cas, nous étudions le réseau avec un fonctionnement plus concret : les bus ne s'attendent pas aux stations de correspondance (fonctionnement non-synchronisé). Chaque bus arrivant à une station de correspondance quitte celle-ci juste après la descente et/ou la montée de voyageurs. De plus, l'hypothèse d'alternance du passage des bus aux stations de correspondance (le cas précédent) n'est plus prise en compte.

Afin de modéliser le système synchronisé dans le cas où l'hypothèse d'alternance de passage des bus aux arrêts de correspondance n'est pas vérifiée et ainsi que le second système non-synchronisé par un GET, nous rencontrons deux problèmes :

- le premier est relatif à l'accumulation de plusieurs jetons à la place qui représente l'attente des passagers à la station de correspondance. Ce problème se produit si plusieurs lots de voyageurs arrivent à la station de correspondance avant l'arrivée du bus qui doit les embarquer ;
- le deuxième problème concerne le blocage d'un jeton qui représente un bus à la station de correspondance, si des voyageurs provenant d'une autre ligne n'attendent pas au niveau de cette station.

Pour résoudre ces deux problèmes, nous enrichissons le modèle GET initial (modèle utilisé dans le cas de synchronisation des bus avec alternance de passage aux arrêts de

correspondance) en ajoutant à certaines de ses places des transitions sources et/ou puits. L'ajout d'une transition puits à la place qui modélise l'attente des passagers sert à regrouper tous les groupes de voyageurs en attente en un seul groupe qu'un bus pourra transporter. Cette technique, nous permet de résoudre le premier problème identifié. Le deuxième problème est résolu en ajoutant au modèle GET une transition puits qui autorise le passage d'un bus à une station de correspondance si aucun voyageur n'est en attente.

Cet ajout de transitions supplémentaires au modèle GET nous donc permet de résoudre les deux problèmes rencontrés. En revanche, il nous conduit à développer un nouveau modèle graphique lorsque des conflits structurels firent leur apparition. Chaque transition supplémentaire sur une place provoque un conflit structurel. Le nouveau modèle obtenu est une classe des RdP qui généralise les GET. Nous utilisons cette classe sous l'appellation de "*graphe d'événements temporisés avec retrait dynamique de jetons*" (GETRDJ). Pour ce graphe, nous explicitons le mode de fonctionnement ainsi que la méthode suivie pour le traduire par une description d'état dans l'algèbre (max, plus). A cause des conflits structurels associés à ce nouveau modèle, la représentation d'état obtenue est donnée sous forme d'un modèle (max, plus) linéaire à paramètres variables. Pour résoudre ce modèle mathématique, nous résolvons au préalable tous les conflits structurels en adoptant *a priori* une politique de routage dépendante des caractéristiques du système. Cette politique nous permet, d'une part, d'arbitrer les conflits au niveau du modèle graphique, et d'autre part, de définir les expressions explicites des éléments non-constants des matrices caractéristiques du modèle (max, plus). Nous pouvons donc résoudre ce modèle (max, plus) et évaluer les différents états du système et les différents temps de correspondance des voyageurs.

En utilisant les techniques développées dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires dans l'algèbre (max, plus), une analyse spectrale du système est effectuée. Nous déterminons et identifions les valeurs et les vecteurs propres de la matrice caractéristique du modèle (max, plus). En employant les composantes des vecteurs propres, nous proposons une deuxième manière d'évaluer les temps de correspondance des voyageurs.

Dans le but de commander des réseaux de bus, deux approches sont proposées :

- une première basée sur la théorie de la résiduation dans les dioïdes. Cette approche est traitée dans le cas d'un système fonctionnant avec et sans synchronisation des bus ;
- une deuxième approche fondée sur des résultats de simulation. Elle permet d'obtenir le vecteur de commande du système à partir des optima globaux des fonctions objectifs proportionnelles aux temps de correspondance des voyageurs.

Pour ces différentes approches, nous donnons des algorithmes permettant d'obtenir les entrées des systèmes (commandes) afin de réaliser au mieux les objectifs souhaités aux stations de correspondance.

Une autre heuristique de commande est proposée. Il s'agit de minimiser les temps de correspondance des voyageurs en agissant sur les vitesses des bus qui circulent sur les voies propres (voies réservées strictement aux bus).

L'application de nos résultats est effectuée sur une partie du réseau de bus de la ville de Montbéliard.

L'analyse des STP sous l'aspect des SDED, en utilisant les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus), montre qu'il est difficile d'intégrer tous les paramètres d'étude dans un modèle unique et complet. Il serait peut être intéressant d'utiliser d'autres outils de modélisation et

d'autres méthodes pour effectuer cette étude dans un contexte plus concret et sans prendre en compte aucune hypothèse sur les réseaux et leur fonctionnement. En final, les modèles d'étude utilisés sont limités par rapport à la complexité réelle des systèmes de transport public. Conscient de ces limites, nous ouvrons ainsi de nouvelles perspectives de recherches.

Lors de nos recherches nous avons été confronté à plusieurs autres problèmes aux sujets de la modélisation et l'étude des STP. Nous en indiquons quelques-uns qui feront l'objet de la continuité de nos travaux de recherches dans le domaine des transports publics. Nous citons par exemple le problème lié à la résolution des conflits associés aux modèles GETRDJ dans le cas où les bus circulent sur les lignes d'une façon non périodique. Un deuxième problème qui recevra toute notre attention est l'utilisation, comme outil de modélisation graphique, d'un GET où les poids associés à certains arcs du modèle peuvent être supérieurs à 1. Le but de cette étude sera de comparer l'efficacité du modèle ainsi que les résultats obtenus par cette technique de modélisation et ceux obtenus par la méthode de retrait dynamique de jetons utilisé dans ce mémoire. Nous vérifions dans ce contexte à quel point il est possible d'adapter l'algèbre (max, plus) pour décrire le comportement d'un GET où les poids ne sont pas unitaires. Nous allons également nous intéresser à l'étude d'un système où les paramètres (les temps de déplacement des véhicules, les fréquences des lignes, etc.) deviennent variables.

L'étude et l'évaluation des performances d'un système de transport public multimodal en appliquant les méthodes proposées ici ainsi que celles évoquées dans les perspectives citées ci-dessus feront également l'objet de nos futurs travaux de recherche.

Annexe A

Dans cette annexe nous représentons certaines démonstrations relatives aux résultats théorique donnés dans le chapitre 2. Dans l'annexe A.1, nous démontrons les formules de différentes fonctions de routage figurées dans le système (2.11). L'annexe A.2 donne la démonstration des expressions des composantes des vecteurs propres de la matrice caractéristique du modèle (2.12) en fonction des dates de franchissement des transitions du modèle graphique de la figure 2.9.

Annexe A.1

□ **Le premier cas : $\beta_i < \beta_{i+1}$**

a. $k_{i+1,3} = f_{i+1,3}(k)$

Nous nous plaçons ici dans le cas où la fréquence de passage des bus de la ligne L_i , à la station $Sc_{i,i+1}$, est plus grande que celle du passage des bus de la ligne L_{i+1} à la même station. Considérons l'ensemble $\Omega_{i,i+1}$ dont le cardinal représente le nombre de passage des bus de la ligne L_{i+1} en $Sc_{i,i+1}$ avant le premier passage d'un bus de la ligne L_i . Formellement, cet ensemble est donné par :

$$\Omega_{i,i+1} = \{p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1} (p-1) < x_{i,4}(1)\},$$

où :

- $\gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1} (p-1)$ est la date de $p^{\text{ème}}$ passage d'un bus de L_{i+1} en $Sc_{i,i+1}$;

$$\gamma_{i+1}(1) = \begin{cases} x_{i+1,1}(1) + \tau_{i+1,1} & \text{si pas d'attente entre } L_i \text{ et } L_{i+1} \\ x_{i+1,2}(1) & \text{sinon} \end{cases}$$

- $x_{i,4}(1)$ est la date du 1^{er} passage d'un bus de L_i en $Sc_{i,i+1}$.

