



HAL
open science

Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse et Annexes

Guy P. Brousseau

► **To cite this version:**

Guy P. Brousseau. Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse et Annexes. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986. tel-00471995v2

HAL Id: tel-00471995

<https://theses.hal.science/tel-00471995v2>

Submitted on 22 Apr 2010 (v2), last revised 10 Aug 2010 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE A
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR d'ÉTAT ES SCIENCES

PAR
Guy BROUSSEAU

**THÉORISATION DES PHÉNOMÈNES
D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES**

Soutenue le 2 décembre 1986 devant la Commission d'examen :

MM. P. DAMEY, Professeur **Président**
J. COLMEZ, Professeur honoraire
J. ESTERLE, Professeur
J. DHOMBRES, Professeur à l'Université de Nantes **Examineurs**
B. MALGRANGE, Correspondant de l'Académie des sciences
G. VERGNAUD, Directeur de recherche au C.N.R.S.

Je remercie le jury de cette thèse :

Bernard MALGRANGE a distrait de ses recherches en mathématiques un temps précieux pour regarder fonctionner le séminaire de didactique. Ses indications m'ont permis d'éclaircir mes idées et d'améliorer les textes que je préparais, sa caution m'a donné le courage de les présenter.

Gérard VERGNAUD s'est intéressé depuis des années à ce travail. Il m'a convaincu des liens qui unissent fondamentalement la psychologie cognitive et la didactique. Sa solidité, ses conseils, ses analyses, son exemple, ses critiques, ses encouragements aussi, ont été pour moi, un soutien incomparable.

Je suis redevable à Pierre DAMEY qui m'a permis de bénéficier de la chaleur et des moyens de l'IREM de Bordeaux, à Jean ESTERLE qui a accepté de rapporter pour l'Université de Bordeaux-I, et à Jean DHOMBRES qui, en acceptant de participer à ce jury, consent à souligner les apports de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques à la didactique.

Je n'aurais pu entreprendre ni poursuivre de prendre l'enseignement des mathématiques comme champ d'études scientifiques sans quelques rencontres que j'évoque avec émotion.

Depuis 1960, Lucienne FELIX m'a encouragé et prodigué son appui, son aide, ses conseils et son affection. Aux moments les plus difficiles sa confiance m'a permis de persévérer.

Instituteur, j'ai été passionné par ses livres, apprenti en mathématiques, j'ai été fasciné par ses aperçus pénétrants et par le contact direct qu'elle établit avec les plus grands.

*Observateur de l'enseignement, je suis constamment **provoqué** par l'originalité et la sagacité de ses remarques.*

Je ne saurais dire à quel point la confiance que m'a témoigné A. LICHNEROWICZ a été décisive pour moi, ni combien l'attention qu'il a bien voulu prêter à mes premières tentatives m'a été précieuse.

René LABORDERIE m'a fortement épaulé à un moment crucial.

Jean COLMEZ m'a recruté et m'a guidé pendant de nombreuses années. Parmi tant de leçons que j'ai reçues de lui, une des plus importantes est celle de son courage, de son audace et de sa ténacité pour obtenir les moyens dont nous avons eu besoin : l'IREM, le contrat de l'école Michelet, le 3ème cycle... mais la plus précieuse est celle de la solidité et de la chaleur qu'il apporte dans ses amitiés.

Je veux remercier ensuite ceux qui ont pris part directement au travail de rédaction : Nadine BROUSSEAU pour l'annexe sur les décimaux et Jacques PERES pour deux passages du Chapitre Ia.

Régis GRAS s'est intéressé à mon analyse de l'espace explicatif et Harassons RATSIMBA-RAJOHN a collaboré aux analyses factorielles que j'évoque.

Merci à tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de l'ouvrage, à Françoise DEL MORAL et à Nicole BERGERIE qui ont accepté d'assurer la frappe dans des conditions très difficiles, à Michèle DEMIS et au personnel de l'imprimerie de l' I. R. E. M. de Bordeaux.

Cette thèse reflète un travail accompli avec l'aide d'un grand nombre de personnes que je veux associer dans ma gratitude.

En premier lieu, tous les maîtres, qui depuis 1972 ont enseigné à l'école Jules Michelet de Talcrce. Il n'était pas facile d'accepter les contraintes liées aux recherches et en particulier le regard qui était porté sur leur travail. Sans leur dévouement aux élèves et au projet commun, sans leur compétence et leur honnêteté professionnelles et sans leur amicale collaboration, rien n'aurait été possible. Tous méritent ma gratitude, chacun pour une contribution spécifique et personnelle et particulièrement la directrice de l'école maternelle et le directeur de l'école élémentaire, pour leur vigilance et leur engagement.

Je veux aussi remercier ceux des administrateurs qui ont eu à connaître le projet et qui l'ont soutenu en prenant des risques, simplement pour remplir leur mission. Il y en a eu plus qu'on ne pourrait le croire et à des niveaux très différents. Tous les inspecteurs de l'éducation qui se sont succédés dans la circonscription, et qui ont eu à s'accommoder d'une singularité aussi gênante et délicate, ont su trouver des solutions pour l'aider à survivre. Je soupçonne leurs difficultés et ma gratitude en est d'autant plus grande.

Mes travaux du Groupe des 16 de l'IREM, pilier des recherches et des actions au niveau élémentaire, composé des Professeurs d'Écoles Normales de la région, ont été une source permanente de questions et de défis. Que tous soient sûrs de mon attachement à leur aventure, leur apport est visible dans la bibliographie.

Mes collaborateurs du 3ième Cycle ont tous fortement marqué mon travail et leurs enseignements m'ont été très utiles.

Dans un domaine aussi peu prometteur pour une carrière que la didactique des mathématiques, un étudiant ne peut qu'avoir une forte personnalité, un solide enthousiasme et souvent une expérience déjà riche. J'en ai bénéficié et on trouvera dans ces pages les traces de nos travaux communs.

Ma reconnaissance s'étend à toute la communauté des didacticiens, aussi bien à ceux que j'ai malmenés qu'aux autres. Sans leurs travaux, sans leur opiniâtre désir de comprendre et d'explorer les phénomènes d'enseignement, ces prolégomènes seraient de bien peu d'intérêt. Dans ce domaine je ne peux pas taire l'importance des longues discussions durant tant d'années avec Yves CHEVALLARD et André ROUCHIER mais comment arrêter la liste avant Nicolas BALACHEFF, Alain MERCIER, Régine DOUADY et tous ceux qui me sont proches et avant Georges GLAESER qui s'est consacré à la didactique et qui m'a fait l'amitié de critiquer méticuleusement certains textes.

SOMMAIRE

-o0o-

INTRODUCTION	P. 1
<i>Bibliographie</i> de l'introduction	30,
CHAPITRE I : PROBLÈMES DE DIDACTIQUE CENTRÉS SUR UNE NOTION MATHÉMATIQUE : L'ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX	35
® Problèmes d'enseignement des décimaux	36
1. L'enseignement des décimaux dans les années 60 en France	39
2. L'enseignement des décimaux dans les années 70 en France	53
3. Quelques problèmes de l'enseignement des décimaux .75 Problèmes de didactique des décimaux	
1. Introduction	82
2. Conception générale d'un processus d'enseignement	83
3. Analyse du processus et de sa réalisation	103
4. Analyse d'une situation : L'épaisseur d'une feuille	131
5. Questions de didactique des décimaux	152
6. Conclusion	166
<i>Bibliographie</i> du Chapitre 1	169
CHAPITRE II : PROBLÈMES DE DIDACTIQUE CENTRÉS SUR L'ÉLÈVE : LÉS ÉCHECS ÉLECTIFS	173
1. Approche globale et statistique, les échecs électifs en mathématiques	174
0 Définitions et caractères fondamentaux de l'échec en mathématiques	175
0 Plan d'études et méthodes	181
0 Conclusion de l'approche statistique	191
2. Approche clinique	196
0 Introduction	196
0 Exemple d'analyse de situation	197
0 Étude du cas de Gaël	216
0 Conclusion	274
0 Bibliographie du Chapitre II	279

CHAPITRE III : FONDEMENTS ET MÉTHODES DE LA DIDACTIQUE

DES MATHÉMATIQUES	281
0 Objet des études en didactique	282
0 Phénomènes de didactique	288
0 Éléments pour une modélisation	295
0 Cohérence et incohérences de la modélisation envisagée : les paradoxes du contrat didactique	314
0 Modélisation des situations didactiques	326

CHAPITRE IV : QUESTIONS DE MÉTHODOLOGIE

1. L'observation des activités didactiques	365
2. Méthode de contrôle de l'analyse factorielle des correspondances par l'analyse de l'espace explicatif 391	
3. A propos d'ingénierie didactique : l'étude d'une situation	399

CHAPITRE V : COURTES ÉTUDES DE DEUX PROBLÈMES PRATIQUES DANS LE

CADRE DE LA THÉORIE DES SITUATIONS

DIDACTIQUES	433
1. L'enseignement de l'énumération	434
2. L'enseignement de la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace 447	

VOLUME ANNEXE :

– Les décimaux dans la scolarité obligatoire	p. 1 à 279
– Textes divers	
0 Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques	1 à 30
0 Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques	31 à 64
0 The fragility of knowledge	65 à 97
0 Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?	98 à 111
0 Documents internes	112 à 118

Le texte ci-après plonge ses racines dans **plus de** vingt ans d'activités qui sont aussi difficiles aujourd'hui à présenter qu'à oublier.

Il est possible qu'un jour il s'avère utile de rapporter l'histoire détaillée de ces expériences afin d'analyser les circonstances qui ont présidé à l'apparition de tel ou tel concept et de reconstituer la chaîne des questions, des observations et des réponses qui ont justifié le rejet d'un point de vue ou l'acceptation d'un autre.

Mais tel n'est pas l'objet du présent travail et nous nous contenterons d'un bref rappel car il s'agit plutôt ici d'extraire de ces expériences quelques remarques utiles aux débats du moment. Ces débats sont de trois ordres :

- d'abord les débats sur l'utilité comparée, pour l'enseignement des mathématiques, des innovations, des réflexions, des expériences, des recherches ou des théorisations de nature didactique ou d'autres,
- ensuite les débats sur la constitution même d'une théorie de la didactique, ses concepts et ses fondements,
- enfin les débats plus proprement méthodologiques.

Nous présenterons nos observations suivant ce plan, mais il est clair que ces débats sont liés de façon dialectique et que leur séparation ne peut être qu'artificielle.

De plus, il y a encore dans ce domaine, un décalage choquant entre les minuscules fragments de réalité qui peuvent être objectivement décrits et reproduits, et la déprimante complexité des concepts qui se proposent pour les expliquer.

C'est pourquoi l'ambition d'insérer nos remarques dans un vaste tableau d'ensemble paraîtra présomptueuse à beaucoup. Circonstance aggravante, le problème central sera celui de la théorisation, les deux autres, l'utilité et la méthodologie, s'articulant autour de lui.

Quelqu'un jugeant décousue cette collection de travaux et insuffisants nos efforts pour les amalgamer, estimera même notre projet prétentieux et manqué.

Mais je sais à quel point une oeuvre visée théorique peut être stimulante et utile à ceux-là même qu'elle ne convainc pas, même si elle doit être finalement rejetée, à condition qu'elle soit assez **vaste**, assez plausible pour résister un temps. Pendant quinze ans, j'ai nourri mes travaux de la critique et de la compréhension de certaine théorie, la seule à ma disposition. Je n'y croyais pas, mais elle s'imposait à moi car elle représentait très bien ce que l'on pouvait croire, ce que j'avais cru moi-même et qui m'aurait sans doute longtemps embarrassé s'il ne s'était pas trouvé un AUTRE pour l'écrire. Car il est plus facile de faire face à un texte qu'à un tissu d'opinions diffuses.

L'acceptation de servir à mon tour d'appui et à la réflexion de mes lecteurs est la seule raison pour laquelle, après beaucoup d'hésitations, je livre aujourd'hui une étude aussi imparfaite.

LA THÈSE FONDAMENTALE

1 La thèse fondamentale que (ouvrage vise à soutenir) affirme donc que :

pour produire, améliorer, reproduire, décrire, et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible - de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'études et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie.

@ C e t t e thèse peut paraître trivialement fausse.

Par exemple, parce que l'ensemble des pratiques d'enseignement semblent la contredire. Jusqu'à ce jour, de nombreux décideurs et professeurs produisent, gèrent, améliorent, reproduisent, comprennent les situations d'enseignement sans l'aide d'aucune véritable théorisation, avec le simple secours des concepts et des pratiques professionnelles, l'amélioration consistant éventuellement en une "simple" rationalisation de ces pratiques.

L'examen, même superficiel, de l'évolution récente de ces pratiques et les nombreux travaux relatifs aux résultats de cette méthode empirique en montrent les limites.

Inversement, cette thèse peut paraître comme banalement vraie : puisque l'enseignement des mathématiques pose des problèmes culturels, sociaux et économiques, étudions-le ; l'objet d'étude est identifié : puisque chacun peut reconnaître "à l'oeil nu" une leçon de mathématiques et ses protagonistes.

Il est évident que pour améliorer l'enseignement, il faut pouvoir comparer, non seulement ses résultats, mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus et que ces conditions doivent être connues comme reproductibles.

Cette reproductibilité implique une description, non pas naïve, de toutes les conditions observées, mais sélective reposant sur un choix pertinent de variations possibles aux effets reconnus. La reproductibilité implique donc la compréhension des phénomènes fondamentaux, c'est-à-dire du tissu de relations attestées constituant la théorie et permettant de choisir des conditions d'enseignement, d'en expliquer les effets et de les prévoir. La nécessité paraît évidente, puisque l'objet d'étude et le champ d'application coïncident dans "la leçon de mathématiques" ; la collection des déclarations qui lui sont associées constituerait donc une "théorie" donc l'existence serait ainsi assurée.

4. Il faut réfuter ce raisonnement : l'étude des phénomènes, liés à l'activité d'enseignement dans ce qu'ils ont de spécifique de la connaissance enseignée, constitue de facto un champ scientifique mais il faut franchir une étape de plus pour ériger ce champ au statut d'objet d'une théorie.

Tous les spécialistes penseront pouvoir indiquer à propos d'une leçon par exemple, les uns, son contenu cognitif, d'autres, les intentions du professeur, ou les résultats et les difficultés des élèves, encore d'autres, les conditions pédagogiques ou les particularités de la communication... et chacun pourra relever une collection de faits du point de vue de sa discipline. La question est de savoir si le contrôle de la situation d'enseignement peut être obtenue par la conjonction naturelle de connaissances déterminées compréhensibles, analysables dans ces domaines indépendants, ou bien s'il exige de plus un savoir propre pour conjuguer ces apports et la création de concepts spécifiques irréductibles à cette conjonction.

Dans ce dernier cas l'enseignement des mathématiques devient le référent d'un objet théorique qui doit être déterminé par une définition interne placée au coeur d'un ensemble de relations : une théorie - la thèse affirme la seconde occurrence contre la première.

PROLÉGOMÈNES à UNE THÉORISATION :
HISTOIRE D'UN PROCESSUS EMPIRIQUE DE
RECHERCHE DE 1960 à 1978

Il est indispensable avant de discuter cette thèse de présenter brièvement la suite des expériences qui ont étayé ma propre conviction. Ce résumé nous permettra par la suite de nous référer à certains textes et résultats anciens plus ou moins bien publiés mais qu'il est inutile d'inclure dans le corps du présent travail.

Il semblera peu académique d'extraire cette histoire et ces réflexions personnelles du tissu des notions et concepts qui ont traversé le champ de la didactique depuis ces trente dernières années. Le lecteur curieux trouvera en annexe une présentation; 'générale et: un peu superficielle je le reconnais -- qui fait: le point: (en 1982) sur ces questions et montre leurs relations avec les disciplines connexes.

©Origine

Un petit ouvrage pour les instituteurs que j'ai écrit en 1963 (grâce aux encouragements de L. FELIX) et publié chez DUNOD [6] (grâce à l'appui de A. LICHNEROWICZ) montre mon **enthousiasme** pour l'organisation bourbachique des **mathématiques** ainsi que mon adhésion aux conceptions didactiques et épistémologiques **de l'époque :**

- leçons non **verbales** de C. GATTEGNO ;
- **parti-pris de donner directement du sens aux écritures formelles, usage des dessins et flèches de G. PAPY ;**

– **lourde insistance sur des pratiques et des matériels "isomorphes" comme moyen d'abstraction. Ces matériels étaient semblables à ceux que Z. DIENES (que je n'avais pas lu et qui n'était pas traduit ni publié en français) allait préconiser ;**

– subtile progression où toujours **les concepts nouveaux** sont introduits implicitement avant d'être reconnus, symbolisés, formulés puis expliqués, puis réappliqués et enfin rappelés périodiquement. Cet ordre en permet éventuellement la définition mais seulement à la fin de l'étude. Cette méthode permet de concilier un contrôle axiomatique rigoureux des notions et des théorèmes et les nécessités d'une familiarisation préalable dans des exemples particuliers. Bien que ces définitions ne soient jamais explicitement proposées aux enfants ni même aux maîtres (voir la reproduction en note de l'avertissement au lecteur" de ce livre, lignes 14 à 28 et la table des matières) [6] elles sont toujours très fidèlement conformes à la présentation et à l'ordre de BOURBAKI.

Parmi toutes les innovations que contenait ce petit livre, celle qui me paraissait la plus importante et en même temps la plus sujette à caution, était justement cet ordre. Comment observer s'il facilitait vraiment ou non les acquisitions ? Ce fut l'une de mes premières recherches.

2 Étude d'une progression_

Comme les leçons n'étaient qu'évoquées dans ce texte, MM. DERAMECOURT et HOUZIAU réalisèrent les 80 fiches nécessaires qui furent utilisées dans une quinzaine de classes de Dordogne sous leur contrôle [25]. Nos moyens ne nous permettaient d'obtenir et de traiter que les pourcentages de réussite et d'abstention dans chaque classe.

J'avais utilisé, pour construire ma progression, un système de matrice assez complexe qui me permettait de tenir compte des diverses conditions de dépendance que je croyais devoir respecter, aussi bien entre les différents concepts **engagés** dans des leçons successives, qu'entre les formes de connaissances sous lesquelles ils se présentaient. Par exemple, on peut voir [6] que

l'égalité était introduite successivement et avec des sens différents, égalité de longueurs de baguettes, de poids, d'ensembles, de sommes de longueurs, de prix etc...

Je préparai donc pour chaque type de dépendance que j'espérais tester, une matrice indiquant tous les **couples** de leçons qui se trouvaient ainsi liées a priori. Par exemple, des couples d'étapes didactiques d'un même concept :

introduction/schématisation
 ou formulation/application ou
 application/réapplication... ou
 introduction/généralisation
 ou des couples de leçons liées axiomatiquement
 ou des ensembles de leçons ayant trait à la même notion mathématique.

Ces matrices (30 x 30) devaient pouvoir se superposer à la matrice des corrélations observées de façon à voir si les valeurs des coefficients de corrélation pour les couples repérés différaient des autres (par un test non paramétrique tel que le randomization test par exemple). On pouvait penser que les classes qui avaient moins bien réussi une première leçon (relativement à leur moyenne) devaient être handicapées pour la deuxième en cas de dépendance didactique. Après un gros travail (que je repris plus tard avec Mme FRANCHI-ZANETACCHI [30], je m'aperçus

- que très peu de corrélations "leçon I - leçon J" étaient significatives : il n'y en avait guère plus que ce que le seuil choisi laissait espérer si toutes les leçons avaient été indépendantes (8 % au seuil de 5 %),

- que l'essentiel des variations s'exprimait par les taux d'abstentions.

- mais que la variance inter-classe était significativement faible, c'est-à-dire que les résultats variaient de façon assez semblable d'une façon à une autre dans **toutes les classes.**

Deux dépendances seulement pouvaient être déclarées observées :

- l'une liait entre elles les leçons qui utilisaient les mêmes procédés de schématisation,
- l'autre :liait **NÉGATIVEMENT** une application d'une notion et- sa réapplication : la seconde application était d'autant mieux réussie que la première était ratée.

Ces deux derniers résultats m'apparurent comme la preuve que les maîtres manipulaient les difficultés des **exercices** à volonté, par exemple en fonction de la nouveauté des propositions que je leur faisais, ou bien pour maintenir une certaine réussite dans la classe. Mais cette transgression des conditions de l'expérience ne m'apparut pas tout de suite comme la marque qu'une autre règle plus importante s'imposait à eux ; ce n'est que beaucoup plus tard que je parvins à mieux distinguer ce qui relevait de leur arbitraire, ou de leur personnalité de ce qui faisait l'objet de mes observations. En tout cas, j'en déduisis qu'il fallait abandonner l'espoir d'utiliser cette méthode d'analyse globale statistique sur un champ aussi vaste tant que le détail des processus d'enseignement ne serait pas mieux connu. Ne pouvant conclure sur la valeur des choix didactiques que j'avais faits, même les plus systématiques, je crus mes résultats sans valeur et je renonçai à les publier.

3 Étude des motivations et du sens.

Pour cela les leçons elles-mêmes devaient- faire l'objet d'une refonte. D'ailleurs l'introduction des notions nouvelles et du formalisme faisait craquer les méthodes classiques d'enseignement et leur justification. Les méthodes traditionnelles telles quelles ou reformulées par DIENES, permettaient bien d'obtenir certains comportements de la part des élèves- mais les maîtres ne pouvant plus s'appuyer sur un lot culturel d'exercices collaient aux définitions formelles et/ou aux manuels et n'étaient plus en mesure de leur donner de façon économique un sens correct.

Je commençai donc à reprendre tous mes objectifs d'enseignement

- en me demandant à **chaque** instant : "**pourquoi** l'élève fait-il cela ? Que peut-il lui arriver s'il **ne** le fait pas, qui **va** le gêner et aussi l'orienter vers **une autre** manière **de**

répondre, quel sens aura cette réponse si **on la** lui fournit **toute** faite, **que peut-on gagner** à ce qu'il cherche lui-même **son adaptation au problème ?**

– en **cherchant** quelles relations **au** milieu **pouvaient** le mieux **donner une adéquation, une motivation** et **un** sens correct aux connaissances qu'il s'agissait d'enseigner.

– et en observant à l'aide des mêmes instruments la forme que prenaient ces connaissances dans les réponses des élèves.

Pourquoi par exemple un élève écrirait-il "=" entre deux écritures ? Il faudrait qu'il dispose de deux manières "a" et "b" de désigner une même chose, comme 3 et 2+1 par exemple ; et que ces deux écritures lui soient assez familières sinon ce signe ne serait plus fonctionnellement symétrique (ce serait le signe d'une attribution ou d'une définition). Mais alors pour-quoi écrire cette égalité si on connaît déjà les renseignements qu'elle apporte ? Ce ne peut être que pour le dire à quelqu'un d'autre, et quelqu'un qui l'ignore (et pour qui ce sera en effet une attribution).

Il faudrait que l'élève soit obligé de révéler à un autre que ce que d'autres appellent "a" n'est autre que ce qu'il connaît bien déjà sous le nom de "a".

Il faut donc un premier' groupe social dans lequel quelque chose s'appelle "a" et un autre dans lequel cette même chose s'appelle "b", puis qu'un membre de ces groupes ait besoin soudain EN L'ABSENCE D'UN RÉFÉRENT de désigner ou de demander cette chose à un membre de l'autre groupe. L'in-formation "a=b" est la réponse qui dénoue cette situation et seul peut la donner un traducteur, qui connaît bien les deux langues, (mais qui n'aurait pas eu sans ce problème l'occasion d'écrire la formule qui serait ainsi restée implicite). Pour que la situation soit comprise et donne du sens au message il faut qu'elle soit susceptible de se produire régulièrement. De plus, pour que le signe "=" puisse être doté d'un signifié il faut que son apparition ne soit pas automatique entre deux noms de choses et par conséquent que d'autres symboles relationnels

constituent un paradigme à " $a=b$ ", par **exemple** " $a / = b$ " ou " $a < b$ ".

Bien sûr il n'est pas nécessaire de vivre personnellement **de façon** répétée cette situation **de traduction pour** en faire l'expérience mentale et c'est pourquoi il est possible "d'expliquer" verbalement le sens du signe "égale" à un élève, ou de lui suggérer par un inventaire exemplaire des occasions de le mettre, ou simplement en exigeant qu'il le mette quand on le lui dit, pour qu'il en prenne l'habitude.

Ces questions : "pourquoi l'enfant ferait-il cela, est-ce une raison valable pour lui ? Et du point de vue du savoir ?" Et la tentative d'y répondre par l'agencement des rapports directs de l'élève avec un milieu physique et social va être le moteur de toute une série à partir de 1966.

4 Cadre théorique.

En 1972, je propose à l'A.P.M. un petit texte [10] dans lequel, tirant les conséquences de ce mode d'approche, je propose un cadre théorique pour l'analyse et l'organisation des situations d'enseignement.

Outre l'évident souci de rationaliser la description des situations d'enseignement, ce texte montre deux tendances :

- d'une part, le rôle du maître est limité à la présentation et à la mise en scène des situations qui sont supposées produire d'elles-mêmes l'apprentissage, par adaptation de l'élève à un milieu physique ou social agencé de façon appropriée et spécifique,
- d'autre part, il est très nettement proposé de distinguer trois catégories de situations qui correspondent à des fonctionnements du savoir supposés différents et irréductibles **les uns** des autres.

Ce cadre doit permettre la recherche systématique des conditions motivantes pour la mise en oeuvre de chaque notion mathématique, leur classement et leur examen progressif.

Il peut s'appliquer aux situations d'enseignement les plus diverses et produit pour l'enseignant et le chercheur des gerbes de questions et de critiques mais en même temps, il ouvre des possibilités de concevoir des situations nouvelles en permettant de réutiliser des éléments de solutions connues (communications, preuves, etc...). Il permet aussi de hiérarchiser les questions à poser à l'expérience.

Cette possibilité va être exploitée avec toute une équipe de professeurs des écoles normales de la région, sur l'ensemble des notions enseignées dans les différents niveaux de l'école primaire :

- l'enseignement des opérations sur les entiers naturels [13]
- l'enseignement des probabilités [8]
- l'enseignement de la logique et l'introduction à l'écriture symbolique
- puis l'enseignement des rationnels et des décimaux (dont l'étude sera présentée plus loin)
- l'enseignement de la Géométrie [20]
- et à nouveau celui des nombres naturels et de la numération.

Il s'agit d'abord, sur la plupart des sujets, de concevoir des situations conformes au maximum d'exigences de motivations et ensuite de montrer qu'elles sont réalisables dans des classes et qu'elles provoquent bien les apprentissages attendus.

5 **Écoles** Jules Michelet de Talence

Très vite, il faut se rendre à l'évidence : les leçons sont très longues à mettre au point et souvent très complexes. Il faudra une école spéciale où les maîtres auront du temps pour discuter leur réalisation et accepteront a priori de se laisser observer.

La mise en place de ce projet prend 3 ans et les conditions obtenues vont renforcer dans un premier temps la mise entre parenthèse de l'action du maître et la centration sur l'élève et ses conditions d'apprentissage [32][38].

Cependant, le pari est gagné : oui, il est possible de réaliser des leçons en se fondant sur les considérations de motivation et d'épistémologie proposées dans la théorie, oui ces leçons fonctionnent, les enfants apprennent et ces apprentissages par adaptation les séduisent comme ils séduisent les observateurs et les maîtres aussi.

Enfin, la plupart des "situations" mises au point dans cette école, sont reprises dans de nouveaux textes pour l'enseignement, dans les manuels, dans les programmes, dans d'autres recherches... Cette production d'ingénierie ne cesse d'augmenter, de se transformer, de s'enrichir et de s'organiser.

6 Apprentissage par adaptation : Étude d'une leçon.

La réalisation d'une leçon soulève toujours autant de questions auxquelles il faut répondre, que cette réponse soit fournie pour une raison "scientifique" ou par un choix arbitraire plus ou moins rationnel. Mais quelles sont les questions qui méritent l'énorme investissement d'une expérience sérieuse ?

La question qui me parut alors la plus fondamentale fut la mise en évidence de l'influence des principales conditions d'adaptation nouvelles que je proposais (action, communication, validation) sur les apprentissages, en dehors de l'influence cognitive du maître (que j'appellerais aujourd'hui situations quasi-isolées).

Je commençais par l'étude des situations d'action et de ces modèles implicites qui s'y développeraient.

Pour cela je mets alors à l'étude une leçon, la course à vingt, qui, du point de vue scolaire, servait de base à un enseignement de la division pour de grands élèves et au cours de laquelle trois phases distinctes correspondaient bien aux trois **types** de conditions.

Avec MM. LAMARQUE et MAYSONNAVE [35.37] j'observe l'évolution des connaissances "implicites" des élèves et **la vitesse d'apparition de** certains "théorèmes". Je **compare**

cette vitesse à celle que je prévois à l'aide de divers modèles stochastiques d'apprentissage. Aucun de ceux qui conviennent pour la course à 7 ne convergent assez rapidement pour expliquer les progrès dans la course à 20, ces résultats vont dans le sens des thèses cognitives d'ARBIB et de NELSON contre celle des néobehavioristes (SUPPES).

Les changements de types de situations **d'apprentissage** semblent favoriser les acquisitions, cependant en présentant avec M. RESTÉS [41] une situation de communication dans une vingtaine de groupes d'élèves, nous mettons en évidence que la formulation des connaissances dans des circonstances non didactiques n'améliore pas leur acquisition.

La présentation dans dix classes de la leçon entière et l'étude de la phase de "validation" avec Mme LAMARQUE et MM. GUILLE-PHOTIN et ROL [36] nous convainc de la possibilité d'une reproduction très stable des effets de ces conditions qui laissent pourtant la plus grande liberté aux élèves. Une analyse statistique de ces comportements et des conditions qui les provoquent est donc envisageable. Elle est néanmoins extrêmement coûteuse et je me convaincs assez vite que les réponses probantes qu'elle peut apporter à des questions aussi générales seront très difficiles à communiquer aux maîtres.

7 Modélisation - prévision et expérience.

Il m'apparut important de m'assurer sur un exemple que la méthode expérimentale pouvait être utilisée. Il s'agissait de recueillir les résultats d'une classe, relativement à une tâche, puis de modéliser cette tâche et une autre assez différente mais comportant les mêmes paramètres afin de prévoir les résultats de cette classe sur cette nouvelle tâche.

Pour diverses raisons, j'ai choisi comme première tâche le calcul des multiplications de nombres entiers par la méthode actuellement utilisée en France (et due à FIBONACCI) la seconde étant le calcul par la méthode dite "per gelosia". Cette modélisation, assez simple [12] permettait de penser qu'il

pourrait y avoir intérêt avec certains élèves à préférer la seconde méthode. Tout changement culturel de cette importance étant très difficile, il était nécessaire d'établir les faits très sérieusement.

De plus, je trouvais intéressant, en même temps que l'on étudiait les moyens d'adapter les élèves à **la connaissance**, de montrer qu'on pouvait essayer d'adapter les connaissances aux élèves.

Il ne s'agissait bien sûr que de l'usage des procédures d'un même algorithme, mais je voyais des arguments formels qui me permettaient d'espérer traiter les théorèmes de mathématiques de manière semblable [13].

Les considérations d'ergonomie qui servaient de base à ces raisonnements commençaient à tenir une place importante dans mon analyse des situations d'enseignement. Leur exposé [14] permet de poser quelques questions fondamentales sur la méthodologie des modèles en didactique mais aussi sur les apprentissages eux-mêmes.

Je montai une préexpérience qui permit de déterminer la taille de l'échantillon :

Pour obtenir des effectifs d'erreurs suffisants, je dus présenter une épreuve assez longue à plus de 600 élèves (*) [23]. Je ne pus monter convenablement que la deuxième partie de l'expérience, mais la préexpérience permettait déjà d'observer les avantages annoncés ; détail troublant, les résultats étaient meilleurs que prévus ! Plusieurs années plus tard Y.M. BEAUJOUAN et H. BROUSSEAU [5] confirmèrent la tendance mais ils montrèrent aussi l'importance capitale de la position du maître vis-à-vis de l'expérience. Cette variable peut effacer complètement les facteurs purement ergonomiques (résultat bien connu). Je persiste à penser que ce genre de méthode est parfaitement utilisable dans les cas où l'intérêt de la question justifie une expérience de taille suffisante.

(*) **épreuve reprise dans le D.E.A de D. COQUIN**

Processus d'apprentissage des algorithmes de calcul numérique.

Les différents processus que j'ai conçus et étudiés visent tous à obtenir finalement que l'enfant utilise le **procédé qu'on veut** lui enseigner comme solution "**optimale**" - **du point de vue** de la fiabilité et de la rapidité d'exécution - d'un problème où la manipulation des informations mathématiques joue un rôle décisif. Il s'agit toujours pour l'enfant de remplacer une procédure par une autre.

Le fait de posséder plusieurs méthodes et de pouvoir éventuellement revenir à une décomposition archaïque des tâches à accomplir permet de leur donner du sens du fait que la situation qu'elles résolvent de façon fonctionnelle est la même.

L'apprentissage de la procédure de calcul rend nécessaire une véritable exploration de la structure mathématique des naturels car dans les deux exemples principaux traités il s'agit d'engendrer l'écriture de nombres assez grands de façon à pouvoir raisonner sur eux en abandonnant la représentation concrète des quantités.

Exemple 1 : $(\mathbb{N}, +)$ Il s'agit pour l'enfant d'indiquer le cardinal d'un ensemble (supérieur à 50) au moment où il ne connaît que quelques cardinaux inférieurs à 20. Il invente la partition et une écriture qui définit la somme de plusieurs nombres.

La recherche d'équivalences de sommes conduit en même temps à la découverte des propriétés de l'addition et à la mise en place d'un algorithme de plus en plus simple à mesure que le répertoire des propriétés et des théorèmes de base (tables) s'accroît et de plus en plus général à mesure que l'on applique à des nombres plus grands, ou à des bases différentes [15-17]-

Exemple 2 : (\mathbb{N}, \times) Pour indiquer le cardinal d'ensembles trop grands (plus de 400 objets) ou présentés de façon favorable (produits de classes équipotentes) l'enfant invente une écriture qui définit le produit de deux nombres).

La mise en ordre de ces produits, la recherche des équivalences conduit l'enfant à chercher l'écriture de N de ce produit. Dès la première tentative il y parvient par divers procédés (sommés, procédé à la russe...) qui vont se perfectionner (décomposition en sommes de produits connus, abandon du support concret, découverte du calcul sur les puissances) pour aboutir à une méthode standard (per gelosia ou à l'italienne suivant les capacités des enfants à calculer de tête).

Ces processus sont tels qu'à chaque instant la signification de l'algorithme est nécessaire pour son accomplissement U5].

9 La méthode "spirale"; progression didactique

Une certaine évolution se produit au cours de ces travaux dans ma conception des progressions, en grande partie à cause d'une meilleure connaissance des travaux de PIAGET mais aussi comme suite aux observations quotidiennes des leçons projetées.

La problématique de l'apprentissage par l'adaptation imposait de rechercher pour chaque activité proposée à l'élève, qu'elle provoque chez lui la création d'une connaissance visée en réponse à ces circonstances. Il est rarement possible d'obtenir d'un coup, dans ces conditions, un savoir correct, achevé et définitif. Au contraire, cette connaissance est le plus souvent locale, particulière et de plus, liée indûment, par les circonstances choisies, à d'autres connaissances, elles aussi provisoires et incorrectes. Elle doit donc évoluer afin de s'inscrire dans une genèse visant à terme le savoir culturel correct.

Il ne m'était plus possible de supposer que l'on pouvait séparer le projet d'enseignement en deux tâches indépendantes : la construction d'un plan d'ensemble qui pouvait être simplement calqué sur l'organisation axiomatique des connaissances **mathématiques**, puis l'étude "**pédagogique**" des meilleures manières **d'enseigner chaque paragraphe du discours du savoir. A moins**, comme DIENES et peut-être un instant PIAGET, de croire à

une miraculeuse unicité formelle entre la **métamathématique**, les **mathématiques**, l'épistémologie, la **psychologie** cognitive, la psychologie génétique et la didactique, qui aurait permis **au plan bourbachique de servir à la fois de modèle** dans **tous** ces secteurs.

Nos observations sur notre processus **d'enseignement** de la multiplication montraient :

- que les acquisitions faites sur la base des découvertes des enfants étaient un peu plus lentes que leurs acquisitions par les méthodes classiques, mais qu'elles étaient mieux comprises et plus sûres, pour une proportion plus grande d'enfants,
- mais qu'elles ne mettaient pas l'enfant à l'abri des pertes de sens par conditionnement ou par "autoconditionnement",
- surtout qu'elles pouvaient résister très fortement aux tentatives ultérieures de modification, même dans des conditions très favorables, à cause justement de leur caractère personnel et bien adapté et de l'augmentation des occasions d'apprentissage,
- et aussi que les dépendances entre les acquisitions n'apparaissent toujours pas clairement.

Adaptation aux possibilités de l'enfant et habitude de l'enfant de s'adapter aux situations d'une part, adaptation au projet social et aux connaissances visées d'autre part. Comment concilier ces deux axes d'adaptation ?

Une représentation métaphorique en vogue consistait à envisager la progression de l'élève comme une spirale ; les différents concepts à acquérir étaient représentés par des axes issus de l'origine, censés porter les états successifs des connaissances des élèves. Une spire représentait une séquence d'enseignement plus ou moins longue, au cours de laquelle les concepts visés étaient rencontrés dans un état encore imparfait ; mais polir chacun d'eux, elle permettait un petit progrès et l'accès à la spire suivante. Cette métaphore servait à dissimuler les divergences entre ceux qui espéraient pouvoir obtenir l'apprentissage par des pas aussi petits qu'il est nécessaire et ceux qui pensaient que comme pour les stades piagétien, des étapes et des mûrissements sont indispensables.

Les contradictions réapparaissent dès lors qu'il s'agissait **d'évaluer** les résultats de l'enseignement ; l'évaluation des étapes **intermédiaires dans la théorie des petits pas impliquant une théorie de l'acquisition "fragmentaire", et donc une hypothèse 'épistémologique sur la "fragmentation". Les instruments classiques** de cette évaluation, telle la taxonomie de BLOOM [3] et les modèles de GUILFORD et d'AUSUBÉL) n'ont jamais reçu de confirmation expérimentale. Les réactions de l'exigence d'évaluation formelle sur la pratique des enseignants en fonction des théories didactiques et des théories d'apprentissage en vogue pouvaient être anticipées à partir de ces remarques. Cette étude [19] constitue ma première tentative d'analyse systémique.

Un espoir un peu insensé, né sans doute d'une confiance excessive dans le projet piagétien, faisait agir certains pédagogues à l'époque, comme s'il existait pour chaque concept une genèse naturelle, obligatoire, universelle, unique et peut-être inéluctable si elle n'était pas contrariée. Il m'apparut au contraire qu'en même temps qu'on devait chercher la ou les genèses possibles, il fallait déterminer les conditions qui présidaient à leur mise en place et montrer leur caractère de nécessité. Ce qui impliquait non seulement des observations des comportements des élèves dans des circonstances variées, mais aussi une prise en charge de l'ensemble de ces circonstances et de leurs -effets PREVISIBLES sur les adaptations. Cette position conduit à déterminer de nouveaux objets d'études [24].

10 Méthodologie : la méthode "spirale" dans la recherche.

Ce type de travaux devient très vite extrêmement complexe et très difficile à rapporter.

La préparation de chaque leçon d'un processus qui peut en comporter plus de trente, peut durer de 20 à 60 heures et plus, étalées sur plusieurs années. Elle fait intervenir d'abord un très grand nombre de considérations dont toutes ne sont pas de simple bon sens, bien établies ou liées aux hypothèses de la théorie, puis d'une année à l'autre, les observations et les réactions du maître et des enfants.

Le compte rendu de ces réflexions, auxquelles participent **des groupes** de personnes et celui des raisons des **choix** retenus deviennent très vite impossibles. L'équipe n'a pas le moyen à la fois :

- **de faire évoluer assez vite les points de vue pour produire des** leçons originales, solides du **point de vue de** leur conception théorique, assurées par des expérimentations répétées et communicables aux maîtres

- et de décrire minutieusement les étapes et les raisons de cette évolution. A l'époque, ce genre de réflexion "théorique a priori", sur les dispositifs d'enseignement, passait très mal. Seuls les comportements d'élèves paraissaient probants et intéressants.

C'est vers cette époque (1976) que P. GRÉCO qui suivait avec sympathie nos réflexions, commença à émettre l'hypothèse que le nombre de variables qu'il convenait de manipuler était trop grand pour être maîtrisé et que ces études étaient irrémédiablement condamnées à rester dans le domaine de l'innovation et de l'observation.

Pourtant, chaque réalisation et chaque observation de leçon sont l'occasion de mettre à l'épreuve les conceptions théoriques et la technologie didactique qui s'y attache, les méthodes d'étude et d'analyse, les résultats expérimentaux déjà obtenus et la formulation pour les maîtres des propositions d'enseignement.

Les conceptions théoriques se précisent et se complexifient rapidement, conduisant à des questions qui, bien que clairement posées, ne peuvent être étudiées indépendamment les unes des autres, parce que l'on ne peut entreprendre autant d'expériences qu'il le faudrait. La principale difficulté vient de ce qu'à chaque instant, il vaut mieux tirer le meilleur parti **pédagogique** des actions en cours que de faire un choix pour des raisons de recherche alors que la qualité des résultats de l'enseignement serait douteuse. Nous donnerons un exemple de cette imbrication des problèmes dans notre étude sur les **(décimaux)**. Nous appelons "spirale" cette méthode de planification

des recherches qui se différencie d'un simple pragmatisme, par la prise en charge, à chaque étape, des réflexions spécifiques à chacun des axes : le long de chaque axe, la filiation des choix et des idées doit rester nette et scientifique - bien qu'adaptée à chaque étape - aux nécessités et aux contingences de l'observation.

11. Les probabilités et l'idée de hasard.

Du point de vue de l'enseignement primaire, le calcul des probabilités est à l'opposé du calcul numérique élémentaire. Certes, plusieurs novateurs tentent de s'appuyer sur l'axiomatisation récente de ce domaine pour introduire un enseignement précoce très souhaitable - de cette notion. Mais les traces des difficultés historiques trop récentes, accréditent l'idée qu'une genèse des modèles probabilistes est incontournable. Certes, on peut faire faire des règles de trois aux enfants en assimilant la proportion dans un ensemble des objets d'une certaine classe, la fréquence d'apparition d'un évènement dans une suite d'expériences et sa probabilité dans une expérience à venir. Mais quel intérêt cela a-t-il si, devant une situation réelle, ils ne peuvent faire aucune conjecture utile et aucune anticipation correcte ? Nous avons entrepris depuis, une étude épistémologique [9] et quelques expériences simples. Deux ont montré que les enfants étaient sensibles 'à des différences de probabilités et observaient les distributions de fréquences mais qu'ils les utilisaient mal, en fonction de raisonnements faux [8] [26]. Après la recherche d'une situation fondamentale qui consistait à déterminer. si deux urnes donnaient une boule blanche avec des probabilités différentes, nous avons réalisé une suite de 31 leçons où les enfants progressaient par une dialectique entre des hypothèses sur le contenu de la bouteille d'une part, les prévisions sur ce qui devait sortir des urnes d'une autre part, et enfin de la lecture et la comparaison des résultats passés [44]. Là, les enfants ont paru dégager de façon correcte, **la notion de probabilité, de fréquence et de convergence en probabilités.**

C'est du moins **ce que l'observation clinique de leur comportement collectif laissait voir.**

Mon test, très bref et certainement beaucoup trop sévère, proposé aux deux classes expérimentales et à un groupe témoin, ne mit en évidence des différences **significatives que** sur très peu de questions, autres que celles qui étaient voisines de l'expérience. Naïveté ? Nous aurions voulu faire une interrogation clinique, mais nous n'avons pas eu le temps dans la période qui séparait la fin de l'expérience de la dispersion des élèves. Le bilan pédagogique était loin d'être négatif - y compris sur le calcul numérique ! - mais il aurait fallu, à l'époque, d'autres résultats et/ou d'autres moyens pour emporter la conviction.

Les résultats scientifiques, les connaissances nouvelles sur le développement cognitif des élèves furent assez maigres et l'avancement de la didactique ne pouvait guère être apprécié. Pourtant, j'y ai personnellement puisé la conviction qu'une réflexion épistémologique était indispensable, en même temps que l'étude de didactique, que les modèles faux spontanés des élèves devaient être attaqués et non contournés, qu'un travail de fixation culturelle et sociale était nécessaire aux élèves et donc que les trois dialectiques fondamentales ne suffisaient pas.

12 Étude de la création d'un code à l'école maternelle.

Depuis le début, l'idée que l'on pourrait faire l'économie d'une certaine verbalisation préalable des acquisitions me tentait. Était-il possible de susciter l'apparition de modèles implicites par des situations d'action, puis, au moment où ils seraient établis de façon fonctionnelle et stable, de rendre nécessaire leur "désignation" en même temps que leur identification par des situations de communication ?

Ce n'était pas une hypothèse bien nouvelle et elle tentait régulièrement beaucoup de pédagogues depuis le **développement** du rôle de la formalisation dans les sciences. C. GATTÉGNO a poursuivi cette voie depuis 1947 et a produit encore récemment

des **propositions** remarquables.

Il ne s'agissait pas, pour nous, **de reprendre la vieille voie** empiriste sensualiste dénoncée par **AEBLI** [1]. J'étudiai **d'abord avec** H. RATSIMBA-RAJOHN, **les procédés** ostensifs d'introduction des notions nouvelles [40] dans les classes et dans les manuels. Nous avons montré leur caractère illusoire.

Par contre, le fait de pouvoir proposer aux élèves des situations d'action susceptibles de produire des conceptions et des modèles non verbalisés puis "indépendamment" (après, avant -ou en même temps) des situations de communication ou d'expression susceptibles de susciter les formulations et la création ou l'appropriation de nouveaux codes laissait envisager des dispositifs de recherche et de moyens d'enseignement nouveaux :

- "définir" ou donner du sens à un concept sans être prisonnier de la formulation qu'en donne le maître à l'élève et qui repose sur une "construction" préalable, culturelle ou didactique
- étudier directement les propriétés de modèle d'une représentation quelconque, graphique,... métaphore, formelle, etc...
- examiner les différentes formes d'association et d'accommodation des deux types d'introduction : action et formulation dans divers ordres d'introduction : par exemple, prise de contrôle du sens par la formulation et la reformulation ou au contraire par l'expérience et l'action ; etc...

La confrontation de la logique du discours avec celle de la situation promettait d'être intéressante. J'essayai alors d'appliquer ces moyens didactiques à l'enseignement des mathématiques à des enfants sourds, (**avec** l'aide d'un jeune professeur de l'I.N.J.S de GRADIGNAN); sans échec mais sans succès évident car la tentation ostensive était **trop** forte et les difficultés de communication aux élèves des règles des situations retenues conduisirent le professeur à rechercher le secours direct des moyens visuels.

Presque malgré moi, j'ai dû étudier cette question h propos de l'enseignement à l'école maternelle dès 1974. J'avais eu l'imprudence de publier avec L. FÉLIX et Y. LAMOUREUX le résultat d'expériences d'introduction des schémas et des symboles à l'école maternelle. Ce texte (dû en grande partie à L. FÉLIX) avait provoqué chez les maîtres de la région, un usage assez immodéré de liens, de schémas et surtout des symboles. Il était temps de faire des expériences précises et d'observer ce que ces hypothèses pouvaient apporter à la connaissance de la genèse de la fonction symbolique chez l'enfant, et à la didactique de la logique).

L'étude débute en 1976 par la conception d'un processus fondamental que j'étudiai d'abord avec J.M DIGNEAU [29], procédé qui prétend faire voir ce qu'il définit ou introduit. Ce procédé s'appuie sur l'évidence de la correspondance entre un concept et un objet maternel ou une situation. Exemple : montrer un carré pour définir le carré, puis avec j. PERES [39]. Le processus suivait le schéma classique : "action" puis "formulation", puis "validation" et "institutionnalisation" et l'observation clinique répétée de mêmes phénomènes, pour la première fois, dans leur intégralité, permit de rassembler, sur ce problème des résultats très nombreux et très importants pour moi^(*). Après une phase de familiarisation avec une trentaine d'objets et avec leur nom, les enfants sont invités à se souvenir de ceux d'entre eux que l'on a placés, la veille, dans une boîte. Le jeu réussit très bien, plusieurs fois, avec trois ou quatre objets, quand, tout d'un coup, la maîtresse en place une douzaine dans la boîte. les enfants voient qu'ils ne vont pas réussir. Ils sont invités néanmoins à essayer et à chercher une solution. Ce "saut informationnel" qui disqualifie une méthode ancienne (la mémoire) doit provoquer et donner du sens à "l'intention" d'une autre méthode (le dessin de la collection).

(*) Grâce, en particulier, aux observations minutieuses de G.JOUSSON et à la collaboration des maîtresses de l'école maternelle.

13 Le saut informationnel.

Le saut informationnel consiste, **après avoir trouvé une situation fondamentale faisant "fonctionner" une notion, à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances antérieures des élèves permettent d'élaborer des stratégies efficaces et** d'explorer les caractéristiques de la situation, contraintes, objectifs, règlement..., puis sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir. De nouvelles stratégies doivent être établies qui demandent la construction de nouvelles connaissances. Les nouvelles valeurs sont choisies de façon à rendre maximum le rapport entre l'efficacité de la nouvelle connaissance par rapport à ses concurrentes. Le saut peut fonctionner à condition que la deuxième situation soit comprise et acceptée. Elle ne peut l'être que par référence à la première. Avant le transfert de solutions ou son rejet, se pose celui du transfert des questions ou la reconnaissance des situations qui le permettent. Une des hypothèses fortes de nos travaux avance que la connaissance d'une notion prend une partie de son sens dans celle des situations où elle intervient comme solution. Mais on peut supposer aussi que la compréhension d'une question n'est possible que si l'élève imagine au moins quelque manière d'y répondre. Ce qui rend impossible le saut informationnel ; J.M. DIGNEAU fit l'hypothèse que les enfants -pouvaient ne .;donner aucun sens au même jeu, dès lors qu'ils ne pouvaient pas envisager de le résoudre. Et de fait, le saut était d'importance. Il fallait que les enfants imaginent de dessiner chacun de façon spécifique, tous les objets présents dans la boîte et qu'ensuite, ils interprètent leur propre message, reconnaissent leurs dessins, identifient les objets... Comment pouvaient-ils anticiper les conditions d'une telle activité, faire un diagnostic des erreurs, encore plus complexe que la solution elle-même, et se corriger en fonction des contraintes d'une tâche qu'ils n'ont jamais accomplie et que l'on se refuse à leur montrer, même une seule fois ? La thèse de J.M. DIGNEAU est correcte, **mais il est 'un fait, que chaque année, pendant plus de 10 ans, les** enfants ont franchi le pas, au grand étonnement des maîtres eux-mêmes.

Pour peu que des éléments de solution figurent dans la culture, que la situation permette les expériences et les ajustements et que l'attente sereine mais "active" des maîtres soit. suffisante, les enfants peuvent maîtriser des situations beaucoup plus ouvertes qu'on ne croit.

Le saut informationnel est possible dans un intervalle suffisant pour permettre, dans de nombreux cas, les dialectiques situation/connaissances et connaissance ancienne/connaissance nouvelle envisagées dans le cadre théorique [14][21].

L'étude de la mémorisation des répertoires montra déjà de grandes différences entre les enfants. Assez rapidement, les enfants adaptaient leurs comportements à la question posée et désignaient des "listes" d'objets à l'aide de listes de dessins où devaient intervenir les traits distinctifs mis en oeuvre pour identifier les objets et leur représentation plus ou moins analogique, certains traits ne pouvant absolument pas être représentés de façon "analogique" (la matière, par exemple).

La mise au point "naturelle" des procédures qui avaient précédemment fait l'objet de tant d'exercices formels inintelligibles pour les enfants (représentation de l'appartenance, d'une bijection; ...) montrait que nous avons résolu le problème didactique initial. J. PERES observa alors avec une grande minutie le fonctionnement des différents types de situations et leur influence sur l'apprentis-sage [39]

- très faible influence sur la phase d'action individuelle et il l'explique
- très grande influence de la communication, notamment du rôle de récepteur et du changement de rôle
- importance de la suspension de la pratique communicative et du passage aux débats de validation.

Il décrit surtout la nature même de ces évolutions et l'effet de situations particulières sur la structuration logique par les enfants de l'ensemble qu'ils manipulent.

Dans la construction du code se révèlent de façon fine, les modes **d'acquisition** prélogique de l'enfant tels que les décrit A. WERMUS [43]. Mais l'analyse des centrations sur les composantes contextuelles des prédicats amalgamés qui déterminent les objets, celle des décantations qui s'en suivent et celle de leurs relations avec le développement des préfoncteurs logiques, s'éclaire par l'effet des conditions que nous pouvons imposer aux collections : les traits distinctifs et les traits oppositifs apparaissent dans des stratégies différentes et paraissent avec des propriétés logiques différentes. Ce sujet est actuellement à l'étude.

14 Méthodologie de l'observation des faits didactiques.

Les problèmes de méthodologie paraissaient alors en bonne voie de solution. Nous pouvions décrire les divers aspects de l'activité didactique à l'aide d'un grand nombre de méthodes appropriées.

Celles qui tendaient à décrire et analyser les résultats obtenus par les élèves étaient celles qui se développaient le plus rapidement : les analyses statistiques diverses et les observations cliniques des élèves, les analyses génétiques (qui consistent à mettre en évidence des décalages importants dans le moment de l'acquisition des différents aspects d'une notion) permettent d'identifier les difficultés auxquelles la didactique doit faire face.

Mais il est déjà clair à cette époque (1970 à 1979) que ce sont les interactions maître-élève-milieu relatives au savoir qui doivent être l'objet de l'étude et non pas seulement le comportement "terminal" des élèves.

Divers procédés dérivés de la linguistique, notamment l'analyse du discours, paraissaient d'autant plus prometteurs que l'approche définie en 1970 (*) donnait la possibilité d'organiser les situations de communications appropriées (maître-élève mais aussi élève-élève ou maître-maître). Certaines de ces situations de communications ont été beaucoup réutilisées, aussi bien pour l'enseignement que pour la recherche [34].

(*) cf. annexe

Un exemple permettra de comprendre la méthode. 11 s'agissait de savoir dans quelle mesure la connaissance des événements qui se sont déroulés dans une classe est utile pour la gestion d'une activité didactique par le maître

et si ces événements sont conscients et analysables à l'aide des concepts professionnels utilisés spontanément par les maîtres. Le dispositif consistait à combiner des successions de maîtres dans une même classe : même maître ou maîtres différents, avec ou sans communication d'informations entre eux... L'observation des effets de ces variables sur la conduite des leçons était facilitée par la comparaison de classes parallèles.

L'enregistrement vidéo des classes et des communications entre maîtres devait faciliter l'analyse de ce qui retenait l'attention de l'enseignant et de ce qui lui échappait. Ce travail ne put être achevé à cause de l'inadéquation des méthodes d'analyse envisagées qui entraînaient un travail énorme. Il apparut pourtant clairement qu'avoir affaire au même enseignant au cours de l'apprentissage d'une même notion joue un rôle important dans la relation didactique.

Cette influence est d'autant plus importante que le maître a :

- un meilleur souvenir des faits passés,
 - une exigence plus forte à l'égard des élèves quant à ces souvenirs
 - ce qui conduit à donner des statuts différents aux événements de la classe
- une meilleure cohérence et une meilleure régularité dans le traitement des informations qui surgissent de l'activité de la classe. Cette influence n'est pas uniformément positive et n'est pas une fonction croissante des variables énumérées ci-dessus. Il semble que certains équilibres soient favorables entre : ce qui est introduit comme nouveauté et ce qui est rappelé, ce qui est régulier et ce qui est aléatoire ou irrégulier, ce qui doit être appris et ce qui peut être oublié...
- ce qui doit être reconnu comme une **application** et ce qui doit être analysé comme un objet indépendant, etc...

Nous avons bien rodé à l'école Jules Michelet les méthodes d'expérimentation et d'observation des classes. Les phénomènes **paraissaient** bien reproductibles sous la condition de **donner** une description des obligations créées **par la situation**, assez précise **pour** qu'il soit possible de les interpréter en termes de jeu didactique [33]. Si bien que je pus faire vers 1977 un tour d'horizon relativement optimiste - encore bien incomplet [18] -

15 La dépendance entre les activités didactiques.

Le seul point vraiment noir qui subsistait et qui était pourtant fondamental, c'était celui de la liaison entre les apprentissages. Certes, des méthodes statistiques existaient et l'analyse factorielle des correspondances réveillait des espoirs déçus par l'analyse hiérarchique à la GUTTMANN. Plusieurs d'entre nous s'étaient attelés à la tâche d'adapter ces analyses aux problèmes spécifiques de la didactique. Dans la problématique exposée plus haut, j'étudiai divers processus à l'aide de divers coefficients de dépendance, notamment les processus d'apprentissage du calcul numérique avec G. VINRICH en utilisant le coefficient d'implication de J. LOEVINGER [42] auquel, par la suite, R. GRAS parvint à donner une distribution théorique, base de l'analyse implicative qu'il continue à développer [31].

Diverses méthodes d'agrégation de données étaient utilisées concurremment. Cependant, plusieurs circonstances nous laissaient insatisfaits.

a) Les dépendances prévues et utilisées par les maîtres ou par les créateurs de méthodes ainsi que celles qui paraissaient les plus crédibles, n'étaient guère attestées dans nos observations.

Pour en avoir le coeur net, nous avons utilisé avec D. COQUIN, une hiérarchie d'objectifs très précise, bien opérationnalisée [24], et nous avons soumis les liens les plus "rationnels" à l'expérience, avec, pour résultats des indépendances très surprenantes.

b) Les dépendances que nous **observions grâce au recueil de tous les résultats de tous les élèves de l'école Michelet, se**

pliaient mal à nos tentatives d'explication et ne paraissaient pas régulières. Surtout, elles ne semblaient pas très liées par le contenu cognitif et donc par les facteurs proprement didactiques, ce qui était pour nous très décevant.

c) Les liaisons assez bien établies par des expériences convaincantes comme celles qu'a attestées F. PLUVINAGE avec sa méthode d'ANAFAC des questionnaires à modalités, restent toujours par définition très locales. Ces résultats sont précieux mais portent sur les liaisons entre les comportements d'élèves et ne se proposent pas de donner d'indications sur les circonstances didactiques elles-mêmes.

d) Avec A. BESSOT et F. RICHARD, nous avons organisé une expérience où, après avoir identifié les variables de la situation fondamentale, nous avons montré que l'action qu'elles avaient sur les apprentissages, était conforme aux calculs. Là aussi, la méthode marche, mais elle demande de grands efforts pour des résultats très locaux.

CONCLUSION

La théorisation didactique paraît alors en bonne voie. Un colloque réunit à BORDEAUX en 1975 les chercheurs intéressés à traiter ce champ comme un domaine scientifique [45] qu'ils suggèrent de désigner comme "épistémologie expérimentale". Sur ma proposition, nous préférons assumer l'étiquette un peu méprisée de "didactique" pour montrer notre désir d'améliorer l'enseignement par le moyen de ce que nous pouvons en comprendre.

Il est très clair cependant que

- l'objet de la didactique, c'est-à-dire la part des phénomènes d'enseignement qu'elle se propose de théoriser,
- les concepts fondamentaux qui doivent permettre de décrire cet objet et de formuler les questions pertinentes auxquelles il répond,
- la **méthode de preuve** spécifique attachée **à ces questions** restent à identifier et à clarifier.

Ces questions se posent alors par le biais de la reproductibilité : ce que la didactique peut prendre en charge de décrire, c'est ce qu'elle peut prétendre voir se reproduire sous certaines conditions qu'elle explicite. Mais qu'est-ce que la reproductibilité didactique ? La répétition des observations et des résultats ? Mais si tout le système est organisé pour la reproduction d'un phénomène, peut-on encore l'analyser comme un système physique non intentionnel ?

Nous n'allons pas raconter comment l'étude des sauts informationnels conduit à celle des obstacles épistémologiques, comment celle de la dépendance conduit à celle de la reproductibilité ni comment l'observation des échecs électifs amena à l'étude du contrat didactique et des phénomènes qui lui sont liés. Il est préférable de présenter directement l'état actuel des concepts fondamentaux et de leur articulation réciproque.

Cependant, la théorie et la mise en évidence des relations envisagées entre ses éléments concrètement significatifs et les observables, ne seront exposées qu'au chapitre 3, car il nous apparaît indispensable de montrer d'abord de façon précise comment, en se centrant sur la notion mathématique ou sur l'élève, il est possible d'accéder à ce que les professeurs appellent couramment la réalité de l'enseignement grâce à ces concepts fondamentaux.

BIBLIOGRAPHIE DE L'INTRODUCTION

- (1) **AEBLI H. -:**
Didactique psychologique. Delachaux et Niestlé **1966.**
- (2) BERTHELOT R.
La multiplication. I.R.E.M. de Bordeaux 1985.
- (3) BLOOM :
Taxonomie des objectifs pédagogiques. Presses de l'Université du Québec.
Traduction en français 1975.
- (4) BRIAND J., TEULE-SENSACQ P. et VINRICH G. : La
division. I.R.E.M. de Bordeaux 1985.
- (5) BROUSSEAU H. et BEAUJOUAN Y. :
Étude des phénomènes liés à un changement de méthode de calcul.
Mémoire de maîtrise de Psychologie. Université de Tours 1982.
- (6) BROUSSEAU G.
Mathématiques du cours préparatoire et école maternelle grande section.
Dunod 1969.

BROUSSEAU G.
Les 30 leçons du C.P. au C.M. I.R.E.M. de Bordeaux 1970.
- (7) BROUSSEAU G.
L'enseignement des probabilités au niveau élémentaire. Cahier 11.
I.R.E.M. de Bordeaux 1972.
- (9) BROUSSEAU G. : Activités pour la formation des maîtres en
probabilités. Cahier 11. I.R.E.M. de Bordeaux.
- (10) BROUSSEAU G. : Processus de mathématisation. Bulletin de
l'A.P.M.E.P. 1972.
- (11) BROUSSEAU G. : L'apprentissage des opérations dans les entiers
naturels. Cahier 13 I.R.E.M. de Bordeaux 1973.

- (12) **BROUSSEAU G. Peut-on améliorer le calcul des nombres naturels ? Actes du Congrès International des Sciences de l'Éducation. Paris 1973.**
- (13) BROUSSEAU G.
Eudes sur l'apprentissage des algorithmes. "Notes sur l'apprentis-sage des opérations dans les naturels". Cahier 13. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (14) BROUSSEAU G. Recherches sur l'enseignement du calcul numérique. Séminaire de Recherche INRD-P-SERP. Orléans 1973.
- (15) BROUSSEAU G.
Étude sur l'apprentissage des algorithmes. "Construction de formules dans (N, X) au C.E.1. et dans $(N, +)$ au C.P. Cahier 13. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (16) BROUSSEAU G. et Collaborateurs : Recherches sur l'analyse du discours. Cahier 15. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (17) BROUSSEAU G. et GABINSKI P. : Étude sur la théorie des automates et son application à la didactique des mathématiques. I.R.E.M. de Bordeaux 1976.
- (18) BROUSSEAU G. L'observation des activités didactiques. Revue française de pédagogie 1978.
- (19) BROUSSEAU G. Évaluation et théories de l'apprentissage en situations scolaires. Proceedings of the ICME V. Campinas 1979.
- (20) BROUSSEAU G.
Étude de questions d'enseignement ; un exemple : la géométrie. Compte rendu du séminaire de didactique des mathématiques de l'IMAG n°45 Grenoble 1983.
- (21) BROUSSEAU G.
Les obstacles épistémologiques et les problèmes en didactique en mathématiques. Revue recherche en didactique des mathématiques **1983.**

- (22) BROUSSEAU G. :
Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques. Journal fur Mathematik Didaktik 1983.
- (23) **COQUIN D. : Algorithmes et sous algorithmes. Mémoire de D.E.A. I.R.E.M. de Bordeaux 1978.**
- (24) COQUIN D. :
 Décomposition et synthèse d'une notion mathématique en vue de son enseignement et ordre d'acquisition. Thèse de 3^ocycle. I.R.E.M. de Bordeaux 1982.
- (25) DERAMECOURT G., HOUZIAU F. : Enseignement de la mathématique au C.P. - CRDP 1969.
- (26) DERAMECOURT G. Étude des probabilités au C.E. Cahier 13. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (27) DERAMECOURT G. : L'addition au C.P. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (28) DERAMECOURT G. : La multiplication au C.E. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (29) DIGNEAU J.M. : Création d'un code à l'école maternelle, étude d'un saut informationnel. Mémoire de D.E.A.. I.R.E.M. de Bordeaux 1980.
- (30) FRANCHI-ZANNETTECCI M.P. : La construction de séquences d'activités d'enseignement en mathématique. Mémoire de D.E.A. I.R.E.M. de Bordeaux 1978.
- (31) GRAS R. :
 Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques. Thèse d'état. Université de Rennes 1979.
- (32) Groupe de Recherche sur l'Enseignement Élémentaire : Brochure de présentation du groupe scolaire Jules Michelet et du Centre **pour l'Observation** de l'I.R.E.M. de Bordeaux 1975.
- (33) KONE F. : Analyse de situations didactiques à l'aide de la théorie des jeux. Mémoire de D.E.A. I.R.E.M. de Bordeaux 1980.

- (34) LABORDE C. : **Langue** naturelle et écriture **symbolique**. **Thèse d'état**.
Université de Grenoble 1982.
- (35) LAMARQUE A.M. et G. :
Influence de diverses conditions didactiques sur la découverte stratégie par des enfants de 9 à 11 ans. Diplôme de psychologie scolaire. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (36) LAMARQUE A., GUILLE-PHOTIN G., ROL R. : Étude de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme dans l'expérience "Qui dira 20". Diplôme de psychologie scolaire. I.R.E.M. de Bordeaux 1975.
- (37) MAYSONNAVE J. :
Expérience d'apprentissage d'une stratégie pour la course à 7 par une série de parties contre un moniteur. Cahier 11. I.R.E.M. de Bordeaux 1972.
- (38) ORUS BAGUENA P. : Rapport sur l'école Jules Michelet. Brochure rédigée en espagnol 1986.
- (39) PERES J. :
Document pour les enseignants : construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle. I.R.E.M. de Bordeaux 1985.
- (40) RATSIMBA-RAJOHN H. :
Étude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité en vue de l'élaboration de situations didactiques. Thèse de 3^o cycle I.R.E.M. de Bordeaux 1981.
- (41) RESTES M. :
Étude de l'influence des communications sur les acquisitions dans des groupes d'enfants du C.M. 1^{ère} année. Diplôme de psychologie scolaire. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.

- (42) **VINRICH G.** Dépendances didactiques. Revue Mathématique et Sciences Humaines **1977**.
- (43) WERMUZ A. : Esquisse d'un modèle des activités cognitives. Université de Genève Section de psychologie. Vol. 32 n°3.4. 1978.
- (44) L'Enseignement des Probabilités et des Statistiques : Compte rendu de la 26ème rencontre de la CIEAEM. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (45) Actes du Colloque sur l'analyse de la didactique des mathématiques Bordeaux. I.R.E.M. de Bordeaux 1975.

CHAPITRE I

PROBLÈMES DE DIDACTIQUES CENTRES SUR UNE NOTION MATHÉMATIQUE ; L'ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX

- A
 - 1. L'enseignement des décimaux dans les années 60
 - 2. L'enseignement des décimaux dans les années 70
 - 3. Quelques problèmes de l'enseignement des décimaux

- B.
 - 1. Introduction
 - 2. Conception générale d'un processus d'enseignement
 - 3. Analyse du processus et de sa réalisation
 - 4. Analyse d'une situation : l'épaisseur des feuilles de papier
 - 5. Questions de didactique des décimaux
 - 6. Conclusions

Comparer, mesurer, reproduire des longueurs, des masses ou des volumes sont des activités considérées comme tout à fait fondamentales, et, en conséquence, elles doivent être apprises dans les premières années de la scolarité, tout de suite après celles qui consistent à classer, ranger, dénombrer ou reproduire des collections finies. Ces activités mettent en œuvre des êtres mathématiques, les *rationnels* ou les *rationnels décimaux*. En prenant en considération la structure mathématique qui les définit et en régit l'emploi, il est possible de réorganiser ces apprentissages autour d'un projet théorique dans lequel les acquisitions des élèves sont identifiées par les connaissances qui s'y révèlent, ordonnées et justifiées par la place que ces dernières tiennent actuellement dans le corps des connaissances scientifiques.

Or, c'est bien parce qu'il existe des pratiques sociales familières correspondantes et dont l'origine plonge dans la nuit des temps qu'on peut entreprendre un tel projet; car si les résultats paraissent clairs, les actions assurées, les méthodes évidentes, les propriétés utiles, ces activités sont souvent en réalité, à y bien réfléchir, d'une très grande complexité, ainsi d'ailleurs que les concepts, dits élémentaires, qui y sont engagés. Les rapports entre ces théories et ces pratiques restent très mystérieux dès lors qu'on veut les traduire en *comportements* des sujets qui accomplissent ces activités, en *modifications* de ceux qui les apprennent ou en *décisions* de ceux qui les enseignent.

C'est pourquoi l'objet de cette étude apparaîtra à certains excessivement présomptueux.

Il s'agit, en effet, d'étudier les conditions dans lesquelles ces comportements ou ces appropriations peuvent apparaître, ainsi que les rapports qu'entretiennent les conceptions mathématiques — dont ces comportements sont l'indice — avec certains caractères des *situations* qui les accompagnent.

Le nombre des variables auquel on peut s'attendre justifierait tous les pessimismes car un tel projet ne peut pas faire l'économie d'une *mise en expérience* de ces rapports,

selon une méthodologie éventuellement spécifique, pas plus que celle d'un investissement théorique initial.

De plus la finalité de ces observations est, bien entendu, de permettre une organisation et un contrôle de ces situations à des *fins d'enseignement*, ce qui nous conduit à essayer de repérer *le champ des choix possibles* plutôt qu'à nous borner à l'observation et à la comparaison des pratiques actuelles de l'enseignement des rationnels et des décimaux.

Notre texte s'alimente d'un ensemble d'activités et de recherches dans le champ ainsi découpé et qui ont pris naissance en 1974 au sein de l'IREM de Bordeaux (l'ensemble des personnes concernées par ce travail comprenant : les étudiants et les enseignants du 3^e cycle de didactique des Mathématiques, des instituteurs de l'école Michelet pour l'observation et les professeurs d'école normale de la région). Notre texte ne constitue pas un compte rendu de recherches et à fortiori d'une recherche unique.

Il nous a paru d'ailleurs nécessaire d'introduire le lecteur aux débats de didactique par une voie différente de la présentation académique habituelle des travaux scientifiques.

Nous avons commencé par l'analyse de curricula typiques des années 60 et 70 et de l'effet épistémologique de la réforme de 70 sur les conceptions des élèves et des maîtres relativement aux décimaux. Nous avons voulu faire cette première étude dans le langage et dans l'esprit qui étaient ceux des époques considérées, de façon à ménager au lecteur un accès familier à la fois à l'objet observé, aux phénomènes et aux débats, c'est-à-dire à la situation actuelle des problèmes abordés par la didactique des mathématiques.

Cette analyse sera suivie par l'examen des résultats et celui des alternatives ouvertes à cette méthode, par diverses théories de l'apprentissage de l'enseignement ou du développement.

Cet exemple introductif permettra donc aussi d'attester des phénomènes dont certains seront étudiés expérimentalement dans la suite du texte.

A un moment où un certain nombre d'États s'appêtent à adopter le système métrique, il m'a paru assez opportun d'examiner avec quelques détails à quel enseignement on est parvenu dans le pays qui le premier en a adopté l'usage.

Cette présentation ne va pas sans risques, en particulier celui de la confusion avec le discours pédagogique classique

en usage dans les échanges professionnels, ou avec les articles polémiques fondés seulement sur des opinions. On ne manquera pas de me reprocher de revenir à ce genre au moment même où nous manifestons notre désir d'installer la didactique comme champ scientifique.

Mais il ne faut pas se tromper sur ce mode de présentation : une telle analyse n'a été possible que par l'existence du travail expérimental évoqué plus haut et qui sera présenté dans la deuxième partie de cette étude. Quelques termes ou quelques idées anachroniques n'échapperont pas au lecteur averti.

Il faut qu'il soit clair, par exemple, que notre analyse un peu rapide de la position de Diénès, si elle s'appuie sur des observations assez longues, s'autorise surtout de l'existence d'une autre théorie des processus de genèse des concepts mathématiques. Cette intériorisation active et dialectique se substitue à l'intériorisation immédiate de Diénès pour amener le caractère interactif des connaissances que notre partie expérimentale aura pour but de faire fonctionner et d'observer.

« Dans les sciences plus qu'ailleurs on est amené à confondre la connaissance telle qu'on la transmet et la connaissance telle qu'on la crée ». Cette opinion de Bachelard(*) rend indispensable l'analyse historique et épistémologique de la notion de rationnel et de décimal. Celle-ci nous donnera des exemples de fonctionnement des concepts dans diverses situations et nous permettra d'en relever les caractéristiques et d'étudier celles qui donnaient leur signification aux notions. Nous identifierons principalement la nature des obstacles qui s'opposent à l'évolution des connaissances.

Il conviendra alors d'essayer de reconnaître ceux de ces obstacles qui sont constitutifs du concept et le type de situations qui leur sont associées.

Mais dans cette partie aussi seront engagés, comme dans la première, des instruments conceptuels déjà élaborés et non exposés préalablement. Divers projets de genèse du concept pourront être envisagés. L'étude *des possibilités de les réaliser* mettra en évidence les problèmes théoriques

(*) *Essai sur la connaissance approchée*, VRIN.

ou pratiques ainsi soulevés. Nous aboutirons alors à formuler des choix au sujet de la mise en expérience d'un processus didactique réalisant ce projet d'enseignement. Nous analyserons ensuite les enseignements qu'elle fournit sur les différentes questions posées.

Nous ne donnerons pas d'autre but à cette étude que de présenter l'enseignement des rationnels et des décimaux en tant qu'objet d'études et source de questions de didactique, mais nous discuterons en temps voulu des problèmes scientifiques ou méthodologiques qui s'imposent.

L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX DANS LES ANNEES 60 EN FRANCE :

Au début des années 60, les « nombres décimaux » ainsi que les « fractions ordinaires » très simples sont inscrits au programme des quatrième et cinquième années d'école élémentaire (CM1 : 9-10 ans et CM2 : 10-11 ans).

Description d'un curriculum :
Voici le résumé d'une méthode exposée dans un ouvrage très répandu depuis 1936 et qui présente bien des pratiques stables et courantes chez les maîtres de l'époque (arithmétique nouvelle au cours moyen de R. Jolly - Fernand Nathan).

La leçon d'introduction (p. 12, 6ème leçon : durée 1h) :
a) L'ouvrage évoque des mesurages de longueur avec un mètre pliant. L'enseignant les fera réaliser — à moins qu'il fasse lire le texte ou commenter les images seulement. On ne trouve aucun commentaire sur les difficultés pratiques de cette activité ni sur les particularités du dénombrement d'unités à l'aide d'une graduation.
b) Il énumère les « sous-multiples » du mètre — qui sont en réalité les « multiples » de la plus petite unité présentée : le millimètre.
c) Il fait écrire le résultat de cette opération sous la forme d'un « nombre décimal ». A cette occasion, le mot « entier » apparaît pour la première fois dans le cursus scolaire pour distinguer un « nombre » sans partie décimale, par opposition à « nombre décimal » qui comprend une partie entière,

une partie décimale et l'indication d'une unité — ainsi les nombres entiers ne sont pas des décimaux.

d) L'analyse de cette écriture — placée dans un tableau — n'est rien d'autre qu'un exercice familier de numération avec un changement de nom pour les têtes de colonnes.

e) Toutefois, ce changement de vocabulaire conduit à une nouveauté car la justification du nom de ces sous-unités se fait par référence à l'unité principale. Ainsi, au « groupement par dix » des études de numérations, se substitue une « division par dix » de la construction des graduations du mètre. On ne peut pas savoir si cette « division » s'effectue géométriquement, ni comment : il suffit sans doute que le résultat coïncide avec la division dans les naturels et cette partie n'est l'occasion d'aucune question, d'aucun problème, d'aucune action pour l'élève qui ne partage ni ne divise rien.

f) L'ouvrage donne quelques exemples d'emploi du mot « unité » — qui désigne ici l'*objet* matériel reporté — mais indique seulement par un titre : « changement d'unité » qu'il faut expliquer aux enfants comment faire des conversions d'unités.

g) En fait, le véritable contenu de la leçon est indiqué par les exercices écrits : recopier le tableau de numération et y placer des nombres, exprimer des longueurs données en mètres et en ses sous-multiples et « dessiner une droite » de longueur donnée!

Le système métrique. Les problèmes :

a) Cette leçon est suivie de 7 autres — où l'on apprend, toujours uniquement à propos de longueurs et à travers des problèmes pratiques, à faire l'addition, la soustraction et la multiplication par un entier des nombres décimaux — et d'une leçon de révision présentant le tableau des multiples et des sous-multiples du mètre, intitulée « numération des longueurs ».

b) Pour chacune des autres grandeurs, sauf pour les angles : capacités (2 leçons), poids (5 leçons), monnaies (3 leçons), les leçons d'introduction sont calquées sur le même modèle.

c) 11 leçons seront consacrées à l'étude d'autres grandeurs : surfaces, volumes, densités, vitesses et aux « système de mesure » correspondants.

d) Toutes ces leçons sont suivies d'applications où il s'agit,

le plus souvent, de calculer des prix, des longueurs, des surfaces, des volumes etc... et où les décimaux sont utilisés quotidiennement.

Les opérations dans les décimaux :

Le manuel propose d'apprendre la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, 1000, puis par un naturel, puis celle d'un nombre entier par un nombre décimal et enfin celle de deux nombres décimaux.

Il faut noter que dans le produit d'un décimal par un entier, le changement d'unité permet de prouver la validité de la règle. Par contre, dans le produit d'un nombre entier par un nombre décimal, ce dernier perd l'indication de l'unité qui ne peut plus être changée. La règle est donnée sans preuve. La vérification — établie dans un cas particulier, à l'aide d'une fraction : $\frac{2}{1}$ remplaçant 0,5 — est empruntée à une pratique courante car aucune théorie n'a été faite encore à ce sujet.

L'étude de la division — définie comme une opération concrète : on divise un gâteau — suit un plan qui atteste ici aussi le souci de coller, à la fois, à des représentations mentales qui permettent de la comprendre et à l'exécution de tâches progressivement plus complexes. L'ordre des leçons — division d'un naturel, puis d'un décimal (mesures) par 10, 100, 1000, division entre naturels et quotient décimal, division à dividende, puis à diviseur décimaux, enfin division de décimaux — suggère d'expliquer chaque étape de l'algorithme par les précédentes mais ces explications ne figurent pas.

La justification de la division par un décimal, qui perd à nouveau l'indication de l'unité et son caractère de « mesure » (*), s'appuie sur la propriété établie sur les naturels et étendue sans commentaires aux décimaux de l'invariance du quotient dans la multiplication du dividende et du diviseur par un même nombre. Une leçon spéciale est consacrée à la division d'un dividende par un diviseur plus grand que lui.

(*) Le mot « mesure » sera employé dans tout ce paragraphe, non pas dans un sens mathématique mais dans le sens courant que lui donnait l'ouvrage étudié.

Les fractions décimales :

Elles sont introduites, juste avant les fractions ordinaires, comme une écriture nouvelle du décimal déjà étudié. Les 5 leçons qui leur sont consacrées consistent à reformuler les règles de calcul des décimaux en termes d'opérations sur les fractions.

Il devient clair à cette occasion que c'est la théorie des écritures et non des êtres mathématiques qui est enseignée. Ainsi $3/10$ est une fraction décimale mais $1/2$, $2/5$, $3/5$ etc... sont des « fractions ordinaires » !

Les justifications et les preuves :

Contrairement à d'autres ouvrages de la même époque (*) qui se contentent d'énoncer et de faire appliquer les règles, ce manuel tente de les justifier soit par une vraie preuve, soit par un exemple, soit par une vérification. Même dans les cas où la preuve n'est pas possible, la présentation du texte suggère que l'élève peut et doit comprendre. « Le quotient » de 2 nombres quelconques est toujours un décimal soit « exact » soit « approché ».

Aucune étude n'est faite d'un rationnel non décimal. L'élève doit arrêter la division lorsqu'il a obtenu une précision raisonnable dans le contexte. Cette convention n'est même pas énoncée, elle est pratiquée de fait.

Analyse des choix caractéristiques de ce curriculum et de leurs conséquences :

Conception dominante du décimal scolaire en 1960 :

Cette méthode peut être considérée comme typique de celle de l'époque au moins par les traits suivants :

- a) le décimal est toujours l'expression d'une « mesure » (au sens non mathématique);
- b) ces mesures s'effectuent dans le système métrique;
- c) le décimal est défini en tant que nombre naturel muni d'une indication d'unité et d'une virgule qui repère le chiffre de cette unité;

(*) Par exemple Bodart-Bréjaud chez F. Nathan.

d) les algorithmes de calcul sont présentés comme étant les mêmes que pour les naturels, complétés seulement d'une procédure relative à la virgule.

Conséquences sur le produit dans les décimaux :

Ces choix ont des conséquences que l'on peut apercevoir :

a) Pas de décimal opérateur :

L'écriture 3,25 n'a aucun sens si le type de mesure effectuée n'est pas accompagné de l'unité indiquée. L'emploi des décimaux sera donc limité aux cas couverts par l'ancienne dénomination de « nombre concret ».

b) Le produit n'a pas de sens :

Il sera donc presque impossible à un élève de donner directement un sens à l'opération qui consiste à multiplier quel-que chose par un décimal :

« 3,25 m x 4 » peut se ramener à une addition, comme dans les naturels; mais pas « 4 m x 3,25 » si 3,25 n'est pas obtenu par une évaporation de l'unité. Ce ne sont pas des artifices comme ceux que nous avons signalés qui peuvent abaisser l'obstacle. Des équivalences du genre :

$$4 \text{ m} \times 3,25 = 3,25 \text{ m} \times 4 \text{ » sont inconcevables;}$$

ainsi que :

$$7,25 \text{ m} \times 4,38 = 7,25 \times (4 + 0,3 + 0,008)$$

$$= 7,25 \times 4 + 7,25 \times 0,3 + 7,25 \times 0,08.$$

Le produit ne peut plus être interprété à l'aide de la

représentation dans les naturels qui a servi de définition. Pour continuer à donner du produit de 2 décimaux une représentation « concrète », c'est-à-dire conforme à la conception décrite plus haut (*Conception dominante du décimal scolaire en 1960*), il faut en restreindre l'emploi, soit aux cas de « mesures-produits », par exemple la surface d'un rectangle, soit à celui des isomorphismes de mesures, par exemple le prix d'une quantité non discrète, le poids d'un volume donné d'un corps homogène etc...

c) Mesures-produit et dimensions :

En fait, dans le cas des mesures-produit, par exemple la surface du rectangle, on écrit :

$$2,5 \times 3,25 = 8,125 \text{ seulement si on a choisi convenable-}$$

ment l'unité de surface (le rectangle ayant pour longueur l'unité choisie pour le premier nombre et pour largeur celle choisie pour le second).

Il n'existe pas de moyen de justifier à priori cette formule plutôt que celle-ci :

$$2,5 \times 3,25 = 812,5 \text{ ou celle formée avec toute autre valeur.}$$

d) Proportions :

Le cas des isomorphismes de mesures est plus favorable. L'une des mesures agit sur l'autre comme un ensemble d'opérateurs multiplicatifs tout en restant une mesure. Il exige toutefois une nouvelle interprétation du produit de deux nombres soit construite et si possible englobe l'ancienne, celle utilisée par Al Kwarismi au IX^e siècle pour unifier la notion de nombre : $a \times b$ est le nombre qui est à « b » comme « a » est à « 1 ».

Les timides tentatives que l'on peut observer pour détacher le décimal de sa fonction de résultat d'une mesure restent tout à fait formelles :

— substitution de noms plus généraux (unités, dixièmes, centièmes), ... à ceux spécifiques du système métrique et prolongeant les dénominations dans les naturels (dizaines, centaines, etc...);

— rejet du nom de l'unité avant ou après le nombre 3,25 m ou m : 3,25 au lieu de $3^m,25$ (depuis 1945).

La suppression, pure et simple, de la mention de l'unité, à partir d'une certaine leçon et sans avertissement — l'évaporation — telle qu'on la verra utilisée systématiquement après la réforme de 1970, est franchement abusive mais ne se produit que furtivement, la pression des mathématiciens pour faire isoler les êtres, dont ils théorisent la structure, n'étant pas très forte à cette époque.

Les deux représentations des décimaux :

C'est pourquoi on peut constater que les rapports et les proportions (à l'intérieur d'une même grandeur — nombres abstraits) sont toujours exprimés, s'ils ne le sont pas entiers, en fractions (ordinaires ou décimales) ou en pourcentages. On pourrait supposer que cette spécialisation du vocabulaire n'est qu'une trace de l'histoire, mais il est probable qu'il lui correspond des représentations distinctes : d'une part, les décimaux représentant des mesures munis d'une addition et du produit par un naturel, d'autre part les fractions, bien qu'apparemment définies elles aussi à partir de la mesure (la tarte que l'on coupe et dont on prend quelques parts) sont employées comme des rapports.

Le bon fonctionnement des raisonnements va donc dépendre de la facilité avec laquelle les élèves pourront passer, en une situation de résolution de problème, de l'une à l'autre de ces représentations. La capacité à substituer l'une des formulations à une autre au cours d'une interrogation, n'est qu'un indice que l'élève pourrait effectuer ces changements de point de vue. Nous ferons plus loin l'historique de ces rapports.

L'ordre des décimaux :

a) Mais en fait, ces décimaux scolaires sont restés des entiers naturels. Dans toutes les mesures il existe un sous-multiple insécable, un atome au-dessous duquel toutes les valeurs subliminaires se confondent. Même si la définition laisse entendre que toutes les unités de grandeur peuvent être divisées en dix, ces divisions ne sont jamais — dans l'ensemble élémentaire — poursuivies impunément au-delà de l'utile ou du raisonnable, même à travers la fiction commerciale du calcul de la division. Cette tendance s'exprimera nettement dans les commentaires des programmes de 1970 où le décimal est introduit comme mesure du cardinal d'ensembles finis : « le millier étant choisi comme unité, la population d'une ville de 10850 habitants s'exprime par le nombre décimal 10,850 ».

b) Dans ces conditions, les décimaux restent munis d'un ordre discret, celui des naturels : beaucoup d'élèves auront du mal avec cette définition à imaginer un nombre compris entre 10,849 et 10,850. D'ailleurs, ce genre de questions n'est jamais posé à l'époque et ne peut se résoudre que par un apprentissage d'algorithme ou en « imaginant » une nouvelle sous-unité. Mais comment ?

c) Les comparaisons et les sommes de décimaux ne seront souvent correctes que si ces derniers sont écrits avec le même nombre n de chiffres après la virgule, c'est-à-dire s'ils sont présentés dans le même D_n (ensemble de décimaux tels que $10^n D_n \in \mathbb{N}$) et donc s'ils interprètent comme des naturels (*).

(*) Ce modèle a été étudié avec précision par M.L. Izorche : « Les réels en classe de 2nde ». Mémoire de D.E.A. Bordeaux I. 1978.

Les emboîtements de ces \mathbb{D}_n ($\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2 \dots \subset \mathbb{D}_n$) seront malaisés dès que la situation se compliquera, surtout pour \mathbb{D}_0 , l'ensemble des naturels, car nous avons vu que si les décimaux sont au fond des naturels, les entiers ont été déclarés ne pas être des décimaux!

L'approximation :

a) La distinction entre partie entière et partie décimale découle de la pratique de la mesure et de l'évaluation surtout dans les calculs où l'opération sur les parties entières donnent l'ordre de grandeur. Cette distinction est bien utile car 0,31; 3,1; 31... ont tendance à s'identifier (il suffit de choisir son unité).

b) Mais alors, le décimal ainsi coupé en deux, sera tenté de suivre certaines règles pour la partie entière et d'autres pour la partie décimale. Par exemple 3,9 sera inférieur à 3,12 (puisque $9 < 12$) (37% des élèves de CM2 : I.N.R.P., 1979) ou bien encore $2,3 \times 2,3$ donnera mentalement 4,9.

c) Les décimaux seront identifiés avec les parties décimales et donc inférieurs à 1. Les élèves hésitent à trouver un décimal ayant un seul chiffre après la virgule et supérieur à 0,9)...

d) Cette idée que la mesure conduit à fournir un nombre, « approché » mais « qui compte » et un petit bout négligeable s'ancrera fortement, surtout à l'occasion de la division qui fournit des suites visiblement infinies qu'il faut enfouir sans procès puisqu'elles n'ont pas de statut possible.

e) Et lorsque plus tard, un étudiant considère dans un problème une série $\sum a_n$ à termes positifs, dont le terme général tend vers zéro et pense qu'elle converge, est-ce parce qu'il remonte l'implication d'un théorème connu, ou plutôt parce que subsiste quelque part l'idée que $(\forall \epsilon \exists n \forall p > n \implies a_p < \epsilon)$ veut dire que $\exists n \forall p > n \implies a_p = 0$ par référence à la représentation des décimaux qu'il a appris dès l'enfance ?

Influence des idées pédagogiques sur cette conception :

Appréciation des résultats :

A cette époque, ces difficultés n'apparaissent pas ou sont tenues pour mineures. L'enseignement de l'arithmétique ne

présente pas de difficultés pour le maître et pas beaucoup pour la plupart des enfants. Et s'il y a en mathématique un enseignement qui ne prête à aucune discussion et ne présente aucune difficultés c'est celui des décimaux. Il est d'ailleurs si profondément associé à l'usage du système métrique et aux mesures évoquées dans les problèmes scolaires, qu'on ne voit pas alors comment on pourrait l'enseigner autrement ou ne pas réussir à l'enseigner.

Il faut expliquer cette opinion pour comprendre réellement les conditions de l'enseignement des décimaux à cette époque.

Méthodes classiques :

Tout d'abord, aucune des théories pédagogiques de l'époque ne prétend ni ne peut fournir de variantes qui donneraient une alternative à la conception dominante du décimal scolaire de 1960. Des contenus sont supposés être constitués et organisés selon les règles de leur discipline et la pédagogie n'est que l'art de les communiquer. Elle est supposée n'avoir pas de prise ou d'effet sur eux.

Considérons d'abord les plus anciennes :

— Les méthodes dogmatiques conduisent à faire d'abord les règles puis à les faire appliquer.

— Les méthodes maintiennent par questions et réponses et simulent une redécouverte de la règle.

— Les méthodes actives insistent sur l'importance du temps consacré à l'activité de l'élève et surtout l'activité manuelle, par rapport au temps d'écoute ou d'apprentissage formel, mais ces activités sont, soit des manipulations illustrant un discours introductif soit des exercices. Prisonnières de l'idéologie de la main qui modèle l'esprit, elles ne trouvent qu'accidentellement des situations-problèmes efficaces.

— Le courant empiriste sensualiste influence les manuels à moins que ce ne soit l'inverse, et ceux-ci se gonflent d'illustrations colorées.

Toutes ces méthodes respectent les principes suivants :

a) Aucune connaissance n'est introduite qui ne puisse être, soit admise immédiatement, soit définie ou expliquée à l'aide des acquisitions antérieures.

b) Chaque définition ou explication doit être formulable

et justifiable — sinon formulée — dans le langage de la science enseignée — ou au moins dans son expression culturelle la plus répandue.

c) Chaque « enseignement » donne lieu à un apprentissage identifiable et contrôlable, et, à la limite, seul est enseigné ce qui peut être appris.

d) Les acquisitions entreprises se prolongent et se justifient par l'usage — importance et fréquence — qui en est fait dans les leçons antérieures.

Optimisation :

Ces principes conduisent naturellement à une conception de l'optimisation de l'enseignement qui implique principalement que :

a) Chaque leçon doit viser le maximum d'acquisition (le débit) compatible avec les capacités d'apprentissage des élèves.

b) L'apprentissage d'un concept doit donc se faire sous une forme qui utilise au mieux les connaissances antérieures et les modifie le moins possible.

c) Il doit demander le minimum de temps et doit se rentabiliser par un usage ultérieur assez fréquent dans des applications d'intérêt pratique.

La leçon d'introduction que nous avons minutieusement relatée ne semble pas satisfaire la condition (a) mais c'est parce qu'au fond, la plupart des faits ne sont énoncés là que pour en justifier l'emploi quotidien ultérieur et non pour être appris immédiatement.

Autres méthodes :

a) D'autres méthodes ayant pour objet la recherche d'une meilleure motivation des élèves, conduisent à une réorganisation plus ou moins profonde de l'apprentissage. Cependant, sauf accidentellement ici encore, ces motivations, principalement centrées sur le milieu (école moderne de Freinet), ou sur les centres d'intérêt pour l'enfant (Decroly) ou même purement arbitraires sont d'ordre exogène par rapport à la connaissance et sans pertinence avec elle.

b) L'ordre des acquisitions paraît susceptible d'être totalement bouleversé par rapport à celui que nous avons exposé et que respectent à peu près les autres.

c) Mais en réalité, la rupture de l'ordre des acquisitions et le choix de situations familiales et stimulantes n'affecte guère les acquisitions elles-mêmes ni leur signification.

En effet, lorsqu'un problème nouveau se pose à l'élève : — ou bien le contexte lui permet la construction d'une solution sans qu'il y ait à utiliser la référence à une acquisition antérieure;

— ou bien, après échec et enquête auprès des adultes, il lui apparaît qu'il existe une technique de résolution.

Dans le premier cas, l'enseignement doit instaurer, sans motivation, un procès d'identification de la question qui a été posée, de ce qui a été découvert et qui doit s'organiser après coup en un savoir à réappliquer et donc à apprendre. Dans le second, la technique doit être apprise et il faut s'inquiéter de reconnaître les conditions dans lesquelles on pourra la réemployer.

Dans les deux cas, les connaissances les savoirs, les emplois et les justifications sont ceux de la conception dominante. D'ailleurs, passé le moment de la découverte qui retient principalement l'attention des utilisateurs de ces méthodes (peut-être parce qu'elle implique plus directement le maître), l'apprentissage continue par un effort solitaire et empirique de l'élève qui doit répondre à des fiches « auto-correctives » d'une conception proche de l'enseignement programme (fichier C.E.L.).

d) Le problème principal de la didactique consistera à trouver des situations réellement spécifiques des différentes conceptions des décimaux et d'organiser à la fois ces situations et ces conceptions pour rendre possible une genèse artificielle des savoir-faire, des savoir-dire et des savoirs.

L'apprentissage des « mécanismes » et du « sens » :

Séparation de ces apprentissages et leur cause :

La courte analyse qui précède met en évidence la conception qui prévaut à cette époque de l'apprentissage des savoir-faire, et principalement des algorithmes dans la construction de la connaissance, conception qui, elle, joue un rôle dans la création et le fonctionnement des représentations des décimaux.

Cet apprentissage est conçu en deux parties que l'on peut viser séparément :

— l'apprentissage de l'algorithme que les maîtres appellent « mécanisme » de l'opération, et

— celui dit du « sens » de ce mécanisme, c'est-à-dire la connaissance des occasions de l'« appliquer » :

- Le premier relève des techniques d'apprentissage classique et, à la limite, du conditionnement;

- L'autre ne peut s'apprendre, à travers la répétition des exemples et des applications dans des problèmes, que par la grâce de mystérieux transferts que « l'élève effectue si, et seulement si, il a une intelligence suffisante ».

Certains ouvrages font des tentatives pour ramener l'enseignement du sens à celui d'un mécanisme par d'habiles classifications des situations (recherche du nombre de parts, recherche de la valeur d'une part pour la division par exemple) par l'identification de démarches spéciales (la règle de trois), voire par la recherche d'indices linguistiques de l'opération à effectuer (« il manque », « il reste », « on retranche »... pour reconnaître la soustraction).

Ces tentatives conduisent à rejeter certains problèmes, certaines formulations, et donc contribuent à modeler la conception dominante.

Cette séparation entre ce qui peut être enseigné formellement pour être appliqué « mécaniquement » et ce qui ne peut pas l'être — entre la forme et le « sens » — joue un rôle fondamental dans l'enseignement. Elle résulte à première vue de ce qu'elle est le résultat extrême de la négociation didactique étudiée par M. Verret (Le temps des études. 1974) et par laquelle le savoir enseigné se constitue en une transposition didactique du savoir pratiqué.

En effet cette négociation didactique conduit à distinguer, dans ce qu'a été vécu naturellement par l'élève comme une réponse normale à des situations intentionnelles, ce qui est objet de connaissance, de ce qui ne l'est pas, ce qui était un « problème » de ce qui était une hésitation stupide, ce qui était une adaptation banale de ce qui était un apprentissage, ce qui doit être appris de ce qui peut être oublié. Nous entreprendrons plus loin l'étude théorique de ce phénomène important mais nous pouvons tout de suite en observer le fonctionnement dans ce cas précis.

Les Algorithmes :

Un algorithme est une suite finie d'instructions effectuées permettant d'obtenir sur une classe donnée de problèmes, un résultat défini. Lors de son emploi, c'est une procédure de décision, mais le fait important réside en ce que l'algorithme peut être déterminé à l'avance, l'exécution de la n-ième instruction ne dépend d'aucune circonstance non prévue à la (n - 1)-ième, d'aucune nouvelle prise d'information, d'aucune nouvelle décision, d'aucune interprétation, donc d'aucun sens que l'on devrait leur attribuer. C'est pourquoi l'exécution d'un algorithme peut atteindre une grande fiabilité et une grande vitesse d'exécution.

La détermination d'un algorithme permet de hiérarchiser les tâches complexes dans lesquelles il apparait et de raisonner sur elles. Un grand nombre d'activités et d'équilibres peuvent être décrits comme des algorithmes et paraissent donc relever d'une exécution mécanique ou d'un « automatisme » selon une expression erronée mais courante chez les maîtres.

L'enseignement des algorithmes :

Très utiles et répandus dans les sciences et les techniques (et d'autant plus qu'ils sont plus complexes), les algorithmes sont tentants pour le professeur car :
— ils peuvent être appris soit directement dans la forme où ils seront utilisés soit par une complexification naturelle (insertion de sous-algorithmes) ;
— ils peuvent être enseignés sans recours au sens qu'ils sont d'ailleurs chargés de rejeter, donc par des méthodes formelles : application répétée, récitation...
— leur acquisition peut être contrôlée ;
— la non-acquisition permet des décisions didactiques simples, dans un contrat clair, où la responsabilité de l'élève peut être engagée à priori ;

— leur utilité peut être éprouvée puisque leur mise en œuvre est identifiable dans leurs applications ;
— ils assurent après l'apprentissage, dans l'exécution des tâches, des phases de bonne fiabilité, de grande vitesse et confiance.

Ils jouent d'ailleurs un grand rôle dans la justification des modèles d'apprentissage par conditionnement auxquels se réfèrent implicitement ou explicitement les maîtres.

En fait l'usage d'un algorithme est, par rapport à l'activité mentale, comme la partie visible d'un iceberg. Dans de nombreux cas qui servent de référence métaphorique aux théories pédagogiques qui les préconisent, les algorithmes sont acquis par un processus tout différent de ces apprentissages formels : ils sont le résultat d'une adaptation des sujets, progressive ou par sauts, mais où le sens et les caractères des situations jouent un rôle très important. D'une certaine manière, apprendre séparément les algorithmes de calcul et leurs conditions d'emploi est une activité comparable à celle qui consisterait à apprendre des citations et l'occasion de les placer. Elle est concevable en littérature académique mais ne permet pas d'apprendre une langue.

Cette méthode conduit à rendre inutiles — non fonctionnelles — les explications et la compréhension, en ce sens qu'en cas d'erreur ou d'incertitude elles ne servent jamais à rectifier l'algorithme. Seules alors peuvent servir des aides mnémotechniques, c'est-à-dire arbitraires par rapport au contenu. C'est ainsi que les motivations à exécuter une tâche peuvent devenir non pertinentes, et donc se plier à des exigences plus pédagogiques.

On les voit donc disparaître dans certains ouvrages (Bodard déjà cité), ou n'y jouer qu'un rôle secondaire, de telle sorte que l'explication est devenue à son tour une nouvelle connaissance juxtaposée aux autres. Et si seuls les meilleurs peuvent l'apprendre, c'est qu'elle n'est pas indispensable. Elle doit donc être considérée comme un autre savoir, indépendant du savoir-faire..., un luxe superflu en première urgence.

Ainsi, les préoccupations pédagogiques des années soixante ne prenaient pas en considération le contenu dans la conception des situations d'enseignement et même tendaient à le rejeter en tant que savoir organisé pour n'en retenir que l'aspect connaissance des faits et algorithmes (*).

En conclusion de cette étude on peut admettre que la méthode que nous avons présentée est bien typique de celles

(*) Cette tendance d'ailleurs été constatée expérimentalement par E. Filhol dans une recherche sur l'enseignement de la numération où il a montré que les maîtres ne prévoient les résultats de leurs élèves et ne les faisaient progresser que sur les objectifs de bas niveau taxonomiques.

qui étaient utilisées dans les années 60. Nous ferons l'économie ici de toute vérification aussi bien historique, par l'analyse des manuels, qu'expérimentale, par l'analyse des résultats des élèves des classes qui auraient conservé (elles sont nombreuses) ces méthodes : En effet ces méthodes, obtenues par l'effet des « variables pédagogiques » ne sont pas naturellement exclusives; chaque ouvrage, chaque maître les conjugue selon des formules qui changent d'une leçon à une autre.

Seule l'uniformité des résultats et leur peu de dispersion peuvent attester de l'exactitude de notre déclaration initiale : les variables pédagogiques évoquées plus haut sont sans grand effet sur la conception qu'ont les élèves d'un concept comme les décimaux. Nous ne ferons ces observations qu'après avoir examiné les réformes des années 70.

L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX DANS LES ANNEES 70 :

Les réformes des années 70, en France en particulier, s'inscrivent en quelque sorte en réaction contre l'état que nous venons de décrire mais, pour s'exprimer ou se justifier, elles vont devoir s'appuyer sur certaines des conceptions antérieures. L'enseignement des décimaux n'est pas au centre de la lutte à laquelle se livrent les novateurs et parfois leurs adversaires, mais il est d'autant plus intéressant d'examiner sur eux la trace des idées nouvelles — dont nous ne ferons pas ici l'inventaire.

Description d'un curriculum :

Examinons les exercices proposés dans le « journal de mathématiques » de N. Picard (CM1, fascicule II et CM2 1976) et dont certains sont commentés dans « Agir pour abstraire » du même auteur (*).

Léçon d'introduction :

L'élève mesure des surfaces limitées par les lignes d'un

(*) Mme. N. Picard a contribué à diffuser en France les idées de Z. Diènes à qui elle a emprunté nombre de ses idées. Chargée de recherches à l'INRDP, elle a représenté, pour les maîtres, de 66 à 70, les tendances des réformes souhaitées.

réseau en dénombrant les mailles. L'unité de surface est le nom donné à cette maille (« L'unité d'aire est un petit triangle » mes. 3) (*). On lui fait alors remplacer ce dénombrement par un recouvrement des figures avec des « pièces » d'un système inspiré des multibases de Diénès : A couvre une maille, B en couvre 2, C \longrightarrow 2^2 , D \longrightarrow 2^3 , E \longrightarrow 2^4 , F \longrightarrow 2^5 , G \longrightarrow 2^6 . Après échanges pour avoir le minimum de pièces de chaque sorte, le résultat est transcrit dans un tableau où la surface — un naturel — est écrite en base 2. L'élève est alors invité à dessiner une surface M d'aire 11011. « Quand A est l'unité » puis à mesurer cette aire en prenant E « comme unité ». L'unité est devenue une des pièces et par le jeu des échanges la classe d'équivalence des figures de même aire et de même type (ces termes et ces remarques ne figurent pas dans le texte). Pour indiquer que dans cette opération matérielle, il a changé d'unité, l'élève doit mettre, dans le tableau, un chapeau sur le nom de la pièce choisie et une virgule après le nombre de pièces.

Après échanges, on obtient le même tableau que dans l'énoncé — avec en plus la virgule et le chapeau. Les changements d'unité se font à l'intérieur d'un même système. On ne remplace pas un réseau à mailles carrées par un autre à mailles hexagonales par exemple.

Autres bases. Décomposition :

Le même genre de travail est fait en base 3 puis en base 10. Des exercices viennent rappeler que pour multiplier un nombre par la base, il suffit de décaler les chiffres d'un rang vers la gauche.

Il apparaît dans le compte rendu de l'activité du maître qui accompagne ces exercices (agir pour abstraire p. 215), que dans un dialogue très maïeutique, les enfants ont été conduits à transcrire ce tableau :

G	F	E	D	C	B
1	1	0	0	1	1

en légalité : $S = 2f + 1f + f/8 + f/16$

(*) Mes. i fait référence à l'indexation des fiches utilisées par l'auteur.

Les commentaires de N. Picard sur la situation sont insuffisants pour connaître la signification exacte de ce comportement. f/8 et f/16 ont été « trouvés spontanément ». Mais c'est la première fois qu'une écriture ainsi décomposée apparaît. Le maître fournit un exemple en disant : « Écrivez en mathématique ce qu'il a dit ». Aussitôt les « f » peuvent disparaître :

$$S = 2 + 1 + 1/8 + 1/16.$$

L'auteur signale toutefois que l'écriture à virgule n'est comprise que lorsque les enfants placent le nombre dans un tableau. Les exercices se font en différentes bases mais les élèves n'effectuent pas de changements de base : ils ne réécrivent pas une aire donnée en base deux, en base trois. Les opérations d'addition et de multiplication par un naturel dans les nombres à virgule (base 2) sont étudiées dans le même type de situations (mesure d'aires à l'aide de pièces), puis, après échanges, dénombrement direct dans la base de numération.

Les opérations :

L'étude de l'ordre des nombres à virgules utilise une toute autre représentation : il s'agit de « numéroter » des livres de bibliothèque. Les livres sont désignés par des lettres, A, B, C... mais pour des raisons qui ne sont pas évoquées, le bibliothécaire assigne, à chaque nouveau livre, une place déterminée entre deux autres déjà placés. Par exemple F entre B et C « Il s'agit de trouver un code pour F », sous-entendu :

1) pour indiquer la position par rapport aux livres déjà placés, 2) mais qui ne change pas quand de nouveaux livres sont placés, tout en gardant la propriété (1).

Cette « numération » ne permet sûrement pas de compter les livres placés.

En fait, le problème n'est pas posé, la solution est donnée aussitôt, (« voici un moyen ») non pas sous forme d'une méthode pratique qui n'engendrerait que quelques codes, (ceux correspondant à des introductions au hasard) mais

sous celle d'un algorithme générateur de la graduation entière, c'est-à-dire de tous les codes ayant un chiffre après la virgule, puis deux..., conformément au modèle évoqué plus haut dans *L'ordre des décimaux*.

Les opérateurs. Les problèmes :

a) Immédiatement après, vient la préparation classique au produit de deux décimaux sans indication d'unité. L'auteur introduit une numération du rang des chiffres à l'aide des entiers (\mathbb{Z})...3,2,1,0, $\bar{1}$, $\bar{2}$,... La multiplication par 10, 100, 1000 consiste à déplacer les chiffres dans le tableau d'un rang vers la gauche. L'opération est justifiée par l'échange de pièces — le modèle reste nécessaire — d'un rang contre celle d'un rang immédiatement supérieur.

La division (de quoi ? des nombres, des nombres-mesures, ... des unités!?) consiste en l'algorithme inverse :

$$123,35 = 12335 : 100$$

b) Alors, le produit de deux décimaux — dont on ne sait pas à quelle occasion on peut avoir à le faire — est interprété en termes « d'opérateurs » :

$$\begin{aligned} 123,35 \times 4,3 &= [12335 : 100] \times [43 : 10] (*) \\ &= [12335] ((: 100) \cdot (x 43) \cdot (: 10)) \dots \text{etc} \\ &= [12335] ((x 43) \cdot (: 100) \cdot (: 10)) \end{aligned}$$

Nous traduisons ici par des nombres entre crochets les nombres qui expriment des mesures et entre parenthèses ceux qui sont associés à des « opérateurs » représentés dans le texte par les flèches (Le point représente la « composition » de ces flèches et nous avons ainsi distingué 3 « produits » : l'opération interne \times , l'opération externe $| \quad |$ (\quad) et la composition d'applications qui sont confondus dans le texte). Cette interprétation de $[43]$ « nombre concret » en l'opérateur $(x 43)$ a été préparée dans les naturels par de nombreux exercices sur ce que l'auteur appelle « les machines ». Il n'est proposé aucune situation-problème où la multiplication de deux décimaux pourrait prendre un sens.

c) La division est exposée selon l'ancien schéma : remarque

(*) Pour $[12335] (: 100) \times [| 43] (: 10)$

est faite que dans les naturels et pour la division euclidienne:

$$a \div b = ka \div kb = \frac{a}{b} \div \frac{ka}{kb} \quad (\text{si } h \text{ divise } a \text{ et } b)$$

La propriété est étendue aux décimaux.

(d) En dehors de ces leçons d'introduction et d'études et auxquelles sont consacrées 32 fiches sur 131 au CM1 et 58 sur 149 au CM2. Aucune autre allusion n'est faite aux décimaux (ni applications ni usage) sauf dans l'étude de l'encadrement d'une aire (Mes. 44 à 51).

Approximation :

Dans un premier exercice les élèves peuvent constater que l'encadrement de l'aire d'une surface connexe, mais non composée d'une juxtaposition d'atomes, dépend de la position du quadrillage utilisé pour le dénombrement et qui s'est substitué aux pièces. Mais cette aire existe-t-elle dans ce cas ? Puis ils calculent l'aire de la surface bordée par les lignes du quadrillage, d'abord avec une unité, puis avec une autre six fois plus petite. Le partage de l'unité est donc suggéré mais les deux quadrillages sont présentés en même temps et la situation ne diffère pas formellement des précédentes (dénombrements avec groupements).

Dans les exercices suivants (Mes. 50 et 51), l'encadrement de l'aire (?) d'une surface à l'aide de quadrillage plus fins est supposé suggérer la poursuite de la précision.

Analyse de ce curriculum :

Cette présentation appelle quelques remarques :

Les aires :

L'introduction est conforme aux conceptions antérieures, mais le recours aux surfaces est habile car il rend plus claires les différences entre les divers objets d'une même classe, à laquelle la mesure attribue la même valeur. Toutefois l'usage du matériel et la règle des échanges plaquent un exercice de numération inutile et qui renforce l'aspect de dénombrement imposé par la restriction à certaines figures, un sacrifice à l'idéologie de la manipulation.

La virgule :

La virgule et le chapeau ne portent aucune information lorsque le nombre est écrit dans un tableau, ce qui est toujours le cas dans la première partie du travail. L'écriture « mathématique » décomposée sous forme de polynôme aurait vraiment pu servir de base à une étude correcte du décimal. Mais cet épisode paraît assez fortuit et sans lendemain, l'auteur semble ne s'intéresser qu'à la transcription.

L'ordre :

L'étude de l'ordre des décimaux est réellement une innovation qui répondait, nous l'avons vu, à une insuffisance des méthodes antérieures, mais en quoi les raisonnements effectués ou les propriétés énoncées à propos du numérotage engagent-ils les décimaux-mesures déjà introduits ? Ou si ce sont des « nombres » nouveaux comment en concevoir la somme par exemple ?

Identification et évaporation :

a) Ces êtres n'ont en commun avec les autres que la manière dont on les écrits. Leurs représentations sont distinctes, isolées et cohabitent sans rapport — autre que formel. Pour raisonner sur l'ordre des « nombres à virgule » — mesure, il faut se souvenir de l'algorithme du rangement des livres. Aucune activité ne permet à une représentation nouvelle d'englober les deux précédentes (on aurait pu, par exemple, définir une distance entre les repères puis une mesure de ces « segments »).

b) Cependant c'est à partir de ces leçons que le décimal perd toute référence à une unité donnée. La virgule conserve un sens cependant, lorsqu'il s'agit de comparer ou d'additionner des nombres décimaux : elle indique le chiffre de l'unité utilisée pour chacun et qui est supposée être la *même*, même si on ignore laquelle (cette explication n'est ni demandée, ni fournie aux élèves).

Lorsque les nombres proposés n'ont rien à voir entre eux, et qu'il n'y a aucune raison de supposer que c'est la même unité qui a été utilisée, la disparition sans avertissement de l'indication de l'unité, fait, qu'au moment où la virgule pourrait porter effectivement et utilement l'information convenue, elle en porte une autre, on ne sait laquelle.

c) Or, l'identification entre le décimal-mesure et le décimal-grammes, ne la facilite pas. Aussi ne se fait-elle que de façon sur leur différence de statut, renforcée par l'usage des diagrammes, tout à fait formelle. Chaque conception hérite des propriétés et des règles établies dans l'autre par la magie de l'identité d'écriture. C'est pourquoi il était nécessaire d'utiliser le décimal — ni mesure, ni opérateur — comme pont formel : Toute représentation dans un exemple concret, non seulement n'apporterait aucune preuve de la légitimité de l'héritage, mais encore ferait obstacle à son fonctionnement (par plaisanterie nous avons appelé ce processus l'évaporation de l'unité).

d) Cette identification est un des problèmes fondamentaux de la création du sens des décimaux. Elle a été totalement négligée dans les études sur l'enseignement. Nous l'étudierons dans le cas des rationnels où elle ressemble beaucoup mieux à l'identification d'un espace vectoriel avec son dual.

Produit :

Pour la notion de produit, rien de nouveau non plus, mais il apparaît clairement que la compréhension — sans parler de la signification — du calcul du produit repose sur la capacité d'identifier un nombre « concret » : $[43 : 100]$ avec un opérateur $(x 43) \cdot (: 100)$.

En conclusion, le décimal est toujours introduit pour représenter une mesure faite avec une unité assez petite et exprimée à l'aide d'un autre multiple.

Ce décimal là est toujours un naturel « concret ». Par contre, le système métrique a été rejeté comme signifié principal du décimal. Son étude occupe une place excessive-ment modeste (un exercice de présentation pour chaque grandeur : longueurs, surfaces, volumes, masses). Les algorithmes de calcul sont présentés de façon classique même si la justification du calcul joue un rôle beaucoup plus important et s'appuie sur un formalisme assez lourd (non mathématique mais faisant l'objet d'un apprentissage prolongé : les machines).

Ainsi, les caractères relevés comme typiques des méthodes des années 60 sont, pour la plupart, conservés dans ces ouvrages présentés comme très novateurs.

Etude d'un curriculum typique des années 70 :

Le manuel le plus répandu à la suite de la réforme de 70 fut probablement celui de Mme Touyarot (Itinéraire mathématique — Nathan 1976).

Les choix :

Les choix sur les questions qui nous intéressent y sont les mêmes : introduction comme mesure de cardinaux finis avec changements d'unités puis « évaporation » de l'indication de l'unité, ce qui permet, dans la comparaison de deux naturels et dans celle de deux décimaux d'avoir deux algorithmes différents — fournis sans justification — pour ranger dans le même ordre des nombres qui sont toujours considérés comme des naturels.

Propriétés des opérations :

Alors que les propriétés des opérations dans les naturels sont fondées explicitement sur l'examen d'une représentation (les opérations ensemblistes — mais les termes de « réunion » et « d'intersection » ne sont pas prononcés), celles de ces opérations dans les décimaux sont simplement empruntées aux précédentes, attestant qu'avec cette représentation, il n'y a plus ni problème, ni débat, ni même nouveauté. Le décimal n'existe plus comme être mathématique mais seulement comme transcription d'un être déjà connu.

Produit :

Pour le produit de deux décimaux, l'élève est invité à constater que « un paquet de sucre contient 168 morceaux de sucre donc 1,68 centaines de morceaux; 28 paquets de sucre contiennent 1,68 x 28 centaines de morceaux ». D'autre part ces « 2,8 dizaines de paquets de sucre contiennent bien 16,8 x 2,8 centaines de morceaux de sucre puisque une dizaine de paquets de sucre en contient 16,8 centaines de morceaux. Donc : (évaporation)

$$16,8 \times 2,8 = 1,68 \times 28$$

Opérateurs :

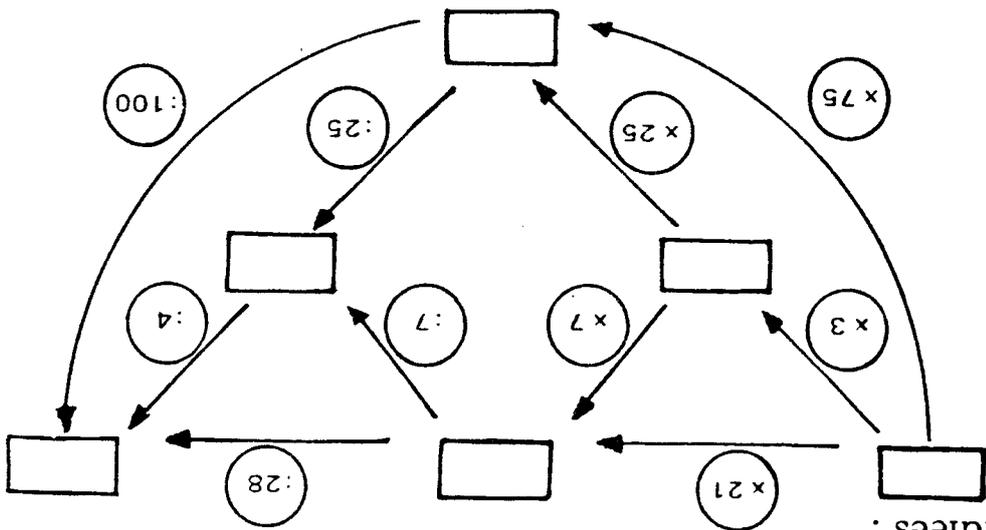
Beaucoup plus tard, le décimal opérant dans les naturels puis dans les décimaux est défini comme une application :

(x 2,5), ce qui permet de présenter les données de problèmes relatifs à la règle de trois.

Les fractions :

Elles sont définies ensuite comme opérateur réduit d'une chaîne d'opérateurs elle-même présentée sans référence à une situation-problème quelconque. Elles « s'utiliseront » plus loin.

L'ouvrage revient alors sur la notion de décimal pour montrer qu'une fraction (opérateur) peut parfois, par décomposition et recomposition, être « égale » à un opérateur décimal. Curieusement, dans cet ouvrage, où pourtant ne figurent que très peu d'exercices dans les bases non décimales, l'expression « nombre à virgule » se substitue au mot « décimal » très fréquemment et sans raison apparente. Par exemple pour « établir » que $\frac{21}{28} = \frac{75}{100}$ on procède par une démonstration pénible et illustrée d'un nouveau type de diagramme dont les conventions n'ont pas été étudiées :



Mais on ne sait pas d'où vient que $\frac{75}{28} = 0,75$ ($\times \frac{100}{75} =$ (x 75) . (: 100) = 75 : 100, nous retrouvons le même obstacle), ni pourquoi pour obtenir le même « résultat », il suffit de diviser 21 par 28 en écrivant à droite du dividende autant de zéros qu'il est nécessaire pour obtenir finalement un reste nul. (Pour la circonstance, le discours s'émaille d'inconnues : x,y,z pour la première fois dans le cours). On trouve seulement un exercice d'approximation pour expliquer et prendre en compte les cas où la division « ne se termine pas » ($\frac{11}{10}$).

Conclusion :

Cet ouvrage éclectique conserve le canevas ancien et l'illustre de tous les apports nouveaux de l'époque. Les problèmes sont nombreux et très variés. L'enseignant ne sait lesquels choisir et ne voit pas bien comment la solution de l'un facilitera pour l'élève la résolution d'un autre. Ce qui veut dire qu'il n'y reconnaît pas les contenus d'apprentissage auxquels il est habitué. Le vocabulaire est lui aussi le résultat d'une négociation de circonstances : quelques termes nouveaux, rattachés à des objets anciens. Mais qu'un obstacle se présente comme dans la démonstration du paragraphe précédent et le langage mathématique reparaît avec tout l'arsenal des innovations didactiques de cette époque. Il témoigne clairement d'une négociation difficile dont nous allons maintenant examiner les conditions.

Les idées pédagogiques de la réforme :

La réforme vise les contenus :

Contrairement aux mouvements pédagogiques antérieurs, la réforme des années 70 visait principalement à modifier le contenu, la formulation, l'organisation et l'ordre d'introduction des connaissances mathématiques enseignées. Si elle était accompagnée souvent de prises de positions pédagogiques aucune ne lui était spécifique. Ayant constaté qu'à part quelques compléments et changements de vocabulaire la conception de l'enseignement des décimaux n'avait pas fondamentalement changée, on serait tenté d'en inférer que les difficultés des élèves devraient être les mêmes.

Or nous allons voir qu'au contraire la modification des contenus conduisit à celle de la conception de l'apprentissage, à la réorganisation des activités des élèves et à celle de l'enseignement des mathématiques.

Cette réforme prétendit avant tout être celle des contenus :

- les connaissances mathématiques avaient été réorganisées et unifiées;
- le vocabulaire avait donc changé, on avait de nouvelles exigences quant à la rigueur, le champ d'application des mathématiques s'était élargi en partie grâce à la fécondité de cette réorganisation;

— l'unification devait permettre une meilleure efficacité de l'enseignement en lui permettant d'apprendre, moins pour résoudre plus mais surtout pour apprendre à apprendre. C'est pourquoi elle fut demandée, promue et animée par les mathématiciens. Mais la conception même de cette unification portait en elle des hypothèses sur le fonctionnement des mathématiques, en tant que « théorie des structures » (*).

Celles-ci, détachables du contenu « peuvent être conçues indépendamment de la nature des ensembles de base ». Remarquons : dans cet article d'ailleurs, l'auteur insiste, à travers deux exemples, sur l'importance pour une science neuve de se placer dans le domaine proprement mathématique de la déduction totale, position en rupture avec la méthode inductive, l'abstraction extensive et l'accumulation de faits expérimentaux qui prédominent dans les sciences encore jeunes. Il conclut : « Nos modes de connaissance sont bien mathématiques, à eux sont indissolublement liés nos pouvoirs », ce qui à la fois justifie socialement le projet de la réforme et lui donne son fondement psychologique et scientifique.

Ainsi, puisque les mathématiques sont un moyen de fabriquer la connaissance, apprendre les mathématiques c'est apprendre à apprendre. Pour beaucoup, les nouvelles mathématiques sont donc organisées comme un langage formel dont la *sémantique* est la théorie des structures dont on peut exhiber la synthèse et qui s'applique dans différents domaines en subissant des adaptations relevant de la *pragmatique* (conception structuraliste). Cette conception permet-tait d'espérer des apprentissages séparés contrairement à ce que permettaient de penser les travaux de Piaget.

L'enseignement des structures :

Si l'on veut accepter le pari d'organiser l'acquisition de ces mathématiques par les enfants il faut donc dire comment ces structures peuvent s'approprier d'emblée. En effet, l'économie du projet structuraliste consiste à refuser d'inscrire le sens des structures dans une histoire du sujet en

(*) Cf. remarques sur les mathématiques et la réalité de LICHNEROWICZ 1967 (In : Logique et connaissance scientifique p. 477) p. 474-485. Encyclopédie de la Pléiade. NRF 1969.

interaction avec des situations trop riches ou trop nombreuses où ces structures s'englueraient et prendraient des significations et des limitations trop particulières. De plus, les idées pédagogiques de l'époque conduisent à rejeter une étude scolastique du discours mathématique.

Ce problème a reçu plusieurs tentatives de réponse. Nous ne retiendrons que celle proposée par Diénès que nous considérons comme la plus représentative et la plus explicite. Nous signalerons, toutefois, une manière de s'y dérober fréquemment observée.

Elle consistait :

— en s'appuyant sur les travaux de Piaget à penser que justement l'épistémologie génétique montrait l'apparition non pas de connaissances élémentaires mais de structures entières et, cela, dans une genèse qui procédait du général au particulier; — et à conclure, avec une référence douteuse aux idées de Rogers que l'activité des sujets et leur développement naturel conduisaient aux appropriations fondamentales visées, à condition que l'on n'y fasse pas obstacle par une didactique normative intempestive. Cette position ne fournissait pas de pratiques didactiques « communicables » mais justifiait beaucoup d'expériences « pédagogiques sauvages » (*) qui prétendaient rejeter les « méthodes traditionnelles ».

Par contre, Diénès, propose explicitement une solution qu'il illustre de nombreuses leçons et de matériels nouveaux (**).

Le processus, qu'il appelle « psychodynamique » se déroule, généralement en six étapes :

- étape ludique;
- jeux structurés;
- jeux isomorphes et abstraction;
- schématisation et formulation;
- symbolisation et formalisation;
- axiomatisation.

mais s'accompagne de phénomènes comme, par exemple, celui de la généralisation.

(*) Selon une terminologie de l'INRDP.

(**) MAUDET : Etude et critique du processus psycho-dynamique selon Diénès. Mémoire de DEA. Université de Bordeaux 1979.

L'interprétation que nous allons en donner n'est pas entièrement conforme aux écrits de l'auteur, elle est une tentative d'approche de celle que les enseignants ont pu lui donner dans le contexte des idées de l'époque. Elle correspond en tout cas, à la plupart des exercices et des situations d'enseignement se référant à lui et que j'ai pu observer. a) Un jeu structure est un jeu dans lequel l'enfant agit selon des règles qui lui sont fournies soit formellement, soit par le contexte. La plupart du temps ces règles sont celles de la structure à découvrir.

Le cas typique est celui des groupes. Le didacticien choisit une réalisation dans un groupe, par exemple le groupe de Klein comme groupe de transformation d'un certain ensemble (par exemple quatre positions d'une poupée qui culbute, tourne et roule). Le maître présente cet ensemble, invite l'élève à effectuer les transformations, à les chercher toutes, à trouver celle qui, appliquée à ceci, donne tel résultat, celle par quoi peut-on remplacer cette autre, etc. Ces activités sont directement calquées sur des activités mathématiques et correspondent à des solutions d'équations, à des recherches de propriétés, etc.

Le mot « jeu » est utilisé dans le sens où on l'utilisait à l'époque en pédagogie. Il signifie que la situation est inhabituelle, dégagée d'obligations d'apprentissage, d'exigences scolaires, qu'on peut y prendre des libertés, qu'elle met en œuvre l'imagination, qu'on peut faire des découvertes, se les dire. Bien que l'élève soit mis devant le problème d'atteindre un objectif dans le cadre de règles qui lui sont données, la situation didactique n'est généralement pas organisée comme un jeu ordinaire, ni telle que le joueur ait plusieurs occasions d'essayer les diverses stratégies qu'il pourrait mettre en concurrence. Le terme « jeux » recouvre donc ici aussi bien des situations authentiquement ouvertes que des exercices très banals d'imitation et de reproduction de tâches. La situation mathématique est un cadre dans lequel s'insèrent des activités et non pas un moyen intellectuel qui commande le choix d'une stratégie optimale dans une situation-problème d'utilité familière.

Dans ces conditions les motivations seront encore exogènes, ne mettant pas en rapport le contenu en tant

que solution d'une situation reconnue intéressante.

b) Dans l'étape des jeux isomorphes, le maître propose, successivement, à ses élèves plusieurs jeux réalisant la même structure. Ceux-ci, doivent reconnaître d'eux mêmes entre ces jeux, les correspondances d'objet à objet, de relation à relation qui leur ont permis de transporter de l'une à l'autre de ces situations problèmes, comportements, propriétés et méthodes. Aux yeux du didacticien ces transferts sont déjà tenus pour la preuve que l'élève a pu établir entre les réalisations, une relation qui constitue l'appréhension encore implicite de l'isomorphisme, modulo la structure choisie et dont on prendra conscience dans la phase suivante.

c) L'abstraction consiste alors à identifier, en tant qu'objet de connaissance la « structure commune » à divers jeux isomorphes. La structure est ici l'ensemble des propriétés qui indépendamment des particularités de chaque exemple les régissent tous. Le didacticien doit donc produire un ensemble de réalisations présentant une « variabilité » convenable pour limiter la finesse de la structure abstraite. La recherche de la structure la plus fine doit être, elle, érigée en règle permanente, les réalisations formant la sémantique de la structure conformément à la définition de Carnap. Mais les raisons de cette recherche, du choix des exemples, et, de l'usage de cette structure ne sont pas accessibles à l'élève de sorte que pour lui il y a bientôt un contrat assez clair : il lui faut reconnaître ce que le professeur a caché dans les jeux, décoder son intention didactique selon une règle uniforme : chercher les ressemblances et les différences. Il faut remarquer que cette étape, contrairement aux précédentes n'appelle aucune décision nouvelle de la part de l'enseignant, elle ne comporte le plus souvent aucune situation-problème spécifique : elle apparaît comme une réponse, entièrement à la charge de l'élève, donnée aux étapes antérieures qui en sont à la fois la condition nécessaire et suffisante.

C'est à mon avis l'existence du contrat didactique qui assure le fonctionnement du processus, et non une quelconque loi de la genèse de la connaissance. L'abstraction n'est pas fatale. En effet les commerçants n'ont jamais abstrait les structures de modules qui règlent leurs échanges permanents parce qu'ils n'avaient pas de motivation à le faire.

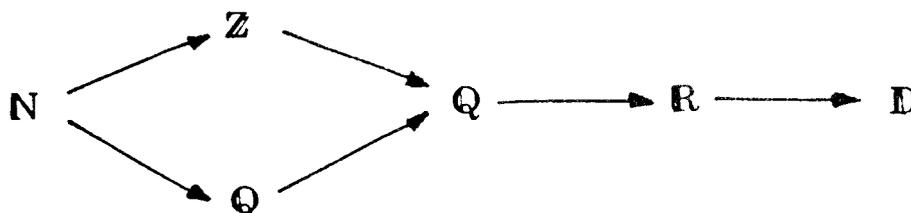
(d) La schématisation et la formulation de la structure poursuit le processus d'identification et de mise à jour. Diènes ne prévoit pas de situations générales spécifiques. Diènes ne prévoit pas de situations générales spécifiques de cette étape (ce qui se conçoit bien s'énoncerait-il clairement ?) mais la représentation par un graphe est souvent envisagée comme une expression simplifiée mais naturelle et directe de la pensée de l'enfant. Figurer les objets par des points et les opérateurs par des flèches s'apprend par l'usage de l'imitation, comme un langage.

(e) La symbolisation est la transcription dans un nouveau langage des propriétés représentées à l'étape précédente. L'axiomatisation est l'étape de réorganisation de la connaissance acquise, du choix des propriétés fondamentales de la mise en place des structures les unes par rapport aux autres; cette position étant bien entendu celle assignée par l'état actuel des connaissances mathématiques (qui doivent donc s'identifier, se figer, en « mathématique moderne » pour devenir une référence didactique). Cette étape se déroule elle aussi suivant la démarche précédente jeux libres, avec règles isomorphes, formalisation...

Et ainsi apparaît la nature de ce processus psychodynamique. La connaissance n'est pas organisée comme une réponse adaptable, adéquate, économique et personnelle à des situations-problèmes, elle est fournie toute armée par la culture qui en assure la validité et l'utilité future et ne laisse à l'élève que la possibilité d'adhérer. Elle est seulement un peu cachée suivant une fiction régulière conventionnelle et simple. Ce que l'élève doit faire pour la découvrir est supposé être le fonctionnement de la connaissance dans toutes les situations didactiques ou non. La méthode de Diènes est un langage de communication avec les élèves, un mode de codage didactique de la connaissance qui est supposé ne pas en modifier la nature (conformément à ce qu'affirme Bruner) et c'est un contrat didactique avec les élèves, pour le décodage des messages. Certes cette méthode d'exposition promet d'être très lente et de ne convenir qu'à des exemples très simples.

(g) C'est pourquoi elle est reprise par le processus de généralisation et son antagoniste la particularisation : Une fois connus les axiomes d'une structure, il est possible d'en

abandonner certains, ou d'en arrêter d'autres et ainsi d'admettre le débat constitutif de la science. Diénès donne comme exemple de ce processus le schéma suivant :



Processus psychodynamique et pratique pédagogique

Le contrat dont nous parlions plus haut s'appuie sur une fiction épistémologique et psychologique très répandue (à l'époque) et reprend des pratiques professionnelles bien établies :

a) Les comportements des élèves sont supposés être essentiellement empiriques : leurs rapports répétés avec la « réalité » des situations didactiques font surgir les structures qui y sont incluses comme la « gestalt » dans la perception. Ce processus d'abstraction s'interprète parfaitement dans la théorie des traces mémorielles.

b) L'acceptation du modèle empiriste pour rendre compte du fonctionnement de l'élève s'appuie sur une *position traditionnelle* fondamentalement réaliste et presque platonicienne des enseignants : la réalité a des structures que l'homme découvre, le professeur est porté à simuler la nature en cachant les structures qu'il veut enseigner, la découverte étant une lecture du monde.

c) La technique des jeux isomorphes correspond à la *pratique ancienne* de la répétition des problèmes pour en enseigner la résolution (en les classant autour de types qu'il faut reconnaître). Sur ce point, la méthode nouvelle peut ainsi s'opposer à l'ancienne et en même temps s'y substituer sans modifier sensiblement les pratiques.

d) La position ancienne devait séparer l'apprentissage du savoir-faire et celui du sens. La nouvelle permet d'espérer fondre les deux car elle assure au professeur que la signification de la structure qui est finalement apprise et les algorithmes qui y sont attachés n'est rien d'autre que l'ensemble des réalisations qu'elle décrit et, inversement, l'abstraction se produit fatalement par le processus même qui engendre la mémorisation. Mais en fait la « structure » va se substituer aux savoir-faire et l'apprentissage du sens

encore plus négligé. On assistera même à la disparition des problèmes.

e) Le structuralisme triomphant des années 70 assure, quant à lui, l'utilité et la fécondité de ces acquisitions.

f) La didactique de Diènés satisfait en même temps des conditions qui paraissent, auparavant, contradictoires : pour chaque structure la construction précède l'analyse et le maître entend que l'on procède du concret à l'abstrait, de la manipulation et de l'action à la réflexion, du jeu à l'étude puis à l'application. Mais on peut commencer par enseigner les structures les plus générales donc les plus simples pour finir par les plus particulières et les plus complexes.

g) La reformulation en langage mathématique (isomorphisme, réalisation,...) ou mathématique des phénomènes psychologiques ou didactiques est conforme au projet pan-mathématique qu'exprimait plus haut Lichnerowicz et conforme aussi à un usage Piagétien. Elle joue un grand rôle dans l'émergence d'une première « théorie » didactique dont la valeur n'a pas besoin de s'enraciner dans l'expérience, selon ses propres schémas, autrement que par une reconnaissance, in situ, dans le travail d'enseignement : la théorie est vraie parce que l'enseignement qu'elle décrit, marche. h) Un revers de cette conception a été qu'elle a déchargé les enseignants de la responsabilité d'assurer certaines étapes en « garantissant » les résultats de la méthode par des lois psychologiques.

Par exemple les problèmes, au sens classique ont disparu en tant que pratiques et en tant qu'objectifs : il ne s'agissait guère que d'applications que l'acquisition des structures devait rendre possibles le moment venu.

i) D'autre part la position de Diènés n'était pas incompatible avec la plupart des théories pédagogiques que nous avons évoquées plus haut. De plus, Diènés a pris des positions intéressantes mais indépendantes de sa théorie didactique.

Influence sur l'enseignement des décimaux du processus psychodynamique et critique

Revenons à l'enseignement des décimaux et reprenons notre analyse des modifications dues à la réforme, à la lumière de ces données.

A la référence du système métrique et aux pratiques qui lui sont liées, on a préféré présenter différentes bases, d'abord la base 2 où le nombre des unités différentes est plus rapidement croissant et les manipulations plus simples. Les conditions de la reproduction d'activités de numération sont facilitées mais aucun problème nouveau n'apparaît et ces réifications ne sont que des répétitions.

De plus, les vrais problèmes de la mesure : le caractère non discret, la recherche d'une unité et d'un moyen de comparaison et de report, l'encadrement, les erreurs, tous ont été gommés au départ et renvoyés à une entrée ultérieure et solennelle. Les activités ne se réfèrent plus, ni à une utilité pratique, ni à une justification théorique explicite ou construction. Il est révélé à l'élève que puisqu'il a fait telle tâche, il vient de découvrir telle propriété. La structure, qu'un observateur juge présente, dans la situation-problème, est réputée être entrée dans les acquisitions de l'élève par le fait même de son succès à l'épreuve comme si le labyrinthe dans lequel on a placé un rat était connu de lui en tant que tel dès qu'il en est sorti une ou deux fois.

Je ne crois pas que Diénès ait dit ou pensé ainsi, mais rien dans sa « théorie » didactique ne permet au professeur de prendre en compte les comportements des élèves, de les expliquer et de les prévoir, lorsqu'ils sont « erronés » et d'y adapter les situations d'enseignement. Par exemple, c'est la confiance dans la providence ou dans la prévoyance des hommes ou de celle de l'enseignant qui permet aux élèves d'admettre que les décimaux mesure héritent de certaines propriétés des décimaux-repères. On ne peut rien dire de la signification de la réussite ou de l'échec de l'élève.

Conceptions et situations

Ce n'est pas le lieu ici de faire une critique systématique de l'œuvre si intéressante de Diénès mais il faut bien voir l'obstacle principal sur lequel elle bute et qui est celui de l'engagement de la connaissance dans l'action finalisée. Une « structure mathématique » prend sa signification dans l'emploi qui en est fait, dans la fonction qu'elle joue, dans la constitution des autres, et surtout dans les problèmes qu'elle a permis de résoudre. C'est au niveau du concept qu'il faut l'envisager. L'analogie de fonction dans un même

problème n'est pas, bien évidemment garante qu'il existe un isomorphisme entre les structures qui la présentent, mais surtout, l'observation entre deux cas d'un isomorphisme n'est aucunement garante d'un fonctionnement analogue de deux situations.

Le structuralisme, instrument fécond pour la recherche, devient dans l'enseignement, une magie trompeuse.

En fait, les travaux de Diènes, s'ils ont bien installé le contenu au centre du débat d'enseignement, ne conduisent pas le didacticien à questionner les mathématiques pour y chercher, au-delà des *structures*, les *concepts* et au-delà des concepts, éventuellement les *conceptions* qui pourraient se forger chez un sujet dans des *situations* historiques ou didactiques particulières. L'analyse de ces conceptions, qu'il faudra que l'élève possède ou évite, est inséparable de celle de la famille des situations-spécifiques où elles prennent leur fonction et leur utilité. Toutes les deux sont inévitables dans toute entreprise qui prétendrait, à la fois fournir une théorie dotée de ses méthodes de confrontation (probablement spécifiques aussi) et de techniques didactiques continuellement contrôlables par les enseignants. Les travaux de Diènes ne conduisent pas, et par voie de conséquence serions-nous tentés de dire, à interroger les *comportements* des élèves, non seulement en tant que réponse à une sollicitation didactique mais surtout en tant que source d'informations sur les questions théoriques de didactique.

Et c'est pourquoi peut-être, après ces deux longues études de pratiques d'enseignement on a l'impression de savoir si peu de choses sur les décimaux, sur les diverses conditions de leurs genèses et même de leur emploi ainsi que sur les comportements attestés ou possibles des élèves à leur sujet.

Quelques résultats en 1979

Hypothèse

D'autres méthodes sont apparues à la suite de la réforme. Bien que leur étude conduirait à préciser le champ des « variables » sur lesquelles jouent les didacticiens de cette période, nous ne la poursuivrons pas ici : d'une part, leur impact a été relativement plus faible, d'autre part, elles

agissaient dans le sens que nous avons indiqué, parfois même de façon excessive. Nous estimons finalement que la conception est restée la même que dans les années 1960.

Illustration

Nous n'avons pas rapporté ici des travaux qui ont permis de mettre en évidence les phénomènes que nous avons signalés mais pour illustrer leur permanence, nous relevons ci-dessous quelques résultats d'une enquête récente de l'I. N. R. P. sur le comportement de près de 900 élèves* en les disposant de façon à illustrer les caractéristiques de la conception des décimaux que nous avons décrite plus haut.

a) Techniques... Nous pouvons observer ainsi que les points sur lesquels les différences significatives apparaissent sont ceux que nous avons signalés : notre hypothèse n'est pas contredite.

Exercices sur IN	% réussite	Exercices correspondants dans ID	% réussite
ENCADREMENTS			
19225 et 499425	64	6,137 et 728,32	49
134900	56	57,05	50
340090	56	0,583	47
ORDRE			
INRDP (1977)	72	8 nombres	26
		- selon la partie entière	74
		- qui ont même partie entière	28
CHANGEMENTS D'ECRITURES			
Passage de l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres			
176 et 5077	85	1,047 m	61
12075320	74	0,049 m	63
		16,84 m	85
ADDITIONS			
4325128 + 92042 + 104095	89	45,25 + 0,3451 + 3092,048	89
SOUSTRATIONS			
315426 - 42975	61	1241,39 - 327,043	60
MULTIPLICATIONS			
7485 × 374	60	54,15 × 3,02	66
DIVISIONS			
8359 par 39	69	74,19 par 3,4	52

* Institut National de Recherche Pédagogique (unité de recherche mathématique sur l'élémentaire). Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. T. 1 : comportement des élèves (1979).

b) Conversions dans le système métrique.

Effectif : 940

4,15 m ²	←	dm ²	29%
3 m ²	←	l	22%
5,25 l	←	cl	74%
0,13 t	←	kg	40%
2h 25 mn	←	mn	53%

c) Il est intéressant de rapprocher de ces résultats sur les techniques, ceux qui ont été obtenus à propos de la proportionnalité. Il s'agissait de calculer les proportions pour 12, 4 et 10 personnes d'une recette connue pour 6 personnes.

Effectif 947 :		12	4	10
Proportions correctes (y compris une fraction)	15	9	5	
Deux proportions correctes (pourcentages)	50	24	19	
Une proportion correcte	4	10	12	
Donne les proportions pour une personne	12	12	13	
Autres solutions fausses	19	45	51	

Ce résultat est entièrement conforme à ceux obtenus par Alain Mercier* qui a montré que le formalisme des opérateurs (des machines) tendait à faire disparaître l'usage de la notion de rapport, surtout en tant qu'invariant dans une application linéaire, au bénéfice d'un calcul fonctionnel en général mal assimilé. La recherche de la proportion pour une personne correspond au début de cette procédure : elle devrait fournir la fonction linéaire qu'il faut appliquer aux valeurs de l'ensemble départ, mais, la valeur obtenue reste une mesure et l'élève en reste là.

Ces résultats sur les naturels sont valides pour les déci-

* Mercier A. : Etude des notions « opérateur » « machine » mémoire de D.F.A. soutenu en novembre 1978. Université de Bordeaux.

maux. Ils montrent peut-être que les élèves, bien qu'entraînés à la technique des opérateurs, n'ont jamais été beaucoup confrontés avec les problèmes que rencontrent les naturels dans ce rôle.

d) Les problèmes numériques :

Voici les pourcentages de réussite à quelques exercices, un peu complexes il est vrai, (avec usage de diagrammes, de tableaux de péage, de tarifs etc.) mais basés sur des calculs numériques dans \mathbb{N} ou dans \mathbb{D} .

Calcul de la distance entre deux villes	15%
Calcul du prix de l'essence	0,8%
Calcul d'un tarif postal	48 à 54%
Calcul de distances sur une carte routière	14%
Sur des problèmes plus classiques de pourcentages, les réussites sont de l'ordre de	30 à 45%

e) D'ailleurs les auteurs concluent :

« En ce qui concerne les acquis traditionnels sur les techniques opératoires, les comparaisons qui ont pu être faites avec des enquêtes plus anciennes montrent que, contrairement à une opinion répandue, « le niveau ne baisse pas ». Les élèves d'aujourd'hui savent aussi bien faire des opérations qu'il y a vingt ans, et ont, de plus, la maîtrise d'outils que ne connaissaient pas leurs aînés. »

En revanche, les élèves du CE2 et du CM2 ont des difficultés pour résoudre des problèmes : il s'agit là de réinvestir leurs savoir-faire techniques dans des situations où ils soient pertinents. Cette faible disponibilité d'outils par ailleurs bien maîtrisés, constitue l'information la plus claire des résultats et renvoie aux multiples aspects de ce qui pour les enfants fait difficulté dans la résolution des problèmes.

Variables

D'autres études, que nous ne rapportons pas ici, montrent en fait que l'effet de variables telles que le nombre des chiffres maniés, le nombre des chiffres de la partie entière, la présence de zéros intercalés près de la virgule, l'égalité des nombres de chiffres après la virgule, ... joue un rôle conforme au modèle.

QUELQUES PROBLÈMES DE L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX

L'examen détaillé mais quelque peu naïf des pratiques des vingt dernières années nous a permis — d'une part d'identifier les difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des décimaux, — d'autre part de reconnaître les difficultés des conceptions didactiques classiques ou nouvelles à trouver une prise sur les résultats insuffisants.

Pour pallier à un échec dans l'acquisition d'une connaissance, la pratique habituelle consiste à renforcer l'apprentissage par des répétitions, la multiplication des exercices, l'adjonction d'explications et de méta-discours dans les objectifs d'enseignement, ... et même de procédés didactiques ou mnémotechniques, ce qui a pour conséquence d'alourdir et d'allonger l'enseignement. Il faut donc en conséquence et en réaction à la fois, l'alléger en renvoyant à plus tard l'apprentissage de ce qui est considéré comme secondaire et en ne retenant que l'essentiel, le fondamental, les algorithmes pour les uns, les structures pour les autres. Nous pensons que ces principes conduisent à des décisions qui peuvent rendre impossible la conception de situations capables de donner un sens convenable aux notions enseignées et donc d'en hypothéquer l'emploi et, de toute manière, ils empêchent la fabrication de situations didactiques nouvelles dans le domaine de l'innovation, de l'invention. Nous nous proposons maintenant de poser le problème différemment et, anticipant sur les apports de la deuxième partie de cet article, d'esquisser les problèmes qui seront étudiés par la suite.

PROBLÈMES D'ENSEIGNEMENT ET PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Pour comprendre les difficultés de l'enseignement des décimaux, il ne faut pas se borner à examiner les dysfonctionnements de l'apprentissage.

Le schéma classique, dans lequel l'apprentissage est la mise en mémoire d'une connaissance qui va s'appliquer, a permis une approche économique de la didactique. Il s'agit de décomposer l'organisation de l'enseignement en sous-tâches pouvant se concevoir indépendamment et s'exécuter séquentiellement. Chaque sous-tâche a pour fonction de permettre de :

- définir la connaissance visée, la réorganiser sous la forme la plus adaptée à sa communication ou à son apprentissage, la faire apprendre au sens de mémoriser sous cette forme et montrer comment on l'applique;
- placer cette sous-tâche dans un domaine de savoirs constitués ou sous contrôle d'une activité spécialisée : la discipline mathématique, les théories de la communication ou de l'apprentissage, ou de l'enseignement etc... Une utilisation naïve de ce schéma permet essentiellement aussi une décomposition des responsabilités et des contrats dans le déroulement de l'enseignement et fournit donc un cadre à l'interprétation des difficultés, des erreurs et des échecs. L'erreur est interprétée comme l'indice du non-fonctionnement d'une des séquences prévues, d'un écart entre un projet et sa réalisation : le savoir a été mal appris, mal retenu, ou mal appliqué, ou mal compris, mal relié aux autres savoirs... Les difficultés sont celles de l'élève ou celles de l'enseignant, ... ou celles de l'enseignement : les objectifs sont mal précisés, mal communiqués, les moyens sont insuffisants, les résultats mal évalués... etc.

Nous nous proposons ici d'essayer une autre approche : l'apprentissage est une adaptation de l'élève à une situation-problème nouvelle (*). Les difficultés qu'il rencontre sont donc fondamentales pour provoquer cette adaptation. De plus, elles peuvent être constitutives du nouveau savoir, c'est-à-dire être indispensables à sa compréhension (**). Ces difficultés sont celles que portent en elles la conception antérieure de l'élève et la situation-problème choisie les a seulement révélées. La nouvelle conception apparaît parce qu'elle est une solution à ces difficultés. Elle est une rééquilibration des systèmes de réponse de l'élève (*) soit qu'elle

(*) PIAGET : « Théorie de l'équilibration ».

(**) BACHELARD : « Notion d'obstacles épistémologiques dans la formation de l'esprit scientifique ».

lève les contradictions portées par les anciennes conceptions, soit qu'elle apporte des simplifications substantielles.

Dans cette perspective (à laquelle nous nous référons souvent et que nous étudierons à nouveau), ce qui est, ailleurs, interprété comme une difficulté des élèves dans un apprentissage, devient alors une difficulté pour une ancienne conception à être remplacée par une nouvelle — lorsqu'elle est en difficulté dans la situation-problème présentée.

Autrement dit, pour comprendre l'apprentissage des décimaux, il faut chercher *quelles sont les situations-problèmes* dans lesquelles ils sont de façon évidente une meilleure solution que les autres structures, en particulier celles déjà connues de l'enfant.

Il s'agit donc maintenant d'un couple de *problèmes mathématiques* (eux-mêmes formés d'un couple situation-conception) à comparer selon des critères à déterminer. On peut espérer mathématiser aussi cette comparaison en l'interprétant en termes d'économie sur les variables à déterminer. C'est la direction dans laquelle doit s'avancer la didactique aujourd'hui.

EPISTEMOLOGIE ET MATHÉMATIQUES.

Ce point de vue ne permet pas de rendre bien indépendantes la recherche et l'étude des conceptions particulières relatives au concept de décimal et la détermination des situations qui pourraient leur être associées. C'est pourquoi il n'y a pas encore de méthodes très naturelles de recherche. C'est seulement après coup qu'on peut mettre à l'épreuve le choix des variables pertinentes et acquérir la conviction qu'il est bon.

La méthode la plus tentante consiste à prendre les changements de couples « situation-conception » là où ils se sont produits pour l'humanité, c'est-à-dire dans l'histoire. L'étude de la genèse des concepts constitue la méthode la plus féconde de l'épistémologie moderne.

Nous savons que nos connaissances ne nous permettent pas encore de fabriquer et de contrôler des transpositions didactiques satisfaisantes pour un usage éducatif. Il n'est pas question, de toute manière, de réintroduire la méthode historique dans l'enseignement mais de comprendre les

mécanismes de production des savoir, qui nous intéressent en termes de *conditions reproductibles*. L'autre méthode intéresse plus spécialement les mathématiciens et consiste en une étude a priori des différentes manières de constituer des notions. L'explicitation des contraintes auxquelles on a obéi consciemment, ou non, peut, elle aussi, fournir des indications intéressantes. Nous allons conjuguer ces deux méthodes pour la recherche des questions auxquelles la construction des décimaux est une réponse adéquate.

Dans la mesure où ces réflexions ne servent qu'à la constitution du problème épistémologique qui sera mis en expérience et où nous ne cherchons pas à conclure directement sur la foi d'opinions didactiques conscientes ou non, nous pouvons les accepter tous les deux, concurremment et conjointement.

LA DÉTERMINATION DES CONCEPTIONS ET DES SITUATIONS.

Anticipant sur les résultats de l'étude théorique à venir dans la deuxième partie de cet article nous allons rapidement passer en revue les questions qui se posent et les choix qui peuvent s'ouvrir.

Pour construire les décimaux il suffit de considérer l'ensemble \mathbb{D}^+ engendré en adjoignant à \mathbb{N} un élément d tel que $10d = 1$ et de poser que l'ensemble obtenu est muni d'opérations qui prolongent celles de \mathbb{N} en gardant les mêmes propriétés fondamentales.

En considérant $\mathbb{N} \mid d \mid$ avec $10d = 1$ on obtient un codage prolongeant celui de \mathbb{N} , et tout élément $x \in \mathbb{D}$ s'écrit sous la forme $x = \sum a_i 10^i$ $i \in \mathbb{Z}$. Alors ayant conservé tout ce que l'on désirait, on peut montrer que \mathbb{D}^+ est totalement ordonné (contrairement à $\mathbb{N} \mid x \mid$) par la relation $a \leq a' \iff \exists a'' \in \mathbb{N} \mid d \mid$ tq $a' - a = a''$, dense et archimédien. Les seuls éléments de $\mathbb{N} \mid d \mid$ qui sont inversibles dans $\mathbb{N} \mid d \mid$ sont les multiples des diviseurs de d . Mais pour tout nombre décimal a il existe un décimal a' qui peut jouer le rôle d'inverse de a avec la précision ϵ quelconque voulue :

$$0 < 1 - aa' < \epsilon$$

On peut alors montrer que \mathbb{D}^+ est dense dans \mathbb{Q}^+ et que \mathbb{R}^+ est le complété de \mathbb{D}^+ .

Cette construction est celle qui décrit le mieux la construction directe que nous avons décrite comme étant typique en 1960. (Il faudra dire en quel sens).

Nous verrons qu'elle correspond assez bien, d'une certaine façon, au processus que l'on peut prêter au travail de Simon Stevin qui construisit les décimaux pour unifier la notion de nombres rationnels et radicaux en particulier, à la suite d'études sur les fonctions polynômes (Les multi-nômes).

Malgré cela, cette construction, comme d'ailleurs toutes celles que l'on a avancées à priori, fait disparaître les problèmes que la structure est chargée de résoudre.

Elle correspond certes à la meilleure récupération des connaissances antérieures des propriétés de \mathbb{N} , mais ne favorise pas une rupture qui permettrait de bien différencier \mathbb{D} de \mathbb{N} . Elle ne permet pas surtout de maîtriser la notion d'homothétie et de l'identifier avec les nombres déjà construits.

F. Colmez a montré dans une série d'expériences du type des nôtres qu'aujourd'hui les élèves confrontés à des problèmes d'invention des moyens de mesure, reconstruisent sans difficulté des décimaux-mesure selon un schéma qui n'est pas éloigné de celui que nous avons adopté.

DE L'ORDRE DISCRET A L'ORDRE DENSE.

Si on veut fonder \mathbb{D}^+ contre \mathbb{N} il faut donc une situation où l'on a besoin que chaque élément ait un inverse, et où on a besoin d'un ordre dense. Selon que l'on choisira certaines situations, certains ordres de grands, ou d'autres..., la solution la meilleure sera \mathbb{Q}^+ ou \mathbb{D}^+ ou seulement \mathbb{R}^+ . \mathbb{Q}^+ est une structure très incommode pour la mesure, pour les calculs pratiques de sommes et de différences, pour des comparaisons, donc pour la topologie de la droite. Peut-être est-il plus favorable de fabriquer \mathbb{D}^+ pour pallier aux insuffisances de \mathbb{Q}^+ plutôt que de \mathbb{N} ?

Il pourrait ainsi apparaître clairement que \mathbb{D}^+ est une approche d'une structure connue (et non pas « quelque chose »). Mais en fait pourquoi pas une non-approche des nombres algébriques ? Historiquement ce n'est pas \mathbb{Q} que \mathbb{D} est chargé d'approcher. R. Douady a longuement étudié une réalisation didactique dans cette voie (Voir article *infra*).

DE LA MESURE AUX HOMOTHETIES DE D.

Il est finalement relativement facile d'obtenir l'usage des décimaux-mesure, en tant que semi groupe additif à opérateurs naturels. Nous avons vu que la notion d'application linéaire de D dans D l'est moins, et surtout la désignation de ces applications linéaires à l'aide de nombres précédemment utilisés pour les mesures. Il y a là une opération qui correspond à l'identification d'un espace vectoriel avec son dual et qui appelle des situations et des processus appropriés. Comment concevoir cela à un niveau élémentaire ? Est-il possible dans ce rôle de faire l'économie de l'étude de \mathbb{Q} en tant qu'ensemble des opérateurs archimédiens ? C'est seulement dans (\mathbb{Q}^+) que le produit de deux rationnels prendrait tout son sens. L'approche de ces opérateurs à l'aide des opérateurs décimaux est-il un problème différent par le sens de celui posé au paragraphe précédent ?

DE LA STRUCTURE AUX REPRESENTATIONS.

Comment passer de cette terminologie mathématique à des conceptions d'élèves ? Est-il possible de constituer une représentation efficace et correcte de la notion de décimal, qui constitue un sens des algorithmes permettant leur usage ?

On peut imaginer — et l'histoire l'atteste — qu'il existe des représentations différentes pour les décimaux.

Par exemple : R_1 : 0,3 est « ce qui multiplié par 10 est égal à 3 »

R_2 : 0,3 est « 3 fois la dixième partie de 1 »

Pourrons-nous en choisir une autre, que la représentation dominante, et l'enseigner pour en observer les effets ?

Nous verrons que si on fait réellement fonctionner la pensée mathématique-créatrice des élèves, il faut aussi accepter que des conceptions transitoires éventuellement fausses se créent chez eux. Comment peut-on provoquer leur rejet ou leur abandon ?

DES CONCEPTIONS AUX SITUATIONS.

Comment élaborer des situations qui fassent réellement fonctionner une notion ? C'est-à-dire qu'on ne peut pas

répondre sans mettre en œuvre cette notion et sans lui donner un sens. De quels paramètres dépendent qualitativement les procédures qui attestent l'usage de cette notion ? Comment rendre une assimilation (au sens de Piaget) nécessaire, quand une accommodation (id) est-elle indispensable ?

Voici quelques unes des questions spécifiques qui se posent à propos de la didactique des décimaux et auxquelles nous essayerons d'apporter des éléments de réponses. A travers cette étude se posent d'autres questions plus générales comme par exemple celle de la reproductibilité en didactique, ou même de la possibilité de réaliser des expériences scientifiques. Nous essaierons de les aborder aussi.

Nous avons analysé en détail différentes manières d'enseigner les nombres décimaux utilisées en France pendant les vingt dernières années, notamment celles qui ont suivi la réforme des années 70. Nous avons montré que les résultats scolaires n'étaient guère affectés par les variations qui opposaient les différentes méthodes, et qu'ils présentaient toujours certaines faiblesses. Nous avons émis l'hypothèse que ce fait était dû aux déficiences des conceptions didactiques en usage et de leurs bases épistémologiques. Le manque d'études dans ce domaine — notamment en ce qui concerne l'analyse des situations d'enseignement, des processus d'apprentissage, de la tâche du maître — conduit les différentes pratiques à obéir à une même conception des décimaux.

Pour pouvoir être étudiées expérimentalement, les *problèmes d'enseignement* doivent finalement s'exprimer par des choix théoriques qui se traduisent eux-mêmes par des méthodes réalisables.

Il s'agit d'abord, dans cette deuxième partie, de montrer qu'il existe de véritables alternatives à la conception dominante de \mathbb{D} , et par là, de mettre en évidence certains de ces choix didactiques qui s'offrent à l'enseignant.

Nous présenterons donc une expérience conçue en relation avec une analyse mathématique, historique et épistémologique des différentes conceptions des nombres naturels et des nombres décimaux, en détaillant les principales caractéristiques des processus et des situations qui rendent les élèves capables d'acquiescer ces conceptions. Afin de contrôler cette approche théorique, le même processus a été reproduit huit fois avec les mêmes maîtres et cinq fois avec des maîtres différents. Nous avons tenté de mettre en évidence le rôle des variables de commande et la part des décisions didactiques dans l'évolution du processus qui ne se présente pas comme une méthode optimale du point de vue éducatif.

Cet essai d'« épistémologie expérimentale » permettra de chercher de nouveaux critères pour analyser les processus d'enseignement.

Ces critères seront signalés à l'occasion, et de courtes études des quelques questions de didactique, parmi les plus importantes, seront insérées dans le cours du récit. Car nous souhaitons aussi, à cette occasion, entamer un débat sur les rapports qu'entretiennent les problèmes d'enseignement avec les domaines scientifiques connexes déjà constitués, d'une part, et avec *les problèmes de didactique*, d'autre part. Nous insisterons sur la complémentarité des deux aspects — phénoménotechnique et scientifique — de la didactique.

2. Conception générale d'un processus d'enseignement des décimaux

2.1. Conclusions de l'étude mathématique

2.1.1. Axiomatique et choix didactiques implicites

Il existe bien des manières de définir mathématiquement ou de construire les décimaux. Elles diffèrent par le choix de ce que l'on considère connu comme objets mathématiques et comme méthode de démonstration, mais leur résultat est le même, en ce sens qu'il existe un moyen de montrer l'équivalence, l'isomorphisme des structures obtenues. Chacune de ces constructions axiomatiques est dans le champ des mathématiques; par contre, l'étude de ce qui fait leurs différences, les raisons des choix, de ce qui est admis ou non, de ce qui est important ou non, facile ou non... ne relève pas des mathématiques. Une construction axiomatique est chargée implicitement d'options épistémologiques, de présupposés didactiques qu'il faut se garder de croire nécessaires au même titre que les conclusions mathématiques, mais par lesquels il faut bien passer pour obtenir un discours qui permet de communiquer la notion. Deux méthodes diffèrent par le choix des axiomes et des règles de production des théorèmes.

2.1.2. Transformations du discours mathématique

Il existe aussi des procédés formels qui transforment un discours mathématique en un autre relevant de la même axiomatique. Ces procédés affectent plus ou moins profondément le discours :

— la logique permet le changement de l'ordre des énoncés, diverses présentations des implications, (condition néces-

saire ou condition suffisante mises en évidence) le regrou-
pement en énoncés généraux, l'éclatement en lemmes et
corollaires etc.

— la réthorique suggère ses figures de pensée, l'antithèse,
la comparaison, la répétition* jusqu'à l'hypotypose et
pourquoi pas la prosopopée** et nous ajouterons l'illustra-
tion, l'exemple, le commentaire etc.

— la grammaire et la stylistique permettent les reformula-
tions en langage plus simple, le remplacement des termes
par leur définition, le choix des synonymes etc. sans parler
des procédures de présentations chères à Cagné (1980).

Ces divers procédés appliqués de façon presque auto-
matique fournissent toujours un discours, un exposé que
l'on peut espérer plus simple, plus clair, plus redondant...
et donc plus intelligible, plus assimilable que le discours
mathématique initial. Ce point de vue alimente un certain
nombre de recherches qui, malgré tout leur intérêt, n'ont
pas réussi à montrer que ces procédés agissaient de façon
spécifique et différenciée selon les notions et sur les acqui-
sitions des élèves. Comme les méthodes pédagogiques dont
nous avons étudié les effets dans l'article précédent, ces
procédés ont en commun de ne pas remettre en cause, de ne
pas interroger la construction mathématique elle-même.

2.1.3. *Métamathématique et heuristique*

Il existe un langage spécialisé dans la description et la
comparaison de ces méthodes; il fonctionne dans le discours
des mathématiciens, dans leurs commentaires, dans leurs
cours et leurs confidences. À côté des termes authenti-
quement mathématiques parfois utilisés de façon métapho-
rique, des indispensables termes métamathématiques (qui
décrivent le langage mathématique) et de certains termes
paramathématiques, (considérés comme clairs bien que
n'étant pas définis) on trouve essentiellement des concepts
heuristiques : généralisation, synthèse, analyse, problèmes
tels que les présente Polya dans ses ouvrages, ce langage,
plutôt descriptif et classifiant chez certains de ses continua-

* Ici, le lecteur complaisant voudra bien insérer les 43 principales
figures dont il trouvera la liste par exemple au mot «figure» dans le
«dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française»
de Robert.

** Cf. Lucienne Félix.

teurs, permet néanmoins de s'interroger sur les différentes constructions d'une notion à partir de ses motivations.

2.1.4. Extensions et restrictions

Prenons, par exemple, une construction directe des décimaux \mathbb{D} :

* Considérons, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, la relation d'équivalence \sim
 $(a,n) \sim (b,p) \Leftrightarrow a \cdot 10^p = b \cdot 10^n$, la classe de (a,n) étant
notée $\frac{a}{10^n}$

* $\mathbb{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$ est muni d'opérations stables par passage
au quotient : $(a,n) + (b,p) = (a \cdot 10^p + b \cdot 10^n, n+p)$
 $(a,n) \times (b,p) = (a \cdot b, n+p)$

qui prolongent les opérations dans \mathbb{N} , identifié à $(\mathbb{N}, 0) \subset \mathbb{D}$

* \mathbb{D} est ordonné par $(a,n) \leq (b,p) \Leftrightarrow a \cdot 10^p \leq b \cdot 10^n$

* Alors $(\mathbb{D}, +, \times, \leq)$ est un anneau commutatif unitaire
intégral et totalement ordonné.

Cette méthode est typique d'une catégorie de constructions qui consistent à prendre une structure connue, ici \mathbb{Z} et à en faire une extension, qui lui rajoute des éléments. Nous avons esquissé dans l'article précédent une construction de \mathbb{D}^+ par une extension de \mathbb{N} qui procédait par l'adjonction d'un seul élément et tel que $10d = 1$. Toutes les puissances de cet élément, leurs produits et leurs sommes avec un nombre fini des autres engendrent \mathbb{D}^+ . Bien que produisant le même résultat, cette méthode permet de mieux «voir» que l'on a ajouté le moins de choses possibles à \mathbb{N} , et ce que l'on a ajouté. Par contre, elle exige une prise de conscience de ce qui représente toutes les opérations possibles d'un élément avec les autres, c'est-à-dire le semi-anneau des polynômes à coefficients naturels $\mathbb{N}[x]$. Elle suppose connue une structure plus complexe.

Il existe une autre catégorie de constructions qui procède à l'inverse par restriction. On a déjà défini une structure générale, par exemple \mathbb{Q} , et l'on se restreint à ne prendre qu'une partie de ses éléments. *Exemple* : les décimaux sont les rationnels exprimables par une fraction décimale.

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{D} \text{ tq } (\exists p \text{ tq } x \cdot 10^p \in \mathbb{Z})\}$$

Il existe bien d'autres méthodes fondées sur d'autres motivations mathématiques (problèmes d'ordre ou de topologie par exemple). Nous n'en rendons pas compte ici mais le lecteur pourra consulter Ernel (1981).

2.1.5. Motivations mathématiques

On peut aussi imaginer beaucoup d'autres extensions de \mathbb{N} . Pourquoi celle-là ? que permet-elle de résoudre que les autres ne permettraient pas ? Il est trop tôt pour chercher une situation précise qui rendrait nécessaire la création et l'usage des décimaux, mais c'est là qu'il faudra en venir. Certains problèmes ne peuvent trouver de solutions dans certains ensembles parce que ceux-ci ne sont pas assez riches : par exemple, on ne trouve pas dans \mathbb{N} de nombre tel que : (1) $a \times 3 = 2$, ou bien tel que $7 + a = 5$ (2).

Or, il peut arriver, dans certains domaines ou dans certaines applications que de telles équations aient, à l'évidence, toujours une solution : par exemple, on peut toujours partager une longueur en trois parties égales, même si elle mesure 2 m. Alors, on veut représenter par un nombre la longueur ainsi obtenue. Il faut donc construire une extension (ici de \mathbb{N}) dans laquelle ces équations sont toujours résolubles, \mathbb{Q} pour (1), \mathbb{Z} pour (2) ou tout autre structure qui les contiendrait.

On aurait pu construire \mathbb{R} , les réels, pour que toute suite de Cauchy y soit convergente ou \mathbb{C} , les complexes, pour que tout polynôme à une indéterminée non constante et à coefficients dans \mathbb{C} , y ait au moins une racine.

Et pourquoi une restriction ? Lors du plongement d'un ensemble A dans une extension B , tous les éléments de A ont toutes les propriétés communes aux éléments de B , mais l'inverse n'est pas vrai et les éléments de B peuvent avoir « perdu » des propriétés intéressantes. Par exemple, « n'est le successeur de 17 » a une solution dans \mathbb{N} et dans \mathbb{D} . Ainsi \mathbb{D} hérite des facilités de calcul que l'on trouve dans \mathbb{N} ; mais \mathbb{Q} les a perdues, en particulier pour les différences, les comparaisons, le calcul sur les intervalles. Il arrive donc que l'on ait pu construire, par un moyen ou par un autre, un ensemble B satisfaisant pour y trouver la solution d'un problème, mais tel que les calculs ou les raisonnements y soient pénibles. On cherche alors un sous-ensemble, une

restriction A de B, tel que tout élément de B puisse être représenté, approché par un élément de A sur lequel les calculs seront plus faciles :

\mathbb{D} approche \mathbb{Q} ou \mathbb{R} parce que, pour tout réel, quelle que soit la tolérance que l'on s'accorde, il existe toujours un décimal dont la distance à ce réel soit inférieure à la tolérance choisie.

Des problèmes de ce genre se rencontrent très fréquemment en mathématique où l'on veut souvent étudier tous les objets engendrés par un système générateur ou au contraire chercher un système générateur commode pour un ensemble donné.

Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses « propriétés » et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle — qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques.

2.1.6.

Cette remarque nous amène à observer que les méthodes heuristiques d'analyse ne prennent pas vraiment en charge les situations d'emploi ou de création des mathématiques. Elles ignorent, entre autre, le sujet, le groupe social et leur histoire.

2.2. Conclusions de l'étude épistémologique.

Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. Cette étude ne pouvait pas prendre place dans ce chapitre. Nous allons seulement en extraire quelques conclusions.

2.2.1. Différentes conceptions des décimaux.

a) Le « décimal » de l'antiquité qui sert exclusivement au

restriction A de B, tel que tout élément de B puisse être représenté, approché par un élément de A sur lequel les calculs seront plus faciles :

\mathbb{D} approche \mathbb{Q} ou \mathbb{R} parce que, pour tout réel, quelle que soit la tolérance que l'on s'accorde, il existe toujours un décimal dont la distance à ce réel soit inférieure à la tolérance choisie.

Des problèmes de ce genre se rencontrent très fréquemment en mathématique où l'on veut souvent étudier tous les objets engendrés par un système générateur ou au contraire chercher un système générateur commode pour un ensemble donné.

Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses « propriétés » et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle — qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques.

2.1.6.

Cette remarque nous amène à observer que les méthodes heuristiques d'analyse ne prennent pas vraiment en charge les situations d'emploi ou de création des mathématiques. Elles ignorent, entre autre, le sujet, le groupe social et leur histoire.

2.2. Conclusions de l'étude épistémologique.

Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. Cette étude ne pouvait pas prendre place dans ce chapitre. Nous allons seulement en extraire quelques conclusions.

2.2.1. Différentes conceptions des décimaux.

a) Le « décimal » de l'antiquité qui sert exclusivement au

mesurage et à la représentation des quantités. Par exemple, ceux qui expriment les mesures décimales en Chine treize siècles avant Jésus Christ. Ils fonctionnent à peu près comme les binaires hiérophyghiques des Egyptiens de -2500 et comme les sexagésimaux des Babyloniens de -1900, en ce sens qu'ils résolvent de façon similaire des problèmes similaires ; il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire des fractionnements : certaines fractions peuvent être désignées, d'autres simplement approchées. Ils se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels, techniques et même sociologiques, des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport et avec lesquelles ont franchi divers obstacles... (passage à la forme $\frac{m}{1}$, m naturel quelconque ; puis à $\frac{m}{n}$, n strictement inférieur à m ; puis à $\frac{m}{n}$, n et m quelconques, etc.). Bien peu de ces propriétés sont reconnues, même si elles sont utilisées. Je dirai — en empruntant ce terme à Y. Chevallard (1981) — que le décimal est alors une *notion protomathématique* : cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil.

b) Al Huwazmi, (780-850), qui unit le calcul des naturels avec celui des rapports « géométriques » et qui introduit l'emploi de la numération de position décimale, permet l'émergence du décimal — outil mathématique d'approche, non plus des grands nombres, mais des entités mathématiques : rationnels d'abord, puis radicaux etc. Ces entités sont susceptibles d'être des nombres dénombrants, des nombres mesurants, des rapports et enfin, avec Stevin (1585) d'authentiques applications.

Le décimal devient alors une *notion parathématique* : il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme un objet d'étude. (Abd el Jaouad, 1978). Le décimal est montré dans son fonctionnement (préconstruit) et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité. L'écriture des fractions décimales dans l'œuvre d'Al Uqlidisi est identique à la nôtre

et pourtant le concept n'est pas repris par les contemporains.

Au contraire, son deuxième inventeur, Al Kashi (1427) le reconnaît comme une découverte mathématique. Mais il n'est pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition, les propriétés et la position épistémologique. Il est la traduction du système sexagésimal des astronomes, en un système plus commode pour les calculs. On peut supposer que pendant 5 siècles, les décimaux sont potentiellement présents dans la culture et que c'est leur statut qui est en évolution (par exemple, Bonfils de Tarascon vers 1350 en produit une ébauche.)

c) C'est après Simon Stevin (1585) que le décimal accède au statut de *notion mathématique*. Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et les multinomies — les fonctions polynômes — pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Le décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, la constitution de tables. Leur rôle conceptuel reste le plus caché. Pour Stevin, «les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres (réels) parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux; il n'a pas écrit cette phrase, mais tout se passe comme s'il l'avait pensée.

Les décimaux servent de modèle heuristique dans l'analyse naissante et Newton les utilise pour expliquer l'approche des fonctions et de leurs fluxions à l'aide des fonctions polynômes et des séries, de leurs dérivées et de leurs primitives (Ovaert, 1976). Cette place n'est finalement fixée et attestée que lorsque les réels sont enfin devenus à leur tour des objets mathématiques et que les procédés d'approche des fonctions qu'utilisait Stevin ont reçu à leur tour leur identité mathématique.

2.2.2. Rapports dialectiques de ID et de \mathbb{Q}

L'analyse épistémologique fournit d'autres indications:

Les progrès de ID se sont nourris de ceux de \mathbb{Q} puis de \mathbb{R} en une dialectique difficile à résumer : il sera sans doute

indispensable de poser des problèmes qui appelleraient la construction d'une sur-structure telle que \mathbb{Q} ou \mathbb{R} , et peut-être de la construire effectivement pour donner à \mathbb{D} sa signification (Donady, 1980).
 Par exemple, il nous paraît difficile de concevoir que la notion de rapport puisse être directement approchée par les rapports décimaux.

2.2.3. Types d'objets réalisés

Les situations dans lesquelles \mathbb{D} ou \mathbb{Q} sont employées, diffèrent profondément par la nature des objets mathématiques qui réalisent ces structures et dont on s'occupe. A l'origine, \mathbb{Q}^+ et \mathbb{D}^+ étaient réalisés comme ensemble des images dans un système de mesure; ce qui était explicite, écrit, qui avait un statut, c'était le semi-groupe ordonné $(\mathbb{Q}^+, +, \leq)$ muni des opérateurs naturels. Les propriétés de corps de \mathbb{Q} étaient utilisées implicitement mais non reconnues.

La traduction des faits historiques en langage moderne nous fait commettre quelques abus mais nous gagnerons en concision. Ainsi, à côté des rapports naturels (multiples, sous-multiples), des Pythagoriciens utilisaient certains rapports privilégiés (épimères, épimores, émiolés...) mais ils ne les utilisaient qu'en géométrie et les calculs à leurs propos étaient pénibles; ils ne les assimilaient sûrement pas aux fractions. Un instant, Euclide a rejeté ces distinctions barbares, mais cette initiative est restée presque sans lendemain et même Archimède n'a pas vraiment connu les fractions que nous appelons « Archimédiennes ». La construction de $\mathbb{L}(\mathbb{Q}^+)$ en tant qu'ensemble de rapports ou d'opérateurs, munis des opérations de groupe, et son identification avec \mathbb{Q}^+ va prendre plus de mille ans (de -400 à +850). A la fin de cette période, les rapports fonctionnent implicitement comme des applications mais il faudra encore six cents ans au moins (1585) avant que \mathbb{Q}^+ ne devienne explicitement un ensemble de fonctions traitées comme des nombres.

2.2.4. Différents sens du produit de 2 rationnels

Ainsi, par exemple, l'opération de multiplication de deux fractions peut recevoir des interprétations différentes

dont beaucoup sont apparues à des époques parfois éloignées et que nous présentons dans le tableau 1.

Ce tableau est à rapprocher du canevas que nous donnons au paragraphe 2.4. et de l'étude des niveaux de connaissance sur la composition de deux applications linéaires rationnelles au paragraphe 3.1.5.

On peut donc s'attendre à ce que les conceptions correspondantes, que l'on a la possibilité de confondre aujourd'hui dans les calculs, se présentent en fait dans des situations différentes et par conséquent qu'elles ne soient pas d'emblée conçues de la même façon et au même âge*.

2.2.5. Nécessité de l'étude d'épistémologie expérimentale

Mais il est peu probable que toutes les distinctions, tous les obstacles, toutes les situations particulières continuent à subsister. Par exemple, prendre le dixième — décimer — consistait, dans l'antiquité, à ranger les éléments puis à compter 1,2,3,... et à retenir le dixième. Ainsi ne pouvait-il y avoir qu'un dixième, pas 2! Il est donc nécessaire de se livrer à une étude d'épistémologie génétique et expérimentale par le moyen d'enquêtes et d'expériences comparables à celles que nous allons rapporter.

Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement «historique» qui restaurerait une forêt de distinctions et des points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. C'est une des ambitions de cet article de faire avancer la réflexion dans cette direction.

2.2.6. Obstacles culturels

Il faut ajouter que la didactique des décimaux a une longue histoire. Depuis Stevin, qui l'envisageait avec une certaine ingénuité et des principes bien arrêtés, jusqu'à la décision, pour les Etats Unis, d'adopter le système métrique,

* Nous reviendrons plus loin sur cette question précise aux paragraphes 3.1.4. et 5.3.5. Voir aussi Vergnaud (1976).

Tableau I

Opérateur naturel X	$n \times U ; n \times L ; n \times M \times M$ X a le sens de $n \times L = L + L + \dots + L$ $\underbrace{\hspace{10em}}$ n						
Naturels opérant sur des fractions mesure	$n \times \frac{a}{U} = \frac{a}{U} + \frac{a}{U} + \dots + \frac{a}{U}$ n fois la fraction mesure $n \times \frac{a}{U} = \frac{n \times a}{U}$; ou $n \times \frac{a}{U} = \frac{a}{U} \times n$ naturel pas nécessairement quelconque. n scalaire opérant sur des fractions.						
X	$\frac{a}{n} \times U = n \times \frac{a}{U}$						
Rapport de naturels invariant dans une transformation implicite	$\frac{a}{b} = \frac{M}{L}$ $\frac{a}{b} * U = \frac{M}{L} * U$ $[\frac{a}{b}]$ mesure de L avec l'unité M] deux expr. par des nombres $\frac{a}{b}$ rapport de la mesure de L à celle de M quelle que soit L forme proportionnelle de (n L ; m L et L).						
Applications linéaires rationnelles	$\frac{a}{b} \times L = \frac{b}{a} (L)$ [désigne l'image de L par application linéaire $\frac{b}{a}$] $(\frac{a}{b} \times \frac{m}{n})(U) = \frac{b}{a} (L) = \frac{b}{a} (\frac{m}{n} U)$ L = n L alors $(\frac{b}{a} \times n)$ est le nombre que mesure L, extension de l'application $\frac{b}{a}$ aux fractions mesure						
Opérateurs rationnels	$(\frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p})(L) = \frac{m}{n} (\frac{q}{p} L)$ $\frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$						
Rationnel	$\frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$ (m et p rationnels « abstraits ») après identification						

et donc un système décimal de mesure, en passant par sa première apparition dans l'enseignement populaire en France après 1792, cette didactique a changé, non seulement de forme mais aussi, corrélativement, d'inspiration et même de signification politique. Ces significations politiques et culturelles pèsent toujours sur son enseignement et se constituent parfois en véritables obstacles (Brousseau, 1976).

2.3. Conclusions de l'étude didactique

L'analyse épistémologique fournit en outre un grand nombre des variantes de conditions, de méthodes, de sens. La difficulté consiste à regrouper ces variantes et à en hiérarchiser les caractères en fonction de leur importance *présumée* pour la reproduction et le contrôle des situations pouvant provoquer l'apparition du savoir.

2.3.1. Principes

Nous allons laisser cette question ouverte, et selon notre projet, montrer comment produire un processus. Les genèses artificielles que nous envisageons de construire devront faire fonctionner la notion de décimal de façon à simuler les différents aspects actuels du concept. Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens. La phénoménoteknique épistémologique consiste à faire, sur *certain*s points, des choix très différents de ceux que suggérerait l'histoire, et de restaurer, par l'exercice des règles et des principes que l'on a pu découvrir, un processus néanmoins équivalent.

L'expérience épistémologique porte sur les effets et les corrections que ces modifications produisent sur l'ensemble du système.

Mais cette expérience se glisse dans une activité d'enseignement. Elle doit être compatible avec elle, se plier à ses exigences et subir d'inévitables transpositions didactiques.

Nous allons donc placer désormais notre réflexion dans ce cadre didactique.

2.3.2. Objectifs de l'enseignement des décimaux

a) Examinons les objectifs classiques de l'enseignement

des décimaux. Il s'agit de rendre les élèves capables de résoudre les problèmes classiques et pratiques, mettant en œuvre les opérations et l'ordre des décimaux, ce qui implique l'emploi de mesures décimales (et sexagésimales), une maîtrise convenable des situations comprenant des applications linéaires décimales (et rationnelles) : échelles, changement d'unités, pourcentages, placements de fonds, vitesse, volumes, surfaces, densités...

Dans la plupart de ces problèmes, les enfants sont invités à présenter ou à désigner leur résultat dans les termes de la situation proposée. Par exemple, « le prix de vente en francs du transistor est...? » Puis à exprimer ce résultat dans \mathbb{Q}^+ par une formule (par exemple $\frac{280}{4} \times \frac{3}{4}$) puis à reproduire un décimal raisonnablement proche de ce résultat. Le calcul consiste essentiellement à passer de \mathbb{Q}^+ à \mathbb{D}^+ . Aucune explication n'est écrite; la justification consiste dans la décomposition du calcul final en une suite de calculs intermédiaires « simples », c'est-à-dire appartenant au repertoire reconnu des occasions d'utiliser cette opération.

b) Le curriculum s'adresse à des élèves d'au moins 9-10 ans et d'au plus 12-13 ans qui peuvent avoir appris les opérations sur les décimaux en référence avec l'usage du système métrique. Il vise fondamentalement les mêmes objectifs. Ceci implique la possibilité de faire tous les calculs usuels avec les décimaux (et avec les fractions). Mais il devra favoriser la reprise théorique qui conduira les élèves vers 13-14 ans à réorganiser de façon définitive la notion de décimal et à l'utiliser sous sa forme mathématique actuelle (exemple : $1,394 \cdot 10^{-4}$), en particulier celle qui est utilisée sur les machines à calculer.