Nous notons par “ $\sup(\Omega_{i,i+1})$ ” le nombre de passage des bus de L_{i+1} avant le premier passage d'un bus de L_i en $Sc_{i,i+1}$ (autrement dit, le nombre de franchissements de la transition $x_{i+1,3}$ avant le premier franchissement de la transition $x_{i+1,2}$). Nous avons donc deux cas possibles :

- si l'ensemble $\Omega_{i,i+1}$ est vide (pas d'attente entre L_i et L_{i+1} , ou aucun bus de L_{i+1} ne passe en $Sc_{i,i+1}$ avant un bus de L_i), alors la transition $x_{i+1,3}$ ne sera jamais franchie ;
- si l'ensemble $\Omega_{i,i+1}$ est non vide (pas d'attente entre L_i et L_{i+1}), alors le nombre de franchissements de la transition $x_{i+1,3}$ est égal à $\sup(\Omega_{i,i+1})$.

Par suite, nous définissons le paramètre $k'_{0,i+1}$, que nous allons utiliser plus loin, par :

$$k'_{0,i+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Omega_{i,i+1} = \emptyset \\ \sup_p (\Omega_{i,i+1}) & \text{si } \Omega_{i,i+1} \neq \emptyset \end{cases}$$

Nous remarquons à partir de la 6^{ème} équation du système (2.10) (cf. Chap. 2) que le $k'_{i+1,3}$ franchissement de $x_{i+1,1}$ correspond au $k^{\text{ème}}$ franchissement de $x_{i+1,2}$. Donc la fonction $f_{i+1,3}(k)$ est égale à la somme des nombres $k'_{0,i+1}$ et k . Soit :

$$k_{i+1,3} = f_{i+1,3}(k) = k + k'_{0,i+1}.$$

b. $k_{i+1,4} = f_{i+1,4}(k)$

Pour cette expression, et comme dans la relation précédente, nous envisageons deux cas liés à l'ensemble $\Omega_{i,i+1}$.

- Si $\Omega_{i,i+1} \neq \emptyset$ (pas d'attente entre L_i et L_{i+1}), alors nous notons par $d_{i+1}(k) = (k + k'_{0,i+1} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1)$ la date de passage, en $Sc_{i,i+1}$, d'un bus de la ligne L_{i+1} qui transporte les passagers venant sur un bus de la ligne L_i . Sachant que ce bus arrive à la station de correspondance juste après (ou en même temps que) le $k^{\text{ème}}$ bus de la ligne L_i dont la date d'arrivée à la même station est : $d_i(k_{i+1,4}) = (k_{i+1,4} - 1)\beta_i + x_{i,4}(1)$, et en tenant compte de l'ordonnancement de passage des bus en $Sc_{i,i+1}$, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$(k_{i+1,4} - 1) \beta_i + x_{i,4}(1) \leq (k + k'_{0,i+1} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1).$$

Dans ce cas ($\beta_i < \beta_{i+1}$), après la date $d_{i+1}(k)$ de passage d'un bus de L_{i+1} en $Sc_{i,i+1}$, le premier bus arrivant à cette station de correspondance est un bus de la ligne L_i à la date $d_i(k_{i+1,4} + 1) = k_{i+1,4} \beta_i + x_{i,4}(1)$. Donc on trouve :

$$(k + k'_{0,i+1} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1) < k_{i+1,4} \beta_i + x_{i,4}(1).$$

A partir de ces deux inégalités, nous déduisons l'encadrement suivant :

$$\frac{k \beta_{i+1} - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1}(k'_{0,i+1} - 1)}{\beta_i} < k_{i+1,4} \leq \frac{k \beta_{i+1} - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1}(k'_{0,i+1} - 1)}{\beta_i} + 1.$$

- Si $\Omega_{i,i+1} = \emptyset$, alors soit aucun bus de la ligne L_{i+1} ne passe en $Sc_{i,i+1}$ avant un bus de la ligne L_i , soit l'attente entre la ligne L_i et la ligne L_{i+1} est imposée en $Sc_{i,i+1}$. Dans les deux cas on aura le même encadrement de $k_{i+1,4}$ avec $k'_{0,i+1} = 0$.

Posons donc : $S_{i+1,4}(k) = \frac{k \beta_{i+1} - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1}(k'_{0,i+1} - 1)}{\beta_i}$,

nous obtenons alors :

$$S_{i+1,4}(k) < k_{i+1,4} \leq S_{i+1,4}(k) + 1,$$

par conséquent :

$$k_{i+1,4} = f_{i+1,4}(k) = E(S_{i+1,4}(k) + 1).$$

c. $k_{i,5} = f_{i,5}(k)$

Pour cette fonction nous traitons les deux cas suivants :

- 1- si les bus de la ligne L_i passent en $Sc_{i,i+1}$ plusieurs fois (≥ 2) avant le premier passage d'un bus de la ligne L_{i+1} à la même station, alors la transition o_i est franchie dès qu'un deuxième jeton arrive à la place P_i . Pour chaque k vérifiant l'inégalité " $x_{i,4}(1) + \beta_i k < \gamma_{i+1}(1)$ ", le $(k+1)^{\text{ème}}$ franchissement de $x_{i,4}$ correspond au $k^{\text{ème}}$ franchissement de o_i . Par exemple si la transition $x_{i,4}$ est franchie pour la deuxième fois sans que $x_{i+1,1}$ ne le soit, alors o_i est franchie pour une première fois et ainsi de suite. Donc la relation entre les franchissements des transitions $x_{i,4}$ et o_i est donnée par :

$$k_{i,5} = f_{i,5}(k) = k+1.$$

- 2- dans le deuxième cas nous considérons toujours le paramètre $k'_{0,i+1}$ donné ci-dessus. Soit $d_i(k_{i,5}) = (k_{i,5}-1) \beta_i + x_{i,4}(1)$ la date du $k_{i,5}^{\text{ème}}$ passage d'un bus de la ligne L_i à la station de correspondance, qui correspond au jeton qui arrive à la place P_i et qui franchit la transition o_i ; alors la date du $k^{\text{ème}}$ passage d'un bus de la ligne L_{i+1} , qui arrive juste après la date $d_i(k_{i,5})$, à la station de correspondance est :

$$d_{i+1}(k) = (k_{i,5} - k + k'_{0,i+1} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1),$$

donc nous avons les inégalités suivantes :

$$(k_{i,5}-1) \beta_i + x_{i,4}(1) \leq (k_{i,5} - k + k'_{0,i+1} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1),$$

$$\text{et } (k_{i,5} - k + k'_{0,i+1} - 2) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1) < (k_{i,5}-2) \beta_i + x_{i,4}(1),$$

d'où l'encadrement suivant :

$$\frac{k\beta_{i+1} - \gamma_{i+1}(1) + x_{i,4}(1) + \beta_{i+1} - \beta_i - \beta_{i+1}k'_{0,i+1}}{\beta_{i+1} - \beta_i} \leq k_{i,5}$$

$$\text{et } k_{i,5} < \frac{k\beta_{i+1} - \gamma_{i+1}(1) + x_{i,4}(1) + \beta_{i+1} - \beta_i - \beta_{i+1}k'_{0,i+1}}{\beta_{i+1} - \beta_i},$$

avec $\beta_{i+1} \neq \beta_i$.