2.3.3. Conséquences : Types de situations

Si l'on veut obtenir que les élèves aient la possibilité, non seulement d'appliquer des méthodes et de produire des solutions, mais aussi d'en comprendre et d'en discuter le bien-fondé, il faut rendre possible cette attitude réflexive, en leur donnant l'usage d'un vocabulaire, même simplifié, et d'une théorie, même non satisfaisante, des applications linéaires et de leurs propriétés.

a) Notre étude épistémologique permet de comprendre que, pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il

est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. Ce processus correspond à la troisième étape de notre analyse, celle où la notion est maniée comme notion mathématique. Nous appelons situations de «*validation*» et «*d'institutionnalisation*» les situations didactiques qui permettent de simuler ce processus.

b) Mais pour que ces théories aient un sens pour celui qui les utilise, il «*faut*» qu'elles aient préalablement fonctionné comme solution à un problème posé à chaque élève dans des conditions qui lui permettent, soit de trouver lui-même cette solution, ou plus exactement de la construire (éventuellement progressivement), soit de l'emprunter toute faite, de lui-même, entre plusieurs qu'il pouvait envisager sans qu'une intention didactique ou une pression culturelle l'y contraigne en se substituant à son jugement. Nous disons alors que la théorie fonctionne comme un modèle implicite et nous appelons *situations «d'action»* les situations didactiques qui permettent l'apparition de cette théorie dont le statut est alors dans la classe celui d'une notion protomathématique.

c) Pour que le vocabulaire soit acquis, et que les termes aient du sens, il «*faut*» qu'ils servent suffisamment à exprimer et à communiquer des informations dans des situations qui en justifient l'emploi et le contrôlent. De telles *situations dites de «formulation»* permettent l'acquisition des modèles explicites et de langages qui, dans le cas où ils ne sont pas encore des notions mathématiques, se voient ainsi conféré un statut de notions paramathématiques (l'ostension et l'usage y tiennent lieu de définition).

2.3.4. Nouveaux objectifs

Les objectifs comprendront donc des connaissances, des savoir-faire, un vocabulaire et des acquisitions théoriques. Ces objectifs ne peuvent être indépendants; un certain équilibre s'établit entre eux dès lors qu'on veut respecter leurs fonctions réciproques dans une genèse authentique. D'ailleurs, un savoir théorique, non justifié, serait perdu et n'aurait pas de sens et une pratique excessive sans débats, conduirait à des apprentissages par condi-

tionnement et prématurés qui feraient obstacle aux étapes ultérieures.

Ainsi, dans la phase finale, l'élève devra calculer dans le demi-corps \mathbb{Q}^+ et en particulier dans le demi-groupe $(\mathbb{Q}^+ - \{0\}, \times)$. Les domaines d'application choisis conduisent à envisager tous les types de réalisations que nous avons évoqués au paragraphe précédent.

On pourrait estimer que le fait que les élèves peuvent s'expliquer le produit de deux décimaux se présentant tous les deux sous la forme d'opérateurs ou d'applications linéaires est un bon test de l'acquisition de la structure visée (Rouchier 1980).

Exemples: 1. Quelle est la distance parcourue en 4,25 tours par un disque de 0,38 m de périmètre ? (1 opérateur, 1 longueur).
4,25 \times 0,38 égal à 4 fois 0,38 plus 2 dixièmes de fois 0,38 plus $\frac{1}{5}$ de fois 0,38

$$\text{C'est aussi } \frac{425}{100} \times 0,38$$

2. On estime que la répartition normale d'un budget logement est la suivante :
loyer : 0,68
charges : 0,18
chauffage : 0,14
La part de revenu qu'une personne a prévue de consacrer à son logement est 0,23. Quelle est la part de ce revenu que cette personne consacre au chauffage ? (2 opérateurs).

Mais cette hypothèse reste à vérifier expérimentalement. Il faudrait que la réussite à ces exercices domine hiérarchiquement toutes les autres, c'est-à-dire les implications des recherches sur les rapports entre ces organigrammes d'objets, les hiérarchies de connaissances et les implications d'acquisitions retiennent l'attention de nombreux chercheurs depuis une quinzaine d'années (Gras, 1980).
Malgré le grand intérêt de ces travaux, on n'a pas encore pu en tirer des conclusions décisives.

2.3.5. Options

Nous avons finalement retenu les options principales suivantes sur lesquelles nous reviendrons plus tard :

- a) L'acquisition des décimaux-mesure suivra un processus distinct de celui visant les décimaux-application. Ils se succéderont dans cet ordre.
- b) Dans les deux cas, les décimaux seront présentés

comme des rationnels, simple réécriture des fractions décimales. Les rationnels seront donc construits les premiers dans les deux étapes. Cela n'est pas très original pour les opérateurs. Par contre, pour les mesures, cela va à l'encontre des habitudes culturelles les mieux établies.

c) Les fractions décimales-mesures seront choisies par les élèves pour approcher les rationnels à cause des facilités de calcul qu'elles présentent.

Les problèmes topologiques exigent justement de nombreuses comparaisons et des calculs d'intervalles. Ils mettront de plus, en évidence, les propriétés de l'ordre naturel de \mathbb{Q} et de \mathbb{D} qui s'opposent à celles de \mathbb{N} .

d) Cette approche topologique ne sera pas reproduite dans l'étude des applications linéaires rationnelles. Il s'agit bien d'une option : nous avons montré dans une autre partie de la recherche* que nous ne rapportons pas ici qu'une telle approche est possible.

e) Nous tenterons de faire acquérir, ou fonctionner, s'ils sont acquis, les modèles implicites avant d'en provoquer la formulation ou l'analyse. Nous admettons que les enfants possèdent un modèle implicite de la proportionnalité dans \mathbb{N} .

f) Les sommes et les différences d'applications rationnelles bien que rencontrées, ne seront pas théorisées ni institutionnalisées.

g) Nous expliciterons les autres options au cours de l'exposé des situations.

2.4. *Le canevas du processus*

2.4.1.

Ce canevas est formulé en termes mathématiques visiblement exclus du vocabulaire des élèves et organisé comme un exposé où les définitions et les théorèmes se succèdent

* Il s'agissait d'approcher à l'aide d'une fonction linéaire qui représentait la probabilité — en tant que moyen de prévoir une fréquence théorique — une application statistique attribuant des effectifs observés correspondant à des nombres de tirages. L'approche des statistiques par ces applications «probabilité» est traitée par des méthodes similaires en 33 séances. Les élèves suivent une démarche expérimentale et de redécouverte. Cf. «L'enseignement des probabilités à l'école élémentaire» IREM de Bordeaux - 1974.

de façon classique. Cela pourrait faire croire que tout exposé du même genre, c'est-à-dire articulé comme un discours de mathématique, pourrait constituer un canevas. Il n'en est rien. Il représente en fait une suite de questions et de problèmes qui tendent à constituer une genèse : la question de rang n naît des problèmes rencontrés avec les solutions trouvées à la question de rang $n - 1$, ou des conséquences et développements de ces solutions. Un tel canevas ne peut pas être obtenu automatiquement comme séquence de l'analyse mathématique et épistémologique. Il faut s'assurer constamment de la capacité de la conception générale à permettre l'invention, l'organisation et le déroulement des situations locales.

Cet aller et retour, cette dialectique entre la conception du processus et celle des situations est inévitable à cause de la nature même de la didactique.

L'articulation à partir de la connaissance seule ne suffit pas à déterminer le sens donné aux acquisitions par les situations spécifiques choisies.

Il est classique d'analyser les curricula à rebours pour mettre en évidence les implications entre les objectifs terminaux et les objectifs subordonnés. Le lecteur ne sera pas surpris que nous l'ayons utilisé dans ce texte. Malgré nos mises en doute répétées de la possibilité de déterminer les acquisitions indépendamment des situations qui les produisent, nous allons utiliser le même procédé dans la représentation des activités, au chapitre suivant. Ce procédé augmentera peut-être les difficultés du lecteur à comprendre quelles sont réellement les connaissances des élèves qui sont disponibles au moment de la leçon, mais nous espérons ainsi le conduire à prendre mieux conscience, à la fois de la nécessité de préciser les conditions du déroulement des situations et du rôle de l'histoire du sujet dans ses acquisitions. Si notre tentative est un échec, nous conseillons au lecteur de lire les paragraphes dans l'ordre chronologique.

2.4.2. La phase II : Du mesurage aux homothéties de \mathbb{D}^+

a) Suivant ces options dans la phase finale, nous prévoyons une *identification* institutionnalisée, c'est-à-dire raisonnée et convenue de (\mathbb{Q}^+, \times) (mesure) et $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^+, 0)$

impliquant en particulier l'utilisation systématique des applications inverses dans le calcul du rapport de deux décimaux (Phase II . 7 : 2 séances).

b) Il aura fallu pour cela être capable de manier *la composition* et *la décomposition* des applications rationnelles en effaçant le rôle des couples objet-image pour pouvoir fournir diverses décompositions d'une même application. Nous avons retenu d'exposer les situations d'introduction de cette phase (II . 6 (3 séances) : «composition de 2 applications linéaires» où les élèves utilisent un pantographe. Cette étude ne peut se dérouler elle-même convenablement si les fractions et les décimaux n'ont pas été identifiés comme ensemble d'applications *opérant* sur les fractions et les décimaux-mesure.

c) Au cours de la phase II . 5 (2 séances) : les enfants cherchent à donner un sens au produit de 2 fractions ou de deux décimaux. Ils y parviennent en interprétant l'un comme application linéaire opérant sur l'autre. A cette occasion, les élèves récupèrent le vocabulaire traditionnel décrivant le «produit» d'un rationnel par un rationnel opérateur (par exemple prendre une fraction d'un nombre, un pourcentage, etc.) et ils formalisent et institutionnalisent le calcul des images par les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^+)$ qu'ils pratiquaient déjà dans la phase précédente mais avec des méthodes très diverses, non fixées, voire par tâtonnements. Les rapports entre multiplier, diviser, agrandir, rapetisser font l'objet d'un débat.

L'introduction de ces applications linéaires va occuper les 3 phases précédentes qu'il vaut mieux exposer dans leur ordre naturel.

d) La phase II. 1 (2 séances) consiste à demander aux élèves «d'agrandir» un puzzle, morceau par morceau, sans préciser autrement ce que veut dire «agrandir» et de façon à ce que tel côté qui mesurait 4 cm en mesure 7. Nous exposerons cette situation de façon détaillée (Par. 3.2.). Les élèves s'acharnent à essayer divers moyens de calculer les longueurs-images mais seul, celui qui (implicitement) fait correspondre la somme des images à l'image de la somme permet un remontage satisfaisant du puzzle. Ce que les enfants construisent «empiriquement», est un ensemble de quelques couples et n'a pas de nom. «L'application

linéaire $\frac{7}{7}$ » s'inscrit seulement dans les schémas d'action du sujet.

Déjà, pourtant il faut trouver l'image de longueurs décimales et fractionnaires.

e) La phase II. 2 (1 séance) reproduit une situation presque identique à la précédente. L'agrandissement d'une mosaïque régulière repose les mêmes problèmes; les côtés ont des longueurs décimales. Dans les débats, l'image 1 émerge comme moyen d'établir les autres images ainsi que la division d'un décimal par 10^n , $n \in \mathbb{N}$.

f) La phase II.3 (2 séances) commence par une situation identique. On considère un dessin de bateau et 6 photographies de ce dessin obtenues avec des agrandissements différents. Chaque élève cherche à prévoir de sa place les longueurs de tous les segments reproduits sur une des photos. Ils peuvent aller vérifier le résultat de leurs prévisions et éventuellement les reprendre (Il y a des «agrandissements» et des «rapetissements»). Puis de nouvelles photographies apparaissent et il s'agit de trouver le moyen de désigner et de ranger les photos pour gagner dans un jeu de communication (assez semblable à celui que nous exposerons au paragraphe 4.1. dans la leçon «épaisseur d'une feuille de papier»). C'est naturellement l'image de 1 qui sert à désigner les photos et à les ordonner. Ainsi, les élèves ont été conduits à identifier, à désigner des applications linéaires à l'aide des nombres décimaux. Mais ces nombres restent attachés à une des photos, à un ensemble de valeurs. Le jeu reprend mais le modèle est changé à chaque fois. Le calcul d'images devient familier, le vocabulaire et les discussions portent sur les agrandissements et les rapetissements (ce qui implique le débat ultérieur que nous avons signalé plus haut). En conclusion, les élèves déclarent savoir désigner les applications linéaires (de \mathbb{Q}^+ dans \mathbb{Q}^+ et de \mathbb{D}^+ dans \mathbb{D}^+).

g) Il est temps de proposer quelques situations où des applications non linéaires viennent se glisser comme solutions «obligées»? aux applications linéaires (phase II.4., 2 séances).

A cette occasion, les élèves prennent connaissance des pratiques et des langages dans le domaine des «échelles» et dans celui du commerce (taxes, remises en pourcentage, etc.)

2.4.3. La phase I : Des mesures rationnelles aux mesures décimales

Dans La phase II, au lieu de définir directement les opérateurs rationnels comme composés d'opérateurs naturels (qui ne sont pas alors des applications), méthode dont nous avons signalé les difficultés et les contradictions, nous avons admis l'existence de \mathbb{Q}^+ et de \mathbb{D}^+ en tant qu'ensembles d'arrivée des mesures. L'objet de la phase I est donc de construire un tel ensemble : les enfants créent et expérimentent des nombres nouveaux pour mesurer diverses grandeurs.

a) La phase I.1. permet aux élèves d'inventer d'abord les «rationnels» (act. 1 séance) par une méthode de passage au quotient sur l'ensemble des couples de rationnels (activité 1, 4 séances). Nous analyserons longuement cette première activité : «mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier» pour bien montrer l'évolution du statut de ces rationnels. (Paragraphe 4.).

b) Ils apparaissent comme solution à une situation favorable, sans statut cognitif. Cette solution pose des problèmes d'identification car elle peut prendre bien des formes équivalentes. Les élèves sont donc conduits à un débat : «ces objets nouveaux sont-ils des nombres ?» c'est le moteur de l'activité 2 (5 séances) qui amène les enfants à les identifier, à les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser par un naturel, les comparer et les ranger.

Les fractions sont alors reconnues comme des nombres nouveaux englobant les nombres déjà connus, mais dont certaines propriétés sont différentes.

c) Dans la phase I.3., pour mesurer d'autres grandeurs, capacités, poids, longueurs, les élèves utilisent ces mêmes nombres et passent de la conception d'une définition des fractions par *commensuration* à une *définition constructive* (cette phase sera commentée au paragraphe V, elle n'est pas essentielle dans le processus).

d) La phase I.4 « \mathbb{D} moyen d'étude de \mathbb{Q} » comprend 7 séances. Les propriétés nouvelles qui sont recherchées dans les rationnels pour fabriquer des mesures sont surtout des propriétés topologiques : on veut, entre deux nombres rationnels, pouvoir en placer toujours un nouveau et on veut pouvoir mesurer tous les intervalles obtenus. Grâce à un jeu convenable de bataille navale où ils lanceront des filets de plus en plus fins (des filtres) pour cerner des « poissons » ra-

tionnels, les enfants vont donc explorer la structure topologique de \mathbb{Q}^+ (cette activité sera présentée elle aussi au paragraphe 3.3.). Mais il se trouve que parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les rationnels sous leur forme fractionnaire, les plus longues, les moins faciles, sont justement les comparaisons et les sommes ou les différences. De telle sorte que, pour des raisons d'efficacité, les enfants vont très vite choisir d'eux-mêmes, parmi les fractions rationnelles, certaines — les décimales — qui permettent à la fois des calculs rapides et une représentation commode — une approche — des mesures rationnelles.

e) Phase I.5. Construction et étude de \mathbb{D} . (6 séances). Ces fractions décimales se prêtent à une écriture simplifiée qui permet d'étendre les règles du calcul (addition, soustraction, multiplication par un scalaire) de \mathbb{N} à \mathbb{D} au prix de modifications mineures (activité 6).

f) Phase I.6 (4 séances). Densité de \mathbb{D} dans \mathbb{Q} — Division — Approche d'un rationnel par un décimal. Evidemment, tous les rationnels ne sont pas décimaux, mais on peut approcher n'importe lequel d'entre eux d'aussi près que l'on veut avec des décimaux.

Cette approche, organisée, standardisée et institutionnalisée va permettre de convertir en décimal le résultat d'une division d'un rationnel par un naturel et donnera implicitement la méthode de la division des décimaux par des entiers.

g) Dans cette partie I, les nombres sont maniés par les enfants comme des mesures. La construction comporte donc des limitations de sens qu'il faudra respecter (cf. paragraphe 3.3.).

Les seuls opérateurs utilisables sont les naturels, on saura multiplier ou diviser par 2,3... mais pas par $2/7$ ni 2,5. (cet apprentissage sera l'objet de la 2ème partie). Et ces opérateurs ne sont pas introduits comme des objets mathématiques. Ils fonctionnent comme un modèle implicite de linéarité emprunté à \mathbb{N} . Ils serviront au plus à exprimer les rapports scalaires naturels que l'on utilisera au cours des calculs.

La méthode a été conçue de telle sorte que le fait pour les élèves d'avoir déjà appris à utiliser les décimaux pour les mesurages, et à faire les opérations ou non, ne modifie

pas sensiblement le processus. Cela ne veut pas dire qu'il faudra faire semblant d'ignorer ce qu'on sait déjà, ni qu'on va reprendre une connaissance acquise en rejetant son sens ancien et y substituant un sens «nouveau».

3. Analyse du processus et de sa réalisation

3.1. Le pantographe

3.1.1. Introduction des pantographes : La réalisation de la phase 2.6.

Le pantographe est un parallélogramme articulé utilisé sur les planches à dessiner pour produire des figures homothétiques d'une figure donnée. Les appareils utilisés dans cette activité sont des jouets de plastique beaucoup moins précis que les appareils professionnels — et c'est précisément cette particularité qui sera utilisée. Ils sont susceptibles selon le réglage, de produire quelques homothéties décimales bien précises : 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 4 ; et leurs inverses (un autre modèle peut produire $1 \frac{1}{2}$; 2 ; $2 \frac{1}{4}$; $2 \frac{1}{2}$; $2 \frac{3}{4}$; 3 ; $3 \frac{1}{2}$; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10).

Dans la séance d'introduction, les élèves apprennent du maître, banalement, comment se servir de l'appareil : la ventouse ne doit pas bouger, ni le papier, la pointe suit le modèle, le crayon dessine l'image... Ils s'essayent à agrandir et à rapetisser des dessins personnels puis mettent en commun leurs observations et leurs hypothèses :

- On peut «agrandir» ou «rapetisser» en échangeant la pointe et le crayon
- L'image ne change pas de forme quelle que soit la manière dont on dispose le pantographe
- L'agrandissement varie suivant les pantographes ou suivant le choix des trous de montage
- Si le pantographe ne forme pas un parallélogramme, la transformation est déformée.
- A certaines longueurs, le pantographe fait correspondre d'autres ; à la somme des longueurs, il fait correspondre la somme des images.
- Le pantographe effectue des agrandissements bien connus, les élèves reconnaissent les noms des agrandissements sur les trous... etc.

3.1. I. : Exemples de situations didactiques différentes fondées sur ce schéma de situation

a) *L'exposé banal basé sur l'ostension* : le maître montre l'appareil, montre ses effets magiques, enseigne le mode d'emploi, présente les différents calculs possibles : calcul d'image, de modèle et d'agrandissement et fait reproduire des exercices.

b) *La méthode heuristique (de redécouverte)*, voisine de celle que nous venons d'évoquer ci-dessus. Elle donne des résultats collectifs assez rapides et est convenable si les élèves ont l'habitude de la recherche individuelle et des débats, mais sans aucun projet autre que de «dire des choses intéressantes», une telle méthode tourne souvent court.

c) Une méthode active et mainteintive : chaque élève a son pantographe ; une suite de questions lui sont posées pour lui faire énoncer successivement les différentes propriétés ou corriger les erreurs qu'il a commises.

d) Un processus plus élaboré comprenant plusieurs phases :
— une phase d'action : le maître annonce aux élèves que dans un moment il choisira une longueur entre 1 et 15 cm : chaque élève (ou groupe de 2) devra prévoir la longueur correspondante transformée par son pantographe. Cette prévision fera l'objet d'un pari, puis d'une épreuve : on vérifiera avec l'appareil si la valeur annoncée est exacte. En attendant ce moment, les élèves peuvent s'entraîner à prévoir : ils cherchent les images de quelques nombres et vérifient. Ils peuvent venir parler des qu'ils pensent avoir découvert la loi et s'en sentent assez sûrs.

— Une phase de validation : les résultats concrets sont assez imprécis et présentent des écarts parfois troublants avec le modèle ; d'autre part, il est facile de monter un pantographe faux. Le jeu oppose donc plusieurs groupes : il s'agit, pour chacun, de deviner si les pantographes des autres — et qui sont cachés — font ou non des agrandissements corrects — et lesquels. Pour cela, chaque groupe demande à un autre de lui montrer des images de différents segments ou figures (qu'il choisit) données par son appareil. Lorsqu'un groupe croit avoir deviné l'agrandissement donné par ce pantographe caché, il annonce sa conclusion. Si cette conclusion paraît fautive à un des autres groupes (qui n'ont pas plus ce pantographe) celui-ci prend position contre cette conclusion. Alors s'engage un débat où il faut prouver aux autres élèves que les assertions de l'adversaire sont fausses et que les siennes sont vraies, en ne recourant que le plus tard possible à la preuve contingente. (Cette preuve consiste à montrer le pantographe caché et ce qu'il produit). Une règle de prise de parole et un système de points laissent à chaque groupe le choix entre des décisions qui consistent à accepter ou à refuser les preuves produites par l'adversaire ou à demander de nouvelles informations (de nouvelles images) (Brousseau, 1979). Certains élèves obtiennent ainsi la conviction que, si le pantographe donne le même agrandissement d'un segment quelconque dans toutes les positions, l'application doit être (est nécessairement) linéaire car alors l'image de la somme est la somme des images.

3.1.II. Place de cette situation dans le processus.

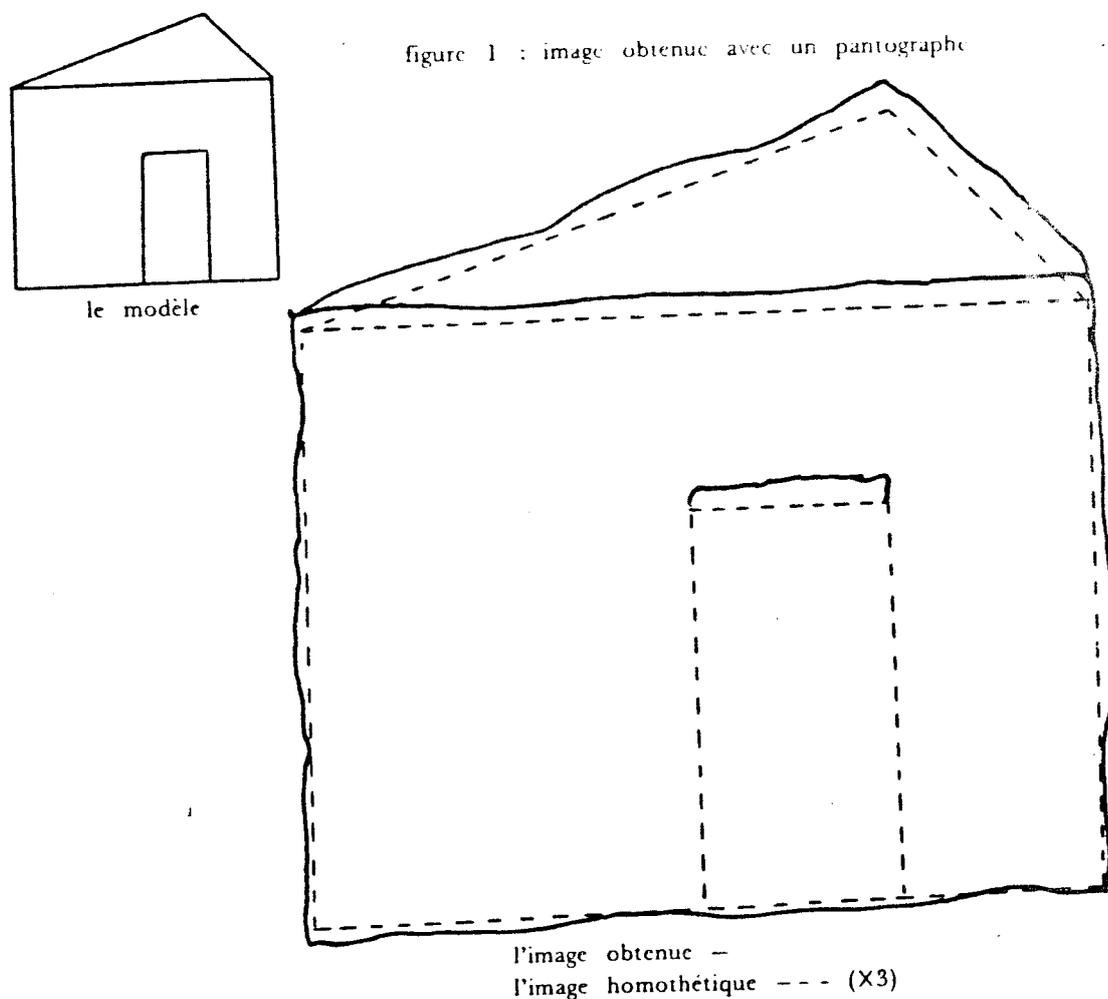
Avec peu de modifications, cette situation du pantographe pourrait être prise comme situation initiale dans l'étude des applications linéaires. Mais alors les hypothèses que font les élèves pour interpréter les agrandissements du puzzle (cf. par. 3.2.) avec de simples translations $(x \rightarrow x + a)$ seraient envisagées moins sérieusement. Elles seraient rejetées presque sans examen, puisque l'appareil fournirait la bonne image. Au lieu de construire le modèle et de prévoir le résultat satisfaisant, les conditions voulues, il suffirait de le découvrir comme une loi de la nature. Or, le modèle additif est un obstacle résistant à la mise en place du modèle multiplicatif et doit pouvoir lui être oppo-

sé dans des situations ouvertes, ce choix devant se faire sur des critères rationnels et intellectuels.

3.1.2. Compositions d'applications (2 séances)

- D'abord les élèves, par groupe de 2, doivent construire l'image d'une figure simple, que l'on obtient par deux agrandissements successifs (par exemple $\times 2,5$ suivi de $\times 1,5$). L'image la plus «jolie» et «correcte» l'emportera après vérification. La consigne est donnée de telle façon, qu'il est clair, que la manière d'obtenir cette image n'importe pas, c'est seulement le résultat qui compte.

En fait, la manipulation réelle produit un agrandissement tellement erroné qu'il est nécessaire de retracer les segments à la règle et les mesurer, en calculant leur longueur (Fig. 1).



P₁) Par linéarité directe, sans calculs intermédiaires, le premier et le troisième dessin :

$$\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 12 \times 1,5 = 18 \\ 1 \longrightarrow 18 : 4 = 4,5 \\ 2,5 \longrightarrow 2,5 \times 4,5 = 11,25 \end{array}$$

P₂) Par la composition des deux applications linéaires avec un calcul intermédiaire

$$2,5 \xrightarrow{\times 3} 7,5 \xrightarrow{\times 1,5} 11,25$$

P₃) Par l'utilisation directe de la composée des deux applications,

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{} \xrightarrow{\times 4,5} 11,25 \\ 2,5 \xrightarrow{} \xrightarrow{} 4,5 \\ 1 \xrightarrow{} \xrightarrow{} 9 \\ \xrightarrow{} \xrightarrow{} \\ \xrightarrow{} \xrightarrow{} \\ 2 \xrightarrow{} \xrightarrow{} 9 \end{array}$$

cette composée étant calculée une fois pour toutes, d'une manière ou d'une autre.

Dans cette situation, il est très avantageux d'utiliser implicitement le fait que la composée des deux homothéties est une homothétie, de la calculer, et l'utiliser pour obtenir l'image finale de chaque segment du modèle.

Comme précédemment, les images sont réellement accrochées au tableau, chaque élève fait une prévision, va la contrôler lui-même, revient, la corrige si elle est fautive et cherche à modifier son calcul ou son système de prévision.

Le remplacement de deux similitudes par une seule est apparu dans les comportements en tant que solution de la situation-problème. Mais les différentes procédures témoignent de niveaux cognitifs différents : Dans la procédure P₀, l'élève a effectué une composition d'applications mais rien ne permet de penser qu'il s'est intéressé à l'application composée. Celle-ci est présente pour un observateur, dans la situation au sens habituel, elle ne l'est pas dans la procédure P₀ ; elle l'est dans la situation-problème car elle est la connaissance caractéristique du passage d'une solution moins bonne à une solution meilleure du point de vue de la complexité des calculs.

3.1.IV. : Différents «niveaux de connaissance» relatifs à la composition des applications linéaires.

Ces niveaux dépendent à la fois des comportements qui manifestent la connaissance et des types de situations qui provoquent ces comportements. La classification en niveaux tend à permettre d'expliquer a priori leurs différences par des différences de complexité entre les situations, entre les procédures ou entre les modèles cognitifs qui les caractérisent. Ces différences de complexité sont fondées sur

des informations d'origine mathématique, épistémologique, psychologique qui doivent se justifier de façon intrinsèque dans l'analyse de la situation ou du processus didactique.

Expérimentalement, l'existence de tels niveaux peut se manifester par des indices que nous évoquerons plus loin (par. 5.3.5.) et dans certains cas particuliers, importants par ce que G. Vergnaud a appelé «niveaux de complexité psychogénétique».

a) Pour mémoire, nous pourrions noter Niveau (0) celui que révèle la procédure P_0 : la structure est agie.
 b) Niveau (1) : c'est celui que révèle le remplacement dans l'action d'une suite de similitudes par une seule (procédure P_1). On peut supposer que ce comportement n'est possible que si le sujet a un modèle, encore implicite peut-être, qui lui permet d'admettre ce remplacement, lequel peut apparaître sans que le sujet ait la possibilité de reconnaître, de formuler, de considérer comme un objet d'étude et a fortiori de justifier ce remplacement autrement que par des preuves contingentes.

c) Niveau (2) : un premier pas est franchi si un élève dit : «j'ai les pantographes $\times 2,5$ et $\times 0,25$ alors je calculerai les images avec une seule application » : $\times 0,625$ celle-ci est obtenue après calculs sur des longueurs particulières (Procédure P_2).
 d) Niveau (3) : S'il dit : « Avec les deux pantographes que vous me donnez : $\times 4,5$ et $\times 1/3$, je prévois que l'agrandissement sera $\times 4,5 \times 1/3$ un autre pas est franchi. La vérification est possible par le calcul (procédure P_3).

e) Niveau (4) : L'élève dit : « on devrait toujours pouvoir remplacer l'action des deux ou de plusieurs pantographes par l'action d'un seul que l'on peut calculer en faisant le produit des deux premiers ».
 f) Niveau (5) : considérer que les mêmes propriétés pourraient valoir dans d'autres domaines et acquérir des formulations spécialisées : « prendre une fraction de ... — un pourcentage... » demande en extension, et recevoir un statut culturel nouveau sans changer beaucoup du point de vue mathématique. Par contre, le calcul des mesure-produits affecte la conception même de la notion de fraction et doit être traité à part à ce stade (voir à ce sujet (Vergnaud et Al (1979) ; Rouchier (1980)).
 g) Niveau (6) : bien que certaines remarques antérieures aient permis à l'élève de mettre en difficulté sinon en doute, le modèle suivant né de la pratique des naturels :

agrandir _____ multiplier (ou ajouter)
 diminuer _____ diviser (ou soustraire)

et bien qu'il ait remarqué que $\left(\times \frac{1}{3}\right)$ était le même opérateur que $\left(\times \frac{3}{1}\right)$ sur les entiers (Phase II.3), l'obstacle que constitue ce modèle ainsi que tous ceux bâtis sur l'usage de N est loin d'être franchi.

Ainsi les élèves ne savent pas directement ce que signifie 3,2 — 3 — 3 : 3 ni calculer l'image correspondante, bien qu'ils aient les moyens de découvrir.

Il est clair que le jeu qui peut conduire les élèves à identifier les différentes manières de désigner les « similitudes », à unifier les méthodes de calcul exige qu'ils s'occupent non plus d'une ou de quelques applications mais de toutes. Il faudra un débat intellectuel, et seul un jeu social convenable peut promouvoir de telles problématiques et conduire à se poser la question. « est-ce que tout pantographe a un inverse ». Au niveau 6, l'élève peut s'occuper de certaines propriétés des opérations dans la mesure où ces propriétés servent une action.

Il y a un saut de complexité très important entre les situations qui, comme celle du pantographe, conduisent à utiliser le fait que cet inverse existe et celles qui conduisent à se poser la question, surtout si l'on veut que cette question se pose pour des raisons mathématiques (ce serait utile de le savoir) et non didactiques et formelles et que ces raisons apparaissent aux yeux de l'élève.

h) Niveau (7) : L'étape suivante consiste à faire fonctionner cette opération comme moyen d'analyse. Par exemple, en se rendant compte que toutes les applications rationnelles peuvent s'exprimer comme composées d'une application entière et de l'inverse d'une application entière. Exemple : $(\times 3/4) = (\times 3) \cdot (\times \frac{1}{4})$

Les calculs dans ce système assurent la possibilité d'établir de véritables théorèmes sur les rationnels comme celui que demandait de façon un peu abrupte Mme Touyarot (Brousseau 1980, p. 36)
Exemple de question : « Pour passer d'un modèle à son image, j'ai utilisé l'application linéaire $\times 4/7$; quelle est l'application linéaire qui permet de passer de l'image au modèle ? Pouvez-vous le prouver à un camarade sans calculer aucune image ? »

Cette étape permet de rechercher et de trouver comment résoudre tous les cas de divisions des décimaux au sens le plus général. Les élèves ont la possibilité de mettre au point la technique de la division dans un des niveaux de connaissance précédents, sans avoir recours à la composition d'applications linéaires, mais avec des sens différents : implicitement, lors de l'encadrement des rationnels-mesure (par exemple dans la phase I.5, puis I.7), pour calculer l'image dans certaines homothéties ($\times \frac{1}{4}$) par exemple, phase II.3.), par la recherche de l'image au moyen de l'application réciproque ou de la composition de deux applications exceptionnelles évidentes à cause du contexte. Par exemple, pour calculer $3,25 \times 1,25$ sans avoir recours à la composition, l'élève recherche quelle est l'application équivalente à $\times 1,25$, qui, il le sait, fait correspondre à $1,25 \rightarrow 1$ — ce qui le conduit péniblement à rechercher une fraction décimale équivalente à $\frac{100}{125}$ c'est-à-dire $\frac{800}{1000} = 0,8$. On effectue alors $3,25 \times 0,8$.

Il est clair que ces procédés, même s'ils sont apparus une ou deux fois dans le comportement, ne méritent pas à ce moment-là d'être érigés en méthodes et de faire l'objet d'apprentissages. Les élèves peuvent les produire une fois, en situation, grâce à un investissement exceptionnel et au support sémantique qui en découle. Ce serait une

méprise complète de vouloir faire détacher cette "procédure" de son contexte et de l'ériger directement en méthode à coups d'exercices.

C'est le niveau (7) qui permet la solution raisonnable et contrôlée de ces problèmes.

i) Niveau (8) : il consiste à prendre conscience de l'étape 7, à la prendre comme objet d'étude à la décrire de façon à la formaliser, en utilisant un langage algébrique et une théorie mathématique axiomatisée. L'intérêt d'une telle aventure peut être une classification des structures numériques. Une telle construction entrerait bien dans les intentions des réformateurs des années 70, pour la classe de 4ème (élèves de 13-14 ans). Mais en l'absence d'un contrat didactique clair avec les élèves au sujet de l'enjeu de l'activité mathématique, tous les niveaux épistémologiques que nous venons de détailler étaient confondus et la tentative vouée à l'échec dans la plupart des cas.

Une pratique comparable, courante, dans l'enseignement élémentaire, consiste pour le maître à "exploiter" le genre de situations didactiques présente plus haut, en institutionnalisant immédiatement la découverte d'un élève : « Vous avez découvert tel objet (affirmation implicite du fait qu'il a un caractère général) ; il s'appelle "composé de deux applications", sous-entendu il a un statut cognitif et culturel, reconnaissez-le, utilisez-le, dans les exercices suivants... ».

Cette pratique court-circuite tout le travail mathématique et même le nie ; elle revient à affirmer implicitement qu'il suffisait d'y penser pour transformer un concept protomathématique en notion mathématique. Certes, ce procédé didactique fonctionne et on peut légitimement l'employer localement. Mais nous sommes fondés à penser que le rejet de son emploi systématique est nécessaire pour changer fondamentalement les rapports du "sujet-s'appré- hant" avec la connaissance.

3.1.V : sur la recherche en didactique.

Parmi les conditions qui confèrent à la situation-problème ses propriétés didactiques (voir paragraphe 5.2.2), figurent :

- la possibilité pour chaque élève d'avoir un nombre suffisant d'occasions de changer de niveau de connaissances,

- des pénalisations implicites des procédures les plus complexes, elles-mêmes dues à une connaissance plus simple, par l'intermédiaire de coûts d'exécution et de probabilités d'erreurs plus élevés.

La situation où l'élève doit prévoir l'image donnée par la composition de deux applications, possède ces propriétés.

Le problème qui se pose au didacticien est alors un problème de faisabilité : il faut prévoir dans la situation du pantographe un minimum de dessins et de segments par dessin, il existe un maximum d'opérations, compatible avec le temps disponible, et la motivation des élèves. L'intersection est-elle vide ? il faut obtenir une évolution plus rapide, généralement en diminuant l'incertitude de l'élève, soit par un apport d'information soit par le choix d'une situation plus fermée. Dans quelle mesure le sens des acquisitions en est-il affecté ? Seule l'expé-

rimentation peut répondre. Mais elle peut apporter beaucoup plus d'informations sur l'effet de ces conditions : Il est possible dans certains cas de s'aider d'études a priori, de « calculs des situations ». Par exemple, on peut ici comparer les coûts des diverses stratégies en nombre d'opérations à effectuer (mentales ou écrites).

	P_0	P_1	P_2	P_3
coût d'un résultat	$2D + 2M$	$D + M$	$2M + \frac{2D}{n}$	$\frac{D}{n} + M$
fiabilité d'un résultat	$d^2 \cdot m^2$	$d \cdot m$	$d^2 \cdot m^2$	$d \cdot m$

D : coût d'une division

M : coût d'une multiplication

d : proba (division juste)

m : proba (mult. juste)

n : nombre de segments

On peut s'essayer à prévoir l'effet de celles de ces variables que l'on peut faire varier (D , M en choisissant la grandeur des nombres, n). Nous appellerons variables didactiques les variables de commande dont on montrera qu'elles ont un effet important — qualitatif — sur les évolutions de procédures.

En s'aidant d'autres considérations, on peut formuler certaines hypothèses : par exemple, la méthode P_1 conduit à P_3 plus rapidement que P_2 .

L'observation de deux classes (50 élèves), telle que nous la pratiquons régulièrement au Centre pour l'observation de l'école Jules Michelet de Talence, permet, par de simples χ^2 de tester des hypothèses de ce genre, pour peu que la prise d'information ait lieu au moment où les effectifs du choix sont suffisants pour chaque méthode.

Nous en donnerons quelques exemples au paragraphe 5.

3.1.3. Résumé de la suite du processus (2 séances)

Les activités, qui suivent les deux que nous avons décrites plus haut, ont pour objet de provoquer les modifications de sens détaillées ci-dessus du niveau 1 au niveau 7.

Le processus tend à amener les élèves à se poser des questions mathématiques à propos des propriétés des compositions : Est-ce que

$x \cdot 2 \cdot ((x 1,5) \cdot (2,5))$ est la même application que $x (2 \times (1,5 \times 2,5))$? Que signifie (3), quels autres noms peut-on lui donner? (la définition de l'égalité de deux applications fonctionne ici comme moyen de preuve). Quels agrandissements peut-on obtenir par composition de deux pantographes (puis de 3, etc.), pris dans un certain ensemble, par exemple $(x 2; x 3; x 4; x 7; x 10)$. Quelle est la réciproque de $x \frac{4}{7}$, etc. Que produit $x \frac{7}{4} \times \frac{3}{5}$. Un des buts de ces activités consiste à intéresser les élèves à la recherche des propriétés des objets dont ils s'occupent, ou à s'intéresser à des curiosités, comme par exemple, les situations où il faut choisir entre deux modèles d'augmentations de prix par somme ou alors par composition. Par exemple: $x (1 + 0,03 + 0,05)$ et $x (1 + 0,03) (1 + 0,05)$. Bien sûr, chaque étape pose un problème spécifique qui appelle le choix de situations elles aussi spécifiques. Toutefois, un certain nombre de concepts de didactique et de tours de mains dont nous parlerons au chapitre suivant, permettent d'en produire et d'estimer leur adéquation. La plupart d'entre elles relèvent du schéma de la validation. L'habitude de ce genre de situations qui, au début, suit des règles précises, permet aux élèves d'instaurer et de conduire des débats sans que les règles soient explicitées chaque fois et d'en choisir des sujets.

L'activité finale consiste à identifier les fractions-mesures, les fractions-applications linéaires et les rapports, à unifier les expressions et les applications particulières produites au cours du processus, et à les reformuler dans le langage nouveau commun.

3.1.VI : Limites des processus de reprise

Cette réorganisation "après coup" de la connaissance est une activité fondamentale à laquelle on serait tenté de voir un bon entraîneur aux mathématiques pour les élèves (Brousseau 1976); mais il n'est pas prouvé que cette transposition de la genèse historique en genèse didactique soit si intéressante. H.Ratsimba-Rajohn (1981) a montré que, contrairement à ce qu'on pourrait attendre et malgré un choix convenable des situations, dans certains cas, le modèle le plus ancien, celui dans lequel les autres prennent leur source et leur justification, sort renforcé d'un processus destiné à le faire remplacer par un autre, même si l'élève sort convaincu que le nouveau modèle est meilleur et si les situations lui donnent une grande supériorité. Le conditionnement par la répétition de l'emploi n'est pas effacé par la signification du processus. Aussi, l'étude des caractéristiques des situations didactiques ne peut pas plus être rabattue sur l'épistémologie qu'elle ne peut l'être sur la psychologie.

3.2. Le puzzle

3.2.1. La situation problème

La première situation d'étude des applications linéaires proposée aux élèves est la suivante.

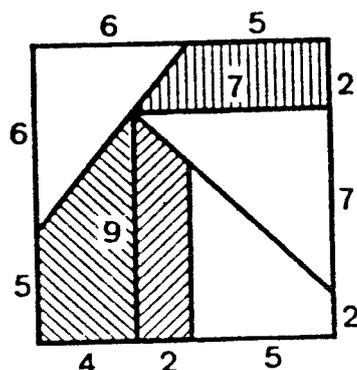


fig. 2

Consigne: « Voici des puzzles (Exemple : Tan-gran, fig. 2) vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle ».

Déroulement: Après une brève concertation par équipes, les élèves se séparent. Le maître a affiché au tableau une représentation agrandie des puzzles complets.

Presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 centimètres à toutes les dimensions : même si certains doutent de ce modèle, ils parviennent rarement à s'expliquer et jamais à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Le résultat évidemment, c'est que les morceaux ne se raccordent pas. Discussions, diagnostics, les leaders accusent leurs camarades d'avoir manqué de soin. Ce n'est pas le modèle, c'est la réalisation qui est mise en accusation ; vérifications, certains refont tous les morceaux. Il faut se rendre à l'évidence, ce n'est pas facile ! Le maître n'intervient que pour encourager et constater les faits, sans exigences particulières. Certains enfants produisent, par retouches successives, un puzzle qui reproduit grossièrement la forme du modèle. D'autres se tirent d'affaire en découpant un grand carré : les raccordements sont impeccables. Le maître invité, ainsi que les autres groupes d'élèves, à constater le succès, suggère dans ce cas aux compétiteurs de former avec le modèle une figure (fig. 3) qui ne peut pas être reproduite avec l'image (fig. 4) il est assez facile en

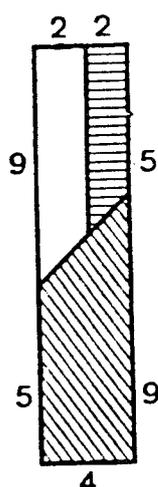


fig. 3 : modèle

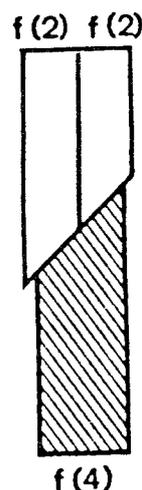


fig. 4 : image

général de trouver 3 côtés, a, b, c, tels que $a + b = c$ et $f(a) + f(c) \neq f(c)$. Ceci amène souvent les élèves à remarquer la nécessité de réaliser la condition caractéristique de la linéarité. Divers processus sociaux et intellectuels se conjuguent pour rendre difficile la remise en cause du modèle. On peut assister à des manifestations affectives extrêmement vives : disputes, acharnement, pleurs, menaces.

Lorsque les enfants admettent qu'il doit y avoir une autre loi et se mettent à la chercher, les choses vont beaucoup plus vite, surtout si l'un d'eux, ou le maître dispose les longueurs dans le tableau (fig. 5).

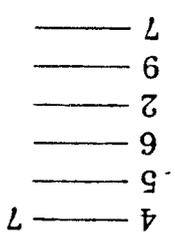


Fig. 5

Ils trouvent d'abord l'image de 8 : 4 → 7 alors 8 → 14, qui ne sert pas et curieusement, cette idée n'est pas contestée, comme si dès que l'autre modèle est rejeté, celui-ci s'imposait. « Il faudrait l'image de 1 » « Oui, ça permettrait de trouver toutes les autres » « pour cela, il faut partager 4 en 4 parties, il faut diviser 7 en quatre aussi ». Le modèle de commensuration qui leur est enseigné leur permettrait d'écrire directement : 4 fois l'image de 1 mesure 7, l'image de 1 est donc 7/4 (voir par. 4.2.6.). Ils ne l'utilisent pas spontanément. Ils calculent par des procédés du genre suivant :

$$7 = \frac{40}{70} = \frac{280}{280} : 4 = \frac{40}{70} = \frac{20}{35} = \frac{100}{175} = 1,75$$

alors $\frac{350}{100} : 2 = \frac{100}{175} = 1,75$ etc. Il est sûr que ces calculs ne peuvent

avoir lieu que parce que la fraction-mesure est connue. On observe peu de remarques à ce moment sur la nécessité d'avoir des segments tels que $f(a) + f(b) = f(c)$ dès lors que $a + b = c$. Ces calculs permettent enfin le succès dûment constaté par la construction effective.

3.2.2. Résumé de la suite du processus

La leçon suivante consiste à proposer de chercher l'image — dans la même situation — d'une longueur fractionnaire. Les enfants peuvent vérifier leurs prévisions pour des fractions simples en utilisant les puzzles construits.

Pour enseigner le calcul de l'image des décimaux, le maître introduit à nouveau une situation semblable à celle du puzzle; il s'agit d'agrandir et de reproduire une pièce en T qui par juxtaposition, produira une mosaïque. Cette fois, les remarques sur la relation fonda-

mentale abondent et le modèle linéaire est adopté d'emblée mais on aurait tort de supposer qu'il s'est définitivement installé, car, dans une activité ultérieure (6 séances plus tard) les élèves accepteront sans sourciller l'idée que les applications $x \rightarrow 2,2x$, $x \rightarrow x + 5$ et $x \rightarrow 2x + 3$, sont toutes les trois des applications linéaires (des « agrandissements » comme les autres). Et il faudra aussi les distinguer des fonctions quadratiques (Ex. : côté \rightarrow surface du carré) pour qu'ils utilisent systématiquement le critère fondamental afin de s'assurer dans chaque cas du bien fondé de l'emploi de la linéarité.

Le lecteur aura remarqué que dans cette première séance sur le puzzle, l'agrandissement n'a pas besoin d'avoir de nom. Les activités suivantes vont multiplier ces agrandissements et lorsqu'il faudra les comparer, trouver ceux qui sont équivalents, les ranger, la domination par l'image de 1 sera choisie consciemment. Alors la question « est-ce que les agrandissements sont des nombres » sera posée comme elle l'a été pour les fractions-mesures, et laissée sans réponse officielle.

3.2.1 : Fondements affectifs et sociaux de la preuve mathématique

Cette situation du puzzle est du même type didactique que celle du pantographe mais la prévision correcte s'y heurte, de façon beaucoup plus dramatique, à un obstacle épistémologique : la pregnance du modèle additif.

Il est essentiel que le maître ait pu, au préalable, donner à ses élèves l'habitude d'accepter de chercher leurs solutions dans la situation — problème et non d'essayer d'interpréter les indices qu'il pourrait leur fournir. Il aura besoin de tout son crédit de « neutralité cognitive » pour pouvoir soutenir les élèves au niveau affectif sans interrompre les processus psychologiques et sociaux qui doivent s'accomplir. De prime abord, la situation leur paraît parfaitement innocente, familière et sans mystère : chacun a le temps de se faire une idée et de s'investir personnellement dans une tâche matérielle qui va engager sa responsabilité à l'égard de l'équipe. Le suspense est tout-à-fait modéré, mais il existe tout de même. Le scandale éclate dans un ciel serein ça ne marche pas ! Il faut que ça marche ! Les convictions se heurtent et s'expriment selon les caractères et positions sociales au sein de l'équipe. C'est alors que commence le processus scientifique, il faut chercher la cause, s'obstiner. Il ne sert à rien de séduire ou d'intimider l'opposant, il faut se convaincre, convaincre, prouver. L'équipe éclate en écoles : les uns contrôlent le travail fait, d'autres veulent agrandir le carré, le doubler et couper un petit bout. Les amitiés sont à rude épreuve, les mises en doute sont reçues comme des trahisons, les « faibles » mettent en doute la compétence des « forts ». Rien à faire, la rhétorique devra céder le pas à la preuve scientifique et intellectuelle, seul moyen honorable de se rendre à l'« adversaire ». Lorsque, l'obstacle franchi, la solution apparaîtra à chacun démystifiante, contingente, banale, et même un peu désenchantée, chacun se la sera appropriée, et aura triomphé, non pas

de ses camarades, mais de lui-même, tout le monde a gagné sans que le maître ait besoin de tirer aucune leçon. Le mérite d'abandonner une idée qu'on trouve fausse est aussi grand que celui d'en trouver directement une juste, l'obstination est aussi nécessaire que le renoncement à l'obstination. Les enfants ont été conduits à prendre plus passionnément le parti de la vérité.

Nous avons constamment observé qu'ils tirent aussi le plus grand plaisir de ces jeux, comparables sur bien des points aux jeux sportifs. Ce plaisir les conduira à aimer les mathématiques et à leur donner la signification humaine et philosophique qu'elles n'auraient pas pu prendre. Le maître doit gérer l'investissement affectif, le désir de ses élèves et les leçons de ce type sont de nature à leur faire, non seulement accepter, mais demander éventuellement des exercices ou des entraînements. Nous n'avons pas décrit le système très complexe qui régit ses interventions, non plus strictement didactiques, mais dont l'importance n'échappera pas au lecteur. A.N. Perret Clermont (1979 et 1980) étudie cette construction de l'intelligence dans l'intégration sociale et N. Balacheff (1980) observe de façon fine les conduites de preuves des élèves de divers niveaux.

3.3. Approche décimale des rationnels (5 séances)

Ces situations font partie de la phase II.4 qui intervient dès que les élèves ont construit l'ensemble des rationnels munis des opérations, addition, soustraction, produit et division par un naturel et ordre.

3.3.1. Localisation d'un rationnel dans un intervalle naturel

Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche. Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela, il a le droit de poser des questions, par exemple :

« est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ? »
 A n'a le droit de répondre que par « oui » ou par « non ». B pose des questions jusqu'à ce qu'il ait trouvé les 2 entiers consécutifs entre lesquels se trouve la fraction. La maîtresse n'intervient dans cette phase que si les enfants font appel à elle, soit pour arbitrer un conflit, soit pour apporter des précisions ou des renseignements.

Le jeu oppose d'abord des équipes, puis très vite des élèves 1 à 1 qui choisissent en même temps deux fractions et se posent mutuellement des questions à tour de rôle. Le jeu est suivi d'une mise en commun des observations.

Il conduit les enfants à manier le langage désignant les intervalles de N et leurs intersections, éventuellement. Assez rapidement, la recherche d'un nombre minimum de questions conduit à une stratégie de partitions linéaires successives en intervalles à peu près égaux.

Ex. [0, 5] ? R : oui ; [0, 3] ? R : non ; [3, 4] ? R : non
 de sais : [4, 5] ? R : oui ; [0, 3] ? R : non ; [3, 4] ? R : non
 « [0, 5] ? R : oui ; [0, 3] ? R : non » de s'assurer de [3, 5] ? Le jeu en

équipe conduit à des explications intéressantes.

Dans les phases antérieures, les élèves avaient remarqué que les entiers correspondaient à certaines fractions mais cette activité demande l'usage systématique du plongement de N dans \mathbb{Q} .

3.3.2. Intervalles rationnels

Le maître demande aux élèves de chercher des fractions, par exemple entre 3 et 4. La comparaison leur fournit le moyen d'en trouver beaucoup :

$3 = \frac{12}{4}$ $4 = \frac{16}{4}$ alors $\frac{13}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{15}{4}$ répondent à la question. Il introduit alors de nouvelles règles au jeu précédent : on va essayer de continuer le jeu en essayant d'encadrer la fraction de l'adversaire dans l'intervalle le plus petit possible (sans préciser d'abord).

Remarque : Une année, ce jeu s'est appelé le « jeu du radar » (connu aussi sous le titre : « jeu de l'explorateur ») car la fraction de l'adversaire était un avion qu'il fallait localiser le mieux possible avec un faisceau radar de plus en plus étroit, mais cette « justification » n'a été proposée qu'une fois et n'aide pas beaucoup les enfants.

La difficulté consiste autant à trouver des fractions entre deux autres, qu'à comparer celle qu'on a choisie de celles du « filet » de l'adversaire.

Après quelques essais, la méthode du jeu s'éclaire un peu mais il faut se mettre d'accord sur ce que veut dire intervalle plus petit. Les élèves discutent, dessinent une droite. Séance *difficile* : la règle du jeu est difficile à apprendre et nécessite de nombreux calculs — l'enjeu n'est pas évident, cette activité consomme du « capital-plaisir » lors de la première séance. Les enfants s'arrêtent d'eux-mêmes dès le premier encadrement inférieur à 1 et comparent les longueurs des intervalles. Dans la séance suivante, certains peuvent poursuivre et raffiner une fois leur partition. Les enfants n'ont le temps que d'accomplir 2 parties. Cependant déjà, des encadrements décimaux apparaissent bien que les enfants voient que les calculs de l'adversaire sont facilités. C'est une faiblesse du jeu, car les élèves ne comprennent pas d'eux-mêmes qu'on n'a aucun intérêt à compliquer le calcul de l'adversaire. Dès que la question est réglée par une mise au point collective, les parties se déroulent beaucoup plus vite et les dénominateurs des fractions s'enflent : $99/10$ est attrapée sous la forme $9900/1000$. Encadrée dans un intervalle très petit : $1/100\ 000$ la fraction $22/7$ n'est pas encore attrapée. Une discussion animée s'installe : on ne pourra jamais l'attraper ! disent les uns... mais si ! pourquoi ? Certains donnent la raison : parce que 10, 100, 1000... ne sont pas multiples de 7, mais bien peu sont convaincus et le maître paraissant intéressé mais ignorant ou neutre, le problème reste ouvert pour le moment.

3.3.3. Suite du processus

Les fractions décimales dont nous nous sommes servis dans le jeu précédent, peuvent être placées très vite sur une droite graduée. Cette

activité permet d'établir une relation avec les nombres à virgules (les décimaux) si les élèves les connaissent déjà et avec les longueurs. Sinon, le maître introduit l'écriture décimale. Est-ce que ce sont des nombres ? discussions assez courtes, les élèves déduisent les calculs sur les décimaux de ceux sur les fractions...

Le jeu de la localisation reparait à la fin de cette série de leçons : où se trouve $\frac{221}{35}$? mais il prend aussi la forme : on veut partager 4319 entre 29. Les élèves « redécouvrent » la division dans les entiers et la prolongent.

Voici ci-contre le tableau final dressé par la classe et qui présente le travail effectué et les améliorations apportées. La disposition de la division a été perfectionnée.

3.4. Expérimentation du processus 3.4.1. Remarques méthodologiques

La méthode que nous avons utilisée pour identifier les problèmes d'enseignement des décimaux et pour observer le fonctionnement des concepts de didactique est bien connue en physique et en technologie empirique : c'est celle des « comparaisons à résultats constants ».

Après avoir identifié un certain nombre de variables ou d'options que l'on croit susceptibles d'agir de façon significative, on réalise des expériences basées sur des choix différents avec l'intention de les comparer, indépendamment de l'idée que l'on se fait de l'intérêt de ces choix pour l'enseignement.

La méthode expérimentale classique consiste à organiser alors en plan d'expérience les différents choix et à conclure au vu des variations des résultats statistiques.

Elle ne convient pas à notre propos : — d'une part, elle n'est pas déontologiquement recevable. Aucun professionnel ne peut accepter, a priori d'enseigner « pour voir », en se désintéressant du résultat.

— d'autre part, elle n'est pas possible ; par fonction, le système éducatif réagit à ses propres résultats en modifiant ses conditions d'enseignement et donc, la base de la comparaison, fondée sur l'identité des conditions, est caduque et par conséquent, elle exige l'analyse des réactions du système éducatif et donc, celle des conditions d'enseignement.

Ces comparaisons « à résultats constants » portent sur les conditions d'obtention et les moyens mis en œuvre pour contrôler les résultats, et non sur les résultats eux-mêmes : nous cherchons à savoir si les mêmes résultats sont plus

ou moins coûteux à obtenir selon divers choix. De très nombreuses raisons, que nous n'exposerons pas ici, plaident en faveur de ce procédé.

Il faut rompre néanmoins avec certaines routines de la recherche fondamentale : ainsi, au lieu de comparer des processus peu différents pour observer l'effet d'une modification des conditions, en maintenant toutes les autres constantes, il est préférable, au contraire, de produire des processus très différents en faisant varier des conditions jugées importantes. Cependant, pour rendre possible l'enseignement, c'est-à-dire pour réaliser et conduire ces situations concurrentes, nous avons vu que nous étions amenés à répondre à de nombreuses questions et à faire de nombreux choix. Ces questions et ces choix forment le tissu que les concepts et les théories didactiques ont à charge de décrire en même temps que de fournir les moyens d'analyser les réalisations obtenues.

3.4.2. La situation expérimentale

a) Le curriculum a été conçu et préexpérimenté au cours de la période 1974-1976 (à la suite de tentatives qui ont débuté en 1971-1972) avec la collaboration de Mme Liorens et Mme Brousseau, institutrices, dans deux classes de CM2* à l'école J. Michelet de Talence, où se trouve implanté le centre d'observation de l'IREM de Bordeaux. Il a été présenté sous forme d'une suite de textes comparables à celui du chapitre 4 et d'un film réalisé par l'OFRAFEM en collaboration avec M. C. Prouteau. Sa communicabilité a été éprouvée au même niveau à l'École Normale de Pau (5 classes), à l'École Normale de Périgueux (3 classes), à Orléans, la Source (1 classe) et 3 fois au CM1*.

b) La population
Nous allons rendre compte de sa reproduction dans 2 classes de CM2 de l'école J. Michelet pendant 3 ans, (d'octobre 1977 à juin 1980) par Mmes N. Brousseau et D. Greslard : les effectifs étaient de ce fait 54, 50 et 47 enfants.

c) Techniques
Nous nous assurons de la « reproduction » effectuée du processus dans son ensemble. A l'intérieur de ce processus, nous aménageons des modifications des conditions et nous comparons les efforts nécessaires à l'obtention des mêmes résultats. Le recueil d'un grand nombre d'observations dans des conditions déterminées permet l'étude expérimentale classique de certaines questions de didactique dont nous parlerons au paragraphe 5.

* CM1 : Cours moyen 1ère année, enfants de 9-10 ans.
CM2 : Cours moyen 2ème année, enfants de 10-11 ans.

3.4.3. *Les résultats scolaires*

Les résultats que nous présentons ont été choisis parmi tous ceux qui ont été recueillis de façon à montrer, autant que possible, quel est le niveau des élèves en fin d'année sur les différentes catégories mathématiques d'exercices. Dans le tableau V, nous donnons donc tous les résultats obtenus au cours des différents CAS (contrôles de l'année scolaire), tous ceux figurant aux TAS (tests d'acquisitions scolaires) et certains résultats à des contrôles, aussi tardifs que possible, dans les catégories où, ni les CAS ni les TAS ne présentent de questions.

Le TAS est un test QCM étalonné à l'échelon national et porte sur les acquisitions en français aussi bien qu'en mathématique. Il permet de contrôler que les résultats de l'école expérimentale ne s'écartent pas significativement des résultats nationaux.

Le CAS est une liste d'exercices, correspondant aux objectifs de l'expérience, parmi lesquels sont choisis ceux constituant l'épreuve de fin de chaque année (les questions peuvent donc différer d'une année à l'autre).

Rappelons que ces résultats sont donnés à titre indicatif et que le curriculum n'a pas été choisi de façon à produire les effets scolaires maxima. Les seules exigences déontologiques de l'expérience étant que :

- i) les maîtres cherchent à obtenir les meilleurs résultats dans les conditions qu'on leur a proposées.
- ii) les résultats obtenus sont au moins aussi bons que ceux produits par les autres méthodes.

Le tableau ci-après montre que les exigences ont été satisfaites. Il n'est pas question de tirer argument scientifique de différences entre des méthodes dont on sait bien qu'elles peuvent être produites par des conditions fort variées que nous n'avons pas les moyens de contrôler.

		IV - Transformations				
Fractions → décimal Ecrire sous forme de nombre à virgule $\frac{123}{100} ; \frac{12}{25} ; \frac{2}{125}$ (CAS 78)		Passage de l'écriture en lettre → en chiffre				
	56		Ecris en chiffres : quarante huit unités sept dixièmes ; douze unités trois centièmes ; trente cinq centièmes. CAS 80 Ecris sous forme de nombre décimal : quarante huit unités sept dixièmes ; douze unités trois centièmes ; deux cents unités huit millièmes ; quatre vingt neuf millièmes ; six cent quarante huit centièmes CAS 79	80 80 70	79	
Equivalence Ecrire 3 fractions égales à 15/25 (comp. I. 1978-1979) Quelle est la série exacte de fractions équivalentes : $\frac{2}{3} ; \frac{4}{5} ; \frac{6}{7} / \frac{2}{3} ; \frac{4}{6}$ $\frac{6}{9} / \frac{2}{3} ; \frac{4}{9} ; \frac{16}{81}$ (TAS)	65,5	82,5				
	50,5	54	62,5			
		V - Additions				
Calculer : $\frac{84}{10} + \frac{425}{100} + 7 + \frac{3}{5}$ (composition I)	24	38	52	Effectuer : $12,04 + 108,974$ CAS 78 - CAS 80 $2\,763 + 554,65$ CAS 79 $0,07 + 0,05 + 0,01 = 0,013$ $0,07 + 0,05 + 0,01 = 1,3$ $0,07 + 0,05 + 0,01 = 0,13$ Cocher la bonne réponse TAS (Test d'acquisition scolaire)	82,5 89	90
					84,5	75 82
		VI - Soustractions				
Calculer : $5/8 - \frac{24}{100}$	57,5	69	71	Effectuer : $8,043 - 7,95$ CAS 78 $273,08 - 67,5$ CAS 79	65,5	78,5

2 - Applications courantes

Un fromage contient 45 % de matière grasse.

C : 64
R : 45,5

Trouve la masse de matière grasse contenue dans 250 g de ce fromage.

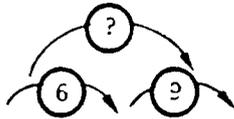
Quelle distance représentent 12 cm sur une carte à l'échelle 1/5000000 ? La distance entre 2 villes est de 35 km. Quelle sera la distance entre ces 2 villes sur la carte

C : 79,5
R : 53

CAS 78

DIVISIONS

1 - Opérateurs



TAS

63,5

75

75,5

2 - Applications courantes

Un casier de douze bouteilles coûte 56,40 F. Quel est le prix d'une bouteille ?
CAS 80

C : 95
R : 72

Un casier de dix bouteilles coûte 36,50 F. Quel est le prix d'une bouteille ?
CAS 78 - CAS 79

79 C : 93
R : 82

Un marchand de fruits et légumes a acheté au marché un lot de 14 kg d'oranges pour 20 F. A quel prix lui revient 1 kg d'oranges ? Donne ta réponse sous forme de fraction puis au centime près.
CAS 78

C : 79,5
R : 53

C* : opérations posées et explications correctes.
R : résultat.

II - Problèmes

<p>Sur un cadran d'horloge, la grande aiguille tourne de 5/12 de tours. Quelle est la durée de cette rotation ?</p> <p>25 mn <input type="checkbox"/></p> <p>5 mn <input type="checkbox"/></p> <p>un quart d'heure <input type="checkbox"/></p> <p>TAS 37,5</p> <p>Sur le plan au $\frac{1}{200}$ d'un appartement, les dimensions de la salle de séjour en murs sont de 35 et 20. Les dimensions réelles en m sont : 2,35 et 2,20 <input type="checkbox"/> 70 et 40 <input type="checkbox"/> 7 et 4 <input type="checkbox"/></p> <p>TAS (cocher la bonne réponse).</p>	<p>26</p> <p>31</p> <p>27</p>	<p>Maman a payé 25,20 un bifteck de 900 g. Quel est le prix du kilo ? Combien aurait-elle payé 350 g de bifteck ?</p> <p>C : 55,5 R : 28</p> <p>Sur une carte routière 4,5 cm représente une distance de 9 km. Quelle est l'échelle de cette carte ?</p> <p>R : 18,5</p> <p>CAS 78</p> <p>A 40 F le kg combien coûte un rigot de 1500 g ?</p> <p>CAS 78 - CAS 79</p> <p>A 40 F le kg, combien coûte un roi de 3550 g ?</p> <p>CAS 1980</p> <p>Colette veut acheter des pommes. Elle a le choix entre 4 cartons, A, B, C, D, présentés en sachets de poids différents :</p> <table border="1" data-bbox="470 616 782 907"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> </tr> <tr> <td>poids du sachet (kg)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>prix du sachet (F)</td> <td>2,30</td> <td>5</td> <td>6,9</td> <td>10,5</td> </tr> </table> <p>49</p> <p>Quelle est la carte-goutte la plus intéressante ? (Celle qui revient le moins cher au kg).</p> <p>CAS 78 - CAS 79</p>		A	B	C	D	poids du sachet (kg)	1	2	3	5	prix du sachet (F)	2,30	5	6,9	10,5	<p>C : 45 R : 43</p> <p>C : 58 R : 53,5</p>
	A	B	C	D														
poids du sachet (kg)	1	2	3	5														
prix du sachet (F)	2,30	5	6,9	10,5														

3.4.4. Reproductibilité — Obsolescence

a) La reproductibilité doit être envisagée d'abord à travers la stabilité des résultats à des exercices comparables, proposés au cours de chacune des trois années de l'expérience principale, dans des conditions comparables.

Une grande latitude ayant été laissée aux maîtres pour ajuster leur enseignement, on retrouve seulement 40 exercices commun aux trois années (sur 75 posés chaque année) : 21 ont été posés en cours des processus, 8 figurent dans les contrôles de fin d'année et 11 que nous traiterons à part, appartiennent au TAS.

L'examen du tableau VI permet d'observer :

— une assez bonne stabilité des résultats aux contrôles annuels malgré, selon l'opinion des maîtres, des différences importantes entre les niveaux des élèves des différentes promotions : les résultats ne diffèrent pas significativement d'une année à l'autre. Par contre une bonne corrélation entre ces exercices montre qu'ils sont très comparables.

Tableau VI

% de réussites	années			XY t de student r corrélation	X Z t r	Y Z t r		
	X 77-78	Y 78-79	Z 79-80					
effectif des élèves	54	50	47					
exercices r = 21	m	65,93	75,23	76,05	t	1,57 NS	1,98 NS	NS
	σ	20,21	18,08	11,75	r	0,97 S.001	0,67 S.001	0,64 S.001
contrôle annuel r = 8	m	73,25	77,50	72,50	t	0,65 NS	NS	NS
	σ	11,46	14,17	10,12	r	0,75 S.05	0,80 S.02	0,47 NS

— Les résultats aux exercices en cours d'apprentissage paraissent moins utilisables, mais il n'y a pas non plus entre eux de différences significatives. Les corrélations sont excellentes : au prix d'une correction linéaire, les pourcentages pourraient presque être confondus. L'examen des corrélations partielles permet d'éliminer, dans une certaine mesure, l'influence de la « nature des exercices ». Alors que les deux premières années restent fortement corrélées, la troisième ne l'est plus :

$$(r_{xz/y} = -0,055(\text{NS}); r_{xz/y} = 0,26(\text{NS}); r_{xy/z} = 0,95(\text{S}))$$

b) L'observation du graphique de contingence montre, qu'en fait, une correction quadratique serait plus indiquée car les résultats des exercices ayant eu la première année les pourcentages de réussite les plus faibles : 5 exercices au-dessous de 50% font l'objet d'une amélioration importante les années suivantes : 3 au-dessous de 50 la 2ème année, et seulement 2 entre 50 et 60 la 3ème. Seuls les exercices proposés en cours de processus sont dans ce cas, mais ne sont pas caractérisés par un type d'opérations mathématiques.

c) L'hypothèse de reproduction du même processus doit être envisagée principalement contre les deux suivantes :

1. Celle d'une « amélioration », au moins locale, comme celle que nous venons de signaler et dont l'effet, visible ici, est un resserrement de la dispersion des résultats (l'écart type des exercices diminue fortement d'une année à l'autre).

2. Celle d'une obsolescence des situations didactiques. Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions, qui, tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une « histoire », un déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques garanties d'une signification correcte des réactions des élèves : les comportements obtenus sont apparemment

ment les mêmes mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, plus proche du comportement culturel.

L'enfant puise alors les informations nécessaires à l'établissement de ses réponses, moins dans l'analyse de la situation et la compréhension du problème (qui lui est proposé) que dans les indications « pédagogiques » qui lui sont fournies d'instant en instant, selon un contrat didactique implicite indépendant du contenu. (Brousseau 1979). Ce processus présente l'avantage de réaliser l'institutionnalisation de la connaissance : l'élève prend connaissance des questions qu'on veut lui poser, des réponses qu'on attend de lui, de leur statut culturel... etc.

La situation didactique envisagée initialement comme une situation d'adaptation de l'élève dans une situation-problème est devenue en fait une situation de communication d'un savoir institutionnalisé avec les inconvénients que l'on connaît pour la compréhension et l'acquisition.

Les travaux de E. Filloy permettent de prévoir que certains objectifs de haut niveau taxonomique échappent au contrôle des maîtres et donc aux corrections didactiques. On peut espérer que l'obsolescence, si elle se produit, entraînera d'une part, une évolution des questions choisies par le maître dans le sens d'une augmentation du nombre des problèmes formés et d'autre part une diminution des réussites sur les questions les plus ouvertes.

On peut noter des tendances dans les sens indiqué en observant, par exemple, dans le tableau VII, l'évolution des pourcentages de réussite aux opérations et en les comparant à ceux des structures problèmes. Ces tendances ne sont pas significatives.

d) Sans rapporter ici plus longuement les moyens du même ordre par lesquels on l'obtient, nous accepterons cette conclusion : si l'expérience a reproduit les conditions prévues — ce que l'observation clinique et d'autres statistiques ont à charge de déterminer — elle a produit sensiblement les mêmes résultats. C'est pourquoi nous rapportons ces résultats au processus que nous étudions, quelle que soit l'année qui fournisse l'information étudiée dans le tableau.

se produit habituellement).

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

a) Comparaisons externes

3.4.5. Brefs commentaires

En rapprochant, sous réserve des remarques précédentes,
ces résultats sur II de ceux des tableaux de la première par-
tie de l'article (Brousseau 1980, p. 47) on peut remarquer
qu'ils leur sont assez comparables, sans leur être inférieurs,
sur les objectifs considérés comme fondamentaux par les
maîtres (opérations). Ils s'échelonnent dans le même ordre
de réussite entre 60 et 90%.

On peut attribuer les fluctuations à des différences entre
les questions posées.

De même, on assiste, ici comme là, à une importante bais-
se des réussites dans les « Problèmes ».

b) Comparaisons internes : les décimaux

L'analyse factorielle des résultats indique que le mode de
questionnement (TAS ou CAS) est le premier facteur de
dispersion des élèves et des questions. Les opérations sur
les décimaux sont raisonnablement acquises. Les diffé-
rences entre les réussites aux additions et aux soustractions
ont tendance à s'effacer, sauf pour les TAS qui présentent
des difficultés spécifiques (1 - 0,09 etc). De même, la
réussite est à peu près la même aux multiplications et aux
divisions et en moyenne 10 à 15% inférieure à celle des

Résultats

opérations	m	72	77,4	77,2
	o	12,8	11,08	10,97
problèmes	m	73,8	73,7	67,2
	o	8,13	17,43	5,87
		78	79	80

Tableau VII

Nombre de contrôles

opérations	19	15	15
problèmes	7	1	1
	78	79	80

La conception des décimaux en tant qu'application linéaire est bien acquise : les opérations sont posées à bon escient (compréhension de 80 à 95 %) et bien réussies.

Les situations et problèmes sont moins bien réussis et c'est la compréhension des situations qui est en cause.

c) Les rationnels. Les rangements, repérages et encadrements sont un peu mieux réussis dans les rationnels que dans les décimaux et les résultats sont honorables. Il faut voir là l'effet de renforcement du modèle initial dont nous avons parlé : les fractions servent à établir les règles de comparaison des décimaux. Leur connaissance est renforcée.

Ce phénomène se produit aussi pour la soustraction des fractions qui est utilisée au début de l'approche des rationnels (65 %) alors que l'addition l'est beaucoup moins (40 %) mais dans ce dernier exercice, c'est la présence du 7 qui a fait baisser les résultats.

L'utilisation des opérateurs et du symbolisme fonctionnel est efficace malgré un apprentissage finalement très court sur ce sujet (75 à 90 %).

d) Le fait que la réussite aux exercices sur les décimaux soit assez comparable à la réussite aux exercices correspondants sur les rationnels, est un indice nouveau et positif d'un fonctionnement mieux contrôlé du concept.

e) L'analyse du processus ne sera pas faite ici. La principale question qui nous intéresse (voir paragraphe 5.4.) exigerait l'examen du nombre d'exercices et de leçons et celui des dépendances et des implications entre les résultats des élèves. Cet examen doit porter sur leurs comportements d'erreurs et non seulement, comme ici, sur leurs réussites à propos de situations relevant de niveaux taxonomiques plus élevés.

4. Analyse d'une situation : l'épaisseur d'une feuille de papier

4.1. Description de la situation didactique : séance 1 (phase I.1)

4.1.1. Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

— sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc.) placés dans un ordre quelconque.

Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciables au simple toucher. Le maître ne cherche pas à « savoir » ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de « bonne mesure » à découvrir. — sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.

— 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)

— Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

4.1.2. 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn)
La maîtresse place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) Présentation de la situation — Consigne

— « Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ? »

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe — les enfants les touchent, les comparent. « Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? » (d'après le poids).

— Objectif

« Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.

Vous êtes groupés par équipes concurrentes. Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essayeriez dans un jeu de communication.

Vous pouvez faire des essais avec le papier et ces instruments appelés « pieds à coulisse » (les doubles décimètre suffiraient mais le pied à coulisse a été déjà utilisé) ».

b) Déroulement et remarques

Les enfants essaient presque tous de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille afin d'obtenir immédiatement la désignation cherchée. Il font des remarques du genre : « c'est beaucoup trop fin, une feuille n'a pas d'épaisseur » ou « c'est beaucoup plus petit qu'un millimètre », ou « ce n'est pas possible de mesurer une feuille ! »

Il y a souvent à ce moment-là une phase de désarroi, de déconfort même des enfants. Puis ils demandent à la maîtresse s'ils peuvent prendre plusieurs feuilles. Très vite alors, ils font des essais de mesure avec 5 feuilles, 10 feuilles, jusqu'à ce qu'ils obtiennent une épaisseur suffisante pour la mesurer au pied à coulisse ou avec le double décimètre. Alors, ils échangent des systèmes de désignation tels que :

— 10 feuilles 1 mm

60 feuilles 7 mm

ou — 31 = 2 mm (le maître fera remarquer lors de la discussion que

cet emploi du signe égal n'est pas correct)

Dans l'une des équipes, les enfants ont refusé le pied à coulisse et ont établi ce système de désignation : A = TG B = TF D = M

A, B, C, étant le nom des différents types de papier, TG, TF, M voulant dire : très gros, très fin, moyen. Dans cette phase, le maître intervient le moins possible. Il ne fait de remarques que s'il s'aperçoit, que, dans les groupes, les enfants ne respectent pas — ou simplement ont oublié — la consigne.

Les enfants peuvent se lever, aller chercher des feuilles, les changer, etc.

Lorsque la plupart des équipes a trouvé un système de désignation (et que les cinq enfants de chacune sont d'accord avec ce système ou ce code) ou si le temps est écoulé, le maître passe à la phase suivante : le jeu de communication, et ceci même si toutes les équipes n'ont pas encore trouvé.

4.1.3. 2ème Phase : jeu de communication (10 à 15 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

« Pour éprouver le code que vous venez de trouver, vous allez faire un jeu de communication. Vous verrez au cours de ce jeu, si la désignation des épaisseurs de feuilles que vous avez inventée vous permet de reconnaître le type de feuille désignée.

— Les enfants d'une même équipe vont se séparer en 2 groupes (de 2 émetteurs et de 3 récepteurs, suivant qu'ils sont 4 ou 5 dans l'équipe) : un groupe d'émetteurs et un groupe de récepteurs.

— Tous les groupes émetteurs vont se placer d'un même côté du rideau. Tous les groupes récepteurs de l'autre.

— Les émetteurs vont choisir un des types de papier placés sur la première table (A ou B, ou C ou D ou E) (que les récepteurs ne voient pas grâce au rideau). Ils vont envoyer à leurs récepteurs un message qui devra permettre à ceux-ci de trouver le type de papier choisi. Les récepteurs utilisent les tas de papier disposés sur la deuxième table au fond de la classe pour trouver le type de papier choisi par les récepteurs.

Quand les récepteurs ont trouvé, ils deviennent émetteurs (après vérification avec les émetteurs). Des points seront attribués aux équipes dont les récepteurs auront bien trouvé le type de papier choisi par les émetteurs ».

b) Déroulement et remarques

Dès le début du jeu, la maîtresse met en place le rideau qui sépare émetteurs et récepteurs.

La maîtresse :

- fait passer les messages des émetteurs aux récepteurs
- reçoit les réponses des récepteurs
- va contrôler que cette réponse est conforme au choix des émetteurs et constate, avec toute l'équipe, l'échec ou la réussite.

Tous les messages sont écrits sur une même feuille — que nous pourrions appeler ici « carnet de messages » (fig. 1) — qui circule entre les émetteurs et les récepteurs d'une même équipe — cette feuille porte le numéro de l'équipe. De plus, les émetteurs notent sur une autre feuille — que nous pourrions appeler « fiche de contrôle » — et qu'ils gardent, le type de papier qu'ils ont choisi à chaque jeu afin que la maîtresse puisse constater la réussite ou l'échec.

Remarque : Il est clair que la maîtresse n'a pas introduit de vocabulaire superflu comme « carnet de messages » « fiche de contrôle »... ni d'exigences formelles à propos de la présentation des messages — que les enfants devraient apprendre à respecter. Il n'y a pas eu de consigne générale à ce sujet, seulement des aides et des corrections particulières auprès des enfants mal inspirés.

(1)

numéro de l'équipe	1	E : 10 = 1 mn	1er jeu	1	feuille de contrôle
1er jeu : message émis					
réponse	R : D	réussi	3ème jeu	3 A	
2ème jeu : message émis	E : 21 = 1 mn				
réponse	R : B	réussi			
3ème jeu : message émis	E : 8 = 2 mn				
réponse	R : A	réussi			

carnet de messages

Si certaines équipes n'étaient pas arrivées à faire des messages efficaces, la maîtresse aurait organisé une nouvelle phase de concertation, par équipe, pour la recherche d'un code (même consigne que dans la première phase).

Mais ce fait ne s'est jamais produit (sur 8 expériences identiques). Les enfants sont arrivés à faire 2 ou 3 parties de jeu.

Pendant ce jeu, on observe 3 attitudes différentes chez les enfants :

- certains choisissent un nombre de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur
- certains choisissent une épaisseur et comptent le nombre de feuilles
- d'autres cherchent au hasard épaisseur et nombre de feuilles

On remarque aussi que les enfants choisissent de préférence les types de feuilles d'épaisseur extrême : les plus fines ou les plus épaisses pour faciliter le travail de leurs camarades.

4.1.4. 3ème Phase : Résultat des jeux et des codes (20 à 25 mn) (confrontation)

a) Présentation de la situation et consigne

Pour cette phase, les enfants reprennent leur place en équipes de 5 comme pour la 1ère phase de la séance. La maîtresse annonce une comparaison des résultats et prépare le tableau à double entrée : (équipes) X (types de papier) dans lequel elle inscrira les messages échangés et les points obtenus par les équipes (voir tableau I CM2 b 1977) au fur et à mesure de leur compte rendu.

b) Déroulement et remarques

A tour de rôle, chaque équipe envoie un « représentant » qui lit les messages à haute voix, explique le code choisi et indique le résultat du jeu.

Les différents messages sont comparés et discutés par les enfants. Comme ils sont souvent très différents, la maîtresse leur demande d'adopter un code commun.

Exemple : 10 = 1 mm

TF

60 feuilles 7 mm

Après discussion, la classe entière a décidé de marquer :

10 f ; 1 mm

60 f ; 7 mm

Lorsque tous les messages sont inscrits, les enfants observent le tableau et font spontanément des remarques du type : « ça, ça ne va pas » ou « ici, c'est bien » etc.

Ces remarques pourraient être classées en 4 catégories :

1ère catégorie :

Si les feuilles sont de type différent, à un même nombre de feuilles doivent correspondre des épaisseurs différentes.

Exemples du tableau I :

19 f ; 3 mm → Type A	}	« ça ne va pas »
19 f ; 3 mm → Type B		
19 f ; 2 mm → Type C	}	« ça ne va pas »
19 f ; 2 mm → Type D		

2ème catégorie :

Pour un même type de feuilles, au même nombre de feuilles correspond la même épaisseur

Exemple du tableau I :

30 f ; 2 mm → Type C	}	« ça ne va pas »
30 f ; 3 mm → Type C		

3ème catégorie :

S'il y a 2 fois plus de feuilles, l'épaisseur est 2 fois plus grande.

Exemple du tableau I :

30 f ; 3 mm → Type C	}	« ça ne va pas »
15 f ; 1 mm → Type C		

et les enfants rajoutent « on aurait dû trouver » :

30 f ; 3 mm	parce que	x2 (15 f ; 1 mm) x2
15 f ; 1 mm		

4ème catégorie :

Des différences sur le nombre de feuilles ne doivent pas correspondre à des différences égales de mesures :

Exemple :

19 f : 3 mm } « ça ne va pas parce qu'une feuille ne peut pas mesurer 1 mm »

A la fin de la séance, le maître propose aux enfants de reprendre l'examen de ce tableau à la prochaine séance de vérifier collectivement les mesures par la manipulation et de les rectifier si c'est nécessaire.

Remarque : La présentation des opérations effectuées sur les nombres dans la recherche de couples équivalents à l'aide de flèches n'a aucun caractère formel ni obligatoire, c'est une « manifestation familière de l'emploi des opérateurs naturels auquel les enfants sont habitués.

4.1.5. Résultats

Les enfants savent tous mesurer l'épaisseur d'un certain nombre de feuilles de papier, écrire le couple correspondant et rejeter un type de papier ne correspondant pas à une écriture qui leur est donnée. La plupart est alors capable de mettre en œuvre une stratégie de comparaison et en conclusion d'accepter un type de papier comme correspondant à une mesure. Quelques-uns ont formulé cette stratégie. La plupart des enfants peut analyser un tableau de mesures et signaler des incohérences en se servant implicitement du modèle linéaire.

4.2. Comparaison d'épaisseurs et couples équivalents (Activité 1, Séance 2)

4.2.1. Préparation du matériel et des lieux

Le matériel est le même que pour la séance 1 : les tas de feuilles disposés de la même manière, les pieds à coulisse.

4.2.2. 1ère phase (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation — Consigne

La maîtresse demande aux enfants de reprendre l'examen du tableau réalisé au cours de la 1ère séance.

Cette observation se fait d'abord silencieusement, pour que les enfants puissent repérer les incompatibilités les plus évidentes de certaines mesures. Puis la maîtresse leur propose de relever les erreurs qu'ils ont vues, ligne après ligne (pour chaque type de papier).

b) Déroutement et remarques

Les enfants, après observation, et sur leur demande, viennent à tour de rôle au tableau pour montrer les « messages » qui leur apparaissent inexacts et proposent éventuellement une correction.

Ces corrections sont discutées par l'ensemble des enfants. S'ils sont tous d'accord, la correction est faite sinon, ils proposent de vérifier par une manipulation : ils recomptent le nombre de feuilles indiquées dans le message et font la mesure. Après vérification collective, le nouveau message est adopté et inscrit sur le tableau (cette manipulation est faite par groupes : 2 groupes vérifient un message, 2 autres, un autre message... etc). Il est arrivé souvent que lorsque le même type de papier est mesuré par des groupes d'enfants différents ces groupes ne trouvent pas des mesures compatibles. Ceci est dû souvent aux erreurs de lecture ou au fait que les enfants ont plus ou moins tassé les feuilles. Ils s'en rendent compte très vite et le disent.

Il est arrivé également pour des types de papier d'épaisseurs très voisines que les mesures trouvées ne permettent pas de reconnaître de quel papier il s'agit. C'est au cours de cette phase que les enfants se sont rendu compte qu'ils ont plus de chance de distinguer des épaisseurs de papier voisines en prenant un plus grand nombre de feuilles. En effet, 15 ou 20 feuilles seulement de papiers d'épaisseurs très voisines ont des mesures si proches que les enfants ne peuvent pas les distinguer avec précision. C'est alors qu'ils proposent souvent de mesurer l'épaisseur de 50, 80 ou 100 feuilles.

Exemples de remarques d'enfants (ces exemples sont pris dans le tableau II)

10 f ; 2 mm
et 5 f ; 1 mm pour le type B, c'est bien.

Un enfant ajoute :

$x3 \left(\begin{array}{l} 5 f ; 1 mm \\ 15 f ; 3 mm \end{array} \right) x3$

Ces trois mesures : 5 f ; 1 mm — 10 f ; 2 mm et 15 f ; 3 mm sont donc conservées.

Par contre dans la ligne du type C, les mesures :

12 f ; 1 mm

et 8 f ; 1 mm sont contestées et rejetées par les enfants qui proposent de les refaire.

Autre exemple (tableau II)

Equipes	Type C	Type D	Conclusions des enfants
1	100 f ; 8 mm	100 f ; 11 mm	1) D > C (D est plus épais que C)
2	12 f ; 1 mm	10 f ; 1 mm	2) D > C (D est plus épais que C)
3	8 f ; 1 mm		3) C > D (C est plus épais que D)
4		14 f ; 1 mm	

Les deux premières conclusions ne correspondent pas à la 3ème —
 les enfants décident de conserver la 1ère conclusion car ils voient
 que sur 100 feuilles, il y a 3 mm de différence alors qu'avec 8 f.
 14 f, 12 f, il n'y a pas de différence de mesure.
 Ils disent aussi qu'une différence de 3f (12-8) ou de 2 f (14-12)
 ne change pas la mesure (ils vérifient par une manipulation).

4.2.3. 2ème phase : finition du tableau : recherche des
 valeurs manquantes (20 à 25 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

Les enfants remarquent que certains types de papier n'ont pas été
 choisis au cours du jeu de communication et qu'il manque des me-
 sures.
 La maîtresse propose alors aux enfants de compléter le tableau en
 mesurant les types de papier manquant.

b) Déroulement et remarques

Les enfants se partagent le travail par groupes de 5 non plus
 concurrents mais coopérants et pas forcément les mêmes que dans la
 séance précédente (plusieurs groupes prennent le même type de papier
 et vérifient ensuite la comparabilité des mesures)

Exemple pour le type C :

$$\left. \begin{array}{l} 12 \text{ f} : 1 \text{ mm} \\ 96 \text{ f} : 8 \text{ mm} \end{array} \right\} \times 8$$

Quand tous les enfants sont d'accord, les nouvelles mesures sont
 inscrites dans le tableau (tableau III). A la fin de cette phase, le ta-
 bleau est donc entièrement corrigé et complet. Il y a plusieurs mes-
 sages compatibles pour chaque type de papier.

4.2.4. 3ème phase : jeu de communication (15 mn)

— La maîtresse propose aux enfants de refaire le jeu de communica-
 tion de la 1ère activité en tenant compte de toutes les remarques et
 corrections qu'ils ont faites (grand nombre de feuilles, tassement
 du papier...)
 — Le jeu est donc repris une fois à la grande satisfaction des enfants
 qui réussissent tous, même si on ajoute un ou deux nouveaux types
 de papier.

4.2.5. Résultats

Ces enfants savent adapter le nombre des feuilles choisies aux
 besoins de la discrimination de leurs épaisseurs (augmenter le nom-
 bre de feuilles lorsque les épaisseurs sont très voisines). Ils savent
 trouver par le calcul, des couples correspondants au même type de
 papier. Tous savent maintenant utiliser le modèle linéaire pour ana-
 lyser un tableau. Une partie d'entre eux est capable d'utiliser des rela-
 tions de voisinage entre les couples. Un grand nombre d'enfants a été
 conduit à juger des déclarations et à argumenter lui-même.

EXEMPLES DE 1^{er} TABLEAU DE MESSAGES (non corrigé)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	19 f ; 3 mm	10 f ; 2 mm	20 f ; 4 mm	
B	19 f ; 3 mm		4 f ; 1 mm	15 f ; 2 mm
C	19 f ; 2 mm	30 f ; 2 mm	100 f ; 8 mm	30 f ; 3 mm 15 f ; 1 mm 20 f ; 2 mm
D	19 f ; 2 mm 12 f ; 1 mm		100 f ; 9 mm	
E			9 f ; 4 mm	13 f ; 5 mm 7 f ; 3 mm

Tableau III - classe de CM2 b (1977)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	48 f ; 9 mm			
B			10 f ; 2 mm	5 f ; 1 mm 15 f ; 3 mm
C	100 f ; 8 mm	12 f ; 1 mm 96 f ; 8 mm	8 f ; 1 mm 64 f ; 8 mm 12 f ; 1 mm	
D	100 f ; 11 mm	10 f ; 1 mm 100 f ; 10 mm		14 f ; 1 mm 154 f ; 11 mm
E	23 f ; 10 mm	10 f ; 4 mm 8 f ; 3 mm	6 f ; 2 mm	

a) *Analyse de la tâche des élèves : Emetteurs*

La tâche d'émetteur est bien plus légère que celle de récepteur : on ne doit compter que les feuilles du tas choisi et prendre soin de bien les mesurer. Le désir d'avoir des nombres simples et corrects conduit à choisir un nombre de feuilles tel

- que l'épaisseur soit aussi voisine que possible d'un nombre entier de millimètres
- que les erreurs dues au tassement des feuilles restent faibles
- que le nombre de feuilles à compter reste assez faible.

Une analyse plus approfondie ou une pratique répétée conduirait l'émetteur à choisir :

4.3.1. La situation-problème

4.3. Analyse de la situation : le jeu

Les enfants savent trouver des couples équivalents. Ils savent comparer les épaisseurs de feuilles (beaucoup avec 2 méthodes). Ils ont une stratégie de rangement des couples, d'après ces comparaisons. Ils savent désigner l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une fraction et trouver des fractions égales.

Ils ne savent pas trouver l'égalité de 2 fractions dans le cas général. *Remarque* : Ces savoir-faire sont constatés en situations. Il n'est pas possible à ce moment-là de détacher une question du contexte et de la poser de façon indépendante. On ne pourra donc pas encore s'appuyer sur ces résultats en tant que connaissances « acquises » et identifiées comme telles par l'enfant.

4.2.7. Résultats

Après avoir vérifié que les élèves savaient reconnaître des feuilles désignées par leur épaisseur : (48 ; 9) par exemple, l'enseignant demande de trouver d'autres écritures pour désigner chaque épaisseur, puis de ranger les feuilles de la plus mince à la plus épaisse (25 f ; 7 mm) qu'il faut ranger avec les autres.

En fin de séance, l'enseignant expose aux élèves une méthode d'écriture de l'épaisseur d'une feuille : (50 ; 4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm d'épaisseur, l'épaisseur d'une de ces feuilles s'écrit $\frac{50}{4}$ que l'on lit : « quatre cinquantièmes de millimètres ». Il vérifie par des exercices que cette information est transmise.

La distinction entre l'épaisseur d'une feuille et la designation d'un tas de feuilles est essentielle mais difficile et ne sera apprise que progressivement.

4.2.6. Résumé de la suite de la séquence (Séance3)

- un nombre de feuilles assez grand pour que la différence entre leur épaisseur et l'épaisseur d'un même nombre de feuilles du type le plus voisin soit assez nette par exemple, excède 1 mm (tassement éliminé)
- un nombre de feuilles tel que le coût de l'opération soit minimum (Le coût de l'opération est évalué en coût du comptage des feuilles et en prix des erreurs par tentative. Le coût des erreurs dépend de l'erreur relative par l'intermédiaire de la probabilité d'erreur qu'elle engendre).

Ce point a mérité une étude mathématique qui n'est pas publiée ici.

b) Analyse de la tâche des élèves : Récepteurs

La tâche des récepteurs est plus lourde. S'ils « appliquaient » un algorithme rationnel, ils devraient pour interpréter le message (60 f ; 7 mm)

- compter 60 feuilles de chaque type de papier
- mesurer l'épaisseur de ces 5 tas de 60 feuilles
- comparer: les tas dont la mesure serait la plus proche de 7 mm seraient retenus.

En fait, cette procédure, si elle était systématiquement appliquée, ferait perdre le bénéfice essentiel de la situation : les enfants peuvent (doivent) éliminer certaines hypothèses en utilisant l'expérience qu'ils ont acquise dans la première phase et en mettant en œuvre une représentation (un modèle implicite) de l'épaisseur. Dans cette phase d'action, des relations, des appréciations, des opérations, encore floues, incomplètes, approximatives, vont s'éprouver, se clarifier, se complexifier avant même d'être formulables.

Exemple : « 60 f ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A, on avait trouvé pour A (3 f ; 1 mm » — Sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm...

Si les enfants se trompent dans leurs hypothèses, ils peuvent s'en apercevoir sans trop de retard et sans autre sanction qu'une petite perte de temps. La représentation permet d'anticiper, d'économiser des tentatives, elle est contrôlée par l'action, sans la conditionner complètement, ni être conditionnée par elle. Elle commande toutefois ces décisions d'action car une fois écartés les « papiers » improbables, il faut retenir les autres. « C donne pour 30 f. 2 mm

et D aussi, on ne peut pas savoir. Tiens remesure... Si 30 f de C font un peu moins que 2 ça doit être D... Il faudrait plus de feuilles... »

Pour les récepteurs, deux messages ont tendance à être équivalents s'ils permettent la même discrimination parmi les papiers, donc s'ils sont voisins topologiquement.

Il est nécessaire que chaque enfant soit tour à tour émetteur et récepteur.

Même si tous les enfants n'acquerraient pas une égale aisance dans le raisonnement sur les épaisseurs, tous acquerraient une bonne connaissance des conditions que devra satisfaire le modèle qu'on choisira : ce qu'il devra permettre.

4.3.2. La situation didactique

a) Analyse de la tâche du maître : phase 1

Dans les deux premières phases, la tâche du maître la plus importante ne consiste pas à contrôler le contenu et le déroulement des réflexions des enfants : il ne doit pas intervenir, qu'il entende une proposition intéressante ou une déclaration fautive. C'est la situation qui doit exercer ces feedback nécessaires. Il n'est plus — provisoirement — le gardien de la vérité, le garant, le recours, le destinataire obligé et final de toutes les interventions des enfants.

b) Il doit — par son attitude — convaincre les enfants de sa neutralité à l'égard de leurs appréciations de la situation afin qu'ils renoncent à tirer de lui les informations et les aides qu'ils ne doivent tirer que d'eux-mêmes.

Neutralité mais pas indifférence : il reçoit avec un égal intérêt toutes les suggestions et les renvoie avec conviction sans en modifier le contenu mais il essaie de les rendre réalistes. Le maître renvoie les enfants à la situation mais s'attache à accroître leur investissement, leur désir de réussir. Il facilite la solution des problèmes subalternes, surveille le respect des règles et des consignes qu'il précise et répète à l'occasion, résout les problèmes d'organisation, aide l'évolution favorable des conflits dans les groupes. Il veille à ce que tous s'investissent et concourent au résultat cherché. Pour cela, il s'intéresse beaucoup au résultat final qu'il enregistre, participant aux succès, comme aux déceptions, heureux

avec les uns, encourageant les autres, dans une sorte d'esprit « bon sportif ».

Ici comme là, ce sont les efforts qui sont éducatifs et non les buts marqués.

En particulier, le décompte des points des équipes ne donne lieu à aucune déclaration de sa part, les équipes se défient d'une leçon à l'autre. Les points servent à déterminer les stratégies pendant le jeu, pas à classer les gens après le jeu.

c) La phase 3 de la 1ère activité est une phase de confrontation (ce n'est pas une situation de validation formelle). Là encore, le maître est un conducteur de jeu qui fait jouer mais ne joue pas lui-même. Pour tous les enfants, les problèmes qu'il réussit à faire résoudre par ses exigences : formulations claires, renseignements précis... sont ceux qui empêcheraient le fonctionnement de la situation. Il n'a pas d'exigences « externes ». Il laisse arriver à leur formulation correcte les déclarations fausses ou absurdes, il laisse aux autres le temps de formuler leur jugement. Il ne confirme pas une déclaration correcte avant que tous se soient déclarés d'accord.

Il encourage les minoritaires à exprimer leurs réserves, clarifie les débats même s'il ne peut pas les résoudre.

4.3.3. Le maintien des conditions d'ouverture et leur rapport avec la signification du savoir

Dans les situations de recherche, la pédagogie classique conduit le maître à « exploiter » immédiatement ou presque la « bonne » déclaration. Il parle avec le premier ou un des premiers « qui trouvent ». Finalement les échanges concernent 20 % des enfants (les plus « vifs »). Pour que ces échanges soient compris des autres, les questions posées doivent être telles que 80 % d'entre eux seraient capables d'y répondre presque directement, s'ils avaient le temps nécessaire : les questions seront donc assez fermées et la recherche consistera en une sorte d'épreuve de vitesse mettant à l'honneur les algorithmes. Ainsi, 60 % des enfants participent par procuration. Quant aux 20 % qui ne sauraient pas répondre, il ne s'agit jamais pour eux de chercher, mais d'apprendre un savoir tout fait, qu'ils devraient posséder, qu'il est même « honteux » de ne pas posséder, puisqu'il

ne s'agit finalement ici que de savoir « qui l'a » ou « qui ne l'a pas ». Donc, pour 80 % des enfants, la recherche est une situation sanctionnée négativement où l'accent est mis sur le savoir : devoir chercher est l'aveu d'une faiblesse qui ne pardonne pas. Devoir apprendre est le fait d'une minorité défavorisée et méprisée.

Les situations que nous proposons ne doivent pas être conduites de la même façon.

Les questions sont souvent plus ouvertes, en ce sens que le nombre des enfants capables d'y répondre directement est très faible : presque tous ont à chercher. Les échanges vont concerner 80 % des élèves sur des problèmes que moins de 20 % d'entre eux peuvent résoudre directement. Le maître maintient la situation ouverte en n'exploitant pas les idées. Il se contente de les faire prendre en considération. Le fait d'être le premier à avoir une idée perd un peu de l'importance.

Les enfants qui ont trouvé plus vite doivent apprendre à faire partager leur conviction sans la sécurité de la validation par l'adulte. Ainsi, la recherche et l'apprentissage devient l'affaire principale de la majorité.

Ces situations sont délicates à conduire : la voie y est ouverte à un champ d'attitudes sociales très diverses. Le maître a appris à contrarier les actions de diversions ; certains enfants égarent l'opinion des autres pour avoir le temps de chercher eux-mêmes, accaparent l'attention, ne respectent pas la recherche des autres, etc... C'est toute la fonction et l'usage du savoir et de la vérité qui s'apprennent à ce moment-là. Certains enfants, habitués à un statut dans la classe et à un contrat didactique classique, vivent mal les changements subits de mode d'action didactique du maître comme l'absence de sécurité, de valorisation immédiate, la dépendance par rapport à l'action ou à l'opinion d'autrui, etc. Pour les enfants et même pour les parents, le maître a dû parfois faire provisoirement le médiateur des changements, souvent profonds, qu'il avait provoqués. De toute façon, les changements fréquents de types d'interventions utilisées favorisent les évolutions en douceur et l'adaptation des attitudes malgré leur diversité.

L'évolution s'opère correctement dans la mesure où on parvient à faire en sorte que les relations avec l'objet de

l'étude, et les relations avec les autres sujets apprenant deviennent sources de plaisir et enjeu du désir. Les prises de décisions, les actions, les échanges, les jugements... doivent devenir d'abord des occasions d'une jubilation fondamentale de la classe. Le maître est conduit à renoncer à l'objet unique du désir des enfants.

Le savoir, l'alibi symbolique d'une lutte entre les enfants, doit pouvoir devenir l'objet d'une activité libidinale.

La relation maître-élève s'efface ainsi devant les relations enfant-savoir, enfant-milieu-savoir et enfant-autrui-savoir.

4.3.4. *Le contrat didactique*

Le maître est la mémoire de référence de la classe. Il se souvient des conventions, des accords et des faits pertinents. Il les rappelle à bon escient. C'est par ce rôle qu'il commande et contrôle les apprentissages.

Enfin, le maître représente le savoir des adultes. Lorsqu'il fournit des informations sur ce sujet (par exemple : Activité 1 — Séance 3 — Phase 3). Les enfants, qui ont leur propre système, peuvent comprendre la notation en cours et ses avantages — ou son équivalence — avec le système qu'ils ont construit, et l'adopter, non pas librement mais consciemment (situations d'institutionnalisation).

Bien sûr, les éventuels changements de notations ou de vocabulaire coûtent aux enfants et aux maîtres.

C'est pourquoi les conditions d'apprentissages ont un caractère critique et dépendent essentiellement du contrat didactique.

A aucun moment au cours de cette première activité, le maître n'indique qu'il faut apprendre quelque chose. A aucun moment, il ne fait répéter une activité en ayant convenu avec les enfants qu'elle devrait être sue, connue, apprise. (Cela viendra plus tard peut-être) et en reconnaissant qu'une phase n'était pas justifiée par d'autres raisons.

En fait, la phase 1 de la 1ère séance : « recherche de couples équivalents », doit permettre à tous les enfants d'effectuer la recherche d'au moins deux couples équivalents à un couple donné, de comparer deux couples une dizaine de fois au moins, d'expliquer une équivalence au moins une fois, d'entendre plusieurs méthodes de comparaisons. Tout cela dans une situation de contrôle collectif. Mais le

contrat passé avec eux n'est pas « vous devez apprendre et savoir faire ceci pour pouvoir répondre à la question suivante comme je le veux », mais « vous devez faire ceci pour pouvoir participer au défi suivant ». L'apprentissage de la recherche de couples d'équivalence se poursuit dans la phase 2 et plus loin, il n'est pas nécessaire de l'« achever » dès la phase 1. De plus, cela exigerait le plus souvent la *formula-tion* d'une méthode de recherche comme par exemple : on peut multiplier ou diviser les deux termes du couple par un même nombre, « ou pire » deux couples sont équivalents si « immanquablement » à ce moment-là on devra dire, ou une sottise, ou une phrase incompréhensible. D'ailleurs, ces formulations de méthodes ne sont que rarement économiques à long terme. Nous le refusons catégoriquement ici.

La solution de la situation de la phase 2 : rangement des épaisseurs, n'est pas plus compliquée si l'on ne sait pas chercher des équivalents, puisque l'enfant réfléchit dans la représentation de la situation :

— en nombre de feuilles et épaisseurs des tas — au lieu d'appliquer un algorithme sur l'écriture de l'épaisseur d'une feuille.

Tout apprentissage *formel* (convenu, institutionnel) à ce moment, serait lourdement hypothéqué de contresens. Par contre il faut que le maître vérifie que tous les élèves ont bien réfléchi, choisi et calculé un couple nouveau... au besoin au tableau, avec l'aide des autres.

— Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'apprentissages ni d'apports d'information. La phase 3 de la 3ème séance montre un exemple d'apport d'information. Il s'agit de conventions à enregistrer et à utiliser. Ces conventions seront désormais de règle et le maître « exigera » leur emploi dans les communications « publiques » des enfants. En fait, il exercera une pression croissante au fur et à mesure de la banalisation de la convention, sans refuser de comprendre, surtout au début, d'autres formulations.

4.4. Analyse des variables didactiques. Choix du jeu

4.4.1. Le type de situation

Nous ne reviendrons pas sur le caractère fondamentale-ment *cybernétique* de la situation de communication :

Le codage le plus économique, si on admet que l'on peut augmenter à volonté le nombre des types de papiers, consiste à les désigner à l'aide d'un couple, nombre de feuilles, épaisseur en millimètre — Remarquons toutefois que la situation de recherche de code n'est pas répétée. Il n'y a pas de dialectique de la formulation des couples. Le code est mis en place de façon presque immédiate. La situation de communication ne fonctionne donc pas beaucoup en situation d'apprentissage, elle sert seulement à donner « du sens » à la phase d'action des émetteurs et des récepteurs. Le caractère « optimal » du message n'a fait l'occasion d'aucun commentaire avec les enfants. Il nous assure seulement une bonne acceptation de leur part.

4.4.2. *Le choix des épaisseurs : modèle implicite*

Par contre la composante « action » de la situation est l'occasion de la création d'un modèle implicite du système des épaisseurs.

Pourquoi, puisqu'il s'agit finalement de mesurer des longueurs, n'avoir pas choisi des objets de longueurs appréciables ? L'enfant possède à cet âge une représentation efficace des « longueurs » comprises entre 1 mm et 50 mm. C'est-à-dire qu'il peut les comparer, les mettre bout à bout, les partager, et au besoin les évaluer (c'est-à-dire leur faire correspondre approximativement un entier à l'aide des systèmes d'unités en usage).

Mais justement, cette représentation est assez efficace pour permettre de résoudre la plupart des situations pratiques *sans* qu'il soit nécessaire d'utiliser de système numérique nouveau : perception, mesurage entier, etc.

L'enfant peut imaginer ou effectuer des opérations sur des « longueurs » : somme, différence, sans utiliser de modèle, de représentation.

Par exemple, il peut indiquer la longueur désirée d'une baguette en envoyant une ficelle de « longueur » égale.

L'activité mathématique peut alors au mieux traduire, transcrire « la réalité » supposée préexister.

Comme en géométrie, le modèle implicite dont disposent les enfants est si riche qu'il commande toutes les décisions. Lorsqu'il ne parvient pas à résoudre une situation, la théorie mathématique qui pourrait lui suppléer est alors

trop complexe pour être construite à ce moment. Si on utilise ce modèle implicite, la théorie mathématique construite, ici, le mesurage, n'apparaît jamais que comme une complication, une exigence supplémentaire ou superflue. Elle doit être guidée, contrôlée par « l'intuition », elle four- nit au mieux des renseignements plus précis... etc.

Nous avons donc choisi pour la variable didactique « grandeur des objets », un domaine mettant en défaut le modèle implicite naturel sans toutefois exclure des mani- pulations.

Avec des longueurs de quelques centimètres de millimètres, on peut « concevoir » les opérations visées mais sûrement pas les percevoir ni les effectuer directement. Certaines sont mêmes caremment inconcevables comme partager une de ces longueurs (un cheveu en quatre ; dans le sens de la longueur). Nous verrons que cette impossibilité est voulue pour d'autres raisons. Le nombre qui mesure l'épaisseur de- vient alors le moyen — le seul « concret » d'appréhender cette épaisseur, de construire les expériences de comparai- sons, de prévoir la somme, etc... La représentation mathé- matique a été réintégrée dans son rôle fondamental de théo- rie en construction, dans son rapport dialectique avec le constructeur et avec la situation.

De plus, l'enrichissement de cette représentation va pou- voir être contrôlé si, dans un premier temps, on favorise le développement du modèle implicite en rendant inutile l'explication des méthodes (de comparaison par exemple). On pourra provoquer une phase de formulation (Activité 1 — Séance 2) puis de formalisation progressive dans le mo- dule 4., au moment opportun pour chaque notion : avant que le modèle implicite ne soit trop efficace, assez tôt pour être utile, mais assez tard pour avoir du sens ; assez tôt pour que le sens attribué au langage soit indispensable à l'action et à sa formulation, assez tard pour que les concepts formu- lés ne soient pas isolés les uns des autres, mais fonctionnent ensemble.

4.4.3. Du modèle implicite à l'explication

Le modèle implicite développé par les enfants dans la 1ère séance comprend une approche de la relation d'équi- valence algébrique fondamentale (nombre de feuilles du

tas 1 \times épaisseur du tas 2 = nombre de feuilles du tas 2 \times épaisseur du tas 1, mais sûrement pas sous cette forme), sous la forme d'un ensemble d'applications linéaires de N dans N .

Cette application est approchée par ses propriétés :

— la première remarque des enfants signifie qu'ils veulent des applications différentes pour des feuilles perçues comme différentes (injection de l'ensemble des applications dans l'ensemble des types de papiers).

Remarquons qu'il n'est pas réaliste de la part des enfants de vouloir que des applications différentes indiquent des types de papiers différents : ils ont des exemples sous les yeux où pour un même type de papier, et pour un même nombre de feuilles, on obtient des épaisseurs différentes, et où cependant le message a marché. Il suffit d'avoir des résultats suffisamment voisins les uns des autres et suffisamment éloignés des autres résultats.

— Cependant cette exigence est formulée : il semble que l'on voudrait un nombre par type et un type par nombre. En fait, ce sont seulement les résultats scandaleux qui sont rejetés ;

« 30 f ; 2 mm ; 30 f \rightarrow 3 mm quelqu'un se trompe ! » (ces résultats ne sont pas algébriquement équivalents, ni topologiquement assez voisins).

— C'est seulement ensuite que la linéarité est formulée, par sa propriété caractéristique de conserver les rapports. Les enfants relèvent les couples qui contrarient cette propriété et l'énoncent ensuite.

Remarque : S'il n'y avait pas eu des tentatives un peu variées, avec la liberté de prendre le nombre de feuilles qu'on veut, des rapports simples ne seraient pas apparus. Si le jeu n'avait pas été rapide, un peu anarchique, bon enfant, les contradictions non plus ne seraient pas apparues.

Il faut remarquer que le modèle explicite n'apparaît pas comme une formulation positive des propriétés connues à l'occasion de leur existence. Les couples qui obéissent à la loi implicite ne donnent lieu à aucune remarque : ce sont les couples qui ne lui obéissent pas, qui, par l'accident qu'ils révèlent, rendent la formulation nécessaire : comme une théorie, le modèle se révèle par ses contradictions — apparentes ou réelles — avec l'expérience et non par ses accords.

Il faut voir dans ce fait un phénomène tout à fait général et important qui contredit formellement certaines théories didactiques empiristes, comme par exemple le processus psychodynamique de Dienes : ce ne sont pas les ressemblances (les isomorphismes) entre les situations rencontrées qui sont le moteur principal des « abstractions » non plus que la transcription ou la schématisation des structures ne sont la clé de la formulation. La simple familiarité, même active, avec des situations bien structurées, ne suffit jamais à provoquer une mathématisation. Au contraire, les problèmes posés par une situation à la mise en œuvre d'un modèle (implicite ou explicite) préexistant, ou par une théorie à la prise d'une décision, provoquent l'évolution, la reprise ou le rejet et la formulation des théories.

Cette dialectique caractérise la plupart des mathématisations. Ici, la situation initiale (1^{ère} séance, phases 1 et 2) peut être envisagée sans modèle initial particulier (dénombréments et mesures entières — homothéties de \mathbb{N}). Sa résolution conduit à un langage et à des méthodes peu satisfaisants du point de vue logique. La résolution de ce problème théorique (phase 3) exige de nouvelles « expériences » et confrontations (2^{ème} séance) qui amènent la réduction des contradictions et l'usage d'un modèle en partie explicite. Surtout en ce qui concerne la technique de mesurage des feuilles de papiers et un peu aussi la relation d'équivalence fondamentale entre les écritures.

Avec la 3^{ème} séance, commence une autre étape : la mise à l'épreuve du système de mesure. Permet-il de reconnaître l'écriture de l'épaisseur d'une des feuilles connues, de la distinguer de l'écriture d'une nouvelle épaisseur ? Ici, le codage devient à nouveau l'objet de l'étude des enfants avec la formulation de l'équivalence, la création des classes d'équivalences et l'étude de la compatibilité de la relation d'ordre sur les couples avec la relation d'équivalence : les conclusions doivent être les mêmes, quels que soient les couples qui servent d'équivalence.

La désignation des classes par une « traction » (le mot n'est pas obligatoirement prononcé), l'écriture de l'égalité des classes, sont des informations apportées par la maîtresse comme des conventions sociales (à respecter pour être

compris des autres) et comme une conclusion didactique, une confirmation implicite de la validité de la démarche de la classe.

Les enfants pensent que les types de feuilles peuvent se ranger par ordre croissant d'épaisseur. La théorie qu'ils ont construite permet ce rangement alors que leurs sens ne le peuvent pas, et tout de même ils peuvent avoir des confirmations assez concrètes de leurs inférences — leur théorie fonctionne comme une vraie théorie.

Elle pose de nouveaux problèmes car la méthode de comparaison n'apparaît pas valable pour n'importe quel couple et elle a recours à la fois :

— aux relations algébriques qui permettent de ramener la comparaison de $(40 ; 6)$ avec $(20 ; 4)$ à celle de $(40 ; 6)$ avec $(40 ; 8)$ ou encore de ramener $(30 ; 4)$ et $(20 ; 2)$ à $(30 ; 4)$ et $(40 ; 4)$

— et aux relations topologiques qui permettent de comparer par exemple $(19 ; 3)$ et $(10 ; 2)$ car $(19 ; 3)$ est moins épais que $(20 ; 4)$ — Commentaire des enfants : « avec une feuille de plus, le tas fait 1 mm de plus, et comme une feuille ne mesure pas 1 mm... ».

Il se trouve que la construction générale de cette séquence suit le modèle d'une construction axiomatique des rationnels — assez moderne (couples, passage au quotient). Il n'est pas niable que la connaissance d'une telle axiomatique a permis de l'envisager comme solution aux problèmes de didactiques des décimaux que nous nous posions. Il serait faux de croire que ce choix a précédé l'analyse didactique. Si nous avions été conduits à choisir un autre domaine des variables didactiques et une autre genèse, les couples auraient pu perdre toute signification, l'équivalence tout intérêt, la construction aurait pu alors coïncider *localement* avec une autre axiomatique classique ou non.

De toute manière, laisser apparaître la trace de cette architecture dans l'activité des enfants sous une forme quelconque, serait sans intérêt pour eux.

5. Questions de didactique des décimaux

5.1. Les objets du discours de didactique

Le discours de didactique porte sur quatre niveaux d'objets :

1. Le niveau des faits contingents : c'est la description des productions effectives du maître ou du système éducatif : objectifs déclarés, informations fournies, consignes, etc. Les productions effectives des élèves, les comportements, les résultats, les réactions du milieu etc.

2. Le niveau de la situation didactique. Il s'agit d'interpréter les décisions du maître, les comportements de l'élève, leurs motivations, etc. en discernant contre quels autres comportements ceux qui sont attestés ont été choisis, et de les relier en stratégies, en modèles de comportement, d'erreurs, si possible explicatifs des « jeux » et des contrats respectifs et réciproques des partenaires. Cette analyse met en évidence les variables qui assurent la reproductibilité de la situation, à travers certaines différences entre les faits observés.

3. Le niveau de l'analyse du concept et de ses genèses. Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. Seules, les différences de situations qui affectent le concept, sont dans le champ de la didactique, elles sont le fait de variables à déterminer dans chaque cas. 4. Le niveau des faits et des débats de didactique où sont produits les concepts, les méthodes et les moyens d'analyse nécessaires aux niveaux précédents.

Chaque niveau a ses méthodes propres, d'études et de preuve — et ses problèmes de méthodologie — qui font considérer une expérience de didactique comme une expérience d'épistémologie expérimentale et la font distinguer d'une expérience d'enseignement.

Les interactions de ces quatre niveaux sont évidentes mais la façon dont s'articulent les problèmes d'enseignement et les questions de didactique n'apparaît pas encore bien claire à beaucoup, ainsi que la façon dont s'opposent et se complètent le point de vue scientifique et la phénoménotechnique didactique. C'est pourquoi il nous faut revenir sur le

processus que nous venons de décrire de façon très détaillée, pour montrer comment il peut être le lieu où peuvent s'éprouver et s'actualiser les questions qui nous intéressent.

5.2. Quelques concepts de didactique

5.2.1. Les composantes du sens

La définition du sens d'une notion est, nous l'avons dit, un des problèmes centraux de la didactique. Ce qui précède nous permet maintenant d'entrevoir comment nous proposons de le résoudre : il s'agira de *recenser* et de *classer* toutes les situations où cette notion apparaît engagée, soit comme solution, nécessaire ou non, optimale ou non, soit dans l'énoncé, soit dans les comportements des protagonistes du jeu didactique. Ainsi, la notion apparaît dans son fonctionnement et dans ses rapports avec les différents secteurs des mathématiques. On peut identifier diverses conceptions particulières qui permettent de résoudre une classe de situations, alors qu'elles suggèrent des réponses fausses sur une autre, et dont la réunion constitue le concept.

Recensons les critères que nous avons utilisés pour choisir le processus étudié. Ils constituent une première approche des composantes du sens des décimaux et permettent d'engendrer une bonne partie des situations cherchées.

1. Le type mathématique de problèmes : algébriques, topologiques ou d'ordre.

2. Le type d'objets mathématiques qui réalisent la notion et à propos desquels le problème se pose explicitement : le décimal image d'une *mesure*, le décimal *scalaire* ou rapport opérant dans un ensemble de mesures, le décimal-proportion, le décimal-opérateur linéaire dans un espace vectoriel, etc... (cf. Tableau I).

3. Le type de structure mathématique concurrente de ID dans la situation proposée, celle contre laquelle se définit ou se justifie ID (ce peut être \mathbb{N} , \mathbb{Q} , ou \mathbb{R}) comme seule ou comme meilleure solution.

4. Le type de situation didactique d'après les manifestations de connaissance, situations d'action, de formulation, de validation, d'institutionnalisation : le décimal y apparaît respectivement comme règle d'action, comme

langage, comme système de preuves ou comme savoir culturel. Cette classification produit aussi les fonctions de \mathbb{Q} : calculs, algorithmes, désignation, représentation, objet d'étude, moyen de preuve, théorie...

5. Le domaine de réalisation de la situation (banque, commerce, physique...etc.) et le statut scientifique : nécessité mathématique, loi physique, convention sociale.

6. Le type de présentation formelle du langage expriment les décimaux et les caractères informationnels qui l'opposent à des solutions voisines : décimaux v.s. sexagésimaux ou v.s. binaire (caractères de numération).

7. La fréquence avec laquelle la situation est susceptible de se présenter.

8. Le type d'engendrement de \mathbb{D} ou de la partie utilisée : — type d'opérations utilisées et caractères de la distribution des fréquences d'emploi sur les décimaux employés.

9. Le statut didactique ou cognitif de la notion dans les comportements du sujet pratiqués par la situation. Voir ce que nous avons appelé dans le paragraphe II, les niveaux de connaissance.

10. Le type de représentation ou de définition, commentation ou fractionnement par exemple. (voir ci-dessus 5.3.1.)

11. Le type d'organisation axiomatique des savoirs implicites et explicites du sujet.

12. Le type d'opération ou de relation mathématique solution de la situation : rangements, encadrements (entre deux entiers, entre deux fractions, entre deux décimaux à un ordre de grandeur près), repérage (placer, trouver un nombre dans un intervalle), transformations (fractions \Leftrightarrow décimaux \Leftrightarrow sexagésimaux, changements d'unités, écriture scientifique, décomposition polynomiale, chiffres \Leftrightarrow lettres), sommes (de mesure, addition, translations, composition de translations), différences (idem, décimal opposé), produits (mesure \times opérateur naturel ou décimal, mesure \times mesure, opérateur \times opérateur, mesure dérivée etc... tableau II), division (partage, division, multiplication par un inverse, composition, mesure par un rapport, etc...).

Toutes les distinctions ne sont pas d'égale importance et la liste n'est pas exhaustive. Il resterait à réorganiser cet ensemble de situations pour favoriser des analyses moins lourdes.

5.2.2. *Les propriétés didactiques d'une situation-problème*

a) le terme « situation » désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution. Une situation est une situation-problème qui nécessite une adaptation, une réponse de l'élève. En particulier, si la nécessité de cette réponse a fait l'objet d'une consigne précise, si l'élève a un projet, un objectif déclaré, nous aurons une « situation-problème stricte » (ou formelle), et même un « problème » si le milieu est réduit à un énoncé et si aucune contrainte matérielle, due à certains aspects physiques de la situation, ni à aucune condition psychologique ou sociale, n'en modifie l'interprétation. Une *situation didactique* est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner, un enseignant. En général, on peut distinguer, dans une situation didactique, au moins une situation-problème et un contrat didactique.

b) Quelles conditions font d'une situation-problème une situation d'apprentissage ou une situation d'enseignement ? R. Douady (1980) en propose une liste qui correspond bien en première approche, à celle que j'ai voulu satisfaire dans le processus proposé ci-dessus et que je ne peux pas exposer ici. L'analyse et la théorisation des situations conduit à raffiner et à allonger cette liste, à construire les indices qui permettent d'objectiver et d'étudier les critères trop intuitifs, comme le font Bessot et Richard (1979). C'est un problème central de didactique aussi bien pour l'analyse que pour la réalisation de tels processus, et qui n'a pas encore reçu la place qui lui revient (malgré quelques publications anciennes mais presque confidentielles dont (Brousseau, 1970).

5.2.3. *Situations-Connaissances-Comportements*

Chaque situation-problème appelle de la part de l'élève des comportements qui sont l'indice d'une connaissance. Cette correspondance fondamentale, établie, cas par cas, est justifiée par l'interprétation des situations-problèmes en termes de jeu, et des comportements, en termes d'in-

dices de stratégies dont il faut montrer le caractère adapté dans le modèle ou la représentation attribuée à l'élève. Le tableau VIII a pour objet de montrer que les différents types de situation, produits par l'étude des conditions didactiques d'apprentissage, donnent bien des comportements distincts selon les formes de connaissance. Nous avons depuis (Brousseau 1970) utilisé un modèle à quatre classes dont les noms ont varié selon les nuances qui distinguaient les cas étudiés :

(1) Procédure (ou modèle implicite d'action, ou schéma d'action) (2) Savoir implicite équivalent à un énoncé; propriété ou relation (3) Savoir explicite (4) langage (code, système formel...). Parfois les classes 2 et 3 étaient fondues. Ce système pourrait être rapproché, dans une certaine mesure, de celui de Skemp (1976) et Skemp/Herscovics/Byers (1980).

(1) témoignage d'une compréhension instrumentale, (2) d'une compréhension intuitive (3) d'une compréhension formelle et (4), peut-être d'une compréhension formelle. Il est dommage qu'Herscovics, qui avait eu en 1976 une longue conversation à ce sujet avec Skemp et moi à Karlsruhe n'ait pas examiné cette correspondance.

Nous ne reprenons pas ici les caractères bien connus des situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau 1970).

Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions, selon un processus quelconque qui en fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique.

5.3. Retour sur certains caractères du processus

5.3.1. Insuffisances du processus

Nous avons insisté à plusieurs reprises sur le fait que nous ne considérons pas le curriculum comme une méthode à proposer aux enseignants. Il convient d'expliquer pourquoi. a) La principale raison réside dans la difficulté à com-

Tableau VIII – Comportements observés selon le type de situations et le type de connaissances

Types de situations de connaissances	situations d'action	situation de formulation sous contrôle d'une situation d'action	situation de preuve (ou de validation)	situation d'institutionnalisation
procédure	savoir-faire. Mectre en œuvre la procédure, la choisir de préférence à une autre.	description détaillée désignation.	justification de la procédure pertinente (elle peut s'appliquer) adéquate, correcte, optimale.	canonisation d'une procédure en algorithme (terme dû à A. Rouquier).
modèle implicite propriété relation représentation.	faire des choix, prendre des décisions motivées par la connaissance en question (sans pouvoir «formuler» ce savoir)		preuves contingentes expérimentales par exhaustivité.	
savoir énoncé théorie	appliquer un savoir (le savoir pourrait être formulé).	énoncé de la propriété ou de la relation. reformulation plus «correcte».	preuve démonstration traduction plus convaincante organisation axiomatisation.	canonisation d'une théorie, d'un savoir transposition didactique (Chevallard 1980).
langage.	emploi d'un langage pour exprimer. Le comportement manifeste un découpage en objets correspondants aux signes et aux mots.	emploi d'un langage d'un système formel d'une formulation pour communiquer savoir dire.	justification d'un mot d'un langage, d'un modèle formel (pertinence, adéquation, optimisation) définitions. Activités métalinguistique.	choix de définitions conventions linguistiques et grammaticales.

muniquer toutes les informations nécessaires. En particulier celles relatives aux règles auxquelles le maître doit s'astreindre à obéir. Elles sont fort différentes de celles auxquelles les enseignants ont été habitués et reposent sur une conception didactique très « nouvelle », sur des modes d'évaluation, et même sur une sensibilité nouvelle dans les rapports maître-élève. Il serait probablement dommageable aux enfants de leur enseigner de la manière classique chaque pas de cette longue genèse et d'institutionnaliser des comportements provisoires.

b) D'ailleurs, les nécessités de l'expérience d'épistémologie ont conduit à des choix qui seraient au moins prématuré de proposer aux enseignants : par exemple, nous ne savons pas provoquer et contrôler le franchissement des obstacles épistémologiques, ou simplement des reprises, ce qui est indispensable pour remplacer le modèle du gonflement régulier des connaissances compatibles. Ou encore, nous avons choisi une représentation du décimal-mesure très éloignée de ce que suggère l'histoire.

c) Enfin, le processus présente des imperfections notoires du même genre que celles que nous reprochions aux méthodes classiques — par exemple, l'évaporation de l'unité dans la première phase (voir Brousseau 1980 p.33) — et qui sont l'objet d'études. La définition par commentation ne rend guère à l'élève la notion de fraction plus disponible que l'ancienne définition.

Par exemple dans la phase II. 1., les élèves éprouvent des difficultés à écrire l'image de 1 dans l'application linéaire qui à 4 fait correspondre 7, bien qu'ils sachent que cette image reportée 4 fois forme un segment de 7 cm : l'image est $7/4$.

L'effort de définition des fractions-mesure est probablement assez stérile du point de vue culturel etc. Nous allons examiner maintenant quelques unes de ces questions.

5.3.2. Retour sur le décimal-mesure

Une étude épistémologique du mesurage et de ses fonctions a montré qu'il joue un rôle important dans l'émergence des décimaux (par l'intermédiaire des sexagésimaux). Ce rôle est lié à diverses situations où il s'agit de représenter,

de communiquer ou de prévoir le résultat de certaines manipulations de la vie courante ; contrôle de la conservation, comparaisons, reproduction de quantités égales, partages. Dans ces situations, les valeurs des variables physiques et leurs rapports avec les caractéristiques humaines sont essentiels. Ainsi, on distingue dans la plupart des civilisations trois fonctions « unités » :

— l'unité à « compter » (C). Les quantités plus grandes qu'elle doivent de toute façon être fractionnées, pour leur transport ou leur évaluation en parts égales que l'on peut compter. L'unité (C) est la plus grande de celles que l'homme peut manier commodément.

— l'unité à « fractionner » (f). Les quantités qui lui sont inférieures peuvent être manipulées « en un coup ». Leur fractionnement en un grand nombre de parts égales que l'on dénombre est moins économique qu'un partage direct.

— l'unité de « précision » (S), la plus petite que l'on prenne en considération.

En général, $S \ll f \ll C$ et $10 \leq \frac{C}{f} \leq 60$

On peut observer à ce sujet le rôle assez effacé en pratique du « déca » et des « déci » par rapport aux « hecto » ou au « kilo ».

La pratique de quantités dans l'intervalle $[f, c]$ sert de modèle à l'identification du dénombrement et de certaines fractions.

Le système d'écriture a aussi pour objet de ramener les « mesures » des quantités les plus familières dans l'intervalle naturel le mieux connu.

Les négociations historiques entre ces exigences ont produit divers systèmes dont certains, trop bien adaptés, n'ont pu évoluer. On ne peut guère espérer aller au-delà de l'usage que les Babyloniens puis les astronomes faisaient des sexagésimaux.

Mais cette étude permet de comprendre tout le parti qu'on pourrait tirer de cette problématique dans une perspective dialectique où la pratique du mesurage, l'usage du système décimal de mesure et l'introduction des décimaux seraient dissociés et non pas étroitement confondus, comme c'est le cas actuellement en France. Il serait pour cela très utile de reprendre les études et les observations de F.Colmez

(1974) et de les examiner dans cette perspective « économique » que permet le théorie des situations.

5.3.3. Remarques sur le nombre d'éléments qui permet d'appréhender un ensemble

Il est possible d'engendrer toutes les opérations de la logique binaire à l'aide de systèmes comprenant de une opération (l'incompatibilité de Sheffer) jusqu'à seize. Les systèmes que l'on utilise communément en comprenant quatre ou cinq. Il est fréquemment avantageux, pour appréhender un ensemble, de l'engendrer à partir d'un nombre restreint d'éléments qui deviendront particulièrement familiers. Ce nombre doit être assez petit pour que tous les éléments générateurs puissent être considérés ensemble (moins de 10), et assez grand pour que l'engendrement des éléments plus rares, mais courants, ne soit pas trop long, et pour que le système puisse supporter un nombre suffisant de relations distinctes.

C'est ainsi que d'après Youschkevitch (1976) Abu-i-Wafa, vers 961-976, « engendre » les fractions à l'aide d'un système de fractions « prononçables » en arabe comprenant lui-même les fractions principales : numérateur 1 dénominateur de 2 à 10, les fractions composées de la forme $\frac{m}{n}$, $m < n \leq 10$, les fractions unifiées : produits de la forme

$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \dots \frac{1}{1} \cdot \frac{m}{p}$, celles dont le dénominateur comprend des facteurs premiers supérieurs à 10 sont impronçables (Il choisit ce système qui remonte à la plus haute antiquité à Bagdad alors que Al Uglidisi a inventé les décimaux à Damas 10 ans plus tôt).

C'est ainsi, enfin, que les enfants ont procédé au cours préparatoire avec les naturels.

Or ici nous avons choisi d'introduire d'un coup un ensemble beaucoup plus vaste de fractions : tous les dénominateurs jusqu'à 50, tous les numérateurs de 1 à 20 ont des probabilités d'apparitions voisines. Aucune fraction ne joue de rôle privilégié.

Il ne semble pas que cette méthode, qui s'oppose aux habitudes culturelles (qui favorisent toujours $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$

et $\frac{1}{5}$ ait rencontré de difficulté spéciale, au contraire, elle

semble avoir favorisé le raisonnement sur une fraction quelconque. Il est vraisemblable qu'on ne pourrait pas introduire de la même façon la notion de rapport.

5.3.4. Fractionnement et commensuration

Le système culturel actuel fournit pour les rationnels, en gros la définition suivante :

a) *Définition 1* : (par fractionnement)

Une fraction est restée comme au XVII^{ème} siècle (d'Alembert) « *une ou plusieurs parties d'un entier partagé en plusieurs parties égales ainsi que la moitié, le tiers, les deux tiers...* » Ce « un » est malencontreux et rend difficile la conception de fractions plus grandes que l'unité : $\frac{a}{b}$ c'est donc le résultat d'une opération matérielle qui consiste à partager *des* entiers et non seulement *un* entier en *b* parties que l'on peut comparer et déclarer égales, puis à prendre un nombre *a* de ces parties.

C'est une définition constructive. Elle se réfère à la manière de construire l'objet défini.

Elle est bien adaptée à la *construction d'une grandeur correspondant* à un nombre donné (une unité étant donnée), sauf dans les cas où on ne connaît pas de moyen pratique d'effectuer concrètement les opérations nécessaires.

Par exemple, on ne peut pas fabriquer un poids d'or qui soit les $\frac{2}{3}$ du poids d'une bague donnée, si on refuse de la détruire (mais on peut partager un poids égal de pâte à modeler en trois par tâtonnements). Dans ces cas où : soit la division n'est pas concevable, soit la comparaison n'est pas possible, (ou bien le résultat n'est pas défini, ou le dénombrement impossible) la définition fonctionne, non comme une représentation de la réalité ou comme une théorie, mais comme un système symbolique auquel il est vain de chercher une signification concrète. Par exemple, cette définition n'est directement d'aucun secours s'il s'agit d'attribuer un nombre à une grandeur donnée. A moins de laisser paraître le procédé de fabrication.

b) La définition utilisée dans le curriculum est bien différente.

Définition 2 : (par commensuration)

Une quantité (si elle existe) sera les $\frac{a}{b}$ d'un entier si

en la reportant b fois (en en prenant b identiques à elle-même) on obtient a entiers.

Cette définition suppose d'abord que la grandeur existe, et les opérations qu'elle évoque sont beaucoup plus fréquemment et facilement effectuables (multiplier). Elle ne dit pas comment construire $3/4$. Elle n'est pas constructive, mais elle fournit un algorithme de reconnaissance : elle permet de dire si telle grandeur, est ou non, les $3/4$ de telle autre. Encore faut-il pouvoir « reporter plusieurs fois » ou disposer de plusieurs exemplaires des grandeurs évoquées.

c) Ces deux définitions mathématiquement équivalentes correspondent en fait à des conceptions différentes des fractions et des décimaux, en ce sens qu'elles ne sont pas pertinentes, ou plus efficaces, ou mieux adaptées, sur les mêmes situations-problèmes. Selon les valeurs attribuées de l'unité, rapport des dimensions de l'objet à celle de l'unité choisie, présence ou non d'un partage ou de la mesure d'une subdivision, il est possible de bloquer l'utilisation de l'une ou de l'autre, ou de les rendre plus ou moins coûteuses en nombre d'actions élémentaires, ou de contrarier le contrôle de l'incertitude du résultat, ou d'augmenter les probabilités d'erreurs.

Le tableau IX résume une étude théorique que l'on trouvera dans Ratsimba-Rajohn (1981). Il indique celle des deux conceptions que les valeurs de ces variables rendent plus efficaces. Il apparaît qu'elles sont assez complétement différentes et que la définition constructive est largement la plus fréquemment utile. Il existe d'autres conceptions que nous n'étudierons pas ici.

d) M. Ratsimba-Rajohn a montré que la stabilité et l'homogénéité des comportements sur un ensemble assez varié d'exercices permettait de parler de deux représentations différentes et dans une certaine mesure incompatibles : il a proposé à un échantillon d'élèves du premier cycle du secondaire des situations bloquant successivement l'une ou l'autre. Il a observé un pourcentage d'élèves capables de pratiquer les deux définitions, très faible par rapport à ce que les probabilités de réussite à chaque épreuve aurait laissé prévoir.

VARIABLES D'UNE SITUATION DIDACTIQUE DE MESURAGE
SERVANT A L'EVALUATION DE L'ESPERANCE DE COUT.

Variables de commande	situation problème	1. Grandeur de U l'unité choisie, par rapport aux valeurs de référence : S ₁ : seuil de perception ou S ₂ : seuil de précision utile f : unité « à fractionner » (commodément et fréquemment) p : unité « à reporter » ou servant à dénombrer
		2. Rapport de la grandeur de □ l'objet, à celle de U. — $\frac{\square}{U} \ll 1$ $\frac{\square}{U} \cong 1$ $\frac{\square}{U} \gg 1$ — « meilleur » attracteur de l'intervalle $\frac{\square}{U} - S_2, \frac{\square}{U} + S_2$ Ex : $\frac{3}{5}$ ou $\frac{59}{57}$
		3. Les conditions de « comparaison » : — un à un (Roberval) un à n (graduation) directe ou indirecte (tare)...
		4. Les conditions d'ajustement : — possibilité de fractionnement matériel — possibilités de report nombre maximum de reports... etc (Espace disponible)
		5. Type d'activité : — réalisation d'un objet de grandeur donnée ou mesurage d'un objet
	contrat didactique	1. Conventions au sujet des exigences de la mesure — précision utile (action) convenue (communication) : fractions usuelles, décimales, etc...
		2. Valeur de la réussite, coût de l'erreur ou de l'échec...
		3. Nombre de tentatives permises — Types de rétroactions — ouverture de sa situation
		4. Variables du contrat relatif à l'apprentissage : temps, nombre d'occasion, ... etc
	Variables liées	1. Nombre de reports pour une précision donnée
2. Nombre de fractionnements effectifs		
3. Nombre de comparaisons		
4. Densité relative des points de mesurage facile ou complexe		
Variables Cultu. relles	Distributions de fréquence sur les valeurs des variables de la situation problème — en milieu scolaire (variable plus ou moins ajustable), dans le milieu culturel (libre)	

Tableau 9

5.4. Questions de méthodologie de la recherche en didactique (sur les décimaux)

Le regroupement des situations en modèles, conceptions, représentations, niveaux etc. pose le problème de savoir ce qui est équivalent et ce qui ne l'est pas, ce qui est différent et ce qui ne l'est pas, puis ces distinctions faites, d'observer éventuellement des relations d'implications internes aux modèles — synchroniques — et des relations entre modèles — diachroniques.

5.4.1. Les modèles d'erreurs

M. L. Izoche (1977) a montré que les erreurs et les réussites des élèves s'expliquaient si on leur attribuait le modèle suivant : en présence de plusieurs décimaux (d_j) , on cherche n le plus petit par exemple tel que pour tout d_j , $d_j \times 10^n \in \mathbb{N}$ et on identifie avec \mathbb{N} , l'ensemble \mathbb{D}_n des décimaux tels que $10^n \cdot \mathbb{D}_n \subset \mathbb{N}$. L'enfant raisonne et opère sur \mathbb{D}_n comme sur \mathbb{N} . F. Léonard et C. Grisvard (1981) ont produit, sur un problème d'ordre, un modèle de comportement un peu plus précis rendant compte du fonctionnement indépendant de la partie entière et de la partie décimale. Ces études sont basées sur l'effondrement concomitant de certaines réussites d'ensemble puis sur une hiérarchie de comportements individuels : elles montrent que le modèle souffre peu d'exceptions. Cependant lorsque l'explication porte sur des modifications de probabilités d'erreurs et non sur des modèles déterministes, (supposant que le même élève fait toujours la même erreur) la méthode est rarement satisfaisante.

On pourrait espérer que l'analyse factorielle des correspondances ou l'analyse hiérarchique vont faire apparaître les regroupements de questions et les regroupements d'élèves qui correspondent à ces modèles. Cette méthode est utilisée systématiquement par plusieurs chercheurs mais elle est d'un emploi délicat et l'interprétation s'arrête habituellement aux tous premiers facteurs principaux.

5.4.2. Les niveaux de complexité

Si on observe chez les élèves un décalage suffisant dans le temps, entre la maîtrise de deux questions appartenant

à première vue à un même concept, on peut inférer qu'il existe, entre leurs solutions ou les conceptions qui les commandent, des différences de complexité suffisantes pour former des niveaux psychogénétiques différents. L'analyse génétique qui découle de ce principe a apporté beaucoup d'observations précieuses de la part de G. Vergnaud (1976) G. Ricco (1978) et A. Rouchier (1980) et de leurs collaborateurs. Il faut pourtant, soit renoncer à s'approcher trop des phénomènes didactiques qui peuvent introduire des décalages d'origine arbitraire et didactique, soit redéfinir une méthodologie spécifique. En particulier, la formalisation de cette notion de niveau, bien que tentée à plusieurs reprises, présente des difficultés.

5.4.3. *L'observation systématique* des différences de comportements, liés à des modalités ou à des conditions didactiques différentes, a été rendue possible par l'utilisation astucieuse de l'analyse des correspondances dans la méthode des questionnaires à modalités de F. Pluinage (1977) et a produit des observations intéressantes sur la proportionnalité.

5.4.4. *Dépendances et implications*

En didactique, ce sont moins les proximités ou les distances qui sont intéressantes, que les dépendances disymétriques qui évoquent l'implication. Régis Gras (1979) a donc étudié des méthodes hiérarchiques et d'analyses factorielles basées sur un indice d'implication améliorant celui de J. Loevinger. Mais l'implication elle-même évoque une transitivité assez souvent absente en fait, et il faut produire un concept spécifique plus raffiné avant d'en tirer un indice statistiquement satisfaisant.

Peut-être l'analyse des dépendances diachroniques entreprise sur des processus comme celui dont nous disposons conduira-t-elle à ce résultat.

CONCLUSION

Dans ces deux articles, nous avons essayé de présenter les problèmes d'enseignement des décimaux sans détruire le tissu dans lequel ils s'insèrent. Et cela nous a conduits insensiblement à traduire ces problèmes d'enseignement en problèmes de didactique plus ou moins généraux, et à enchaîner les questions jusqu'à la méthodologie de la recherche. Ne nous sommes-nous pas égarés en route ? Nous avons dû résumer ou exclure de nombreuses études trop particulières ou trop centrifuges... alors de quelle unité peut se targuer la didactique, quel est son champ, ses rapports avec l'enseignement ? En quoi avons-nous avancé par rapport à nos premières observations ?

L'enseignement des décimaux, comme celui de la numération pose à mes yeux un problème didactique difficile et primordial.

D'une part, leur usage est si répandu, si commode et si banal que les enfants le rencontrent très tôt, sous leur forme achevée, actuelle. Quelle que soit la forme de l'apprentissage, c'est l'habitude et l'emploi familier qui réglera la signification du concept.

Nous avons vu les insuffisances de cette conception « machinale » et la nécessité de placer cet usage sous le contrôle d'une compréhension et même, dès que possible, d'un savoir rationnel. Seule, la résolution de certaines situations-problèmes peut donner cette conception claire, cette compréhension et ce savoir. Mais ces problèmes sont d'une complexité assez grande et il ne semble guère possible de les proposer aux élèves au moment voulu, trop précoce.

D'autre part, il est impensable de retarder l'enseignement des décimaux ou de les approcher par une genèse trop longue ou qui conduirait à des pratiques insolites. Enfin, au moment où pourraient se faire les reprises et les accommodations nécessaires, dans l'enseignement secondaire, on n'a plus de temps à consacrer à cette question subalterne. Nous avons ainsi un problème d'enseignement sans solution. Il en existe d'autres qui conduisent à des contradictions semblables.

D'une façon générale, de tels problèmes sont, sinon résolus, du moins traités par une négociation didactique, dont

on sait peu de choses encore, mais qui ne suit que de très loin le discours classique. Dans ce discours, toutes les réussites sont perçues comme des fonctions monotones des variables : à une extrémité ce qui est bon, à l'autre ce qui est mauvais. Potentiellement, l'enseignant a tout pouvoir.

Quels sont les rôles réciproques de l'habitude et de la compréhension dans l'acquisition et dans le fonctionnement d'une notion ? Comment ce rôle évolue-t-il ? Quels sont les résultats que l'on peut s'attendre à voir varier, si un meilleur compromis est obtenu ? La traduction de ce débat en une liste d'hypothèses falsifiables, susceptibles d'être étudiées expérimentalement, demande la création de notions nouvelles. C'est le prix que doit payer la didactique pour accéder à un statut scientifique sans cesser d'être une théorie des faits didactiques et de contrôler sa technique. Les problèmes d'enseignement sont des problèmes de décisions. Ils doivent recevoir une réponse, même provisoire, coûte que coûte. Cette réponse ne peut pas être une réponse « pour voir ». L'enseignant ne peut pas s'engager à tirer toutes les conséquences logiques d'un choix et de s'y tenir quoiqu'il arrive. Aussi les problèmes ne donnent-ils pas beaucoup de prix à la méthode expérimentale, ils sont des indices à interpréter. Dans la mesure où elles sont spécifiques du contenu, certaines questions de l'enseignant peuvent être des questions à une « science didactique » qui parviendrait à sursoir à la nécessité des décisions. Quels sont les résultats des élèves ? Quelles décisions peuvent les améliorer ? Quelles alternatives se présentent ? Comment fabriquer d'autres méthodes, comment en choisir une ? Comment la gérer, la conduire ? la communiquer ? Quels indices faut-il surveiller ? Elles le peuvent à condition toutefois de subir une subtile modification du point de vue du vocabulaire et des méthodes : quelles situations et quels comportements correspondent à une appropriation convenable d'un concept ? Quels sont les comportements erronés qui apparaissent et leur signification ? Quelles sont les variables qui sont susceptibles d'agir sur les appropriations, quelles hypothèses peuvent expliquer les bons ou les mauvais résultats ?

Toutefois, la plupart des choix qui apparaissent comme critiqués pour l'enseignant ne fournissent pas de bonnes

questions de didactique (Par exemple, faut-il adopter le manuel de Dupond ou celui de Durand ?) La recherche en didactique peut-elle se contenter de fournir des réponses là où elle peut les assurer par une étude scientifique, en laissant le soin et la responsabilité à l'enseignant seul, de décider de l'importance ou de la pertinence de l'information et de l'usage qu'il peut en faire ? Il faudra toujours que quel-
qu'un rapporte les conclusions à un processus d'enseignement bien précis et choisisse une réponse optimale. De toute façon, toute étude « in vivo » de l'apprentissage en situation scolaire, devra s'inscrire dans une activité d'enseignement dont il faudra bien contrôler les variables. Par conséquent, la didactique scientifique n'échappera pas à la phénoméno technique didactique. Il faut qu'elle prenne en charge la totalité des interactions des systèmes en présence et qu'elle traite de ce qui peut-être isolé et qui est spécifique du contenu (sans lui être réductible). Elle doit donc produire des processus, non comme proposition optimale aux enseignants, mais comme objet d'étude.

Nous espérons que cet article a indiqué qu'elle pourra parvenir à le faire.

- AEBLI H. : *Didactique psychologique*, Delachaux et Niestle, 1959.
- BACHELARD G. : *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin. *Essai sur la connaissance approchée*, Vrin.
- BROUSSEAU G. : « L'observation des activités didactiques », in *Revue française de pédagogie*, No 45, 1978. « Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques », in *Compte rendu du colloque international CIAIEM*, 1976.
- BUISSON P. : « Evaluation-sondage dans le 1er cycle (12-16 ans) », in *Educational Studies in mathematics*. Vol. 6, No 4, march 1976.
- DELAATRE P. : *Système, structure, fonction, évolution*, Maloine-Doïn éditeurs, 1971.
- DIENES W. : *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*, O.C.D.L., 1970.
- DIENES et JEEVES : *Pensée et structure*, O.C.D.L., 1976.
- GLAESER G. : *Didactique expérimentale - Cours de 3ème cycle*, I.R.E.M. de Strasbourg, 1979.
- I.N.R.P. : *Evaluation comparée de quatre types d'organisation à l'école élémentaire* (FOUCAMBERT J. mars 1977-février 1979). *Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Tome 1 : Comportement des élèves, 1979.
- IZORCHE M.L. : *Les réels en classe de seconde - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1977*. Université de Bordeaux, 1979.
- LICHNEROWICZ : « Les mathématiques et la réalité », in *Logique et connaissance scientifique*, p. 474-485. Encyclopédie de la Pléiade, NRF, 1969.
- MAUDET C. : *Etude critique du processus psychodynamique selon Diènes - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1979*. Université de Bordeaux.
- MERCIER A. : *Etude des notions « opérateur » « machine » - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1978*. Université de Bordeaux.
- PIAGET J. : *Introduction à l'épistémologie génétique*, T. 1 et 2, P.U.F., 1974. *L'équilibration des structures cognitives*, P.U.F., 1975.
- PLUVINAGE F. : *Difficultés des exercices scolaires en*

* * *

mathématiques - Thèse de doctorat d'état soutenue en sept. 1977 à l'Université de Strasbourg.

SALIN M.H. : Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1976. Université de Bordeaux.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., et al. : Rapport de recherches D.G.R.S.T. — problèmes multiplicatifs, 1979. Acquisition des « structures multiplicatives » dans le 1er cycle du 2nd degré. Publication IREM - d'Orléans et Centre d'Étude des Processus Cognitifs et du Langage. E.H.E.S.S. - C.N.R.S. Paris - avec le concours de la D.G.R.S.T. - Ed. IREM d'Orléans. Collection « Recherche » No 2, mars 1979.

VIENNOT L. : *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*, Hermann, 1979.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I (2)

- ABD EL JAOUAD (1978) Vers une épistémologie des décimaux
Bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques
 No. 50 (1-27)
- (1980) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle préparatoire* 1 volume. Cycle élémentaire 2 volumes. Collection Ermel — OCDL. Ed.
- N. BALACHEFF (1980) *Elaboration d'explications par des élèves de 6ème à propos d'un problème combinatoire (analyse et protocoles)* IMAG Université de Grenoble. Rapport de Rech. no. 224
- G. BROUSSEAU (1970) *Processus de Mathématisation*. In, *la Mathématique à l'École Élémentaire*, APMEP. Paris 1972. (428-442)
- G. BROUSSEAU (1979) « Evaluation et théories de l'apprentissage en situations scolaires ». In « *Educacion matematica en las américas* » — UNESCO
- G. BROUSSEAU (1980) *Problèmes de l'enseignement des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques* I.1. pp. 11-59
- Y. CHEVALLARD (1980) « *La transposition didactique* » Cours de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques, Chamrousse, (à paraître)
- F. COLMEZ (1974) Document d'accompagnement du film « Mesure » *Mesure I et II film RTS — Melun-Bordeaux*
- M. DESJARDINS — J.C. HETU (1974) « *Activités mathématiques dans l'enseignement des fractions* » Les presses de l'Université du Québec.
- R. DOUADY (1980) *Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire*. In, *Recherches en didactique des Mathématiques* I.1 (77-112)
- E. FILLOY *Experimentacion en el area de matemáticas del 5º Grado de Educacion primaria 77-78 Medicion y sistemas de Numeracion* — *Seccin Matematica Educativa del CIEA de IPN*.
- GAGNE—BRIEN—PAQUIN (1980) « *Les principes fondamentaux de l'apprentissage* » éd. H.R.W. Montréal.
- GONSETH (1936) *Les mathématiques et la réalité* - Paris - Alcan
- R. GRAS (1980) « *Deux méthodes d'analyse de données didactiques : Classification implicite et classification hiérarchique — application à une situation réelle* » Publication de l'IREM de Rennes.
- G. GUITTEL (1975) « *Histoire comparée des numérations écrites* » Flammariion.
- K. HART (1980) *From whole numbers to fractions and decimals*. In, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. I.1. (61-75)
- N. HERSCOVICS (1980) *Constructing meaning for linear equations. A problem of representation*. In, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. I.3. (351-385).
- F. LEONARD - C. GRISVARD (1981) « *Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs* ». In, *bulletin APMEP* (327) (47-60).
- PERRRET - CLERMONT A.N. (1979) *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*. P. Lang, Berne.

- OVAERT et al (1976) *Philosophie et calcul de l'infini*. F.Maspéro, (Ed.)
- F. PLUVINAGE - C. DUPUIS (1980) « *La proportionnalité et son utilisation* » IRMA — Université Louis Pasteur. Strasbourg.
- H.RATSIMBA-RAJOHN (1981) « *Etude didactique à l'aide de la théorie des jeux, des représentations et de deux stratégies des mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité* ». Thèse de 3ème cycle de Didactique des Mathématiques IREM. Université de Bordeaux.
- G.RICCO (1978) *Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans*. Travaux du Centre d'Etudes des processus cognitifs et du langage no. 11. EHESS — CNRS — Paris.
- F.RICHARD et A.BESSOT (1979) *Commande de variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement de procédures en vue d'étudier le rôle du schéma*. Thèse de 3ème cycle de Didactique des Mathématiques. IREM, Université de Bordeaux.
- A.ROUCHIER et al (1980) « Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1.2. (225-275)
- M.SCHUBAUER-LEONI/PERRET-CLERMONT (1980) Interactions Sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs — *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1.3. (297-350)
- R.SKEMP (1976) Relational and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77 (20-26)
- S. STEVIN (1585) *La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes 1585*. (Manustrit) 1634 (première édition). Oeuvre mathématique de Simon Stevin augmentée par Albert Girard 1634.
- G.VERGNAUD — C.DURAND (1976) « Structures additives et complexité psychogénétique » *Revue française de pédagogie* no. 36 (28-43)
- G.VERGNAUD, J.BENHADJ, A.DUSSOURT (1979) « La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le cours moyen 2ème année et la classe de 6ème ». *Recherches Pédagogiques*, no.102, INRP.
- H.WHITNEY (1968a) The mathematics of physical quantities. Part I : Mathematical models for measurement. *The American Mathematical Monthly* 75 (115-138).
- H.WHITNEY (1968b) The mathematics of physical quantities. Part II: Quantity. Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly* 76 (227-256).
- A.P.YOUSCHKEVITCH (1976) « *Les mathématiques arabes* » (VIIè et XVè siècles) VRIN.

CHAPITRE II

PROBLEMES DE DIDACTIQUE CENTRES SUR L'ELEVE : LES ECHECS ELECTIFS

- 1. Approche globale et statistique**
 - . Définitions et caractères fondamentaux de l'échec en mathématiques
 - . Plan d'études et méthodes
 - . Conclusion de l'approche statistique

- 2. Approche clinique**
 - . Introduction
 - . Exemple d'analyse de situation
 - . Etude du cas de Gaël
 - . Conclusion

APPROCHE GLOBALE ET STATISTIQUE DES
ECHECS ELECTIFS EN MATHEMATIQUES

Le présent paragraphe résume les résultats obtenus depuis 1976 avec l'aide de onze étudiantes de troisième année d'orthophonie. Ces recherches se poursuivent aujourd'hui dans le cadre du C.N.R.S. Ces résultats sont modestes malgré les efforts qu'ils ont demandés, ils paraîtront dérisoires à certains ; c'est peut-être pourquoi je n'hésiterai pas à insister sur les raisons qui nous obligeaient à les rechercher. Peut-être n'est-il pas inintéressant parfois de pénétrer dans les coulisses des recherches.

Je me suis intéressé aux problèmes des échecs en mathématiques en 1975, quelque temps après les grandes réformes de 1970 ; le docteur Dubois avait constaté, dans les fiches d'orthophonie de l'hôpital Saint-André et de divers organismes, le faible nombre des mentions « dyscalculie ». Une enquête rapide auprès des maîtres lui avait donné des explications divergentes (1) : certes, pour certains les nouvelles méthodes, mieux adaptées aux enfants faibles, permettaient d'effacer les échecs, mais pour d'autres, c'était la diminution des exigences précises sur les points traditionnellement difficiles : les problèmes et parfois le calcul. En fait, la plupart avaient changé peu de chose dans leur pratique quotidienne, et les difficultés demeuraient les mêmes, mais étaient appréciées différemment.

Il y avait là un indice intéressant ; si la *proportion des enfants reconnus par l'institution comme échouant en mathématiques avait varié au cours du temps* Q_0^2 , on devait pouvoir trouver des facteurs dont elle pouvait dépendre et, par-là, mieux comprendre les causes de la mise en échec.

Préalable méthodologique.

A première vue, le travail est simple à planifier : il faut trouver ou créer un corpus important d'études de cas précis et détaillés, puis l'analyser. Ces études peuvent suggérer des facteurs nouveaux à étudier et si les épreuves qui leur correspondent sont de passation assez facile, il devient moins cher d'étudier ces facteurs séparément et par des méthodes statistiques ; avec le risque toutefois de ne trouver aucune différence avec la population parente. En fait, cet empirisme comporte de nombreux aléas et surtout il est très difficile de rassembler une population susceptible d'être étudiée, de sorte que les travaux dont nous rendons compte avaient seulement pour but de définir une ou des méthodes sûres de détermination et de détection des enfants en échec en vue de préparer un plan ultérieur de recherche, engageant des moyens plus importants.

1. Q_0 : les questions qui font l'objet de l'étude en cours sont signalées dans le texte et numérotées. Ici, la question Q_0 est : la proportion des élèves qui échouent en mathématiques varie-t-elle au même niveau d'une année à l'autre — et une même année d'un niveau à l'autre.

La première tâche des études de ce genre est de justifier le procédé utilisé pour identifier les enfants en échec en donnant une définition précise de la notion d'échec, à l'aide de critères opératoires et fidèles. Il faut alors réunir un échantillon assez nombreux d'enfants correspondant à cette définition, ne devant tout de même pas trop s'écarter d'un *profil commun* [Q3].

De plus, il est indispensable de s'assurer que la population ainsi isolée est relativement stable dans le temps : *les difficultés de ces enfants doivent être durables* [Q1] (le sont-elles ?).

La deuxième tâche consiste à lui trouver *des caractères communs* (nous dirons « symptômes ») *autres que ceux qui ont servi à la constituer. Ces caractères existent-ils ?* [Q3] (dans quel domaine les chercher ?).

C'est seulement dans ces conditions qu'on pourra espérer mener à bien la troisième tâche : identifier les *causes* et observer des effets communs aux échecs en mathématiques.

Si cette population se révèle alors trop hétérogène pour avoir une stabilité suffisante et un profil, des caractères, des causes ou des effets communs, il faut se résigner à la fragmenter. Mais il est clair que ce que l'on gagne ainsi en homogénéité, on le perd en intérêt général et surtout en facilité d'étude car, plus la population étudiée représente une fraction faible de la population d'ensemble, plus son étude sera chère et difficile.

Il peut donc arriver, lorsque toutes ces conditions ne peuvent être remplies que l'on doive renoncer à ériger le concept banal d'échec électif en objet scientifique.

Définitions et caractères fondamentaux de l'échec en mathématiques.

Une première enquête bibliographique conduite par Florence Moras et Christine Molia ([2] 76 tome 1) a permis de comparer les définitions, les symptômes et les causes étudiées à l'époque.

La première restriction, qui a semblé indispensable à la plupart des auteurs, consiste à distinguer les enfants qui ne sont en échec qu'en mathématiques, nous les dirons en *échec électif*, de ceux qui sont en *échec scolaire plus ou moins global*. Il paraît raisonnable de chercher d'abord les causes d'un échec au niveau de ses caractères communs les plus généraux. Un échec global n'est sans doute pas seulement un échec en mathématiques *plus* un échec en français mais peut être un échec scolaire. Ainsi, pour l'enfant en échec électif en mathématiques, l'apprentissage dans les autres matières : langage, écriture, lecture... se déroule normalement. Seule l'activité mathématique est perturbée. Ce point de vue peut être contesté, en particulier si l'on suppose que tous les enfants en échec, électif ou non, en mathématiques, ont le même genre de difficultés et la même manière d'échouer et, par conséquent, pourraient relever du même type d'intervention rééducative.

C'est pourquoi certains auteurs ajoutent un deuxième critère de restriction, celui de la *spécificité du trouble* : il s'agit de distinguer les élèves qui échouent d'une manière qualitativement différente par rapport aux autres élèves et en particulier par rapport aux élèves en échec global. Evidemment, de telles difficultés, spécifiques des enfants en échec, seraient aussi spécifiques des mathématiques ou d'une partie des mathématiques. Il reste à savoir si de tels échecs spécifiques existent et dans ce cas si *les élèves en échec électif ont une (ou plusieurs) manières particulières de ne pas réussir et qui les distinguerait des enfants non en échec ou en échec global* [Q2].

Un troisième type de restriction a été envisagé dans la mesure où l'échec était accompagné d'autres troubles et selon que la difficulté en mathématiques paraissait les précéder (caractère primitif) ou en être la conséquence (caractère secondaire). Cela revient à admettre implicitement que certains facteurs ont une influence sur les difficultés en mathématiques. Il s'agit principalement de la déficience mentale, des perturbations scolaires profondes (absentéisme, malmenage pédagogique, relations troubles avec un maître), de troubles affectifs primitifs ou secondaires à l'échec, de perturbations de la structuration spatiale. Très souvent, ces distinctions ne s'appuient pas sur des observations sérieuses et assez nombreuses, elles témoignent simplement de l'intérêt qu'a pris l'auteur à les solliciter ou à les écarter pour traiter les cas concrets qui lui étaient soumis.

Le mot « *dyscalculie* » a été avancé (3) pour caractériser des échecs *électifs, spécifiques, non explicables* directement par une déficience mentale générale ou des perturbations scolaires évidentes. Il a souvent été repris par la suite dans des acceptations diverses et souvent fantaisistes.

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer que ces « définitions » théoriques — classiques — n'évoquent nullement *le procédé* utilisé pour objectiver les critères qu'elles évoquent (tests : lesquels ? opinions ? jugement ?), non plus que *la source du diagnostic* d'échec (les élèves ? les maîtres ? les parents ? l'observateur ? le milieu médical ?), non plus que le *niveau scolaire* ou l'âge auquel apparaissait l'échec, ou son *ancienneté* au moment de l'observation. Tout se passe comme si on croyait qu'un échec en mathématiques est un fait si évident qu'il peut être repéré de façon équivalente par toutes les sources, par toutes les méthodes, à tout moment ! On ne peut rejeter *a priori* l'hypothèse que *les diverses sources ou méthodes décèleraient des échecs différents et « fonctionnant » de manière différente*.

La question méritera d'être étudiée [Q4].

Etat des travaux en 1976.

L'enquête bibliographique initiale ([2] 76 tome 1) nous a montré l'état lacunaire et douteux des connaissances de l'époque sur ce sujet.

Les symptômes de dyscalculie sont très nombreux (22 distincts chez neuf auteurs principaux³) et très variés (tableau 1) mais il n'y a accord sur aucun d'eux, et même aucun accord entre les auteurs (le désaccord estimé par le Q de Cochran est significatif à .01). Parmi ces auteurs, bien peu indiquent leur méthode de choix des cas en la rapportant à un étalonnage quelconque.

Une analyse hiérarchique du tableau indiquant les symptômes invoqués par chaque auteur, permet de rapprocher les symptômes choisis par les mêmes auteurs (avec l'indice de Sokal et Michener). On obtient ainsi le dendrogramme du tableau 1.

Il signifie que, dans l'ensemble, les chercheurs s'intéressaient à deux grandes catégories de variables : d'une part, celles qui concernent *la perception et la représentation*, d'autre part, celles qui décrivent *la conception ou l'exécution des actions*. Dans chaque catégorie, on trouve des variables proprement mathématiques accompagnées de variables plus psycho-physiologiques à l'aide desquelles on essayait de les approcher.

Ceci témoigne, me semble-t-il, d'une interprétation précise de l'échec électif :

— d'une part, il est dû à un trouble d'une fonction *instrumentale* ou psychomotrice ou affective, et périphérique, qu'on pourra donc rééduquer — et non à celui d'une fonction centrale liée à la connaissance elle-même ;

— d'autre part, l'apprentissage scolaire déclenche ou révèle un trouble existant *de façon latente*.

Nous reviendrons sur l'origine de ces hypothèses.

D'ailleurs, les causes invoquées étaient :

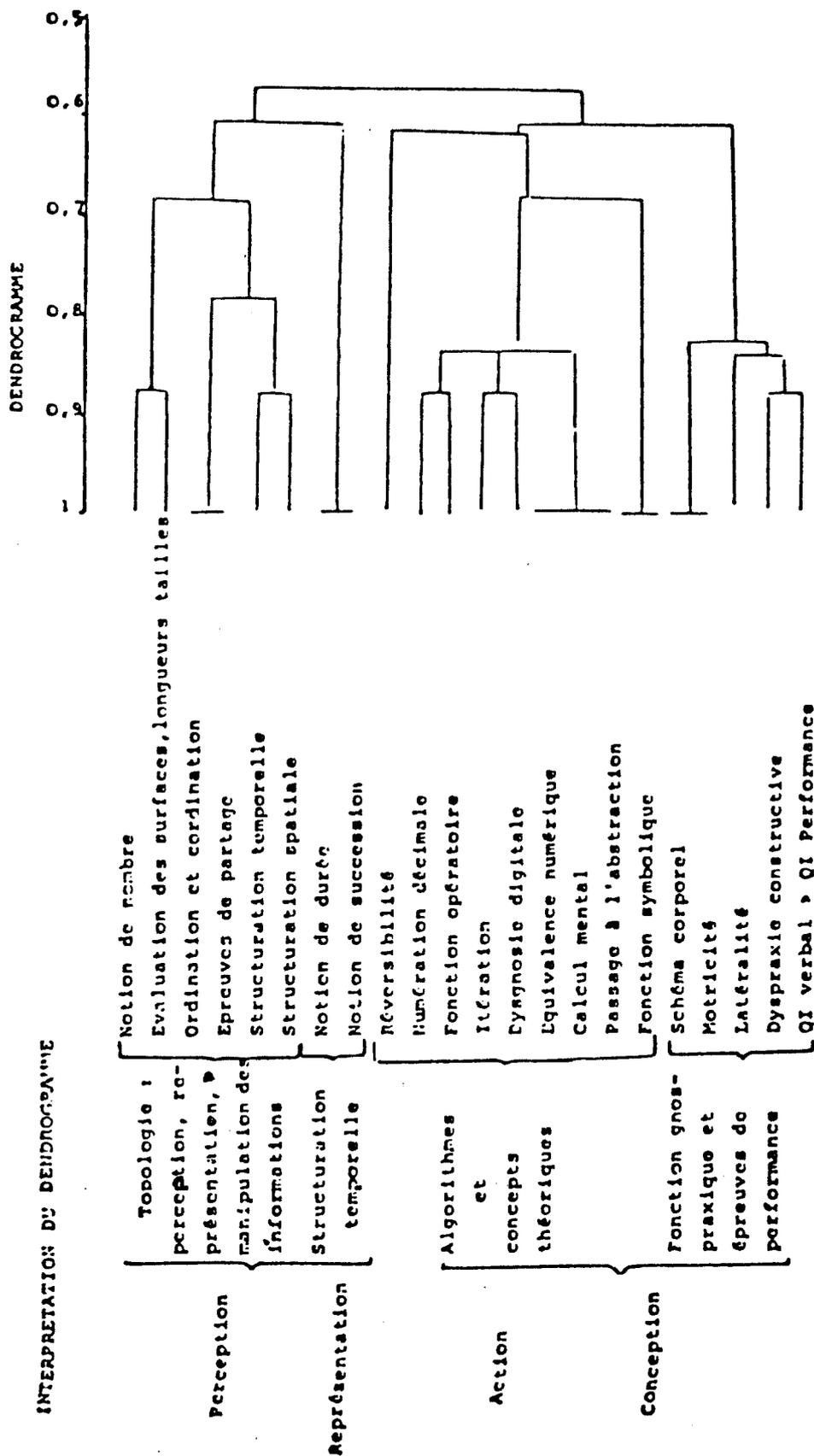
- propres à l'enfant : déficits organiques d'origine centrale, syndromes corticaux, dyspraxies, dysgnosies, infirmité motrice cérébrale, épilepsie, déficit intellectuel, rigidité intellectuelle, dyslexie et troubles du langage, du schéma corporel, de la fonction symbolique, spatiaux, temporels ;
- liées à l'environnement (troubles affectifs ou vie scolaire).

Dans tous les cas, les causes étaient seulement liées aux symptômes par des considérations de convenance (du genre suivant : puisqu'en apprenant à compter on se sert de ses doigts, les dysgnosies « ont » une incidence sur le développement de la fonction du nombre) mais non par des preuves expérimentales.

Enfin, le nombre de cas de dyscalculie rapportés dans la littérature de l'époque de façon convenable est infime : 11 en tout [Hasaerts Van Gertruyden (6)].

3. Ce sont : Hasaerts van Gertruyden, Dugas et Guillarme, Chabanneau et Pasarello, Devic et Périch, Jaulin-Mannoni, Lauriol, Ginet, Gibello et Koppel.

TABLEAU 1. — Symptômes évoqués (1976).



En reprenant les données recueillies par M^{me} Bourrel en 1977 (7), M^{lles} Berrocq-Irrigoin, Dupuch et Fruchard et moi (2 novembre 1977) avons pu établir que les enfants en échec électif et les enfants en échec global se distribuaient différemment sur diverses variables affectives et psychologiques (tableau 2) mais seulement en fait à cause des troubles relationnels (le X^2 est significatif à .01).

TABLEAU 2. — *Echecs et troubles psycho-affectifs.*

Nombre observé, Nombre théorique, % observé dans sa catégorie	Débilité		Troubles psychomoteurs		Troubles Langage		Dyslexie Dysorthographe		Troubles relationnels		TOTAL
Enfants en échec global	43 18,2	42 17,7	33 13,9	134 14,4	16 6,7	10 4,2	73 30,9	61 25,8	71 30	89 37,7	236 100
Enfants en échec électif en maths	21 17,2	22 18	19 15,5	18 14,7	0 0	6 4,9	18 14,7	30 24,5	64 52,4	46 37,7	122 100
Total	64		52		16		91		135		358

On peut dire que *les enfants en échec électif en mathématiques ont plus souvent des troubles relationnels que les enfants en échec global.*

Nous avons repris dans la même étude les données recueillies par trois orthophonistes lyonnaises (8) qui avaient fait passer un bilan orthophonique composé de 16 épreuves à 64 élèves en échec en mathématiques pris parmi 307 (20 % d'échecs). Ces épreuves étaient celles de M^{me} Borrel-Maisonny (langage : sériation, réalisation, compréhension ; lecture : des syllabes, des mots, silencieuse, de « ver-sage » ; de rythme : en reproduction, en identification ; de mémoire motrice), des figures de Rey (copie, mémoire), des chiffres de Berny (copie et mémoire) et deux épreuves de Piaget (raisonnement : classification, sériation)⁴.

A aucune des épreuves pour lesquelles il existe un étalonnage (rythme, mémoire) il n'a été possible de mettre en évidence une différence significative. Et les échecs dans la plupart des autres sont si peu nombreux qu'on peut douter qu'il y en ait là aussi.

Notre analyse factorielle des correspondances de leurs données montrait nettement deux groupes d'élèves discriminés par les épreuves de langage (fig. 1). En supposant que le groupe qui réussit mieux les épreuves de langage est celui des enfants en échec électif (G1 : 21 élèves : 6,8 %, l'autre G2 : 14 % étant les enfants en échec global), ce qui resterait à prouver, on peut conclure qu'aucune des épreuves autres que celles du langage n'est spécialement mieux réussie que les autres par ces enfants ; dans l'ensemble, ils ont des résultats en mathématiques significativement meilleurs que les élèves en échec global, ils sont un peu meilleurs aux épreuves de raisonnement classification, en copie des chiffres de Berny, un peu « moins meilleurs » en reproduction des chiffres de Berny ou en identification de rythme.

4. Ces auteurs, empêtrés dans des différences entre écoles publiques et privées — dont elles semblaient d'ailleurs tirer des conclusions illogiques — et en l'absence d'une connaissance même élémentaire des statistiques, ne tiraient guère parti de leurs données et ne concluèrent rien.

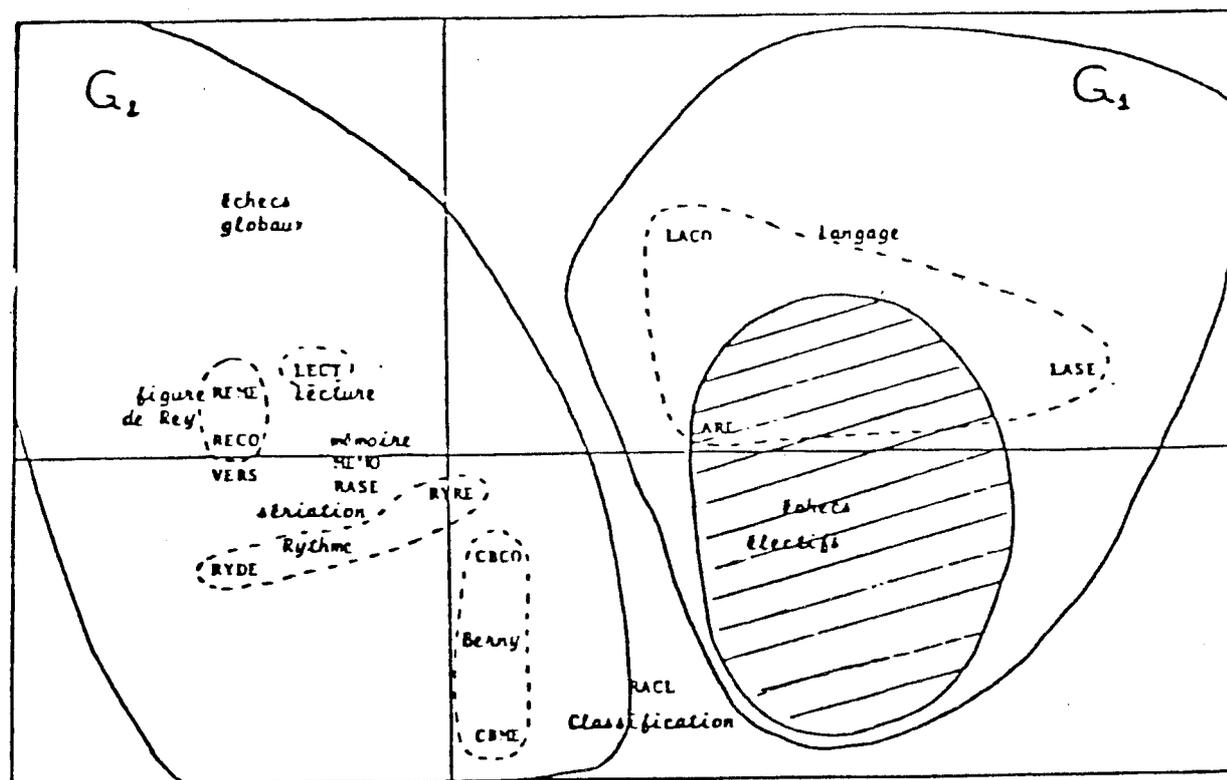


FIG. 1.

Code Nom de la variable

LASE : Langage-Sériation
 LARE : Langage-Réalisation
 LACO : Langage-Compréhension
 LECT : Lecture des syllabes
 LECT : Lecture des mots
 LECT : Lecture silencieuse
 RACL : Raisonnement-Classification
 RASE : Raisonnement-Sériation

Code Nom de la variable

CBCO : Chiffres de Barny en copie
 CBME : Chiffres de Berny en mémoire
 VERS : Versage
 RYRE : Rythme en reproduction
 RYDE : Rythme en identification
 RECO : Figure de Rey en copie
 REME : Figure de Rey en mémoire
 MEMO : Mémoire motrice

Ma conviction restait donc qu'aucune de ces variables n'est franchement liée d'une manière quelconque aux échecs scolaires en mathématiques et en particulier aux échecs électifs.

Plan d'études et méthodes.

Nous avons donc alors décidé de nous centrer sur *l'échec électif* en mathématiques, et non sur l'échec tout court, avec l'espoir d'observer plus facilement des traits vraiment spécifiques. Ce choix nous paraissait d'autant plus judicieux qu'on voulait s'intégrer aux conditions accompagnant l'échec en mathématiques : les pressions exercées par le milieu parental ou scolaire sont plus importantes sur un enfant qui « doit pouvoir réussir en mathématiques puisqu'il réussit ailleurs » (donc « puisqu'il n'est pas sot »...) que sur un enfant en échec global.

Il fallait dans un premier temps :

— mettre au point *une méthode de détection* en vue de l'enquête statistique ultérieure (qui devrait réclamer de plus gros moyens) et déterminer l'ordre de grandeur des populations et des valeurs à comparer pour déterminer le plan d'expérience à venir ;

— explorer par des *observations cliniques* des variables relatives au processus même d'élaboration et de fonctionnement de la connaissance mathématique, et si possible imaginer des nouvelles *épreuves* pour les évaluer.

La méthode de détection devait être peu coûteuse : même un test très simple, à passation collective, devient très lourd dès que l'on doit choisir les six élèves que l'on veut étudier parmi cent à examiner. C'est pourquoi nous avons décidé d'étudier dans un premier temps la *source d'information* que constituent les *maîtres* : stabilité, valeur prédictive, homogénéité par niveaux et par écoles, composantes, etc. Ce choix est légitime car c'est le maître qui constate le plus souvent l'échec de l'enfant, qui le signale à la famille. Le questionnaire devait permettre d'analyser comment le maître tient compte, dans son jugement direct, non seulement des résultats bruts de ses élèves, mais aussi de leur aptitude à apprendre, de leurs manifestations d'intérêt, de son pronostic, etc.

Dans un deuxième temps, on constituait un *échantillon* plus petit comprenant tous les *enfants en échec électif* détectés (E.E.E.), un nombre égal d'enfants en échec global et un nombre égal d'enfants en réussite globale. On vérifiait auprès de ces enfants, avec un test d'acquisition par exemple, la valeur prédictive de la méthode de détection par la source « maîtres », et on pouvait peut-être déjà trouver des caractères communs du comportement en mathématique des E.E.E.

Parallèlement, les *observations cliniques* allaient être organisées dans le cadre d'une action favorable à l'enfant, c'est-à-dire dans celui d'une *rééducation*. Elles seraient accompagnées d'enregistrements (transcrits), d'épreuves diverses, de discussions du cas, elles-mêmes enregistrées (et transcrites) et enfin des comptes rendus détaillés permettant des analyses ultérieures.

Nous ne parlerons pas ici des difficultés matérielles et déontologiques de l'approche de ces enfants, mais c'est un point très important.

Etude de la méthode de détermination de la population en échec électif.

SOURCE « MAITRES ».

— Le questionnaire demandait au maître son opinion sur les résultats, les facilités d'apprentissage et l'intérêt manifesté de chacun de ses élèves, à propos des mathématiques, du français et des autres matières. Plus tard, on lui demandait

Les échecs électifs en mathématiques

aussi de déclarer pour chaque enfant « s'il a des difficultés particulières en mathématiques alors qu'il en a beaucoup moins ou pas du tout ailleurs » (échec électif déclaré).

— En janvier 1977, le questionnaire fut proposé initialement à 49 maîtres appartenant à 13 écoles et leurs réponses concernaient 1 104 enfants de tous les niveaux du primaire:

Il fut proposé en juin 1977 à 45 maîtres de 9 écoles (774 enfants) et, en mars 1978, à 35 maîtres de 6 écoles (783 enfants).

Nous avons essayé de conserver la plus grande intersection possible entre ces populations pour permettre une étude longitudinale (138 enfants). L'énorme déperdition montre la difficulté de mener ce genre d'enquêtes, difficultés que nous n'évoquerons pas ici.

Sans entrer dans le détail, donnons les résultats les plus saillants pris parmi ceux rapportés dans les fascicules ([2] 77 tome 2) et dans ([2] 78 tome 1), ([2] 78 tome 3), ([2] 78 tome 2) et ([2] 79 tome 2).

Les élèves étaient classés dans diverses catégories par une relation définie arbitrairement et qui a donné pour les différentes composantes de la population des pourcentages très stables (tableau 3).

TABLEAU 3. — Stabilité dans le temps des proportions entre les diverses populations.

	échec global	échec électif maths	échec électif français	réussite globale	N
janvier 77	16 %	5,6 %	12 %	66,5 %	1104
juin 77	13,9 %	6,9 %	6,5 %	73,5 %	774
mars 78	16,3 %	6 %	9,2 %	69,1 %	783

D'une façon générale, les moyennes des appréciations données par les maîtres pour les différentes variables ne varient pas (ces variables ont entre elles des relations que nous évoquons plus loin et qui elles aussi sont stables).

Mais les résultats estimés par les maîtres sont significativement meilleurs en mathématiques qu'en français et ceci de façon stable. Ils sont d'ailleurs corrélés assez fortement. Le nombre des échecs électifs en français est lui aussi plus élevé.

Ces pourcentages sont homogènes : ils ne varient pas significativement d'un niveau scolaire à un autre, c'est un fait qui nous a surpris : on aurait pu s'attendre, par exemple, à ce que le nombre des enfants en échec électif augmente avec

l'âge des enfants, ce n'est pas le cas. Tout se passe comme si les rapports entre les différents statuts étaient des caractéristiques constantes, donc régulées, du fonctionnement scolaire.

Le pourcentage des enfants en échec électif ne varie pas non plus avec l'effectif des classes, ni même significativement d'un établissement à l'autre (sauf en janvier 1977).

Nous avons pu ainsi nous faire une idée des composantes du « jugement » des maîtres (dans notre questionnaire); elles aussi très stables : d'abord les matières principales sont opposées aux autres, et aux manifestations d'intérêt (30 % d'inertie). (Ces dernières questions sont utilisées par le maître pour se récupérer d'un jugement trop négatif sur les élèves en échec global). Ensuite les mathématiques sont opposées au français (17 à 20 %) et enfin les résultats aux facilités d'apprentissage suivent et amplifient toujours le jugement sur les résultats.