Si nous posons

$$S_{i+1,5}(k) = \frac{k\beta_{i+1} - \gamma_{i+1}(1) + x_{i,4}(1) + \beta_{i+1} - \beta_i - \beta_{i+1}k'_{0,i+1}}{\beta_{i+1} - \beta_i},$$

$$\text{alors } S_{i+1,5}(k) \leq k_{i,5} < S_{i+1,5}(k) + 1,$$

par suite :

$$k_{i,5} = f_{i,5}(k) = \begin{cases} S_{5,i+1}(k) & \text{si } S_{5,i+1}(k) \in \mathbb{N} \\ E(S_{5,i+1}(k) + 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

si $\beta_{i+1} = \beta_i$, alors la fonction $f_{i,5}(k)$ garde la même expression que dans le premier cas ($f_{i,5}(k) = k+1$).

Compte tenu de ces deux cas, nous obtenons l'expression suivante :

$$k_{i,5} = f_{i,5}(k) = \begin{cases} k + 1 & \text{pour } k \text{ tel que } x_{i,4}(1) + \beta_i k \leq \gamma_{i+1}(1) \\ S_{i+1,5}(k) & \text{si } S_{i+1,5}(k) \in \mathbb{N} \text{ et } \beta_{i+1} \neq \beta_i \\ E(S_{i+1,5}(k) + 1) & \text{si } S_{i+1,5}(k) \notin \mathbb{N} \text{ et } \beta_{i+1} \neq \beta_i \end{cases}$$

d. $k_{i+1,6} = f_{i+1,6}(k)$

Comme nous l'avons déjà signalé, la transition $x_{i+1,3}$ n'est pas franchie sauf si l'ensemble $\Omega_{i,i+1}$ est non vide ; le nombre de tirs de $x_{i+1,3}$ est égal au cardinal de $\Omega_{i,i+1}$. Nous pouvons donc écrire la relation suivante :

$$k_{i+1,6} = f_{i+1,6}(k) = \begin{cases} k & \text{pour } k \text{ tel que } \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1}(k-1) \leq x_{i,4}(1) \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

□ Le deuxième cas : $\beta_i > \beta_{i+1}$

a. $k_{i+1,3} = f_{i+1,3}(k)$

Contrairement au cas précédent, ici la fréquence de passage des bus aux arrêts de la ligne L_{i+1} est plus grande que celle de la ligne L_i . Nous introduisons l'ensemble $\xi_{i,i+1}$ dont le cardinal représente le nombre de passages des bus de la ligne L_i à la station de correspondance avant le premier passage d'un bus de la ligne L_{i+1} à la même station. Cet ensemble est donné par :

$$\xi_{i,i+1} = \{ p \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{i,4}(1) + \beta_i(p-1) < \gamma_{i+1}(1) \}.$$

Nous définissons le paramètre $k_{0,i+1}$ en fonction de $\sup(\xi_{i,i+1})$ par :

$$k_{0,i+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_{i,i+1} = \emptyset \\ \sup_p(\xi_{i,i+1}) & \text{si } \xi_{i,i+1} \neq \emptyset \end{cases}$$

Pour cette démonstration nous distinguons deux cas :

- 1- si plusieurs passages des bus de la ligne L_i à la station de correspondance se produisent avant le premier passage d'un bus de la ligne L_{i+1} à la même station, donc l'ensemble $\xi_{i,i+1}$ est non vide, alors nous avons :

◆ si $\sup(\xi_{i,i+1}) = 1$, alors un seul passage d'un bus de L_i est effectué à la station de correspondance avant le premier passage d'un bus de la ligne L_{i+1} , donc nous avons selon la 6^{ème} équation du système (2.10) (cf. Chap.2) l'encadrement suivant :

$$(k-1) \beta_i + x_{i,4}(1) \leq (k_{i+1,3} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1) < k \beta_i + x_{i,4}(1).$$

◆ si $\sup(\xi_{i,i+1}) = 2$, nous procédons de la même façon que dans le cas précédent et nous obtenons :

$$k \beta_i + x_{i,4}(1) \leq (k_{i+1,3} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1) < (k+1) \beta_i + x_{i,4}(1).$$

◆ d'une façon générale, si $\sup(\xi_{i,i+1}) = k_{0,i+1}$, nous pouvons écrire :

$$(k+k_{0,i+1}-2) \beta_i + x_{i,4}(1) \leq (k_{i+1,3} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1) < (k+k_{0,i+1}-1) \beta_i + x_{i,4}(1).$$

Ceci entraîne :

$$\frac{k\beta_i + x_{i,4}(1) - \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1} + \beta_i(k_{0,i+1} - 2)}{\beta_{i+1}} \leq k_{i+1,3}$$

et
$$k_{i+1,3} < \frac{k\beta_i + x_{i,4}(1) - \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1} + \beta_i(k_{0,i+1} - 1)}{\beta_{i+1}}.$$

Notons,
$$S_{3,i+1}(k) = \frac{k\beta_i + x_{i,4}(1) - \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1} + \beta_i(k_{0,i+1} - 2)}{\beta_{i+1}}.$$

Nous obtenons finalement :

$$S_{i+1,3}(k) \leq k_{i+1,3} < S_{i+1,3}(k) + \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}.$$

Par suite nous déduisons l'expression suivante :

$$k_{i+1,3} = f_{i+1,3}(k) = \begin{cases} S_{i+1,3}(k) & \text{si } S_{i+1,3}(k) \in \mathbb{IN} \\ E(S_{i+1,3}(k)+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

2- si un bus de la ligne L_{i+1} passe le premier à la station de correspondance avant le premier passage d'un bus de la ligne L_i (l'ensemble $\xi_{i,i+1}$ est vide), alors ce bus est représenté dans le modèle GETRDJ de la figure 2.10 (Chapitre 2) par le jeton qui franchit la transition $x_{i+1,3}$. La date du $k_{i+1,3}$ ^{ème} passage d'un bus de la ligne L_{i+1} qui transporte les passagers venant sur le k ^{ème} bus de la ligne L_i vérifie :

$$(k-1) \beta_i + x_{i,4}(1) \leq (k_{i+1,3} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1) < k \beta_i + x_{i,4}(1).$$

Nous remarquons que cet encadrement ressemble à un cas particulier du cas précédent (le cas où $k_{0,i+1} = 1$). Alors l'expression de $k_{i+1,3}$ est la même que celle donnée dans le premier cas.