Mais examinons l'évolution du statut des élèves qui ont été concernés par deux ou par trois questionnaires : la stabilité des paramètres de l'estimation des maîtres n'implique pas celle des statuts des élèves :

— A l'intérieur d'une même année scolaire, entre janvier et juin on obtient le tableau de stabilité suivant (tableau 4).

TABLEAU 4. — Instabilité des E.E.E.

Janvier \ Juin	Autres	Echecs électifs	I
Echecs électifs	37	16	53
Autres	675	16	691
I	712	32	744

Il est clair que les deux tris ne sont pas indépendants, que le pourcentage des enfants en échec électif en mathématiques a significativement augmenté (de 4,3 à 7,12 %) et que les deux populations sont inégalement stables.

Compte tenu des possibles erreurs de détection (la fréquence des erreurs de détection est comprise entre 0,1 et 0,3), 20 à 50 % des enfants en échec électif en janvier le restent en juin.

Dans l'ensemble, les maîtres estiment que le niveau en français s'améliore dans le courant de l'année scolaire et qu'au contraire, le niveau mathématique baisse. La population en échec électif en français est plus stable et diminue.

L'étude des appréciations portées sur les élèves en échec électif montre que certains d'entre eux le deviennent par suite d'une amélioration de leur niveau estimé en français, d'autres au contraire, parce qu'ils vont éprouver de nouvelles difficultés en mathématiques. On pourrait retenir l'idée qu'il pourrait y avoir aussi deux types d'échecs à manifestations saisonnières et qualitativement différents : les échecs sur les contenus anciens au moment des révisions du premier trimestre, les échecs sur les contenus nouveaux du second trimestre. Mais pour les étudier, il faudrait construire des épreuves particulières. Et pour l'instant on conserve d'abord l'ensemble de la population.

En comparant maintenant l'évolution sur les deux années consécutives (janvier 1977, juin 1977, mars 1978) on obtient les résultats suivants :

Les appréciations des maîtres différents sont toutes globalement corrélées (au seuil de .01) (voir tableau 5).

TABLEAU 5. — Corrélations entre les appréciations des maîtres.

		Mathématiques		Français	
		janv. 77	juin 77	janv. 77	juin 77
maîtres différents	mars 78	$r = 0,38$	$r = 0,48$	$r = 0,59$	$r = 0,64$
	juin 77	$r = 0,75$		$r = 0,79$	

Il faut remarquer que les corrélations sont bien meilleures en français qu'en mathématiques, lorsqu'il y a changement de maîtres. Ce point est important, il montre que l'appréciation des résultats de mathématiques, contrairement à une idée répandue, obéit à un consensus moins bien établi, moins universel que l'appréciation en français. Les enfants y subissent donc des poussées moins cohérentes. Les corrélations entre les appréciations des facilités d'apprentissage et de l'intérêt manifesté sont corrélées elles aussi à .01. Cela ne veut pas dire que les valeurs attribuées à chaque enfant sont les mêmes, mais que les divergences d'opinions sont peu nombreuses et peu importantes.

Les effectifs des élèves de chaque catégorie sont assez faibles et, comme prévu, insuffisants pour conclure dans cette préexpérience : il est inutile par conséquent de chercher la distribution des 146 élèves (dont 22 ont redoublé) sur les 64 types d'évolutions possibles entre les quatre statuts étudiés : NE (non-échec)

EEF (échec électif en français), EEM (échec électif en mathématiques), EG (échec global). Toutefois, l'examen des matrices de transition donne une idée de la stabilité de ces groupes dans le temps : tableau 6, à titre d'exemple :

TABLEAU 6. — Stabilité des statuts scolaires.

janvier 1977 mars 1978	IG	EEM	EEF	NE	
EG	3	2	5	11	21
EEM	1	1	0	9	11
EEF	2	0	3	5	10
NE	6	4	11	83	104
	12	7	19	108	146

Par exemple, on voit que sur 7 élèves en EEM en janvier 1977, 4 ne sont plus en échec en mars 1978, 2 sont en échec total. Entre juin 1977 et mars 1978, 67,8 % des enfants ne changent pas de statut scolaire : la population la plus instable est E EEM.

Ceci tendrait à montrer que si les pourcentages d'enfants en échec électif sont stables à l'école primaire d'une année à l'autre, ils ne concernent pas les mêmes enfants

SOURCE D'INFORMATION « ENFANTS ».

— Le test d'acquisition scolaire choisi, malgré de nombreux inconvénients, était celui du Centre de psychologie appliquée pour les niveaux CE 1, CE 2, CM 1, CM 2. Il comprend un test mathématique de 32 à 40 questions et un test de langue française (vocabulaire, conjugaison, lecture, grammaire, expression, fonction des mots).

— Nous avons pu vérifier sa stabilité globale et son étalonnage global au cours de la période 1975-1979 sur des populations de 200 à 500 élèves par niveau.

— Nous nous sommes assurés de la corrélation qu'il pouvait avoir avec le travail ou les résultats de l'année scolaire, tels qu'ils sont obtenus par les maîtres

de l'école Jules-Michelet de Talence (2 classes par niveau)⁵ $r = 0,58$. Ce qui est assez bon, compte tenu du fait que le TAS est un QCM, ce qui introduit par définition un bruit important (voir [2] 77 tome 1).

Nous avons proposé ce test à un échantillon de 66 enfants répartis comme l'indique le tableau 7.

TABLEAU 7. — Echantillon de la préexpérience.

		Niveau				
		CE ₁	CE ₂	CM ₁	CM ₂	
statut scolaire	EEM	6	7	5	5	23
	E global	3	4	2	3	12
	N échec	6	12	6	7	31
		15	23	13	15	66

Le statut des enfants indiqué est celui fourni par le questionnaire aux maîtres qui a servi à former l'échantillon. Il est clair que les effectifs sont trop faibles pour qu'on puisse tirer des conclusions très précises sur les populations de chaque niveau, d'autant que les questions posées aux différents niveaux sont différentes.

Nous avons pu toutefois faire quelques comparaisons dans chaque niveau en regroupant les questions de mathématiques selon des critères classiques : numération, opérations, logique. Mais il s'agissait surtout de mettre au point les méthodes de traitement (cf. [2] 78 tome 2). Nous donnerons plus loin des résultats obtenus sur l'échantillon en vraie grandeur.

— Le test passé, nous avons réparti les élèves suivant l'écart de leurs résultats d'ensemble en mathématiques et en français dans trois groupes : NET (non en échec au TAS), EET (échec électif d'après les TAS) et EGT (échec global d'après les TAS en essayant divers critères (février 1978).

Ceci nous a permis de comparer la classification du questionnaire et celle du TAS : tableau 8.

L'effectif est trop faible pour conclure mais on ne peut pas rejeter l'hypothèse que les deux classifications sont indépendantes !

5. L'école Jules-Michelet de Talence est un établissement doté d'un statut et d'équipements spéciaux pour permettre l'observation clinique des classes.

TABLEAU 8. — Comparaison des statuts
d'après le questionnaire aux maîtres et d'après le TAS (préexpérience).

TAS \ Q	EGT	EET	NET	
NE	4	5	22	31
EE	3	5	14	22
EG	5	3	4	12
	12	13	40	65

Ceci pourrait être dû :

- soit au fait que les deux sources sont très imprécises et les moyens de détection trop bruyants ;
- soit qu'elles mesurent des échecs de type différent.

Quoiqu'il en soit, il n'était pas prudent de ne faire confiance qu'à la détection des EEE par l'intermédiaire des maîtres dans l'expérience en vraie grandeur. Il fallait conjuguer les deux sources sur l'ensemble de l'échantillon, ce qui allait alourdir sensiblement la recherche. On peut toutefois rassurer le lecteur : cette expérience en vraie grandeur nous a permis d'établir la valeur des questionnaires aux maîtres. Voici les tableaux obtenus avec 502 élèves du CM 1 et diverses définitions :

TABLEAU 9. — Comparaison TAS/Maîtres (expérience).

TAS \ Q	EG	EE	NE	I
EG	30	11	49	90
EE	13	15	87	64
NE	23	18	256	297
	66	44	392	502

$$(\chi^2 = 499 \text{ sign. } .01)$$

TAS \ Q	EG	EE	RT	I
EG	30	11	4	45
EE	13	15	36	64
RT	1	4	40	45
	44	30	80	154

$$(\chi^2 = 67 \text{ sign. } .01)$$

Première étude des réponses au test d'acquisitions scolaires.

Cette analyse très résumée et très sommaire porte sur une partie des données recueillies dans le cadre de l'A.T.P. du C.N.R.S.⁶ qui a suivi les travaux rapportés ci-dessus. Le questionnaire et le TAS concernent 289 élèves de CM 1 de 14 classes (juin 1978) (cf. [2] 79 tome 2).

6. A.T.P. : Action Thématique Programmée du Centre national de la recherche scientifique.

— La distribution de 42 questions du TAS sur les pourcentages de réussite montre trois groupes de questions (tableau 10). Q 1 : mal réussi et sur lequel beaucoup d'élèves se sont abstenus de répondre ; Q 2 : dont les taux de réussite se distribuent normalement ; Q 3 : exercices mieux réussis que les autres. L'analyse du contenu mathématique de ces questions par des méthodes que nous n'exposons pas ici semble fournir les indications suivantes :

Q 1 : numération, bases, petits nombres,

Q 3 : calcul, grands tableaux, diagrammes.

TABLEAU 10. — Histogramme des questions par pourcentage de réponses justes.

	C			D				A			
	21	27,20	33,40	39,60	45,80	52	58,20	64,40	70,60	76,80	83
7			21	23	3	5	4	9		16	1
10			27	26	6	8	13	15			2
11			34	33	29	14	25	24			12
18				39	37	22	30	28			17
19					40	35	31	38			20
						36		42			22
											41

Q_1
 Q_2
 Q_3

— L'analyse factorielle fait apparaître les faits suivants (entre bien des phénomènes que nous ne soulignerons pas ici) (fig. 2 : premier plan factoriel).

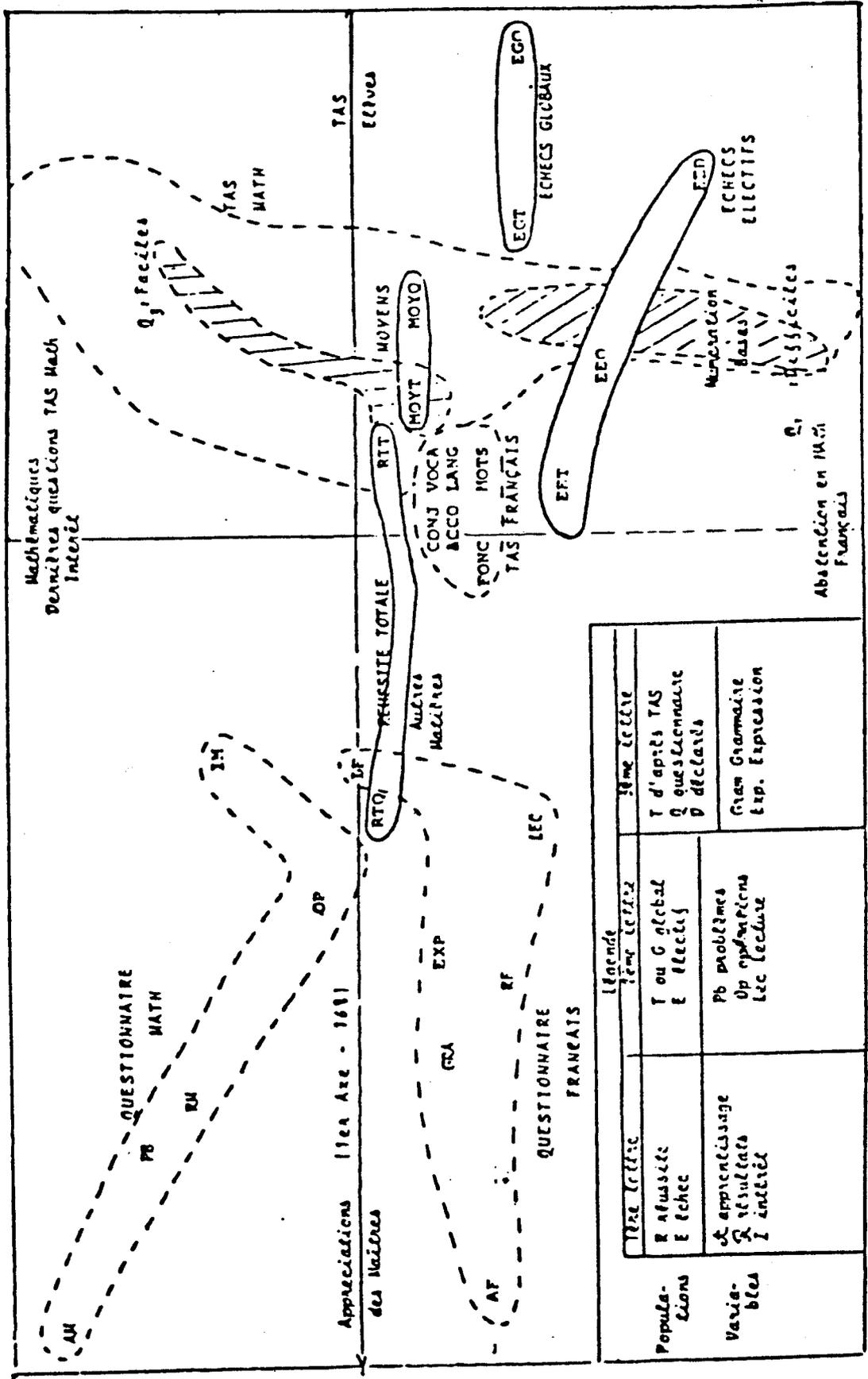


Fig. 2. - Position des variables dans le premier plan factoriel.

- Les sources « maître » et « élèves » donnent des renseignements assez différents. Néanmoins, toutes les variables « échecs électifs » sont dans la même région, assez proches, et ceci est vrai pour les sept premiers facteurs. (La variable calculée sur le questionnaire se trouve entre le résultat des tests et le jugement des maîtres.) Par conséquent, on peut désormais utiliser le questionnaire et le jugement des maîtres pour former une population en échec électif aux TAS.
- Les trois populations : échec électif en mathématiques, échec global et réussite globale se séparent bien dans les premiers plans factoriels : on peut dire que les trois groupes d'enfants *ont des comportements différents même en mathématiques*. L'analyse de ces comportements se poursuit actuellement et fait apparaître ceux qui sont plus caractéristiques des enfants en échec électif : les élèves en échec

électif s'abstiennent de répondre aux questions mathématiques du TAS, et ceci significativement plus que les autres enfants. C'est d'ailleurs probablement ce qui explique sans doute la proximité des questions du groupe Q 1 : numération et bases. Ils répondent de moins en moins bien ou s'abstiennent de plus en plus au cours du questionnaire (ce phénomène se produit plus pour eux que pour les enfants en échec global).

- Ils réussissent plutôt mieux les épreuves comportant des opérations et des algorithmes que les petits problèmes (mais les enfants en échec global ne réussissent pratiquement que les opérations).
- Ils réussissent assez mal les épreuves de numération (en base 4 et en base 10).
- Pas de comportement très spécifique relativement au langage mathématique, légère tendance à y être un peu moins habiles.
- Le caractère « moderne » ou « ancien » des questions paraît sans effet.

— Les élèves en échec électif sont moins motivés dans l'ensemble, même en français ; ceci dit, leur intérêt se porte presque exclusivement sur le français.

— L'appréciation des maîtres est plus proche des résultats au TAS en français qu'en mathématiques.

En français, les appréciations des maîtres sont plus dispersées que les résultats aux TAS, très voisins les uns des autres.

En mathématiques, la dispersion des résultats du test est beaucoup plus importante qu'en français ; par contre, celle des appréciations est du même ordre (mais dans une direction orthogonale).

Les résultats aux tests en mathématiques sont corrélés avec l'opposition français-mathématiques dans l'opinion des maîtres.

En première approche l'intérêt explique plus l'étalement des questions de mathématiques que les variables d'apprentissage et résultats, ou les sous-domaines problèmes et opérations.

Les maîtres reprochent aux EEE plus leurs difficultés d'apprentissage que leurs résultats, et l'opposition qu'ils font entre mathématiques et français correspond plus à des différences de comportements en mathématiques qu'à une réelle opposition entre les matières.

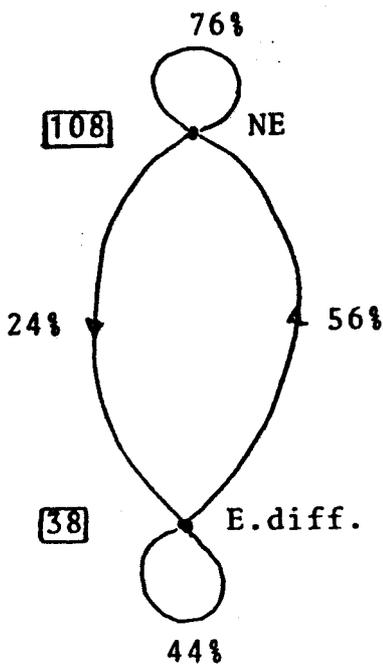
Conclusions de l'approche statistique.

1. Les échecs ou les difficultés des élèves doivent ils être analysés du point de vue des connaissances elles-mêmes ? C'est dans cette mesure qu'ils pourront être traités par des décisions didactiques, c'est-à-dire relatives à l'enseignement par opposition à des interventions non spécifiques, purement pédagogiques, ou psychologiques, ou autres.

La question se pose non seulement pour un grand domaine de connaissances comme les mathématiques, mais aussi ensuite pour des secteurs plus restreints comme les nombres, la numération, les problèmes... etc. Cette question est fondamentale : elle revient à se demander quels sont les objets de la didactique, non plus à la façon banale des enseignants : "que faut-il enseigner et comment ?", mais dans une problématique scientifique : "de quoi dépendent les acquisitions des savoirs ?"

Il faut donc examiner quelle est l'influence des difficultés ou des échecs dans des secteurs limites, échecs que nous appelons électifs, sur des échecs globaux ou dans des secteurs plus larges.

a) Le rôle des mathématiques dans la mise en échec : sur 146 élèves d'école primaire, une épreuve détermine que 38 sont en difficultés (D) ou en échec en janvier 1977.- en mars 1978 - 44 % seulement des élèves en échec le sont restés tandis que les autres 56 % avaient rejoint les élèves normaux, et que 24 % des élèves non en échec en



1977, le deviennent en 1978 (diagramme 1). Or, si l'on distribue les élèves en difficultés, en 3 catégories : Echecs Electifs en Français (EEF), Echec Electif en mathématiques (EEM) et Echec Scolaire Général (EG), (diagramme 2) il apparaît que moins de la moitié des élèves "normaux" (NE) qui entrent en échec (24 %) le font directement (10 %), alors que 14 % rencontrent d'abord un échec électif.:

Diagramme 1.

1/3 d'entre eux en Français (5 %) et près de 2 fois plus en mathématiques (9 %).

On peut penser que l'entrée en échec en même temps sur toutes les matières est due à des causes qui ne font guère intervenir le contenu des savoirs enseignés, mais que l'entrée en échec électif est due à des causes spécifiques (Conclusion 1)

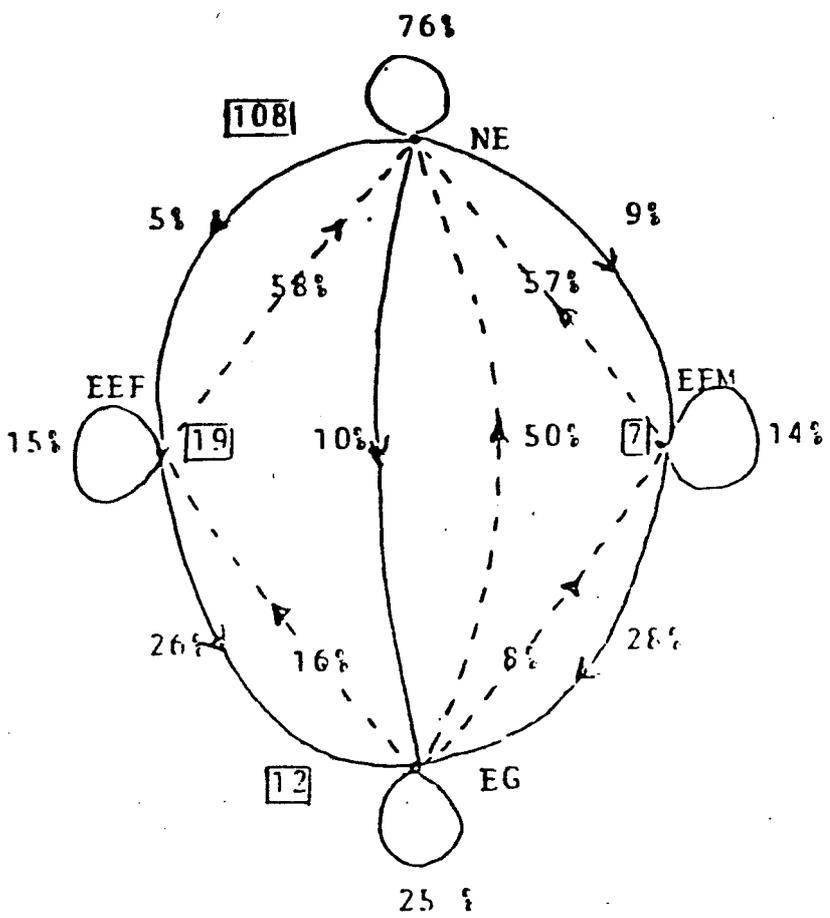


Diagramme 2.

Les trois cinquièmes des élèves en échec relèveraient donc de cette analyse. Pour tempérer cette opinion, il faut observer toutefois que le passage des élèves de l'échec global à la normale se fait principalement de façon directe, et cela concerne 50 % des enfants en échec général. A peine 16 % font des progrès sélectivement en mathématiques et 8% des progrès en Français :

.../...

Actuellement ce seraient les actions non spécifiques ou conjuguées qui réussiraient le mieux. Mais cette très faible circulation entre les classes d'échec (0 % dans les deux sens entre EEF et EEM), par rapport à la stabilité interne des groupes et à l'instabilité inter-groupes conduit à rejeter l'hypothèse que les enfants en échec électif suivraient le même sort que les enfants en échec général.

Il faut bien admettre que les élèves en échec électif sont plus facilement en échec général. Les EEF échouent en mathématiques 3 fois plus et les EEM échouent en Français 5 fois plus que les élèves normaux.

Donc, s'il faut examiner de près l'acquisition des savoirs, il y a peu de chances d'expliquer entièrement ces échecs par des considérations limitées à ces savoirs.

D'ailleurs l'instabilité interne des groupes en EE, surtout en mathématiques montre qu'au niveau de l'école primaire, l'échec électif n'est pas encore enkysté. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons choisi de l'observer à ce moment-là au cours de sa genèse.

b) La spécificité des comportements.

Un autre argument pour étudier l'échec en mathématiques résulte d'une étude plus fine des résultats des élèves aux épreuves de mathématiques : les élèves en Echec Général, ceux en Echec Electif et ceux en réussite générale ne s'y comportent pas de la même manière. Par exemple les EEE s'abstiennent davantage de répondre et sont moins motivés que les autres, même en français !, ils réussissent mieux que les autres les épreuves consistant en des algorithmes ou des opérations et réussissent plus mal les épreuves de numération...

L'échec électif tend donc à devenir spécifique, ce qui signifie que l'élève en échec électif échoue d'une façon différente sur des questions particulières et qu'il lui faudra des interventions elles aussi spécifiques (Conclusion 2).

On comprend que les études statistiques sont ici très vite limitées par des questions de coût.

.../...

2. Les élèves en difficulté élective en mathématiques auraient-ils d'autres troubles, psychologiques, affectifs ou d'une fonction instrumentale ou périphérique... qui expliqueraient l'échec et auxquels on pourrait remédier sans faire appel à la connaissance elle-même ?

Parmi une assez longue liste de tels troubles (psychomoteurs, temporels, fonction symbolique, langage, schéma corporel, rigidité... dysgnosie, etc...) les seuls dont la corrélation avec l'EE nous paraisse à peu près établi sont les troubles relationnels: Les élèves en échec électif ont plus souvent des troubles relationnels que les élèves en échec global. (Conclusion 3).

Il nous est vite apparu que la voie de recherche était trop empirique et trop coûteuse.

3. Les caractéristiques des maîtres et leur façon de travailler peuvent-elles expliquer les échecs ?

Les quelques questions que nous avons étudiées dans cette direction ont fait apparaître des faits curieux :

La corrélation entre les appréciations des maîtres sur les mêmes élèves est assez faible : l'appréciation des résultats de mathématiques n'obéit pas à un consensus aussi bien établi qu'en Français. Par contre, les pourcentages d'élèves des différentes catégories ne varient pas significativement d'un niveau scolaire à un autre, d'une école à une autre.

On pourrait s'attendre à ce que le nombre d'enfants en échec électif augmente avec l'âge de l'élève - ce n'est pas le cas -.

Tout se passe comme si les rapports entre les différents statuts étaient des caractéristiques constantes donc régulées du fonctionnement scolaire (Conclusion 4)

4. Nous venons d'évoquer l'ébauche d'une étude statistique des systèmes en présence : les maîtres, les élèves, les connaissances, le milieu - et d'en montrer les limites. Nous aurions pu continuer par la revue des apports considérables -

qui concernent les interactions de deux des systèmes en présence : "maître-élève" ou "élève-connaissance" voire "élève-milieu"... cependant, les résultats que nous venons de rappeler indiquaient qu'il fallait reprendre ces travaux, quelle qu'en soit l'origine, sur la base d'analyses spécifiquement didactiques : il fallait étudier les rapports, les régulations maître-élève-milieu (comprenant le plus souvent une situation problème) dans ce qu'ils avaient de spécifique de la connaissance visée.

5. Conclusion. Une série s'observations cliniques d'enfants en échec à l'occasion de soutiens assez longs a permis de mieux lire ce que nous suggéraient nos résultats :

1°) C'est au coeur de l'activité cognitive qu'il faut observer la genèse de la réussite ou de l'échec

2°) Chaque connaissance se construit lors de la prise du contrôle par l'élève d'une situation spécifique de cette connaissance. Selon ce que ce contrôle exige de l'élève, la connaissance recevra un sens plus ou moins correct, riche, etc...

3°) Mais la partie la plus délicate concerne la dévolution par le maître à l'élève de ces situations "d'apprentissage", les interventions didactiques qui l'accompagnent (car elles aussi sont souvent spécifiques du savoir visé) et les pressions qu'elles expriment. Cette dévolution passe en général par une négociation d'une sorte de "contrat idéal" en ce sens qu'il ne peut jamais être réellement explicité, ni achevé, ni respecté.

Approche clinique des échecs électifs en mathématiques.

1. Introduction.

Nous avons étudié neuf cas, dont cinq pendant les trois premières années. La plupart de ces observations n'ont été possibles que grâce à l'existence du statut spécial de l'école Jules Michelet car il est difficile concrètement de rencontrer des enfants en échec électif à partir de la clientèle des orthophonistes.

Chacun de ces cas a été suivi par une orthophoniste de 3ème année. Elle rédigeait in extenso, en s'aidant des enregistrements audio-visuels, les protocoles d'intervention auprès des élèves, ainsi qu'un compte rendu assez détaillé des séances de préparation et d'analyse de l'équipe. Cette petite équipe était composée du psychologue scolaire (J. PERES), du cadreur-régisseur (qui était en même temps le directeur de l'école J. Michelet), de l'intervenant (M. CASTELLI ou moi-même, dans la plupart des cas) et de deux autres observateurs.

La hiérarchie des objectifs et les méthodes mises en oeuvre pour s'assurer d'une certaine objectivité et du respect des règles déontologiques qui s'imposent, sont exposées dans [2, 1978, tome IV, AMIRAULT C. CHERET M.].

Dans chaque cas, l'enfant a suivi huit séances (20 dans un seul cas) de une heure consacrée en partie au soutien, en partie au diagnostic, et en partie (variable) à des activités assez proches d'une rééducation. Chaque cas a fait l'objet d'un mémoire où sont consignées les analyses a priori, les interventions, les précisions et les conclusions "à chaud".

Les comptes rendus témoignent des échecs comme des réussites et des hésitations des chercheurs autant que de celles des praticiens (aux rôles interchangeable ici). Certains ont été repris ensuite (après au moins trois ans) et les séances les plus importantes ont été réanalysées et les bandes vidéo révisionnées, pour essayer de dégager

les faits essentiels de l'intervention.

Pour le mémoire, la méthode d'appui des déclarations était l'attestation : il fallait que chaque fait énoncé s'appuie sur des indices assez nombreux repérés dans le texte des protocoles, et que l'observateur recherche si des indices contraires n'étaient pas présents.

Lors de l'analyse a posteriori, nous avons tenté la confrontation des faits ainsi établis avec les hypothèses que nous émettions.

Il s'agissait si possible de trouver des caractères communs à ces différents échecs électifs, de les différencier et de les expliquer en apportant la preuve que l'intervention avait agi sur les variables déclarées avec un effet observable ! Ambitieux programme dont nous allons examiner le succès dans le meilleur cas de réussite, celui de Gaël.

La méthode principale est l'analyse des situations dont nous allons d'abord donner un exemple "critique".

2. La méthode d'analyse des situations : un exemple.

Analysons par exemple la rééducation décrite par F. JAULIN-MANNONI dans "Le Pourquoi en Mathématiques" : la rééducation de Nadine.

L'auteur étudie dans cet ouvrage diverses rééducations relatives à la notion de produit et applique des théories générales d'apprentissage à l'enseignement de la commutativité.

1. Résumé de la rééducation (voir "texte en notes")

Dans la première séance des huit consacrées à Nadine, F. JAULIN-MANNONI associe le mot "fois" à des représentations de dessins identiques. La 2ème séance familiarise l'enfant avec l'ensemble produit : (objets - couleurs) et ses dispositions spatiales ; et permet d'associer

.../...

à celles-ci des expressions de la forme "n fois a" (par exemple : 3 fois 6).

F. JAULIN-MANNONI reprend dans la troisième séance des circonstances tout-à-fait identiques à la deuxième.

La 4ème séance a pour objet l'apprentissage de l'association de certaines dispositions à des dessins et des changements de disposition aux changements de dessins. A la fin de cette séance, la rééducatrice constate que l'enfant a des difficultés avec la conservation des quantités, allant jusqu'à la perte de cette notion de conservation. Nadine sait reproduire des actions, mais n'arrive à aucune constatation.

La séance suivante reproduit les activités de la précédente sans que le problème soit résolu. Les 6ème et 7ème séances ne sont pas rapportées.

Dans la 8ème séance, l'enfant énonce la commutativité et la justifie uniquement par l'apprentissage des tables. Elle généralise la propriété à d'autres opérations comme la soustraction mais ne recourt pas à des vérifications.

2. Etude de la première séance

A. Première séquence

Item (1)

x Les faits.

La rééducatrice demande : "dessine 3 fois a"

L'enfant écrit : a - a - a ...

x Commentaire

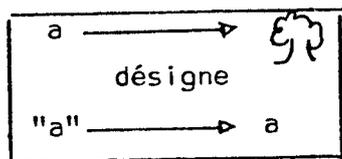
La rééducatrice pense que le mot "dessine" suffit à signifier à l'enfant qu'on veut obtenir d'elle non pas trois copies de la lettre "a", mais 3 reproductions du dessin désigné par la lettre "a".

Pour obtenir la réponse que fait Nadine, elle aurait sans doute demandé : "écris" trois fois a"

Or, en l'absence de toute motivation ou signification, on peut admettre que l'enfant qualifie la calligraphie de dessin.

Nous ignorons si une activité préalable permettrait de comprendre le rapport signifiant - signifié de la lettre a avec le dessin d'un arbre. En l'absence de cette activité et d'une discrimination entre

écrit (non prononcé) et dessine, rien n'indique à l'enfant que l'on se trouve en présence de plusieurs objets : un arbre (un vrai), un dessin (symbolique), une lettre qui le désigne, le phénomène [a] qui désigne le dessin en vertu d'une convention de désignation, le phénomène [a] qui désigne la lettre elle-même et que l'on pourrait écrire "a" ou désigner par "la lettre a".



La confusion n'a rien de surprenant. Mais elle n'est pas relevée par la rééducatrice. L'enfant peut supposer qu'elle a bien répondu.

Or, il y a une manière très simple de lever cette ambiguïté, manière qui consisterait à redonner la consigne dans un langage directement compréhensible et qui aurait pu être : "je ne t'ai pas demandé d'écrire trois fois la lettre a, mais de dessiner trois fois ce que j'appelle "a" ".

Item (2)

* Les faits

"Dessine trois fois Nadine" demande la rééducatrice.

L'enfant dessine alors 3 personnages.

F. Jaulin-Mannoni ne précise pas si ce sont trois dessins différents que fait l'enfant.

* Commentaire

Le mot "Nadine" ne se dessine pas, mais s'écrit.

S'il est fréquent que les enfants et les maîtres utilisent des termes de dessin pour les lettres seules (fais un s, dessine les pleins....) ils associent toujours au mot le terme "écrit". Il est clair pour Nadine que "dessine" ne peut être associé à l'écriture du mot "Nadine", puisque l'objet "Nadine" est représentable par un dessin.

La réaction aurait été la même si on avait dit : "dessine trois bonshommes ou trois chiens" Le rapport signifiant-signifié est clair mais renvoie à un objet réel unique, ce qui va d'ailleurs fausser la situation.

.../...

Il n'y a toujours pas de renforcements. L'enfant peut penser qu'elle a bien répondu. Elle n'a aucune raison de faire une comparaison entre le premier et le deuxième item ; et de plus elle n'apprend rien de ce second item.

Item (3)

x Les faits

La rééducatrice : "voici René  Dessine 3 fois René".
L'enfant dessine 3 bonshommes.

x Commentaire

Nous retrouvons ici le même exercice que précédemment, mais le signifié est devenu un dessin et le signifiant le nom d'un personnage absent.

L'enfant a-t-il tiré parti de l'item précédent en en "transférant" le rapport signifiant-signifié ? Nous pensons que non. Posée d'emblée, la question (3) : "dessine 3 fois René" aurait conduit à la réponse (3) pour les raisons invoquées ci-dessus (dessiner René n'est pas la même chose qu'écrire "René")

La discrimination repose sur la distinction entre "écris" et "dessine" un mot.

Aucune opinion n'est communiquée à l'enfant dans son travail, mais tout lui laisse penser que ce que la rééducatrice attend de lui correspond à ce qu'il dit.

Si F. Jaulin-Mannoni avait dit : "fait trois dessins de Nadine ou de René", cela aurait eu le même sens, et le mot "fois" disparaissait : Donc le mot "fois" est là de façon superflue comme une bizarrerie de langage, mais il n'a aucune raison pour apparaître comme signifiant une opération véritable.

Item (4)

x Les faits.

Nous revenons à (1) qui n'est toujours pas compris :
"dessine 3 fois a"
Nadine écrit a - a - a -

.../...

* Commentaire.

Il est clair que rien n'est venu changer l'interprétation donnée par l'enfant en première consigne.

Et ceci malgré un fait nouveau : la rééducatrice a posé 2 fois de suite la même question, or généralement c'est une indication signifiant que la réponse donnée n'est pas celle attendue.

Il est possible que si l'on reposait la même question à Nadine, elle répondrait correctement. Si tel était le cas, cela prouverait que sa réponse fautive était seulement due à l'ambiguïté de la question ou au fait qu'on ne lui a donné aucune correction concernant les erreurs précédentes.

Il nous semble difficile de croire qu'à l'âge de Nadine, on ne puisse pas concevoir l'usage d'une désignation par une lettre ; et si tel était le cas pour Nadine, il est alors étonnant qu'elle puisse l'apprendre de cette façon.

L'enfant peut très bien penser que l'activité porte sur le nombre 3, puisque jusqu'à présent, il n'y a eu aucun Feed Back lui permettant de s'apercevoir qu'elle s'est trompée.

Nadine n'a même rien appris. La seule chose qu'elle ait faite, c'est de dessiner trois fois un signe, ce qui pour elle n'a pas de sens.

Cela va prendre du sens à partir du moment où elle va comprendre que ce n'était peut-être pas cela qui lui était demandé. Et à travers ce que la rééducatrice a dit, elle va chercher à comprendre ce qu'il fallait effectivement faire.

Item (5)

* Les faits.

La rééducatrice : voici a :  Dessine 3 fois a"
Nadine dessine 3 bonshommes.

* Commentaire.

La question est la même qu'en (3) et elle appelle visiblement la même réponse. L'enfant sent intuitivement qu'elle a commis une erreur quelque part au cours des questions précédentes.

La seule différence entre les item (3) et (5) réside dans le changement de désignation : "a" a remplacé "René".

Cette réponse est celle qui indique à l'enfant sur quoi portait le problème ; c'est sur l'usage de la lettre a. Si Nadine

n'était pas capable de concevoir la lettre comme symbole d'un dessin, elle ne pourrait pas simplement à partir de cette 5ème question, savoir ce qu'elle va devoir répondre à la question suivante (6) et elle pourrait de nouveau dessiner 3 bonshommes.

Item (6)

* Les faits.

Retour à (1) : "dessine 3 fois a"

L'enfant dessine 3 arbres.

* Commentaire.

Lorsqu'on lui demande pour la troisième fois : "dessine 3 fois a" Nadine pourrait supposer que ce qu'elle avait fait tout d'abord (a - a - a) était correct. Mais devant l'insistance de la rééducatrice, elle modifie sa réponse.

La rééducatrice a d'autre part dû désigner l'arbre pour montrer que la question n'était pas la même qu'en (5). Et c'est la seule différence entre les items (5) et (6).

Or, c'est une règle couramment pratiquée de façon implicite suivant les rééducateurs : il s'agit de poser deux fois la même question avec une petite différence et les réponses doivent se différencier sur ce qui différencie les questions.

En appliquant ce simple principe, Nadine peut modifier sa réponse et passer du dessin du bonhomme au dessin de l'arbre.

- Discussion de cette 1ère séquence et de la remarque de l'auteur.

a) *Décision initiale de la rééducatrice de ne pas lever l'ambiguïté.*

Il est exact que cette représentation symbolique comporte des ambiguïtés que le contexte devrait lever en partie.

F. Jaulin-Mannoni a raison lorsqu'elle dit "dans les situations où l'incompréhension tient à ce que l'enfant ne saisit pas ce non dit, nous ne pensons pas qu'on gagne à le verbaliser ou à l'explicitier".

Mais cela n'implique pas que l'on ait quelque intérêt à maintenir une ambiguïté fortuite lorsqu'elle n'est la source d'aucune réflexion ou prise de conscience intéressante.

F. Jaulin-Mannoni aurait pu préciser : "j'appelle cet arbre a, ou bien j'appelle ce dessin a, b... Dessine 3 fois a"

Et devant la première erreur (1), il aurait fallu rectifier tout de suite (si la confusion s'était tout de même produite) : "je ne te demande pas d'écrire trois fois la lettre a, mais 3 fois ce que représente "a". Et l'ambiguïté aurait été levée.

Une ambiguïté n'a d'intérêt que dans la mesure où elle est source de questions intéressantes qui vont faire progresser l'enfant.

b) *Règle d'apprentissage utilisée par la rééducatrice.*

Aucun problème général n'est posé ; la rééducation se déroule question par question et les questions ne sont pas enchaînées les unes aux autres. Ainsi l'enfant ne peut rien investir et résoudre en donnant une signification globale à son action.

F. Jaulin-Mannoni introduit pour des raisons que nous ignorons une codification avec des lettres, sans que l'enfant puisse soupçonner les rapports entre ces lettres et les objets. Et c'est ce qui bloque l'enfant.

Les questions posées sont pour l'enfant pratiquement indépendantes les unes des autres et ne peuvent être considérées comme dépendantes que dans la mesure où Nadine peut saisir l'intention didactique de la rééducatrice, comme nous l'avons vu précédemment.

En aucun cas, la représentation de symbole par une lettre n'apparaît comme motivée.

Chaque question est supposée suffisamment simple pour que l'enfant y réponde tout de suite et directement. Donc aucune ne concerne vraiment l'objet de l'apprentissage (il n'y a d'ailleurs pour aucune ni apport d'information ni renforcement direct). L'apprentissage est supposé se faire à travers un rapprochement de questions entre elles, rapprochement consécutif à l'indication indirecte qu'une réponse était fautive.

Le point sur lequel porte l'apprentissage est à construire à partir des questions voisines (c'est ce qui est parfois appelé "exercices structuraux") par une analyse de ressemblances et de différences formelles. La bonne réponse est progressivement associée à la question à partir d'une réponse quelconque de l'enfant par des substitutions successives. Chaque substitution est justifiée par le sens de chaque question, mais l'association elle-même : question - bonne réponse est obtenue formellement. Elle n'est dotée d'aucune signification particulière à moins que l'enfant ne la connaisse déjà, ou ne la reconnaisse.

.../...

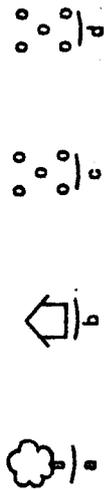
OBSERVATION DE NADINE

Nadine est une enfant dyspraxique dont les troubles ont été dépiétés très tôt (avant 7 ans) car elle n'arrivait pas à apprendre à compter.

La rééducation lui a permis d'échapper à la classe de perfectionnement. Au moment de l'observation suivante, elle a 9 ans et est en CE₂. Nous l'avons suivie par la suite jusqu'en CM₁, où elle a pu suivre normalement en classe.

PREMIERE SEANCE (*)

Dans un premier temps, nous travaillons le mot « fois » sous la forme :

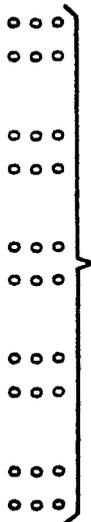
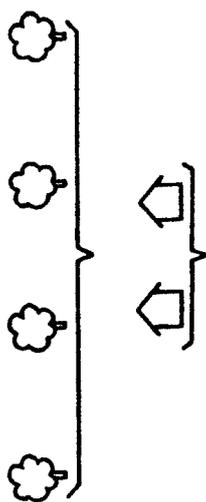


- (1) « Dessine 3 fois a » elle écrit : a a a.
- (2) Nous lui demandons : « dessine 3 fois Nadine » : elle dessine 3 personnages.
- (3) Puis : « Voici René ». Dessine 3 fois René : elle dessine 3 bonshommes.
- (4) Nous revenons à (1) qui n'est toujours pas compris.
- (5) « Voici a : ». Dessine 3 fois a : elle dessine 3 bonshommes.
- (6) Retour à (1). Elle dessine 3 arbres.

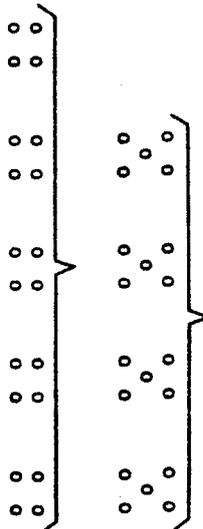
(*) Il ne s'agit bien entendu pas de la « première séance » de rééducation, puisque nous connaissons Nadine depuis plusieurs années.

Remarque : Tout code, toute représentation symbolique comporte un non dit sur lequel il faut être d'accord si on veut se comprendre. Dans les situations où l'incompréhension tient à ce que l'enfant ne saisit par ce non dit, nous ne pensons pas qu'on gagne à le verbaliser ou à l'explicitier. Nous aurions pu « montrer » à Nadine ce que nous attendions d'elle en lui demandant de dessiner 3 fois a, il n'est pas certain qu'elle aurait compris, il est probable aussi qu'elle aurait de toutes manières oublié. En lui proposant : « Dessine 3 fois Nadine », nous lui fournissions une situation dont elle saisit les données implicites (puisque elle n'a pas l'idée d'écrire « Nadine, Nadine, Nadine »). A partir de là, il est possible de revenir par étapes à la situation initiale qui prend pour elle un sens.

(7) Après avoir demandé de dessiner (4 fois b), (2 fois c), (3 fois d), nous lui proposons les dessins suivants en lui demandant à quelle consigne ils correspondent :



Nous introduisons également des nombres qui n'ont pas été représentés en (1) sous la forme :



etc.
Elle n'a aucune difficulté à réussir ces exercices.

(8) Nous lui donnons 12 pions en lui demandant de trouver comment on pourrait les disposer en tas pour avoir des situations ainsi exprimables en termes de « fois ». Elle semble comprendre la consigne : « tu fais des tas, il faut que ce soit comme tout à l'heure, que tu puisses écrire « fois », mais ne parvient pas à trouver de solutions.

(9) Nous dessinons 4 objets (une maison, un arbre, une fleur, un soleil) et nous disposons de 6 couleurs. Elle énumère tous les dessins possibles en suivant l'ordre : maison rouge, arbre rouge, fleur rouge, soleil rouge, maison bleue, etc.
Nous les exécutons au fur et à mesure sur des papiers mobiles que nous lui donnons ensuite en vrac en en retirant un. Elle trouve quel est celui qui manque.

Tout se passe comme si la rééducatrice jouait à : "devinez à quoi je pense". Et la rareté des Feed-Backs, la faiblesse de la quantité d'informations approtée à chaque fois, l'ambiguïté de la question justifie cette opinion.

Ce type d'apprentissage est du conditionnement : il résulte d'un enseignement formel qui ne dépend pas du contenu. L'enseignant connaît ce qu'il veut enseigner et il va faire associer ce contenu à des questions posées, en approuvant les bonnes réponses et en désapprouvant les mauvaises. C'est l'apprentissage skinnérien (cf Skinner : Behavior of organisms - New York - 1938) dont le schéma est le suivant : information - question - réponse - renforcement.

Si l'on renforce suffisamment les bonnes réponses, on obtient celles-ci comme réponses privilégiées.

La séquence information - question - réponse - renforcement peut-être retrouvée au second degré ainsi que nous l'avons montré plus haut : les items (1), (2), (3) apportent à l'enfant une information amorphe (c'est-à-dire sans question posée). Cette information fera l'objet d'une réanalyse si une question est posée.

Le quatrième item est un renforcement négatif au premier item puisque la rééducatrice pose deux fois la même question, la première réponse ayant été fausse. Mais l'enfant ne sait toujours pas quelle est la question proposée à son apprentissage.

La question se présente sous une forme indirecte dans l'item (5) et sera alors susceptible de fournir des informations sur ce qui est l'objet de la question : sous entendu "voici a dans un cas légèrement différent, dessine 3 fois a".

Dans ce cas, la réponse est à chercher parmi les réponses déjà données et la question ressemble assez à la question initiale. Elle n'en diffère que par un détail : la réponse demandée. Et la réponse effective de l'enfant apparaît en (6).

Cette méthode d'apprentissage relève du conditionnement pur et simple alambiqué de surcroît par des ruses sans objet quant au fond.

Par contre, ce qui à chaque instant est appris à l'enfant est de décoder les intentions didactiques plus que la situation envisagée et revient à "devinez ce à quoi je pense".

Et l'enfant répond par association, non parce que cela correspond à une question qu'elle se poserait, ou parce que c'est la meilleure solution à un problème, mais parce que c'est la meilleure solution à son problème qui est celui de savoir ce que pense la rééducatrice.

c) *Qu'a appris Nadine ?*

Nous ne pensons pas que Nadine ait appris quelque chose sur le rôle de la lettre par rapport au dessin.

Elle a simplement joué à : "devinez ce que je pense".

d) L'erreur mathématique.

Quel était donc l'intérêt d'introduire les lettres a, b... ? Quel rapport avaient-elles avec le mot "fois" ? F. Jaulin-Mannoni ne le précise pas.

Elle aurait pu dire : dessine 3 arbres, 3 maisons, 3 groupes de 5 objets.... On aurait vu alors si l'enfant savait faire cela ou non.

Mais elle veut introduire le mot "fois" à partir de l'activité de l'enfant. Peut-être ne peut-elle pas dire "dessine une fois 3 arbres" puis "dessine 3 fois cinq objets", "dessine une fois ce bonhomme" parce que de telles expressions ne sont pas d'usage courant en France et parce qu' l'expression "dessine une fois ces 3 arbres" met trop en évidence que le mot "fois" se rapporte à l'action et non à son résultat.

Peut-être aussi la lettre servira-t-elle de variable, variable qui permettra de passer "progressivement" (!) d'un objet à un groupe d'objets ou à un nombre. Cette lettre devient l'occasion d'un transfert d'activités et de significations.

Cette initiative va avoir des conséquences fâcheuses sur la validité de la connaissance enseignée car dans cette première séquence s'est glissé une erreur grave qui va se révéler dans la deuxième partie de la séance de rééducation.

B. DEUXIEME SEQUENCE*Item (7)** Les faits.

"Après avoir demandé de dessiner (4 fois b) (2 fois c) (3 fois 6) nous lui proposons les dessins suivants en lui demandant à quelle con-
signe ils correspondent...."

.../...

x Commentaire

Les séquences qui consistent à dessiner 4 fois b (4 maisons) 2 fois c (2 fois 5 jetons), 3 fois 6 obéissent aux mêmes règles d'apprentissage par conditionnement et transfert de désignation.

Elles induisent d'ailleurs une première erreur. Le signe 6 ne désigne pas une collection de six jetons de la même façon que la lettre a désigné le dessin d'un arbre. Le signe 6 désigne le cardinal ou une certaine propriété de la collection mais non la collection elle-même.

L'erreur plus grave que nous avons évoquée antérieurement est la suivante : il y a les objets représentés par des dessins et les dessins eux-mêmes. Il faut différencier ce que l'on compte :

exemple : Nous dessinons 3 arbres ; nous obtenons trois dessins. Si ces 3 arbres représentent le même arbre unique et bien déterminé, il y a un seul arbre et trois dessins du même arbre.

Il faut différencier : dessiner un arbre trois fois (c'est toujours le même arbre) et 1 fois trois arbres (ce sont des arbres différents).

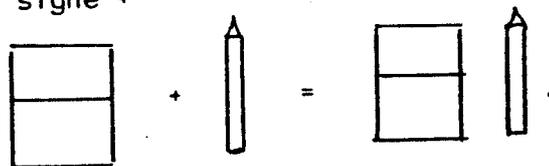
Quand l'enfant dessine 4 fois c, si c est un dessin de 5 jetons, on peut supposer que chaque jeton de l'ensemble c représente un vrai jeton différent des autres et que le dessin de 5 jetons représente effectivement 5 jetons. En dessinant 4 fois c, ce que nous obtenons est un ensemble de 20 dessins de jetons qui représentent en réalité 5 jetons.

Dessiner 4 fois c, ce n'est pas le multiplier par 4. Et l'enfant peut d'autant moins le croire que la rééducatrice a pris comme exemple fondamental sa propre représentation à elle.

Il est peu probable qu'après de tels exemples l'enfant puisse concevoir une manipulation et une formulation correctement associées.

x Les références.

Nous avons relevé ce type d'erreur en ce qui concerne le fait de "compter" en plusieurs endroits dans les ouvrages de F. Jaulin-Mannoni dessinait (in "rééducation pratique du calcul") une gomme et un crayon reliés par un signe +, ceci étant égal à une gomme et un crayon non reliés par un signe +



.../...

Si nous considérons les objets, nous ne voyons pas pourquoi il serait nécessaire de les dessiner deux fois en les reliant par le signe =
Si ce sont les dessins des objets, on ne voit pas très bien l'utilité du signe + entre eux et à quoi il peut correspondre comme opération.

Si on peut le supprimer d'un côté de l'égalité et pas de l'autre, c'est qu'il ne signifie rien.

Si maintenant, ce que F. Jautin-Mannoni semble laisser entendre, gomme et crayon sont là pour représenter des nombres, ils concrétisent des variables, et ceci est faux : la preuve en est que $1 + 6$ n'est pas égal à 16.

F. Jautin-Mannoni commet une erreur identique sur ce qu'est "compter". Lorsque l'enfant dessine deux fois c, la réponse obtenue (2 fois c) ne sera pas égale à 2 fois 5. En effet quand nous disons il y a deux fois 5, cela ne signifie pas qu'il y ait deux fois le nombre 5, mais qu'il y a 5 objets, puis 5 autres objets différents des premiers. C'est seulement là que nous aurons $2 \text{ fois } 5 = 10$. Sinon, nous retrouvons le "fois" quand on dit : j'ai mis mon manteau 2 fois (ce qui ne fait pas 2 manteaux).

Compter plusieurs fois la même chose, ce n'est pas compter plusieurs choses.

Ainsi, sur le sens du mot "fois", F. Jautin-Mannoni introduit une erreur capitale. Tout ce qu'elle peut annoncer, c'est une pratique. Nadine va essayer de deviner ce qu'on attend d'elle. Elle va dessiner 2 fois 5. Mais si on lui demande d'établir une situation de référence et de rassembler 2 fois 5 objets, nous ne voyons pas pourquoi elle ne mettrait pas 2 fois les mêmes 5 objets : 2 fois 5, ça fait 5. Si Nadine ne le fait pas, c'est parce qu'elle a du bon sens et non pas parce qu'on lui a appris ce que veut dire 2 fois 5.

item (8)

x Les faits

Nous lui donnons 12 pions en lui demandant de trouver comment on pourrait les disposer en tas pour avoir des situations ainsi exprimables en termes de "fois".

Nadine semble comprendre la consigne : "tu fais des tas, il faut que ce soit comme tout à l'heure, que tu puisses écrire "fois" " mais ne parvient pas à trouver de solution.

.../...

* Le commentaire

Ainsi que nous le prévoyions ci-dessus (11.4.1) Nadine ne peut pas associer une situation réelle au sens compris du mot "fais".

Comment pourrait-elle faire plusieurs fois le même tas ? Si on lui avait dit "fais 4 tas de 5" elle aurait pu le faire.

Commentaires sur l'apprentissage.

F. Jaulin-Mannoni semble croire que la vue d'une situation suffise à ce qu'elle puisse être reproduite.

Et la seule chose à comprendre en ce qui concerne le "n fois x" est une organisation des objets dans l'espace.

Si Nadine avait compris formellement ce que veut dire le terme "fois", il n'est pas sûr qu'elle aurait su répondre à cette question (8)

C. TROISIEME SEQUENCE

Item (9)

* Les faits.

"Nous dessinons 4 objets (une maison, un arbre, une fleur, un soleil) et nous disposons de 6 couleurs. Elle énumère tous les dessins possibles en suivant l'ordre, maison rouge, arbre rouge, fleur rouge, soleil rouge, maison bleue..."

Nous les exécutons au fur et à mesure sur des papiers mobiles que nous lui donnons ensuite en vrac en en retirant un. Elle trouve quel est celui qui manque.

* Commentaire.

F. Jaulin-Mannoni change complètement de méthode d'apprentissage. Elle va maintenant remonter à la structure de l'ensemble produit qui dans une présentation moderne sert de base à la présentation du produit des naturels : le produit de 2 nombres naturels a et b est le cardinal (axb) d'un ensemble produit de 2 ensembles qui ont respectivement pour cardinal a et b.

Nadine montre qu'elle maîtrise très bien un ensemble produit comportant 24 éléments, en réussissant le jeu de l'objet caché (jeu de Dienès).

.../...

3. COURTE ETUDE DES AUTRES SEANCES ET COMMENTAIRES

A. DEUXIEME SEANCE

Dans cette seconde séance, l'ensemble produit introduit au cours de la première va fonctionner comme structure pour guider les questions posées à l'élève. Cette seconde séance représente un renversement total par rapport à la première.

Item (1)

Les objets dont on parle sont non seulement parfaitement distincts, mais encore désignés chacun par un couple de caractères qui eux, concrétisent des groupements possibles (6 fois 4 ou 4 fois 6)

Item (2)

Les problèmes posés sont à la fois corrects du point de vue mathématique et motivés en ce sens que l'enfant formule un pronostic ou une prévision donnés sans voir le tas, d'après la structure de l'ensemble produit et qui peut être vérifiée après coup.

Item (3)

Du point de vue de l'apprentissage, cette situation permet de restaurer un sens correct à l'expression "6 fois 3, 3 fois 6", et il ne semble pas que Nadine rencontre des difficultés à effectuer ces actions de groupements ainsi que nous l'avions pensé.

Si elle a rencontré des difficultés à la séance précédente, c'est sans doute à cause de la bizarrerie de la situation.

Le dessin des groupements obtenus est réalisé par Nadine sans difficulté, même dans le cas où il s'agit d'anticiper le résultat d'une opération complexe tel le passage de [A] à [B] (voir annexe p 161-162 le détail).

Nadine ne sait pas faire l'opération inverse. Elle a su dire que $3 \text{ fois } 6 = 6 \text{ fois } 3$, mais non que $6 \text{ fois } 3 \text{ égal à } 3 \text{ fois } 6$.

Commentaire.

La seconde séance consiste en une activité dans laquelle l'ensemble produit fonctionnera comme structure. F. Jaulin-Mannoni ne vapas parler à Nadine "d'ensemble produit", ni lui demander ce qu'il y a à l'intersection d'une ligne et d'une colonne.

L'enfant regroupe et semble voir les différentes manières d'envisager la structure de l'ensemble produit, ce qui est le but de ces manipulations.

Cependant, nous ferons remarquer que le pourquoi de ces

activités échappe totalement à l'enfant. F. J. Mannoni lui demande "devine" et le seul moyen de répondre pour Nadine est, non pas une adéquation à un projet, mais une devinette : chercher ce qu'il faut répondre en tenant compte de ce qui a été approuvé.

Ce problème est simplifié par le fait qu'il y a une structure : si il y avait 24 objets différents, il serait très difficile à l'enfant de reconnaître ceux qui ont été cochés.

Nadine utilise ici une propriété fondamentale de la classification qui est l'économie d'informations : elle dispose de 4 objets et de 6 couleurs donc doit mémoriser 10 informations et avec celles-ci retrouver les 24 possibilités.

C. TROISIEME SEANCE.

Items (1) (2) (3)

La rééducatrice reprend le travail fait au cours de la deuxième séance. L'échec de Nadine sur le troisième item ne semble pas lui paraître inquiétant. Elle espère sans doute, en reprenant la manipulation qui a échoué, obtenir la réponse souhaitée : si une transformation permet de disposer le même ensemble de 3 tas de 6 en 6 tas de trois, elle doit permettre de passer d'un groupement de 6 tas de 3 en 3 tas de 6.

En fait, Nadine a su dire que 3 tas de 6 équivalaient à 6 tas de 3 parce que cela correspondait aux sens des activités antérieures, mais dès qu'il s'agit de faire une abstraction réfléchissante, c'est-à-dire conclure sur la réversibilité de 2 transformations, elle échoue. Nadine perd même la possibilité de répondre à nouveau correctement dans le cas d'une seule transformation, dès qu'elle a dû examiner la composition qui est le résultat de deux fois la même transformation.

Au cours de ces trois premiers items, F. Jaulin-Mannoni reprend sous des formes diverses ce qui avait été fait au cours de la deuxième séance en y rajoutant denouveaux habillages (items 2.3) avec des objets identifiés individuellement.

Item (4)

Les objets sont maintenant représentés par des allumettes. Ainsi, les propriétés marginales forme-couleur qui permettaient l'identification de chaque objet disparaissent. Dès ce moment, l'enfant échoue au passage d'une disposition à l'autre. On peut supposer que Nadine ne réussissait jusqu'à présent que par une représentation mentale de l'ensemble objet par objet.

F. Jaulin-Mannoni veut justifier la commutativité en deman-

dant à l'enfant de la constater. Mais si on demande à Nadine cette constatation, elle n'a rien à prouver et doit donc apprendre sans qu'il y ait nécessité de compréhension : on lui interdit alors de se comporter en mathématicienne.

D'autre part, le fait de transporter des allumettes d'un endroit à un autre ne constitue pas une preuve de la commutativité de la multiplication. Car si Nadine ne sait pas par avance que le nombre des allumettes se conserve au cours des déplacements (dans le plan) que les objets vont se conserver en tant que qualités, elle ne pourra rien constater.

Le raisonnement que devra faire Nadine s'appuie sur la notion de conservation et la possibilité ensuite de déduction.

Si l'enfant est capable de faire cette déduction, il possède alors la notion de commutativité.

C'est seulement lorsque la commutativité est utilisée comme preuve que nous savons si un enfant possède ou pas cette notion.

La notion de conservation acquise, il est possible de constater, donc de conclure, mais rien ne peut assurer que l'enfant ait appris quelque chose sur la commutativité.

Pour vérifier si cette commutativité est acquise, il faut alors que la conservation ne soit pas évidente : l'enfant prouvera alors la commutativité par cette conservation.

Item (5)

L'échec de Nadine est très compréhensible. On ne peut pas suivre individuellement 24 objets. Par contre, il est possible d'énumérer 6 (couleurs) puis 4 (formes) objets; et avec la structure produit-individualiser dans sa tête chacun des 24 objets avec seulement 10 étiquettes. Tout l'intérêt de la deuxième séance consistait justement à faire fonctionner l'ensemble produit comme un moyen d'économiser de l'information. Mais au cours de cette 3ème séance, il faudrait que Nadine définisse chaque objet avec un couple de nombres : le 2ème objet de la 3ème colonne (2 ; 3).....

Item (6)

Pour obtenir à nouveau de bonnes réponses, F. Jaulin-Mannoni instaure aussitôt des marges : les allumettes représentent diverses familles. C'est un simple moyen d'énumérer des allumettes. Mais il bloque l'enfant. Il est évident que séparer des familles durant un voyage est une situation que Nadine n'est pas prête à accepter sans réaction affective.

F. Jaulin-Mannoni recommence alors l'opération avec des familles de marguerites.

Commentaires.

Au cours de cette séance, les mêmes exercices sont repris plusieurs fois ; ils sont de plus, moins bien réussis en général à la deuxième ou 3ème fois qu'à la première.

Probablement parce que les concrétisations successives de la structure perturbent davantage pour Nadine cette structure, qu'elles ne la mettent en évidence.

F. Jaulin-Mannoni semble utiliser davantage une théorie de l'apprentissage empruntée à la Gestalt psychologie ou à Piaget. Une structure mathématique apparaît à l'élève par abstraction à travers plusieurs exemples isomorphes présentés successivement, à condition de faire suffisamment varier d'un exemple à l'autre tout ce qui n'est pas caractéristique de la structure.

F. Jaulin-Mannoni change ainsi la signification des objets que Nadine manipule. Mais les sens ainsi constitués n'ont pas de rapport avec cette structure (puisque'ils sont arbitraires et peuvent changer d'une fois à l'autre). Le véritable sens d'une structure serait une régularité au niveau des problèmes posés et dont elle est une bonne solution.

Or pour Nadine, l'obstacle se situe dans le fait qu'elle ne peut maîtriser les transformations dans l'espace d'un ensemble de 24 objets indistinguables. Elle a besoin d'une structuration ou d'une identification. Et les fleurs n'apportent aucune facilitation, si ce n'est dans la mesure où elles permettent une séparation à laquelle ne sera liée aucune affectivité.

D. QUATRIEME SEANCE.

La 4ème séance nous apparaît comme une pure séance de conditionnement basée sur la répétition des transformations associée à des stimuli gestuels. Nadine apprend à recopier un ensemble de 30 jetons disposés en 6 groupes de cinq en les disposant en 5 groupes de 6 et réciproquement.

Mais à nouveau, l'apprentissage a été effectué au détriment du sens. Ces alignements de dessins de jetons représentent si peu de vrais jetons que Nadine ne leur attribue même pas la notion de conservation des quantités. Ce sont des représentations purement formelles.

Contrairement à ce que semble affirmer F. Jaulin-Mannoni "la distribution des ensembles les uns sur les autres" ne fonctionne

.../...

pas comme un schème opératoire.

Nadine a dessiné, mais rien ne permet de penser qu'elle a intériorisé ce dessin en tant que représentation d'une transformation d'un même ensemble. En particulier, ce n'est pas "la transitivité de la bijection" (!!!) (cette locution n'a pas de sens, à moins que cela ne signifie que la composition de deux bijections est une bijection) qui n'est pas comprise par Nadine ; c'est la bijection elle-même puisque le cardinal n'est même pas invariant dans cette bijection.

Donc les transformations que fait l'enfant n'ont pas de sens pour elle.

E. CINQUIEME SEANCE.

Nous voyons apparaître ce qui était finalement l'objet de toute l'étude et Nadine comprend que la rééducatrice a voulu lui faire dire que :

- d'une part, deux dispositions "qu'elle appelle "inverses" l'une de l'autre s'appellent par exemple respectivement 6 fois 4 et 4 fois 6.

- D'autre part, si elle compte combien il y a d'objets elle trouve les mêmes résultats

- ensuite, les renforcements obtenus au cours de la rééducation prouvent que ces 2 principes doivent toujours être vrais.

Autrement dit, c'est parce que 6 fois 4 et 4 fois 6 font 24 que : $6 \text{ fois } 4 = 4 \text{ fois } 6$.

La conservation des quantités par rapport aux transformations de l'ensemble ne jouent aucun rôle dans le résultat pour Nadine.

Il y a eu finalement apprentissage par conditionnement d'un savoir déjà acquis, mais non construction et découverte d'un savoir.

F. SIXIEME, SEPTIEME, HUITIEME SEANCES.

Elles vont être consacrées à la poursuite de cet apprentissage, mais Nadine ne connaîtra pas le moyen de contrôler l'application de ce qu'elle vient d'apprendre.

Elle le généralise abusivement au cours de la 8ème séance sans pouvoir imaginer non seulement une expérience qui pourrait lui prouver si elle a tort ou raison, mais sans imaginer non plus qu'elle devrait concevoir elle-même cette expérience, et que finalement tous ces savoirs qu'on lui transmet doivent s'appuyer sur une compréhension et une adhésion dont elle a la responsabilité.

4. CONCLUSION

.....

L'analyse des situations d'enseignement permet de proposer toute une gamme d'explications qui tendent à justifier les décisions du maître et les comportements de l'élève. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons choisi les plus simples - parmi celles qui prennent en compte toutes les interventions significatives des deux protagonistes. Nous avons ainsi montré que rien d'essentiel ne distinguait la rééducation de Nadine d'un conditionnement classique. La part de choix et de décisions laissées à l'enfant était minime, malgré une certaine habileté mathématique de l'intervenante.

La rééducation ainsi proposée est en contradiction totale avec les principes énoncés dans la première partie de l'ouvrage où l'auteur déclare : "on ne saurait communiquer à autrui quelque chose qu'il ne doit pas recevoir, mais construire". Nous avons fait apparaître ici qu'il n'y avait pas construction mais suggestion.

Nous étudierons plus loin les moyens de réaliser son programme.

Il est toutefois utile de rappeler à ce propos que la difficulté de faire coller un discours théorique à une réalité assez fuyante devrait retenir les chercheurs comme les professeurs de faire des déclarations fracassantes. Dans son ouvrage, F. JAULIN-MANNONI s'autorisait de l'existence de 20 % d'élèves en échec en mathématiques (mais nous savons qu'il y a seulement environ 10 % d'élèves en échec électif au départ) pour critiquer sans nuances les pratiques "traditionnelles".

.../...

3. Etude du cas de Gaël

Gaël : 8 ans 1/2, élève de CE1 qu'il redouble. QI Verb. : 101 ; QI Perfo. : 102.

Profil scolaire : Eveillé, intelligent — résultats très faibles en mathématiques. C'est le plus jeune d'une famille unie et attentive. Gaël a tendance à se laisser « traiter en petit enfant » par ses parents et ses deux aînés.

En classe, il trouve quand il y a quelque chose de nouveau à découvrir mais « ne sait rien » en travail individuel. Erreurs nombreuses en numération : il écrit 631 pour 73 ou $845 = 80 + 4 + 5$; en calcul, il inverse les nombres et les chiffres (7 pour 3, 6 pour 6, et 13 pour 31 par exemple).

Profil psychologique : Le Rorschach fait ressortir certaines tendances à la rigidité, à la viscosité, à adhérer au détail, une difficulté à adopter une stratégie nouvelle, une certaine immaturité affective, un besoin de soutien et d'appui protecteur. Il révèle que Gaël trébuche

lourdement devant la menace et qu'il adopte un comportement de stupeur et de confusion opératoire devant un objet anxiogène. De façon plus générale, Gaël paraît bien adapté socialement, sans tendance à l'opposition ou au repliement. Son adaptabilité est en échec lorsque la relation interpersonnelle exige l'expression de sentiments un peu intimes ; il est capable d'activité méthodique.

Profil didactique : L'étude a montré plus précisément des difficultés sur la numération, et avec la représentation intuitive, la représentation intériorisée, la représentation formelle, le rapport au « réel », et des comportements particuliers d'absences, de blocages et parfois, au contraire, de jubilation pendant le travail en mathématiques.

1. PREMIERE SEANCE

1.1. Soutien et observation : Les voitures rouges.

A la question "sais-tu qu'est-ce que tu n'as pas bien réussi cette semaine, et qu'est-ce que tu as bien su faire" l'intervenant n'obtient que des réponses évasives. L'enfant prend son cahier et tous les deux examinent les travaux de la semaine. Ils choisissent finalement pour l'expliquer un problème que Gaël a fait faux et dont l'énoncé est :

Dans un parking il y a 57 voitures. 24 de ces voitures sont rouges - trouver le nombre de voitures du parking qui ne sont pas rouges".

Gaël réfléchit un instant puis déclare : "je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse" Il pose en colonne l'opération $57 + 24$ et trouve 81. C'est exactement ce qu'il avait fait dans la semaine. Il semble donc que Gaël maîtrise l'addition qu'il doit manier fréquemment mais il ne se pose aucune question sur l'opportunité de son emploi, il se couvre de l'autorité de la maîtresse pour justifier un emploi automatique de l'opération. Il ne tient aucun compte des corrections faites en classe.

L'intervenant déclare, sans insister toutefois comme une remarque générale, qu'il faut aussi savoir quand il faut faire une addition, une soustraction ou autre chose, et plutôt encourageant, il propose à Gaël de dessiner les voitures "mais pas toutes, car ce serait trop long".

Gaël dessine donc un rectangle et écrit 57 au milieu.

I (l'intervenant) questionne :

- "Est-ce qu'il y a toutes les voitures ?

G. : Il y a toutes les voitures qui ne sont pas rouges

I : il n'y a que les voitures qui ne sont pas rouges ?

G : il y a toutes les voitures et elles ne sont pas rouges.

L'intervenant aurait pu continuer : où sont

.../...

les rouges ?... mais il était clair que l'enfant n'avait pas de représentation correcte de la situation, le mettre en contradiction formelle n'aurait servi qu'à l'embarrasser.

I : Si on changeait le nombre de voitures, ça pourrait changer l'opération ?

G affirme : oui !"

Il est clair que Gaël appelle "opération" le triplet de nombres et non le type "addition" par opposition à "soustraction". L'intervenant espérait que Gaël pourrait avoir en tête cette question. (faire une addition ou une soustraction N). Dans ce cas, il aurait essayé de savoir si l'enfant était capable de construire un problème équivalent avec de tous petits nombres pour lesquels le dessin aurait été plus vite fait. Le fait que Gaël ne comprenne pas la question d'emblée interdit que l'on poursuive dans ce sens. I demande à Gaël de dessiner les cinquante sept voitures une par une et les fait disposer par lignes de 20.

I : "Est-ce que tu as dessiné toutes les voitures du parking ?

G : non.

I : on te dit "dans un parking, il y a 57 voitures. Dessine le parking. Est-ce que dans ce parking il y a 57 voitures ?

G : oui

I : Est-ce que toutes les voitures dont on te parle sont dans ce parking ?

G : non, il y a aussi des voitures rouges"

I lui fait remarquer qu'il faut bien faire attention au texte car il y a un point après "57 voitures". Gaël admet alors que les rouges sont dans le parking mais pense devoir les dessiner car elles ne figurent pas sur son schéma.

(On observé ici ses difficultés à envisager qu'il n'y a qu'un ensemble de voitures, avec deux propriétés : être dans le parking, et être rouge. Pour lui, la 2ème propriété nécessite un 2ème ensemble, et s'il admet que le 2ème ensemble possède aussi la 1ère propriété, il ne conçoit pas encore qu'il soit une partie de l'ensemble de départ. Est-ce parce qu'il n'a pas analysé l'énoncé ou parce qu'il

.../...

ou parce qu'il ne peut pas utiliser l'opération d'inclusion ?

I explique que les 24 rouges font partie de "ces" voitures, les 57 du départ et Gaël doit les peindre en rouge sur son schéma. Dans cette phase l'action de Gaël est complètement guidée par l'intervenant. Ils vérifient que le dessin concorde bien avec l'énoncé, puis Gaël doit trouver toutes les voitures qui ne sont pas rouges. Il en compte 31. L'intervenant demande :

I : "si je te dis que ce n'est pas juste, crois-tu que j'aie raison ?

G : je ne sais pas

I : Qu'est-ce que tu ferais pour savoir si j'ai raison ?

G : je recompterais"

Et il en trouve 33.

I : "Alors, qu'est-ce qui est juste, 31 ou 33 ? comment faire pour savoir ?

G : Il faut compter

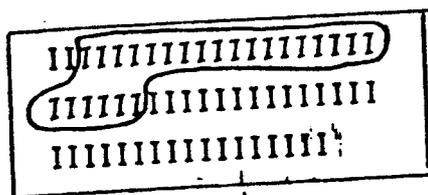
I : Il n'y a pas un autre moyen ?"

Pas de réponse.

Son dessin étant assez concret et lui permettant de donner une réponse, Gaël n'essaie pas ou ne pense pas à utiliser une opération pour vérifier sa réponse, puisqu'il peut compter autant de fois qu'il le veut. Son dessin est un appui sûr, auquel il peut se référer, tandis que l'opération fait appel à certains mécanismes abstraits et comporte une réversibilité que Gaël ne semble pas avoir acquise, à savoir le passage par la soustraction pour retrouver les deux termes de l'addition.

Gaël recompte à nouveau : "33"

I entoure les voitures rouges, fait observer à Gaël



qu'on a donc 24 rouges et 33 pas rouges et demande :

- Alors combien y-a-t-il de voitures ?

- Je fais 24, et puis 33 ?

.../...

Gaël pose une addition $24 + 33 = 57$.

I : "c'est bien ce qu'on te demandait ? Peux-tu répondre à la question de l'énoncé ?

G : non."

Pour la plupart des enfants la réponse demandée doit être le résultat d'une opération, et le résultat est ce qui se trouve à un endroit précis dans la disposition de ce que l'on écrit. Cette habitude fait obstacle à l'identification du résultat cherché dans une égalité considérée comme une relation.

I : "mais si ! tu as écrit ce qu'on demande.

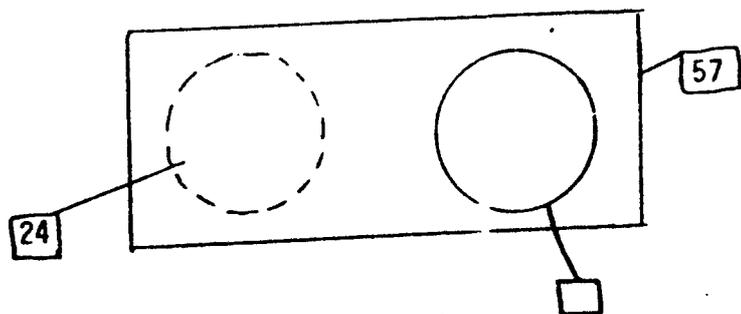
G est étonné ; à la demande de l'intervenant il relit l'énoncé.

I : "combien y-a-t-il de voitures pas rouges ?.

En s'aidant du dessin, il lui fait dire qu'il n'y en a que 33 et lui demande comment il a trouvé, Gaël répond "en calculant" puis rectifie "en dessinant". I lui explique que le calcul "ça sert à trouver sans qu'on soit obligé de tout dessiner" et Gaël avoue que c'est ce qu'il ne sait pas faire.

L'intervenant entreprend de faire utiliser à Gaël la représentation symbolique en usage dans sa classe, dans une perspective de soutien.

Gaël doit dessiner l'endroit du parking dans lequel on a mis les voitures rouges, puis les autres et il met des étiquettes.



I : si je compte les rouges, j'arrive à ?

G : 24

I : Et si je continue à compter les autres, j'arrive à ?

G : 57.

.../...

I écrit alors $\begin{array}{r} 24 \\ + \dots \\ \hline 57 \end{array}$, de façon à ce que Gaël ne fasse pas la soustraction pour trouver 33 mais essaie de déterminer le nombre qui, additionné à 24, donne 57, ce qu'il fait facilement.

Au cours de cette première phase commencent à apparaître certains caractères très fréquents chez les enfants en difficulté : difficulté à donner du sens à la question posée et à mettre en oeuvre des stratégies de contrôle de sa réponse, recours à des recettes, etc...

Pour bien mettre en évidence la nature des difficultés de Gaël et s'assurer qu'il ne va pas à nouveau tirer des conclusions automatiques de cette séquence l'intervenant propose deux autres problèmes voisins.

Un premier avec des voitures formant deux ensembles disjoints clairement identifiés dans l'énoncé. Il suffit d'additionner leur nombre pour avoir le total. Ce que Gaël réussit rapidement.

Un autre comparable au premier, avec 8 voitures dont 3 rouges. Gaël dessine un rond avec 8 voitures, 8 puis refait son dessin pour y inclure les 3 rouges



et lorsqu'on lui demande combien ne sont pas rouges, il répond 11. Une nouvelle fois, il a appliqué d'autorité l'opération qu'il connaît avant de réfléchir. En peignant en rouge les 3 voitures, comme précédemment, il découvre alors le résultat.

Il faut préciser que dans la classe de Gaël la soustraction n'a pas été introduite comme moyen obligatoire pour trouver une différence. Souvent l'addition a trou a été utilisée. Ce procédé tend à obliger l'enfant à sortir d'un automatisme formel qui associe une opération mathématique à une opération matérielle. (+ si j'ajoute, - si je retranche) et à se centrer sur l'ensemble qu'il s'agit de compter et sur ses relations avec les autres données.

2 - Epreuve de la quantification de l'inclusion.

Cette incompréhension dont fait preuve Gaël lors de l'exercice peut tout simplement renvoyer à des causes psychogénétiques ; l'enfant est encore trop jeune pour effectuer le raisonnement nécessaire. Résoudre un tel problème où il s'agit de prendre en considération pour les comparer à la fois le tout et la partie suppose un type d'opération logique dont Piaget a montré le caractère complexe⁽¹⁾. La quantification de l'inclusion qui sous-tend la compréhension du problème des voitures n'est en effet construite par l'enfant qu'aux alentours de 7-8 ans. Il fallait donc d'abord s'assurer si Gaël possédait un schème opératoire et nous décidons alors sur le champ de lui faire passer le test des billes de couleurs. Cette épreuve très connue, utilisée par Piaget dans l'ouvrage cité consiste à présenter à l'enfant 8 perles en bois dont 5 sont rouges et 3 vertes⁽²⁾. Il s'agit pour le sujet de juger s'il y a plus de perles en bois ou plus de perles rouges et de justifier sa réponse. L'épreuve est passée avec succès par Gaël⁽³⁾ et l'on est en droit de penser que les échecs répétés de l'enfant dans l'utilisation de la relation d'inclusion ne renvoie pas à des carences sur le plan de l'accession aux structures logico-mathématiques.

.../...

(1) cf. Piaget

(2) cf. Piaget

(3) "G : Il y a plus de billes en bois que de billes rouges !

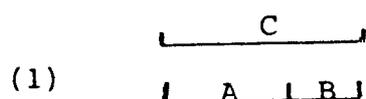
I : pourquoi ?

G : parce que en bois c'est tout (il montre l'ensemble des billes) et les rouges c'est quelques-unes !"

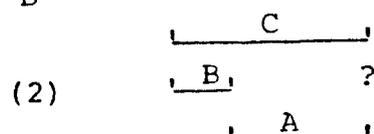
3 - Test de la commutativité

Nous avons alors décidé de présenter à Gaël une autre épreuve opératoire utilisée par Gréco dans une recherche sur la genèse de l'opération de commutativité⁽¹⁾

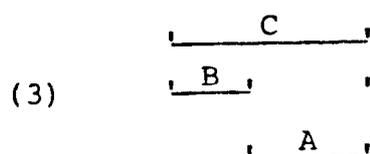
. On présente à l'enfant un jeu de réglettes disposé de la façon suivante (1). Le sujet peut constater que $A + B = C$



. On place alors la réglette B à la place de A (2) et on demande à l'enfant d'indiquer par une trace où sera l'extrémité de la réglette A quand on la placera à la suite de B



. Gaël dit immédiatement : "ça s'arrêtera pareil qu'avant" et dessine un trait dans le prolongement de l'extrémité de C (3)



. La réponse de l'enfant caractérise les sujets ayant atteint le stade opératoire⁽²⁾ et ceci ne nous surprend nullement.

.../...

(1) cf. Gréco

(2) cf. Gréco

Etant donné l'âge de l'enfant et sa réussite à l'épreuve précédente,⁽¹⁾ Ce qui par contre est intéressant et peut nous apporter des informations c'est l'attitude de Gaël lorsque nous mettons en doute son jugement par des objections du genre "mais un enfant diaspit tout à l'heure que ça s'arrêtera avant, etc..." Aussitôt Gaël revient sur ses affirmations :

G : "c'est peut-être vrai..."

I : qu'en penses-tu exactement ?

G : "je ne sais pas !"

Ce type de conduite lors de cette épreuve caractérise des enfants que Gréco situe dans un stade intermédiaire (pré-opératoire) et où les structures du sujet sont seulement en voie de constitution. Les compensations ne sont alors qu'incomplètes ou fragiles. Cela ne peut être le cas de Gaël. Il semblerait que sans doute, sa soudaine absence de conviction à partir d'une simple contre-proposition renvoie plutôt à son attitude générale vis-à-vis d'autrui lorsque sa propre connaissance est mise en jeu. Le sentiment de nécessité qui pour Piaget est le révélateur du fonctionnement d'une structure opératoire disparaît ici sans qu'on puisse incriminer une fragilité des constructions logiques du sujet mais renvoie directement pensons-nous, à la manière d'être avec autrui.

.../...

(1) La réussite à l'épreuve d'inclusion suppose nécessairement que l'enfant ait le stade opératoire et puisse très facilement maîtriser la relation de commutativité.

Analyse de la première séance.

Parmi les questions posées par le comportement de Gaël, il en était une qu'il fallait rapidement régler. Toute activité mathématique est sous-tendue par les schèmes opératoires du sujet qui, selon Piaget, ne sont pas appris au sens strict mais construits au cours du développement⁽¹⁾. Dans le cas du problème des voitures rouges et non rouges il était, nous l'avons vu, tout à fait nécessaire de s'assurer si Gaël possédait bien les structures opératoires d'inclusion.

Avec les résultats obtenus au cours de l'épreuve des perles, nous savons au moins que les échecs répétés de Gaël dans la compréhension du problème ne peuvent être expliqués par des carences au niveau des structures logico-mathématiques du sujet. Manifestement il possède les schèmes opératoires nécessaires à la solution du problème proposé. Comment dès lors expliquer son comportement au cours de la séance ?

La réponse ne peut être simple dès lors qu'on prend comme objet une relation entre un sujet singulier dont le rapport actuel au monde est le résultat d'une longue histoire et une situation didactique elle-même fort complexe.

Dans cette perspective, l'épreuve de Gréco peut nous donner quelques éléments de départ. Ce qui surprend d'emblée c'est l'impossibilité pour Gaël de soutenir une conviction face au démenti d'un autre. Une contre-proposition suffit à provoquer l'expectative là où tout laisse à penser qu'un sentiment de nécessité existait. Ainsi apparaît une caractéristique de l'enfant que nous avons déjà rencontrée au cours de l'examen psychologique, et sur un plan plus général : la fuite d'un affrontement

(1) cf. Piaget "Apprentissage et développement EEG..."

possible, l'évitement à tout prix du conflit par le refuge dans des positions de dépendance et de soumission.

Il nous semblait que cela pouvait ne pas être sans effet dans les rapports de Gaël avec la connaissance mathématique.

Sur le plan de la connaissance, il existe en effet une attitude où la dépendance offre le bénéfice non négligeable d'une sécurité : la connaissance c'est toujours la connaissance d'un autre qu'il s'agit simplement de s'approprier, alors on supprime le risque d'être mis soi-même en question dans un débat sur la vérité. Il n'y a plus à rendre raison de ce que l'on tient pour vrai autrement qu'en invoquant l'autorité à laquelle on se réfère (Gaël dit "ce qu'on m'a appris", ce que la maîtresse dit "qu'il faut faire").

Mais cette attitude se paie d'une incapacité à concevoir un processus de construction où la connaissance pourrait être le résultat d'une confrontation avec le réel et d'une série de décisions où le sujet devient l'auteur de son propre savoir. La connaissance mathématique peut alors ne plus avoir d'autre sens que celui d'une activité ritualisée où l'on répète des modèles.

Les situations du type de celles que les élèves rencontrent habituellement en classe présentent pour la plupart un certain caractère de fermeture. Par exemple, le maître pose un problème et tous les enfants doivent trouver la solution, - la même - de sorte que dès qu'un élève produit publiquement cette solution la recherche des autres est arrêtée, de plus c'est le maître qui déclare que telle solution est bonne de sorte que chaque élève n'a qu'une seule occasion de tenter de produire la bonne solution par problème. Ainsi chacune de ces situations fonctionne comme un test et l'apprentissage doit se faire ailleurs - lors de la correction et des explications qui l'accompagnent par

.../...

exemple - et par d'autres moyens que la tentative et l'observation des effets de sa propre décision. Enfin et en partie en conséquence, souvent la solution ne peut être envisagée que si l'enfant possède déjà une représentation de la situation qui lui permet de mettre en scène les objets cognitifs dont il s'agit, de plus la vérification de la validité de la réponse et les explications du maître font appel à cette même représentation, à la connaissance achevée qui produit la réponse. Autrement dit, cette situation d'apprentissage ne donne une occasion de décider ou de tenter une décision - donc d'apprendre - qu'à ceux qui savent déjà l'essentiel. Dans ces situations l'élève ne peut acquérir la bonne représentation de la situation, que d'un coup, à force de rapprocher des tests semblables par une sorte de renforcement d'associations convenables.

Les situations de ce type ne sont guère favorables à une modification des rapports avec les données du problème ou avec les objets de la connaissance chez des enfants comme Gaël.

Pour augmenter et enrichir les relations des élèves avec la situation, un procédé classique consiste à leur demander de représenter, de dessiner les éléments dont il s'agit - c'est ce qui a été fait au cours de cette séance et l'on a pu voir que le dessin correct exige lui aussi cette même représentation qui justement est absente. Il est assez clair ici que si la schématisation peut faire peut-être progresser une représentation mentale, elle ne peut pas la créer.

* Au contraire, la répétition de situations-problèmes dont le maître attend qu'elles déclenchent la compréhension tend à mettre l'enfant lui aussi dans une situation d'attente un peu anxieuse et de passivité, où les activités ont un caractère rituel et presque magique. On peut voir cette réaction tout au long de la dernière séance : Je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse... quand il compte il récite soigneusement : je pose, je retiens... les dizaines... il indique les

.../...

diverses étapes. Il fait des représentations plus ou moins analogiques et essaye de dessiner des choses qui ressemblent à des voitures. Mais le fait de rester très près du figuratif, loin de donner la signification escomptée à l'opération elle-même semble être récupéré par l'enfant comme un moyen de mettre à distance le raisonnement portant sur les objets.

Quand l'intervenant lui demande :

- As-tu dessiné les rouges ? il répond : "non, les noires seulement" et c'est vrai, il n'a pas dessiné les rouges (en rouge). Il reste centré sur son dessin sans lui faire jouer un rôle de représentation à contrôler par les indications de l'énoncé. Et quand on lui demande de repasser en rouge les traits représentant les autos rouges, il en oublie le nombre et l'intervenant doit l'arrêter à 25. De façon générale les nombres n'ont pour lui qu'une importance très secondaire. Il dit 50, et il compte 31, puis 33, il oublie... il reconnaît s'être trompé de bonne grâce... avec détachement.

Une approche classique des enfants en difficulté consiste à identifier les erreurs ou les fautes qu'ils commettent et si elles se répètent à les interpréter comme des anomalies du développement de l'élève, ou comme des carences dans leurs acquisitions auxquelles il convient de remédier parce "qu'elles vont rendre l'enfant incapable d'accéder aux mathématiques".⁽¹⁾

Par exemple ici, on repèrerait que Gaël écrit souvent 2 au lieu de 5 ou écrit 21 pour 12 et on identifierait là une insuffisance de structuration spatiale voire des troubles de la perception spatio-temporelle. De même les difficultés de Gaël à confronter le dessin et le texte de l'énoncé pourraient se ranger parmi les accidents de la fonction symbolique.

.../...

(1) cf. F. Jaulin-Mannoni 1965 p. 13

Cette analyse classique permet de chercher des remèdes à ces troubles sous la forme d'exercices "du même type" au sens de ces fonctions : exercices de structuration spatiale...etc. Elle s'oppose à celle de l'enseignant qui consiste à rechercher les exercices de "même type" dans la catégorie qui traite du même sujet mathématique avec le même point de vue didactique : écriture de chiffres, dictée de nombres, problèmes de soustraction. En ce sens, la première apparaît comme thérapeutique par rapport à la seconde. L'approche que nous tentons ici est très différente, il s'agit d'agir au niveau des situations même d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitudes souhaités. Nous utilisons pour cela une "théorie des situations" dont nous parlerons plus loin et qui prend en compte comme objet principal les conditions du milieu qui rendent nécessaires et plausibles les comportements des sujets et les manifestations des connaissances.

Gaël n'a avec la connaissance - du moins celle dont il est question en classe - qu'un rapport superficiel. L'évitement du problème et la mise à distance débouchent sur des actions stéréotypées, purement "didactiques" c'est-à-dire centrées sur le rapport avec le maître, sans mobilisation des schèmes assimilateurs qu'il a pourtant à sa disposition. Gaël s'accommode de relations institutionnalisées qui n'appellent de sa part que des rites qui ne l'engagent pas.

Ce que nous pouvons alors penser c'est que toute l'attitude de Gaël au cours de cette 1ère séance est la conséquence d'un accord entre la situation didactique habituelle de la classe telle qu'il la perçoit et son rapport défensif à la connaissance dont nous parlions plus haut.

On ne peut donc soutenir que la situation didactique que Gaël rencontre habituellement est l'unique raison de ses échecs en mathématique, on ne comprendrait pas pourquoi d'autres enfants qui ne sont pas mieux armés sur le plan cognitif réussissent. Nous pouvons simplement penser que cette situation lui convient dans la mesure où elle lui permet d'échapper à la construction des connaissances.

.../...

Et il peut d'autant mieux y échapper que sa manière d'être avec les adultes, cette attitude sociale particulière faite de gentillesse et de soumission qui désarme la critique lui permet de se prémunir contre toute forme de conflit avec le maître.

Car, si les situations didactiques habituelles permettent des apprentissages dans les conditions de fermeture dont nous avons parlé et donc sans qu'il y ait à proprement parler un débat sur le savoir, c'est que celui-ci est remplacé par un autre type de débat; celui qui porte sur l'élève apprenant. Apprendre mal, ne pas savoir, faire telle erreur etc, c'est se heurter à la volonté du maître, c'est entrer en conflit avec lui. Dès lors l'enfant ne peut échapper à ce conflit, aux difficultés de toutes sortes qu'il entraîne, qu'en construisant quelque chose qui va tenir lieu de connaissance, d'apprentissage.

Or, Gaël disions-nous, échappe à ce débat dans la mesure où il désamorce tout conflit par une absence totale d'agressivité. Dans ce état sur l'élève, le conflit se nourrit en effet de lui-même ; à l'agressivité du maître répond habituellement une autre agressivité de l'enfant qui alimente en retour l'agressivité du maître, etc... le sujet ne pouvant se soustraire à cette situation qu'en produisant des résultats attendus. Gaël pour sa part ne rentre pas dans ce jeu, son attitude de profonde soumission désamorce toute hostilité ("il est toujours prêt à reconnaître ses erreurs et il en est navré" dit le maître")

PROJETS POUR LA SEANCE SUIVANTE

L'ensemble des analyses que nous pouvons faire nous conduit à envisager le type d'intervention pour la 2ème séance ; il va s'agir essentiellement d'introduire une rupture dans les conceptions qu'a Gaël d'une situation didactique en lui⁰⁷ proposant une situation qui va exiger de lui des anticipations, des prévisions, des prises de responsabilité, c'est-à-dire un investissement de l'objet de la connaissance. Pour cela, sur le même sujet mathématique nous allons lui proposer ce que nous appelons une situation d'action. .../...

C'est seulement s'il s'avérait que Gaël ne peut entrer dans ce type de rapport à la connaissance que nous chercherions d'autres voies.

Commentaire : Topaze et l'élève récalcitrant.

Pour mettre en scène un certain nombre de concepts didactiques, nous allons commencer par commenter, un peu lourdement peut-être, un exemple célèbre de situation d'enseignement : la première scène de "Topaze".

Topaze, il dicte en se promenant
 "Des moutons... des moutons... étaient en sûreté...
 dans un parc ; dans un parc. (Il se penche sur l'épaule de l'élève et reprend) Des moutons... moutons...
 (l'élève le regarde, ahuri) Voyons mon enfant, faites un effort. Je dis moutons. Étaient (il reprend avec finesse) étai-eennt. C'est-à-dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs moutonsse.

L'élève le regarde perdu...

Dans cette scène ironique et attendrie, Pagnol souligne avec une pertinence presque cruelle quelques caractéristiques fréquentes de telles situations.

Le maître veut obtenir un certain comportement de son élève - ici il faut écrire correctement sous la dictée le mot "moutons". Ce comportement signifie que l'élève a correctement interprété une situation - ici la phrase - qu'il a reconnu un problème, au moins implicitement - moutons prend-il un s ou non ? - et qu'il l'a résolu par l'application d'une connaissance éventuellement pratique - ici la règle du pluriel des noms.

Or ici l'élève ne résoud pas le problème d'orthographe qui lui est posé et Topaze ne se résoud pas à accepter cette situation.

.../...

C'est que le comportement attendu n'est pas seulement une information sur l'état de l'élève c'est aussi la matière sur laquelle va s'exercer la suite de l'activité du maître.

Que le texte produit contienne trop de fautes trop banales et il deviendra impossible d'en tirer aucune "leçon" raisonnable. Pour le maître cette faute subalterne d'accor doit être éliminée tout de suite. Mais il ne se résoud ni à indiquer carrément la correction, ni à expliciter ses exigences : (par exemple par un avertissement du genre "faites attention !"). Il transforme alors le test d'orthographe en mini-situation d'apprentissage. Et que fait-il ? il essaye d'obtenir tout de même le bon comportement mais en changeant le problème. Sa deuxième lecture transforme totalement la situation, un élève conscient du dilemme : "singulier ou pluriel" aurait trouvé sa réponse en résolvant un simple problème de phonétique. Il est bien évident qu'alors son comportement n'aurait eu ni la même signification ni la même valeur.

Hélas, l'élève n'entre pas dans ce nouveau jeu. Il souligne par son air ahuri qu'il ne comprend pas pourquoi son professeur s'exprime d'une manière aussi extravagante.

Et Topaze est contraint d'expliquer sa pauvre ruse et de se justifier : "...un seul moutonne.., plusieurs moutonsse". Il fournit à la fois le choix ouvert entre les réponses possibles, c'est-à-dire la matière d'une leçon sans doute cent fois rabachée et la solution dans le cas présent. L'élève reconnaît enfin en même temps le problème et sa réponse. Il s'est contenté d'identifier le désir du professeur à travers le voile transparent d'un déguisement didactique.

Ainsi nous voyons comment Topaze propose une suite de situations qui toutes tendent à produire le même comportement mais qui lui donnent des significations complètement différentes, de moins en moins riches ou coûteuses en investissement et en connaissances,

pour l'élève. Il y a là une sorte de négociation: Topaze essaie d'obtenir le comportement de l'élève "au meilleur prix" c'est-à-dire avec la situation qui lui donnera la meilleure signification et tout montre ici que l'élève se contentera d'attendre que Topaze lui propose le contrat qui exige de lui le minimum d'effort.

En quoi, sans ces conditions pourrait consister l'apprentissage escompté ? Le comportement correct est obtenu grâce au choix final par le maître d'une situation qui, dans le système de l'élève appelle la réponse attendue, c'est-à-dire par le recours à une connaissance déjà acquise, même si elle n'a rien à voir avec la connaissance nouvelle visée. On peut donc supposer que l'espoir d'un apprentissage repose sur la croyance qu'un conditionnement s'opèrera à force d'associer des occasions pertinentes - ici "s ou pas d's ? - a des réponses correctes obtenues avec de moins en moins d'indications.

Les moyens d'obtenir des réponses (correctes) par un arsenal de situations sur lesquelles s'opèrent les choix au cours de la négociation de professeur constituent la matière même de son expérience d'enseignant. L'écheveau mal contrôlé des significations que produisent ces situations constituent de son côté une espèce de "pensée pour enfants". Et Pagnol souligne à quel point ce dédale raffiné infantilise son Topaze, adulte dérisoire face à son élève absent.

2. DEUXIEME SEANCE

L'intervenant présente à Gaël les buts de la séance : Il s'agit de lui enseigner ce qu'il n'a pas su faire la dernière fois et qu'un enfant de son âge devrait réussir, lui aussi réussira bientôt.

Mais cet enseignement prendra la forme d'un jeu. Cette déclaration liminaire n'a guère d'effet, le mot "jeu" a dû être souvent employé pour annoncer de simples exercices.

Le matériel est constitué de ronds et de triangles de petite et grande tailles. Il fait compter le nombre de pièces à Gaël, qui en trouve 52, et lui dit d'écrire le nombre sur une feuille. Puis, pour s'assurer qu'il y en a bien 52, l'intervenant recompte mais en lui faisant remarquer qu'il utilise des tas de 10 : une pile de 10 triangles. Puis on ajoute une pile de 10 ronds (=36); puis une autre (46) puis une pile de 6 ronds, total 52 pièces.

Une fois que les pièces sont comptées, on les enfouit dans un sac que l'on ferme, et le jeu consiste à se rappeler ce qu'il y avait dans le sac.

L'intervenant demande à l'enfant s'il sait ce qu'il y avait, à quoi celui-ci répond : "des triangles", puis hésite et ajoute : "des carrés, (il n'y en a pas)... des ronds" puis à la demande de l'intervenant il dessine



- on a compté qu'il y avait combien de pièces ?
questionne l'intervenant.

- 26

- 26 ?

- non, 52.

- Qu'est-ce que j'ai compté 26 ?

Gaël ne se souvient plus. Il réfléchit longuement mais il faut lui rappeler que c'étaient des triangles.

Puis, on lui explique qu'on va jouer aux devinettes :

- Qu'est-ce que tu crois que je vais te demander ?

- Combien il y a de rondes

- Non

- Alors on peut regarder dans le sac si tu ne sais pas. Mais avant de défaire et de regarder, il faut parier.

.../...

Tu sais ce que ça veut dire ?

Gaël dit que parfois il parie 1 franc avec son père qu'il arrive le premier au bout du bassin à la piscine.

Le jeu consiste donc à parier combien il y a de ronds, à écrire le nombre supposé, et si la vérification confirme l'hypothèse, c'est gagné.

Premier pari : Gaël affirme qu'il y a 10 pièces rondes.

Vérification : il y en a 26. Il sourit et constate avec l'intervenant qu'il a perdu son pari.

(Dès ce premier pari, et cela se confirmera dans la suite du jeu, on constate que le nombre "10" joue un rôle particulier pour Gaël. Il a retenu que l'intervenant avait rangé les pièces par piles de 10 et peut-être cece a-t-il contribué à ce premier choix, mais nous verrons plus loin que ce n'est pas la seule raison.)

L'intervenant propose que l'enjeu soit désormais un caramel, Gaël sourit.

Après ce premier échec, ils décident de recommencer. Mais Gaël a déjà oublié le début de la séance, ne se souvient plus ce qu'ils ont commencé à compter et croit que ce sont les ronds. L'intervenant lui fait donc réécrire le nombre de pièces : 52, compter les grands ronds : 19. Il vérifie ce dernier nombre en faisant à nouveau une pile de 10 et une pile de 9, puis ils mettent tout dans le sac et le ferment.

Gaël écrit sur sa feuille :

52	19
----	----

- Qu'est-ce qu'il faut faire ? demande I.
- Trouver combien il y a de triangles
- Oui... Il y avait des carrés ?
- Non, que des triangles et des ronds.

(Lorsque l'enfant avait répondu la première fois qu'il y avait des carrés, il avait probablement dit cela au hasard, n'ayant pas bien observé les différentes pièces, trop occupé qu'il était à les compter et ayant du mal à prendre du recul pour savoir ce qu'il comptait).

De toute façon, cette première scène confirme la difficulté de Gaël à prendre en compte les données et même les consignes.

Il s'agit cette fois-ci de chercher ce qui n'est pas "les gros ronds", c'est-à-dire le nombre de petits ronds

.../...

si évidente pour l'enfant qu'il n'y a pas détecté d'intention à son égard. L'intervenant s'est empressé d'accepter sans commentaire la proposition suivante.

"C'est mieux, déclare l'intervenant, mais tu n'as pas encore gagné, on recommence ?

Gaël accepte car on devine qu'il voudrait bien gagner. Il écrit à nouveau 52, compte les petits ronds (7) met toutes les pièces dans le sac et doit deviner le nombre d'éléments qui ne sont pas des "petits ronds".

Il réfléchit tout haut :

"Il y a 52... comme il y a 7 petits ronds..." Il rit car il essaie d'ajouter 7 à quelque chose pour obtenir 52 et sent qu'il est sur la bonne voie. Il écrit 42 (remarquons que c'est $52 - 10$) et parie. Mais il vérifie d'abord en comptant sur ses doigts $42 + 7$, constate son erreur, raye 42, et reprenant le même processus de réflexion, inscrit 49 (dernier nombre évoqué $42 + 7$) il ne peut pas aller plus loin et parie.

On ressort tous les jetons du sac, l'intervenant les lui fait empiler par 10, il y en a 45 (qui ne sont pas des petits ronds). Gaël raye 49 et écrit 45, ce qui donne :

52 7 ~~42~~ ~~49~~ 45

I déclare : "il y a un truc... mais il faut le trouver".

Le résultat envisagé est pris pour la première fois dans une relation nécessaire (il existe une stratégie qui permet de gagner à coup sûr) qui exprime une condition nécessaire.

L'anticipation commence à fonctionner ainsi que l'examen a priori de plusieurs solutions possibles. Le nombre de données que Gaël prend en compte a soudain beaucoup augmenté, et il ne peut accomplir qu'une fois le cycle : choix, vérification anticipée, rejet, nouveau choix. Le pari est une période de relâchement de la tension, un moment agréable où on fait semblant de réfléchir, on hésite un peu, puis on se décide, on tape solennellement dans la main de l'intervenant. Alors avec un peu d'excitation fébrile, on ouvre le sac, on compte, on compare le nombre trouvé à sa prévision sous l'oeil froncé et dubitatif de l'intervenant à la fois désolé, encourageant et comiquement impuissant. Les paris doivent rester assez denses pour

.../...

entretenir le plaisir de l'enfant, ce sont eux la véritable gratification.

Le 4ème pari a pour enjeu à nouveau un carambar (hypothétique). Cette fois-ci on compte les petits triangles : 13, mais on les range dans un sac à part, dans lequel on va mettre aussi celui où sont les autres pièces.



Comme auparavant, Gaël parle à mi-voix lorsqu'il calcule : "là 52, là 13". Il compte sur ses doigts, ralentit à 10, puis continue jusqu'à 13, et répond "42". Mais il recompte longuement et rectifie : "41".

Pour vérifier, l'intervenant vide le premier sac, c'est-à-dire étale sur la table les 13 triangles et pose l'autre sac à côté, fermé.

- Si tu as gagné, dit-il, on en a 41 là (il montre le sac fermé), et en comptant tout on aura J

- 52.

Partant de 41, Gaël compte donc les 13 petits triangles : "42, 43..." et obtient 54.

Comme on n'a pas ouvert le sac, il a encore le droit de changer d'avis et l'intervenant le laisse chercher.

Gaël était en train d'oublier la méthode de vérification (ou peut-être était-il en train d'essayer de compter à rebours, ce qui exigerait de compter à la fois ce qu'on enlève et le résultat : 1 - 51, 2-50 ; 3-49 - mais c'est peu probable).

L'intervenant a suggéré opportunément à nouveau la méthode de vérification et en a facilité la mise en oeuvre, mais Gaël n'a pas pris cela comme une indication nouvelle car il peut considérer la méthode comme déjà convenue et son problème principal, à ce moment-là c'est de compter

correctement et d'avoir une stratégie de choix des nombres à essayer.

Gaël sourit, semble se souvenir de quelque chose qu'il a appris antérieurement, et compte sur ses doigts, de 13 à 52.

Mais en cours de route il s'arrête car il s'aperçoit qu'il n'a pas retenu combien il avait compté jusque là, et essaie une autre méthode :

"Ah, là il y a 13, j'enlève 10, il reste 3 et dans l'autre il y a ... 45... Il y a 52, j'enlève 10, il reste 40...5, 45 !" (peut-être $42 + 3$?)

Vérifions ! A nouveau, ce résultat s'avère inexact et l'intervenant lui suggère d'essayer un autre nombre. Il choisit 40, ajoute 13 (en comptant tous les triangles un par un) et se voyant si près du but s'exclame : "ah, j'ai déjà une preuve !" mais laquelle ?

Il essaie ensuite 31. I écrit tous les nombres qui ne vont pas, et à côté le résultat obtenu en ajoutant 13, ce qui successivement :

41	54
40	53
31	44
43	56
33	46
42	55
34	47.

Maintenant la méthode de vérification fonctionne bien, le fait de pouvoir compter les objets de la partie connue a différencié les fonctions des trois nombres : le nombre cherché - celui sur lequel on parie et à partir duquel on compte - le nombre des objets de la partie connue que l'on compte (au lieu d'additionner), le nombre total d'objets qui est le nombre final qu'on doit trouver.

On peut douter que cet algorithme soit acquis en tant que solution générale des problèmes de soustraction mais il va aider à explorer les relations invariantes par translation et permettre par là d'aboutir à une méthode de solution et de régler quelques problèmes de numération et de structure primaire des naturels. Il permet surtout un investissement

.../...

des termes de la relation à comprendre.

Observons la stratégie. Tous se passerait bien si Gaël possédait parfaitement la numération à rebours ou la soustraction de 1, car il commence avec 41 qui donne un résultat trop grand. Il essaye une autre méthode, correcte, mais qu'il ne maîtrise pas du tout en ce moment et essaye 45 qui l'éloigne du but cherché alors il corrige et choisit 40 (le seul nombre qu'il peut facilement placer au voisinage de 41 et plus petit que lui). On peut penser qu'il utilise un principe de correction : "si un nombre plus grand m'éloigne un plus petit me rapproche" qui implique qu'il postule à la monotonie de l'application. Et 40 donne un résultat excitant, il est tout près. On peut penser que pour Gaël le résultat confirme la validité de l'intuition : "la preuve" et que de surcroît il voit qu'il faut enlever 1 à 40. Ce qui impliquerait qu'il pressent que une correction de 1 dans les choix corrige le total de 1 dans le même sens. Le théorème va fonctionner pour 2 dans quelques instants. Il ne fonctionnerait probablement pas pour 8 ou 10. Mais Gaël ne sait pas trouver le nombre qui précède 40 - il enlève une dizaine et ajoute une unité : 31 - échec. Retour à la stratégie précédente : l'encadrement, Gaël va augmenter le nombre inférieur 31...33...34... et diminuer le nombre supérieur 43...42... même si les nombres supérieurs restent plus grands que 40 la stratégie peut aboutir... qu'en est-il ?

Cette fois il a utilisé avec succès le théorème de conservation des différences dans la transposition :

$$t(a) - t(b) = a - b$$

ou la différence entre les deux résultats totaux est égale à la différence entre les nombres essayés. $52 - 50 = 2$ alors (le nombre cherché) $- 37 = 2$ ou encore si ajouter 13 à 37 produit 50 pour atteindre 52 c'est-à-dire $50 + 2$, il faut ajouter 13 à $37 + 2$ (c'est-à-dire si $t(a) = t(b) + 2$ alors $a = b + 2$ avec $t(a) = 52$ $t(b) = 50$ $b = 37$), mais seulement parce qu'il n'y avait pas à soustraire en changeant de dizaine. Nous reviendrons sur cette difficulté.

Le premier succès à l'exercice est salué comme il convient par un bavardage libre au cours duquel Gaël déclare qu'il voudra rejouer au jeu du sac et apprendre à trouver, à deviner. L'intervenant lui propose "tout de suite"

G : "oui", I : "avec des petits nombres alors parce que tu es fatigué".

.../...

- Il y a 7 pièces, des triangles et des rectangles.

Gaël compte 3 triangles et range le tout dans le sac.

- Combien y-a-t'il de rectangles ? demande I.

- 7

- Non, sept en tout...

- Combien il y a de rectangles ? Il y en a 3,

déclare Gaël

- On parle ?

L'enfant hésite, se pose des questions

- tu pourrais les dessiner pour deviner...

Il dessine 3 triangles, puis avant de dessiner les rectangles, annonce :

- quatre

I lui dit de les dessiner mais il ne se souvient plus de la forme et doit la palper à travers le sac pour se la remémorer, puis il recompte après avoir fait ses rectangles.

(Ce dernier épisode de l'observation est important, car il montre, accrues par la fatigue les difficultés de Gaël à associer à un nombre ce qu'il représente. Il a bien observé les différentes classes d'éléments, il a compté les éléments, mais il semble se heurter à une barrière lorsqu'il passe d'une notion à l'autre. C'est ce passage laborieux qui cause en grande partie ses hésitations : il reste souvent du côté des classes d'éléments, et lorsque, enfin, il découvre une voie pour les dénombrer, il ne sait plus quel était son point de départ).

Une des sources de difficultés peut venir de la proximité des nombres, ici 4 et 3. Aussi nous avons pris soin dans le matériel de la séance de prévoir des cardinaux des parties assez différents : 45 - 7 puis 39 - 13 (sauf pour la phase initiale 26 - 26 et c'était une erreur 33 - 19)

.../...

Discussion de la 2^{ème} séance

a) Observation des difficultés de Gaël

Cette séance a mis en évidence des difficultés assez anciennes de Gaël avec le dénombrement : difficulté d'attribution durable d'un cardinal à une collection, difficulté de manier plusieurs nombres à la fois surtout si les collections ne sont pas visibles mais même si elles le sont

* avec la numération "rôle privilégié" du nombre 10 qui intervient fréquemment hors de propos comme un nombre fétiche. A ce sujet, on peut remarquer ceci : le rôle privilégié que joue le nombre 10 dans la numération, dans le calcul des sommes ou différences avec retenues ou dans la multiplication doit apparaître comme essentiellement magique à un enfant qui n'entre pas dans le jeu.

surtout

difficulté à "passer les dizaines" dans le compte à rebours et donc à ranger les noms des nombres.

Il est clair aussi que nous avons pu observer d'autres difficultés comme par exemple celle bien naturelle, à soutenir son attention à certains moments mais nous ne nous en occuperons pas pour l'instant.

b) Effets de la séance

Avons-nous la possibilité de répondre à certaines questions que nous nous sommes posées avant cette séance ?

* Il semble tout d'abord que Gaël soit tout à fait capable de rentrer dans une situation d'action. Il a progressivement accepté des règles du jeu qui consistent à prendre en charge un objectif et les moyens de vérifier soi-même qu'on l'a atteint, à hasarder des solutions, à les confronter à un état du milieu. Il a progressivement investi la recherche d'une bonne solution, rejetant de lui-même les contradictions, les solutions inadéquates. Il a pris plaisir au jeu de la prévision et de la vérification même lorsqu'il n'a pas gagné.

* Il s'est engagé volontiers dans la voie de l'anticipation. Ce dernier point est très important à plus d'un titre.

.../...

L'anticipation est le premier pas vers la création d'une théorie et le passage à des rapports expérimentaux ; le sujet renonce au mode procédural, aux seules interactions directes avec le milieu, à la méthode des essais et des erreurs et prend de la distance par rapport à ses actions, cette attitude réflexive le conduit au mode déclaratif.

L'anticipation repose sur l'existence d'un modèle au moins implicite, juste ou faux sur lequel elle se fonde et que l'expression peut mettre à l'épreuve. Ici, le modèle est la relation nombre connu + nombre essayé = 52 et il paraît assez sûr à Gaël pour lui permettre rapidement une simulation de l'expérience (Il n'est pas remis en cause du moins du point de vue de sa validité).

Il est intéressant de noter que Gaël a bien franchi aussi le pas de l'anticipation : nous avons voulu qu'il s'intéresse à la matérialité des données de l'énoncé, nous avons mis en scène les collections dont il s'agit avec un cérémonial insolite et captivant de façon à augmenter la charge affective perceptive et sensorielle de la recherche de la solution, or l'investissement dans l'application est d'une certaine façon antagoniste de l'investissement dans l'action en ce sens qu'elle en suppose le refus au moins provisoire. Ici Gaël doit renoncer aux plaisirs de l'action, de la décision, du pari, du jeu, pour les remplacer par des calculs et des simulations. Mais on peut remarquer toutefois que l'anticipation hérite dans une certaine mesure des motivations associées à la situation qu'elle simule. Gaël expérimente ses prévisions avec un petit frisson de plaisir qui rappelle celui qu'il éprouve au moment des paris.

Enfin la considération successive de plusieurs prévisions possibles au cours d'un même pari et le fait de les écrire va permettre l'examen en même temps des divers choix, et par conséquent le choix d'une stratégie reposant sur la structuration de cet univers des possibles.

Le passage d'une prévision "contingente" où le sujet ne conçoit pas d'autre issue à la situation que celle qu'il envisage à une prévision des possibles est une étape indispensable pour l'émergence d'une "prévision" du nécessaire où l'issue est prévue, parmi d'autres pour des raisons logiques, mathématiques, ou autres mais théoriques.

Gaël est donc capable d'entrer dans toutes ces phases de la dialectique de l'action, de produire et d'éprouver des modèles implicites même si, comme nous le verrons ci-dessous, c'est avec une efficacité assez faible encore. Il est probable qu'il accomplit naturellement cette activité, ce qui explique le développement normal qu'on observe chez lui. Ses attitudes stéréotypées que l'on observe en classe et sa tendance à chercher des solutions faciles dans l'interprétation des suggestions de l'adulte sont donc un effet de sa manière d'utiliser la situation didactique.

Nous avons pu voir ici que cette situation n'est pas inéluctable, le choix d'une situation appropriée a bien produit la rupture que nous avons envisagée, avec les efforts prévus. Bien sûr cette rupture "accidentelle" n'a pas encore changé Gaël ni ses rapports avec la connaissance. Elle a été obtenue en partie en s'appuyant sur son défaut majeur, le désir de séduire l'adulte et d'entretenir avec lui des rapports affectifs et ludiques. Il faudrait que ce jeu avec la connaissance puisse s'instaurer régulièrement et se poursuivre dans les circonstances didactiques ordinaires. Il n'est pas question en effet de demander à la maîtresse de Gaël de beaucoup modifier sa méthode pédagogique qui convient à beaucoup d'autres enfants et qui doit sans doute offrir des occasions similaires de fonctionnement correct, occasions qui ne sont pas saisies par Gaël.

c) Projets.

Il faudra donc étudier les moyens d'engager Gaël dans cette voie et de lui donner le goût et les moyens d'assurer son apprentissage.

Il reste aussi beaucoup à faire pour lui faire acquérir la maîtrise des situations de soustraction et leur donner du sens.

Gaël n'a aucun mal à envisager la position des ensembles en présence. Il parvient sans difficulté à isoler les triangles et les "non triangles" et à les inclure dans la classe de départ, que les "non-triangles" soient clairement une propriété commune ou non (carrés et ronds...)

On pourrait supposer qu'il lui suffirait d'associer à ces opérations ensemblistes les opérations numériques correspondantes, inverses l'une de l'autre, l'addition et la soustraction.

* Certaines méthodes didactiques consistent alors à illustrer l'un et l'autre cas par un ensemble d'exemples et de problèmes, suffisant pour suggérer les champs d'application de chacun. Dans ces méthodes, les procédures de calcul, le modèle implicite, la théorie ne changent pas au cours de l'apprentissage ; il s'agit d'associer une structure mathématique déjà faite à des situations supposées déjà comprises ou compréhensibles et ce sont ces situations qui constituent le sens des opérations mathématiques.

Ces méthodes reposent sur des conceptions de la signification et de l'apprentissage assez anciennes et très discutées. En simplifiant beaucoup on peut les résumer ainsi :

* Le signifié d'une connaissance ou d'une théorie est constitué de l'ensemble de ses réalisations, c'est-à-dire des situations objectives dans lesquelles elle se trouve vérifiée. Donner du sens à une structure c'est lui trouver des applications, des occasions de s'en servir.

* Pour apprendre une connaissance théorique il faut la constituer à partir de connaissances déjà acquises et par un discours ou des moyens logiques (ou mathématiques ou scientifiques ou rationnelles, etc...) eux-mêmes déjà connus, ou en fait "l'apprendre" toute faite directement (au sens de la mettre en mémoire) par exemple comme un algorithme. Donner du sens à une telle connaissance reviendra à lui faire correspondre des problèmes ou des situations où elle est réalisée, c'est-à-dire où les objets dont elle parle sont présents et où les relations qu'elle envisage entre eux sont vraies. L'enseignement consistera à produire des conditions conduisant à associer les deux après avoir mémorisé l'un et l'autre.

* Généralement, dans beaucoup de cas le processus d'apprentissage se ramènera, bien qu'avec des justifications diverses, à des conditionnements : soit que l'on parte de la théorie pour lui chercher des applications ou que l'on parte des cas pour faire abstraire la structure, ou les deux.

Cette association se fait mal car l'interprétation de la situation ne se produit que si l'on possède le schème théorique complet et inversement la théorie s'entend mal si elle n'a pas de justification ni de fonction explicative ou descriptive. L'adaptation miraculeuse et anhistorique de la théorie aux pratiques souhaitées fait obstacle à des apprentissages partiels, il faut apprendre la théorie sous sa forme définitive et correcte, adaptée aux exemples complexes et achevés auxquels elle doit s'appliquer. Le mieux que l'on puisse faire sera de découper la théorie en fragments simples et de chercher des situations simplifiées où ces seuls fragments prendront valeur de théorie ou d'algorithme... toujours parfaitement adapté. Mais que l'on fragmente ou non on en revient à devoir associer deux connaissances déjà "achevées" apprises ou constituées indépendamment l'une de l'autre.

Pour pallier aux difficultés de l'apprentissage de cette association (non motivée pour l'élève et qui repose entièrement sur une décision didactique) l'enseignant peut raffiner la méthode par la mise en oeuvre d'illustrations (manipulations, schémas, discours mnémotechniques destinés à souligner l'association, mais qui ne font pas avancer l'un ou l'autre.

Ici, on pourrait "enseigner" à Gaël les éléments qui lui manquent : faire un schéma, identifier dans une situation le schéma convenable, concrétiser la soustraction par la répétition de manipulations et l'association d'un discours approprié... j'enlève je retranche... etc...

* Nous cherchons ici au contraire à faire construire et apprendre une théorie à Gaël en suivant un autre processus, historique celui-là. Nous expliquerons ce processus dans un autre chapitre mais on peut voir tout de suite en quoi il va différer des méthodes classiques.

Nous allons considérer une autre composante du sens

.../...

de la soustraction, telle qu'est constituée par toutes les procédures plus primitives qui ont permis d'obtenir le même résultat dans des conditions particulières sans que soit mise en oeuvre une théorie préalable ou un transfert conventionnel de connaissance - mais seulement des schèmes opératoires variables, et adaptables.

Par exemple, pour retirer 5 de 57 on peut compter à rebours en repérant éventuellement sur les doigts pour s'arrêter au bout de 5 : 56 55 54 53 52. Certes c'est plus compliqué comme procédure, mais l'enfant peut se référer de façon très étroite à ce que représentent les nombres et les noms des nombres au cours du dénombrement. C'est donc plus économique (ou plus primitif/en ce qui concerne les connaissances théoriques). C'est en tout cas impraticable s'il s'agit de retirer 39 de 57.

On peut prétendre dans le schéma théorique qu'il est logiquement équivalent de retirer a ou b de c dès lors que $a + b = c$ mais il est clair que ce n'est pas vrai dans le cas présent : pour retirer 52 de 57, il faut "inventer" un autre système et compter de 52 à 57 en comptant sur les doigts ou autrement ce qui manque :

52	53	54	55	56	57	
	"	1	2	3	4	5

Il est bien connu que dès que les objets ne sont plus concrètement présents, ces procédures échouent car l'élève ne sait jamais s'il faut "compter 1 avec 52 ou avec 53". Bien sûr dans les méthodes classiques d'enseignement, le maître ne manquait jamais d'examiner "tous les sens" de la différence : ce qui manque, ce qui reste, ce qui est en trop... ou en moins... etc... mais toujours à plat comme les facettes d'un même savoir, et sans se soucier de l'adaptation de ces points de vue ni de leur place dans une genèse de la communication.

La méthode qu'utilise Gaël ici est différente et basée sur une meilleure connaissance de l'ensemble ordonné des naturels et de leurs ordres de grandeurs. Pour trouver ce qu'il faut ajouter à 39 pour obtenir 59, elle consiste à prendre un nombre voisin du résultat et sur lequel les calculs sont simples par exemple 20, puis à corriger à l'aide du théorème de conservation des différences :

$39 + 20 = 59$, qui dépasse 57 de 2 alors il suffit d'ajouter

.../...

20 - 2 = 18. Cette méthode est très utilisée en calcul mental. Evidemment elle n'est pas une "méthode" pour Gaël, elle n'est pas utilisable dans n'importe quel genre de situations, elle n'est pas reconnue pour telle, elle n'est même pas une connaissance : Gaël serait bien incapable de dire à son père ce qu'il a appris au cours de la 2ème séance. Il faudra tout un processus pour le conduire à un objet de connaissance à la fois efficace, bien conscient et bien maîtrisé sur le plan théorique.

Et pourtant cette méthode se heurte à des difficultés anciennes de Gaël avec la numération. Nous pourrions croire que nous voyons ici comment un défaut d'acquisition d'une notion ancienne peut rendre impossible une activité essentielle pour comprendre une notion nouvelle. En fait, non, nous sommes en présence d'une véritable situation d'apprentissage de la numération. Si Gaël a peu de prise sur la situation en tant qu'occasion d'apprendre la soustraction puisqu'il ignore les intentions de l'intervenant et où se trouve l'objet de son désir didactique, il est clair pour lui qu'il bute sur la possibilité de compter certains nombres (trouver le prédécesseur de 40). C'est ce qui l'empêche de mettre en oeuvre une stratégie efficace. Pas de doute que lorsqu'il trouve, après un autre raisonnement, 39, cette réponse vient prendre sa place aussi comme réponse à la question : "quel est le prédécesseur de 40 ?".

On pourrait tout de suite "didactifier" cette partie de l'apprentissage : reconnaître la difficulté, rappeler les moyens de la surmonter, réexpliquer, faire des exercices de comptage à rebours, etc... nous ne le ferons pas. Mais pour bien repérer le caractère didactique des difficultés de Gaël, nous avons ménagé une courte séquence de ce type en fin de la séance suivante.

* Pour revenir à un plan d'apprentissage de la soustraction d'autres stratégies peuvent apparaître dans d'autres conditions (avec d'autres nombres) mais avec la même situation de base :

par exemple de 39 à 40 - 1, de 40 à 50 - 10, 10 et 1 onze et de 50 à 57 : 7, 11 et 7 : 18. Cette méthode, la plus répandue en calcul mental, s'appuie, elle aussi, à la fois sur l'ordre et sur la numération décimale. Elle devient plus efficace

.../...

pour de plus grandes différences. L'algorithme habituel peut apparaître comme un raccourci de la précédente ou comme le résultat d'un autre raisonnement. L'apprentissage pourra s'organiser en une présentation fréquente de la même situation didactique où ne varieront que certaines conditions favorisant la constitution de ces stratégies. La possibilité de remplacer une par une autre va leur conférer une certaine équivalence (du point de vue du sens) le choix de l'une ou de l'autre dépendant de sa commodité ou de son efficacité. Ces stratégies mobilisent tous les schèmes fondamentaux de la somme et de la différence. L'ordre de leur apparition constitue une genèse (bonne ou mauvaise) du concept et lui donne un sens.

Nous n'évoquerons pas ici les processus de formulation de validation de l'institutionnalisation qui permettent l'émergence de la soustraction en tant que théorie à la disposition de l'enfant.

La recherche de problèmes relevant des schèmes relève des mêmes processus qui seront étudiés plus loin.

Ainsi dans la 3^{ème} séance nous allons reprendre la même situation.

3. TROISIEME SEANCE

L'intervenant reprend donc sans modification le jeu de devinettes de la dernière fois : il y a 56 pièces que Gaël compte et met dans un sac, après avoir écrit le nombre sur une feuille. L'intervenant retire ensuite 10 gros ronds du sac, les fait compter par Gaël puis les enfouit avec le premier sac dans un second. Il s'agit de savoir combien il y a de pièces dans le petit sac intérieur.

Gaël réfléchit, compte jusqu'à dix et répond : "cinq !" L'intervenant lui montre les 10 ronds puis secoue le petit sac et lui demande s'il croit vraiment qu'il n'y en a que 5, Gaël sourit, cligne des yeux et secoue la tête, exprimant qu'il se rend bien compte qu'il a fait une erreur. En fait, Gaël vient de reproduire son mode de réponse habituel ; il compte jusqu'à dix, comportement stéréotypé, puis puisqu'il faut bien répondre, dit n'importe quoi.

L'intervenant n'accepte pas cette réponse. En classe, le maître ne peut pas avoir cette exigence têtue envers chaque élève pour chaque problème.

Alors Gaël poursuit à mi-voix, "56... il y en a 10 alors... (il compte jusqu'à 40), j'en suis à quarante, et on enlève 10,... ça fait quarante !" En fait, il n'a pas changé de procédure, il a simplement donné un nombre plus plausible conformément à l'attente exprimée par l'adulte. Le fait de devoir retirer 10, le nombre magique, contribue peut-être à un désarroi.

L'intervenant alors, lui rappelle le principe de la vérification de leurs affirmations pendant la séance précédente "nous faisons un pari et nous vérifions si nous avons raison"... sans dire, bien sûr, quelle opération était utilisée. Pendant ce temps, l'enfant réfléchit en riant, puis s'exclame :

- 46 !

Il semble évident qu'il est sûr de sa réponse. On pourrait penser qu'il a suffi de rappeler les conditions de la situation, pour rendre possible un contrôle de sa réponse, et donc l'apparition d'une réponse correcte. On pourrait aussi

.../...

penser que Gaël a joué un jeu plus subtil lâchant des réponses provisoires pour gagner le temps d'achever sa réflexion ou même simulant ses difficultés habituelles en taquinant l'intervenant. En tout cas, cette scène montre bien le besoin de Gaël de "meubler le silence".*

I : "Pourquoi dis-tu que ça fait 46 ?" continue l'intervenant un peu interloqué par la rapidité de la réponse

G. : "Parce que je sais qu'à 10 on enlève 5, alors ça fait 4 et puis il reste 6 alors ça fait 46."

I : !!!

Sans doute faut-il traduire ainsi cette réponse : à 5 dizaines, on enlève une dizaine (formulé à l'envers), il en reste 4. Dans 56, il y a 5 dizaines et 6 unités, ces 6 unités rajoutées aux quatre dizaines on obtient 46.

Ici Gaël utilise à plein les ressources de la numération pour effectuer sa soustraction selon le schéma suivant $56 - 10 = (50 + 6) - 10 = (50 - 10) + 6 = 40 + 6 = 46$. Il est vrai que cette méthode donne dans ces conditions une procédure plus simple que celle qui aurait été nécessaire lors de la séance précédente :

$$\begin{aligned} 52 - 7 &= (50 + 2) - 7 = (50 + 2) - (2 + 5) = (50 + 2 - 2) - 5 \\ &= (50 - 5) = (40 + 10) - 5 = 40 + (10 - 5) = 40 + 5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Et déjà cependant Gaël éprouve des difficultés à formuler sa demande.

Cette difficulté se manifeste par l'incapacité à désigner l'ordre des nombres qu'il énonce et par l'apparition d'une inversion d'une relation (à 10 on enlève 5 au lieu de à 5 on enlève 1 dizaine). Souvent tout se passe avec Gaël comme s'il abordait les relations en deux temps : d'abord la relation binaire et la paire qu'elle lie, puis l'identification du couple. De même, par exemple, dans 21, il appréhende d'abord la paire, puis le couple (2,1), c'est-à-dire 2 "trucs" et 1 "machin", puis, si nécessaire, l'ordre 2 dizaines et 1 unité, c'est-à-dire 20 et 1.

Après avoir expliqué sa réponse (46) Gaël va la vérifier. Mais auparavant, I lui demande si l'on ne peut pas savoir combien il y a de morceaux sans ouvrir le sac.

Réponse de Gaël : "ah non, on peut pas savoir..."

.../...

I lui rappelle alors la méthode utilisée la fois précédente, lorsqu'on considérait que le sac contenait un certain nombre de pièces et qu'à ce nombre on ajoutait les éléments dispersés sur la table : si l'on ne s'était pas trompé, on obtenait le nombre de pièces total. Gaël utilise donc cette méthode et s'aperçoit qu'effectivement, il ne s'est pas trompé. Pour être tout-à fait sûrs du résultat, ils vont vider le sac et compter toutes les pièces après avoir parié, mais Gaël dit qu'il n'est pas "tout à fait sûr" de gagner.

Ils comptent chacun une partie des pièces, l'intervenant faisant des piles de 10 éléments. Lorsqu'à eux deux ils ont dénombré 40 morceaux, Gaël s'arrête et dit :

"Ah, je sais que j'ai perdu"

mais l'intervenant lui conseille de continuer et il s'aperçoit en fin de compte que son résultat était exact.

Un observateur pourrait d'abord s'étonner de voir que Gaël a oublié ce qui avait constitué la clé, le moteur de l'anticipation lors de la séance précédente. Mais nous savons qu'une des difficultés de Gaël provient de ce qu'il ne se souvient pas de ce qu'il a fait précédemment en mathématiques. De plus, la suggestion avait été faite par l'intervenant; Gaël s'était contenté de s'en saisir pour réaliser son projet de prévision de façon plus satisfaisante (pour l'intervenant) par soumission au désir de l'adulte. Celui-ci, d'ailleurs, n'avait rien fait pour attirer l'attention de l'enfant sur ce procédé. Dans le contrat didactique c'était, pour l'un comme pour l'autre, un moyen, pas un objet de connaissance "à apprendre". Il est donc, d'une certaine manière satisfaisant de contrôler "l'innocuité" d'une suggestion non institutionnalisée.

Si le moyen de contrôle avait été "enseigné" il y aurait eu danger de le voir utilisé comme moyen systématique de trouver la solution, et même sous la forme la plus évoluée, d'addition à trou, c'eut été dommage et sans doute raté d'ailleurs pour la création du sens.

Mais il est clair que par contre Gaël fait immédiatement son affaire de la prévision, du pari et de la vérification. Pour lui, il serait très décevant "qu'on puisse savoir à l'avance" même la preuve par conséquent est douteuse,

et Gaël entretient le suspense ("Ah... je sais que j'ai perdu") jusqu'au dernier moment.

I : "Est-ce que tu crois que tu saurais trouver si on faisait autre chose ?

G : Peut-être mais j'en suis pas sûr (ne prenons pas de risques !)

Ils prennent les petits ronds et remettent tout le reste dans le sac. Gaël est d'accord pour dire qu'il y a toujours 56 éléments dans le sac, et l'enfant fournit la réponse suivante :

"là, je crois avoir trouvé. Là on fait 50 et puis là, y'en a 6, si on enlève 5 à 6 ça sera ceux-là (il montre les petits ronds) et puis y reste un alors ça fera 51".

Dans ce dernier raisonnement, apparemment l'enfant a mis mentalement de côté 5 piles de 10 et a gardé les 6 éléments "unités" auxquels il a pu retrancher 5. Mais que serait-il advenu s'il y avait eu par exemple 7 petits ronds ?

L'intervenant lui fait écrire son résultat (51) et lui demande de le prouver, sans compter.

Gaël : "là y a 5, ça reste toujours pareil"

I : 5 quoi ? 5 dizaines ?

G : oui, ça, si on enlève 6, y en aura 5 d'enlevés, non si on enlève 5 y en aura plus qu'un, les 5 je les mets là (petits ronds), il reste 1 (sac) et là 5.

(L'enfant a donné un certain caractère immuable aux 5 dizaines : "ça reste toujours pareil". Dans 56, il y a 50 et 6. Si on enlève 6 (à 56) et qu'on enlève 5, il reste 1, donc il s'occupe de ces 6 éléments-là, rassuré car il sait que les 50 autres n'ont à subir aucune opération).

L'intervenant le ramène à l'autre méthode de vérification, ajoutant 5 aux 51 supposés être dans le sac.

I : "Qu'est-ce qu'on fait là, 51 et puis ?..."

G : "ça y est, j'ai tout compris, comme y en a 51, on compte et on trouve le même nombre"

Il paraît vraiment satisfait car il a retrouvé l'algorithme utilisé la fois précédente et y assimile la possibilité de preuve.

Mais il est vraisemblable que cette fois, il a perçu l'intention didactique - à travers l'insistance de l'intervenant.

Le compte à rebours "le passage des dizaines"

Pour donner l'occasion à Gaël de s'exercer aux comptes à rebours et surtout au franchissement des nombres ronds de dizaines, l'intervenant utilise le même jeu.

Il y a toujours 56 éléments dans le sac, mais il en sort certains (un par un, au début) et à un moment il dit "top" et l'enfant doit dire combien il reste dans le sac.

Pour lui faire bien comprendre la règle du jeu, il prend le sac ne sort aucune pièce et dit top. L'enfant répond 56. Puis il en enlève une et dit top. Gaël hésite puis déclare "55". L'intervenant continue, en retire 2, Gaël ne se trompe toujours pas et dit "53", mais lorsqu'on en enlève 3 autres, il répond 40. Ils parient alors un caramel, Gaël compte à partir de 40 en ajoutant tous les éléments qui sont hors du sac. Arrivé à 46, il dit qu'il a gagné.

L'intervenant lui fait remarquer qu'il y en avait 56 puis ils recommencent. Lorsqu'il y a 50 pièces dans le sac, il en enlève 3, mais l'enfant ne semble pas suivre l'action.

(Décidément, tant qu'on était dans la même dizaine, de 56 à 50, il n'y avait pas de problème pour compter à reculons, mais la difficulté se situe au niveau du changement de dizaines auquel se heurte Gaël).

Gaël est un peu perdu, mais finit par découvrir la solution et désigne successivement les 3 derniers éléments en comptant : 49, 48, 47.

Le jeu se poursuit, avec un "top" à 43 qui ne pose aucun problème, puis on en enlève 3. Gaël répond : 39.

Il parie, vérifie en ajoutant 3 à 39 puis se demande : "il y a pas 39, alors qu'est-ce que ça peut bien être ?"

Il compte à rebours et trouve 40, nombre confirmé par la vérification.

Le jeu se poursuit ainsi quelques minutes, mais l'intervenant ôte ensuite les éléments par dizaines et Gaël

.../...

n'a alors aucune difficulté à donner le résultat, terminant ainsi la séance sur un succès.

Commentaires sur la 3ème séance

1. Appréciation des résultats.

La reprise du "jeu" des sacs avec des données un peu plus simples il est vrai a permis à Gaël de retrouver le schéma initial et de produire des raisonnements attendus. Nous avons retrouvé aussi chez lui les difficultés et les erreurs déjà connues. La répétition de situations de ce genre permettrait sans aucun doute de le conduire progressivement à corriger ses erreurs d'écriture des chiffres, à bien connaître la numération décimale et à donner du sens aux problèmes de soustraction. D'autant plus que l'intervenant a su développer avec Gaël une relation agréable. Nul doute que pour faire plaisir à l'adulte Gaël identifiera ce qui lui fait plaisir, manifestera les comportements attendus et simulera les acquisitions voulues. Le temps de lier des relations affectives qui ne reposent plus sur le contrat didactique ou de les rompre. Mais cette remarque et ce que nous avons observé dans cette séance au sujet des rapports de Gaël avec la certitude montrent qu'il serait assez vain de poursuivre dans cette direction.

2. Observations et analyses.

L'attitude d'évitement de Gaël face à la certitude qui en soi est surprenante, devient plus compréhensible si on la met en relation avec tout ce qui particularise ses démarches cognitives.

Depuis le début des interventions, nous avons été frappés par cette profonde tendance de Gaël à donner des réponses spontanées plus ou moins plausibles. Il semble incapable de suspendre quelque temps des réactions très impulsives afin de réfléchir, de rassembler des informations, de construire lentement les inférences nécessaires. Bref, on retrouve souvent cette difficulté à entrer dans des processus secondarisés.

.../...

Ce que nous pouvons admettre c'est qu'en l'absence de déficit sur le plan opératoire, une telle attitude a un sens du point de vue du sujet : à travers elle, il poursuit une satisfaction ou évite un déplaisir. Ce qui est mis à distance par ce comportement durant les apprentissages c'est bien le champ de la certitude. Nous avons plus haut remarqué combien il était malaisé de lui faire quitter le domaine du possible pour celui du nécessaire.

. Fuir la maîtrise totale de la connaissance par l'évitement de tout raisonnement au profit de réponses données au hasard c'est en effet rester, pour Gaël dans le domaine de l'incertitude. Cette tendance est si forte que, sûr du résultat, il tente encore par un véritable déni d'abolir le caractère de certitude de son raisonnement "Ah je me suis trompé !"

Nous nous trouvons alors devant un des points les plus délicats d'une intervention didactique de ce type. L'échec en mathématique apparaît ici avec sa signification symptomatique c'est-à-dire qu'il renvoie à l'organisation totale du sujet et à l'équilibre actuel de ses investissements.

Dès lors, si l'intervention prend l'aspect d'une rééducation au sens strict, visant la disparition du symptôme par la mise en oeuvre de stratégies diverses : aider l'enfant à utiliser des raisonnements etc... on court le risque d'un échec ; le contre-investissement de l'enfant va jouer et l'intervenant sera impuissant à modifier profondément les conduites d'évitement du sujet. Il est également possible d'entraîner des décompensations dans la mesure où ces attitudes jouent leur rôle de défense contre l'angoisse.

Faut-il alors adopter une approche clinique qui tendrait à déterminer le sens inconscient des conduites d'évitement que traduisent probablement les démarches de Gaël dans le domaine mathématique ? Mais une telle approche est particulièrement malaisée. Elle le serait dans le cadre d'une thérapie analytique où toute forme d'inhibition intellectuelle se révèle un symptôme particulièrement complexe et largement surdéterminé. Elle l'est d'autant plus dans le cadre d'une intervention où le matériel à travers les textes projectifs reste fragmentaire et où tout ce qui a trait à l'histoire du sujet ainsi qu'aux relations intra familiales nous reste inconnu pour la majeure partie.

.../...

Les seules hypothèses quant au sens à donner au symptôme s'appuieraient uniquement sur l'investigation psychologique faite avant la première séance. Nous pourrions mettre en effet en relation ce que Rorschach et le CAT nous avaient révélé avec les caractères symptomatiques du comportement de Gaël ; les conduites de stupeur et de profond bouleversement devant certaines planches chez un enfant par ailleurs bien équilibré nous avaient conduit à l'interprétation d'une angoisse et d'une culpabilité très forte face à la curiosité liée à l'activité sexuelle des parents. On pourrait, et des références à la théorie psychanalytique nous y autoriseraient reconnaître dans les conduites d'évitement de Gaël, une signification latente liée à la scène primitive ; demeurer dans l'incertitude sur le plan des démarches de la pensée, c'est s'assurer contre l'angoisse de (re)connaître la sexualité des parents et d'affronter les pulsions sadiques liées à cette connaissance.

Mais quand bien même cette interprétation serait vraie, elle ne nous serait d'aucune utilité. Notre projet n'est nullement de travailler avec l'enfant à l'élucidation du conflit oedipien ; dans un champ psychothérapique le projet didactique disparaît.

C'est donc dans le domaine de l'apprentissage mathématique que nous resterons, mais nous considérerons le fonctionnement mental que nous avons repéré dans ses rapports avec l'organisation globale et s'ingérant dans l'équilibre économique de l'enfant. Il s'agit, non d'apprendre l'enfant à raisonner, mais de lui donner au sein d'activités mathématiques dont nous allons parler, l'occasion de réinvestir cette fonction.

3. Projets d'interventions.

a) Situations à présenter à l'élève.

Quels sont les moyens didactiques que nous connaissons et qui permettent de faire fonctionner des raisonnements. Il ne s'agit pas pour l'instant de leur contenu ou de leurs méthodes, mais de leur motivation et surtout de leur contrôle par la conviction.

.../...

Techniquement, la conviction des élèves s'éprouve, se manifeste, s'affirme et se conforte dans les quatre grands types de situations didactiques. (que nous étudierons au chapitre 3), sous une forme différente spécifique à chacune : dans les situations d'action c'est par les décisions ou par la confiance dans les anticipations qu'elle s'exprime ; dans les situations de formulation, le fait de communiquer ou d'exprimer une idée ne témoigne pas toujours d'une grande conviction à son endroit, mais précisément l'objectivation qu'elle constitue joue un rôle essentiel dans l'élaboration de la conviction par la distance qu'il permet d'instaurer entre ce qui est dit et ce qui est perçu entre une proposition et sa valeur de vérité implicite. Les situations de recherches en classes dont on nous a dit qu'elles provoquaient chez Gaël une bonne participation et des trouvailles intéressantes ont probablement ce caractère : Gaël peut dire ce qui lui passe par la tête le maître triera ce qu'il veut, donc il peut dire des choses qu'il "voit" vraies sans affirmer qu'elles le sont.

Les situations où s'expriment et s'éprouvent les jugements et les preuves sont les situations de validations. Il entre dans la convention de cette situation que les sujets échangent des opinions à propos d'un fait et s'engagent à son sujet. En général, les situations de ce genre que nous proposons mettent en présence un proposant et un opposant qui sont tous les deux des élèves, afin qu'ils élaborent un système de preuve - une théorie - fondée sur la conviction intime et non sur l'autorité. C'est que la recherche de la vérité est une activité exigeante, il faut y tenir assez pour refuser de se laisser convaincre par autre chose que son propre jugement sans jamais refuser toutefois d'examiner aucun argument. Il faut résister à l'autorité, à la séduction, à la rhétorique, à l'intimidation, à la convention sociale, etc... Et lorsqu'il s'avère que son opinion est fautive, il faut aussitôt aller à résipiscence, se dédire et résister là aussi aux mêmes difficultés. Difficultés légitimes et qui tendent à l'établissement de vérités assez stables dont rendent compte par une sorte d'engagement personnel et social les personnes qui les professent.

Dans les situations d'institutionnalisation de la connaissance au contraire des précédentes, la conviction personnelle est supplée, secourue ou supplantée par la référence à une norme extérieure au sujet, sa conviction devient seulement adhésion fondée.

Quelles sont les situations les plus appropriées au cas de Gaël, et lesquelles pourront lui être proposées ?

Une méthode classique consisterait à "exploiter" la situation d'action que nous avons créée dans les séances deux et trois, c'est-à-dire à pousser Gaël à prendre parti, à formuler des déclarations, à les affirmer, à les retirer, dans une relation duelle avec l'adulte. L'intervenant tirant à chaque instant une morale des actions de Gaël ou la lui faisant tirer. Par exemple, il répèterait des situations de pari en insistant : "il faut être sûr ! es-tu certain ?..." Nous savons que cette méthode ne peut aboutir.

D'autre part, l'intervenant étant seul avec Gaël, ne pourra pratiquement pas organiser de véritables situations de validation dans lesquelles l'enfant aurait à s'affirmer devant un égal. Il devra les simuler - et peut-être ceci vaut-il mieux dans la mesure où une certaine identification pourrait aider Gaël à sortir de son alternative. Mais il y a un danger, dans le sens de ses tendances, de rester avec l'adulte dans une relation superficielle et ludique écartant toute possibilité d'un débat sur la connaissance. Les attitudes ludiques sciemment utilisées par l'intervenant pour "justifier" les débats risquent d'être "récupérées" pour reproduire le dilemme fondamental signalé plus haut. Il faudra donc que l'intervenant accomplisse une nouvelle modification du "contrat didactique" en réintroduisant des exigences. En fait, il serait souhaitable d'obtenir une suite de ruptures ; alternativement l'intervenant se présenterait soit comme un partenaire, un complice dans un jeu, soit comme un interlocuteur qui attend quelque chose de lui, et qui dit quoi. Il paraît évident toutefois que l'objet de l'enseignement doit rester caché pour éviter l'adhésion immédiate et la soumission dont nous avons parlé. Nous allons revenir sur le jeu auquel doit se livrer l'intervenant afin de faire multiplier et varier les positions de Gaël à propos de la certitude et de l'incertitude.

Mais déjà, si l'on reprend le jeu des paris, on pourrait peut-être échapper à la récupération à laquelle nous avons fait allusion sans que soit exigé un changement d'attitude de l'intervenant : en multipliant les paris et le nombre des données en présence. De cette façon, même si Gaël prend quelques calculs comme occasions de s'évader de l'exigence d'exactitude, on peut parier qu'il ne les fera pas tous faux pour peu que ses connaissances le lui permettent.

En ce qui concerne le contenu il serait utile de continuer l'étude de la numération, de plus la suite naturelle du processus engagé à propos de la soustraction va conduire à la construction et à l'usage d'un système de symbolisation des quantités en présence. Nous analyserons de ce point de vue les situations retenues après les avoir présentées.

Dans le cas de Gaël, quelle position ce partenaire peut-il occuper ? Nous savons combien Gaël est dépendant du climat affectif, à quel point son attitude est déterminée par celle de l'autre. Une attitude de trop grande neutralité affective le rejette aussitôt dans des réactions stéréotypées de fausse activité intellectuelle, une trop grande connivence lui permet d'entrer dans des attitudes ludiques où il peut faire l'enfant. Trouver la bonne distance est primordial, ce que l'intervenant vise c'est une complicité de bon aloi où intervient sans cesse la médiation de la connaissance et ses exigences propres.

fort bien en comptant à rebours. L'intervenant lui fait donc noter son résultat : 6, et rajouter le nom de la couleur pour se souvenir de ce dont il s'agit. Même processus pour les jaunes, mais parvenu aux rouges, il hésite : y en avait-il 9 ou 10 au départ ? Il opte pour 9, tout comme il pense qu'il y avait 6 bleus. L'intervenant lui suggère de vérifier en recomptant les objets et d'écrire pour ne plus oublier :

9 bleu	10 vert	10 rouge
		6 jaune

Ils remettent ensuite le tout dans le sac et recommencent. (On s'aperçoit que Gaël est continuellement sous le contrôle de l'intervenant qui intervient souvent et décide pour lui, mais il essaie de retrouver la situation de jeu, semblant vouloir échapper à cette relation didactique).

(L'aspect de jeu reste malgré tout apparent, bien qu'on note une prépondérance de l'opération et une mise à distance de l'activité ludique proprement dite : A chaque essai, Gaël doit faire 4 anticipations).

Le jeu des estimations a exactement la même structure que le jeu précédent mais les données sont des 4-uplets et la réponse aussi : par exemple au premier essai il faut effectuer :

$$(9 ; 10 ; 6 ; 10) - (1 ; 0 ; 2 ; 4) = (8 ; 10 ; 4 ; 6)$$

Pour l'enfant l'opération se présente comme une suite de trois soustractions, mais Gaël doit bien garder en mémoire les quantités par catégories : bleu, rouge, jaune, vert.

Par rapport au jeu précédent, cette augmentation de la complexité (compensée en partie par le choix de petits nombres) va rapidement poser un problème d'ordonnement des opérations et donc le classement des représentations données.

Mais il s'agit seulement de jeux "introductifs. Ils sont l'occasion de faire entrer progressivement en scène les éléments de représentations symbolique dans des conditions qui leur donnent un sens déterminé, mais il est supposé que ces représentations soient connues de Gaël et la situation donne un sens conventionnel. Par exemple l'intervenant va faire faire un tableau qui évidemment préfigure la numération et qui résoud ce problème,

dès l'essai suivant. Gaël sait parfaitement utiliser ce tableau d'ailleurs mais une partie du discours de l'intervenant va porter sur la justification du tableau qui va prendre ainsi une signification explicitée et convenue avec l'enseignant.

S'il avait attendu que Gaël se rende compte lui-même de la nécessité de faire un tel tableau et le propose, il est probable qu'il aurait été déçu : Gaël peut parfaitement se tirer d'affaire avec la notation même désordonnée du premier essai, il aurait fallu des conditions beaucoup plus dures (nombre de côté, élevé, grande fréquence des mouvements de pièces, nombres plus grands) pour justifier et provoquer l'invention d'une présentation de comptable. Le gain cognitif d'une telle situation aurait été bien faible par rapport à l'énergie et à la motivation qu'il aurait fallu y engloutir.

2ème essai.

L'intervenant propose à Gaël de décider à l'avance combien d'objets il va enlever du sac. Gaël retire 7 objets puis détermine très exactement la quantité d'éléments de chaque couleur restant dans le sac, en regardant les chiffres inscrits sur la feuille, auxquels il retranche les objets étalés sur la table.

L'intervenant lui propose ensuite une "façon d'écrire qui économise du temps" c'est-à-dire un tableau qui se présente ainsi :

	bleu	rouge	jaune	vert
Tout	9	10	6	10
Enlève				
Reste				

- Quand on compte tout, combien y a-t-il de bleus ? questionne l'intervenant

- 9

- Où vas-tu l'écrire ?

Gaël indique la case et complète ainsi toute la ligne, réalisant "l'économie d'écriture".

Cette séance, du point de vue didactique, est manifestement une phase de transition destinée à mettre en place le décor d'une nouvelle situation d'apprentissage. Le domaine de cette nouvelle situation est celui du jeu du marchand qui vend et qui réapprovisionne son magasin, il s'agit de tenir sa comptabilité, les règles sont, du côté de la comptabilité celles du jeu des paris où une stratégie de base a été utilisée plusieurs fois. L'objectif c'est une prévision correcte, les moyens de contrôles pouvant être l'inventaire ou seulement le "contrôle de la comptabilité" par addition et "balance", le tout plus ou moins fréquent. La méthode de solution visée comme but de l'apprentissage est le calcul de la soustraction ou l'addition à trou, Sur des nombres assez grands, cette méthode est bien meilleure, pour l'action, bien plus efficace que les stratégies actuellement parfaitement maîtrisées par Gaël au niveau de la preuve. Mais pour permettre des discussions justificatives le jeu comporte une surdétermination : la manière d'emballer les objets suit une règle qui pourra servir de modèle à la base 10. Il s'agit d'une numération hybride (de position mais avec des rapports différents entre les unités. Cette surdétermination didactique s'appuie sur des conventions un peu arbitraires mais justifiées. Mais de cette façon Gaël va devoir constamment faire des calculs de transformations d'unités.

Il est bien évident que toute cette période est une phase d'institutionnalisation didactique. Tout en simulant un jeu connu qui demande la participation de l'enfant à un niveau "subalterne" par rapport aux "nouvelautés" introduites, le maître communique les règles d'un jeu nouveau... à venir. Dans les situations ordinaires en classe, le jeu ne vient jamais sinon sous la forme d'un très fermé exercice d'application.

Et Gaël ne s'y trompe pas, à mesure que le nombre des interventions didactiques augmente, il passe progressivement de son attitude vivante et souriante à une autre plus sérieuse, plus concentrée. Consciencieusement, il se met à la tâche. Appliqué mais toujours gentil et

.../...

même amical il entre dans sa position d'élève qui apprend sous la houlette de son maître. Il est temps de rompre ce contrat confortable et dangereux pour Gaël et d'échanger les positions de l'intervenant et de l'élève.

3. Jeu du menteur.

Ils renouvellent le jeu mais cette fois-ci c'est l'intervenant qui retire les objets du sac et, par ailleurs, il inclut un nouvel élément dans la règle : on joue au menteur. Comme Gaël ne sait pas de quoi il s'agit l'intervenant explique :

- "je vais retirer des objets, et quand j'auri fini je dirai : il y a tant de verts, tant de bleus, etc... (dans le sac), et si je me trompe, tu me dis "menteur". Si j'arrive à mentir, je gagne, mais si tu réussis à m'attraper quand je mens, tu gagnes !"

Ils font une première tentative ; l'intervenant sort un petit tas d'objets et affirme :

- "il reste 6 bleus dans le sac.

A sa demande, l'enfant écrit le chiffre sur le tableau et vérifie en comptant à rebours, partant de 10 et ôtant tous les objets bleus en vue. Il est d'accord avec le chiffre annoncé.

- "il reste 6 rouges déclare ensuite l'intervenant".

- "6 rouges, répète Gaël, 6, 7, 8, 9 (il rajoute les rouges étalés sur la table) : menteur !

Gaël a dit ce mot avec à la fois un peu de gêne et beaucoup de plaisir. Il sourit. Il lui a fallu de l'audace bien qu'il sache que la convention autorisait cette licence. Sous la fiction du jeu, Gaël rentre dans l'autre rôle, celui de cet interlocuteur : intérieur dont nous avons parlé. Il ne resterait plus qu'à laisser à Gaël le choix de la position pour obtenir quelque chose qui ressemblerait tout à fait au jeu de la bobine.

Vérification faite, oui Gaël a raison et l'intervenant est pris. Remarquons que son "erreur" était une malignité et pour Gaël la détection de cette erreur est devenue un jeu, une recherche de complicité et d'accord et non pas une agression. Il y a là plus qu'une nuance entre la

.../...

signification classique de l'erreur et celle symbolique, qu'elle prend ici. Peut-être plus tard Gaël pourra-t-il traquer lui-même ainsi sa propre "malignité".

Ils continuent de même avec les autres couleurs et l'enfant ne se trompe pas, mais au fur et à mesure, il n'a pas inscrit sur le tableau les objets enlevés et les objets restants. L'intervenant lui conseille de récapituler : pour les rouges, le chiffre annoncé était 6 et Gaël avait dit "menteur". A ce six, il rajoute les 3 qui sont sur la table, ce qui confirme son jugement. Mais ne sait plus comment faire pour obtenir 10 rouges en tout. Il faut l'aider :

- "Combien y en-a-t-il en tout ?
- 10
- Et là làmbien ? (sur la table)
- 3
- Alors il en reste...
- 7"

Remarquons aussi que si Gaël ne cesse pas de faire les "petites erreurs" que nous lui connaissons, l'intervenant se garde bien d'en faire le procès et se contente de les faire rectifier.

A mesure que la situation devient plus complexe et que les occasions d'examiner des différences ou d'effectuer des soustractions se multiplient, Gaël développe des stratégies qui vont servir de signifié à l'opération et les met en oeuvre avec de plus en plus de facilité. Ainsi, pour contrôler la validité de l'affirmation " $10-3 = 6$ ", il effectue $6 + 3 = 9$.

(Maintenant Gaël ne présente plus, comme auparavant, la même attitude d'échec face à la soustraction, cette sorte de refus qui semblait apparaître dans les premières séances. Il la manipule actuellement plus facilement, mais sans toutefois pouvoir toujours l'utiliser de façon systématique chaque fois que c'est nécessaire ou tout au moins plus utile. Ainsi, quand il a 10 et 3, il sait qu'il faut "faire 10-3" pour trouver ce qui "reste" (but de la soustraction), mais lorsqu'il avait 6, puis 9, et qu'il voulait 10, le problème lui semblait totalement différent).

L'intervenant lui fait ensuite compléter la

ligne des "enlevés" mais il se trompe et écrit 5 jaunes au lieu de 5 verts, ce que l'intervenant lui fait rectifier, avant de lui demander comment, si on n'avait pas rectifié, on se serait rendu compte de l'erreur.

Le tableau est le suivant :

	bleu	rouge	jaune	vert
Tout	9	10	6	10
Enlevés	3	3	1	5
Reste	6	7	5	5

Gaël n'arrive pas à fournir l'explication demandée, mais peut-être est-ce dû au fait qu'il a le tableau complet sous les yeux. Peut-être, s'il n'avait eu en vue que la colonne :

jaune
6
5
5

aurait-il pu justifier plus facilement l'erreur. Il faut donc lui donner la solution.

La vérification que nous signalions plus haut fonctionne implicitement, mais elle n'est pas perçue comme un fait par Gaël, elle n'est vraisemblablement pas susceptible d'être formulée par lui, et a fortiori il ne peut pas la mobiliser comme preuve, même à l'intention d'un interlocuteur bienveillant et attentif.

Ainsi, on comprend mieux pourquoi il était nécessaire que l'intervenant propose l'addition comme moyen de vérification de la soustraction - Gaël ne l'aurait probablement pas inventé.- pourquoi il n'était pas gênant de l'introduire puisque ce moyen n'était pas proposé comme objet à apprendre, qu'il avait un rôle et une signification évidents dans la situation et qu'il était donc seulement mis à la disposition de Gaël.

- et comment Gaël s'est approprié ce moyen et l'a intégré à ses procédures. Il suffira peut-être désormais de créer des situations favorables à cette explication pour voir évoquer les rapports entre l'addition et la soustraction. De telles situations supposent que l'on ait rejeté au moins provisoirement les moyens effectifs de preuve : le recours au dénombrement et par conséquent que l'on

.../...

opère sur les systèmes symboliques.

L'intervenant va s'employer immédiatement à préparer cette nouvelle phase en attestant la séparation entre le système des collections sur lesquelles on agit et celui des écritures avec lequel on parle de ce qu'il advient deux collections dans le premier. Cette "attestation" consiste à donner les moyens à Gaël et à lui-même de rappeler éventuellement cette situation plus tard.

4. Symbolisation par des étiquettes.

Ils en viennent à un nouveau jeu : des groupes d'objets sont figurés par des papiers. L'intervenant va mettre dans un sac des papiers qui représenteront les objets que Gaël mettra dans l'autre sac : par exemple, il écrit 6 verts sur un papier et Gaël met 6 objets verts dans le sac. Il fait ainsi un certain nombre de papiers

<u>verts</u> 6	<u>verts</u> 4	<u>rouges</u> 5	<u>rouges</u> 7	<u>verts</u> 3	<u>jaunes</u> 9	<u>jaunes</u> 3	<u>rouges</u> 5
-------------------	-------------------	--------------------	--------------------	-------------------	--------------------	--------------------	--------------------

et ils emplissent chacun leur sac, puis les échangent, Gaël tenant alors celui qui contient les papiers.

- "Est-ce que tu peux dire combien il y a d'objets rouges dans mon sac ?" demande l'intervenant. "Je ne te le laisse pas ouvrir, mais tu peux ouvrir le tien".

- Alors là c'est sûr que je sais ! répond Gaël en ouvrant son sac, souriant.

Il trouve un premier papier :

<u>rouges</u> 7

 et déclare :

- 7 rouges !
- C'est tout ?

Il vérifie alors tous les petits papiers et additionne les chiffres inscrits sur tous ceux indiquant la couleur rouge : $7 + 5 + 5 = 17$.

Il écrit 17 sous le tableau précédent, puis compte les autres couleurs et inscrit également le résultat trouvé :

	bleu	rouge	jaune	vert
Tout				
⋮				
	0	17	12	13

.../...

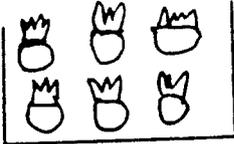
Lorsque l'intervenant lui demande s'il est sûr des résultats qu'il vient de trouver, l'enfant se montre un peu hésitant et préfèrerait vérifier. Ils recomptent tous les deux ensemble. Pour les verts, il explique: "6 et 3, 9. Et 4... Si on a 4, on enlève une unité (pour la rajouter à 9) ça fait 10 et comme là on en a enlevé une, ça fait 3, alors ça fait 13".

Puis l'intervenant écrit le nombre d'objets qu'il va enlever (théoriquement) : 10 de chaque couleur, et Gaël sans hésitations, trouve le nombre qu'il restera dans chaque série.

5. Présentation du jeu du marchand.

Plutôt qu'une autre manipulation, l'intervenant lui propose ensuite un nouveau dessin : il s'agit de sacs contenant 25 voitures, puis un carton de 6 sacs de 25 voitures. Il fait un tableau.

(Cette manipulation vise à introduire des variations de rapports didactiques avec Gaël, en lui donnant la possibilité de les contrôler, de maîtriser la situation).

 (cartons de 6 sacs)	 (sacs de 25 voitures)	(voitures seules)
2	5	0
	(17)	

"Dans une pièce, il y a 2 caisses, 5 sacs et 0 voiture seule. Combien y-a-t-il de sacs de voitures ?"

- 5, répond Gaël

- Il y a 5 sacs tout seuls, mais il y en a dans les cartons. Si on aligne tous les sacs, il y en a combien ?

Gaël trouve alors la solution, mais lorsque l'intervenant lui demande si le nombre de voitures a changé, il répond que oui... En fait, lorsqu'il explique sa réponse, il a plutôt voulu dire que c'est le nombre de sacs "sortis" qui a changé. Suit une explication de l'intervenant pour lui montrer que le nombre de sacs n'a pas changé, mais il pense

.../...

toujours qu'il n'y a plus le même nombre de voitures.

L'intervenant s'éloigne alors du sujet et termine la séance en le faisant compter à rebours, ou de 2 en 2, ... ce que Gaël réalise fort bien : (57, 56, 55...)
(0, 2, 4, 6, ...)

Comportements attendus au cours de ces situations : incertitude et connaissance.

Gaël répugne à renoncer aux charmes de l'incertitude. Pour comprendre COMMENT une telle attitude peut bloquer des acquisitions et comment les situations que nous proposons sont susceptibles d'opérer, il est utile d'examiner de plus près les rapports qui s'établissent entre connaissance et incertitude dans une situation d'enseignement.

Une connaissance se manifeste par une décision, ou plutôt par un choix entre plusieurs décisions, ou entre plusieurs opinions. Pour qu'un élève ait la possibilité de mettre en oeuvre une connaissance, il faut donc lui offrir des situations qui puissent avoir plusieurs issues selon les choix qu'il fera lui-même en fonction de ses connaissances. La signification de cette connaissance est faite comme nous l'avons dit de l'éventail des issues envisageables qu'elle a permis de rejeter. Lorsqu'une connaissance permet d'éliminer toutes les issues sauf une, elle permet une décision certaine. Mais il arrive que les connaissances du sujet laissent subsister plusieurs issues, avec peut-être quelques préférences qu'on peut traduire en probabilité de choisir chaque issue. Nous dirons alors que la situation présente pour le sujet une certaine incertitude, plus ou moins grande selon le nombre des issues et leur caractère d'égales probabilités. L'apprentissage d'une connaissance se manifeste par une diminution de l'incertitude dans les situations où elle est engagée (on peut même évaluer la quantité d'information que représente une connaissance par la variation d'incertitude qu'elle apporte).

En général, l'apprentissage se produit dans une situation, motivé par le désir du sujet de diminuer son incertitude.

Ainsi on peut comparer les situations didactiques à des jeux. Le maître communique à l'élève une situation problème qui met en scène les objets dont il s'agit et indique ce qui correspond aux règles : c'est-à-dire les moyens qu'il est permis d'utiliser pour obtenir tous les états possibles du jeu. Il fixe certains objectifs c'est-à-dire des résultats qu'il faut obtenir en agissant conformément aux règles avec explicitement ou implicitement, un enjeu. Bien sûr les caractères de ce jeu didactique peuvent beaucoup varier selon les sujets et les types de pédagogie choisis. En particulier selon que l'on considère que le maître doit préalablement communiquer les stratégies de résolution ou que c'est l'élève qui doit les produire comme moyen de s'adapter. Mais au bout du compte à un moment donné, l'activité de l'élève va consister, devant une situation problème qui présente a priori pour lui une certaine incertitude, à la réduire en choisissant une solution : L'élève ne fait pas de mathématiques s'il ne résout pas de problèmes.

Mais il serait faux de croire que l'acceptation des règles et la réduction de l'incertitude est la seule manifestation de la connaissance et de l'acquisition. L'augmentation de l'incertitude par la recherche de situations, de questions ou de règles nouvelles est un mouvement inverse qui répond dialectiquement au précédent.

Dans cette phase, la recherche de nouveaux problèmes répond à des motivations apparemment différentes.

Pour comprendre la profonde unité de cette quête des connaissances, examinons du côté du sujet la fonction à laquelle elle répond.

Tout d'abord l'absence d'incertitude ne peut pas être une position stable. D'une certaine façon, le sujet se définit, existe, a ses propres yeux, face à un milieu par les modifications qu'il lui fait subir. Un milieu qui ne lui donne aucune occasion d'action - c'est-à-dire de décision ou de choix, le nie en fait comme sujet autonome. C'est le cas en particulier des situations fermées. A l'inverse, mais pour la même raison, le choix purement aléatoire n'est pas une expression du sujet et ne lui donne pas non plus d'existence. On peut donc imaginer que le sujet recherche toujours des situations soit relativement ouvertes qu'il réduit par l'exercice de la création de connaissance et de son pouvoir de décision et d'action, soit relativement fermées et qu'il ouvre par la considération de nouvelles variables ou de nouvelles règles.

La psychanalyse donne une analyse plus profonde sur ce phénomène et permet de comprendre les rapports de la connaissance considérée comme objet symbolique avec les motivations du sujet.

Nous reviendrons au chapitre III sur le modèle de la chaîne du sens introduit FREUD (le jeu du Fört da) et repris par LACAN.

.../...

5. CONCLUSIONS DE L'ETUDE DU CAS DE GAËL

Il reste encore quatre séances où l'intervenant continue de lutter pour introduire de plus en plus de difficultés et pour mettre Gaël dans l'obligation de les surmonter. Chaque relation est gérée sur le même principe. Les progrès ne sont pas spectaculaires, mais il semble bien après coup que cette quatrième séance ait été décisive. La rencontre qui s'est nouée avec l'intervenant et une certaine prise de conscience des difficultés à éviter ont suffi à déclencher une nouvelle attitude chez Gaël.

La suite a montré que l'enfant s'est bien intégré dans sa classe et a rapidement comblé ses lacunes.

Les buts généraux des interventions étaient les suivants :

a) Dans un premier temps, établir un climat de confiance ; une relation duelle agréable et prenant néanmoins en compte les difficultés en cause.

b) Dans un deuxième temps, prendre appui sur cette relation pour proposer à Gaël des *situations didactiques* convenables où la connaissance n'est pas à prendre dans le discours ni dans le désir du maître, mais dans une relation avec le milieu. Ces interactions doivent être motivées par le désir de l'enfant lui-même et le conduire à prendre en charge les décisions spécifiques de la connaissance à maîtriser : tâtonner, décider, chercher...

c) Dans un troisième temps, par de nouvelles ruptures du contrat didactique il s'agit de le conduire à donner du « prix » à la vérité et à la préférer éventuellement au confort d'un consensus : à choisir par exemple la vérification, malgré l'angoisse de constater son erreur. Il ne s'agit évidemment pas de faire un discours moralisateur à ce sujet, mais d'obtenir ces comportements de manière effective. Nous avons cherché à l'habituer à se définir, à se reconnaître, à se plaire dans la position de constructeur de la connaissance et de responsable de sa conviction, devant les faits ou devant autrui. Nous avons voulu le conduire à ne plus vivre l'activité mathématique comme « la découverte de son erreur », « la reconnaissance de l'échec », « la mise en évidence de son péché », ou encore comme « le regard porté dans la chambre des parents » mais comme un exercice équilibrant, libérateur et fondateur du « moi ».

Ces formulations ne doivent pas tromper le lecteur, il ne s'agit pas de psychothérapie mais de didactique, c'est-à-dire d'activités spécifiques organisées intentionnellement en vue de l'acquisition des connaissances précises. Mais il faut être conscient de la dimension psychologique de ces interventions.

CONCLUSIONS DE L'APPROCHE CLINIQUE

Du point de vue des rééducations, si nous avons obtenu quelques succès (Gaël, Guillaume) ou demi-succès (Cyrille, Marc, Odile), nous avons eu aussi des échecs :

Jérôme : que nous avons suivi au cours de deux années (10 ans et 11 ans) et dont nous ignorions les activités nocturnes de prédélinquant et de jeune "caïd", et Nathalie : 10 ans elle aussi et qui terminait les séances rivée dans un mutisme buté et réprobateur.

Mais aucun caractère commun n'apparaissait entre tous ces cas, sinon peut-être l'importance de leurs problèmes psycho affectifs.

L'intervenant pris dans une relation difficile et les observateurs surpris par les échecs massifs de l'élève ont tendance à concentrer leur attention sur les caractéristiques de l'enfant et non pas sur les conditions des situations qu'ils affrontent.

. Situations a-didactiques.

En première approche pourtant nous avons remarqué deux types de réactions opposées qui nous ont paru importantes. Ces réactions ne peuvent s'observer que si l'enfant a accepté une activité où il engage sa responsabilité et où il peut savoir par lui-même s'il a réussi ou échoué. En constatant que les résultats ne sont pas conformes à leurs prévisions, certains enfants pâlisent et se troublent ; ils lisent ce résultat comme un échec personnel et prennent une attitude de découragement et de culpabilité. Même s'ils se remettent bravement au travail, leur comportement montre que la situation est vécue sur le mode introverti.

D'autres, au contraire, semblent s'éveiller soudain : il arrive quelque chose d'imprévu, d'intéressant ; l'échec personnel est dépassé, minimisé, au profit de la curiosité et de l'ouverture vers l'extérieur.

Ces deux façons opposées de réagir aux situations d'apprentissage (c'est-à-dire où la relation avec l'adulte n'est pas en cause directement), sont relativement stables chez les sujets, dans le temps, et dans des secteurs étendus de problèmes différents.

.../...

Les enfants en échec électif que nous avons rencontrés appartenaient tous à la première catégorie.

. Situations didactiques.

La deuxième remarque est venue en opposant les comportements de Gaël à ceux de Cyrille dans leurs rapports avec l'intervenant. Tous deux voulaient éviter une relation qu'ils vivaient comme conflictuelle. Mais ils le faisaient avec des stratégies diamétralement opposées. L'obligation de prendre la responsabilité de produire sa propre réponse à une question posée par un adulte est une expérience pénible pour les enfants en échec : il y a au moins deux manières de l'éviter :

L'une consiste à la prendre excessivement au sérieux, à la dramatiser autant que possible selon un mode que nous qualifierons métaphoriquement "d'obsessionnel" (type Cyrille). L'autre consiste au contraire à s'évader le plus possible en simulant plus ou moins adroitement une participation minimale (type Gaël).

Toute question met les enfants du premier type dans une situation inquiétante, même dangereuse, et les renvoie à la situation originelle. Pour échapper à cette grave agression, il faut qu'ils referment cette question tout de suite, n'importe comment, au besoin en l'ignorant totalement. En s'appuyant sur le contrat didactique, ils n'acceptent une question que s'ils ont déjà la réponse en leur possession. Ils exigent du professeur de transformer les solutions en algorithmes, d'avoir les critères d'emploi des algorithmes et des signes rassurants qu'ils sont en bonne voie..., l'assurance qu'en mémorisant tout ce qu'on a dit en classe, ils pourront immédiatement répondre à cette situation horrible. Et plus ils apprennent, et plus ils ont de réponses à produire et moins ils ont de chances de trouver la bonne...

Pour les autres, rien n'est grave, rien n'est sérieux, tout est théâtre. Dans les phases collectives, ils entrent dans le jeu, répondent avec les autres, prennent des risques, le professeur est convaincu que ce sont des enfants éveillés qui ont compris, peut-être même répondent-ils juste sur le moment, mais lorsqu'ils sont interrogés personnellement, par écrit par exemple, ils ne savent plus, ils n'ont pas appris, pas retenu, ils ne sont pas concernés, n'ont pas thésaurisé. Ils sont agréables et pas contrariants, mais ils ne sont pas là en personne et finalement n'apprennent pas.

.../..

Les uns et les autres à leur manière, évitent la confrontation avec la situation d'apprentissage.

Les premiers pèsent beaucoup, directement sur la gestion du contrat didactique et tendent rapidement à le pétrifier. Les seconds sont beaucoup plus difficiles à détecter dans les classes. Le professeur ne s'aperçoit souvent que trop tard que ces élèves "intelligents" et éveillés ont raté leur première composition, puis la seconde, etc... incompréhensiblement, ne savent rien.

Voici les conclusions provisoires qui pouvaient être tirées de ces travaux en 1980 :

" Le contrat didactique.

Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée (*situation didactique*), l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées : nous appelons « *contrat didactique* » l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître.

Présent dans cette question, ce « contrat » régit les rapports du maître et de l'élève au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques. C'est lui qui, à chaque instant, précise les positions réciproques des participants au sujet de la tâche et précise la signification profonde de l'action en cours, de la formulation ou des explications fournies ; « que faut-il savoir faire ». « à quoi voit-on qu'on a réussi » que faut-il faire si on n'a pas réussi. qu'est-ce qu'il fallait savoir pour réussir, qu'est-ce qu'il faut dire, qu'est-ce qu'on aurait pu faire d'autre, qu'est-ce qui aurait été une erreur, qu'est-ce qu'il faut apprendre, comment apprendre, comment se rappeler, etc. C'est lui qui fixe explicitement le rôle de la connaissance, de l'apprentissage, de la mémoire, etc.

Il est la règle de décodage de l'activité didactique par laquelle passent les apprentissages scolaires. On peut penser qu'à chaque instant, les activités d'un

.../...

enfant dans un processus dépendent du *sens* qu'il donne à la situation qui lui est proposée, et que ce sens dépend beaucoup du résultat des actions répétées du contrat didactique.

Le contrat didactique se présente donc comme la trace des exigences habituelles du maître (exigences plus ou moins clairement perçues) sur une situation particulière. Ce qui est habituel ou permanent s'articule plus ou moins bien avec ce qui est spécifique de la connaissance visée ; certains contrats didactiques favoriseraient le fonctionnement spécifique des connaissances à acquérir et d'autres non, et certains enfants liraient ou non les intentions didactiques du professeur et auraient ou non la possibilité d'en tirer une formation convenable.

Est-ce que certains contrats didactiques n'empêcheraient pas certains enfants d'entrer dans le processus d'apprentissage [Q 5] ?

Les causes des échecs seraient alors à chercher dans le rapport de l'élève au savoir et aux situations didactiques et non dans ses aptitudes ou dans ses caractéristiques permanentes générales.

Ces contrats didactiques révèlent l'idée que se font les professeurs et les élèves du fonctionnement des mathématiques (de leur création, de leur usage, etc.). En choisissant une situation didactique (c'est-à-dire une situation problème, des objectifs pour l'élève, des informations, des objectifs pour le maître, etc.) pour enseigner une certaine connaissance, le professeur fabrique, qu'il le veuille ou non, une image souvent très déformée des situations réelles (culturelles, historiques, etc.) dans lesquelles fonctionne (a été découverte, utilisée) cette connaissance. Ce sont les circonstances dans lesquelles les connaissances sont employées qui leur donnent leur signification. Ainsi, une connaissance mathématique n'a pas la même signification pour un élève et pour un mathématicien. Nous appelons « *transposition didactique* » le passage de l'une à l'autre.

(*La théorie des situations didactiques* a pour objet de fournir les moyens de contrôler ces transpositions didactiques.) La transposition didactique dépend fondamentalement des conceptions qu'ont les professeurs au sujet de la pensée mathématique. Dans leur activité d'enseignement, les professeurs sont donc obligés d'utiliser de façon plus ou moins explicite une sorte de théorie de la connaissance, d'épistémologie des mathématiques. Ces conceptions, à usage strictement professionnel, n'ont généralement pas de caractère scientifique (ni même consistant), même si localement elles sont la trace de théories plus ou moins récentes. Nous appelons « *pensée mathématique scolaire* » ces pseudo-théories.

Le maître enseigne cette « philosophie » en même temps que les mathématiques et comme elle n'est pas une bonne description de l'appropriation des connaissances, peut-elle expliquer certains échecs ?

On trouve un bon exemple de telles erreurs dans le livre de M^{me} Jaulin-Mannoni (11), *Le Pourquoi en mathématiques*. La première partie est une théorie

très intéressante de la compréhension où l'on trouve beaucoup d'idées justes. La seconde présente des cas de rééducation — effort méritoire —, mais on voit par exemple comment un tel discours essaie de s'adapter, dans le cas de Nadine, à un parfait conditionnement. On trouvera l'analyse de cette rééducation dans ([2] 77 tome 3).

Toujours dans les travaux de ces trois dernières années, nous avons préparé la voie à l'étude de ces nouvelles hypothèses en prenant en compte l'ensemble de ces interactions et de ces systèmes et en utilisant des études théoriques des situations et des processus didactiques, et nous avons en particulier mis au point pour cela un matériel d'étude : « Les tours d'Haoï » ([2] 77 tome 2) et (9) (10).

En guise de conclusion.

Dans les observations dont nous venons de rendre compte, nous avons — comme la plupart des chercheurs qui nous avaient précédés — mis d'abord au premier plan le profil de l'élève et les facteurs personnels provoquant l'échec, ou liés à ses effets, cet échec étant presque toujours considéré comme un phénomène pathologique lié à l'élève.

Cette conception correspond bien à la plus forte *des trois modalités de réponses à l'échec* : dans la première les parents réagissent à l'inquiétude que leur causent les difficultés de leurs enfants par *des pressions* sur l'enfant lui-même : injonctions, sanctions diverses, cours particuliers, examens médico-psycho-pédagogiques, rééducation... De la même manière, les maîtres sont entraînés à réduire les insuffisances excessives par des interventions d'enseignement décidées en fonction d'objectifs à court terme tendant à imposer à l'enfant un itinéraire transparent aux contrôles. Les pressions sont d'autant plus fortes que l'élève a pu donner la preuve qu'il réussit bien dans d'autres matières.

Mais la mise en cause de l'élève est peut-être une entreprise aussi vaine que celle qui consisterait à analyser l'eau qui est sortie d'un seau percé pour voir en quoi elle diffère de l'eau qui est restée dans le seau. La mise en cause de l'institution scolaire, en tant qu'exécutant du contrat d'enseignement, des méthodes pédagogiques, des professeurs, de leur formation... constitue la seconde modalité. Nous avons montré l'intérêt que nous y prenons.

La troisième consiste en la remise en cause du contrat lui-même (pourquoi enseigner tant — ou si peu — de mathématiques, pourquoi la sélection par les mathématiques, pourquoi la sélection tout court, etc.).

Chacune de ces trois modalités de réponses sont aussi soutenues par des hypothèses sur différentes causes des échecs en mathématiques mais très peu sont accompagnées d'une méthode de recherche utilisable.

Je me suis longtemps demandé si ces hypothèses sur l'origine instrumentale de certaines difficultés en calcul n'étaient pas complaisamment accueillies principalement parce qu'elles justifiaient certaines interventions souhaitées des parents et probablement utiles aux enfants (pour d'autres raisons) mais lucratives pour d'autres. On peut de même s'étonner de la persistance et du retour périodique de déclarations tonitruantes manifestement fausses ou excessives imputant à l'école la responsabilité de phénomènes qui notoirement impliquent la société tout entière.

Aucune forme de difficultés scolaires ne semble provoquer autant de réactions passionnées ni susciter autant de préjugés que l'échec en mathématiques.

Curieusement, à côté d'une masse de publications et de textes d'opinion, la rareté des ouvrages objectifs est frappante, comme si la complexité de la tâche ou la résistance des forces à l'œuvre avaient inhibé toute recherche scientifique.

Il est vrai que les systèmes dont le fonctionnement ou le dysfonctionnement est susceptible de jouer un rôle dans ce phénomène sont nombreux, et en interactions complexes : l'enfant, les parents, les maîtres, l'école, la société, la discipline peuvent être impliqués au cours d'approches très diverses : cognitives, psychologiques voire psychanalytiques, pédagogiques ou sociologiques. Les enjeux économiques de ces relations sont parfois importants et ont contribué à développer un enchevêtrement de jugements de valeurs subjectifs qui égarent l'observateur.

Si cette complexité peut stimuler l'imagination des innovateurs désireux d'aider les enfants en difficulté ou des polémistes, elle peut légitimement décourager le chercheur qui peut redouter la stérilité d'une hypothèse trop restrictive ou les aléas d'un terrain en proie à l'idéologie.

Nous espérons toutefois que les recherches actuelles permettront bientôt d'orienter un peu le débat. "

Bibliographie.

1. Chauvet. Le Bars. Le Léon. — *Pédagogie moderne de la mathématique et dyscalculie*. Mémoire d'orthophonistes. Bordeaux, 1973.
2. *Etude de la détection des enfants en difficultés électives en mathématiques en vue d'analyses statistiques*. — Mémoires d'orthophonie dirigés par G. Brousseau. Institut de recherches sur l'enseignement des mathématiques. Université de Bordeaux I et Centre de phono-audiologie de Bordeaux II.
1976, tome 1 : Moras (F.), Molia (C.). — *Etude des échecs en mathématiques à travers quelques articles relatifs à la dyscalculie*.
1977, tome 1 : Berrocq-Irigoin (M.), Dupuch (M.-A.), Fruchard (C.). — *Elaboration d'un questionnaire*.
1977, tome 2 : Berrocq-Irigoin (M.), Dupuch (M.-A.), Fruchard (C.). — *Monographie d'un enfant en difficultés*.
1978, tome 1 : Dugué (C.). — *Etude critique de la détection dans le cadre de l'institution scolaire*.