b. $k_{i+1,4} = f_{i+1,4}(\mathbf{k})$

Dans ce cas ($\beta_i > \beta_{i+1}$) il est possible d'avoir l'accumulation de jetons dans la place P_i du modèle GETRDJ de la figure 2.10 sauf si la transition $x_{i+1,3}$ est tirée avant le premier tir de la transition $x_{i,4}$ (autrement dit, si un bus de la ligne L_{i+1} passe à la station de correspondance avant le premier passage d'un bus de la ligne L_i). En tenant compte de ce cas et en utilisant le paramètre $k_{0,i+1}$ défini ci-dessus, l'expression de la fonction $f_{i+1,4}$ est donnée par :

$$k_{i+1,4} = f_{i+1,4}(\mathbf{k}) = k + k_{0,i+1} - 1.$$

c. $k_{i,5} = f_{i,5}(\mathbf{k})$

Il est évident que le franchissement de la transition o_i se produit si la transition $x_{i,4}$ est tirée au moins deux fois avant le premier tir de $x_{i+1,2}$ ou $x_{i+1,3}$ (ou en d'autres termes si un bus de la ligne L_i passe au moins deux fois à la station de correspondance avant le premier passage d'un bus de la ligne L_{i+1} à la même station : pas d'attente entre L_i et L_{i+1}). Alors comme dans le premier cas ($\beta_i < \beta_{i+1}$, **1. c**) nous avons :

$$f_{i,5}(\mathbf{k}) = \begin{cases} k+1 & \forall k \text{ telque } x_{i,4}(1) + \beta_i k \leq \gamma_{i+1}(1) \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

d. $k_{i+1,6} = f_{i+1,6}(\mathbf{k})$

A partir de la 7^{ème} équation du système (2.10) ($x_{i+1,3}(\mathbf{k}) = \tau_{i+1,1} \otimes x_{i+1,1}(k_{i+1,6})$) (cf. Chap. 2), nous remarquons que le $k_{i+1,6}$ ^{ème} franchissement de la transition $x_{i+1,1}$ correspond au $k_{i+1,6}$ ^{ème} franchissement de $x_{i+1,3}$. Dans ce cas nous envisageons aussi deux situations :

- 1- si un bus de la ligne L_{i+1} passe le premier à la station de correspondance avant le premier passage du bus de la ligne L_i (pas d'attente entre L_i et L_{i+1}), alors la transition $x_{i+1,3}$ du modèle GETRDJ de la figure 2.10 sera franchie, tandis que $x_{i+1,2}$ ne le sera pas puisque il n'y a aucun jeton à la place P_i (pas de passager en attente). Donc pour chaque k vérifiant l'inégalité : $\gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1}(k-1) < x_{i,4}(1)$, nous avons :

$$k_{i+1,6} = f_{i+1,6}(\mathbf{k}) = k.$$

- 2- cette deuxième situation, représente le contraire de la première. Si l'attente entre les lignes L_i et L_{i+1} est imposée alors la transition $x_{i+1,3}$ ne sera jamais franchie par suite $f_{i+1,6}(\mathbf{k}) = \varepsilon$ pour tout $k \geq 1$. Sinon, la date de passage de bus de la ligne L_i à la station de correspondance juste après le $k_{i+1,6}$ ^{ème} passage d'un bus de la ligne L_{i+1} est $((k_{i+1,6} - k + k_{0,i+1} - 1) \beta_i + x_{i,4}(k))$, nous pouvons donc écrire les inégalités suivantes :

$$(k_{i+1,6} - k + k_{0,i+1} - 2) \beta_i + x_{i,4}(1) < (k_{i+1,6} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1),$$

$$\text{et } (k_{i+1,6} - 1) \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}(1) < (k_{i+1,6} - k + k_{0,i+1} - 1) \beta_i + x_{i,4}(1).$$

Ceci implique :

$$\frac{k\beta_i - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_i(1 - k_{0,i+1}) - \beta_{i+1}}{\beta_i - \beta_{i+1}} \leq k_{i+1,6}$$

et

$$k_{i+1,6} < \frac{k\beta_i - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_i(1 - k_{0,i+1}) - \beta_{i+1}}{\beta_i - \beta_{i+1}} + 1,$$

avec $\beta_{i+1} \neq \beta_i$.

Nous posons : $S_{i+1,6}(k) = \frac{k\beta_i - x_{i,4}(1) + \gamma_{i+1}(1) + \beta_i(1 - k_{0,i+1}) - \beta_{i+1}}{\beta_i - \beta_{i+1}},$

donc $S_{i+1,6}(k) < k_{i+1,6} < S_{i+1,6}(k) + 1 + \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i - \beta_{i+1}}.$

Si $\beta_{i+1} = \beta_i$, on se ramène au premier cas (sachant que l'attente des bus entre L_i et L_{i+1} n'est pas imposée), soit $f_{i+1,6}(k) = k$.

A partir de ces deux cas nous obtenons l'expression suivante :

$$k_{i+1,6} = f_{i+1,6}(k) = \begin{cases} k & \forall k \text{ telque } \gamma_{i+1}(1) + \beta_{i+1}(k-1) \leq x_{i,4}(1) \\ E(S_{i+1,6}(k) + 1) & \text{sinon avec } \beta_{i+1} \neq \beta_i \\ \varepsilon & \text{si attente entre } L_i \text{ et } L_{i+1} \end{cases}$$

Annexe A.2

Dans cette annexe nous démontrons les différentes expressions des composantes non nulles des vecteurs propres V^{λ_i} . Nous avons donc à partir de (2.28) (Chapitre 2) :

$$\forall 2 \leq i \leq n,$$

$$v_{i,2}^{\lambda_i}(k) = \alpha_{i,3}(k) / \lambda_i = \alpha_{i,3}(k) - \lambda_i$$

$$= \tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,3} - k + 1) - \lambda_i$$

$$= \tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,3} - k + 1) - \lambda_i + x_{i,1}(k-1) - x_{i,1}(k-1)$$

$$= \tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,3} - k + 1) + x_{i,1}(k-1) - (\lambda_i + x_{i,1}(k-1))$$

$$= [\tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,3} - k + 1) + x_{i,1}(k-1)] - x_{i,1}(k)$$

$$= [\tau_{i,1} + x_{i,1}(k_{i,3})] - x_{i,1}(k) \quad (\text{d'après le franchissement périodique de } x_{i,1}).$$

$$= Q - x_{i,1}(k), \quad (\text{où } Q = \tau_{i,1} + x_{i,1}(k_{i,3}) \text{ correspond à la date d'arrivée du } k_{i,3}^{\text{ème}} \text{ bus de } L_i \text{ à la station de correspondance, et qui ramasse les passagers venant sur le } k_{i,4}^{\text{ème}} \text{ bus de la ligne } L_{i-1} \text{ à la date } x_{i-1,4}(k_{i,4}). \text{ Alors on a } Q \geq x_{i-1,4}(k_{i,4}).)$$

$$= \max [Q, x_{i-1,4}(k_{i,4})] - x_{i,1}(k)$$

$$= \max [\tau_{i,1} + x_{i,1}(k_{i,3}), x_{i-1,4}(k_{i,4})] - x_{i,1}(k)$$

$$= x_{i,2}(k) - x_{i,1}(k). \quad (\text{cf. chap. 2, § 4.4 système (2.10)}).$$

$$v_{i,3}^{\lambda_i}(k) = \alpha_{i,6}(k) / \lambda_i = \alpha_{i,6}(k) - \lambda_i$$

$$= \tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,6} - k + 1) - \lambda_i$$

$$= \tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,6} - k + 1) - \lambda_i + x_{i,1}(k-1) - x_{i,1}(k-1)$$

$$= \tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,6} - k + 1) + x_{i,1}(k-1) - (\lambda_i + x_{i,1}(k-1))$$

$$= \tau_{i,1} + \lambda_i(k_{i,6} - k + 1) + x_{i,1}(k-1) - x_{i,1}(k)$$

$$= \tau_{i,1} + x_{i,1}(k_{i,6}) - x_{i,1}(k) \quad (\text{d'après le franchissement périodique de } x_{i,1}).$$