Les échecs électifs en mathématiques

- 1978, tome 2 : Trolonge (D.). — *Comparaison des questionnaires aux maîtres et du test d'acquisition scolaire.*
- 1978, tome 3 : Chateau (F.). — *Analyse comparée et étude longitudinale du questionnaire.*
- 1978, tome 4 : Amirault (C.), Cheret (M.). — *Monographies de deux enfants en difficultés.*
- 1979, tome 1 : Mora (M.). — *Monographie de deux enfants en difficulté.*
- 1979, tome 2 : Bonaïs (M.). — *Détection des enfants en échec électif au CM1.*
3. Dugas et Guillaume. — Introduction à l'étude des difficultés en calcul chez l'enfant. *Revue de neuro-psychiatrie infantile*, 1970, n° 1-2.
4. Laffon. — *Vocabulaire de psychopédagogie et de psychiatrie de l'enfant.* Paris, P.U.F., 1963.
5. Gibello (B.). — Dysharmonies cognitives et dyscalculies. *Revue de neuro-psychiatrie infantile*, 1973, n° 6.
6. Hasaerts Van Gertruyden. — La dyscalculie chez l'enfant. Diagnostic différentiel. *Revue de neuro-psychiatrie infantile*, 1975, n° 10-11.
7. Bourrel (M.-J.). — *Echec en calcul à travers 570 dossiers. Place des troubles relationnels au père.* Mémoire pour le C.E.S. de psychiatrie.
8. Deveyle (P.), Frison (L.) et Gauthier (I.). — *Recherche d'une concordance entre l'échec en mathématiques et les résultats du bilan orthophonique (dyscalculie).* Mémoire pour le C.C. d'orthophonie, Lyon, 1973.
9. Eyraguibel (J.-), Brousseau (G.). — Appareillage de mesure automatique des stratégies d'apprentissage. Application à un jeu logique : les tours d'Hanoi. In : *Mesures - régulation automatisme*, n° 1, 1978.
10. Gabinski (P.), I.R.E.M. de Bordeaux. — *Etude sur des situations d'acquisition des modèles récursifs et l'appropriation du concept de récurrence : Etat des travaux (à paraître).*
11. Jaulin-Mannoni (F.). — *Le pourquoi en mathématiques.* E.S.F., 1978.

CHAPITRE III

FONDEMENTS ET METHODES DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

- . **Objet des études en didactique**
- . **Phénomènes de didactique**
- . **Éléments pour une modélisation**
- . **Cohérence et incohérences de la modélisation
envisagée : les paradoxes du contrat didactique**
- . **Modélisation des situations didactiques**

"La didactique des mathématiques" étudie les activités didactiques, c'est-à-dire les activités qui ont pour objet l'enseignement, évidemment dans ce qu'elles ont de spécifique aux mathématiques.

Les résultats, dans ce domaine, sont de plus en plus nombreux ; ils portent sur les comportements cognitifs des élèves, mais aussi sur les types de situations mis en oeuvre pour leur enseigner et sur tous les phénomènes auxquels la communication du savoir donne lieu. La production ou l'amélioration de moyens d'enseignement trouve dans ces résultats bien plus que des objectifs ou des moyens d'évaluation, elle y trouve un appui théorique, des explications, des moyens de prévision et d'analyse, des suggestions, voire des dispositifs et des méthodes.

OBJET DES ETUDES EN DIDACTIQUE

Quel est l'objet de ces études ? Un examen même très superficiel permettra de mieux en comprendre l'intérêt et même la nécessité.

Le savoir mathématique et la transposition didactique.

Le savoir constitué se présente sous des formes diverses, par exemple sous forme de questions et de réponses. La présentation axiomatique est une présentation classique des mathématiques.

En plus des vertus scientifiques qu'on lui connaît, elle paraît merveilleusement adaptée à l'enseignement. Elle permet à chaque instant de définir les objets que l'on étudie à l'aide des notions précédemment introduites et, ainsi, d'organiser l'acquisition de nouveaux savoirs à l'aide des acquisitions antérieures. Elle promet donc à l'étudiant et à son professeur un moyen d'ordonner leur activité et d'accumuler dans un minimum de temps un maximum de "savoirs" assez proches du "savoir savant". Evidemment, elle doit

être complétée par des exemples et des problèmes dont la solution exige leur mise en oeuvre.

Mais cette présentation efface complètement l'histoire de ces savoirs, c'est-à-dire la succession des difficultés des questions qui ont provoqué l'apparition des concepts fondamentaux, leur usage pour poser de nouveaux problèmes, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits, et les innombrables querelles à leur sujet. Elle masque le "vrai" fonctionnement de la science, impossible à communiquer et à décrire fidèlement de l'extérieur, pour mettre à sa place une genèse fictive. Pour en rendre plus facile l'enseignement, elle isole certaines notions et propriétés du tissu d'activités où elles ont pris leur origine, leur sens, leur motivation et leur emploi. Elle les transpose dans le contexte scolaire. Les épistémologues appellent **transposition didactique** cette opération. Elle a son utilité, ses inconvénients et son rôle, même pour la construction de la science. Elle est à la fois inévitable, nécessaire et en un sens, regrettable. Elle doit être mise sous surveillance.

Le travail du mathématicien

- Avant de communiquer ce qu'il pense avoir trouvé, un chercheur doit d'abord le déterminer : il n'est pas facile de distinguer, dans le labyrinthe des réflexions, celles qui sont susceptibles de devenir un savoir nouveau et intéressant pour les autres ; les démonstrations obtenues sont rarement celles des conjectures envisagées ; tout un réaménagement des connaissances voisines, antérieures ou nouvelles, doit être entrepris.

- Il faut aussi supprimer toutes les réflexions inutiles, la trace des erreurs commises et des cheminements erratiques. Il faut cacher les raisons qui ont conduit dans cette direction et les conditions personnelles qui ont présidé à la réussite, problématiser habilement les remarques même un peu banales, mais éviter les trivialités... Il faut encore chercher la théorie la plus générale dans laquelle les résultats restent valables... Ainsi, le producteur du savoir dépersonnalise et décontextualise le plus possible ses résultats.

.../...

- Ce travail est indispensable pour que le lecteur puisse prendre connaissance de ces résultats et se convaincre de leur validité sans faire lui-même le même cheminement pour leur découverte, tout en bénéficiant des possibilités qu'ils offrent pour leur utilisation.

- D'autres lecteurs alors, transforment à leur tour ces résultats, les reformulent, les appliquent, les généralisent, si tels sont leurs besoins. Ils les détruisent à l'occasion, soit en les identifiant à des savoirs déjà connus, soit en les incluant dans des résultats plus forts, en les oubliant simplement... et voire en les montrant faux. Ainsi l'organisation des connaissances dépend, dès leur origine, des exigences imposées à leur auteur par leur communication. Elle ne cesse pas d'être ensuite modifiée pour les mêmes motifs au point que leur sens change assez profondément : la transposition didactique se déroule en grande partie dans la communauté scientifique et se poursuit dans les milieux cultivés (la noosphère plus exactement). Le fonctionnement de cette communauté est basé sur les rapports qu'entretiennent l'investissement et la reprise personnels et contextuels de questions mathématiques et le rejet de cet investissement pour la production d'un texte du savoir aussi objectif que possible.

Le travail de l'élève.

Le travail intellectuel de l'élève doit être par moments comparable à cette activité scientifique. Savoir des mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer ; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. Une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc...

.../...

- Pour rendre possible une telle activité, le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés.

Le travail du professeur.

Le travail du professeur est dans une certaine mesure inverse du travail du chercheur, il doit produire une **recontextualisation** et une **repersonnalisation** des connaissances. Elles vont devenir la connaissance d'un élève, c'est-à-dire une réponse assez naturelle, à des conditions relativement particulières, conditions indispensables pour qu'elles aient un sens pour lui. Chaque connaissance doit naître de l'adaptation à une situation spécifique, car on ne crée pas les probabilités dans le même genre de contexte et de rapports avec le milieu que ceux dans lesquels on invente ou utilise l'arithmétique ou l'algèbre.

- Le professeur doit donc simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut que les connaissances soient des moyens économiques pour poser de bonnes questions et pour trancher des débats, s'il veut que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et que les démonstrations soient des preuves.

- Mais il doit aussi donner les moyens à ses élèves de retrouver dans cette histoire particulière qu'il leur a fait vivre, ce qu'est le **devoir** culturel et communicable qu'on a voulu leur enseigner. Les élèves doivent à leur tour **redécontextualiser** et **redépersonnaliser** leur savoir et ceci de façon à identifier leur production avec le savoir qui a cours dans la communauté scientifique et culturelle de leur époque.

- Bien sûr, il s'agit d'une simulation, qui n'est pas plus la "vraie" activité scientifique que le savoir présenté de façon axiomatique n'est pas le "vrai" savoir.

.../...

Quelques questions préliminaires naïves et fondamentales

Cette évocation de la communication du savoir paraît assez classique. Elle appelle pourtant quelques remarques et soulève des questions intéressantes.

- Tout d'abord, l'accent y est mis fortement sur toutes les activités sociales et culturelles qui conditionnent la création, l'exercice et la communication du savoir et des connaissances.

- L'approche classique considère comme centrale l'activité cognitive du sujet qui doit d'abord être décrite et comprise de façon relativement indépendante. Elle suppose ensuite, au moins implicitement, que les connaissances sur la connaissance nécessaires à l'enseignement, doivent d'abord s'établir elles aussi de façon indépendante, par exemple, par la mathématique et l'épistémologie. Il en est de même pour les connaissances sur les rapports sociaux spécifiques de l'éducation, etc... L'approche classique consiste alors à tirer des conséquences pour l'enseignement de ces savoirs préalables: Elle le fait directement, c'est-à-dire avec le seul appui de réflexions "naïves".

- Il y a là plus qu'une nuance : les savoirs importés de disciplines fondamentales permettent-ils à eux seuls, sans modifications et indépendamment les uns des autres, d'expliquer des phénomènes d'enseignement et de produire de façon contrôlée des modifications désirées ? Faut-il, au contraire, créer des concepts nouveaux, un champ de connaissances et de méthodes proches pour étudier les situations didactiques ?

- Une des hypothèses fondamentales de la didactique consiste à affirmer que seule l'étude globale des situations qui président aux manifestations d'un savoir, permet de choisir et d'articuler les connaissances d'origines différentes, nécessaires pour comprendre les activités cognitives du sujet, ainsi que la connaissance qu'il utilise et la façon dont il la modifie.

- Une deuxième hypothèse, plus forte, consiste à dire que l'étude première des situations (didactiques) devrait finalement

.../...

permettre de dériver ou de modifier les concepts nécessaires actuellement importés des autres champs scientifiques :

- Existe-t-il une "variété didactique" des concepts de sens, de mémoire, de structure, de décimal, etc., inconnue en linguistique, en psychologie ou en mathématique ?

- L'enseignement, lui aussi, est conçu comme un projet social : celui de faire approprier à un élève un savoir constitué ou en voie de constitution. Ce point de vue remet au centre des préoccupations d'enseignement les débats culturels et politiques sur le savoir mais en les traitant plutôt comme des objets d'études faisant partie des situations, que comme des préalables philosophiques.

- L'apprentissage n'est-il pas un acte essentiellement individuel ? Est-il nécessaire de le replacer dans un contexte aussi vaste pour le comprendre ? L'enseignement individuel n'est-il pas une sorte de condition optimale que seules des conditions économiques empêchent de réaliser ?

- Même en admettant que des savoirs sur les situations de mise en oeuvre, d'appropriation et d'enseignement des connaissances peuvent jouer un certain rôle technique, en tant que moyen pour l'enseignement, il reste une question importante : une fois élevé au rang d'objets culturels, ces savoirs ne vont-ils pas perturber profondément la communication et peut-être même la construction du savoir ? Ce dernier est fondé, nous l'avons vu, sur le rejet et l'oubli des circonstances qui l'ont provoqué.

- Pourquoi la possession du savoir lui-même, jointe à des connaissances générales de sciences humaines, à un peu de bon sens et bien sûr, à des qualités pédagogiques qu'aucun enseignement ne saurait vraiment développer, ne suffirait-elle pas pour tous les professeurs, avec tous les élèves, comme elle le fait avec quelques-uns ?

Ensuite, on peut se demander dans quelle mesure cette référence au fonctionnement de la recherche est bien nécessaire et pertinente pour l'étude de l'apprentissage et surtout de l'enseignement.

.../...

Jusqu'à quel point y a-t-il une ressemblance et sous quelles conditions ?

Il semble qu'une bonne théorie épistémologique accompagnée d'une bonne ingénierie didactique soient indispensables pour répondre à ces questions.

La didactique étudie la communication des savoirs et tend à théoriser son objet d'étude, mais elle ne peut relever ce défi qu'à deux conditions :

- *mettre en évidence des phénomènes spécifiques que les concepts originaux qu'elle propose paraissent expliquer.*
- *indiquer les méthodes de preuves spécifiques qu'elle utilise pour cela.*

Ces deux conditions sont indispensables pour que la didactique des mathématiques puisse connaître de façon scientifique son objet d'étude et donc permettre des actions contrôlées sur l'enseignement.

PHENOMENES DE DIDACTIQUE

Des phénomènes liés au contrôle de la transposition didactique ont pu être mis en évidence dans des cadres très différents : le même phénomène peut régir l'intimité d'une leçon particulière ou concerner toute une communauté pendant des générations.

- Identifier ces phénomènes revient à construire un "modèle" des protagonistes en présence, des relations et des contraintes qui les lient et à montrer que le jeu de ces contraintes produit bien des effets et le déroulement observés.

- Il est plus commode dans un texte relativement court de prendre des exemples déjà connus des lecteurs que d'exposer dans leur complexité les cas réellement traités.

L'effet "Topaze" et le contrôle de l'incertitude.

La première scène du célèbre "Topaze" de Marcel Pagnol illustre un des processus fondamentaux : Topaze fait une dictée à

.../...

un mauvais élève. Ne pouvant accepter trop d'erreurs trop grossières et ne pouvant pas non plus donner directement l'orthographe demandée il "suggère" la réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents : "...des moutons étaient réunis dans un parc..." il s'agit d'abord pour l'élève d'un problème d'orthographe et de grammaire..." des moutonsses étai-hunt... le problème est complètement changé ! Devant les échecs répétés, Topaze mendie une marque d'adhésion et négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre ce "s". On devine qu'il pourrait continuer en exigeant la récitation de la règle, puis en la faisant copier un certain nombre de fois. L'effondrement complet de l'acte d'enseignement est représenté par un simple ordre : mettez un "s" à "moutons" : le professeur a fini par prendre à sa charge l'essentiel du travail.

- La réponse que doit donner l'élève est déterminée à l'avance, le maître choisit les questions auxquelles cette réponse peut être donnée. Evidemment les connaissances nécessaires pour produire ces réponses changent leur signification aussi. En prenant des questions de plus en plus faciles, il essaie d'obtenir la signification maximum pour le maximum d'élèves. Si les connaissances visées disparaissent complètement : c'est "l'effet Topaze". Le contrôle du sens à travers les changements de questions est sous le contrôle des connaissances des maîtres dans la discipline enseignée mais le choix des situations d'apprentissage et leur gestion habituellement laissés au "bon sens" des professeurs sont actuellement l'objet d'actives recherches tant théoriques que d'ingénierie didactique.

L'effet "Jourdain" ou le malentendu fondamental.

L'effet "Jourdain" - ainsi nommé par référence à la scène du "Bourgeois Gentilhomme" où le maître de philosophie révèle à Jourdain ce que sont la prose ou les voyelles - est une forme d'effet Topaze.

Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans

.../...

les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales.

Tout le comique de la scène est basé sur le ridicule de cette sacralisation répétée d'activités familières dans un discours savant.

Exemple : L'élève à qui l'on faisait faire des manipulations un peu étranges avec des pots de yaourt ou des images colorées se voyait déclarer "tu viens de découvrir un groupe de Klein".

- D'une façon moins grossière, le désir d'insérer la connaissance dans des activités familières peut conduire le professeur à substituer à la problématique véritable et spécifique, une autre, par exemple métaphorique ou métonymique et qui ne donne pas un sens correct à la situation. Souvent les deux problématiques sont présentes, juxtaposées et le professeur essaie d'obtenir "le meilleur" compromis.

- Certaines méthodes pédagogiques axées sur les préoccupations de l'enfant provoquent souvent cet effet, mais la réforme des années 60 et l'usage des structures mathématiques qu'elles ont proposé ont été évidemment aussi une puissante incitation à ce jeu.

- En même temps, l'idéologie structuraliste lui offrait une justification épistémologique. Il s'agit alors d'un double effet "Jourdain" : le premier au niveau des relations de l'élève avec le professeur : l'élève traite un exemple et le maître y voit la structure. Le second au niveau des relations des didacticiens ou des mathématiciens avec le professeur. Les premiers plaquent une justification philosophique et scientifique sur la pratique du second et la sacralisent, la reconnaissance de la structure est l'activité scientifique.

.../...

Le glissement métacognitif⁽¹⁾

Lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique.

- Cet effet peut se composer plusieurs fois, concerner toute une communauté et constituer un véritable processus échappant au contrôle de ses acteurs. L'exemple le plus frappant est probablement celui qui concerne l'usage des graphes dans les années 60 pour enseigner les structures, méthode à laquelle s'est attaché le nom de G. PAPY.

- A la fin des années trente, la théorie des ensembles quitte sa fonction scientifique initiale pour devenir moyen d'enseignement afin de satisfaire les besoins qu'ont les professeurs d'une métamathématique et d'un formalisme fondamental. De ce fait, ils sont obligés d'inviter des étudiants à un contrôle sémantique de cette théorie (dite alors "naïve"). Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus "syntaxique". Cet usage déjà didactique de la théorie des ensembles rendra possible pour les autres théories un exposé axiomatique dont la négociation sera plus classique.

- Ce moyen d'enseignement devient l'objet d'enseignement pour des enfants de plus en plus jeunes. Le contrôle sémantique est confié à un "modèle" qui remonte à Euler⁽²⁾⁽³⁾ et qui fait appel à des graphes divers. Le "modèle" n'est alors qu'un moyen d'enseignement métaphorique car il n'est pas en fait un modèle correct. Mais par le fait des difficultés d'enseignement, ce moyen devient à son tour objet d'enseignement et se surcharge de conventions, de langages spécifiques à leur tour enseignés et expliqués à chaque étape de diffusion. Dans ce processus, plus l'activité d'enseignement produit de commentaires et de conventions, moins les étudiants peuvent contrôler les situations qui leur sont proposées.

(1) cf. article ANNEXE 2

(2) Lettres à une Princesse d'Allemagne

(3) cercles d'Euler, diagrammes de Venn, "patates" de Papy

● C'est l'effet de "glissement métacognitif". Il serait naïf de croire que le bon sens aurait permis d'échapper aux conséquences assez extravagantes auxquelles ce processus a conduit. La force des effets didactiques est incoercible dès lors que le professeur ne peut se soustraire à l'obligation d'enseigner coûte que coûte. Plus le public engagé dans la négociation est vaste et plus le processus échappe au contrôle "naïf".

D'ailleurs le bon sens, comme n'importe quel autre facteur correcteur, ne peut jouer un rôle dans les processus sociaux sans la médiation d'une structure sociale adéquate. Il existe des preuves que ce type "d'erreurs" n'est pas l'effet de la bêtise ni dans la plupart des cas celui de l'ignorance de la discipline mathématique ; il l'est à peu près dans la mesure où la maladie est imputable à des erreurs de comportement - "s'il est permis d'utiliser une métaphore hardie.

L'usage abusif de l'analogie

L'analogie est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est utilisée sous la responsabilité de celui qui en fait usage. Mais son utilisation dans la relation didactique en fait un redoutable moyen de produire des effets "Topaze". C'est pourtant une pratique naturelle : si des élèves ont échoué dans leur apprentissage, il faut leur donner une nouvelle chance sur le même sujet. Ils le savent. Même si le professeur dissimule le fait que le nouveau problème ressemble à l'ancien, les élèves vont chercher - c'est légitime - les ressemblances pour transporter - toute faite - la solution qu'on leur a déjà donnée. Cette réponse ne signifie pas qu'ils la trouvent idoine pour la question posée mais seulement qu'ils ont reconnu à des indices, peut-être tout à fait exogènes et non contrôlés, que le professeur voulait qu'ils la produisent.

o Ils obtiennent la solution par une lecture des indications didactiques et non pas un investissement du problème. Et ils y ont intérêt car après plusieurs échecs sur des problèmes semblables mais non identifiés, non reconnus, le professeur s'appuiera sur ces analogies soudain renouvelées, pour reprocher à l'élève sa

.../...

résistance opiniâtre (cet effet est utilisé par R. DEVOS dans son sketch des deux bouts d'un bois). "Ça fait un bout de temps que je vous le dis !"

Le vieillissement des situations d'enseignement

Le professeur rencontre des difficultés à reproduire la même leçon, bien qu'il s'agisse de nouveaux élèves : la reproduction exacte de ce qu'il a dit ou fait précédemment n'a pas le même effet et le plus souvent les résultats sont moins bons, mais il éprouve aussi et peut-être par conséquent, une certaine réticence à cette reproduction. Il éprouve un besoin assez fort de changer au moins la formulation de son exposé ou de ses instructions, les exemples, les exercices, et si possible la structure même de la leçon. Ces effets augmentent avec le nombre des reproductions et sont d'autant plus forts que la leçon comprend plus d'interactions entre le maître et l'élève : les leçons comprenant un exposé suivi d'exercices ou une simple instruction suivie d'une situation d'apprentissage ne demandant pas d'intervention du professeur vieillissent moins vite. Cet effet a été observé directement à l'Ecole Jules Michelet de Talence dans de nombreux cas où les maîtres étaient engagés à reproduire une leçon déterminée. Mais les efforts de renouvellement tentés par les enseignants dans le cas où ils sont libres dans leur travail sont un indice aussi sûr et aisément observables.

Ce phénomène, comme les précédents, peut être observé au niveau d'une classe mais aussi dans l'ensemble du système éducatif et entre autres partenaires : les programmes et les instructions ministérielles (ou les curricula dans d'autres pays) sont le moyen à peu près unique d'explicitation des exigences didactiques du corps social envers les professeurs et le moyen de convenir de la répartition des tâches entre eux.

En regard de la complexité des mécanismes à contrôler, ces textes généralement assez courts et qui doivent laisser ouvert l'essentiel des questions pertinentes apparaissent comme tout-à-fait inadéquats. Leurs modifications périodiques apparaissent, elles, complètement dérisoires, qu'on les compare entre elles ou qu'on

.../...

les compare à l'importance que semblent leur accorder les professeurs et l'administration. Les textes pour l'école primaire, depuis les années 1890, n'offrent que des différences minimales sur l'essentiel et ne diffèrent que sur des nuances.

Les modifications de programmes sont l'objet de projections des désirs des professeurs pour le renouvellement de leurs situations didactiques en réponse au vieillissement de leur cours.

La disproportion énorme entre cet investissement de la nouveauté et la stabilité étonnante des pratiques d'enseignement est aussi un indice des contraintes qui interviennent dans la régulation du vieillissement : le temps de réponse à toute modification du système éducatif est très élevé et les rétroactions très faibles et aléatoires. La meilleure garantie contre la dérive est donc une inertie importante. Mais l'activité d'enseignement elle-même réclame un investissement personnel intense de la part du professeur et cet investissement ne peut se maintenir que s'il est renouvelé. La reproduction exige donc un certain renouvellement qui risque de compromettre les reproductions futures. Les moyens de l'équilibre n'étant pas connus, le système tend à faire porter le renouvellement sur des facteurs qui n'ont pas beaucoup d'influence sur l'objet principal de l'enseignement : les modifications de programmes obéissent à des processus semblables à ceux de la mode par rapport à l'habillement.

Cette question du vieillissement et de l'effet du temps didactique^(*) soulève une question essentielle pour la didactique : Qu'est-ce qui est réellement reproduit au cours d'une leçon ? Un professeur qui reproduit la même histoire, la même succession des mêmes activités et des mêmes déclarations de sa part et de la part des élèves, a-t-il reproduit le même fait didactique qui ont produit les mêmes effets du point de vue du sens ?

.../...

(*) L'objet de recherches de Y. CHEVALLARD et A. MERCIER

Cette question est étudiée dans l'article "Didactique des décimaux": l'obsolescence des situations, puis reprise par M. ARTIGUE dans sa thèse sur la reproductibilité.

Il n'existe pas de moyen naïf de différencier une bonne reproduction d'une leçon - qui donne dans les mêmes conditions un déroulement identique et aussi un même sens aux connaissances acquises par l'élève - d'une mauvaise reproduction de cette leçon - qui dans les mêmes conditions, donne un "déroulement" identique mais un sens différent aux connaissances acquises. Dans le deuxième cas, la similitude du déroulement est obtenue par des interventions discrètes mais répétées du professeur qui transforment toute la situation sans affecter apparemment son "histoire".

Savoir ce qui est reproduit dans une situation d'enseignement est justement l'objet de la didactique, ce n'est pas un résultat d'observation, mais celui d'une analyse s'appuyant sur la connaissance des phénomènes qui définissent ce qu'ils laissent invariant.

ELEMENTS POUR UNE MODELISATION

Ces différents phénomènes peuvent être observés aussi bien dans des relations particulières entre deux personnes que dans des relations beaucoup plus complexes impliquant des organismes et des centaines de personnes.

Est-il possible de "modéliser" tout un système éducatif par un système "enseignant" défini par quelques-unes des relations qu'il entretient avec un système "enseigné" qui représente lui, des centaines d'élèves dont la diversité semble justement la première source des difficultés des enseignants. C'est un pari incontournable du processus de théorisation.

Les problèmes que soulèvent les approches systémiques dont cette méthode se rapproche seront discutés dans le paragraphe 5.

La forme dans laquelle nous avons décrit rapidement ces phénomènes prépare leur modélisation. Il s'agit maintenant d'identifier les relations fondamentales qu'il faut retenir.

Il convient toutefois de s'abstenir encore d'une formalisation excessive et prématurée. Une formulation plus rigoureuse interviendra à une étape ultérieure.

Situation didactique, situation a-didactique

Dans la conception la plus générale de l'enseignement, le savoir est une association entre les bonnes questions et les bonnes réponses. L'enseignant pose un problème que l'élève doit résoudre : si l'élève répond, il montre par là, qu'il sait, sinon, se manifeste un besoin de savoir qui appelle une information, un enseignement. A priori, toute méthode qui permet de mémoriser les associations favorables est acceptable.

La maïeutique socratique limite ces associations à celles que l'élève peut effectuer lui-même. Cette restriction a pour objet de garantir la compréhension du savoir par l'élève, puisqu'il le produit. Mais on est alors conduit à supposer que l'élève possédait déjà ce savoir, soit qu'il l'ait depuis toujours (réminiscence), soit qu'il le construise lui-même par son activité propre et isolée. Tous les procédés où le maître ne donne pas lui-même la réponse, sont acceptables pour accoucher l'élève de ce savoir.

Le schéma socratique peut être perfectionné si on suppose que l'élève est capable de tirer son savoir de ses propres expériences, de ses propres interactions avec son milieu, même si ce milieu n'est pas organisé à des fins d'apprentissage : l'élève apprend en regardant le monde (hypothèse empiriste-sensualiste) ou en faisant des hypothèses parmi lesquelles son expérience lui permet de choisir (hypothèses a-prioristes) ou encore dans une interaction plus complexe faite d'assimilations et d'accommodations telles que PIAGET les décrit.

L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage.

Ce processus psycho-génétique piagétien est à l'opposé du dogmatisme scholastique. L'un ne semble rien devoir à l'intention didactique, alors que l'autre lui doit tout. En attribuant à l'apprentissage "naturel" ce qui repose sur l'art d'enseigner selon le dogmatisme, la théorie de PIAGET risque de soulager le maître de toute responsabilité didactique : ceci constitue un paradoxal retour à une sorte d'empirisme ! Mais un milieu sans intentions didactiques est manifestement insuffisant à induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière.

La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des "problèmes" qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis pour que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur de connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en oeuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation a-didactique^(*). Chaque

(*) En ce sens que disparaît d'elle l'intention d'enseigner (elle est toujours spécifique du savoir). Une situation pédagogique non spécifique d'un savoir ne serait pas dit a-didactique mais seulement non didactique.

connaissance peut se caractériser par une ou des situations a-didactiques qui en préserve le sens et que nous appellerons situation fondamentale. Mais l'élève ne peut pas résoudre d'emblée n'importe quelle situation a-didactique, le maître lui en ménage donc qui sont à sa portée. Ces situations a-didactiques aménagées à des fins didactiques déterminent la connaissance enseignée à un moment donné et le sens particulier que cette connaissance va prendre du fait des restrictions et des déformations ainsi apportées à la situation fondamentale.

Cette situation ou ce problème choisi par l'enseignant est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation a-didactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. Pour cela, il communique ou s'abstient de communiquer, selon le cas, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissage, des heuristiques, etc... L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation plus vaste est la situation didactique.

L'élève ne distingue pas d'emblée, dans la situation qu'il vit, ce qui est d'essence a-didactique et ce qui est d'origine didactique. La situation a-didactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais, dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective.

Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène. Mais l'évolution de la situation modifie le contrat qui permet alors l'obtention de situations nouvelles. De la même façon, la connaissance est ce qui s'exprime par les règles de la situation a-didactique et par les stratégies. L'évolution de ces stratégies requiert des productions de connaissances qui permettent à leur tour la conception de nouvelles situations a-didactiques.

.../...

Le contrat didactique n'est pas un contrat pédagogique général. Il dépend étroitement des connaissances en jeu.

Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation. Nous verrons plus loin que l'on peut concevoir ces situations comme des jeux formels et que cette conception favorise la compréhension et la maîtrise des situations d'enseignement.

Le contrat didactique

Ainsi, dans toutes les situations didactiques, le professeur tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse. Théoriquement, le passage de l'information et de la consigne du professeur à la réponse attendue, devrait exiger de la part de l'élève la mise en oeuvre de la connaissance visée, qu'elle soit en cours d'apprentissage ou déjà connue. Nous savons que le seul moyen de "faire" des mathématiques, c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Le maître doit donc effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère.

- Mais si l'élève refuse ou évite le problème, ou ne le résoud pas ? Le maître a alors l'obligation sociale de l'aider et même parfois de se justifier d'avoir posé une question trop difficile.

- Alors se noue une relation qui détermine - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce système d'obligations réciproques ressemble à un contrat. Ce qui nous intéresse ici est le **contrat didactique**, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du "contenu": la connaissance mathématique visée.

.../...

C'est pourquoi nous ne pouvons pas ici détailler ces obligations réciproques, d'ailleurs ce sont en fait **les ruptures du contrat** qui sont importantes. Mais examinons -en quelques conséquences immédiates.

- Le professeur est supposé créer des conditions suffisantes pour l'appropriation des connaissances, et il doit "reconnaître" cette appropriation quand elle se produit.

- L'élève est supposé pouvoir satisfaire ces conditions.

- La relation didactique doit "continuer" coûte que coûte.

- Le professeur assure donc que les acquisitions antérieures et les conditions nouvelles donnent à l'élève la possibilité de l'acquisition.

Si cette acquisition ne se produit pas, s'ouvre un procès à l'élève qui n'a pas fait ce que l'on est en droit d'attendre de lui mais aussi un procès au maître qui n'a pas fait ce à quoi il est tenu (implicitement).

Remarquons que ce jeu d'obligation n'est pas exactement un contrat :

D'abord, il ne peut pas être complètement explicitable, dès lors qu'il prétend porter sur le résultat de l'action d'enseigner. Il n'existe pas de moyens repérés et suffisants pour construire des savoirs nouveaux ou pour obtenir contre toute défense d'appropriation par l'élève les savoirs visés. Et si le contrat ne porte que sur les règles de comportement du professeur ou de l'élève, son respect scrupuleux condamnera la relation didactique à l'échec.

Il est nécessaire cependant que le professeur accepte la responsabilité des résultats et qu'il assure à l'élève les moyens effectifs de l'acquisition des connaissances. Cette assurance est fallacieuse mais indispensable pour lui permettre d'engager la responsabilité de l'élève. De même, il est nécessaire que l'élève accepte

.../...

la responsabilité de résoudre des problèmes dont on ne lui a pas enseigné la solution bien qu'il ne voie pas, a priori, les choix qui lui sont offerts et leurs conséquences, et qu'il soit donc dans un cas patent d'irresponsabilité juridique.

Nous verrons qu'un contrat de ce genre, totalement explicite, est voué à l'échec. En particulier les clauses de rupture et l'enjeu du contrat ne peuvent pas être décrits à l'avance. La connaissance sera justement ce qui résoudra les crises ~~nées~~ de ces ruptures; elles ne peuvent pas être pré-définies. Pourtant, au moment de ces ruptures, tout se passe comme si un contrat implicite liait l'enseignant et l'enseigné: surprise de l'élève qui ne sait pas résoudre le problème et qui s'insurge de ce que le maître n'ait pas su l'en rendre capable, surprise du maître qui estimait raisonnablement suffisantes ses prestations... révolte, négociation, recherche d'un nouveau contrat qui dépend du nouvel "état", des savoirs... acquis et visés.

Le concept théorique en didactique n'est donc pas le contrat (le bon, le mauvais, le vrai, ou le faux contrat) mais le processus de recherche d'un contrat hypothétique. C'est ce processus qui représente les observations et doit les modéliser et les expliquer.

Un exemple de la dévolution d'une situation a-didactique

Dans un jeu sur micro-ordinateur, de jeunes enfants (5 ans) doivent, avec le crayon optique, conduire un à un, des lapins dans un pré et des canards dans une mare. Les règles de la manipulation ne présentent pas de difficultés insurmontables à cet âge. Les enfants peuvent interpréter que la disparition puis la réapparition d'un animal à un autre endroit, correspond à un déplacement. Mais il s'agit bientôt d'autre chose que d'une manipulation selon la règle : le maître veut que l'élève pointe tous les lapins l'un après l'autre et une seule fois, avant de les diriger vers le pré, afin de développer chez lui l'énumération d'une collection. La suite des opérations à effectuer n'est pas donnée dans la consigne, elle est à la charge de l'élève. La dévolution de cette tâche se fait par étapes :

.../...

Première étape : Approche purement ludique.

Les élèves n'ont pas encore compris que parmi les issues du jeu, certaines sont souhaitables : tous les lapins vont dans le pré et dansent une petite ronde,

et d'autres sont non souhaitables : les lapins oubliés deviennent rouges et émettent un grognement.

Ils jouent, piquent les lapins et sont heureux de provoquer un effet, quel qu'il soit.

Deuxième étape : Dévolution d'une préférence.

Les élèves ont bien compris quel est l'effet souhaité (par exemple, on a supprimé tout effet des fausses manipulations) mais ils attribuent les résultats, bons ou mauvais, à une sorte de fatalité ou de hasard.

Ce genre d'interprétation est adéquat pour de nombreux jeux : à "la bataille" ou aux "petits chevaux", le plaisir naît de l'attente de ce que le sort réserve, alors que le joueur ne prend aucune décision.

Troisième étape : dévolution d'une responsabilité et d'une causalité.

Pour accepter une responsabilité dans ce qui lui arrive, l'élève doit considérer ce qu'il fait comme un choix parmi diverses possibilités puis envisager une relation entre les décisions qu'il a prises et leurs résultats.

A cette étape, les élèves peuvent, après coup, envisager que le déroulement du jeu aurait pu être différent. Cela suppose qu'ils peuvent se souvenir de certaines de leurs actions et plus précisément de ce qui, en elles, était pertinent ou non.

Cette dévolution est délicate : la plupart des enfants sont prêts à accepter du maître l'idée qu'ils sont responsables du résultat du jeu bien qu'ils soient incapables d'établir qu'ils auraient pu obtenir un meilleur résultat par un choix approprié de leur part, ce qui, formellement, est un cas flagrant d'irresponsabilité.

.../...

Si l'élève résoud assez vite le problème, le fait d'avoir accepté a priori le principe de sa responsabilité n'a été qu'un prologue nécessaire à l'apprentissage qui vient justifier après coup cette responsabilisation, en donnant à l'élève les moyens de l'assumer et, finalement, d'échapper à la culpabilité.

Mais pour l'élève qui ne peut pas franchir la difficulté de relier, par la connaissance, son action aux résultats obtenus, la responsabilisation doit être renégociée sous peine de provoquer des sentiments de culpabilité et d'injustices très vite préjudiciables aux apprentissages ultérieurs...

Quatrième étape : Dévolution de l'anticipation

La relation entre la décision et le résultat est envisagée avant la décision, l'élève prend à sa charge des anticipations qui excluent toute intervention occulte. Même si elle n'est pas encore entièrement maîtrisée, cette anticipation est considérée comme étant de la responsabilité cognitive du joueur et non pas seulement sa responsabilité sociale.

Cinquième étape : Dévolution de la situation a-didactique

Pour réussir, l'élève doit bien effectuer l'énumération d'une collection. Mais il ne suffit pas qu'il la produise une fois "par hasard". Il faut qu'il sache la reproduire à volonté dans des circonstances variées. Il faut qu'il soit conscient de ce pouvoir de reproduction et qu'il ait une connaissance, au moins intuitive, des conditions qui lui permettent de bonnes chances de réussite. L'élève doit reconnaître les jeux auxquels il vient d'apprendre à jouer. Mais ce qu'il sait faire ne lui a pas été nommé, identifié et surtout ne lui a pas été décrit comme une procédure "fixe". Ainsi, la dévolution ne porte pas sur l'objet de l'enseignement mais sur les situations qui le caractérisent. Cet exemple a été choisi pour bien distinguer les différentes composantes de la dévolution. L'énumération n'est pas un concept mathématique culturellement très pesant. Il n'intervient dans l'enseignement que beaucoup plus tard, avec des langages et problématiques différents. Ni le vocabulaire, ni les connaissances formelles ne viennent donc perturber l'objet de l'enseignement.

L'enfant, avant cet apprentissage, avait pu "énumérer" des collections en déplaçant les objets ou en les marquant de façon à toujours avoir une matérialisation commode de l'ensemble restant à énumérer.

Mais ici il doit effectuer la même tâche mentalement, ses représentations doivent s'étendre à un contrôle intellectuel beaucoup plus complexe: chercher un premier lapin facile à repérer, puis un autre, de telle façon à garder à l'esprit que ces deux sont déjà pris ; chercher un autre, assez voisin des premiers et formant avec eux une disposition (petit groupe, ligne...) permettant de ne pas les perdre "de vue" tout en cherchant un quatrième, qui entre à son tour dans la structure afin de ne pas reprendre un lapin déjà pris et de permettre de savoir s'il en reste encore... etc

Cette "tâche" ne peut pas être décrite comme une procédure, ni même "montrée" car : énumérer une collection devant un enfant ne lui donne aucune idée des moyens de contrôle qu'il doit acquérir.

Dans cet exemple, la dévolution de la situation a-didactique est peut-être observée indépendamment de la dévolution de l'objet d'enseignement (qui ne peut avoir lieu à ce moment). Ni le maître ni l'élève ne peuvent identifier ce qui est enseigné, ce qui est à connaître ou à savoir.

Un peu plus tard, les énumérations, en tant que productions peuvent devenir des objets d'étude pour l'élève. Il peut reconnaître celles qui sont semblables ou différentes, celles qui sont correctes ou celles qui échouent... concevoir et comparer des méthodes..... et connaître - après coup - l'objet d'enseignement, attaché au jeu des lapins. Il pourra aborder des problèmes d'énumération et de combinatoire plus proches des problèmes scientifiques et définir alors ce qu'il doit apprendre, ce qu'il doit résoudre et ce qu'on lui demande de savoir. Ces dévolutions d'objets d'études, d'objets de savoir et d'objets d'enseignement devraient pouvoir s'interpréter comme des dévolutions de situations a-didactiques d'un autre type.

.../...

L'épistémologie des professeurs.

Le professeur est alors conduit à expliciter une méthode de production de la réponse : comment répondre à l'aide des connaissances antérieures, comment comprendre, construire une connaissance nouvelle, comment "appliquer" les leçons, reconnaître les questions, comment apprendre, deviner, résoudre... etc. Il se réfère ainsi à une philosophie implicite des mathématiques ou à un modèle (comme la géométrie élémentaire) construit pour l'usage qui en est fait : résoudre les conflits du contrat didactique.

- Cette "épistémologie du professeur" (à usage professionnel) doit donc aussi être en fait celle de l'élève et de ses parents. Elle doit être présente dans la culture pour permettre aux justifications de fonctionner et d'être reçues. Le professeur n'est pas libre de la changer à sa guise. On comprend qu'elle a peu de chance d'être consistante, donc de servir de base à une théorie didactique.

- Pour les enseigner, un professeur doit donc réorganiser les connaissances afin qu'elles se prêtent à cette description, à cette "épistémologie". C'est le début du processus de **modification** des connaissances qui en change l'organisation, l'importance relative, la présentation, la genèse... en fonction des nécessités du contrat didactique. Nous avons appelé **transposition didactique** cette transformation

Remarquons qu'a priori, la pratique empirique de l'enseignement des mathématiques, quelle que soit la qualité scientifique des professeurs, ne les conduit pas spontanément à construire une simulation correcte de la genèse des notions. Au contraire, la tentation est grande d'économiser le double travail (de recontextualisation et de redécontextualisation) et de faire apprendre directement un texte du savoir : pour respecter les

.../...

autres obligations du contrat, des problèmes sont bien proposés aux élèves mais leur solution peut être trouvée par des procédés qui font l'économie et la connaissance spécifique de la notion (comme dans l'exemple de l'analogie). La solution est cachée sous une fiction didactique connue de l'élève et qui sert au moment de la négociation. Puisque le maître doit "prouver" à l'élève qu'il lui était possible de répondre et d'apprendre le savoir visé, il doit au moins pouvoir lui dire comment "a priori" Certes si la solution est articulée comme un texte mathématique, elle comprend la justification scientifique correcte du résultat mais beaucoup d'élèves obtiennent "la réponse non par le raisonnement mathématique souhaité", mais par le décodage de la convention didactique.

Illustration : l'effet "DIENES"

L'étude des conceptions de DIENES et des échos qu'elles ont éveillés chez les enseignants dans le cadre des réformes des années 70 est à ce sujet extrêmement démonstrative [cf. MAUDET et G. BROUSSEAU

Par son "processus psychodynamique" DIENES propose un modèle d'apprentissage fondé sur la reconnaissance des similitudes entre des "jeux structurés" puis sur la schématisation et la formalisation de ces "généralisations" guidées.

Il s'agit en fait d'une description et d'une systématisation de certaines pratiques d'enseignement déjà en usage, accompagnée d'une traduction en termes mathématiques : des problèmes semblables deviennent "isomorphes" et une généralisation un "passage au quotient". La théorie ensembliste et les structures fondamentales deviennent le moyen de décrire tous les éléments de la situation d'enseignement qui, en retour, les illustrent parfaitement.

Cette traduction implique une confusion systématique entre la structure de la situation (le jeu), la structure de la tâche, le processus intellectuel et la connaissance elle-même (en tant que structure mathématique). Elle conduit donc implicitement à ériger les fondements des mathématiques, tels qu'ils étaient conçus à l'époque, en un modèle universel, aussi bien

comme moyen de description et d'organisation des mathématiques (la logique), moyen de leur construction et de leur fonctionnement (épistémologie), moyen d'expliquer le fonctionnement psychologique de l'élève à leur sujet (psychologie cognitive), moyen de décrire le processus d'apprentissage et les étapes du développement d'une connaissance (épistémologie génétique) et enfin les moyens didactiques d'obtenir cet apprentissage.

L'épistémologie spontanée des professeurs se trouvait ainsi soudain justifiée, "sacralisée" par sa reformulation en termes "scientifiques" et réaccordée miraculeusement avec tous les domaines susceptibles de la contester. Ce fait fut une des causes du succès initial des propositions de DIENES.

Une telle didactique est indépendante des contenus. Elle conduit même le professeur à mettre l'accent sur les variables non pertinentes de la situation mathématique (celles qui ne les modifient pas) au détriment des conditions spécifiques ("principe de variabilité"). Et finalement, elle n'est qu'une méthode de présentation de savoirs favorisant leur mémorisation.

Le fait le plus évident dans l'utilisation de cette méthode est le suivant : seuls les prosélytes de la méthode sont susceptibles de la faire fonctionner avec succès. Tout usage "servile" des matériels DIENES conduit à des déceptions et à des échecs.

L'analyse en terme de contrat didactique peut proposer une explication à ce fait.

La méthode didactique de DIENES, en s'appuyant sur "le processus psychodynamique", ne laisse pas explicitement d'autre place à l'enseignant que le choix des matériels, la présentation des fiches, les encouragements d'usage... La méthode doit opérer par la vertu d'un processus interne du sujet inélucltable dès lors que ses conditions d'entrées sont satisfaites : présentation répétée de jeux structurés, demande de schématisation... etc. Elle délivre ainsi le maître de la responsabilité technique d'obtenir lui-même l'apprentissage espéré. Il peut présenter ses exercices, attendre, ... fournir éventuellement les réponses accompagnées d'une petite explication, envoyer à la fiche suivante, organiser le

jeu correspondant... mais le contrat d'enseignement ne le lie plus à l'évolution du comportement cognitif que le "jeu" est supposé prendre en charge. Au contraire, il doit laisser l'élève penser par lui-même. Or les jeux de DIENES ne sont pas très souvent satisfaisants parce qu'ils postulent que les règles proposées à l'élève (pour jouer) sont les mêmes que celles qu'il faut lui apprendre, la structure du jeu et celle qui "est" le savoir sont identiques ! Ainsi la compréhension de la règle, condition pour agir, exige préalablement, de la part de l'élève, la connaissance que l'on prétend lui enseigner. Si le maître enseignait d'abord la règle, le jeu se transformerait donc en exercice. Pour éviter cela, il essaie de faire deviner la règle - activité qui n'est pas théorisée dans le processus psychomathématique.

De nombreux travaux de l'auteur ayant pour objet l'amélioration des situations didactiques (dont certains sont évoqués plus loin) ont été conduits dans l'hypothèse que les échecs observés étaient dus à l'insuffisance théorique et pratique des jeux de DIENES.

Il semble pourtant que la cause déterminante soit la rupture dans la dévolution de toute négociation didactique à cause de la délégation faite par le professeur à un processus indépendant réputé suffisant. Le contrat d'enseignement peut subsister si le maître se soucie des résultats quantitatifs de l'élève mais l'articulation des connaissances et leur genèse restent ignorées. Au contraire, l'action "militante" d'un professeur décidé à montrer que la méthode est efficace le conduit à restaurer ce débat. L'insuffisance des situations dans la justification et la signification des connaissances visées n'empêche pas le discours du maître de leur donner un sens et une place suffisante pour un apprentissage. Il est exact toutefois que si les situations étaient incorrectes, aucune dévolution ne permettrait aux jeux de DIENES de produire la connaissance annoncée. Le problème reste ouvert pour de "bonnes" situations. Dans tous les cas, les méthodes d'enseignement de DIENES permettraient d'obtenir des résultats, mais pour des raisons différentes de celles avancées dans la théorie qui les accompagnait.

Cette analyse montre l'utilisation qui peut être faite

.../...

de la notion de contrat pour tenter d'expliquer un phénomène de didactique lié à l'épistémologie des professeurs. Problème important : Est-ce que toute méthode ou toute situation réputée efficace par le truchement d'une quelconque "loi psychologique" ou "didactique" qui délivrerait le professeur de la négociation didactique n'entraînerait pas le même effet ?

Plus le professeur serait assuré de la réussite par des effets indépendants de son investissement personnel et plus il échouerait ...! Nous appelons effet DIENES ce phénomène qui montre la nécessité d'intégrer les rapports maître-élève dans toute théorie didactique. Et cette conclusion renvoie à une question plus difficile : l'épistémologie des professeurs est-elle incontournable ?

Heuristique et didactique

Il est clair qu'on ne connaît pas les conditions à la fois nécessaires, minimales (pour donner le maximum de sens à l'activité de l'élève) et néanmoins suffisantes (pour lui permettre de satisfaire son contrat). On ne connaît pas d'épistémologie génétique effective qui permettrait l'économie de ces négociations de sorte que le maître et l'élève sont souvent réduits (inconsciemment bien sûr) à des expédients :

- la substitution de problème qui peut aboutir à l'effet Topaze ou plus froidement à l'effet Jourdain
- l'usage abusif de l'analogie, le glissement métacognitif, etc...

Or, le professeur, à côté des problèmes, doit donner des moyens de les résoudre (le savoir théorique par exemple) et rendre compte que les moyens déjà enseignés, permettraient bien de construire la solution. Il doit donc faire comme s'il savait comment, en partant de certains savoirs (enseignés) on fabrique des solutions à des problèmes nouveaux. Et un jour, il doit aussi s'expliquer sur ces moyens : comment on les retrouve, comment on les reconnaît...

Son action présuppose-t-elle une épistémologie ? Il va être obligé de la produire, de la livrer ! Pourquoi l'élève a-t-il fait une erreur ? Comment peut-il éviter les prochaines ? Comment trouver une solution ?

"L'algorithme" constitue un instrument de déblocage et de solution des conflits didactiques, en ce sens qu'il permet momentanément un partage clair des responsabilités. Le maître montre l'algorithme, l'élève l'apprend et "l'applique" correctement : sinon il doit s'exercer mais son incertitude est presque nulle. On lui affirme qu'il existe toute une classe de situations différentes dans lesquelles l'algorithme donne une solution (le conflit va reprendre quand il s'agira de choisir un algorithme pour un problème donné).

L'algorithme est pratiquement le seul moyen "officiel" de déblocage ; c'est-à-dire qu'il a fait l'objet de l'explicitation de méthodes d'enseignement qui le concernent. Et il sert de modèle unique ou presque à toutes les approches sous-culturelles de l'enseignement.

On doit donc s'attendre à ce que l'élève reçoive toutes les indications du professeur sur le même mode comme moyens "efficaces" de résoudre les problèmes (tels que des algorithmes) et ceci même si le professeur choisit de façon à ce qu'ils relancent la recherche de l'élève, l'encouragent, l'aident sans toucher à l'essentiel de ce qui doit rester à sa charge. Ainsi, les indications de type heuristique seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes ou aux théorèmes de mathématiques pour l'autre. Avec cet Art de résoudre des problèmes, dont l'essentiel est fondé sur l'introspection, le maître voudrait apprendre à son élève à chercher ; lui, attend des algorithmes.

Mais ce que le maître voudrait présenter à l'élève comme des occasions de recherches typiques n'est qu'une collection d'objets culturels, de problèmes dont les solutions sont connues et répertoriées par l'heuristique. L'élève est donc fondé

.../...

à la recevoir sur le mode du savoir. En ce sens, comme GLAESER le souligne fortement, "l'heuristique ne peut pas s'enseigner puisque sa matière est la part imprévisible et créative de toute recherche de problème. On ne peut que donner un entraînement à l'heuristique qui habitue l'étudiant aux situations de recherche".

Mais alors le processus reste bloqué ! le professeur ne devrait pas, par exemple, faire usage des démarches de pensées inventoriées par POLYA^(*) et qu'il a lui-même reconnu avoir utilisées lors de ses succès de mathématicien.

Il n'y a pas grand danger pourtant à délivrer à l'occasion des informations !" ou des conseils... "Dessinez une figure, introduisez la notation appropriée, quelle est l'inconnue ? Connaissez-vous un problème qui se rattache à celui-ci ?... Énoncez-le différemment"... Reportez-vous aux définitions... (POLYA, commentaires). Au contraire, il s'agit d'habitudes à acquérir.

"Pour résoudre un problème vous devez successivement : comprendre le problème..." (POLYA^(*)). Le contrat glisse ; maintenant la recherche des informations ou des suggestions latérales devient un moyen didactique reconnu, bientôt peut-être exigible d'un élève qui prétend chercher et dont on met en doute l'activité réelle.

Alors le maître est appelé en retour à mettre au clair ces moyens, à les classer, à les identifier, à les définir, à répondre de leur efficacité. Il va donc peut-être choisir les problèmes qui permettront le mieux de les illustrer, de les appliquer, de les faire fonctionner, à titre d'exemple. Mais il ne peut pas restreindre les problèmes de mathématiques et ceux où l'application presque automatique d'un procédé annoncé à l'avance donne la solution. L'élève cherche alors quelle suggestion procédologique est la bonne. La boucle est accomplie, les "heuristiques" se sont substituées ou ont pris place à côté des théorèmes et des théories parmi les moyens entre lesquels il faut choisir pour résoudre un problème mais le problème reste et le contrat didactique aussi.

Pourquoi ne pas chercher des heuristiques du second ordre ?

(*) cf. POLYA "Comment poser et résoudre un problème ?"

Cette voie amorce un type de glissement (heuristique) récurrent comparable au glissement métacognitif. Il est possible d'identifier aussi un glissement métamathématique qui consiste à substituer à un problème mathématique un débat logique de sa solution et à lui attribuer toutes les sources d'erreurs.

Le processus que nous venons de décrire est donc une tendance résultant naturellement des nécessités du contrat didactique. Il est facile d'en trouver des exemples à plusieurs reprises dans l'histoire de l'enseignement. De même, il est clair qu'il n'a rien d'inéluctable : les réticences, puis les résistances, se font de plus en plus fortes au fur et à mesure que le glissement devient important. Il semble que, comme pour l'effet de glissement métacognitif, la seule force antagoniste soit la vigilance épistémologique.

Comme pour les analogies, l'usage - naïf ou systématique - des heuristiques est un excellent moyen de recherche des solutions de problèmes (l'heuristique étant le moyen par définition et par excellence) à condition d'être mise en oeuvre sous la responsabilité exclusive de son utilisateur. Tout crédit accordé a priori à une méthode particulière est un signe de déceptions souvent amères, qui la rend impropre au contrat didactique. Avec GLAESER, nous pouvons appeler "procédologie" "tout le répertoire de recettes éprouvées" (sur les stocks de problèmes classiques) que l'enseignement... inculque" et qui ne sont pas des théorèmes ou des métathéorèmes. (L'enseignement ne semble pas avoir pour mission explicite d'inculquer ces recettes, et nous préférons admettre qu'il le fait sous la pression du contrat didactique).

Par contre, je proposerai d'étendre le terme de "procédures algorithmiques qui apparaissent... comme sous-programmes d'une recherche heuristique" à tout ce qui, dans le contrat didactique, tend à jouer le même rôle, y compris les heuristiques ou les idées originales, lorsqu'elles sont présentées ou utilisées comme des recettes.

C'est la fonction et la présentation didactiques qui laissent ou enlèvent sa valeur à un procédé. Plus exactement, c'est la nature du contrat qui se noue à leur propos. Comme l'effet DIENES (pour le maître), l'affirmation à l'élève qu'il existe une méthode automatique (ou presque) pour établir une famille de résultats, même si c'est vrai, tend à le décharger de la responsabilité fondamentale du contrôle de son travail intellectuel, bloque donc la dévolution du problème, ce qui fait échouer le plus souvent l'activité (et de plus permet à l'élève de contredire et contester la méthode s'il le veut).

Il me paraît nécessaire de souligner ce que nous venons de montrer :

- qu'il n'y a pas de différence de nature entre un usage réservé et légitime de "l'heuristique normative" de POLYA, en vue de "l'éducation" mathématique et la fine procédologie du second ordre, seulement une différence de degré dans l'acceptation du glissement sous la pression du contrat (ou pour aller vers l'élève).
- il n'y a pas de raison de déclarer a priori illégitime, pour le maître, de donner des indications de cette nature [comme ce que nous avons appelé "l'épistémologie des professeurs"], on peut considérer qu'elles sont, en l'absence d'une authentique science de la didactique, une nécessité professionnelle inévitable.

Il est plus important de comprendre les conditions antagonistes qui influencent l'équilibre entre les tendances opposées (pas de renseignements - trop de renseignements).

Cette analyse soulève l'hypothèse suivante : l'heuristique pourrait n'être qu'une rationalisation fondée sur l'épistémologie des professeurs, une invention didactique pour les besoins du contrat, récupérée et développée par les mathématiciens en guise d'épistémologie spontanée.

COHERENCE ET INCOHERENCES DE LA MODELISATION ENVISAGEE : LES PARA- DOXES DU CONTRAT DIDACTIQUE.

Envisager l'enseignement comme la dévolution par le professeur à l'élève d'une situation d'apprentissage a permis de repérer certains phénomènes. La tentative de modéliser cette dévolution comme la négociation d'un contrat permet de les expliquer en grande partie et d'en prévoir d'autres.

L'aboutissement de cette démarche fera considérer le maître comme un joueur face à un système lui-même formé d'un couple de systèmes : l'élève et, disons pour l'instant, un "milieu" dénué d'intentions didactiques à son égard.

Dans le "jeu" de l'élève avec le milieu, les connaissances sont les moyens d'appréhender les règles et les stratégies de base, puis des moyens d'élaborer des stratégies gagnantes et d'obtenir le résultat cherché.

Dans le jeu du maître avec le système élève-milieu, le contrat didactique est le moyen d'établir les règles et stratégies de base puis de les adapter aux changements de jeux de l'élève.

A chaque connaissance, et peut-être à chaque fonction d'une connaissance, doivent correspondre des situations (des problèmes) spécifiques et probablement des contrats didactiques. L'évolution des joueurs et du jeu - à l'encontre des jeux à règles fixes - conduit à des remises en causes des connaissances et du contrat didactique.

Cette dialectique est à la base-même de la constitution des savoirs en tant qu'ils articulent le spécifique et le général. Avant d'approfondir et de systématiser cette modélisation, il est utile d'examiner sa cohérence. Cette étude permettra aussi de préciser les fonctions ou les relations qu'il convient de représenter (par des règles) et les difficultés de l'entreprise.

Ce paragraphe permettra d'exposer plus clairement la méthodologie de la didactique.

.../...

Envisager l'enseignement comme la dévolution à l'élève de la responsabilité de l'usage et de la construction du savoir, conduit à des paradoxes qu'il est utile de signaler.

Le paradoxe de la dévolution des situations

L'enseignant doit obtenir que l'élève résolve les problèmes qu'il lui propose afin de constater et de pouvoir faire constater qu'il a accompli sa propre tâche.

Mais si l'élève produit sa réponse sans avoir eu à faire lui-même les choix qui caractérisent le savoir convenable et qui différencient ce savoir de connaissances insuffisantes, l'indice devient trompeur. Ceci se produit en particulier dans le cas où le professeur a été conduit à dire à l'élève comment résoudre le problème posé ou quelle réponse donner. L'élève n'ayant eu à effectuer ni choix, ni essais de méthodes, ni modification de ses propres connaissances ou de ses convictions, n'a pas donné la preuve attendue de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion. Le professeur a l'obligation sociale d'enseigner tout ce qui est nécessaire à propos du savoir. L'élève - surtout lorsqu'il est en échec - le lui demande.

Ainsi donc, plus le professeur cède à ces demandes et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève ce que celui-ci doit faire, plus il risque de perdre ses chances d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser en réalité.

C'est le premier paradoxe : ce n'est pas tout-à-fait une contradiction, mais le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque.

.../...

Ce contrat didactique met donc le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.

Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. Nous verrons plus loin de quelle manière.

Les paradoxes de l'adaptation des situations

Admettons que le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations didactiques qui lui sont proposées (dévolues).

Nous admettrons aussi qu'il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptible de lui donner un sens correct.

Dans certains cas, il existe quelques situations fondamentales accessibles à l'élève au moment voulu. Ces situations fondamentales lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance qui pourra s'insérer, le moment venu, sans modifications radicales, dans la construction de nouvelles connaissances.

Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées : il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée,

.../...

par adaptation, à une forme du savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie faux ou inadéquat.

L'enseignant se trouve alors devant de nouveaux paradoxes :

i) inadaptation à l'exactitude

Même si ce savoir enseigné au cours d'une première étape est nécessaire pour aborder une étape ultérieure, l'enseignant doit s'attendre à se voir reprocher les erreurs, par ses élèves et par les professeurs des niveaux supérieurs, à moins qu'une tradition ou qu'une négociation culturelles ne le disculpent.

Dans l'hypothèse envisagée, il existe une alternative : le professeur renonce à l'enseignement par adaptation : il enseigne directement un savoir conforme aux exigences scientifiques. Mais alors cette hypothèse implique qu'il doit renoncer à donner un sens à ce savoir et à l'obtenir comme réponse à des situations d'adaptation parce qu'alors les élèves le coloreront de significations fausses.

Le professeur a le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier.

Les choix intermédiaires pourront conjuguer les deux inconvénients et même les compliquer.

L'élève à qui l'on enseigne, d'une part, un savoir "savant" et à qui l'on présente, d'autre part, des situations de références inadéquates est à même de constater toutes sortes de contradictions et d'inadaptations entre ces deux objets d'enseignement. Les savoirs qu'il obtient en comprenant sont même faux ou différents de ceux qu'on prétend lui enseigner.

Les distinctions que l'on établit entre savoir théorique et savoir pratique ne sont souvent peut-être qu'une simple conséquence et une récupération de cette difficulté purement didactique. Ici, encore, l'élève est devant une injonction paradoxale ; il doit comprendre et apprendre ; mais pour apprendre il doit, dans une certaine mesure, renoncer à comprendre et pour comprendre, il doit prendre le risque de ne pas apprendre. Prendre comme objet d'enseignement le savoir et sa genèse (vraie ou fiction), et donc enseigner le savoir et son sens n'est pas une solution non plus.

ii) Inadaptation à une adaptation ultérieure.

La mémorisation de savoirs formels, largement dépouillés de sens, peut être très coûteuse en exercices d'apprentissages. Ces derniers ne doivent pas réintroduire trop de sens, ce qui augmente encore leur difficulté. La représentation que se fait l'élève du savoir mathématique et de son fonctionnement s'en trouve profondément perturbé. Plus l'élève a été entraîné aux exercices formels, plus il lui est difficile, plus tard, de restaurer un fonctionnement fécond des concepts ainsi reçus. "L'application" d'un savoir appris tout fait se produit mal parce que la logique de l'articulation des acquisitions qui le composent est uniquement celle du savoir lui-même et que le rôle des situations a été exclu a priori.

Examinons le choix inverse, celui d'une compréhension, provisoirement erronée, d'un savoir obtenu par adaptation à des problèmes "introductifs". Il faudra reprendre et modifier ce savoir.

Un nouveau paradoxe apparaît : si les élèves se sont bien adaptés aux situations qui leur sont proposées, ils ont mieux compris les raisons de leurs réponses et les rapports de leur savoir avec les problèmes, il sera donc plus difficile, par la suite, de changer ce savoir pour le rendre correct et pour le compléter.

.../...

Nous venons de montrer que pour certaines connaissances, il est assez prévisible que le savoir sera d'autant plus difficile à "reprendre" et à modifier qu'il aura été mieux appris, mieux compris et mieux conformé dans la première étape.

Ce fait tient sans doute à des raisons d'ordre psychologique : il est d'autant plus difficile à changer ses habitudes ou les opinions, qu'elles sont plus intimement liées à des activités plus personnelles plus nombreuses et plus anciennes.

Mais il pourrait tenir aussi à une raison plus directement épistémologique. La suradaptation du "savoir" à la solution d'une situation particulière n'est pas nécessairement un facteur favorable à la solution d'une situation nouvelle. Une différenciation trop forte, une dépendance trop grande par rapport aux "connaissances" directes et l'évolution devient impossible. Le savoir premier fait obstacle. Certains de ces obstacles sont inévitables et constitutifs du savoir - d'autres sont le résultat d'un surinvestissement didactique.

Ainsi, dans l'hypothèse d'un savoir inaccessible à tout élève par une adaptation assez courte à une situation fondamentale assez correcte, le professeur se trouve devant un nouveau paradoxe.

Qu'il choisisse un enseignement formel ou par adaptation, plus il insiste sur l'apprentissage des connaissances intermédiaires, plus il risque de contrarier les enseignements ultérieurs.

Inversement, s'il renonce à fixer, à institutionnaliser les acquisitions, même partielles, l'élève ne trouvera aucun appui lors des étapes suivantes. Dans certains cas,

.../...

mieux l'élève s'adapte à une situation didactique intermédiaire, plus il est inadapté à l'étape suivante.

Il est vraisemblable que c'est ce phénomène qui conduit les professeurs des niveaux supérieurs à n'utiliser les enseignements plus élémentaires que sous la forme de procédures ou d'algorithmes et, s'il faut toucher au sens, à le faire dans des situations avec un vocabulaire et des méthodes aussi différents que possible de ceux des niveaux précédents.

Les paradoxes de l'apprentissage par adaptation

i) Négation du savoir.

L'hypothèse que l'élève pourrait construire son savoir par une adaptation personnelle à une situation a-didactique est-elle consistante ?

Imaginons en effet que le professeur fasse dévolution à l'élève d'une source de questions auto-contrôlables^(*) ou d'un problème. Si l'élève résoud ce problème, il peut penser qu'il l'a fait par l'exercice normal de ses connaissances antérieures. Le fait d'avoir résolu le problème lui apparaîtra comme la preuve qu'il n'y avait rien de nouveau à apprendre pour cela. Même s'il est conscient d'avoir remplacé une stratégie ancienne et identifiée culturellement par une autre de son "invention", il lui sera bien difficile de déclarer que cette "innovation" est un savoir nouveau : quel besoin de l'identifier comme une méthode puisqu'elle semble pouvoir être produite facilement lorsque c'est nécessaire ? Comment un sujet seul pourrait distinguer dans toutes les décisions qu'il a prises celles qui sont détachables de la situation et qui pourront servir telles quelles dans d'autres
.../...

(*) c'est-à-dire telles que l'élève ne sait pas a priori y répondre, mais le pourra lorsqu'il aura une solution et qu'il saura si elle est exacte sans recours au maître.

situations, de celles qui sont purement conjoncturelles et locales.

Les conditions sociales d'un apprentissage par adaptation, en rejetant le principe de l'intervention des connaissances d'un tiers pour produire la réponse, tend à rendre impossible l'identification de cette réponse comme une nouveauté, donc comme correspondant à une acquisition de connaissances.

Le sujet banalise la question dont il connaît les réponses dans la mesure où il n'a pas les moyens de savoir si d'autres se la sont posée avant lui, si personne n'a su y répondre, si d'autres questions lui ressemblent ou lui sont liées en ce qu'elles pourront recevoir une réponse grâce à celle-ci... etc Il faut donc que quelqu'un d'extérieur vienne pointer ses activités et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel. Cette institutionnalisation est en fait une transformation complète de la situation. Choisir certaines questions parmi celles que l'on sait résoudre, les placer au coeur d'une problématique qui confère aux réponses que ces questions appellent un statut de savoir plus ou moins important, les relier à d'autres questions et à d'autres savoirs, constitue finalement l'essentiel de l'activité scientifique. Et ce travail culturel et historique diffère totalement de ce qui semblait être laissé à la charge de l'élève et revient à l'enseignant. Il n'est donc pas le résultat d'une adaptation de l'élève.

D'une certaine façon, l'adaptation contredit l'idée de la création d'un savoir nouveau. Inversement, le savoir est presque la reconnaissance culturelle que la connaissance directe est impuissante à résoudre naturellement certaines situations (par adaptation).

ii) Destruction de sa cause.

Les situations permettant l'adaptation de l'élève sont le plus souvent par nature répétitives : l'élève doit pouvoir faire plusieurs

.../...

tentatives, investir la situation à l'aide de ses représentations, tirer des conséquences de ses échecs ou de ses succès plus ou moins fortuits...

L'incertitude dans laquelle il est plongé est à la fois source d'angoisse et de plaisir. La réduction de cette incertitude est le but de l'activité intellectuelle et son moteur. Mais connaître la solution à l'avance, c'est-à-dire avoir transformé des réponses satisfaisantes, mais locales, en méthode donnant la réponse dans tous les cas, détruit le caractère incertain de la situation qui se trouve alors vidée de son intérêt. Ainsi la connaissance prive l'élève du plaisir de chercher et de trouver une solution "locale". L'adaptation - par la connaissance - coïncide donc avec le renoncement à une incertitude somme toute agréable. L'adaptation de l'élève tend à détruire la motivation qui la produit comme elle tend à enlever tout sens à la situation qui la provoque.

Elle devrait donc s'arrêter très vite et, à la limite, ne pas se produire dès lors qu'un processus devient nécessaire.

L'image simple d'une adaptation à des perturbations extérieures n'est pas satisfaisante pour représenter le phénomène d'apprentissage. Elle ne laisse pas de place à deux éléments essentiels pour le maintien du processus :

- d'une part, la création d'une motivation intrinsèque qui relance l'élève dans la recherche d'une autre "occasion" de s'adapter sans la tentative d'adapter le milieu à lui-même
- d'autre part, l'adaptation interne du sujet sans perturbations extérieures et sans "activité" réelle (comme par exemple la résolution des contradictions internes du sujet nées de l'assimilation de schèmes nouveaux dont parle PIAGET)

.../...

Le paradoxe sur le comédien.

Le professeur peut-il échapper à la dévolution, à l'intention directe d'enseigner tel savoir particulier ? Peut-il échapper à la situation didactique. Après tout, il lui suffirait peut-être d'être mathématicien et de se comporter comme tel devant et avec l'élève. La participation progressive de ce dernier à cette activité pourrait lui permettre d'apprendre les mathématiques comme une activité culturelle directe, sans décalage de langage ou de méthode, sans transposition non plus. L'élève apprendrait les mathématiques comme il a appris sa langue maternelle. Le milieu culturel peut-il être "naturellement" enseignant sans être localement didactique ? Le système didactique peut-il être envisagé sans enseignant ?

Certes, de nombreux travaux ont montré le rôle important joué par le milieu familial social et culturel dans les différences de comportements et de réussite scolaire.

Il est vraisemblable que l'enfant peut apprendre beaucoup de choses dans la mesure où l'activité mathématique des membres de la famille se traduit par des débats et par des questions qui peuvent lui être accessibles ; il en retiendra notamment des méthodes, des exigences, des habitudes et un repérage des difficultés ; c'est-à-dire des renseignements de nature épistémologique. Mais lorsqu'un projet d'apprentissage personnel d'un savoir déterminé se dessinera, l'enfant redeviendra l'élève et le système fondamental réapparaîtra : l'un sera l'enseignant, l'autre l'enseigné et qu'il soit spontané ou institutionnel, le maître ne peut pas échapper à la dévolution du savoir.

Ce savoir dont le texte existe déjà n'est plus une production directe du maître, c'est un objet culturel, cité ou récité. Et sa reproduction au moment voulu est donc beaucoup plus comparable à une pièce de théâtre rejouée à l'intention de l'élève, puis par l'élève lui-même, qu'à une aventure vécue avec lui-même. Si l'élève vit son apprentissage, le maître, lui, est nécessairement un acteur, dès lors qu'il sait à l'avance ce qu'il veut enseigner. Il ne s'agit pas d'une métaphore : l'enseignant est réellement un acteur - avec ou sans texte - occupé à faire vivre une re-production du savoir à son élève.

Cette approche répond en partie à la question initiale, mais elle la transforme et la fragmente :

i/ Le maître doit-il "faire" les mathématiques qu'il veut enseigner, au sens où l'acteur devrait éprouver les sentiments qu'il veut faire partager au spectateur ?

ii/ Le maître doit-il refaire chaque fois son texte autour d'un canevas comme dans la comedia del arte, ou doit-il s'en tenir à un "texte" bien éprouvé ?

Sur le premier point, Diderot a formulé dans une étude célèbre le paradoxe inhérent à l'activité du comédien :

Plus l'acteur éprouve les émotions qu'il veut présenter, moins il est capable de les faire éprouver au spectateur car "observateur continu des effets qu'il produit, l'acteur devient en quelque sorte spectateur des spectateurs en même temps qu'il l'est de lui-même et peut ainsi perfectionner son jeu".

Ce paradoxe se prolonge au cas du professeur. S'il produit lui-même ses questions et ses réponses de mathématiques, il prive l'élève de la probabilité de le faire. Il doit donc laisser du temps, laisser des questions sans réponses, utiliser celles que l'élève lui donne et les intégrer dans sa propre démarche en leur laissant une place de plus en plus grande... Ce schéma idyllique peut se dérouler tant que le professeur fabrique un savoir nouveau mais si le savoir est déterminé à l'avance, cette "liberté" n'est plus qu'un jeu d'acteur et l'élève est convié à être un autre acteur, astreint à un texte ou tout au moins à un canevas, qu'il est censé ignorer. Certains schémas pédagogiques postulent la nécessité que le maître ignore lui-même le savoir à construire (transmettre) de façon à être mieux capable d'effectuer de façon convaincante le passage de l'ignorance au savoir. L'existence de ces schémas est la preuve de la pertinence de notre analyse. Il est aisé de montrer leur caractère illusoire (ce qui ne veut pas dire que toutes les entreprises de ce type échouent, mais qu'elles ne réussissent que sous d'autres conditions).

Ainsi que le montre notre étude [the fragility of knowledge G. BROUSSEAU - M. OTTE], le paradoxe de Diderot s'applique au

.../...

professeur de façon étendue et il est peut être plus fondamental et plus aigu que pour le comédien. Entre autres, l'explication de résistances des acteurs peut s'étendre à celles observées dans le monde des professeurs...

Le "paradoxe" au sens de Diderot est "une proposition absurde en apparence à cause qu'elle est contraire aux opinions reçues et qui néanmoins est vraie au fond" (Encyclopédie). Nous lui avons donné un sens plus étroit. Nos paradoxes sont des sortes de contradictions fonctionnelles entre un jeu apparemment exhaustif de décisions et leur finalité.

La résolution de ces paradoxes au même titre que l'explication des phénomènes observés, est l'un des buts d'une théorie des situations en même temps qu'un moyen de mettre à l'épreuve sa consistance.

MODELISATION DES SITUATIONS DIDACTIQUES

1. Moyens et méthodes

Il s'agit ici d'exposer l'instrument de la modélisation : le jeu, puis de discuter quels seront les rapports de ces "modèles" avec la réalité qu'ils décrivent.

Ces rapports ne sont pas ceux d'un original, qui serait le jeu fondamental comme modèle, avec sa copie, qui serait la réalité didactique, et où les difficultés seraient imputables aux écarts introduits par une "mauvaise" réponse des joueurs. Ces rapports, au contraire, laissent une place à la confrontation avec les observations et sont falsifiables. L'approche systémique ainsi proposée sera illustrée par une discussion des premiers sous-systèmes fondamentaux à prendre en considération. Nous montrerons que la nécessité de prendre en considération le milieu dans le jeu didactique de l'élève n'est pas une réification du modèle (les instruments du jeu) mais une nécessité interne.

Nous donnons alors quatre courts exemples illustrant la méthodologie: un, sur le statut des déclarations de didactique, le second sur la définition d'un objet de la didactique : la mémoire, le troisième plus concret donnera un plan d'étude d'une question : l'énumération. Le quatrième évoquera les types de résultats obtenus (course à 20).

"Situation fondamentale correspondant à une connaissance"

Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé, entre les sous-systèmes : le système éducatif, le système élève, le milieu... etc. Il ne s'agit pas de décrire précisément ces sous-systèmes autrement que par les relations qu'ils entretiennent dans le jeu.

Avant de préciser le type de jeu qui sera utilisé, il faut identifier les deux grandes finalités de la modélisation :

i) - Au regard de la connaissance : le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale : est-ce que connaître telle propriété est le seul moyen de passer de telle stratégie à telle autre ? Pourquoi l'élève chercherait-il à remplacer celle-ci par celle là ?

.../...

Quelle motivation cognitive conduit à produire telle formulation d'une propriété ou telle démonstration ? Telle raison de produire ce savoir est-elle meilleure, plus juste, plus accessible ou plus efficace que telle autre ?

Ce genre de questions peut être posé a priori. Dans un premier temps, les réponses peuvent être puisées dans la logique du jeu, dans l'histoire des sciences ou dans l'analyse mathématique, ou didactique : le jeu spécifique d'un savoir doit en justifier l'emploi ou l'apparition, conformément à la didactique théorique.

ii) - Au regard de l'activité d'enseignement : le "jeu" doit permettre de représenter toutes les situations observées dans des classes - (sinon les déroulements particuliers) - même les moins "satisfaisantes" dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé. Il doit pouvoir engendrer toutes les variantes, même les plus dégénérées. Elles seront obtenues par le choix des valeurs de certaines variables caractéristiques de ce jeu^(*).

Les concepts généraux de la didactique devraient permettre d'établir la signification relative de ces différentes variantes, d'expliquer et de prévoir leurs effets, sur le type de connaissance qu'elles font acquérir, sur le déroulement des activités d'enseignement qu'elles discriminent et sur la qualité de leur résultat.

Inversement, ils devraient permettre d'assortir une connaissance des conditions qui la justifient, qui la rendent nécessaire, sous ses différentes formes

Ajuster ces conditions en fonction de ce que nous savons de l'épistémologie, de la psychologie de l'enfant, de la linguistique, ou de la sociologie est un objectif raisonnable de la didactique.

.../...

(*) cf. ingénierie didactique.

Fournir un contrepoint expérimental aux réflexions des épistémologues ou des théoriciens de la connaissance est une ambition légitime. Mais il ne saurait être question de prétendre que toute activité de production de savoir est assimilable à un comportement "économique" dans un jeu explicitable. D'ailleurs, le savoir est toujours amplement surdéterminé. Il ne s'agit que de modèles, assumés comme tels.

La notion de jeu

Modéliser la notion vague de "situation" par celle de "jeu" exige une précision sur les sens accordés à ce mot. Ses cinq définitions principales ont toutes un rapport avec les éléments à présenter.

i) La première caractérise l'ensemble des relations, "l'hypo-système" à modéliser :

"Activité physique ou mentale, purement gratuite, généralement fondée sur la convention ou la fiction, qui n'a dans la conscience de celui qui s'y livre d'autre fin qu'elle même, d'autre but que le plaisir qu'elle procure" [Défin.1]

Cette définition met en scène essentiellement un joueur - capable d'éprouver du plaisir, de concevoir une fiction et d'établir des conventions et des relations avec un milieu non précisé. Il fournit une activité et son plaisir en dépend. Mais la définition insiste surtout sur le caractère quasi isolé du système ainsi évoqué. Pour le joueur - on admet qu'il puisse exister un "Deus ex machina" dont il ne doit pas avoir conscience- Pour lui donc, l'activité est gratuite. Mais comment concilier cette idée d'une action motivée par le plaisir et pourtant gratuite ? Est-ce que toutes les actions ne seraient pas finalement motivées par le plaisir ? Nous interpréterons la phrase dans le sens suivant :

Les décisions et les actions au cours du jeu ne sont réglées que par le plaisir que le joueur éprouve à les accomplir, en éprouve à leurs effets, mais la décision de se livrer au jeu lui-même n'est finalisée par aucun but. Nous reviendrons plus loin sur cette notion de gratuité.

A côté de ce premier sens, nous en trouvons quatre autres :

ii) Le jeu est "l'organisation de cette activité sous un système de règles définissant un succès et un échec, un gain et une perte" (LALANDE) (le "Game") [Défini. 2]

.../...

iii) C'est aussi, et nous utiliserons souvent le mot dans ce sens, "ce qui sert à jouer, les instruments du jeu", et éventuellement un des états du jeu déterminé par un assemblage particulier des instruments du jeu [Défini. 3]

iv) C'est parfois "la manière dont on joue" le "play". Dans les cas où il s'agira de procédures, nous préférerons les termes de "tactique" ou de stratégie [Défini. 4]

v) C'est enfin l'ensemble des positions entre lesquelles le joueur peut choisir dans un état donné du jeu (au sens 2 - et par extension, en mécanique par exemple, l'ensemble des positions possibles et donc les mouvements d'un système, d'un organe, d'un mécanisme que l'on a par ailleurs assujéti à respecter certaines contraintes [Défini. 5].

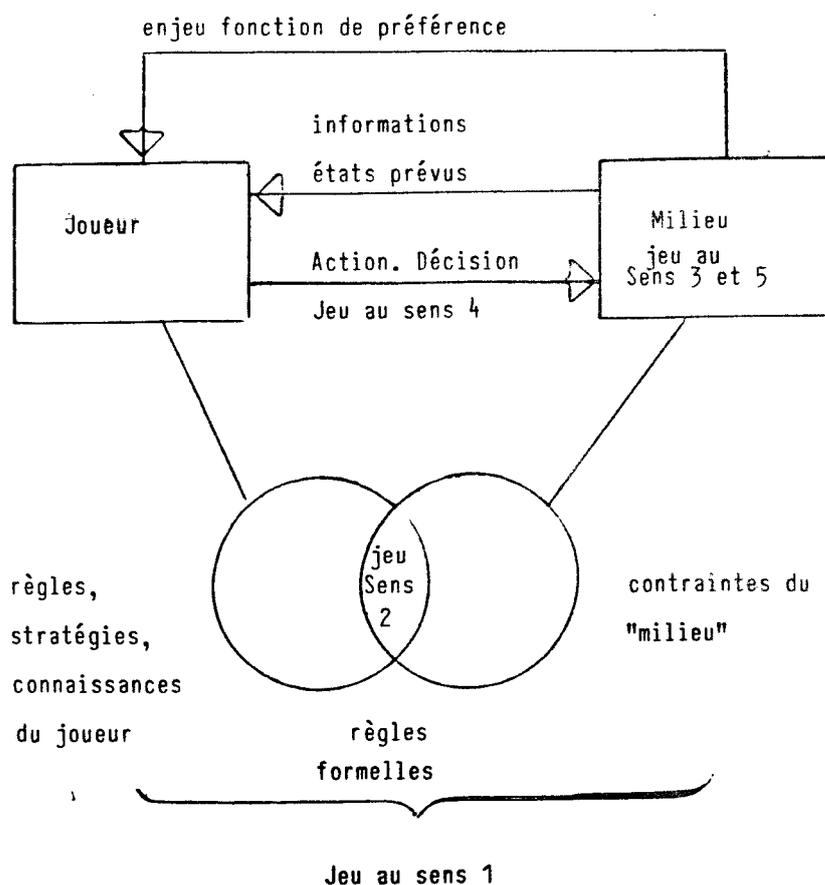


FIGURE 1.

.../...

Les relations entre les différents sens apparaissent sur la figure [1]. Rappelons que formellement, un "jeu" à k personnes (par exemple), est la structure définie par la donnée de :

1. un ensemble X de "positions" distinctes dans lesquelles peuvent se trouver les objets et les relations pertinentes.
2. une application Γ de $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui, à tout état $x \in X$ fait correspondre l'ensemble $\Gamma(x)$ des positions permises entre lesquelles le joueur "au trait" peut choisir à partir de l'état x . Γ représente donc les règles.
3. Un état initial I et un ou des états terminaux F (tels que $\Gamma^{-1}(I) = \emptyset$ et $\Gamma(F) = \emptyset$).
4. un ensemble J de k joueurs et une application θ de $J \times X$ dans J qui, dans chaque état x de jeu, désigne le successeur au trait $\theta(j, x)$ du joueur j .
5. une fonction dite de gain, d'enjeu ou de préférence et qui est une application de A partie de X contenant F dans R .

Cette définition n'est pas générale et l'on peut rencontrer des exemples de jeux qui réclament une modélisation différente, sensiblement plus complexe : par exemple, elle convient pour le jeu d'échecs ou les petits chevaux, pas pour les jeux de rôles.

Elle suffit néanmoins pour définir quelques termes de didactique.

* Une partie est une suite finie d'états $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X telle que $x_1 = I$, $x_n \in F$ et $\forall_i x_{i+1} \in \Gamma(x_i)$. Les "états permis" sont les positions de X qui peuvent figurer dans une partie (aux échecs, les états non permis s'appellent parfois une féérie).

* Une stratégie S est une application de $X \rightarrow X$ qui détermine les choix d'un joueur dans tous les états permis $S(x) \in \Gamma(x)$, puisqu'il y a k joueurs, k stratégies suffisent à déterminer une partie.

.../...

* Une tactique T_A sera une application d'une partie A de X dans X et telle que $x \in A, T_A(x) \in \Gamma(X)$. Une stratégie est donc une tactique définie sur X tout entier.

* Un état de "connaissance" d'un joueur C sera caractérisé par une application de X dans $\Gamma(X)$ telle que $(\forall x) (C(x) \subset T(x))$. Une "connaissance" (non vide) restreint strictement les choix des joueurs. (Cette définition est à rapprocher de celle de l'information).

* Une connaissance "déterminante" réduit à un seul état le choix du joueur dans un certain nombre d'états (resp. dans tous les états), et donc caractérise une tactique (resp. une stratégie).

Une acquisition de connaissances, par exemple sous l'effet d'une information reçue (ou d'un apprentissage), est une modification de l'état de connaissance : un couple (C, C') - en réalité $C(t), C'(t+\Delta t)$ puisqu'on évoque le temps.

Le plus souvent, suivant en cela la théorie de l'information, on considère que $C'(x) \subsetneq C(x)$, c'est-à-dire que la connaissance réduit l'incertitude du sujet en supprimant des possibilités de choix.

Mais il est nécessaire, pour modéliser les modifications de connaissances de l'élève, d'imaginer qu'il n'envisage pas à l'instant toutes les positions permises (bien qu'elles le soient par les règles, objectivement) et qu'une modification de son état de connaissance consiste non pas à réduire son incertitude mais au contraire à l'augmenter par la considération à l'instant $t + \Delta t$ de possibilités nouvelles ouvertes à son choix. Cette considération écarte l'usage strict de la théorie de l'information.

*Modèle d'action : Nous appellerons "modèle d'action" tout procédé de calcul engendrant une stratégie (ou une tactique).

De même, nous pourrions appeler représentation "ce" qui dans un jeu particulier, va engendrer les états de connaissance, ce qui va permettre de le prévoir.

.../...

J'ai utilisé ces définitions dans plusieurs cas et notamment dans l'étude des stratégies de mesurages avec H. RATSIMBA-RAJOHN. On en trouvera dans sa thèse une rédaction beaucoup plus détaillée avec plusieurs exemples intéressants, ainsi que dans la thèse de A. BESSOT et F. RICHARD.

Le premier avantage d'un modèle de ce genre est de permettre dans des cas précis, d'envisager a priori "toutes" les suites de réponses possibles et de les comparer du point de vue de leur efficacité.

Une stratégie gagnante fournit contre toute défense une partie de gain positif, mais on peut évaluer diverses caractéristiques

- son coût, par exemple le nombre de coups amenant la fin de la partie
- le gain qu'elle procure...

Une stratégie non gagnante à tout coup pourra être néanmoins meilleure qu'une autre du point de vue des risques de pertes qu'elle entraîne, des gains qu'elle permet d'espérer, etc...

La théorie des jeux permet alors d'étudier les dilemmes qui se présentent, en particulier dans le cas de la nature "contre" laquelle la plupart des exercices d'apprentissage fondamentaux sont envisagés, mais c'est le cas du maître.

La construction de modèles d'action permet d'aller beaucoup plus loin dans l'analyse de comportements possibles du sujet, comme nous le faisons dans plusieurs exemples (cf. thèse H. RATSIMBA-RAJOHN) L'étude de l'adéquation d'une situation à une connaissance vise donc à montrer que la stratégie optimale peut être engendrée par cette connaissance et pas par une autre. Réciproquement, il devient alors possible de faire des hypothèses sur les variables de la situation et sur leur influence sur les stratégies et sur les changements de stratégies (cf. thèse BESSOT-RICHARD)

Le sens d'une décision, d'un choix de l'élève peut être modélisé lui aussi, à l'aide de plusieurs composantes parmi lesquelles :

1. L'ensemble des choix envisagés par l'élève et rejetés par un choix retenu.
2. L'ensemble des stratégies possibles envisagées et exclues, en particulier la suite des choix ou des stratégies de remplacement envisagées par le sujet.
3. Les conditions mêmes du jeu qui paraissent déterminantes pour le choix retenu, en particulier l'espace des situations engendrées par les valeurs des variables pertinentes qui conservent à la décision un caractère d'optimalité, ou de validité, ou de pertinence.

..../...

Le jeu et la réalité

i) Ressemblance

Dans sa vie "réelle", le sujet organise ses actions selon ses intérêts, dans le cadre de règles inconnues et changeantes ; à l'opposé de ces activités sérieuses, professionnelles ou privées, se présentent les situations de jeu où il peut au contraire choisir ses règles, se livrer au plaisir, libérer des autres contraintes.

Pourtant on connaît de nombreux exemples où la description précise du fonctionnement de certaines relations sociales, financières, économiques, militaires, etc..... est éclairée et facilitée par sa transcription en termes de jeu ; la situation de jeu est souvent un bon modèle de situations réelles.

C'est pourquoi le jeu peut être un puissant dérivatif et un symbole de la vie : il lui ressemble ! En même temps, on peut se rendre maître des contraintes qui, dans la réalité, oppriment le joueur et cette liberté joue un rôle fondamental dans l'équilibration des frustrations qu'elles causent.

Examinons par exemple le jeu de la bobine rapporté par FREUD. L'enfant fait disparaître la bobine sous un meuble "fört", puis à volonté la fait réapparaître "da"....On voit bien les rapports que le jeu peut avoir avec les apparitions et les disparitions - non contrôlées et surtout non prévisibles - de la mère. Mais il serait erroné de croire que la bobine représente la mère et que l'enfant reproduit ou imite sans plus une relation de la vie courante.

Pour l'enfant, l'intérêt réside en ce que, dans le modèle, (dans le jeu) il commande les mouvements de la bobine alors que dans la vie il est sans pouvoir sur les apparitions de sa mère. Ce jeu de la bobine lui permet de revivre l'angoissante situation de la séparation avec sa mère : "fört" mais d'en contrôler l'effet émotif en suscitant à volonté la joie du retour "da". Certes, la reproduction du plaisir est liée au processus et il faut que la bobine disparaisse pour pouvoir réapparaître. Cependant, c'est le contrôle par l'enfant qui est la condition fondamentale. Une bobine "automatique" qui apparaîtrait à intervalles de temps réguliers ne jouerait pas le même rôle. Dès que l'enfant pourrait prévoir les réapparitions, le jeu cesserait de l'intéresser.

.../...

Une bobine qui ferait des apparitions aléatoires (qu'on ne peut ni commander ni prévoir) serait angoissante, trop "réaliste", c'est-à-dire trop près de la situation symbolisée de la mère. A moins qu'il ne découvre que la bobine réapparaîtra sûrement bientôt, qu'il la guette et qu'elle se montre effectivement pendant ce temps d'attente à un moment tout de même imprévu : dans ces conditions, il arrive que le bébé éclate de rire, surtout s'il découvre que quelqu'un commande la bobine avec malignité. Mais ce rire est une réaction de défense, à l'opposé du plaisir de la prise de contrôle des situations comme la dérision est opposée au pouvoir. Rires, mais rires de l'angoisse en passe d'être surmontée.

Le jeu est un symbole en ce sens qu'il ressemble "suffisamment" à la vie. Il sollicite du joueur le même genre de possibilité d'action, le même genre d'émotions, de motivations, et il s'en distingue parce qu'on y commande la plupart des conditions qui, dans la réalité, oppriment et échappent au joueur.

La ressemblance est le moyen de donner un sens à la différence.

ii) Dissemblance

On pourrait croire ainsi qu'on a justifié et expliqué la séparation fondamentale qui oppose le jeu à la vie, ou plus exactement le désir et la réalité, tout en permettant de les placer l'un par rapport à l'autre :

- le jeu conventionnel et symbolique jouant leur rôle à l'intérieur du jeu de la vie
- le jeu symbole de la vie...

Mais si l'on suit Lacan, le symbole créé pour équilibrer les frustrations et les tensions nées des relations avec l'objet du désir, hérite en fait de leur caractère frustrant. Par exemple, lorsque la bobine apparaît quand on le veut et où on le veut, la prise de contrôle est achevée et le jeu disparaît en tant que tel. Ainsi, le jeu qui reste un jeu par définition ne satisfait pas le joueur et crée le besoin d'une nouvelle partie, d'un nouveau jeu ou d'un nouveau symbole. Lacan dit que les relations avec le symbole doivent donc être elles-mêmes équilibrées par la création d'un nouveau symbole ; ainsi la chaîne du sens est ouverte.

Le jeu doit être, soit contrôlé totalement et donc rejeté comme objet de désir, soit reproduit sans fin. Ces deux caractères sont très importants :

- un "jeu" où le joueur commanderait toutes les issues, tous les résultats, et gagnerait à coup sûr, n'offrirait aucune incertitude, et laisserait la place à aucune simulation des incertitudes de son "modèle".

"Si un jeu compliqué n'est pas un jeu utilisable tel quel en classe,....un jeu analysé est un jeu mort" (A. Deledicq) - le jeu ne peut pas être purement gratuit. Il est nécessaire qu'il y ait, face au joueur un partenaire, un milieu, une loi de la nature qui s'oppose dans une certaine mesure à ce qu'il obtienne à tout coup le résultat voulu.

Approche systémique des situations d'enseignement

L'approche systémique des situations d'enseignement paraît indiquée dans la mesure où les sous-systèmes en présence : l'enseigné, le système éducatif, sont identifiables immédiatement en tant qu'acteurs.

Elle présente de l'intérêt dans la mesure où la considération des sous-systèmes dégagés permet, soit de simplifier sensiblement l'étude des problèmes posés, soit d'isoler certains de ces problèmes qui peuvent être résolus dans ces sous-systèmes. Elle se révèle indispensable si la totalité des phénomènes didactiques peut être prise en charge de cette façon et peut alors prétendre à fournir un fondement théorique.

Mais elle présente une certaine ambiguïté et il y a danger qu'elle ne soit que l'instrument d'une projection sur la réalité du modèle pensé par le chercheur.

L'approche (système) classique des situations d'enseignement met l'accent sur ces systèmes concrets, en présence (le maître, l'élève) et leurs fonctions, leurs propriétés. Elle conduit à examiner, à l'aide du modèle de fonctionnement social, la manière dont ces fonctions sont assurées et intériorisées. Les difficultés observées seront

.../...

alors imputées aux mauvaises réponses données aux besoins du système. Ce raisonnement constitue une réification, (BERGER et LUCKMANN 1966), c'est-à-dire que le schéma abstrait et la réalité "doivent" coïncider, et qu'il n'y a plus de place pour l'expérience et pour la falsification. Au contraire, la décomposition en sous-systèmes, envisagée ici, a pour objet la définition des jeux qui permettent de coordonner les stratégies opposées des partenaires en relation. Nous trouverons ainsi les jeux de l'élève avec son environnement didactique, relativement au savoir, les jeux du maître qui joue avec les jeux de l'élève... Il s'agit de postuler l'objet de l'étude didactique et de prouver son existence. La méthode apparaît, dès 1970, dans les travaux que nous regroupons ci-après, et s'améliore ensuite de façon empirique. Elle est très proche de celle préconisée par CROZIER et FRIEDBERG [1977] pour l'étude des systèmes sociaux et politiques :

"Si l'on peut... découvrir des stratégies suffisamment stables à l'intérieur d'un ensemble" (de personnes) et si l'on peut, d'autre part, découvrir les jeux, les règles du jeu et les régulations de ces jeux à partir desquelles ces stratégies peuvent être effectivement considérées comme rationnelles, on a à la fois, la preuve effective que cet ensemble peut être considéré comme un système et des réponses déjà précises sur son mode de gouvernement"⁽¹⁾.

Il serait encore naïf de croire que la construction de ces "systèmes d'action concret" qui articulent les jeux des acteurs en présence, selon CROZIER et FRIEDBERG, peut se passer de la confrontation permanente avec la réalité. Anticiper la pertinence des éléments retenus pour expliquer un phénomène, comporte évidemment le risque de s'enfermer dans les catégories préalables que l'on a acceptées comme point de départ parce qu'elles étaient conformes aux idées reçues. Et c'est seulement par un travail incessant d'analyse de la signification de nombreuses observations naturelles ou provoquées et d'exigences méthodologiques locales et globales que l'on peut relier ces observations aux hypothèses sur les jeux par rapport auxquels elles sont rationnelles et sur le système didactique qui contient ces jeux.

(1) L'acteur et le système p. 216

2. Les situations a-didactiques

Les sous-systèmes fondamentaux

i) Schémas classiques

En première approche, le jeu didactique met en relation un premier joueur: le système éducatif - le maître - porteur de l'intention d'enseigner une connaissance et un second joueur, l'enseigné, l'élève. Nous avons montré précédemment la nécessité du maître, réel ou intériorisé.

Est-il possible de définir le jeu didactique en se limitant à ces deux sous-systèmes ? Plusieurs schémas ont été proposés pour cela, celui de la communication dû à OSGOOD et celui du conditionnement scolaire dû à SKINNER.

Dans le schéma de la communication, le système éducatif est un émetteur d'informations, l'élève un récepteur qui décode les messages qu'il reçoit, à l'aide de son répertoire. L'enseignement consiste, à l'aide de messages formés uniquement avec le répertoire du récepteur - pour qu'ils soient intelligibles - de susciter la création de nouveaux éléments à joindre au répertoire (fig. 2). Il est clair que

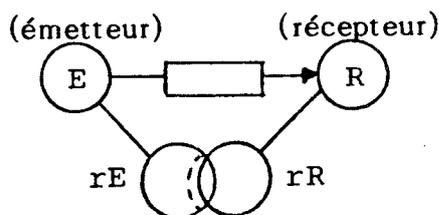


Figure 2

la règle qui s'impose à un maître qui adopterait ce modèle, serait de ne jamais introduire de connaissance nouvelle autrement que par une méthode de construction connue portant sur des concepts connus. Ce qui est communiqué, c'est seulement le savoir sous sa forme culturelle et pour les mathématiques, sous leur forme axiomatique. Ce modèle est insuffisant

pour de nombreuses raisons. Par exemple, il ne permet pas de définir le sens de ces messages mémorisés autrement que comme reformulation des messages antérieurs. Pourquoi ces messages seraient-ils mémorisés d'ailleurs ? Ces apprentissages par appréhension statistique où les sémantèmes les plus fréquemment proposés par l'émetteur s'insèrent peu à peu dans le répertoire du récepteur en modifiant celui-ci "...imaginés par A. MOLES (1967) p. 110) relèvent d'hypothèses empiristes sensualistes depuis longtemps réfutées.

.../...

Ce schéma suppose aussi que dans tout message qui lui sera adressé, l'élève reconnaîtra ce qui est un savoir nouveau à apprendre... quelle transparence !

Le schéma de l'apprentissage béhavioriste (fig. 3) répond à cet objection en proposant un schéma d'apprentissage composé de deux sous-systèmes : l'élève qui influence (nous dirons qui agit sur) le milieu, et le milieu qui "informe" ou sanctionne l'élève.

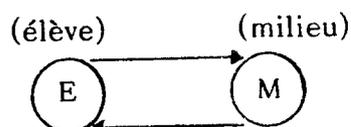


figure 3

L'élève, perturbé par l'influence du milieu, tente d'annuler ces sanctions par des modifications du milieu et/ou par des apprentissages qui le modifient, lui. Bien sûr, l'enseignant est une partie du milieu et peut même se substituer à lui. Ce schéma suppose que le savoir peut s'exprimer sous forme d'une liste de couples stimulus-réponse. Cette thèse a d'abord été réfutée par CHOMSKY-MILLER à propos de l'apprentissage de la langue naturelle qui a été reconnue comme ne pouvant être engendrée, au mieux, que par un automate fini et pas par un modèle stimulus-réponse. Malgré l'objection de SUPPES (pour tout automate fini, il existe un modèle S.R. qui lui est asymptotiquement équivalent), les considérations de NELSON et ARBIB sur la vitesse de convergence de ces modèles les a condamnés (1).

.../...

(1) BROUSSEAU-GABINSKI (1974) donne une présentation assez complète de cette question et une expérience (BROUSSEAU-MAYSONNAVE) apporte une vérification expérimentale qui consiste à comparer la vitesse d'apparition de certains théorèmes (en actes) chez des élèves de dix ans avec les prévisions d'un modèle stochastique d'apprentissage. L'accord est convenable dans le cas d'une situation simple (course à 7). Les enfants sont beaucoup plus rapides que ne le prévoit le modèle, quelques que soient les valeurs de ses paramètres de commande.

ii) Première décomposition proposée

Sans rejeter pour l'instant les réductions ci-dessus, il apparaît qu'il faut considérer deux type de jeux distincts :

a) Les jeux de l'élève avec le milieu a-didactique, qui permettent de préciser quelle est la fonction du savoir après et pendant l'apprentissage. Ces jeux sont évidemment spécifiques de chaque connaissance.

b) Les jeux du maître en tant qu'organisateur de ces jeux de l'élève. (en tant qu'ils sont aussi spécifiques du savoir visé). Ces jeux concernent au moins trois partenaires et généralement quatre : (le maître, l'élève, l'environnement immédiat de l'élève, le milieu culturel). Le jeu du maître (figure 4) dans chaque système d'action concret, définit et donne un sens au jeu de l'élève et à la connaissance.

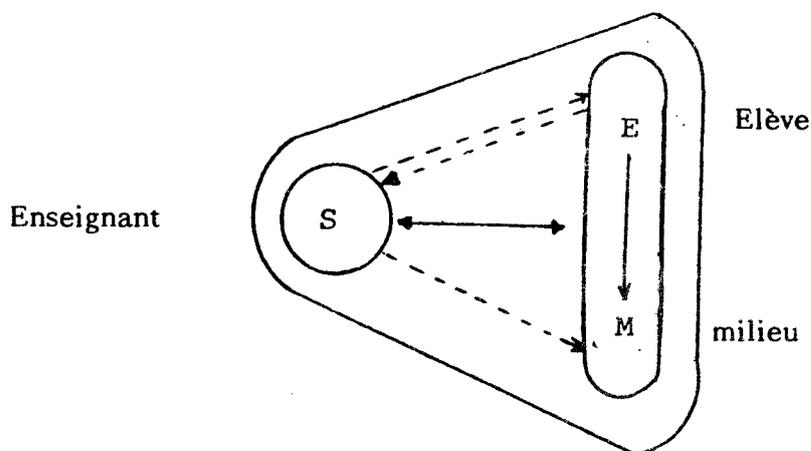


Figure 4

Il découle de cette définition que les deux types de jeux principaux du maître sont la dévolution que nous avons déjà présentée, et l'institutionnalisation. Dans la dévolution, le maître met l'élève en situation a-didactique ou pseudo a-didactique. Dans l'institutionnalisation, il définit les rapports que peuvent avoir les comportement ou les productions "libres" de l'élève avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique : Il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut. Ces deux genres de négociations sont bien distinctes. Les discussions qui précèdent ont bien fait pressentir pour le premier les éléments de choix, ses enjeux et ses règles, qui permettent de le modéliser en termes de jeux. Le second, beaucoup plus lié au contrat

.../...

didactique est l'objet de travaux en cours. Il est préférable d'y revenir après l'étude de la situation a-didactique.

iii) Nécessité du sous-système "Milieu a-didactique"

Ainsi, dans le cas général, la situation didactique ne peut être modélisée ni comme une simple communication, ni comme une simple interaction sociale. Il est nécessaire de faire intervenir un autre système.

Cette nécessité découle d'une des clauses du contrat didactique lui-même qui implique le projet de son extinction : il est sous-entendu, dès le début de la relation didactique, qu'un moment doit arriver où il se rompra. A ce moment, à la fin de l'enseignement, le système enseigné sera supposé pouvoir faire face, à l'aide du savoir appris, à des systèmes dénués d'intentions didactiques. Le savoir enseigné à l'élève est supposé lui donner alors la possibilité de LIRE ses relations avec ces systèmes comme des nouvelles SITUATIONS A-DIDACTIQUES et par ce moyen, leur apporter une réponse appropriée. Le MILIEU est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné.

Cette lecture peut se faire en réalité de différentes manières, mais la cohérence exige que nous la modélisions sous forme de "jeux" reconnus semblables à ceux que l'élève connaît. Le système enseigné peut alors prendre des décisions soutenues par ses connaissances, et de plus, établir entre les deux situations, l'ancienne et la nouvelle, des relations de signification. Il peut, au contraire, lire ces situations a-didactiques sous forme de JEUX nouveaux appelant de nouvelles réponses sans référence avec celles qu'il connaît. Il peut, dans tous les cas, y voir l'occasion de se poser des questions nouvelles et, éventuellement encore, sans réponse pour lui.

Inversement, la situation didactique doit comprendre, réellement ou simplement évoquée, une représentation de ces rapports futurs. Elle doit donc inclure et mettre en scène un autre système, distinct du système éducatif et qui représentera "le milieu". Au fur et à mesure des progrès des élèves, cette représentation culturelle et didactique du milieu sera supposée se rapprocher de la "réalité" et les relations du sujet avec ce milieu devront s'appauvrir en intentions didactiques.

Il en résulte plusieurs conséquences :

- La relation didactique s'appuie toujours sur des hypothèses épistémologiques, conscientes ou non, explicites ou non et cohérentes ou non.

- L'analyse des relations didactiques implique la définition ou la reconnaissance de ces jeux "fondamentaux" et a-didactiques, mettant en présence un milieu et un joueur, ces jeux étant tels que le savoir - tel savoir précis - apparaîtra comme LE moyen de produire des stratégies gagnantes. Il faut pour cela disposer d'une forme particulière et très concrète de connaissances épistémologiques.

- A un moment donné de l'enseignement, l'élève se trouve engagé par son contrat didactique dans un rapport plus ou moins réel avec un milieu organisé (au moins en partie) par le système éducatif. Ce rapport a été organisé afin de justifier la production PERTINENTE par l'élève de comportements qui sont les indices de l'appropriation du savoir. C'est-à-dire que la réponse de l'élève ne doit pas être motivée par des obligations liées au contrat didactique mais par des nécessités a-didactiques de ses relations avec le milieu.

- Les relations de l'élève avec le milieu peuvent être conçues (en particulier par le système éducatif) comme jouant des rôles très différents :

- * Par exemple la situation a-didactique peut être incapable de provoquer aucun apprentissage. Toute la vertu didactique étant contenue dans le contrat didactique.

- * A l'opposé, les effets réciproques du milieu et de l'élève peuvent être attendus comme suffisants à eux seuls pour provoquer les adaptations et les apprentissages escomptés (nous parlerons alors de situation d'apprentissage au sens strict). Le système éducatif se borne alors à choisir, organiser et maintenir des rapports assurant la genèse de la connaissance du sujet. Le renvoi permanent de l'élève à l'interrogation du milieu ne lui laisse pas longtemps ignorer que le contrat pédagogique est vidé de tout contenu didactique.

- * Le cas général est intermédiaire évidemment et conjugue un contrat didactique et une situation a-didactique qui peut être aussi une situation d'apprentissage par adaptation.

iv) Statuts des concepts mathématiques

Nous avons vu que la production et l'enseignement des connaissances mathématiques demande un effort de transformation de ces connaissances en savoirs, une dépersonnalisation et une décontextualisation qui tendent à effacer les situations historiques (les jeux) qui ont présidé à leur apparition. Cependant, ces transformations ne font pas disparaître complètement leur caractère fondamental qui est de répondre à des questions : les questions - les motivations - changent, la plupart disparaissent du corps de la théorie mais subsistent sous la forme de problèmes. Il est assez clair pour la plupart des enseignants de mathématiques que seule la résolution de problèmes peut attester que l'élève a acquis, au moins en partie, les connaissances mathématiques visées. Le champ des problèmes relatifs à une connaissance ne cesse à son tour de se transformer au fur et à mesure de l'évolution de la théorie.

Il s'instaure une sorte de dialectique entre la capacité de la théorie mathématique à résoudre plus facilement le stock de problèmes existants et la capacité du stock de problèmes de faire fonctionner de façon non triviale les connaissances transmises. Cette dialectique repose sur un nécessaire équilibre entre l'activité scientifique qui tend à poser de nouvelles questions à résoudre, et ainsi augmente le champ des problèmes et des connaissances, et la communication de ces connaissances qui pousse à une meilleure organisation théorique qui diminue la complexité du champ. Cette réorganisation banalise alors les problèmes anciens et permet la réduction du champ des problèmes nécessaires à l'appréhension des connaissances théoriques qui peuvent alors poser de nouvelles questions.

Ce système d'actions et de rétroactions n'assure pas un développement "régulier" des mathématiques car un équilibre ne peut que se rompre dans ce domaine et provoquer les différents types d'activités. En tout cas, il montre que la correspondance entre problèmes et connaissance évolue, et n'est pas intrinsèque. Ce n'est que sous le contrôle d'une théorie de ces rapports que l'on pourra proposer à l'enseignement des situations a-didactiques.

D'autre part, si l'on considère l'évolution des connaissances

.../...

et des concepts mathématiques, il est courant de constater qu'elle obéit souvent à un schéma que le fonctionnement que nous venons d'exposer tend à justifier.

L'étape finale, celle qui met le concept sous le contrôle d'une théorie mathématique, permet de le définir exactement par les structures où il intervient et les propriétés qu'il satisfait. Seule cette étape lui donne son statut de concept mathématique et le met à l'abri des ambiguïtés et des "erreurs" - mais non des reprises et des mises à l'écart.

Cette étape est généralement précédée d'une période où le concept est un objet, familier, reconnu, nommé dont on étudie les caractéristiques et les propriétés mais que l'on n'a pas encore, pour diverses raisons, organisé et théorisé. Telles la notion de fonction au XIXème siècle ou celle d'équation au XVIème, ou celle de variable au XXème. Le fonctionnement et le rôle de ces concepts paramathématiques est assez différent de celui des concepts mathématiques. Les premiers sont plutôt des outils et les seconds des objets dans le sens où l'entend R. DOUADY dans sa thèse.

Mais on peut dire aussi en prenant "le point de vue plus formel, plus "systémique" qu'en l'absence de statut mathématique avéré, les termes utilisés sont des outils qui répondent à des besoins d'identification, de formulation et de communication, et que leur usage repose sur un contrôle sémantique. Les mathématiciens les utilisent bien, non parce qu'ils en possèdent une définition qui donnerait sur eux un contrôle "syntaxique", mais parce qu'ils "les connaissent bien" et qu'aucune contradiction qui obligerait à les mathématiser davantage n'est apparue à leur sujet. Cet usage paramathématique correspond à une certaine économie d'organisation théorique, donc d'économie pour la communication, l'enseignement et la résolution de problèmes. Il est très acceptable tant que les difficultés n'apparaissent pas : contradictions (les fondements des mathématiques à la fin du XIXème siècle) ou champ sémantique trop étendu (comme par exemple le concept de probabilité juste avant KOLMOGOROV). Mais l'étape paramathématique d'un concept est vraisemblablement précédée d'un autre que Y. CHEVALLARD a proposé d'appeler "protomathématique".

Il s'agit alors d'une certaine cohérence de fait dans les préoccupations des mathématiciens d'une époque, de points de vue, de méthodes, de choix de questions qui s'articulent très nettement en un concept aujourd'hui identifié mais qui, à l'époque, ne l'était pas.

Pour qu'on puisse parler de concept, il faut bien sûr que des indices suffisants témoignent que ces préoccupations convergentes n'étaient pas le simple fait du hasard ou de la nécessité mathématique, mais aussi celui d'un choix des mathématiciens de l'époque et que ces proximités de questions étaient perçues par eux comme liées, même s'ils ne possédaient aucun terme pour les identifier. Il ne s'agit donc pas de confondre des conceptions historiques au nom de leur identité mathématique. Par exemple, et en simplifiant beaucoup, Al KWARISMI s'occupait des rationnels mais pas vraiment des réels; par contre, STEVIN exposa toute la problématique des réels et le concept a donc atteint avec lui, le niveau protomathématique.

Cette hypothèse d'un objet de connaissance encore implicite mais réglant déjà les décisions dans un champ de questions, repose en fait sur la reconnaissance, a priori, de la possibilité d'interpréter les textes mathématiques à l'aide d'une sorte de représentation du travail du mathématicien. Elle implique donc la prise en charge, non seulement des mathématiques, de leur histoire et de leur épistémologie classiques, mais aussi d'une certaine part de la didactique, dans la mesure où elle prétend modéliser ce travail.

Types de situations

Bien qu'elle n'en soit ni l'original ni la copie, cette classification des différents statuts d'un concept mathématique correspond en fait assez bien à la différenciation des sous-systèmes de la situation a-didactique.

Il s'agit maintenant d'établir :

- . une classification des interactions du sujet avec le milieu a-didactique
- . une classification des types d'organisations de ce milieu
- . une classification des types de fonctionnement d'une connaissance
- . et une classification des modes d'évolution spontanée des connaissances.

Chaque classification devra se justifier assez clairement dans son propre domaine :

- par les différences importantes et évidentes entre les objets classés
- par la simplification qu'elle peut apporter dans leur description, leur analyse et leur compréhension

- par la pertinence de cette classification (et son importance par rapport à d'autres possibles) pour chaque domaine concerné
- par son caractère complètement exhaustif

Les classes obtenues doivent se correspondre et pouvoir s'organiser en un hyposystème. Par exemple, un certain type d'interaction est spécifique d'un type d'organisation sociale et matérielle, il favorise une certaine forme de connaissance et peut aussi la faire évoluer.

Ces hyposystèmes, ainsi identifiés, ont pour but de prévoir et d'expliquer certaines relations entre les interactions que l'on observe, (ou que l'on veut obtenir), les connaissances dont on constate ou vise l'acquisition, des contraintes créées par le milieu...etc. Ils sont donc un support pour produire des hypothèses falsifiables. Il n'est pas exigé qu'ils soient exclusifs, une même situation "réelle" pourra en présenter généralement plusieurs qui correspondront aux diverses composantes et aux divers savoirs en jeu. Ils sont supposés faire évoluer isolément les connaissances et les questions de l'élève, mais ils peuvent s'appuyer les uns sur les autres et s'articuler en processus ou en dialectiques organisées ou spontanées.

Rien n'obligera donc à les prendre comme une norme, un carcan où enfermer le fonctionnement de la connaissance et l'ingénierie didactique.

Ces conditions ne seront pas trivialement satisfaites, notamment la correspondance évoquée plus haut n'est pas assurée à l'avance, même s'il est possible de la soupçonner ou de la croire inévitable. Après coup, elle paraîtra évidente mais ses mises à l'épreuve expérimentales ont montré à quel point ces paris sont hasardeux.

Le caractère nouveau de l'objet d'étude rend difficile la perception de l'intérêt relatif des questions et la nécessité ou la contingence des réponses apportées.

i) Les interactions.

Les relations d'un élève avec le milieu peuvent être classées en au moins trois grandes catégories :

.../...

- Les échanges de jugements (3)
- Les échanges d'informations codées dans un langage, (2)
- Les échanges d'informations non codées ou sans langage: les actions et les décisions qui agissent directement sur l'autre protagoniste. (1)

Ces catégories sont emboîtées car un échange de jugements est un échange d'informations particulières, et celui-ci un type particulier d'action et de décisions. Elles le sont strictement.

[1]*

Il existe des interactions où le joueur exprime ses choix et ses décisions sans aucun codage linguistique, par des actions sur le milieu. Nous assimilerons à cette classe d'interactions celles où apparaissent des messages d'un codage si facile par rapport à l'action qu'il ne jouera aucun rôle dans le jeu. De même que celles où il existe des échanges de messages mais sans rapport avec la solution du problème. Par exemple, le joueur s'exprime ou entretient une conversation anodine avec un tiers sans en attendre de rétroaction.

Il peut arriver aussi que le "joueur" soit un couple d'élèves coopérant à la prise de décision commune après avoir échangé des informations et des jugements. Mais cette relation composite comporte une composante d'action bien identifiable à laquelle se superposent d'autres interactions ayant des finalités locales et temporaires. Si l'échange d'information n'est pas nécessaire à l'obtention de la décision, si les élèves partagent les mêmes informations sur le milieu, la composante "action" est prépondérante.

[2]

. De même, il existe des interactions où le joueur agit en émettant un message à l'intention du milieu antagoniste sans que ce message signifie l'intention d'émettre un jugement. Il ne s'agit pas seulement de classer dans cette catégorie les ordres, les questions, etc... mais aussi toutes les communications d'informations. Certes, la plupart des informations sont implicitement accompagnées d'une affirmation de validité. Mais dans la mesure où l'émetteur n'indique pas explicitement cette validité, s'il ne s'attend pas à être contredit ou appelé à vérifier son information, si le contexte ne donne pas une certaine importance à la question de savoir si l'information est vraie, comment et pourquoi ou si cette validité est susceptible d'être établie sans difficulté, alors le message sera classé comme simplement informatif.

* Ces numéros renvoient tous au même type d'hypothèse (1) Action, (2) Formulation, (3) Validation

L'information ainsi donnée est supposée changer au moins l'incertitude du milieu et en général son "état".

(3) . Il existe enfin des interactions telles que les messages échangés avec le milieu sont des assertions, des théorèmes, des démonstrations, émises et reçues comme telles. La différence entre une information et une affirmation de validité est suffisamment claire et importante en mathématiques pour qu'il soit inutile d'insister ici. Nous verrons plus loin que ces déclarations peuvent être elles-mêmes de différents types, selon qu'elles portent sur la validité syntaxique ou sur la validité sémantique de l'énoncé contenue dans l'assertion, selon qu'elles interviennent comme preuve, démonstration ou comme axiomes ou définitions. (on pourrait aussi évoquer la validité pragmatique, appréciation sur l'efficacité de l'énoncé)

Il n'est pas nécessaire de prouver ici l'importance pour l'enseignement de distinguer ces trois types de productions attendues de la part des élèves.

Ils sont désignés dans les travaux expérimentaux que cet essai théorique accompagne :

- le premier comme "actions" sous-entendu non compris les formulations ou les déclarations de validité qui peuvent les accompagner
- le second comme "formulation" sous-entendu sans débats de preuve
- le troisième - le terme n'est pas très heureux, mais il est utilisé depuis quatorze ans - comme "validation"

ii) Les formes de connaissances.

Les formes de connaissances qui contrôlent les interactions du sujet ont fait l'objet de nombreuses approches. Toutes tendent à opposer la forme la plus explicite et la mieux assumée du savoir, celles qui s'expriment sur le mode "déclaratif" par exemple (SKEMP), à des formes plus implicites : les représentations, les schèmes, les savoir-faire... qui s'expriment sur un mode plus "procédural". Nous y avons ajouté une composante plus strictement linguistique : les codes et langages qui contrôlent les formulations.

.../...

(3) En simplifiant un peu, les formes de connaissances qui permettent de "contrôler" explicitement les interactions du sujet relatives à la validité de ses déclarations, sont principalement ses savoirs exprimables et reconnus comme tels par le milieu. Ils sont organisés en théories, en démonstrations et définitions bien déterminées sous leur forme culturelle la plus achevée.

La distinction entre un savoir et une connaissance tient d'abord à leur statut culturel ; un savoir est une connaissance institutionnalisée, le passage d'un statut à l'autre implique toutefois des transformations qui les différencient et qui s'expliquent en partie par les relations didactiques qui se nouent à leur propos.

Mais nous admettrons en première approche, que les connaissances explicites et les savoirs interviennent de façon comparable dans le contrôle des jugements de "l'élève". Ils forment en quelque sorte le "code" à l'aide duquel il construit, justifie, vérifie et démontre ses déclarations de validité.

Cette justification se réfère à la fois à la conviction profonde de l'élève et à la convention sociale acceptée.

Les preuves et validations explicites sont supposées s'appuyer les unes sur les autres jusqu'à l'évidence, mais leur articulation n'est sûrement pas automatique. Les savoirs et les connaissances s'actualisent dans une activité de recherche ou de preuve selon des modalités que l'heuristique cherche à découvrir et que l'intelligence artificielle tente de reproduire. Pour l'instant, elles restent assez inaccessibles à l'analyse scientifique et a fortiori au sujet lui-même. On peut les supposer gérées elles aussi par des représentations, des schèmes épistémologiques ou cognitifs, des modèles implicites, etc... La différenciation des types de connaissance que nous tentons ne doit pas aller plus loin qu'il ne faut pour organiser le débat didactique avec l'élève. Vraisemblablement, l'activité mentale brise ces fragiles distinctions et unifie ces modes de contrôle en une pensée complexe.

Cependant, il est utile de conserver la distinction faite en logique entre l'énoncé considéré comme une expression bien formée ou comme un ensemble de réalisations et l'assertion qui enclot cet énoncé dans une déclaration métathéorique sur sa

.../...

validité, sur un domaine donné ou sa déductibilité d'un système d'axiome.

En généralisant cette distinction, un jugement est composé :

- d'une description ou modèle exprimé dans un certain "langage" ou (dans une certaine théorie) renvoyant éventuellement à "une réalité" (c'est-à-dire au dispositif du jeu en cours)
- et d'un jugement sur l'adéquation de cette description, sur son caractère de contingence ou de nécessité ou sur sa consistance au regard des connaissances du sujet ou du milieu.

Il est très important de ne pas confondre a priori les connaissances et les savoirs, objets d'une activité de construction de la part de l'élève avec les connaissances et savoirs en tant que moyens de construction et surtout avec les connaissances qui décrivent les rapports que nous cherchons ici à établir entre ces deux domaines. Même si elles paraissent se présenter sous un aspect unifié ou identique, ces distinctions sont bien évidentes dans les travaux sur la "pensée naturelle" que nous avons utilisés dans plusieurs recherches [WERMUZ].

(2) La formulation des descriptions et des modèles dont il est question est réglée par un tout autre type de code. Même si la théorie des langages permet d'unifier la construction d'un énoncé et la démonstration d'un théorème, le recours constant, dans l'activité mathématique, à la langue naturelle et à toutes sortes d'autres types de représentations tels les dessins ou les graphes, exige de distinguer pour eux des codes et des modes de contrôles propres.

(1) Les différents types de représentations ou les théorèmes en actes qui régissent les décisions du sujet ne sont pas très faciles à identifier, même lorsqu'ils paraissent formulables ou explicites par le sujet. Mais de nombreux travaux commencent à montrer comment les régularités de comportements peuvent donner un accès à ce type de "modèles implicites". L'importance qu'ils jouent dans les acquisitions reste un problème largement ouvert, trop souvent abordé de façon trop étroite. Il est certain que ces formes de connaissance ne fonctionnent ni de façon complètement indépendante, ni de façon complètement intégrée pour contrôler les interactions du sujet. L'étude des rapports qui s'établissent entre ces types de contrôles dans l'activité du sujet et du rôle qu'ils jouent dans les acquisitions, est un secteur de la psycho-

gie, essentiel pour la didactique, étude à laquelle la didactique prétend d'ailleurs contribuer.

iii) L'évolution de ces formes de connaissance : l'apprentissage

Les connaissances évoluent selon des processus complexes. Vouloir expliquer ces évolutions uniquement par les interactions effectives avec le milieu, serait certainement une erreur car très tôt, les enfants peuvent intérioriser les situations qui les intéressent et "opérer" avec leurs représentations "internes", des expériences mentales très importantes. Ils règlent ainsi aussi bien les problèmes d'assimilation (augmentation de schèmes déjà acquis par l'agrégation de faits nouveaux) ou d'accommodation (réorganisation des schèmes pour appréhender des questions nouvelles ou pour résoudre des contradictions). Mais l'intériorisation de ces interactions n'en change pas beaucoup la nature : le dialogue avec un opposant "intérieur" est certes moins roboratif qu'un vrai dialogue, mais c'est un dialogue. Existe-t-il des formes d'apprentissage et d'évolution des connaissances distinctes selon les types que nous venons d'exposer ? Les connaissances théoriques s'augmentent et se restructurent-elles comme les langages et comme les modèles implicites ? Quels rôles jouent les différentes formes de connaissances dans les acquisitions des divers types ?

En mathématique, il existe un mode "conventionnel" de croissance des connaissances par le jeu de définition d'objets nouveaux dont on inventorie les propriétés qui servent à poser de nouvelles questions qui introduisent des définitions, etc... Si ce mode "axiomatique et formel" ne peut pas être retenu comme modèle global, même en se restreignant aux savoirs, il ne peut pas être entièrement rejeté, au moins comme modèle local. Il ne peut pas toutefois être étendu à l'apprentissage des représentations.

A l'opposé, les modes d'apprentissage du genre stochastique, fondés sur la répétition, ne paraissent guère adaptés aux connaissances complexes (de haut niveau taxonomique). Les descriptions de l'acquisition du langage par les jeunes enfants (comme celle proposée par E. ALARCOS LLORACH^(*)) mettent en évidence que les productions propres du sujet (comme le babil) apparaissent spontanément, mais presque comme des exercices, qu'elles s'insèrent dans les relations avec le milieu et là s'ajustent naturellement ou sont corrigées par des interventions assez variées.

(*) dans le langage encyclopédie de la Pléiade

Les étapes de cette acquisition ne sont compréhensibles que par l'étude globale des relations du sujet avec son milieu. Par exemple, le passage du mot-phrase à la phrase composée de plusieurs mots n'est pas une simple concaténation.

Une discussion serrée de l'intérêt de distinguer des formes d'acquisitions spécifiques des différentes formes de savoir évoquées plus haut, sort du cadre de ce rapport. Pour l'essentiel, il n'apparaît pas de contradiction avec les modèles épistémologiques que PIAGET rattache à sa théorie de l'équilibration, ni avec les conceptions de BACHELARD. Au contraire, nous avons montré dans plusieurs études précises, que la classification des types de situations pouvait éclairer ces théories et les prolonger [*].

Il faut insister sur le caractère "dialectique" de ces processus: les conceptions antérieures des élèves et les problèmes qui leur sont posés par le milieu conduisent à de nouvelles conceptions et à de nouvelles questions dont le sens est fondamentalement local.

Un des principaux arguments en faveur des modes d'évolution différents pour les différents modes de connaissances est celui que nous avons avancé plus haut et qui s'appuie sur l'histoire des mathématiques et sur l'épistémologie : l'évolution des concepts protomathématiques, celle des concepts paramathématiques et celle des concepts déjà mathématisés est différente. Inversement, l'étude de l'évolution des connaissances des élèves, à condition qu'elle soit convenablement étayée par l'analyse des conditions portant sur les situations, peut apporter un éclairage intéressant sur les processus historiques et constituer une sorte d'épistémologie expérimentale. C'est ce que nous avons tenté de montrer dans de nombreux travaux expérimentaux. [**]

iv) Les sous-systèmes du milieu.

Le fait que les différents types d'interactions avec le milieu et que les différentes formes de connaissances se justifient a priori et indépendamment, permet déjà de discuter les particularités du milieu qui leur sont nécessaires.

Par les questions du genre "pourquoi l'élève ferait-il ou dirait-il ceci plutôt que cela ? que doit-il lui arriver s'il le fait ou s'il ne le fait pas ?" "Quel sens aura la réponse si on la lui fournit...?"

[*] Les obstacles épistémologiques - G. BROUSSEAU

[**] Problèmes de didactique des décimaux - G. BROUSSEAU

Il est possible de dégager les conditions les plus importantes que ces typologies imposent au milieu.

Cependant, ici encore les catégories sont assez évidentes :

(3) Le milieu comprend-il ou non un opposant (ou un proposant) auquel le sujet doit se confronter pour atteindre le but fixé dans un échange d'opinions ?

(2) Le milieu comprend-il un récepteur des messages que l'élève doit émettre pour atteindre le but visé ?

La réponse à ces deux questions détermine des dispositions du milieu, et des règles de jeux totalement différentes.

Examinons-la en soulignant que pour l'instant, le milieu dont il s'agit est un milieu réel et non pas invoqué ou simulé, et que le professeur est supposé ne pas intervenir. Il est clair dans ce cas que les conditions ci-dessus correspondent à des différences très importantes de l'organisation de la classe ou du milieu. Trouver à qui parler et sur quoi agir sont peut-être les problèmes principaux de l'élève.

v) Schéma de l'action.

La figure 1 symbolise le modèle général, mais aussi le schéma de l'action sans interlocuteur.

Elle permet déjà de fournir une grille de lecture d'une situation réelle d'enseignement.

- Le "partenaire" (le jeu) est-il perçu comme dénué d'intentions didactiques?
- A chaque coup, l'élève a-t-il à choisir effectivement un état parmi plusieurs possibilités. Sait-il entre lesquelles ?
- L'élève peut-il perdre ? le sait-il, connaît-il à l'avance l'état final (la classe des états finaux) en particulier l'état final gagnant.
- Connaît-il les règles précises du jeu sans connaître une stratégie gagnante. Peut-on lui enseigner les règles sans donner une solution ? (a-t-il une recherche de stratégie optimale à faire).
- La connaissance visée est-elle nécessaire pour passer de la stratégie

.../...

de base à une stratégie meilleure (ou optimale). Est-elle le moyen principal de ce passage ?

- L'élève peut-il recommencer ? L'anticipation est-elle "gratifiée" dans le jeu ?
- L'élève a-t-il une chance de trouver lui-même la stratégie cherchée. s'il l'emprunte (à un autre élève)
- Les "réponses" (a-didactiques) du système aux choix défavorables de l'élève sont-elles néanmoins pertinentes pour la construction de la connaissance (donne-t-elle des indications spécifiques de l'erreur) ?
- Les contrôles des décisions sont-ils possibles (l'élève est-il conduit à les noter, à les observer) ?
- Une attitude réflexive est-elle utile, nécessaire pour progresser dans la solution ?

Avec ces derniers points, nous approchons de conditions limites d'une situation d'action : considérer la validité d'une solution relève d'une situation de validation ; certes, un élève qui réfléchit naturellement à son jeu est dans une situation a-didactique effective d'action, mais il intériorise et simule en quelque sorte une situation de validation. Si l'enseignant est conduit à vouloir que l'élève ait cette position réflexive, l'incantation ("réfléchis ! regarde ce que tu as fait...") pourra ne pas suffire et le maître devra communiquer son désir didactique par le moyen d'une situation de validation.

L'ouverture que nous représentons en première approche par une incertitude au sens de la théorie de l'information est une des conditions les plus importantes ainsi mise en lumière. La distinction entre la situation didactique et la situation a-didactique permet de concevoir pour l'élève, des situations ouvertes d'enseignement de la pensée mathématique parce qu'elle est déjà "faite". La manipulation de cette ouverture au niveau d'une classe entière est un problème technique délicat, mais accessible : par exemple, faire en sorte que la recherche de chaque élève ne soit pas écrasée par le travail d'un autre est un problème didactique (et non de pédagogie).

.../...

Cette grille de lecture peut aussi servir à la conception de situations didactiques nouvelles. Chaque jeu proposé peut être examiné et comparé à ceux que l'on connaissait déjà. Il est possible de fixer des problèmes d'ingénierie, de classer des dispositifs connus et de regrouper du point de vue de cette modélisation, les productions semblables, d'en prévoir de nouvelles. Le problème essentiel qui demeure du domaine expérimental est celui de l'importance de la réalisation, ou non, des conditions ainsi proposées, comme découlant logiquement, ou systématiquement des possibilités du modèle.

Les variables qui apparaissent ainsi ont des raisons théoriques d'être pertinentes, et des calculs économiques de complexité, ou d'efficacité peuvent les préciser. La confrontation avec la contingence ou avec l'expérience telle qu'elle est pratiquée dans la plupart des recherches ci-après^(*) est incontournable.

Le modèle, à ce point de vue, joue son rôle depuis déjà dix ans, son efficacité est attestée par le nombre de situations d'enseignement originales qu'il ne cesse de produire.

Un exemple en est donné accompagné de réflexions méthodologiques dans le texte assez court [L'enseignement de l'énumération - Annexe 1).

Lorsque les propriétés d'une situation capable de justifier (ou de provoquer) la mise en oeuvre d'une connaissance spécifique sont mieux connues, il est possible d'étudier les possibilités qu'a la première de faire évoluer la seconde. Les variables didactiques sont celles qui influent sur l'apprentissage et dont l'enseignant peut choisir la valeur [Ingénierie - Recherche sur l'enseignement du calcul numérique]. De nombreux problèmes d'apprentissage ont été étudiés à l'aide de ce modèle, nous en donnons un exemple dans le paragraphe suivant [La course à vingt] et plusieurs sont évoqués dans les annexes.

vi) Schéma de la communication.

Le "milieu" comprend un système récepteur et/ou émetteur avec lequel le joueur échange des messages.

(*) Présentées en annexe.

Nous supposons ici que l'objet de ces messages n'est pas d'agir sur le récepteur (de le changer, de prendre du pouvoir sur lui, de le contraindre, etc...) mais d'agir par son intermédiaire sur le dispositif "milieu".

L'élève est toujours engagé dans un jeu avec un dispositif milieu dénué d'intentions didactique. S'il avait à la fois des informations et des moyens d'action suffisants pour choisir seul les états du "milieu", ses messages n'ayant aucune finalité dans le jeu pourraient être quelconques. Nous supposons aussi, pour l'instant qu'il n'y a qu'un seul joueur A. Le récepteur n'a pas d'autre enjeu que de servir le joueur B ne fait personnellement aucun choix.

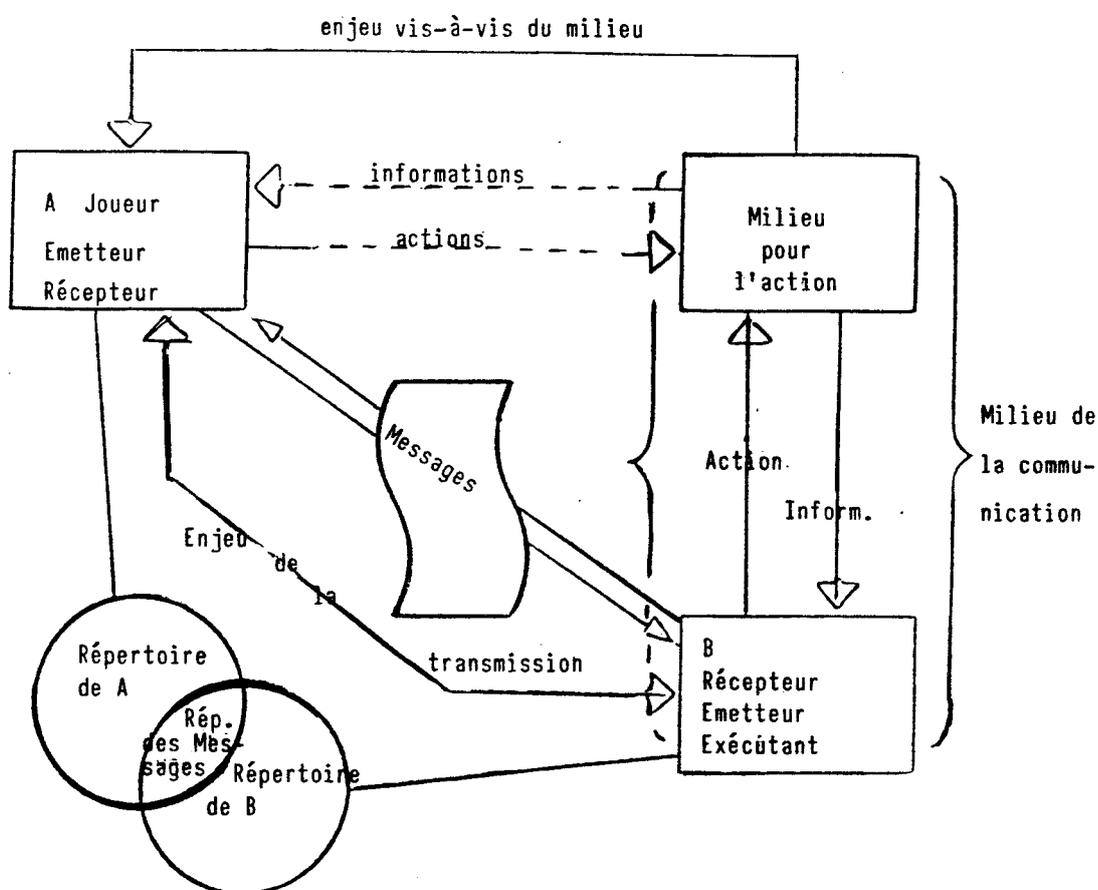


FIGURE 5

.../...

Les différents cas sont évidents :

- moyens d'action insuffisants. A doit décrire à B l'action qu'il devait effectuer et souvent aussi une partie du milieu pour que le message soit intelligible.
- informations insuffisantes pour A mais moyens suffisants, c'est B qui doit décrire le milieu et A, décoder la description et diriger l'observation.
- moyens d'action et informations insuffisantes pour A...

Dans le premier cas, par exemple pour A, le sens du message (le contenu information nécessaire au jeu) qu'il envoie à B, peut être représenté par le passage (le couple) des choix d'action que le jeu offre à B à celui choisi par A.

Dans le deuxième, c'est le passage des choix envisagés par A avant l'apport d'information de B à ceux qu'il envisage après.

Le fait que B soit aussi un joueur peut avoir une certaine importance, car il diminue la liberté de A donc le sens de son action. Il faut bien sûr qu'il coopère avec A. Le schéma n'est pas différent que les rôles soient bien identifiés ou indifférenciés (mais alors un joueur peut ne laisser à l'autre aucun choix à faire, aucune action).

Les messages échangés sont sous le contrôle des codes linguistiques, formels ou graphiques et donc les font fonctionner.

L'enjeu de la communication elle-même s'exprime par les rétroactions qu'exercent l'un sur l'autre les deux interlocuteurs, pour s'assurer qu'ils se sont compris. Leurs exigences porteront sur la conformité au code (minimal pour l'intelligibilité du message) l'ambiguïté, la redondance, le manque de pertinence (des informations superflues) et l'efficacité (les caractères d'optimalité) du message.

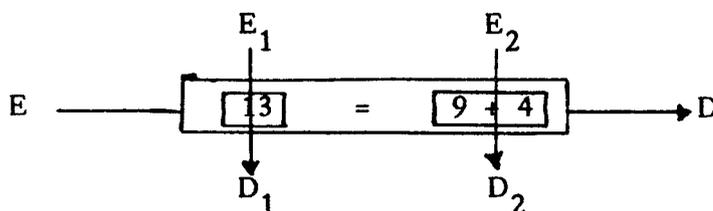
En combinant judicieusement un milieu (un jeu au sens 4) et des conditions convenables d'échange du message (portant sur le canal par exemple), il est possible d'influencer le type et le sens des messages obtenus du joueur.

Il est possible aussi de faire évoluer le code lui-même : passer d'une formulation en langue naturelle à un énoncé formel, ou des métaphores à des descriptions systématiques.

Ces résultats ont été obtenus dans plusieurs recherches, mais il faut s'attendre aussi à des déboires à cause de l'énorme capacité d'invention sémiologique des enfants.

Ce schéma de situations a-didactiques présente un certain intérêt pour donner du sens à (ou pour analyser le sens d')un message, une formule. Prenons un exemple tout-à-fait théorique et un peu provocateur : cherchons une organisation sociale (théorique) pour faire apparaître l'émission (par un enfant de 5 ou 6 ans pour fixer les idées) de la formule " $13 = 9 + 4$ " prise comme information (et non comme assertion). Il faut que l'émetteur E de la formule s'adresse à un destinataire D. Si D connaît la signification de 13 et celle de $9+4$ le message ne peut lui apporter éventuellement d'information que sur "=" paradigme d'un ensemble très restreint : $\{=, \approx, \}$ L'énoncé sera plus informatif si l'un des deux termes n'est pas connu du destinataire, par exemple si l'élève décrit conventionnellement un calcul. "9 est connu ainsi que 4, le résultat de leur somme est 13).

Mais si l'on considère que le premier terme est lui-même un message, le message doit être émis par un émetteur E_1 pour un destinataire D_1 afin de l'informer par exemple sur l'état d'un stock. $9 + 4$ est un message émis par E_2 à l'intention de D_2 dans un autre code pour l'informer sur l'état d'un autre stock ou du même, alors, le message complet informe D_1 que les deux messages 13 et $9 + 4$ désignent le même objet. Il ne reste plus qu'à trouver un jeu qui rende plausible ce fonctionnement de 6 personnes.



Pourquoi D aurait-il besoin de savoir si les deux messages en "langue 1" et en "langue 2" désignent ou non le même objet...

Ce type de raisonnement ne conduit pas toujours à un jeu utilisable en classe (c'est le cas ici), bien que des essais aient été faits, mais il est un moyen très efficace pour analyser le sens des productions des élèves et pour proposer des moyens de contrôle.

Des variantes sont aisément envisageables comme l'autocommunication qui conduit plus aisément pour la mise en mémoire, à des codes personnels. Les passages de l'oral à l'écrit, ou du graphe au discours ont été souvent observés et ont donné lieu à l'étude de l'influence de nombreuses variables [1]

Utiliser le langage mathématique de façon précise dans des communications délibérées entre élèves est certainement un des meilleurs résultats pédagogiques de ce type de situations. Il faut souligner l'importance :

- de la qualité du jeu avec le milieu afin d'assurer et de maintenir la pertinence et la richesse du discours des élèves
- de la fréquence d'emploi qu'il suscite dans les communications
- de la possibilité d'analyser les messages produits.

vii) Schéma de la validation explicite.

Les situations de communications convenables favorisent l'apparition de messages qui peuvent avoir une forme très proche du discours mathématique et qui sont concrètement significatifs pour un certain "milieu". Mais ces messages n'ont pas le sens d'un texte mathématique. Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu a-didactique qui sert de référent à ces messages d'autre part (figure 7).

Les deux joueurs sont alternativement un "proposant" et un "opposant"; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple "milieu/messages". Ce couple est le nouveau dispositif, le "milieu" - le jeu au sens 4 - de la situation de validation. Il peut se présenter comme un problème accompagné de ses tentatives de solutions, comme une situation et son modèle, ou comme une "réalité" et sa description...

Alors que l'informateur et l'informé ont des rapports disymétriques avec le jeu (l'un sait une chose que l'autre ignore), le proposant

[1] cf. La création d'un code à l'école maternelle
et L'enseignement de la géométrie

et l'opposant doivent être dans des positions symétriques, aussi bien en ce qui concerne les informations et les moyens d'action dont ils disposent sur le jeu et sur les messages, qu'en ce qui concerne leurs rapports réciproques, les moyens de se sanctionner mutuellement et les enjeux vis-à-vis du couple milieu/message.

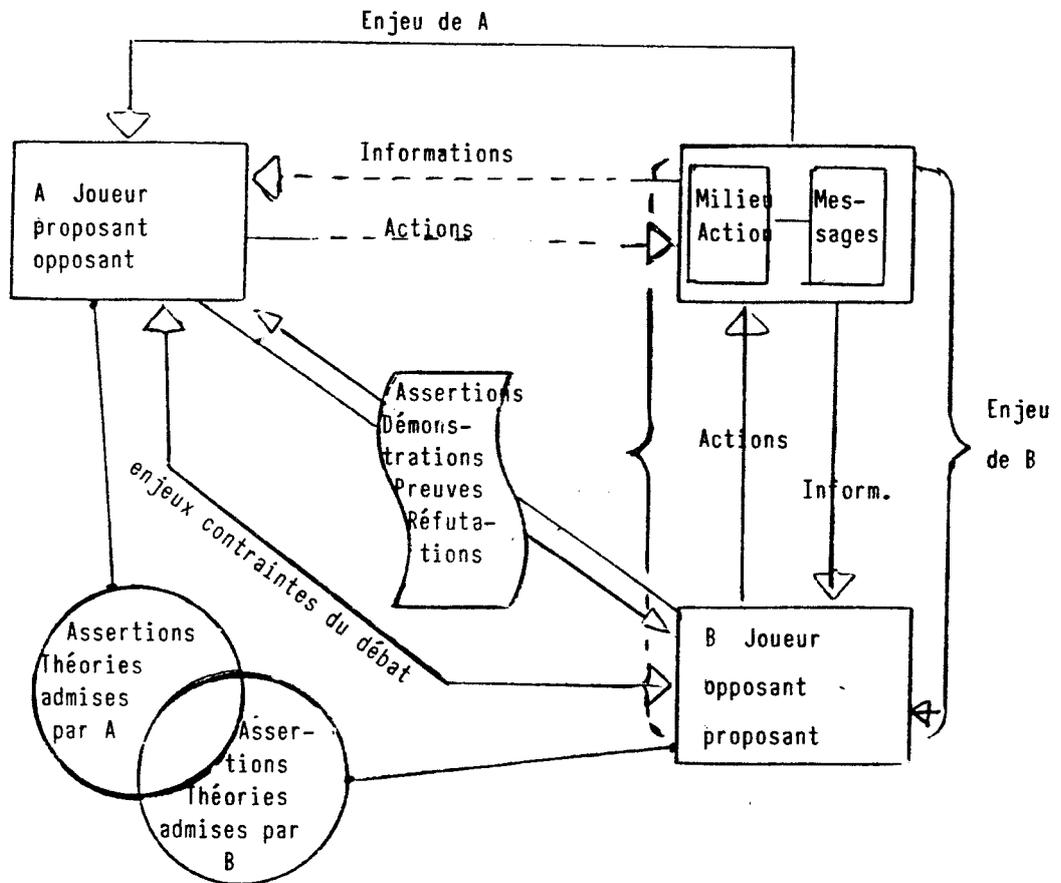


FIGURE 7

En particulier, l'un des deux joueurs ne doit pas avoir la possibilité d'obtenir l'accord de l'autre par des moyens "illégitimes" tels que l'autorité, la séduction, la réputation, etc...

La didactique se trouve devant le défi de produire des situations qui permettront à l'élève de mettre en oeuvre les savoirs et les connaissances mathématiques comme moyens effectifs de convaincre (et donc de se convaincre) tout en le conduisant à rejeter les moyens rhétoriques qui ne sont pas de bonnes preuves ou réfutations.

.../...

Le sens exact des déclarations de mathématiques est conditionné par cet éventail de choix : ce que dit un théorème c'est aussi ce qu'il contredit, ce que dit une démonstration c'est, non seulement ce qui est supposé admis par le proposant et l'opposant, mais aussi ce qui aurait pu être contesté. Le discours mathématique se construit en partie contre d'autres procédés d'acquisition de croyance et de connaissance et non seulement avec.

Précisons le jeu de la preuve.

"A" propose un énoncé, la déclaration d'une propriété dont la connaissance est utile pour maîtriser les rapports (de A ou de B) avec le milieu, l'enjeu fondamental est toujours de "gagner" à un certain jeu"

B, s'il veut s'en saisir et s'en servir, doit :

- soit soit "payer" A à chaque fois, c'est une reconnaissance de validité pragmatique
- soit "payer" A une fois pour toutes en acceptant la proposition comme vraie.

Mais il peut aussi engager le processus de réfutation s'il pense que la déclaration de A est fausse. Réfutation pragmatique : il peut "obliger" A à jouer un coup décevant de son énoncé. Si la déclaration est fausse et si la situation est correcte, le coup doit être perdant (ce n'est pas si facile à obtenir). C'est le dispositif faisant fonctionner le contre-exemple. Il peut obliger A à jouer son coup perdant aussi souvent qu'il a le trait (que c'est à lui de jouer) jusqu'à ce que A retire sa déclaration.

Réfutation intellectuelle. B peut aussi proposer à A un marché : il peut lui proposer une réfutation explicite de sa déclaration initiale, cette réfutation peut lui économiser une coûteuse obstination. Si A accepte (il paye un peu a priori), par exemple en se dessaisissant du trait, B devient alors à son tour proposant. A accepte la réfutation, ou la rejette... Les arguments sont toujours ceux que l'opposant peut recevoir - de même que dans toute communication le répertoire doit être celui du récepteur pour que le message soit compris. Ainsi se crée "de facto" une théorie, en tant qu'ensemble d'observations acceptées par les deux joueurs. Il peut arriver à chaque instant que l'un d'eux découvre qu'une connaissance n'est pas partagée alors qu'il croyait que son partenaire pouvait en disposer. Toutes les assertions de la

.../...

"théorie" sont ainsi susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction.

Les moyens techniques de ces démonstrations et les arguments peuvent être d'ordre sémantique - adéquation au "milieu", au problème - ou d'ordre syntaxique à plusieurs niveaux : articulation et validité mathématique, constitution logique et même formelle de l'argument. Mais aussi d'ordre épistémologique, ainsi que le montre LAKATOS^(*).

L'usage de situations de preuve restaure un environnement socio-culturel qui donne de l'épaisseur au discours mathématique. Les situations de validation peuvent aider le professeur, faire vivre dans sa classe une véritable petite société mathématique. Mais, en restaurant un sens, on prend le risque d'augmenter les difficultés de ceux qui n'entreront pas dans ce jeu, et pour qui le théorème et même les démonstrations ne sont que des savoirs comme d'autres à exhiber à l'occasion. Une situation de validation n'est pas, a priori, la meilleure situation d'apprentissage de savoirs institutionnalisés. Elle peut même susciter des obstacles didactiques et ressusciter des obstacles épistémologiques gênants. Elle est pourtant essentielle comme paradigme des autres situations mathématiques. Il est regrettable par exemple, que la géométrie enseignée dans l'enseignement secondaire n'utilise pas ces processus, alors qu'elle peut se justifier comme premier exemple de la pensée axiomatique en face d'un champ naturellement maîtrisé par d'autres moyens. La mathématisation donnée toute faite, est ici contradictoire avec l'objectif didactique annoncé [cf. L'enseignement de la Géométrie].

A côté de leurs propriétés épistémologiques ou didactiques, ces situations sociales peuvent présenter des avantages intéressants dans le domaine de la motivation des élèves - motivations assez souvent transférables.

Cette motivation peut se manifester, non seulement dans le

(*) I. LAKATOS, Preuves et réfutations - traduction LABORDE et BALACHEFF (Hermann)

cas où la situation est réellement organisée et effectivement vécue, mais aussi quand elle est simulée, racontée ou intériorisée.

Les élèves coopèrent dans la mesure où ils arrivent à partager le même désir d'atteindre une vérité.

Ils doivent recevoir, a priori, avec respect, le point de vue de leur opposant et défendre le leur sans fausse modestie, aussi longtemps qu'ils ne sont pas convaincus du contraire ; mais s'il leur apparaît qu'ils se sont trompés, ils doivent apprendre à changer immédiatement de position, sans amour propre déplacé et quel que soit le prix social.

Ces situations montrent l'enracinement profond de l'activité mathématique dans la pensée rationnelle et l'importance éducative de leur enjeu qui dépasse le simple domaine de l'apprentissage de connaissances. Dans les situations concrètes qui relèvent de ce modèle, lorsqu'elles sont exploitables, le caractère un peu formel de cette "compétition" disparaît. Les contraintes sont bien présentes mais n'apparaissent pas avec cette sécheresse. On peut se reporter aux nombreux exemples donnés en annexe (et particulièrement dans l'annexe I) [Articles 2 et 3]

CHAPITRE IV

QUESTIONS DE METHODOLOGIE

1. L'observation des activités didactiques
2. Contrôle de l'analyse factorielle des correspondances par l'analyse de l'espace explicatif
3. L'étude d'une situation banale

Ce chapitre est composé de trois articles :

"L'observation des faits didactiques" (1978) fait une sorte d'inventaire des méthodes importées des disciplines voisines pour décrire les "faits d'observation" et propose les bases d'une méthode de modélisation que nous avons développée au chapitre III.

La didactique a fait un usage intensif des méthodes statistiques. En France, à la suite des travaux de F. PLUVINAGE et R. GRAS, l'analyse factorielle des correspondances s'est banalisée dans les études des résultats d'élèves avec parfois des difficultés pour distinguer les relations déjà introduites entre les caractères par le questionnaire de celles réellement dues au comportement des sujets. Le texte présenté est la première partie d'un article proposant une méthode de contrôle de ces phénomènes.

Le troisième article montre comment l'étude d'un problème banal peut conduire à la mise en évidence des variables pertinentes des situations dont il est le paradigme. Les connaissances de didactique déjà acquises peuvent permettre de hiérarchiser et de choisir celles de ces variables qu'il convient d'étudier (L'exemple choisi a été traité selon ce schéma par M. IMANA KATEMBERA dans sa thèse de 3ème cycle) et il est même possible de réaliser des modèles à confronter avec l'expérience. Un autre exemple - plus ancien - de l'usage de ces modélisations est reproduit dans les annexes (Peut-on améliorer le calcul des produits naturels ?). De nombreuses autres études de ce type qui ne sont pas rapportées ici témoignent de la faisabilité et de la fécondité du procédé. (en particulier l'étude des stratégies des élèves dans un problème de probabilités étudié avec P.L. HENNEQUIN en 1974).

Les deux derniers textes mettent l'accent sur deux points:

- sur la nécessité de faire de solides analyses a priori et de les confronter aux résultats afin que leur lecture échappe à une forte tendance générale à l'empirisme
- sur la nécessité de se concentrer sur les situations.

.../...

L'étude des comportements des élèves, s'il doit être le souci principal des enseignants, n'est pour le chercheur en didactique qu'un moyen de connaître sont objet d'étude : les situations.

L'amélioration des situations didactiques en fonction de la théorie des situations et des résultats des recherches systématiques est le lieu où s'articulent la méthodologie scientifique et la méthodologie au sens allemand - c'est-à-dire la description des méthodes d'enseignement.

Nous ne donnons ici aucun exemple de ce type de travail pourtant familier mais difficile à présenter actuellement.

L'OBSERVATION DES ACTIVITES DIDACTIQUES

Le but de cet article^(*) est double :

- soulever les questions qui me paraissent fondamentales de façon à favoriser la discussion et à permettre aux intervenants de centrer leurs propos ;
- donner des indications concrètes sur les pratiques actuelles afin d'illustrer et de faciliter la réflexion.

Les questions premières sont simples :

Observer **quoi ? pourquoi ? (ou pour quoi) comment ?**
Mais elles ne le sont qu'en apparence. Même l'ordre dans lequel on les pose prend une hypothèse sur la manière d'y répondre. On ne peut déterminer « quoi » si on ne sait pas « pourquoi » et souvent le « comment » guide le choix des « quoi ».

Je pense qu'il faudrait nous garder de séparer trop vite ces questions, nous risquerions de masquer la réalité profonde des phénomènes que nous voulons comprendre.

(*) Ce texte constituait le rapport introductif à la séance consacrée à l'observation lors d'un Colloque du C.N.R.S (avril 1977)

C'est pourquoi nous procéderons par des approches successives :

Tout d'abord s'imposent :

- une première délimitation de l'objet de l'étude (qu'est-ce qu'un fait didactique ?) ;
- une approche du rôle de l'observation dans les recherches en didactique (pourquoi observer ces faits ?) ;
- et une étude des conditions fondamentales des rapports entre l'observateur et les faits didactiques observés (comment les rendre possibles ?).

Nous pourrions alors pénétrer plus avant et voir :

- comment les types de recherches, l'ampleur et la généralité des faits que l'on vise, commandent le choix des variables observées, donc celui des dispositifs expérimentaux ;
- et comment les techniques d'analyse doivent s'adapter, à la fois, aux recherches et aux données recueillies.

La tentation est grande de faire un simple recensement des types de données — toujours les mêmes — et une liste des techniques de recueil d'analyse de ces données. Dans une troisième partie, nous y succomberons malgré les risques encourus :

Colin Power, dans un intéressant « recensement critique des études d'interaction dans les classes spécifiques » constate que, bien souvent, les observateurs se contentent alors d'utiliser les instruments existants à toute occasion, sans but et sans grand profit scientifique. En particulier, il remarque qu'on n'est pas parvenu à mettre au point une méthode correcte de remise en cause des modèles naïfs qui dominent la recherche en éducation. On ne doit donc pas être trop optimiste et il ne faut pas, par conséquent, être trop sévère ni trop exigeant a priori. La recherche dans ce domaine en est aux balbutiements.

Je crois que de nombreuses approches sont compatibles et qu'il faut se méfier des réductionnismes.

I. — LES CONDITIONS DE L'OBSERVATION DES FAITS DIDACTIQUES

1 — Les phénomènes didactiques

Nous pourrions définir la didactique comme un projet le plus souvent social de faire approprier à un sujet un savoir constitué ou en voie de constitution. Ce projet se manifestera par un contrôle et une modification intentionnelle des relations de l'élève avec son milieu. Seuls les phénomènes relatifs à un tel projet et qui réuniront les deux propriétés suivantes, seront dans le champ de la didactique :

- d'une part, le phénomène ne saurait être compris sans qu'on fasse intervenir la spécificité du savoir ;
- d'autre part, il ne saurait être traité sans sortir du domaine de ce savoir.

Il serait important de voir sur un exemple concret d'enseignement, comment se mêlent, se complètent et s'opposent les faits d'ordres divers : pédagogiques, psychologiques, épistémologiques, didactiques et sociologiques. Nous pourrions peut-être le faire en cours de discussion ; en attendant, voici un exemple assez sommaire : décider qu'on apportera de l'information à une élève lorsque son incertitude (subjective instantanée) deviendra trop forte (en supposant qu'on sache en voir les indices) et qu'inversement on étendra le champ des choix qui lui sont offerts lorsqu'elle deviendra trop faible n'est pas une décision didactique : elle peut être le fruit d'une théorie de l'apprentissage, ou une pratique éducative... Mais l'actualisation de cette décision dans un enseignement de mathématique conduira obligatoirement à interpréter à chaque instant les indices d'incertitude en se référant aux issues effectives de la situation — les

solutions — (par exemple en leur attribuant une probabilité) l'intervention étant elle-même une sélection du contenu de l'information apportée. Alors cette actualisation est dans le champ de la didactique :

Elle ne saurait être réalisée ni comprise sans référence aux connaissances mathématiques du maître et de l'élève au moment de l'action et ne pourrait non plus l'être entièrement sans qu'il soit fait appel au moins implicitement à une théorie de la connaissance, de l'apprentissage, à une métamathématique et une épistémologie sous-jacente.

Il faudra aussi distinguer, bien qu'on emploie le même mot, les faits « didactiques » et la « didactique », science si elle existe dont ils sont l'objet, comme on peut distinguer les objets physiques et la physique.

Les phénomènes didactiques seront donc constitués d'interactions entre trois types de systèmes régulateurs : le ou les élèves, le système éducatif et le milieu (ou la situation), interactions relatives à un système de connaissances déterminé (le mot « système » n'est pas employé dans le même sens dans ces deux occurrences).

On met trop souvent l'accent sur les interactions maître-élève et on les réduit à de simples communications. Il faut souligner fortement :

D'une part, que les interactions de bases sont celles de l'élève avec le milieu, pris aussi bien au sens général (milieu social, scolaire, etc.) qu'au sens particulier de situation (matériel qu'il manipule, questions posées, rapports définissant le statut de la vérité qu'il construit... etc.) ; le maître est conduit à contrôler toutes les sources scolaires d'informations et il se substitue à la plupart d'entre elles parce qu'il ne peut pas les faire interagir avec ses élèves de façon satisfaisante.

D'autre part, que les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes. Les relations du sujet avec son milieu, et particulièrement

les tensions créées par les divers feed-backs déterminent pour chaque acte des coûts à l'emploi, à l'essai, à l'apprentissage, des coûts à l'erreur, qui provoquent à leur tour l'apparition, l'évolution, la déformation, la disparition ou la reprise des concepts à travers équilibres, conflits et ruptures. L'activité didactique consiste à organiser ces contraintes, et à maintenir les conditions des interactions optimales.

De plus, l'élève, comme le système éducatif ont en commun deux caractéristiques : ils appréhendent le milieu à l'aide de systèmes de représentations qui font que leurs échanges sont traités comme des messages, de plus, ils sont capables d'anticiper et de finaliser leurs interactions qui prennent de ce fait, un caractère dialogique particulier.

Une suite d'interactions ne prend un sens en didactique que dans la mesure où elles se rapportent à un même projet (un chez le maître, un chez l'élève) à propos d'un concept dont elles constituent une genèse et dont elles fondent la signification. Seuls seront pertinents du point de vue didactique, ceux des traits relatifs aux systèmes en présence qui déterminent et expliquent cette suite d'interactions (nous reviendrons plus loin sur cet état de choses qui a pour conséquence de faire dépendre la définition des éléments synchroniques intéressants d'une analyse diachronique préalable). Pour bien marquer tout ce que ces suites d'interactions ont de particulier, j'utilise à leur sujet le terme de « dialectique » : les processus didactiques ont un caractère dialectique.

Les recherches en didactique ont pour but de décrire, classer, comprendre, expliquer, concevoir, améliorer, prévoir et permettre de reproduire de tels processus. Mais s'il y a une idée qui s'impose d'abord à chacun à ce propos, c'est le nombre très élevé de variables qui entrent en jeu dans ce type de phénomènes, et la complexité décourageante de leur mode d'action (justement à cause de son caractère dialectique).

Aussi, une des premières tâches consiste à isoler des sous-systèmes d'interactions : quelques traits de

l'élève, du maître, de la connaissance et du milieu, s'ils sont bien choisis, peuvent entrer ensemble et eux seuls, dans une explication d'une classe de phénomènes didactiques. Par exemple, l'apprentissage skinérien fournit un sous-système : le sujet est une mémoire, munie d'un dispositif de mise en mémoire dans des conditions données, que satisfait justement un système d'enseignement réduit à la présentation contrôlée d'informations à mémoriser, le savoir est supposé équivalent à une suite d'informations ou de comportements... etc.

Le plus souvent, pour isoler un sous-système, il est fait appel à un facteur qui permet de séparer ou d'opposer deux catégories de faits didactiques inexpliqués dans leur ensemble mais que l'on espère désormais explicables séparément.

Exemples : algorithme ou mécanisme opposé à raisonnement, déduction vs intuition, concret vs abstrait — directivité, non directivité... etc.

Il est très difficile de choisir un sous-système, qui ne laisse pas échapper l'essentiel : le sens du processus. S'il est assez simple et indépendant des autres sous-systèmes pour se laisser décrire et comparer à l'expérience, il est souvent superficiel et formel, s'il est complexe ou non indépendant des autres systèmes, il devient très difficile à caractériser, donc à observer ou à reproduire.

2 — L'Observation

« L'observation est un acte incluant l'attention volontaire et l'intelligence dirigée sur un " objet " pour en recueillir systématiquement des informations » propose J.M. de Ketele qui s'empresse de reconnaître que ce terme recouvre de nombreuses significations et de les étudier : comme processus en acte, objectif éducatif, méthode pédagogique, phase et composante de toute recherche (c'est le seul point que nous développerons ici) phase et composante du processus d'apprentissage

systématiquement orienté, technique de prise d'information et enfin comme résultat. Je ne rappellerai pas les querelles célèbres que ce concept d'observation et les questions connexes de méthodologie des sciences ont soulevé (Titchener et Baldwin... etc.). Je préfère proposer mon point de vue et que nous discutions sur le sujet qui nous occupe.

Ma pratique de la recherche en didactique m'a conduit à distinguer trois types principaux d'observations différents, à la fois par leurs buts et leurs méthodes sinon par leur sujet :

Prise d'informations codifiées

Il s'agit de la prise systématique d'informations précises à l'avance, dans le cadre d'une position théorique cohérente et explicite, ou mieux d'une hypothèse suffisamment et sincèrement douteuse, et ce dans des conditions réifiées et suivant une procédure standardisée.

Prise au sens le plus strict, l'observation consiste ici à constater la réaction des faits et à répondre par oui ou par non à une question posée d'avance. C'est le type d'observation vers lequel chacun tend :

Il est conçu comme le plus satisfaisant du point de vue scientifique — certains même refusent aux autres types ce statut.

Il est techniquement le plus facile à mettre en œuvre mais il est le plus difficile à rattacher convenablement à une décision didactique ou à un objet didactique théorique pertinent.

Il est souvent le plus décevant parce qu'il est toujours très fragmentaire à cause du nombre de variables.

De ce fait, il masque la presque totalité de la signification des processus observés.

Il ne permet de remettre en cause les conditions de l'observation ou la théorie engagée qu'à travers l'énorme machine de la recherche expérimentale. Compte tenu de la formidable complexité des problèmes, rien ne

prouve que cette machine assure effectivement une interaction suffisamment dense pour assurer un quelconque progrès. Certes, il est souhaitable d'accumuler des « faits » proprement établis mais il ne faut pas céder par empirisme à une téléologie scientifique de mauvais aloi.

Contrôle didactique et scientifique d'une recherche

Pour des raisons scientifiques et déontologiques, il faut donc que les observations de type précédent soient accompagnées d'observations ayant pour but de percevoir l'essentiel des événements observés, d'en restaurer la signification, le sens.

Ce deuxième type d'observations est tout à fait indispensable pour contrôler de façon assez immédiate la valeur didactique de l'activité en cours si la situation a été manipulée ou si le professeur, du fait de l'observation, n'en a pas seul la maîtrise, et a fortiori si un observateur est intervenant même ou seulement perçu.

Il est aussi nécessaire, à mes yeux, pour vérifier la pertinence des objets choisis en première approche, la validité scientifique de l'observation. C'est un moyen de contrôle de la recherche, de remise en cause des hypothèses, de recherche de nouveaux points de vue à soumettre à l'observation systématique. Le résultat de ce type d'observation est une « chronique ». Elle est construite immédiatement après les faits, à partir d'un maximum de notes, et d'enregistrements au sein d'un groupe expérimenté qui analyse les événements sommairement mais de divers points de vue et peut vérifier les points importants soulevés.

Comme celle du type précédent, elle engage une connaissance préalable des phénomènes et implicitement des choix, des hypothèses qu'il est nécessaire d'explicitier. Il est plus difficile qu'il ne paraît à réaliser et il est très difficile à utiliser de façon scientifique, mais il a une valeur irremplaçable comme moyen de préciser les conditions de l'expérience et de la rendre reproductible.

Préparation du chercheur et paradigme à sa recherche

Ainsi le contrôle didactique et scientifique dépend du regard de l'observateur. Ce regard il faut le former et l'entretenir par un troisième type d'observations : celles qui n'ont pas pour but la production d'un résultat relatif à l'objet de l'étude, mais, si j'ose dire, le réajustement du chercheur et le maintien pour lui d'un système de référence, d'un paradigme pour les traits retenus dans son travail. Tout chercheur en didactique devrait à mon avis avoir constamment « des enfants dans la tête » et pour cela regarder des classes, des apprentissages de toutes sortes, qu'ils aient, ou non, un rapport avec son sujet de recherche. De ce point de vue, l'observation devient presque une ascèse car rien n'émousse plus la vivacité des perceptions et l'ardeur à noter ce qui est saillant, que la répétition des observations (ce discours n'est contradictoire qu'en apparence).

Je ne ferai pas une distinction qui a un certain temps retenu mon attention : celle qui oppose l'observation aux fins de recherche et dont nous venons de parler, et l'observation aux fins de décision. La première aurait pour but de produire une déclaration sur la réalité, elle serait le fait de chercheurs que le résultat didactique n'intéresse qu'accessoirement et indirectement, tandis que la seconde aurait pour but de permettre l'action didactique elle-même, et serait l'apanage des professeurs ou des intervenants.

Nous allons voir pourquoi tôt ou tard, le chercheur devient intervenant ou prend l'intervention à son compte. De ce fait, il observe à des détails près de la même façon.

Pour observer un phénomène précis il faut réaliser une situation déterminée et par conséquent la réalisation didactique fait partie du dessein expérimental. Toute

expérience didactique fournit donc à la fois des documents pratiques pour la classe et des documents théoriques ou scientifiques. Mais dans cette activité sont engagés bien d'autres choix et d'autres décisions que celles envisagées du point de vue théorique. Réciproquement bien des questions, bien des occurrences constructibles dans la théorie ne seront pas réellement ouvertes dans l'expérience — c'est-à-dire n'auront pas de chance de se produire ou de ne pas se produire.

Une erreur classique consiste à profiter de l'observation pour transférer indûment des validations :

Les bons résultats pédagogiques de la leçon sont imputés à tort à la théorie et inversement, la théorie séduisante rehausse l'intérêt d'une leçon, en fait terne et quelconque, la part de l'action réellement expérimentée est camouflée.

L'utilisation d'une observation exige toujours un effort pour discerner ce qui était possible dans ce qui ne s'est pas produit et ce qui est nécessaire dans ce qui s'est produit. Cet effort est une construction scientifique.

La place et les techniques de l'observation, dans une science évoluent toujours de façon spécifique avec son développement.

On ne peut pas traiter actuellement des questions d'observation en didactique de façon générale. Il faut examiner les motivations de tous ordres. Elle n'est déterminée directement ni par l'objet de l'étude, ni par les données recueillies, ni par les méthodes d'analyse. Il faudrait examiner les questions et les connaissances du moment. Il faudrait faire un véritable survol des problèmes scientifiques du champ de la didactique et voir, dans chaque cas, la place et le rôle tenu par l'observation. Nous aborderons très modestement cette question au prochain paragraphe mais il me semble utile auparavant de persévérer encore un peu dans les études préalables et de regarder les conditions de l'observation.

3 — Conditions limites d'une observation en didactique des mathématiques

Contrôle des contraintes agissant sur l'observateur

Pour que les théories sur la didactique puissent échapper à des rapports purement idéologiques avec la réalité, il faut à mon avis, que le système de recherches qui les produit soit soumis à des contraintes convenables de la part de l'objet observé. C'est la responsabilité des chercheurs d'organiser ces contraintes : les contrôler ne signifie pas qu'il s'y soustrait quand ça l'arrange, mais au contraire qu'il s'y prête et s'en évade tour à tour dans des conditions déterminées.

Ces contraintes ont pour objet d'amener la théorie à se développer sans cesser d'être éprouvées :

- au regard de la signification et de l'efficacité didactique ;
- au regard de la communicabilité ;
- et à celui de la scientificité.

Certes, comme le dit Canguilhem « une théorie n'est pas vraie parce qu'elle est efficace, mais elle est efficace parce qu'elle est vraie ».

Observer c'est donc d'abord organiser les rapports d'observation qui présentent des garanties sur le plan déontologique et scientifique.

Le dispositif expérimental doit prévoir l'organisation des relations de l'observateur avec son sujet (Bonboir, 1972).

Ces relations concernent les élèves, les maîtres, les autres chercheurs et sont de divers ordres : les contraintes scientifiques, techniques et institutionnelles. Elles sont souvent le prix qu'il faut payer pour rendre possible l'observation.

Elles mettent le chercheur dans l'obligation de tenir compte des problèmes sans l'obliger à les résoudre.

Mais il ne doit à aucun prix y avoir confusion des tâches du système éducatif avec celles du chercheur.

Une théorie du processus de recherche en didactique

Les théories mises en œuvre pour décrire le processus d'acquisition du savoir par les élèves sont souvent utilisables pour ce même processus chez le chercheur. Je transposerai donc les conceptions que j'ai utilisées à propos des élèves [] et dont on parlera peut-être lors de la discussion sur le « statut de l'observation et de l'activité expérimentale chez l'élève » (Colmez, Delacotte, Richard). Elles permettent de rassembler les conditions des échanges avec le milieu autour de trois types de dialectiques : la plus générale, la dialectique de l'action : le système a une interaction, effective avec le milieu, et pertinente au sujet du savoir construit ; cette nécessité et cette pertinence sont le fruit de conditions appropriées et caractéristiques sur les motivations, les actions et les informations accessibles. Ce processus aboutit à la création par le sujet d'un savoir-faire qu'il peut plus ou moins expliciter ou valider. Dans une dialectique de l'action où aucune formulation n'est nécessaire, il peut en apparaître une (ou non) mais elle ne sera régie que par les règles (de syntaxe ou autres) déjà intériorisées.

La dialectique de la formulation est un cas particulier de la précédente. Des conditions supplémentaires rendent nécessaire l'échange d'informations avec un autre sujet, d'où la création d'un langage et l'apparition d'un savoir.

La dialectique de la validation est à son tour, un cas particulier de la précédente. Les échanges concernent, non pas des informations, mais des assertions. Elle aboutit à la création d'un système de validation, donc d'une théorie, par un renvoi aux deux autres types de dialectiques (expérimentation et explicitation).

Dans le cas de la didactique, les dialectiques de l'action se produisent au niveau du système maître-élève ou au contact de l'observateur avec ce système. Le maître construit des régularités, des automatismes, des représentations des objets didactiques. Il perçoit une foule d'indices, dont il a conscience ou non, et agit en conséquence. En observant ces échanges, en y intervenant et en les pratiquant aussi, l'observateur fait de même. Il s'agit alors pour lui, si possible, d'analyser, de décrire, de modéliser ces actions, d'identifier les entrées, les états, les issues, etc. Il combine alors l'observation introspective, allospective et manipulée.

Des communications entre les maîtres réalisent des dialectiques de la formulation et peuvent révéler les informations dont ils se servent et leurs modalités d'action. On peut donc organiser des rencontres entre eux et les observer aussi. Mais en général, le discours pédagogique a un caractère fortement idéologique. Il est un indice de la réalité scolaire, il n'en est pas une théorie ; il remplit d'autres fonctions auprès du maître, sauf si un dispositif particulier par exemple :

— celui que nous avons mis en œuvre dans notre centre de l'IREM de Bordeaux — oblige ces communications à remplir une fonction précise et « asservie » pour rendre nécessaire l'apparition des variables didactiques étudiées.

Il faudra se garder de confondre les opinions didactiques, objets didactiques, avec les assertions du champ didactique, c'est-à-dire la chose observée et les conclusions de l'observation.

L'observateur devra organiser sa propre dialectique de la formulation, que ce soit dans des cours ou dans des débats avec des professionnels ou avec d'autres scientifiques. Mais s'il veut s'engager dans une dialectique de la validation, il devra fatalement intervenir sur les objets de son étude — si possible dans un processus expérimental —. Un débat scientifique implique que les théories soient éprouvées par des contraintes sur le système. On tirera d'autant plus d'informations — et plus pertinentes — de ces interactions qu'elles seront plus nombreuses et plus diversifiées.

Les théories ne surgissent pas d'un seul coup par une combinatoire d'observations naïves ou d'expériences cruciales mais par un lent travail réflexif et critique sur les pratiques mêmes de l'observation. Ce qui justifie pleinement les stratégies « en spirales » invoquées par les chercheurs en didactique.

Souvent, le but d'une recherche ou d'une observation est seulement de rendre possible une observation meilleure (plus fiable, plus précise... etc.).

Le processus de recherche apparaît alors comme dépendant de conditions limites diverses :

- importance et composition de l'équipe de recherche et insertion dans le système éducatif ;
- préalables expérimentaux, méthodologiques et théoriques ;
- ouverture minimum du champ sur lequel porte l'investigation... etc.

Mais les plus difficiles à réaliser sont les conditions institutionnelles.

Organisation d'un système d'observation

Sous la conduite du professeur Lichnerowicz, et avec le professeur Colmez, j'ai étudié ces conditions limites (cf. Brousseau 67 et Brousseau, Colmez, Becker 68). Les IREM me paraissent une réponse adéquate aux problèmes soulevés par l'observation, bien que peu d'entre eux aient pu réaliser l'ensemble des dispositifs préconisés. Les progrès sont lents mais réels et ils seraient impossibles dans d'autres structures.

Je renvoie les intéressés aux textes fondamentaux de l'IREM relatifs à la création de l'école Jules-Michelet pour l'observation, à ceux décrivant le fonctionnement des différents groupes du centre d'observation (informatique, didactique, technique, A.V.), des groupes de

recherche sur l'enseignement élémentaire et du séminaire de didactique du groupe d'enseignement (D.E.A., stages IDEN, PEN, etc.).

L'interface de l'IREM avec les Institutions n'a pas fait l'objet d'une description formelle. Il est néanmoins conçu comme un système comportant un certain nombre de jauges de contraintes. Il permet la réalisation des observations souhaitées et la circulation des demandes, l'évaluation des résultats et surtout la prise en charge et la hiérarchisation des problèmes.

Je considère que ces réalisations font partie intégrante de l'activité des chercheurs, comme ce serait le cas pour la conception d'un appareil nouveau de recherche en physique.

Il n'est pas nécessaire que la même personne contrôle un tel système. Mais si elle n'est pas impliquée dans un système de ce type, elle peut s'égarer très vite. L'observation est bien plus une entreprise collective qu'une activité personnelle. C'est pourquoi des débats comme ceux-ci sont très importants.

Méthode :

Le sujet d'une leçon étant fixé, les différentes équipes qui vont travailler à l'observation sont constituées : groupe didactique, groupe enregistrement, groupe chronique, groupe évaluation et observation.

Le groupe « didactique » a pour but d'adapter l'observation au travail de l'année et de la rendre compatible avec le programme officiel. Il veut susciter un phénomène de façon précise, reproductible, et l'observer. Il va donc déterminer d'une façon très précise les motivations attendues avec les consignes données par le maître, le temps de travail pour les enfants, le matériel utilisé. Ce matériel utilisé par le maître et les enfants obéit à certains impératifs : par exemple, il doit être assez grand pour être visible à l'écran de télévision. Le déroulement de la leçon est donné dans ses moindres détails sur la fiche didactique. Cette fiche est donnée à tous les

observateurs, avant la leçon, pour qu'ils en prennent connaissance.

Durant toute la leçon, le groupe « enregistrement » assure la retransmission son, image, repérage de séquences et l'enregistrement de tout ce qui se passe dans la salle.

Le groupe « chronique » rend compte de la leçon suivie depuis la salle (ou par l'intermédiaire du circuit fermé), sur une simple fiche d'observation.

Le groupe « évaluation et observation » est chargé d'établir les grilles d'observation et de les utiliser au cours de la leçon. Après la leçon, ce même groupe est chargé du dépouillement des résultats et du traitement immédiat des données. Ces grilles, différentes pour chaque séance d'observation, doivent permettre de repérer les différentes découvertes faites par les enfants et leur propagation au sein des groupes. Selon un code déterminé à l'avance, on y note les communications de l'émetteur, du récepteur, le contenu de la communication (verbale ou non verbale).

A la fin de la leçon, les travaux des enfants sont recueillis, les chroniques, les grilles d'observation sont rassemblées. Ces documents ajoutés aux bandes de magnétoscope et magnétophone constituent le matériel de base qui permettra de nombreuses analyses.

Conclusion

Nous avons essayé de répondre à un premier lot de questions relatives au « pourquoi », au « quoi » et au « comment », et de montrer que l'on ne peut espérer que les rapports observateurs/observés s'établissent naturellement et naïvement en dehors de la problématique scientifique. L'observation se construit « contre » le système observé.

Il reste maintenant à s'intéresser au « quoi », au « pourquoi » et au « comment ».

II. — PROBLEMES D'OBSERVATION EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES — TYPES D'OBSERVA- TION

1) Les problèmes d'observation sont toujours des problèmes d'adéquation des moyens aux objectifs. C'est pourquoi il faudrait tenter de les classer d'après les sujets de recherche. Mais nous ne pourrions pas aller très loin dans cette direction sans exposer les recherches elles-mêmes. Nous allons donc chercher d'abord des caractères distinctifs plus formels, relevant plus de l'observation des phénomènes éducatifs en général que de la didactique.

Il est normal alors de retrouver les grandes questions regroupées suivant les deux grands courants dialectiques de l'observation :

- d'un côté les problèmes bien connus d'expérimentation : formulation des hypothèses, définition des facteurs, plans d'expériences, tests problèmes de reproductibilité et de comparaisons de méthodes, etc. ;
- de l'autre, les problèmes de définition de choix des observables, de constitution, de recueil et d'analyse des produits de l'observation, de généralisabilité... etc.

Le premier point de vue est à la fois plus classique donc mieux connu, plus difficile à mettre en œuvre en didactique et moins prometteur que le second. Je partage à ce sujet le point de vue exposé par J. Cardinet dans « comparaison de méthodes pédagogiques ou analyse du système scolaire ». Je n'en parlerai donc pas ici aujourd'hui. Mais puisque l'observation se concrétise lors du recueil de ses produits nous allons commencer par étudier les méthodes de saisie des données.

2) L'observation, suivant les méthodes de saisie des données

Elles sont très variées, nous les rappelons pour mémoire.

Les types de Wrihstone (1960)

Elles sont limitées aux méthodes directes de choix des comportements et elles comportent :

Les techniques d'échantillonnage temporel (Time samples). Il s'agit de « contrôler dans de courtes périodes de temps l'apparition ou l'absence de formes de comportements objectivement définies » Inventaires, questionnaires d'observation (check-list) et grilles d'observation (schédule) qui diffèrent par l'existence d'un codage systématique.

Les techniques d'observation et de jugement (rating methods) : enregistrement de jugements sur des échelles d'évaluation : descriptives (rating scales) graphiques, de correspondance homme à homme, numériques... techniques de rangement, de comparaisons pairées et de choix forcé.

Ces méthodes ont un très grand succès :

Colin Power rapporte que 200 systèmes ont été développés, de façon jugée trop indépendante, pour analyser séparément, (hélas), les systèmes cognitifs, affectifs et (Flanders), les catégories d'échanges (transactions) intellectuels, (Eggleston 75). 73 de ces systèmes sont décrits dans *Mirror of Behavior* dont 8 spéciaux pour les classes scientifiques ; elles permettent de juger toutes sortes de variables mais principalement les qualités du maître ou de la classe. On a développé de même des grilles d'analyse du comportement (Fischer et Power) et du discours (Coulthar et Sinclair) « le plus souvent les utilisateurs se sont contentés de l'accord entre les observateurs et de la fidélité des observations comme marque de fiabilité », dit Power. La question de pertinence est souvent posée de façon sommaire.

Les classifications de De Landsheere et De Ketele

De Landsheere place l'observation dans un produit de 5 variables :

fonction (prédictive ou descriptive)
 mode (direct ou indirect)
 méthode (monographie, étude de cas (case study)
 méthode des cas (case method) l'étude (survey) l'enquête)
 le lieu (sur le terrain, en laboratoire)
 le temps (longitudinales et transversales)

De Ketele (1976) les classe plus finement suivant les caractéristiques fondamentales (systématique vs non, introspective vs allospective, narrative vs attributive). Le stimulus (objet perceptif ou évaluatif) la réponse (notation immédiate ou différée) la situation (naturelle ou créée, manipulée ou non) la place de l'observateur (participatif ou passif, perçu ou non), le temps (longitudinale continue ou ponctuelle, et transversale) enfin suivant les attributs qu'il classe en stimulus (signes ou catégories) exclusifs ou non, exhaustifs ou non, unidimensionnels ou pluridimensionnels.

Et en réponses : (unités recoupées ou non par l'observateur, échantillonnées ou non, échelles ordinales ou nominales).

3) Problèmes de sémiologie : la détermination des objets étudiés

C'est un des problèmes les plus délicats et les plus négligés.

Le découpage en actes et en séquences

Pour toutes ces méthodes il est nécessaire de découper le temps pour obtenir des séquences. Cela se fait soit arbitrairement (en tranches de trois secondes — par exemple) soit suivant le discours (par phrases) soit suivant un système plus complexe se référant au fonctionnement du maître par exemple.

Il faut que un intervalle de temps soit suffisamment long pour que les objets pertinents de l'observation y soient identifiables (le dit, l'intention...) et suffisamment court pour contenir le minimum d'interactions afin de

pouvoir assigner un même état aux différents systèmes en présence. Ce n'est pas toujours facile.

On peut aussi demander à des professionnels de proposer un découpage. On s'aperçoit que les observateurs découpent de la même façon des séquences importantes lorsqu'elles correspondent aux prévisions de la fiche didactique mais que l'accord ne subsiste pas au niveau d'un découpage fin. C'est que l'observateur « lit » le déroulement de l'activité didactique comme on lit un film, en le découpant en scènes pour reconstituer un sens à partir du texte avec des systèmes et des codes implicites. Comme telle l'observation relèverait autant de sémiologie que de l'analyse de systèmes, il s'agit d'étudier un langage. Le découpage décidé par le maître fonctionne comme le montage d'un film. Il crée des unités de sens, des « signes » qui ne devraient pas être analysés seulement suivant le découpage technique mais aussi suivant le sens créé. (Christian Metz, *Langage et cinéma*.)

Les traits, objets, relations et faits pertinents

Le découpage doit donc fournir des unités identifiables, susceptibles d'être un élément reconnaissable d'une séquence par exemple. Il doit donc exister une liste d'unités distinctes susceptibles de se produire à sa place. Nous dirons un paradigme de situations didactiques élémentaires. Deux situations sont distinctes à partir du moment où elles peuvent être opposées par au moins un trait (présent dans l'une, absent dans l'autre) pertinent. La distinction est pertinente si le remplacement d'une situation par l'autre est susceptible de changer la signification de la séquence (de façon régulière, non accidentelle).

Ainsi, la recherche des traits pertinents passe par l'analyse de leurs « dépendances » (des causalités) Vinrich. Deux moments peuvent différer non par un trait, mais par la présence ou l'absence d'un fait, d'un objet, d'une relation qui deviennent ainsi pertinents (signifiants si l'on veut) dans cette séquence. Il est clair que tous les faits ne sont pas pertinents dans un processus.

Dépendances, processus

On voit comment à partir d'un processus didactique entier on est conduit à interpréter le phénomène, et à partir des dépendances (souvent supposées) à désigner certains faits comme pertinents. Il est alors possible de combiner ces faits, de construire des automates qui reproduisent les processus observés.

Cette interprétation sémiologique de l'observation met en évidence qu'il est nécessaire de partir et de revenir au sens global des processus d'apprentissage, en observant et en combinant des faits isolés, même en très grand nombre, même en leur appliquant les méthodes puissantes de reconnaissance de forme, on n'a pas plus de chance de reconstituer un modèle didactique qu'on n'en aurait de construire la grammaire française à partir de l'étude des coefficients de Fourier de l'enregistrement d'une voix.

Ceci n'est pas sans avoir des conséquences méthodologiques dont nous avons déjà parlé plus haut.

Résultats

On essaie donc d'obtenir par des procédés objectifs les résultats d'observation suivants :

a) Un découpage du temps (de la leçon, ou des processus) en une suite d'étapes typiques (ou situations identifiées par leurs relations syntagmatiques et para-

b) Le discours (transcription) et l'interprétation de ce discours, (détermination des signes et leur articulation).

c) Une caractérisation des étapes et une référence à des types de situations. Ceci implique :

L'identification des éléments en présence et de leurs relations synchroniques : états des élèves, du maître, étape de la connaissance, objectif contractuel de la

séquence, usage prévu des productions de l'élève, comportements acceptés, informations connues ou ignorées, motivations, résultats de l'élève.

La construction de paramètres appropriés.

d) Une liste de conditions de succession de ces situations : conditions cognitives, affectives, linguistiques, informationnelles, matérielles — ce qui implique une étude des relations diachroniques entre les éléments des situations : successions de comportements, analyse des productions verbales, écrites, graphiques des élèves, dans leur dépendance...

e) Une liste de conditions de reproduction des processus observés.

Conditions optimales

Il s'agit alors de rechercher les modèles d'élèves, de maître, de projet didactique, de la connaissance mathématique, des processus d'apprentissage qui permettront d'expliquer ce qui s'est produit et les facteurs sur lesquels on peut agir pour faire apparaître des différences (éventuellement pour optimiser). Ceci appelle deux remarques que je soumets à votre réflexion. Le détour théorique et méthodologique proposé ici est nécessaire à l'amélioration de l'enseignement : les tentatives de procéder de façon empirique, pas à pas ou de ne jouer que sur un petit nombre de facteurs, ont échoué, c'est-à-dire ont donné des résultats moins bons. Les méthodes classiques sont localement optimales.

Par contre, on recherche trop exclusivement à recourir à des modèles quantitatifs. Il est très possible de raisonner mathématiquement sur des modèles qualitatifs dans la voie ouverte par Thom.

4) L'observation suivant les types de recherche

Je ne connais pas de classification des recherches qui donne une typologie des observations. Pour ma part, j'essaye de situer les recherches selon qu'elles portent principalement sur le fonctionnement ou les caractéristiques des systèmes en présence ;

- sur des processus eux-mêmes ;
- sur des facteurs de discrimination ou d'optimisation qui permettent d'expliquer et de classer les processus eux-mêmes.

Dans le premier cas on a des analyses d'automates : l'observation c'est le recueil des entrées et des sorties.

Dans le second cas on a des analyses de suites d'interactions d'automates, les observations portent sur des « super-signes » comme il est indiqué ci-dessus.

Dans le troisième cas, l'observation peut prendre des formes très différentes : comme on peut le voir dans nos travaux sur l'apprentissage des algorithmes, les variables informationnelles et les obstacles épistémologiques.

III. — ANALYSE DES DONNEES SUR LA DIDACTIQUE

Pour mémoire, je renverrai à :

1) **Les structures mathématiques des données** (Brousseau 70). Les données se présentent sous forme, soit de textes codés ou en langue naturelle, soit de tableaux à trois dimensions (sujets, variables observées, moments).

Un même corpus peut être interprété de diverses manières, ce qui permettra différents traitements.

Les travaux actuels portent sur les méthodes permettant de manipuler et de structurer les marges (sujets, variables...), soit a priori avant traitement ; soit a pos-

teriori d'après les résultats ; cela réclame la création de langages en vue du traitement Informatique.

2) Les méthodes d'analyse

Voici le plan d'un ouvrage en cours de réalisation à l'IREM de Bordeaux qui montre la variété des méthodes et de problèmes : Observation, Recueil des données, Gestion des données et recensements, Analyse des données, taxinomies et correspondances, Tests d'hypothèses, Méthodes bayésiennes et fiduciaires, Analyse des dépendances, méthodes ordinales, etc., Analyse du discours, simulations et modèles, évaluation et docimologie, modèles mathématiques de gestion didactique.

On y retrouvera la trace des deux tendances en analyse des données signalées jusqu'ici, la reconnaissance de formes (Benzecri), l'analyse de dépendance et le test d'hypothèse.

Je ne choisis pas entre les deux. Pas plus que je ne les considère comme de simples techniques. Les rapports d'application des mathématiques au mathématique, comme à l'extra-mathématique ne sont pas ce que l'on croit : une méthode est modifiée par sa mise en œuvre et un sujet d'étude déformé par la méthode utilisée, ou plutôt l'un et l'autre sont réciproquement constitutifs.

BIBLIOGRAPHIE

- BONBOIR. — Pédagogie corrective (1970 ?).
- BROUSSEAU (G.). — 1967, Organisation du centre de recherche pour l'enseignement des mathématiques, Cahier du C.R.E.M., n° 4.
- BECKER (J.), BROUSSEAU (G.), COLMEZ (J.). — 1968, Rôle des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Cahier du C.R.E.M., n° 6.
- BROUSSEAU (G.). — 1970, Observations et recherches en enseignement des mathématiques, Cahier de l'I.R.E.M. de Bordeaux, n° 4.
- BROUSSEAU (G.). — 1972, Processus de mathématisation, publication de l'A.P.M.
- BROUSSEAU (G.). — 1973, Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels, Actes du Congrès des Sciences de l'Éducation I.P.I.
- BROUSSEAU (G.). — 1973, Recherches sur l'enseignement du calcul numérique, Cahier de l'I.R.E.M. de Bordeaux, n° 15.
- BROUSSEAU (G.) et coll. — 1974, Recherche sur l'analyse du discours, Cahier de l'I.R.E.M., n° 15.
- BROUSSEAU (G.). — 1975, Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ? Exemples de recherches en didactique, T. 1 du compte rendu du colloque sur l'analyse de la didactique des mathématiques de Bordeaux.
- BROUSSEAU (G.). — Le recueil et le traitement des résultats à l'école Jules-Michelet (1978, 39 p., Cahier 18, I.R.E.M. de Bordeaux).
- Publications du 3^e cycle de didactique des mathématiques (ouvrage collectif), 1976, Méthodes d'analyse quantitative en didactique des mathématiques, Fascicule 5, Tests d'hypothèses ; Fascicule 4, Taxinomie et correspondances.
- CARDINET (J.). — Comparaison de méthodes pédagogiques en analyse du système scolaire. Etudes pédagogiques.
- CARDINET (J.), TOURNEUR, ALLAL — 1976, The symmetry of generalizability theory : applications to educational measurement, Journal of educational measurement, vol. 13, n° 2.

- COLMEZ (F.). — Société des nombres (1978, article I.R.E.M. de Paris).
- DUSSAULT (G.), LECLERC (M.), BRUNELLE (J.), TURCOTTE (C.). — 1973, L'analyse de l'enseignement, Presses de l'Université du Québec.
- FAUCON (E.), RAYMOND (P.), VINCENTI (M.). — L'observation à l'école Jules-Michelet (1976, 30 p. Cahier 17, I.R.E.M. de Bordeaux).
- FOUCAULT (M.). — 1973, Naissance de la clinique, P.U.F.
- KETELE (M. de). — 1976, Processus éducatif, objet de l'observation psycho-pédagogique, Doctorat P.S.M. 321, Université de Louvain.
- LANDSHEERE (G. de). — 1970, Introduction à la recherche, Armand Colin.
- LEFEVRE (L.). — Méthode d'observation psycho-pédagogique, E.S.F.
- METZ (C.). — 1971, Langage et cinéma, Larousse.
- POWER (C.). — 1977, A critical review of science class room, Interaction studies, Studies In Science Education.
- REGNIER (A.). — 1974, La crise du langage scientifique, Anthropos.
- ROUANET (H.). — L'analyse des comparaisons systématiques dans un plan à un facteur aléatoire, introduction au programme VAR 3.
- SINCLAIR (J.) et COULTHARD. — 1975, Towards an analysis of discourse, The English used by teachers and pupils, Oxford University Press.
- THOM (R.). — 1972, Stabilité culturelle et morphogénèse, Reading Massachusetts.
- VINRICH (G.). — Dépendances didactiques, mémoire D.E.A. de didactique des mathématiques, nov. 1976.
- VERGNAUD (G.). — Essai de classification des situations d'apprentissage, Bulletin du C.E.R.P., 1964, XIII, n° 3, pp. 115-155.

METHODE DE CONTROLE DE L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES PAR L'ANALYSE DE L'ESPACE EXPLICATIF

1. Critique de l'usage classique de l'analyse factorielle :

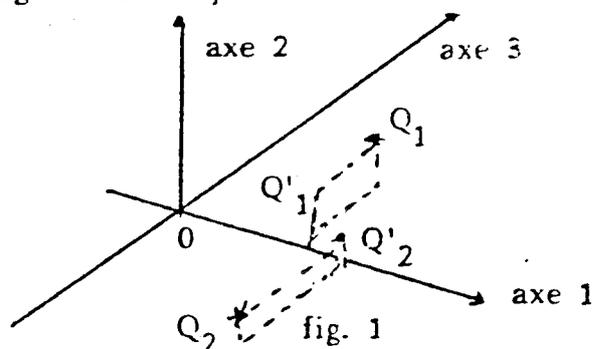
Considérons un ensemble Q de m questions binaires (les réponses sont 1 ou 0) posées à un ensemble E de n élèves. Les réponses, application $Q \times E$ dans $\{0,1\}$, forment une matrice booléenne R .

L'expérimentateur envisage d'interpréter les axes factoriels de R à l'aide par exemple, de certains caractères, binaires, attribués aux questions.

A. Pour cela, le plus souvent, il observe les questions qui contribuent le plus à cet axe et leur cherche des caractères communs. Rappelons que cette méthode est fondée sur le raisonnement suivant :

a) Deux questions apparaissent voisines si leur distance (du χ^2 pour l'ANAFAC) est faible, c'est-à-dire si les élèves ont eu tendance à répondre de la même manière à l'une et à l'autre.

et/ou b) Deux questions Q_1 et Q_2 apparaissent voisines si leurs projections Q'_1 et Q'_2 sur le plan $0 x_1 x_2$ étudié se fait dans une direction voisine de la direction du segment qui les joint c'est-à-dire si les différences de réponses à ces questions contribuent peu à différencier les élèves selon ces deux facteurs... Donc les différences entre ces questions importent peu dans la détermination des caractères de cet axe, en regard de ce qu'elles ont de commun (fig.1)



B. En première approche cette méthode permet d'attirer l'attention du chercheur sur un petit nombre de questions influentes et de simplifier la recherche de caractères communs. Mais il est clair que les effets résultant d'un caractère commun agissant peu mais sur un grand nombre de questions, risquent d'être sous-évalués. Pour corriger les hypothèses issues de ces observations locales et a posteriori, il est classique de considérer les caractères envisagés comme des élèves supplémentaires, dont les réponses à chaque question seraient la présence ou l'absence du caractère à cette question-là.

La position de cet élève fictif par rapport au nuage de questions indique dans quelle mesure ce caractère est ou non spécifique de l'axe étudié, cette fois en fonction de toutes les questions.

Exemple : Considérons la série de questions posées à élèves à propos de "l'apprentissage de l'énumération", par Blanca de VILLEGAS (fig.2)

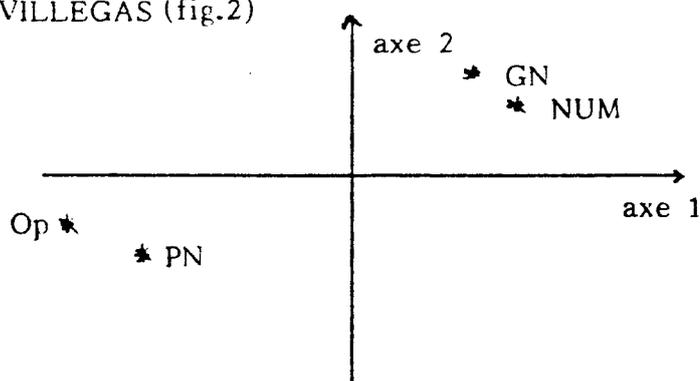


Fig. 2

L'examen de ces questions fait penser à un caractère opposant les questions, suivant la grandeur des nombres qui y figurent : "PN"; questions à petits nombres (abscisses négatives), GN : questions à grands nombres (abscisses positives). Un autre caractère se propose ainsi : OP : questions comportant une opération arithmétique, NUM : questions sur la numération. Peut-on donner une signification à cette proximité de PN avec DP ?

.../...

Elle paraît exprimer que les élèves qui sont caractérisés par un comportement commun aux questions "sur les opérations" sont aussi caractérisés par leur comportement sur les questions "à petits nombres". Après un examen plus approfondi des quatre hypothèses possibles (puisque les comportements sont binaires, l'échec aux opérations est lié à l'échec aux petits nombres, la réussite aux opérations est liée à l'échec aux petits nombres, etc...). On peut conclure par exemple que les élèves qui ne réussissent que les questions à petits nombres (et qui sont donc caractérisées par elles) sont ceux qui ont tendance à échouer dans les questions "sur les opérations".

C'est au moment du passage de la constatation interne au questionnaire à une conclusion plus universelle que le problème se pose : Peut-on en conclure que la méconnaissance de la numération joue un rôle dans l'échec au calcul des opérations ? Remarquons que la méthode classique d'ANAFAC ne donne aucun moyen de répondre à cette question ou de contrôler la validité d'une conclusion à ce sujet. Elle se borne à constater la proximité et à lui attribuer une certaine importance par rapport aux autres "explications", Peut-on aller plus loin ?

Deux hypothèses se présentent :

1. La première : La proximité est due au comportement des élèves : par exemple ceux qui sont caractérisés par un comportement de réussite aux questions comportant de grands nombres sont ceux qui ont tendance à réussir aux questions de numération ; mais l'hypothèse que ce sont les réponses des élèves qui déterminent la proximité implique que la projection du nuage des réponses sur le plan déterminé par les deux axes (GN-PN), et (OP, NUM) a une inertie importante, et un axe d'inertie Δ incliné par rapport à ces deux axes comme le montre par exemple la figure 3.

.../...

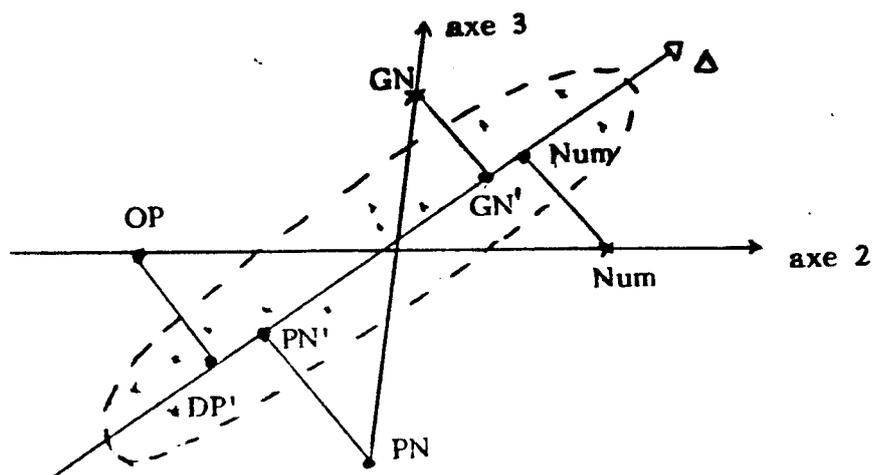


Fig. 3

Les projections sur Δ de GN et de NUM d'une part et celles de Op et PN d'autre part, sont voisines à cause de cette disposition du nuage, imprévisible en dehors de l'expérience.

Cette liaison peut jouer un plus ou moins grand rôle dans l'explication de l'inertie totale du questionnaire. Si l'on examine le premier plan principal, les projections de GN et de Num peuvent être plus ou moins proches. Exemple, sur la figure 4 où le plan (GN, PN), (OP, Num) est le deuxième plan principal.

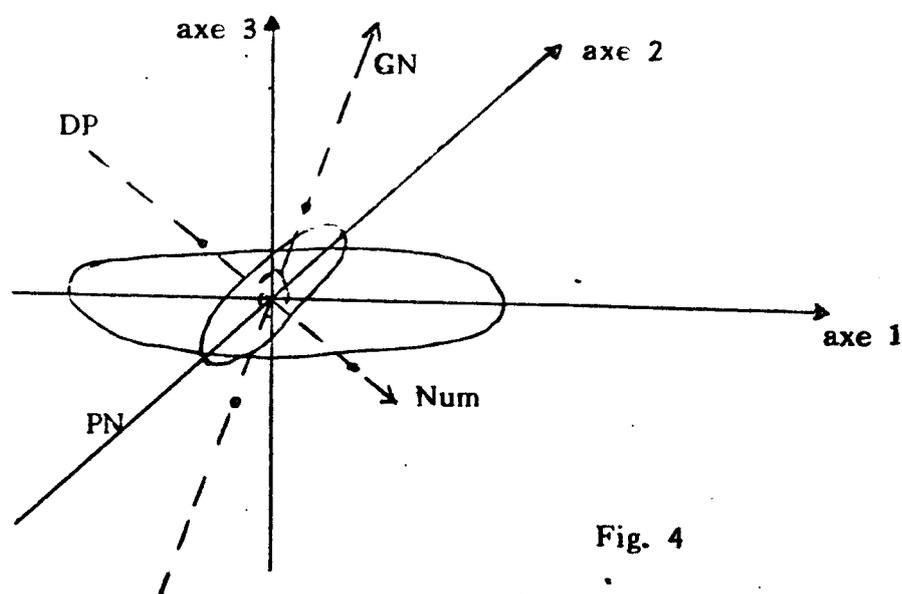


Fig. 4

La figure 3 est dans le plan formé par les axes 2 et 3.

2. Mais il peut se présenter une autre hypothèse : la proximité - attestée par les résultats - est due à un agencement malheureux du questionnaire : par exemple toutes les "opérations" portaient sur des "grands nombres"... de sorte que toute caractérisation par l'un impliquait une caractérisation par l'autre.

Dans ce cas on observera évidemment un extrême aplatissement du nuage contre l'une des bissectrices des axes (GN PN) et (OP Num) et si on considère ces derniers a priori comme orthogonaux comme dans le premier cas, on risque de conclure de la même manière : "Les élèves qui maîtrisent GN, maîtrisent les questions de numération". C'est exact ! mais cette déclaration ne caractérise que les questions de CE questionnaire. Elle n'a aucune portée générale, aucun fondement expérimental et elle était contenue dans les questions.

C'est ce qui risque de se passer souvent avec la pratique classique où des "élèves" supplémentaires représentent les caractères qui sont envisagés au coup par coup.

Il est donc indispensable d'examiner les liaisons des caractères a priori, et a posteriori afin de n'attribuer à l'observation que les variations de distance et non les distances elles-mêmes.

II. La méthode proposée.

Elle consiste :

1°) à établir pour tout caractère explicatif envisagé un vecteur binaire (éventuellement numérique) qui représente la présence ou l'absence de ce caractère pour chacune des questions posées (comme pour en faire un élève supplémentaire).

Et ceci, que le caractère soit envisagé a priori ou a posteriori.

.../...

On obtient ainsi pour les c caractères envisagés une matrice booléenne MA de dimension $c.m.$

2°) A faire une analyse factorielle de MA semblable à celle que l'on effectue sur R .

Avant la présentation du questionnaire, cette analyse permet à l'expérimentateur de s'apercevoir des liaisons introduites a priori par le choix des questions. Par exemple deux caractères ne peuvent pas être distingués parce qu'ils sont présents et absents en même temps. Il peut alors essayer en changeant son questionnaire, soit de supprimer celles de ces liaisons qui le gênent dans sa recherche afin d'obtenir des inerties comparables pour les facteurs qu'il veut étudier et qu'il considère comme également intéressants

ou, au contraire, de favoriser certains facteurs par des liaisons assumées. Il peut se former une idée des limites de son dispositif en regard des explications prévisibles.

Ce travail est un peu comparable à la constitution d'un plan d'expérience résultant de la détermination de variables contrôlées dans les statistiques classiques.

Mais cette analyse se fait aussi bien a posteriori sur tous les facteurs envisagés qu'a priori.

3°) A examiner la position relative de l'espace des résultats et de l'espace "explicatif".

La technique des variables supplémentaires plonge l'espace explicatif MA dans R . L'examen de la position des caractères envisagés par rapport aux axes d'inertie et au nuage des élèves et des questions est classique, mais il s'agit plus d'apprécier les transformations qu'ont subi ces positions par rapport à celles qui étaient prévues par MA :

Par exemple, la projection le long du premier axe principal de MA sur le premier plan principal de R peut écraser le nuage dans une zone trop petite : ce caractère ne peut pas alors être retenu pour expliquer la dispersion observée. Par

.../...

contre, un autre caractère, moins bien représenté dans le questionnaire et donnant une projection d'importance supérieure ou comparable pourra être pris en considération.

On peut ainsi mieux choisir parmi les caractères envisagés malgré un certain déséquilibre dans le questionnaire.

Si la projection de MA toute entière dans les premiers plans principaux de R est trop faible, c'est tout le système d'explication qui doit être reconsidéré.

Pour l'instant cet examen se fait "à l'oeil nu" par la confrontation des projections sur leurs plans principaux de l'espace MA d'une part et de l'espace R muni de MA comme élèves supplémentaires d'autre part.

Une méthode automatique réalisable sur ordinateur est à l'étude. Elle consiste à décomposer l'espace R en deux espaces supplémentaires MA et MB et à apprécier la part de l'inertie de R expliquée par MA.

Sur l'exemple que nous considérons plus haut on conclut que :

1°) Les caractères GN et PN ainsi que OP et Num sont "incompatibles" (non pas en principe mais dans le questionnaire tel qu'il est conçu. Ce fait n'était pas inéluctable).

2°) Les caractères GN et Num sont voisins dans la matrice de l'espace explicatif. Leur proximité dans R ne peut s'expliquer comme un résultat expérimental.

3°) Mais la projection de cette distance sur le premier plan principal n'est pas réduite. Il n'est pas déraisonnable de continuer à envisager l'hypothèse correspondante bien qu'elle n'ait pas pu s'exprimer dans ce questionnaire.

En résumé, la méthode proposée vise à recentrer l'analyse sur ce que l'expérience apporte à l'observateur comme informations nouvelles et expérimentales par rapport à celles qu'il utilise (trop souvent implicitement) dans son système explicatif. L'analyse factorielle des correspondances ne perd rien de ses principales qualités : elle stimule l'imagination du statisticien et relativise les liaisons locales qu'il observe mais complétée par l'analyse de l'espace explicatif, elle permet son meilleur contrôle de cette imagination.

Cette méthode est susceptible de s'appliquer à l'analyse d'inférence, et probablement à d'autres méthodes d'analyse de données.

A PROPOS D'INGENIERIE DIDACTIQUE

En didactique, un problème est une situation didactique particulière.

1. SITUATIONS DIDACTIQUES.1.1 - Présentation.

Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ses élèves un savoir constitué ou en voie de constitution. La "détermination" préalable de ce savoir est exigée du système éducatif mais pas nécessairement sous la forme de comportement et d'objectifs opérationnalisés. En fait, dans la mesure où l'organisation d'une activité est intentionnelle et justifiée par son organisateur par la désignation d'un savoir dont l'apprentissage est visé et, même si elle échoue ou dévie dans son objectif, elle est un objet d'étude pour la didactique.

1.2 - Négociation de la situation didactique.

Ces rapports sont établis dans une négociation dont le résultat est vécu par le professeur et l'élève comme un contrat fixant à l'un comme à l'autre une sorte de règle du jeu qui laisse à chaque protagoniste un certain nombre de choix, de moyens d'actions, de moyens d'information et d'obligations, dont par exemple, un but.

Ce contrat permet de gérer et de découper le temps didactique en séquences de types variés :

.../...

Exemple 1 : Une séquence extrêmement classique comprend un apport d'information, un énoncé, une question d'élaboration d'une réponse par l'élève, une évaluation (ou renforcement), une décision didactique du professeur (le choix de la séquence suivante) etc...

mais on peut rencontrer d'autres types de séquences où les décisions sont prises différemment :

Exemple 2 : énoncé, élaboration de réponse, mise à l'épreuve, élaboration de questions, organisation de connaissances, recherche d'information, etc...

Les principaux types de pédagogies des mathématiques sont obtenus par la mise en avant de certaines des relations ou des exigences du contrat didactique avec souvent un écrasement de certaines autres relations.

1.3 - Modélisation des situations didactiques.

La modélisation des situations didactiques réelles par des "contrats formels" représentés par les règles d'un jeu a pour objet de permettre les comparaisons entre ces choix didactiques, la mise en évidence des cas dégénérés et de leurs effets, la production de situations appropriées répondant à des critères fixés à l'avance, l'analyse et la prévision de leurs effets.

Le but de ces études n'est pas de promouvoir une pédagogie : l'enseignement par objectif, programme, par redécouverte, heuristique ou rationnel, mais de rendre compte de leur fonctionnement et de permettre l'émergence d'une didactique à caractère scientifique.

2 - SITUATIONS-PROBLEMES.

(Les situations problématiques sont celles qui laissent le sujet en charge d'obtenir un certain résultat par la mise en oeuvre de choix ou d'action dont il a la responsabilité.

2.1 - Situations quasi-isolées

La première condition est que cette responsabilité n'est pas, pendant un certain temps, partagée avec le système éducatif (avec le maître). Elle peut l'être avec des condisciples par exemple, mais le système est provisoirement quasi-isolé du point de vue de l'information. La dévolution du problème à l'élève se fait le plus souvent par la communication d'un énoncé explicite mais le problème comme sens pour l'élève est composé de bien d'autres informations et de bien d'autres limitations. D'ailleurs le sens du problème pour le professeur est fort différent lui aussi.

La situation problématique la plus générale comprend,

- des relations d'interactions du sujet avec un milieu physique (un système non anticipateur, qui ne fait pas dépendre ses réponses d'intentions ou de finalités)

- des relations d'intercommunications avec d'autres sujets, ces relations elles-mêmes classées en trois catégories :

- . des relations de formulation qui ont pour objet la communication d'informations

- . des relations de preuves qui ont pour objet d'emporter la conviction d'un interlocuteur par des moyens minimaux

- . des relations d'institutionnalisation qui ont pour objet de poser des conventions.

Bien que ce qu'on désigne par "problème" dans l'enseignement ne mette traditionnellement en scène qu'un seul acteur effectif, l'élève (les autres pouvant être évoqués, simulés, intériorisés, etc...) il est possible de réaliser des problèmes par la mise en scène de partenaires divers.

2.2 - Modélisation des problèmes.

Dans ce cas, le problème se réduit à une interaction du sujet avec un milieu réel ou supposé introduit par la consigne. La règle, explicitement ou implicitement communiquée lui donne les moyens d'envisager

- . les divers états possibles du jeu X
- . l'état initial $i \in X$

.../...

. l'application de l'ensemble X des états du jeu vers l'ensemble des parties de E qui définissent les choix permis dans chaque cas $\Gamma = X \rightarrow q(X)$

$$x \rightarrow \Gamma(x)$$

. l'état final ou les états terminaux t

$$\Gamma(t) = \emptyset$$

. une fonction de préférence, définie au moins sur l'ensemble des états terminaux

. A chaque coup, le joueur effectue un choix c'est une application qui fait correspondre à l'ensemble des états permis dans un coup donné, un de ces états

. L'autre joueur : "le milieu" établit à son tour certains états du système qui, éventuellement, peuvent être lus par le sujet comme des informations, des rétroactions sur son action.

. L'alternance des coups est fixée par une fonction appelée le trait.

2.3 - Modélisation de l'élève.

Cette interprétation d'un problème permettra de mettre en évidence si c'est le cas

- quelles décisions doit prendre le sujet
- quelles anticipations il peut faire
- et s'il peut en observer et juger les effets
- combien de tentatives pourra-t-il faire... etc

Dans cette modélisation le sujet se manifeste par une suite de choix qui, avec les réactions du milieu constituent une partie.

L'interprétation des "procédures de résolutions" observées se fait par confrontation aux stratégies et aux tactiques que l'observateur peut imaginer, expliquer, et dont il peut étudier les caractéristiques.

Une stratégie est un ensemble de choix défini sur l'ensemble de tous les ensembles d'états permis à partir de chaque état possible du jeu et qui, à chacun d'eux, fait correspondre un état préféré - une stratégie étant déterminée, le comportement du joueur est fixé jusqu'à la fin de la partie - quelle qu'en soit l'issue.

.../...

Les connaissances du joueur, ou son information lui permettent de modifier les ensembles d'états de jeu qu'il prend en considération et de réduire les choix qu'il envisage. De cette façon, une représentation - une collection de connaissances - peut permettre au sujet, de réduire entièrement son "incertitude" en ne lui laissant accepter qu'une suite de décisions, sa solution. Mais on peut observer aussi des solutions à l'intérieur d'une représentation qui ne réduit pas entièrement l'incertitude du sujet qui prend alors une décision au "hasard". Les connaissances peuvent augmenter l'incertitude du sujet en lui faisant envisager de nouvelles possibilités non explicitées dans l'énoncé. M. Ratsimba-Rajohn a étudié la façon dont certaines connaissances s'organisent en conceptions (ou représentations) différentes en utilisant ce vocabulaire.

2.4 - Le sens.

Ce point de vue ne peut permettre la tentative de donner un "sens" aux activités de l'élève et à ses représentations et inversement aux situations didactiques. Dans le premier cas, ce sens est caractérisé par le couple formé du choix effectué et du paradigme des choix rejetés, par les conséquences prévisibles du choix et par divers caractères des stratégies retenues.

Le sens pour l'élève peut être évidemment différent du sens pour le maître, comme il peut être différent avant et après une acquisition. Il est bien sûr qu'il ne s'agit que d'une modélisation pour une approche. Le lecteur trouvera un exemple de l'utilisation de cette modélisation dans l'analyse clinique dans Gaël (Brousseau (1982)).

3 - UN EXEMPLE.

Avant de dégager de façon plus précise ce que nous attendons d'un problème, nous allons donner un exemple en montrant l'usage qui peut être fait de cette approche, non seulement pour décrire un problème, mais pour le modifier, pour en fabriquer de nouveaux.

.../...

3.1 - Un "problème" classique de soustraction.

Prenons un problème banal de ceux proposés couramment aux enfants de 6 à 8 ans.

(1) "12 tulipes ont poussé dans mon jardin, 7 sont rouges, les autres sont blanches. Combien y-a-t-il de tulipes blanches ?"

Ce problème est le plus souvent l'occasion, pour l'élève, d'une ou plusieurs des activités suivantes :

a) Il doit prendre 12 jetons, mettre 7 d'entre eux de côté et compter les autres.

a') Il doit dessiner 12 tulipes (ou douze traits), il doit en colorier (ou en rayer) 7. Il doit compter les autres. Il témoigne ainsi qu'il a su lire le texte et compris "la situation" (en particulier ce qu'il faut compter).

a") Il doit réciter mentalement sa table d'addition 7 et 1, 8 ; 7 et 2, 9... 7 et 5, 12, ou même une table de soustraction 12 moins 4, 8... et donner la réponse... 12 moins 5, 7... 12 moins 7, 5.

a''') Il faut compter à rebours sur ses doigts

12 11 10 9 8 7 6 5

1 2 3 4 5 6 7 (rarement utilisé aujourd'hui)

a''') Il doit calculer le complément : 8 9 10 11 12
(éventuellement sur ses doigts) 1 2 3 4 5

b) Il doit écrire une petite conclusion comme :
"Il y a 5 tulipes blanches", ou bien, plus difficile, mais plus rituel, "nombre de tulipes blanches : 5".

c) Il doit identifier une opération qui associe les données au résultat. Ici, il prétendra qu'il faut faire une soustraction.

d) Il doit désigner le résultat, d'abord à l'aide de cette opération : "12-7", puis directement "5" et écrire l'égalité "12-7=5". Dans son esprit c'est l'écriture de l'opération à faire et de son résultat et les signes prennent le sens ("je prends") 12 ("j'enlève") 7 ("je trouve") 5").

(-)

(=)

.../...

e) Il présente son travail au maître qui lui dit si l'ensemble de ses activités est satisfaisant, qui confirme le résultat (qui devient alors juste) ou l'infirme (faux) et le fait corriger en montrant éventuellement ce qu'il fallait faire.

Aucune activité autre que a, a', a'' ou a''' n'est nécessaire pour fournir une réponse à la question posée. Ainsi l'enfant répond à une situation didactique et selon un contrat implicite mais précis. En particulier, l'association entre cet énoncé et l'opération à effectuer (attendue, exigée) ne se fait que par l'interprétation verbale ad-hoc (on ôte quelque chose) rien ne permet d'anticiper les résultats d'un choix malheureux (même $7 + 5 = 12$ ne conviendrait pas).

Ce problème est cependant utilisé par les maîtres parmi bien d'autres du même type pour enseigner la soustraction.

3.2 - Transformation en situation-problème.

Comparons-le au suivant (le rôle des crochets sera expliqué plus loin). Les auteurs doivent faire ce qui est indiqué.

(2) Dans ce sac [^APaul] a placé [des cubes ^Ede plastique]
 [^BJacques] [^Vpeut] les compter s'il veut être sûr. [Il y en a [ⁿ52].
 [Paul retire de ce sac [^Dquelques pièces]], [^V2] [^BJacques] [^Vpeut]
 les compter. Il y en a [8] [^BJacques] alors essaye de deviner
 [combien de pièces il y a maintenant dans le sac].

- i/ Il écrit le nombre qu'il croit juste
- ii/ Il parie avec [Paul] qu'il a deviné juste
- iii/ [Paul] et [^V3] [^BJacques] [^Vpeuvent] compter alors
les pièces du sac et noter qui a gagné
- iiii/ [Paul] et [^PJacques] jouent [10] fois à ce jeu
Arriveront-ils à savoir deviner à chaque
coup ?

- Le fait que les enfants puissent effectivement manipuler les

.../...

objets évoqués ne constitue pas une différence fondamentale avec le premier énoncé mais désormais le fait est précisé (les versions a et a' le permettaient). Au contraire, le nombre relativement élevé de pièces 52 rend pénible la solution par le dessin (a') ou par dénombrement direct.

- Mais la réponse de Jacques est une anticipation sur les résultats d'une activité effectuable (et qui sera effectuée aussi longtemps qu'il sera nécessaire) et contrôlable par lui (décision).
- Jacques choisit une réponse en fonction des informations qu'il reçoit mais le caractère "expérimental" de cette réponse est reconnu par l'énoncé.
- Le prix à payer en cas d'erreur est faible et conventionnel il est là pour fournir une fonction de préférence entre les choix. Cela permet des démarches d'essai et d'erreur et des corrections successives.
- Mais en cas d'erreur, la tâche de vérification n'apporte guère d'information sur ce qu'il aurait fallu faire.

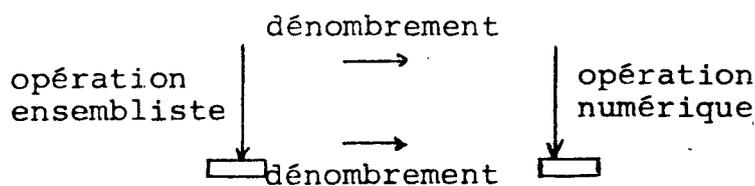


fig. 1

Car, comme dans le premier cas, la détermination du nombre de pièces restantes se fait par une voie (opération ensembliste puis, dénombrement) différente de l'opération mentale visée (dénombrements puis opérations numériques (fig. 1)).

- Les conditions et l'objectif de l'apprentissage sont fixées sans être formulés en terme de reproduction d'activité sans que soit évoqué le contenu de l'apprentissage, l'accent est mis sur le critère d'efficacité.

3.3 - Variables de la situation-problème, variables didactiques.

Les mots entre crochets peuvent être considérés en fait comme des variables à la disposition du maître qui peut en fixer les valeurs selon l'âge des enfants et l'étape de leur apprentissage.

Remplaçons [Paul] par le nom d'un élève quelconque ou par "je" si c'est le maître qui parle et désignons le premier personnage par A ; [Jacques] est B, et c'est un élève, non nécessairement différent de A. des cubes de plastique est un référentiel^E quelconque; [peut] peut être remplacé par [ne peut pas] qui ensemble constituent V_3 . [52] est le cardinal de E, appelons-le n, un entier naturel quelconque, quelques pièces est une partie quelconque D de E de cardinal δ . ici $\delta := [8]$. Le nombre de parties annoncées est N (ici N = 10).

Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations, des régulations, des apprentissages.

Il est clair que le triplet (n, δ , N) joue un rôle important avec des enfants jeunes.

- pour n petit, $n \leq 5$ à partir de 6 ans

la représentation mentale est susceptible de fournir immédiatement la solution et rend inutile aussi bien les manipulations qu'a fortiori les écritures ou les calculs⁽¹⁾.

Pour n compris entre 10 et 30,

* si δ et $n - \delta$ ne sont pas trop petits (supérieurs à 5) le dessin ou le recours aux jetons permet des conclusions

...../....

(1) Ceci ne veut pas dire que l'enfant apprend directement les nombres par perception des "configurations" mais seulement qu'après 6 ans la reconnaissance ou les dénombrements sont très peu coûteux (cf. Fischer)

sûres avec l'exécution d'une tâche pas trop pénible nous dirons peu coûteuse (procédure a')

* si d est très petit par rapport à n par exemple $n : = 25$ $d : = 3$ (a''') les enfants peuvent :

a) compter par exemple sur leurs doigts à rebours

25	24	23	22	procédure a'''
	1	2	3	

ce qui leur pose éventuellement des problèmes de mise en correspondance :

25	24	23
1	2	3

mais la vérification est possible pour ceux qui "possèdent" les connaissances nécessaires. $22 + 3 = 25$.

b) Ce qui conduit souvent les enfants à utiliser directement la vérification comme moyen de recherche mais alors ils doivent

- . choisir un nombre plausible comme complément,
- . faire "la somme" ou plutôt compter jusqu'à épuisement des doigts représentant ce qui est enlevé
- . vérifier qu'ils obtiennent bien le nombre total
- . sinon recommencer (procédure a'')

* Si $(n-d)$ est très petit la recherche du complément est beaucoup plus "facile" l'enfant utilise le même procédé qu'en b ci-dessus : il compte à partir de la valeur d jusqu'à n (procédure a''')

Exemple : $d = 21$

21	22	23	24	25
	1	2	3	4

* Si n est grand et si d et $n-d$ sont assez grands aussi, l'élève peut "concevoir" l'opération qu'il pourrait faire mais y renoncer, par exemple parce qu'il prévoit qu'elle sera trop longue, trop coûteuse et donc peu fiable.

. l'élève peut aussi ne pas concevoir l'opération qu'il pourrait faire parce qu'il ne peut pas la conduire à son terme et qu'il conçoit mal ce qu'il ne peut pas accomplir. Nous pourrions discuter cette hypothèse et les rapports qu'elle a avec le passage chez l'enfant du contingent au nécessaire.

. L'élève peut aussi bien sûr effectuer quand il le connaît, un des algorithmes classiques de la "soustraction", écrite ou mentale qui s'appuient sur la base de numération

.../...

usuelle. Cette décomposition permet de ramener les calculs à effectuer dans le domaine où ils peuvent être faits sans dessin sans dénombrement et sans tâtonnements. Nous avons ici recensé 6 procédures, on peut en trouver d'autres.

3.4 - Domaines des procédures.

Les domaines que nous avons déterminés grossièrement ci-dessus à l'aide des variables (n et d) paraissent évidents. Mais pouvons-nous rendre compte de cette évidence à l'aide d'un calcul de coût, pour chacune d'entre elles ? Faisons-le à titre d'exercice

Coût du dessin: puisqu'il faut dessiner tous les objets, le coût de l'exécution sera par exemple de la forme

$$c = (\alpha + \beta)(n+d) + \beta(n-d) = \boxed{(\alpha + 2\beta)n + \alpha d}$$

avec α le prix du dessin ou de la suppression d'une barre
 β le prix du dénombrement d'une barre

On peut faire entrer en ligne de compte la fiabilité de l'opération et calculer l'espérance de la variable aléatoire "gain"

Si G est le gain dans un pari gagné

E la perte dans un pari perdu

N le nombre de parties jouées

k le nombre de parties gagnées

p_k la probabilité de gagner k parties N

X le gain au cours de N parties alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^N (kG - (N-k)E) p_k - Nc \\ &= \sum_{k=0}^N k p_k + E \sum_{k=0}^N k p_k - N \sum_{k=0}^N p_k - Nc \\ &= (G + E) \sum_{k=0}^N k p_k - N(E-c) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = N [G p - E(1-p) + c]}$$

où p est la probabilité de réussite d'un calcul au cours d'un essai $p_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$

On peut supposer que p est une fonction affine de n et de d , comme c . Alors $E(X)_{(n,d)}$ la nappe qui représente

.../...

les coûts des problèmes est un plan (en posant $p = \theta c$ il vient

$$\frac{E(X)}{N} = N (G\theta + E\theta + 1) [an + bn] - E$$

coût de la recherche d'un complément: dans le cas où d est voisin de n , le coût est

$$C = 2\alpha (n-d)$$

La fiabilité est très bonne, prenons-la égale à 1

$$\frac{E(X_2)}{N} = [G - \alpha(n-d)]$$

coût de la recherche "au hasard" ou par tâtonnements avec des nombres plausibles, si on admet que l'enfant cherche "sans mémoire" et peut faire plusieurs fois le même choix. Soit Y la V.A. nombre de tentatives pour trouver la valeur exacte. Supposons que l'élève cherche les nombres plausibles dans un intervalle de diamètre $2d$, et supposons qu'il fasse ses choix avec une probabilité uniforme.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2d} \cdot i \left(1 - \frac{1}{2d}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(2 - \frac{1}{2d}\right)^{i-1} = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i p^{i-1} \\ &= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p^i \right) = \frac{1}{2d} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p} \right) \\ &= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p} \right) = \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

$$E(Y) = 2d$$

Et le coût d'un calcul est $c = 2\alpha d$ d'où

$$E(X) = 2\alpha d \cdot E(Y) =$$

$$E(X) = 4\alpha d^2$$

dans le cas où $n = 0$ ou $d = n$ il existe une procédure de coût nul.

Finalement, on peut après comparaison de ces différents coûts par des estimations des rapports entre le paramètre, dresser

.../...

une carte du domaine de meilleure efficacité des différentes procédures qui a l'allure de la figure 2.

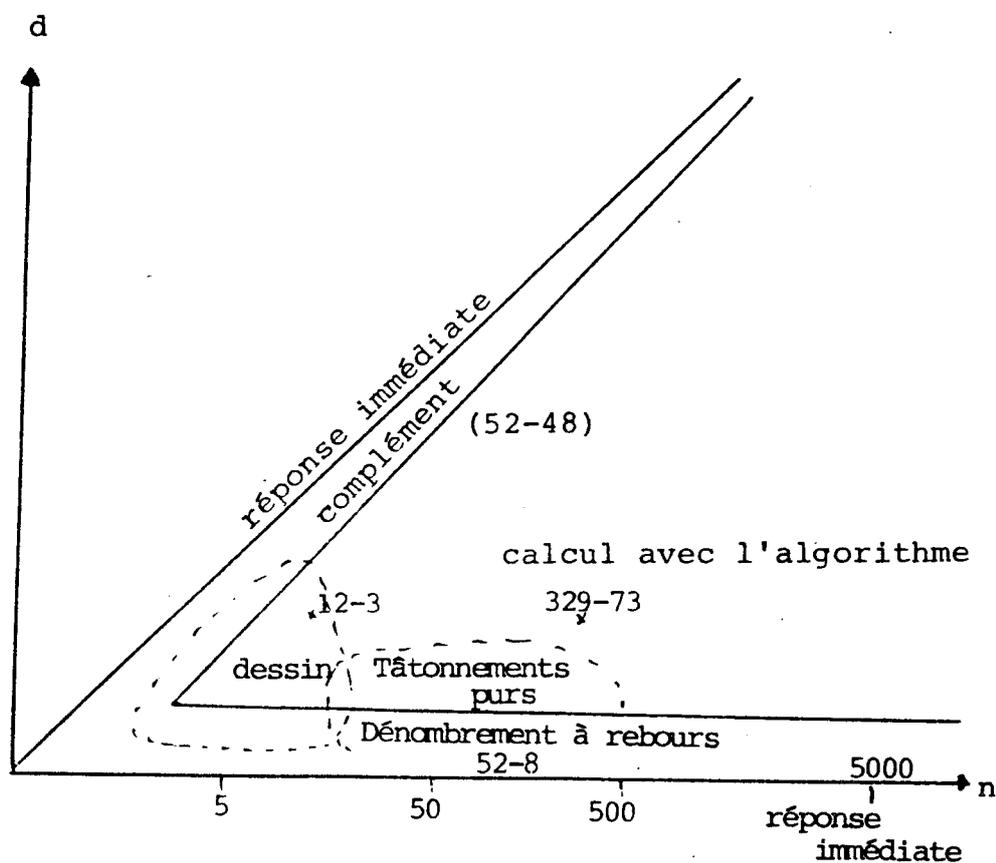


figure 2.

La procédure a''' fournit aux enfants un moyen de vérification anticipé qui modifie la situation. Celle-ci se présente alors comme si, après le choix d'un nombre, par exemple 42, avant que l'enfant parie, on lui disait : "si le nombre que tu dis est juste, il y a 42 pièces dans ce sac et 8 ici, si tu comptais les pièces, combien en trouverais-tu ? (50). La réponse est-elle juste ?"

En général, il n'est pas nécessaire de formuler la question de façon aussi précise ni même de la formuler du tout.

Cette procédure peut apparaître d'ailleurs, d'abord au moment de la vérification réelle comme moyen rapide pour l'un

.../...

des enfants de prouver que le pari de l'autre est perdu. L'intériorisation du procédé de vérification et son inclusion dans la méthode de recherche modifie la situation en ce sens que l'élève peut augmenter de façon décisive le nombre de ses tentatives à n et d constant. De ce fait, la quantité d'information qu'il aura à traiter sera plus grande et l'usage de relations nouvelles va se trouver économiquement justifiée dans des stratégies auxquelles la faible densité en essais de la situation initiale n'aurait pas laissé de possibilité d'apparaître.

3.5 - L'intervention de propriétés mathématiques et leur apprentissage sous la forme d'un modèle implicite.

Nous venons de voir que les différentes procédures ne sont pas équivalentes. On peut essayer de vérifier que les procédures effectives observées sont conformes aux prévisions dans les différents domaines de meilleure efficacité calculés. Mais le but de ces études est de permettre au maître de provoquer l'apparition de procédures nouvelles par le choix d'un problème dans un domaine nouveau ainsi que l'appropriation de propriétés mathématiques. Voici par exemple une suite de stratégies apparue dans la situation (52-8) décrite ci-dessus, chez un enfant qui utilisait la procédure de tâtonnements (Gaël). Nous les avons rangées par ordre croissant d'efficacité qui est l'ordre d'apparition observé (à partir de γ)

[α] Essais au hasard mais on peut essayer plusieurs fois le même nombre si on ne les marque pas ; et si on ne le range pas, la recherche d'un nouveau nombre devient vite coûteuse.

[β] Essais systématiques : on essaie les nombres les uns après les autres jusqu'à l'obtention de la bonne réponse :

35 (35 + 8 = 43 alors pas 35), 36, 44 (44 + 8 = 52) 44

Réponse.

[γ] Encadrement du résultat :

"le choix de 35 donne 43 qui est trop petit, alors 35 est trop petit". L'enfant choisit alors 48 par exemple, il oscille autour de la bonne réponse sans s'en approcher (l'enfant utilise ici implicitement la monotonie des translations).

.../...

[δ] Correction des encadrements : 43 est beaucoup plus petit que 52, 35 est beaucoup plus petit que le nombre cherché, 56 est trop grand, il faut prendre un nombre entre 35 et 48, plès près de 48 : on observe que les nombres proposés sont à l'intérieur de l'intervalle déterminés par les premiers nombres choisis.

[ϵ] Utilisation de la différence : 48 donne 56 qui est trop grand de 4, il faut prendre 48-4 (La procédure a ramené le problème à une procédure effectuable.)

Ces exemples montrent comment une propriété mathématique intervient comme moyen de résoudre un problème. Ici, ces propriétés sont mises en oeuvre implicitement (l'élève ne pourrait sans doute pas les formuler et encore moins les prouver).

β n'exige que la capacité de faire une liste. Curieusement, tous les enfants de 7 à 10 ans ne pensent pas ou ne savent pas utiliser les listes comme moyen de contrôler un dénombrement ou une procédure exhaustive. Peut-être est-ce parce que les désignations d'ensembles ont été introduites en tant que "savoirs" et les dénombrements en tant qu'activité automatique formelle et non en tant que moyen de solution de problèmes ou de contrôle d'une situation γ , V , X , étant le premier nombre choisi par l'élève (par exemple 35 Y étant le nombre visé d la différence (par exemple $Y = 52$ $d = 8$) et $f(X_1) = X_1 + d$ (par ex. $f(X_1) = 43$. Si $f(X_1)$ est trop petit (par ex. $43 < 52$) il faut prendre X_2 plus grand.

soit que le dernier nombre examiné (par exemple ici que 43 : l'élève choisit $48 > 43$

soit que x_1 : (ex : $38 > 35$)

mais sans que la correction tienne compte d'une estimation de la différence.

ϕ) est un perfectionnement de γ . La correction tient compte de l'encadrement du nombre visé entre deux images :

si $f(x_{n-1}) < Y$ et si $f(x_n) > Y$

alors X_{n+1} est chois entre x_{n-1} et x_n .

δ réclame le traitement d'un plus grand nombre de données (par exemple $35 \rightarrow 43 < 52$ et $48 \rightarrow 56 > 52$ alors le nombre suivant est choisi entre 35 et 48. Cette méthode conduit l'élève à

.../...

nouveau à une énumération, qui va solliciter et renforcer sa connaissance des nombres et de la numération (par exemple, pour trouver le prédécesseur de 40).

Le modèle implicite qui permet de contrôler cette procédure comprend la topologie de \mathbb{N} et un "théorème en acte" : la "translation est monotone".

e) ici la mesure des distances dans \mathbb{N} remplace la simple comparaison à un repère et la translation conserve les différences. Cette procédure peut être mise en place par économie et anticipation des résultats de la procédure précédente, ou par une systématisation suivie d'une description et d'une analyse si la situation didactique favorise les attitudes réflexives.

3.6 - La situation-problème comme situation d'apprentissage.

1°) Remarquons que chacune des procédures que nous venons d'étudier peut s'appuyer sur les précédentes en ce sens qu'elle en est un perfectionnement plus économique du point de vue de l'action et moins incertaine, en ce sens qu'elle réduit l'incertitude, le champ des possibles entre lesquels l'enfant hésite. Mais si la procédure la plus performante est oubliée ou si elle échoue pour une raison quelconque, la procédure précédente peut être utilisée et donner lieu à nouveau à la création de la suivante : l'apprentissage peut fonctionner à nouveau. Les connaissances qui sous-tendent ces procédures sont donc prises dans un paradigme où les unes peuvent remplacer les autres et leur servir de signification, de reformulation, de décomposition, d'explication...

Il est facile d'imaginer comment l'utilisation de cette situation et la manipulation des variables didactiques (n , d , N) peut permettre l'apprentissage de la soustraction, non pas tant en proposant aux élèves les connaissances, mais en leur proposant des situations qui leur donnent du sens en les rendant nécessaires ou utiles.

2°) Pour que l'élève "comprenne" l'énoncé, il ne suffit pas qu'il sache "interpréter" les mots qui y figurent, il faut aussi qu'il imagine une manière d'y répondre, "qu'il puisse envisager

.../..

une solution, au moins partielle à l'aide de ce qu'il sait déjà" (R. Douady 1980), qu'il ait ce que nous appelons, une stratégie de base, même si elle fait beaucoup de place au hasard (dans notre exemple α fait parfaitement l'affaire). On peut donc choisir un premier problème dans un domaine tel que la meilleure stratégie de l'élève puisse conduire au résultat, mais au prix d'un "effort" substantiel qui peut être évalué par son coût (dans lequel l'incertitude intervient). Puis, au fur et à mesure qu'apparaîtront des stratégies nouvelles et après que l'élève ait eu la satisfaction de voir son efficacité s'améliorer, le maître peut proposer des problèmes dans un nouveau domaine.

3°) Il est clair que pour que l'effort de construction d'une nouvelle stratégie vaille la peine, il faut qu'elle soit plus efficace que celle qu'elle va remplacer, ce qui implique d'une part, que l'on pense qu'elle va être utile "assez souvent" et que l'adaptation de connaissances qu'elle nécessite ne soit pas trop coûteuse.

En fait, cette adaptation n'est "bon marché" que dans le cas de ce que Piaget appelle une assimilation. Mais nous avons pu montrer ailleurs (Brousseau (1976)) que la filiation des connaissances ou des théories ne pourrait pas être réduite seulement à une succession d'assimilations et d'apports de petites quantités d'informations (et ce, d'autant plus que l'on veut que les connaissances fonctionnent comme solutions de problèmes, que l'on veut que l'élève participe comme nous verrons plus loin et que c'est utile au choix des problèmes).

Le plus souvent, une nouvelle solution réclame une réorganisation des connaissances, un changement de point de vue... Dès lors, il y a intérêt à choisir les nouveaux problèmes de telle manière (c'est-à-dire dans un domaine tel) que la nouvelle solution associée à la connaissance visée soit beaucoup plus économique que l'ancienne. Ce qui oblige à renoncer à de petites progressions régulières le long des variables didactiques et à opter pour des sauts informationnels suffisants. Toutefois, si la stratégie de base devient vraiment trop visiblement inefficace ou impossible, le problème risque de n'avoir plus de sens pour l'élève (sous ma direction, ce problème a été étudié par

J.M Digneau (1980).

Nous dirons que la construction d'une nouvelle procédure se fait d'autant mieux que le problème se trouve au voisinage du point où l'efficacité relative de la stratégie correspondante est la plus élevée.

Cette efficacité relative est définie comme le rapport entre son coût et le coût de la meilleure des stratégies concurrentes. Elle peut s'évaluer même si l'on ne connaît pas les coûts eux-mêmes.

4°) La probabilité de créer ces nouvelles procédures est une fonction croissante du nombre d'occasions qui sont offertes à l'élève de le faire. On pourrait penser qu'il existe toujours un N assez grand pour amener cette probabilité aussi voisine de 1 qu'on le désire, mais ce n'est pas exact, et d'autres mécanismes didactiques doivent entrer en jeu - nous y reviendrons plus loin (tout de même on peut se rapporter à la querelle entre Chomsky et Skinner ou plus tard Suppes et Nelson).

5°) La possibilité d'organiser de tels processus a été étudiée à plusieurs reprises et à l'occasion de concepts mathématiques très divers. Il ne faudrait pas faire de ce procédé le modèle de tout apprentissage de connaissances, mais il est certain que son usage a été quelque peu ignoré ou négligé.

Les méthodes des études visant à rechercher un processus optimal sont évidentes mais extrêmement coûteuses, ce qui explique qu'elles soient si rares (voir cependant Bessot et Richard (1979)). La question de savoir si le processus fait partie de la connaissance et donc peut être proposé comme un objectif en soi, a été étudiée par M. Darce (1977) sans qu'il soit possible pour l'instant de se prononcer. Il est probable que les problèmes et surtout les processus de filiations tels que ceux que nous venons d'évoquer sont les moyens d'établir les rapports constitutifs des concepts et de leur fonctionnement, aussi bien de leurs rapports syntaxiques (structurels, logico-mathématiques) que fonctionnels (pragmatiques ou sémantiques) sans qu'on puisse les confondre. Au contraire, "l'oubli" des conditions d'acquisition de la connaissance doit faire partie du processus de détachement nécessaire à la connaissance (je ne dis pas "à l'abstrac-

.../...

tion", concept *ad-hoc* qui n'explique rien et qui est à la mathématisation ce que la vertu dormitive de l'opium a été à la thérapeutique de la morphine).

On peut toutefois penser que la représentation de la soustraction n'est pas réduite à la connaissance d'une stratégie de solution accompagnée de celle d'un prétendu sens de l'opération qui permettrait de l'appliquer, mais qu'elle comporte vraisemblablement la capacité de contrôler plusieurs stratégies en passant de l'une à l'autre selon les circonstances, c'est ce qui organise les connaissances en concept.

Remarquons bien qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre la découverte d'une connaissance et sa mise en oeuvre par une "compréhension" de la situation. La tendance à l'économie favorise le recours à des "automatismes" qui sont accompagnés d'une perte du sens, c'est-à-dire la cessation d'envisager certains choix possibles. L'acquisition d'un "bon automatisme", c'est-à-dire d'un algorithme, permet un fonctionnement où le sujet ne fait aucun recours au sens (aux choix possibles, donc aux connaissances qui les commandent). La "compréhension" est en fait la possibilité de restaurer certains moyens de contrôles (par forcément les mêmes) et d'engendrer les alternatives à rejeter.

6°) Mais l'organisation d'un processus n'est pas "réduite" comme on pourrait le croire d'après cette partie de notre exposé au choix par le professeur d'une suite de problèmes dont la "résolution" va produire la connaissance comme une sorte de résidu d'activité. Il s'agira aussi de faire approprier par l'élève le processus de production des questions et des problèmes.

Au niveau le plus bas : la décision de "rejouer", de tenter une nouvelle fois de réussir, doit être remise à l'élève. Pour cela, il faut deux conditions :

- d'une part, que la situation-problème s'y prête. On exprime parfois cela en disant qu'elle doit être ouverte. Ce terme dont on a beaucoup usé n'a jamais été correctement éclairci et nous devons revenir sur le sens qu'il convient de lui donner ici.

- d'autre part, que le sujet "entre dans le jeu" ce

.../...

qui dépend de l'enjeu - non pas au sens de la récompense, mais au sens du désir, - et de la signification psychologique de la situation. Le terme de motivation ne convient pas très bien car il laisse penser que le désir du sujet serait un moteur qui puiserait sa source hors du procès de connaissance qui ne serait que consommateur de motivation. En fait, le jeu avec la situation-problème peut être producteur de la seule motivation authentique : une motivation endogène. Nous avons commencé à étudier ce phénomène avec F. Koné (1981). La gestion du désir de l'élève fait partie de l'analyse didactique des processus et de la tâche des professeurs (voir aussi G. Dumas "l'affectivité en mathématiques")

Exemple : Comparer les deux problèmes suivants A et B :

A : "démontrez que les trois hauteurs d'un (de tout) triangle sont concurrentes"

B : "dessinez un triangle dont vous tracerez les trois hauteurs en prenant bien garde de ne pas présenter un cas particulier (il faudra le prouver à ses camarades)"

Le défi, même implicite, est certes un moyen de "motiver" l'élève, mais je pense qu'il s'appuie beaucoup plus sur la structure de la situation créée que sur des attitudes psychologiques. Un défi sur une situation fermée n'a aucun sens et aucun effet.

A un niveau plus "élevé" du point de vue cognitif, mais de nature très comparable, la remise entre les mains de l'élève du pouvoir de "choisir" les questions qu'il va traiter - ou plutôt de les élaborer - va faire l'objet d'une négociation, celle du contrat didactique.

. Il est clair que ce ne peut être réglé par une simple décision pédagogique de proposer des situations ouvertes (décision qui ne dépendrait pas du contenu cognitif). La plupart des situations didactiques et des problèmes n'ont pas été choisis pour faire poser de nouvelles questions qu'il est nécessaire d'examiner; car dans ces conditions le choix du problème suivant ne peut relever que de la fantaisie du hasard ou de l'idéologie épistémologique (en particulier de l'épistémologie scolaire) et a les plus grandes chances de ne rien produire d'utile.

.../...

7°) L'étude des situations susceptibles de provoquer le démarrage d'une véritable dialectique scientifique et d'une authentique genèse d'un concept, sort du cadre de cette étude dans la mesure où l'on essaie de cerner la notion de problème au sens classique. Mais il n'y aurait pas d'obstacles insurmontables à considérer comme des problèmes d'un type nouveau les situations de communication, de preuve et d'institutionnalisation qui sont étudiées actuellement par de nombreux chercheurs, comme moyens de stimuler et de simuler les processus de genèse des connaissances en situation scolaire. Il faut bien remarquer que ces types de problèmes et les dialectiques qui s'y attachent n'ont que très rarement et très accidentellement été pris en considération par les promoteurs des pédagogies du problème. Or, il s'agit de faire intérioriser par le sujet tous les termes du procès de connaissance (aussi bien le "sur-moi" cognitif à qui il faut prouver ce que l'on croit, que l'interlocuteur intérieur à qui il faut parler le langage commun ou que le "moi" qui réclame sans cesse des actions, des décisions et des jugements pour "exister"). Il faut bien admettre que les "problèmes et les conditions qui s'y attachent ne sont qu'une partie, essentielle certes, mais insuffisante du processus.

De nombreux travaux par exemple ceux de LAKATOS, mais aussi ceux de POPPER et de BACHELARD montrent qu'il n'y a pas de procès standard qui produise toutes les connaissances, par voie royale - il faut vivre chaque aventure et les réductions ne sont pas plus évidentes que les productions.

8°) Evidemment, un même texte pourra être, selon l'âge ou le niveau des élèves, ou selon le contrat didactique, obtenu par le maître, soit un exercice, soit un problème d'application, soit un problème au sens classique, ou encore une situation de "découverte" etc... (Mais il est clair que le contrat ne permet pas de rattraper dans un problème une structure déficiente, un choix malheureux des valeurs des variables... etc). Mais examinons, toujours sur notre exemple comment ce contrat didactique peut à ce point changer la nature d'un problème par l'intervention de l'idéologie épistémologique du professeur.

.../...

Considérons un problème proposé explicitement ou implicitement comme problème d'application (au sens où l'entend Glaeser dans sa classification . Cela veut dire que l'on a déjà rencontré des problèmes déclarés semblables - par exemple comme problème introductif - et exhibé une solution, qu'on a érigé un problème "semblable" en "problème-type" - et il a été convenu qu'on allait devoir s'y référer. Et si l'élève ne sait pas faire le problème il est "convenu" qu'on rappellera le problème "type" et sa solution, ou l'explication qui l'aura accompagné pour faire à nouveau l'économie d'une recherche.

Exemple : "nous avons rencontré plusieurs fois ce genre de problèmes souviens-toi... par exemple... quelle opération avons-nous faite ? et ici qu'est-ce qu'il faut faire ... au lieu de ... nous avons ici quoi ? et on retranche quoi ?... applique la même méthode... fais un dessin..."

La règle qui s'impose dans ce discours, c'est qu'il y a une méthode, que l'on a apprise et qu'il faut "appliquer"... laquelle, pourquoi, quels sont les éléments à mettre en correspondance ? et cela devient "quelle opération faut-il faire ?" Quels sont les signes, les indicateurs qui peuvent me mettre sur la voie : la dernière leçon ? les mots inducteurs...

Le contrat didactique a imposé à l'élève une autre problématique et une incertitude exogène centrée sur les raisons "didactiques" du choix du problème, sur le désir du professeur etc... et pas du tout sur la question posée et les connaissances en jeu.

Ce fait est bien connu des professeurs qui, en réaction, doivent "jouer", par le choix des problèmes, à casser les idées fausses "les sous-compréhensions" dirait Pluvinage que leur contrat a pu produire.

Par exemple, je vous laisse découvrir la dialectique erreurs/corrections que peut engendrer la suite d'exercices suivants :

1. Quel est le plus grand décimal x tel que

$$105,001 > 57,3801 + x$$

même question avec $>$ supérieur strictement.

.../...

2. Encadrement à 10^{-5} près de 2,8
3. On sait que $3,25 \leq x < 3,28$
et que $27,11 \leq y < 27,12$

Quel est le meilleur encadrement pour $y - x$ et $\frac{y}{x}$ que vous pouvez trouver avec des décimaux à deux chiffres après la virgule.

4. $d \leq \frac{22}{21} < d + 10^{-3}$. Quel est le plus petit décimal s'il existe qui satisfait cette relation ? Le plus grand ? intervalle solution ? (suite de problèmes posés à des élèves-insituteurs).

Ce deuxième contrat, où chaque nouveau problème conduit à rejeter une erreur possible (peut-être est-ce le "contre-exemple" de Glaeser), est beaucoup plus proche d'une genèse d'un concept que le premier, mais il est tout aussi déformant que lui. L'analyse des différents types de contrats qui se nouent et des raisons de leurs succès et de leurs échecs est à peine commencée mais il est clair que l'analyse d'une situation-problème et son observation de façon quasi-isolée (du système éducatif) donne des renseignements précieux mais tout à fait insuffisants puisque le contrat change le sens du problème posé.

4. QU'EST-CE QU'UN PROBLEME ?

Nous reviendrons plus loin sur les questions que la didactique se pose actuellement à propos de ces questions. Mais il est temps peut-être de se demander maintenant si nous avons progressé dans la direction annoncée. Qu'est-ce qu'un problème ?

4.1 -

L'approche que nous venons de faire permet de répondre à peu près à cette question et même de la préciser. Il s'agit de savoir ce que le professeur ou le didacticien pense que doit être un problème pour l'élève. Il suffit de reprendre les conditions qui définissent les situations-problèmes et d'indiquer les limitations qui différencient le problème, de l'apport d'information, de l'exercice... etc...

On peut pour cela reprendre les conditions de R. Douady
(1980)

.../...

."L'énoncé est facile à comprendre" ce n'est pas toujours le cas des situations-problèmes qui sont basées sur des rapports sociaux inhabituels pour les élèves ou pour les maîtres, comme par exemple les situations de preuve variables, les situations de communications, ou les situations de débats de savoirs".

."La réponse n'est pas évidente" et nous ajouterons que le rapport entre le temps et les efforts consacrés à investir le problème, à saisir l'énoncé, à résoudre les problèmes matériels... et le temps et les efforts consacrés à sa solution doit être assez faible - largement inférieur à l'unité en tout cas.

."Une solution au moins partielle peut être envisagée à l'aide des connaissances acquises". L'élève possède une stratégie de base à laquelle il peut penser lui-même ou qui peut lui être rappelée sans inconvénient

. Mais ces méthodes de résolutions déjà connues ne sont pas satisfaisantes : elles sont trop longues, ou elles donnent des résultats incomplets, ou insuffisants etc... Nous ajouterons que le saut informationnel doit être supérieur à un certain seuil.

. La résolution et son contrôle dépendent de la maîtrise de certains concepts . soit non acquis encore, ou en tout cas non institutionnalisés

. soit tels que le contrat didactique ne les désigne pas de façon trop évidente à l'intérieur d'un paradigme assez vaste.

Cependant pour que le temps de résolution ne soit pas excessif il faut que l'incertitude au sujet de ces concepts ne soit pas trop faible : $I = \sum_{i \in I} f(i) \log_2 f(i) < s$ ou $f(i)$ est la fréquence avec laquelle le concept i se rencontre dans le processus didactique, I ensemble des concepts entre lesquels le choix paraît ouvert à l'élève. Ceci oblige :

- soit à en limiter le nombre par des indications didactiques

- soit chercher une situation problème telle que les rétroactions de la situation referment progressivement le choix des élèves, c'est-à-dire leur donne des informations pertinentes. Pour cela, les concepts doivent se manifester par des anticipations, voire des hypothèses et le nombre de tentatives doit

.../...

donc être suffisant.

Le temps consacré au problème et l'importance des connaissances acquises doivent être dans un rapport "raisonnablement faible".

R. Douady ajoute "le concept joue dans le problème le rôle qu'il joue dans les sciences ou les pratiques où il intervient de façon essentielle" certes, mais la transposition didactique est inévitable et le problème est plutôt de limiter certaines différences qu'elle produit. Or, ce résultat ne sera pas obtenu sans un minimum de compréhension de la manière dont fonctionne le problème pour le professeur.

4.2 -

Les objets de la didactique se manifestent pas les phénomènes

Ainsi, il faut s'interroger sur la fonction que joue le problème dans l'activité de l'enseignant et par rapport à lui - et peut-être tenter de le définir par cela.

* Parmi les questions et les "problèmes" que se posent ou que rencontrent les mathématiciens, il n'y en a seulement qu'une partie qu'ils considèrent certainement comme des problèmes de mathématiques: ce sont ceux qui peuvent se mettre sous la forme d'une conjecture formulée en langage mathématique ; ils s'en posent d'autres bien sûr, par exemple ceux où figurent des termes paramathématiques, qui suscitent leur intérêt et donnent lieu à des activités mathématiques qui ne sont pas de résolution de problème au sens strict.

La résolution d'un problème formulé dans le langage d'une théorie mathématique se ramène toujours à la démonstration d'un théorème (soit de cette théorie, soit d'un métathéorème) de sorte qu'un problème, à ce sens restreint, se ramène à l'établissement d'un théorème $A \Rightarrow B$.

En ce sens, l'enseignement d'une théorie mathématique et l'enseignement de la solution de la collection des problèmes/théorèmes qui la composent, sont devenus projets logiquement

.../...

équivalents. Faire que l'élève puisse résoudre tous les problèmes formulables dans une théorie peut être l'objectif maximal que se donne un professeur au sujet de cette théorie. On peut imaginer que l'élève tente d'atteindre cet objectif par des moyens d'apprentissages ne faisant aucunement appel au contenu cognitif de cette théorie, par exemple par conditionnement et par des procédés mnémotechniques. Nous aurions ainsi une sorte de degré zéro de l'acquisition où l'élève saurait tout des mathématiques sans faire aucunement des mathématiques, sans déduire, sans proposer de conjecture etc... Bien sûr, ce projet est "irréaliste", ne serait-ce que parce que la moindre théorie possède une infinité d'énoncés, mais ce n'est pas seulement pour des raisons d'économie qu'il faut concevoir autre chose. L'étude de l'engendrement d'une théorie (ou d'un ensemble de formules) avec des systèmes générateurs réduits et des règles de détachement (ou avec des algorithmes) est aussi dans la nature même des mathématiques.

On peut imaginer un élève qui n'a appris que les axiomes d'une théorie et qui, par un exercice "de sa pensée", en dérive naturellement la valeur de vérité de n'importe quel énoncé. On a, là encore, un degré extrême de l'apprentissage. L'élève possède, presque sans l'avoir appris, toutes les "habiletés mathématiques" : on lui énonce les axiomes et c'est tout. Curieusement, les deux degrés idéaux et extrêmes de l'apprentissage semblent réalisés dans le cas d'un algorithme. Par exemple, à l'aide d'un petit nombre d'énoncés (les formules de la table de Pythagore $a \cdot b = c$ $0 \leq a \leq 10$ $0 \leq b \leq 10$) et d'un algorithme (par exemple celui de la multiplication) l'élève peut décider la valeur de toute formule de la forme $a \cdot b = c$ a, b et $c \in \mathbb{N}$. C'est pourquoi cet apprentissage va servir de "modèle", au moins implicite, pour tous contrats didactiques spontanés que l'on a observés. Le modèle se présente ainsi :

a) une partie de la théorie est communiquée à l'élève, partie qui comprend un système d'axiomes, mais aussi des théorèmes fondamentaux, des définitions etc... c'est l'organisation théorique du cours. Imaginons que l'on choisisse une démonstration de chaque théorème de la théorie et que l'on regroupe toutes celles qui commencent de la même façon, on fait ainsi apparaître

.../...

des troncs communs, des embranchements... etc et les énoncés correspondants prennent valeur de théorèmes fondamentaux de certains secteurs. On peut aussi imaginer que l'on écrit tous les théorèmes sous la forme $(A \Rightarrow B)$ et que l'on mesure l'intérêt d'un théorème à l'aide d'une formule du genre $I(A \Rightarrow B) = f(A) \cdot (1-f(B))$ en notant $f(A)$ la fréquence avec laquelle la condition A se présente dans les énoncés de (cette formulation de) la théorie (ou d'un domaine d'application) $f(B)$ étant la fréquence de la condition nécessaire B . On ne retient que les plus "intéressants"...

b) Avec cette théorie communiquée, l'élève a la charge de dominer un certain champ de problèmes ou de théorèmes. On a pris l'habitude de considérer ce couple "théorie communiquée/champ de problèmes dominés" comme une caractéristique de la valeur organisationnelle d'un cours de la puissance d'une introduction déductive aussi bien que des capacités mathématiques d'un élève. (En ce sens les "problèmes" sont les théorèmes non enseignés et non trivialement engendrés par le "cours" et fonctionnent comme une cible. Le professeur va souhaiter donner le cours le plus réduit car il veut qu'une part substantielle reste à la charge de l'activité mentale de l'étudiant, mais aussi le plus efficace possible car il veut que le champ des problèmes dominés soit le plus vaste possible. L'élève va tenter de satisfaire cette exigence, soit en développant sa compréhension, ses capacités de validation, de preuve etc... soit en simulant leurs effets par des apprentissages par conditionnement, aussi bien de connaissances du cours que des problèmes-types... etc.

A première vue, il semble que le professeur et l'élève puissent collaborer. Ce n'est pas sûr du tout, car la situation que nous venons de décrire est en fait en équilibre instable en ce sens qu'aucun contrat stable n'est possible.

* Si le lot des problèmes-cibles ne change pas et n'est pas "trop gros", la réaction des maîtres pour "améliorer" les résultats des élèves, est d'augmenter la longueur du cours, et de le prolonger par des techniques appropriées (tours de mains, méthodes, heuristiques etc). Les élèves eux, augmentent la part du conditionnement qui, dans certains cas, finit par dévorer toute activité mathématique (les problèmes du BEPC en France

.../...

sont tous sur le même modèle). Un phénomène semblable se produit si le lot des problèmes est trivial, ou insuffisant par rapport à une théorie "trop" puissante qui transforme en simples calculs ce qui était considéré comme une "recherche noble". Il s'en est produit de ce genre lorsque des réformes de structure des théories et du cours a été introduite sans que le lot des "problèmes aux caractères didactiques appropriés" ait été prévu. Certains problèmes sont devenus triviaux, d'autres obsolettes. Il se produit la même chose lorsque l'introduction d'un nouveau point de vue "écrase" de vieux problèmes.

Par exemple, l'introduction de l'algèbre en 5ème et les problèmes d'arithmétique de l'enseignement élémentaire.

* Si le lot des problèmes devient trop nouveau ou trop dur, les résultats s'effondrent, et le résultat est le même si le cours devient trop bref, trop léger.

Y. Chevallard et J. Tonnelles ont montré l'utilisation qui est faite par les professeurs du 1er cycle du fait que les élèves doivent manipuler les identités remarquables sans avoir les moyens de contrôler qu'ils restent bien dans l'anneau de polynôme souhaité. La factorisation est utilisée comme un champ de problèmes pour "faire faire des mathématiques" aux élèves, même si le jeu est en fait "retrouvez ce que j'ai caché".

Il faut donc constamment rétablir un équilibre qui a tendance à se rompre, par des glissements qui renouvellent le stock des problèmes, et/ou l'organisation théorique et qui s'opposent à un apprentissage par conditionnement en favorisant son opposé... la compréhension ?...

On peut observer la trace des corrections qui tendent à rétablir un équilibre rompu, non seulement tout au long de la suite chronologique des programmes et instructions successives, mais aussi à l'intérieur d'un même curriculum.

La reprise ou non des mêmes questions mathématiques à des moments différents du cursus scolaire, montre comment, soit le conditionnement, soit la reprise théorique, font dis-

.../...

paraître un type de problèmes du champ visé :

Par exemple, les problèmes de "règle de trois" ne sont guère mieux réussis après l'étude de l'algèbre, des proportions et rapports, puis de la fonction linéaire et les étudiants ne savent pas à quel genre de théorie mathématique ils se rattachent Pourquoi ?

Les professeurs choisissent les problèmes de façon à maintenir une certaine entropie didactique qu'ils considèrent comme optimale

($E = f(e) \log_2(f(e)) + (1-f(e)) \log_2(1-f(e))$ où $f(e)$ est la fréquence des échecs des élèves). Pourquoi ? Quels pouvoirs ont-ils sur les erreurs ; les sous-compréhensions... Quand leur nombre s'accroît (M.H Salin 1976, N. Milhaud 1981)

4.3 - Didactique, heuristique et pédagogie de la découverte.

Dans un livre récent, Alain Bouvier^(*) oppose l'enseignement par le problème ou enseignement heuristique à la pédagogie par objectifs ou l'enseignement programmé et aux méthodes de redécouverte. Chacune de ces pédagogies met en avant, considère comme prioritaire, l'une des facettes du processus mathématique; l'enseignement heuristique aurait pour objet de développer l'aptitude des élèves à conjecturer et à prouver par les moyens caractérisés par J.L Higgins (Mathematics Teaching and Learning):

- . apprendre le contenu sous forme de problèmes
- . se centrer sur les questions qui incitent l'étudiant à utiliser diverses heuristiques
- . favoriser une certaine incertitude critique en considérant des alternatives c'est-à-dire des approches multiples aux solutions
- . encourager l'activité de l'étudiant.

Jusqu'ici les convergences avec les objectifs que permet de viser l'ingénierie didactique que nous avons évoquée plus haut sont assez évidentes, sauf toutefois sur un point : l'utilisation de ce que Higgins appelle "les heuristiques" et sur lesquelles il faut revenir. / ...

(*)

A. Bouvier continue : l'enseignement heuristique nécessite de la part du maître

- qu'il aide les élèves à formuler des problèmes
- qu'il favorise l'accès à l'information, qu'il fournisse des documents, réponde à certaines (c'est nous qui soulignons) questions et aide l'élève à se repérer

- qu'il pose des questions incitant à approfondir et à poursuivre - quels sont les problèmes qui se ressemblent ? pourquoi cela est-il vrai ? peut-on l'expliquer ? les solutions sont-elles les mêmes ?

- qu'il incite à des synthèses de résultats pour en estimer la portée.

Il s'agit nettement d'inciter le professeur à obtenir par d'autres moyens que les problèmes, mais grâce aux occasions qu'ils fournissent, les parties des processus de mathématisation qu'ils ne provoquent pas d'eux-mêmes. Cette liste de ce que le maître doit apporter est l'aveu de ce que la méthode ne permet pas de décider ni de contrôler. On voit nettement ici apparaître comme moteur une "épistémologie scolaire" que nous allons examiner aussi. Ensuite, Bouvier présente la nécessité de poser des problèmes qu'il dit "difficiles". Ceux qu'il donne en exemple présentent, en fait, la plupart des caractères des situations problèmes que nous avons énumérés et il est probable que ce sont les caractères qui sont recherchés. Mais lorsqu'il donne une suite d'exemples du même problème généralisé et reformulé à proposer à différents niveaux (du CM₁ à la terminale), et bien qu'il se défende de programmer une redécouverte, il montre explicitement l'intention de provoquer un processus dont il donne, sinon les étapes, du moins les éléments (observation, choix de critères, classification, émergence et formulation de problèmes, étude, résolution dans un cas particulier puis dans d'autres cas, observation, ... etc) et qui relève d'une conception épistémologique à examiner. Il apparaît clairement que l'enseignant aura à charge de "trouver et de proposer des situations où l'élève devra choisir des critères, prendre des décisions, se poser des problèmes" mais s'il considère ce projet comme un moyen d'atteindre ce but comme dans "l'enseignement par redécouverte"

.../...

s'il prévoit les effets de la situation, alors, il s'enferme avec l'élève dans "une séquence programmée" qui ne "diffère guère des méthodes traditionnelles et dogmatiques" comme le dit Higgins. Celui-ci signale que ce danger guette l'enseignement par les problèmes - qui n'est pas une pratique systématique des devinettes.

Ce texte montre clairement plusieurs phénomènes.

1. En jouant sur ce que la méthode proposée ou mise en avant peut produire et sur les obligations à la charge du maître, les différentes pédagogies peuvent facilement changer de casquette. Le prosélyte de chacune d'elles peut charger les autres des méfaits dont il veut se défendre. Ceci montre que ces méthodes n'assurent pas le contrôle de leurs propositions mais le remettent au bon sens du professeur, tout en s'attribuant les vertus qui "devraient" en découler.

2. Il apparaît un obstacle à la prise en charge du projet didactique dans son ensemble : Si le maître sait où il va, c'est de l'enseignement programmé, il doit donc, comme, et avec l'élève, partir à la découverte et se comporter de façon pragmatique, être comme un mathématicien ou un scientifique.

Cette attitude contradictoire qui veut que le professeur accepte et refuse à la fois la responsabilité et les moyens d'enseigner se rencontre très fréquemment aussi en pédagogie générale (Ecole moderne par exemple).

Mais il est clair que, d'une part, il est possible d'obtenir des situations didactiques, aussi ouvertes qu'il est nécessaire, du côté de l'élève et néanmoins fermées à terme du côté du professeur ; que, d'autre part, les interventions des professeurs sont aussi réductrices, qu'elles aient lieu dans le cadre d'une stratégie arrêtée à l'avance ou dans l'innocence d'un comportement "naïf" en fait commandé par une idéologie épistémologique. Au contraire, l'ignorance n'arrange rien. Ce qui est visé par cette attitude c'est de protéger la participation intellectuelle du maître contre des méthodes qui, comme celles que Bouvier présente, ne s'appuient pas sur une prise en charge théorique de l'ensemble du système didactique et qui de

.../...

ce fait, ne permettent pas de corriger leurs propres excès. Dans ces conditions, la place principale doit être réservée au professeur contre les "technologies" irresponsables. En fait, l'obstacle à l'étude scientifique du travail du professeur et à l'ingénierie didactique est un phénomène très complexe qui s'appuie sur un écheveau de justifications de toutes sortes.

Revenons à l'heuristique proprement dite, c'est-à-dire à l'étude des heuristiques, ces méthodes ou ces démarches de pensée qui conduisent à l'invention ou à la découverte.

Qu'il s'agisse d'heuristiques assez générales, opérations mentales, typiques, usuelles (généralisation, synthèse, analyse, recherche de cas particuliers, d'exemples, de contre-exemples) ou d'heuristiques beaucoup plus particulières comme les indications que donnent, par exemple, les professeurs de spéciales à leurs élèves pour les aider dans l'élimination de fausses notes lors des concours, il n'y a pas de doute qu'il y a là un "instrument" dont les mathématiciens et les élèves font usage (et qui est attesté par leur vocabulaire) et un objet d'études expérimentales. L'analyse des conditions dans lesquelles des élèves estiment avoir une réponse satisfaisante, celles qui, au contraire, relancent la recherche, l'étude des indices et des stratégies qu'ils utilisent est une partie essentielle de l'analyse des situations, nous l'avons vu. En ce sens, l'heuristique prend place dans la didactique dans la mesure où elle prend en charge les conditions dans lesquelles ces stratégies et ces démarches apparaissent. Cette condition me paraît indispensable pour assurer la reproductibilité et la nature même des faits établis, l'heuristique ne se suffit pas à elle-même, elle doit s'appuyer sur une épistémologie expérimentale, c'est aussi la condition qu'elle doit remplir pour venir en aide à la didactique.

Ce n'est pas le cas pour l'instant et il en résulte une impossibilité à atteindre le but que se fixe l'enseignement heuristique et surtout par exemple, l'enseignement des heuristiques. C'est le projet caché dans le deuxième alinéa de la citation de Higgins.

.../...

L'usage des heuristiques en didactique.

On peut en première approche assimiler une heuristique à un "théorème" qui ne serait pas toujours vrai. Si A alors B : A étant un ensemble d'indices, B étant (dans le meilleur des cas) une opération ou une méthode de résolution. Il est alors possible de caractériser l'intérêt de cette heuristique comme nous l'avons fait plus haut pour les théorèmes.

On désire que l'intérêt soit d'autant plus grand

1. que l'heuristique est plus souvent "vraie", c'est-à-dire que la fréquence des problèmes, où les indices A sont réalisés et où la procédure B conduit à la solution, est grande : I proportionnel à f (si A alors B)
2. que l'heuristique s'applique souvent : c'est-à-dire que les indices A sont souvent réalisés (occasions d'utiliser l'heuristique : I proportionnel à $f(A)$)
3. que la procédure B conduit moins souvent à la solution que les indices A soient réalisés ou non: I proportionnel à $1-f(B)$
4. que les événements "A réalisé" et "B conduit au résultat", sont plus éloignés de l'indépendance: I proportionnel par exemple

$$\text{à } f(A) - \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

$$I(\text{si A alors B}) = f(\text{si A alors B}) \cdot f(A) \cdot (1-f(B)) \cdot f(A) - \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

Ces heuristiques sont-elles suffisamment "intéressantes" pour battre les démonstrations sur le terrain de la construction de la connaissance ? En tant que modèles implicites, il faut le croire puisqu'elles sont naturellement mises en oeuvre par les sujets, élèves de mathématiciens. Mais est-il nécessaire de les enseigner explicitement, de les institutionnaliser ?

Au moment de la résolution d'un problème que peut apporter à l'élève le recours systématique à un ensemble de procédés répertoriés d'avance ? N'est-ce pas une désertion devant le procès de savoir qu'il faut entreprendre à partir de ce dont il s'agit ?

.../...

On a pu voir par ailleurs comment la réduction à l'analyse formelle, ou logique, ou linguistique jouait le même rôle. Nous avons donné une critique explicite du processus psychodynamique de Dienes que nous avons rejeté en tant qu'épistémologie explicite pour les mêmes raisons (même si la recherche des ressemblances ou des analogies est une heuristique fructueuse)

Il ne faut pas déduire de ce qui précède que nous devrions bannir toute réflexion de ce type de notre enseignement. A titre privé, les heuristiques peuvent se révéler fort utiles - ne serait-ce que pour donner un "contenu négociable" aux phases de recherche individuelle. Il est des enfants qui appartiennent à des milieux où "chercher" est une activité mal vue, on cherche quand on ne sait pas, ou quand on a perdu ou oublié quelque chose et ce mot désigne une rêverie vague, dont on ne peut guère rendre compte - l'enseignement des heuristiques permet au professeur de combler ce vide et de négocier la recherche mais c'est toujours sur le même faux contact. Enseignées, les heuristiques peuvent s'évéler aussi pénibles et beaucoup moins fécondes que les démonstrations elles-mêmes.

Il y a tout de même certainement beaucoup à faire pour enrichir de ces heuristiques le stock des modèles implicites des enfants, mais il faut être conscients que l'institutionnalisation est une tentative de ramener l'enseignement des mathématiques au modèle des algorithmes et contribue souvent à vider les problèmes de leur sens. C'est une production de l'épistémologie scolaire hors du contrôle d'une théorie scientifique. Et que faire de John qui sait bien additionner et qui sait aussi chercher des cas particuliers, des ressemblances... etc, et qui ne comprend pas ses problèmes ? Allons-nous chercher des heuristiques du second ordre qui commanderaient les heuristiques du premier, comme le sens des opérations permet de combler le hiatus entre l'apprentissage d'un algorithme et son "application" ?

CHAPITRE V

**COURTES ETUDES DE DEUX PROBLEMES PRATIQUES DANS
LE CADRE DE LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES**

- 1. L'enseignement de l'énumération**
- 2. L'enseignement de la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace**

Etude de deux problèmes pratiques et fondamentaux dans le cadre de la théorie des situations et du contrat didactique

L'ENSEIGNEMENT DE L'ENUMERATION

I. INTRODUCTION ET RESUME.

Cet article a pour objet d'indiquer diverses formes d'intervention de la théorie des situations dans l'étude de problèmes pratiques d'enseignement. Ces exemples sont construits en utilisant diverses recherches dont certaines ne sont pas achevées, d'autres étant déjà anciennes. Il ne s'agit donc pas ici d'un compte rendu classique mais d'un exposé de questions et de méthodes.

Nous allons tout d'abord relever toute une famille de difficultés des élèves de différents niveaux à propos de différentes connaissances mathématiques, difficultés bien connues que l'enseignement ne résoud pas bien.

La construction de ce que nous appelons les situations fondamentales associées à ces différentes connaissances fait apparaître une condition commune capable de rendre compte des difficultés observées.

Cette première étape permet donc de formuler des hypothèses sur les causes des difficultés des élèves. Ces hypothèses peuvent être étudiées expérimentalement par différentes méthodes classiques de la psychologie cognitive mais aussi par des méthodes directes, tirées de la théorie des situations elle-même.

Nous proposerons alors l'explication qui apparaît la plus vraisemblable suivant les résultats que nous connaissons à ce jour.

Il apparaît alors qu'il est possible de la rattacher à une connaissance mathématique, ce qui permet d'utiliser à nouveau la théorie des situations, mais cette fois pour produire et étudier des séquences d'enseignement de cette connaissance, susceptibles de résoudre les problèmes d'apprentissage des élèves.

Les séquences d'enseignement produites "en application" de la théorie des situations sont généralement complexes et d'une conduite différente des leçons classiques. De sorte qu'ayant éventuellement résolu

.../...

un premier problème d'enseignement on en trouve un second dans la difficulté à communiquer cette solution à ceux qui doivent l'utiliser. La théorie des situations indique comment et sous quelles conditions les micro-ordinateurs ouvrent des possibilités entièrement nouvelles dans ce domaine.

Nous ne pourrions pas dans le cadre de cette communication assez courte donner un aperçu de la théorie des situations elle-même mais nous évoquerons ce qu'on attend dans le problème évoqué et nous résumerons la méthode d'analyse.

2. ETUDE DE QUELQUES DIFFICULTES D'ENSEIGNEMENT.

1°) A l'Université il est fréquent de voir des étudiants attendre la correction d'un exercice de combinatoire pour être sûrs que leur réponse est correcte. Alors que dans d'autres secteurs des mathématiques l'invention de la solution du problème est plus difficile pour eux que l'établissement de sa validité, lorsqu'il s'agit de dénombrements, curieusement les difficultés s'inversent. Certains étudiants ne savent pas comment se convaincre qu'ils ont bien compté tous les éléments et qu'ils ne les ont compté qu'une seule fois. On observe l'apparition de méthodes de reconnaissance de cas - par exemple pour distinguer les arrangements des combinaisons - fondées sur des caractéristiques formelles non pertinentes (ils disent par exemple : "c'est ordonné donc ce ne sont pas des combinaisons" alors que l'ordre dont ils tiennent compte est celui utilisé pour décrire un des objets à compter...).

D'autres utilisent tout à fait au hasard les formules qu'ils ont apprises.

2°) Dans l'enseignement secondaire les dénombrements posent aussi des problèmes difficiles aux élèves : écrire tous les termes d'un produit de polynômes en troisième année ou faire la liste de tous les éléments d'un ensemble qui ont une certaine propriété en première année ne va pas sans mal parfois même pour de bons élèves.

3°) A l'école élémentaire certains élèves n'arrivent pas à savoir quelle opération il convient de faire dans les problèmes même si les manipulations évoquées leur sont familières et s'il est clair qu'ils

.../...

les conçoivent parfaitement. Les maitres disent alors qu'ils n'ont pas le "sens des opérations" et essaient de le leur inculquer par la présentation répétée de problèmes que l'élève doit rapprocher des problèmes types. L'usage des caractères formels et des heuristiques douteuses est très répandu. Par exemple le maître justifiera une addition en soulignant dans l'énoncé le mot "ajoute". Puis dans un autre problème où le mot "ajoute" est encore utilisé, le maître modélisera la situation avec des petits nombres parce que la solution exige une soustraction mais si c'est d'une division qu'il s'agit il utilisera une autre métaphore.

4°) En première année d'école primaire on peut observer des enfants qui "savent compter" mais qui ne mettent pas en oeuvre ce savoir pour effectuer des tâches qu'ils comprennent bien pourtant et qui requièrent le comptage : Ils ne comptent qu'en réponse à une demande sociale bien précise et n'ont aucune idée de ce à quoi cette tâche sert ni ce qu'elle permet de maîtriser.

3. COMPARAISON DE CES DIFFICULTES

1°) Quoiqu'assez différents ces divers problèmes peuvent être rapprochés intuitivement, il s'agit chaque fois de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé. Pour préciser ces ressemblances et les analyser il faut faire correspondre à chaque exemple, à chaque connaissance, sa situation fondamentale. C'est un jeu tel que la meilleure stratégie implique l'utilisation de la connaissance visée mais qui peut être investi sans que cette connaissance soit nécessaire : l'élève peut comprendre les règles et commencer à jouer ou même gagner SANS utiliser la connaissance qui commande la mise en place de la stratégie optimale. Dans le meilleur des cas la situations fondamentale permet la construction de la connaissance par l'élève lui-même au cours d'une suite de parties au cours desquelles il prend progressivement le contrôle du jeu. Cela implique naturellement que les enjeux soient connus sinon effectifs...

2°) Ainsi on peut se demander par exemple quelle est la SITUATION FONDAMENTALE de l'addition de naturels.

.../...

Il s'agira pour le joueur de produire le cardinal d'un ensemble alors qu'il ne peut en contrôler effectivement à chaque moment (pour quelque raison que ce soit) qu'une partie. Par exemple, il ne sait pas compter des nombres plus grands que 5, mais il dit "il y a cinq et puis cinq et puis deux." Ou encore l'élève doit pouvoir les compter appeler certaines catégories d'objets, une à la fois : la stratégie optimale consiste à constituer une partition de l'ensemble puis à s'assurer du nombre d'objets dans chaque classe, en s'assurant que l'on compte bien toutes les classes.

Formellement le jeu doit permettre à l'élève de vérifier personnellement sa réponse. Par exemple, la réponse proposée est matériellement réalisée puis une association un à un permet de constater l'égalité.

De plus, si l'on veut que l'élève EXPRIME la somme et ne se contente pas de l'utiliser, il faudra ménager une communication où l'émetteur pourra "interroger" la collection à compter et où le récepteur devra réaliser la collection équipotente sans voir le modèle. S'il s'agit de prouver le bon usage ou une propriété de la somme, ou de débattre d'une méthode de calcul, la théorie des situations exige d'autres types de conditions.

La comparaison des diverses situations correspondant aux problèmes ci-dessus (et que nous ne pouvons exposer ici) fait apparaître comme fondamental le contrôle mental par l'élève de l'ENUMERATION d'un ensemble.

Par exemple on peut observer de grandes difficultés chez des élèves du début du secondaire à mettre en oeuvre le contrôle de l'exhaustivité même pour des ensembles finis de très petit cardinal au cours de raisonnements très simples.

3°) Une énumération d'un ensemble est une injection de cet ensemble sur une section commençante de \mathbb{N} . Ce serait donc la possibilité de produire et de contrôler la production effective de telles énumérations qui ferait défaut aux élèves en difficultés sur les questions évoquées plus haut. Il est clair qu'il faut prendre le mot "contrôle" dans un sens fort, et que le contrôle mental va exiger la mise en oeuvre AU SERVICE de l'énumération des connaissances logiques de l'enfant.

Nous donnons en annexe de cet article le début de la description formelle de la situation fondamentale de l'énumération, évoquée dans une réalisation sur micro-ordinateur.

4. ETUDE DU ROLE DE LA CONNAISSANCE DE L'ENUMERATION DANS CES DIFFICULTES.

1°) Remarquons tout d'abord que l'énumération est une notion qui n'a pas de statut culturel en mathématique, même si on peut la rattacher à des concepts et à des théories très importants elle n'est nulle part traitée comme un objet de savoir.

. Est-ce pour cela qu'elle a échappé aux professeurs en tant qu'objet d'enseignement ?

Il est facile de constater qu'elle n'est jamais enseignée sous aucune forme après la première année de l'école primaire même implicitement et que même là elle n'intervient effectivement que dans le dénombrement de toutes petites collections (généralement moins de 20, au-delà le contrôle effectif de la collection par le maître lui-même devient presque impossible dans les conditions d'une classe.

2°) Ainsi l'hypothèse suggérée par notre analyse des situations serait la suivante :

i) Les élèves doivent passer très brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets petits déplaçables mais immobiles à un contrôle complètement mental et verbal d'ensembles quelconques.

ii) Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoirs-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés.

iii) Ces conditions seraient une cause principale des difficultés observées.

3°) Il ne manque pas de moyens d'étudier ces hypothèses.

La méthode classique consiste à rechercher la preuve que ces difficultés sont bien dues à cette cause dans l'examen du

comportement d'un certain nombre d'élèves d'abord sur des questions scolaires du genre de celles que nous avons relevées plus haut puis dans des expériences diverses d'énumération. Il s'agirait alors de s'assurer que ce sont les mêmes élèves qui ont des difficultés avec les différentes situations relevant de la même connaissance. Plus finement des observations cliniques pourraient mettre en évidence des filiations des hiérarchies ou au contraire des différences.

Il faut bien constater que, surtout pour des questions de didactique qui concernent des notions aussi précises et dispersées dans le temps ces moyens sont difficiles à mettre en oeuvre pour des chances assez faibles a priori d'obtenir des réponses très nettes.

L'analyse de textes, l'observation de classes peuvent aussi apporter beaucoup d'informations précieuses.

Mais que ce soit pour la réalisation des expériences du premier type, pour interpréter les comportements des élèves ou comme paradigme des problèmes et situations dans le deuxième, il faudra réaliser des situations didactiques aux propriétés reconnues a priori. C'est justement ce que la théorie des situations produit le mieux.

Alors pourquoi ne pas essayer d'obtenir une preuve directe par l'étude de l'effet sur des élèves des différents types de situations d'énumération ?

5. LES DIFFICULTES DE LA COMMUNICATION AUX MAITRES DE NOUVELLES SITUATIONS DIDACTIQUES.

Supposons que nous arrivions à démontrer par quelques moyens les hypothèses énoncées ci-dessus. Les situations produites par l'ingenierie didactique appuyée sur la théorie des situations présentent généralement certaines caractéristiques :

- Pour permettre l'adaptation des élèves, elles doivent les conduire à prendre de nombreuses décisions, à en voir les conséquences, à les modifier etc...

- Pour permettre le fonctionnement du savoir, elles doivent autoriser diverses stratégies, correspondant aux différents points de vue, pertinents ou non, que les enfants peuvent avoir sur le sujet et répondre

.../...

à ces comportements par des réactions appropriées

- Irrémédiablement elles doivent exiger de l'élève un projet personnel et des relations sociales variées : communications, débats ou négociations avec d'autres élèves, avec le maître, etc...

Les situations qui satisfont ces conditions sont donc très complexes et difficiles à gérer. On les trouve rarement dans l'enseignement classique où le maître a généralement en charge de provoquer, de recevoir, de corriger et d'interpréter toutes les réponses significatives de chacun de ses élèves. Celles que la didactique a pu produire et qui sont gérables parce qu'elles assurent des autocorrections suffisantes sont le plus souvent encore plus difficiles à communiquer à un maître. De plus, chaque savoir est caractérisé par toute une famille de situations obtenues en faisant varier certaines conditions qui ont une influence sur le savoir produit. Ces situations très nombreuses et chacune très complexe, forment une famille elle-même subtilement structurée de sorte qu'il est bien difficile de les connaître, de les identifier, de les reproduire et de les utiliser facilement en leur conservant leurs propriétés.

L'arrivée des micro-ordinateurs dans les classes ouvre dans ce domaine de grandes possibilités d'amélioration : la partie de ces situations complexes qui consiste à recevoir de nombreuses décisions et à leur appliquer des feed backs diversifiés peut le plus souvent être confiée à l'appareil, de sorte que leur présentation aux élèves va s'en trouver considérablement simplifiée.

Le maître peut la découvrir comme le fera l'élève sans qu'il soit nécessaire de la décrire, de l'expliquer et de justifier pour qu'il puisse la concevoir. Il peut à volonté reprendre le point de vue de l'enseignement et examiner les variables et les variantes à la lumière de son expérience ou des résultats des recherches.

Le savoir visé s'en trouve beaucoup mieux défini et les rôles des élèves et du maître dans son acquisition mieux connus. Car les apports de la didactique ne se réduisent pas à ce qui peut se mettre dans l'ordinateur, et l'usage de l'appareil n'est qu'un moment du processus. Par exemple, tous les élèves peuvent prendre connaissance en même temps de la situation que l'ordinateur propose de maîtriser par la création d'un certain savoir. Chacun d'eux doit pouvoir, au moment voulu, venir tester ses stratégies ou ses solutions, mais l'ap-

prentissage se poursuit entre deux passages :

- chercher à comprendre la situation,
- élaborer ses stratégies,
- débattre avec d'autres élèves des questions soulevées,
- communiquer les solutions, etc...
- mémoriser certaines procédures,
- faire des exercices d'entraînement,

occupent la majeure partie du temps.

De la sorte, un seul appareil dans une classe peut améliorer considérablement les rapports de l'élève avec le savoir, avec son apprentissage et avec le maître.

6. REFLEXIONS METHODOLOGIQUES

Le rapprochement de difficultés à l'aide d'un concept mathématique commun, s'il est excitant, ne constitue pas un fait didactique. Il ne permet aucun diagnostic fondé et donc aucune ingénierie. Certes, dans un contexte professionnel, on pourrait multiplier les évaluations, décrire finement les modalités d'erreurs afin d'attirer l'attention des professeurs sur ce sujet, et proposer de mettre au programme un enseignement de l'énumération. (Ce qui serait assez difficile à réaliser car c'est un objet mathématique vraiment très marginal). Mais ces décisions n'auraient aucun fondement théorique.

1. Que faut-il dans cette circonstance, attendre d'une théorie didactique ?

D'abord, qu'elle justifie le rapprochement des difficultés. Le fait qu'il s'agisse de la même connaissance mathématique ne donne directement aucune indication. Il faut principalement établir des relations entre certaines circonstances communes et les difficultés rencontrées par les élèves. Il faudrait de plus que ces relations soient explicatives de la production de ces difficultés. Il faudrait aussi que ces circonstances soient assez spécifiques de la connaissance visée et des erreurs observées, sinon, il faudrait chercher une sorte de fermeture donnant une bonne correspondance entre une classe de situations et une classe d'erreurs relatives à une même connaissance.

Il faudrait ensuite qu'elle permette de prévoir les effets des variations de ces circonstances sur les difficultés des élèves et

.../...

par là d'établir expérimentalement la validité de ces explications.

Enfin qu'elle permette d'envisager des propositions de séquences d'enseignement dont les résultats seraient "garantis" par les connaissances de didactique ainsi établies.

2. Méthodes d'analyse.

La théorie des situations propose de réaliser ce programme par la méthode suivante :

a) Trouver une situation-problème fondamentale. Il s'agit :

a_1 - D'énoncer un problème dont la solution nécessite l'emploi par l'élève de l'énumération seule (si possible sans que d'autres connaissances interviennent).

a_2 - De faire apparaître les variables (de cette situation) dont les changements de valeur provoquent des modifications qualitatives des stratégies optimales, ce qui indique une modification de la signification de la connaissance visée. De faire apparaître celles qui changent son statut cognitif :

- en tant que moyen de contrôle de l'action
- en tant que moyen de communication
- en tant que moyen de preuve
- en tant que savoir ou algorithme de référence.

a_3 - De s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer par ce système de variable tous les problèmes culturellement connus où l'énumération intervient.

b) Examiner les difficultés et les échecs des élèves que permet de prévoir cette situation fondamentale quasi isolée et les confronter aux observations.

b_1 - La comparaison des situations réellement utilisées dans les classes avec la situation fondamentale fait apparaître des différences dans les conditions réalisées et permet de les envisager a priori comme des causes d'échec.

b_2 - D'autres échecs vont provenir de l'interprétation

.../...

que l'élève fait de la situation-problème où des modifications de signification introduites au cours de la dévolution de l'énoncé du problème ou de la négociation du contrat didactique.

b_3 - D'autres difficultés peuvent apparaître causées par divers obstacles (épistémologiques, didactiques, etc...) ou par des ruptures de contrat, ou provoquées par des particularités de l'épistémologie spontanée des professeurs.

c) Il est alors possible de revenir à la situation fondamentale et d'étudier comment elle peut produire des situations d'apprentissage ou d'enseignement, puis comment ces situations peuvent être enchaînées en différents processus pour provoquer les acquisitions visées.

L'enseignement repose sur différentes conditions qui peuvent être étudiées elles aussi expérimentalement. Ces conditions de dépendance entre les situations peuvent concerner chez l'élève aussi bien les reconnaissances de celles-ci et de leurs moyens de contrôle que l'identification des savoirs en jeu.

3. La situation fondamentale de l'énumération.

A. Une réalisation de la situation de base.

A_0 - L'écran de l'ordinateur présente [2] secteurs

	1 [blanc]	(partie supérieure et
soit	1 [vert]	(partie inférieure : "le pré"
soit	1 [bleu foncé]	(partie inférieure : "la mare"

Dans le secteur blanc, disposés au hasard

soit	des lapins	jusqu'à [20] et des papillons [0]
soit	des canards	

en tout jusqu'à 40 animaux.

A_1 - Avec le crayon optique l'enfant doit pointer l'un après l'autre tous les animaux d'une même catégorie. A chaque premier pointage d'un animal, celui-ci remue [les oreilles ou la tête] et émet un "beep".

.../...

Lorsque l'enfant estime avoir pointé tous les animaux,
 il pointe | le pré
 | la mare

A ce moment, tous les animaux précédemment pointés vont un à un, dans l'ordre du pointage mais assez vite à l'endroit voulu. S'il reste des animaux non pointés dans la région supérieure, le jeu prend fin. S'il n'en reste pas, tous les animaux rassemblés dans la région-cible remuent la tête ou les oreilles - musiquette.

Si au cours de la phase de pointage un animal est pointé plus d'une fois, le jeu s'arrête net (ou bien les animaux déjà pointés vont au lieu voulu et le jeu s'arrête aussitôt)...

A₂ - Fonctions : Ce jeu de tri différé est très proche des tris simples, cependant sa fonction est très différente. Il s'agit de permettre la mise au point, par l'élève, d'aller d'un des dessins à l'autre, en les rencontrant tous et chacun une seule fois. Il doit aussi éventuellement tenir compte de la catégorie d'animaux qu'il est en train d'énumérer.

A₃ - Exemples de stratégies.

- Suivre ligne par ligne ou colonne par colonne, cette stratégie est d'autant plus évidente que le nombre d'animaux est plus grand...

- Prendre "l'animal" le plus voisin...

- Reconnaître un chemin, une forme...

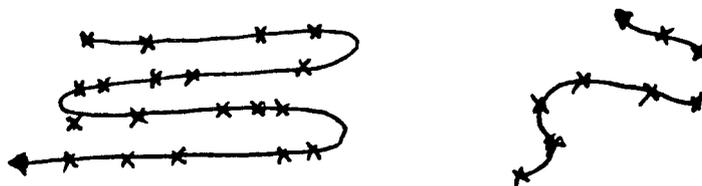
B. Variables et variantes.

B₁ - Le nombre d'animaux, leur taille, le nombre de classes, la distribution sur l'écran et sa densité.

Enumérer dans des conditions de "bruit" croissant peut conduire à développer des stratégies plus sûres et plus efficaces, mais très vite, le jeu se transforme en un jeu d'attention ou de concentration de peu d'intérêt pour les mathématiques.

On peut étudier les domaines qui vont favoriser l'exploration par lignes et colonnes et ceux qui conduiront à d'autres stratégies.

Exemples :



B_2 - La prise d'information : Totale ou partielle.

Exemple : l'enfant ne peut apercevoir tous les animaux à énumérer à la fois. Il doit déplacer une "fenêtre" de façon à explorer la totalité de l'écran... La taille de la fenêtre est une variable importante.

Cette disposition conduit l'élève à passer d'une stratégie d'énumération implicite et spontanée dépendant a posteriori des circonstances globales à une stratégie d'anticipation, locale, exigeant la construction mentale d'une représentation de la collection explorée.

B_3 - Déplacement des animaux.

Selon les types de déplacement et la vitesse on peut détruire toute possibilité d'énumération, suggérer ou renforcer certaines stratégies.

Exemple : Déplacements réguliers : chaque animal suit une trajectoire déterminée constituant un lacet localisé dans une petite portion de l'écran. Plusieurs animaux pouvant parcourir la même trajectoire. L'énumération se fait par trajectoire... Ainsi se dessine une méthode d'énumération plus complexe, classe par classe, à l'intérieur d'une énumération des classes.

B_4 - Objets distinguables - marquage des objets.

Si les animaux restent fixe, leur place suffit à les identifier, mais on peut prévoir de les rendre distinguables ou non. S'ils sont en mouvement, il est nécessaire de les distinguer par des traits divers (tâches, couleurs, accessoires...).

Le marquage des animaux déjà pointés (apparition d'un point sur l'animal par exemple) peut enlever tout intérêt au jeu (animaux fixes, tous visibles). mais il peut s'avérer indispensable dans d'autres cas :

Exemple : La fenêtre est fixe, les animaux défilent. L'enfant les pointe jusqu'à ce qu'il pense les avoir tous vus.

7. Conclusions

La situation d'énumération ci-dessus a été mise sur ordinateur par J. BRIAND qui a aussi étudié son utilisation dans les classes d'école maternelle. Il a rendu compte de ses observations dans son D.E.A.

Blanca DE VILLEGAS, puis Susy GAIRIN-CALVO développent le projet et l'étude des comportements des élèves du CP et du CE dans cette situation. Leurs études montrent que le contrôle de l'énumération est une des composantes essentielles, non seulement de la maîtrise de la numération, mais aussi de la compréhension par les élèves des opérations fondamentales.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU Guy (1970) Processus de mathématisation
in La mathématique à l'école élémentaire - PARIS : Ed. Ass. des
Prof. de Math, 1972. pp. 428-442

BROUSSEAU Guy (1984) Le rôle central du contrat didactique dans
l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'appren-
tissage des mathématiques
in Proceedings of ICME, meeting ADELAIDE, 1984

EL BOUAZZAOUI Habiba (1982) L'enseignement de la numération au
cours préparatoire.
Thèse de 3ème Cycle BORDEAUX-I

BRIAND Joël (1985) Situation didactique et logiciel d'enseignement
(D.E.A BORDEAUX-I)

QUEVEDO DE VILLEGAS Blanca (1983) Les situations et les processus
dans l'apprentissage des nombres (D.E.A BORDEAUX-I)

L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE EN TANT QUE
MODELE DE L'ESPACE

Ⓐ La représentation de l'espace.

1. Exemple introductif, la manipulation du sens

Un exemple montrera comment le maître peut manipuler - ouvrir ou fermer - les situations d'enseignement et par où modifier le sens de la connaissance.

1. Nous modélisons les conditions du comportement de l'élève par des jeux dont il suit les règles mais qui lui laissent un certain choix pour des décisions dont il pourra observer ou ressentir les effets. Evidemment, des connaissances différentes exigent des jeux différents.

Dans ce modèle, le sens d'un comportement par l'élève est formé par le paradigme des possibilités qu'il envisage et parmi lesquelles ce comportement est choisi. Ce paradigme comprend en particulier les erreurs contre lesquelles la connaissance a été construite et les méthodes plus anciennes connues de l'élève et que le comportement choisi remplace.

[La signification d'une connaissance est l'association (consciente) de cette connaissance considérée comme signifiant avec un signifié (définition ou reformulation par exemple) et avec un référent].

2. Une des premières occasions qu'avait l'élève de se poser une vraie question et de faire une démonstration dans l'enseignement classique de la géométrie, était l'examen des points de concours des médiatrices des côtés d'un triangle. Le fait que la troisième doive passer par le point d'intersection des deux autres n'avait rien d'évident : non seulement il n'apparaissait pas comme nécessaire mathématiquement mais il n'apparaissait même pas non plus

.../...

comme réellement contingent à certains élèves qui devaient essayer deux ou trois cas pour constater une certaine tendance des trois points de concours effectivement obtenus à rester très voisins dans tous les cas. Cette obstination mystérieuse des faits appelait, pour les esprits curieux, un autre genre de preuve intellectuelle et irréfutable.

Encore fallait-il que la question soit posée avec un minimum de "mise en scène" et qu'un peu de temps soit laissé aux élèves pour chercher la réponse. L'énoncé du théorème, suivi aussitôt de la démonstration suivant un schéma classique ne donnait aucune place à aucune activité intellectuelle de l'élève, sinon réflexive (après coup).

Le résultat n'était même pas catastrophique, (s'il l'avait été l'enseignement se serait modifié un peu). Quelques élèves comprenaient, la plupart apprenaient la démonstration et beaucoup l'oubliaient, ou ne pouvaient pas se servir du résultat pour en établir un nouveau, l'existence de l'orthocentre par exemple. En fait, la situation pouvait n'avoir aucun sens pour eux, en l'absence d'incertitude s'ils ne se posaient aucune question, ils ne recevaient aucune information.

3. Si le maître posait réellement le problème, il avait peu de chances de voir un enfant inventer sa première démonstration à cette occasion.

D'ailleurs, même cette mise en scène ne permettait pas une approche "naïve". Le fait même de poser la question, dans les conditions dépouillées que l'on suppose (le triangle, deux médiatrices et leur intersection) indiquait à l'élève déjà aguerri que la réponse devait être "oui". Le maître ne pose pas habituellement ce genre de question si la réponse est "quelquefois oui, quelquefois non".

4. Les conditions de l'action.

Il faut donc que le maître pose, mais dissimule une

.../...

question telle que l'élève, bien qu'il n'en connaisse pas la réponse, puisse finir par l'obtenir par son activité propre.

Il est nécessaire qu'il puisse envisager des réponses et que parmi celles-ci, il retienne les bonnes. A moins de lui supposer une représentation très au point de la réalité (c'est-à-dire la coïncidence entre ses anticipations et les résultats) il faut qu'il puisse mettre en oeuvre plusieurs solutions successives, des actions, dont il pourra lui-même juger les effets... afin de corriger ses anticipations...

La théorie des situations n'est rien d'autre qu'une liste de conditions à satisfaire pour améliorer les chances de l'élève de parvenir à la solution dans de bonnes conditions, c'est-à-dire en évitant les pertes de sens intempestives : par exemple des conditions qui font paraître une réponse trop naturelle, trop "obligatoire" peuvent faire disparaître le sens, les raisons de son apprentissage : les élèves croiront la "savoir" puisqu'ils la "voient". A l'inverse des conditions qui font apparaître une réponse comme totalement inattendue ou miraculeuse justifie l'apprentissage mais diminue le sens de la connaissance.

Pour satisfaire le plus possible ces exigences "théoriques" il faut souvent de longues heures de réflexion et de débat et le recours à tout un arsenal technique qui forme l'essentiel de la recherche en didactique et dont la tradition occulte le résultat car il n'est pas d'usage d'expliquer longuement les caractères bons ou mauvais d'une situation. En voici une simple qui répond en grande partie à nos préoccupations.

5. Imaginez le scénario suivant :

Action.

Le maître demande de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC déjà dessiné : un peu effilé avec un angle obtus. Le cas que j'ai proposé semble assez particulier : ce triangle A'B'C' formé par les trois intersections est bien petit, sur tous vos dessins. Essayez de trouver des triangles XYZ tels que X'Y'Z' soient "plus grands". Les 6 points doivent rester à l'intérieur de la

.../...

feuille et le dessin doit être fait avec soin. L'ensemble de la classe devra juger qui a gagné." Ici la question n'est pas posée, aucune démonstration n'est demandée. L'élève est appelé à faire plusieurs dessins "différents" (le maître verra de quel ensemble le triangle scalène est vraiment générique). Il choisira ceux qui lui paraissent les plus favorables à son projet (triangles très petit avec deux angles très aigus par exemple) mais auparavant il aura développé le sentiment que ce n'est pas facile d'éloigner X' Y' et Z' les uns des autres, et aura acquis dans les phases d'anticipation une certaine expérience même si elle n'est pas formulable, des relations qui lient les éléments en présence. Il aura construit un "modèle implicite".

Cette consigne a-t-elle changé l'activité de l'élève ? a-t-il à cette occasion développé une opinion personnelle ? Cette opinion lui donne-t-elle la possibilité de faire des anticipations sur des actions à venir, ces anticipations sont-elles plus riches et plus justes ? Sa conviction est-elle plus assurée ? le nombre des élèves qui travaillent utilement est-il augmenté ? Pour l'instant, ils pourraient avoir surtout développé des idées fausses - par confiance en la parole du professeur par exemple. Et il n'y a guère de raison d'espérer que le "choix en commun des gagnants" remettent en question ces idées fausses.

Preuve.

Les tentatives terminées, imaginons une procédure de jugement. Après un rapide coup d'oeil sur les réponses des autres élèves, ceux qui pensent avoir gagné se rassemblent. Ce sont les "postulants". Ils vont gagner un point de la part de chaque personne qui reconnaîtra que le dessin choisi par eux est fait "avec soin". Ceux qui contestent cette reconnaissance forment les "compétiteurs", chaque compétiteur peut choisir d'attaquer le postulant de son choix.

Pour régler la contestation, les postulants communiquent les dimensions de leur triangle XYZ choisi, puis ils annoncent les dimensions d'un triangle qu'ils pensent pouvoir disposer à l'intérieur du triangle X' Y' Z' qui sera obtenu par le compétiteur s'il accepte le défi. Ce dernier devra

.../...

alors reproduire XYZ, puis construire X' Y' Z' - mais il peut faire plusieurs tentatives - et montrer qu'il a gagné, au besoin un tiers des élèves pourra être appelé à trancher la contestation.

Remarquons bien que cette étape doit être acceptée par les élèves comme le moyen social normal de faire reconnaître - ou de vendre - une méthode ou une connaissance : Il faut assurer un résultat sous certaines conditions. Mais il faut que "l'acheteur" ait l'emploi de cette méthode dans des conditions telles que si elle est mauvaise, il perde quelque chose, de façon ainsi à éviter la complaisance pour des résultats arbitraires ou douteux.

La formalisation de ces rapports est assez complexe : si le compétiteur abandonne, il donne "son" point (sa voix) au postulant et "adhère" à son opinion. A ce titre, il peut être attaqué à son tour et à nouveau changer de camp ; S'il gagne il prend tous les points éventuellement gagnés par le postulant, à condition de faire à son tour une "déclaration" qui s'oppose à celle de son compétiteur. Il apparaît clairement ici qu'une situation de compétition entre des opinions a été créée dans la classe avec une méthode de preuve de type pragmatique. On peut espérer voir baisser très vite les prétentions des postulants et même apparaître des déclarations subversives par rapport à l'énoncé : "je prévois un triangle dont tous les côtés ont une longueur nulle !" Mais nous n'aurons pas pour autant obtenu l'énoncé d'une preuve intellectuelle.

Une telle preuve devra remplacer et rendre inutile toutes les preuves pragmatiques, elle s'établira "contre" elle et non pas sur elle ! Il faut qu'un élève ait intérêt à déclarer "Je vais vous faire économiser des tentatives inutiles mes amis, si le dessin est bien fait les trois points X' Y' et Z' doivent être confondus".

Et là encore, il ne faut pas confondre une situation où l'élève a intérêt à savoir "la vérité" mais à ne pas la dire - comme dans les universités italiennes de la renaissance -

.../...

avec une situation où il doit en publier la preuve.

On peut par exemple instituer que si le postulant et le compétiteur peuvent tomber d'accord sans qu'il soit nécessaire de dessiner, ils se partagent le "prix" de l'expérience économisée, ou bien le vainqueur double son gain et le perdant garde la moitié de son avoir pour s'être laissé convaincre... Il n'existe pas de règles qui assurent l'émergence de la vérité et l'intervention du maître sera tout de même souvent nécessaire. Il serait très coûteux en temps et inutile de faire dépendre l'acquisition de chaque théorème d'un affrontement social. Cependant, on aperçoit sur cet exemple les possibilités offertes par un tel schéma de manipuler au moment opportun le sens donné par l'élève à la connaissance qu'il s'approprie. Si l'élève produit la réponse avant qu'une intervention du maître spécifique de la question traitée n'ait refermé le problème, on peut être assuré qu'il s'agit d'une réponse personnelle de sa part et qu'il en a éprouvé l'intérêt ou la nécessité dans un certain contexte.

Si l'on veut que l'élève comprenne ce que c'est qu'une preuve mathématique, il faut créer les conditions qui vont lui permettre d'en utiliser, et pas seulement à l'intérieur de situations déjà mathématiques pour imiter et reproduire ce qui lui a été montré, mais à la place d'autres genres de preuves, (preuve pragmatique ou sémantique) ou d'autres moyens d'entraîner la conviction des autres (le charisme, la rhétorique, la menace, la séduction...).

Il faudra peut-être plusieurs exemples - assez espacés toutefois - de fonctionnement de la classe en bureau d'ingénieur (la première phase ci-dessus) pour que le maître et les élèves puissent invoker l'action au lieu de devoir l'accomplir, ou imaginer la défense que la démonstration prévient.

Instutionnalisation.

Nous n'avons pas traité dans cet exemple introductif la question de la signification interne aux mathématiques du savoir visé : Aucun élève peut être n'aura l'idée a priori de tracer le cercle circonscrit à $X Y Z$, mais s'il utilise son compas

.../...

pour vérifier que "le dessin est fait avec soin" autrement qu'en suivant les actions du constructeur, il a de grandes chances de "le faire", sans "le savoir". Mais pour qu'il sache ce qu'il a fait, il faut une institutionnalisation du savoir. Ce peut être le fait du maître, ce peut être aussi le fait de l'élève, à condition qu'une bourse aux découvertes soit ouverte et l'incite à formuler ses observations :

"Je sais tracer le cercle qui passe par les sommets d'un triangle"

L'exemple que nous venons de donner montre les possibilités offertes par la mise en situation de l'élève.

Ici, deux questions se posent :

1°/ Cette nouvelle situation a-t-elle changé la signification des connaissances acquises par l'élève par rapport à la situation classique initiale ? L'acquisition se fait-elle mieux ?

2°/ Cette mise en situation peut-elle être réalisée de façon systématique, et peut-elle se faire sous le contrôle d'une théorie. Il est clair que cette théorie devra se confronter à ce que l'on sait déjà principalement en épistémologie et en psychologie cognitive.

2. La théorie des situations

1. Résumé de quelques concepts de la théorie.

i/ Nous venons de nous attarder sur un exemple simple afin de bien montrer l'articulation entre les exigences théoriques et la production de propositions didactiques. Nous avons fondé nos transformations de la situation sur une analyse des fonctions différentes que le savoir peut jouer. Il s'agit toujours de savoir à quel jeu l'élève doit jouer pour que les stratégies les plus efficaces impliquent l'usage du savoir qu'on veut lui enseigner ; il s'agit aussi que le jeu puisse lui être communiqué, et pour qu'il le comprenne, il faut en général qu'il puisse immédiatement mettre en oeuvre une stratégie "de base", qui

.../...

même si elle ne permet pas de gagner, permet de jouer et d'espérer gagner.

ii/ La fonction première du savoir sera donc de fournir des décisions, de permettre des choix au cours de l'action. Pour cela il n'est pas toujours nécessaire que le savoir s'exprime, se prouve, ni même soit formulable. Toute situation d'enseignement pourra être analysée du seul point de vue des actions que l'élève doit entreprendre, de leurs motivations, de rétroactions auxquelles elles sont soumises, des possibilités d'évolution des stratégies de l'élève et des représentations ainsi obtenues.

iii/ La seconde fonction du savoir est de permettre la description des situations, c'est-à-dire la formulation des représentations. Et la composante des situations d'apprentissage qui justifie cette formulation, c'est la communication, éventuellement l'autocommunication.

Les adaptations de l'élève et de son langage à ces situations sont très importantes. Elles se font assez mal dans les situations classiques en géométrie, ainsi que l'a montré C. Laborde en utilisant la situation fondamentale que j'avais étudiée comme dispositif expérimental.

iv/ La troisième fonction du savoir est d'appuyer la conviction du sujet par des preuves éventuellement organisées en théories. La composante de la situation qui justifie cette activité c'est le débat de la preuve, de la validité de ce qui a été avancé, doit être apportée à un égal, également informé. Cette situation qui fait surgir les problèmes et les questions aussi bien que les réponses, est assez différente de la situation de communication comme nous l'avons exprimé plus haut.

v/ La quatrième fonction du savoir est la référence culturelle, à l'échelon d'un petit groupe, d'une classe, d'un milieu de chercheurs ou d'enseignants ou de la société tout entière, les rapports sociaux utilisant des savoirs reposent

.../...

sur un tissu de conventions. La composante des situations d'enseignement qui règle cet aspect de la connaissance est l'institutionnalisation par laquelle un groupe donne un statut à ce qu'il a produit le plus souvent par rapport à ce qui est pratiqué dans la société : (Mon attention a été attirée sur le dernier point alors que j'étudiais l'institutionnalisation interne à la classe, par P. Boero et son équipe, si justement soucieuse de ces questions de référence historique, sociale et professionnelle).

Canonisation d'une procédure en algorithme, conventions et langage, références théoriques...

vi/ En précisant le jeu des acteurs en présence cette modélisation permet d'essayer de prévoir l'évolution des situations et des élèves et de décrire les conditions qui commandent cette évolution ; je ne fais que citer au passage à ce sujet, nos travaux sur les sauts informationnels et sur les obstacles épistémologiques.

vii/ Les paragraphes qui précèdent supposent un fonctionnement quasi isolé du ou des élèves en interaction ; le maître fait aux élèves la dévolution d'un problème, et la situation les change ! En fait, il s'instaure entre le maître et les élèves la négociation d'un contrat didactique dont l'étude se poursuit actuellement.

2. Usages de la théorie des situations.

a) Mise en évidence et prévision des difficultés des élèves en particulier des difficultés insoupçonnées bien qu'importantes. Les recherches en psychologie cognitive sont le plus souvent fondées sur l'hypothèse implicite que la connaissance elle-même est bien connue et que seule la connaissance du sujet doit être modélisée - en général par rapport à la connaissance culturelle prise comme référence - La représentation des connaissances par leurs situations caractéristiques permet de renouveler certaines études comme nous le montrons plus loin.

.../...

Réciproquement, les difficultés des élèves permettent d'identifier les variables caractéristiques de la situation, certaines pouvant être utilisées par le maître.

b) Explication de certaines difficultés insurmontables de l'enseignement ou des phénomènes aberrants (divers effets Topaze, Jourdain, glissement métacognitif, etc...)

Ces explications soulagent les maîtres de la responsabilité tous azimuts qui finalement aboutit souvent pour eux à une sorte d'irresponsabilité, d'impuissance et de stress.

c) Dans la négociation didactique, le maître doit s'appuyer sur les présupposés épistémologiques naïfs de l'élève. Il tente parfois de les modifier - et la géométrie joue un grand rôle dans ce domaine - la théorie des situations permet de raffiner sensiblement les rapports à ce sujet et de les expliciter simplement sans détails inutiles.

d) Production de situations communicables aux maîtres et reproductibles, donnant enfin dans ce domaine "un principe de réalité".

Possibilité de faire à l'élève la dévolution d'un problème assez propre et résistance accrue des maîtres aux effets réducteurs du sens.

Que faut-il attendre de cette théorie du point de vue scientifique ?

D'abord qu'elle justifie le rapprochement des difficultés des élèves. Le fait qu'il s'agisse de la même connaissance mathématique ne donne directement aucune indication. Il faut principalement établir des relations entre certaines circonstances communes et les difficultés rencontrées par les élèves. Il faudrait de plus que ces relations soient explicatives de la production des difficultés observées. Il faudrait aussi que ces circonstances soient assez spécifiques de la connaissance visée et des erreurs observées, sinon il faudrait chercher une sorte de fer-

.../...

meture donnant une bonne correspondance entre une classe de situations et une classe d'erreurs relatives à une même connaissance (et éventuellement une catégorie d'élèves) :

La méthode classique qui consiste à rechercher une telle preuve au niveau des comportements des élèves : par exemple en montrant que ce sont les mêmes étudiants qui ont des difficultés sur les différentes situations relevant de la même connaissance est ici peu pertinente. Ce qui suit montre qu'il lui existe une alternative qui permet de la remettre en question.

Il faudrait ensuite que cette théorie permette de prévoir les effets des variations de ces circonstances sur les difficultés des élèves et par là d'établir expérimentalement la validité de ces explications.

Enfin, qu'elle permette d'envisager des propositions de séquences d'enseignement dont les résultats seraient "garantis" par les connaissances de didactique ainsi établies.

3. Méthode d'analyse.

La théorie des situations propose de réaliser ce programme par la méthode suivante :

a) Trouver une situation-problème fondamentale. Il s'agit :

a_1 - D'énoncer un problème dont la solution nécessite l'emploi par l'élève de l'énumération seule (si possible sans que d'autres connaissances interviennent).

a_2 - De faire apparaître les variables (de cette situation) dont les changements de valeur provoquent des modifications qualitatives des stratégies optimales, ce qui indique une modification de la signification de la connaissance visée. De faire apparaître celles qui changent son statut cognitif :

- en tant que moyen de contrôle de l'action
- en tant que moyen de communication

.../...

- en tant que moyen de preuve

- en tant que savoir ou algorithme de référence...

a_3 - De s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer par ce système de variables tous les problèmes culturellement connus où l'énumération intervient.

b) Examiner les difficultés et les échecs des élèves que permet de prévoir cette situation fondamentale fonctionnant de façon quasi-isolée et les confronter aux observations.

b_1 - La comparaison des situations réellement utilisées dans les classes avec la situation fondamentale fait apparaître des différences dans les conditions réalisées et permet de les envisager a priori comme des causes d'échec.

b_2 - D'autres échecs vont provenir de l'interprétation que l'élève fait de la situation-problème ou des modifications de signification introduites au cours de la dévolution de l'énoncé du problème ou de la négociation du contrat didactique.

b_3 - D'autres difficultés peuvent apparaître, causées par divers obstacles (épistémologiques, didactiques, etc...) ou par des ruptures de contrat ou provoquées par des particularités de l'épistémologie spontanée des professeurs.

c) Il est alors possible de revenir à la situation fondamentale et d'étudier comment elle peut produire des situations d'apprentissage ou d'enseignement, puis comment ces situations peuvent être enchaînées en différents processus pour provoquer les acquisitions visées.

L'enchaînement repose sur différentes conditions qui peuvent être étudiées elles aussi expérimentalement. Ces conditions de dépendance entre les situations peuvent concerner chez l'élève, aussi bien les reconnaissances de celles-ci et de leurs moyens de contrôle, que l'identification des savoirs en jeu.

3. La situation fondamentale pour la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace

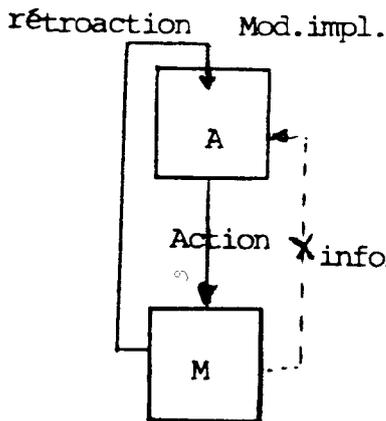
C'est celle du charpentier qui doit préparer et tailler au sol des bois qui devront s'ajuster exactement dans l'espace à 10 mètres du sol. Il faut qu'il ait une représentation et des techniques précises qui lui permettent d'anticiper le résultat de ses décisions. Mais alors que les seuls "textes" que se transmettaient les maîtres charpentiers étaient des dessins, le modèle ici dans l'enseignement devra être explicité et faire l'objet d'une élucidation, formellement, la situation sera donc la suivante :

1. La composante "action" des problèmes à résoudre.

i/ Les décisions à prendre.

[A] doit prendre une décision spatiale. Exemples :

- a) . Tirer une voiture à l'aide d'un fil pour la placer entre deux traits
- b) . Tracer une figure superposable à une autre
- c) . Choisir une route pour aller à un endroit donné
- d) . Déterminer la longueur d'une pièce de carton pour un puzzle
- e) . Enumérer (choisir une application d'une section commençante et N dans) les faces d'un polyèdre
- f) . Estimer la distance entre deux points
- g) . Prévoir la position finale d'un objet qui tourne ou qui bouge
- h) . Prévoir une représentation dans une projection centrale



ii/ Les contrôles de l'élève sur la situation.

Ces décisions sont faciles à prendre dans certaines circonstances familières :

parce qu'on voit les éléments de la situation
parce qu'on peut corriger au fur et à mesure

.../....

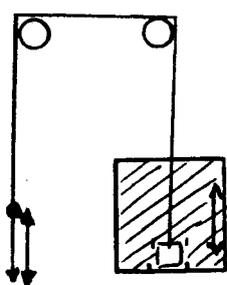
et parce qu'on peut juger immédiatement du résultat.

Mais dans d'autres circonstances, le contrôle continu de l'action n'est plus possible. Il faut alors se représenter la situation, et à partir d'informations partielles anticiper les résultats des actions envisagées. L'obligation de résoudre fréquemment des problèmes de ce type caractérisés par la mise en défaut des moyens perceptifs de contrôles et la suppression de certaines informations est une condition nécessaire de l'apparition de modèles implicites, ou de représentations.

iii/ Les limitations de l'information et/ou de l'action de l'élève, alors par exemple,

- a) * [A] ne voit pas la position de la voiture quand il tire le fil (elle est cachée sous une boîte)
- b) * La figure modèle se trouve loin du lieu de construction et la superposition n'aura lieu qu'après le travail
- c) * A ne connaît pas la topographie du pays
- d) * Le puzzle doit être agrandi et satisfaire certaines conditions
- e) Le polyèdre a une forme complexe et quand A le fait tourner pour compter les faces, il perd les repères de l'énumération.
- f) Les deux points sont inaccessibles... etc

iv/ Les modèles implicites qui permettent de résoudre maintenant ces problèmes sont les suivants :



- a) Le repérage du déplacement de la voiture par le repérage du déplacement de l'extrémité du fil. Si le fil tourne, la représentation doit annuler cette perturbation.
- b) Le choix des éléments de la figure pour la reproduction dépend de l'idée que A se fait de leur dépendance, c'est-à-dire des propriétés de la figure.
- c) La représentation mentale d'une région et une certaine stratégie des déplacements
- d) La conservation des rapports de distances et les applications de R^2 dans R^2 qui les conservent (les applications linéaires)

.../...

- e) La représentation mentale du polyèdre et sa structuration en volumes partiels, l'identification implicite des symétries...
- f) L'homogénéité de l'espace pour les homothéties.
- g) Selon les mouvements, l'isotropie de l'espace, par exemple
- h) La perspective par exemple.

2. Formulation des modèles.

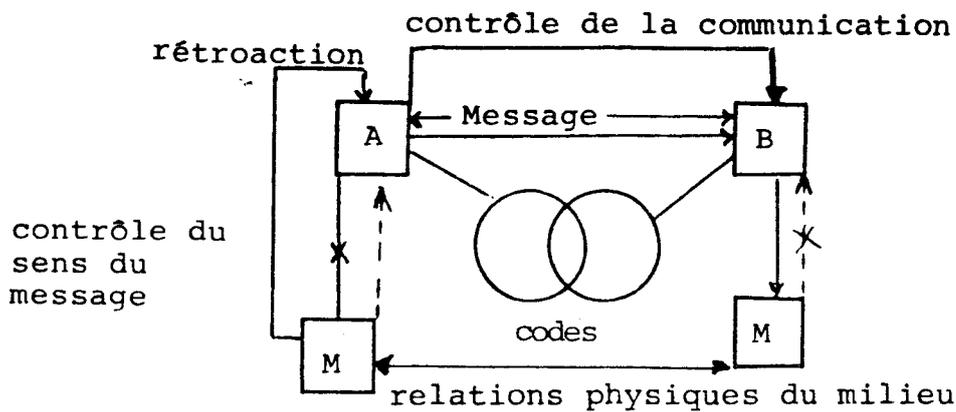
L'autocommunication peut conduire à l'usage de certains codes et un sujet déjà instruit d'un langage s'en sert pour "lire" la situation, même en l'absence de tout interlocuteur.

i/ Mais la situation générale de fonctionnement pour une représentation explicite, un langage, ou une schématisation, c'est la communication.

[A] doit demander à [B] d'effectuer pour lui certaines tâches, pour cela, il doit désigner les éléments qui l'intéressent, définir ceux qui sont inconnus de son interlocuteur, décrire et explicitier son modèle mental.

Bien sûr, la communication doit être vraie : A ne doit pas pouvoir résoudre son problème sans l'aide de B ou B sans A (A doit vouloir le résultat de l'action, B doit coopérer et avoir besoin de l'information,... etc)

Si le problème exige la création d'un code, la communication doit pouvoir avoir lieu plusieurs fois et il faut que A et B puissent se concerter entre les tentatives pour choisir des conventions de communication.



B peut être sollicité pour recueillir l'information ou pour effectuer l'action... Les conditions de la communication sont bien connues.

ii/ Dans le cas b, que j'ai étudié en 1975, A possède des cartons de formes géométriques simples, il doit obtenir de B une copie superposable, pour cela il doit lui envoyer des renseignements sous forme d'un message écrit, mais pas de figures ni de croquis.

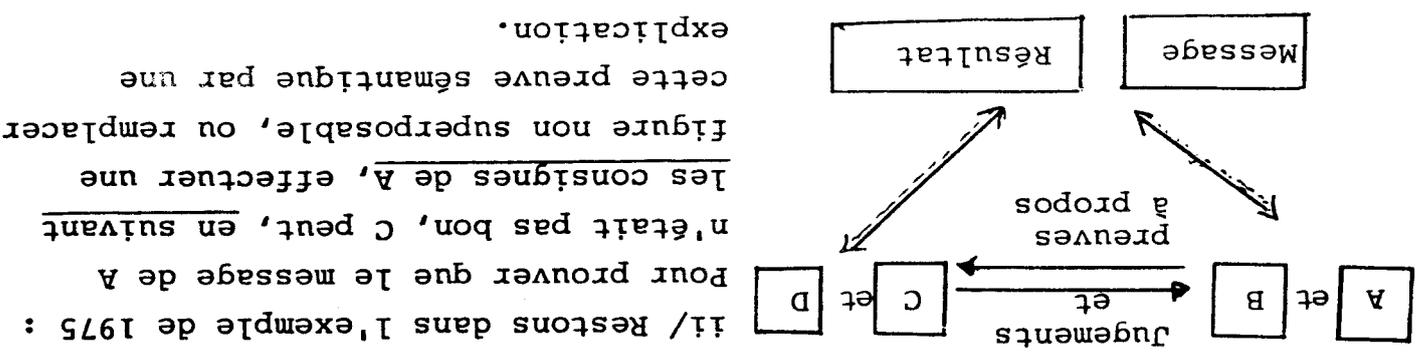
A et B possèdent un double décimètre, un compas, une paire de ciseaux, etc...

3. Preuve.

i/ L'explicitation d'un modèle mental va permettre son analyse, sa remise en cause, sa modification ou son rejet. Encore faut-il empêcher la correction empirique et organiser le débat.

A et B sont confrontés à des compétiteurs C et D du point de vue de l'action mais qui coopèrent pour la construction du savoir.

.../...



Le maître peut aussi avoir ajouté une clause qui tend à pénaliser les renseignements superflus.

Cette condition est nécessaire pour mettre en évidence les dépendances entre propriétés. Des lors on peut voir apparaître des théorèmes de géométrie.

Le maître peut alors instaurer de nouveaux jeux : recherche de messages minimaux permettant de faire construire les figures fondamentales, recherche de messages équivalents (qui définissent la même figure... etc.

Le sens est donné par la situation fondamentale qui permet à tout moment de revenir si c'est nécessaire à l'action.

4. Institutionnalisation.

Les conventions de langages, les définitions cano- niques, les propriétés fondamentales peuvent être indiquées au moment opportun par le maître, en référence à la culture. L'exposé général de la théorie figure dans un article de 1970 : Processus de Mathématisation.

Je ne discuterai pas ici le caractère fondamental de la situation ci-dessus : toutes les situations d'enseignement de la géométrie devraient pouvoir s'en déduire par fixation de variables et éventuellement dégénérescence de certaines conditions. J'ai donné un éventail d'exemples assez vaste.

a et g) sont des exemples tirés des ouvrages de l'Ecole Piaget BSI et modifiés en fonction de la théorie.

c) a été étudié pour la représentation de l'espace URBAIN par Grecia Galvez de Mexico en collaboration avec moi

d) est publié dans un article sur les décimaux en 1980

e) est tiré d'une étude de D. Lunkenbein

f) est une étude en cours à Bordeaux

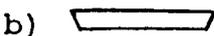
h) a été étudié par Thierry Bautier, en collaboration avec moi

b a été très utilisé par différents chercheurs, de Colette Laborde à E. Gallo.

Quelques observations de la situation fondamentale (b)

Les manipulations de cette situation ont permis diverses études qui toutes étaient centrées sur les comportements des enfants.

Par exemple, E. Gallo montre que, dans une communication invoquée, les élèves utilisent certains stéréotypes culturels, et que cet usage est sensible à certaines propriétés des figures. Nous avons trouvé dans la lère communication, l'usage, non seulement de stéréotypes, mais aussi de métaphores. C'est une "godasse" disait un enfant, pour la figure a) ci-jointe, la semelle mesure 9 cm, ... C'est une assiette b), une bassine c), ... etc



Ce procédé est très efficace, mais il ne résiste pas à un appauvrissement brutal du champ ; des parallélogrammes "voisins"⁽²⁾ posent non plus des problèmes de dénomination mais des problèmes de représentation, et les élèves découvrent que la donnée des quatre côtés d'un quadrilatère ne le déterminent pas. Les mots points, côtés, sommets, segment, se substituent par l'usage, à la demande du maître, aux mots "bord", "trait", "points", "pointe", etc...

.../...

Exemples de messages échangés par les élèves.

Exemple 1

B b.

E

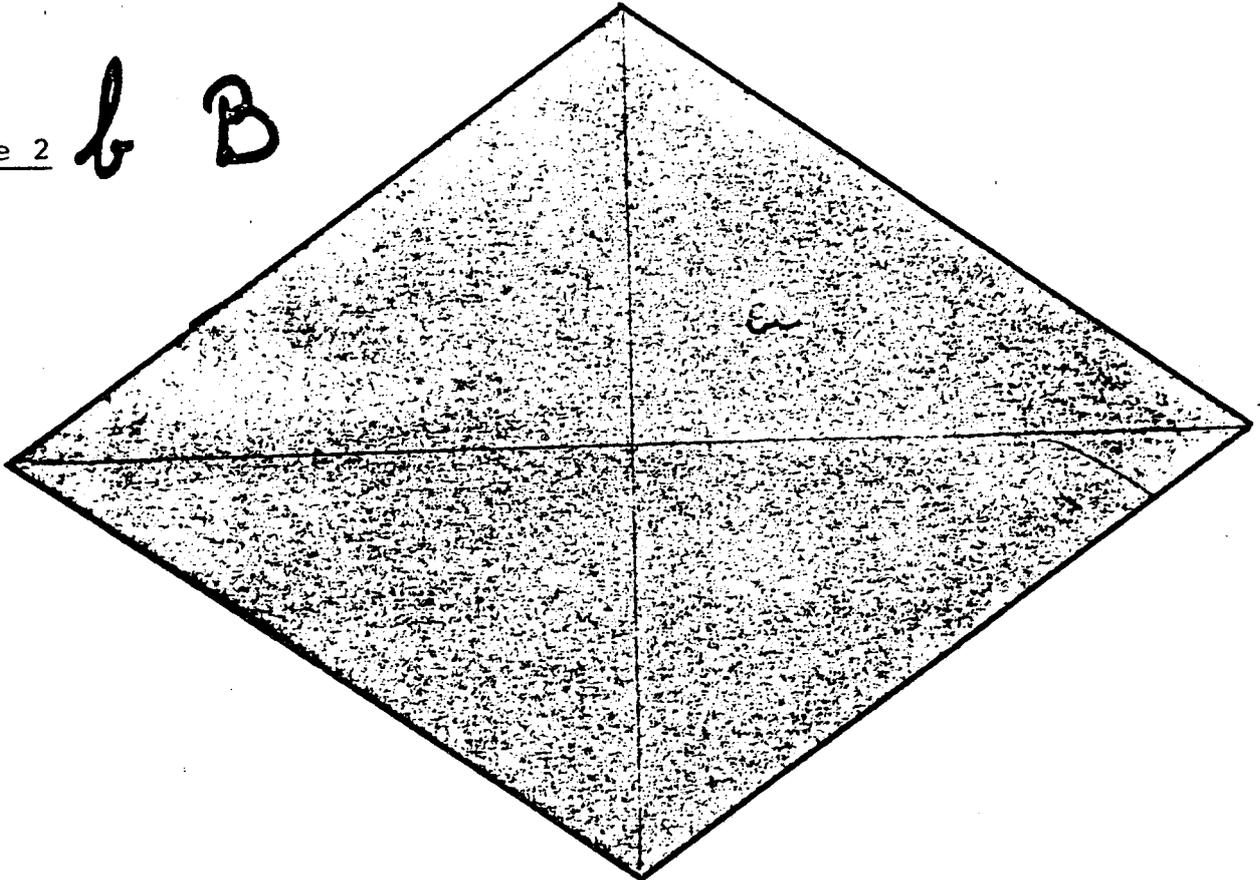
R
 mehe forme à quatre cotés. 2 de ses cotés sont
 égale 14.00. Les 2 autres autres sont égaux - 13, 2
 Les 2 cotés se retrouvent en diagonale (cette forme
 est un rectangle déformé

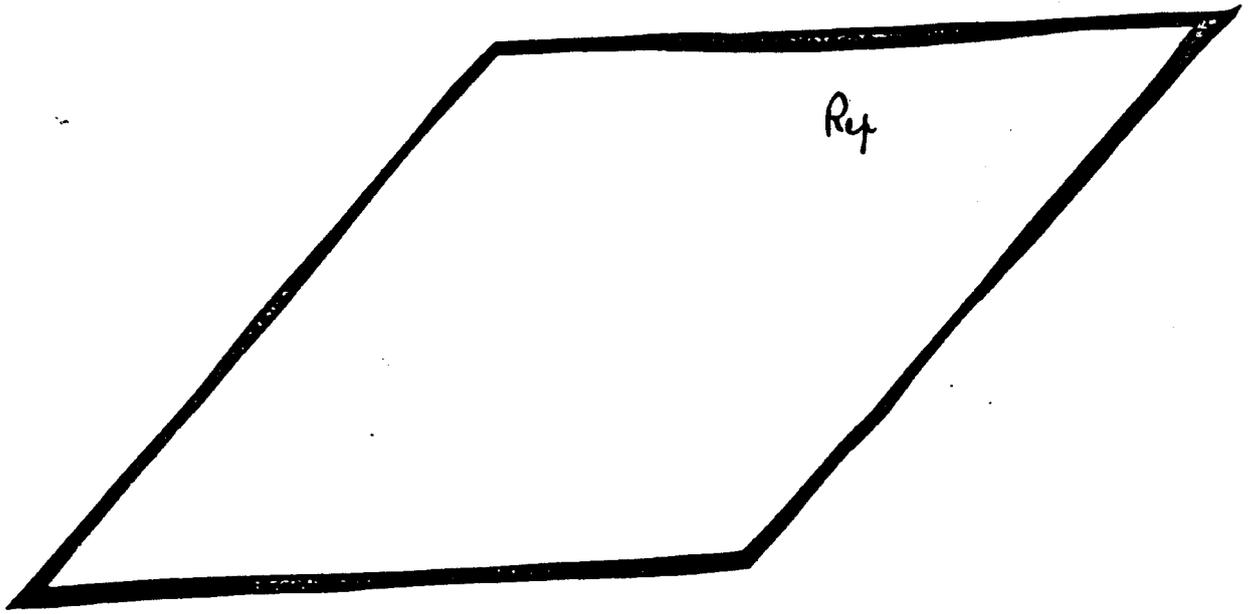
R. quel est les mesures des coins?

E 1 mm

Exemple 2

b B





Exemple 3

D d

Ⓔ C'est une sorte de ~~losange~~ losange, il y a quatre côtés. Les deux côtés qui sont face à face mesure 13, ^{cm} Les deux autres mesure 14 cm. il y a besoin d'un double décimètre mais pas besoin d'une équerre car les angles ne sont pas droits

R qu'est ce que s'est un losange?

Ⓔ F est une figure à 4 côtés non égaux, il y a 1 angle en haut, un en bas et 2 de chaque côté.

Il resterait à indiquer les conditions qui vont faire apparaître les autres éléments géométriques fondamentaux.

L'étude de l'identification et de la reconnaissance des figures géométriques relève tout à fait des travaux de WERMUZ []. La figure est traitée comme un prédicat amalgamé, un rectangle n'est reconnu comme tel que s'il est rectangle (R) non carré (\bar{C}), pas trop grand ni trop petit (T), de proportions moyennes (pas un ruban) (Prop) et s'il est présenté avec les bords parallèles au bord de la feuille (Pos). Ces composantes contextuelles sont inaccessibles à l'enfant tant qu'il n'a pas fait de centration sur elles (il peut différencier les rectangles, selon cette composante, par exemple rectangles "longs" et "moins longs") et qu'il ne les a pas décentrés (la composante fonctionne alors comme un nouveau prédicat : la proportion). La situation fondamentale permet de chercher les moyens de provoquer l'évolution de ce traitement des figures géométriques. Le problème maintenant est de savoir quelles caractéristiques, quelles variables de cette situation déterminent les représentations des élèves et leur évolution.

4. Les variables de la situation : la taille de l'espace

1. La variable la plus importante et la plus évidente de cette situation didactique est la taille des objets à traiter. Ces variations liées au coût pourraient être contenues. Les observations déjà accomplies dans ce secteur nous laissent penser que :

- la conception qu'ont les élèves des objets géométriques, le traitement qu'ils en font, dépend de leur taille
- les bornes d'utilisation de conceptions de divers objets géométriques coïncident, il y a ainsi plusieurs conceptions qui cohabitent dans la même niche.

Par exemple, la notion d'angle n'existe pratiquement pas pour des objets de petite taille. Les questions d'angle, report, désignation, variation, etc... sont traitées sous forme de mesures de segments dans des triangles. Mais la notion de droite non plus, il n'y a que des segments. Les "droites" et les angles apparaissent avec le repérage.

.../...

2. Méthodes pour la recherche des modèles spontanés et des représentations.

2.1. Recherche d'une hiérarchie des variables.

i/ Données : L'analyse de la situation fondamentale et la recherche de situations appropriées (demandant de la part de l'élève divers types de mise en oeuvre de la connaissance) ou de situations critiques ("cruciales" dans le langage d'A. Bell) permet d'obtenir une collection de questions.

Pour chaque question q_i sont notées les différentes modalités de réponses considérées comme caractéristiques : r_{ij} ainsi que la réussite ou l'échec t_i . Pour chaque question ou pour chaque modalité de réponse, les valeurs des variables de la situation fondamentale sont notées.

Par exemple la variable taille pourra être représentée par plusieurs lignes, v_k du genre :

v_{t1} : "déplacement minimum du corps de l'élève pour appliquer la modalité de réponse"

v_{t2} : "dimension de l'objet à traiter", etc... mais toute variable importante dont la valeur a été fixée dans les questions q_i peut être ainsi traitée.

Soit V l'ensemble des variables. Le tableau d'analyse a priori décrit de l'application $A : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ou plus exactement l'application

$$A' : \left(\bigcup_{i,j} \{r_{ij}\} \cup \{t_i\} \right) \times \bigcup_{k,p} V_{k,p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ii/ Observations. Chaque élève $x \in X$ fournira la ligne $(x)_{ij}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1. & \text{Si l'élève } x \text{ a présenté le comportement } j \\ & \text{à la question } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit S le tableau des observations $(x_{ij})_{x \in X}$

L'analyse factorielle de A fournit une indication sur l'indépendance (ou non) des variables déterminées par l'ensemble des questions et sur les positions relatives, a priori, des variables et des questions. L'analyse factorielle de S , si possible éclatée contraint les questions, (ou les comportements) dans un sous-espace de \mathbb{R}^n ($n = \text{nombre d'élèves} + \text{nombre de colonnes}$) et fixe leurs distances (du χ^2) déterminées par les groupes d'élèves se comportant de la même façon.

.../...

Le plongement de A, en tant que sujets supplémentaires, dans S (c'est-à-dire sans contribuer à la détermination des axes factoriels mais en les plaçant par rapport à eux) et la transformation opérée par les contraintes liées aux observations permettant de déterminer lesquelles des variables de la situation sont le plus liées aux axes principaux d'inertie (on peut aussi examiner le rôle des valeurs) et par là présenter une hiérarchie de l'influence des variables sur les comportements via les questions posées. Il est d'usage de rechercher en même temps directement une hiérarchie par la méthode de Lhermann.

Ces méthodes sont puissantes mais lourdes et délicates à manipuler.

2.2. Recherche de la coïncidence des bornes des méthodes, pour identifier les conceptions.

Pour un même concept mathématique on peut choisir diverses questions de types divers et pour chaque type observer plusieurs valeurs d'une même variable. Après l'identification des différentes stratégies des élèves, r_{ij} , il s'agit de repérer pour chaque question, des intervalles de meilleure adaptation et des intervalles de meilleure efficacité de ces stratégies. Plusieurs méthodes sont possibles, depuis l'étude directe jusqu'à l'analyse décrite ci-dessus, sur le tableau $\{x \times q_i\} \times \{r_j\}$ en plaçant les valeurs de la variable étudiée en variable supplémentaires (par exemple).

Le résultat doit alors se présenter sous forme d'une suite où figurent les méthodes dominantes dans un intervalle par leur fréquence d'emploi ou par leur efficacité.

% d'emploi ou coefficient d'efficacité					Valeur de
	V_1	V_2	V_3	V_4	la variable V_5 étudiée
Notion 1	M_1	M_1	M_2	M_3	M_3
Notion 2	M'_1	M'_2	M'_3	M'_3	M_4
Notion 3	M''_1	M''_1	M''_1		
Notion 4	M'''_1	M'''_2	M'''_1	M'''_2	M'''_1
					etc...

Le tableau représente les assertions telles que "la méthode M_2 est la plus employée dans l'intervalle V_2 V_3 pour la situation 1.

Si les intervalles d'utilisation d'une méthode ont des bornes situées de façon aléatoire suivant les questions, ou s'ils ne sont pas connexes comme en 4, l'hypothèse que les stratégies de traitement du concept mathématique étudié dépendent de la variable en question est à rejeter (par les tests classiques). Sinon, s'il existe de nombreuses coïncidences, il est possible d'identifier des intervalles de meilleur fonctionnement (à étudier de façon clinique s'il y a lieu) de conceptions de l'élève pour ce concept.

2.3. La même méthode conduite maintenant avec plusieurs concepts peut conduire à la mise en évidence de conceptions relatives à des concepts géométriques différents, et qui ont les mêmes intervalles de cofonctionnement. On essaiera d'expliquer ces coïncidences par l'existence d'une représentation liant un concept et valide dans cet intervalle (niche informationnelle).

3. L'analyse en termes de situation permet de prévoir que l'on devrait trouver trois intervalles principaux de la variable didactique "taille". Et il devrait leur correspondre trois représentations différentes de l'espace. Elles ne devraient pas apparaître simultanément chez l'enfant, mais elles devraient subsister comme modèles implicites pour le traitement et le contrôle de situations familières concernant les relations sujet avec son milieu.

On peut prévoir qu'elles pourraient former un obstacle de nature ontogénétique et peut être épistémologique à la conception d'un espace homogène et isotrope, référent de la théorisation mathématique euclidienne et/ou affine.

L'enseignement classique semble pouvoir les ignorer sans doute pour diverses raisons : la question se règle naturellement, ou la culture ne traite pas ces questions d'initiation à la vie...

.../...

Voici quelques caractéristiques de ces trois "espaces" telles que les recherches en cours les font apparaître ou telles que la théorie des situations les laisse prévoir.

3.1. Micro-espace : c'est le théâtre de la manipulation de petits objets.

- Les déplacements, du sujet et des objets (rotations et translations surtout) sont si faciles et si précis qu'ils ne requièrent aucune "conceptualisation"
 - L'objet connu en soi
 - Pas de référence (mêmes raisons) les changements de points de vue sont gratuits
 - Homogène quasi-isotrope pour les objets, pas pour les figures
 - Pas d'"espace" entre les objets - Distance entre deux points si la droite est matérialisée... etc
 - Pas d'"angle" - des longueurs
 - Comparaisons de longueurs par coïncidence gratuite
 - Quelques problèmes de structuration des objets
- Quelles décisions sont économiques ?
 Quel contrôle ?

3.2. Le Méso-espace.

L'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue. Objets fixes entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet.

Un repère de référence par rapport auquel l'élève bouge.

Nécessite le recollement (de points de vue) de micro espaces, connexité mais pas d'intégration des angles sous contrôle de la "réalité" vue, mouvements

Topologie - Dimension 3.

La rédaction des paragraphes 3.1, 3.2 et 3.3. relatifs aux caractéristiques prévisibles des 3 types de représentations de l'espace, n'est pas achevée au jour prévu pour cette publication. Nous avons laissé seulement quelques notes. Se rapporter au texte définitif à paraître.

Pas homogène naturellement.

Pas isotrope.

Création intellectuelle de certaines figures non matérielles, droite... représentation mentale des déplacements, mais pas de représentation explicite.

Exercice.

L'armoire passe-t-elle dans l'escalier ?

3.3. Le Macro-espace.

Dimension 2

Recollement de "cartes" - Espace granuleux

Nécessité d'une représentation implicite des mouvements relatifs de 2 à 6 systèmes de références.

Mesures de longueurs très chères,
déplacements impossibles ou très chers

Mesures d'angles très faciles (bon marché)
et plus nécessaire

Homogène pour les translations,
pas pour les homothéties

Isotrope dans le plan.

Exemple d'exercices :

. Est-ce que la figure formée par ces quatre fanions est un rectangle ?

. Quelle longueur de corde pour rejoindre deux fanions ?

4. Conclusion.

Cette partie de l'exposé avait pour but de montrer comment la théorie des situations permet de reprendre l'analyse d'une question de psychologie cognitive. Elle permet aussi

.../...

de reposer les questions d'objectifs de l'enseignement. Ainsi l'homogénéisation de l'espace est un problème d'apprentissage pour l'enfant, comme il a été un problème technique et culturel avant Thalès, ne devons-nous pas en faire l'étude à l'école élémentaire ?

L'étude des processus possibles d'apprentissage et des curriculum pourrait être entreprise ici après les études annoncées. De nombreuses situations ont déjà été étudiées pour jalonner une genèse différente de la géométrie.

Toutefois il pourrait être intéressant de regarder très rapidement et très superficiellement, comment l'analyse en terme de situations traite les macro-phénomènes d'enseignement tels que les réformes.

(B) L'enseignement de la géométrie

Depuis que la géométrie élémentaire est une théorie "achevée" du point de vue scientifique, les transformations que subit son enseignement sont entièrement des productions de l'activité didactique des professeurs. Elles devraient donc pouvoir s'expliquer par les contraintes diverses, culturelles, professionnelles, sociales qui s'exercent sur la société des enseignants. Il est indispensable pour une approche scientifique de ces phénomènes de distinguer ces contraintes mais surtout les processus par lesquels elles produisent des effets à long terme.

°
° °

① Classons ces contraintes selon leurs "sources", c'est-à-dire les milieux qui sont supposés les exercer :

Ainsi la noosphère des mathématiciens est intéressée à avoir des étudiants qui puissent transposer certaines questions en termes géométriques. Les scientifiques, physiciens, naturalistes, géographes, etc... se posent en utilisateurs de différents modèles géométriques.

La société dans son ensemble réclame que les élèves disposent de représentations géométriques et de techniques efficaces pour résoudre les "problèmes courants" liés à l'espace.

Les pédagogues et les psychologues insistent pour que l'enseignement soit adapté aux possibilités et aux besoins des élèves selon leurs capacités, leur âge et leur milieu...

Parmi ces contraintes bien peu sont susceptibles de s'exercer directement et réellement - c'est-à-dire à court terme en fonction de leur satisfaction effective - Toutes sont médiées par des circuits qui ne réagissent guère qu'à une appréciation essentiellement idéologique de la situation et ne la traitent qu'au niveau symbolique.

.../...

Par contre, les contraintes liées à la négociation didactique, celle qui lie le maître à l'élève à propos de chaque activité d'enseignement, s'exercent de façon répétée et impérieuse. Elles n'ont pas besoin d'être exprimées pour s'exercer.

De plus, lorsqu'il est nécessaire qu'elles s'expriment, sous forme de convention ou de décisions par exemple, elles doivent seulement être justifiées, vers l'extérieur, dans le langage ou l'idéologie de l'interlocuteur. Il est rarissime que cette justification explicite rencontre la justification effective et réelle.

La principale caractéristique de cette contrainte interne à l'activité d'enseignement c'est d'être localement stabilisée. Les corrections s'exercent dans des temps très courts et le professeur ne peut guère chercher ailleurs que dans sa propre action des moyens de les exercer.

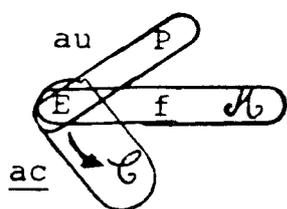
② Les contraintes se manifestent sous formes de "choix didactiques" du professeur concernant à la fois les rapports de l'élève à la connaissance, les conditions d'apprentissage et l'ordre d'introduction des notions.

Par exemple, le professeur, selon qu'il veut favoriser tel ou tel aspect de la relation didactique peut hésiter entre plusieurs présentations de son cours :

i/ La présentation académique, ou encyclopédique, a pour objet de permettre l'accès "immédiat" à toutes les connaissances présentées. Elle suppose que l'élève, utilisateur, dispose des connaissances lui permettant cette lecture et cette acquisition directe, ou en tout cas qu'il se charge de les réunir en suivant un processus à sa charge lui aussi.

Cette présentation installe d'emblée le rapport au savoir qui sera celui que l'élève doit atteindre à la fin de sa formation, et qui suppose que les acquisitions se font par l'exercice d'un "savoir-apprendre" à peu près invariable sur une famille de savoirs à peu près indépendants.

.../...



E

i

ii/ A l'opposé de ce point de vue, se situe la présentation axiomatique des savoirs. Elle a pour objet de permettre au professeur de ne jamais faire appel dans son cours à des notions qui n'auraient pas été introduites auparavant ou qui ne pourraient être définies ou prouvées au moment de leur utilisation. Elle prend en charge explicitement ce qui est supposé "connu" de l'élève et une manière de "construire" ou d'acquérir avec cela les connaissances nouvelles. Plus précisément elle suppose que les savoirs ne peuvent pas être acquis indépendamment les uns des autres et que les acquisitions elles-mêmes changent le savoir-apprendre de l'élève.

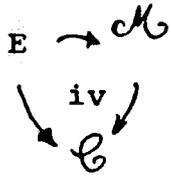
Ce point de vue axiomatique est particulièrement adapté au contrôle et à l'amélioration de la communication entre le professeur et l'élève. Il facilite la négociation du contrat didactique en ce sens qu'il tend à permettre au professeur de renvoyer l'élève soit à des enseignements antérieurs dont "l'acquisition" est à sa charge, soit à des conditions "d'acquisition" vraiment "universelles" et que l'élève ne saurait rejeter (La preuve de la validité de ce qu'il doit apprendre par exemple). Localement, le maître peut manipuler le débit des informations nouvelles qu'il apporte.

Le savoir ne réside plus seulement dans une collection de faits isolés mais dans une manière culturellement reconnue de les organiser.

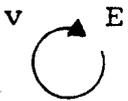
iii/ Les deux premières présentations tendent à optimiser les rapports de l'élève soit avec la connaissance, soit avec le système éducatif sur la base de l'acquisition d'un corpus de savoirs. Mais s'il s'agit d'entraîner l'élève à une utilisation du savoir et ce à une fin autre que l'acquisition elle-même, il apparaît plus indiqué de suivre un ordre conforme à cette utilisation : celui des différentes étapes des actions qu'il faudra reproduire ou gérer.

Dans cette présentation "fonctionnelle" calquée sur un algorithme, il n'est fait appel aux connaissances théoriques qu'au moment où elles entrent en scène pour déterminer ce qu'il convient de faire.

Cette présentation est centrée sur l'optimisation directe du rapport de l'élève avec son milieu.



iv/ Une présentation "génétique" tend à montrer que les connaissances sont une réponse rationnelle à des problèmes légitimes, et permet ainsi un autre type d'articulation ou de compréhension des savoirs. La justification qu'elle en donne, interne, est tout à fait différente de la justification fonctionnelle par les techniques où on les utilise. Cependant elle traite assez bien des rapports entre l'activité intellectuelle du sujet, la connaissance et son action sur le milieu. L'introduction historique pourrait sembler de ce point de vue la plus proche de la genèse "vraie".



v/ Pour enseigner à l'élève une connaissance nouvelle, il est indispensable de s'appuyer sur ce qu'il connaît déjà mais il serait naïf de croire qu'il connaît ce qui lui a été enseigné et ne connaît que cela (et en particulier rien, si rien ne lui a été enseigné). Son activité personnelle lui fait développer des représentations et des modèles spontanés qui jouent un rôle décisif dans ses acquisitions. Il serait aussi naïf de croire que ces modèles spontanés vont s'adapter naturellement aux acquisitions nouvelles et évoluer sans heurt vers la connaissance scientifique.

L'exercice, la mise à l'épreuve, la modification des opinions anciennes de l'élève est une tâche ardue mais nécessaire à l'enseignement des connaissances nouvelles.

Si l'on admet qu'il existe une régularité, une certaine homogénéité des acquisitions de connaissances lors du développement de l'enfant - dues à des causes psychogénétiques et sociales profondes - et/ou si l'on admet qu'il existe une filiation épistémologique incontournable, constitutive, de ces connaissances il est possible de concevoir des présentations psychogénétiques et/ou épistémologiques du savoir.

vii/ Antagonistes à ces contraintes qui concernent le sujet épistémique, il en existe d'autres qui concernent l'adaptation de la présentation des connaissances à la diversité des caractères individuels des élèves et à leur insertion socio-culturelle présente ou projetée.

Ces diverses contraintes paraissent contradictoires l'ordre axiomatique, l'ordre fonctionnel ou algorithmique, l'ordre historique ou génétique ou psychopédagogique ne peuvent coïncider. Les choix seront des compromis et il est clair que l'on peut en observer en géométrie de très différents dans les diverses directions indiquées.

3 Pour montrer qu'un système agit sur les choix d'enseignement il ne suffit pas de montrer que tel milieu les influence ou les infléchit dans tel sens pour telle raison, car on risquerait de prendre le signe pour la chose elle-même. Il faut aussi expliquer les mécanismes régulateurs qui s'imposent aux acteurs et les contraignent à maintenir stables les caractères que l'on déclare sous influence.

°
° °

Stabilité malgré les perturbations, variations et corrections. Car les influences occasionnelles, même puissantes ont peu de chance de produire des effets positifs durables sur l'enseignement. La plupart des améliorations sont l'effet d'optimisations, et les nombreux choix qui produisent ces solutions optimales sont rarement des alternatives simples. Au contraire, ils doivent concilier des intérêts divergents, conjuguer des solutions paradoxales... Ces équilibres ne se maintiennent que dans la mesure où le système qui influence l'autre, surtout s'il l'influence intentionnellement, est soumis à des rétroactions du système influencé. De sorte que les influences qui sont les plus intéressantes pour l'analyse de l'enseignement sont celles qui se manifestent par des variations moindres que celles que l'on pourrait attendre d'un fonctionnement indépendant, ou encore celles pour lesquelles il apparaît rapidement des corrections appropriées

.../...

en réponse aux perturbations occasionnelles. Les influences les plus importantes sont celles qui concourent à la stabilité du système.

C'est sur elle que l'action didactique doit s'exercer pour des effets durables, mais il n'y a pas d'espoir d'obtenir une véritable ingénierie didactique sans la connaissance et le respect de ces régulations.

Par exemple, on pourrait penser que les déclarations de Dieudonné (1956) sur l'emploi de l'axiomatique d'Euclide dans l'enseignement, reprises et intégrées dans une demande de réformes plus globales, sont l'expression d'un désir du milieu scientifique et lorsque ces demandes aboutissent, on pourrait penser qu'il y a là l'indice d'une influence effective de ce milieu sur l'enseignement.

Mais on pourrait penser au contraire que l'importance de l'écart dénoncé dans ces déclarations entre les habitudes scolaires et les besoins des futurs mathématiciens est l'indice de leur indépendance naturelle : aucune tendance à importer dans l'enseignement des questions ouvertes ou des méthodes de travail, ou des présentations synthétiques empruntées à la recherche ne recevait naturellement de rétroactions positives de la part du système même si, à l'occasion le maître et les élèves en retiraient quelques satisfactions.

Le seul recours des mathématiciens contre cette indépendance a été de faire un détour par l'opinion publique qui a momentanément accédé à leur désir : les mathématiques enseignées devaient être non seulement "vraies" mais conformes à certaines attentes épistémologiques de mathématiciens professionnels.

La façon dont cette exigence va être satisfaite et trahie montre clairement ce qui, dans l'enseignement, est relativement arbitraire, donc variable de façon assez erratique et ce qui est corrigé par les contraintes et donc stable : la disparition quasi-totale de la géométrie sous sa forme classique à un moment donné dans les programmes, celle des figures dans les

.../...

manuels, ou les deux, montrent l'absence de toute nécessité locale dans ce domaine.

Par exemple, les relations des élèves avec l'espace lui-même, leur capacité à se diriger, à s'orienter à agir dans cet espace n'ont guère été affectées par ces réformes, de même semble-t-il, que leurs conceptions et leurs représentations les plus générales. On peut considérer que le fait, au demeurant assez évident, que l'enseignement ne joue presque aucun rôle dans cette acquisition (en particulier dans l'enseignement primaire) est ainsi établi.

On pourrait avancer que c'est le fait que ces acquisitions peuvent se produire naturellement qui rend inutile leur enseignement. Mais encore faudrait-il que ces acquisitions spontanées soient qualitativement et assurées pour tous les enfants. Est-ce le cas ? Il n'est pas facile de répondre car, pour mettre en évidence cette carence, il faut pouvoir proposer des "exercices" où clairement les conceptions géométriques des élèves sont en jeu mais dont la réussite ne nécessite pas d'acquisitions langagières ou théoriques, ce qui est déjà une preuve de l'inadaptation.

Aussi faut-il expliquer pourquoi l'enseignement de la géométrie est-il à ce point indépendant du développement cognitif de l'enfant, comme il l'est aujourd'hui du développement de la science et pourquoi il serait assujéti essentiellement à des nécessités didactiques et culturelles.

Cette dernière assertion me paraît singulièrement étayée par les faits suivants : l'essentiel des modifications, des réformes, des débats, des travaux se fait, soit dans le cadre d'une axiomatique déterminée (choisie pour les élèves), soit porte sur le choix d'une telle axiomatique. C'est la preuve que parmi toutes les contraintes que nous avons évoquées plus haut, seules celles intervenant sur la relation maître-élève sont vraiment prises en compte dans la recherche empirique de l'amélioration de l'enseignement.

Peut-être est-ce là effectivement le seul point faible du système et peut-être est-ce la seule voie

.../...

offerte à la recherche en didactique, j'en doute et la méthode que nous venons d'esquisser va permettre de poser ces questions différemment.

Mais aucune de ces modifications n'a d'effet vraiment décisif sur les phénomènes qu'elle prétend viser : la facilité de l'acquisition d'une vaste et solide culture géométrique.

En l'absence de feed-back, elles n'ont pu être vraiment adaptées aux besoins des professeurs.

La disparition momentanée de la géométrie classique dans l'enseignement français a fait apparaître me semble-t-il, sa véritable fonction didactique.

Conclusions

Depuis que la géométrie élémentaire est une théorie "achevée" du point de vue scientifique, les transformations que subit son enseignement sont entièrement des productions de l'activité didactique des professeurs.

1. Ces transformations changent l'organisation, le fonctionnement, le rôle, l'usage des connaissances (Transposition didactique) afin de satisfaire les contraintes du contrat didactique (analyses et preuves de cette assertion).

2. Cette "didactification" incontrôlée de la géométrie la rend impropre à d'autres fonctions que celles que lui a assignée l'épistémologie spontanée des professeurs. Il en résulte des "phénomènes didactiques" surprenants en particulier, lors des réformes.

3. L'ingénierie didactique et l'épistémologie expérimentale peuvent-elles remplacer la vigilance épistémologique "naturelle" (absente du fait de l'extinction de la recherche) et renouveler l'enseignement de la géométrie ?

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR d'ÉTAT ÈS SCIENCES

PAR

Guy BROUSSEAU

**THÉORISATION DES PHÉNOMÈNES
D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES**

ANNEXES

— LES DÉCIMAUX DANS LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE

— TEXTES DIVERS

Soutenue le 2 décembre 1986 devant la Commission d'examen :

MM. P. DAMEY, Professeur	Président
J. COLMEZ, Professeur honoraire	
J. ESTERLE, Professeur	
J. DHOMBRES, Professeur à l'Université de Nantes	Examineurs
B. MALGRANGE, Correspondant de l'Académie des Sciences	
G. VERGNAUD, Directeur de recherche au C.N.R.S.	

S O M M A I R E

-oOo-

- LES DECIMAUX DANS LA SCOLARITE OBLIGATOIRE... 1 à 280

- TEXTES DIVERS
 - ◇ *Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques*..... 1 à 30
 - ◇ *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*..... 31 à 64
 - ◇ *The fragility of knowledge*..... 65 à 97
 - ◇ *Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?*..... 98 à 111
 - ◇ *L'effet du glissement métadidactique*.....112 à 124

- DOCUMENTS INTERNES.....125 à 131

S O M M A I R E de l'annexe 1

-oOo-

– LES DÉCIMAUX DANS LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE... 1 à 280 (voir Note 1)

	Pagination	initiale	dans cette édition
			Voir note 2
Introduction.....	1 à 3.....	1 à 3.....	1 à 3
Module 1 Les nombres rationnels : construction.....	4 à 34.....	4 à 34.....	4 à 34
Module 2 Les nombres rationnels : opérations	35 à 60.....	35 à 60.....	35 à 60
Module 3 Mesures	61 à 79.....	61 à 79.....	61 à 79
Module 4 Ordre des rationnels	80 à 94.....	63 à 77.....	63 à 77
Module 5 Les nombres décimaux : construction.....	95 à 115.....	78 à 98.....	78 à 98
Module 6 Opérations dans les décimaux.....	116 à 130.....	99 à 113.....	99 à 113
Module 7 Encadrements et approximations.....	131 à 153	114 à 135.....	114 à 135
Module 8 La similitude	154 à 176.....	136 à 158.....	136 à 158
Module 9 Les applications linéaires.....	177 à 215	159 à 197.....	159 à 197
Module 10 Multiplier par un rationnel	216 à 244	198 à 226.....	198 à 226
Module 11 Situations linéaires	245 à 279	227 à 261.....	227 à 261

Note 1.

Les 4 derniers modules du curriculum expérimental portent les titres suivants

Module 12 Divisions classiques dans les rationnels.....	262 à 293
Module 13 Divisions nouvelles dans les rationnels	294 à 331
Module 13 Composition des Applications linéaires	332 à 356
Module 14 Décompositions des applications linéaires, identification des rationnels et des applications linéaires rationnelles	357 à 397

Ils n'avaient pas été inclus dans les annexes de la thèse pour des raisons de délais. Mais l'ensemble des modules a été publié sans modification dans « Nadine et Guy Brousseau, Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, IREM de Bordeaux (1987) (535p) »

Note 2

Pour l'édition électronique, la numérisation des modules 1 à 3 a été refaite à partir des annexes de la thèse.

Celle des modules 4 à 11 a été reprise dans la numérisation de l'ouvrage complet

Les textes communs sont parfaitement identiques mais de ce fait la numérotation des pages entre présente une intersection. La pagination de l'édition électronique est présentée dans la colonne de droite

Les situations choisies pour l'introduction des rationnels présentent de nombreuses originalités qu'il nous paraît nécessaire d'explicitier, moins pour en défendre le choix que pour permettre aux maîtres qui feraient les mêmes à leur tour d'en tirer le meilleur parti. En effet nous sommes habitués à recourir avec les élèves à des justifications, à rechercher des explications que nous trouvons évidentes parce qu'elles se réfèrent au modèle culturel qui nous a été inculqué. Nous les croyons didactiquement acceptables parce qu'elles sont vraies et simples dans notre propre système de référence.

Dans la méthode que nous exposons nous essayons de nous référer constamment au système construit par les élèves à notre instigation et de jouer de ses difficultés ou de ses contradictions pour provoquer les évolutions souhaitées.

En compensation, il est plus facile de distinguer le système qu'utilise l'élève du nôtre lorsqu'il est différent.

Définition et signification

1. Le système culturel actuel fournit pour les rationnels, en gros la définition suivante.

Définition 1 : (par fractionnement)

Une fraction est restée comme au XVII^e siècle "une ou plusieurs parties d'un entier partagé en plusieurs parties égales ainsi que la moitié, le tiers, les deux tiers..." [*]

$\frac{a}{b}$ c'est donc le résultat d'une opération matérielle qui consiste à partager l'entier en b parties que l'on peut comparer et déclarer égales, puis à prendre un nombre a de ces parties.

C'est une définition constructive. Elle se réfère à une manière de construire l'objet défini.

Elle est bien adaptée à la construction d'une grandeur correspondant à un nombre donné (une unité étant donnée), sauf dans les cas où on ne connaît pas de moyen pratique d'effectuer concrètement les opérations nécessaires.

.../...

Par exemple, je ne peux pas fabriquer un poids d'or qui soit les $2/3$ du poids d'une bague donnée si je refuse de la détruire (mais je peux partager un poids égal de pâte à modeler en trois par tâtonnements). Dans ces cas où : soit la division n'est pas concevable, soit la comparaison n'est pas possible, ou le résultat n'est pas défini, ou le dénombrement impossible, la définition fonctionne non comme une représentation de la réalité ou comme une théorie, mais comme un système symbolique auquel il est vain de chercher une signification concrète. Par exemple, cette définition n'est directement d'aucun secours s'il s'agit d'attribuer un nombre à une grandeur donnée. A moins de laisser paraître le procédé de fabrication.

2. La définition que nous utilisons est bien différente.

Définition 2 : (par commensuration)

Une quantité (si elle existe sera les a/b d'un entier si en la reportant b fois (en en prenant b identiques à elle-même) on obtient a entiers.

Cette définition suppose d'abord que la grandeur existe et les opérations qu'elle évoque sont beaucoup plus fréquemment et facilement effectuables (multiplier). Elle ne dit pas comment construire $3/4$. Elle n'est pas constructive, mais elle fournit un algorithme de reconnaissance : elle permet de dire si telle grandeur est ou non les $3/4$ de telle autre. Encore faut-il pouvoir "reporter plusieurs fois" ou disposer de plusieurs exemplaires des grandeurs évoquées.

3. On peut dresser des tableaux indiquant suivant les grandeurs, les tailles, la matière... etc, quelle définition est la mieux adaptée à l'activité possible ou la plus économique (Il en existe d'ailleurs d'autres). Il n'y a pas de doute que c'est la définition 1 (par fractionnement) qui dans un monde où existent d'autres moyens de mesures (et en particulier décimale) est la plus fréquemment utile.

C'est donc celle qui devra finalement subsister.

.../...

Nous avons choisi d'introduire l'autre (par commensuration) sous la condition expresse de ne pas enseigner, de pouvoir la faire "désapprendre" et lui substituer ou lui adjoindre l'autre, parce que, ainsi que nous venons de le montrer, elle est mieux adaptée au problème didactique qui se pose à ce moment :

Il s'agit pour les enfants de construire un système de nombres pour représenter des grandeurs "qui existent déjà", dans une activité de mesurage déjà connue. Presque jamais les grandeurs "naturelles" à mesurer n'ont été obtenues par des fractionnements d'unités sauf si on le fait exprès.