$$= x_{i,3}(k) - x_{i,1}(k). \quad (\text{cf. chap. 2, § 4.4 système (2.10)}).$$

$$v_{i,4}^{\lambda_i}(k) = \tau_{i,1} \otimes \tau_{i,2} = \tau_{i,1} + \tau_{i,2}$$

$$= \tau_{i,1} + \tau_{i,2} + x_{i,4}(k) - x_{i,4}(k)$$

$$= \tau_{i,1} + \tau_{i,2} + x_{i,4}(k) - (x_{i,4}(k-1) + \lambda_i) \quad (\text{d'après le franchissement périodique de } x_{i,4}).$$

$$= x_{i,4}(k) - (\lambda_i - \tau_{i,1} - \tau_{i,2}) - x_{i,4}(k-1)$$

$$= x_{i,4}(k) - (\tau_{i,3} + x_{i,4}(k-1))$$

$$= x_{i,4}(k) - x_{i,1}(k). \quad (\text{cf. chap. 2, § 4.4 système (2.10)}).$$

$$v_{i+1,2}^{\lambda_i}(k) = (\alpha_{i,4}(k) \otimes \tau_{i,1} \otimes \tau_{i,2}) / \lambda_i = (\alpha_{i,4}(k) + \tau_{i,1} + \tau_{i,2}) - \lambda_i$$

$$= \lambda_i(k_{i+1,4} - k + 1) + \tau_{i,1} + \tau_{i,2} - \lambda_i$$

$$= \lambda_i(k_{i+1,4} - k) + \tau_{i,1} + \tau_{i,2}$$

$$= \lambda_i(k_{i+1,4} - k) + x_{i,1}(k) - x_{i,1}(k) + \tau_{i,1} + \tau_{i,2}$$

$$= x_{i,1}(k_{i+1,4}) - x_{i,1}(k) + \tau_{i,1} + \tau_{i,2} \quad (\text{d'après le franchissement périodique de } x_{i,1}).$$

$$= x_{i,1}(k_{i+1,4}) + \tau_{i,1} + \tau_{i,2} - x_{i,1}(k)$$

$$\begin{aligned}
&= x_{i,4}(k_{i+1,4}) - x_{i,1}(k) && (k_{i+1,4} \text{ représente le dernier passage du bus de } L_i \text{ à la} \\
& && \text{station de correspondance juste après le } k^{\text{ème}} \text{ passage du} \\
& && \text{bus de } L_{i+1} \text{ à la même station et à la date } x_{i+1,2}(k). \text{ Posons} \\
& && \text{par la suite } k_{i+1,4} = p). \\
&= x_{i,4}(p) - x_{i,1}(k) \\
&= x_{i,4}(p) + x_{i+1,2}(k) - x_{i+1,2}(k) - x_{i,1}(k) \\
&= (x_{i+1,2}(k) - x_{i,1}(k)) - (x_{i+1,2}(k) - x_{i,4}(p)).
\end{aligned}$$

Par déduction on prévoit que la composante $v_{i,1}^{\lambda_i}$ de vecteur V^{λ_i} est donnée par :

$$v_{i,1}^{\lambda_i}(k) = x_{i,1}(k) - x_{i,1}(k) = e.$$

Après avoir déterminé les expressions des composantes non nulles du vecteur V^{λ_i} nous écrivons :

$\forall k \geq 1,$

- Pour i tel que : $1 \leq i \leq n$

$$v_{i,1}^{\lambda_i}(k) = x_{i,1}(k) - x_{i,1}(k);$$

$$v_{i,2}^{\lambda_i}(k) = x_{i,2}(k) - x_{i,1}(k);$$

$$v_{i,3}^{\lambda_i}(k) = x_{i,3}(k) - x_{i,1}(k);$$

$$v_{i,4}^{\lambda_i}(k) = x_{i,4}(k) - x_{i,1}(k);$$

- pour i tel que : $1 \leq i \leq n-1$

$$v_{i+1,2}^{\lambda_i}(k) = (x_{i+1,2}(k) - x_{i,1}(k)) - (x_{i+1,2}(k) - x_{i,4}(p)).$$

Annexe B

Cette annexe est consacrée aux résultats optimisés obtenus lors de l'étude de la commande du réseau DIAM-ligne N°9. Suite à l'application de la commande proposée, nous présentons la planification d'horaires de la ligne N°9. L'étude a été effectuée pour différentes valeurs de seuil de tolérance M . Pour chaque valeur, nous avons obtenu une planification d'horaires spécifique. Dans ce qui suit, nous présentons uniquement les différentes dates de passage des bus des deux lignes au niveau de l'arrêt de correspondance, ainsi que la commande optimale de la ligne N°9 et les différents temps de correspondance durant la période de service considérée.

Nous notons :

- \mathbf{k} : le $k^{\text{ème}}$ voyage d'un bus de la ligne N°9 ;
- \mathbf{k}' : le $k'^{\text{ème}}$ voyage d'un bus sur la ligne DIAM ;
- $\mathbf{x}_{i,2}(\mathbf{k}')$: date du $k'^{\text{ème}}$ passage d'un bus de ligne DIAM au niveau de la station de correspondance ;
- \mathbf{u}_{opt} : commande de la ligne N°9 (instants où il faut envoyer un bus de la station *Bel air* pour assurer une ou plusieurs correspondances à la station *Acropole*) ;
- $\mathbf{x}_{i+1,2}(\mathbf{k})$: date du $k^{\text{ème}}$ passage d'un bus de la ligne N°9 au niveau de la station de correspondance ;
- $\mathbf{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$: temps de correspondance entre le $k'^{\text{ème}}$ voyage d'un bus de la ligne DIAM et le $k^{\text{ème}}$ voyage d'un bus de la ligne N°9.

Remarque : Devant chaque date $\mathbf{x}_{i+1,2}(\mathbf{k})$ de passage d'un bus de la ligne N°9 au niveau de la station de correspondance, nous signalons le numéro du bus qui assure la correspondance.

♦ **Cas N°1 : M = 34**

Les résultats regroupés dans ce tableau correspondent à la configuration de la planification relative à M = 34 min.

| k | k' | $x_{i,2}(k')$ | u_{opt} | $x_{i+1,2}(k)$ | T_{corres} | k | k' | $x_{i,2}(k')$ | u_{opt} | $x_{i+1,2}(k)$ | T_{corres} |
|---|----|---------------|-----------|----------------|--------------|----|----|---------------|-----------|----------------|--------------|
| | 1 | 28 | | | 29 | 5 | 24 | 208 | 183 | 208 (B1) | 0 |
| | 2 | 35 | | | 22 | | 25 | 218 | | | 24 |
| | 3 | 47 | | | 10 | | 26 | 232 | | | 10 |
| 1 | 4 | 57 | 32 | 57 (B1) | 0 | 6 | 27 | 242 | 217 | 242 (B2) | 0 |
| | 5 | 64 | | | 24 | | 28 | 254 | | | 33 |
| | 6 | 70 | | | 18 | | 29 | 262 | | | 25 |
| | 7 | 77 | | | 11 | | 30 | 276 | | | 11 |
| | 8 | 83 | | | 5 | 7 | 31 | 287 | 262 | 287 (B1) | 0 |
| 2 | 9 | 88 | 63 | 88 (B2) | 0 | | 32 | 296 | | | 24 |
| | 10 | 99 | | | 30 | | 33 | 309 | | | 11 |
| | 11 | 106 | | | 23 | 8 | 34 | 320 | 295 | 320 (B2) | 0 |
| | 12 | 109 | | | 20 | | 35 | 331 | | | 33 |
| | 13 | 114 | | | 15 | | 36 | 340 | | | 24 |
| | 14 | 120 | | | 9 | | 37 | 353 | | | 11 |
| 3 | 15 | 127 | 104 | 129 (B1) | 2 | 9 | 38 | 364 | 339 | 364 (B1) | 0 |
| | 16 | 136 | | | 28 | | 39 | 372 | | | 25 |
| | 17 | 144 | | | 20 | | 40 | 381 | | | 16 |
| | 18 | 153 | | | 11 | | 41 | 390 | | | 7 |
| 4 | 19 | 164 | 139 | 164 (B2) | 0 | 10 | 42 | 397 | 372 | 397 (B2) | 0 |
| | 20 | 174 | | | 34 | | 43 | 407 | | | 29 |
| | 21 | 181 | | | 27 | | 44 | 415 | | | 21 |
| | 22 | 189 | | | 19 | 11 | 45 | 425 | 411 | 436 (B1) | 11 |
| | 23 | 197 | | | 11 | | | | | | |

Tableau b.1 : Résultats optimisés pour le seuil M = 34 min.

♦ **Cas N°2 : M = 16**

Dans ce tableau, nous donnons les résultats relatifs au seuil M = 16.

| k | k' | $x_{i,2}(k')$ | u_{opt} | $x_{i+1,2}(k)$ | T_{corres} | k | k' | $x_{i,2}(k')$ | u_{opt} | $x_{i+1,2}(k)$ | T_{corres} |
|----------|-----------|---------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|--------------------------------|----------|-----------|---------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| | 1 | 28 | | | 7 | | 24 | 208 | | | 10 |
| 1 | 2 | 35 | 10 | 35 (B1) | 0 | 10 | 25 | 218 | 193 | 218 (B2) | 0 |
| | 3 | 47 | | | 10 | | 26 | 232 | | | 10 |
| 2 | 4 | 57 | 32 | 57 (B2) | 0 | 11 | 27 | 242 | 217 | 242 (B3) | 0 |
| | 5 | 64 | | | 13 | | 28 | 254 | | | 15 |
| | 6 | 70 | | | 7 | 12 | 29 | 262 | 244 | 269 (B1) | 7 |
| 3 | 7 | 77 | 52 | 77 (B3) | 0 | | 30 | 276 | | | 14 |
| | 8 | 83 | | | 16 | 13 | 31 | 287 | 265 | 290 (B2) | 3 |
| | 9 | 88 | | | 11 | | 32 | 296 | | | 13 |
| 4 | 10 | 99 | 74 | 99 (B4) | 0 | 14 | 33 | 309 | 284 | 309 (B4) | 0 |
| | 11 | 106 | | | 14 | | 34 | 320 | | | 11 |
| | 12 | 109 | | | 11 | 15 | 35 | 331 | 306 | 331 (B3) | 0 |
| | 13 | 114 | | | 6 | | 36 | 340 | | | 13 |
| 5 | 14 | 120 | 95 | 120 (B1) | 0 | 16 | 37 | 353 | 328 | 353 (B1) | 0 |
| | 15 | 127 | | | 9 | | 38 | 364 | | | 8 |
| 6 | 16 | 136 | 111 | 136 (B2) | 0 | 17 | 39 | 372 | 347 | 372 (B2) | 0 |
| | 17 | 144 | | | 9 | | 40 | 381 | | | 16 |
| 7 | 18 | 153 | 128 | 153 (B3) | 0 | | 41 | 390 | | | 7 |
| | 19 | 164 | | | 10 | 18 | 42 | 397 | 372 | 397 (B4) | 0 |
| 8 | 20 | 174 | 149 | 174 (B4) | 0 | | 43 | 407 | | | 8 |
| | 21 | 181 | | | 16 | 19 | 44 | 415 | 390 | 415 (B3) | 0 |
| | 22 | 189 | | | 8 | 20 | 45 | 425 | 400 | 425 (B1) | 0 |
| 9 | 23 | 197 | 172 | 197 (B1) | 0 | | | | | | |

Tableau b.2 : Résultats optimisés pour le seuil M = 16 min.

◆ **Cas N°3 : M = 21**

Dans ce dernier tableau, nous représentons les résultats obtenus en fixant le seuil M à 21 min.

| k | k' | $x_{i,2}(k')$ | u_{opt} | $x_{i+1,2}(k)$ | T_{corres} | k | k' | $x_{i,2}(k')$ | u_{opt} | $x_{i+1,2}(k)$ | T_{corres} |
|---|----|---------------|-----------|----------------|--------------|----|----|---------------|-----------|----------------|--------------|
| | 1 | 28 | | | 19 | 7 | 24 | 208 | 183 | 208 (B1) | 0 |
| | 2 | 35 | | | 12 | | 25 | 218 | | | 14 |
| 1 | 3 | 47 | 22 | 47 (B1) | 0 | 8 | 26 | 232 | 207 | 232 (B2) | 0 |
| | 4 | 57 | | | 20 | | 27 | 242 | | | 20 |
| | 5 | 64 | | | 13 | | 28 | 254 | | | 8 |
| | 6 | 70 | | | 7 | 9 | 29 | 262 | 237 | 262 (B3) | 0 |
| 2 | 7 | 77 | 52 | 77 (B2) | 0 | | 30 | 276 | | | 20 |
| | 8 | 83 | | | 16 | | 31 | 287 | | | 9 |
| | 9 | 88 | | | 11 | 10 | 32 | 296 | 271 | 296 (B1) | 0 |
| 3 | 10 | 99 | 74 | 99 (B3) | 0 | | 33 | 309 | | | 11 |
| | 11 | 106 | | | 21 | 11 | 34 | 320 | 295 | 320 (B2) | 0 |
| | 12 | 109 | | | 18 | | 35 | 331 | | | 11 |
| | 13 | 114 | | | 13 | 12 | 36 | 340 | 315 | 340 (B3) | 0 |
| | 14 | 120 | | | 7 | | 37 | 353 | | | 19 |
| 4 | 15 | 127 | 102 | 127 (B1) | 0 | | 38 | 364 | | | 8 |
| | 16 | 136 | | | 17 | 13 | 39 | 372 | 347 | 372 (B1) | 0 |
| | 17 | 144 | | | 9 | | 40 | 381 | | | 16 |
| 5 | 18 | 153 | 128 | 153 (B2) | 0 | | 41 | 390 | | | 7 |
| | 19 | 164 | | | 17 | 14 | 42 | 397 | 372 | 397 (B2) | 0 |
| | 20 | 174 | | | 7 | | 43 | 407 | | | 18 |
| 6 | 21 | 181 | 156 | 181 (B3) | 0 | | 44 | 415 | | | 10 |
| | 22 | 189 | | | 19 | 15 | 45 | 425 | 400 | 425 (B3) | 0 |
| | 23 | 197 | | | 11 | | | | | | |

Tableau b.3 : Résultats optimisés pour le seuil M = 21 min.