4. Il est clair qu'il existe bien d'autres définitions non seulement possibles mais historiquement attestées : elles ont leur domaine d'efficacité sur lequel elles sont meilleures que les autres. Elles ont eu leur heure et parfois certains ont constitué des obstacles au progrès : par exemple la dénomination des fractions par leur rang "dénominateur" justement, prend son origine dans une définition de la fraction en usage dans l'antiquité méditerranéenne et qui était basée sur une procédure précise : Prendre le dixième d'une collection consiste à aligner cette collection, à compter un, deux, trois, quatre, à retirer le dixième puis à réitérer. C'est ainsi que l'on procédait pour "décimer" les peuples vaincus. On comprend que dans cette définition, l'expression trois cinquièmes soit inconcevable car il n'y a qu'un seul cinquième.

MODULE 1.^{er}
LES NOMBRES RATIONNELS : CONSTRUCTION

1.1 - EPAISSEUR D'UNE FEUILLE DE PAPIER

1.1.1 - Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

- sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc...) placés dans un ordre quelconque. Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciées au simple toucher. L'enseignant ne cherche pas à "savoir" ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de "bonne mesure" à découvrir.
- sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.
- 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)
- Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

1.1.2 - 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn).

L'enseignant place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) Présentation de la situation - Consigne.

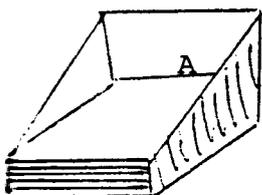
● "Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ?"

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe - les enfants les touchent, les comparent.
"Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? (d'après le poids)

● Objectif didactique

"Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.

Vous êtes groupés par équipes concurrentes.
Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essaierez dans un jeu de communication.



Vous pouvez faire des essais avec le papier et ces instruments appelés "pieds à coulisse" (les doubles décimètres suffiraient mais le pied à coulisse a été déjà utilisé).

b) Déroulement et remarques.

Les enfants essaient presque tous de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille afin d'obtenir immédiatement la désignation cherchée.

Ils font des remarques du genre : "c'est beaucoup trop fin, une feuille n'a pas d'épaisseur" ou "c'est beaucoup plus petit qu'un millimètre", ou "ce n'est pas possible de mesurer une feuille !"

Il y a souvent à ce moment-là une phase de désarroi, de découragement même des enfants. Puis ils demandent à la l'enseignant s'ils peuvent prendre plusieurs feuilles. Très vite alors, ils font des essais de mesure avec 5 feuilles, 10 feuilles, jusqu'à ce qu'ils obtiennent une épaisseur suffisante pour la mesurer au pied à coulisse ou avec le double décimètre. Alors, ils échangent des systèmes de désignation tels que :

. 10 feuilles 1 mm
 60 feuilles 7 mm
 ou .31 = 2 mm (*)

Dans l'une des équipes, les enfants ont refusé le pied à coulisse et ont établi ce système de désignation:

A = TG

B = TF

D = M

A, B, D étant le nom des différents types de papier,

TG, TF, M voulant dire : très gros, très fin, moyen.

Dans cette phase le maître intervient le moins possible. Il ne fait de remarques que s'il s'aperçoit, que, dans les groupes, les enfants ne respectent pas - ou simplement ont oublié - la consigne.

Les enfants peuvent se lever, aller chercher des feuilles, les changer, etc...

Lorsque la plupart des équipes a trouvé un système de désignation (et que les cinq enfants de chacune sont d'accord avec ce système ou ce code) ou si le temps est écoulé;

Le emploi du signe égal n'est pas correct, l'enseignant le fera remarquer lors de la discussion.

.../...

1.1.3 - 2ème phase : jeu de communication (15 à 10 mn)

a) Présentation de la situation - consigne.

"Pour éprouver le code que vous venez de trouver, vous allez faire un jeu de communication. Vous verrez au cours de ce jeu, si la désignation des épaisseurs de feuilles que vous avez inventée vous permet de reconnaître le type de feuille désignée".

b) Déroulement

Les enfants d'une même équipe vont se séparer en 2 groupes (de 2 émetteurs et de 3 récepteurs) suivant qu'ils sont 4 ou 5 dans l'équipe) : 1 groupe d'émetteurs et un groupe de récepteurs.

Tous les groupes émetteurs vont se placer d'un même côté du rideau. Tous les groupes récepteurs de l'autre.

Les émetteurs vont choisir un des types de papier placés sur la première table (A ou B, ou C ou D ou E) (que les récepteurs ne voient pas grâce au rideau). Ils vont envoyer à leurs récepteurs un message qui devra permettre à ceux-ci de trouver le type de papier choisi. Les récepteurs utilisent les tas de papier disposés sur la deuxième table au fond de la classe pour trouver le type de papier choisi par les récepteurs.

Quand les récepteurs ont trouvé, ils deviennent émetteurs (après vérification avec les émetteurs). Des points seront attribués aux équipes dont les récepteurs auront bien trouvé le type de papier choisi par les émetteurs".

Dès le début du jeu, l'enseignant met en place le rideau qui sépare émetteurs et récepteurs.

- fait passer les messages des émetteurs aux récepteurs
 - reçoit les réponses des récepteurs
 - va contrôler que cette réponse est conforme au choix des émetteurs et constate, avec toute l'équipe, l'échec ou la réussite.
- Tous les messages sont écrits sur une même feuille - que nous pourrions appeler ici "carnet de messages" (fig. 1) - qui

circule entre les émetteurs et les récepteurs d'une même équipe - cette feuille porte le numéro de l'équipe. De plus, les émetteurs notent sur une autre feuille - que nous pourrions appeler "fiche de contrôle" - et qu'ils gardent, le type de papier qu'ils ont choisi à chaque jeu afin que la maîtresse puisse constater la réussite ou l'échec.

- c) Remarque : Il est clair que l'enseignant n'a pas introduit de vocabulaire superflu comme "carnet de messages" "fiche de contrôle"... ni d'exigences ^{à propos de la} formelles présentation des messages - que les enfants devraient apprendre à respecter. Il n'y a pas eu de consigne générale à ce sujet, seulement des aides et des corrections particulières auprès des enfants mal inspirés.

(1)

N° de l'équipe
1er jeu : message émis

Réponse

2ème jeu : message émis

Réponse

3ème jeu : message émis

I	
E : 10 = 1 mm	
R : D	réussi
E : 21 = 1 mm	
R : B	réussi
E : 8 = 2 mm	
R : A	réussi

"carnet de messages"

1er jeu

3ème jeu

I	
1	D
3	A

"feuille de contrôle"

Si certaines équipes n'étaient pas arrivées à faire des messages efficaces, l'enseignant aurait organisé une nouvelle phase de concertation, par équipe, pour la recherche d'un code (même consigne que dans la 1ère phase).

Mais ce fait ne s'est jamais produit (sur 8 expériences identiques). Les enfants sont arrivés à faire 2 ou 3 parties de jeu.

- d) Comportements.

Pendant ce jeu, on observe 3 attitudes différentes chez les enfants :

- . certains choisissent un nombre de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur
- . certains choisissent une épaisseur et comptent le nombre de feuilles
- . d'autres cherchent au hasard épaisseur et nombre de feuilles.

On remarque aussi que les enfants choisissent de préférence les types de feuilles d'épaisseur extrême : les plus fines ou les plus épaisses pour faciliter le travail de leurs correspondants.

.../...

1.1.4 - 3ème phase - Résultat des jeux et confrontation des codes - (20 à 25 mn)

a) Présentation de la situation et consigne.

Pour cette phase, les enfants reprennent leur place en équipes de 5 comme pour la 1ère phase de la séance. L'enseignant annonce une comparaison des résultats et prépare le tableau à double entrée : - (équipes) X (types de papier) dans lequel il inscrira les messages échangés et les points obtenus par les équipes (voir tableau I CM₂ b 1977) au fur et à mesure de leur compte rendu.

b) Déroulement et remarques.

A tour de rôle, chaque équipe envoie un "représentant" qui lit les messages à haute voix, explique le code choisi et indique le résultat du jeu.

Les différents messages sont comparés et discutés par les enfants. Comme ils sont souvent très différents, l'enseignant leur demande d'adopter un code commun.

Exemple : 10 = 1 mm

TF

60 feuilles 7 mm

Après discussion, la classe entière a décidé de marquer :

10 f ; 1 mm

60 f ; 7 mm

Lorsque tous les messages sont inscrits, les enfants observent le tableau et font spontanément des remarques du type : "ça, ça ne va pas" ou "ici, c'est bien" etc...

Ces remarques pourraient être classées en 4 catégories :
1ère catégorie :

Si les feuilles sont de type différent, à un même nombre de feuilles doivent correspondre des épaisseurs différentes.

Exemples du tableau I :

19 f ; 3 mm	+	Type A	} "ça ne va pas"
19 f ; 3 mm	+	Type B	
19 f ; 2 mm	-	Type C	} "ça ne va pas"
19 f ; 2 mm	-	Type D	

2ème catégorie :

Pour un même type de feuilles, au même nombre de feuilles correspond la même épaisseur

.../...

Exemple du tableau I :

30 f ; 2 mm	→	Type C	} "ça ne va pas"
30 f ; 3 mm	→	Type C	

3ème catégorie :

S'il y a 2 fois plus de feuilles, l'épaisseur est 2 fois plus grande.

Exemple du tableau I :

30 f ; 3 mm	→	Type C	} "ça ne va pas" et les enfants rajoutent
15 f ; 1 mm	→	Type C	

"on aurait dû trouver" :

30 f ; 2 mm	parce que	x2	(15 f ; 1 mm) x2
15 f ; 1 mm				30 f ; 2 mm	

4ème catégorie :

Des différences sur le nombre de feuilles ne doivent pas correspondre à des différences égales de mesures :

<u>Exemple :</u>	19 f ; 3 mm	} "ça ne va pas parce qu'une feuille ne peut pas mesurer 1 mm"
	20 f ; 4 mm	

A la fin de la séance, l'enseignant propose aux enfants de reprendre l'examen de ce tableau à la prochaine séance de vérifier collectivement les mesures par la manipulation et de les rectifier si c'est nécessaire.

- c) Remarque : La présentation des opérations effectuées sur les nombres dans la recherche de couples équivalents à l'aide de flèches n'a aucun caractère formel ni obligatoire, c'est une "manifestation" familière de l'emploi des opérateurs naturels auquel les enfants sont habitués.

1.1.5 - Résultats didactiques.

Les enfants savent tous mesurer l'épaisseur d'un certain nombre de feuilles de papier, écrire le couple correspondant et rejeter un type de papier ne correspondant pas à une écriture qui leur est donnée. La plupart est alors capable de mettre en oeuvre une stratégie de comparaison et en conclusion d'accepter un type de papier comme correspondant à une mesure. Quelques-uns ont formulé cette stratégie. La plupart des enfants peut analyser un tableau de mesures et signaler des incohérences en se servant implicitement du modèle linéaire.

.../...

1.2 - COMPARAISON D'ÉPAISSEURS ET COUPLES ÉQUIVALENTS

1.2.1 - Préparation du matériel et des lieux.

Le matériel est le même que pour la séance 1 : les tas de feuilles disposés de la même manière, les pieds à coulisse.

1.2.2 - 1ère phase (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation - Consigne.

L'enseignant demande aux enfants de reprendre l'examen du tableau réalisé au cours de la 1ère séance.

Cette observation se fait d'abord silencieusement, pour que les enfants puissent repérer les incompatibilités les plus évidentes de certaines mesures. Puis l'enseignant leur propose de relever les erreurs qu'ils ont vues, ligne après ligne (pour chaque type de papier)

b) Déroulement et remarques.

Les enfants, après observation, et sur leur demande, viennent à tour de rôle au tableau pour montrer les "messages" qui leur paraissent inexacts et proposent éventuellement une correction.

Ces corrections sont discutées par l'ensemble des enfants. S'ils sont tous d'accord, la correction est faite sinon, ils proposent eux-mêmes de vérifier par une manipulation: ils recomptent le nombre de feuilles indiquées dans le message et font la mesure. Après vérification collective, le nouveau message est adopté et inscrit sur le tableau (cette manipulation est faite par groupes : 2 groupes vérifient un message, 2 autres, un autre message...etc) Il est arrivé souvent que lorsque le même type de papier est mesuré par des groupes d'enfants différents, ces groupes ne trouvent pas des mesures compatibles. Ceci est dû souvent aux erreurs de lecture ou au fait que les enfants ont plus ou moins tassé les feuilles. Ils s'en rendent compte très vite et le disent.

Il est arrivé également pour des types de papier d'épaisseurs très voisines que les mesures trouvées ne permettent pas de reconnaître de quel papier il s'agit. C'est au cours de cette phase que les enfants se sont rendu compte qu'ils ont plus de chance de distinguer des épaisseurs de papier voisines et prenant un plus grand

nombre de feuilles. En effet, 15 ou 20 feuilles seulement de papiers d'épaisseurs très voisines ont des mesures si proches que les enfants ne peuvent pas les distinguer avec précision. C'est alors qu'ils proposent souvent de mesurer l'épaisseur de 50, 80 ou 100 feuilles.

Exemples de remarques d'enfants (ces exemples sont pris dans le tableau II)

10 f ; 2 mm
et 5 f ; 1 mm pour le type B, c'est bien.

Un enfant ajoute :

x3 (5 f ; 1 mm) x 3
 ↓ ↓
 15 f ; 3 mm

Ces 3 mesures : 5 f ; 1 mm - 10 f ; 2 mm et 15 f ; 3 mm sont donc conservées.

Par contre dans la ligne du type C, les mesures :

12 f ; 1 mm

et 8 f ; 1 mm sont contestées et rejetées par les enfants qui proposent de les refaire.

Autre exemple (tableau II)

Equipes	Type C	Type D	Conclusions des enfants
1	100 f ; 8 mm	100 f ; 11 mm	⇒ 1) D > C (D est plus épais que C)
2	12 f ; 1 mm	10 f ; 1 mm	⇒ 2) D > C (D est plus épais que C)
3	8 f ; 1 mm		3) C > D (C est plus épais que D)
4		14 f ; 1 mm	

Les deux premières conclusions ne correspondent pas à la 3ème - Les enfants décident de conserver la 1ère conclusion car ils voient que sur 100 feuilles, il y a 3 mm de différence alors qu'avec 8 f, 14 f, 12 f, il n'y a pas de différence de mesure.

Ils disent aussi qu'une différence de 3 f (12-8) ou de 2 f (14-12) ne change pas la mesure (ils vérifient par une manipulation).

1.2.3 : 2ème phase : finition du tableau : recherche des valeurs manquantes. (20 mn à 25 mn)

a) Présentation de la situation : consigne.

Les enfants remarquent que certains types de papier

.../...

n'ont pas été choisis au cours du jeu de communication et qu'il manque des mesures.

L'enseignant propose alors aux enfants de compléter le tableau en mesurant les types de papier manquants.

b) Déroulement et remarques.

Les enfants se partagent le travail par groupes de 5 non plus concurrents mais coopérants et pas forcément les mêmes que dans la séance précédente (plusieurs groupes prennent le même type de papier et vérifient ensuite la compatibilité des mesures)

Exemple pour le type C :

$$x \ 8 \left(\begin{array}{l} 12 \text{ f ; } 1 \text{ mm} \\ 96 \text{ f ; } 8 \text{ mm} \end{array} \right) x \ 8$$

Quand tous les enfants sont d'accord, les nouvelles mesures sont inscrites dans le tableau (tableau III). A la fin de cette phase, le tableau est donc entièrement corrigé et complété. Il y a plusieurs messages compatibles pour chaque type de papier.

1.2.4 - 3ème phase : jeu de communication (15 mn)

. L'enseignant propose aux enfants de refaire le jeu de communication de la 1ère activité en tenant compte de toutes les remarques et corrections qu'ils ont faites (grand nombre de feuilles, tassement du papier...)

. Le jeu est donc repris une fois à la grande satisfaction des enfants qui réussissent tous, même si on ajoute un ou deux nouveaux types de papier.

1.2.5 - Résultats didactiques.

Ces enfants savent adapter le nombre des feuilles choisies aux besoins de la discrimination de leurs épaisseurs (augmenter le nombre de feuilles lorsque les épaisseurs sont très voisines). Ils savent trouver par le calcul, des couples correspondants au même type de papier. Tous savent maintenant utiliser le modèle linéaire pour analyser un tableau. Une partie d'entre eux est capable d'utiliser des relations de voisinage entre les couples. Un grand nombre d'enfants a été conduit à juger des déclarations et à argumenter lui-même.

.../...

TABLEAU CM₂ b

Type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	19 f ; 3 mm	10 f ; 2 mm	20 f ; 4 mm	
B	19 f ; 3 mm		4 f ; 1 mm	15 f ; 2 mm
C	19 f ; 2 mm	30 f ; 2 mm	100 f ; 8 mm	30 f ; 3 mm 15 f ; 1 mm 20 f ; 2 mm
D	19 f ; 2 mm 12 f ; 1 mm		100 f ; 9 mm	
E			9 f ; 4 mm	13 f ; 5 mm 7 f ; 3 mm

TABLEAU I (1977)

TABLEAU C.M₂ a

Type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	48 f ; 9 mm			
B			10 f ; 2 mm	5 f ; 1 mm 15 f ; 3 mm
C	100 f ; 8 mm	12 f ; 1 mm 96 f ; 8 mm	8 f ; 1 mm 64 f ; 8 mm 12 f ; 1 mm	
D	100 f ; 11 mm	10 f ; 1 mm 100 f ; 10 mm		14 f ; 1 mm 154 f ; 11 mm
E	23 f ; 10 mm	10 f ; 4 mm 8 f ; 3 mm	6 f ; 2 mm	

TABLEAU II (1977)

.../...

1.3 - CLASSE D'EQUIVALENCE DE COUPLES - NOMBRE RATIONNEL

1.3.1 - Préparation du matériel.

L'enseignant a conservé sous les yeux des enfants le tableau III, corrigé et complété au cours de la 2ème séance, mais elle a réservé la place pour faire un second tableau.

Il utilise aussi les tas de papiers des 2 premières séances.

1.3.2 - 1ère phase : notion d'équivalence des couples (15 à 20 mn)

a) Présentation de la situation - Consigne.

. L'enseignant fait rappeler par les enfants les objectifs des deux premières séances :

"pouvez-vous rappeler ce que vous avez fait au cours des deux dernières leçons ? Quel était le but de ces leçons ?"

Ce rappel par les enfants, permet à de voir si les objectifs ont été bien cernés et bien compris. Il résume ensuite leurs interventions : "vous avez découvert une méthode pour désigner les épaisseurs de n'importe quelle feuille de papier". Pour voir si cette méthode est bonne, vous allez l'éprouver en disant maintenant si les écritures que je marque sur le tableau désignent l'une des feuilles de papier que vous connaissez et laquelle ?

Exemple : - Quelle feuille désigne le couple $(10;2)$? $(10;1)$? $(100;8)$? $(48;9)$? (un enfant va chercher les feuilles correspondantes dans les tas restés en place.

- Comment pourrait-on désigner l'épaisseur d'une feuille de type A ? de type B ? etc...

Les enfants répondent en nommant les couples inscrits dans le tableau III (Il peut y avoir 1 ou plusieurs couples pour chaque type de feuille).

Le début de cette première phase est collectif et se déroule de manière très vivante sous forme de questions et de réponses.

. Puis l'enseignant demande aux enfants :

"Pourriez-vous trouver d'autres écritures pour désigner ces différents types de papier ?"

et leur propose de chercher individuellement sur leur cahier de brouillon d'autres couples.

.../...

b) Déroulement et remarques.

Pendant que les enfants recherchent individuellement d'autres écritures, l'enseignant dessine sur le tableau noir 5 colonnes qui correspondent aux 5 types de papier (tableau IV). En tête de chaque colonne, il inscrit l'un des couples du tableau III qui désigne l'épaisseur de la feuille correspondante :

exemple :

A	B	C	D	E
(48f;9mm)	(10f;2mm)	(100f; 8 mm)	(100f;11mm)	(10f;4mm)
	(5f; 1mm)			
	(20f;4mm)			

(IV)

Au bout de 5 mn environ, l'enseignant inscrit dans les colonnes ci-dessus les couples que les enfants énoncent (On peut également envoyer certains enfants les écrire eux-mêmes).

Ceci donne lieu à des discussions entre les enfants qui demandent des explications lorsqu'ils ne comprennent pas ou lorsqu'une écriture ne leur paraît pas correcte. Bientôt des enfants déclarent "on peut en trouver tant qu'on veut". A la fin de cette 1ère phase, on a donc inscrit 5 à 10 couples différents pour désigner chaque épaisseur de feuille.

Pour s'assurer de la bonne compréhension de tous, l'enseignant désigne au hasard des couples et demande à des enfants d'aller chercher les feuilles correspondantes. Il dit aux enfants comment on indique que deux couples correspondent au même papier :

"nous avons vu que tous les couples d'une même colonne (par exemple (10f;2mm), (20f;4mm), (5f;1mm)...) correspondent au même type de papier, donc à la même épaisseur de feuille. On dit qu'ils sont "équivalents" et on l'écrit :

$$(10f;2mm) \equiv (20f;4mm)$$

$$(20;4) \equiv (5f;1mm)$$

1.3.3. - 2ème phase : Rangement des 5 types de feuilles A,B,C,D,E d'après leur épaisseur (30 à 35 mn) :

a) Présentation de la situation :

Pour chaque type de feuilles (A,B,C,D,E), l'enseignant demande aux enfants de choisir parmi tous les couples

.../...

équivalents qu'ils ont écrits, l'un d'entre eux qui sera seul retenu pour désigner l'épaisseur de la feuille.

(généralement on constate que les enfants choisissent plutôt les couples avec 10 ou 100 (s'il y en a) ou alors des couples formés de nombres petits.

Ex. 10 f; 2mm

100 f; 11 mm

ou 5 f ; 1 mm

Il refait les 5 colonnes en gardant seulement le couple choisi.

Exemple : Ces mesures sont celles du tableau II qui avaient été choisies par les enfants en 1977.

A	B	C	D	E
(48 ; 9)	(10 ; 2)	(100;8)	(100;11)	(10;4)

Puis il demande aux enfants de ranger les feuilles A,B,C,D,E, de la plus mince à la plus épaisse.

b) Déroulement et remarques.

Les enfants travaillent individuellement sur leur cahier. L'enseignant n'intervient que sur leur demande soit pour apporter un renseignement, soit pour écouter une explication : tous n'arrivent pas seuls à ranger du premier coup les 5 types de feuilles. Au bout de 10 à 15 mn (avant que certains ne se découragent), l'enseignant fait exposer tour à tour les différentes méthodes employées. Un des enfants qui n'a pas employé une méthode semblable à celle déjà exposée vient décrire la sienne. Elle est discutée par l'ensemble de la classe. Elle est acceptée si elle est reconnue bonne et rejetée si elle ne donne aucun résultat.

Les enfants ne font pas une comparaison systématique de toutes les paires de couples. Ils utilisent des stratégies plus économiques et des méthodes de comparaison très variées dont voici les plus remarquables:

. certains enfants choisissent un couple qui ne changera pas et transforment les autres couples en les ramenant tous au même nombre de feuilles que le premier.

Ici, le nombre de feuilles 100 est presque évident (C ou D), ce qui donne B : (100 f; 20 mn) E : (100 f; 40 mn) mais ne marche pas pour A. Seules les feuilles B,C,D,E peuvent être rangées.

.../...

. D'autres enfants ramènent le plus grand nombre de couples possibles à la même épaisseur : B (20;4) C : (5;4) c'est plus épais que B puisqu'il faut moins de feuilles pour la même épaisseur, ce qui permet de ranger déjà B, C, E.

. Ils arrivent également à placer la feuille de type D par rapport à celle de type C en faisant le raisonnement suivant

100 f ; 11 mm

50 f → c'est un peu plus de 5 mm, donc

la feuille de type D est plus épaisse que celle du type C. Ils peuvent donc à l'aide de ces deux démarches ranger les 4 types de feuilles :

$$C < D < B < E$$

. La feuille A pose des problèmes pour les deux méthodes.

Pour la première par exemple le type A : (48f;9mm) = (96f;18mm) ainsi est comparée au type C : (100f;8mm)

La feuille de type A est plus épaisse que la feuille de type C puisque 96 feuilles ont une épaisseur de 18 mm alors que 100 f n'ont qu'une épaisseur de 8 mm.

Il faut alors ranger cette feuille de type A par rapport aux 3 autres, c'est-à-dire par rapport à D, B et E. Les enfants la comparent d'abord à D puisque D est juste après C dans le 1er rangement. Ils font le même raisonnement que précédemment :

Pour A → 96 f ; 18 mm

Pour D → 100 f ; 11 mm

et ils voient bien que A est plus épais que D.

Puis ils comparent la feuille de type A à la feuille de type B.

Pour A → (96 f → 18 mm)

Pour B → (100f → 20 mm)

Ici, les enfants ont beaucoup de difficultés et disent que ce n'est pas possible de dire quelle est la plus mince des deux (les 2 types de papier sont très voisins l'un de l'autre et il était impossible au toucher de les distinguer)

Une fillette a proposé alors d'écrire :

Pour B :10 $\left(\begin{array}{l} 100 \text{ f ; } 20 \text{ mm} \\ 10 \text{ f ; } 2 \text{ mm} \end{array} \right) :10$

et elle a dit : "pour A il faut un peu plus de 10 feuilles pour faire 2 mm, alors les feuilles de type A sont plus minces que celles de type B".

Les autres enfants qui n'avaient pas compris ce raisonnement ont demandé des explications. Pour qu'elles soient

.../...

plus compréhensibles, l'enseignant a demandé à la fillette de disposer ainsi sur le tableau ce qu'elle expliquait :

B (10 f ; 2 mm)
 A (96 f ; 18 mm)
 :9 ↙ ↘ :9
 2 mm

"On ne peut pas diviser 96 par 9 parce que ce n'est pas un multiple. Mais comme $9 \times 10 = 90$, on voit qu'il faut un peu plus de 10 f pour faire 2 mm".

Autre méthode :

D'autres enfants ont fait le raisonnement suivant : "Si A et B avaient la même épaisseur, 96 feuilles de B auraient une épaisseur de 18 mm et il resterait 4 feuilles pour une épaisseur de 2 mm, ce qui n'est pas possible".

A la fin de cette 2ème phase, les enfants ont rangé les 5 types de feuilles et ont inscrit sur le tableau :

$C < D < A < B < E$

Et si nous avons choisi d'autres couples pour désigner l'épaisseur, aurions-nous trouvé le même rangement ? Les enfants : - "oui, ce sont les mêmes feuilles

Enseignant : - Mais le système n'est peut-être pas bon. S'il donnait des rangements différents selon les couples choisis

- ...

- Vous vérifierez-ce soir si vous voulez - en prenant d'autres couples."

1.3.4 - 3ème phase : (5 mn)

a) Présentation de la situation.

Pour faire fonctionner ces démarches, l'enseignant propose aux enfants de placer parmi ces 5 types de papier un autre couple qui désignerait l'épaisseur d'une feuille d'un nouveau type que l'on appellera F. (ce type de papier ne fait pas partie du matériel proposé). Il leur demande de comparer l'épaisseur de cette nouvelle feuille aux autres :

type F : 25 f → 7 mm

b) Déroulement et remarques :

Les enfants travaillent individuellement et presque tous utilisent la première démarche : ils se ramènent à 100 f. et placent très rapidement la feuille de type F entre B et E.

1.3.5 - Fractions, égalité de fractions (10 mn)

a) Apport d'information.

Un couple indique qu'un tas de tant de feuilles de tel type a telle épaisseur.

Tous les couples équivalents correspondent donc à un même type de feuilles. On dit qu'ils appartiennent à une même classe. "Voici une classe de couples" (L'enseignant montre une colonne).

Tous indiquent une même épaisseur et on peut prendre n'importe quel couple d'une même classe pour reconnaître le type de papier.

Si l'on veut désigner l'épaisseur d'une feuille elle-même et non plus un tas de feuilles de telle épaisseur, si l'on veut désigner toute la classe des couples et non plus un couple particulier, il faut inventer un nom et une écriture particulière. Cette écriture existe, on l'appelle fraction.

Par exemple, on dit que le papier de type C a une épaisseur de "4 millimètres pour cinquante feuilles" ou encore "4 pour cinquante millimètres", et le plus souvent de "4 cinquantièmes de millimètres" et on écrit ceci à l'aide de la fraction $4/50$ ou $\frac{4}{50}$. (50;4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm.

$4/50$ désigne l'épaisseur d'une feuille de papier telle qu'il en faut 50 pour obtenir une épaisseur de 4 mm.

Remarquez que les nombres ont changé de place.

b) Activités :

Ecrivez l'épaisseur d'une feuille de type A, B, D. Lisez les fractions que vous avez écrites - Cherchez des fractions que vous connaissez et dictez-les : les enfants écrivent les épaisseurs : $1/12$ de mm, $3/5$, $1/4$, $1/2$, $2/3$...

Désignez un tas de 20 feuilles qui a une épaisseur de 3 mm.

Désignez l'épaisseur d'une feuille telle qu'il en faut 30 pour "faire" 5 millimètres.

Que désignent $3/20$, (30;5) ?

.../...

c) Est-ce qu'il y a plusieurs écritures (plusieurs fractions) pour désigner la même épaisseur ? Trouvez-en.

{ Pour dire que $2/9\text{mm}$ et $4/18\text{mm}$ sont la même épaisseur nous écrivons :

$$\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$$

Remarque : Ces questions ont pour but de bien faire connaître l'information qui est apportée, elles ne sont pas un exercice d'apprentissage. L'usage fait ultérieurement de cette écriture conduira l'enfant à en "retenir" les formulations et les significations.

La distinction entre l'épaisseur d'une feuille et la désignation d'un tas de feuilles est essentielle et ne sera apprise que progressivement.

1.3.6 - Résultats

Les enfants savent trouver des couples équivalents. Ils savent comparer les épaisseurs de feuilles (beaucoup avec 2 méthodes). Ils ont une stratégie de rangement des couples, d'après ces comparaisons. Ils savent désigner l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une fraction et trouver des fractions égales.

Ils ne savent pas trouver l'égalité de 2 fractions dans le cas général.

Remarque : Ces savoir-faire sont constatés en situations. Il n'est pas possible à ce moment-là de détacher une question du contexte et de la poser de façon indépendante. On ne pourra donc pas encore s'appuyer sur ces résultats en tant que connaissances acquises et identifiées comme telles par l'enfant.

COMMENTAIRES SUR CE PREMIER MODULE

Analyse de la tâche des élèves : Emetteurs.

La tâche d'émetteur est bien plus légère que celle de récepteur : on ne doit compter que les feuilles du tas choisi et prendre soin de bien les mesurer. Le désir d'avoir des nombres simples et corrects conduit à choisir un nombre de feuilles tel

- . que l'épaisseur soit aussi voisine que possible d'un nombre entier de millimètres

- . que les erreurs dues au tassement des feuilles restent faibles

- . que le nombre de feuilles à compter reste assez faible.

Une analyse plus approfondie ou une pratique répétée conduirait l'émetteur à choisir :

- . un nombre de feuilles assez grand pour que la différence entre leur épaisseur et l'épaisseur d'un même nombre de feuilles du type le plus voisin soit assez nette par exemple, excède 1 mm (tassement éliminé)

- . un nombre de feuilles tel que le coût de l'opération soit minimum (Le coût de l'opération est évalué en coût du comptage des feuilles et en prix des erreurs par tentative. Le coût des erreurs dépend de l'erreur relative par l'intermédiaire de la probabilité d'erreur qu'elle engendre).

Ce point a mérité une étude mathématique qui n'est pas publiée ici.

Analyse de la tâche des élèves : Récepteurs.

La tâche des récepteurs est plus lourde. S'ils "appliquaient" un algorithme rationnel, ils devraient pour interpréter le message (60 f ; 7 mm)

- . compter 60 feuilles de chaque type de papier

- . mesurer l'épaisseur de ces 5 tas de 60 feuilles

- . comparer ; les tas dont la mesure serait la

plus proche de 7 mm serait retenu.

En fait, cette procédure, si elle était systématiquement appliquée, ferait perdre le bénéfice essentiel de la situation :

.../...

les enfants peuvent (doivent) éliminer certaines hypothèses en utilisant l'expérience qu'ils ont acquise dans la première phase et en mettant en oeuvre une représentation (un modèle implicite) de l'épaisseur. Dans cette phase d'action, des relations, des appréciations, des opérations, encore floues, incomplètes, approximatives, vont s'éprouver, se clarifier, se complexifier avant même d'être formulables.

Exemple : "60 f ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A, on avait trouvé pour A (3 f; 1mm) - Sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm..."

Si les enfants se trompent dans leurs hypothèses, ils peuvent s'en apercevoir sans trop de retard et sans autre sanction qu'une petite perte de temps. La représentation permet d'anticiper, d'économiser des tentatives, elle est contrôlée par l'action, sans la conditionner complètement, ni être conditionnée par elle. Elle commande toutefois ces décisions d'action car une fois écartées les "papiers" improbables il faut retenir les autres. "C donne pour 30 f. 2 mm et D aussi, on ne peut pas savoir. Tiens remesure. Si 30 f de C font un peu moins que 2 ça doit être D... Il faudrait plus de feuilles..."

Pour les récepteurs deux messages ont tendance à être équivalents s'ils permettent la même discrimination parmi les papiers, donc s'ils sont voisins topologiquement.

Il est nécessaire que chaque enfant soit tour à tour émetteur et récepteur.

Même si tous les enfants n'acquièrent pas une égale aisance dans le raisonnement sur les épaisseurs, tous acquièrent une bonne connaissance des conditions que devra satisfaire le modèle qu'on choisira : ce qu'il devra permettre.

Analyse de la tâche de l'enseignant

* Dans les deux premières phases, la tâche de l'enseignant la plus importante ne consiste pas à contrôler le contenu et le déroulement des réflexions des enfants : il ne doit pas intervenir, qu'il entende une proposition intéressante ou une déclaration fausse. C'est la situation qui doit exercer ces feed-back nécessaires. Il n'est plus - provisoirement - le gardien de la vérité, le garant, le recours, le destinataire

.../...

obligé et final de toutes les interventions des enfants.

* Il doit - par son attitude - convaincre les enfants de sa neutralité à l'égard de leurs appréciations de la situation afin qu'ils renoncent à tirer de lui les informations et les aides qu'ils ne doivent tirer que d'eux-mêmes.

Neutralité mais pas indifférence : il reçoit avec un égal intérêt toutes les suggestions et les renvoie avec conviction sans en modifier le contenu mais essaie de rendre réalisables. Le maître renvoie les enfants à la situation mais s'attache à accroître leur investissement, leur désir de réussir. Il facilite la solution des problèmes subalternes, surveille le respect des règles et des consignes qu'il précise et répète à l'occasion, résout les problèmes d'organisation, aide l'évolution favorable des conflits dans les groupes. Il veille à ce que tous s'investissent et concourent au résultat cherché. Pour cela, il s'intéresse beaucoup au résultat final qu'il enregistre, participant aux succès, comme aux déceptions, heureux avec les uns encourageant avec les autres, dans une sorte d'esprit "bon sportif".

Ici comme là ce sont les efforts qui sont éducatifs et non les buts marqués.

En particulier le décompte des points des équipes ne donne lieu à aucune déclaration de sa part, les équipes se défont d'une leçon à l'autre. Les points servent à déterminer les stratégies pendant le jeu, pas à classer les gens après le jeu.

* La phase 3 de la 1ère activité est une phase de confrontation (ce n'est pas une situation de validation formelle). Là encore le maître est un conducteur de jeu qui fait jouer mais ne joue pas lui-même. Pour tous les enfants, les problèmes qu'il réussit par ses exigences : formulations claires, renseignements précis... sont ceux qui empêcheraient le fonctionnement de la situation. Il n'a pas d'exigences "externes". Il laisse arriver à leur formulation correcte les déclarations fausses ou absurdes, il laisse aux autres le temps de formuler leur jugement. Il ne confirme pas une déclaration correcte avant que tous se soient déclarés d'accord.

Il encourage les minoritaires à exprimer leurs réserves, clarifie les débats même si il ne peut pas les résoudre.

Dans les situations de recherche, la pédagogie classique conduit le maître à "exploiter" immédiatement ou presque la "bonne" déclaration. Il parle avec le premier ou un des premiers "qui trouvent". Finalement les échanges concernent 20 % des enfants (les plus "vifs"). Pour que ces échanges soient compris des autres, les questions posées doivent être telles que 80 % d'entre eux seraient capables d'y répondre presque directement, s'ils avaient le temps nécessaire : les questions seront donc assez fermées et la recherche consistera en une sorte d'épreuve de vitesse mettant à l'honneur les algorithmes. Ainsi, 60 % des enfants participent par procuration. Quant aux 20 % qui ne sauraient pas répondre, il ne s'agit jamais pour eux de chercher mais d'apprendre un savoir tout fait, qu'ils devraient posséder, qu'il est même "honteux" de ne pas posséder, puisqu'il ne s'agit finalement ici de savoir qui l'a ou qui ne l'a pas. Donc, pour 80 % des enfants, la recherche est une situation sanctionnée négativement où l'accent est mis sur le savoir : devoir chercher est une faiblesse qui ne pardonne pas. Devoir apprendre est le fait d'une minorité défavorisée et méprisée.

Les situations que nous proposons ne doivent pas être conduites de la même façon.

Les questions sont souvent plus ouvertes en ce sens que le nombre des enfants capables d'y répondre directement est très faible : presque tous ont à chercher. Les échanges vont concerner 80 % des élèves sur des problèmes que moins de 20 % d'entre eux peuvent résoudre directement. Le maître maintient la situation ouverte en n'exploitant pas les idées. Il se contente de les faire prendre en considération. Le fait d'être le premier à avoir une idée perd un peu de l'importance.

Les enfants qui ont trouvé plus vite doivent apprendre à faire partager leur conviction sans la sécurité de la validation par l'adulte. Ainsi, la recherche et l'apprentissage devient l'affaire principale de la majorité.

Ces situations sont délicates à conduire : la voie y est ouverte à un champ d'attitudes sociales très diverses. Le maître a appris à contrarier les actions de diversions ; certains enfants égarent l'opinion des autres pour avoir le temps de chercher eux-mêmes, accaparent l'attention, ne respectent pas la recherche des autres, etc... C'est toute la

.../...

fonction et l'usage du savoir et de la vérité qui s'apprennent à ce moment-là. Certains enfants habitués à un statut dans la classe et à un contrat didactique classique vivent mal les changements subits de mode d'action didactique du maître comme l'absence de sécurité, de valorisation immédiate, la dépendance par rapport à l'action ou à l'opinion d'autrui, etc. Pour les enfants et même pour les parents, le maître a dû parfois faire provisoirement le médiateur des changements, souvent profonds, qu'il avait provoqués. De toute façon, les changements fréquents de types d'interventions utilisés favorisent les évolutions en douceur et l'adaptation des attitudes malgré leur diversité.

L'évolution s'opère correctement dans la mesure où on parvient à faire en sorte que les relations avec l'objet de l'étude, et les relations avec les autres sujets connaissant deviennent sources de plaisir et enjeu du désir. Les prises de décisions, les actions, les échanges jugements... doivent devenir d'abord des occasions d'une jubilation fondamentale de la classe. Le maître est conduit à renoncer à l'objet unique du désir des enfants.

Le savoir, l'alibi symbolique d'une lutte entre les enfants doit pouvoir devenir l'objet d'une activité libidinale.

La relation maître-élève s'efface ainsi devant les relations enfant-savoir, enfant-milieu-savoir et enfant-autrui-savoir.

* Le maître est la mémoire de référence de la classe. Il se souvient des conventions, des accords et des faits pertinents. Il les rappelle à bon escient. C'est par ce rôle qu'il commande et contrôle les apprentissages.

* Enfin, le maître représente le savoir des adultes. Lorsqu'il fournit des informations sur ce sujet (par exemple : Activité 1 - Séance 3 - Phase 3) Les enfants, qui ont leur propre système, peuvent comprendre la notation en cours et ses avantages - ou son équivalence - avec le système qu'ils ont construit, et l'adopter, non pas librement mais consciemment.

* Bien sûr, les éventuels changements de notations ou de vocabulaire coûtent aux enfants et aux maîtres.

C'est pourquoi les conditions d'apprentissages ont

.../...

un caractère critique :

A aucun moment au cours de cette première activité, le maître n'indique qu'il faut apprendre quelque chose. A aucun moment, il ne fait répéter une activité en ayant convenu avec les enfants qu'elle devrait être sue, connue, apprise. (Cela viendra plus tard peut-être) et en reconnaissant qu'une phase n'était pas justifiée par d'autres raisons.

En fait, la phase 1 de la 1ère séance : "recherche de couples équivalents", doit permettre à tous les enfants d'effectuer la recherche d'au moins deux couples équivalents à un couple donné, de comparer deux couples une dizaine de fois au moins, d'expliquer une équivalence au moins une fois, d'entendre plusieurs méthodes de comparaisons. Tout cela dans une situation de contrôle collectif. Mais le contrat passé avec eux n'est pas "vous devez apprendre et savoir faire ceci pour pouvoir répondre à la question suivante "comme je le veux", mais "vous devez faire ceci pour pouvoir participer au défi suivant". L'apprentissage de la recherche de couples d'équivalence se pouvait dans la phase 2 et plus loin, il n'est pas nécessaire de l'"achever" dès la phase 1. De plus cela exigerait le plus souvent la formulation d'une méthode de recherche comme par exemple : on peut multiplier ou diviser les deux termes du couple par un même nombre "ou pire" deux couples sont équivalents si "immanquablement à ce moment-là on devra dire ou une sottise ou une phrase incompréhensible. D'ailleurs ces formulations de méthodes ne sont que rarement économiques à long terme. Nous le refusons catégoriquement ici.

La solution de la situation de la phase 2 : rangement des épaisseurs, n'est pas plus compliquée si l'on ne sait pas chercher des équivalents, puisque l'enfant réfléchit dans la représentation de la situation :

- en nombre de feuilles et épaisseurs des tas - au lieu d'appliquer un algorithme sur l'écriture de l'épaisseur d'une feuille.

Tout apprentissage formel (convenu, institutionnel) à ce moment serait lourdement hypothéqué de contresens. Par contre il faut que le maître vérifie que tous les élèves ont bien réfléchi, choisi et calculé un couple nouveau... au besoin au tableau avec l'aide des autres.

- Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'apprentissages ni d'apports d'information. La phase 3 de la 3ème séance

.../...

montre un exemple d'apport d'information. Il s'agit de conventions à enregistrer et à utiliser. Ces conventions seront désormais de règle et le maître "exigera" leur emploi dans les communications "publiques" des enfants. En fait, il exercera une pression croissante au fur et à mesure de la banalisation de la convention, sans refuser de comprendre, surtout au début, d'autres formulations.

ANALYSE DE LA SITUATION

1 - Situation.

Nous ne reviendrons pas sur le caractère fondamentalement cybernétique de la situation de communication : Le codage le plus économique, si on admet que l'on peut augmenter à volonté le nombre des types de papiers consiste à les désigner à l'aide d'un couple nombre de feuilles, épaisseur en millimètres - Remarquons toutefois que la situation de recherche de code n'est pas répétée. Il n'y a pas de dialectique de la formulation : des couples. Le code est mis en place de façon presque immédiate. La situation de communication ne fonctionne donc pas beaucoup en situation d'apprentissage, elle sert seulement à donner "du sens" à la phase d'action des émetteurs et des récepteurs. Le caractère "optimal" du message n'a fait l'occasion d'aucun commentaire avec les enfants. Il nous assure seulement une bonne acceptation par les enfants.

2 - Modèle implicite

Par contre la composante action de la situation est l'occasion de la création d'un modèle implicite du système des épaisseurs.

Pourquoi, puisqu'il s'agit finalement de mesurer des longueurs, n'avoir pas choisi des objets de longueurs appréciables ? L'enfant possède à cet âge une représentation efficace des "longueurs" comprises entre 1 mm et 50 m. C'est-à-dire qu'il peut les comparer, les mettre bout à bout, les partager, et au besoin les évaluer (c'est-à-dire leur faire correspondre approximativement un entier à l'aide des systèmes d'unités en usage).

Mais justement, cette représentation est assez efficace pour permettre de résoudre la plupart des situations pratiques sans qu'il soit nécessaire d'utiliser de système numérique nouveau : perception, mesurage entier...

L'enfant peut imaginer ou effectuer des opérations sur des "longueurs" : somme, différence, sans utiliser de modèle, de représentation.

.../...

Par exemple, je peux indiquer la longueur désirée d'une baguette en envoyant une ficelle de "longueur" égale.

L'activité mathématique peut alors au mieux traduire transcrire "la réalité" supposée préexister.

Comme en géométrie, le modèle implicite dont disposent les enfants est si riche qu'il commande toutes les décisions. Lorsqu'il ne parvient pas à résoudre une situation, la théorie mathématique qui pourrait lui suppléer est alors trop complexe pour être construite à ce moment. Si on utilise ce modèle implicite la théorie mathématique construite, ici, le mesurage, n'apparaît jamais que comme une complication, une exigence supplémentaire ou superflue. Elle doit être guidée, contrôlée par "l'intuition", elle fournit au mieux des renseignements plus précis... etc.

Nous avons donc choisi pour la variable didactique "grandeur des objets", un domaine mettant en défaut le modèle implicite naturel sans toutefois exclure des manipulations.

Avec des longueurs de quelques centièmes de millimètres on peut "concevoir" les opérations visées mais sûrement pas les percevoir ni les effectuer directement. Certaines sont même carrément inconcevables comme partager une de ces longueurs (un cheveu en quatre ! dans le sens de la longueur). Nous verrons que cette impossibilité est voulue pour d'autres raisons. Le nombre qui mesure l'épaisseur devient alors le moyen - le seul "concret" d'appréhender cette épaisseur, de construire les expériences de comparaisons, de prévoir la somme, etc... La représentation mathématique a été réintégrée dans son rôle fondamental de théorie en construction, dans son rapport dialectique avec le constructeur et avec la situation.

De plus, l'enrichissement de cette représentation va pouvoir être contrôlé si dans un premier temps on va favoriser le développement du modèle implicite en rendant inutile l'explicitation des méthodes (de comparaison par exemple) on pourra provoquer une phase de formulation (Activité 1 - séance 2) puis de formalisation progressive dans le module 4., au moment opportun pour chaque notion : avant que le modèle implicite ne soit trop efficace, assez tôt pour être utile, mais assez tard pour avoir du sens ; assez tôt pour que le sens attribué au langage

.../...

soit indispensable à l'action et à sa formulation, assez tard pour que les concepts formulés ne soient pas isolés les uns des autres mais fonctionnent ensemble.

3 - L'explication.

Le modèle implicite développé par les enfants dans la 1ère séance comprend une approche de la relation d'équivalence algébrique fondamentale (nombre de feuilles du tas 1 x épaisseur du tas 2 = nombre de feuilles du tas 2 x épaisseur du tas 1, mais sûrement pas sous cette forme), sous la forme d'un ensemble d'applications linéaires de N dans N .

Cette application est approchée par ses propriétés :
- la première remarque des enfants signifie qu'ils veulent des applications différentes pour des feuilles perçues comme différentes (injection de l'ensemble des applications dans l'ensemble des types de papiers).

Remarquons qu'il n'est pas réaliste de la part des enfants de vouloir que des applications différentes indiquent des types de papiers différents : ils ont des exemples sous les yeux où pour un même type de papier et pour un même nombre de feuilles on obtient des épaisseurs différentes, et où cependant le message a marché. Il suffit d'avoir des résultats suffisamment voisins les uns des autres et suffisamment éloignés des autres résultats.

- Cependant cette exigence est formulée : il semble que l'on voudrait un nombre par type et un type par nombre. En fait, ce sont seulement les résultats scandaleux qui sont rejetés,

30 f ; 2 mm 30 f → 3 mm quelqu'un se trompe (ces résultats ne sont pas algébriquement équivalents, ni topologiquement assez voisins.

- C'est seulement ensuite que la linéarité est formulée, par sa propriété caractéristique de conserver les rapports. Les enfants relèvent les couples qui contrarient cette propriété et l'énoncent ensuite.

REMARQUE : S'il n'y avait pas eu des tentatives un peu variées avec la liberté de prendre le nombre de feuilles qu'on veut, des rapports simples ne seraient pas apparus. Si le jeu n'avait pas été rapide, un peu anarchique, bon

.../...

enfant, les contradictions non plus ne seraient pas apparues.

Il faut remarquer que le modèle explicite n'apparaît pas comme une formulation positive des propriétés connues à l'occasion de leur existence. Les couples qui obéissent à la loi implicite ne donnent lieu à aucune remarque : ce sont les couples qui ne lui obéissent pas, qui, par l'accident qu'ils révèlent, rendent la formulation nécessaire : comme une théorie, le modèle se révèle par ses contradictions - apparentes ou réelles - avec l'expérience et non par ses accords.

Il faut voir dans ce fait un phénomène tout à fait général et important qui contredit formellement certaines théories didactiques empiristes comme par exemple le processus psychodynamique de Dienes : ce ne sont pas les ressemblances (les isomorphismes) entre les situations rencontrées qui sont le moteur principal des "abstractions" non plus que la transcription ou la schématisation des structures ne sont la clé de la formulation. La simple familiarité même active avec des situations bien structurées ne suffit jamais à provoquer une mathématisation. Au contraire, les problèmes posés par une situation à la mise en oeuvre d'un modèle implicite ou explicite préexistant, ou par une théorie à la prise d'une décision ou à l'organisation d'une situation, provoquent l'évolution, la reprise ou le rejet et la formulation des théories.

Cette dialectique caractérise la plupart des mathématisations.

Ici, la situation initiale (^{S₀}1ère séance, phases 1 et 2) peut être envisagée sans modèle initial particulier (T₀) (dénombrements et mesures entières - homothéties de N). Sa résolution conduit à un langage et à des méthodes (T₁) peu satisfaisants du point de vue logique. La résolution de ce problème théorique (phase 3) exige de nouvelles "expériences" et confrontations (2ème séance) qui amènent la réduction des contradictions et l'usage d'un modèle (T₂) en partie explicite. Surtout en ce qui concerne la technique de mesurage des feuilles de papiers et un peu aussi la relation d'équivalence fondamentale entre les écritures.

.../...

Avec la 3ème séance commence une autre, la mise à l'épreuve du système de mesure. Permet-il de reconnaître l'écriture de l'épaisseur d'une des feuilles connues, de la distinguer de l'écriture d'une nouvelle épaisseur. Ici le codage devient à nouveau l'objet de l'étude des enfants avec la formulation de l'équivalence, la création des classes d'équivalences et l'étude de la compatibilité de la relation d'ordre sur les couples avec la relation d'équivalence : les conclusions doivent être les mêmes quels que soient les couples qui servent d'équivalence.

La désignation des classes par une "fraction" (le mot n'est pas obligatoirement prononcé), l'écriture de l'égalité des classes sont des informations apportées par la maîtresse comme des conventions sociales (à respecter pour être compris des autres) et comme une conclusion didactique, une confirmation implicite de la validité de la démarche de la classe.

Les enfants pensent que les types de feuilles peuvent se ranger par ordre croissant d'épaisseur, la théorie qu'ils ont construite permet ce rangement alors que leurs sens ne le peuvent pas, et tout de même ils peuvent avoir des confirmations assez concrètes de leurs inférences - La théorie fonctionne comme une théorie.

Et elle pose de nouveaux problèmes car la méthode de comparaison n'apparaît pas valable pour n'importe quel couple et elle a recours à la fois

- aux relations algébriques qui permet de ramener la comparaison de $(40;6)$ avec $(20;4)$ à celle de $40;6)$ avec $(40;8)$ ou encore de ramener $(30;4)$ et $(20;2)$ à $(30;4)$ et $(40;4)$

- et aux relations topologiques qui permettent de comparer par exemple $(19;3)$ et $(10;2)$ car $(19;3)$ est moins épais que $(20;4)$ - Commentaire des enfants ("avec une feuille de plus, le tas fait 1 mm de plus, et comme une feuille ne mesure pas 1 mm...")

Il se trouve que la construction générale de cette séquence suit le modèle d'une construction axiomatique des rationnels - assez moderne (couples, passage au quotient). Il n'est pas niable que la connaissance d'une telle axiomatique a permis de l'envisager comme solution aux problèmes de didactiques des décimaux que nous nous posions. Il serait faux de croire que ce choix à précédé

.../...

l'analyse didactique. Si nous avions été conduits à choisir un autre domaine des variables didactiques et une autre genèse, les couples auraient pu perdre toute signification, l'équivalence tout intérêt, la construction aurait pu alors coïncider localement avec une autre axiomatique classique ou non.

De toute manière laisser apparaître la trace de cette architecture dans l'activité des enfants sous une forme quelconque serait sans intérêt pour eux.

MODULE 2 :
LES NOMBRES RATIONNELS : OPERATIONS.

2.1 - L'ÉPAISSEUR D'UN CARTON

2.1.1 - Matériel : les tas de feuilles et les pieds à coulisse de l'activité précédente

2.1.2 - Première phase : "les épaisseurs rationnelles sont-elles des nombres ?" (Durée : 5 mn)

Les enfants sont disposés comme pour un travail individuel.

a) l'enseignant pose la question suivante : " $8/100$, $9/45$ sont-ils des nombres ? Ce que nous avons fabriqué pour mesurer les épaisseurs est ce que c'est des nombres ?"

b) Il laisse discuter les enfants.

Oui, 8, 100, 9, 45 sont des nombres

Non, $8/100$ s'écrit avec deux nombres, ce n'est pas un nombre, c'est pas pareil.

c) L'enseignant : "On pourrait appeler ces choses des nombres si on pouvait faire avec elles ce qu'on fait avec les nombres. Que peut-on faire avec des nombres ?"

d) Les réponses sont recensées et discutées sans qu'il soit essentiel d'aboutir à une liste particulière de propriétés communes ou discriminantes :

Exemples :

. On peut les ranger du plus petit au plus grand (propriété commune cela a été vu)

. "On peut compter des objets". On ne le peut qu'avec les naturels (car ils ont un premier élément 1 et que chaque nombre naturel a un successeur. Ce qui n'est pas le cas des rationnels, ces raisons peuvent rester cachées).

. " On peut faire avec eux des opérations ; des additions, des multiplications...". "On peut mesurer..."

e) Conclusion : "pour décider si ce sont des nombres il faut essayer de faire des opérations par exemple des additions, proposez m'en"

2.1.3 - Deuxième phase : l'épaisseur d'un carton (durée : 40 mn)

a) Présentation de la situation. L'enseignant :

"Voici une feuille de type B, quelle est son épaisseur en millimètre ? et une feuille de type E, quelle est son épaisseur ?.

(Il écrit au tableau les épaisseurs : $10/50$ et $40/100$). Qu'est ce que la somme de ces deux épaisseurs en millimètre ?" (L'enseignant a choisi des papiers tels que leurs épaisseurs ne soient pas toutes de deux décimales ou au moins il choisit comme ici parmi toutes les réponses

.../...

des enfants, deux fractions n'ayant pas le même dénominateur.

. Des enfants suggèrent de coller les feuilles l'une contre l'autre et viennent montrer comment; d'autres viennent écrire la somme $10/50 + 40/100$. "Ceci devrait représenter cela".

b) Consigne : "je fais une feuille nouvelle, plus épaisse en plaquant une feuille B comme une feuille E. Pouvez-vous prévoir de votre place quelle est l'épaisseur de cette nouvelle feuille" (l'enseignant met effectivement un petit point de colle au milieu des deux feuilles et les colle sans affecter l'épaisseur du bord). On vérifiera ensuite pour voir qui a bien deviné.

c) Pari : beaucoup d'enfants croient que c'est facile et proposent $50/150$. (ils ont effectué $10 + 40$ et $50 + 100$!) mais d'autres ont des doutes et écrivent autre chose. (Exemple : $50/100$)

d) Première vérification : L'enseignant laisse des discussions s'établir mais qu'un enfant vienne expliquer une méthode correcte ou non, elle demande bientôt; comment savoir si ce résultat est correct ?

Les élèves : "il faut faire un nombre suffisant de feuilles nouvelles et mesurer".

Rapidement l'enseignant distribue des paquets de feuilles B à 5 enfants. "Comptez en 10 chacun" et à 10 autres des paquets de feuilles E : "Comptez en 10 chacun".

Il écrit donc 50 feuilles de type B et 100 feuilles de type E et fait préciser l'épaisseur de ces tas (10 mm et 40 mm), si les enfants ne le demandent pas. Il peut demander l'épaisseur totale du tas (50 mm) et le nombre total de feuilles (150)

"Je prends une feuille de type B et une feuille de type E et je fais une nouvelle feuille...." L'enseignant continue en décrivant cette correspondance à haute voix, jusqu'à ce que les enfants l'arrêtent et disent "Ca ne va pas, il y aura trop de feuilles E, il faut le même nombre de feuilles dans les deux tas ; pour faire 100 nouvelles, il faut 100 feuilles B et 100 feuilles E (ou 50 et 50, ou 150 ou 150).

e) Voulez-vous changer votre pari avant la vérification ?

La plupart des enfants font alors le calcul correct et déclarent la vérification inutile. L'enseignant la fait faire par ceux qui n'ont pas trouvé.

$$10/50 + 40/100 - 20/100 + 40/100 = 60/100$$

La mesure peut fournir $61/100$ ou $59/100$) mais cette discussion est classique.

2.1.4 - Troisième phase : Somme de plusieurs fractions (Durée 10 mn à 15 mn).

a) Si on fait un carton composé de trois feuilles, l'une de $\frac{8}{100}$ de mm (C) d'épaisseur, l'une de $\frac{11}{100}$ de mm (D), l'autre de $\frac{2}{10}$ de mm (B). Quelle sera son épaisseur ?

Il n'y a presque jamais besoin de vérification a ce moment. Les enfants font le calcul :

$$\frac{8}{100} + \frac{11}{100} + \frac{20}{100} = \frac{39}{100}$$

b) L'enseignant leur demande s'ils sauraient effectuer des sommes de n'importe quelle épaisseur, et propose un exemple : $\frac{9}{45} + \frac{25}{90}$

2.1.5 - Remarques

mais . Le choix des épaisseurs à additionner peut être quelconque. Les manipulations dépendent de ces nombres : par exemple on peut proposer $\frac{10}{50} + \frac{39}{100}$ au lieu de $\frac{40}{100}$, cela interdit aux enfants de réunir deux tas de feuilles, mais pas de l'envisager et de dire que c'est impossible.

. Proposer à ce moment là des sommes de fractions à même dénominateur serait une erreur didactique.

Certains maîtres ont été tentés de le faire avec l'espoir d'obtenir immédiatement une réussite d'ensemble. Ils veulent éviter aux la double difficulté d'avoir a décider de réduire au même nombre élèves feuilles et de le faire pour que la somme des numérateurs, c'est-à-dire des épaisseurs, ait un sens. Cela permet aux enfants des justifications faciles à formuler et à apprendre, cela facilite l'apprentissage formel de la somme de deux fractions (on sait faire la somme lorsque les dénominateurs sont les mêmes, il nous reste donc dans le cas général à réduire au même dénominateur avant de faire cette somme).

Mais cette méthode donne de moins bons résultats : seuls les enfants capables d'emblée de concevoir le cas général et les raisons de la facilité apparente des cas particuliers ont franchi la difficulté en développant une conception correcte de ce qu'est la somme de deux fractions. Ils pourront ensuite plus facilement faire des raisonnements directs ou des calculs rapides originaux (exemple $15 \times (\frac{3}{100} + \frac{7}{15})$) Les autres sont détournés des questions pertinentes (pourquoi les dénominateurs ne s'ajoutent-ils pas ?) et des efforts nécessaires de conception et de vérification, par l'apparente facilité de l'action. à effectuer. Ils sont invités à apprendre en deux temps une méthode avec éventuellement des "fausses" justifications (par exemple si

j'ajoute 3 centièmes et 5 centièmes, cela fait 8 centièmes, comme 3 chaises et 5 chaises sont 8 chaises.

Ils apprennent d'abord que l'on peut faire la somme des fractions ayant même dénominateur et comment, et qu'on ne "fait" pas ou qu'on ne peut pas faire autrement (on ne peut additionner des choux et des loups !) Puis, ils apprennent à résoudre les autres cas en les ramenant au premier, non pas à cause de la signification de cette transformation mais simplement parce qu'on pourra réussir ainsi il n'y a là qu'une apparence d'économie dans ce processus car aucune représentation ne viendra soulager les mémorisations ; il faudra de plus, de nombreux exercices formels de fixation et de discrimination avec d'autres règles de calcul. Certains enfants n'y parviendront pas

Or, ici tous les enfants peuvent concevoir la solution et étayer leur représentation par des essais, des tentatives et des vérifications ce qui rend inutile tout apprentissage formel intentionnel. Il y a parfois intérêt à retarder les algorithmisations pour favoriser la conceptualisation.

2.1.6 - Résultats

Tous les enfants savent trouver la somme de deux ou plusieurs fractions si elles représentent des épaisseurs de papier et si la réduction au même nombre de feuilles est "évidente" (un dénominateur multiple simple des autres). Beaucoup pourraient élaborer une stratégie dans le cas de deux fractions quelconques mais aucune méthode n'a été formulée et encore moins apprise.

2.2 - QUE DEVONS-NOUS SAVOIR FAIRE MAINTENANT ?

2.2.1 - Première phase : Evolution des méthodes (45 minutes environ).

a) Présentation de la situation

"Vous avez su réaliser et prévoir la somme de certaines épaisseurs de feuilles. Sauriez-vous faire la même chose avec n'importe quelles feuilles, c'est-à-dire avec n'importe quelles fractions ?"

L'enseignant fait écrire rapidement quelques sommes de 2 ou 3 fractions au tableau, des "faciles" et des "moins faciles".

$$\text{Exemples : } 17/50 + 5/25$$

$$9/48 + 4/20$$

$$35/100 + 29/100 + 18/100$$

Il choisit une somme "facile" par exemple :

b) Première consigne

"Je colle ces trois feuilles les unes contre les autres pour obtenir une nouvelle feuille :

$$12/100 \quad , \quad 25/100 \quad , \quad 9/100$$

Quelle est l'épaisseur de cette nouvelle feuille ?"

c) Déroulement : les enfants cherchent individuellement et rapidement (au brouillon). Lorsque la plus grande partie a trouvé une réponse l'enseignant arrête la recherche (3 mn environ).

S'il y a lieu, il écrit les résultats différents au tableau et les élèves viennent expliquer comment ils les ont trouvés. Ils discutent la validité des méthodes en se référant au besoin de la réalisation effective du collage, jusqu'à ce que tous soient d'accord sur le bon résultat, et au moins une bonne méthode.

Le plus souvent les enfants explicitent ici, la nécessité d'ajouter des épaisseurs, puisqu'il y a le même nombre de feuilles. Le fait que l'ordre des feuilles dans le tas (classées par type ou alternées) n'implique pas sur son épaisseur.

d) Deuxième consigne

Prenons une somme un peu moins facile. Quelle épaisseur aura la feuille obtenue en collant trois feuilles d'épaisseur

$$4/25 \quad , \quad 18/100 \quad , \quad 7/50$$

Deux procédés apparaissent :

- . Quelques enfants transforment les deux fractions $4/25$ et $18/100$ de façon à leur donner le dénominateur 50.
- . D'autres transforment $4/25$ et $7/50$ en leur donnant le dénominateur 100.

Le déroulement est identique à celui vu plus haut (5 mn de recherche).

e) Troisième consigne :

$$8/45 + 5/30$$

$$4/35 + 9/70 + 1/7$$

Les enfants essaient souvent de transformer les deux fractions de façon à leur donner un dénominateur de 100, puis ils essaient de transformer l'un en l'autre. Enfin, certains cherchent des multiples communs

45	30
90	60

La première question est réussie par peu d'enfants, et donne lieu à un calcul mental.

f) Quatrième consigne :

Un ébéniste fait un collage pour un meuble. Il colle 3 plaques de bois, d'épaisseurs différentes.

$$40/50 \text{ mm} ; 5/25 \text{ mm} ; 6/10 \text{ mm}$$

"Rangez ces plaques de la moins épaisse à la plus épaisse
Trouvez l'épaisseur en millimètre de la nouvelle plaque.

g) Remarques :

Cette phase a pour objet de permettre aux enfants de mettre en oeuvre les procédés qu'ils ont découverts dans la séance précédente, de les rendre plus généraux et plus efficaces. Donc, de les faire évoluer.

Cette séance n'est donc pas une séance d'entraînement ni un contrôle de connaissances.

Aussi l'enseignant ne porte pas de jugement sur la valeur des méthodes employées et ne dit à aucun moment quel est le bon résultat.

Il organise et favorise pour chaque exercice le processus suivant :

- recherche individuelle
- mise en commun des résultats
- confrontation des méthodes
- discussion et validation par les enfants

Une méthode est acceptée si elle donne un résultat correct, (là une méthode "avouable" et correcte) rejetée dans le cas contraire. Entre les méthodes acceptables, les remarques sur la longueur ou la facilité de d'exécution, que l'enseignant sollicite, ne deviennent pas des jugements de valeur que l'enfant puisse confondre avec des jugements de validité.

Par contre, l'enseignant s'attache à ce que l'enfant participe au débat, ait un résultat à proposer, puisse faire discuter ses méthodes et fasse le point vis à vis de ses propres connaissances.

La correction immédiate et collective, et la discussion rapide des exercices est donc indispensable.

Elle permet à l'enseignant et à tous de savoir à quel stade d'assimilation en est chaque enfant et quelles sont ses difficultés.

Toute la classe peut prendre part à l'effort de chacun.

.2.2 - Deuxième phase : (30 mn environ) Exercices individuels de contrôle et d'entraînement.

C'est une activité didactique tout à fait classique : l'enseignant donne les énoncés suivants par écrit. Chaque enfant doit les résoudre seul et présenter sa solution sur cahier ou sur une copie ou sur la feuille énoncée. L'enseignant examinera le travail des enfants après la classe. Il discutera les erreurs relevées et fournira les réponses exactes, collectivement au début de la séance suivante. Chaque enfant corrigera éventuellement sa réponse.

1) "Classe ces épaisseurs de feuilles de la plus petite à la plus grande "

$$45/100 ; 2/10 ; 53/95 ; 5/25 \quad (1)$$

2) "Fais la somme des épaisseurs suivantes" :

$$25/100 + 13/100 + 45/100 = \quad (2)$$

$$4/25 + 9/50 + 16/100 = \quad (3)$$

$$3/30 + 12/90 = \quad (4)$$

$$5/7 + 15/77 = \quad (5)$$

$$5/6 + 3/8 = \quad (6)$$

Remarque : Il arrive très souvent que les réactions des enfants, leur comportement, leurs résultats soient très différents lorsqu'ils sont confrontés à un travail individuel, sans aucune intervention, ni

.../...

du maître, ni des camarades. Les résultats sont quelquefois décevants, car les enfants seuls devant une tâche ne voient pas toujours les erreurs.

Il est donc nécessaire de les habituer à cette confrontation dans laquelle il n'y a aucun feed-back et où chacun doit prendre en charge ce qu'il fait.

2.2.3 - Résultats

. Cette leçon favorise beaucoup l'exercice du calcul mental (double, moitié, triple, produit par 7) de nombres de deux chiffres.

. Tous les enfants savent organiser et formuler leur méthode de recherche de la somme de plusieurs fractions. Ils commencent par chercher à les réduire au même dénominateur (l'expression n'a pas été prononcée)

. La recherche d'un multiple commun a été pratiquée de plusieurs manières (malgré la rareté jusqu'à ce moment des occasions de le faire). Beaucoup d'élèves ont commencé à élaborer des stratégies de recherche systématique, comme l'énumération et la comparaison de la liste des multiples, ou même dans le cas de petits nombres, le produit des dénominateurs.

Aucune de ces stratégies n'a été identifiée comme stable, et encore moins apprise.

2.3 - DIFFERENCE DE DEUX EPAISSEURS

2.3.1 - Matériel

L'enseignant a préparé :

- une feuille de bristol
- 5 ou 6 sortes de feuilles d'épaisseurs très différentes :
feuilles de papier à dessin, feuilles de buvards, de polycopie, etc..
(1 feuille de chaque sorte suffit).

La feuille de bristol doit être assez épaisse pour que les enfants la distinguent bien des autres feuilles. Ces feuilles, sont indispensables bien qu'elles ne servent qu'à illustrer les propos et non à vérifier les calculs.

2.3.2 - Correction rapide des exercices de la veille (10 mn)

Seuls les exercices ayant donné lieu à des erreurs sont commentés.

On obtient des remarques sur la recherche du dénominateur commun dans le dernier exercice (24 ou 48 ?) que le maître se garde bien d'ériger en méthode. ("le dénominateur commun est le produit des dénominateurs"). A titre indicatif, voici les résultats obtenus sur deux ans.

2.3.3 - Première phase : signification de la différence de deux fractions (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation

1) L'enseignant rappelle d'abord aux enfants la situation de la séance précédente . Il écrit au tableau les fractions : $8/50$ et $6/100$ et leur demande ce que désignent ces fractions (l'épaisseur d'une feuille telle qu'il faut pour en empiler 50 pour obtenir une épaisseur de 8 mm). Puis il écrit la somme de ces deux fractions :

$8/50 + 6/100$ et leur demande ce que désigne cette somme : (l'épaisseur d'une feuille composée d'une feuille de $8/50$ collée avec une feuille de $3/50$ d'épaisseur).

Remarque : Il est souvent utile de faire ainsi un rappel des situations précédentes pour deux raisons essentielles :

- d'abord pour permettre à certains enfants qui ont des difficultés ou qui sont plus lents de mieux s'investir dans la tâche qui va être proposée.

- ensuite pour permettre aux enfants qui n'ont pas assisté aux leçons précédentes de comprendre ce qui s'est passé et de pouvoir participer à la séance suivante.

2) L'enseignant écrit ensuite sur le tableau :

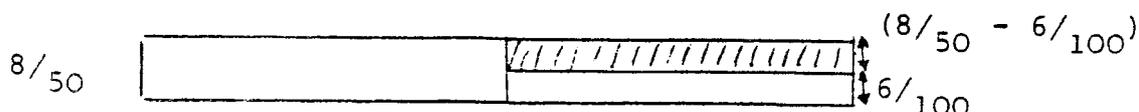
$8/50 - 6/100$ et demande aux enfants ce que désigne cette écriture et comment on pourra réaliser ce qu'il indique.

. D'abord, les enfants essaient d'interpréter le signe "moins" mais peuvent souvent donner une interprétation erronée : "on avait collé 2 feuilles d'épaisseurs $8/50$ mm et $6/100$ mm pour faire une feuille plus épaisse et on décolle la feuille d'épaisseur $6/100$ mm."

La matérialisation de cette interprétation fait apparaître des contradictions : les deux feuilles collées ont une certaine épaisseur qu'on ne connaît pas et si on décolle l'épaisseur la plus fine, $6/100$ mm, on doit trouver la différence, c'est-à-dire $8/50$, ce qui ne correspond pas à la situation proposée. Cette interprétation est donc rejetée. Cependant, presque tous les enfants supposent que cette différence $8/50 - 6/100$ désigne l'épaisseur d'une nouvelle feuille, mais ils ne voient pas immédiatement laquelle.

. Assez vite, ils donnent une autre interprétation : "c'est la feuille épaisse qui a $8/50$ mm d'épaisseur. Elle est formée de deux feuilles collées : l'une de $6/100$ mm d'épaisseur et l'autre qu'on ne connaît pas". Ils se rendent compte alors que la différence $8/50 - 6/100$ représente l'épaisseur de cette deuxième feuille.

. L'enseignant suggère alors de représenter les feuilles sur le tableau par un schéma qu'il peut faire elle-même ou faire faire par un enfant :



Il demande à un enfant de montrer sur le schéma ce qui correspond à l'écriture proposée et fait dire que la partie hachurée représente la feuille qu'il faut enlever à $8/50$ pour obtenir $6/100$ ou encore celle qu'il faut ajouter à $6/100$ pour obtenir $8/50$, ce qui amène les enfants à écrire par exemple :

$$6/100 + \text{VIIIIII} = 8/50$$

b) Consigne : "Vous allez essayer de prévoir tout seuls par le calcul, et par tâtonnements par exemple, l'épaisseur de cette feuille et de trouver un moyen pour vérifier ce résultat".

.../...

c) Déroulement

. Certains enfants font des tentatives comme :

$$6/100 + 6/100 = 12/100 = 6/50 \text{ ce n'est pas assez...}$$

$$6/100 + 8/100 = 14/100 \text{ etc...}$$

. D'autres raisonnent :

en collant 100 feuilles de type A et 100 feuilles de type B, on trouvera 100 grosses feuilles.

Il faut transformer $8/50$ en $16/100$:

$$6/100 + \quad /100 = 16/100 \quad \text{réponse : } 10/100$$

. Un paquet de 50 grosses feuilles a 8 mm d'épaisseur, il faut retirer 1 feuille mince de $6/100$ à chacune, il faut donc retirer 50 feuilles, elles ont une épaisseur de 3 millimètres. Il reste donc $8 - 3 = 5$ mm pour les 50 autres feuilles : épaisseur $5/50$

. On veut retirer 1 feuille mince de la feuille épaisse, 100 de ces feuilles mesurent 6 millimètres. Si on veut retirer 100 feuilles minces il en faut 100 grosses : $8/50 = 16/100$. Elles mesurent 16 mm. Il restera 100 feuilles de $[8/50 - 6/100]$ d'épaisseur chacune. Elles ont une épaisseur de 10 mm puisque le tas est $[100, 10]$, chacune a une épaisseur de $10/100$.

. Certains enfants ne trouvent pas mais doivent dire comment ils ont essayé, et si ce qu'ils ont trouvé est trop grand ou trop petit.

2.3.4 - Deuxième phase : (10 mn)

L'enseignant écrit la différence suivante :

$$4/15 - 1/15 \text{ et demande aux enfants :}$$

- d'une part de trouver le résultat,
- d'autre part, s'ils sauraient réaliser cette situation avec les feuilles et s'ils sauraient indiquer ce qu'elles représentent.

. Tous les enfants trouvent immédiatement le résultat $3/15$ en se référant à l'addition des fractions.

. La matérialisation se fait devant les enfants au fur et à mesure de leurs suggestions : "il faut prendre la feuille la plus épaisse dont l'épaisseur peut être désignée par $4/15$ mm (c'est celle du bristol par exemple). Il faut faire une feuille de même épaisseur ($4/15$) en collant deux autres feuilles : l'une que l'on connaît dont l'épaisseur peut être désignée par $1/15$ et une autre qu'il faut choisir (parmi celles qui sont préparées) de manière qu'en la plaquant contre

.../...

la première, on obtienne une épaisseur égale à celle du bristol. C'est cette épaisseur qui correspond à $3/15$ mm

2.3.5 - Troisième phase : Autres exercices proposés (15 mm)

a) L'enseignant propose aux enfants deux autres types de feuilles : $4/50$ et $3/40$ et il leur demande s'ils sauraient calculer leur différence. Les enfants disent qu'il faut se ramener au même nombre de feuilles. Alors, l'enseignant leur demande de le faire individuellement. Certains enfants n'arrivent pas au résultat, car ils ne trouvent pas un multiple commun à 50 et 40. Quelques uns procèdent de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} & 4/50 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ x 2 & & x 2 \\ & 8/100 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ x 2 & & x 2 \\ & 16/200 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 3/40 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ x 5 & & x 5 \\ & 15/200 & \end{array}$$

D'autres enfin font directement :

$$\begin{array}{ccc} & 4/50 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ x 4 & & x 4 \\ & 16/200 & \end{array}$$

Tous finalement écrivent :

$$16/200 - 15/200 = 1/200 \text{ et valident ainsi leur résultat :}$$

$$1/200 + 15/200 = 16/200$$

b) L'enseignant demande ensuite aux enfants d'effectuer individuellement l'opération suivante :

$$12/8 - 2/5$$

2.3.6 - Résultats

Cette leçon permet aux enfants de redéfinir la différence de deux grandeurs. La soustraction de deux nombres et d'apprendre à calculer la différence de deux fractions.

.../...

A nouveau la réduction au même dénominateur a donné lieu à la recherche de dénominateur commun. Les enfants ne "connaissent" toujours pas de moyen systématique de la faire, mais progressent en ce sens qu'ils sont plus nombreux à concevoir plus vite à quel moment il faut le faire, et à utiliser régulièrement des moyens plus rapides : calcul mental, produit des dénominateurs, recherche intuitive du plus petit multiple commun.

2.4 - L'ÉPAISSEUR D'UN TRES GROS CARTON (Produit d'un nombre rationnel par un entier)

2.4.1 - Matériel.

4 tas de feuilles différents contenant chacun

10 feuilles environ - Par exemple :

- des feuilles marron cartonnées d'épaisseur 19/35 mm
- des feuilles blanches de polycopie d'épaisseur 4/47mm
- des feuilles roses d'épaisseur 3/19mm
- des feuilles de dessin perforées d'épaisseur 18/95 mm

Ces feuilles ne serviront finalement pas à vérifier les résultats mais leur manipulation pourra s'avérer nécessaire à une bonne compréhension de la situation et en particulier à la distinguer de la recherche d'une fraction équivalente.

2.4.2 - Première phase : l'épaisseur d'un gros carton

L'enseignant place les enfants par équipes de 5.

a) Présentation de la situation :

"Voici 4 tas de feuilles. Avec ces feuilles, on voudrait fabriquer des cartons en collant plusieurs feuilles de même catégorie les unes contre les autres".

b) Consigne :

"Vous allez calculer l'épaisseur des cartons réalisés avec 3 feuilles, 5 feuilles, 20 feuilles, 100 feuilles, 120 feuilles de chaque catégorie.

Vous êtes groupés en 5 équipes : chaque équipe va avoir une catégorie de papier (2 équipes auront forcément la même).

Par exemple, l'équipe I aura les feuilles marron (19/35 mm)

l'équipe II aura les feuilles blanches (4/47 mm)

l'équipe III aura les feuilles roses (3/19 mm)

l'équipe IV les feuilles perforées (18/95 mm)

l'équipe V les mêmes feuilles que l'équipe I.

A l'intérieur d'une même équipe, vous pourrez vous partager le travail en vous répartissant les calculs des différentes épaisseurs. Ensuite, vous vous mettrez d'accord sur les résultats obtenus.

Vous écrirez vos résultats dans ce tableau - l'ensei-

.../...

onant prépare le tableau dont il ne remplit que les marges, ce qui précise bien la consigne -

c) Déroulement

A mesure qu'un groupe a terminé sa recherche après en avoir discuté, il va écrire ses résultats dans le tableau. L'enseignant suggère alors à ce groupe de vérifier le travail des autres groupes pour se préparer à la discussion : l'équipe II vérifie l'équipe III, III vérifie IV, et IV vérifie II.

2.4.3 - Deuxième phase : Examen des résultats.

a) Consigne.

"Ceux qui ne sont pas d'accord avec les résultats qu'ils ont vérifiés viennent écrire leurs propositions. Lorsqu'il n'y a qu'un résultat, c'est que deux équipes au moins sont d'accord à son sujet.

b) Discussion :

Par exemple, l'équipe III a marqué :

$$3/19 \times 3 = 9/57$$

L'équipe II a marqué au-dessous :

$$3/19 \times 3 = 9/19.$$

Il faut donc expliquer ces résultats et invalider au moins l'un des deux. Une discussion s'engage entre les équipes : l'équipe III explique que pour multiplier par 3 elle a multiplié les 2 termes de la fraction par 3, mais elle ne sait pas prouver que son résultat est correct.

Par contre, l'équipe II explique que, puisqu'on a collé ensemble 3 feuilles, l'épaisseur du carton peut être trouvée en faisant une addition :

$$3/19 + 3/19 + 3/19 = 9/19$$

Les enfants de l'équipe IV interviennent alors pour affirmer que c'est cette solution la bonne parce que eux, ont trouvé une partie de leurs résultats en faisant des additions : en effet dans la colonne 4 du tableau, ils ont inscrit :

$$18/95 + 18/95 + 18/95 = 54/95$$

$$18/95 + 18/95 + 18/95 + 18/95 + 18/95 = 90/95$$

Les enfants de l'équipe III sont convaincus de leur erreur.

.../...

C'est alors qu'un enfant intervient et fait remarquer que $9/57$ et $3/19$ désignent les mêmes épaisseurs car les fractions sont égales. Il vient écrire sur le tableau :

$$x 3 \left(\begin{array}{c} 1/19 \\ \\ 9/57 \end{array} \right) x 3$$

L'enseignant demande à un enfant de l'équipe III de montrer une feuille d'épaisseur $3/19$. Il va chercher une feuille rose. Il demande à un autre enfant de la même équipe de choisir une feuille d'épaisseur $9/57$. Tous les enfants s'écrient alors : "c'est la même". Puis il demande enfin de réaliser une épaisseur de $9/19$. Les enfants disent qu'il faut prendre 3 feuilles roses et les coller.

a) Correction du tableau :

A la suite de cette discussion, les enfants corrigent les résultats faux contenus dans le tableau.

2.4.5 - Troisième phase : Evaluation de l'épaisseur des cartons, comparaison à 1 mm.

a) Présentation et consigne :

L'enseignant choisit un résultat parmi ceux du tableau : $57/35$ par exemple qu'il demande aux enfants d'observer.

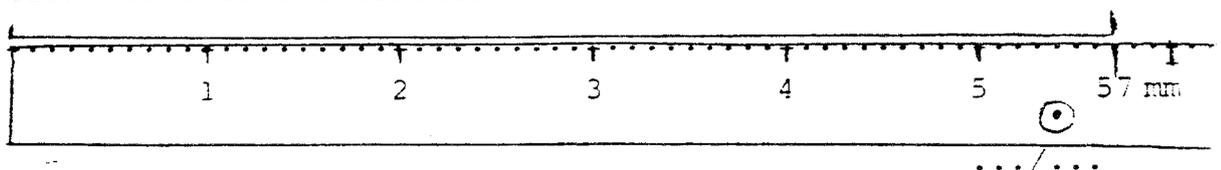
"Cette fraction désigne l'épaisseur du carton réalisé en collant 3 feuilles marron. Avez-vous une idée de la grosseur de ce carton ? Sauriez-vous dire et trouver un moyen de prouver s'il est plus épais que 1 mm, moins épais, égal à 1 mm ?"

b) Déroulement :

• Les enfants cherchent par groupes de 2 ou 3. Beaucoup prennent leur double-décimètre pour avoir une idée plus précise du millimètre. Des stratégies différentes apparaissent dans les groupes.

* La plus fréquemment employée et celle-ci.

- Les enfants dessinent en les agrandissant les graduations du double-décimètre :



Ils expliquent que 57/35 signifient que si on prend 35 feuilles marron, elles ont une épaisseur de 57 mm ou 5 cm 7 mm (qu'ils indiquent sur leur schéma).

Ils essaient d'évaluer l'épaisseur d'une dizaine de feuilles en partageant approximativement leur bande de 57 mm en 3 parties et de cette observation, ils déduisent et affirment que l'épaisseur 57/35 est plus grande qu'un millimètre.

* Puis, celle qui apparaît ensuite le plus souvent est : "si on avait 35/35 ça voudrait dire que 35 feuilles mesureraient 35 mm, donc 1 feuille mesurerait 1 mm.

1 feuille → 1 mm

Puisque 57 est plus grand que 35 57/35 mm est plus grand que 1 mm et la plupart des enfants qui pratiquent ce raisonnement, disent aussitôt : "mais c'est plus petit que 2 mm !"

* Enfin, quelques enfants pensent que 57/35 est grand que 1 mm mais ils n'arrivent pas à trouver un moyen de le prouver.

- 5 ou 6 enfants dans la classe n'ont aucune idée de l'épaisseur du carton.

• Après cette recherche en groupes, les enfants viennent exposer chacune des 2 stratégies employées, à la suite de quoi, des remarques fusent déjà dans la classe :

"toutes les fois que le nombre du haut (le numérateur) est plus grand que celui du bas (le dénominateur), l'épaisseur est plus grande que 1 mm".

L'enseignant ne les prend pas encore en compte pour ne pas installer trop tôt des mécanismes dans l'esprit des enfants (et c'est la majorité) qui n'a pas encore "vu" ce problème.

c) Evaluation d'autres épaisseurs du tableau.

L'enseignant demande aux enfants - d'observer les autres résultats du tableau - et de dire s'ils peuvent faire des déclarations sur ces épaisseurs.

Certains enfants voient que des épaisseurs comme 2160/95 ou 1900/35 ou 480/47 sont beaucoup plus grandes que 1 mm et ils essaient déjà de les évaluer mentalement.

Ils repèrent aussi les épaisseurs plus petites que 1 mm : 54/95 ou 12/47 ou 9/19 etc...

REMARQUE : Cette dernière partie se déroule de manière

.../...

informelle et spontanée pour le plaisir d'échanger des idées et de les discuter sans pression de l'enseignant qui écoute les remarques des enfants sans intervenir sauf si des enfants lui demandent une précision ou une explication.

Il est indispensable d'insister sur le fait que l'enseignant n'a précisé aucun contrat d'apprentissage ni d'acquisition. Quelques enfants peuvent aller très loin dans l'analyse de la situation et faire des remarques subtiles, profondes. D'autres ont des intuitions et échouent dans leur tentative de les justifier. Ces "découvertes" circulent plus ou moins mais qu'importe, la jubilation de ceux qui ont trouvé quelque chose gagne ceux qui les écoutent, les approuvent, les regardent avec incompréhension ou les contredisent. Chacun peut s'avancer et dire même une "bêtise".

L'enseignant s'attache d'abord à permettre les prises de paroles successives sans intervenir sur l'ordre ou le choix des intervenants, à entretenir le plaisir du groupe à ce jeu. Pour cela il doit témoigner du plaisir qu'il y prend lui-même, mais surtout sans faire explicitement de son plaisir le but des enfants.

Il enregistre les erreurs et les difficultés sans essayer immédiatement de les faire corriger. Si personne ne les relève, l'explication ne servirait le plus souvent à rien à ce moment-là. L'enseignant devra considérer qu'il y a là un obstacle qui fera l'objet d'une activité didactique préparée.

Puis souvent au bout d'un moment un enfant relève l'erreur et le débat rebondit.

Evidemment, il faut qu'il soit clair que le silence de l'enseignant ne signifie ni acceptation ni réprobation. Et il suffit pas de le dire il faut le pratiquer.

.../...

TABLEAU V.

Tableau des résultats de l'activité

Nombre de feuilles collées	Epaisseur d'une feuille			
	19/35 (équipe I et V)	4/47 (Equipe II)	3/19 (équipe III)	18/95 (équipe IV)
3 f.	$19/35 \times 3 = 57/35$	$4/47 \times 3 = 12/47$	$3/19 \times 3 = 9/19$	$18/95 \times 3 = 54/95$
5 f.	$19/35 \times 5 = 95/35$	$4/47 \times 5 = 20/47$	$3/19 \times 5 = 15/19$	$18/95 \times 5 = 90/95$
20 f.	$10/35 \times 20 = 380/35$	$4/47 \times 20 = 80/47$	$3/19 \times 20 = 60/19$	$18/95 \times 20 = 360/95$
100 f.	$19/35 \times 100 = 1900/35$	$4/47 \times 100 = 400/47$	$3/19 \times 100 = 300/19$	$18/95 \times 100 = 1800/95$
120 f.	$19/35 \times 120 = 2280/35$	$4/47 \times 120 = 480/47$	$3/19 \times 120 = 360/19$	$18/95 \times 120 = 2160/95$

2.4.5. Résultats

Les enfants ont appris à multiplier une fraction par un nombre entier et distinguent cette opération du calcul d'une fraction égale. La compréhension de cette distinction est essentielle pour la suite. Lorsque les enfants commenceront à faire fréquemment des calculs variés dans des problèmes plus complexes ils auront d'eux-même tendance à automatiser leurs procédures, la distinction initiale leur permettra de la faire sans cesser de comprendre ce qu'ils font et par là de corriger les erreurs qui ne manqueront pas de se produire alors.

Beaucoup ont commencé à envisager la comparaison des fractions aux naturels, question qui sera bientôt reprise. Bien sûr tout ceci reste lié à la représentation des fractions par les épaisseurs de papiers.

Problème ouvert : 1) Donnez un nombre de feuilles assez grand pour que l'épaisseur du carton obtenu en les collant dépasse 2000 mm.

2) Pouvez-vous trouver une épaisseur telle que je ne puisse jamais l'atteindre en empilant des feuilles de carton.

2.5 - CALCUL DE L'ÉPAISSEUR D'UNE FEUILLE (Division d'un rationnel par un entier)

2.5.1 - Première phase : Signification de la division d'un rationnel par un entier (15 mn)

1) Rappel de la multiplication :

"Si on colle 5 feuilles de $\frac{3}{9}$ mm d'épaisseur, savez-vous trouver l'épaisseur de la nouvelle feuille ?"

Les enfants cherchent mentalement de leur place ce résultat quand ils ont trouvé, l'enseignant envoie l'un d'entre eux au tableau écrire :

$$\frac{3}{9} \times 5 = \frac{15}{9}$$

$$\text{ou } \frac{3}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = \frac{15}{9}$$

2) Présentation de la nouvelle situation : division d'un rationnel par un entier.

a) Présentation et consigne.

"J'ai collé 9 feuilles de même épaisseur. J'ai obtenu un carton qui a une épaisseur de $\frac{18}{7}$ mm

. que pourrions-nous chercher ? (l'épaisseur d'une des feuilles)

. savez-vous trouver cette épaisseur ? quand vous l'aurez trouvée, vous l'inscrirez dans votre cahier de brouillon et vous chercherez le moyen de prouver qu'elle est correcte".

b) Déroulement.

Les enfants travaillent individuellement et donnent très vite le résultat : $\frac{2}{7}$ mm

Pour prouver que ce résultat est correct, ils disent : "puisque il y a 9 feuilles collées, et que chaque feuille a une épaisseur de $\frac{2}{7}$, l'épaisseur du carton est bien $\frac{18}{7}$ puisque 9 fois $\frac{2}{7}$ est égal à $\frac{18}{7}$ "

Un enfant vient écrire sur le tableau :

$$\boxed{\frac{2}{7}} \times 9 = \frac{18}{7}$$

D'autres enfants proposent d'écrire la division :

$$\frac{18}{7} : 9 = \frac{2}{7}$$

L'enseignant approuve en confirmant que cette pratique existe. Elle fait cependant remarquer que la seule division qu'ils connaissent est celle dans les entiers naturels : on sait en effet et l'on peut écrire que : $18 : 9 = 2$

Mais pour les fractions, on pourrait aussi l'écrire pour l'instant d'une manière différente

$$\left(\frac{18}{7}\right) \xrightarrow{:9} \left(\frac{2}{7}\right)$$

Les enfants remarquent toujours à ce moment-là qu'"avec l'opérateur inverse ($\times 9$), on retrouve bien $18/7$ " et l'un d'entre eux vient ajouter une flèche :

$$\left(\frac{18}{7}\right) \xrightleftharpoons[\times 9]{:9} \left(\frac{2}{7}\right)$$

Si les enfants demandent pourquoi il a entouré les fractions, l'enseignant répond que c'est pour montrer que c'est l'épaisseur qui est multipliée ou divisée, c'est-à-dire la fraction et non pas le numérateur ou le dénominateur comme ils l'avaient fait pour chercher des fractions égales jusqu'à ce moment. De toute façon, la distinction devra se faire dans la phase suivante,

2.5.2 - Deuxième phase : Autre situation proposée (35 mn)

a) Présentation de la situation et consigne : "Maintenant, on a collé 9 feuilles de même épaisseur (mais différente des autres) pour obtenir un autre carton. Ce carton a une épaisseur de $12/7$ "

"Pouvez-vous trouver l'épaisseur de chacune des 9 feuilles collées ?"

b) Déroulement

Les enfants cherchent par groupes de 2 ou 3. Là encore, on observe des stratégies différentes suivant les groupes :

- quelques enfants ont écrit :

$$\left(\frac{12}{7}\right) \xrightarrow{:9} \left(\frac{1}{7}\right) \text{ et il reste quelque chose}$$

- 2 groupes ont cherché une fraction équivalente à $12/7$ en multipliant les 2 termes par 9

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{12}{7}\right) & & \left(\frac{108}{63}\right) \xrightarrow{:9} \left(\frac{12}{63}\right) \\ \downarrow \times 9 & & \\ \left(\frac{108}{63}\right) & & \end{array}$$

Ils expliquent ce qu'ils ont fait en disant que "puisque 12 n'est pas un multiple de 9, ce n'est pas possible"

Alors, ils cherchent une fraction dans laquelle le numérateur est un multiple de 9, comme la fraction $108/63$

.../...

Elle est égale à $12/7$ etc'est celle-là, qu'ils divisent par 9.

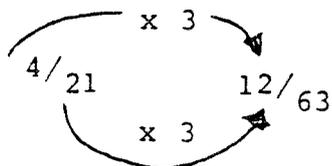
- Un autre groupe a fait un raisonnement identique, mais en multipliant les deux termes de la fraction par 3.



Trois enfants vont au tableau exposer ces trois méthodes. Les deux dernières déclenchent une vive réaction dans la classe.

En effet, quelques enfants protestent en disant : "Ca ne va pas, on ne trouve pas la même chose !"

Alors, les enfants examinent les deux résultats $12/63$ et $4/21$ et très vite quelques uns voient que ces deux fractions sont égales. Un enfant vient écrire :

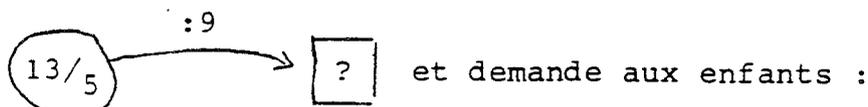


Ils concluent que les deux méthodes sont bonnes.

.5.3 - Troisième phase : (10 mn)

a) Présentation de la situation et consigne

L'enseignant écrit sur le tableau :



"Essayez de dire à quelle occasion on a dû faire cette opération et trouvez-en le résultat".

b) Déroulement

Les enfants travaillent individuellement.

En général, ils cherchent tous à trouver le résultat plutôt qu'à donner un sens à l'opération. L'enseignant a dû insister pour obtenir une phase écrite.

.../...

Au bout de 5 mn environ, l'enseignant arrête les recherches et envoie un ou plusieurs enfants au tableau expliquer ce qu'ils ont fait :

$$\frac{13}{5} \xrightarrow{:9} \frac{13}{45}$$

"on veut faire un carton de $13/5$ composé de 9 feuilles de même épaisseur. Quelle sera l'épaisseur d'une de ces feuilles ?"

Calculs observés :

$$* \quad x9 \left(\frac{13}{5} \right) x9 \quad \frac{57}{45} \xrightarrow{:9} \frac{13}{45}$$

A ce moment il n'y a généralement pas de remarques sur le procédé qui consiste pour diviser par un nombre, à multiplier le dénominateur par le nombre. Si par hasard, le procédé est signalé, son caractère de généralité n'apparaît pas à ce moment-là et il reste une remarque locale.

2.5.4 - Résultats.

Bien que la plus grande partie des enfants aient effectué les opérations proposées dans la leçon, et aient compris à ce moment-là et dans ce cas le sens de leur travail il n'est pas assuré qu'ils sachent désormais diviser une fraction par un nombre. Mais on va retrouver des situations semblables suffisamment fréquemment pour qu'ils développent leurs méthodes de calculs, les affinent et les assurent.

Cette leçon leur permettra d'investir ces nouvelles situations, de les comprendre sans qu'il soit fait appel à une réduction à la technique opératoire.

Contrôle des connaissances.

1) Range les épaisseurs suivantes de la plus petite à la plus grande :

$$\frac{35}{100} ; \frac{3}{5} ; \frac{62}{97} ; \frac{5}{25}$$

2) Fais la somme des épaisseurs suivantes :

$$\frac{15}{100} + \frac{22}{100} + \frac{62}{100} =$$

$$\frac{7}{25} + \frac{14}{50} + \frac{45}{100} =$$

$$\frac{3}{12} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} =$$

$$\frac{5}{8} + \frac{13}{88} =$$

3) Pour faire un carton, on colle 5 feuilles identiques dont l'épaisseur est $\frac{3}{25}$ mm.

- Quelle sera l'épaisseur du carton ?
- Ce carton est-il plus gros ou plus fin qu'un millimètre ?
- Combien de feuilles faut-il coller pour qu'il soit plus gros qu'un millimètre ?

4) Un carton a une épaisseur de $\frac{7}{25}$ mm
Il a été réalisé en collant 8 feuilles identiques.
Quelle est l'épaisseur d'une de ces feuilles ?

5) Trouve 2 fractions égales à $\frac{3}{18}$.

MODULE 3 :
MESURES

MODULE 3 - Activité 1

3.1 - MESURES FRACTIONNAIRES DE POIDS, DE CAPACITES ET DE LONGUEURS

Pour les enfants, il s'agira, lors de cette séance d'utiliser les rationnels découverts lors de la désignation des épaisseurs de feuilles (cf. 1ère séance) pour mesurer de nouvelles grandeurs plus particulièrement :

- le poids d'un objet (ici des clous) à l'aide d'une unité de poids
- la capacité d'un récipient (des verres) à l'aide d'une unité de capacité
- la longueur d'une baguette (des bandes) à l'aide d'une unité de longueur.

La leçon prendra la forme d'un jeu de communication, tout comme dans la 1ère séance.

4.1.1. MATERIEL

Tout le matériel est préparé en double (2 ateliers de chaque sorte.)

Ateliers	Objet unité	Objets à mesurer	Instruments de mesure
poids	plaque-unité [plaque à leviers arithmétiques ESA (OCDL)]	5 clous de catégories différentes	Balance Roberval
capacité	verre coloré (verre à liqueur)	5 petits verres de tailles différentes	2 éprouvettes non graduées(*), transparentes identiques, l'une marquée d'une pastille de couleur
longueur	bande en carton gris	6 baguettes de carton et de 6 longueurs différentes de celle de l'unité	une bande large et longue de papier affiche blanc (bande-témoin)

* En fait d'éprouvette nous avons pris des tubes tous identiques de plastique transparents (flacons de schampooing) de 5 cm de diamètre, fig. 1.

Remarques : pour cette séance, il est important que le choix du matériel soit fait soigneusement.

S'il est facile pour les ateliers longueur de donner ici celles que nous avons utilisées, les capacités et l.

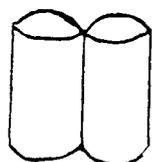


fig. 1

.../...

poids dépendent du matériel dont chacun peut disposer en respectant toutefois un certain ordre de grandeur par rapport à l'unité choisie.

Atelier poids : Nous avons utilisé des clous style clous à béton tels que :

clou A mesure approximativement $16/25$ de l'unité	on voit que les valeurs des rapports encadrent l'unité, et sont du même ordre de grandeur qu'elle
clou B mesure approximativement $34/22$ de l'unité	
clou C mesure approximativement $31/27$ de l'unité	
clou D mesure approximativement $21/46$ de l'unité	
clou E mesure approximativement $13/62$ de l'unité	

Il faut des clous de chaque sorte et des plaques-unités en assez grand nombre. Le nombre doit être supérieur au numérateur et au dénominateur de la fraction obtenue comme mesure : Exemple : il faut ici plus de 25 clous A, plus de 62 clous E, etc... et plus de 34 "unités" par atelier.

Atelier capacité : Nous avons utilisé des petits verres à liqueur de formes diverses. Il n'y a que le verre-unité qui est coloré.

Ils ont été choisis tels que :

verre F mesure $2/3$ de l'unité
 verre G mesure $5/3$ de l'unité
 verre H mesure $9/5$ de l'unité
 verre I mesure $3/2$ de l'unité
 verre J mesure $7/6$ de l'unité

D'autres petits récipients peuvent être employés :

- doseur de lait en poudre pour bébé
- conditionnement de petit suisse
- tasses de dînette etc...

Il est nécessaire que le maître ait lui-même réalisé auparavant les manipulations pour s'assurer qu'elles sont faisables avec le matériel choisi dans un temps relativement court.

Atelier longueur : Baguettes de papier canson de 2 cm de largeur.

baguette K 4,80 cm + $6/5$ de l'unité
 baguette L 5 cm + $5/4$ ou $10/8$ de l'unité
 baguette M 5,60 cm + $7/5$ de l'unité
 baguette N 3,20 cm + $4/5$ de l'unité
 baguette O 3,50 cm + $7/8$ de l'unité
 baguette P 4,50 cm + $9/8$ de l'unité
 baguette unité 4 cm de longueur.

3.1.2 - PHASE I : RECHERCHE D'UNE METHODE DE DESIGNATION.

1. Consigne :

* "Nous avons inventé des nombres (les fractions) pour mesurer des épaisseurs de feuilles de papier. Est-ce que de la même manière, des fractions nous permettraient de mesurer d'autres grandeurs, des poids, des longueurs, des capacités ?

Par exemple, le poids d'un de ces clous, la capacité d'un de ces verres, la longueur d'une de ces baguettes ?

* Pour cela, que faut-il ?" une unité et les moyens de comparer.

" . le poids d'un clou sera mesuré à l'aide de l'unité de poids : le poids d'une de ces plaquettes.

. La capacité d'un verre sera mesurée à l'aide de l'unité de capacité : la capacité de ce verre coloré.

. La longueur d'une baguette sera mesurée à l'aide de l'unité de longueur : la longueur de cette bande grise.

* Nous ferons tout à l'heure un jeu de communication (rappeler le premier jeu au cours duquel on a échangé des messages qui désignaient des épaisseurs de feuilles). Mais aujourd'hui, chaque groupe doit trouver un moyen pour désigner :

- le poids d'un clou
- la capacité d'un verre
- la longueur d'une baguette.

* Il faut comparer les grandeurs à mesurer avec les unités.

Pour cela, vous disposez d'appareils de comparaison :

- . la balance Roberval (pour comparer les poids)
- . les éprouvettes (pour comparer les capacités)
- . les bandes-témoins (pour comparer les longueurs)

Vous allez donc d'abord chercher comment on se sert de ces appareils pour faire correspondre une fraction à une grandeur.

Lorsque ce système de désignation sera accepté par tous les enfants d'un même groupe, vous l'éprouverez dans le jeu de communication".

Note L'enseignant peut donner cette consigne de diverses façons, sans réciter ce texte.

Remarque : Dans cette première phase, les enfants ne disposent que de 2 objets à désigner, pour les groupes "capacités", "poids" et de 3 baguettes : pour les groupes "longueurs".

.../...

L'enseignant les a choisis de façon à ce que le nombre de reports d'unités et de grandeurs soit minimum parmi les objets proposée. Ici, par exemple on choisit :

Capacités $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$

Poids $\frac{34}{22}$ et $\frac{16}{25}$

Longueurs $\frac{6}{5}$ et $\frac{7}{5}$ et $\frac{5}{4}$
 K M L

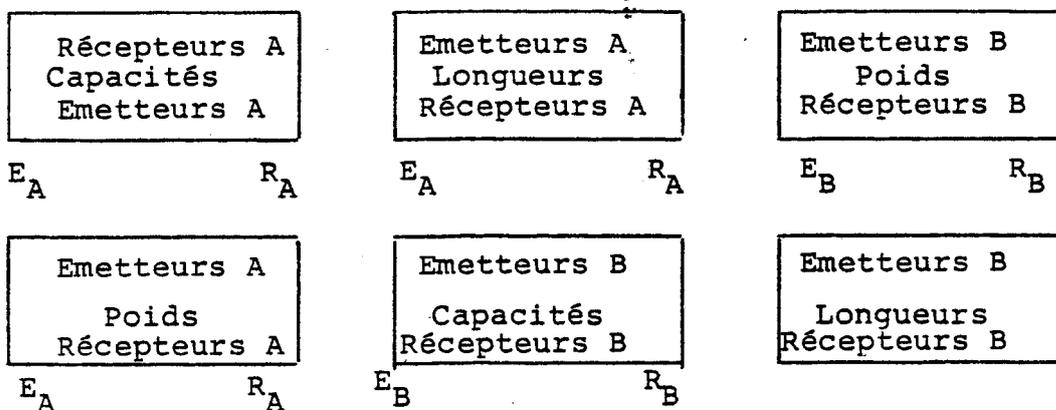
2. Organisation de la classe :

Les enfants sont répartis en groupes de 4, selon la figure 2.

- 2 groupes pour les poids $P(E_A, R_A)$ $P(E_B, R_B)$
- 2 groupes pour les capacités $C(E_A, R_A)$ $C(E_B, R_B)$
- 2 groupes pour les longueurs $L(E_A, R_A)$ $L(E_B, R_B)$

figure 2

Disposition des ateliers dans la classe - Phase 1.



Remarques : On peut considérer que la classe est divisée en deux équipes concurrentes A et B. Comme dans l'activité 1, Séance 1, et que chaque équipe est elle-même partagée en trois ateliers (P,C,L)

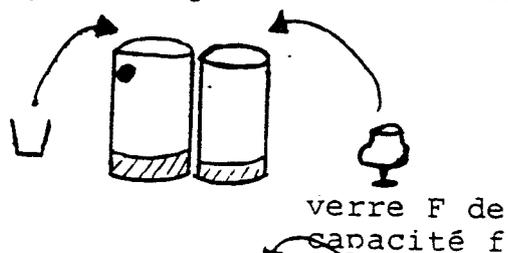
On peut aussi renoncer à ce regroupement en équipes et à la compétition. Les groupes ne changent pas (cf. p. 1 § sur la compétition et coopération).

3. Déroulement.

Les enfants discutent et manipulent pour se mettre d'accord sur le système de désignation qu'ils vont utiliser.

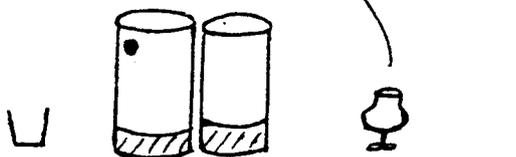
.../...

Exemples de procédés que les enfants utilisent. Ils discutent et manipulent pour se mettre d'accord sur le système de désignation qu'ils vont utiliser.



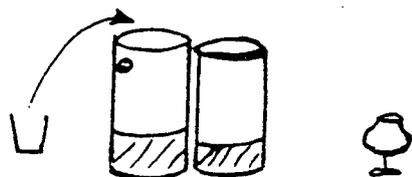
* Groupe "capacités"

Le verre F contient moins que le verre unité.

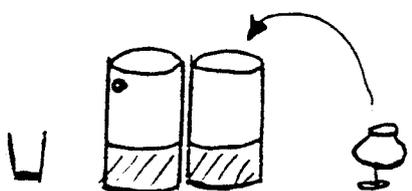


Comparons le verre unité à 2 fois la capacité de F.

La capacité 2 f est plus grande que l'unité



Mais deux unités dépassent 2 f



En ajoutant 3 fois la capacité f, on obtient la même capacité qu'avec deux verres unité.

$$3 f = 2 u.$$

Les enfants versent alternativement et respectivement dans l'éprouvette marquée d'une pastille des verres-unités, et dans l'autre éprouvette des verres à mesurer jusqu'à ce qu'ils observent que le niveau de l'eau est le même dans les 2 éprouvettes.

Ils concluent alors : "il faut 3 f pour faire 2 unités"

Ils écrivent : $f = 2/3 U$.

Remarque : • Il est très important que les enfants ne versent pas les verres dans n'importe quelle éprouvette et surtout qu'ils n'en changent pas en cours de manipulation. La pastille de couleur sert à repérer l'éprouvette dans laquelle on verse l'eau du "verre-unité"

• Les enfants du groupe-capacité peuvent avoir quelques difficultés : lorsqu'ils ne comprennent pas l'usage des éprouvettes. Par exemple, ils peuvent essayer d'en évaluer la capacité avec le verre-unité, puis avec le verre à mesurer sans faire de comparaison à chaque étape. Cette méthode permet en effet une approximation de la capacité du verre (19 f pour 12 u, par exemple).

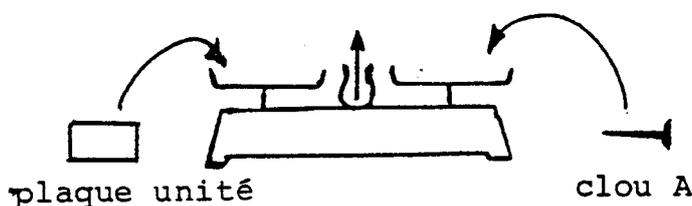
.../...

• Le sable pourrait être plus commode à transvaser mais guère plus propre, et surtout beaucoup moins précis pour comparer les niveaux (tassement, horizontabilité, etc...) On peut utiliser d'autres récipients que des verres et bien distinguer la "capacité" et le "récipient".

• Certains élèves ne trouvant pas très rapidement la coïncidence, font l'hypothèse que si l'on continue à verser alternativement des "unités" et des "verres à mesurer", on ne trouvera jamais de coïncidence : "ça continuera toujours à dépasser d'un côté ou de l'autre".

Le maître peut alors intervenir soit, pour encourager, soit pour accepter des coïncidences approximatives. Ceci est vrai pour tous les ateliers.

Groupe "poids"



Ici non plus les enfants ne peuvent pas utiliser le procédé classique qui consiste à fractionner l'unité puis à équilibrer le poids cherché à l'aide d'unités et de fractions d'unités.

Ils essaient de "peser" A avec U, ils constatent par exemple que U est plus lourd, ils essaient alors d'équilibrer U avec deux exemplaires de A, etc... jusqu'à l'obtention de l'équilibre : ils disent alors par exemple : "il faut 25 clous dans un plateau pour équilibrer, 16 plaques dans l'autre..."

"25 clous sont équilibrés par 16 unités, il faut
16 U pour 25 clous"

"25 fois le poids d'un clou est égal à 16 fois le
poids de l'unité"

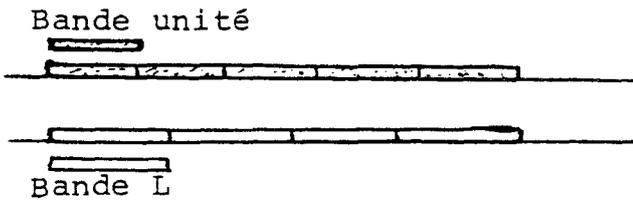
"Le poids du clou est $16/25$ U".

Remarque : Le poids de la plaquette est $25/16$ si l'on prend le poids du clou comme unité, les enfants disent "on met le nombre d'unités en haut".

Mais il n'est pas souhaitable de laisser les enfants choisir l'unité car ils ont tendance à prendre l'objet le plus léger systématiquement.

.../...

* Groupe "longueurs" :



Il faut 4 bandes pour faire la même longueur que 5 bandes unités, donc
Bande L mesure $5/4$ unité.

Il peut arriver que les enfants hésitent un moment avant de reporter bout à bout la longueur unité. C'est la conception de "la bande graduée" qui est un peu difficile, mais nous préférons laisser fonctionner le report de l'unité plutôt que d'en éviter la pratique.

4.1.3 - PHASE II : JEU DE COMMUNICATION DES GRANDEURS.

Lorsque le système de désignation est accepté par tous les membres du groupe, celui-ci se scinde en deux. La maîtresse donne le reste du matériel.

Chaque demi-groupe a devant lui un matériel identique.

1. Consigne : Vous allez maintenant éprouver la désignation que vous avez choisie. Par exemple, le groupe poids émetteur choisit un clou, désigne son poids à l'aide de l'unité, l'écrit et envoie ce message au groupe poids récepteur qui devra retrouver de quel clou il s'agit. De même pour les capacités et les longueurs".

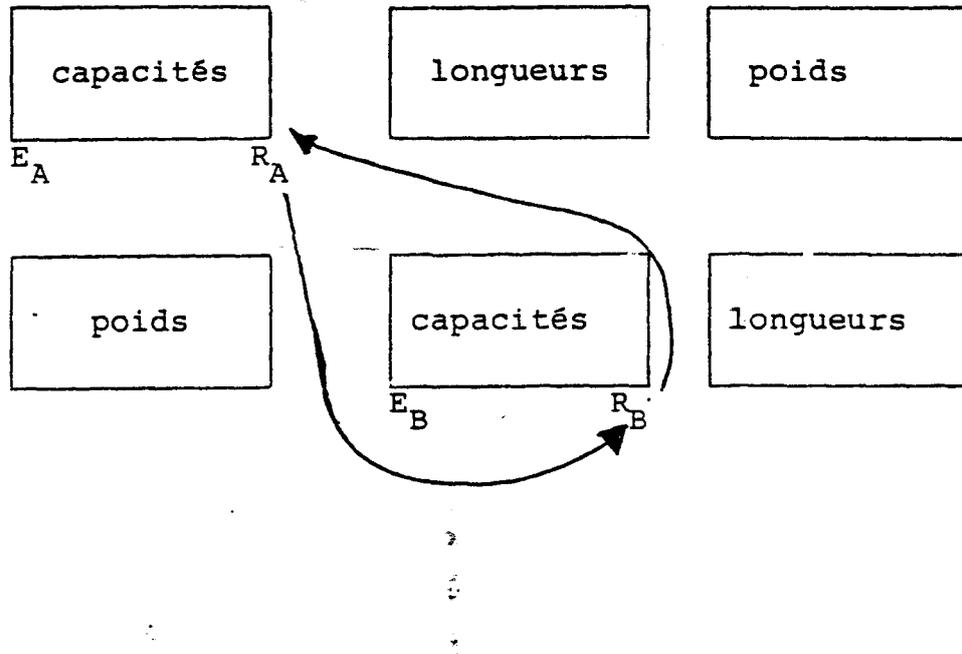
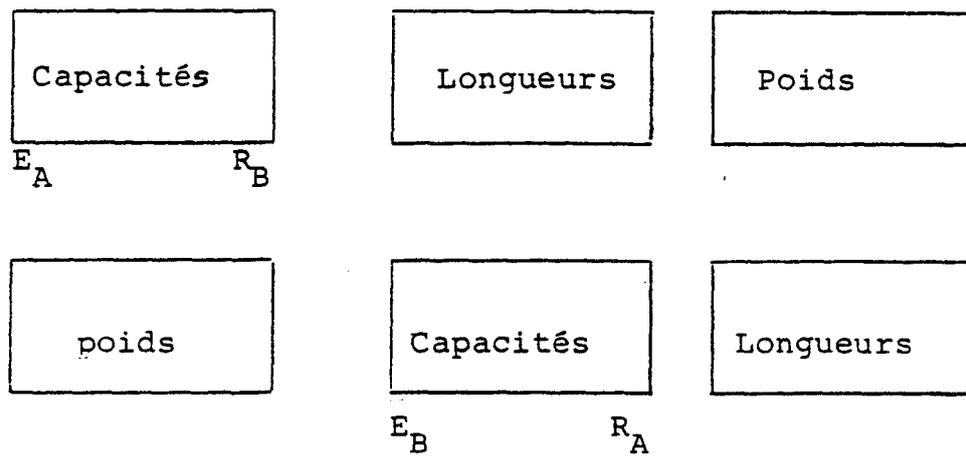
Dans cette activité, tous les demi-groupes doivent être au moins une fois émetteurs et au moins 1 fois récepteurs.

2. Organisation.

Lors de la phase 2 (jeu de communication), il y a éclatement de chaque groupe en 2 sous-groupes, l'un émetteur, l'autre récepteur.

Pour éviter de devoir doubler le matériel, les récepteurs d'un groupe capacité se mettront à la même table que les émetteurs du second groupe capacité et vice-versa.

On effectuera les mêmes changements de tables pour les autres demi-groupes récepteurs.

PHASE 1PHASE 2

3.1.3 - COMPTE-RENDU DES RESULTATS

L'enseignant inscrit au tableau

- le ou les messages de chaque demi-groupe émetteur
- la réussite ou l'échec

Les enfants de chaque demi-groupe émetteur expliquent à leurs camarades des autres groupes comment ils ont fabriqué leur message (avec retour à la manipulation si nécessaire) et les récepteurs expliquent comment ils l'ont interprété et reconnu l'objet dont il s'agissait.

On conclut que l'on pourrait mesurer des capacités, des poids, etc... à l'aide des fractions.

On fera alors des "lectures" de fraction par exemple :

"que veut dire : ce verre a une capacité de $\frac{3}{4}$ de u ?" :

- "il faut ajouter 4 fois la capacité de ce verre pour obtenir une capacité de trois fois celle du verre-unité."

Même chose pour d'autres exemples.

. des comparaisons de deux poids :

un clou pèse $\frac{22}{37}$; un autre $\frac{11}{18}$.

Quel est le plus lourd ?

. des sommes :

Si je pèse ensemble deux clous, l'un de $\frac{17}{25}$; l'autre $\frac{40}{75}$, quel poids obtiendrai-je ? etc...

3.1.4 - RESULTATS DIDACTIQUES.

A nouveau, les enfants utilisent des couples de nombres pour repérer des mesures. Ce n'est ni une "application" des rationnels, ni une occasion de "reconnaître" une situation comparable à celle des papiers car il y a des obstacles; par exemple, le langage ou la symétrie de présentation entre l'objet à mesurer et l'unité (non et presque arbitraire)... En fait, les enfants ont surtout résolu des problèmes pratiques, de manipulation, de comparaison, d'évolution, évaluation de somme, d'égalités... des grandeurs étudiées. Un autre problème important est soulevé et "résolu" (seulement par certains). Si on reporte des unités d'une part et des grandeurs égales à mesurer d'autre part, est-ce qu'on finira par observer des équilibres au moins approximatifs, ou est-ce qu'on peut observer une suite "non finie" de déséquilibres ?

3.2 - CONSTRUCTION DE LONGUEURS FRACTIONNAIRES

3.2.1. Dans la séance précédente, les enfants attribuaient des nombres à des grandeurs (ils désignaient la mesure). Dans celle-ci, ils vont de plus construire des objets dont la mesure à l'aide d'une unité, est donnée. (Ils réalisent une grandeur). Il s'agira seulement de longueurs pour des raisons matérielles.

Cette construction pourra suggérer une technique qui repose sur une nouvelle représentation de la notion de fraction : (que nous appellerons $M\beta$) pour fabriquer une bande de longueur $5/4$ de l'unité, la représentation que nous avons déjà introduite et que nous appellerons $M\alpha$, permet plusieurs méthodes :

- . soit on prend une longueur quelconque, on la reporte 4 fois et on compare la longueur obtenue à 5 unités, puis on corrige par tâtonnements ($M\alpha$)
- . soit on reporte 5 fois l'unité puis on partage cette longueur en 4. Cette deuxième méthode exige déjà d'avoir un usage assez souple de la définition donnée.

Il en existe une troisième plus efficace si on doit fabriquer diverses baguettes de dénominateur 4 : on partage l'unité en 4 et on reporte le morceau obtenu 5 fois ($M\beta$)

C'est cette méthode que nous allons essayer de faire apparaître sans espérer que les enfants montrent ou disent qu'elle est équivalente à l'autre.

I - MATERIEL : (toutes les baguettes ont la même largeur, soit 2 cm, et sont réalisées en papier canson)

- 12 baguettes-unité (grises) de 20 cm
- 4 jeux identiques de 6 baguettes (vertes) dont les longueurs respectives sont :

5 cm	→	$1/4$ u
10 cm	→	$2/4$ u
15 cm	→	$3/4$ u
35 cm	→	$7/4$ u
30 cm	→	$3/2$ u ou $6/4$ u
45 cm	→	$9/4$ u

- 4 jeux identiques de 6 baguettes (bleues) dont les longueurs respectives sont :

4 cm	→	$1/5$ u
8 cm	→	$2/5$ u
16 cm	→	$4/5$ u
28 cm	→	$7/5$ u

.../...

- | | | |
|-------|---|-------|
| 24 cm | → | 6/5 u |
| 36 cm | → | 9/5 u |
- 4 jeux identiques de 6 baguettes (jaunes)

2,5 cm	→	1/8 u
5 cm	→	2/8 u
17,5 cm	→	7/8 u
12,5 cm	→	5/8 u
22,5 cm	→	9/8 u
27,5 cm	→	11/8 u
 - ciseaux
 - des bandes de papier affiche de 50 cm de longueur et de 5 cm de largeur
 - des bandes de canson blanc assez longues (largeur toujours 2 cm)

3.2.1. Phase 1 : Jeu de communication.

La classe est partagée en 12 groupes de 2 à 3 enfants
Chaque groupe a devant lui 1 bande unité et 1 jeu de 5 bandes de la même couleur.

a) Consigne :

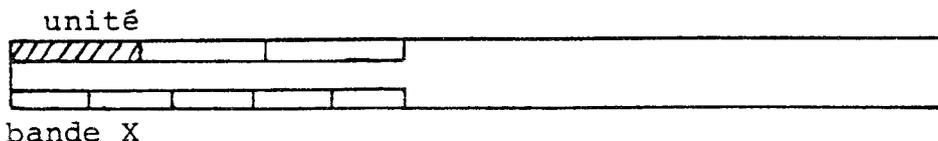
- "Il faut que chaque groupe désigne par des fractions les longueurs des 6 bandes de couleur qui lui sont données, à l'aide de l'unité (grise) et les écrive toutes sur le même message. Chaque groupe est donc d'abord émetteur.
- Chaque groupe recevra le message d'un autre groupe. A ce moment-là, vous deviendrez tous récepteurs. Vous devrez découper dans des bandes de papier canson blanc les baguettes dont les longueurs sont celles indiquées sur le message.
- Ensuite, chaque groupe récepteur rencontrera le groupe qui a émis le message décodé et ils vérifieront ensemble que les baguettes de canson blanc sont bien identiques à celles qui ont servi à fabriquer le message (par superposition). Si elles sont bien identiques, les émetteurs ont gagné.
- Si vous désirez du matériel supplémentaire, je vous le fournirai (papier, ciseaux, etc...)

.../...

b) Déroulement :

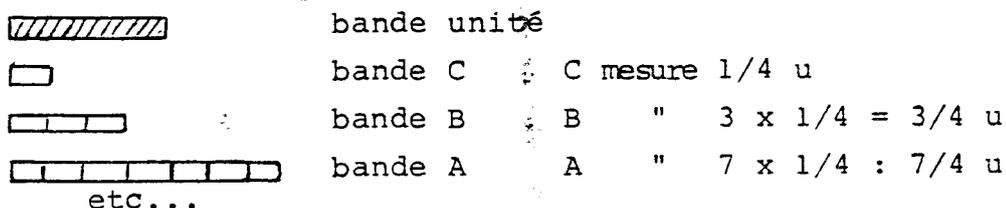
i) Phase de mesure

* Les enfants peuvent utiliser la technique habituelle



X mesure $3/5$ u

* Certains peuvent s'apercevoir que sur les 6 bandes de couleur proposées, 4 sont multiples de la plus petite. Il leur suffit alors de mesurer celle-ci. De plus, en reportant cette petite bande, ils peuvent constater qu'elle est contenue un certain nombre exact de fois dans l'unité. Ils s'en servent alors comme unité intermédiaire:



ii) Phase de communication

- Pour plus de commodité c'est l'enseignant qui fait passer les messages. Il faut que les groupes reçoivent le message d'une équipe qui a des bandes d'une couleur différente des leurs (et par là-même de longueurs différentes des leurs)
- Les bandes-témoins de papier affiche ne seront distribuées que sur la demande des enfants
- Les bandes de canson blanc et les ciseaux seront données en même temps que le message.

Même s'ils ont commencé par mesurer d'autres longueurs, ce choix des longueurs de bandes favorise des observations utiles à ceux qui peuvent les faire pour gagner du temps.

* Pour favoriser ces observations, l'enseignant n'a fourni qu'une seule bande-témoin.

3.2.3 - Phase 2 : Compte rendu des résultatsDéroulement :

Les élèves viennent au tableau présenter leurs messages et indiquer comment ils ont procédé pour la

.../...

désignation et pour la construction.

L'enseignant s'abstient de porter des jugements personnels sur l'intérêt des méthodes utilisées. Il se borne à obtenir que les enfants précisent bien les méthodes et les résultats.

3.3 - COMPARAISONS DE STRATEGIES

3.3.1 - Objectifs.

- Description, par les enfants, de la manière dont ils ont élaboré leurs messages et construit les baguettes au cours de la précédente leçon.
- Pour l'enseignant; faire apparaître les différentes méthodes de construction (il y en a 2) en disposant sous forme d'un tableau les renseignements fournis par les enfants (qui sont inscrits sous forme de croquis).
- Mettre en évidence et faire la preuve de l'équivalence des longueurs réalisées des deux manières différentes :
 - . par la mise en oeuvre du modèle 2
 - . ou par la mise en oeuvre du modèle

3.3.2 - Matériel :

Même matériel que la veille.

3.3.3 - Déroulement :

1) Compte rendu des résultats par les enfants :

Ce compte rendu est dirigé par l'enseignant qui inscrit les résultats sous forme d'un tableau de façon à faire apparaître :

- . la manière dont les enfants ont réalisé leur message (désignation)
- . la manière dont ils ont construit les baguettes (construction) à partir des messages reçus.

Ces résultats ont été notés sur le tableau sous forme de croquis simples soit par les enfants eux-mêmes, soit par le maître sous la dictée des enfants (voir l'exemple ci-contre pour les baguettes rouges).

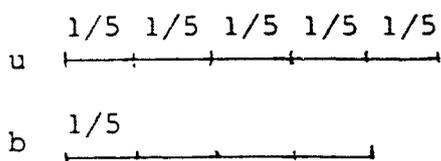
2) Lorsque les enfants ont exposé leur méthode ou reconnu leur procédé dans les méthodes déjà exposées, l'enseignant pose le problème suivant :

"on veut construire une baguette de $\frac{4}{5}$ de longueur à partir d'une unité donnée"

Réfléchissez aux 2 méthodes qui vous permettraient de la construire".

Réflexions et discussion de groupes.

.../...

2) 2ème méthode proposée (modèle β)

L'enfant écrit au tableau :

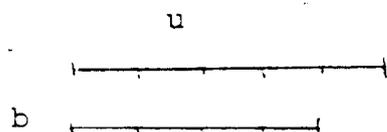
$$4/5 \xrightarrow{:4} 1/5$$

$$1/5 \times 4 = 4/5$$

3) Le problème est de savoir maintenant si la baguette "b" obtenue par la 2ème méthode proposée aura la même longueur que la baguette "a" obtenue par la première méthode.

(Remarque : Ce problème n'a pas été posé par l'enseignant mais par un enfant qui a demandé spontanément : "est-ce que les 2 baguettes auront la même longueur ?")

L'enseignant demande aux enfants d'essayer de trouver un moyen pour savoir si cette baguette "b" a effectivement la même longueur que "a" c'est-à-dire $4/5$. Les enfants ont élaboré, avec l'enseignant, la démonstration suivante :



Dans u, il y a 5 morceaux identiques (1/5)

Dans b, il y en a 4.

Si on met :

$$1 \text{ fois } u \longrightarrow 5$$

$$2 \text{ u } \longrightarrow 10$$

$$3 \text{ u } \longrightarrow 15$$

$$\boxed{4 \text{ u } \longrightarrow 20}$$

$$5 \text{ u } \longrightarrow 25$$

$$1 \text{ fois } b \longrightarrow 4$$

$$2 \text{ b } \longrightarrow 8$$

$$3 \text{ b } \longrightarrow 12$$

$$4 \text{ b } \longrightarrow 16$$

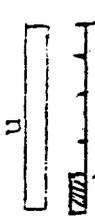
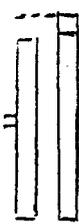
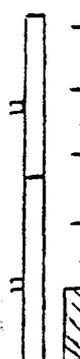
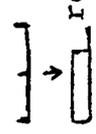
$$\boxed{5 \text{ b } \longrightarrow 20}$$

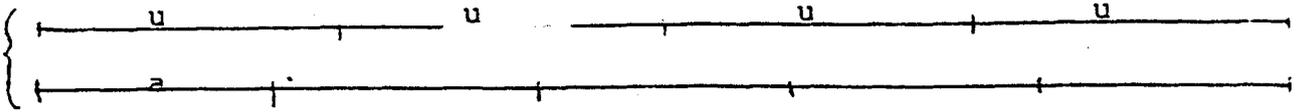
Ils s'arrêtent et disent qu'il faut 5 b pour faire 4 u
donc $4 \text{ u} = 5 \text{ b}$

donc $b = 4/5$ de l'unité (d'après la définition du rationnel qu'ils connaissent)

La longueur "b" est donc bien égale à "a" = $4/5$ de u.

1ère méthode proposée (commensuration)

Messages	Mesurage (désignation)	Mesurage (désignation)	Construction	Construction
<p>1/5</p> <p>Les enfants qui ont procédé de la même manière pour 1/8, 1/4, ... le disent</p>	<p>(1er cas) (Mα) commensuration</p>  <p>report. (utilisation, essai de la petite baguette)</p>	<p>(2ème cas) (Mβ) partage de l'unité</p>	<p>(1er cas) commensuration</p>  <p>découpage par tâtonnement, d'une baguette. report, essais jusqu'à coïncidence.</p> 	<p>(2ème cas) partage de l'unité</p>
<p>2/5</p> <p>Les enfants essaient de reconnaître leur manière de procéder dans ces différentes méthodes pour 2/8 ; 2/4 ...</p>	<p>(essais par tâtonnement) report.</p> 	<p>(petite baguette 1/5)</p>  <p>2/5 report 2 fois dans la baguette plus grande.</p>	<p>Découpage par tâtonnement, essai report.</p> 	<p>utilisation de la petite baguette 1/5</p> <p>1/5 x 2 = 2/5</p>  <p>report 2 fois</p>



MODULE 3 - Activité 4

PROBLEMES

1. Un marchand de tissu a vendu successivement la moitié d'une pièce de velours, puis le quart de cette même pièce.

1°) Quelle fraction de la pièce lui reste-t-il à la fin de la journée ?

2°) La pièce de velours mesurait 24 mètres, quelle longueur de velours reste-t-il ?

2. Claude a un sac de billes. Au cours d'une partie, il perd successivement $\frac{2}{3}$ de ses billes puis encore $\frac{2}{9}$ de ses billes.

1°) Quelle fraction de ses billes a-t-il perdue ?

2°) Quelle fraction de ses billes lui reste-t-il ?

3°) Au début du jeu, il avait 63 billes dans son sac.

Combien en a-t-il à la fin de la partie ?

Remarques sur l'activité 4.

1. Cette activité peut se dérouler en 2 temps :

A) choix d'un problème par l'enseignant.

a) lecture silencieuse du texte par les enfants.

b) explication éventuelle de la situation (proposer aux enfants de la représenter par un croquis)

c) Recherche individuelle des enfants

d) correction, explication et rédaction collectives.

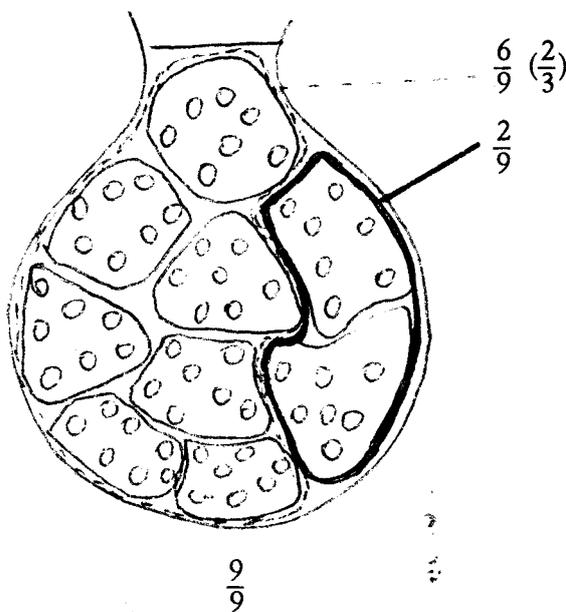
B) recherche et rédaction individuelles de l'autre problème.

2. Le problème n° 2 est beaucoup plus difficile pour les enfants que le n° 1.

En effet, ils ne reconnaissent, dans cette situation, aucune des significations des fractions qu'ils ont vues jusqu'alors : épaisseurs de feuilles, désignation d'une capacité, d'un poids, longueurs de baguettes.

.../...

La deuxième difficulté est qu'ils ont beaucoup de mal à comprendre qu'ici, l'unité est le sac de billes. Il est nécessaire de les aider en représentant ce sac de billes qu'ils doivent considérer globalement.



MODULE 4 :
ORDRE DES RATIONNELS

4.1 - EVALUATION D'UNE SOMME

4.1.1 - Première phase : Rappel collectif : 10 minutes.

"Vous avez construit des fractions pour désigner des épaisseurs de feuilles.

- Vous avez aussi utilisé ces fractions pour désigner d'autres grandeurs - lesquelles ?

(longueurs, capacités, poids)

- Si je vous donne la fraction $11/3$ et l'unité "mètre", que désigne $11/3$ m ? (une longueur)

- Pouvez-vous dire si cette longueur est grande, petite ?

- Montrez à peu près la longueur que désigne cette fraction.

- Et $11/3$ mm ? est-ce que c'est plus grand que 2 mm ? (il est souhaitable que l'on écrive 2 en fraction)

- Et $322/5$ de l ? Est-ce que cela fait beaucoup de litres, ou peu de litres ? ou moins d'un litre ? (écrire 1 l, 3 l, ... en fraction).

Ces nombres ne sont pas très faciles à utiliser surtout pour les évaluations, pour les comparaisons et pour les sommes. Depuis la Révolution, on ne les emploie plus dans la pratique des métiers et on les a remplacés par d'autres nombres. Cependant, pour bien comprendre comment fonctionnent les fractions, il faut savoir s'en servir un peu. Leur usage nous permettra surtout de fabriquer ces nouveaux nombres que nous voulons construire. Pour cela, nous allons jouer à un jeu qui ressemble au "compte est bon".

4.1.2 - 2ème phase : Introduction au jeu. Evaluation d'une somme.
Comment décider qui gagne (20 minutes)

Consigne : "Voici des fractions sur le tableau :

$22/3$; $17/5$; $15/2$; $7/10$; $17/3$; $55/10$; $3/2$; $48/5$; $1/3$; $8/5$

.../...

Je choisis 3 de ces fractions dont vous allez calculer la somme.

Par exemple : $17/5$, $15/2$, $8/5$ ".

Déroulement : Tous les enfants calculent individuellement la somme et l'un d'entre eux vient faire la correction au tableau.

$$\frac{17}{5} + \frac{15}{2} + \frac{8}{5} = \frac{125}{10}$$

b) le jeu.

Consigne : "Pour jouer maintenant, je vais vous demander d'évaluer cette somme avant de faire le calcul. Pour cela, vous choisirez entre les 3 nombres que je vous donnerai, celui qui vous paraîtra être le plus près du résultat.

Par exemple, pour la somme que nous venons de calculer, j'aurais pu vous proposer ces 3 nombres :

$$\frac{115}{10} \quad 12 \quad \text{et} \quad \frac{38}{3}$$

Choisissez-en un (sans essayer de faire les calculs) que vous écrivez sur votre cahier.

Qui a gagné à la devinette ? Comment savoir qui a gagné ?

Déroulement :

L'enseignant laisse les enfants réfléchir et discuter.

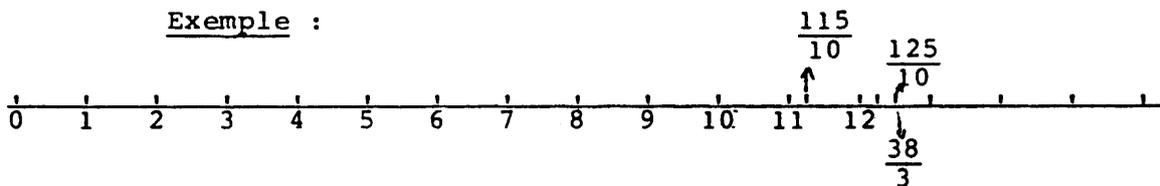
Assez rapidement, il réduit au même dénominateur les fractions

$$\frac{125}{10} = \frac{375}{30} ; \quad \frac{115}{10} = \frac{345}{30} ; \quad 12 = \frac{360}{30} ; \quad \frac{38}{3} = \frac{380}{30}$$

Ils proposent généralement de faire la différence des numérateurs : il faut alors leur faire remarquer que c'est la différence entre les fractions et, pour cela, il peut être utile de faire placer les longueurs correspondantes sur un même segment et y repérer les différences.

.../...

Exemple :



$\frac{115}{10}$ est à $\frac{30}{30}$ de $\frac{125}{10}$ (c'est-à-dire à 1) et il est plus petit

12 est à $\frac{15}{30}$ de $\frac{125}{10}$ et il est plus petit.

$\frac{38}{3}$ est à $\frac{5}{30}$ de $\frac{125}{10}$ et il est plus grand.

La meilleure évaluation de la somme des 3 fractions choisies est $\frac{38}{3}$.

4.1.3 - 3ème phase : Le jeu : évaluation de sommes : la règle du jeu (30 minutes)

Consigne : "Maintenant, voici la règle du jeu :

"A chaque partie, je vous donnerai seulement 2 fractions ou 1 fraction et un nombre naturel (au lieu de 3) pour évaluer la somme. Puis je mettrai une croix sous chacune des fractions choisies pour faire la somme (une des fractions de la liste peut servir dans plusieurs sommes).

Déroulement : Il est souhaitable de faire plusieurs parties.

1ère partie : Evaluation : 5 et $\frac{79}{15}$

Somme à évaluer :

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{17}{5}$$

2ème partie : Evaluation : $\frac{150}{10}$ et $\frac{81}{5}$

Somme à évaluer :

$$\frac{3}{2} + \frac{48}{5} + \frac{55}{10}$$

3ème partie : Evaluation : $\frac{250}{20}$ et 11

Somme à évaluer : $\frac{7}{10} + \frac{48}{5} + \frac{8}{5}$

.../...

4ème partie : Evaluation : 9 et $\frac{25}{3}$

Somme à évaluer : $\frac{22}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$

4.1.4 - Résultats.

Au cours de cette activité, les enfants ont appris (et savent presque tous) encadrer une somme de fractions entre 2 fractions et trouver la distance de 2 fractions.

4.2 - "LE COMPTE EST DEDANS"

Distance de deux fractions

4.2.1 - Première phase

a) Reprise du jeu de l'activité précédente (4.1.3) avec de nouvelles règles (encadrement d'une fraction entre 2 naturels, définition de l'intervalle)

Les enfants jouent une partie de la même manière que dans la séance précédente (équipe contre équipe avec 1 représentant). Lorsque les sommes sont données et l'évaluation vérifiée, l'enseignant demande aux enfants : "Est-ce que cette fraction est grande petite ? Si elle désigne une longueur, pourriez-vous la construire ou la montrer entre deux doigts quand je vous donnerai une unité ?"

b) Nouvelle consigne.

"Nous allons rejouer, mais au lieu de trouver le bon résultat d'une somme, vous allez en chercher deux entre lesquels vous pensez que se trouve le résultat :

- un nombre dont vous êtes sûr qu'il est plus petit
- un nombre dont vous êtes sûrs qu'il est plus grand

Exemple :

"Si la somme des fractions proposées est $125/60$, quelles pourraient être vos réponses ?

$$. < 125/60 < .$$

Il y en a beaucoup. Trouvez en d'autres.

Information apportée par l'enseignant.

La maîtresse choisit une réponse donnée, par exemple $1 < 125/60 < 4$ et demande : "n'y-a-t-il qu'une fraction entre ces nombres ? Pouvez-vous en écrire d'autres ?

Toutes les fractions qui se trouvent entre ces deux nombres forment un "intervalle".

.../...

Remarque : Il est clair que les enfants peuvent théoriquement à ce moment-là savoir si une fraction est ou non, dans un intervalle, mais ils ne savent pas encore placer une fraction dans un intervalle ou s'il y en a beaucoup ou non.

4.2.2 - Deuxième phase : Premier jeu et élaboration des nouvelles règles. Recherche d'un intervalle dans lequel se trouve une somme de 2 ou plusieurs fractions. Comparaison des intervalles.

a) Consigne : L'enseignant écrit sur le tableau la somme suivante de fractions : (toujours choisies parmi la suite proposée dans l'activité précédente)

$$48/5 + 22/3 + 8/5$$

et demande aux enfants :

"vous allez trouver un intervalle dans lequel se trouve votre résultat et nous vérifierons ensemble".

b) Déroulement : Tous les enfants cherchent sur leur cahier (chacun travaille pour son équipe). Lorsque tous ont trouvé une réponse, ils se réunissent par équipe pour choisir - après discussion - l'un des intervalles trouvés. Ils désignent un représentant qui va écrire cet intervalle sur le tableau.

c) Elaboration des règles du jeu.

Après une correction collective - comparaison de la somme avec les intervalles donnés par les représentants des deux équipes - il faut savoir qui a gagné :
Les enfants proposent des critères en citant d'ailleurs le jeu "le compte est bon".

L'enseignant dit : "on pourrait appeler ce jeu "le compte est dedans" et on retient finalement

la première règle : si le résultat est dans l'intervalle proposé, l'équipe gagne 1 point.

la deuxième règle : si les 2 équipes ont donné un intervalle juste, celle qui a donné l'intervalle le plus petit gagne 1 point de plus.

.../...

4.2.3. Troisième phase : Nouveau jeu, essai des nouvelles règles. "Le compte est dedans". Recherche d'une stratégie qui permet d'évaluer très vite un résultat.

a) Consigne : "vous allez jouer de nouveau mais cette fois-ci je laisserai très peu de temps pour proposer un intervalle. Essayez de trouver une stratégie qui vous permettra d'évaluer très vite ce résultat, sans faire de calculs. Vous écrirez l'intervalle sur votre cahier et dès que je taperai dans les mains, un représentant ira écrire cet intervalle au tableau.

Voici la somme :

$$1/3 + 3/2 + 15/2$$

b) Déroulement : Chaque enfant cherche individuellement. Au bout de 30 secondes environ, l'enseignant fait poser les crayons et envoie un élève de chaque équipe au tableau écrire l'intervalle qu'il a trouvé (la concertation aura lieu entre les parties).

Pour vérifier si cet intervalle est juste, c'est l'enseignant qui donnera le résultat de la somme (calculé à l'avance).

$$1/3 + 3/2 + 15/2 = 56/6$$

Remarque : Cette pratique a pour but de ne pas contamment reproduire, avec les enfants, la démarche de calcul qu'ils doivent remplacer par une stratégie d'évaluation plus rapide.

Pour que celle-ci apparaisse, il faut jouer un grand nombre de parties et très vite.

On peut alors proposer une somme comme :

$$6/6 + 8/4 + 12/5$$

qui fournit aussitôt :

$$1 + 2 \leq S \leq 1 + 2 + 2$$

$$\text{ou } 1 + 2 + 1 \leq S \leq 1 + 2 + 3$$

On peut aussi augmenter le nombre des termes de la somme

Exemple : $1/2 + 3/3 + 5/2 + 10/2$

.../...

4.3.1- Validation de la stratégie mise en place lors du jeu précédent

a) Consigne : "Sauriez-vous prouver que ce moyen d'encadrer une somme est correct ? vous allez réfléchir un petit moment et ceux qui trouvent une preuve la soumettront à leurs camarades".

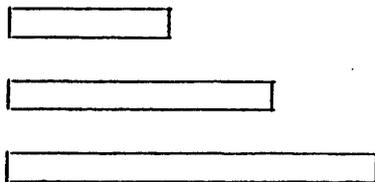
b) Déroulement : Les enfants cherchent individuellement sur leur cahier.

Ceux qui trouvent ou croient trouver la preuve demandée, viennent à tour de rôle au tableau la proposer à leurs camarades.

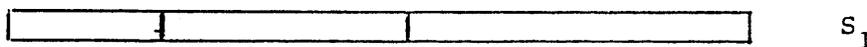
Une discussion peut alors s'engager entre les enfants les uns approuvant la preuve proposée, les autres la réfutant.

c) Vérification possible pour les enfants (si personne ne trouve)

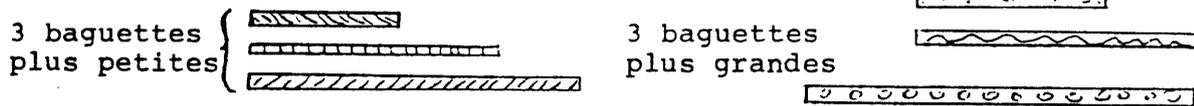
1°) L'enseignant découpe 3 baguettes dont les longueurs sont désignées par des fractions :



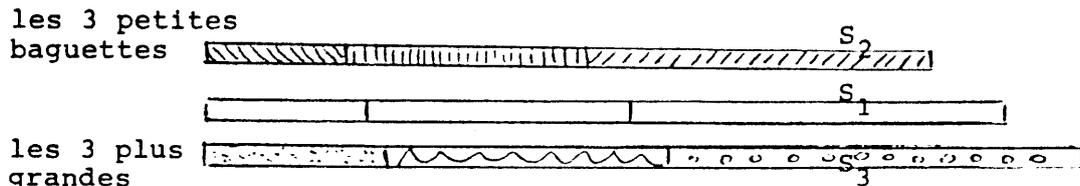
Pour faire la somme, on les met bout à bout.



Puis l'enseignant découpe 3 baguettes plus petites que chacune d'elles et 3 baguettes plus grandes :



On les met bout à bout et on constate que



$$S_2 < S_1 < S_3.$$

.../...

4.3.2 - Résultats.

Tous les enfants ont compris que l'on peut encadrer une somme entre deux entiers. Quelques-uns seulement savent trouver un intervalle par la stratégie indiquée dans la leçon.

Note : Ces 3 activités sont très difficiles pour les enfants et il est possible d'en faire l'économie si le niveau de la classe ne le permet pas.

4.4 - ENCADREMENT D'UN RATIONNEL DANS N

4.4.1 - Première phase : "Initiation au jeu"

a) Consigne et jeu : "Nous allons apprendre un jeu qui va se jouer entre deux équipes. Mais pour bien en comprendre les règles, 2 élèves vont venir d'abord jouer devant toute la classe.

Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche.

Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela, il pose des questions. Par exemple : "Est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ?"

A n'a le droit de répondre que par "oui" ou par "non". B pose des questions jusqu'à ce qu'il ait trouvé les 2 entiers consécutifs entre lesquels se trouve la fraction. A ce moment là, A montre son papier et tous les enfants comparent sa fraction à l'intervalle trouvé par B.

Vous allez jouer à ce jeu, mais maintenant il opposera 2 équipes A et B formées chacune d'une moitié de classe (L'enseignant constitue rapidement les équipes).

b) Déroulement du jeu.

Une équipe choisit une fraction que tous les enfants de l'équipe écrivent sur leur cahier de brouillon. Les enfants choisissent un représentant qui va jouer au tableau pour son équipe. Ce sont les deux représentants qui s'interrogent et répondent tour à tour aux questions. Cependant, ils peuvent se faire aider par leur équipe (par une discussion, soit avant le démarrage d'une partie, soit à la fin, si les équipes le demandent et sont d'accord). L'équipe qui aura trouvé la pre-

.../...

mière l'intervalle de 1 dans lequel se trouve la fraction de l'autre a gagné.

Remarques : 1°) les intervalles choisis par les 2 représentants doivent être écrits sur le tableau de manière à ce que tous les enfants les voient : le tableau est partagé en 2 parties, une pour chaque équipe.

- Par exemple, si la fraction choisie par l'équipe B est $25/30$ et si le représentant de l'équipe A demande : "est-ce que votre fraction est entre 0 et 7 ?", il écrit :

<u>Equipe A</u>		<u>Equipe B</u>
[0 ; 7[oui	
[0 ; 4[oui	
[2 ; 4[non	

et l'adversaire répond : "oui".

Si l'enfant avait demandé : "est-ce que votre fraction est entre 5 et 10 ?", il aurait écrit [5 ; 10[et l'équipe adverse aurait répondu "non". Alors l'enfant barre l'intervalle :

[5 ~~→~~ 10[

- Si la fraction choisie est $25/5$, l'intervalle de 1 dans lequel elle se trouve est désigné : [5;6[et dans ce cas, l'équipe adverse répond qu'elle est "attrapée" parce qu'elle se trouve sur le premier point (5) qui désigne l'intervalle.

- Si la fraction choisie est $30/5$ et que l'intervalle demandé soit [5 ; 6[, l'équipe adverse répond "non". Elle sera attrapée s'ils demandent l'intervalle [6 ; 7[

Si une fraction est encadrée, l'équipe qui l'a encadrée marque 1 point.

Si une fraction est "attrapée" l'équipe qui l'a attrapée marque 2 points.

2°) Apparition de stratégies dans le choix des intervalles.

Ce premier jeu par équipe permet la mise en place

.../...

de stratégies intéressantes dans le choix des intervalles. En effet, à la première partie, les représentants posent généralement des questions au hasard qui, très souvent, se recourent et font perdre leur équipe.

Exemple : 1ère question : "Est-ce que la fraction est entre $[5$ et $9[$?"

2ème question : "Est-ce que la fraction est entre $[3$ et $9[$?"

Ce qui déclenche parmi les enfants d'une même équipe des discussions très vives.

Très souvent, dès la deuxième partie, ils procèdent par découpage binaire :

Exemple : "Est-ce qu'elle est entre $[0$ et $5[$? Si le représentant de l'autre équipe répond "non", ils évitent de demander : "est-ce qu'elle est entre 5 et 10 ?" comme cela se produit souvent au début du jeu. Il est fréquent qu'après 3 ou 4 parties entre équipes, les enfants arrivent à situer la fraction en un nombre minimum de questions.

c) Remarques :

1°) Si la consigne, qui est longue, n'a pas été bien comprise, le jeu par équipes fournit à l'enseignant l'occasion de l'explicitier mieux, de s'assurer que tous les enfants écrivent bien les intervalles et qu'ils savent tous jouer.

2°) Il faut recommencer plusieurs fois le jeu par équipes pour que tous les enfants en aient bien compris les règles (il est possible de faire 3 ou 4 parties).

3°) Le choix de la fraction en début de partie provoque toujours des discussions intéressantes car il arrive que des enfants proposent une fraction qui n'est pas comprise entre 0 et 10. Ceux qui ne sont pas d'accord sont obligés, pour refuser la fraction proposée, de prouver aux autres qu'elle n'est pas située entre 0 à 10.

.../...

4°) Très vite, les enfants évitent de choisir des fractions que l'on peut "attraper" car ils ne veulent pas faire gagner 2 points à leurs adversaires.

4.4.2 - 2ème phase : jeu 2 par 2.

a) Présentation.

Après 3 ou 4 parties de jeu par grandes équipes, l'enseignant place les enfants par groupes de 4 afin qu'ils jouent 2 contre 2.

b) Déroulement.

Chaque groupe de 2 note sur une feuille, d'une part la fraction qu'il choisit, d'autre part, les intervalles qu'il demande aux adversaires pour localiser leur fraction.

L'enseignant n'intervient dans cette phase que si les enfants font appel à lui, soit pour arbitrer un conflit, soit pour apporter des précisions ou des renseignements.

4.4.3 - Troisième phase : Synthèse collective (15 à 18 mn)

a) Présentation.

Pendant la phase précédente, l'enseignant a préparé le tableau suivant au tableau noir :

Fraction attrapée		Fraction encadrée	
fraction choisie	intervalle demandé	Fraction choisie	intervalle demandé

.../...

Il interrompt le jeu par équipe de 4 au bout de 5 à 8 mn et demande aux enfants :

"qui a attrapé une fraction ?"

puis "qui a encadré une fraction ?"

Il inscrit à mesure les résultats : les fractions "encadrées" ou "attrapées" sont notées ainsi que l'intervalle demandé. Tous les enfants vérifient ces résultats au fur et à mesure et corrigent s'il le faut, sous la conduite de l'enseignant.

4.4.4 - Résultats.

A la fin de cette séance, tous les enfants savent jouer et presque tous réussissent à localiser des fractions dans des intervalles de 1.

MODULE 5 :
LES NOMBRES DECIMAUX, CONSTRUCTION

5.1 - ENCADREMENTS D'UN RATIONNEL PAR DES RATIONNELS :
FRACTIONNEMENT D'UN INTERVALLE.

5.1.1. Première phase

a) Présentation du problème et rappel du jeu de la séance précédente : (10 mn)

"Au cours de la séance précédente, nous avons appris comment on peut localiser une fraction en cherchant entre quels entiers elle se trouve.

Pensez-vous qu'il peut être utile de savoir entre quels entiers une fraction se trouve ? Pourquoi ?"

Exemples : 1) - L'encadrement peut servir à dire si le nombre est grand ou petit

- La comparaison aux entiers est utile dans les mesures, dans l'évaluation.

2) L'encadrement est-il utile pour comparer 2 fractions ? par exemple $\frac{156}{7}$ et $\frac{149}{6}$.

1ère méthode de comparaison : La réduction au même dénominateur.

2ème méthode de comparaison : L'encadrement entre 2 entiers.

Quelle est la méthode la plus courte ?

3) L'encadrement permet aussi d'estimer la somme de plusieurs fractions. Quel encadrement peut-on donner de la somme quand on connaît l'encadrement de chaque fraction.

Remarque : Si les séances 14, 15 et 16 n'ont pu être faites à cause de leur difficulté ; l'enseignant n'évoquera pas le (3) (Estimation de la somme).

b) Consigne : "Nous allons refaire le jeu de la séance précédente. Les équipes A et B vont choisir une fraction et désigner un représentant qui viendra au tableau poser les questions".

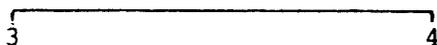
.../...

c) Déroulement : Le jeu se déroule exactement de la même manière (équipe A contre équipe B avec un représentant pour chacune d'elles) jusqu'à ce que les fractions soient "encadrées" ou "attrapées". Mais les fractions restent cachées et à ce moment-là, l'enseignant arrête le jeu.

5.1.2. Deuxième phase : 10 mn. : Recherche d'un intervalle plus petit.

a) Présentation et consigne : "Vous venez d'encadrer les fractions dans un intervalle de 1 (l'intervalle $[3;4[$ par exemple).

Pensez-vous qu'il n'y a que la fraction cherchée dans cet intervalle ?



Trouvez-en d'autres.

b) Déroulement : L'enseignant laisse les enfants chercher individuellement ou par groupes de 2, pendant une ou deux minutes.

Puis il leur demande de venir écrire (ou il écrit lui-même) sur le tableau les fractions qu'ils ont trouvées et qui se situent aussi dans cet intervalle.

Les enfants constatent qu'il y en a beaucoup et que l'intervalle de 1 qu'ils ont trouvé ne permet pas de situer avec précision la fraction cherchée. Ils comprennent alors - certains même le disent - qu'il va falloir trouver un intervalle plus petit.

5.1.3. Troisième phase : Recherche d'intervalles de plus en plus petits. (45 mn.)

a) Consigne : "Nous allons ajouter une nouvelle règle au jeu : pour gagner, il faudra que la fraction soit encadrée dans l'intervalle le plus petit possible. Vous allez donc essa-

.../...

*au moment
de l'arrêt*

yer de trouver des intervalles plus petits et de les désigner".

b) Déroulement :

. Les enfants travaillent par groupes de 2 ou 3 (il y en a 4 ou 5 par équipe). Certains groupes ont l'idée d'écrire les bornes de l'intervalle en fractions (par exemple $\frac{6}{2}$ et $\frac{8}{2}$ s'il s'agit de l'intervalle $[3;4[$. Mais il arrive aussi que beaucoup d'enfants n'y pensent pas enaient des difficultés. Pour éviter le découragement, l'enseignant peut le leur suggérer au bout d'un moment de recherche, ce qui relance l'intérêt.

Dès qu'ils ont trouvé et désigné un intervalle plus petit, ils se réunissent de nouveau en deux grandes équipes A et B dans lesquelles chaque groupe propose l'intervalle qu'il a trouvé. Les enfants d'une même équipe doivent donc discuter et se mettre d'accord pour choisir, parmi les 4 ou 5 intervalles proposés, celui qu'ils jugent le plus petit.

Alors, les deux représentants des équipes reviennent au tableau et le jeu continue :

"est-ce que votre fraction est entre :

$[\frac{6}{2}$ et $\frac{7}{2}[$? (par exemple)

. Pour répondre à la question posée, les enfants demandent généralement à se réunir de nouveau.

c) Remarques :

1°) Pour répondre à cette première question, ils font souvent appel à l'enseignant car ils ne trouvent pas toujours ou ne sont pas toujours d'accord. Certains pensent à réduire les fractions au même dénominateur (la fraction qu'ils ont choisie et celles qui sont proposées comme bornes de l'intervalle), les autres répondent au hasard.

Pour entretenir le plaisir du jeu et le désir de continuer, l'enseignant peut les aider en leur donnant quelques indications (suggérer la réduction au même dénominateur, par exemple, s'ils n'y ont pas pensé).

.../...

2°) Il est rare qu'au cours de cette séance, ils puissent proposer plus de 2 intervalles. En effet, les calculs importants (qu'ils ne maîtrisent pas encore très bien) prennent beaucoup de temps car il faut :

- qu'ils trouvent des intervalles plus petits et les désignent
- qu'ils cherchent ensuite si les fractions se trouvent dans ces intervalles, ce qui nécessite des réductions au même dénominateur souvent compliquées
- enfin, pour savoir quelle est l'équipe qui a gagné, qu'ils comparent les deux derniers intervalles désignés.

Aussi peu d'enfants sont-ils capables, à la fin de cette première séance de réduire aisément des intervalles et de dire si une fraction se trouve dans un intervalle donné.

Pour une meilleure compréhension du jeu, et pour que tous les enfants aient envie de participer, il est donc souhaitable d'y consacrer une ou même deux autres séances suivant les stratégies utilisées.

5.1.4. Quelques stratégies observées.

1°) Il est rare qu'au cours du premier jeu, tous les enfants écrivent les bornes des intervalles avec des fractions à dénominateur 10, 100, 1000... C'est pourquoi les calculs sont longs et difficiles.

En effet, il est arrivé qu'à la première séance une équipe propose l'intervalle : $[\frac{6}{40} ; \frac{7}{40}[$ pour encadrer une fraction qui se trouve entre 0 et 1. Et comme cette fraction est $\frac{12}{37}$, il est facile de comprendre les difficultés de calculs que rencontrent les enfants !

2°) Au cours d'une première séance, l'une des équipes (A), a désigné les intervalles avec des fractions de dénominateur 64 parce qu'elle a fait des découpages binaires : un groupe de 2 de cette équipe avait d'abord découpé l'intervalle en 2 puis en 4 en le désignant.

Pendant la concertation en équipe, les autres en-
.../...

fants ont dit : "mais on pourrait encore faire des intervalles plus petits en continuant à partager en 2 !" et ils ont successivement essayé des découpages en 8 puis en 16, puis en 32 et ils se sont arrêtés à 64, persuadés que leur intervalle serait plus petit que celui de l'autre équipe !

Dans le même temps l'autre équipe (B) a proposé des intervalles désignés par des fractions à dénominateur 1000. Pourquoi ?

Parce qu'un groupe de 2 fillettes de cette équipe avait d'abord découpé l'intervalle de 1 en 10. (pour faire comme sur leur règle ont-elles dit !). Puis, pour faire toujours comme sur leur règle, elles ont désigné les intervalles en centièmes puis en millièmes. Leurs calculs ont été vite faits !

Lors de la concertation en équipe, les trois autres groupes qui, eux, avaient fait des découpages de l'unité en 10, ou 4 ou 2, ont adopté aussitôt le découpage en millièmes.

Lorsque les représentants de ces deux équipes sont allés proposer leurs intervalles les enfants de l'équipe A ont pu répondre très vite. Par contre ceux de l'équipe B, qui avaient proposé des intervalles en millièmes, ont dû faire des calculs longs et difficiles, ce qui leur a fait dire, à la fin, aux autres :

"la prochaine fois, trouvez quelque chose de plus simple. Posez-nous des questions faciles comme les nôtres !" L'enseignant est intervenu alors pour demander pourquoi c'était plus facile de répondre aux questions posées par l'équipe B qu'à celles posées par l'équipe A. Tous ont compris qu'avec des fractions à dénominateur 10, 100, 1000, ... les calculs étaient beaucoup plus faciles et d'un commun accord, ils ont demandé à rejouer le lendemain ! Au cours de la 2ème séance, les deux équipes ont fait toutes les deux des découpages en 100, 1000, 10.000... mais ce jour-là, l'une des équipes avait choisi la fraction $\frac{14}{10}$ (qui a été "attrapée" très vite) et l'autre fraction $\frac{83}{9}$! ce qui a encore compliqué les calculs de l'équipe adverse et retardé ses réponses ! (L'activité suivante décrira les réactions des enfants face à ce problème).

.../...

5.1.5. Résultats.

- A la fin de cette activité, les enfants ont compris :
- qu'on peut localiser une fraction dans un intervalle plus petit que 1.
 - que dans cet intervalle, il y a beaucoup de fractions
 - que l'on peut réduire cet intervalle.

Mais suivant les intervalles ou les fractions choisis, plus ou moins d'enfants maîtrisent les calculs et sont capables de trouver aisément un intervalle plus petit.

5.1.6. Note :

Si le jeu, ainsi décrit, est trop difficile et trop long (cela arrive avec certaines classes), il est plus simple de faire jouer les équipes, l'une après l'autre :

- au lieu, pour chaque équipe, de poser des questions et de répondre, en même temps, à celles posées par l'équipe adverse, une seule équipe choisit d'abord une fraction (l'équipe A par exemple). L'autre, (l'équipe B) pose les questions qui vont lui permettre de trouver la fraction choisie par A. L'équipe A, elle, répond à ces questions.
 - ainsi, pour une équipe, il faut seulement trouver des intervalles, et pour l'autre, seulement répondre aux questions.
 - Dans ce cas, il est nécessaire de fixer un nombre de questions pour chacune des équipes (de 3 à 5 par exemple) et de comparer les derniers intervalles proposés.
- Le jeu recommence : c'est l'équipe B qui choisit la fraction et l'équipe A qui propose les intervalles.

.../...

5.2 - ENCADREMENTS D'UN RATIONNEL DANS Q :
 - RACCOURCISSEMENT DES INTERVALLES
 - FILTRES DECIMAUX

5.2.1. Première phase : Reprise du jeu de la séance 20.

a) Consigne : La même consigne est reprise.

b) Déroulement : Le jeu se déroule de la même manière (Si les 2 fractions choisies à la séance précédente n'ont pas encore été attrapées, les enfants désirent continuer ce même jeu).

Il faut cependant distinguer 2 cas :

1°) Les enfants ont fait, dans la séance précédente, des découpages en dixièmes, centièmes, millièmes, etc...

2°) Ils n'ont pas fait ces découpages et proposent encore des intervalles avec des fractions à dénominateur quelconque.

Chaque cas est différent aussi si la fraction choisie est décimale ou non.

Premier cas : découpages décimaux.

Le jeu se déroule plus rapidement et est beaucoup plus passionné car les calculs se font plus vite et ne sont pas une entrave au déroulement. Il est possible alors de faire plusieurs parties.

La fraction choisie est décimale : elle va être très vite attrapée et les enfants vont vouloir arrêter le jeu et recommencer une autre partie.

La fraction n'est pas décimale : Les enfants, qui commencent à bien maîtriser les calculs, demandent des intervalles de plus en plus petits (généralement, ils vont jusqu'au 1/10000 sans se lasser). Mais à ce moment-là, l'équipe qui cherche la fraction, commence à se poser des questions, à faire des remarques (l'autre équipe jubile).

C'est ce qui s'est passé pour la fraction $\frac{83}{9}$ (cf. séance précédente) qui n'a pu être "attrapée" malgré des

.../...

intervalles très petits :

Les enfants ont dit : "elle n'a sûrement pas un dénominateur avec des zéros, ça doit être 7 ou 8 ou 9 !" et ils ont voulu arrêter et voir la fraction - ce qui a provoqué une discussion très animée. Certains ont dit que l'on ne l'attraperait jamais "parce que 10, 100, 1000... ne sont pas des multiples de 9". D'autres ont affirmé le contraire en disant que ce serait sûrement très long mais qu'à force de trouver des intervalles de plus en plus petits on finirait bien par l'attraper.

Le problème est resté ouvert.

Les réactions des enfants avaient été exactement les mêmes l'année précédente lorsque l'une des fractions choisies était : $\frac{22}{7}$.

Deuxième cas : découpages non décimaux.

Si aucune des deux équipes n'a pas encore pensé à faire des découpages en dixièmes, centièmes, millièmes... (c'est arrivé une fois), le jeu devient très vite long et pénible. Avant que s'installe une lassitude chez les enfants (voire un découragement bien compréhensible), il est souhaitable que l'enseignant intervienne, arrête le jeu et propose à toute la classe de réfléchir à une nouvelle stratégie : il suggère, par exemple, de trouver des questions (pour désigner les intervalles) qui permettent des calculs plus rapides.

Après un petit moment de réflexion et de discussion collective, si personne ne propose le découpage en dixièmes, centièmes... alors l'enseignant peut proposer un autre jeu dans lequel il joue lui-même contre la classe :

- soit c'est lui qui choisit une fraction qu'il inscrit derrière le tableau et ce sont les enfants qui proposent des intervalles (que chacun écrit sur son cahier de brouillon)

- soit ce sont les enfants qui la choisissent ensemble, l'écrivent sur leur cahier de brouillon et c'est l'enseignant qui pose des questions.

.../...

Dans le premier cas, il interroge quelques enfants, écrit les intervalles proposés sur le tableau et répond uniquement à ceux qui ont choisi des intervalles décimaux. Dans le deuxième cas, il propose lui-même des intervalles - et uniquement avec des fractions à dénominateur 10, 100, 1000... pour encadrer la fraction.

5.2.2. Remarques :

1°) Les enfants reprennent plaisir au jeu et s'aperçoivent vite que l'enseignant a privilégié certains intervalles. Ils en font généralement la remarque en disant qu'"il suffit d'ajouter des zéros", ils voient que le jeu est plus rapide, donc plus intéressant.

2°) Pour maintenir l'intérêt des enfants, on peut apporter quelques variables au jeu :

- les enfants peuvent jouer :

- . soit un contre un
- . soit deux contre deux.

3°) Il arrive très souvent que la fraction proposée soit une fraction décimale comme $\frac{990}{100}$ par exemple ; les enfants qui encadrent d'abord dans des intervalles en dixièmes trouvent $\frac{99}{10}$. La fraction est attrapée, mais ce n'est pas celle-là qui a été choisie. Les enfants disent alors : "elle est attrapée, mais ce n'est pas celle-là !". Le représentant, aidé de toute son équipe propose alors des fractions égales jusqu'à ce qu'il trouve $\frac{990}{100}$.

5.2.3. Résultats :

A la fin de cette séance, tous les enfants ont compris la nécessité de choisir des intervalles en dixièmes,

.../...

centièmes, millièmes. Ils arrivent facilement :

- soit à attraper une fraction (lorsqu'elle est décimale)
- soit à l'encadrer dans des intervalles très petits (de l'ordre du dix millième ou cent millième).

Enfin, ils ont pris conscience qu'il y a des fractions faciles à attraper, et d'autres non. Certains en ont même désigné spontanément.

* Suivant la difficulté des fractions et des intervalles choisis par les enfants, il est presque toujours nécessaire de poursuivre le jeu sur deux séances (à la demande des enfants, d'ailleurs).

5.3 - REPRESENTATION SUR LA DROITE Q.

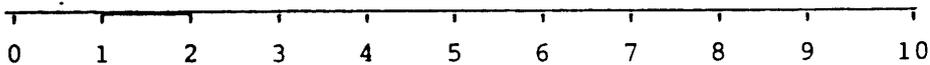
5.3.1. Première phase : 1er jeu (20 minutes)

Consigne : "Aujourd'hui, c'est moi qui vais choisir une fraction que j'inscrirai derrière le tableau. Vous devrez attraper cette fraction en me proposant des intervalles. Je ne répondrai que par "oui" ou "non".

Déroulement : L'enseignant choisit une fraction (145/100 par exemple) l'inscrit derrière le tableau noir. Les enfants travaillent par groupes de 2 ou de 3 et inscrivent les premiers intervalles sur leur cahier. Lorsque l'enseignant s'est assuré que tous les groupes ont choisi un intervalle, il les interroge à tour de rôle.

Les enfants demandent : "Est-ce qu'elle est entre [0 et 5[...? entre [0 et 3[?..." ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils trouvent l'intervalle de 1 ([1 ; 2[pour la fraction choisie ci-dessus)

L'enseignant dessine une droite sur le tableau, représente les différentes divisions et demande à un enfant de venir montrer où se trouve la fraction.



Il dessine cet intervalle [1 ; 2[en couleur. Puis il demande aux enfants de trouver des intervalles plus petits.

A chaque étape la valeur de l'intervalle est indiquée par les enfants (à la demande de l'enseignant).

Le jeu continue jusqu'à ce que soit proposé l'intervalle $[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$. L'enseignant dit alors "attrapée !".

Plusieurs stratégies apparaissent :

1°) Les enfants proposent directement des intervalles en cen-

.../...

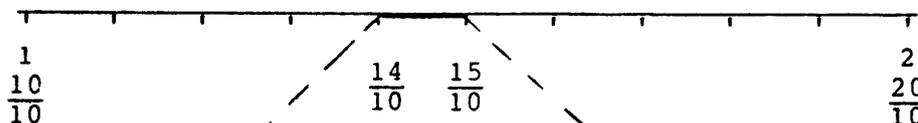
tièmes : par exemple $[\frac{100}{100} ; \frac{150}{100}[$
 puis progressivement $[\frac{100}{100} ; \frac{125}{100}[$... ainsi de suite jusqu'à
 $[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$.

2°) Ils proposent d'abord des intervalles en dixièmes.

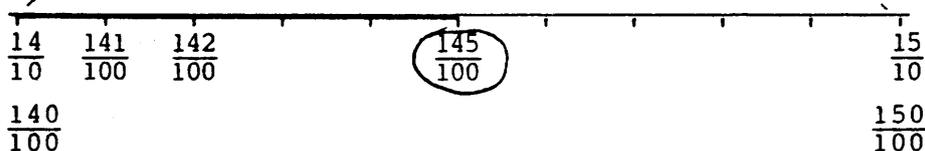
Par exemple :

$[\frac{10}{10} ; \frac{15}{10}[$ encadrée
 ~~$[\frac{10}{10} ; \frac{13}{10}[$ (l'enseignant barre)~~
 ~~$[\frac{13}{10} ; \frac{14}{10}[$~~
 $[\frac{14}{10} ; \frac{15}{10}[$ encadrée.

A ce moment-là, ils proposent des centièmes.
 Chaque fois que les enfants proposent un nouveau découpage,
 l'enseignant leur demande de venir au tableau écrire les bornes
 en fractions.



A ce stade, les enfants se rendent compte qu'il est très difficile de partager l'intervalle $[\frac{14}{10} ; \frac{15}{10}[$ en 10 parties égales, et proposent un agrandissement de cet intervalle qu'ils découpent en 10 parties égales. A ce moment encore, les bornes



sont marqués en centièmes (par un enfant) ainsi que les graduations intermédiaires.

Ils font de nouvelles propositions :

~~$[\frac{140}{100} ; \frac{142}{100}[$~~ ~~$[\frac{144}{100} ; \frac{145}{100}[$~~
 ~~$[\frac{142}{100} ; \frac{144}{100}[$~~ $[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$ attrapée.
 .../...

5.3.2. Placement sur la droite (15 minutes)

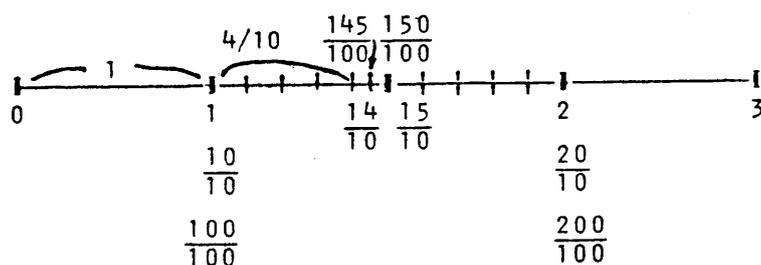
a) Consigne : "Nous allons supposer que cette fraction $\frac{145}{100}$ désigne la longueur d'un ruban que nous tracerons en rouge. Si je place ce ruban le long d'une droite graduée de 0 à 10, $\frac{145}{100}$ désigne aussi le point où arrive l'extrémité du ruban sur la droite.

Nous allons placer exactement cette extrémité, c'est à dire $\frac{145}{100}$ ".

b) Déroulement : C'est une phase collective. L'activité se déroule très rapidement sur le mode "questions-réponses".

Sur la droite dessinée au tableau, un enfant vient colorier l'intervalle $[0,1[$ en rouge, puis propose de partager l'intervalle $[1,2[$ en 10, ce qui est fait aussitôt (soit par l'enseignant soit par lui). Les bornes sont marquées en fractions comme cela a été fait dans la première phase (paragraphe c). Il continue le trait rouge jusqu'à $\frac{14}{10}$ puis dit "il faut encore découper en 10 pour avoir des centièmes".

L'enseignant lui demande ce qu'il faut découper en 10 et l'enfant montre l'intervalle $[\frac{14}{10}; \frac{15}{10}[$ et marque la fraction $\frac{145}{100}$. Il trace enfin en rouge l'intervalle $[\frac{140}{100}; \frac{145}{100}[$



L'enseignant demande alors :

"Pour mesurer ce ruban, combien faut-il d'unités ?
 combien de $1/10$ à partir de 1 ?
 combien de $1/100$?

et inscrit sur le tableau

nombre d'unités	→	1
nombre de $1/10$	→	4 ou $4/10$
nombre de $1/100$	→	5 ou $5/100$

.../...

Il dit alors : "voilà ce que nous avons mesuré :

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} "$$

et demande à un enfant de venir faire cette addition au tableau.
L'enfant écrit :

$$\frac{100}{100} + \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = \frac{145}{100}.$$

Remarque : Les enfants disent très souvent : "on a décomposé la fraction !"

5.3.3. Deuxième jeu : (15 minutes)

a) L'enseignant propose de jouer une autre fois. Pour ce jeu, la fraction choisie doit être un peu différente de la première, par exemple $\frac{975}{1000}$.

Le jeu se déroule exactement de la même manière : la fraction est placée sur la droite puis décomposée :

$$\frac{9}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$\frac{900}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{975}{1000}.$$

b) L'enseignant demande ensuite aux enfants de décomposer les fractions qui avaient été attrapées dans l'activité précédente, ici : $\frac{99}{10}$. Chacun écrit sur son cahier :

$$\frac{99}{10} = \frac{90}{10} + \frac{9}{10}$$

$$9u + \frac{9}{10}$$

et place $\frac{99}{10}$ sur la droite.

Remarque : Certains enfants s'aperçoivent alors que la fraction $\frac{83}{9}$ qu'ils avaient aussi choisie dans l'activité précédente, ne peut pas être placée sur cette droite graduée en $1/10$, en $1/100$ $1/1000...$

.../...

5.3.4. Troisième jeu : (15 minutes)

a) Consigne : "Pourrait-on maintenant deviner très vite une fraction en posant des questions relatives à sa décomposition ? Vous allez essayer de trouver ces questions".

b) Déroulement : Un élève joue contre ses camarades. Il sort de la classe pendant que les autres choisissent ensemble une fraction qu'ils inscrivent chacun sur leur cahier ($\frac{243}{100}$ par exemple).

L'enfant revient et essaie de poser à tour de rôle à ses camarades des questions qui lui permettront de trouver très vite la fraction. Après quelques tâtonnements et essais infructueux, il demande (aidé quelquefois par l'enseignant) :

"combien y-a-t-il d'unités ?

"combien de $\frac{1}{10}$?

"combien de $\frac{1}{100}$? etc..."

Ses camarades doivent l'avertir quand la fraction est attrapée. Il doit alors l'écrire sur le tableau (à l'aide des réponses qu'il a reçues) et la placer sur la droite.

c) Remarques :

1) Les enfants notent les renseignements qu'ils reçoivent de manière très différente.

Voici quelques exemples de notations qui ont été utilisées :

baguettes de 1 + 2

baguettes de $\frac{1}{10}$ + 4

baguettes de $\frac{1}{100}$ + 3

ou encore : 2 u

4 dix.

3 cent.

ou encore : 2

$\frac{4}{10}$

$\frac{3}{100}$

ou encore :

l'enfant écrivait à mesure dans l'ordre

2 4 3 2u
 ————
 4 + $\frac{1}{10}$
 3 + $\frac{1}{100}$

.../...

2) L'enseignant n'intervient pas dans ce jeu. Ce sont les enfants qui, de leur place protestent si les réponses données ne sont pas correctes ou si l'enfant qui cherche la fraction se trompe.

3) Le jeu peut recommencer deux ou trois fois, les enfants ne se lassent pas. C'est généralement l'heure qui arrête l'activité.

4) Il est intéressant de changer l'ordre dans lequel les renseignements sont demandés (combien de millièmes ? combien de centièmes ? combien d'unités ?...) afin que les enfants s'aperçoivent que cela n'empêche pas de trouver la fraction.

5) Les fractions choisies par les enfants au cours de cette activité seront relevées par l'enseignant car elles seront utilisées dans l'activité suivante.

5.3.5. Résultats :

Les enfants ont appris à placer des fractions sur une droite graduée. Beaucoup savent les placer vite et sûrement. Quelques-uns ont encore des difficultés.

Ils ont pris conscience que certaines ne pouvaient pas être placées sur une droite graduée en $1/10$, $1/100$, $1/1000$...

A la fin de cette activité, ils savent tous décomposer une fraction et donner le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes...

5.4 - PASSAGE DE L'ECRITURE EN FRACTION DES RATIONNELS DECIMAUX A L'ECRITURE DECIMALE

5.4.1. : Reprise du jeu de l'activité précédente (15 minutes)

a) Consigne : la même consigne est reprise.

b) Déroulement :

Un enfant sort, ses camarades choisissent une fraction qu'il devra trouver en posant les mêmes questions que lors de l'activité précédente.

Mais alors l'enseignant propose de marquer les renseignements demandés dans le tableau suivant (tableau A) qui servira pour chaque jeu.

valeur des intervalles	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	
	0	2	3	9	*	$\frac{239}{1000}$

(Tableau A)

Par exemple, si la fraction choisie est $\frac{239}{1000}$, l'enfant qui demande le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes, de millièmes etc... place 0 dans la colonne 1, 2 dans la colonne $\frac{1}{10}$, 3 dans la colonne $\frac{1}{100}$, 9 dans la colonne $\frac{1}{1000}$ et il marque la fraction trouvée en face.

Un ou deux autres enfants peuvent jouer encore et inscrire les renseignements et la fraction dans le tableau A.

5.4.2. Ecriture des fractions dans le tableau A (15 minutes)

a) Consigne : "Nous allons marquer dans ce tableau les fractions que vous aviez choisies et devinées dans l'activité
.../..."

précédente et que j'ai relevées".

b) Déroulement :

1) L'enseignant envoie plusieurs enfants au tableau, à tour de rôle, afin d'inscrire les fractions du jeu précédent dans le tableau A.

Il fait ensuite marquer d'autres fractions choisies soit par les enfants, soit par lui-même (par exemple

$$\frac{325}{100} ; \frac{1240}{10} ; \frac{85}{10\ 000} \text{ etc...)}$$

Remarque : Cette phase est collective. Tous les enfants participent, soit en venant au tableau, soit en faisant des remarques, soit en protestant si une erreur est faite par celui qui vient inscrire les fractions.

Elle doit se dérouler rapidement, comme un jeu.

2) D'autres exemples sont ensuite faits individuellement. L'enseignant dicte les fractions suivantes que les enfants placent dans le tableau qu'ils ont fait sur leur cahier de brouillon.

$$\frac{7345}{100} ; \frac{7345}{10} ; \frac{7345}{10000} ; \frac{7345}{1000}$$

5.4.3. Passage à l'écriture décimale (15 minutes)

a) apport d'information : L'enseignant écrit sur le tableau (en dehors du tableau A) :

7345

7345

7345

7345

et demande aux enfants s'il s'agit du même nombre. Les enfants répondent que, écrits ainsi hors du tableau A, il s'agit bien du même nombre alors qu'écrits dans le tableau A, ce sont des nombres différents.

Après discussion avec les enfants sur les moyens possibles de savoir distinguer ces nombres, l'enseignant introduit la virgule :

.../...

73,45 - 734,5 - 0,7345 - 7,345

Ils remarquent immédiatement qu'elle est toujours placée après les unités (intervalles de 1).

b) Lecture de ces nombres :

L'enseignant dit aux enfants comment se lisent ces nombres : 73 virgule 45 ou 73 unités 45 centièmes, et en fait lire plusieurs.

c) Exercices individuels de contrôle et d'entraînement (20 minutes).

L'enseignant propose les exercices suivants qui sont faits individuellement par les enfants et corrigés aussitôt. Il peut repérer ainsi tout de suite les enfants qui ont encore des difficultés et les aider.

1°) Ecrire sous forme de nombres à virgule les fractions suivantes :

$$\frac{245}{100} = \quad \frac{48}{1000} = \quad \frac{2}{100} = \quad \frac{7259}{10} =$$

2°) Ecrire sous forme de fractions :

$$\begin{array}{l} 2,5 = \quad 154,75 = \quad 13,525 \quad 3,7425 \\ 0,1 = \quad 0,01 = \end{array}$$

5.4.4. - Résultats :

Presque tous les enfants ont compris et savent écrire les fractions sous forme de nombres à virgule et inversement. Lorsque le nombre est écrit sous la forme d'écriture à virgule, ils savent dire le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes, etc...

Cette activité ne présente guère de difficultés pour eux.

5.5. CONTROLE DES CONNAISSANCES

1) Ecris sous forme d'un nombre décimal :

$$\frac{175}{100} =$$

$$\frac{26}{100} =$$

$$\frac{2}{5} =$$

$$\frac{4325}{10} =$$

$$\frac{17}{20} =$$

$$\frac{17}{2} =$$

2) Ecris sous forme d'une fraction :

$$4,7 =$$

$$154,75 =$$

$$13,525 =$$

$$0,1 =$$

$$0,02 =$$

$$12,5 =$$

3) Ecris les nombres suivants sous forme de 2 fractions égales :

$$2 = \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$15 = \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

4) Place sur une droite les fractions suivantes :

$$\frac{25}{10} ; \frac{28}{50} ; \frac{75}{50}$$

MODULE 6 :
OPERATIONS DANS LES DECIMAUX

6.1 - ADDITIONS DES NOMBRES A VIRGULE :

"LE COMPTE EST BON"

6.1.1 - Première phase :a) Présentation de la situation. Consigne :

"Un charpentier doit faire un support en planches pour un chéneau de 2,9 m. de long. Il a quatre planches qu'il ne veut pas toutes monter sur le toit.