Lexique

| | |
|---------------------|---|
| CCD : | Commande Centralisée de Départ |
| CTPM : | Compagnie des Transport du Pays de Montbéliard |
| DIAM : | Direct Interurbain Audincourt Montbéliard |
| ECLER : | Exploitation Commerciale d'un Ligne en temps Réel |
| GE : | Graphe d'Evénements |
| GET : | Graphe d'Evénements Temporisés |
| GETRDJ : | Graphe d'Evénements Temporisés avec Retrait Dynamique de Jetons |
| PCC : | Poste de Commande Central |
| RATP : | Régie Autonome des Transports Parisiens |
| RdP : | Réseaux de Petri |
| RdP avec conflits : | Réseaux de Petri avec Conflits |
| RdPH : | Réseau de Petri Hybride |
| RdPS : | Réseau de Petri Stochastique |
| RTP : | Réseau de Transport Public |
| SAD : | Systèmes d'Aide à la décision |
| SAE : | Système d'Aide à l'exploitation |
| SMA : | Systèmes Multi-Agents |
| SNCF : | Société Nationale des Chemins de Fer Français |
| STP : | Système de Transport Public |
| TB : | Temps de Battement (temps d'attente autorisé à un arrêt) |
| TCL : | Transport en Commun Lyonnais |
| TM : | Tableau de marche |
| TR : | Temps de Roulage |

Bibliographie

- [Amo, 99] Lionel Amodeo, “Contribution à la simplification et à la commande des réseaux de Petri Stochastiques : Application aux systèmes de production”. Thèse de doctorat, UFR des sciences et techniques de l’université de Franche-comté. Janvier 1999.
- [Bac et al, 92] Baccelli, F., Cohen G., Olsder G. L. and Quadrat J.P., “Synchronization and linearity : an algebra for Discrete Event Systems”. Wiley, 1992.
- [Bac et al, 96] Baccelli F., Foss S. and Gaujal B., “Free-choice Petri Nets An Algebraic Approach”. IEEE Trnas. on Automatic Control, 41 (12), pp. 1751-1778, 1996.
- [Bal, 00] Flavien Balbo, “ESAC : un Model d’Interaction Multi-agent utilisant l’Environnement comme Support Actif de Communication : Application à la gestion des transports Urbains”. Thèse de doctorat université Paris IX Dauphine, UFR Sciences des organisations. Janvier 2000.
- [Böc et al, 01] Jörg Böcker, Jürgen Lind and Bernd Zirkler, “Using a multi-agent approach to optimise the train coupling and sharing system”. European journal of Operational Research 134 (2001), pp. 242-252.
- [Bra, 91] J.G. Braker, “Max-algebra modelling and analysis of time-table dependent transportation networks”. ECC 91, European Control Conference, Grenoble, France, July 2-5-1991.
- [Bru et al, 86] M. Bruns and H. Rake, “Hierarchical Control for Complex Transportation Systems”. IFAC large Scale Systems : Theory and Aplications, Zurich, Switzerland, 1986.
- [Bus et al, 97] M. R. Bussiek, T. Winter, U.T. Zimmermann, “Discrete optimization in public rail transport”. Mathematical Programming 79(3), pp. 415-444, 1997.
- [Coh et al, 85] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat and M. Viot, “A linear-system-theoretic view of discrete-event prosses and its use for performance evaluation in manufacturing”. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 30, no. 3, pp. 210-220, Mar. 1985.
- [Coh et al, 98] Cohen G., Gaubert S. and Quadrat J.-P. , “Algebraic system analysis of timed Petri Net”. In J. Gunawardena (Ed.), Idempotency, Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 1998.

- [Cot, 99] Bertrand Cottenceau, “Contribution à la commande des systèmes à événements discrets : Synthèse de correcteurs pour les graphes d’événements temporisés dans les dioïdes”. Laboratoire d’ingénierie des systèmes automatisés, Université d’Angers. Octobre 1999.
- [Des, 02] Philippe Descamps, “Environnement de modélisation et de simulation de réseaux de transport urbain de passagers”. Diplôme d’ingénieur du C.N.A.M., Conservatoire national des arts et métiers, centre régional associé du nord Franche – Comté à Belfort. Février 2002.
- [Far et al, 99] J.L. Farges and J.L. Gallego, “Stochastic P-timed Petri Nets and their use for Traffic Queue Estimation”. In Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC’99), Tokyo, Japan, Vol. 1, pp. 829-834. 12-15. October 1999.
- [Feb et al, 98] Angela Di Febbraro and Simona Sacone, “Hybrid Modelling of transportation Systems by means Petri Nets”. In the proceedings of the 37th IEEE International Conference on Decision and Control, Tampa, FL, Vol. 3, pp. 3232-3237. 18-20. December 1998.
- [Fou, 00] Alain-Jérôme Fougères, “Un système tutoriel intelligent pour la formation des régulateurs de trafic d’une compagnie de transport en commun”. Colloque sur la multimodalité, IMAG, Grenoble. Mai 2000.
- [Fro et al, 89] Edith Froloff, Michel Rizzi et Antoine Saporito, “Bases et pratiques de la régulation”. RATP, direction du réseau routier RC/MSE. Août 1989.
- [Gaub, 92] Stéphane Gaubert, “Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes”. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Juillet 1992.
- [Gaub, 99] Stéphane Gaubert, “Systèmes dynamiques à événements discrets”. Notes de cours, ENSMP, Option automatique et DEA ATS Orsay, INRIA Rocquencourt, France, 1999.
- [Gauj, 94] Bruno Gaujal, “Parallélisme et simulation des systèmes à événements discrets”. Thèse de doctorat, université de Nice-Sophia Antipolis, école doctorale des sciences pour l’ingénieur. Juin 1994.
- [Gon et al, 77] M. Gondron, M. Minoux, “Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes”, note EDF, Bulletin de la direction des études et recherches. Série C – Mathématiques, Informatiques N° 2, pp.25-41, 1977.
- [Hay et al, 97] S. Hayat et Claude Barret, 1997, “Introduction du critère Flux de Passagers dans la Régulation de Trafic de Lignes de Métros basée sur des Contrôleurs Flous”. Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité (INRETS). Rapport de recherche, septembre 1997-40.

- [Hel et al, 01] Helena R. Lourenço, José P. Paixão and Rita Portugal, “Multiobjective Metaheuristics for the Bus-Driver Scheduling Problem”. *Transportation Science*. Vol. 35, No.3, pp. 331-343. August 2001.
- [Kom, 99] Jan Komenda, “Modélisation, analyse et commande des systèmes de production hybrides”. Thèse de doctorat, UFR des sciences et Techniques de l’Université de Franche-comté. Avril 1999.
- [Lah et al, 99] Lahaye S. , Boimond J-L. et Harduin L., “GET avec ajout/retrait dynamique de jetons : comportement *asymptotique représentation dans l’algèbre (min, +)*”. 2^{ème} congrès sur la modélisation des systèmes à événements discrets réactifs, Cachan. Mars, 1999.
- [Lah, 00] S. Lahaye: “*Contribution à l’étude des systèmes linéaires non-stationnaires dans l’algèbre des dioïdes*”. Thèse de Doctorat, université d’Angers, Ecole doctorale : Sciences pour l’ingénieur de Nantes. Octobre 2000.
- [Lai, 02] Laïchour Hakim, “Modélisation Multi-Agent et Aide à la Décision : Application à la régulation des correspondances dans les Réseaux de Transport Urbain”. Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, UFR I.E.E.A.. Décembre 2002.
- [Men, 97] Eric Menguy, “Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes”. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale Sciences pour l’ingénieur de Nantes, Université d’Angers. Novembre 1997.
- [Nait et al, 01a] A. Nait-Sidi-Moh, M.-A. Manier, A. El Moudni, “Modélisation et évaluation d’un système de transport par l’algèbre Max-Plus”. Dans les actes de la 3^{ème} Conférence Francophone de MODélisation et SIMulation. (MOSIM’01), vol. 1, pp. 99-104, Troyes, France 25-27 avril 2001.
- [Nait et al, 01b] A. Abbas-Turki, A. Nait-Sidi-Moh, O. Grunder, M.-A. Manier et A. El Moudni, “Modélisation et évaluation des temps de correspondance pour la conception du service d’un système de transport en commun”. CONFERE 8^{ème} Edition, Marrakech, Maroc, 6-7 Juillet 2001.
- [Nait et al, 01c] A. Nait-sidi-moh, M.-A. Manier, H. Manier and A. El Moudni. “A Max-Plus algebra modeling for a public transport system”. Accepté pour publication dans le journal *Cybernetics and Systems*.
- [Nait et al, 02a] A. Nait-sidi-moh, M.-A. Manier, H. Manier and A. El Moudni. “A Timed Event Graph and Max-Plus algebra modelling for a public transport system”. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM), Belfort (France), Janvier 2002, Rapport de recherche, R.I SeT 2002-1.
- [Nait et al, 02b] A. Nait Sidi Moh, M.-A. Manier and A. EL Moudni, “A control policy for a public transport network modelled by Petri nets and max, plus algebra”. In proceedings of ISIAAC on World Automation Congress (WAC’02), Orlando, Florida, 9-13 June 2002.