Il doit donc choisir celles qui conviennent. Ces planches mesurent respectivement :

1 m 1,57 m 1,1 m 1,33 m 0,3 m

Vous allez aider le charpentier en cherchant quelles sont les planches qui, posées bout à bout, auront une longueur de 2,9 m ($1,57 + 1,33$)

b) Déroulement.

Les enfants se partagent le travail par groupes de 4. Lorsqu'ils ont trouvé une solution avec laquelle les 4 sont d'accord, l'enseignant arrête le jeu.

c) Inventaire des résultats. Correction.

Chaque groupe envoie un représentant au tableau exposer sa méthode dont il doit prouver la véracité aux autres (cette validation peut se faire par le passage aux fractions):

d) Remarques : Les différentes méthodes que les enfants sont susceptibles d'utiliser peuvent être inventoriées ainsi :

- écriture des nombres en fractions puis addition des fractions
- addition des nombres à virgule comme si c'étaient des entiers
- décomposition en entiers, dixièmes, centièmes, etc...
- addition des mètres, des décimètres, des centimètres séparément (en utilisant le tableau).

.../...

6.1.2. Deuxième phase : "Concours des méthodes"

a) Consigne : Vous avez réussi à additionner ces nombres à virgule. Vous avez trouvé plusieurs méthodes.

Maintenant, vous allez essayer ces méthodes dans un jeu que vous connaissez : "le compte est bon". Vous attribuerez ensuite des points à celles que vous jugerez les meilleures.

Comment estimer qu'une méthode est meilleure qu'une autre ?

- celle qui donne un résultat exact
- celle qui est plus rapide
- celle pour laquelle on peut prouver qu'elle est bonne.

b) 1er jeu :

Voici, pour le premier jeu, des nombres à virgule, et la somme que vous devez atteindre avec certains de ces nombres.

0,45 1,58 1,27 2,035 2 1,7

Somme : 5,28 → (1,58 + 1,7 + 2)

c) Déroulement.

Au début de la partie, chaque groupe de 4 choisit une ou deux méthodes (1 méthode pour 2 enfants par exemple) et l'éprouve en jouant.

Lorsque les groupes ont trouvé "le compte est bon", un enfant de chaque groupe vient - à tour de rôle - exposer sa méthode en essayant chaque fois de la valider.

Il est souhaitable qu'à chaque nouvelle partie, les enfants changent de méthodes (pour les éprouver toutes), cependant, ils peuvent réessayer les mêmes ou en inventer de nouvelles.

.../...

6.2 - ADDITIONS ET MULTIPLICATIONS DES NOMBRES DECIMAUX

6.2.1 - Autres parties possibles :2ème jeu.

0,91 0,94 0,95 0,82 1,03 1,05

Somme à atteindre : $\boxed{2,8}$ $\rightarrow (0,91 + 0,94 + 0,95)$

3ème jeu.

3,75 1,953 2,0131 0,033 1,5

1,64 1,05 1,005 0,9 1,0359

Somme : $\boxed{5,508}$ $\rightarrow (1,05 + 1,005 + 1,5 + 1,953)$

4ème jeu.

1,5 4 2,7 1,75 0,58

Somme : $\boxed{6,08}$ $(1,5 + 4 + 0,58)$

6.2.2 - 5ème jeu : multiplication.

Le charpentier a 3 types de planches :

- 5 planches de 0,58 m
- 3 planches de 1,44 m
- 1 planche de 0,95 m

Somme : 2,32 m.

5,27

6,73

6.3 - SOUSTRACTION DE DECIMAUX

6.3.1 - Présentation de la situation.

a) Consigne : "Le charpentier doit faire un autre support en planches pour un chêneau de 3,2 m. Il dispose toujours des mêmes planches :

1 m 1,57 m 1,1 m 1,33 m 0,3 m.

Mais cette fois, il n'a pas bien prévu. Il a monté sur le toit 2 planches : celle qui mesure 1,57 m et celle de 0,3 m et il s'aperçoit qu'il lui en manque une. Pouvez-vous deviner celle qu'il doit aller chercher ?"

b) Déroulement : Les enfants travaillent par groupes de 2.

c) Stratégies observées :

1°/ Certains groupes font une addition à trous (c'est la majorité)

$$i. 1,57 + 0,3 + \quad = 3,2$$

et ils écrivent généralement :

$$1,57 + 0,3 + \boxed{1,47} = 3,2 \rightarrow \begin{array}{r} 1,57 \\ + 0,3 \\ + \quad \quad \\ \hline 3,2 \end{array}$$

(Comme il n'y a pas de chiffre dans le rang des centièmes dans 3,2, ils écrivent le 7 de "1,57" puis comptent les dixièmes : 5 + 3 = 8 → pour aller à 12 → 4 etc...)

Mais ils s'aperçoivent alors qu'il n'y a pas de planche de cette longueur.

Bien sûr, ils pensent tout de suite qu'ils ont fait une erreur de calcul (de retenue disent-ils) et recomptent : même résultat !

Alors, généralement, ils ont recours aux fractions et transforment les nombres en :

$$1,57 = \frac{157}{100} \quad 0,3 = \frac{3}{10} \quad 3,2 = \frac{32}{10}$$

Puis ils calculent avec les fractions (technique qui est très sûre et fiable pour eux maintenant).

.../...

$$\frac{157}{100} + \frac{3}{10} + \quad = \frac{32}{10}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{157}{100} + \frac{30}{100} + \frac{133}{100} = \frac{320}{100}$$

1,33

Ils rectifient alors leur résultat et essaient de le comprendre

$$1,57 + 0,3 + \boxed{1,33} = 3,2$$

Presque toujours d'ailleurs, à la suite de cette vérification par les fractions, ils ajoutent un zéro pour avoir un chiffre dans le rang des centièmes dans tous les nombres :

$$1,57 + 0,30 + \boxed{\quad} = 3,20.$$

ii. D'autres calculent :

$$1,57 + 0,3 = 1,87$$

$$1,87 + \quad = 3,2 \quad + \frac{1,87}{3,2}$$

Pour ceux-là, le problème est évidemment le même et on peut observer les mêmes procédures.

2°/ D'autres enfin, écrivent une soustraction :

$$1,57 + 0,3 = 1,87$$

$$3,2 - 1,87 =$$

Dans ce cas, on observe 2 stratégies :

i. Certains font la même erreur que dans (1) et trouvent 1,47

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ - 1,87 \\ \hline 1,47 \end{array}$$

Ils constatent également qu'il n'y a aucune planche qui mesure 1,47 m et ont recours à la soustraction de fractions.

$$\frac{32}{10} - \frac{187}{100}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{320}{100} - \frac{187}{100} = \frac{133}{100} = 1,33.$$

.../...

Ils corrigent alors leur résultat.

ii. D'autres, ajoutent spontanément des zéros en posant la soustraction pour obtenir le même nombre de décimales :

$$\begin{array}{r} 3,20 \\ - 1,87 \\ \hline 1,33 \end{array}$$

Ils trouvent donc tout de suite le résultat exact. Mais il est évident que cette pratique "spontanée" qui n'apparaît pas ici pour surmonter un obstacle, n'est pas justifiée par les enfants. Et si l'enseignant leur demande : "êtes-vous sûrs du résultat ?" ils répondent : "bien sûr, puisqu'il y a une planche qui mesure 1,33 m !".

Ceux qui ont dû recourir à la soustraction ou à l'addition de fractions sont en mesure de dire pourquoi il faut ajouter des zéros et justifier cette pratique : "on ne peut pas faire la soustraction si les fractions n'ont pas le même dénominateur ! Il faut donc les mettre toutes en centièmes". Souvent, certains ajoutent : "on pourrait aussi les transformer en millièmes mais ici ce n'est pas la peine d'ajouter des zéros pour rien !"

d) REMARQUE : L'enseignant dit aux enfants que, dorénavant, il sera préférable d'ajouter des zéros si le nombre de décimales n'est pas le même : ils éviteront ainsi des erreurs. Il institutionnalise la pratique.

6.3.2 : Autres problèmes proposés (pour mettre en évidence d'autres sens de la soustraction).

1°) Premier problème

a) Consigne : "Voici ce qui peut arriver lorsqu'on ne prévoit pas bien : pour faire le support de 3,2 m, le charpentier monte 3 planches : celle de 1,57 m, celle de 1,33 m et celle de 1,1 m, qu'il cloue bout à bout. Il voit alors que son support est trop long. Quelle longueur de planche doit-il couper ?"

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement. Très rapidement, ils trouvent la bonne solution. Tous calculent de la même manière :

$$\begin{array}{l} 1,57 + 1,33 + 1,1 = 4,00 \\ 4,00 - 3,2 = 0,80 \end{array}$$

.../...

c) REMARQUE : Ici, aucune hésitation de la part des enfants : tous ajoutent des zéros pour obtenir le même nombre de décimales et généralement les calculs sont corrects.

2°) Deuxième problème : Une pièce de tissu mesurait 24,70 m. Dans le courant de la journée, la vendeuse en a successivement coupé : 3,75 m ; 4,8 m et 7,5 m. Quelle longueur de tissu reste-t-il à la fin de la journée ?

3°) Troisième problème : Un pieu a 2 mètres de hauteur. On l'enfoncé dans un trou de 60 cm de profondeur. Calcule la hauteur du pieu au-dessus du sol.

4°) Quatrième problème : Pierre et son frère comptent leurs économies : Pierre possède 3 billets de 100 francs, un billet de 20 francs, deux pièces de 10 f., 1 pièce de 5 f, une de cinquante centimes et une de 5 centimes. Son frère a deux billets de 100 f, 6 pièces de 50 f. Quel est le plus riche ? de combien ?

REMARQUE : L'enseignant peut choisir d'autres situations qui mettent en oeuvre additions, soustractions de décimaux, multiplication d'un décimal par un entier. Ces quatre problèmes ne sont proposés ici qu'à titre d'exemples.

Cependant, il faut signaler que dans certaines situations des enfants peuvent mal poser les soustractions en mettant le plus petit nombre en haut et le plus grand en bas.

Exemple : $3,847 - 3,95$.

L'enseignant doit faire rectifier sans s'offusquer : en effet, l'activité sur l'ordre des décimaux n'est pas encore faite. Il est donc légitime, si le maître ne choisit pas bien les exemples, que les enfants se trompent.

6.3.3 : Résultats :

Les enfants ont compris. Ils savent faire les soustractions mais il est cependant important que l'enseignant leur donne régulièrement l'occasion d'en faire. En effet, un algorithme qui n'est pas utilisé souvent s'oublie très vite. L'enseignant doit décider maintenant avec les enfants que ces 3 opérations : additions, soustractions, multiplications par un entier doivent être sues et effectuées correctement sans aucune hésitation.

.../...

6.4 - MULTIPLICATION PAR 10, 100, 1000

6-4-1 : Rappel de la multiplication d'un décimal par un entier

a) Présentation de la situation : L'enseignant demande aux enfants de calculer les multiplications suivantes :

$$135,75 \times 402 = \qquad \qquad 0,649 \times 75 =$$

Mais auparavant, il leur demande de prévoir le nombre de chiffres après la virgule des résultats.

b) Déroulement : Chaque enfant fait les 2 opérations sur son cahier de brouillon. Lorsqu'il s'est assuré que tous avaient terminé, l'enseignant fait une correction collective : il envoie un enfant au tableau pour chacune des multiplications. (Il choisit généralement des enfants qui ont encore des difficultés afin de les aider éventuellement et de leur redonner confiance.)

c) Il est intéressant de donner une dernière multiplication du type : $125,75 \times 3000$. Car ce sont celles dans lesquelles il y a le plus d'erreurs (à cause des zéros).

6-4-2 : Multiplication d'un décimal par 10, 100, 1000, 10000.

a) Consigne : "Maintenant, vous allez calculer les multiplications que je marque sur le tableau. Lorsque vous aurez trouvé tous les résultats, vous les observerez et essaierez de trouver un procédé rapide qui économise les calculs et que vous éprouverez en faisant les opérations".

b) Déroulement : L'enseignant écrit sur le tableau :

$$1,25 \times 10 =$$

$$0,354 \times 100 =$$

$$1,25 \times 1000 =$$

$$25,15 \times 100 =$$

$$1,25 \times 100 =$$

Les enfants calculent individuellement sur le cahier de brouillon.

..../...

c) Comportements observés :

- La majorité des enfants pose la multiplication :

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ \times 10 \\ \hline \end{array}$$

- Quelques-uns ajoutent des zéros par analogie avec la multiplication d'un entier :

$$\text{ex. : } 1,25 \times 10 = 1,250$$

$$0,354 \times 100 = 0,35400.$$

Ils savent pourtant - si on le leur fait expliciter - que $1,25 = 1,250$.

- D'autres enfin transforment le décimal en fractions :

$$1,25 = \frac{125}{100}$$

$$\frac{125}{100} \times 10 = \frac{1250}{100} = 12,50.$$

6-4-3 : Correction des calculs.

a) L'enseignant demande aux enfants leurs résultats qu'ils marquent à la suite des opérations. S'il y a plusieurs résultats différents, ils les marquent tous sans prendre parti :
exemple : $1,25 \times 10 = 12,5$ $1,250$ $125\dots$
et envoie un enfant faire la multiplication au tableau afin que tous les élèves soient sûrs du bon résultat qui seul, est conservé (les autres sont effacés).

b) Observation des résultats et énoncé d'une règle.

Lorsque tous les résultats sont vérifiés, l'enseignant demande aux enfants de les observer.

$$1,25 \times 10 = 12,5$$

$$0,354 \times 100 = 35,4$$

$$1,25 \times 1000 = 1250$$

$$25,15 \times 100 = 2515$$

$$1,25 \times 100 = 125.$$

A ceux qui avaient terminé les premiers et qui ont déjà réfléchi, il leur demande d'écrire la règle qu'ils croient avoir trouvée et qui permet de trouver rapidement le résultat sans poser de calcul. \dots/\dots

c) Enoncé et vérification des règles.

Chaque règle est ensuite vérifiée sur les opérations restées marquées sur le tableau. Si elle fonctionne, elle est éprouvée sur d'autres calculs que l'enseignant marque au tableau et qu'il fait vérifier en posant l'opération.

$$\begin{aligned} 135,75 \times 10 \\ 135,75 \times 100 \\ 135,75 \times 1000 \end{aligned}$$

d) Conclusion : Pour multiplier un décimal par 10, 100, 1000, il suffit de déplacer la virgule d'un rang, de 2 rangs, de 3 rangs... vers la droite.

6-4-4 : Exercices individuels avec correction immédiate :

$$\begin{aligned} 1) \quad & 45,87 \times 1000 = \\ & 139,2 \times 10 = \\ & 4,750 \times 100 = \\ & 25,785 \times 10 = \\ & 0,08 \times 1000 = \\ & 0,08 \times 10 = \\ & 0,08 \times 100 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 135,9 \times \boxed{} = 1359 \\ & 4,857 \times \boxed{} = 485,7 \\ & 130 \times \boxed{} = 13000 \\ & 1,675 \times \boxed{} = 1,675 \\ & 5,45 \times \boxed{} = 5450. \end{aligned}$$

6-4-5 : Résultats.

Cette activité se déroule rapidement car elle ne présente pas de difficultés. Il arrive cependant qu'il y ait beaucoup de d'erreurs de calcul lors des premiers exercices. En effet, bien qu'ayant compris, beaucoup d'enfants ne maîtrisent pas bien encore les déplacements de la virgule.

Il est important, au début, de comparer chaque résultat
.../...

trouvé au décimal multiplié.

$$1,25 \times 10 = 12,25$$

et d'obliger les enfants à se demander si ce résultat est bien 10 fois plus grand que le décimal 1,25.

Problèmes possibles :

1/ Pour faire une couverture, il faut acheter :

- 12 pelotes de laine bleue à 25,50 F. la pelote
- 15 pelotes de laine blanche à 15,75 F. la pelote
- 18 pelotes de laine noire à 14,20 F. la pelote.

Une tricoteuse prend 450 F. pour le travail. Calcule le prix de revient de la couverture tricotée.

2/ J'achète 375 grammes de beurre à 3,25 F. les 125 grammes et 1 litre de lait à 2,50 F.

Pour payer, je donne un billet de 20 F.

Combien doit-on me rendre ?

3/ Maman coud un galon autour d'une nappe rectangulaire dont les dimensions sont 1,20 m et 90 cm.

Elle a posé les 3,5 m. de galon qu'elle possédait déjà. Quelle longueur de galon doit-elle acheter en plus pour terminer son travail ?

FICHE DIDACTIQUE

6.5 - L'ORDRE DANS LES DECIMAUX

6.5.1. Rappel - Introduction

Vous connaissez beaucoup de fractions. Certaines sont plus faciles à utiliser. Lesquelles ? ("celles qui ont 10, 100, 1000... au dénominateur")

Voici une de ces fractions : $\frac{5208}{1000}$

Nous avons vu qu'il existe une écriture plus simple à manipuler. Laquelle ? (écriture à virgule)

Un enfant vient écrire : $\frac{5208}{1000} = 5,208$.

6.5.2. Problème posé.

a) Consigne : "Voici des nombres décimaux, vous allez les ranger du plus petit au plus grand"

14,07 - 1,94 - 2,03 - 0,938417 - 14,007 - 0,1.

b) Déroulement :

1) Les enfants travaillent individuellement. Lorsqu'ils auront tous terminé, le maître organisera une correction collective.

2) Correction collective : le maître envoie au tableau 2 enfants qui n'ont pas fait le même rangement et s'adresse à la classe : "si vous n'êtes pas d'accord avec vos camarades, vous pouvez leur demander une preuve de ce qu'ils affirment ou leur prouver qu'ils se sont trompés". (Cette preuve peut être, par exemple, la comparaison des nombres sous forme de fractions décimales, ou le placement dans le tableau ou sur la droite, ou la décomposition)

Remarque : La correction par le passage à la fraction décimale de 2 erreurs de rangement est suffisante pour ne pas trop renforcer cette méthode de rangement.

.../...

6.5.3. Choix d'une méthode de rangement.

a) Consigne : "Maintenant, vous allez avoir beaucoup de nombres à ranger (que je vous donnerai petit à petit). Vous allez essayer de choisir une méthode qui vous permettra de les ranger le plus vite possible sans vous tromper. Si vous en trouvez plusieurs, choisissez la plus rapide. Vous l'éprouverez sur d'autres nombres et les élèves qui n'en auront pas trouvé l'essaieront".

Voici les 3 premiers nombres :

28,13 - 1,13 - 0,92987.

Rangez-les du plus petit au plus grand.

b) Déroulement : Les enfants travaillent, soit individuellement, soit par deux. Dès qu'ils ont rangé ces 3 premiers nombres et qu'ils pensent avoir trouvé la bonne méthode de rangement, le maître leur donne une feuille sur laquelle ils écrivent la manière dont ils ont procédé. Puis ils éprouvent cette méthode sur les nombres qui suivent. Le maître les leur donne progressivement et (2 par 2 ou 3 par 3) ils les rangent par rapport aux 3 premiers.

28,103 - 12,001 - 11,99 - 12,4

3,0 - 12,09 - 3,91 - 4,09 - 1,103

c) Lorsque tous ces nombres ont été rangés, les enfants peuvent dire si leur méthode a bien fonctionné.

6.5.4. Lecture rapide des méthodes et essai.

a) Consigne : "ceux qui n'ont pas réussi à ranger ces nombres vont essayer la méthode jugée la plus simple par leurs camarades en comparant par exemple :

0,999 et 0,9847

Ceux qui ont su compareront ces 2 nombres par une autre méthode. Et on verra ainsi quelle est la plus simple et la plus rapide".

.../...

b) Déroulement : Après examen rapide des textes, le maître donnera aux élèves qui ne sont pas arrivés à ranger les décimaux de la 2ème série, la méthode classique de rangement (celle qui permet de comparer d'abord le nombre d'unités, puis les $\frac{1}{10}$ puis les $\frac{1}{100}$...) afin qu'ils l'utilisent pour comparer 2 par 2 les nombres ci-dessous :

0,999 et 0,9847

10,094 et 10,1

152,42 et 151,42

0,9999 et 1,1

Les enfants qui ont bien utilisé cette méthode, compareront ces nombres avec une autre méthode (passage par les fractions par exemple).

Il sera facile ainsi de voir quelle est la plus rapide et la plus simple des deux.

6.5.5. Résultats.

Cette dernière méthode (comparaison des unités, puis des $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$...) qui est beaucoup plus rapide et plus sûre que le passage par les fractions, est donc énoncée, institutionnalisée : dorénavant, c'est celle que tous les enfants utiliseront rapidement et sans difficulté. Il faut noter cependant qu'ils continueront à faire des erreurs s'ils n'ont pas l'occasion de comparer ou de ranger des décimaux d'une manière régulière.

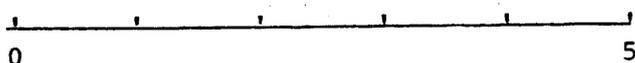
.../...

MODULE 7 :
ENCADREMENTS ET
APPROXIMATIONS

7.1 - INTERCALER UN DECIMAL ENTRE DEUX.

7-1-1 : Recherche de décimaux entre deux entiers.

1ère phase : L'enseignant dessine une droite numérique sur le tableau sur laquelle il marque 0 et 5. Il demande ensuite à un enfant de venir marquer à son tour les entiers naturels entre 0 et 5.

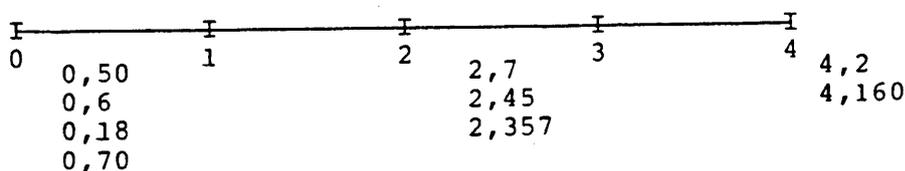


"Combien peut-on écrire d'entiers naturels entre 0 et 5 ?" En existe-t-il d'autres ?"

a) Consigne : "Maintenant, chacun d'entre vous va trouver 2 décimaux dans un intervalle de 1. Les élèves de la première rangée chercheront 2 décimaux entre 0 et 1, ceux de la 2ème rangée, entre 2 et 3 et ceux de la 3ème rangée, entre 4 et 5".

b) Déroulement : Les enfants travaillent sur leur cahier de brouillon par groupes de deux. L'enseignant n'intervient pas.

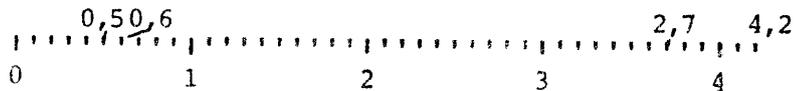
c) Correction : Lorsque tous ont terminé, ils viennent à tour de rôle au tableau, marquer les nombres qu'ils ont trouvés, les uns sous les autres, dans l'intervalle demandé, comme l'indique la figure ci-dessous. Cette activité se déroule très rapidement, comme un jeu.



Les enfants sont seuls juges et doivent refuser une réponse inexacte. L'enseignant intervient le moins possible, sinon comme arbitre.

.../...

2ème phase : L'enseignant demande à certains enfants de venir placer exactement sur une droite numérique certains de ces nombres qu'il entoure à la craie de couleur (Par exemple : 0,50 ; 0,6 ; 2,7 ; 4,2...)



7-1-2 : Intercaler un décimal entre deux autres

a) Consigne : "Peut-on trouver d'autres nombres entre 0,5 et 0,6. Si vous pensez que c'est possible, vous en écrivez deux chacun, si vous pensez le contraire, vous devrez prouver à vos camarades que ce n'est pas possible".

L'enseignant écrit sur le tableau :

$$0,5 < \quad < 0,6$$

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement sur leur cahier.

Là encore, l'enseignant n'intervient pas. Les enfants n'ont d'ailleurs aucune difficulté et ils trouvent rapidement (avec très peu d'erreurs) des nombres compris entre 0,5 et 0,6.

Dès que tous ont écrit deux nombres, l'enseignant procède à une correction collective rapide.

c) Procédés utilisés :

1/ La plupart d'entre eux ajoutent spontanément un zéro à 0,5 et à 0,6 puis comptent : 0,50 - 0,51 - 0,52...

Certains écrivent plusieurs décimales après les 5 dixièmes : 0,5421 ; d'autres essaient, par jeu, de mettre en difficulté les camarades qui devront déclarer si le nombre est plus petit que 0,6, en ajoutant un grand nombre de chiffres.

Exemple : 0,59876104

2/ Quelques-uns reviennent à l'écriture fractionnaire :

$$0,5 = \frac{5}{10} \quad 0,6 = \frac{6}{10} \quad \text{et par une "transformation",}$$

.../...

7.2 - ENCADREMENT D'UN RATIONNEL ENTRE DEUX ENTIERS

7.2.1. Révision

a) Consigne : "Voici une liste de nombres décimaux que vous allez ranger du plus petit au plus grand :

148,0978 - 148,97 - 148,95 - 148 - 149,1 - 148,0999 - 148,932

b) Déroulement :

Les enfants travaillent individuellement sur leur cahier de brouillon. Dès qu'ils ont terminé, l'enseignant fait une correction collective (cette liste de nombres rangés doit rester sur le tableau).

7.2.2. Problème proposé aux enfants :

a) Consigne : "Maintenant, vous allez placer dans cette liste la fraction : $\frac{4319}{29}(1)$

Pour cela que faut-il savoir ?"

Les enfants disent qu'il faut savoir combien il y a d'unités dans la fraction.

b) Déroulement : Les enfants cherchent par groupes de deux sur de grandes feuilles de papier-affiche. Au cours de cette activité, l'enseignant ne doit donner aucune indication qui puisse induire les enfants dans une stratégie plutôt que dans une autre. Il pourrait, en effet, être tenté d'aider certains enfants en difficulté, en particulier ceux (ils sont peu nom-

.../...

(1) Pour cette recherche, il est indispensable de choisir une fraction dont le numérateur est beaucoup plus grand que le dénominateur. Sinon, les enfants trouveraient très rapidement le résultat par encadrements et ne comprendraient pas la nécessité de faire une division.

breux) qui calculent les fractions égales à 1, à 2, 3, 4, 5... et pour qui la tâche est très longue, fastidieuse, voire décourageante. Il se contente d'encourager, de rassurer.

c) Quelques stratégies observées :

1) Stratégie 1 : Souvent, les enfants procèdent de la manière suivante :

$$\frac{29}{29} = 1$$

$$\frac{58}{29} = 2$$

$$\frac{87}{29} = 3$$

$$\frac{116}{29} = 4...$$

Très vite, la plupart d'entre eux s'aperçoivent que les calculs vont être longs. Alors, ils calculent généralement la fraction égale à 10, puis aussitôt après, celle égale à 100 :

$$\frac{290}{29} = 10$$

et $\frac{2900}{29} = 100.$

Ils se rapprochent ainsi peu à peu de la fraction $\frac{4319}{29}$ et par tâtonnements, ils arrivent à l'encadrer entre 140 et 150 de la manière suivante :

- ils calculent d'abord la fraction égale à 200 à partir de celle égale à 100 :

$$x 2 \left(\begin{array}{l} \frac{2900}{29} = 100 \\ \frac{5800}{29} = 200 \end{array} \right) x 2$$

Ils s'aperçoivent qu'elle est beaucoup plus grande que la fraction donnée : $\frac{4319}{29}$. Alors, ils calculent la fraction égale à 150 :

.../...

- soit en partant de :

$$x \ 5 \left(\begin{array}{l} \frac{290}{29} = 10 \\ \frac{1450}{29} = 50 \end{array} \right) x \ 5$$

et en ajoutant : $\frac{2900}{29} + \frac{1450}{29} = \frac{4350}{29}$

$$\frac{4350}{29} = 150.$$

- soit en faisant $\frac{2900}{29} : 2 = \frac{1450}{29}$

et $\frac{2900}{29} + \frac{1450}{29} = \frac{4350}{29}$

- Ils calculent aussi la fraction égale à 140 :

$$100 = \frac{2900}{29}$$

$$x \ 4 \left(\begin{array}{l} 10 = \frac{290}{29} \\ 40 = \frac{1160}{29} \end{array} \right) x \ 4$$

$$140 = \frac{2900}{29} + \frac{1160}{29} = \frac{4060}{29} .$$

Ils concluent alors que $\frac{4319}{29}$ est entre 140 et 150 mais beaucoup plus près de 150.

Alors ils cherchent les fractions égales à 149, à 147, quelquefois directement à 148.

$$148 = \frac{4292}{29}$$

$$149 = \frac{4321}{29}$$

donc $148 < \frac{4319}{29} < 149.$

2) Stratégie 2 : Cependant, quelques groupes comprennent très vite après quelques essais, comme dans la stratégie 1, qu'il faut enlever autant de fois qu'il est possible $\frac{29}{29}$ (c'est-à-dire 1 unité) de $\frac{4319}{29}$ et font la division : .../...

$$4319 \div 29 = 148$$

Ils encadrent alors la fraction :

$$148 < \frac{4319}{29} < 149.$$

7.2.3. Comparaison et choix d'une méthode :

a) L'enseignant demande aux groupes d'enfants qui sont allés au bout de leurs calculs (et donc qui ont encadré la fraction) de venir au tableau exposer leur méthode.

Déroulement : Les feuilles de papier, sur lesquelles ont travaillé les enfants, sont affichées au tableau. Les enfants viennent expliquer ce qu'ils ont fait, ce qui donne lieu à des discussions souvent intéressantes. Dans ces discussions, l'enseignant intervient le moins possible, son rôle est celui d'un arbitre : il précise une idée, aide les enfants à s'exprimer, mais ne prend pas position.

b) L'enseignant demande ensuite aux autres pourquoi ils n'y sont pas arrivés. Et c'est presque toujours par découragement à cause de la longueur des calculs (pour ceux qui ont procédé par encadrements successifs).

c) Les deux méthodes employées par les enfants :

- encadrements successifs
- division

sont alors comparées et c'est évidemment la deuxième qui est reconnue la plus rapide. Donc, c'est elle qui est adoptée par l'ensemble des enfants et privilégiée maintenant par l'enseignant.

7.2.4. Placement de la fraction $\frac{4319}{29}$ dans la liste des nombres (§ 7.2.2)

a) Consigne : "Vous deviez placer cette fraction dans la liste des nombres que vous avez rangés où va-t-elle se mettre ?

.../...

Qui peut la placer ?"

b) Déroulement : Cette phase se déroule collectivement très vite. Les enfants disent qu'ils ne peuvent pas placer encore la fraction, qu'ils n'ont pas assez de renseignements et qu'il faudrait savoir combien il y a de dixièmes après 148. Certains même prévoient que les dixièmes ne suffiront pas, qu'il faudra peut-être trouver aussi les centièmes.

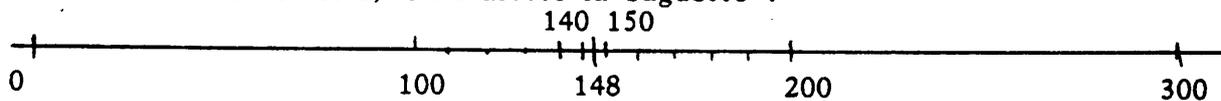
c) L'activité s'arrête donc sur un problème ouvert aux enfants qui sera poursuivi au cours de l'activité suivante.

ENCADREMENTS SUCCESSIFS D'UN RATIONNEL PAR DEUX DECIMAUX

7.3.1. Rappel de la situation de la fraction entre 2 entiers.

a) Consigne : "Nous avons trouvé que la fraction $\frac{4319}{29}$ était située entre 148 et 149. Mais pour la placer avec précision dans la liste des nombres décimaux, nous avons vu qu'il fallait trouver le nombre de dixièmes...". Avant de trouver ce nombre de dixièmes, nous allons placer la fraction sur une droite".

b) Déroulement : L'enseignant trace sur le tableau une droite qu'il gradue de 100 en 100 de 0 à 300 et demande à un enfant de venir tracer à la craie de couleur la longueur de baguette que peut désigner cette fraction (cf. l'activité 3 module 5.3.2) Où s'arrête la baguette ?



Pour pouvoir placer la fraction avec plus de précision, et surtout pour y voir mieux, les enfants proposent eux-mêmes d'agrandir l'intervalle [148;149[et ils refont le trait de couleur qui représente la longueur $\frac{4319}{29}$, mais là, ils hésitent et ne savent pas où s'arrêter.



Certains, qui ont sous les yeux les calculs qu'ils ont faits dans l'activité précédente, proposent d'écrire 148 et 149 en fractions (si personne ne le propose - ce qui est rare - l'enseignant le suggère).

Alors l'enseignant demande de combien il faut dépasser 148; l'enseignant laisse chercher les enfants individuellement. Lorsque la majorité a trouvé, l'un d'entre eux vient au tableau et écrit :

$$\frac{4319}{29} - \frac{4292}{29} = \frac{27}{29}$$

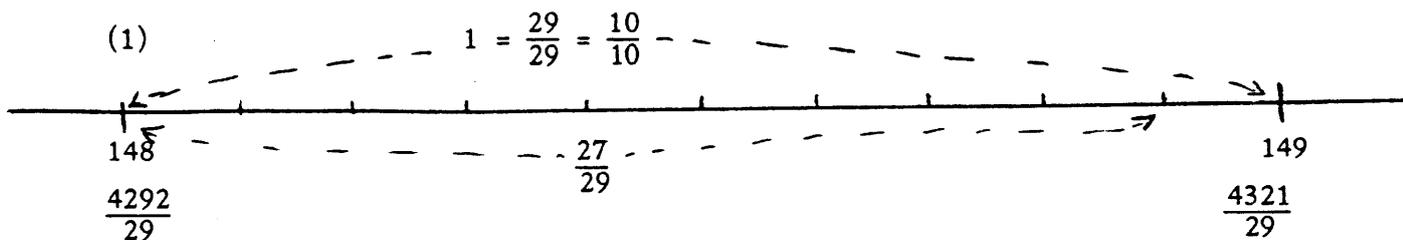
.../...

Certains proposent un autre calcul :

$$\frac{4292}{29} + \boxed{} = \frac{4319}{29} \quad \text{et disent que ce qui manque dans}$$

cette opération, c'est "ce qui dépasse 148". Ils voient alors que la fraction est tout près de 149 et certains précisent : "il manque que $\frac{2}{29}$ ".

Tous ces renseignements recueillis au cours de discussions, de remarques, sont ajoutés sur la droite (par des enfants désignés par l'enseignant).



REMARQUE : Quelques enfants proposent souvent de partager l'intervalle [148 ; 149] en 29 parties égales et de placer la fraction en comptant 27 de ces parties. En se référant à l'activité 2, module 5, l'enseignant évoque les difficultés rencontrées, la longueur des calculs, et rappelle la décision qui avait été prise d'utiliser des intervalles décimaux.

Pour placer la fraction avec précision, il faut donc savoir combien il y a de dixièmes dans ces $\frac{27}{29}$.

L'enseignant découpe l'intervalle [148 ; 149] en 10.

7.3.2. Recherche des dixièmes

a) Consigne : "Vous allez donc chercher le nombre de dixièmes dans $\frac{27}{29}$ ".

b) Déroulement : Les enfants travaillent par groupes de deux ou trois. Cette recherche étant difficile, l'enseignant va de groupe en groupe pour aider ceux qui ont le plus de difficultés. Il suffit quelquefois de suggérer seulement la réduction au même dénominateur ("transformation", pour les enfants) des 2 fractions : $1/10$ et $27/29$.

.../...

Les méthodes utilisées par les enfants sont sensiblement les mêmes que dans l'activité 2 module 7, lorsqu'il s'agissait de trouver le nombre d'entiers dans la fraction $\frac{4319}{29}$.

Lorsque les 2 fractions précédentes sont "transformées" :

$$\frac{1}{10} = \frac{29}{290} \quad \text{et} \quad \frac{27}{29} = \frac{270}{290}$$

ils cherchent par encadrements successifs combien de fois 29 est contenu dans 270. Ils voient que 10 fois c'est trop : $29 \times 10 = 290$ et essaient immédiatement 9 fois. Certains font directement la division $270 \div 29$.

c) Comparaison des méthodes : Les enfants viennent au tableau dire comment ils ont procédé. Ceux qui ont posé la division la font sur le tableau.

$$270 \div 29 = 9 \text{ dixièmes et il reste } \frac{9}{290}.$$

Il est donc possible de repérer sur la droite (1) où se trouve la fraction et l'enseignant envoie un élève au tableau pour indiquer en continuant le trait de couleur qui s'arrête entre les $\frac{9}{10}$ et 149.

7.3.3. Recherche des centièmes

Les enfants savent qu'il y a 9 dixièmes mais cela ne leur permet pas encore de placer la fraction dans la liste des décimaux de l'activité précédente puisque trois autres nombres ont aussi 9 dixièmes.

Le problème est de nouveau le même que dans le paragraphe précédent.

a) Consigne : "que devez-vous chercher maintenant ? (les enfants ont très bien compris qu'il faut trouver le nombre de centièmes dans $\frac{9}{290}$.

b) Déroulement : Comme dans l'activité précédente, ils travaillent par groupes de 2 et refont des calculs analogues à ceux qui leur ont permis de trouver les dixièmes

$$\frac{1}{100} = \frac{29}{2900} \qquad \frac{9}{290} = \frac{90}{2900}$$

.../...

Mais maintenant, ils ne reprennent pas le procédé des encadrements successifs ; tous font tout de suite la division :

$$90 \div 29.$$

Ils trouvent 3 centièmes et encore "un petit bout" que l'enseignant fait désigner :

$$\frac{3}{2900}$$

A ce moment de l'activité, ils se rendent compte de 2 choses :

- 1) qu'ils peuvent continuer ainsi en cherchant des millièmes, des dix millièmes...
- 2) qu'ils peuvent placer la fraction dans la liste des décimaux.

7.4 - ORGANIGRAMME DE LA METHODE ET MISE EN PLACE DE LA DIVISION (Algorithmme)

7.4.1 - Synthèse de différentes recherches qui ont abouti au placement d'une fraction entre deux décimaux.

a) Consigne : "Nous venons de trouver un moyen d'encadrer une fraction entre deux nombres à virgule et de resserrer de plus en plus l'intervalle.

Nous allons écrire de façon simple la méthode que nous avons employée".

b) Déroulement : L'enseignant demande aux enfants comment ils ont procédé. Il écrit sur 2 colonnes ce qu'ils ont cherché, et ce qu'ils ont fait.

ce que nous avons cherché

1) je cherche les entiers

Je cherche combien de fois $\frac{29}{29}$ est contenu dans $\frac{4319}{29}$

$$148 < \frac{4319}{29} < 149$$

2) Je cherche les dixièmes

Je cherche combien de fois $\frac{29}{290}$ est contenu dans $\frac{270}{290}$

$$148,9 < \frac{4319}{29} < 149$$

3) Je cherche les centièmes

Je cherche combien de fois $\frac{29}{2900}$ est contenu dans $\frac{90}{2900}$

$$148,9 < \frac{4319}{29} < 148,94$$

ce que nous avons fait

$$4319 \div 29 = 148$$

Il reste 27 qui représente $\frac{27}{29}$

$$\frac{27}{29} = \frac{270}{290}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{29}{290}$$

$$270 \div 29 = 9$$

Il reste 9/290

$$\frac{9}{290} = \frac{90}{2900}$$

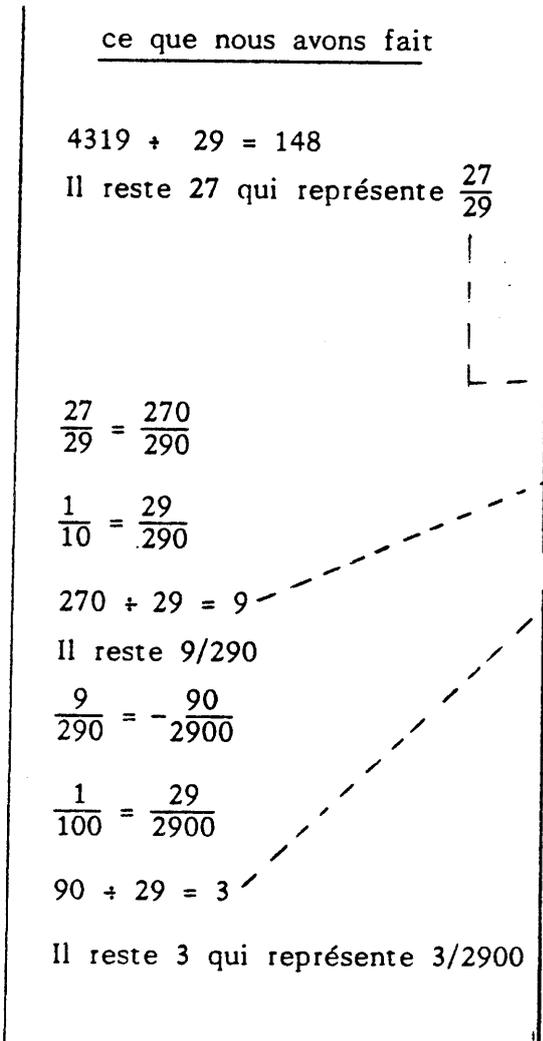
$$\frac{1}{100} = \frac{29}{2900}$$

$$90 \div 29 = 3$$

Il reste 3 qui représente 3/2900

Division : Algorithmme

	148,93
29	4319
	1419
	1160
	0259
	232
	027 0
	26 1
	00 90
	87
	0 03



7.4.2. Résultats.

Ces deux activités (7.3 et 7.4) présentent des difficultés pour les enfants (spécialement la recherche des dixièmes). Elles sont pourtant comprises par un certain nombre d'entre eux qui ont vu, au fil des étapes, ce que l'on cherchait et quel était l'objectif.

Cependant, les enfants ne sont pas capables (pour la plupart) de refaire les calculs seuls et ils ne maîtrisent pas non plus l'algorithme qui sera repris au cours de l'activité suivante.

7.5 - RATIONNELS DECIMAUX, RATIONNELS NON DECIMAUX

7.5.1 - Rappel (phase collective) : différentes sortes de fractions déjà rencontrées.

a) Consigne : "Parmi toutes les fractions que nous avons étudiées et utilisées, certaines sont plus faciles à manipuler, et permettent de faire des calculs plus rapides et plus simples. Pouvez-vous en citer quelques-unes ?"

b) Déroulement : Ce rappel se fait collectivement et rapidement sous forme de questions-réponses. Les enfants énumèrent des fractions à dénominateur 10, 100, 1000, ... et disent, en effet, que les "calculs sont plus simples puisqu'il suffit d'ajouter des zéros !"

Certains proposent aussi des fractions à dénominateur 5 comme $\frac{3}{5}$ ou à dénominateur 50 comme $\frac{12}{50}$. L'enseignant les écrit sur le tableau et demande à un enfant de venir montrer pourquoi ces fractions sont aussi faciles à utiliser que les premières. L'enfant écrit : $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ et $\frac{12}{50} = \frac{24}{100}$.

7.5.2 : Fractions décimales.

a) Apport d'information :

L'enseignant donne la définition des fractions décimales : "toutes les fractions qui peuvent se mettre sous la forme $\frac{\quad}{10}$, $\frac{\quad}{100}$, $\frac{\quad}{1000}$, ... sont des fractions décimales!"

b) Consigne : "Est-ce que $\frac{3}{4}$ est une fraction décimale ? pourquoi ?

Pouvez-vous en trouver d'autres ?"

c) Déroulement : Les enfants trouvent très vite oralement, de leur place, des exemples de fractions décimales dont les déno-
.../...

minateurs sont 25, 50, 2, 20, etc...

L'enseignant les écrit sur le tableau et demande chaque fois une preuve. Les enfants transforment mentalement ces fractions en dixièmes ou centièmes ou millièmes. Les calculs sont faits très rapidement sous forme de "calcul mental".

7-5-3 : Mise en évidence de 2 méthodes pour transformer une fraction décimale en nombre à virgule.

a) Consigne : "Cette fraction $\frac{7}{20}$ est décimale puisqu'il est possible de la transformer en fraction dont le dénominateur est 100.

$$\frac{7}{20} \begin{array}{l} \xrightarrow{x5} \\ \xleftarrow{x5} \end{array} \frac{35}{100} = 0,35 \quad (\text{ces calculs sont faits au tableau par un enfant})$$

Pouvez-vous trouver ce nombre à virgule par une autre méthode ?

b) Déroulement :

Des enfants proposent de chercher le nombre d'entiers, puis de dixièmes, puis de centièmes par la division (comme ils l'ont fait dans l'activité précédente). Mais ce calcul présente des difficultés pour eux puisqu'ils n'ont jamais trouvé encore un quotient inférieur à 1. Ce problème est une bonne motivation pour aborder et résoudre ce genre de difficulté : ils travaillent par groupes de 2 (quelquefois individuellement s'ils le souhaitent).

c) Comportements :

1) La majorité des enfants procèdent comme dans l'activité précédente : ils disent que dans $\frac{7}{20}$ il y a 0 unité puisque $1 = \frac{20}{20}$.

Puis ils cherchent combien il y a de $\frac{1}{10}$. Pour cela, ils transforment $\frac{1}{10}$ en vingtièmes

$\frac{1}{10} = \frac{2}{20}$ et ils cherchent combien de fois il y a de $\frac{2}{20}$ (c'est-à-dire de $\frac{1}{10}$) dans $\frac{7}{20}$: 3 fois donc $\frac{3}{10}$ et il reste $\frac{1}{20}$

$$\text{car } 3 \times \frac{2}{20} = \frac{6}{20} \quad \dots/\dots$$

Enfin ils calculent combien il y a de $\frac{1}{100}$ dans $\frac{1}{20}$. Ils transforment les 2 fractions :

$$\frac{1}{20} = \frac{10}{200} \quad \frac{1}{100} = \frac{2}{200}$$

ce qui revient à trouver combien de fois il y a $\frac{2}{200}$ dans $\frac{10}{200}$.

$5 \times \frac{2}{200} = \frac{10}{200}$. Il y a donc 5 centièmes. Le quotient de la division est donc 0,35.

2) Un ou deux groupes posent directement la division par analogie avec ce qui a été fait dans la précédente activité

$$\begin{array}{r|l} & 0,35 \\ \hline 20 & 70 \\ & 60 \\ \hline & 100 \\ & 100 \\ \hline & 00 \end{array}$$

d) Conclusion :

"Vous connaissez donc deux méthodes pour écrire une fraction sous forme d'un nombre à virgule : la première est de transformer la fraction de manière à obtenir une fraction en dixièmes, centièmes, millièmes...

la deuxième de faire la division. Quelle est celle de ces 2 méthodes que vous utiliserez pour écrire sous forme de nombres à virgule le plus rapidement possible : $\frac{3}{5}$? $\frac{18}{20}$? $\frac{12}{25}$? etc..."

Les enfants choisissent évidemment la première car "elle est plus rapide" disent-ils.

7.5.4 : Choix d'une méthode.

a) Consigne : "Vous allez essayer de mettre sous forme d'un nombre à virgule les 2 fractions suivantes :

$$\frac{17}{32} \quad \text{et} \quad \frac{325}{128}, \quad \text{à l'aide des 2 méthodes étudiées.}$$

b) Déroulement : La moitié des élèves calcule $\frac{17}{32}$, l'autre moitié $\frac{325}{128}$.

.../...

Les enfants travaillent par groupes de 2. L'un calcule par la division, l'autre essaie par la transformation de la fraction en centièmes, millièmes, dixmillièmes, etc...

c) Comportements :

Généralement, les enfants chargés de la transformation des fractions n'arrivent pas au but et, le plus souvent, ils abandonnent leurs calculs pour faire eux aussi la division.

d) Correction collective :

L'enseignant demande à deux enfants de venir faire les divisions au tableau :

$$\begin{array}{r|l}
 & 0,53125 \\
 \hline
 32 & 170 \\
 & 100 \\
 & 040 \\
 & 080 \\
 & 160 \\
 & 00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2,5390625 \\
 \hline
 128 & 325 \\
 & 0690 \\
 & 0500 \\
 & 1160 \\
 & 00800 \\
 & 0320 \\
 & 0640 \\
 & 000
 \end{array}$$

"Sauriez-vous maintenant écrire ces deux fractions avec un dénominateur composé de 1 suivi de zéros ?"

Quelques enfants (5 ou 6) réussissent à écrire

$$\frac{53125}{100000} \quad \text{et} \quad \frac{25390625}{100000000}$$

Ils expliquent aussi le nombre de zéros au dénominateur.

.../...

e) Conclusion.

"Que peut-on dire de ces 2 fractions ?"

Ce sont des fractions décimales

Dans ce cas, quelle est la méthode qui a été la plus rapide ? "c'est la division !" disent bien sûr, les enfants.

7.5.5 : Reconnaître si une fraction est ou non décimale.a) Présentation du problème - Consigne :

"Voici deux fractions : $\frac{221}{35}$ et $\frac{938}{1024}$.

Vous allez essayer de voir si ces fractions sont décimales ou non. Choisissez pour cela la méthode qui vous paraît la plus rapide"

b) Déroulement :

Comme dans le paragraphe 7-4-4 la moitié des élèves calcule $\frac{221}{35}$ et l'autre moitié $\frac{938}{1024}$ (sur leur cahier de brouillon, le plus rapidement possible !)

c) Comportements :

1) Tous les enfants posent la division.

2) La lère des fractions $\frac{231}{35}$ n'étant pas décimale, les enfants qui la font, s'arrêtent presque tous à la fin de la première période (aux dix millionnièmes). En effet, ils s'aperçoivent très vite qu'à ce moment-là, le reste 50 a déjà été rencontré, donc que "ça va toujours recommencer pareil". (c'est ce qu'ils disent).

3) Pour la deuxième qui est décimale, quelques enfants s'arrêtent parfois au zéro du rang des dix millièmes du quotient en décrétant qu'elle n'est pas décimale.

Mais la plupart d'entre eux vont jusqu'au bout et sont presque soulagés de constater qu'elle se termine par des zéros et donc qu'elle est décimale !

.../...

7.5.6 : Correction collective et conclusions :

Comme dans le paragraphe (7-4-4) l'enseignant organise une correction collective. Il envoie deux enfants au tableau faire les divisions.

a) Remarque : Contrairement à ce que l'on pourrait penser, ce travail n'ennuie pas les élèves qui attendent toujours avec impatience de voir ce qui va arriver :

- va-t-on trouver zéro au reste ?

- jusqu'où va-t-il falloir aller ?

Beaucoup font des remarques - voire des paris - tout au long de la correction. (Pour cela, il faut, bien entendu, que ceux qui ont fait les calculs, donc qui connaissent déjà le résultat, ne disent rien pour ne pas rompre le suspense...)

b) Conclusions : apport d'information :

1) Au moment de la correction, l'enseignant demande aux enfants quels seraient les chiffres du quotient après le 7, pour la première division : $\frac{221}{35}$ (car même à la correction, l'élève s'arrête lorsqu'il trouve le reste 50 pour la deuxième fois).

		6	3	1	4	2	8	5	7
3	5	2	2	1					
		1	1	0					
		0	5 0						
		1 5 0							
		1 0 0							
		3 0 0							
		2 0 0							
		2 5 0							
		0 5 0							

Lorsque vous effectuez une division à quotient décimal, il peut arriver seulement 2 cas :

a) Soit on retrouve deux fois le même reste : alors la division ne se finit pas mais on connaît très bien tous les chiffres puisqu'ils se répètent toujours dans le même ordre. Cette suite s'appelle une période.

.../...

Dans l'opération $\frac{221}{35}$, la période est "142857". Pour montrer la période sans être obligé de l'écrire plusieurs fois, il est d'usage de la souligner.

Exemple : 6,3142857

Quel est le dixième chiffre après la virgule ?

b) soit, on trouve des zéros à partir d'un certain rang seulement. Le quotient est décimal.

Note pour les maîtres : Dans les deux cas, le quotient et le diviseur permettent de retrouver exactement le dividende : si on n'arrondit pas, on ne perd pas l'information.

Mais il faut savoir que $0,99 = 1$ $2,399 = 2,4$

Exemple : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$ $3 \times 0,33 = 0,99 = 1$.

Dans les deux cas, on peut toujours retrouver une fraction équivalente à la fraction originelle :

Exemple : quotient $q = 3,26$

alors $100 \times q = 326,26$

$99q = 326,26 - 3,26 = 323$

$q = \frac{323}{99}$

3) On ne peut pas affirmer qu'une fraction n'est pas décimale tant qu'on n'a pas trouvé une période. Ici, l'enseignant fait remarquer aux enfants qui ont calculé la 2ème division et qui se sont arrêtés au zéro du quotient, qu'il n'était pas possible de conclure puisqu'ils n'avaient pas trouvé de période !

4) Il fait également remarquer que la méthode qui consiste à trouver une fraction égale de dénominateur 1000, 10000, ... est souvent très coûteuse.

.../...

7.5.7 : Résultats :

Cette activité au cours de laquelle il faut faire beaucoup de divisions, a donné aux enfants l'occasion de maîtriser l'algorithme.

De plus, il est très motivant, excitant même pour eux de découvrir si une fraction est décimale ou non (certains ont voulu reprendre des fractions qui avaient été choisies au cours de l'activité 2, module 5, pour voir maintenant si elles pouvaient ou non être attrapées ! et ont fait pour cela des calculs d'une page).

Il n'est pas exagéré de dire que tous ont compris l'objectif de l'activité et qu'ils ont travaillé avec beaucoup d'enthousiasme et de plaisir.

7.6. : Problèmes. Situations.

1) L'abonnement d'un an à une revue hebdomadaire (52 numéros) revient à 199 francs.

1°) Calcule à un centime près par défaut le prix de revient de chaque numéro.

Cette même revue est vendue à raison de 5 F le numéro.

2°) Calcule au centime près par défaut le montant de l'économie réalisée sur chaque numéro si l'on souscrit un abonnement.

2) Un fermier prépare le carburant nécessaire au fonctionnement d'une machine agricole. Pour cela, il mélange 45 litres d'essence à 2,80 F. le litre et 2 litres d'huile à 9,50 F. le litre.

1°) Calcule, en litres, la quantité de mélange obtenu.

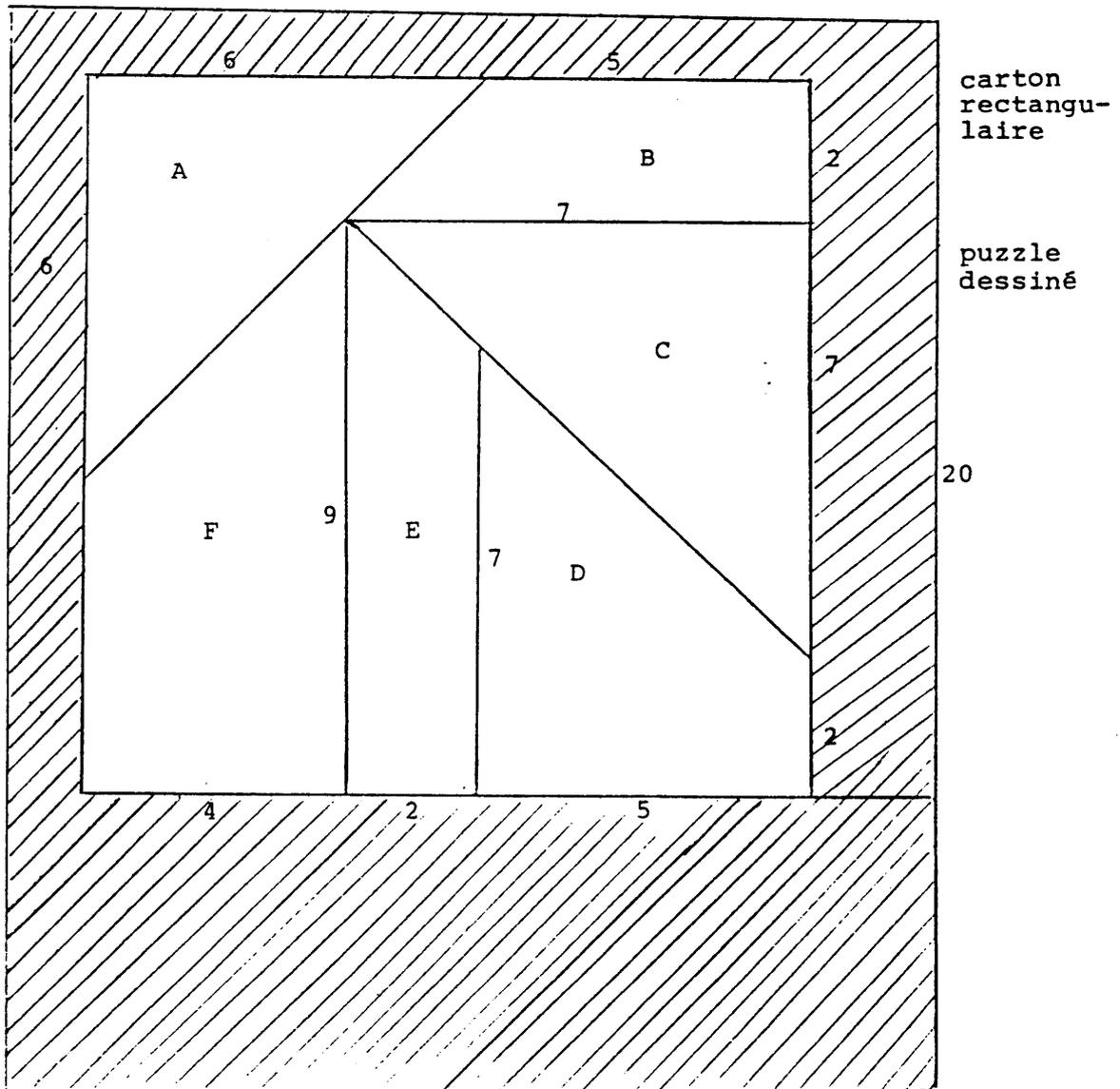
2°) Calcule, au centime près par excès, le prix du litre de mélange ainsi préparé.

MODULE 8 :
SIMILITUDE

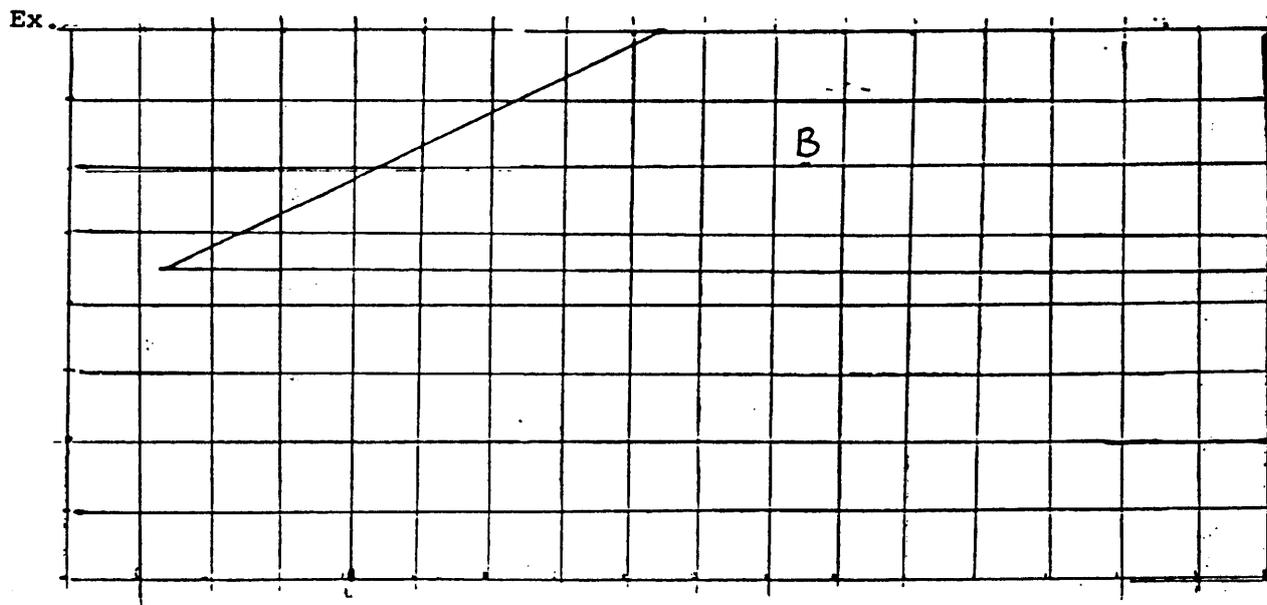
8.1 - AGRANDISSEMENT DU PUZZLE

8-1-1 : Matériel :

. 6 à 8 puzzles (suivant le nombre d'enfants)
 dessinés sur des cartons rectangulaires de 20 cm x 15 cm.
 Pour chacun des puzzles, les 6 pièces (A, B, C, D, E, F),
 découpées dans le même carton.
 (chaque puzzle et ses 6 pièces sont placés dans une enve-
 loppe).



. des feuilles de papier affiche (en assez grand nombre) ou quand c'est possible, des feuilles de papier quadrillé, ce qui facilite et rend plus rapides les mesures et les tracés.



. 1 double décimètre par enfant.

8-1-2 : Situation-problème :

a) Consigne : "Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles en respectant la règle suivante : le segment qui mesure 4 centimètres sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction.

Je donne un puzzle par équipe. Chaque élève devra faire une ou deux pièces. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle".

b) Déroulement : Les enfants sont partagés en équipes de 4 ou 5. Après une brève concertation par équipe, ils se séparent pour réaliser leur(s) pièce(s).

Le maître affiche (ou dessine) au tableau une représentation agrandie du puzzle complet.

.../...

8-1-3 : Comportements et stratégies observés.Stratégie 1.

a) Presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 à toutes les dimensions : même si certains doutent de ce modèle, ils parviennent rarement à s'expliquer et à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Le résultat, évidemment, c'est que les morceaux ne se raccordent pas. Discussions, diagnostics, les leaders accusent leurs camarades d'avoir manqué de soin. Ce n'est pas le modèle, c'est la réalisation qui est mise en accusation ; certains refont tous les morceaux. Il faut se rendre à l'évidence, ce n'est pas facile !

L'enseignant n'intervient que pour encourager et constater les faits, sans exigences particulières.

Stratégie 2.

b) Certains essaient une autre stratégie : ils commencent par tracer le grand carré en ajoutant 3 à chaque segment, ce qui aboutit au résultat suivant : pour deux des côtés, la mesure est 17 cm (en effet, à 6 cm correspond 9 cm
à 5 cm correspond 8 cm → ce qui fait 17 cm)
pour les deux autres côtés, la mesure est différente : 20 cm.

(à 2 cm correspond 5 cm

à 7 cm correspond 10 cm → ce qui fait 20 cm)

à 2 cm correspond 5 cm)

ce n'est donc plus un carré ! Perplexité des enfants qui commencent vraiment à mettre en doute le modèle et qui disent souvent : "il ne faut sûrement pas ajouter 3 !"

Stratégie 3.

c) Une autre stratégie fréquemment utilisée (soit tout de suite, soit après les stratégies (a) ou (b)) est de multiplier chaque mesure par 2 et d'enlever 1 car les enfants constatent que :

(x2) -1

4 → 7

Ceci donne un puzzle qui ressemble beaucoup au modèle.

.../...

Seules quelques pièces ne se raccordent pas bien. Alors quelquefois, les enfants se tirent d'affaire en donnant par ci, par là quelques coups de ciseaux de manière à raccorder tous les morceaux. Si la plupart d'entre eux sont conscients de la roublardise, certains, cependant, croient qu'ils détiennent la bonne solution. L'enseignant est obligé, pour ceux-là, de faire rétablir la vérité par le procédé utilisé dans le § (b).

$$4 + 2 + 5 = 11$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$7 + 3 + 9 = 19$ mesure incompatible si on utilise, pour trouver la mesure qui correspond à 11, la stratégie :

$$11 \xrightarrow{(x2) -1} 21 !$$

8-1-4 : Remarques :

a) Divers processus sociaux et intellectuels se conjuguent pour rendre difficile la mise en cause du modèle. On assiste parfois à des manifestations affectives très vives : disputes, acharnement, menaces... rarement du découragement.

b) Il arrive cependant qu'un groupe réussisse à trouver le bon modèle et réalise le puzzle. Toute la classe, avec l'enseignant, constate la réussite mais la procédure sera examinée lors de l'activité suivante.

8-1-5 : Résultats :

Tous les enfants ont mis en oeuvre au moins une stratégie, la plupart en ont essayé deux. Ils sont tous persuadés à la fin de l'activité, que c'est leur modèle qui n'est pas correct et ils sont tous prêts à en changer afin de réussir le puzzle. Mais dans aucun des groupes on ne perçoit de lassitude ou de découragement. Et à la fin de la séance, tous ont envie de savoir, de trouver le "bon moyen".

8.2 - IMAGE D'UN ENTIER

8-2-1 :

a) Consigne : "Les différents procédés que vous avez utilisés hier pour refaire le puzzle ne sont pas bons puisqu'ils ne vous ont pas permis de le construire correctement.

Vous vous êtes rendus compte qu'en ajoutant 3 ou en faisant $(x2)-1$, les mesures ne sont pas correctes.

Au cours de cette séance, vous allez essayer de trouver les bonnes mesures qui permettront de réaliser le puzzle".

b) Déroulement :

1°) Pour plus de facilité, l'enseignant (ou quelquefois un des enfants qui a réussi dans l'activité précédente) dispose les longueurs dans un tableau :

4	— >	7
5	— >	
6	— >	
2	— >	
9	— >	
7	— >	

Aussitôt, il en est toujours un pour demander que l'on trouve l'image de 8 (qui ne sert pas, mais qu'ils ajoutent malgré tout dans le tableau)

$$8 \longrightarrow 14$$

Cette proposition, qui n'est pas rejetée, permet peut-être le surgissement presque instantané d'un autre modèle : "il faudrait l'image de 1!".

"Oui, ça permettrait de trouver toutes les autres !". Alors l'enseignant ajoute encore 1 dans le tableau et demande aux enfants de trouver les mesures.

2°) La recherche se fait par groupes de 2 ou 3 enfants qui ont tous reproduit le tableau des mesures sur leur cahier.

L'enseignant, comme dans l'activité précédente, va de

.../...

groupe en groupe, encourage, répond aux questions mais ne prend pas parti.

c) Quelques procédés observés.

$$1) \begin{array}{l} 4 \longrightarrow 7 \\ :4 \left(\begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \longrightarrow \end{array} \right) \end{array} = \frac{70}{10} \begin{array}{l} \\ :4 \end{array} = \frac{70}{40} = \frac{35}{20} \begin{array}{l} \times 5 \\ \\ \times 5 \end{array} = \frac{175}{100} = 1,75$$

$$2) \begin{array}{l} 4 \longrightarrow 7 \\ :2 \left(\begin{array}{l} \downarrow \\ 2 \longrightarrow 3,5 \end{array} \right) :2 \end{array}$$

ici, ils ne font pas la division. Ils utilisent un savoir culturel qu'ils ont acquis et expliquent ainsi leur réponse :

"la moitié de 6 c'est 3

la moitié de 1 c'est 1/2 ou 0,5

$3 + 0,5 = 3,5$ "

Ils continuent :

$$:2 \left(\begin{array}{l} 2 \longrightarrow 3,5 = \frac{35}{10} \\ \downarrow \\ 1 \longrightarrow \end{array} \right) :2 = \frac{35}{20} = \frac{175}{100} = 1,75$$

3) $2 \longrightarrow 3,5$ qu'ils écrivent 3,50.

Pour trouver l'image de 1, ils écrivent la moitié de $3 \rightarrow 1,50$ et ajoutent la moitié de 50 centièmes soit 25 centièmes :

$$1,50 + 0,25 = 1,75;$$

Pour trouver les autres mesures, ils utilisent indifféremment l'un ou l'autre des deux procédés suivants :

- soit en multipliant successivement l'image de 1 par 5, 6, 7, 9.

$$1 \longrightarrow 1,75$$

$$5 \longrightarrow 1,75 \times 5 = 8,75$$

$$6 \longrightarrow 1,75 \times 6 = 10,50$$

$$7 \longrightarrow 1,75 \times 7 = 12,25$$

$$9 \longrightarrow 1,75 \times 9 = 15,75$$

.../...

- soit en ajoutant l'image de 1 et l'image de 4 pour trouver l'image de 5 :

$$1,75 + 7 = 8,75$$

en ajoutant l'image de 4 et celle de 2 pour trouver celle de 6 :

$$7 + 3,5 = 10,50 \text{ et ainsi de suite.}$$

d) Remarque :

1) Une fillette ayant bien trouvé l'image de 1 a fait ensuite tous les calculs en utilisant, non 1,75 mais 1,7. A la question de l'enseignant :

"Mais pourquoi as-tu multiplié par 1,7 alors que tu as trouvé 1,75 ?"

Elle a répondu :

"Parce que je ne peux pas mesurer 1,75 cm avec mon double-décimètre puisque ça ne va que jusqu'aux millimètres !"

Les autres enfants étant immédiatement intervenus pour protester en disant "que c'était possible, qu'avec un crayon bien pointu on peut repérer à peu près le milieu entre deux millimètres", la fillette convaincue, n'a pas réalisé le puzzle avec les mesures qu'elle avait trouvées. Elle n'a donc pas pu se rendre compte de l'inexactitude de ses résultats.

2) Pour beaucoup d'enfants, mesurer 12,25 cm ; 15,75 cm représente effectivement une difficulté importante dont l'enseignant ne se rend pas toujours compte mais qu'il doit prendre en considération.

8-2-2 : Confrontation des méthodes et réalisation des puzzles.

a) Dès que tous les groupes ont trouvé les mesures, les méthodes sont confrontées, discutées par les enfants.

b) L'enseignant leur demande ensuite de faire les pièces et de reconstituer le puzzle. (D'eux-mêmes, d'ailleurs, les enfants le demandent).

Cette phase est absolument indispensable car c'est pour les enfants la seule preuve valable qui emporte leur conviction.

.../...

Mais c'est aussi surtout un moment de plaisir et d'enthousiasme pour eux : celui de l'effort récompensé et de la réussite !

8-2-3 : Résultats :

Tous les enfants savent qu'on peut toujours trouver l'image d'un entier et presque tous savent la calculer.

8.3 - IMAGE D'UNE FRACTION

8.3.1 - Première phase : Rappel des deux activités précédentes.

a) Consigne :

"Nous avons agrandi un puzzle. Pour cela, nous avons un modèle dont on connaissait les mesures et un renseignement sur l'une des mesures : à 4 correspond 7.

$$4 \longrightarrow 7$$

Qu'avez-vous cherché ?"

b) Déroulement :

Les enfants rappellent brièvement l'activité et l'enseignant fait un recensement rapide des procédures utilisées : il fallait trouver l'image de 1.

$$\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 7 \\ 1 \longrightarrow \boxed{?} \end{array}$$

Autres exemples traités rapidement : "Si 9 a pour image 11, quelle est l'image de 1 ?"

L'enseignant peut envoyer un enfant au tableau ou demander à chacun de chercher sur son cahier de brouillon.

$$\begin{array}{l} 9 \longrightarrow 11 = \frac{11}{1} \\ :9 \left(\begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \longrightarrow \frac{11}{9} \end{array} \right) :9 \end{array}$$

(Un rappel de la division est souvent nécessaire ici, rappel qui se fait collectivement).

.../...

(*) Il est très important de faire régulièrement "le point" avec les enfants : rappeler ou faire rappeler quel problème avait été posé, quelles questions ce problème avait soulevées. Il est nécessaire qu'ils sachent ce qu'ils sont en train de résoudre. L'enseignant peut même, quelquefois, le rappeler en cours d'activité : en effet, beaucoup d'enfants lorsqu'ils cherchent des "moyens", des "solutions" d'un problème, oublient souvent le "pourquoi" de leurs calculs.

8.3.2. - Deuxième phase : Image d'une fraction.

a) Consigne : "Vous savez maintenant trouver l'image de n'importe quel entier.

Nous avons vu aussi que l'on peut désigner une mesure par une fraction ; à propos de quelle activité ? (construction de baguettes...)

Aujourd'hui, vous allez essayer de trouver l'image d'une fraction".

L'enseignant place $\frac{5}{7}$ dans un tableau de mesures

$$4 \longrightarrow 11$$

$$\frac{5}{7} \longrightarrow ?$$

b) Déroulement :

1. d'abord, il demande aux enfants de réfléchir et s'assure que tous ont bien compris le problème posé.

Spontanément, les enfants proposent d'ajouter 1 dans le tableau de mesures - ce que fait l'enseignant - Il leur demande ensuite de trouver l'image de 1.

$$4 \longrightarrow 11$$

$$1 \longrightarrow ?$$

L'un des enfants vient écrire cette image de 1 sur le tableau, ce qui donne lieu encore à une révision rapide. Le nouveau tableau de mesures se présente maintenant ainsi :

$$(1) \quad \begin{array}{l} 4 \longrightarrow 11 \\ 1 \longrightarrow \frac{11}{4} \\ \frac{5}{7} \longrightarrow ? \end{array}$$

Remarque : L'opérateur $\frac{11}{4}$ n'est pas identifié et ne doit pas l'être. C'est seulement une mesure.

2. A ce moment-là, pour cette recherche, les enfants travaillent par groupes de deux ou de trois.

c) Comportements observés :

1. Beaucoup "transforment" la fraction $\frac{11}{4}$ en nombre à virgule :
.../...

$\frac{11}{4} = \frac{275}{100} = 2,75$, et s'arrêtent là, car ils ne savent pas "multiplier $\frac{5}{7}$ par 2,75.

$$x \frac{5}{7} \left(\begin{array}{l} 1 \longrightarrow \frac{11}{4} = 2,75 \\ \downarrow \\ \frac{5}{7} \longrightarrow 2,75 \times \frac{5}{7} \end{array} \right) x \frac{5}{7}$$

2. Là majorité "attrape" (1) $\frac{5}{7}$ en faisant comme précédemment :

$$x \frac{5}{7} \left(\begin{array}{l} 1 \longrightarrow \frac{11}{4} \\ \downarrow \\ \frac{5}{7} \longrightarrow \end{array} \right) x \frac{5}{7}$$

mais là encore, ils tombent sur des calculs qu'ils ne savent pas résoudre : la multiplication de 2 fractions : $\frac{11}{4} \times \frac{5}{7}$.

Il faut signaler cependant que certains d'entre eux écrivent bien le résultat exact $\frac{11}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{55}{28}$ - uniquement par intuition - résultat qui n'est pas acceptable, bien entendu, puisqu'ils ne peuvent pas en prouver la véracité.

3. Souvent aussi, ils écrivent 4, 11 et 1 sous forme de fractions :

$$4 = \frac{4}{1} \quad 11 = \frac{11}{1} \quad 1 = \frac{1}{1} \quad \text{puis sont bloqués là.}$$

L'enseignant va de groupe en groupe, pose des questions, encourage. Essais infructueux.

Cette activité est difficile pour les enfants de cet âge-là et il faut les aider par des questions du genre :

.../...

(1) quelques expressions employées spontanément par les enfants pour se faire comprendre - soit de l'enseignant, soit des autres enfants - ont été adoptées par la classe entière et acceptées par l'enseignant. Des termes sont ainsi utilisés qui ne sont pas forcément "mathématiques" mais qui ne serviront que provisoirement pour certaines recherches, ne seront pas "institutionnalisés", donc oubliés ensuite, exemple : "attraper" "intermédiaire".

"comment faire pour 'attraper" $\frac{5}{7}$,".

L'enseignant suggère de trouver d'autres "intermédiaires".

A cette étape, il organise une discussion collective car tous les enfants sont "bloqués" sur ce problème.

8.3.3. - Troisième phase : Recherche d'un "intermédiaire".

a) Consigne : L'enseignant demande aux enfants d'observer le tableau de mesures (i) (dans le § 8.3.2.) et pose la question :

"qu'est-ce qui permettrait "d'attraper" facilement $\frac{5}{7}$? Réfléchissez aux calculs qu'il faudrait faire".

b) Déroulement :

i) Une phase de réflexion collective commence d'abord. Les enfants réfléchissent en silence puis font des propositions à haute voix qui sont aussitôt mises à l'essai sous le regard de toute la classe. Certaines d'entre elles n'aboutissent à rien : proposition de mettre 1 en fraction dans le tableau sous la forme $\frac{7}{7}$ ou $\frac{1}{1}$, ce qui ne fait pas avancer le problème puisque les enfants ne savent pas passer de $\frac{7}{7}$ à $\frac{5}{7}$ ou de $\frac{1}{1}$ à $\frac{5}{7}$.

D'autres, par exemple 5 ou $\frac{1}{7}$, sont retenues parce qu'elles apportent une solution possible à la question posée par l'enseignant :

Essais au tableau des 2 dernières propositions par un enfant ou par l'enseignant :

1er essai : 5.

- 5 est d'abord transformé en fraction : $\frac{5}{1}$

$$\frac{5}{1} \xrightarrow{:\ 7} \frac{5}{7}$$

Remarque : A ce moment-là encore, il est généralement utile de faire encore un rappel de la division sous forme de petits calculs rapides tels que $\frac{25}{3} : 9 = \frac{25}{27}$ $\frac{13}{9} : 5 = \frac{13}{45}$, $\frac{81}{13} : 9 = \frac{9}{13}$ etc... (quelques enfants savent et rappellent qu'il suffit de multiplier le dénominateur de la fraction par 7, ce qui la rend 7 fois plus petite)

.../...

2ème essai : $\frac{1}{7}$.

$$\frac{1}{7} \xrightarrow{\times 5} \frac{5}{7}$$

ii) Les enfants se remettent en groupes de 2 ou 3 et reprennent la recherche qu'ils avaient commencée au cours de la 2ème phase.

c) Stratégies observées :

Tous les groupes font sur leur cahier un des deux tableaux :

$$\begin{array}{r} \text{soit :} \\ 4 \text{ --- } 11 \\ 1 \text{ --- } \frac{11}{4} \\ 5 \text{ ---} \\ \frac{5}{7} \text{ ---} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{soit :} \\ 4 \text{ --- } 11 \\ 1 \text{ --- } \frac{11}{4} \\ \frac{1}{7} \text{ ---} \\ \frac{5}{7} \text{ ---} \end{array}$$

suivant qu'ils adoptent l'une ou l'autre des deux propositions faites et mises à l'essai.

Remarque : Tous les groupes n'arrivent pas au bout des calculs car les enfants font des erreurs : ils ont oublié les techniques découvertes lors des leçons sur les opérations dans les fractions.

C'est tout à fait normal et l'enseignant, ne doit ni s'inquiéter, ni culpabiliser les enfants. Au contraire car c'est justement l'occasion de réutiliser des procédés découverts, il y a déjà longtemps, de les faire fonctionner et de montrer aux enfants à quoi ils servent.

8.3.4. - Synthèse collective des méthodes.

a) L'enseignant demande d'abord quels sont les groupes qui n'ont pas réussi. Il leur propose d'essayer de dire ce

.../...

qui les a gênés et pourquoi ils ne sont pas arrivés au résultat. Les enfants connaissent généralement très bien les raisons de leur échec : ils se trompent dans les multiplications et les divisions d'une fraction par un nombre - c'est la principale cause d'erreur.

b) Puis l'enseignant envoie des enfants au tableau pour décrire les méthodes utilisées :

$$\begin{array}{l}
 1/ \quad 4 \text{ --- } 11 \\
 \quad \quad 1 \text{ --- } \frac{11}{4} \\
 \quad \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{\times 5} \\ = 5 \text{ --- } \frac{55}{4} \end{array} \right\} \times 5 \\
 \quad \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{:7} \\ \frac{5}{7} \text{ --- } \boxed{\frac{55}{28}} \end{array} \right\} : 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2/ \quad 4 \text{ --- } 11 \\
 \quad \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{1} \text{ --- } \frac{11}{4} \\ \textcircled{:7} \downarrow \\ \frac{1}{7} \text{ --- } \frac{11}{28} \end{array} \right\} : 7 \\
 \quad \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{\times 5} \\ \frac{5}{7} \text{ --- } \boxed{\frac{55}{28}} \end{array} \right\} \times 5
 \end{array}$$

8.3.5. - Exercices d'entraînement.

1) L'enseignant ajoute 2 autres fractions sur le tableau des mesures et les enfants calculent individuellement leurs images :

$$\begin{array}{l}
 4 \text{ --- } 11 \\
 1 \text{ --- } \frac{11}{4} \\
 \frac{7}{9} \text{ --- } ? \\
 \frac{6}{7} \text{ --- } ?
 \end{array}$$

L'enseignant fait une correction collective. Il envoie au tableau les enfants qui ont encore des difficultés.

.../...

2) Conclusion. "Toutes les fractions ont-elles une image ?" demande l'enseignant.

Les enfants concluent, après réflexion, qu'on peut toujours trouver l'image d'une fraction puisqu'il est toujours possible de multiplier et de diviser des fractions par des nombres.

8.3.6. - Résultats.

A la fin de cette séance, les enfants ont compris qu'il est possible de trouver l'image de n'importe quelle fraction, connaissant l'image d'un entier naturel.

Tous, aussi, ont compris qu'il faut connaître l'image de 1 et celle d'un "intermédiaire" mais tous ne maîtrisent pas encore la suite des calculs et n'arrivent pas au résultat.

Il faut insister encore sur le fait que ceci est normal et que l'enseignant n'a pas lieu de s'inquiéter. Ce serait une grave erreur de faire des exercices répétés d'entraînement car les activités qui vont suivre permettront de réutiliser ces notions et d'en acquérir la maîtrise progressivement (au rythme de chaque enfant).

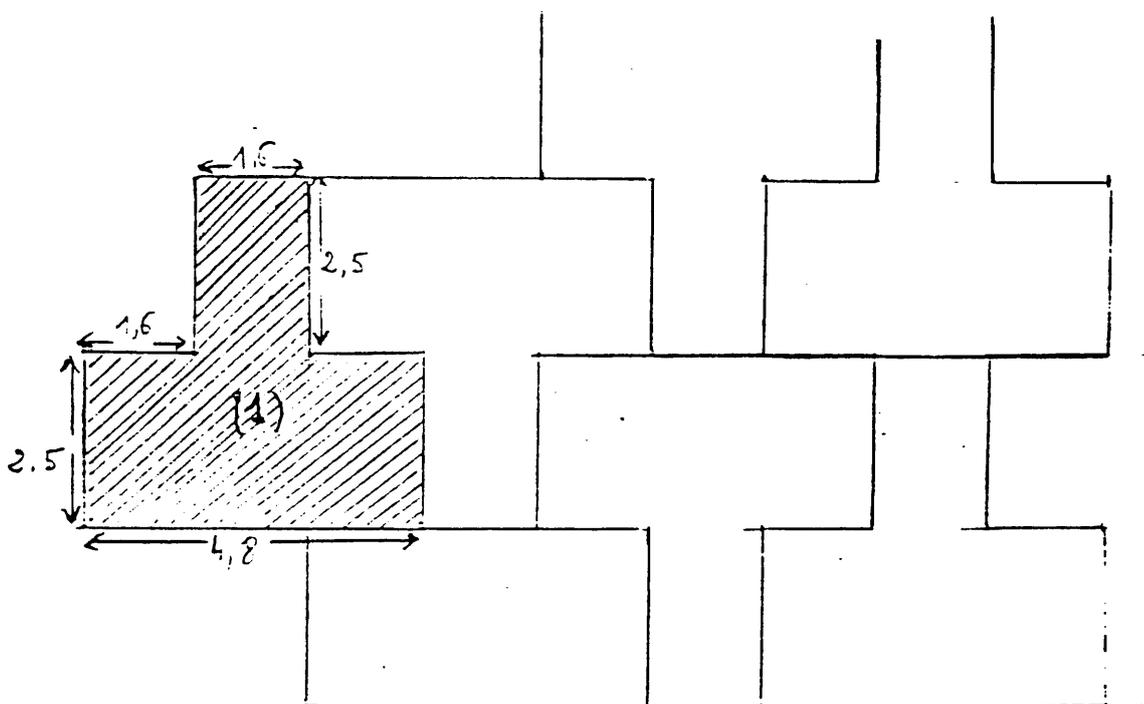
8.4 - IMAGE D'UN DECIMAL

8.4.1 : Matériel : 3 ou 4 pièces semblables au(1) réalisées dans du carton ou un dessin fait sur le tableau avant la leçon

8.4.2 : Situation-problème : Construction d'un pavage.

a) Consigne : "Nous allons réaliser un panneau décoratif pour notre classe.

Ce panneau sera formé d'un ensemble d'éléments identiques à (1) que nous arrangerons comme le montre ce dessin* :



Pour cela, chaque élève réalisera un de ces éléments en agrandissant le modèle de telle manière qu'à 1 cm du modèle correspondent 3,5 cm.

1 cm → 3,5 cm

.../...

* Le dessin aura été réalisé avant la leçon par l'enseignant
 - soit sur le tableau, - soit sur la feuille.

b) Le déroulement :

Les enfants travaillent par groupes de 3. Ils cherchent d'abord un moyen pour trouver les mesures de la pièce

1 — 3,5
 2,5 —
 1,6 —
 4,8 —

c) Stratégies observées :

1) La stratégie la plus couramment utilisée par les enfants est celle qui consiste à écrire les nombres décimaux en fraction :

1 — $\frac{35}{10}$
 $\frac{25}{10}$ —
 $\frac{16}{10}$ —

et en se référant à l'activité précédente, ils calculent l'image de $\frac{1}{10}$ qu'ils ajoutent dans le tableau :

$$\begin{array}{r}
 1 \text{ — } \frac{35}{10} \\
 \downarrow :10 \\
 \frac{1}{10} \text{ — } \frac{35}{100} \\
 \downarrow \times 25 \\
 \frac{25}{10} \text{ — } \frac{35}{100} \times 25 = \frac{875}{100} = 8,75 \\
 \downarrow \times 16 \\
 \frac{16}{10} \text{ — } \frac{35}{100} \times 16 = \frac{560}{100} = 5,60 \\
 \downarrow \times 48 \\
 \frac{48}{10} \text{ — } \frac{35}{100} \times 48 = \frac{1680}{100} = 16,80
 \end{array}$$

2) Souvent, les enfants calculent aussi en décomposant les nombres décimaux de la manière suivante :

- Pour l'image de 2,5 :

.../...

$2,5 = 2 + 0,5$

1	→	3,5	:2	x2
x2	↓	7		
→2	→	7		
→0,5	→	1,75		
2,5	→	$7 + 1,75 = 8,75$		

Pour trouver la moitié de 3,5, ils écrivent :
 $3,5 = 3 + 0,5$
 la moitié de 3, c'est 1,5
 la moitié de 0,50 c'est 0,25
 la moitié de 3,50 c'est :
 $1,5 + 0,25 = 1,75$

Pour l'image de 1,6 :

$1,6 = 1 + 0,5 + 0,1$

1	→	$3,5 = \frac{35}{10}$:10
:10	↓		
$\frac{1}{10}$	→	$0,1 \rightarrow \frac{35}{100} = 0,35$	
1,6	→	$3,5 + 1,75 + 0,35 = 5,6$	

Pour l'image de 4,8 :

$4,8 = 4 + 0,5 + (3 \times 0,1)$

1	→	3,5	x4
4	→	14,0	
0,5	→	1,75	
0,3	→	$3 \times 0,35 = 1,05$	
4,8	→	$14 + 1,75 + 1,05 = 16,8$	

Remarque : Cette dernière méthode est généralement utilisée par des enfants très bons en calcul mental. Beaucoup des calculs décrits ci-dessus ne sont pas marqués sur les cahiers, seuls les résultats apparaissent. C'est à la demande de l'enseignant (qui passe de groupe en groupe et qui insiste en disant : "mais comment avez-vous trouvé ceci ?") que les enfants consentent - souvent de mauvaise grâce - à les écrire (de manière très désordonnée parfois !)

8.4.3. - Phase 2 : Comparaison des méthodes.

1. Les groupes qui ont trouvé des résultats viennent à tour de rôle au tableau expliquer leur méthode. C'est l'occasion pour
 .../...

les autres de voir où ils se sont trompés. Lorsque des enfants échouent à cette activité, c'est toujours à cause des erreurs de calcul.

2. Conclusion : Comme dans l'activité précédente, l'enseignant demande : "tous les nombres décimaux ont-ils une image ?" Les enfants répondent bien entendu, affirmativement.

8.4.4. - Phase 3 : Réalisation des pièces

Chaque enfant réalise une ou plusieurs pièces dans du papier de couleur.

Comme dans l'activité du puzzle, ils sont de nouveau confrontés au problème de mesurage : 5,6 cm ; 8,75 cm ; 16,8 cm. De plus, ils doivent utiliser l'équerre pour leurs tracés, ce qui ajoute un deuxième intérêt à cette séance : la construction de figures géométriques.

8.4.5. - Résultats.

Cette activité a donné aux enfants l'occasion de remettre en oeuvre des procédés élaborés au cours de la séance précédente. Elle a permis à beaucoup d'entre eux de maîtriser des calculs difficiles qu'ils n'avaient pas réussi à mener jusqu'au bout.

8.5 - DIVISION D'UN DECIMAL PAR 10, 100, 1000...

8.5.1 - Image de $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$.

a) Consigne : "Dans la leçon précédente, vous avez agrandi des pièces pour faire un panneau décoratif. Vous deviez les agrandir de telle manière qu'à 1 cm correspondent 3,5 cm. Maintenant, à l'aide de cet agrandissement :

vous allez chercher l'image de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ d'abord en fraction, puis en nombre décimal".

b) Déroulement : Les enfants cherchent soit individuellement, soit par groupes de deux.

Ils complètent le tableau qui a été élaboré par l'enseignant en donnant la consigne :

$$\begin{array}{l}
 1 \longrightarrow 3,5 \\
 \frac{1}{10} \\
 \frac{1}{100} \\
 \frac{1}{1000}
 \end{array}$$

c) Correction : Cette activité qui ne présente pas de difficultés pour les enfants se déroule rapidement et très vite le tableau est complété. L'enseignant procède à une correction collective en faisant disposer les calculs de la manière suivante : la colonne (3) est complétée la première, la colonne 2 est complétée après la (3) : les enfants transforment l'écriture en fraction en écriture décimale.

$$\text{ex : } \frac{35}{10} = 3,5$$

$$\frac{35}{100} = 0,35 \text{ etc...}$$

Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3
1	3,5	$\frac{35}{10}$
$\frac{1}{10}$	0,35	$\frac{35}{100}$
$\frac{1}{100}$	0,035	$\frac{35}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	0,0035	$\frac{35}{10000}$

(I)

Les enfants n'ont pas tous employé la même stratégie : certains sont toujours partis de la première ligne pour trouver toutes les autres images

Exemple :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \longrightarrow & \frac{35}{10} \\ :100 & & & :100 \\ & \frac{1}{100} & \longrightarrow & \end{array}$$

D'autres partent du dernier calcul trouvé :

$$\begin{array}{ccc} & \frac{1}{10} & \longrightarrow & \frac{35}{100} \\ :10 & & & :10 \\ & \frac{1}{100} & \longrightarrow & \frac{35}{1000} \end{array}$$

Toutes ces stratégies sont recensées par l'enseignant et les enfants qui remarquent que "c'est pareil" quant à la rapidité et à la difficulté.

8.5.2 - Division d'un décimal par 10, 100, 1000

a) Observation du tableau (I)

L'enseignant demande aux enfants d'observer les résultats du tableau (I) et regroupe sous leurs yeux toutes les opérations sur les décimaux contenues dans ce tableau :

colonne 2

$$\begin{array}{l} 3,5 : 10 = 0,35 \\ 0,35 : 10 = 0,035 \\ 3,5 : 100 = 0,035 \\ 0,035 : 10 = 0,0035 \\ 0,35 : 100 = 0,0035 \\ 3,5 : 1000 = 0,0035 \end{array}$$

.../...

b) Observation des opérations ci-dessus

Les enfants observent ces opérations et découvrent la règle de la division d'un décimal par 10, 100, 1000. Bien entendu, ils ne la formulent pas encore mais les constatations qu'ils font sur un exemple et qui sont vérifiées sur toutes les opérations, prouvent qu'ils ont compris :

"c'est le contraire de la multiplication !"

"Il faut reculer la virgule !!" etc...

L'enseignant fait alors expliciter la règle qui permet de trouver immédiatement le résultat :

"Pour diviser un nombre décimal par 10, 100, 1000, il faut déplacer la virgule d'un rang, 2 rangs, 3 rangs vers la gauche".

8.5.3 - Exercices d'application individuels.

Ces exercices sont faits par les enfants et l'enseignant procède à une correction immédiate.

- 1) $45,87 : 1000 =$
 $139,2 : 10 =$
 $4,750 : 100 =$
 $25,785 : 10\ 000 =$
 $0,08 : 100 =$
 $0,08 : 1000 =$
- 2) $135,9 \times \boxed{} = 1359$
 $4,457 \times \boxed{} = 485,7$
 $0,129 \times \boxed{} = 129$
 $130 \times \boxed{} = 13000$
 $1,675 \times \boxed{} = 16,75$
 $5,45 \times \boxed{} = 5450$

8.5.4 - Résultats.

Comme pour la multiplication d'un décimal par 10, 100, 1000, (module 6, activité 4), les enfants, bien qu'ayant compris, font beaucoup d'erreurs dans le déplacement de la virgule. Il est donc nécessaire de leur donner régulièrement des exercices (qui sont corrigés aussitôt) afin qu'ils acquièrent très vite la maîtrise de ces calculs qu'ils devront utiliser dans les activités ultérieures.

MODULE 9 :
LES APPLICATIONS LINEAIRES

9.1. UNE REPRODUCTION DE L'OPTIMIST

9.1.1 - Matériel :

- Le dessin d'un "optimist"* sur une feuille de papier canson dont les dimensions sont indiquées dans le paragraphe 8.5.2 et qui servira de "modèle".

- 11 reproductions de ce modèle, de tailles différentes, 6 plus petites, 5 plus grandes. Chacune de des reproductions est dessinée aussi sur une feuille de papier canson.

9.1.2 - Phase 1. Observation du dessin de l'"optimist"

1) L'enseignant affiche sur le tableau le dessin de l'optimist (le modèle) et demande aux enfants s'ils reconnaissent ce que c'est.

Il leur fait énumérer et désigner les principaux éléments du bateau, le mât, la bôme, le pavillon, l'étrave...

2) Puis il marque sur le tableau les dimensions de ces éléments :

hauteur du mât : 17,7 cm

hauteur du pavillon : 1,7 cm

côté du pavillon : 4 cm

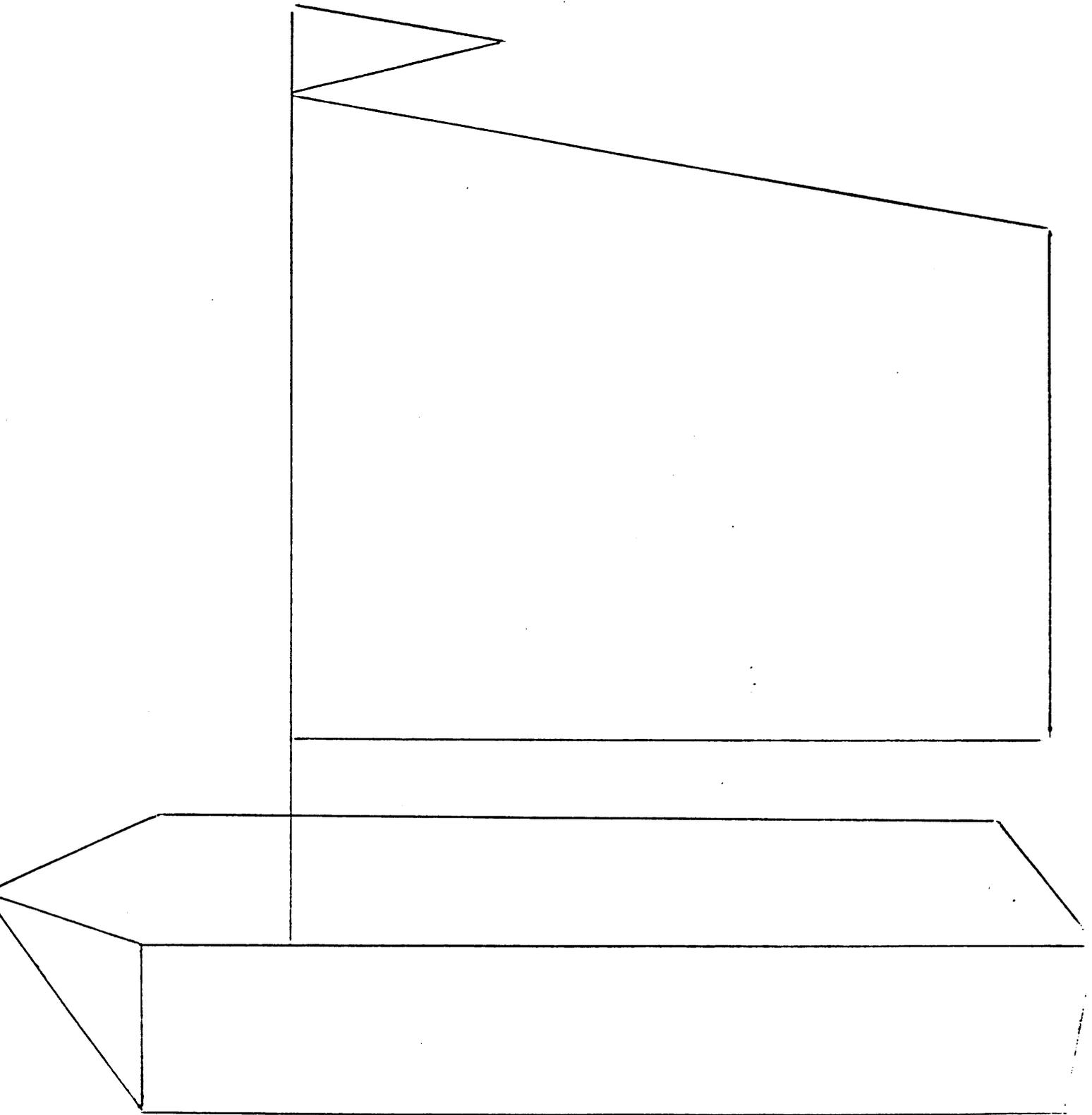
longueur de la bôme : 14 cm

hauteur de la coque : 3,4 cm

longueur de l'étrave : 5,2 cm

.../...

* L'optimist a été choisi car les enfants qui étaient allés en classe de mer connaissaient tous ce bateau et l'avaient manoeuvré. Mais il est bien évident que l'on aurait pu choisir n'importe quel autre dessin.



9.1.3 - Première phase : présentation d'une reproduction (plus grande que le modèle)

L'enseignant affiche ensuite au tableau (à côté du modèle qui reste affiché) une reproduction plus grande de ce modèle (celle qui agrandit 1 fois $1/2$).

Introduction à l'activité : "Que pouvez-vous dire de cet optimist ? que pouvez-vous dire sur ses dimensions ?"

Les enfants font des remarques : "il est plus grand", "ce n'est pas le double, c'est plus petit que le double". Ils demandent souvent : "est-ce que toutes les mesures sont pareilles ?", ce qui signifie : "est-ce que toutes les mesures ont été agrandies de la même manière ?" parfois aussi ils disent : "est-ce qu'il est proportionnel ?"

L'enseignant répond aux enfants qu'ils trouveront eux-mêmes la réponse à ces questions s'ils trouvent les mesures de cette reproduction. Il demande alors : "est-ce que vous sauriez trouver ces mesures ? et pour cela de quel renseignement auriez-vous besoin ?" Les enfants répondent généralement qu'une mesure leur suffit.

a) Consigne : "Vous allez travailler en groupes et chaque groupe me demandera par écrit, la mesure qu'il souhaite. Puis, à l'aide de cette mesure, vous prévoirez, par le calcul, toutes les mesures de cette reproduction. Vous viendrez ensuite vérifier, avec votre double-décimètre, si les résultats que vous trouvez sont corrects et identiques aux mesures de la reproduction". Vous aurez alors les réponses à vos questions.

b) Déroulement : Les enfants travaillent par groupes de 2 ou 3. Ils cherchent d'abord ensemble une procédure qui va leur permettre de trouver ces mesures. Ensuite, ils se partagent les calculs : l'un calcule la bôme, l'autre le mât, l'autre l'étrave...

Dès qu'ils ont terminé, ils vont vérifier sur la reproduction, restée affichée au tableau, si les mesures qu'ils trouvent sont correctes. Ils font souvent des remarques à propos de ces résultats : "oui, c'est proportionnel" ou "on s'est trompé, nos mesures ne sont pas les mêmes..." alors ils reviennent à leur place et recommencent (c'est le cas d'un groupe qui, ayant demandé la mesure du mât, avait ajouté 8,55 à toutes les mesures car $26,55 - 17,5 = 8,55$).

.../...

9.1.4 - Recensement des méthodes de calcul - choix d'une méthode.

a) Etude collective des réponses et des erreurs.

L'enseignant demande : "qui a trouvé les mesures qui sont les mêmes que celles du dessin ?" A ceux qui n'ont pas réussi à trouver de bons résultats, il demande pourquoi. Les enfants sont conduits à réfléchir sur ce qu'ils ont fait : erreurs de calcul ? mauvaise procédure ?

Il est intéressant de remarquer que beaucoup savent parfaitement pourquoi ils ne sont pas arrivés à trouver des mesures exactes et le disent : "on a choisi la hauteur du mât, alors c'était difficile parce qu'il n'y avait que des nombres décimaux..." ; "on n'a pas su faire des calculs..."; "on n'a pas su trouver l'image de 1..."

b) Exposé des méthodes correctes.

Les groupes qui ont réussi viennent au tableau montrer comment ils ont procédé. Il est évident qu'un ou deux groupes seulement (quelquefois trois) viennent car l'enseignant demande chaque fois qui a procédé de la même manière (les enfants reconnaissent toujours leur procédure).

9.1.5 - Différentes procédures utilisées par les enfants et présentées lors de la correction collective.

Remarque : Beaucoup de groupes ont demandé la mesure de la bôme ou celle du côté du pavillon (car ces mesures sont des naturels sur le modèle : 14 cm et 4 cm).

Cependant, d'autres groupes ont demandé au hasard : mesure du mât, de l'étrave, etc...

Différentes procédures : Ils font tous des tableaux.

1ère procédure observée dans 2 groupes : un qui a demandé la mesure de la bôme, l'autre la mesure du mât.

1er exemple : mesure de la bôme.

	<u>Modèle</u>	<u>Reproduction</u>
Les enfants ont remarqué que : $14 + 7$ (moitié de 14) = 21.	14	21
Pour trouver chaque mesure (de la reproduction) ils ont ajouté la mesure du modèle et sa moitié		
$3,4 = 3 + 0,4$	3,4	$3,4 + 1,5 + 0,2 = 5,1$
$5,2 = 5 + 0,2$	5,2	$5,2 + 2,5 + 0,1 = 7,8$
$1,7 = 1 + 0,70$	17,7	$17,7 + 8,5 + 0,35 = 26,55$
		.../...

2ème exemple : mesure du mât

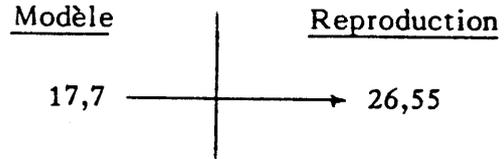
Ils ont écrit :

$17,7 = 17 + 0,70$

La moitié de 17,7 c'est la moitié de 17 plus la moitié de 0,70

$8,5 + 0,35 = 8,85$

$17,7 + 8,85 = 26,55$

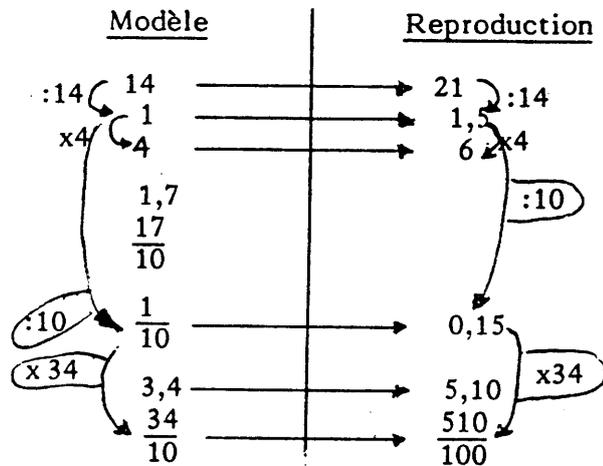


Cette remarque étant faite, la procédure est exactement la même que celle du 1er exemple.

2ème procédure observée

(pour ceux qui ont demandé la mesure de la bôme)

bôme
Côté du pavillon
Hauteur du pavillon
 Ils écrivent en fraction :
 et calculent l'image de 1/10 ou 0,1
Hauteur de la coque :
 Ils écrivent en fraction :



Ils font la même chose pour toutes les mesures.

Cette procédure est observée aussi dans les groupes qui demandent la mesure du côté du pavillon. Parmi ceux-là, un groupe a d'abord calculé l'image de tous les entiers : 17 ; 3 ; 5 puis l'image de 0,7 ; 0,4 ; 0,2 (voir tableau ci-dessous)

.../...

Modèle	Reproduction
4	6
1	1,5
17	25,5
3	$3 \times 1,5 = 4,5$
5	$5 \times 1,5 = 7,5$
0,1	0,15
0,7	1,05
0,4	0,6
0,2	0,30
17,7	$25,5 + 1,05 = 26,55$
3,4	$4,5 + 0,6 = 5,1$
5,2	$7,5 + 0,3 = 7,8$

3ème procédure observée

Les enfants expliquent qu'ils ont transformé la mesure en mm pour avoir un nombre entier

Modèle	Reproduction
17,7	26,55
177	265,5
1	1,5

4ème procédure observée

Ils écrivent en fraction :

Ils calculent l'image de 1/10

Modèle	Reproduction
17,7	26,55
$\frac{177}{10}$	26,55
$\frac{1}{10}$	0,15
1	1,5

Pour le calcul des autres mesures, ces enfants ont procédé comme dans la 2ème procédure.

9.1.6. COMMENTAIRE : longueur calculée, longueur mesurée, approximations.

Cette leçon, comme toutes celles où les élèves doivent effectivement mesurer des grandeurs et les comparer avec les résultats de leurs calculs, soulève des questions liées aux approximations (feuilles de papier

§ 1.1 ... constructions de grandeurs fractionnaires § 3.2, Puzzle, § 8.1

Il est souhaitable que le maître établisse petit à petit et surtout d'après les remarques ou les difficultés des enfants, une bonne pratique du traitement des valeurs mesurées dans les calculs ou des valeurs calculées dans les mesures sans pour autant les enseigner comme des savoirs.

Exemples : Erreurs de mesures.

Des élèves mesurant le même objet peuvent avoir des résultats différents : les premières leçons § 1.1 à § 2.1 avaient pour but de favoriser l'apparition de ce concept et d'attirer l'attention des élèves sur :

- l'importance de distinguer les différences acceptables (erreurs de mesure) de celles qui ne le sont pas parce qu'elles sont trop grandes et qu'elles mettent en cause le raisonnement.

Exemple : 25 f → 3 mm
 ou 27 f → 3 mm

s'il s'agit de feuilles très minces, sont acceptables toutes les deux par contre, s'il s'agit des feuilles les plus épaisses (E) ce n'est plus acceptable!

Ils ont pu remarquer aussi l'effet des opérations de sommes (physiques) sur les erreurs de mesure.

Valeur calculée (V.C) Valeur mesurée (V.M)

De nombreuses occasions de confronter des valeurs prévues par le calcul (à partir de mesures effectives) avec des valeurs mesurées directement, ont donné l'occasion au maître d'insister sur les différences d'exigences que l'on doit avoir à leur égard :

Il est acceptable de manipuler une longueur calculée de 1,275 cm surtout si elle sert à d'autres calculs.

Il ne l'est pas d'annoncer une longueur mesurée directement de 1,275 ou de $\frac{7}{3}$ cm.

Il est temps de demander aux élèves de signaler cette distinction dans les tableaux de nombres qu'ils écrivent. Par exemple, en mettant "VMD" ou "LMD" (valeur ou longueur mesurée directement) après ces valeurs.

Il est important en tout cas que le maître ne substitue pas sans précautions les valeurs qu'il attend à celles qui fournissent les mesures au cours de ces exercices.

.../...

Correspondance entre une valeur calculée et une valeur mesurée.

La manipulation des intervalles, introduite dans les paragraphes 4.3 et 4.4 et suivants, permet de discuter sans formalisme et sans cours théorique l'appartenance ou non d'une VMD à un intervalle d'erreur autour de la valeur calculée.

Les enfants repèrent un intervalle : "la valeur est comprise entre 7,42 et 7,43" et,

- soit calculent sur les deux valeurs le nouvel intervalle calculé
- soit estiment l'intervalle : 1/10 de millimètres et opèrent les calculs sur cet intervalle.

Attention : Si A est compris entre 7,42 et 7,43

et si B est compris entre 3,27 et 3,28

A-B est compris entre $7,42 - 3,28 = 4,14$

et $7,43 - 3,27 = 4,16$

le nouvel intervalle d'erreur est de 2 mm. L'effet introduit par la multiplication est très simple à comprendre pour les élèves.

Valeur attribuée à une application à la suite de plusieurs mesures directes approximation :

Exemple : On a cherché à donner une valeur à l'application linéaire suivante

3 \longrightarrow 7,1 VMD

6 \longrightarrow 13,9 VMD

Le calcul fournit des valeurs différentes des applications pour les deux valeurs mesurées : 2,366... et 2,31..., laquelle choisir ?

Les élèves proposent habituellement celle qui facilite l'expression, ici ils calculeraient la même valeur pour toutes les VMD

x2 (3 \longrightarrow 7,1 VMD

6 \longrightarrow 14,2) x2

6 \longrightarrow 13,9 VMD

et choisiraient 6 \longrightarrow 14

ici encore il s'agit simplement de savoir quelles pratiques sont acceptables ou non. La théorie de l'approximation d'une application est hors de portée des élèves mais pas la pratique.

Il est important que cette approximation ne soit pas faite sournoisement afin que les élèves puissent la remettre en cause.

Exemple : avec la même application on mesure plus tard :

60 \longrightarrow 138 VMD.

.../...

Les élèves peuvent revenir sur l'approximation qu'ils ont faite plus haut, si elle a été explicite.

Arrondi, erreurs d'arrondi, valeur approchée.

C'est seulement lorsque les élèves auront été familiarisés avec ce genre de questions et de raisonnement justifiés par des problèmes pratiques effectifs où les conceptions erronées peuvent être matériellement montrées fausses que les enfants peuvent commencer à utiliser l'approximation pour se faciliter les calculs. Remplacer 2,39 par 2,4 pour la seule raison que l'erreur d'arrondi ainsi introduite n'a pas de conséquence pour la suite et facilitera les calculs peut s'appuyer sur une bonne maîtrise du calcul d'erreurs de mesures car les raisonnements sont les mêmes. Il ne nous a pas paru très utile de les confondre comme il est fait trop souvent. 2,4 est une valeur approchée de 2,39 valeur exacte. Les élèves signalent ce nouveau "type de valeurs" comme précédemment (VA). Cette pratique interviendra principalement dans la présentation du quotient d'une division : $\frac{7}{3} = 2,3$ (VA). Il était clair pour les élèves que le signe "=" dans " $\frac{7}{3} = 2,3$ " est faux et nous n'avons pas voulu introduire $\frac{7}{3} = 2,33\dots$ imprécis ou la notation mathématique $\frac{7}{3} = 2,33$.

La valeur exacte est $\frac{7}{3}$ bien sûr et nous savons comment la traiter.

Comment enseigner ces pratiques ?

La plupart des exercices pratiques réels conduisent à se poser ce genre de questions. Il est important de les traiter au moment opportun pour chaque élève. Il est possible que la répugnance des maîtres pour les mesures effectives vienne en partie de ce qu'ils ne savent pas comment traiter ces problèmes. La tradition et les programmes sont muets sur ces points. Il n'est pas question de clarifier toutes ces questions dès le premier exercice pratique ; le maître laisse les problèmes surgir et même les souligne, il les résout, à la demande, de la façon correcte du point de vue mathématique sans retarder le déroulement des activités effectives. Il utilise le langage correct sans ostentation ni dogmatisme, mais exige à l'occasion des élèves les précisions nécessaires à l'action : précision de la pensée et non précision formelle du vocabulaire. Lorsque les conceptions floues, les pratiques erronées conduisent à des "conflits de connaissances", les élèves discutent et le maître institutionnalise les bonnes pratiques ou laisse le problème théorique ouvert et tranche pratiquement.

L'appropriation du langage correct est tributaire du développement des conceptions des élèves. Le processus choisit donne de nombreuses occasions de mise à l'épreuve de ces conceptions ; certains élèves assimileront très vite une pratique correcte, d'autres se contenteront provisoirement de fuir les complications et fourniront le moment venu les sujets de mise au point indispensables.

L'architecture du processus permet, le moment venu, de disposer des concepts théoriques suffisants pour dénouer la plupart des questions et en même temps de disposer des occasions qui font progresser les problèmes théoriques correspondants.

9.2. UNE DEUXIEME REPRODUCTION DE L'OPTIMIST

9.2.1 - Phase 2. Présentation d'une autre reproduction (celle qui agrandit 1,4 fois)

L'enseignant affiche cette reproduction. Comme la première fois, les enfants font des remarques "elle est plus petite que l'autre", "à peine plus petite" mais elle est aussi "plus grande que le modèle".

a) Consigne : "Comme pour la première reproduction, vous allez calculer les mesures de ce bateau. Pour cela, je vous donnerai le renseignement que vous me demanderez sur votre cahier".

b) Remarque : Avant même de calculer, les enfants qui avaient utilisé la première procédure disent : "on ne pourra pas utiliser notre méthode pour ce bateau !" Par contre, ceux qui avaient utilisé la deuxième, la troisième et la quatrième, disent : "nous, on pourra utiliser la nôtre. Elle pourra toujours servir !"

c) Déroulement : Les enfants travaillent de nouveau par groupes de 2 ou 3. Ils choisissent une des 3 dernières méthodes. Généralement, ceux qui doivent en changer, utilisent la 3ème. Par contre, ceux qui avaient utilisé la 2ème méthode et la 4ème, les essaient de nouveau pour se prouver et pour prouver aux autres qu'elles sont valables dans tous les cas.

d) Correction collective et comparaison des méthodes : L'enseignant procède à une correction collective. Les procédures utilisées restent sur le tableau et sont comparées.

C'est la troisième (passage par des entiers) qui paraît la plus rapide et donc qui sera adoptée par la majorité des enfants.

9.2.2 - Résultats

a) Tous les enfants savent calculer les mesures d'une reproduction, connaissant une mesure sur le modèle et son image sur la reproduction.

Ils savent aussi qu'on peut trouver n'importe quelle mesure si on connaît une mesure et son image (que ces mesures soient entières ou décimales).

.../...

b) Ces deux activités qui ont permis, grâce à une situation différente, de calculer une deuxième fois l'image d'un décimal, donne aux enfants l'occasion d'utiliser et d'assurer une ou des procédures qu'ils ont déjà découverte(s) de les comparer et de choisir la plus rapide ou celle qui leur paraît la plus facile. Une de ces procédures est privilégiée par l'enseignant et institutionnalisée pour être utilisée dans les activités suivantes.

9.3. BEAUCOUP DE REPRODUCTIONS DE L'OPTIMIST

9.3.1 - Matériel :

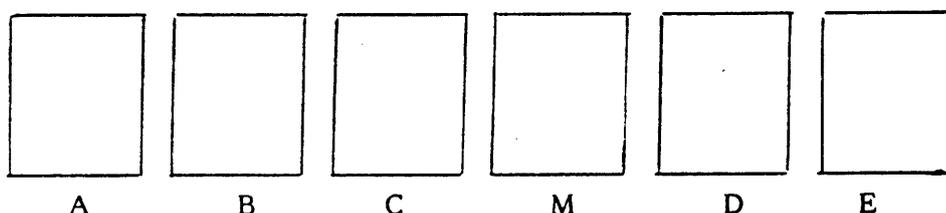
- Le modèle de l'optimist et les 2 reproductions des séances précédentes
- 6 reproductions plus petites que le modèle (dont les dimensions sont données dans les tableaux (I et II) p. 198
- 4 reproductions plus grandes que le modèle (ce qui fait 6 avec les deux utilisées dans l'activité précédente).

9.3.2 - Présentation de la situation :

L'enseignant remet le "modèle" de l'optimist au tableau et il montre 5 reproductions (2 plus grandes et 3 plus petites) de ce modèle : ce sont les reproductions désignées sur le tableau I (0,25 ; 0,67 ; 0,75 ; 0,94 ; 1,25 ; 1,5).

a) "Pouvez-vous mettre ces dessins dans l'ordre depuis votre place ?"

L'enseignant affiche les reproductions sur le tableau dans l'ordre indiqué par les enfants et les désigne dans cet ordre-là par les lettres A, B, C, D, E, M pour le modèle, comme ci-dessous.



Les enfants hésitent beaucoup entre la B et la C qui sont "voisines".

Certains pensent que B est avant C, d'autres pensent que C est avant B.

Comment être certain de ce que l'on prévoit ?

Les enfants disent qu'il faudrait calculer les mesures. L'enseignant prépare le tableau suivant (A) correspondant au classement effectué par les enfants :

.../...

	M Modèle	A	B	C	D	E
Bôme	14					
Mât	17,7					
Côté pavillon	4					
Hauteur pavillon	1,7					
Etrave	5,2	1,3	3,484	3,9	4,888	6,5
Hauteur coque	3,4					

(A)

b) " Je vous donne la mesure de l'étrave pour toutes ces reproductions" et il inscrit dans le tableau la mesure de l'étrave pour chacune des reproductions correspondant au classement. Les enfants qui avaient hésité pour les deux dessins très "voisins" peuvent s'apercevoir alors

- soit de leur erreur (et rectifier)
- soit qu'ils ont bien rangé.

Toutes les reproductions sont alors dans un bon ordre.

9.3.3 - Deuxième phase : calcul des dimensions.

a) Consigne : "maintenant, je vous donne la mesure d'un mât : 13,275 (valeur calculée). Pouvez-vous deviner de quelle reproduction il s'agit ?"

b) Analyse de la tâche

La consigne ne dit pas ce qu'il faut calculer et les élèves ont, pour comprendre le problème, à identifier les variables pertinentes : qu'est-ce qui peut servir, quelles relations ?

i/ Par exemple on pourrait calculer un agrandissement

$$17,7 \longrightarrow 13,275$$

puis calculer tous les agrandissements grâce aux dimensions de l'étrave :

$$5,2 \longrightarrow 1,3$$

$$5,2 \longrightarrow 3,484\dots$$

ii/ Mais on pourrait aussi calculer la dimension de tous les mâts et comparer à celui qui est donné.

.../...

iii/ On peut enfin calculer l'étrave du bateau inconnu et la comparer à celles que l'on connaît. Certains élèves n'arrivent à envisager aucune stratégie et ne comprennent pas quelles comparaisons ils peuvent faire. Si le maître réduisait directement le problème en évoquant les nombres à choisir et le nombre à calculer, il viderait le problème de son intérêt. Il vaudrait encore mieux que ces élèves jouent à la devinette et aillent mesurer le mât d'un bateau choisi au hasard. Le but pour les enfants n'est pas d'accomplir une tâche mais de la déterminer. La définition de la tâche par le maître rend donc le problème sans objet. Ils pourraient peut-être alors voir avec quoi ils peuvent comparer la longueur du mât de l'image inconnue.

c) Déroulement : Les élèves font des remarques du genre :

- l'image est plus petite que le modèle puisque au lieu de 17,7 le mât mesure 13,275
- mais pas beaucoup plus petite...
- ce n'est pas E parce que E agrandit (utilisation implicite de la longueur de l'étrave). Cette stratégie de réduction du champ de réponses permet l'activation des bonnes relations
- ce n'est pas A parce que A est beaucoup plus petit... l'étrave fait moins de la moitié de celle du modèle...
- Ils parviennent par ce moyen à déduire le champ à deux ou trois réponses possibles. B ou C ? ou bien B ou C ou D ?

Alors pour "être sûr" ils proposent eux-mêmes de faire des calculs. Mais quels calculs ? Qu'est-ce qui permettrait de savoir à quel bateau appartient ce mât ?

L'enseignant leur demande de réfléchir et ensemble, les enfants discutent. Après tâtonnements et hésitations, l'un d'entre eux vient écrire le tableau suivant :

Modèle		Reproduction
17,7	→	13,275
5,2	→	□

Par groupes de deux, ils calculent la mesure de l'étrave en mettant en oeuvre l'une des méthodes étudiées dans la séance précédente. La correction est faite collectivement. C'est un enfant qui avait eu des difficultés dans l'activité précédente que le maître envoie au tableau. Après un recensement rapide des procédures étudiées, il choisit presque toujours la troisième (cf. séance 8-5).

.../...

Modèle	Reproduction
17,7	13,275
$\times 10$ 5,2	$5,2 \times 0,75 = 3,9$ $\times 10$
177	132,75
$: 177$ 1	0,75 $: 177$

Tous les enfants peuvent voir alors dans le tableau A que cette mesure de l'étrave : 3,9 cm est celle du bateau C.

9.3.4 - Troisième phase, calcul individuel.

a) Consigne : "Je vais vous donner d'autres renseignements et très vite, vous allez essayer, chaque fois, de deviner de quel bateau il s'agit"

b) Déroulement : Les enfants travaillent seuls. Chacun doit pouvoir se rendre compte s'il a appris et s'il sait calculer n'importe quelle mesure.

L'enseignant donne des mesures : par exemple :

- la mesure d'un côté du pavillon : 3,76

A quel bateau appartient-il ?

- puis celle d'un mât : 11,859

- puis celle d'une bôme : 3,5, etc...

Une correction collective est faite pour chacune des mesures et c'est l'occasion pour les enfants de dire quelles sont leurs difficultés et de comparer les méthodes de calcul. Il faut aller vite ! Les calculs sont longs. Après discussion, quelques enfants disent généralement que ce serait plus rapide s'ils connaissaient l'image de 1. D'autres pensent que non.

c) Concours de vitesse :

L'enseignant donne une autre mesure : celle de la hauteur du pavillon du bateau D, par exemple. Il demande de trouver à quel bateau elle appartient (comme précédemment) en essayant les 2 sortes de calculs :

- les enfants qui ont demandé l'image de 1 l'utilisent (premier groupe)

- ceux qui ne sont pas convaincus que ça ira plus vite utilisent la mesure de la hauteur du pavillon du modèle (2ème groupe). Le premier groupe a bien sûr terminé avant et les méthodes sont comparées aussitôt :

Modèle	Reproduction
1	→ 0,94
1,7	→ ?

1er groupe

Modèle	Reproduction
5,2	→ 4,888
1,7	→ ?
1	→ ?

2ème groupe

Avant même que le tableau de mesures soit terminé, les enfants voient immédiatement pourquoi les calculs du 2ème groupe ont été plus longs : il faut de toute façon calculer l'image de 1 pour pouvoir trouver celle de 1,7.

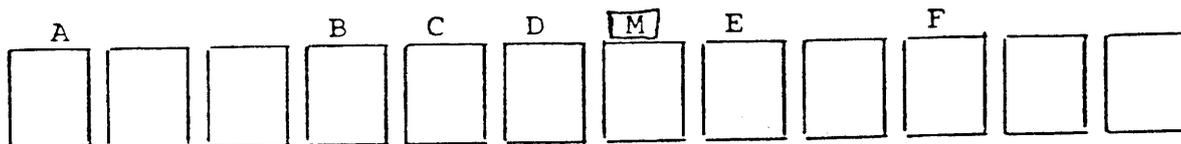
9.3.5 - Rangement, désignation et classement des autres reproductions.

a) Consigne : "Voici d'autres reproductions du même modèle (il s'agit des 5 autres reproductions - tableau II). J'en prends une. Je vous donne une dimension de cette image et vous allez me dire où elle se place par rapport à celles qui sont déjà sur le tableau (on fait un calcul rapide sur le tableau si c'est nécessaire), de façon à ce qu'elles soient rangées de la plus petite à la plus grande.

b) Déroulement : Cette phase se déroule très rapidement sur le mode "questions-réponses". Les enfants ont l'impression de jouer. "En voici une autre" "où la placer ?" "est-ce qu'elle agrandit plus ou moins ?"

Les enfants remarquent : les rapetissements sont d'un côté, les agrandissements de l'autre.

L'enseignant place les 5 autres images aux endroits indiqués par les enfants et leur demande :



"Comment désigner ces images ? Comment savoir de combien elles agrandissent ?"

Beaucoup proposent de désigner par A, A₁, A₂, B... L'enseignant dit alors qu'il en a une autre qui se place entre A₁ et A₂.

Les enfants se rendent compte alors que les lettres ne conviennent pas pour ranger et qu'il faut trouver un autre moyen. Souvent, l'un d'entre eux propose de marquer l'image de 1 puisqu'elle permet de savoir si ça agrandit peu ou beaucoup. Si aucun enfant n'y pense, l'enseignant le suggère et demande de vérifier si ce moyen de désignation donne les renseignements souhaités, à savoir que l'image de 1 permet :

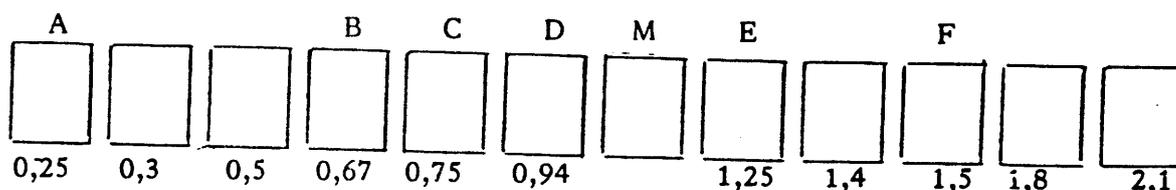
- de retrouver l'image de n'importe quel nombre
- de placer n'importe quel agrandissement ou rapetissement.

Il propose alors à un enfant de montrer où on placerait :

- un agrandissement de 1,35, de 1,87 etc...
- un rapetissement de 0,72, de 0,29...

.../...

- et inversement, de trouver d'autres agrandissements entre ceux qui sont déjà affichés : par exemple entre 1,4 et 1,5 ou d'autres rapetissements : par exemple entre 0,5 et 0,67 (les enfants en écrivent sur leur cahier de brouillon).



L'enseignant inscrit alors toutes les images de 1 sous les reproductions.

9.3.6 - Agrandissements, rapetissements 1 ou 0 ?

"Que remarquez-vous à propos des nombres qui désignent les reproductions ? (les images de 1 (l'unité) sur le modèle)".

- ils sont rangés du plus petit au plus grand !
- plus l'agrandissement est grand plus le nombre est grand !
- il y en a un qui n'a pas de nombre, c'est le modèle !

Les élèves envisagent de lui donner un nombre. Certains proposent 1, d'autres 0.

- Tous les rapetissements sont représentés par des nombres plus petits que 1
- Les nombres plus grands que 1 correspondent à des agrandissements, M est entre les deux, il faut mettre 1.

Le maître dit alors : si je fais une reproduction en utilisant 1 1
qu'est-ce que j'obtiens ?

- une reproduction "égale" au modèle. Elle n'agrandit pas et ne rapetisse pas
- Justement, ça ne fait "rien" - Agrandir de rien, ça devrait faire zéro !

Le maître dit : "Avec notre convention, il faut mettre 1, mais que donnerait la reproduction 0 ?"

$$\begin{array}{l} 1 \text{ ————— } 0 \\ 2 \text{ ————— } 0 \text{ etc...} \end{array}$$

- "rien" "un point"...

b)

Le maître : -"Savez-vous reconnaître si la reproduction 0,84 est un agrandissement ? et 3,40 ? et 1,10 ? et 0,01 ?"

- "Que voudrait dire un agrandissement de 2? Les élèves répondent 1 — 2, et un rapetissement de 2 ? ou un agrandissement de $\frac{1}{2}$? ... contradiction ?

.../...

Conclusion : Il faut dire "reproduction "1 \longrightarrow 2" puisque le nombre suffit à dire si c'est un agrandissement ou un rapetissement.

Remarque : Les élèves ont tendance à choisir comme dans la langue naturelle le terme le plus précis pour désigner un objet et donc à préférer "agrandissement" ou "rapetissement" à "reproduction". Mais ce qui n'est que redondance dans "agrandissement de 1 \longrightarrow 4" peut devenir contradiction si, comme dans la langue naturelle on combine par croisement (multiplication logique) deux expressions d'un même objet. L'expression "les rectangles carrés" est inhabituelle mais logique, mais "les carrés rectangles" évoquent des carrés "non rectangles" qui n'existent pas.

(Autre exemple : Des "mammifères chats" sont concevables, mais des "chats mammifères" évoquent la possibilité de "chats non mammifères !?")

Ce genre "d'accidents" ne peut pas être évité seulement par des dispositions de formulation et de vocabulaire. Les élèves doivent se soucier de ce qu'ils disent !

Remarque : Cette leçon suit le modèle : "questions-réponses- (maïeutique socratique). Au lieu d'organiser comme il l'a fait pour désigner les épaisseurs de papier, une vraie situation de communication, le maître se contente ici de l'évoquer, parce qu'elle est familière aux enfants et parce que sa réalisation n'apporterait guère d'imprévu.

L'intériorisation par des élèves des types de situations qui "justifient" l'aménagement du savoir qu'on leur propose fait partie de la construction épistémologique dont le maître la charge. Cette intériorisation permet de gagner du temps par la suite sans rien perdre du sens des connaissances créées.

9.3.7 - Exercices individuels.

- 1) Où placerait-on un agrandissement de $\frac{7}{4}$?
- 2) Trouver un agrandissement entre 2 et 2?5.
- 3) On a pris un agrandissement de "3,2". Calculer la mesure du côté du pavillon de cet agrandissement.
- 4) La bôme d'une reproduction mesure 7 cm. Calculer l'agrandissement.

Remarque : Il n'est pas obligatoire de faire immédiatement tous ces exercices. Ils constituent un éventail dans lequel l'enseignant fait un choix. Ils peuvent se faire soit individuellement, soit collectivement au tableau, soit alternativement, individuellement ou collectivement.

9.3.8. - Résultats

Tous les enfants ont compris la signification de l'image de 1 et tous les renseignements qu'elle permet d'obtenir. En particulier ils savent que le calcul du correspondant de 1 est un moyen plus rapide lorsqu'on veut trouver beaucoup de correspondances que le calcul par les "opérateurs" (les rapports) dans chaque ensemble. Ils maîtrisent les calculs et savent trouver n'importe quelle mesure :

- . la mesure d'une dimension de la reproduction connaissant la mesure correspondante du modèle et l'image de 1.
 - . la mesure d'une dimension du modèle connaissant la mesure correspondante de la reproduction et l'image de 1.
 - . l'image de 1, c'est-à-dire le nom de l'agrandissement connaissant 2 mesures correspondantes : l'une sur le modèle, l'autre sur la reproduction.
- Ils savent aussi - comparer les agrandissements et les rapetissements entre eux,

et - intercaler un agrandissement ou un rapetissement entre 2 autres.

Remarque : L'enseignant dispose des 2 tableaux de mesures suivants mais ces tableaux ne sont jamais affichés ni utilisés par les élèves.

(I)	A (0,25)	B (0,67)	C (0,75)	D (0,94)	E (1,25)	F (1,5)
bôme	3,5	9,38	10,5	13,16	17,5	21
mât	4,425	11,859	13,275	16,638	22,125	26,55
côté pavillon	1	2,68	3	3,76	5	6
hauteur pavillon	0,425	1,139	1,275	1,598	2,125	2,55
étrave	1,3	3,484	3,9	4,888	6,5	7,8
hauteur coque	0,85	2,278	2,55	3,196	4,25	5,1

(I)

(II)	(1,4)	(0,3)	(1,8)	(0,5)	(2,1)
bôme	19,6	4,2	25,2	7	29,4
mât	24,78	5,31	31,86	8,85	37,17
côté pavillon	5,6	1,2	7,2	2	8,4
hauteur pavillon	2,38	0,51	3,06	0,85	3,57
étrave	7,28	1,56	9,36	2,6	10,92
Hauteur coque	4,76	1,02	6,12	1,7	7,14

(II)

.../...

9.4. BONNES REPRODUCTIONS, MOINS BONNES REPRODUCTIONS.

9.4.1 - Matériel

- Les 11 reproductions de l'optimist et le modèle
- Une reproduction nouvelle particulière que l'on désigne par Z.

Cette reproduction a été obtenue de la manière suivante :

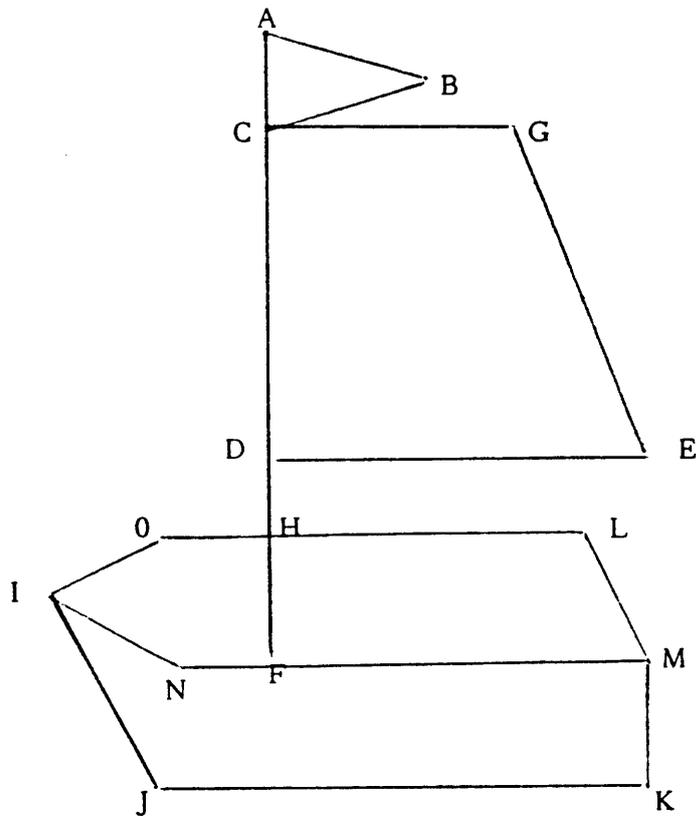
. S'il s'agit d'une reproduction photographique d'un modèle, soulever les deux coins de droite du papier sensible de la même hauteur jusqu'à ce que l'image de la bôme ait la longueur voulue : 16,8 cm. S'assurer en même temps que le mât a la dimension voulue : 26,55.

S'il s'agit d'une reproduction graphique, placer les points à l'intersection des coordonnées données par le tableau suivant :

		<u>Abscisses</u>	<u>Ordonnées</u>
A	Sommet du mât	3,24	31,65
B	Sommet du pavillon	7,92	30
C	Bas du pavillon	3,24	29,1
D	Intersection de la bôme et du mât	3,24	10,95
E	Extrémité de la bôme	20,04	10,95
F	Pied du mât	3,24	5,1
G	Sommet de la voile	20,04	15,65
H	Intersection du mât et du côté droit	3,24	8,7
I	Haut de l'étrave	3,60	6,15
J	Bas de l'étrave	0	0
K	Extrémité arrière du fond de la coque	20,4	0
L	Extrémité arrière du bord droit	18,84	8,7
M	Extrémité arrière du bord gauche	17,8	5,1
N	Extrémité avant du bord gauche	0	5,1
O	extrémité avant du bord droit	0,24	8,7

	V		H	
JN	3,4	5,1	JK	17 20,4
FH	2,4	3,6	NM	17,8 21,36
FD	3,9	5,85	OL	15,5 18,6
FC	16	24	DE	14 16,8
FA	17,7	26,55	NF	2,7 3,24
EG	9,8	14,70	OH	2,5 3
AC	1,7	2,55		

.../...



Dans les deux cas, on obtient une affinité géométrique de rapport horizontal de 1,2 et de rapport vertical 1,5 par rapport au modèle C.
- 6 feuilles de papier affiche.

9.4.2. - Rappel des conclusions tirées de l'activité précédente

"Nous avons agrandi ou rapetissé le dessin d'un optimist à partir d'un modèle.

Vous souvenez-vous quels sont les agrandissements et les rapetissements que nous avons trouvés ?"

Les enfants rappellent l'image de 1 pour chaque reproduction. L'enseignant écrit au tableau sous la dictée des élèves (dans l'ordre où les élèves le disent).

1 — 1,4
1 — 1,5
1 — 0,3
1 — 1,8
1 — 0,5
1 — 2,1
1 — 1,25
1 — 0,67 etc...

et affiche à mesure les reproductions.

.../...

"Pouvez-vous dire maintenant ce qu'est une reproduction : agrandissement ou rapetissement ?

Les enfants répondent : "on prend un modèle
 on mesure ses dimensions
 on agrandit toutes les dimensions de la même manière ou on les diminue
 on obtient un dessin plus grand ou plus petit."

9.4.3 - Présentation d'un nouveau problème

a) Consigne : "Voici le modèle : Je veux maintenant le transformer de 3 manières différentes telles que :

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $1 \longrightarrow 2,2$ | 1ère manière → pour 1 groupe |
| 2) $1 \xrightarrow{(+5)} 6$ | 2ème manière → pour 1 groupe |
| 3) $1 \xrightarrow{(x2 +3)} 5$ | 3ème manière → pour un autre groupe. |

Est-ce que j'obtiendrai des agrandissements ?

4) Puis je propose ensuite pour un quatrième groupe une nouvelle reproduction très particulière que j'appelle Z de cet optimist (l'enseignant l'affiche sur le tableau).

Est-ce que cette reproduction est un agrandissement du modèle ?

Après la 1ère question posée, on entend murmurer dans la classe : "oui, ce sont des agrandissements". Il y a cependant quelques réticences de la part de certains élèves qui évoquent l'agrandissement du puzzle et disent : "quand on avait ajouté 3, ça n'a pas marché !" Il y a dès lors une ambiguïté pour les enfants autour du terme "agrandissement" mais aucun ne peut encore expliciter pourquoi.

b) Déroulement : Les enfants proposent de calculer toutes les dimensions à partir des "applications" proposées et de faire le dessin correspondant avec ces nouvelles dimensions. L'enseignant qui a réparti les enfants en 4 groupes, donne à chacun des 3 premiers groupes l'une des applications proposées en 1) 2) 3) et au quatrième groupe la reproduction Z et le modèle choisi. Dans les groupes 1, 2, 3, les enfants relèvent toutes les mesures du modèle et se répartissent ensuite les calculs : chacun prend à sa charge le calcul de la mesure d'une image par les procédés décrits dans l'activité 9.3 § 9.3.4, puis avec ces mesures, ils commencent le dessin de l'image de l'optimist sur une feuille de papier affiche.

.../...

c) Remarques : Au cours de cette phase de dessin, les enfants des groupes qui ont utilisé les applications 2) et 3) manifestent à haute voix, se disputent même (chacun rend l'autre responsable en l'accusant d'erreurs de calculs !) :

"ce n'est pas possible, notre dessin ne ressemble pas au modèle !"

"c'est une boîte de conserve ! dit un autre, et pas un bateau"

"Les segments ne se raccordent pas !"

Ils veulent arrêter et généralement appellent l'enseignant qui dédramatise la situation en souriant et en acceptant qu'ils ne continuent pas le dessin.

9.4.4 - Synthèse collective : vérification des mesures, observation des dessins obtenus, constatations.

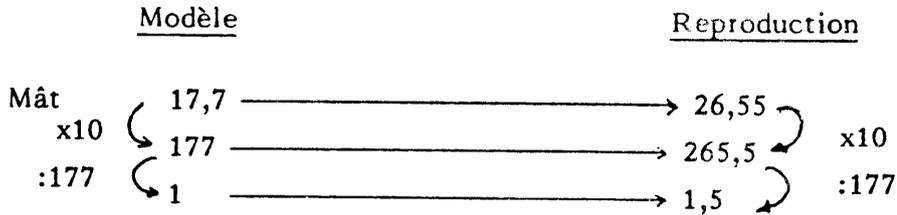
a) Vérification des mesures : Dans un premier temps, l'enseignant marque au tableau, après les avoir vérifiées avec les enfants, les mesures (calculées) trouvées dans les trois premiers groupes.

<u>1er groupe</u>	<u>2ème groupe</u>	<u>3ème groupe</u>
1 → 2,2	1 $\xrightarrow{+5}$ 6	1 $\xrightarrow{(x2)+3}$ 5
17,7 → 38,94	17,7 → 22,7	17,7 → 38,4
1,7 → 3,74	1,7 → 6,7	1,7 → 6,4
4 → 8,8	4 → 9	4 → 11
14 → 30,8	14 → 19	14 → 31
3,4 → 7,48	3,4 → 8,4	3,4 → 9,8
5,2 → 11,44	5,2 → 10,2	5,2 → 13,4

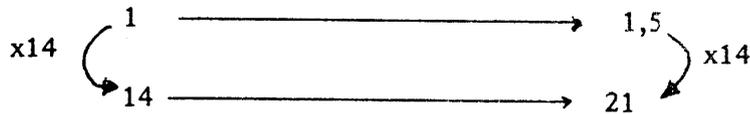
a) Observation des dessins : Les enfants sont tout-à-fait satisfaits du dessin du 1er groupe, ils trouvent que c'est une reproduction correcte. Certains enfants disent "elle paraît proportionnelle au modèle". Par contre, les dessins qui correspondent aux applications 2) et 3) font bien rire les enfants car ils ne ressemblent pas du tout au modèle. Les segments se coupent n'importe où ou ne se coupent pas du tout... Il est impossible à la fois de reproduire la forme de l'optimist et de respecter, pour tous les segments, l'application numérique.

La quatrième équipe a eu des problèmes : sa reproduction ressemble très bien à l'optimist mais les enfants ne sont pas arrivés à déterminer une seule image de 1 :

.../...

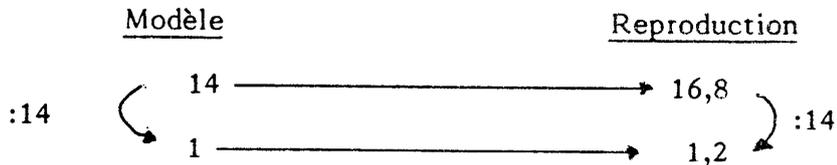


Un élève a remarqué que la reproduction a l'air un peu allongée ; alors, à l'aide de cette image de 1, ils ont calculé la mesure que devrait avoir la bôme sur Z :



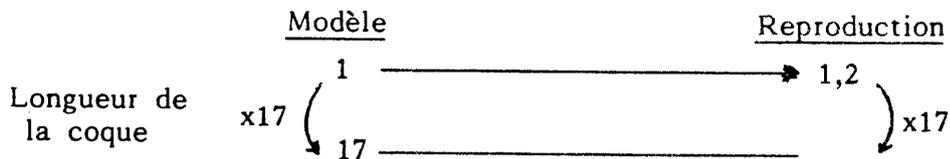
Ils ont mesuré cette bôme : 16,8 cm et se sont rendus compte que sa mesure ne correspondait pas à celle qu'ils viennent de calculer : 21. Ils ont mis en doute leurs calculs que tout le groupe a vérifiés. Les calculs sont corrects !

L'enseignant leur a suggéré alors de calculer de nouveau l'image de 1 en utilisant cette fois les mesures de la bôme :



Etonnement, l'image de 1 n'est pas la même que celle qui a été trouvée en utilisant les mesures du mât !

Alors l'enfant qui avait remarqué que la reproduction avait l'air plus allongée a demandé si on ne pourrait pas essayer de trouver la longueur de la coque avec cette nouvelle image de 1, ce qui a été fait aussitôt :



Ils ont vérifié sur le dessin : la mesure (VM) est la même que celle qu'ils viennent de calculer ! Lorsque ce groupe présente ses résultats au reste de la classe, certains se demandent si l'agrandissement ne serait pas le même pour tous les segments verticaux.

Alors l'enseignant les encourage aussitôt à calculer encore l'image de 1 en utilisant d'abord les mesures (VM) de la hauteur de la coque, puis celles de la hauteur du pavillon et ils ajoutent même :

"elle doit être pareille que celle qu'on a trouvée avec le mât !". Vérification immédiate :

	<u>Modèle</u>		<u>Reproduction</u>	
hauteur coque	3,4	→	5,1	x10 :34
	34	→	51	
	1	→	1,5	

C'est effectivement la même !

Avec cette image de 1, ils calculent la hauteur du pavillon :

	<u>Modèle</u>		<u>Reproduction</u>	
x17 :10	1	→	1,5	x17 :10
	1,7	→	2,55	
	17	→	25,5	

Ils mesurent sur le dessin la hauteur du pavillon : c'est la même mesure !

Maintenant, ils sont sûrs : il y a plusieurs images de 1. Cette image est différente suivant que les mesures sont verticales ou horizontales.

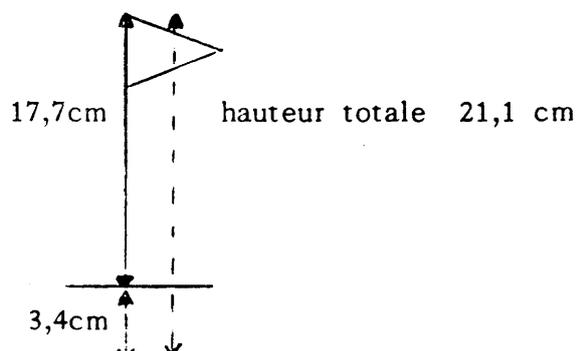
REMARQUE : Les segments en biais sont agrandis de façon intermédiaire.

9.4.5 - Propriétés de la fonction linéaire

Pour mettre en évidence les propriétés de la fonction linéaire, l'enseignant procède comme dans l'activité "agrandissement du puzzle"

§ 8.1.3 : il propose aux enfants de vérifier collectivement avec quelques mesures, si l'image de la somme est bien la somme des images. Bien entendu, il peut ne pas énoncer cette propriété, mais devant les enfants, il montre les différents segments qui composent la hauteur totale du bateau sur le modèle : hauteur de la coque : 3,4 cm ; hauteur du mât : 17,7 cm.

Il ajoute ces deux mesures et envoie un enfant pour montrer ce que représente cette somme sur le dessin.



Hauteur totale du bateau (sur le modèle)

$$3,4 + 17,7 = 21,1$$

Vérification par l'application 1 \longrightarrow 2,2 (VC)

$$3,4 + 17,7 = 21,1$$

$$7,48 + 38,94 = 46,42$$

Si on calcule l'image de 21,1 par l'application 2,2 :

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2,2 \\ x21,1 \quad 21,1 \longrightarrow 46,42 \quad x21,1 \end{array}$$

On trouve aussi 46,42.

Dans ce cas la somme des images est égale à l'image de la somme

L'enseignant propose aux enfants de faire la même chose avec les autres applications : (+5) et (x2)+3.

Application +5

$$3,4 + 17,7 = 21,1$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ 8,4 + 22,7 = 31,1 \end{array}$$

Calculons l'image de 21,1 par l'application (+5)

$$21,1 + 5 = 26,1 \quad \text{ce qui ne correspond plus à la somme des images.}$$

Donc dans ce cas, la somme des images n'est pas égale à l'image de la somme.

Application : (x2)+3

$$3,4 + 17,7 = 21,1$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ 9,8 + 38,4 = 48,2 \end{array}$$

Calculons l'image de 21,1 par l'application (x2)+3 : $(21,1 \times 2) + 3 = 45,2$, ce qui ne correspond pas à la somme des images.

Dans ce cas encore, la somme des images n'est pas égale à l'image de la somme.

Les enfants disent alors : "c'est comme pour le puzzle. On n'obtient une bonne reproduction que lorsqu'on multiplie ! s'il y a une addition, ça ne va pas !"

Apport d'information : L'enseignant confirme en effet en disant : Si, dans une reproduction, la somme des images est égale à l'image de la

.../...

somme, comme dans l'application $1 \longrightarrow 2,2$ ci-dessus, alors on dit que l'application est linéaire ou que les nombres sont proportionnels.

Pour désigner un agrandissement, nous nous étions contentés de prendre l'image de 1 mais maintenant il faudra, en plus, indiquer s'il s'agit d'un agrandissement proportionnel et pour cela, nous aurons à inventer un signe. Nous le choisirons plus loin.

Jeu : Inventez des reproductions qui ne sont pas proportionnelles.



9.4.6 - Résultats.

Le terme "agrandissement" n'est plus ambigu pour les enfants ils l'utilisent uniquement lorsque les nombres sont proportionnels.

De plus, ils sont capables aussi de savoir s'ils sont en présence d'une fonction linéaire en mettant en oeuvre une de ces propriétés : somme des images égale à l'image de la somme, propriété qui n'est évidemment pas récitée mais qui sera vérifiée chaque fois par des calculs.

Ils sont capables de reconnaître une "bonne reproduction" d'une "mauvaise reproduction".

9.5 - CHANGEMENT DE MODELE

9.5.1 - Rappel

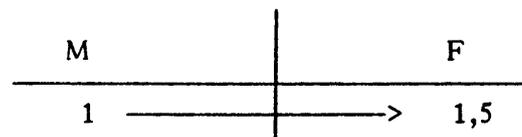
"Nous avons découvert comment faire des agrandissements de figures sans les déformer avec le puzzle, puis dans ce cas comment calculer toutes les dimensions à partir d'une seule : l'image de 1. Nous avons cherché toutes les reproductions proportionnelles possibles d'un modèle. Nous les avons rangées, classées, nous savons les distinguer des autres".

9.5.2 - Changement de modèle : présentation de la situation.

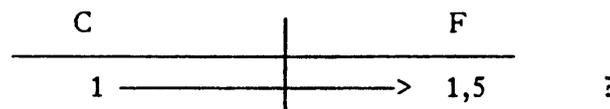
a) Consigne : "Pensez-vous que l'on pourrait prendre un autre modèle ? Par exemple, si j'avais pris C comme modèle au lieu de M, est-ce que j'aurais pu désigner l'agrandissement qui donne la reproduction F à l'aide du même nombre ? Est-ce que vous pourriez trouver un nombre qui désigne cet agrandissement ?"

b) Déroulement : Les enfants et l'enseignant travaillent ensemble : l'enseignant pose des questions, les enfants répondent.

"Nous avons vu que F est obtenu à partir de M par l'agrandissement :



Est-ce que si je prends C comme modèle, on a :



Pour faire la comparaison, les élèves proposent de calculer la longueur d'un même élément du dessin : ils choisissent la mesure de la bôme qui est simple. L'enseignant marque sur le tableau :



et demande à deux enfants de venir compléter ces tableaux tandis que les

autres calculent sur leur cahier de brouillon. Puis les résultats sont confrontés.

M		F
14	→	21
1	→	1,5

:14

:14

C		F
10,5	→	21
x10 105	→	x10 210
:105 1	→	2

:105

Réponse : F est un agrandissement de C tel que :

$$1 \longrightarrow 2 \quad \text{et non} \quad 1 \longrightarrow 1,5.$$

Les enfants disent souvent : "c'est normal que l'agrandissement soit plus grand puisque C est plus petit que M. Il faut donc agrandir plus pour obtenir F !" !"

c) Conclusion : Si le modèle est changé :

- Pour chaque figure, il est encore possible de calculer la nouvelle image de 1
- Elle est différente de la précédente
- Une figure ne peut être représentée par un nombre que si l'on indique le modèle correspondant. Elle peut être désignée par autant de nombres qu'on peut choisir de modèles différents.

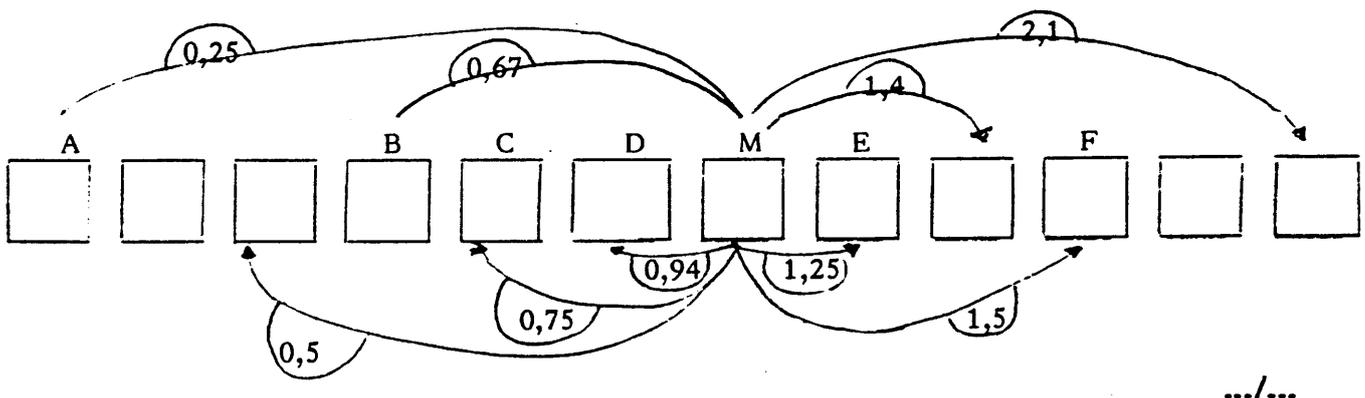
9.5.3 - Reproduction : l'application et l'image.

"Puisqu'on peut changer le modèle pour une même figure, il ne faut donc pas mettre le nom qui désigne l'agrandissement ou le rapetissement sous la figure reproduction. Il faut le mettre entre le modèle et la reproduction pour désigner l'application !

Exemple :

M		F
1	(1,5)	→ 1,5
14	→	→ 21

Ce qui donne pour toutes les reproductions de l'optimist :



Les nombres sont les noms de la reproduction - action et non ceux de la reproduction - image.

9.5.4 - Calculs avec d'autres modèles.

a) Consigne : "Si nous prenons comme modèle la reproduction anciennement marquée 0,5 et que nous la reproduisons de manière que :

$$1 \longrightarrow 3$$

Quelle figure obtenons-nous ?"

b) Le maître écrit sur le tableau l'application et ajoute la mesure de la bôme de la reproduction : 0,5

$$1 \longrightarrow 3$$

$$\text{bôme} \quad 7 \longrightarrow 21$$

21 est la mesure de la bôme de la reproduction F !

c) Autre consigne : "Quelle est l'application qui fait passer de A, pris comme modèle, à C ?"

L'enseignant donne aux enfants la mesure de la bôme sur A et sur C et marque sur le tableau :

	A		C
bôme	3,5	\longrightarrow	10,5

et demande l'image de 1 que les enfants calculent individuellement de la manière suivante :

	A		C
	3,5	\longrightarrow	10,5
x10	1	\longrightarrow	3
	35	\longrightarrow	105

Conclusion : C'est la même application qui permet de passer du dessin précédemment marqué 0,5, prise comme modèle, à F que celle qui permet de passer de A, pris comme modèle, à C !

d) Définition : "En faisant un agrandissement $1 \longrightarrow 5$, j'ai trouvé F. Quel était le modèle ?

Pour le trouver, quel tableau peut-on faire ?"

Le maître et les enfants échangent des propositions :

.../...

Le maître écrit :

Modèle	F
1	5
?	21

bôme de F.

et les enfants calculent individuellement. Ils cherchent les rapports dans F d'abord puis dans le modèle. Ces calculs sont ensuite corrigés collectivement :

Modèle	F
1	5
$\frac{1}{5}$	1
$\frac{21}{5}$	21

:5 :5

x21 x21

Sur le modèle, la bôme mesure donc $\frac{21}{5} = 4,2$. C'est la "reproduction" précédemment marquée 3 qui a été prise comme modèle!

9.5.5 - Images et reproductions.

a) Pour déterminer une reproduction proportionnelle, combien faut-il montrer de dessins ? deux : le modèle et son image.

Bien sûr la même reproduction proportionnelle peut permettre de faire correspondre à chaque modèle une image différente.

Exemple : 0,5 \longrightarrow F
A \longrightarrow C

se correspondent par l'agrandissement $\times 3$

Y-a-t-il d'autres couples de dessins associés par la même reproduction ? Comment trouver tous les agrandissements réalisés dans notre collection de figures ?

b) Déroulement :

Les élèves calculent à nouveau quelques agrandissements en prenant divers couples de figures. Le maître insiste pour obtenir une disposition qui permettra de les représenter tous et de se partager le travail.

Les élèves, éventuellement avec son aide, préparent le tableau ci-dessous et le remplissent. Cette activité peut être présentée comme un entraînement au calcul. Elle peut être le travail d'un petit groupe armé

.../...

d'une calculatrice. Elle peut être l'occasion de petits concours : "qui trouve la plus petite, la plus grande, qui en trouve une entre tel et tel nombre... etc.

Image

Modèle	A	B	C	D	E	F	M	...
A	1	2,68	3	3,76	5	6	4	
B	0,373	1	1,12	1,396	1,86	2,23	1,49	
C	0,33	0,89	1	1,24	1,66	2	1,33	
D	0,266	0,71	0,79	1	1,32	1,6	1,06	
E	0,2	0,53	0,6	0,75	1	1,2	0,8	
F	0,166	0,44	0,5	0,62	0,83	1	0,66	
M	0,25	0,67	0,75	0,94	1,25	1,5	1	
⋮								

L'application qui fait passer de F à A est

$F \times 0,166 \rightarrow A$ c'est le plus fort rapetissement pour passer de E à A (ce qui rapetisse le plus)

on rapetisse un peu moins (on "agrandit un peu plus) $E \times 0,2 \rightarrow A$

Ensuite on trouve le rapetissement de M à A, etc. Les formulations ne sont pas simples mais les enfants arrivent à les dominer et à rire des contradictions apparentes qu'elles produisent^(*). Ordonnons toutes ces applications linéaires de la plus petite à la plus grande et cherchons les effets qu'elles produisent sur les différents modèles.

.../...

(*) "Plus tu pédales moins fort moins ça avance plus vite" expliquait un jour un enfant à un psychologue éberlué.

9.5.6 - REMARQUE

Cette leçon peut être omise au C.M₂ mais elle montre bien la nécessité de détacher la reproduction-application de la reproduction-image. Les élèves peuvent concevoir ces agrandissements comme des opérations ou comme des résultats d'opérations sans qu'il soit nécessaire de les obliger à les distinguer formellement ; mais, dès que les problèmes se compliquent, les maîtres manquent de moyens d'explication avec les élèves les moins capables de construire seuls leur modèle. Les maîtres ont alors recours à l'éprouvage d'automatismes (solution ancienne) ou retardent l'étude de ces questions jusqu'au moment où elle peut être présentée formellement ! (solution actuelle).

Dans les deux cas, il n'y a pas de négociation ni d'enseignement du sens. La difficulté n'est pas résolue, mais dissimulée.

9.6. APPLICATIONS RECIPROQUES

9.6.1 - Présentation du problème.

"En prenant M comme modèle, nous avons trouvé que l'agrandissement :

$$1 \longrightarrow 1,25$$

produisait la copie E.

Il s'agit de savoir maintenant ce qui se passerait si on prenait E comme modèle et M comme copie. A chaque longueur sur E correspond une longueur sur M.

Est-ce que cette application est une bonne reproduction (proportionnelle) ? et si oui, quel est l'agrandissement ?"

Les élèves protestent : "ça ne peut pas être un agrandissement! c'est un rapetissement !"

9.6.2 - Calcul du rapetissement.

a) Consigne : "Nous allons essayer de trouver ce rapetissement puisque vous êtes sûrs que c'en est un !"

b) Déroulement : C'est un échange de remarques, de propositions d'objections entre l'enseignant et les enfants (et entre les enfants eux-mêmes).

Comment calculer ce rapetissement ?

Le maître écrit sur le tableau :

E	M

Aussitôt, les enfants proposent d'inscrire les mesures correspondantes en précisant : "il faut trouver ce qui correspond à 1 de E". Le maître demande à un enfant de venir compléter le tableau :

E	M	Les calculs sont très vite faits
1,25	1	
1	0,8	
125	100	
:125	:125	

x100 x100

... /...

C'est donc l'application $1 \rightarrow 0,8$. Mais il faut maintenant vérifier que ce rapetissement est le même pour tous les segments.

c) Vérification par les enfants

L'enseignant donne rapidement sur le tableau toutes les mesures de l'image E et les enfants travaillent individuellement.

Beaucoup pensent que ce n'est pas nécessaire. Pourquoi ? ils ne savent pas l'expliquer "c'est obligé" disent-ils. Le maître s'abstient de faire trop d'objections.

9.6.3 - Apport d'informations du maître.

"L'application qui produit l'image M du modèle E est l'application réciproque de celle qui produit l'image E du modèle M (il écrit sur le tableau l'expression soulignée)."

- Pensez-vous que toutes les reproductions proportionnelles que nous avons vues ont une réciproque ? Sauriez-vous les calculer ? Ce sont aussi des reproductions proportionnelles.

9.6.4 - Exercice.

Quelle est l'application réciproque de :

$$1 \longrightarrow \frac{5}{4} ?$$

Certains enfants sont obligés de refaire les tableaux et les calculs.

M		R
1	\longrightarrow	$\frac{5}{4}$

Dans l'application réciproque on a :

	M		R
	$\frac{5}{4}$		1
	$\xrightarrow{\quad}$		$\xrightarrow{\quad}$
:5	1	$\xrightarrow{\quad}$	$\frac{4}{5}$
	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$
	$\frac{1}{4}$	$\xrightarrow{\quad}$	$\frac{1}{5}$
	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

(Note: In the original image, curved arrows labeled ':5' point from the top row to the middle row, and from the middle row to the bottom row. Curved arrows labeled 'x4' point from the middle row to the bottom row.)

Donc l'application réciproque est :

$1 \longrightarrow \frac{4}{5}$

.../...

$$\begin{array}{l}
 \text{D'autres écrivent : } \frac{5}{4} \longrightarrow 1 \\
 \frac{5}{4} = 1,25 \quad 1,25 \longrightarrow 1 \\
 \quad \quad \quad :125 \quad \left(\begin{array}{l} 125 \longrightarrow 100 \\ 1 \longrightarrow 0,8 \end{array} \right) :125
 \end{array}$$

$1 \longrightarrow 0,8$

Enfin, certains remarquent et disent que la réciproque d'un agrandissement est un rapetissement.

Définition : "Vous cherchez s'il existe une application égale à sa réciproque".

9.6.5 - Résultats :

Cette activité est relativement simple pour tous les enfants. Elle se déroule rapidement comme un jeu (questions-réponses).

MODULE 10 :
MULTIPLIER PAR UN RATIONNEL

10.1. MULTIPLIER PAR UNE FRACTION

10.1.1 - Détermination du problème.

a) Mise au point collective par l'enseignant : "Nous avons construit des fractions, qu'avons-nous fait avec ces fractions ?

Les enfants rappellent ce qu'ils ont appris à faire :

- nous les avons rangées
- nous les avons additionnées
- nous avons fait des soustractions
- nous les avons transformées en nombres à virgule
- nous les avons multipliées par un naturel.

"Quelle opération pensez-vous que nous pourrions essayer de faire encore ?"

- les multiplier.

Nous avons déjà fait des calculs de produit de 2 fractions mais nous ne les avons pas reconnus. Nous avons fait des calculs qu'on aurait pu décrire par une fraction multipliée par une fraction.

Nous allons essayer de chercher quels sont ces calculs.

Il faudra se demander qu'est-ce qui nous permet d'écrire le signe \times entre 2 fractions. Pourquoi a-t-on le droit de l'écrire puisque c'est une multiplication différente de celle que vous connaissez.

Remarque : Pour justifier l'emploi du signe $+$ dans l'ensemble des fractions, les élèves se sont contentés de vérifier que l'opération matérielle qu'ils effectuaient, sur les longueurs par exemple, correspondait bien à celle qu'ils avaient l'habitude d'associer à l'addition.

Ici, le sens du produit de 2 fractions est assez différent du sens du produit de 2 nombres. Le seul moyen vraiment légitime d'accepter le signe "multiplié" serait l'examen détaillé des propriétés formelles de cette nouvelle opération et la comparaison avec les propriétés déjà connues de la multiplication. Nous pensons que cet examen exhaustif n'est pas à sa place avec des enfants de cet âge (encore qu'il serait possible) mais il va être indispensable de faire avec eux l'inventaire d'un certain nombre de propriétés,

- soit qui sont conservées, (par exemple la distributivité sur l'addition)
- soit qui changent (par exemple le fait que le produit de deux entiers est plus grand ou égal que chacun des deux)

.../...

et bien sûr, de construire un nouveau "sens" de la multiplication.

10.1.2 - Définition du produit de deux fractions.

"Nous savons que $3 \times \frac{2}{5}$ c'est $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$
mais y-a-t-il une addition qui pourrait remplacer l'opération $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?

Vous vous doutez que c'est dans les agrandissements et les rapetissements (et pas dans une addition) qu'il faut chercher des exemples pour construire cette nouvelle multiplication. Nous allons procéder en 4 étapes :

1ère étape : Cherchons dans quel agrandissement on pourrait être conduit à écrire : $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$."

L'enseignant laisse aux enfants quelques minutes pour réfléchir et éventuellement écrire quelque chose sur un petit papier qu'il dépose au coin du bureau.

A la fin de cette première courte période de réflexion (2 à 3 minutes), l'enseignant ne demande pas aux élèves leur réponse. Ils constateront si c'est juste au fur et à mesure de la recherche.

- "Connaissez-vous un agrandissement que lon pourrait appeler "x 4" ? Jusqu'à présent, nous n'avons pas mis de signe x devant les nombres qui désignaient un agrandissement. Mais souvent on met ce signe x. Essayez de comprendre pourquoi."

La réponse attendue par le maître est : "à 1 du modèle correspond 4 sur la reproduction". Dès qu'il l'obtient, il fait écrire sur le tableau en conclusion :

<u>Modèle</u>	<u>Reproduction</u>
1	4

Pourquoi cet agrandissement peut-il s'appeler x 4 ? et il ajoute les mesures suivantes :

<u>Modèle</u>	<u>Reproduction</u>
1	4
5	
3,5	
$\frac{3}{5}$	

Un élève vient compléter le tableau de la manière suivante :

<u>Modèle</u>	<u>Reproduction</u>
1	→ 4
5	→ 5 x 4
3,5	→ 3,5 x 4
$\frac{3}{5}$	→ $\frac{3}{5} \times 4$

et souvent donne le résultat.

Cet agrandissement peut s'appeler "x 4" parce que l'image d'un nombre se calcule en multipliant ce nombre par 4.

Est-ce que vous sauriez de la même façon ce qu'est l'agrandissement x 5, x 7... ?

2ème étape de réflexion : "Est-ce que, maintenant, certains d'entre vous pourraient écrire sur leur cahier comment, dans un agrandissement, ils seraient amenés à écrire le produit $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?

L'enseignant laisse encore les enfants réfléchir quelques minutes, mais ne relève pas les réponses. Si certains enfants, sûrs d'avoir trouvé, exercent une pression trop forte, l'enseignant peut les inviter à "déposer" cette réponse sur un autre petit papier au coin du bureau (ceci pour qu'ils puissent savoir, ainsi que l'enseignant, en fin de démarche, à quel moment ils ont su définir le produit). A la fin de cette deuxième période de réflexion, l'enseignant pose une nouvelle question.

"suivant le même principe, qu'est-ce qu'un agrandissement que l'on pourrait appeler x 0,25 ?" et il attend de la part des enfants la réponse :

"à 1 du modèle correspond 0,25 sur la reproduction".

"Pourquoi cet agrandissement peut-il s'appeler x 0,25 ?

Remarque : La réponse n'est pas : "parce que pour trouver chaque image il faut multiplier par 0,25" suivant le raisonnement de la première étape, car les enfants ne savent pas ce qu'est "multiplier par 0,25". Il faut au contraire, décider qu'on peut écrire une image, celle de 5 par exemple, sous la forme $5 \times 0,25$ alors qu'on ne sait pas ce que cela veut dire et se trouver des raisons de le faire. Naturellement, les enfants sont assez portés à admettre comme évident que l'image de 5 peut s'écrire $5 \times 0,25$ parce qu'on la calcule en faisant $0,25 \times 5$. Mais l'enseignant va insister lourdement jusqu'à la fin de la leçon sur le caractère arbitraire de ce choix et sur ses conséquences, dans le cas où il n'y aura plus d'entiers (par exemple $\frac{3}{4} \times 0,25$).

.../...

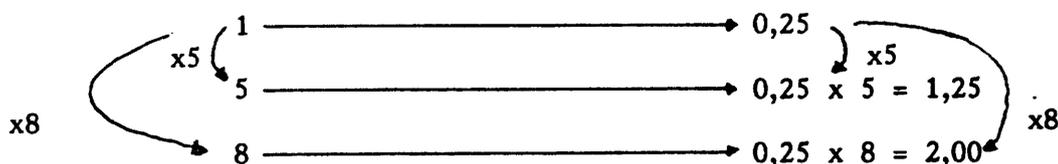
Comme tout à l'heure, l'enseignant écrit au tableau :

<u>Modèle</u>	<u>Reproduction</u>
1 \longrightarrow	0,25
5 \longrightarrow	5 x 0,25 ?
8 \longrightarrow	8 x 0,25 ?

et demande : "Peut-on écrire 5 x 0,25 ?"

8 x 0,25 ?

Les enfants, en général, répondent qu'ils savent trouver les images de la manière suivante :



Le maître insiste : "alors vous décidez qu'on peut écrire que 1,25 est égal à 0,25 x 5 ?"

Il ajoute : "0,25 x 5 c'est 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 et 5 x 0,25 c'est donc par définition 0,25 x 5"

"c'est acceptable, mais est-ce que cette définition peut s'appliquer à tous les nombres entiers naturels ?"

"On peut donc admettre que "x 0,25" c'est trouver l'image d'un nombre par l'agrandissement 0,25"

Nous écrirons le nom de l'agrandissement au-dessus du tableau de nombres ainsi :

$$1 \xrightarrow{x \ 0,25} 0,25$$

Remarque : Le terme "opérateur" utilisé par le maître et les élèves jusqu'à présent pour désigner en diverses circonstances ce qui est symbolisé par les flèches \xrightarrow{x} ne correspond pas à un usage mathématique de cette notion mathématique très générale. Or, il s'agit maintenant de "définir" implicitement, mais de façon précise et mathématiquement utilisable pour les élèves, un objet mathématique bien déterminé : les applications linéaires rationnelles. Cet objet étant lui-même le référent de ce que les élèves utiliseront sous le nom de rationnel.

Utiliser le terme et le concept "d'opérateur" tel qu'il est connu des élèves à ce moment-là pour "représenter", nommer le nouvel objet mathématique construit, serait une erreur, une fausse facilité qui ferait hériter inutilement le nouveau concept des ambiguïtés de l'ancien et qui brouillerait le débat.

.../...

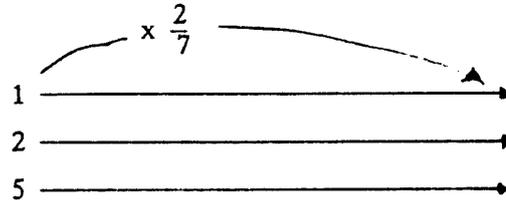
3ème étape : "Maintenant, pouvez-vous trouver dans quelle circonstance on pourrait écrire $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?

et l'enseignant attend encore la réponse :

"à 1 du modèle correspond $\frac{2}{5}$ sur la reproduction

à $\frac{3}{7}$ du modèle correspond $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$ sur la reproduction".

Il peut prendre les réponses des élèves et les examiner s'il pense en avoir suffisamment de correctes ou donner une information de plus et demander : "quelles sont les images des mesures suivantes par l'agrandissement " $\times \frac{2}{7}$ ".



Est-ce que c'est un agrandissement ou un rapetissement ?

Les élèves écrivent les réponses sur leur cahier :

Modèle	$\times \frac{2}{7}$	Reproduction
1	→	$\frac{2}{7}$
2	→	$2 \times \frac{2}{7}$
5	→	$5 \times \frac{2}{7}$

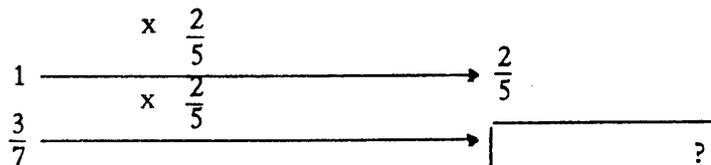
4ème étape : "et que signifierait $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$?"

Beaucoup d'enfants proposent d'ajouter $\frac{3}{4}$ dans la colonne "modèle" et sont en mesure de répondre "c'est l'image de $\frac{3}{4}$ par l'agrandissement " $\times \frac{2}{7}$ " c'est-à-dire lorsque l'image de 1 est $\frac{2}{7}$ ".

10.1.3 - Calcul du produit de 2 fractions.

a) Consigne : "Pouvez-vous trouver maintenant ce que nous pouvons décider que signifie : $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$?

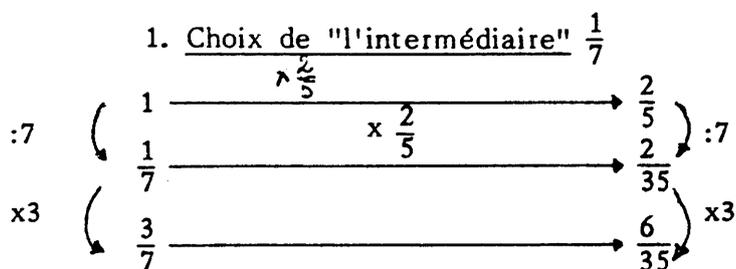
Savez-vous calculer le résultat ?



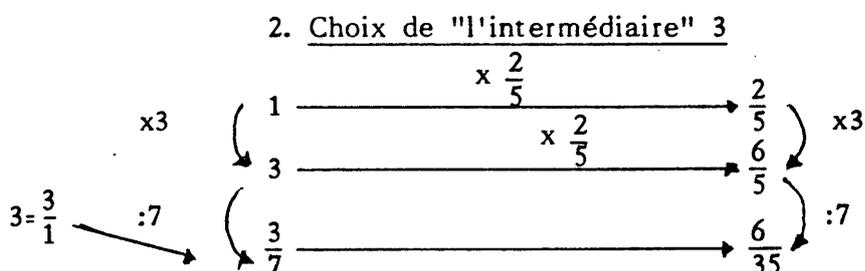
b) Déroulement : Les enfants travaillent par groupes de 2. Ils essaient de mettre en oeuvre les techniques qu'ils avaient découvertes et utilisées dans l'activité 8-3 (§ 8.3.4) "image d'une fraction".

c) Stratégies observées : Les enfants calculent par l'un des deux procédés suivants :

.../...



Donc l'image de $\frac{3}{7}$ est: $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$



Donc l'image de $\frac{3}{7}$ est: $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

3. Chaque année des enfants écrivent directement :

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28}$$

L'enseignant qui passe auprès de chaque groupe pendant la phase de recherche, s'étonne et leur demande comment ils ont trouvé ce résultat. Ceux-ci répondent qu'ils ont multiplié les deux numérateurs et les deux dénominateurs. "Pourquoi ?" questionne encore l'enseignant "c'est obligé", "c'est normal" répondent-ils.

Alors l'enseignant leur dit qu'il ne peut pas accepter un résultat s'ils ne prouvent pas qu'il est juste. Ces enfants mettent alors en oeuvre l'une des deux stratégies décrites ci-dessus.

d) Correction collective : L'enseignant organise une correction au cours de laquelle les enfants qui sont arrivés à trouver un résultat viennent au tableau montrer leur stratégie.

C'est un rappel rapide puisque ces calculs ont déjà été faits à plusieurs reprises : au cours des activités : 8-3 ; 8-4 ; 8-5.

Beaucoup constatent et affirment alors qu'il suffit de multiplier entre eux les numérateurs et les dénominateurs.

L'enseignant accepte d'étudier cette dernière méthode qu'il baptise du nom de son proposant.

.../...

10.1.4 - Etude de la méthode : $\frac{\text{produit des 2 numérateurs}}{\text{produit des 2 dénominateurs}}$

"Est-ce que vous pensez que cette règle est toujours vraie quelles que soient les fractions ?"

Les enfants hésitent et demandent à l'enseignant de leur donner un autre produit.

a) Consigne "que signifie le produit $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$?

Donnez sa signification et calculez-le."

b) Déroulement : Les enfants travaillent individuellement. L'enseignant aide un peu ceux qui ont du mal à démarrer :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad \times \frac{4}{3} \quad} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{7} & \xrightarrow{\quad \times \frac{4}{3} \quad} & ? \end{array}$$

Au bout de 3 à 5 minutes environ, il fait une correction collective :

$$\begin{array}{ccc} :7 & \left(\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad \times \frac{4}{3} \quad} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{7} & \xrightarrow{\quad \times \frac{4}{3} \quad} & \frac{4}{21} \end{array} \right) & :7 \\ \times 5 & \left(\begin{array}{ccc} \frac{5}{7} & \xrightarrow{\quad \times \frac{4}{3} \quad} & \frac{20}{21} \end{array} \right) & \times 5 \end{array}$$

donc : $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$

Les enfants disent avec enthousiasme que la "règle" qu'ils ont découverte est bonne puisqu'elle vient encore de fonctionner.

Mais l'enseignant fait remarquer qu'ils n'ont essayé que sur deux exemples et que pour l'adopter ("l'institutionnaliser") il faut qu'elle soit toujours vraie, sur n'importe quel exemple. Alors il propose aux enfants une forme de vérification nouvelle sous forme de jeu.

10.1.5 - Vérification de la règle.

a/ Premier jeu.

1) L'enseignant demande aux enfants de choisir un nombre correspondant à ces lettres :

a =

b =

c =

d =

.../...

(chaque enfant écrit sur son cahier de brouillon).

2) Calculez $(a + b)$: "Allez-vous trouver pareil ? pourquoi ?"
La vérification se fait immédiatement sur le tableau."

3) Calculez $(b + c)$: "Allez-vous trouver pareil ?"
(vérification avec 1 ou 2 enfants) : Non !

4) Calculez $(a + b) + (b + c)$
puis $a + b + c$
puis $(a + b) + (b + c) - b$

Que remarquez-vous ?

La conclusion est inscrite sur le tableau :

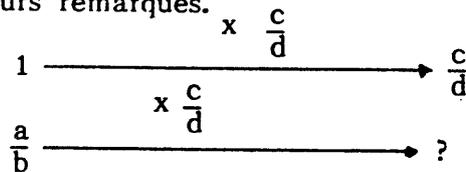
$(a + b) + (b + c) - b = a + b + c$
pourquoi ?

Remarque : Les enfants aiment beaucoup cette activité. En effet, la plupart d'entre eux ont vu des plus grands calculer avec des lettres et ils le disent : "c'est comme en 6ème", ou "c'est comme en 5ème !"

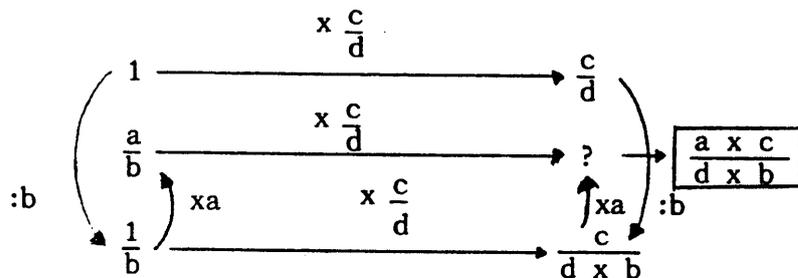
b/ Deuxième jeu.

a) Consigne : "Que signifie le produit : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$?"

b) Déroulement : L'enseignant demande à un enfant de venir écrire la signification sur le tableau tandis que les autres regardent et participent par leurs remarques.



A ce stade, il propose aux enfants de l'aider à calculer ce produit :



donc : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d \times b}$

c) Conclusion : L'enseignant fait remarquer que les lettres, comme dans le jeu précédent, désignent n'importe quel nombre donc la règle découverte par les enfants est toujours vraie.

.../...

10.2. MULTIPLIER PAR UN DECIMAL

10.2.1 - Définition du produit de deux décimaux.

a) Consigne "Que signifie le produit suivant : $1,25 \times 3,5$? Sauriez-vous le calculer ?"

b) Déroulement : Comme dans l'activité précédente, l'enseignant laisse aux enfants quelques minutes pour réfléchir et éventuellement écrire quelque chose sur leur cahier de brouillon. Il s'attend évidemment à la réponse suivante : "à 1 du modèle correspond 3,5 sur la reproduction et " $1,25 \times 3,5$ " est l'image de 1,25

Dès qu'il obtient cette réponse (qui vient très vite !) il écrit ou fait écrire sur le tableau en conclusion :

$$\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\quad \times 3,25 \quad} 3,5 \\ 1,25 \xrightarrow{\quad \times 3,25 \quad} 1,25 \times 3,5 \end{array}$$

"Mais ici peut-on donner le résultat ?"

Les enfants répondent que non, qu'ils ne savent pas multiplier deux nombres décimaux.

Mais aussitôt, il y a toujours 2 ou 3 enfants qui proposent à haute voix d'écrire les nombres sous forme de fractions.

L'enseignant demande alors à l'un d'entre eux de venir au tableau écrire le produit avec des fractions :

$$\frac{125}{100} \times \frac{35}{10}$$

10.2.2 - Calcul du produit de deux décimaux.

a) Consigne "Nous venons d'écrire un nouveau produit. Vous allez chercher sur votre cahier quelle est la signification de ce produit et le calculer".

b) Déroulement : L'enseignant laisse le choix aux enfants de travailler seuls ou à deux.