- [Nait et al, 02c] A. Nait Sidi Moh, M.-A. Manier, H. Manier and A. El Moudni. "Control of a Public Transport Network by the Max-Plus Algebra : case of a system constrained by maximal connection times". In proceedings of the 2nd WSEAS International Conference on Simulation, Modelling and Optimisation (ICOSMO2002), Skiathos, Greece, pp. 275-280, 25-28 Sept. 2002.
- [Nait et al, 02d] A. Nait-sidi-moh, M.-A. Manier, H. Manier and A. El Moudni. "A (max, plus) modelling approach for the evaluation of travelling times in a public transportation system". In proceedings of IEEE International Conference on systems, Man and Cybernetics (SMC'02), Hammamet, Tunisia, CD-ROM ISBN: 2-9512309-4-X, 6-9 October 2002.
- [Nait et al, 03a] A. Nait sidi moh, M.-A. Manier, A. El Moudni. "Performance Analysis of a Bus Network Based on Petri Nets and (max, +) Algebra". In journal of Systems Analysis Modelling Simulation (SAMS), vol. 43, Issue 5, pp. 639-669, May 2003.
- [Nait et al, 03b] A. Nait sidi moh, M.-A. Manier, A. El Moudni. "A (max, plus) algebra modelling approach to control a public transportation network constrained by maximal connection times". In proceedings of the International Multiconference on Computational Engineering in Systems Application (CESA'03), Lille, France, 9-11 July 2003.
- [Nér, 2001] Marie-Eve Néron, "les systèmes de transport public : analyse de Leon, Monterrey et Québec", Département d'aménagement, d'architecture et des arts visuels. Université Laval. Août 2001.
- [Ols, 98] G. -J. Olsder, "Cours Notes: Max algebra approach to discrete event systems". 26^{ème} école de printemps d'informatique théorique, INRIA Editeur, pp. 149-176, 1998.
- [Ols et al, 98] G-J Olsder, Subiono and M. M. Gettrick, "On large scale max-plus algebra model in railway systems". 26^{ème} école de printemps d'informatique, Algèbre Max-Plus et applications en informatique, pp. 177-192, Ile de Noirmoutier, Vendée, France, 4-7 Mai 1998.
- [Pal et al, 01] André de Palma and Robin Lindsey, "Optimal timetables for public transportation". Transportation Research Part B 35 (2001) 789-813, 2001.
- [Pro, 92] Jean-Marie Proth, "Conception et gestion des systèmes de production". Presses universitaires de France, 1^{ère} édition, Juin 1992.
- [Pro et al, 95] Jean-Marie Proth, Xiaolan Xie, "Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production". Masson, 1995.
- [Ram et al, 87] Ramadge P.J. et Wonham W.M., "Supervisory control of a class of discrete event processes". SIAM Journal of Control and Optimisation, Vol. 25 (1), pp. 206-230, Jan. 1987.

- [Ren et al, 92] René David et Hassane Alla, “Du Grafset aux réseaux de Petri”. Série Automatique, HERMES, Paris 1992.
- [Riz et al, 97] Michel Rizzi et Bruno Guichoux, “Système d’information objet pour l’exploitation des réseaux de Surface”. Livres I-V. Méthodes et Systèmes d’exploitation, Rapport interne Régie autonome des Transports Parisiens (RATP) 1997.
- [Rob et al, 98] Rob M.P. Goverde, I.A. Hansen, “*Synchronisation Control of Scheduled Train Services to Minimize Passenger Waiting*”. Trail Research School, Transportation Planning and Traffic Engineering Section, Faculty of Civil Engineering and Geo Sciences, Delft University of Technology. December 1998.
- [Sch, 96] B. De Schutter, “Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems”. Thèse de Doctorat, Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit Der Toegepaste Wetenschappen Departement Electrotechniek, Kardinaal Mercierlaan 94, 3001 Leuven(Heverlee). Februari 1996.
- [Sou, 00] Aziz Soulhi, “Contribution de L’intelligence artificielle à l’aide à la décision dans la gestion des systèmes de transport urbain collectif”. Thèse de Doctorat, Université des sciences et technologies de Lille. Janvier 2000.
- [Spa, 98] Pavel Spacek, “Modélisation, analyse et commande des systèmes à événements discrets par l’algèbre des dioïdes : Application aux lignes de galvanoplastie”. Thèse de doctorat, UFR des sciences et Techniques de l’Université de Franche-comté. Mars 1998.
- [STIF, 01] Syndicat des transports, “Guide technique des systèmes de priorité bus aux carrefours à feux”. Etude réalisée pour le syndicat des Transports d’Ile de France. Version 2, Juin 2001.
- [Ter et al, 98] Jean Cochet-Terrasson, Guy Cohen, Stéphane Gaubert, Michael MC Gettrick and Jean-pierre Quadrat, “Numerical Computation Of Spectral Elements In Max-plus Algebra”. In Proceedings of the IFAC Conference on System Structure and Control (SSC’98), Nantes, France, July 1998.
- [Vri et al, 98] R. de Vries, B. De Schutter and B. De Moor, “*On max-algebraic models for transportation networks*”. In Proceeding of the International Workshop on Discrete Event Systems (WODES’98), Cagliari, Italy, pp. 457-462, Aug. 1998.
- [Wan et al, 99] Jiacun Wang, Chun Jin and Yi Deng, “Performance Analysis of Traffic Network Based on Stochastic timed Petri Net Models”. pp 77-85 IEEE, 1999.
- [Won et al, 01] K.I. Wong, SC. Wong and Hai Yang, “Modeling urban taxi services in congested road networks with elastic demand”. Transportation Research Part B 35 (2001), pages 819-842, 2001.

Signets

[GART, 98] Groupement des Autorités Responsables de Transport (GART), 1998, <http://www.gart.org>.

[Giro, 79] HASTUS, compagnie canadienne spécialisée en Graphicage et habillage des horaires en transport public, fondée en 1979, <http://www.giro.ca>.

[Its-actif, 99] Projet ACTIF / L'architecture Cadre pour les Systèmes de Transport Intelligents (STI) en France, 1999, <http://www.its-actif.org>.

[Tran, 00], The European Reference Data Model for Public Transport V5.0 – Transmodel Version, 5 rapports de modélisation, 2000, <http://www.transmodel.org>.