La recherche est très rapide car les enfants reconnaissent le problème de l'activité précédente et écrivent très vite :

.../...

$$1 \xrightarrow{\times \frac{35}{10}} \frac{35}{10}$$

$$\frac{125}{100} \xrightarrow{\quad} \frac{125}{100} \times \frac{35}{10}$$

c) Stratégies observées : Pour calculer le résultat, il y en a toujours quelques-uns qui refont l'un des deux calculs suivants :

1ère méthode :

$$1 \xrightarrow{\times \frac{35}{10}} \frac{35}{10}$$

$$\begin{array}{l} :100 \left(\downarrow \right. \\ \frac{1}{100} \xrightarrow{\quad} \frac{35}{1000} \end{array} \begin{array}{l} \left. \downarrow \right) :100 \\ \frac{35}{1000} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \times 125 \\ \frac{125}{100} \xrightarrow{\quad} \frac{35 \times 125}{1000} = \frac{4375}{1000} \end{array}$$

2ème méthode :

$$1 \xrightarrow{\times \frac{35}{10}} \frac{35}{10}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \times 125 \\ 125 \xrightarrow{\quad} \frac{35 \times 125}{10} \end{array} \begin{array}{l} \left. \downarrow \right) \times 125 \\ \frac{35 \times 125}{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} :100 \left(\downarrow \right. \\ \frac{125}{100} \xrightarrow{\quad} \frac{35 \times 125}{1000} = \frac{4375}{1000} \end{array} \begin{array}{l} \left. \downarrow \right) \times 100 \\ \frac{35 \times 125}{1000} \end{array}$$

3ème méthode :

Mais la plupart d'entre eux ne recommencent pas ces calculs et appliquent la dernière méthode de l'activité précédente : ils multiplient entre eux les numérateurs et les dénominateurs et écrivent directement :

$$\frac{125}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{4375}{1000} .$$

d) Correction, confrontation et choix d'une méthode.

Pour la correction, l'enseignant envoie au tableau trois des enfants qui ont utilisé les méthodes décrites ci-dessus. Ceux qui ont recommencé tous les calculs subissent une très forte pression de ceux qui ont "appliqué" la dernière règle : "mais c'est trop long !"

"on sait calculer directement, on n'a plus besoin de faire tous ces calculs !"

Un consensus s'établit alors dans la classe : dorénavant, pour multiplier 2 fractions, on fera le produit des numérateurs et des dénominateurs !"

.../...

10.2.3 - Algorithme de l'opération.

1) L'enseignant écrit sur le tableau un résumé de ce qui vient d'être fait :

$$\begin{array}{r} 1,25 \times 3,5 = 4,375 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \frac{125}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{4375}{1000} \end{array}$$

et complète en faisant mettre le résultat sous forme d'un décimal :

$$1,25 \times 3,5 = 4,375.$$

2) Puis il invite les enfants à réfléchir et énoncer les calculs qu'ils ont faits :

"on a multiplié 125 par 35, puis on a divisé par 1000 car $\frac{125}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{4375}{1000}$ (règle du produit de 2 fractions).

Il pose ensuite l'opération sur le tableau et applique la règle que les enfants viennent d'énoncer :

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ \times 3,5 \\ \hline 625 \\ 375 \\ \hline 4,375 \end{array}$$

Quelques enfants disent ce qu'ils ont entendu : "il faut 3 chiffres après la virgule !"

L'enseignant fait expliciter pourquoi en se référant au produit des deux fractions qui est resté sur le tableau.

10.2.4 - Exercice.

A la demande des enfants (qui aiment utiliser des algorithmes par ce que c'est très rassurant pour eux) l'enseignant propose une autre opération :

$12,07 \times 4,9$ et leur demande de prévoir le nombre de chiffres qu'il y aura après la virgule au résultat.

.../...

10.2.5 - Résultats.

Tous les enfants ont compris l'algorithme et le sens de cette multiplication. Mais il est intéressant de noter ici qu'ils éprouvent une grande satisfaction de pouvoir, enfin, faire une multiplication de deux décimaux.

En effet, chaque année, ils demandent depuis longtemps à l'enseignant : "pourquoi on n'apprend pas encore à multiplier deux décimaux, on saurait le faire !" Cette interrogation est particulièrement pressante au cours de l'activité sur l'optimist (activité 8-7 ; § 8.7.4) car il y a toujours à ce moment-là un ou deux élèves (redoublants ou venant d'autres écoles) qui calculent directement l'image des mesures de l'optimist (entières ou décimales) en les multipliant par les agrandissements ou rapetissements : 2,1 ou 1,8 ou 0,94...

Comme l'enseignant ne prend pas en compte ce procédé de calcul et qu'il ne le fait pas exhiber lors de la correction collective, (§ 8.7.4 concours de vitesses) ces enfants se sentent lésés et demandent pourquoi leur solution n'est pas prise en considération. A la réponse de l'enseignant : "parce qu'on n'a pas encore appris la multiplication de deux décimaux et que vous n'en connaissez pas la signification", il y en a souvent un qui proteste en disant qu'il sait, qu'il a appris.

Alors l'enseignant est obligé, dans ces cas-là, de faire une mise au point collective : Il rappelle aux élèves le sens des différentes multiplications qu'ils ont déjà rencontrées :

- 4×125 signifie

$$125 + 125 + 125 + 125$$

- $4 \times 2,5$ (2,5 pouvant être une longueur de baguette ou le prix d'un objet ou la capacité d'un récipient...= signifie

$$2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5$$

mais que signifie ce produit :

$$1,7 \times 0,94$$

$$\text{ou } 4,128 \times 3,67 \quad ?$$

Evidemment, les enfants réalisent alors qu'il existe des multiplications dont le sens est différent de celles qu'ils connaissent et tous admettent que l'on ne peut pas utiliser ces calculs à ce moment de la progression. On comprend alors le soulagement qu'ils ressentent et expriment lors de cette séance et le désir de faire et d'utiliser enfin ce calcul tant attendu !

.../...

10.3. METHODES DE RESOLUTION DE PROBLEMES LINEAIRES

10.3.1 - Introduction (pour le maître)

A ce moment de la progression, les enfants disposent d'outils mathématiques suffisants pour résoudre les exercices classiques du CM 2 à la condition qu'ils soient capables de raisonner la mise en oeuvre du modèle linéaire mis en place dans les leçons précédentes.

Pour cela, il leur faut se familiariser avec de nombreuses situations sociales, physiques, logiques, etc... qui supposent la construction par les élèves de représentations appropriées et l'acquisition d'un vocabulaire spécialisé (échelles, pourcentages, remises, taux, débit...). L'usage du modèle linéaire dans ces différents exemples n'est en aucun cas une simple "application" que l'élève devrait automatiquement réussir. Ce chapitre et le suivant ont pour objet de montrer comment le maître a pris en charge avec les élèves la tâche d'explorer consciemment la famille des situations et des problèmes que l'on peut résoudre à l'aide de ce modèle linéaire. Cette quête se poursuivra jusqu'à la fin de l'année parallèlement aux activités d'unification de la structure des rationnels qui feront l'objet du module suivant.

Les enfants comprendront d'autant mieux l'intérêt de cette unification qu'ils auront un champ plus large de situations à décrire. Les exemples qui suivent vont nous permettre de décrire le déroulement type d'une étude de situation et d'indiquer comment les enfants et le maître en tirent des conclusions bien explicites (mais sûrement pas apprises par coeur). Nous allons aussi indiquer la plus grande partie possible des conclusions et des remarques que les enfants **peuvent** faire pour maîtriser les différentes méthodes de résolution, les différents types de questions, les différents usages de la fonction linéaire, etc... Pour éviter de multiplier les comptes-rendus de problèmes, nous sommes amenés à concentrer de façon un peu artificielle toutes ces conclusions sur les quelques exemples que nous exposons ici. De toute façon, dès lors que les enfants participent à la recherche, le détail des moyens d'obtenir ces conclusions échappe au maître, l'ordre dans lequel on les rencontre n'étant pas très important.

.../...

10.3.2 - Exemple d'étude d'une situation.

a) Origine et présentation du problème. Les élèves ont évoqué en sciences la composition du lait, les enfants ont recueilli la crème de deux litres de lait entier et aussi celle de 5 litres de lait demi-écrémé. Le maître demande aux enfants si on peut répondre aux questions suivantes :

"Combien de crème obtiendrait-on avec 50 litres de lait, 125 litres de lait, 250 litres de lait ?

Combien de lait faudrait-il pour obtenir 4 litres de crème ?
2 litres de crème ? 10 litres de crème ?"

b) recherche des éléments du schéma fondamental des applications : ensembles en présence et correspondance.

Il n'y a aucun doute : les élèves veulent séparer les ensembles de quantités de lait et ceux de quantités de crème, mais certains élèves peuvent écrire :

<u>lait</u>		<u>crème</u>
2 l	→	32 cl
5 l	→	40 cl
50 l	→	

ce qui va permettre un débat sur le fait de savoir si on a bien une application linéaire. On peut retrouver tous les raisonnements qui étaient apparus lors de l'épaisseur des feuilles de papier.

Exemple : pour 4 litres, on devrait trouver 64 litres et pour 5 litres encore plus... Or, on a trouvé seulement 40 cl pour 5 litres.

D'autres raisonnements fallacieux mais apparemment corrects peuvent apparaître :

"Si je prends les 2 litres de lait (entier) et les 5 litres de lait (écrémé), j'obtiens bien pour les 7 litres de lait 32 cl de crème plus 40 cl de crème ! L'image de la somme est bien la somme des images, donc, les quantités sont proportionnelles".

Pour déjouer ce genre de piège, les enfants doivent bien faire fonctionner les propriétés fondamentales des applications linéaires : l'image de la somme de 2 nombres quelconques doit être la somme des images, l'image du double doit être le double etc...

.../...

Conclusion des élèves : Il faut séparer le tableau du lait entier et celui du lait écrémé. Dans les deux cas, les quantités de crème sont proportionnelles à la quantité de lait mais les applications sont différentes.

c) Présentation des données

L'enseignant prépare les tableaux suivants :

1er tableau : lait entier.

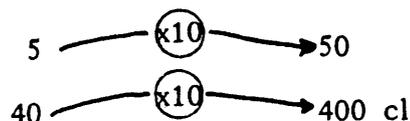
quantité de lait	2 l	50 l	125 l	250 l	
quantité de crème	32 l				

2ème tableau : lait écrémé

quantité de lait	5 l	50 l	125 l	250 l	
quantité de crème	40 cl				

Certains élèves peuvent, pour chaque calcul particulier, disposer les nombres selon le schéma qui leur est familier, la plupart s'adaptent à la disposition du tableau.

Le maître valorise les calculs directs du genre :



mais accepte le calcul des quantités de crème pour 1 litre de lait (que les enfants peuvent ajouter dans le tableau, dans la case restée vide). Il peut l'utiliser éventuellement pour définir "la teneur en crème" des différents laits et pour caractériser les deux applications différentes : x16) et (x8)

puisque $1 \longrightarrow 16$ (dans le cas du lait entier)

$1 \longrightarrow 8$ (dans le cas du lait écrémé)

d) Expression des données et des résultats : Les transformations naturelles de 400 cl en 4 l ne posent guère de problème tant que les élèves ne s'occupent que des quantités. Mais le problème de l'hétérogénéité des unités dans un tel tableau doit être traité dès que possible en prévision des cas où la représentation des quantités ne permettra plus de corriger les erreurs qui pourraient résulter de cette hétérogénéité. On montre aux élèves qu'on ne peut plus calculer de façon automatique lorsqu'on mélange les unités.

Conventions à établir avec les enfants.

1/ Tous les nombres de l'ensemble "départ" doivent être exprimés dans une même unité, tous ceux de l'ensemble "arrivée" doivent être exprimés dans la même unité. Par contre, même s'il est possible d'exprimer les deux grandeurs dans la même unité, (ici lait et crème) ce n'est pas indispensable (on peut exprimer la quantité de crème soit en litre, soit en centilitre).

2/ Si on respecte ce principe, on peut désigner l'application comme un agrandissement à l'aide d'un nombre ou d'une opération ($\times 16$ ou $\times 0,165$) sinon, ce n'est pas possible. Il faut alors aussi indiquer les correspondances entre unités : litres (de crème) pour litres (de lait) ou centilitres (de crème) pour litres (de lait), ce qui donne :

soit : 16 cl/l

soit 0,16 l/l.

Lorsque les unités changent, l'application et le nombre qui la désigne changent tout en désignant les mêmes correspondances entre les quantités.

3/ Dans un problème, lorsqu'on rencontre une application qui met en relation des grandeurs, il faut contrôler, d'une part l'application numérique, d'autre part les correspondances entre unités.

10.3.3 - Déroulement type d'une activité (commentaire pour le maître)

L'enseignant choisit un exercice parmi les propositions des élèves ou en propose un nouveau. Il écrit l'énoncé sur le tableau, demande aux enfants de le lire silencieusement, de réfléchir un moment et il invite ceux qui croient savoir, à le faire sur leur cahier de brouillon. Il passe auprès des enfants, aide ceux qui le souhaitent, répond à leurs demandes.

Lorsque ceux qui savent ont trouvé, lorsque ceux qui ne savent pas ne progressent plus et commencent à se démobiliser, alors il organise une analyse collective qui donne presque toujours lieu à des discussions et des recherches intéressantes. Le problème va être reformulé de façon à ce que les enfants :

- cherchent à reconstituer le schéma fondamental d'une application : classification des ensembles de nombres, vérification de la relation qui justifie la correspondance entre les nombres de l'ensemble "départ" et les nombres de l'ensemble "arrivée".
- cherchent à vérifier le caractère linéaire de l'application :
 - . soit par la preuve matérielle que l'image de la somme de deux nombres est la somme des images
 - . soit par la preuve que les rapports sont conservés.

.../...

La preuve par l'égalité des produits en croix ne s'est jamais avérée nécessaire pour les problèmes que nous avons choisis à ce niveau.

- Obtiennent un des raisonnements qui donnent la solution.

Les enfants qui ont réussi n'ont pas tous trouvé de la même manière. Les méthodes sont discutées, étiquetées, comparées. La plus simple est privilégiée par les enfants et par l'enseignant.

Il est souhaitable de terminer chaque séance par un travail individuel, rédigé et bien présenté sur le cahier de classe. Ce travail sera corrigé, d'abord par le maître en dehors de la classe, puis avec les élèves au début de la séance suivante.

10.3.4 - Remarques.

1/ Nombres et ensemble de nombres :

La reconstitution du schéma fondamental exige que les élèves manipulent, conçoivent chaque nombre donné dans l'énoncé comme le représentant d'une famille d'autres nombres possibles mais c'est seulement certains d'entre ces ensembles qui sont intéressants pour la représentation par le schéma fondamental.

Par exemple, s'il s'agit de calculer une dimension sur la carte, connaissant la dimension sur le terrain, la considération de l'ensemble des échelles possibles peut contrarier la recherche de la solution. Il y a donc tout un entraînement à reconnaître les éléments du schéma fondamental.

2/ Règle de trois.

Ces activités remplacent avantageusement l'ancien procédé dit de "la règle de trois" et qui consistait, rappelons-le, à :

i/ énoncer ce que l'on cherche, opposé à ce que l'on connaît : par exemple le prix d'un [certain] nombre de cravates connaissant celui d'un [autre] nombre (en fait, l'énoncé demandait : "trouver le prix de 2 cravates" et l'enfant devait identifier que ce qui était demandé là était un prix et non un nombre de cravates malgré la présence de l'expression "2 cravates" et que ce prix n'était pas connu, le nombre de cravates, lui, étant connu).

En général, l'énoncé comportait au moins deux nombres de la catégorie connue et un seul de la catégorie inconnue.

ii/ choisir parmi les deux nombres du genre connu celui dont on connaissait le correspondant et commencer la "récitation" de la formule de la règle de trois : "si 3 cravates coûtent 390 f., 1 cravate coûte 3 fois moins et 2 cravates 2 fois plus !"

.../...

iii/ disposer au fur et à mesure de la récitation les nombres nommés sous la forme canonique :

$$\frac{390}{3} ; \frac{390}{3} ; \frac{390 \times 2}{3}$$

iv/ effectuer les opérations indiquées :

$$390 \times 2$$

puis le résultat divisé par 3.

Cette récitation indiquait d'elle-même certain disfonctionnement : par exemple si l'élève commençait par : "si 2 cravates coûtent" il ne pouvait pas dire quel prix, donc, il fallait changer le nombre commençant : avec 390 F, j'ai 3 cravates, avec 1 franc, j'ai 390 fois moins et le 3ème nombre évoqué qui devait être des francs était absent ! Il fallait donc recommencer avec le 3ème nombre.

Cette possibilité d'autocorrection formelle permettait aux enfants d'abandonner le sens, parfois très comique, de ce qu'ils disaient.

Exemple : S'il s'agit de savoir combien de cravates j'ai obtenues avec 260 f alors que 3 cravates valent 390 f., la formulation précédente doit être utilisée et on évoque la quantité de cravates que l'on pouvait acheter avec 1 F !

L'étude formelle de la règle de trois conduisait à détruire chez l'enfant le contrôle de ce qu'il disait par le sens.

De plus, pour assurer la bonne succession des nombres dans la récitation de la règle de trois, de nombreux auteurs faisaient disposer les nombres en colonne comme nous l'avons fait jusqu'ici dans le schéma fondamental : le nombre inconnu en bas à droite.

3/ Différence avec la méthode proposée ici.

Cette ressemblance ne doit pas masquer la différence essentielle de la méthode présentée ici avec celle de la règle de trois :

i/ La disposition à droite ou à gauche, en haut ou en bas, des nombres du type cherché et celle, dans les colonnes, des nombres donnés ou calculés ne joue aucun rôle. Et elle est le plus souvent quelconque dans la classe.

Exemple :

Prix	Poids

ou

Poids	Prix

.../...

ii/ Toutes les opérations de recherche du schéma fondamental utiles dans l'énoncé et la vérification des propriétés caractéristiques s'appuient sur le sens de ce qui est proposé et sur des propriétés mathématiques à l'exclusion de tout formalisme "procédologique".

iii/ Toutes les opérations de solution sont obtenues uniquement par des raisonnements mathématiques vérifiables, pour les enfants, par d'autres raisonnements équivalents ! (Les enfants ont appris plusieurs méthodes pour établir la validité d'une solution).

iv/ Ces méthodes d'analyse ont été élaborées et éprouvées par les enfants et si le maître a aidé à les reconnaître, il n'en a canonisé aucune.

v/ La prise en compte ouverte par le maître devant les élèves des difficultés de mathématisation (institutionnalisation-validation), les projets communs de classements et de recherche des situations ou des méthodes de résolution tendent à développer chez les élèves des attitudes responsables et chez le maître une compréhension plus efficace de leurs difficultés.

4/ Cette méthode exige qu'assez fréquemment, et au hasard, l'enseignant présente à ses élèves des problèmes différents : linéaires ou non linéaires.

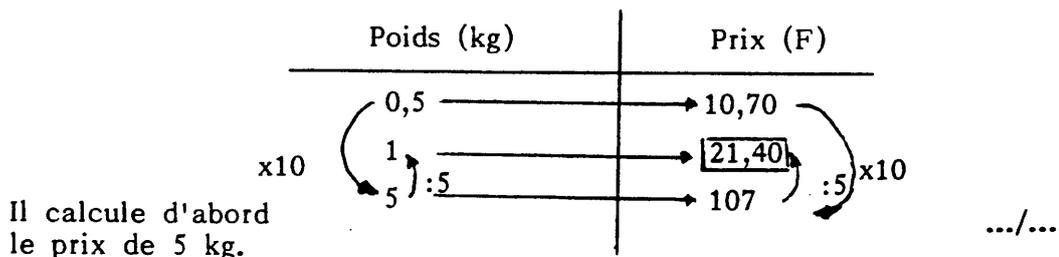
10.3.5 - Différentes méthodes de résolution.

Les élèves ont l'habitude de faire des recensements de méthodes et de les comparer. Il s'agit maintenant de montrer qu'un même élève peut utiliser des méthodes différentes selon les cas.

a/ Pour faciliter les calculs :

Exemple : J'ai payé 10,70 F pour 0,5 kg de fromage. Quel est le prix du kilogramme*de ce fromage ?

1ère solution décrite par un enfant



* Il arrive que certains enfants ne comprennent pas que l'expression du kilo signifie la même chose que d'un kilo

2ème solution décrite par un autre enfant

	Poids (kg)		Prix (F)
	0,5		10,70
x2	1	x 21,40	10,70 x 2 = 21,40

Les enfants disent que la deuxième solution est la plus rapide. Mais l'un d'entre eux ajoute : "oui, mais pour employer cette méthode, il fallait savoir que $2 \times 0,5 = 1$!"

Réaction immédiate des autres : "mais on le sait depuis longtemps puisque 2 fois 5 dixièmes, ça fait 10 dixièmes et 10 dixièmes c'est 1 !".

Remarque : L'enseignant peut, à ce moment-là, exploiter cette remarque d'un enfant et faire un peu de calcul mental en demandant :

"et 3 fois 0,5 combien ça fait ?"

2 fois 1,5 ?

2 fois 5,5 ?..." ce qui rompt la monotonie de la séance.

b/ Pour faciliter la représentation :

Exemple : 3 cravates valent 390 F. J'ai payé 260 F, combien ai-je eu de cravates ?

1ère solution : Type "règle de trois automatique" ("combien de cravates j'obtiens pour 1 franc ?")

	Nombre de cravates		Prix (F)
	3		390
:390	2	x260	260
:390	3 : 390	x260	1

2ème solution :

	Nombre de cravates		Prix
	3		390
			260

.../...

Pour trouver l'opérateur, les enfants divisent $260 : 390$ et trouvent $0,666\dots$

Comme la division ne "tombe pas juste", ils cherchent souvent une autre solution.

3ème solution : utilisation de l'application (simple mais formelle)

Nombre de cravates	Prix (F)
3	390
2	260

$\xrightarrow{\text{x130}}$ $\xleftarrow{\text{:130}}$

4ème solution : celle qui sera retenue pour donner du sens à ce qu'on calcule et éventuellement vérifier.

Nombre de cravates	Prix (F)	
3	390	Prix d'une cravate $390 : 3 = 130$ Nombre de cravates $260 : 130 = 2$
:3	260	
1	130	

$\xrightarrow{\text{x2}}$ $\xrightarrow{\text{:3}}$

Remarque : La 3ème et la 4ème solution font apparaître le même calcul. Dans la quatrième 130 F est le prix d'une cravate. Dans la troisième, "multiplier par 130 " est l'application "prix des cravates" : définie par "1 cravate coûte 130 F." ou encore par : " 130 F. par cravate".

Les sens sont donc très différents.

10.4 - RECHERCHE DES SITUATIONS LINEAIRES

10.4.1. Concours de recherche de situations

a) Consigne : "Je vous propose un concours qui durera jusqu'à la fin de l'année : Il s'agira de trouver des exemples d'applications linéaires et d'occasions de s'en servir. Au fur et à mesure, je relèverai vos propositions et nous choisirons les plus nouvelles ou les plus intéressantes. Qui peut donner un exemple ?"

REMARQUE : la plupart des exemples qui viennent alors sont des exemples de prix d'une certaine quantité de marchandise, peut-être parce que l'achat et la vente sont devenus la seule activité sociale observable en rapport avec des calculs.

b) Etude d'un exemple : les poids et les prix.

Voici un exemple proposé par l'un d'entre vous : "Maman a payé 50,40 F. un rôti de 900 grammes. Quel est le prix du kilogramme de ce rôti ?"

Nous disposons habituellement, d'un côté l'ensemble de tous les poids de rôti que nous pourrions imaginer (mais nous n'écrivons que ceux qui nous intéressent) et de l'autre, l'ensemble de tous les prix correspondants, nous mettrons sur la même ligne, un poids et son prix :

<u>Ensemble des poids</u>	<u>Ensemble des prix</u>
900	50,40
un poids	son prix
1 kg	56 ?

La réponse demandée comprend trois parties :

un nombre : (le prix) 56
 L'unité utilisée pour les prix : FRANCS
 L'unité utilisée pour les poids : kilogramme
 Réponse : 56 FRANCS par kilogramme
 ou 56 F/Kg.

Attention ! ce n'est pas 56 F/g mais 56 F/1000 g.

c) Généralisation : les quantités et les prix

"Beaucoup de vos propositions se ressemblent, ne trouvez-vous pas ? Il s'agit toujours d'une quantité de produit et de son prix, la quantité étant une masse, une longueur, une capacité, une surface, un nombre, etc...

La fonction est généralement linéaire parce que si l'on veut acheter deux fois au même endroit la même quantité de produit, on paiera chaque fois le même prix. Donc le prix d'une quantité double sera une somme double.

10.4.2. Situations déjà rencontrées

a) Deuxième consigne : "Avant d'étudier les nombres décimaux, nous avons trouvé quelques exemples où l'on rencontre un ensemble de départ, un ensemble images et une application linéaire de l'un sur l'autre.

Vous allez les rechercher dans vos cahiers (ou classeurs). Vous les proposerez et je les écrirai sur le tableau (le maître peut en avoir déjà écrit quelques-uns).

Ensuite, vous les relirez attentivement et vous remplacerez les nombres entiers par des nombres décimaux partout où ce sera possible et raisonnable".

b) Déroulement :

L'enseignant obtient alors après cette activité une liste de problèmes telle que la suivante (l'ordre des problèmes n'a aucune importance).

1. Une automobile consomme 8,2 litres pour faire $\boxed{100}$ kilomètres. Quelle sera sa consommation pour 300 kilomètres, 575 kilomètres ?

2. Un piéton qui marche toujours à la même vitesse parcourt 4,5 km en une heure.

1°) Quel temps mettra-t-il pour parcourir 7,2 km ? 9,8 km ?

2°) Quelle distance parcourt-il en 45 mn ?

" " " en 18 mn ?

3. Pour remplir $\boxed{7}$ boîtes de friandises, il a fallu $\boxed{133}$ bouchées au chocolat et $\boxed{224}$ bonbons aux fruits.

Combien faut-il de bouchées et de bonbons pour garnir 11 boîtes ?

4. Il faut 0,12 kg de café pour faire $\boxed{8}$ tasses.
 Quel poids de café faut-il pour faire $\boxed{3}$ tasses ?
 Avec 285 g. de café, combien peut-on faire de tasses ?
5. A l'hôtel, la pension pour $\boxed{3}$ personnes est de 541,5 f.
 - Combien paiera une famille de $\boxed{5}$ personnes ?
 - Un groupe a payé 1805 f. Combien y avait-il de personnes ?
6. Un rouleau de fil de cuivre de 5,1 mètres pèse 0,390 kg.
 - Quel serait la longueur d'un rouleau du même fil pesant 1,170 kg ?
 - Combien pèserait un rouleau de 8,5 mètres du même fil ?
7. Un libraire vend en réclame $\boxed{7}$ livres pour 108,50 f.
 Combien valent $\boxed{56}$ de ces livres ?
8. Pour obtenir 10,1 kilogrammes de sel marin, il faut faire évaporer 310,1 kg d'eau de mer.
 - Quelle quantité d'eau de mer faut-il faire évaporer pour obtenir 15,5 kg de sel ? 250,20 kg de sel ?
 - Quelle quantité de sel marin peut-on obtenir en laissant évaporer 62,8 kg d'eau de mer ? 7285,5 kg ?
9. Le prix d'une course en taxi comprend :
 - une prise en charge de 8,5 f.
 - et une somme de par kilomètre
 - Combien paiera-t-on pour un trajet de 7,5 km ? de 10,9 km ? de 17,5 km ?

10.

côté d'un carré	3,5	4,75	6,3	7,2
périmètre				
aire				

L'enseignant fait encadrer par les enfants les nombres qui ne peuvent pas être remplacés par des décimaux. Au cours de cette activité, les enfants devront remarquer que :

- certains nombres sont conventionnellement fixés : consommation d'essence aux 100 km, d'autres ne peuvent pas être mis par les enfants sous forme d'un nombre décimal : le temps en minutes.

- certaines quantités sont, par nature, entières : quantité de livres, de tasses, de bouchées au chocolat, etc...
- certains nombres décimaux sont aberrants à cause de la précision invraisemblable qu'ils évoquent : 7285,5 kg. Il est ridicule d'évaluer le poids de plus de 7 tonnes d'eau de mer à 500 grammes près !

Les élèves évoquent la manière de résoudre ces problèmes. Pour certains, la méthode ne change pas. D'autres, par contre, ne peuvent pas être résolus par les enfants à ce moment-là (c'est le cas du problème n° 2 (division par un décimal), n° 6 (division par un décimal)).

REMARQUE : certains des exemples proposés sont, en fait, des contre-exemples (problèmes n° 9 et 10 : l'aire). Mais les élèves; tout en les résolvant correctement, peuvent ne pas le remarquer. Cette question est traitée dans le paragraphe suivant.

10.4.3. Contre-exemples.

a) Etude d'un contre-exemple :

"Examinons à nouveau la relation entre une quantité et son prix. Pensez-vous que dans ce cas, on a toujours des fonctions linéaires ? cherchons des contre-exemples."

L'enseignant laisse les enfants chercher et au bout de quelques minutes, accepte le contre exemple bien peu naturel en tant que contre-exemple du chauffeur de taxi (problème n° 9)

- et propose le suivant :

"Les vis à bois de 8 x 50 (diamètre 8 mm, longueur 50 mm) sont vendues dans un magasin par sachets de 6 au prix de 6 f. le sachet. Quel est le prix d'une vis ?

Je trouve chez le même marchand une boîte de 100 vis semblables au prix de 50 f.

Quel est le prix d'une vis ? Expliquez.

La fonction n'est pas linéaire puisque le prix d'une vis change suivant la quantité.

REMARQUE : On peut se demander alors sous quel emballage il vaut mieux acheter les vis selon le nombre de vis que l'on veut réellement utiliser. Par exemple, si on n'a besoin que d'une seule vis, (on suppose que les autres ne seront jamais utilisées) elle coûtera 6 f. !

"Et si on a besoin de 3 vis ?

de 20 vis ?

.../...

de 60 vis ?

de 80 vis ?

Que vaut-il mieux acheter ?"

Les enfants réfléchissent, éventuellement calculent sur leur cahier de brouillon.

<u>Quantité</u>	<u>Prix par sachet</u>	<u>Prix par boîte</u>
1 vis —————>	6 f. —————>	50 f.
3 vis —————>	6 f. —————>	50 f.
20 vis —————>	24 f. —————>	50 f.
24 vis —————>	24 f. —————>	50 f.
60 vis —————>	60 f. —————>	50 f.
80 vis —————>	84 f. —————>	50 f.

Le tableau montre que si on a besoin de 60 vis, il vaut mieux acheter 1 boîte.

On voit aussi que les applications "quantités-prix" ne sont pas linéaires mais pour une autre raison : le groupement par quantités.

L'application quantité —> prix ne sera linéaire que si le prix d'une vis utilisée est rigoureusement le même quelle que soit la quantité. On peut donc calculer les prix moyens d'une vis dans les différents cas.

"Faites le tableau des prix moyens d'une vis selon la quantité".

<u>Quantités</u>	<u>Prix d'une vis</u>	<u>Quantités</u>	<u>Prix d'une vis</u>
1 —————>	6	7 —————>	1,71
2 —————>	3	8 —————>	1,5
3 —————>	2	9 —————>	1,33
4 —————>	1,5	10 —————>	1,20
5 —————>	1,2	11 —————>	1,09
6 —————>	1	12 —————>	1

Très vite, pour des quantités de vis assez grandes, le prix réel d'une vis est très voisin de 1 f.

10.4.4. Ouverture du concours

a) Troisième consigne :

* Vous chercherez (en dehors de la classe) de nouveaux exemples de situations de proportionnalité.

* Tous les matins, nous examinerons une proposition.

.../...

* Il faudra, autant que possible, chercher des exemples nouveaux différents de ceux que nous connaissons déjà. Nous essaierons de repérer ensemble ces différences.

* Nous attribuerons ensembles des points aux problèmes proposés (aux problèmes bien entendu, pas aux enfants), s'ils sont intéressants. Une situation originale présentant beaucoup de différences par rapport à celles déjà connues, remportera plus de points qu'une situation presque semblable à un problème déjà rencontré.

* Le concours d'exemples s'accompagnera d'un concours de contre-exemples. Un contre-exemple aura plus de points qu'un exemple.

REMARQUES POUR LE MAITRE :

Ce concours a pour objet d'inciter les enfants à consulter des manuels, à demander ou repérer dans leur entourage les problèmes possibles mais aussi à discuter de leurs particularités et des manières de les résoudre toujours en se référant à l'application linéaire.

Les points sont attribués aux problèmes et non pas aux élèves mais un élève peut se targuer d'avoir trouvé un problème à 5 points et même ajouter les points qu'il a obtenus. Un élève moins ingénieux peut essayer d'obtenir lui aussi beaucoup de points mais il est conduit à faire plus de problèmes. Ces additions de points ne sont pas prises en compte par le maître qui peut assurer que les enfants ont du goût pour la compétition sans en être lui-même l'instigateur ni l'organisateur. Chaque élève doit savoir faire le problème qu'il propose. Les points attribués à un problème donné varient avec le moment selon ce qui a été fait avant.

b) Comment chercher de nouveaux exemples.

Le maître ne fait pas un cours aux élèves sur la façon dont ils doivent chercher, mais il suggère au bon moment, soit des synthèses, soit des exemples, soit des méthodes, soit des pistes. Voici quelques exemples.

- . Faire varier systématiquement le type de grandeurs mises en correspondance :
 - i) quantités/francs
 - ii) quantités/quantités
 - iii) nombre/nombre
 - iv) prix/prix

Ces quantités pouvant être des longueurs, des poids, des capacités, des volumes, des surfaces, des temps, des nombres (résultats de dénombrements) etc

. Cette exploration systématique se fait en cherchant les situations de référence qui donnent l'occasion de ces mises en correspondances :

i) ventes, achats.....

ii) transformations de produits (lait en crème, charbon en ses composants, confitures,.....), dosages (épandages d'engrais....)

iii) changements d'unités

iv) location d'argent (temps fixe)

. Faire varier les raisons de mise en correspondance (par exemple calcul du prix d'achat, du prix de vente, du bénéfice dans le cas des ventes et achats).

. Prendre systématiquement des activités sociales, professionnelles, techniques.....

. Examiner le vocabulaire familier ou technique associé à ces pratiques sociales.

(Les élèves cherchent systématiquement toutes les formulations possibles d'un même problème et éventuellement font une enquête sur la manière dont les professionnels les formulent.

Exemples : A la banque, dans les magasins....)

Nous donnerons au Chapitre 14 quelques résultats possibles de cette recherche et notre propre classification.

MODULE 11 :
SITUATIONS LINEAIRES

11.1. FRACTIONS D'UN RATIONNEL

Avertissement aux enseignants.

Le vocabulaire des fractions a été introduit dans la première partie pour désigner des quantités. Nous allons maintenant l'utiliser pour désigner des applications linéaires, puis nous l'utiliserons pour désigner des rapports. Ces trois concepts sont des objets mathématiques différents qui ont été maîtrisés dans l'histoire à des époques et par des civilisations différentes. Nous savons aujourd'hui reconnaître leurs propriétés communes. Pour les calculs, ces trois sortes d'objets se comportent de la même manière et peuvent être identifiés puis confondus. Les élèves devront finalement traiter tous les cas avec le même langage et les mêmes méthodes.

Jusqu'au début des années 70, tous les manuels enseignaient directement le formalisme des fractions en l'illustrant de dessins presque métaphoriques (l'exemple de la tarte autorisait tous les usages des fractions !) et ne distinguaient pas les différences de sens importantes qu'introduisait le passage d'une conception à une autre. Il est apparu qu'il y avait là une cause importante de difficultés et d'échecs pour certains enfants. Dans cet ouvrage où nous essayons, à la fois de permettre aux enfants d'interpréter de façon personnelle des situations réelles et néanmoins de leur faire construire un discours et des méthodes mathématiques corrects, les distinctions de ce type sont incontournables, du moins au début. Elles permettront de mettre en évidence les difficultés des élèves et la façon de les surmonter.

Les maîtres formés par des méthodes différentes ont beaucoup de mal à adapter leurs représentations et leurs explications, lorsque, comme ici, on ne s'autorise pas à étendre sans précaution un concept à un autre.

Dans ce premier paragraphe, nous allons d'abord familiariser les enfants avec la désignation d'applications linéaires à l'aide du vocabulaire des fractions (§ 1,2 et 3).

Les exemples et les problèmes devront donc être choisis

.../...

convenablement. Par exemple, dans le problème :

"Les 25 élèves d'une classe de CM 2 vont à la piscine toutes les semaines. A la fin de l'année, les $\frac{4}{5}$ des élèves savent nager. Combien cela fait-il d'élèves ?" la fraction $\frac{4}{5}$ est un rapport entre deux grandeurs : le nombre d'élèves sachant nager et le nombre d'élèves total. Elle ne correspond pas à une application linéaire : on n'évoque pas ici une loi telle qu'une autre classe devrait avoir la même proportion de nageurs. Par contre, on peut s'attendre à comparer des rapports. Au contraire, les problèmes correspondant à des "lois", à des conventions ou à des nécessités logiques, fourniront des exemples d'applications linéaires

Exemples de "lois" :

Composition d'un produit alimentaire, chimique ou autre (lait, pain, charbon, café, etc...) et ses transformations : le café perd $\frac{1}{7}$ de son poids à la torréfaction, la confiture de figues nécessite un poids de sucre qui est les $\frac{3}{4}$ d'un poids de fruits...

11.1.1. Fraction d'une grandeur

a) Introduction : Consigne

Voici un tableau pour faire de la confiture de figues :

Poids de fruits en kg		Poids de sucre en kg
2	—————>	1,5
12	—————>	9
8	—————>	6
5	—————>	3,75

Est-ce que ce tableau est tiré d'une application linéaire ?

b) Déroulement :

1ère méthode



- Les élèves vérifient par les méthodes dont ils disposent :

. Est-ce que le poids de sucre correspondant à la somme de deux poids de fruits est la somme des poids de sucre correspondants à ces deux poids de fruits ? Quelques élèves proposent de comparer le poids de sucre (15 kg de sucre) correspondant à $12 + 8$ kg de figues avec celui correspondant à 4×5 kg de figues ($4 \times 3,75 = 15$), mais ils ont déjà supposé alors que l'application est linéaire. Cette méthode ne donne ici aucune vérification.

.../...

2ème méthode

. Est-ce que si on multiplie chaque poids de fruits par un certain nombre il faut multiplier le poids de sucre correspondant par le même nombre pour trouver la nouvelle quantité de sucre ?

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 6 \swarrow \\ 12 \\ \times 4 \searrow \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,5 \\ \times 6 \swarrow \\ 9 \\ \times 4 \searrow \\ 6 \end{array}$$

Les enfants vérifient que puisque $2 \times 6 = 12$ on a bien $1,5 \times 6 = 9$, puisque $2 \times 4 = 8$ et que $1,5 \times 4 = 6$. Puis ils se rendent compte qu'il faudrait faire beaucoup de vérifications...(16, ou au moins 6). Alors certains proposent de passer par 1 puis de faire toutes les vérifications.

3ème méthode

$$\begin{array}{r} 2 \longrightarrow 1,5 \\ 1 \longrightarrow 0,75 \\ \text{-----} \\ \text{x0,75} \end{array}$$

. Est-ce que les poids de sucre sont obtenus en multipliant le poids des fruits par un nombre constant ?

Pour trouver ce nombre les enfants cherchent l'image de 1, puis effectuent les multiplications $12 \times 0,75$; $8 \times 0,75$; etc...

. Conclusion : L'application est linéaire.

Note : Ces différentes méthodes sont toutes connues des enfants qui les utilisent selon leur efficacité du moment. Elles feront l'objet d'un recensement systématique et d'une "institutionnalisation" un peu plus tard.

Cette situation peut être rapprochée de celles qui donnent la composition d'un produit : exemples du lait, du gâteau, du pain....

c) Résumés du tableau.

. "Comment résumer le tableau en une recette courte ?"

Les élèves proposent leur méthode habituelle utilisant l'image de 1 :

"Il faut faire "multiplié par 0,75".

bientôt corrigé en :

"Il faut multiplier le poids des fruits par 0,75 pour trouver le poids de sucre correspondant"

. L'enseignant fait transformer l'écriture en fraction :

$\xrightarrow{\times \frac{75}{100}}$, "simplifiez la fraction". Les élèves : $\frac{75}{100} = \frac{150}{200} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \dots$

il reformule alors ainsi :

"Il faut multiplier le poids des fruits par $\frac{3}{4}$ pour trouver le poids de sucre correspondant".

" Il faut appliquer $\times \frac{3}{4}$ aux poids de fruits pour trouver les poids de sucre correspondants".

. L'enseignant: "vous trouverez souvent pour dire cela des expressions comme :

le poids de sucre est les 3/4 du poids des fruits. Pour trouver le poids de sucre on prend les 3/4 du poids des fruits, ou on calcule les 3/4...

Ce que vous avez fait ici, c'est calculer une fraction d'un nombre

REMARQUE: On trouve dans le tableau en face du nombre 4 (dans les poids des fruits) le nombre 3 (poids du sucre): le poids de sucre est 3 lorsque le poids des fruits est 4, le poids de sucre par rapport au poids des fruits est de 3 pour 4.

11.1.2. Exercices de formulation des fractions en termes d'applications linéaires.

a) Consigne : "Voici quelques situations formulées de cette manière :

- Traduisez-les par le schéma d'application linéaire,
- puis proposez des questions en complétant s'il le faut par les renseignements nécessaires.

- 1) un marchand veut que son gain soit les 2/5 du prix d'achat.
- 2) le blé donne en farine blanche les 4/5 de son poids.
- 3) Dessinez un rectangle dont la largeur est les 2/3 de la longueur.
- 4) Pour acheter à crédit dans un magasin, il faut verser les 3/8 du prix de vente lors de l'achat."

b) Déroulement : Reconnaissance de l'application désignée par une fraction et recherche du schéma.

* Les enfants savent par exemple qu'il s'agit, dans la première situation, d'une application 2/5 et ils peuvent la représenter

$$1 \xrightarrow{\cdot 2/5} 2/5$$

.../...

le problème pour eux est de comprendre où se trouvent les prix d'achat et où se placent les gains.

- Assez souvent, si la situation de référence est bien connue, des renseignements annexes viennent indiquer la solution : par exemple dans le cas où l'on prend une partie d'un tout. Exemple (ce n'est pas le cas ici) l'image est plus petite que la quantité : si on prend les deux cinquièmes, à 2 ne peut pas correspondre 5, donc à 5 correspond 2.

- Ici ces informations "sémantiques" ont été volontairement rendues inopérantes. Le marchand pourrait vouloir faire un gain des $5/2$ du prix d'achat car le gain n'est pas une partie du prix d'achat et la situation n'est pas bien connue des élèves. Dans ce cas, il faut bien se référer à la formulation elle-même : l'expression "les $2/5$ du prix d'achat" montre :

- . que $2/5$ n'est pas le prix d'achat
- . que c'est le prix d'achat dont on prend les $2/5$.
- * On a donc :

Prix d'achat

$$1 \xrightarrow{\quad \times 2/5 \quad} 2/5$$

et l'ensemble d'arrivée est formé par conséquent des gains.

C'est l'occasion pour les élèves de reprendre les formulations déjà rencontrées :

- . pour un achat de 1 le gain est $2/5$
- . lorsque l'achat est 5 le gain est 2 veut dire que le gain est 2 pour [un achat de] 5
- . le gain est [2 pour 5] (prix d'achat)
- . $2/5$ est le gain, il faut le multiplier par 5 pour trouver 2 fois le prix d'achat :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2/5 \\ \times 5 & & \times 5 \\ 5 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

* Les élèves produisent en réponse des schémas tels que :

- . Prix d'achat $\xrightarrow{\quad \times 2/5 \quad}$ gain
- . Poids du blé $\xrightarrow{\quad \times 4/5 \quad}$ Poids de farine blanche

.../...

- . Prix de vente $\frac{x}{3/8}$ → 1er versement
- . Longueur du rectangle $\frac{x}{2/3}$ → largeur

REMARQUES :

1) Le nombre de départ multiplié par le nombre donnant l'application est égal au nombre d'arrivée. Alors que le nombre de départ s'obtient en divisant le nombre d'arrivée par la fraction, distinguer départ et arrivée est donc bien lié à la compréhension du produit de deux fractions ou de deux nombres.

2) Les enfants doivent interpréter directement les formulations il ne faut pas enseigner formellement des "algorithmes" pour obtenir le bon résultat. De nombreux exercices et des traductions dans les différentes formulations, accompagnés d'arguments de toutes sortes (la plupart, particuliers à l'exemple choisi, dont non généralisables) permettront de donner du sens aux formulations culturelles qu'ils rencontreront (et dont certaines sont assez illogiques).

De toute façon cette étude va être reprise dans le module 14 où, avec la composition des applications, il sera possible de récupérer le sens traditionnel ($3/4$ c'est diviser par quatre puis multiplier le résultat par 3).

c) Déroulement (suite) : Formulations de questions et de problèmes ; recherche des renseignements complémentaires nécessaires.

Les élèves proposent, pour chacune des situations énoncées ci-dessus, plusieurs problèmes obtenus en ajoutant des questions :

Par exemple, (pour la situation 2), les enfants peuvent demander :

- le poids de farine que l'on obtient
- le poids de blé qu'il a fallu.

Mais alors ceci suppose que l'on connaît le poids de blé dans le premier cas, le poids de farine dans le deuxième.

Les enfants n'éprouvent aucune difficulté à poser ces questions grâce à leur familiarité avec les tableaux. Néanmoins, cette activité est l'occasion de remarques intéressantes sur la pertinence des informations et des questions.

Exemple : "Une voiture a fait 100 km et son réservoir est aux trois-quarts vide".

.../...

. Si l'on ajoute que le réservoir était plein au départ, alors on peut demander combien on peut faire encore de kilomètres :

$\frac{3}{4}$ de réservoir \longrightarrow 100 kms

$\frac{1}{4}$ de réservoir \longrightarrow (100 : 3) kms

Comme il reste $\frac{1}{4}$ de réservoir, on pourra donc faire 33 kms.

. Mais si au lieu de cette première information, on dit qu'il reste 20 litres d'essence, alors c'est la capacité du réservoir qu'on peut demander:

$\frac{1}{4}$ de réservoir \longrightarrow 20 l.

$\frac{4}{4}$ ou le réservoir plein \longrightarrow 20 x 4 = 80 l.

(et dans ce cas, le nombre de kilomètres ne sert plus à rien).

REMARQUES POUR LE MAITRE :

i) Les élèves rencontrent parfois des difficultés à identifier les trois éléments de l'application.

.L'ensemble de départ ; la chose dont "on prend une fraction et qui, placée avant dans le schéma fonctionnel est le plus souvent nommée après la fraction, comme dans tous les exemples ci-dessus et parfois difficile à identifier :

Exemples : "Le réservoir est vide aux $\frac{3}{4}$ "

"Un employé gagne une somme, il en économise les $\frac{3}{40}$..."

.La correspondance c'est-à-dire la manière de trouver l'image d'un nombre donné. De façon classique $\frac{3}{4}$ décrit l'opération "diviser en quatre puis multiplier par 3" que nous décrivons dans le module 12, ici l'enfant dit qu'à 1 on fait correspondre $\frac{3}{4}$ sans se référer à une opération quelconque pour "passer" de 1 à $\frac{3}{4}$.

Nous évitons ainsi quelques difficultés liées :

- à l'impossibilité de faire réellement le partage envisagé
- à une représentation trop concrète (prendre les $\frac{5}{4}$ d'une somme !)
- ou à la complexité des opérations concrètes envisagées.

Mais l'identification a priori de l'ensemble d'arrivée n'en devient que plus nécessaire.

. L'ensemble d'arrivée : L'ensemble des valeurs qui sont "une fraction" d'une autre est parfois d'autant plus difficile à distinguer que la langue française permet la confusion constante entre une opération et son résultat une application et son image, une action ou un fait et l'état qui en est la conséquence (le mariage a eu lieu à telle date et a duré 20 ans !).

.../...

Le langage des fractions suppose "évidente" la manière d'effectuer l'application linéaire.

- ii) Nous supposons que le schéma peut être fait par les élèves avant que l'on connaisse la question posée et indépendamment d'elle en ne se servant que du langage et de la représentation de la situation de référence. Nous supposons ensuite que la question peut être représentée avant et indépendamment de la solution à produire.
- iii) Les élèves sont donc invités à poser les questions et à inventorier les questions possibles :
- . recherche de l'image (la fraction d'une quantité)
 - . recherche de l'objet (la quantité dont on connaît la fraction)
 - . recherche de l'application (la fraction prise - ou le rapport de deux grandeurs). Les questions vont justifier la suite de la leçon.
- iv) Les élèves constatent qu'ils ne peuvent "rien calculer" s'ils ne connaissent pas la quantité ou le nombre dont ils "prennent une fraction" mais ils peuvent faire le tableau, tout comme ils peuvent dessiner un rectangle dont la largeur est les deux tiers de la longueur.

11.1.3. Calcul avec les "fractions-applications"

a) Calcul de l'image : L'enseignant propose aux enfants les problèmes suivants :

1 - On achète 6 kg de fruits pour faire de la confiture. Ces fruits donnent les $\frac{2}{3}$ de leur poids en jus. On ajoute un poids de sucre égal au poids de jus.

Quel poids de sucre doit-on acheter ?

2 - Le coton rétrécit au lavage : il perd les $\frac{2}{9}$ de sa longueur. Si une pièce de ce tissu mesure 6,75 mètres, quelle sera sa longueur après lavage ?

3 - Le lait donne le $\frac{4}{25}$ de son volume en crème, quel poids de crème obtient-on avec $\frac{3}{4}$ de litre de lait ?

b) Mathématisation avec les enfants.

L'enseignant invite les enfants à faire des remarques mathématiques sur les problèmes qu'ils viennent de faire. Certains indiquent qu'on a calculé une fraction d'un nombre entier⁽¹⁾, puis d'un nombre décimal⁽²⁾ enfin d'une fraction⁽³⁾.

L'enseignant fait préciser : "quelle opération avez-vous faite pour prendre les $\frac{2}{3}$ d'un nombre ?

Les enfants disent : "on a multiplié le nombre par $\frac{2}{3}$ "

.../...

Par quelle opération peut-on décrire l'application "prendre les $\frac{2}{3}$?" Par rapprochement avec l'activité 10.1 (produit de 2 fractions), les enfants proposent :

$$1 \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{2}{3}$$

L'enseignant alors encadre :

Prendre une fraction c'est multiplier par cette fraction

c) Calcul d'un nombre dont on connaît une fraction

- Pour un repas de fête, on achète un rôti de 3,6 kg. Après avoir été désossée et cuite, cette viande perd les $\frac{2}{9}$ de son poids.

Après cuisson, on veut obtenir un rôti de 2,1 kg. Quel poids de viande doit-on demander au boucher ?

poids avant cuisson	$\xrightarrow{\times \frac{2}{9}}$	perte de poids
	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$	$\frac{2}{9}$

Poids avant cuisson	$\xrightarrow{\times \frac{2}{9}}$	perte de poids
x9	$\left(\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\hspace{10em}} \frac{2}{9} \\ 9 \xrightarrow{\hspace{10em}} 2 \end{array} \right)$	x9

Poids avant cuisson	$\xrightarrow{\times \frac{7}{9}}$	Poids après cuisson
9	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$	7

Poids avant cuisson	$\xrightarrow{\times \frac{7}{9}}$	Poids après cuisson
9	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$	7
		$\downarrow \times 3$
		21
		$\downarrow : 10$
		2,1

Poids avant cuisson	$\xrightarrow{\times \frac{7}{9}}$	Poids après cuisson
x3	$\left(\begin{array}{l} 9 \xrightarrow{\hspace{10em}} 7 \\ 27 \xrightarrow{\hspace{10em}} 21 \end{array} \right)$	x3
:10	$\left(\begin{array}{l} 2,7 \xrightarrow{\hspace{10em}} 2,1 \end{array} \right)$:10

L'enseignant demande quelle est l'opération correspondante à cette application.

9	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$	7
1	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$	$\frac{7}{9}$
	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$	
	$\xrightarrow{\hspace{10em}}$	

.../...

Si on veut retrouver le schéma habituel, on doit mettre l'image à droite, la fraction calculée à droite, le café torréfié à droite.

$$\begin{array}{ccc} \text{café vert} & & \text{café torréfié} \\ 1 & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \frac{18}{21} \end{array}$$

L'application est $\times \frac{18}{21}$ en la simplifiant on trouve :

$$\frac{18}{21} = \frac{6 \times 3}{7 \times 3} = \frac{6}{7}$$

vi) L'application qui fait correspondre

$$21 \xrightarrow{\hspace{10em}} 18$$

est $\times \frac{18}{21}$, prendre les 18/21 des valeurs de l'ensemble de départ.

Prendre a/b d'un nombre ou le $\times a/b$, c'est calculer l'image de ce nombre par l'application $b \longrightarrow a$.

11.1.4. Formulation des applications linéaires en terme de fractions. Simplification des fractions.

a) Fractions simples

"Pouvez-vous maintenant reprendre des applications linéaires que nous avons rencontrées dans les leçons précédentes et dire si elles consistent à prendre une fraction des nombres de départ, et laquelle ? "

b) Déroulement :

Les élèves évoquent les applications linéaires connues, généralement en rappelant leur "signification" par exemple "la reproduction de l'optimist", puis, soit le nombre qui représente l'application.

Exemple : $\xrightarrow{\times 0,5}$

. Soit les ensembles que l'application met en relation. Exemple : le modèle et C ou le modèle et F.

. Soit un élément du modèle et son image : exemple : le côté du pavillon $4 \longrightarrow 3$ ou C.

Certains élèves choisissent aussitôt des nombres entiers le plus petit possible. Cela permet des formulations directes, immédiates.

Exemples :

Sur l'image C les longueurs sont les 3/4 des longueurs sur le modèle.

.../...

L'application du modèle vers E est $\times \frac{5}{4}$.

Pour dessiner E il faut prendre les $\frac{5}{4}$ des longueurs du modèle.

La reproduction $\times 0,5$ consiste à prendre $\frac{1}{2}$ (ou la moitié) des longueurs.

Le nouveau puzzle était les $\frac{7}{4}$ du modèle...

La plupart prennent bien des applications linéaires mais les désignent à l'aide de nombres quelconques qu'il faut transformer en nombres entiers les plus petits. Soit avant (en particulier si les nombres sont décimaux ou s'ils sont des fractions) soit après la formation de la fraction. La simplification de la fraction est reconnue comme la recherche des correspondants les plus petits :

Exemples : $\times 0,75 = \times \frac{75}{100} = \times \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \times \frac{3}{4}$

. $4 \longrightarrow 6$ c'est $2 \longrightarrow 3$ c'est $\times \frac{3}{2}$

. $3,2 \longrightarrow 5,6$ c'est $32 \longrightarrow 56$ c'est $4 \times 8 \longrightarrow 7 \times 8$

c'est donc $4 \longrightarrow 7$ donc $\times \frac{7}{4}$ ou $\times 1,75$

ou encore $\frac{56}{32} = \frac{4 \times 8}{7 \times 8} = \frac{4}{7} = 1,75$.

Très souvent les élèves calculent directement en nombre décimal et les fractions formulées sont des fractions décimales.

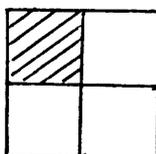
11.1.5. Fractions directes.

a) Consigne :

Trouvez différentes façons de hachurer $\frac{1}{4}$ de sa surface, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{7}$...
Prouvez la validité de votre solution en calculant la surface hachurée dans le cas où le carré mesure 20 cm de côté.

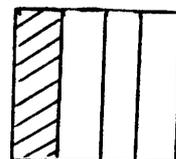
b) Déroulement :

. Les propositions : les premières réponses sont celles que fournit la culture des enfants : Généralement :



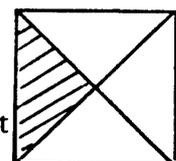
(a)

parfois



(b)

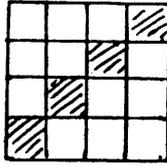
exceptionnellement



(c)

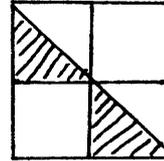
.../...

Le maître relance la question éventuellement en proposant :



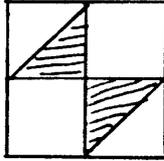
(d)

ou

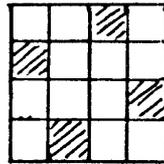


(f)

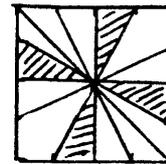
Les enfants peuvent alors inventer :



(g)

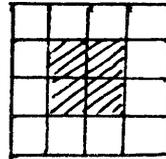


(h)



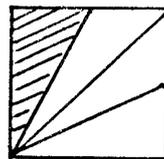
(i)

La solution :



(j)

fait souvent naître des commentaires intéressants ainsi que celle-ci :



(l)

. Les preuves : en fait, ces propositions ne peuvent être examinées que sous la condition que les élèves connaissent :

Le calcul de la surface du carré pour les exemples (a) (d) (h) (i).

Exemple (a) :

Tout le carré
 $20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$

la surface hachurée
 $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$

400 $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ 100

4 $\xrightarrow{\hspace{10em}}$ 1

donc

$\xrightarrow{\hspace{10em}} \times \frac{1}{4}$

.../...

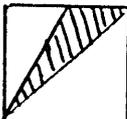
ou bien les superpositions de figures

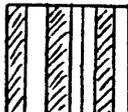
Les élèves qui remarquent que $\frac{1}{4}$ c'est diviser par 4 (ils peuvent le faire en tant que division dans les entiers) proposent souvent de reporter 4 fois le morceau hachuré pour recouvrir la surface. Le procédé, sans calcul est valable pour (b) (c) (d) (f) (g) (h) , mais pas pour j ni pour i ni pour l

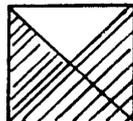
ou bien le calcul de la surface d'un triangle pour les cas i, j, l.

REMARQUE: pour le cas l  ici la partie hachurée

est bien $\frac{1}{4}$. Alors ici  la partie blanche

est $\frac{1}{2}$ et sa moitié  est aussi $\frac{1}{4}$.

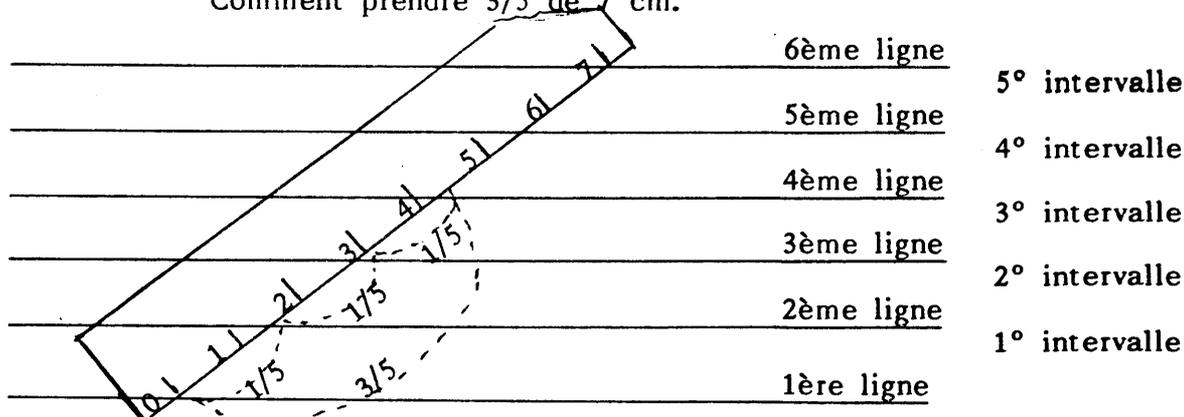
Pour $\frac{3}{7}$ les solutions sont beaucoup moins nombreuses 

Pour $\frac{3}{4}$ les élèves utilisent l'égalité bien connue $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$ 

c) Fractions de longueurs

1. Les élèves s'intéressent à ces partages directs de figures. L'instituteur leur annonce qu'ils peuvent faire avec une règle graduée très finement et une feuille de papier quadrillé d'école un abaque pour diviser par 2, 3, 4, 5, 6, 7... Et pour prendre des fractions simples des longueurs comprises entre 5 et 20 cm. Il laisse les élèves interroger leur famille, ou dans les livres, ou réfléchir et quelques jours plus tard, leur montre la méthode de Thalès :

Comment prendre $\frac{3}{5}$ de 7 cm.



Réponse 4,2

.../...

2. Rapports scalaires.

Par quelle fraction faut-il multiplier un nombre donné pour en trouver un autre donné lui aussi ?

Cette question peut être déjà posée (et déjà résolue par certains élèves). Elle sera étudiée dans le module 11, mais l'enseignant peut lancer ce défi intellectuel à l'avance.

11.2. POURCENTAGES

11.2.1. Pourcentages.

a) Consigne : "D'un minerai de fer, on extrait du fer et on obtient 18 pour cent de son poids.

Pouvez-vous montrer quelle application représente cette expression et comment on peut trouver le poids de fer extrait de 550 kg de minerai.

Trouvez d'autres manières d'exprimer cette application".

L'enseignant peut rappeler que 18 pour cent exprime une correspondance et qu'on a déjà rencontré cette expression dans les fractions.

b) Déroulement : Les enfants produisent des formulations connues. Ils précisent : "dans chaque tas de 100 kg de minerai de fer, on peut extraire 18 kg de fer. Pour 200 kg, 2 fois 18 kg... 18 pour cent veut dire que c'est proportionnel.

<u>Poids du minerai de fer (kg)</u>	<u>Poids du fer (kg)</u>
100	18
c' est $x \frac{18}{100}$ (dix huit centièmes) ou $x 0,18$	
Il faut prendre les dix-huit centièmes... etc et pour 550 kg :	
500	5 x 18 = 90
50	9
550	99

11.2.2. Situations de référence

a) Cherchez d'autres exemples (d'applications linéaires) que l'on désigne par des expressions comme "18 pour cent".

b) Les enfants trouvent une foule d'exemples ; à chacun d'eux le maître demande de traduire la situation par un tableau et au besoin aide l'élève à présenter son exemple :

. 45 pour cent de matières grasses dans le fromage

. 100 pour cent de polyester dans un vêtement

.../...

- . 80 pour cent de coton
 - . 40 pour cent de chicorée
 - et 60 pour cent de café
- } dans un produit
- . soldes de 15 pour cent ou de 20 pour cent...

Il font également allusion aux sondages qu'ils entendent à la télévision ainsi qu'au livret de caisse d'épargne. Pour ce dernier exemple, ils ne connaissent pas, pour la plupart, le vocabulaire qui leur permettrait de s'exprimer : taux, intérêt, capital. Ce peut être l'occasion de l'introduire (sans exiger, bien sûr, qu'il soit définitivement connu et maîtrisé).

c) Conclusions

Les pourcentages sont seulement des fractions à dénominateur 100. Ils jouent un rôle intermédiaire entre les fractions simples et les décimaux.

Ces fractions ont toutes le même dénominateur, ce qui permet de les comparer, de les additionner ou de les soustraire.

Elles permettent d'exprimer un plus grand nombre de fractions que les petites fractions ordinaires, par exemple les $\frac{1}{4}$ ou les $\frac{1}{5}$...

Pour la précision nécessaire à bien des métiers, ces fractions suffisent.

On peut s'en servir presque comme des nombres entiers et pour le montrer, on remplace les dénominateurs par un signe spécial: %

$$\frac{3}{100} = 3 \%$$

d) Exercices :

Exprimez en pourcentages :

- le poids de sucre, pour la confiture, est les $\frac{3}{4}$ du poids des fruits
- le gain est les $\frac{2}{5}$ du prix d'achat
- le blé donne les $\frac{4}{5}$ de son poids en farine
- le nouveau puzzle est les $\frac{7}{4}$ du modèle.

11.2.3. Exercices

a) "Prendre" un pourcentage :

- . Sur une boîte de camembert, on lit : 40 % de matières grasses.
- .../...

Quelle est la quantité de matières grasses contenue dans un fromage de 250 grammes ?

. L'air contient 21 % d'oxygène. Quel est le volume d'oxygène contenu dans 100 litres d'air ? 500 litres d'air, 10 l. d'air ?

. Un libraire fait une remise de 25 % à un directeur d'école. Celui-ci achète une série de 45 livres à 50 F. l'un.

Combien paiera-t-il ?

. Un marchand de fruits et légumes achète 145 kg de foies à 4,5 F. le kg. Il les revend avec un bénéfice de 32 % du prix d'achat.

Quel est le prix de vente total ?

b) Trouver le départ (quantité soumise au pourcentage)

. Les betteraves donnent 35 % de leur poids en sucre. Si on obtient 150 Kg de sucre, quel poids de betteraves a-t-il fallu ?

. Un commerçant me fait un rabais de 5 % sur un imperméable. Il paie cet imperméable 513 F. Combien valait-il ?

. La population d'une grande ville a augmenté de 4 % en 2 ans. Elle est maintenant de 37 180 habitants. Combien comptait-elle d'habitants il y a 2 ans ?

c) Calcul du pourcentage

. Un boeuf de 650 kg a donné 390 kg de viande de boucherie. Quel pourcentage de l'animal vivant cela représente-t-il ?

. Dans une assemblée, on compte 182 adultes et 18 enfants. Quel est le pourcentage d'enfants de cette assemblée ?

. Une pièce de tissu de 25 mètres perd 0,5 m. après lavage. Quel pourcentage de la longueur représente ce rétrécissement.

11.2.4. Calcul du pourcentage

REMARQUE POUR LE MAITRE :

Le calcul des pourcentages traité ci-dessus comme de simples exercices peut être conçu comme une deuxième introduction de la notion, afin de donner une "deuxième chance" aux élèves que l'exemple "introductif" aurait laissé en difficulté (On peut supposer

.../...

que certains élèves n'avaient ni entendu les remarques de la leçon précédentes, ni une connaissance "culturelle" des pourcentages). Il est nécessaire à la fois que l'enseignant exige un réinvestissement de ce qu'il a enseigné ou de ce que les enfants ont appris hors de l'école et qu'il n'en fasse pas une condition incontournable pour les élèves. Inversement, si offrir plusieurs occasions d'accéder directement aux notions est un souci constant de l'enseignant, cela ne doit pas aboutir à un désengagement cognitif de l'élève qui se contente alors de recommencer éternellement la première initiation. L'enseignant doit exercer une pression mesurée mais constante sur les élèves pour qu'ils sachent ce qu'ils sont censés savoir. Ici, les élèves doivent savoir deviner qu'on leur montre une nouvelle fois la définition des pourcentages.

a) Consigne : "Pour obtenir 8 litres de crème, il faut 50 litres de lait".

Placez ce renseignement dans le tableau ci-dessous et complétez ce tableau de proportionnalité.

quantité de lait					125		250	
quantité de crème	4	2	10	16				100

b) Déroulement : Les enfants placent 8 et 50 dans l'une des colonnes vides (8 dans la rangée des quantités de crème, 50 dans celle des quantités de lait), puis ils font les calculs en utilisant les méthodes qui leur sont familières.

i) 1ère méthode

quantité de lait	25	12,5	62,5	100	125	50	250	625
quantité de crème	4	2	10	16	20	8	40	100

Diagramme illustrant les opérations effectuées pour compléter le tableau de proportionnalité :

- Opérations sur la ligne "quantité de lait" : $\times 2$ (de 25 à 50), $\times 5$ (de 50 à 250), $\times 2$ (de 125 à 250), $\times 5$ (de 250 à 625).
- Opérations sur la ligne "quantité de crème" : $:2$ (de 20 à 10), $\times 2$ (de 10 à 20), $\times 5$ (de 20 à 100), $:2$ (de 40 à 20).

$$250 = 200 + 50 \text{ (lait)}$$

$$\quad \downarrow$$

$$\quad (2 \times 16) + 8 \text{ (crème)}$$

$$10 = 8 + 2 \text{ (crème)}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$625 = 50 + 12,5 \text{ (lait)}$$

.../...

$$125 = 100 + 25$$

$$20 = 16 + 4$$

ii) 2ème méthode : Cette méthode consiste :

- à trouver l'application qui permet de passer de la quantité de lait à celle de crème, ou inversement, en mettant en oeuvre les découvertes faites dans l'activité précédente : le nombre d'arrivée divisé par le nombre de départ correspondant, ce qui donne :

$$\text{soit } 25 : 4 = 6,25 \text{ dans le 1er cas}$$

$$\text{ou } 4 : 25 = 0,16 \text{ dans le 2ème cas.}$$

- puis à multiplier chaque quantité de lait par 0,16 pour obtenir la quantité de crème correspondante et chaque quantité de crème par 6,25 pour obtenir la quantité de lait correspondante.

c) Correction collective

(L'enseignant procède comme à l'habitude à une correction collective et à un recensement de toutes les méthodes utilisées par les enfants. Ces méthodes sont discutées, approuvées si elles sont correctes, rejetées si elles ne donnent pas des résultats exacts).

d) Définition des pourcentages par les élèves.

L'enseignant demande quels seraient les nombres les plus faciles pour désigner cette correspondance. Il peut même leur demander d'expliquer, d'exposer, ou de définir eux-mêmes les pourcentages.

Les élèves entourent 16 et 100 et proposent des formulations "100 litres de lait donne 16 litres de crème"

le lait donne de la crème

$$100 \text{ —————> } 16$$

Le lait donne 16 litres de crème pour 100 litres de lait.

Le lait donne 16 pour 100 de crème

quantité de lait $\times \frac{16}{100}$ quantité de crème

Il faut prendre les 16/100 de la quantité de lait, etc... pour obtenir la quantité de crème correspondante. La quantité de crème est les 16 % de la quantité de lait, etc...

Quelques autres élèves s'intéressent à l'autre nombre 100 en essayant de formuler la correspondance.

100 litres de crème nécessitent, exigent, demandent...(?) 625 litres de lait.

Pour avoir 100 litres de crème, il faut 625 litres de lait : la crème

"demande" 625 pour 100 de lait !!

.../...

e) Difficultés des élèves.

Le pourcentage est plus difficile à formuler dans un sens que dans l'autre : c'est que le vocabulaire utilisé pour l'introduire évoque des opérations matérielles : prendre, donner, ... ou logiques nécessitent, exige, ... ces formulations sont plus commodes lorsqu'elles évoquent des opérations qui suivent l'ordre normal du temps que lorsqu'elles évoquent une remontée dans la chronologie.

De toute façon, des expressions comme :

"le lait donne 16 % de son poids en crème" et

"la crème provient des 625 % de son poids en lait"

sont loin d'être symétriques.

Il faut donc admettre que les élèves rencontrent des difficultés qui ne sont surmontées qu'avec une familiarisation des expressions et des situations de référence.

11.2.5. Additions et soustractions de pourcentages.

Nous avons introduit les pourcentages comme les fractions archimédiennes en tant qu'applications linéaires. Ce choix facilite une certaine approche mais tend à en dissimuler une autre : Très souvent le pourcentage, comme les fractions sont utilisées pour exprimer des mesures lorsqu'il existe ce que l'on appelle "une condition d'échelle" c'est-à-dire lorsqu'on veut rapporter ces mesures à celle d'un tout qui tout en étant finie (généralement 1) ne sera pas dépassée :

Exemple : en probabilité, la mesure de la certitude est 1. Un événement peut être probable à 99 % (0,99), mais pas à 101 %!! à 100 % il est sûr c'est tout.

"Les opérations les plus courantes deviennent alors des additions et des soustractions de ces applications linéaires et notamment le calcul du pourcentage restant.

Ces opérations sont très simplifiées par l'emploi des pourcentages lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le tout ou la chose dont on prend des fractions.

a) Un commerçant accorde les conditions de paiement suivantes : le client doit payer 10 % de la somme à la commande, 30 % à la réception de la marchandise, le reste en trois paiements égaux, un par mois après la livraison.

.../...

Pour faciliter les calculs de ses clients, il décide de faire un tableau indiquant les différents versements pour les prix de vente suivants : 3800 F., 4200 F., 6700 F., 1200 F.

Quel pourcentage du prix d'achat reste-t-il à payer par le dernier versement ?

Les élèves peuvent découvrir :

- 1) qu'il est plus économique de calculer directement les pourcentages correspondants aux traites que de calculer sur les nombres
- 2) et qu'on obtient le même résultat

b) Le maître pose alors une question :

"peut-on ajouter des pourcentages ? A quelle condition ?"

Il faut, si l'on ajoute des % que ce soit des pourcentages d'une même quantité.

.../...

11.3. CORRESPONDANCES ENTRE MESURES

11.3.1. Correspondance entre deux grandeurs de même espèce : Echelles.

a) Matériel :

* Différentes cartes de la région où vivent les enfants, à des échelles différentes :

Exemples : (échelle 1/285000) - carte physique Aquitaine (Edition MDI)

(échelle 1/200000) - carte Michelin n° 71

(échelle 1/1100000) - carte de "Bison futé"

(échelle 1/500000) - Guide de la route (Sélection du Reader's Digest)

Il faut compter une carte par groupe de 2 ou 3 enfants.

* Un trajet assez simple a été choisi par le maître, par exemple Cap Ferret (la pointe) - Pauillac (88 km) et sur toutes ces cartes (précédemment énumérées) les indications des distances réelles le long de ce trajet ont été effacées (à l'aide d'une goutte de blanc à correction, par exemple).

* 5 à 6 épingles à tête

* 50 cm de ficelle fine

* 1 feutre

* 1 double décimètre

par groupe

b) Présentation de la situation

* Les enfants sont par groupes de deux ou trois

* Ils choisissent, avec le maître, un trajet commun, familier à la plupart d'entre eux si possible (et différent de celui qui a été retenu par le maître) Par exemple : Fature -Pointe de Grave (121 km)

* Ils décrivent ce trajet, repèrent les symboles et les expliquent (oralement bien entendu, avec l'aide de l'enseignant).

* Celui-ci demande ensuite à chaque groupe :

- de calculer la longueur de ce trajet commun sur le terrain, indiquée sur la carte (et qui doit être la même pour tous)

- de mesurer ce trajet sur la carte à l'aide de la ficelle fine et des épingles. On constate que ces longueurs ne sont pas les mêmes dans tous les groupes.

c) Consigne :

"Chaque groupe va, maintenant, calculer la longueur réelle du trajet :
"Cap Ferret (pointe) - Pauillac".

d) Déroulement :

Dans tous les groupes, les enfants mesurent avec la ficelle le trajet indiqué par le maître. Puis ils inscrivent dans un tableau :

- (1) la longueur de la ficelle relative au trajet qu'ils ont choisi ensemble (cf b)
- (2) la longueur réelle de ce trajet qu'ils ont calculée sur la carte (cf b)
- (3) la longueur de ficelle relative au trajet : "Cap Ferret (pointe) - Pauillac" qu'ils viennent de mesurer.

Ils mettent, sans difficulté, les deux premières mesures en correspondance, la troisième sous la première mais certains sont embarrassés pour donner un nom aux deux grandeurs proportionnelles. Quelques-unes trouvent des formulations souvent maladroites du genre : "les kilomètres sur la route", "les kilomètres sur la carte"... ou "longueur du trajet" pour les deux grandeurs.

L'enseignant les aide à formuler correctement ce qu'ils veulent dire et un consensus se fait dans la classe : on appellera "distance réelle" ou "longueur réelle du trajet" le nombre de kilomètres indiqué sur la carte et "distance sur la carte" ou "longueur du trajet sur la carte" la longueur de la ficelle. Les tableaux se présentent alors ainsi :

. Par groupe (carte Michelin n° 71)

distances sur la carte			distances réelles	
Facture - Pointe de Grave	59	→	121	
Cap Ferret - Pauillac	43,2	→		

puis les enfants ajoutent toujours les unités correspondantes à chaque grandeur :

.../...

Distances sur la carte (cm)	Distances réelles (km)
Facture Pointe de Grave 59	121
:9	:59
1	2,05
Cap Ferret - pauillac 43,2	88,56
	x43,2

Ils remarquent que dans ce cas l'application est (x2,05)

Ils écrivent donc 88,56 en face de 43,2.

. Dans un autre groupe, qui travaille sur le guide de la route (sélection du reader's digest), on obtient :

Distances sur la carte (cm)	Distances réelles (km)
Facture - Pointe de Grave 22,6	121
Cap Ferret - Pauillac 16,2	

Pour faire les calculs, ils multiplient les 2 premières mesures par 10.

Distances sur la carte (cm)	Distances réelles (km)
Facture - Pointe de Grave 22,6	121
x10	x10
226	1210
:226	:226
1	5,35
16,2	16,2 x 5,35 = 86,67.

e) Conclusion : L'enseignant fait remarquer aux enfants que, sur les cartes, les longueurs du trajet Cap Ferret - Pauillac sont différents selon le type de cartes mais que toutes représentent la même distance sur le terrain.

Puis il leur annonce qu'il va demander d'évaluer plusieurs distances réelles. Les enfants disent qu'il faut calculer les applications pour pouvoir trouver plus vite les images, comme avec l'optimist.

Les différents groupes calculent donc :

$$\begin{array}{l}
 16,2 \xrightarrow{\quad \times 5,35 \quad} \\
 \text{ou } 43,2 \xrightarrow{\quad \times 2,05 \quad}
 \end{array}$$

f) Réflexions sur ces "écritures" (x5,35 ; x 2,05...)

i/ L'enseignant fait remarquer que :

$$16,2 \xrightarrow{\quad \times 5,35 \quad} 86,67$$

.../...

L'enseignant fait remarquer que sans indications supplémentaires :

$$16,2 \xrightarrow{\times 5,35} 86,67$$

veut dire que 86,67 cm correspondent à 16,2 cm.

Or, on voudrait dire que 86,67 représentent des kilomètres et 16,2 des centimètres.

Il suffirait de préciser les unités correspondant à chaque colonne. Mais lorsque l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des grandeurs de même type (longueurs, masse, prix...etc) il est d'usage d'utiliser les mêmes unités dans les deux colonnes. Car 86,67 km n'est pas 5,35 fois plus grand que 16,2 cm. Comment savoir alors combien de fois elle est plus grande ?

ii) Les enfants comprennent tout de suite qu'il faut transformer 86,67 km en centimètres, et sur le tableau, on écrit :

$$16,2 \text{ cm} \xrightarrow{\quad\quad\quad} 8667000 \text{ cm}$$

L'application n'est donc pas $\times 5,35$ mais $5,35 \times 100000 = 535000$

$$16,2 \text{ cm} \xrightarrow{\times 535000} 8667000 \text{ cm}$$

iv) L'enseignant leur demande d'inscrire dans le tableau la longueur sur le terrain correspondant à 1 cm sur la carte et il fait ajouter 1 cm sur les différents tableaux (si ce n'était déjà marqué). Ce qui donne pour un groupe :

Distance sur la carte (<u>cm</u>)	Distance réelle en <u>cm</u>
16,2 cm	8667000 cm
1 cm	535 000

ou pour un autre groupe :

Distance sur la carte (<u>cm</u>)	Distance réelle (<u>cm</u>)
43,2	88566000
1	205000

g) Définition de l'échelle :

Il dit aux enfants : "l'image de 1 s'appelle "l'échelle". On écrit le plus souvent :

$$1/535000$$

$$\text{ou } 1/205000 \quad "$$

L'échelle ne dépend pas de l'unité choisie à condition que cette unité soit la même sur le terrain et sur la carte.

.../...

h) REMARQUE :

1) Dès que les enfants voient cette écriture de l'échelle, ils disent que "c'est marqué" sur les cartes et ils la cherchent, par groupe, sur la carte avec laquelle ils ont travaillé.

Ils remarquent alors dans certains groupes que l'échelle qu'ils ont trouvée est un peu différente de celle qui est indiquée.

1/535 000 pour 1/500 000
ou 1/205 000 pour 1/200 000.

L'enseignant leur rappelle les difficultés de mesurage qu'ils ont eues avec la ficelle. Ils reconnaissent en effet et admettent que ce n'est pas très précis. Ils comprennent que l'erreur de 35/1000 (1er cas) ou de 5/1000 (2ème cas) peu importante est due à cette imprécision.

2) L'enseignant leur fait rechercher sur toutes les cartes qui sont à leur disposition (celles sur lesquelles ils ont travaillé et d'autres que le maître a apportées) toutes les manières d'indiquer l'échelle. (cette recherche peut se faire à la maison sur les cartes des parents). Ils vérifient que dans tous les cas, il s'agit de l'image de 1 (en centimètres).

11.3.2. Problèmes d'échelles

a) Recherche de la distance réelle

L'enseignant propose alors plusieurs problèmes afin que les enfants distinguent bien chaque fois la longueur réelle, la longueur sur la carte (ou sur le plan) et l'échelle (longueur en cm qui correspond à 1 cm sur la carte).

1. Un trajet mesure 7,5 cm sur une carte dont l'échelle est 1/200000.

Quelle est la longueur réelle du trajet ?

2. Un ingénieur établit le projet de construction d'un canal entre deux rivières sur une carte au 1/50000 ; il mesure la distance qui sépare ces deux rivières sur la carte (en ligne droite) et trouve 38 cm.

Quelle est la distance réelle ?

.../...

3. Un camion miniature "dinky-toy" a une échelle de $1/43$. Ses dimensions sont les suivantes :

Longueur totale : 13 cm

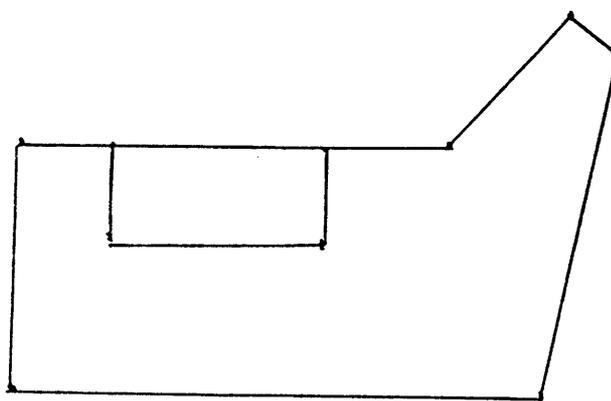
Largeur de la cabine : 3,6 cm

Longueur de la cabine : 5 cm

Hauteur totale : 6 cm.

Quelles sont les dimensions réelles du camion ?

4. Sur le plan cadastral d'une commune à l'échelle de $1/500$, quelles sont les dimensions réelles de cette maison représentée par le rectangle hachuré et de son terrain.



b) Recherche de la longueur sur la carte

1. Entre Bordeaux et Libourne, il y a 38 km. Quelle est la longueur de ce trajet sur une carte au $1/200000$?

2. Sur la carte de France, 1 cm représente 400 km. Fais un trait correspondant à une distance de 500 km.

3. Suite du problème - 2 - dans (a)

La configuration du terrain oblige à construire un canal long de 23km. Quelle longueur aura ce canal sur la carte ?

c) Recherche de l'échelle

1. Sur une carte, 4,5 cm représentent une distance de 9 km. Quelle est l'échelle de cette carte ?

2. Sur une carte 594 km sont représentés par 54 cm. Quelle est cette échelle ?

.../...

3. L'enseignant peut demander aux enfants de trouver à partir de leurs calculs quelle était l'échelle de la carte qu'ils avaient dans chaque groupe. Il leur est alors possible de vérifier si leurs calculs sont corrects.

d) **REMARQUE** : Le problème de Thalès

Même avec les méthodes pédagogiques les moins raffinées, l'introduction de la notion d'échelle ne semble pas présenter pour les élèves d'autres difficultés que de manier des fractions à grand dénominateur.

Nous avons cependant pu observer les limites de la connaissance ainsi acquise par les élèves : c'est un algorithme utilisable, au plus, dans quelques situations stéréotypées et les élèves rencontrent de grandes difficultés à mettre réellement en correspondance le terrain et la carte, à orienter celle-ci, à s'orienter eux-mêmes et à maîtriser concrètement cette relation de similitude qui nous paraît si évidente.

On peut imputer ces difficultés aux insuffisances des élèves dans l'acquisition des relations spatiales ou plus généralement à une "incapacité" à utiliser le savoir acquis comme moyen d'anticipations effectives.

Les leçons proposées ici ont pour objet de lutter contre leur tendance à ne produire le savoir que comme une réponse directe à des questions scolaires. Nous utilisons des situations spécifiques pour favoriser le développement des représentations spatiales des élèves et leur étude en termes de géométrie. Nous ne pouvons pas les exposer ici. Mais il est clair que la linéarité, comme moyen d'anticipation, joue un rôle très important dans la formation de ces représentations spatiales. Ces deux questions doivent être étudiées ensemble.

La linéarité n'est pas une espèce de sous-produit de la similitude "naturelle" entre une image et son modèle. L'élève ne maîtrise vraiment les relations spatiales que lorsqu'il est capable de les structurer à l'aide de ses modélisations, et en particulier les modélisations linéaires.

En fin d'année nous proposons le problème réel suivant :

"Dans le jardin de l'école, au bord de deux allées (convergentes, voir figure 1), nous avons planté deux fanions. Voici un double mètre ; pouvez-vous prévoir la distance entre ces deux fanions ? Vous avez le droit de vous déplacer et de mesurer partout sauf sur la pelouse (voir dessin).

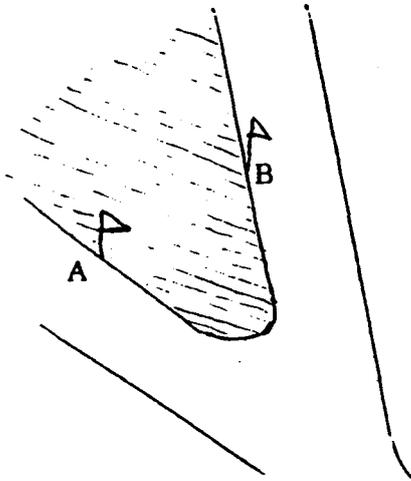


figure 1

Nous vérifierons votre prévision après, en tendant un fil entre les deux fanions et en le mesurant".

La solution consiste évidemment pour un adulte :

- à structurer l'espace à l'aide de points de repères accessibles par exemple (fig. 2) LMNOPQ. Ou plus simplement RST (fig. 3)
- à faire un plan à l'échelle de cette "structure" spatiale
- à mesurer la distance cherchée sur le plan
- à calculer la distance réelle AB correspondante.

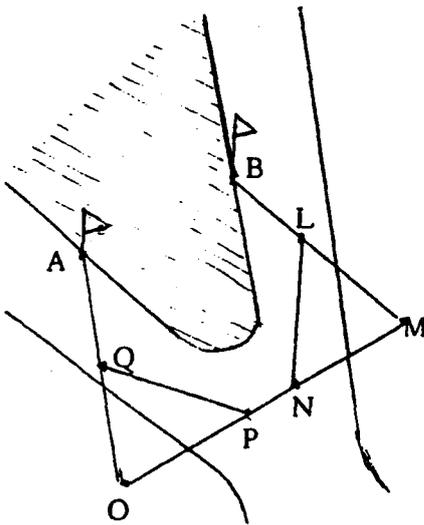


figure 2

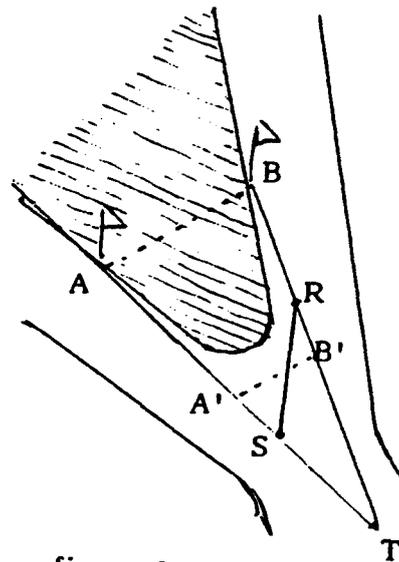


figure 3

Dessiner A'B'T, en fonction "de Thalès" c'est-à-dire avec $A'T/AT = B'T/BT$ (et donc $A'B'//AB$) n'est qu'un raffinement économique de cette méthode qui consiste à faire le plan A'B'T de ABT sur le terrain lui-même en utilisant l'angle T lui-même.

.../...

Après quelques tentatives infructueuses - malgré la suggestion de l'enseignant de faire un plan - les élèves réclament la solution et beaucoup ont du mal à comprendre avant la fin comment la solution surgira de cette opération. (Attention ! SR n'est pas parallèle à AB, et TSR n'est pas un modèle de TAB comme dans le "théorème de Thalès" du secondaire, ce raffinement sera pour plus tard).

Mais une fois vue la solution, ils ont l'impression d'avoir fait une découverte importante. Leurs difficultés dans cette situation sont en partie liées à celles qu'ils rencontrent à passer de la conception de la longueur d'un objet rectiligne à celle de la distance de deux points non reliés matériellement.

11.3.3. Correspondance entre des grandeurs d'espèces différentes

a) Problème : "Je veux mesurer la longueur divers rouleaux de fil de cuivre. Puis-je le faire sans les dérouler ?

Je dispose d'un petit bout de ce fil qui mesure 1,20 m. Je le pèse et je trouve 33,6 g. Trouver la longueur du rouleau".

Les enfants demandent le poids du premier rouleau : "Je pèse ce rouleau et je trouve 2,1 kg".

b) Déroulement de la recherche

Les enfants commencent à faire un tableau mais certains s'inquiètent : "est-ce que c'est proportionnel ?"

L'enseignant répond : "le fil est bien régulier. Je crois que si je coupais 1,20 m de ce fil n'importe où, il pèserait toujours 33,6 grammes !"

Les enfants font le tableau en précisant les deux grandeurs. Ils inscrivent tout de suite les renseignements numériques qu'on leur a donnés.

longueur du fil de cuivre	Poids du fil de cuivre
1,20	33,6

Puis ajoutent les unités fournies par ces renseignements :

longueur du fil de cuivre (m)	Poids du fil de cuivre (g)
1,20	33,6

.../...

Avant d'ajouter le poids total du rouleau : 2,1 kg, dans le tableau, les enfants remarquent que ce poids est exprimé en kg et disent qu'on ne peut pas l'inscrire ainsi, il faut qu'il soit exprimé en grammes : 2100 grammes. Ils obtiennent ainsi le tableau définitif qui va leur permettre de trouver la longueur demandée :

longueur du fil de cuivre (m)	Poids du fil de cuivre (g)
1,20	33,6
12	336
	2100

Ils calculent l'application linéaire par le procédé qui leur est familier maintenant : $336 : 12 = 28$ et ajoutent cette application linéaire sur leur tableau :

longueur du fil de cuivre (m)	Poids du fil de cuivre (g)
1,20	33,6
12	336
75	2100

Diagramme illustrant l'application linéaire : une flèche courbe au-dessus du tableau indique une multiplication par 28 ($\times 28$) de la longueur 12 m pour obtenir 75 m. Une flèche courbe en dessous indique une division par 28 ($: 28$) du poids 2100 g pour obtenir 336 g.

2100 grammes est le poids de 75 mètres de fil de cuivre.

Conclusions :

On ne peut plus représenter ces applications à l'aide seulement d'un nombre comme dans les échelles. Il faut indiquer aussi les unités utilisées pour chaque mesure.

Il faut aussi que toutes les mesures soient indiquées avec la même unité dans chaque ensemble.

11.3.4. Applications différentes - même correspondance; Notation

a) Consigne

Voici le prix de 1,250 kg de rôti affiché par mon boucher : 85 F.
La correspondance est "68 (F par kg)". Exprimez cette même correspondance par différentes applications selon les unités choisies.

b) Pour exprimer une correspondance linéaire on écrit :

- le nom de l'application : nombre d'arrivée sur nombre de départ correspondant

.../...

. La correspondance entre unités : l'unité de l'ensemble d'arrivée sur l'unité de l'ensemble de départ.

Exemples :

Un bateau file 13 noeuds } à l'heure

heure noeuds
1 $\xrightarrow{\quad \times 13 \quad}$

Une machine fabrique 130 pièces } à la minute

mn pièces
1 $\xrightarrow{\quad \times 130 \quad}$

Des oeufs valent 12 F } la douzaine

Nbr de douzaines prix
1 $\xrightarrow{\quad \times 12 \quad}$

Des roses coûtent 6 Francs } pièce

Nbr de roses prix en F
1 $\xrightarrow{\quad \times 6 \quad}$

Un engrais contient 4,5 kilogrammes de potasse } par sac de 50 kg

Nbr.de sacs de 50 kg Poids de potasse
1 $\xrightarrow{\quad \times 4,5 \quad}$

c) Dans le cas du fil de cuivre, exprimez la correspondance que nous avons vue de toutes les façons différentes que vous pourrez.

11.3.5. Correspondances non linéaires

a) Cartes

. Faire un tableau montrant la correspondance entre les côtés des carrés et leur surface.

Cette application est-elle linéaire ?

. Sur un plan à l'échelle 1/100, une pièce est représentée par un carré de surface 2 cm^2 . Quelle est la surface de cette pièce ?

. Sur le plan la surface du dessin d'un champ A est double de celle d'un autre B. Est-ce que le champ A a réellement une surface double de B ?

. Etablir la correspondance entre les surfaces de rectangles sur une carte au 1/10 000, et sur le terrain. La correspondance est-elle linéaire ?

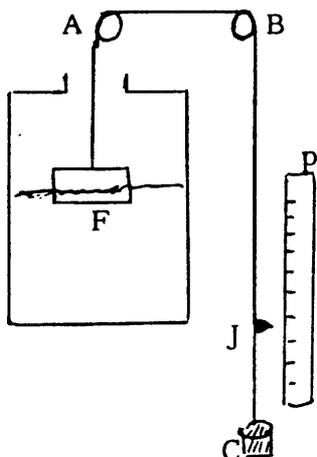
b) Les châteaux d'eau

figure 1

Pour mesurer la quantité d'eau dans certaines citernes on utilise le système ci-contre. F est un flotteur A et B sont des poulies, C un contrepoids qui tend le fil, I un index et P la planche sur laquelle on marquera les quantités d'eau correspondantes (graduation).

Où est l'index lorsque la citerne est vide ?
Lorsqu'elle est pleine ?

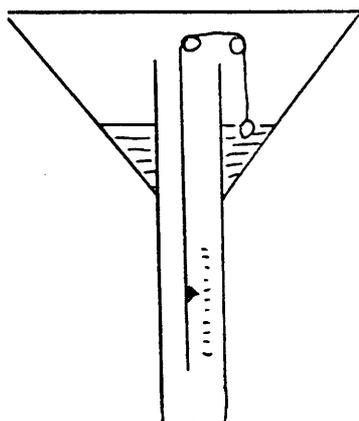


figure 2

Avec une citerne cylindrique, le fabricant a trouvé que l'index baissait de 5 cm lorsqu'on ajoutait 100 litres d'eau.

La citerne contient 80 hl. Quelle est la longueur totale de la graduation ? Quelle est la profondeur de la cuve ?

On utilise le même système pour un château d'eau de la forme suivante (figure 2)

La graduation sera-t-elle linéaire ? Pourquoi ?

Cherche d'autres relations non linéaires : par exemple : la taille et l'âge d'un enfant.

Annexe 2 TEXTES DIVERS

- **Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques en France.....p.1**
- **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques..... p.31**
- **The fragility of knowledgep. 65**
- **Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres Naturelsp. 98**
- **L'effet du glissement métadidactique.....p. 112**
- **Liste de documents internes.....p. 125**

TENDANCES ORIGINALES DES RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES EN FRANCE

G. BROUSSEAU

1. PETIT PANORAMA DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

La didactique (au sens de Comenius) est l'art d'enseigner, c'est-à-dire celui de faire approprier - intentionnellement - par un élève, un savoir constitué ou en voie de constitution.

1.1 - Actions didactiques et recherches en didactique.

Il est assez courant de séparer les activités relatives à cet art en deux grandes branches (diagramme I).
* La première rassemble les activités qui visent à enseigner une connaissance "déterminée". Ces actions didactiques peuvent être directes en ce sens que les décisions de l'enseignant ne transitent pas vers l'élève par l'intermédiaire d'une autre personne, ou indirectes dans le cas contraire. Remarquons que l'activité didactique directe n'implique pas nécessairement la présence de l'enseignant auprès de l'élève: elle peut se faire par l'intermédiaire d'un produit ou d'un matériel "didactique". Les actions indirectes comprennent le plus souvent (mais pas obligatoirement) par exemple, une description plus ou moins précise de l'action didactique dans la mesure où elles visent directement à faire produire ou reproduire une activité d'enseignement: la méthodologie classique, les curriculas, les programmes, ... etc, sont de cette nature.

* La deuxième branche rassemble des activités qui visent d'abord à expliquer les phénomènes d'enseignement. En ce sens,

la didactique est l'étude des phénomènes d'enseignement qui sont spécifiques de la connaissance enseignée sans être réductibles au domaine du savoir auquel elle appartient.

Cette deuxième branche englobe de très nombreux travaux de recherche à propos de l'enseignement d'une connaissance. Leur caractère scientifique est dû au fait que, soit la méthodologie de l'étude, soit l'objet de l'étude, et parfois les deux à la fois, sont empruntés à un domaine ou à une discipline bien connue : le plus souvent la psychologie, la sociologie ou la linguistique mais aussi la logique, les mathématiques ou l'épistémologie.

Mais elle comprend aussi des activités réflexives qui témoignent d'un réel effort de scientification de la didactique, en ce sens qu'il y a création de concepts théoriques spéciaux.

A première vue, la distinction entre ces deux types d'activités paraît assez simple : les premières activités didactiques, visent à enseigner, les secondes activités en didactique à produire des assertions vraies sur l'enseignement.

1.2 - La didactique, champ de recherches scientifiques.

Une étude en didactique, pour ou sur l'enseignement, est donc d'abord caractérisée par un savoir ou une connaissance (par exemple "la fonction linéaire") et un sujet ou un groupe de sujets apprenant (par exemple les élèves de 3ème année du secondaire, cycle court). Elle peut l'être par les particularités du système éducatif - ou du professeur - (par exemple "dans les classes à groupes de niveau"), ou par des particularités du rapport élève-milieu, telles que le choix d'un matériel didactique (par exemple "avec l'aide des calculateurs de poche). Elle peut être encore réduite :

- . par le choix d'une multitude de conditions et de caractères plus ou moins "naïfs" de chacun des systèmes en présence (Par exemple, "le vocabulaire" ou encore "les objectifs de hauts niveaux taxonomiques")
- . ou par l'importation de concepts ayant un statut scientifique dans un domaine voisin connu, (par exemple : "relation entre la rigidité mentale et la résolution des problèmes de géométrie selon l'origine socio-culturelle des élèves"... etc)

.../...

On comprend dans ces conditions qu'il soit presque impossible de présenter la didactique autrement que comme un champ de recherches, peut-être scientifiques mais relevant d'autres domaines et sans objet propre. Le repérage des travaux et le groupement en sujets voisins ne peuvent se faire qu'à partir des structures des disciplines composantes ou des méthodes de recherches : études de comportements, études longitudinales, évaluatives, inventaires de méthodes d'enseignement, ces études étant relatives à un même concept ou à une même notion mathématique, bien sûr, mais même dans ce cas, la liste des variétés d'aspects, de définitions, de langages, de domaines d'utilisation, d'usage... etc, brave tous les efforts de synthèse.

De plus, l'ambition de produire des déclarations sur l'enseignement ayant un statut ou une valeur scientifique, conduit le chercheur en didactique à s'asservir complètement à des problématiques et à des méthodologies déjà reconnues comme scientifiques, mais en fait, étrangères et centrifuges.

1.3 - La didactique, théorie d'une pratique d'enseignement.

Pour échapper à cet éclatement, il apparaît alors que l'on doit revenir aux sources et replacer les études sur l'enseignement dans le cadre d'une action pour l'enseignement.

En fait, ces deux types d'activités sont plus difficiles à distinguer qu'il n'y paraît. Beaucoup de "recherches" par exemple, sont explicitement ou implicitement liées à une action didactique, en ce sens qu'elles doivent, à relativement court terme, se justifier - par une proposition utile à l'enseignement : action didactique, ou production d'un nouveau moyen d'enseignement,

à défaut - par un jugement ou au moins une information, destinés à jouer un rôle, dans les débats du moment, sur la valeur de l'enseignement pratiqué et les moyens de l'améliorer.

Nous trouvons notamment dans ce secteur tous les travaux qui visent à rationaliser l'enseignement et qui

.../...

prennent pour base des conceptions familières aux professeurs ou issues de leur pratique.

Fondamentalement acceptées comme pertinentes, ces conceptions sont seulement "rationnalisées" de façon à permettre leur identification et leur définition, par exemple "le niveau mathématique de l'élève", "la compréhension", "les objectifs", "l'erreur", "l'intuition géométrique", la "connaissance des identités remarquables"... etc. Des travaux d'observation et de statistiques à leur propos tendent à leur donner un statut plus ou moins scientifique, ce qui permet alors de renvoyer aux professeurs des informations intelligibles dont on suppose qu'ils peuvent faire bon usage. Cette assomption des conceptions des professeurs est un bon moyen - mais pas le seul - d'avoir des résultats de didactique à finalité didactique. Nourris et finalisés par une pratique, ces efforts de scientification ont produit des concepts et des théories "originales".

Certaines sont assez peu spécifiques du contenu, comme les taxonomies de Bloom, les "conditions" de Gagné, les classifications d'activités mentales de Guilfort ou de Ausubel. D'autres le sont davantage comme le "processus psychomathématique" de Dienès . Enfin certains travaux dans la mouvance de Piaget ou même de Bruner portent sur des phénomènes ou des processus tout à fait liés à des connaissances mathématiques déterminées.

On trouvera aussi, ici, l'heuristique telle que l'entendaient Polya et ses continuateurs (Kilpatrick) dans les années 60 avec l'"action" correspondante : l'enseignement des "problèmes solving methods".

Toutefois, et peut-être à cause même de leur proximité conceptuelle ou d'objectifs avec la pratique, les travaux de ce type ne développent, dans les meilleurs cas, en didactique théorique, ou bien que des notions très idéologiques, trop générales et pour tout dire métaphoriques, ou bien des notions

had hoc qui n'ont pour mission que de prendre en charge des phénomènes très locaux et très particuliers.

1.4 - La didactique, théorie des phénomènes didactiques.

Bien peu de travaux acceptent de se placer dans la perspective d'une théorie qui aurait pour ambition de prendre comme objet d'étude et de critique l'ensemble des phénomènes didactiques. De tels travaux existent cependant, qui visent à transformer en "science" le champ scientifique éclaté dont nous avons parlé plus haut. Et même si ce projet paraît, à certains, très prématuré, l'importance de l'enjeu et l'originalité des moyens mis en oeuvre à ce jour, méritent une étude particulière et une place à part dans ce panorama. Une des caractéristiques de ce point de vue a été de provoquer un véritable "pas de côté" par rapport aux activités visant l'enseignement afin de les soumettre à des analyses de type systématique et de produire des concepts didactiques propres.

A côté de ce champ de la didactique fondamentale, théorique et expérimentale, et en relation étroite avec lui, se développent :

- * d'une part, des réflexions méthodologiques spécifiques de la didactique - essentiellement l'étude des dépendances, des implications, des modèles et des hiérarchies en didactique.
- * d'autre part, appuyée sur cette théorie, une sorte d'ingénierie didactique qui consiste à réaliser des situations d'enseignement répondant à des caractéristiques définies à l'avance dans le cadre de la théorie. Cette ingénierie a pour but :
 - soit l'enseignement effectif dans le système éducatif
 - soit l'expérimentation ou la recherche, et nous parlerons dans ce cas de phénoménotechnique didactique.

Nous allons exposer cette conception de la didactique dans la deuxième partie de ce texte, mais auparavant nous croyons utile de rappeler deux conditions de son apparition :

- a) Elle s'est développée principalement en France dans les IREM et au CNRS en étroite relation :
 - avec la formation permanente des maîtres
 - avec toutes sortes d'actions didactiques
 - avec des terrains expérimentaux et des observations.

.../...

- b) Elle s'est développée dans la perspective d'un contrôle de la didactique des mathématiques par les mathématiciens - non parce qu'ils sont les plus capables, ni les plus intéressés, mais parce qu'ils sont les premiers à devoir et pouvoir assumer la responsabilité sociale de la vigilance épistémologique nécessaire. Ce sont eux, qui finalement, ont la "responsabilité" de ce qui s'enseigne on s'utilise sous le nom de "mathématique". Cette clause est loin d'être une facilité, aussi bien pour les "didacticiens" que pour les mathématiciens "purs".

2. DIDACTIQUE FONDAMENTALE

Une société transmet les savoirs qu'elle a créés et ceux dont elle a hérité, par différents moyens dont certains sont mis en oeuvre intentionnellement. Elle organise pour cela, à l'intention des "élèves" des situations didactiques qui doivent conduire à la reproduction des comportements et des pratiques qui témoignent de ces savoirs.

2.1 - L'étude des manifestations de connaissance.
Didactique au sens restreint.

L'étude de ces moyens de communiquer "un" savoir paraît donc devoir commencer par l'identification, l'inventaire et le classement des manifestations de connaissances relatives à ce savoir, dans la société-enseignante (en particulier dans la société savante).

Elle pourrait alors se poursuivre par la définition ou l'observation des comportements qui manifesteraient l'acquisition de ce savoir chez le sujet-enseigné. Et il paraît évident, au premier abord, que les manifestations de connaissances devraient être les mêmes dans la société - enseignante et chez les sujets-enseignés, ou, au moins se référer à la même organisation du savoir. Il serait alors possible d'observer ou de concevoir les moyens mis en oeuvre pour obtenir ces comportements, de façon a priori indépendante, en se référant, par exemple, à des théories de l'apprentissage ou du développement... etc.

Ce point de vue paraît d'autant plus fondé que le savoir fonctionne dans la société comme le moyen culturel reconnu, permettant de classer, de décrire et de communiquer les connaissances et les pratiques qu'elle a acquises.

ire.

Dans cette perspective, les réorganisations les plus récentes du domaine de connaissances envisagé, paraissent les plus indiquées, puisqu'elles bénéficient du panorama le plus complet et probablement le plus simplifié, et parce qu'elles sont le plus près possible de la science du moment, but de la transmission didactique.

En fait, cette approche de la didactique par l'identification des savoirs à transformer en objectifs, se heurte à des difficultés qui ont conduit, sinon à la rejeter absolument, du moins à lui chercher des alternatives.

Parmi ces difficultés, nous retiendrons les suivantes :

- difficulté de mettre en correspondance un savoir avec un ensemble de manifestations de ce savoir. Les systèmes proposés, empruntés à divers domaines ou développés spécialement, fournissent des listes de plus en plus longues d'"exercices", mais les moyens de production de ces listes ne sont soumis à aucune contrainte ni à aucune justification.
- difficulté à délimiter un champ conceptuel ou une collection de savoirs fonctionnant ensemble. Les travaux ayant pour but de structurer ce champ, ont conduit, au contraire, à multiplier les caractères pertinents, et abouti à une parcellisation, à un émiettement des manifestations de savoir.

Il faudrait ici faire un bilan de tous les travaux accomplis à la suite des études de Cronbach-Gleser sur la généralisation (cf. Cardinet-Tourneur), sur la dépendance, l'implication ou les hiérarchies de connaissances (Pluvinage, Gras, Lermann).

Mais les procédés factoriels fournissent aux regroupements de connaissances des arguments qui paraissent bien faibles devant les processus différenciateurs ; ceux-ci posent, par exemple, que deux savoirs diffèrent, et donc doivent être visés séparément, si les épreuves qui les opposent sont sensi-

blement différentes (analyse synchronique) ou encore si elles sont réussies par une même population à des dates sensiblement différentes (analyse génétique ou diachronique).

Pour vérifier que la traduction d'un savoir en termes de comportements était correcte, il aurait fallu pouvoir observer que la structure du savoir permettait de bien prévoir les comportements des sujets - par exemple en assurant que les élèves qui avaient acquis tel savoir devaient avoir acquis tel autre ou devaient savoir résoudre tel problème. Le fait que l'apprentissage d'une théorie faciliterait celui de toutes ses applications n'est pas établi de façon générale, ni sa réciproque non plus. De même une relation d'implication entre deux assertions ne paraît pas avoir de relations stables avec leur apprentissage. Ce n'est que dans quelques cas très particuliers que l'apprentissage de l'une apparaît comme pouvant dispenser de celui de l'autre. Il en est de même de toutes sortes de relations logiques et mathématiques qui structurent le savoir "savant". Il en résulte :

- des difficultés à réduire le champ des savoirs par la détermination d'une partie d'entre eux dont l'acquisition entraînerait, ou faciliterait, ou serait l'indice de la connaissance des autres,
- des difficultés à faire correspondre un savoir donné - même sous la forme de comportements ou de manifestations de connaissances - avec des situations d'enseignement qui en assurent l'acquisition.

La difficulté principale n'est pas de "réussir" de façon plus ou moins locale ces limitations ou ces mises en correspondance, mais bien plutôt de fournir des justifications théoriques et expérimentales de ces choix et de prendre ces justifications comme sujet de débats scientifiques.

Dans cette conception restreinte, la didactique accepte le savoir constitué comme le résultat d'une activité qu'elle n'a pas à connaître, et à plus forte raison à théoriser. Elle doit seulement traduire ce savoir en objectifs d'enseignement, puis en apprentissages.

2.2 - La mise en avant de l'épistémologie et de la théorie des situations didactiques.

Dans une autre approche, la didactique va, non seulement se fonder sur une théorie de la connaissance et de la formation des concepts, mais se fonder en elle. Ayant pour objet l'étude des conditions dans lesquelles apparaissent les comportements spécifiques des savoirs considérés, en vue de leur contrôle et de leur reproduction, elle va tenter de prendre directement ces conditions, ces situations comme objet d'étude et comme moyen de déterminer ce qui est comparable ou non, ce qui est reproduit ou non, et ce qui est enseigné ou non. Une situation didactique ne se distingue des situations "naturelles" ou "historiques" permettant l'exercice ou l'apparition de la connaissance, que par leur caractère intentionnel - même si cette intervention d'un tiers change beaucoup de choses, il peut être intéressant de comprendre quoi -

D'ailleurs, l'enseignement et la communication du savoir font partie du procès de constitution des concepts. Ainsi, la situation est renversée. Il s'agit d'appréhender la connaissance par le biais des conditions dans lesquelles elle apparaît, de façon à pouvoir les reproduire au moins approximativement, et par là, de provoquer chez l'élève l'acquisition d'un savoir dont le sens et le fonctionnement soient satisfaisants. Bien sûr, les situations didactiques ne peuvent pas ressembler beaucoup aux situations "historiques" correspondantes. Ce sont leurs effets qui doivent tendre à se ressembler. Il s'agit donc d'accepter cette transposition didactique (Y. Chevallard (22)) comme un effet inévitable et comme un objet d'étude, afin de la contrôler par le choix de situations didactiques convenables et par la détermination de celles de leurs caractéristiques qui sont les plus décisives à ce sujet. Revenons un instant à notre analyse initiale : dans la société, les savoirs se manifestent, non seulement par des déclarations culturelles sur les connaissances, leur structure, leur fonctionnement, leurs interactions, leur usage, leur origine... etc, mais aussi par des modifications et des transformations de certaines activités humaines : pratiques, individuelles, sociales

scientifiques ou scolaires, "contaminées" explicitement ou implicitement par ces savoirs. Il est clair que si les savoirs changent les pratiques, l'inverse est vrai aussi : les questions et les problèmes changent et exigent l'extension ou la modification du savoir. Savoir et pratiques se donnent mutuellement un sens.

La reproduction par l'élève d'une pratique transformée ne peut lui assurer la transmission du sens des connaissances qui ont provoqué la transformation, et, inversement, l'acquisition d'un savoir hors du contexte de pratiques qui lui ont donné son sens, le modifie radicalement. Aussi, parmi les manifestations de connaissances provoquées par l'enseignement, certaines sont tout à fait semblables à celles qui leur ont servi de modèle, et d'autres peuvent être sensiblement différentes. Et il est vraisemblable que ces transpositions didactiques jouent un rôle positif dans les processus de création des connaissances et qu'on ne les annulerait pas sans dommage.

Au lieu de considérer les situations didactiques comme de simples moyens "isolés" de produire des comportements désirés, il faudra donc les considérer à l'intérieur d'une chaîne ou d'un processus formant une petite genèse artificielle du concept, ce processus étant autant le but de l'enseignement que son moyen.

Sans renier aucun des résultats que pourrait produire le premier point de vue (restreint), le second change assez sensiblement la façon de considérer et de juger l'organisation de l'enseignement d'une connaissance. Ici, la didactique fondamentale tend à se fondre dans l'épistémologie à laquelle elle propose un champ expérimental et à qui elle demande la production de concepts spécifiques (certains membres du G.R.D.M^(*)) ont longuement hésité dans les années 74-76 entre le terme d'épistémologie expérimentale et celui de didactique fondamentale pour désigner ce champ d'étude).

.../...

(*) Groupe de recherche en didactique des mathématiques.

Il faut préciser que chaque concept ou chaque secteur des mathématiques a sa propre didactique comme il a sa propre histoire. On ne découvre pas, on n'utilise pas la notion de fonction dans le même genre de rapports avec son milieu que la notion d'angle, par exemple. Mais cela n'empêche pas l'émergence de concepts proprement didactiques ou épistémologiques destinés à permettre la description des situations didactiques.

Avant de nous demander quel bénéfice on peut tirer d'une telle amplification du domaine à traiter, nous allons examiner les conséquences de cette nouvelle approche en ce qui concerne la problématique et les concepts didactiques utilisés.

Il faut remarquer tout de suite qu'en prenant comme objet d'étude les moyens par lesquels quiconque prétend communiquer un savoir, elle y englobe le premier point de vue qu'elle se doit d'"expliquer".

2.3 - Situations didactiques.

Le moyen d'analyse, aussi bien d'un concept que d'un comportement, sera donc, dans cette nouvelle approche, la construction d'une "situation" (ou de plusieurs) qui servira de modèle, soit aux conditions "naturelles", soit aux situations didactiques.

Il s'agit d'explicitier les choix ouverts à la personne (ou à l'élève) qui met en oeuvre la connaissance, par le problème qu'elle s'est posé et par les informations dont elle dispose. Il paraît donc raisonnable de traduire cette activité en terme de jeu, entre cette personne et un "milieu" qui, à son tour, change les états du jeu laissés par le sujet. Le milieu comprend aussi bien "la nature" que les instruments et objets divers qui entrent en scène et que les "autres", éventuellement le professeur. La connaissance est le système producteur et limiteur des décisions du sujet (organisées ou non en stratégies). Les connaissances elles-mêmes s'organisent en représentations qui permettent certains types de contrôles et d'anticipations dans la situation.

.../...

Cette modélisation n'est que la systématisation d'une méthode classique de justification et l'apparition de la connaissance mais elle a l'avantage de mettre en avant le rôle de la connaissance et les rétroactions auxquelles elle est soumise (non seulement du point de vue de la pertinence ou de la validité, mais aussi de l'efficacité). Elle permet d'approcher le sens, d'abord des comportements du sujet, mais aussi celui de la connaissance et celui des situations d'enseignement.

Elle permet de placer la prévision des apprentissages dans un cadre théorique accessible au calcul. Dans la mesure où l'efficacité des connaissances peut être sensible à un champ de problèmes, on peut prévoir quelles sont - a priori - les stratégies les plus efficaces, et en retour, les conditions de passage de l'une à l'autre.

Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité... etc)

La signification d'une notion mathématique est donc constituée par un espace de problèmes ou de situations-problèmes associés à des concepts ou à des procédures en étroite relation pour lesquels elles fournissent des moyens de résolution efficaces. Un tel ensemble de problèmes constitue un champ conceptuel (Vergnaud (1978)).

Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les variables didactiques. La connaissance des domaines - ensembles de situations - déterminés par les valeurs de ces variables et associés à une connaissance, à une représentation, à une stratégie, permet de prévoir la reproduction des situations et en retour, s'appuie sur cette reproductibilité comme preuve expérimentale, tout en donnant le cadre de précision dans laquelle elle s'exerce. Les variables qui sont apparues en premier lieu sont celles qui fixent la nature des rapports du sujet avec le milieu, les systèmes avec lesquels il est en rela-

tion et le genre d'échanges qu'il entretient avec eux. Elles commandent des différences très importantes dans les manifestations de connaissance et dans les types de connaissances qui permettent de les contrôler:

Même relatives à un même concept, une action, une formulation, une preuve ou une convention ne fonctionnent pas de la même manière et l'on ne peut confondre non plus un "modèle implicite" ou un "théorème en acte" avec un langage et une représentation avec un système de preuves ou une théorie ou un savoir. Cette typologie de situations permet de produire et d'analyser de nombreuses situations didactiques, en particulier les situations d'action (Brousseau (9) Brousseau-Maysonnave (10) M. Artigues (2)), les situations de communication Brousseau (9) Laborde-Guillereau (1980-1981) et situations de preuve^{BROUSSEAU-GUILLEPHOTIN} (34) N. Balacheff (1980) qui, en reprenant les travaux d'Alan Bell (()) a montré l'importance d'une dialectique dans l'élaboration d'explications par les élèves. L'élaboration de conventions relève d'un autre processus dit d'institutionnalisation dont l'étude commence.

Les interactions entre les divers types de situations et la façon dont elles peuvent être conjuguées dans un processus d'apprentissage pour permettre, par exemple, la formulation d'un modèle implicite ou la création d'un langage permettant l'usage d'un système de preuve etc..., sont elles aussi en cours d'étude.

2.4 - Rapports entre didactique et épistémologie.

Pour illustrer les rapports qu'entretient cette conception de la didactique avec l'épistémologie, on a recherché dans l'histoire des mathématiques s'il était possible de repérer divers statuts d'un même concept correspondant aux types de situations évoqués.

Examinons, par exemple, le concept "fonction". Euler a pris conscience de son importance et a entrepris l'étude systématique des fonctions élémentaires en "définissant" les fonctions qui l'intéressent : celles de la physique (?) comme des "expressions analytiques". Tout au long du

.../...

XVIII^{ème} siècle, diverses méthodes de "définition" des fonctions vont s'affronter mais les mathématiciens pensent être assez d'accord sur la "chose" qu'il s'agit de décrire et ils exercent donc un contrôle sémantique sur l'usage du terme et sur ses propriétés. Dans cette conception, la convergence simple de fonctions continues devrait produire des fonctions continues (Lagrange) et les fonctions continues être dérivables.

Le contre-exemple célèbre de Weierstrass :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(2^{n+1}x)$$

présentant des fonctions (?) continues et qui ne sont néanmoins dérivables en aucun point, soulève, outre "l'horreur et l'effroi" (Hermite), des questions sur ce qu'on peut appeler fonction.

Un complet réexamen des fondements de l'analyse et la construction axiomatique des réels, furent nécessaires pour mettre la notion de fonction sous le contrôle d'une théorie mathématique et la faire passer du statut de concept paramathématique à celui de concept mathématique - "comment l'intuition a-t-elle pu nous tromper à ce point", s'étonne encore Poincaré. (Dhombres (1978) Houzel-Ovaert Raymond Sansucq 1976). Dans quelle mesure ces deux périodes correspondent-elles respectivement à une dialectique de la formulation, puis à une dialectique de la validation - et peut-on en dériver qu'il y a des statuts et des usages différents de la notion de fonction dans l'enseignement ? Mais avant Euler et depuis la mécanique de Galilée ou les multinomies de Stévin, les mathématiciens écrivaient et étudiaient des relations fonctionnelles et se préoccupaient de leurs propriétés avec une représentation et des règles, dont certaines n'étaient même pas formulées, mais qui intervenaient très clairement : le concept fonctionnait déjà "implicitement" comme les "modèles implicites" des situations d'action. Peut-on justifier cette raison par des rapprochements en terme de situations didactiques et qualifier de protomathématique, comme le fait Chevallard (1980) le statut d'un concept entre sa première mise en oeuvre et son identification comme objet d'étude et sa dénomination.

2.5 - Variables didactiques : la géométrie.

Pour donner un exemple plus concret du mode d'analyse que permet cette théorisation des situations et la notion de variable didactique, examinons l'enseignement de la géométrie, par exemple.

A l'âge où l'enfant doit organiser ses rapports avec le milieu, et en particulier avec l'espace (entre 5 et 12 ans), il apparaît que la géométrie qu'on lui enseigne, le carré, le cercle, la symétrie..., est essentiellement une présentation d'objets culturels et non une activité qui a pour but (et pour effet) de lui permettre de contrôler implicitement et explicitement ces rapports. De même, la géométrie de l'enseignement secondaire (*) a pour objet de "contrôle syntaxique" de la théorie mathématique introduite par Euclide et qui n'a jamais eu pour objet la pratique.

Si on se préoccupe de faire émerger la géométrie comme moyen d'anticipation et de contrôle sémantique et pragmatique des représentations de l'élève, on est d'abord conduit à définir le type de situation dans lesquelles elle va fonctionner ainsi (Ex. N. et G. Brousseau (12) (1975) M.H Salin (1979) G. Galvez (30). L'étude des variables didactiques montre que la plus importante est alors la taille des objets qu'il s'agit de reproduire, dont il faut prévoir la position ou communiquer les caractéristiques. Il est clair que tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné n'est pas le même problème selon que la distance du point à la droite est de 3 cm ou de 3 km. Il apparaît alors qu'il n'y a pas non plus une mais trois géométries au moins (G. Galvez) :

- celle du microespace, c'est-à-dire celle des objets que l'élève peut déplacer en tous sens sur une table et où tout peut être mesuré sans difficulté (J. Caron Pargues (21), G. Audibert (3) M. Artigues (2) D. Lunkenbein et al. C. Laborde et Guillereau (37).
- celle du macrospace, urbain, rural ou maritime où le problème...

(*) Elèves de 11 à 17 ans

me est de s'orienter, de repérer, de se diriger, et où une mesure d'angle "coûte moins cher" qu'une mesure de distance (Pailhous (44) L. Paez (43) G. Galvez (30))

- celle de l'espace (entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet par exemple) où les déplacements sont relativement coûteux et où les anticipations sont très utiles et les vérifications possibles (l'espace du charpentier) (J. Rogalski, A. Rouchier).

Chacune de ces géométries, du moins sous sa forme spontanée, fait l'objet de recherches tendant à la caractériser. Il reste à identifier les conséquences de ces différences sur les conceptions géométriques des élèves, mais l'inventaire des phénomènes qui s'opposeraient à l'homogénéisation de la conception de l'espace a été entrepris.

Ces travaux ouvrent des perspectives nouvelles à l'étude de des moyens * de faire que les modèles spontanés des élèves à propos de l'espace se développent et deviennent des "thèmes de débats" (L. Viennot (69) E. Saltiel (62))

* puis de leur faire construire une véritable théorie mathématique. On peut observer d'ailleurs dans ce domaine d'intéressantes productions d'ingénierie didactique où des limitations de certaines variables dans des constructions géométriques, conduisent à la production de conjectures et de théorèmes (P. Terracher et al., et bien entendu tous les travaux sur Logo). S. Papert a montré toute l'importance du passage d'une géométrie globale à une géométrie définie localement sur les conceptions théoriques de la géométrie.

On peut étudier sur un tel sujet le fonctionnement des rapports théorie/pratique dans l'enseignement, et l'hypothèse selon laquelle une certaine conception "scolaire" de ces rapports, serait à l'origine de nombreux échecs.

2.6 - Les processus didactiques.

Les suites de situations didactiques s'organisent en processus. Les processus classiques sont généralement basés sur l'idée suivante : dans la liste de toutes les questions possibles que l'on peut poser sur un sujet à l'élève, il en existe une partie A_0 à laquelle il peut répondre immédiatement.

.../...

Il est possible, à l'aide des connaissances A_0 et des aptitudes générales de l'élève, à la date t_0 , de lui enseigner, en un temps raisonnable Δt , les réponses à un ensemble A_1 de questions $A_1 \cap A_0 = \emptyset$, ce qui lui permet de dominer un ensemble D_1 de questions, $D_1 \supseteq A_0 \cup A_1$. En réitérant, on obtient une chaîne ordonnée par inclusion D_i de questions apprises telle qu'au bout d'un temps fini $\sum \Delta t_i = T$, l'ensemble des questions et des réponses est appris. A priori, ce modèle ne dit rien au sujet des rapports que doivent entretenir les questions appartenant à des "niveaux" successifs. Si une théorie, par exemple le conditionnement skinnérien, assure l'acquisition d'une question-réponse de façon presque indépendante du contenu cognitif, alors toute chaîne peut faire l'affaire. Toute amélioration de ce système supposera qu'il est plus facile d'apprendre ou d'enseigner certaines connaissances lorsque d'autres sont déjà acquises, comme nous l'avons dit plus haut.

Cette idée a servi de base, depuis des temps très anciens, à l'organisation de la présentation axiomatique des mathématiques (à moins que ce ne soit l'inverse) A_0 sont les axiomes, les A_i , les théorèmes, les D_i les collections de problèmes. Les relations entre les A_i sont le plus souvent des démonstrations et l'optimisation de cet engendrement de la théorie, conduit à regrouper les démonstrations qui "commencent pareil", et donc à choisir les structures les plus générales pour les enseigner d'abord. Ce modèle classique se heurte à de sérieuses objections d'origines diverses : les plus évidentes proviennent dans les années 70, des travaux Piagétien. Le modèle revient à nier les accommodations de la connaissance du sujet et toute l'épistémologie génétique argue contre cette conception. L'épistémologie aussi, avec par exemple Bachelard (1938) et Lakatos (1976). Les arguments directement didactiques sont proposés d'abord sur le plan théorique (Brousseau (1970) (1974) (1977) avec la mise en évidence d'une part, de la nécessité pour la connaissance, de fonctionner comme solution de problème afin qu'elle ait un sens et qu'elle soit opératoire, et d'autre part, du phénomène d'économie :

Si une connaissance enseignée - ou découverte - s'exerce et prend son sens comme solution d'un ensemble de problèmes, une tendance à l'économie conduira l'élève à ne

.../...

retenir ou à ne concevoir d'elle que ce qui est nécessaire aux solutions de ces problèmes (Phénomène détecté par F. Pluvinage et Duval sous le nom de sous-compréhension) Si ces problèmes ne constituent pas un champ conceptuel, le modèle spontané, développé par l'élève, peut échouer sur de nouveaux problèmes, et se complexifier pour s'y adapter, mais sans se remodeler et aboutir à une connaissance lourde et néanmoins fausse. Ce processus est fatal dans le modèle didactique classique, pour peu que les maîtres s'écartent de la présentation de problèmes triviaux et ne sachent pas organiser des activités de remise en question des connaissances acquises :

- . la mise en évidence du fonctionnement des erreurs comme indice d'une connaissance autre, et non d'un manque de connaissance (par exemple M.H Salin (60) mais aussi Landa

- . la nécessité de sauts informationnels dans un processus didactique. Cette nécessité étant déduite du principe d'économie (Brousseau (11) J.M Digneau (1980)).

- . enfin l'hypothèse de l'existence d'obstacles épistémologiques (Brousseau (1976) Ratsimba-Rajohn (1981)) ou au moins, d'obstacles didactiques.

Ce point de vue est étayé par les travaux de G. Vergnaud qui a montré l'effet de la complexité psychogénétique des problèmes additifs sur l'ordre des acquisitions. C'est aussi, par exemple, que le succès du modèle additif fait obstacle à la mise en place du modèle multiplicatif (Brousseau 1981, Audibert 1982). J. Perès a utilisé la théorie de l'équilibration pour expliquer l'évolution d'un système de symboles créés par les enfants de 4 ans dans un processus de codages.

Dans quelle mesure ces travaux contredisent-ils le modèle classique ? Les processus d'enseignement de la mesure ou des décimaux construits par F. Colmez (23), R. Douady (1980) et G. Brousseau (1981) ne contredisent pas la référence à une axiomatique sous-jacente, même si l'accent est mis dans chaque cas sur le caractère dialectique des processus mis en oeuvre.

.../...

Les questions posées par la solution d'un problème sont aussi intéressantes que la solution elle-même et c'est la succession des hypothèses, des anticipations, des vérifications, des reprises des questions nouvelles qui doit articuler un processus. Et ceci nous ramène, non point à Poincaré, mais à Lakatos et à Bachelard.

Mais la question demeure posée, et pour l'instant, on n'entrevoit pas la méthode qui permettrait de dire jusqu'à quel point il est nécessaire d'explorer un champ de problèmes ouverts pour donner un sens aux acquisitions de l'élève et à partir de quel moment cette exploration devient inutile ou néfaste. Quels sont les obstacles qui sont constitutifs de la connaissance et ceux qui ne sont qu'un résidu historique, sans intérêt pour l'enseignement.

Comment articuler une suite de situations didactiques pour obtenir une chaîne de représentations, une chaîne de questions et de solutions génératrice du concept ? Et comment, lorsqu'on a plusieurs processus, les comparer ? les tentatives de R. Gras (33) pour doter la didactique d'un moyen de répondre à ces questions à l'aide de l'analyse factorielle et hiérarchique, sont très intéressantes mais encore relativement trop générales. Il faut bien remarquer à quel point l'accent est mis dans ces études de situations et de processus :

- sur le caractère social du fonctionnement des connaissances, ce point de vue rejoint ceux mis en avant par N. Perret-Clermont (50) et M. Schäuber -Léoni d'une part, et J. Brun et F. Corre d'une autre.

- sur l'importance des moments où l'élève est "seul" pour prendre ses décisions ou pour gérer ses rapports socio-cognitifs dans une situation-problème.

2.7 - Le contrat didactique.

Il faut bien remarquer aussi à quel point on a essayé - sauf peut-être dans les travaux de R. Douady - de tenir le professeur dans un rôle "effacé" : il est l'organisateur des situations didactiques, celui qui choisit le jeu, qui le pro-

.../...

pose, en fixe les règles et les objectifs, puis s'efface en se gardant bien d'apporter des informations complémentaires aux élèves, d'intervenir, d'exploiter librement la situation, comme disent les professionnels : la situation proposée doit suffire à mettre le sujet en position de créer et d'exercer ses connaissances. Cet effacement se justifie dans une certaine mesure, aussi bien du point de vue "pédagogique" et didactique (mais il reste à dire pourquoi et dans quelle mesure, car les prises de position à ce sujet sont encore très nettement idéologiques), que du point de vue méthodologique (il s'agit de "contrôler" l'intervention du professeur et "d'observer" l'élève).

Mais il serait prudent de préciser alors que ces travaux se constituent en une "théorie des situations et de processus quasi-isolés des maîtres" et de ne pas en tirer des conclusions hâtives.

Même si ces études sont d'une grande importance,
 - pédagogique, puisqu'elles ont produit des méthodes originales et intéressantes
 - et méthodologique puisqu'elles donnent les moyens de l'étude du contrat didactique et des processus d'institutionnalisation de la connaissance.

elles ne constituent qu'une partie des modèles cherchés pour représenter les situations didactiques courantes organisées ordinairement par les professeurs.

Il ne faut pas en particulier, prendre encore la responsabilité de les proposer à tous les enseignants. Elles n'ont pu fonctionner quasi-isolément comme il est prévu, que grâce au dispositif expérimental. Car, en fait, le professeur doit habituellement négocier la dévolution de la situation-problème à l'élève et même dans le dispositif le plus précisément déterminé, cette négociation va superposer et même parfois imposer une signification particulière au problème posé : l'étude de ce phénomène commence à peine.

Dans toutes les situations didactiques, le maître tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, mais ne peut pas le dire d'une manière telle que l'élève n'ait qu'à

.../...

exécuter des suites d'ordres ; l'élève le sait-il, il a donc à décoder, à comprendre, à identifier un message caché. "Théoriquement", le passage de la consigne du maître à la réponse attendue doit se faire par la mise en oeuvre de la connaissance par l'élève, et seulement par elle, mais "conventionnellement" aussi, le maître est là pour que l'enfant produise sa réponse ; et il doit avoir donné des informations suffisantes pour que l'élève le fasse. Alors l'élève qui ne sait pas répondre se tourne vers le maître qui doit "l'aider" selon un code précis en se justifiant implicitement d'avoir posé une question trop difficile, il va faire un diagnostic qui doit orienter le travail de l'élève.

Ainsi se négocie "un contrat didactique" qui va déterminer, explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire va avoir à charge de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre. A travers les négociations répétées, le maître et l'élève se font une idée de ce que l'autre attend de chacun et ces "contrats", vont limiter leurs choix par de nombreux pré-supposés souvent insoupçonnables. On s'attend à ce que ce contrat ne se révèle le plus souvent que lors de ses ruptures, provoquant étonnement ou sentiment de révolte... Et ces ruptures sont inévitables car, par essence, le contrat entre le maître et l'élève n'est pas totalement explicitable et il n'est pas "tenable" non plus : il n'y a pas de moyen sûr d'engendrer la connaissance ou la solution d'un problème sans une connaissance elle-même, sauf dans le cas d'algorithmes (ce qui fait que l'enseignement des algorithmes sert de modèle à la négociation de la plupart des contrats didactiques explicites en mathématique).

Le contrat didactique s'appuie fondamentalement sur l'idée qu'il existerait un mécanisme producteur de la connaissance nouvelle par le simple exercice de connaissances anciennes et de règles de détachement à peu près fixées. Alors que la connaissance est essentiellement l'inverse : l'intervention du sujet établissant un ordre là où il n'en voyait pas ou relevant l'inattendu dans un ordre déjà établi. Ce contrat didactique

.../...

postule la possibilité de l'encadrement du sens et la mise à distance du surgissement du désir du sujet, et par là, nie par avance ce, qu'en fait, il doit gérer (cf. une étude fine du contrat didactique dans le cas de Gaël (Brousseau et J. Perès (1982))).

En fait, l'existence et l'importance de ce contrat didactique ont été soupçonnées au cours d'expériences sur des systèmes quasi-isolés où il se manifestait par des différences inexplicables entre les résultats obtenus par des professeurs différents, ou entre les résultats prévus et les résultats observés, mais aussi par des phénomènes spécifiques comme ceux qui président à l'utilisation des erreurs des élèves (M.H Salin N. Milhaud). Les tentatives d'analyses directes des contrats didactiques n'ont pas bien réussi (analyse de communications entre maîtres au sujet d'une même classe par exemple) parce que les dispositions de ce contrat ne sont pas libres. Elles conditionnent et sont conditionnées par des phénomènes récurrents qui ont pour objet d'entretenir la relation didactique.

Y. Chevallard et O. Schneider ont montré, par exemple, comment, lors du passage des équations numériques aux équations paramétriques, s'établissaient à la fois la continuité et le renouvellement d'un objet d'étude et comment le contrat se nouait autour d'une sorte de quiproquo producteur d'erreurs. La recherche de tels phénomènes se poursuit activement et les travaux de Y. Chevallard et de ses élèves, J. Tonnelles, D. Pascal, sont très prometteurs d'une conception entièrement nouvelle des phénomènes didactiques. Il s'agit, à partir de l'observation d'une anomalie, révélée par référence au fonctionnement "normal" du concept dans la science du moment (la transposition didactique), de rechercher les conditions qui rendent cette anomalie "profitable" à un certain équilibre du processus didactique en postulant que ces écarts ne sont jamais gratuits. Cette approche rejette encore un peu plus l'attitude traditionnelle qui porte le chercheur en didactique à émettre des jugements et des conseils. Il s'agit maintenant de cerner le cœur de la communication didactique et de ses règles.

Les tentatives de cerner les contrats didactiques ont conduit à dégager la notion d'obsolescence didactique, fonda-

mentale pour l'analyse de la reproductibilité - et encore à l'étude - c'est un fait bien connu des professeurs qu'il faut "changer ses leçons et ses exercices" périodiquement sous peine de les voir perdre de leur valeur didactique, une partie de leur sens, de leur intérêt, de leur sel, aussi bien pour le professeur que pour les élèves.

C'est que la reproduction d'une situation didactique et la reproduction d'un déroulement de leçons obéissent à des contrats totalement différents et leurs propriétés didactiques sont vraisemblablement différentes aussi.

Réciproquement, les objets de connaissance vieillissent aussi et doivent être renouvelés ; on cherche une explication convaincante aux absences de reprise et aux changements de langages qui ponctuent l'apprentissage (?) de la fonction linéaire : règle de trois, rapports, proportions etc... Il est vraisemblable que l'on ne sait pas organiser les accommodations.

2.8 - L'épistémologie scolaire.

Le contrat didactique précise à chaque instant les positions réciproques des participants au sujet de la tâche et précise la signification profonde de l'action en cours, de la formulation ou des explications fournies : que faut-il faire ? que faut-il savoir faire ? à quoi voit-on qu'on a réussi ? que faut-il faire si on n'a pas réussi ? Que fallait-il savoir pour réussir ? qu'est-ce qui était une erreur et pourquoi ? que faut-il apprendre ? comment ? etc... Ainsi, le contrat précise le rôle conventionnel de la connaissance, de l'apprentissage, de la mémoire et il véhicule une sorte de "théorie" de la connaissance, "naïve" malgré qu'elle amalgame des théories fort complexes et éventuellement scientifiques, inconsistantes et "idéologiques" au sens d'Althusser (1).

Cette "épistémologie scolaire", ainsi nommée par référence à la grammaire scolaire, se justifie et s'explique, non pas par sa structure ou son contenu, mais par sa fonction. Elle permet la communication didactique, même si elle est fautive en tant que théorie, les corrections pragmatiques permettant tou-

jours de contrôler ce que la "théorie" n'a pas prévu et de l'expliquer à l'aide d'exceptions, de conditionnement des assertions ou froidement de déclarations contradictoires.

Il n'est pas évident qu'une fausse épistémologie soit un obstacle à un bon enseignement mais cette "épistémologie scolaire", conjuguée à l'illusion de la transparence des faits d'enseignement (Chevallard), constitue un obstacle redoutable à l'émergence de la didactique scientifique.

De toute façon, le simple fait de considérer une connaissance ou un savoir comme objet d'enseignement en change déjà le statut. Le savoir enseigné ne ressemble, pendant longtemps et pour beaucoup de personnes, que d'assez loin à la connaissance telle qu'elle se présente dans le corps de la science dont on l'extrait. Il n'est pas étonnant que "l'épistémologie" subisse aussi une transposition duale de la transposition didactique.

2.9 - L'acquisition des concepts.

La présentation un peu détaillée que nous venons de faire des tendances que nous considérons comme les plus originales des recherches fondamentales en didactique des mathématiques, ne doit pas faire oublier les efforts importants qui sont faits dans certains secteurs du champ didactique que nous n'avons placés et évoqués que trop rapidement mais qui sont tout aussi intéressants et aussi fondamentaux^(*). Il s'agit d'abord des recherches sur l'acquisition des concepts. Vergnaud, par exemple, a utilisé avec succès la méthodologie génétique pour l'étude des "problèmes additifs et multiplicatifs" des énoncés, et du calcul rationnel. Avec J. Rogalski, G. Rico et A. Rouchier, il a mis en évidence, à propos des concepts de volume, de surface et de fonction linéaire, des variables importantes pour l'enseignement.

.../...

(*) Le rassemblement d'un grand nombre d'équipes d'origines diverses au sein d'une R.C.P du C.N.R.S témoigne de l'importance des échanges en cours.

D'un autre côté, des travaux sur la solution de problèmes et la planification de l'action (J.F Richard, J. Colomb, M.N Audigier, J.C Guillaume) sur les procédures de traitement et d'anticipation développées par les élèves de divers niveaux (Conzinelle, Marmèche et J. Mathieu) sont à rapprocher des études sur la solution de problèmes et sur l'heuristique - dont nous ne parlons pas ici.

3. CONCLUSIONS

Avec la mise en évidence du contrat didactique, de la transposition didactique, de l'épistémologie scolaire et des processus d'institutionnalisation de la connaissance, s'est ouvert une autre problématique pour la didactique qui réclame la mise au point de méthodes d'études originales. Il serait indispensable, en particulier, d'examiner dans quelle mesure l'approche de l'étude didactique d'un concept mathématique s'en trouve modifiée. Il faudrait aussi revenir sur les problèmes que nous avons soulevés au début de ce chapitre et montrer que les notions que nous venons d'introduire ont fait effectivement progresser les questions soulevées. Il faudrait examiner aussi maintenant les questions méthodologiques ; car si l'ambition des travaux que nous venons d'évoquer est claire en ce qui concerne le désir de leurs auteurs de fonder la didactique comme une branche scientifique, les conditions minimales de ce projet ne semblent pas, pour l'instant, être réunies. Il aurait fallu aussi revenir sur la façon dont cette didactique fondamentale s'articule avec l'étude de chaque concept mathématique particulier et avec la production de situations-problèmes et de décisions pour l'enseignement.

Le recensement des notions abordées est impressionnant (Algèbre, géométrie, nombres, logique, analyse, probabilités et statistiques etc...) et l'examen des résultats obtenus sur chaque sujet nous aurait fait entrer dans la didactique proprement dite.

L'approche systemique et systematique de l'activité didactique que nous venons de présenter, se manifeste d'abord

.../...

par des exigences de précision. Il aurait pu se faire que ces exigences ne puissent être satisfaites que pour des cas si peu nombreux et si peu importants que le projet apparaisse tout à fait dérisoire. Ce n'est pas le cas, et l'importance et le nombre des concepts mathématiques concernés par cette modélisation en est une première justification.

Il se pourrait que l'alourdissement ainsi imposé à l'analyse des faits d'enseignement paraisse sans rapport avec l'intérêt des résultats obtenus du point de vue de l'enseignement. Il faut donc aussi examiner la théorie des situations du point de vue de sa fécondité didactique en terme de nouveauté, et surtout l'efficacité des points de vue proposés. A ce sujet, la question du sens des apprentissages et de l'intérêt des situations ouvertes pour la découverte et l'emploi des notions mathématiques reste ouverte. Mais les ambitions réelles du projet sont ailleurs : il s'agit de fournir à la didactique une problématique et une méthode scientifique d'approche. Aussi, faudra-t-il examiner le projet du point de vue de sa fécondité scientifique. Il semble assuré qu'il a permis déjà de produire de nombreux concepts de didactique. Il faut faire l'inventaire des assertions qu'il permet aussi de falsifier au sens de Popper (de les mettre à l'épreuve et d'en prouver la fausseté). C'est seulement alors qu'on saura ce que réellement on a appris. Les points sur lesquels les professeurs attendent des apports concrets, sont des questions de programmes, d'évaluation, de curriculas, de méthodes, de formation des maîtres ; mais la didactique n'a souvent à proposer dans ces domaines que des changements de points de vue, des pas de côtés, des mises en garde et des réserves sceptiques, décevantes pour l'enseignant. Les explications paraissent souvent "évidentes" ou trop complexes et les suggestions banales. Les explications des mécanismes par lesquels les professeurs prennent certaines mesures, identifient des options alternatives et décisives et alimentent les mouvements idéologiques parfois violents qui soutiennent leur intérêt, n'ont guère de chance pour l'instant d'être utiles dans ces vastes phénomènes de didactique "réelle".

Guy BROUSSEAU

Mars 1982

BIBLIOGRAPHIE

- 1 ALTHUSSER.- La Philosophie spontanée des savants.-
Vrin.Paris 1968.
- 2 ARTIGUES M.-"Contribution à l'étude de la
reproductibilité des situations mathématiques.-Thèse de doctorat
d'état.Université de Paris VII .1984.
- 3 AUDIBERT G.-Démarches de pensées et concepts utilisés
par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie
euclidienne plane .Thèse de doctorat d'état .Université des
Sciences et Techniques du Languedoc.1982.
- 4 BACHELARD.-La formation de l'esprit scientifique.-
Vrin.Paris.1977(10ème édition).
- 5 BALACHEFF N.- Utilisation et étude de la classification
proposée par A.W.BELL pour l'étude des preuves formulées par les
élèves.- Séminaire de Recherches Pédagogiques.Déc 78.Grenoble.
- 6 BELL A.W .-A study of Pupils'proofs explanations in
mathematical situations- in Educational studies in
Mathematics.1976.Vol#
- 7 BESSOT A. et RICHARD F.-Commande de variables dans une
situation didactique .role du Schéma.Thèse de 3ème cycle
.Bordeaux-I. 1979.
- 8 BLOOM B.S.- TAXONOMIE DES OBJECTIFS PEDAGOGIQUES
,DOMAINE COGNITIF. Montréal .Education nouvelle.1969
- 9 BROUSSEAU G.- Processus de mathématisation.-in Bulletin
de l'association des professeurs de mathématiques de
l'enseignement public.Numéro Spécial :La mathématique à l'école
élémentaire.1972.
- 10 BROUSSEAU G.& MAYSONNAVE J.-"Données pour la
construction d'un modèle d'apprentissage et pour une analyse de
la dialectique de l'action dans la course à vingt.-in "études sur
l'enseignement élémentaire" n°#.1973.
- 11 BROUSSEAU G.-L'enseignement du calcul numérique et les
stratégies dans l'enseignement-.Exposé au séminaire de
Recherche.I.N.R.D.P.-S.E.R.F.Orléans.1973.in Etudes sur
l'enseignement élémentaire des mathématiques n°14. I.R.E.M. de
Bordeaux.1974.
- 12 BROUSSEAU N. ET BROUSSEAU G.-La reproduction des figures
planes . Fiche didactique.-Document occasionnel. I.R.E.M. de
Bordeaux .1975.
- 13 BROUSSEAU G.-Etude des processus d'apprentissage en
situations scolaires .Colloque of the center for studies in

- Sciences of Education. Leeds. 1977. Etudes sur l'enseignement des mathématiques n°18. I.R.E.M. de Bordeaux .1978
- 14 Brousseau G. - L'observation des activités didactiques. -
Revue française de pédagogie, 1978, 45, 130-140.
- 15 Brousseau G. - Problèmes d'enseignement des décimaux - in
revue Recherche en didactique des mathématiques .1980. vol.1.1.
- 16 Brousseau G. - les échecs électifs en mathématiques dans
l'enseignement élémentaire. in Revue de Laryngologie otologie
rhinologie, 1980, 101, 3-4, 107-131.
- 17 Brousseau G. - Le cas "Gael". Article occasionnel. I.R.E.M.
de Bordeaux. 1981.
- 18 Brousseau G. - Problèmes de didactique des décimaux - in
revue Recherches en didactique des mathématiques. 1981. vol.2.1. Ed
La pensée sauvage. Grenoble.
- 19 Brousseau G. - Les obstacles épistémologiques et les
problèmes en mathématiques. In revue Recherches en Didactique des
Mathématiques. Vol 4, n°2, pp 165-198, 1983.
- 20 Brousseau G. - Quelques conduites déterminantes en
Didactique des Mathématiques . Actes du Colloque "Réussir à
l'école". Rectorat de Bordeaux 1984.
- 21 Caron-Pargues J. - Etude sur les représentations du cube
chez les enfants de 3 à 11 ans . thèse de 3eme cycle . Université
de Paris I. 1979.
- 22 Chevallard Y. - LA transposition didactique . Cours de
l'école d'été de didactique des mathématiques.
Chamrousse. 1981.
- 23 Colmez F. - Document d'accompagnement du film sur la
mesure . Mesure 1 et Mesure 2, série Atelier de Pédagogie. 1974.
- 24 Cronbach, Gleser & all. - The concept of
generalisation. #.#.#.
- 25 Dhombres J. - Nombres , mesure et continu . - Fernand Nathan
. Paris. 1978.
- 26 Dienes Z. - Les six étapes du processus d'apprentissage en
mathématiques. - O.C.D.L. Paris . 1970.
- 27 Douady R. - Approche des nombres réels en situations
d'apprentissage scolaire. (enfants de 6 à 11 ans - in Recherches en
Didactique des Mathématiques . 1980. Vol 1.1.
- 28 Douady R. - Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans
l'enseignement des mathématiques. Thèse de Doctorat d'état.
Université de Paris VII . 1984.
- 29 El Bouazzaoui-Biari H. - Etude de situations scolaires des
premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations
entre divers caractères de ces situations et le sens la
compréhension et l'apprentissage de ces notions. thèse de 3eme
cycle . Université de Bordeaux - I. 1982.
- 30 Galvez G. Une proposition pour l'enseignement de la
géométrie à l'école primaire. Thèse de doctorat . Centro de
Investigation del I.P.N. MEXICO. 1985.
- 31 Gagne R. - The conditions of learning. New York.
Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- 32 Glaeser G. - Epistémologie des nombres relatifs. in revue
Recherches en didactique des mathématiques , Vol 2.3, 1981
- 33 Gras R. - Contribution à l'étude expérimentale et à l'
analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains
objectifs didactiques en Mathématiques. Thèse d'Etat. Université de
Rennes 1. 1979.
- 34 Guillephotin , Lamarque, Rol. - Etude de l'influence des
conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme.
Mémoire de psychologie scolaire . Université de Bordeaux I et

II.1975.

35. HOUZEL, OVAERT, RAYMOND, SANSUC. - Philosophie et Calcul de
l'infini. Maspéro. Paris. 1976.
36. LABORDE C. - Langue naturelle et écriture symbolique.
Thèse de Doctorat d'état. Université de Grenoble. 1982.
37. LABORDE C. et GUILLEREAU. - Une activité de communication
. Actes du 5^{eme} Colloque P.M.E. Grenoble . 1981
38. LAKATOS. - Preuves et réfutations. (traduction française de
Laborde et Balacheff). Hermann. Paris. 1974.
39. LAMARQUE G. - "Influence de diverses conditions
didactiques sur la découverte d'une stratégie par des enfants de
9 à 11 ans". Mémoire de psychologie scolaire. Université de
Bordeaux I et II. 1973.
40. LERMAN I. C. - La classification automatique . Armand
Colin. Paris . 1981
41. LERMAN I. C. - Analyse ordinale d'une classe d'échelles in
Analyse des données . Paris. Publications de l'A.P.M.E.P.
Paris. 1981
42. LERMANN, GRAS & ROSTAM. - . Elaboration et évaluation d'un
indice d'implication pour des données binaires. Chap. 1 et 2 in
Mathématiques et sciences humaines n 74 . 1981.
43. LUNKENBEIN D., ALLARD H., GOUPILLE C. Genèse et
développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte
. Université de Sherbrooke. 1981
44. MAUDET C. - Les situations et les processus de
l'apprentissage d'une fonction logique. Thèse de 3^{eme} cycle
. Université de Bordeaux-I. 1982.
45. PAEZ L. - La représentation graphique de l'espace chez
l'enfant scolarisé et chez l'adulte peu ou pas scolarisé. thèse de
3^{eme} cycle . Université de Paris 7
46. PAILHOUS J. - La représentation de l'espace
urbain. L'exemple du chauffeur de taxi . Presses Universitaires de
France. Paris, 1970.
47. PAILHOUS J. - La représentation de l'espace urbain: son
élaboration son rôle dans l'organisation des
déplacements. Nov. 1978.
48. PAPERT S. - #
49. PERES J. - Utilisation d'une théorie des situations en
vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'un
apprentissage scolaire. Thèse de 3^{eme} Cycle . Université de
Bordeaux II et I.R.E.M. de Bordeaux .
50. PERRET-CLERMONT N. - La construction de l'intelligence
dans l'interaction sociale. P. Lang. Paris. 1981.
51. PIAGET J. - L'équilibration des structures cognitives.
P.U.F. Paris. 1975
52. PLUVINAGE F. - Difficultés des exercices scolaires en
mathématiques. Thèse d'Etat. Université de Strasbourg. septembre
1977.
53. POINCARÉ H. - Science et hypothèses. Vrin. Paris. 1905.
54. POPPERT K. - La logique de la découverte
scientifique. Payot. Paris. 1973.
55. RATSIMBA-RAJOHN H. - Etude de deux méthodes de mesures
rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité,
en vue de l'élaboration de situations didactiques. Thèse de 3^{eme}
cycle . Université de Bordeaux-I . 1981.
56. RESTE M. - "Etude de l'influence des communications sur
les acquisitions dans les groupes d'enfants. Mémoire de

- psychologie scolaire. Universités de Bordeaux I et II. 1974.
- 57 RICHARD J.F. et COLOMB J. - Etude des procédures de
résolution des problèmes à l'école élémentaire. Revue Française de
Pédagogie. 1980.
- 58 ROGALSKI J. - Quantités physiques et structures
numériques. Bulletin de l'A.P.M.E.P. n°320
- 59 ROUCHIER A. - Situations et processus didactiques dans
l'étude des nombres rationnels positifs. - Recherche en didactique
des mathématiques. vol. 1.2. 1980.
- 60 SALIN M.H. - Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des
mathématiques à l'école primaire. D.E.A. Université de Bordeaux
1. 1976.
- 61 SALIN M.H. - A propos de Géométrie. - Document occasionnel
I.R.E.M. de Bordeaux. 1979.
- 62 SALTIEL E. - Concepts cinématiques et raisonnements
naturels. Thèse d'état. Université de Paris VII. 1978.
- 63 SCHNEIDER O. - Le passage des équations numériques aux
équations paramétriques en classe de 2de. D.E.A Université de
Bordeaux-1 et de Marseille-Luminy. 1979.
- 64 TERRACHER P. - La géométrie en 2de. I.R.E.M. de Bordeaux
1982.
- 65 TONNELLE J. - Le monde clos de la factorisation au 1er
Cycle. D.E.A. Université de Bordeaux-1 et de Marseille-
Luminy. 1979.
- 66 VERGNAUD G. - L'appropriation des connaissances
scientifiques in Cahier du C.E.R.M. n 148. 1978.
- 67 VERGNAUD G. et DURAND C. - Structures additives et
complexité psychogénétique. in Revue Française de Pédagogie. n°36
. Paris. 1976.
- 68 VERGNAUD G. - L'enfant, la mathématique et la réalité - P.
Lang. Berne. 1981.
- 69 VIENNOT L. - Le raisonnement spontané en dynamique
élémentaire. Hermann. Paris. 1979.

LES OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES ET LES PROBLEMES EN MATHEMATIQUES¹

G. BROUSSEAU

ABSTRACT

In this article the author looks at and discusses the revival, in research on mathematics teaching (*didactique des mathématiques*), of the notion of epistemological obstacle, coined by G. Bachelard (1938).

To do this he illustrates certain aspects specific to the notion, notably the fact that an epistemological obstacle is an integral part of mathematical knowledge. Thus, the identification and characterisation of an obstacle are essential to the analysis and construction of didactical situations. These questions are illustrated by the particular case of the construction of the concept of decimals.

The original version of this article dates from 1976 ; it is followed by a commentary relevant to the current debate on the relationships between the teaching and the epistemology of mathematics.

RESUMEN

En este artículo, el autor comienza nuevamente a discutir y examinar, en didáctica de matemática, la noción de obstáculo epistemológico creada por G. Bachelard (1938).

¹Ndlr : Le texte que nous publions ici est celui d'un exposé de Guy Brousseau à la XXVIII^e rencontre CIEAEM : « la problématique et l'enseignement des mathématiques » (Louvain la neuve 5-12 août 1976). L'intérêt et l'actualité du débat sur les rapports de l'épistémologie et de la didactique, la difficulté à se procurer un texte un peu ancien mais très utilisé dans nos travaux, ont conduit à la décision de cette publication. Nous remercions Willy et Jacqueline WANHAMME, éditeurs des actes de la rencontre de Louvain la neuve, de l'autorisation qu'ils ont bien voulu donner à l'auteur de ce texte.

166 *Recherches en Didactique des Mathématiques*

Para esto, el pone en evidencia ciertos caracteres específicos de esta noción, sobre todo el hecho que un obstáculo epistemológico es constitutivo del conocimiento finalizado. Así, la identificación y la caracterización de un obstáculo son esenciales en el análisis y en la construcción de situaciones didácticas. Estas cuestiones son mostradas con el caso particular de la construcción del concepto de decimal.

La versión original del presente artículo data de 1976 ; a continuación de esta versión, el autor presenta comentarios contribuyentes al debate actual sobre las relaciones entre la didáctica y la epistemología de la matemática.

RESUME

Dans cet article l'auteur examine et discute la reprise en didactique des mathématiques, de la notion d'obstacle épistémologique forgée par G. Bachelard (1938).

Pour cela il met en évidence certains caractères spécifiques de cette notion, notamment le fait qu'un obstacle épistémologique soit constitutif de la connaissance achevée. Par là, l'identification et la caractérisation d'un obstacle sont essentielles à l'analyse et à la construction des situations didactiques. Ces questions sont illustrées par le cas particulier de la construction du concept de decimal.

La version originale du présent article date de 1976 ; elle est suivie ici de commentaires contribuant au débat actuel sur les rapports de la didactique et de l'épistémologie des mathématiques.

I. Introduction

1.0 Sujet de l'étude

Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résoud pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment.

1.1 Conceptions classiques de la notion de problèmes

Pour simplifier ces difficultés, il semble que les didacticiens des mathématiques essaient, depuis quelque temps, de projeter la collection des problèmes imaginables sur un sous-espace produit des composantes suivantes :

1.1-1 Les intentions méthodologiques du professeur. C'est la composante décrite au début du « livre du problème » de Glaeser et de ses collaborateurs (problèmes de recherches, d'entraînement, d'introduction, etc.) (IREM de Strasbourg, 1973)

1.1-2 Les intentions didactiques et les objectifs (par exemple ceux de Bloom) : acquisition de connaissances, meilleure compréhension, analyse, etc)

1.1-3 Le contenu mathématique : presque toujours la question consiste à demander à l'élève d'établir une formule vraie dans une théorie en cours d'étude. Le contenu d'un problème est donc à priori définissable comme un couple (T, f) T étant une théorie supposée explicitée dans le cours, et f la formule à trouver, à établir ou à placer dans une démonstration de T .

Cette conception permet d'abord de placer certains problèmes les uns par rapport aux autres, selon une structure en treillis, à condition d'avoir une axiomatique convenable de la théorie à enseigner : les discussions sur le choix de la meilleure axiomatique sous-tendent la plupart des recherches sur les programmes depuis des années. « La meilleure axiomatique » serait celle qui permettrait avec le moins d'efforts d'apprentissage ou d'enseignement, d'engendrer la collection des théorèmes-problèmes, d'examen ou de contrôle, fixée par un consensus social.

Faut-il prévoir plusieurs théories particulières que l'on reliera ensuite (tendance « classique »), ou une théorie unitaire générale dont on déduit les autres (tendance « moderne ») ?

Faut-il beaucoup d'axiomes faibles et bien rangés, (Dieudonné : « algèbre linéaire et géométrie élémentaire »²) ou peu d'axiomes puissants (Choquet : « l'enseignement de la géométrie »³) ? Des axiomes « évidents » ou des axiomes « très élaborés » ?

En l'absence d'une théorie convenable de la connaissance, accompagnant une théorie pertinente de l'apprentissage, ces discussions n'ont jamais donné lieu à des études expérimentales scientifiques.

Cette conception permet en outre de distinguer d'une part, le couple (T, f) qui caractérise le problème, et d'autre part, la démonstration de $T \vdash f$, laquelle peut faire l'objet d'une étude mathématique ou métamathématique. Et cette distinction va servir de base à une nouvelle décomposition du contenu mathématique, suivant deux critères différents, mais voisins :

— le domaine d'application : (la théorie T), opposé à la « structure » mathématique ou logique opérant sur T .

— le modèle mathématique (au sens de la logique mathématique), opposé au langage.

Ces paires de caractères opposés correspondent à des traits distinctifs sur lesquels les enseignants s'appuient spontanément : abstrait-concret, contenu-formel, théorique-pratique, etc... mais leur mise en œuvre n'a jamais fourni ni de typologies utilisables, ni d'indices objectifs.

1.1-4 Composante mathématique. En fait, toutes les tentatives de descriptions rationnelles et formelles des mathématiques sont utilisées pour essayer de bâtir des variables intermédiaires, qui, sans être le contenu lui-même, permettraient de l'engendrer à moindre frais.

La conception des problèmes sous la forme $T \vdash f$ conduit souvent à assimiler les hypothèses à ce qui est connu, les conclusions à ce qui est cherché (ou l'inverse) et la résolution à un cheminement qui coïnciderait facilement avec la démonstration cherchée.

Certaines démonstrations peuvent être obtenues sans coup férir par l'application d'une suite finie de spécifications connues à l'avance : il s'agit alors d'un algorithme, automate producteur de la démonstration particulière cherchée.

²Paris : Hermann, 1964

³Paris : Hermann, 1964

Dans ce cas, on peut faire la description, classique et merveilleusement simple et gratifiante pour le professeur, de l'activité cognitive de l'élève, de l'apprentissage et du rôle de l'enseignant : le maître apprend à l'élève, qui le mémorise, l'algorithme qui permet d'établir les théorèmes.

1.1-5 Composante heuristique. Mais pour d'autres démonstrations, il n'existe pas de tels algorithmes. Pour ne pas renoncer au modèle d'acquisition précédent, on peut imaginer que la démonstration est conduite par des « intuitions » qui joueront un peu le rôle des algorithmes. Ces intuitions pourront être rationalisées localement, lorsque la mise en œuvre d'une théorie déjà constituée, fournira la démonstration cherchée ou une partie de celle-ci (on appliquera un théorème) - le choix des théories ou des structures étant lui-même guidé par des heuristiques, que l'on peut, après coup, invoquer pour justifier la démarche suivie. Malgré leur caractère un peu *had hoc*, ces concepts ne manquent pas d'intérêt, comme le montrent dans cette rencontre entre autres, les exposés de Glaeser, de Paquette, Ciosek, Wilson et Janvier⁴.

1.2 Critique de ces conceptions

La validité d'une telle décomposition classificatoire est contestable : malgré les facilités qu'elle procure, elle a conduit à accepter des présupposés douteux en séparant des éléments qui fonctionnent ensemble.

1.2-1 Le sujet

Le sujet — l'élève — est absent de cette conception, où il n'apparaît pas que comme un récepteur, un enregistreur extrêmement simplifié que le savoir acquis ne modifie pas sensiblement, ni surtout pas structurellement.

1.2-2 La signification et le sens

De même (et par voie de conséquence) la signification de la mathématique disparaît : ce qui fait, non pas seulement la vérité, mais l'intérêt d'un théorème (ce que Gonseth (1946) appelait le caractère *idoine* d'une connaissance mathématique), ce qui fait que cette connaissance existe comme solution optimale dans le champ défini par un certain ensemble de contraintes relatives au sujet et/ou à la connais-

⁴Ndlr : les textes de ces exposés sont publiés dans « la problématique et l'enseignement de la mathématique ». Actes de la XXVIII^e rencontre CIEAEM. Louvain la neuve, 5-12 août 1976. Ed. W. et J. WANHAMME.

sance elle-même, (un objet au sens de Thom (1972) : une solution à un problème) ce qui dit l'intérêt du problème lui-même, etc.

Le sens d'une connaissance mathématique se définit — non seulement par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique, (sémantique au sens de Carnap) — non seulement par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution, mais aussi par l'ensemble des conceptions, des choix antérieurs qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite, les économies qu'elle procure, les formulations qu'elle reprend, etc.

1.2-3 L'apprentissage

La construction axiomatique suggère un apprentissage féérique où le volume des connaissances — immédiatement acquises, structurées, utilisables et transférables — gonfle dans un espace vierge. Or...

— Une notion apprise n'est utilisable que dans la mesure où elle est reliée à d'autres, ces liaisons constituant sa signification, son étiquette, sa méthode d'activation.

— Mais elle n'est *apprise* que dans la mesure où elle est utilisable et utilisée effectivement, c'est-à-dire seulement si elle est une solution d'un problème. Ces problèmes, ensemble de contraintes auxquelles elle répond, constituent la signification de la notion. Elle n'est apprise que si elle « réussit » et il lui faut donc un territoire de mise en œuvre. Ce territoire n'est que rarement général et définitif.

— Du fait de cet emploi localisé, la notion reçoit des particularisations, des limitations, des déformations de langage et de sens :

— si elle réussit assez bien et assez longtemps, elle prend une valeur, une consistance, une signification, un développement qui rendent de plus en plus difficile sa modification, sa reprise, sa généralisation ou son rejet : elle devient à la fois, pour les acquisitions ultérieures, un obstacle, mais aussi un point d'appui.

Ceci montre :

— pourquoi l'apprentissage ne peut se faire selon le schéma classique de l'acquisition progressive et continue (telle que pour toute acquisition, il existe une suite finie d'acquisitions qui lui soit équivalente et apportant chacune une quantité d'information aussi petite que l'on veut.

Et en conséquence :

— pourquoi la confusion entre algorithme d'établissement d'une formule et algorithme d'acquisition d'un savoir est dénuée de fondement.

1.2-4 Algorithme et raisonnement

Plusieurs exemples montrent toutes les conséquences néfastes de cette confusion sur l'apprentissage des opérations dans \mathbb{N} .

En enseignant par les mêmes procédés, et au même âge, aussi bien une théorie sophistiquée, celle des probabilités et des statistiques, que ces prétendus « mécanismes » d'opération, il a été possible de montrer que cette séparation entre mécanismes et raisonnement n'est ni nécessaire, ni même utile ; l'apprentissage se fait par la mise à l'essai de conceptions successives, provisoirement et relativement bonnes, qu'il faudra rejeter successivement ou reprendre en une véritable genèse nouvelle à chaque fois.

Si les conditions l'exigent, l'élève peut lui-même résumer en « automatismes » des activités complexes, en retirant du sens et des possibilités de choix à son activité. Mais pour que ces automatismes puissent être utilisés, il faut qu'ils soient mis en place par le sujet lui-même.

1.2-5 Obstacles

Ces travaux qui se réfèrent à Bachelard (1938) et à Piaget (1975) montrent aussi que l'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise.

1.3 Importance de la notion d'obstacle dans l'enseignement par les problèmes

1.3-1 Interactions

Nous admettrons donc que la constitution du sens, tel que nous l'entendons, implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interaction dialectique (car le sujet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles. L'objet principal de la didactique est justement d'étudier les conditions que doivent remplir les situations ou les problèmes proposés à l'élève pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet de ces conceptions successives.

On peut déduire de ce régime discontinu d'acquisitions que les caractères informationnels de ces situations doivent eux aussi varier par sauts.

1.3-2 Conditions

Dans ces conditions l'intérêt didactique d'un problème va dépendre essentiellement de ce que l'élève y engagera, de ce qu'il y mettra à l'épreuve, de ce qu'il y investira, de l'importance pour lui des rejets qu'il sera conduit à faire, et des conséquences prévisibles de ces rejets, de la fréquence avec laquelle il risquerait de commettre ces erreurs rejetées et de leur importance.

Ainsi les problèmes les plus intéressants seront ceux qui permettront de franchir un véritable obstacle. C'est pourquoi à propos des problèmes, j'ai voulu examiner la question des obstacles en didactique.

II. La notion d'obstacle

2.0 Obstacles épistémologiques

Le mécanisme de l'acquisition des connaissances tel que nous l'avons décrit plus haut peut s'appliquer aussi bien à l'épistémologie ou à l'histoire des sciences, qu'à l'apprentissage et à l'enseignement. Dans un cas comme dans l'autre, la notion d'obstacle apparaît comme fondamentale pour poser le problème de la connaissance scientifique. Il faut se référer à Bachelard (1938) qui, le premier a mis en avant cette idée.

« il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité ou la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain ; c'est dans l'acte

même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles... On connaît contre une connaissance antérieure » (Ibid. p. 13).

2.0-1 Bachelard étudie des obstacles dans les sciences physiques et identifie les suivants : obstacle de l'expérience première, de la connaissance générale, l'obstacle verbal, l'utilisation abusive des images familières, la connaissance unitaire et pragmatique, l'obstacle substantialiste, réaliste, animiste, celui de la connaissance quantitative.

Ces obstacles ont résisté longtemps. Il est probable qu'ils ont leur équivalent dans la pensée de l'enfant, bien que l'environnement matériel et culturel actuel ait sans doute un peu modifié les conditions dans lesquelles ceux-ci les rencontrent. Des études à ce sujet sont en cours (Viennot, 1979).

2.0-2 En mathématiques un très important travail d'épistémologie a été entrepris dans des directions voisines de celles de Bachelard, dans l'entourage d'Althusser, Raymond, Badiou, Houzel, Ovaert, etc.

Il ne fournit pas pour l'instant une liste semblable à celle de Bachelard ; mais, de grands traits se dégagent ainsi que des classes d'obstacles. La notion d'obstacle elle-même est en train de se constituer et de se diversifier : il n'est pas facile de dire des généralités pertinentes sur ce sujet, il vaut mieux faire des études cas par cas. A côté du travail de recensement et de description des grands obstacles à la *constitution* des concepts, se développent des études portant sur les caractéristiques de fonctionnement des connaissances, *à la fois comme appui* et comme obstacle (alternativement et dialectiquement).

De plus, la notion d'obstacle a tendance à s'étendre hors du champ strict de l'épistémologie : en didactique, en psychologie, en psycho-physiologie, etc.

2.1 Manifestation des obstacles en didactique des mathématiques.

2.1-1 Erreurs

Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes.

De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une

conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une « connaissance » ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions.

Ces erreurs ne sont pas forcément explicitables.

Il arrive qu'elles ne disparaissent pas radicalement, d'un seul coup, qu'elles résistent, qu'elles persistent puis resurgissent, se manifestent longtemps après que le sujet ait rejeté le modèle défectueux de son système cognitif conscient.

Exemple : Un étudiant utilise le « théorème » suivant : « Si le terme général d'une série tend vers zéro, la série converge. » Est-il distrait ? Récite-t-il mal — en inversant hypothèse et conclusion — un théorème du cours ? a-t-il mal compris la notion de limite ? ou celle de série ? est-ce une erreur sur les conditions nécessaires et suffisantes ?...

En rapprochant cette erreur de quelques autres, on comprend que de façon inconsciente, cet étudiant a fait un certain raisonnement, faussé par une représentation incorrecte des réels qui remonte à l'enseignement primaire et secondaire.

Le raisonnement est à peu près celui-ci : « Si x_i tend vers zéro, il existe un rang n à partir duquel les x_i sont négligeables, à partir de ce n on ajoute pratiquement plus rien, donc la série converge. »

Peut-être cet étudiant n'écrirait-il pas ce raisonnement sans s'apercevoir qu'il est faux, et pourtant, il lui paraît évident, car il repose sur certaines pratiques constantes dans l'enseignement primaire et secondaire : seuls sont écrits explicitement des nombres « raisonnablement longs » ; c'est-à-dire des décimaux

$$d = \sum_{i=-n}^m a_i \times 10^i, \text{ tels que } m \text{ et } n < 10 \text{ (le plus souvent } n \in \{2, 3\} \text{)}.$$

Les autres nombres sont désignés par des lettres ou représentés — pour des raisons pratiques — par un décimal voisin qui est présenté comme le décimal voisin ou même le nombre. Exemple : $\pi = 3,14$

Si des questions d'incommensurabilité sont tout de même posées, elles le sont de façon provocante ou paradoxale et finalement gratuite : par exemple : « est-ce que $1 = 0,99\dots$ » ? et parmi les preuves avancées — généralement des raisonnements

par récurrence — seules sont admises par les élèves les observations sur des rangs à distance finie.

Tout renforce la conception que l'on n'utilise qu'un ensemble discret de nombres et l'idée fautive qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists d \in \mathbb{D}$ tel que $[|x - d| < \frac{1}{10^n} \Rightarrow x = d]$

(c'est à dire que x est « pratiquement remplaçable » par d , $x - d$ est nul...)

Cette idée s'appuie-t-elle sur une « mauvaise » définition des décimaux véhiculée depuis l'enseignement élémentaire ? Nous reviendrons plus loin sur cette question ?

2.1-2 Franchissement

L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations; des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu.

C'est pourquoi, il faut un flux suffisant de situations nouvelles, inassimilables par lui, qui vont le déstabiliser, le rendre inefficace, inutile, faux, qui vont en rendre nécessaire la reprise ou le rejet, l'oubli, la scotomisation — jusque dans ses ultimes manifestations.

Aussi, le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions répétées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance.

Cette remarque est fondamentale pour distinguer ce qu'est un vrai problème ; c'est une situation qui permet cette dialectique et qui la motive.

2.1-3 Caractéristiques informationnelles d'un obstacle.

Une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance « intéressante ». En particulier elle reste « optimale » dans un certain domaine défini par des caractéristiques numériques « informationnelles » de la situation. Par exemple, la résolution des systèmes linéaires par substitution, efficace pour le rang 2 devient matériellement impraticable pour n assez grand.

La connaissance, l'homme et le milieu étant ce qu'ils sont, il est inévitable que cette interaction aboutisse à des conceptions « erronées » (ou vraies localement mais non généralement). Toutefois, ces conceptions sont commandées par les conditions de l'interaction qu'on peut plus ou moins modifier. C'est l'objet de la didactique de connaître ces conditions et de les utiliser.

Cette observation a d'importantes conséquences, d'abord pour l'enseignement : ainsi, si l'on veut déstabiliser une notion assez enracinée, il sera avantageux que l'élève puisse investir suffisamment ses conceptions dans des situations

— assez nombreuses et importantes pour lui

— et surtout aux conditions informationnelles suffisamment différentes pour qu'un saut qualitatif soit nécessaire.

Exemple : Un enfant de six ans sait distinguer des nombres jusqu'à 4 ou 5 à l'aide de procédés basés sur la perception. Ces procédés deviennent vite très « coûteux » et peu fiables dès que le nombre d'objets passe à 6 ou 7. Ils échouent au delà. Si l'on essaie d'enseigner dans l'ordre les nombres 6, puis 7, puis 8, on se heurte à des difficultés nombreuses et croissantes et une période de désarroi apparaît.

Au contraire, si l'on propose de comparer des collections de l'ordre de 10 à 15 objets, le modèle perceptif est si évidemment désavantageux, que l'enfant y renonce tout de suite et met en place de nouvelles stratégies (correspondance terme à terme). Ce que l'on veut appeler intuition n'est souvent que l'appréhension inconsciente des limites informationnelles des modes de connaissances.

2.2 Origine des divers obstacles didactiques

2.2-0 Origine d'un obstacle

Nous allons maintenant considérer les obstacles qui se présentent dans le système didactique. Ces obstacles à l'appropriation par l'élève de certaines notions peuvent être dus à plusieurs causes. Il est difficile d'incriminer seulement un des systèmes en interaction. C'est une autre conséquence de la conception de l'apprentissage évoquée ci-dessus. Ainsi la notion d'obstacle épistémologique tend à se substituer dans certains cas à celle d'erreur d'enseignement, d'insuffisance du sujet ou de difficulté intrinsèque des connaissances.

Toutefois, on peut essayer de distinguer diverses origines en mettant en cause le sous-système (du système maître-élève-connaissance), tel qu'en le modifiant on pourrait franchir l'obstacle, alors qu'aucune modification des autres systèmes ne permettrait de l'éviter.

On trouvera ainsi des obstacles didactiques :

- d'origine ontogénique
- d'origine didactique
- d'origine épistémologique.

Pour l'exemple ci-dessus, (relatif à l'acquisition de la notion de nombre) nous parlerons plutôt de limitation neurophysiologique que d'obstacle.

2.2-1 Origine ontogénique

Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge là.

L'épistémologie génétique met en évidence des stades et des moyens de développement (accommodations et assimilations), qui à la fois, ressemblent aux étapes du développement des concepts par les lois de régulations qui les font apparaître, et en diffèrent par la nature exacte des limitations qui déterminent ces régulations.

2.2-2 Obstacles d'origine didactique

Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif. Par exemple, la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix didactique fait par les encyclopédistes puis par la Convention (conformément à une conception qui remonte à Stevin lui-même) : compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés à tout le monde le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opération dans les entiers. Ainsi, aujourd'hui, les décimaux sont, pour les élèves, « des entiers naturels avec un changement d'unité », donc des « naturels » (avec une virgule) et des mesures. Et cette conception, appuyée par une mécanisation de l'élève, va faire obstacle jusqu'à l'université à une

bonne compréhension des réels comme nous l'avons dit plus haut.⁵

Il est caractéristique que le principal facteur de discrimination des élèves dans un questionnaire récent de l'IREM de Rouen soit le calcul faisant intervenir, à la fois, des décimaux et des produits par une puissance de dix. Ainsi, c'est la « compréhension » même de la définition des décimaux qui explique les comportements des élèves. Actuellement, un tel obstacle est devenu à la fois didactique et socio-culturel.

2.2-3 Obstacles didactiques d'origine épistémologique

Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus.

2.3 Conséquences pour l'organisation des situations problématiques

La conception de l'apprentissage, qui s'appuie sur l'étude du développement des connaissances en termes d'obstacles, diffère sensiblement de la conception classique, surtout en ce qui concerne le rôle et l'organisation des situations de problèmes. Et ce, d'autant plus que le problème va jouer dans les processus un rôle fondamental.

2.3-1 Motivations — conditions

Poser un problème consiste à trouver une situation avec laquelle l'élève va entreprendre une suite d'échanges relatifs à une même question qui fait « obstacle » pour lui, et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier, ou construire, une connaissance nouvelle.

Les conditions dans lesquelles se déroule cette suite d'échanges sont initialement choisies par l'enseignant mais le processus doit très vite passer en partie sous le contrôle du sujet qui va « questionner » à son tour la situation. La motivation naît de cet investissement et s'entretient avec lui. Au lieu d'être un simple moteur extérieur, elle est de frustrations en équilibra-

⁵Plus généralement tous les « surapprentissage » précoces ont tendance à créer de tels obstacles. Sont-ils évitables ?

tions constitutive à la fois du sujet, (de sa parole) et de sa connaissance.

Ainsi la résolution d'un problème prendra pour l'élève l'allure d'une sorte de démarche expérimentale, l'occasion donnée à la « nature » (ici, aux concepts mathématiques) de se manifester dans ses activités.

2.3-2 Caractère dialectique du processus de franchissement d'un obstacle

Le processus de franchissement d'un obstacle comporte nécessairement une suite d'interactions entre l'élève et le milieu ; cette suite d'interactions ne prend un sens que dans la mesure où elles se rapportent à un même projet (chez l'élève) à propos d'un concept, dans la genèse duquel elles constituent une étape et dont elles fondent la signification.

Ces interactions mettent en jeu chez l'élève, des systèmes de représentations et peuvent souvent être interprétées comme des échanges de messages, même avec quelque chose d'aussi apparemment « amorphe » qu'un problème, car l'élève est capable d'anticipations et finalise ses actions. Celles-ci prennent, en conséquence, un caractère dialogique (a fortiori lorsque le maître y est impliqué). De plus, ces informations « échangées » sont reçues comme des faits confirmant ou niant des hypothèses ou encore comme des assertions. Si l'on admet qu'une connaissance se met en place en s'opposant à une autre sur laquelle elle s'appuie et qu'elle remplace, on comprendra que nous puissions dire que les processus de franchissement ont un caractère dialectique : dialectiques de l'a priori et de l'a posteriori, de la connaissance et de l'action, du moi et des autres, etc.

Organiser le franchissement d'un obstacle consistera à proposer une situation susceptible d'évoluer et de faire évoluer l'élève selon une dialectique convenable. Il s'agira, non pas de communiquer les informations qu'on veut enseigner, mais de trouver une situation dans laquelle elles sont les seules à être satisfaisantes ou optimales — parmi celles auxquelles elles s'opposent — pour obtenir un résultat dans lequel l'élève s'est investi.

Cela ne suffit pas : il faudra que cette situation permette d'emblée la construction d'une première solution ou d'une

tentative où l'élève investira sa connaissance du moment. Si cette tentative échoue ou ne convient pas bien, la situation doit néanmoins renvoyer une situation nouvelle modifiée par cet échec de façon intelligible mais intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de façon arbitraire des finalités du maître. La situation doit permettre la répétition à volonté de la mise à l'épreuve de toutes les ressources de l'élève. Elle doit s'automotiver par un jeu subtil de sanctions intrinsèques (et non pas sanctions extrinsèques liées par le maître aux progrès de l'élève). Le déroulement de l'apprentissage ne peut donc pas être programmé ; c'est seulement la situation et son choix qui peuvent l'être.

Il s'agit pour le didacticien d'identifier en même temps qu'une étape d'un concept, une situation qui pose à l'élève une question (de l'élève) à laquelle cette étape soit une réponse « constructible » dans le système de l'élève.

Nous avons été conduits à distinguer dans le fonctionnement de l'élève trois types de questions qui commandent trois types de situations didactiques.

2.3-3 Différents types de problèmes : validations, formulations, actions...

a) *Les questions de validation* : l'élève doit établir la validité d'une assertion : il doit s'adresser en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en place les mathématiques en tant que moyen d'éprouver celles que l'on conçoit. Une démarche de preuve est construite dans une dialectique de la validation qui conduit l'élève, successivement à user spontanément des figures de rhétorique puis à y renoncer. Les relations que l'élève doit pouvoir établir pour cela sont spécifiques de cette dialectique. (Brousseau 1970)

Un problème de validation est bien plus un problème de comparaison d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration.

b) *Les questions de formulation* : Pour ses démarches de validation, la pensée doit s'appuyer sur des formulations préalables, même s'il faut pour cela les modifier. Les langages s'éla-

borent eux aussi dans des dialectiques moins spécifiques que celles de la validation. La communication (et ses contraintes) y joue un grand rôle indépendant en partie des problèmes de validité, du moins de la validité explicitable. Car, pour amener la pertinence du langage, cette communication doit être assujettie à remplir un rôle qui la soumet à des validations pragmatiques. C'est dans ce cadre que se manifestent le mieux les contraintes d'économie qui commandent les choix mathématiques judicieux.

c) *Les questions d'action* ou de décision mathématique sont celles où le seul critère est l'adéquation de la décision — le système d'élaboration de cette décision peut rester totalement implicite ainsi que sa justification. Il n'y a à ce sujet aucune contrainte ni de formulation ni de validation. C'est la dialectique la plus générale, les autres n'en sont que des cas particuliers. Elle aboutit à la construction chez le sujet de régularités, de schémas, de modèles d'action, le plus souvent inconscients ou implicites.

2.3-4 Dialectiques et obstacles

Bien sûr, aucune de ces dialectiques n'est indépendante des autres, au contraire.

La formulation est souvent facilitée s'il existe un modèle implicite d'action : le sujet sait mieux formuler un problème qu'il a su résoudre.

L'action est facilitée par une formulation convenable (comme l'a montré Vigotsky⁶). Le langage découpe la situation en objets et relations pertinentes. L'action fournit un type de validation implicite fondamental et la formulation un autre...

Mais inversement, chaque domaine peut faire obstacle à un progrès dans les autres. Certaines choses se font mieux qu'elles ne se disent. Les modèles implicites prennent mieux ensemble un plus grand nombre de données et sont plus souples, plus faciles à restructurer. Des conditions trop favorables à l'action rendent inutile l'explication : par exemple, tant qu'on a utilisé les systèmes sexagésimaux des babyloniens pour les calculs astronomiques, la virgule ne s'est pas imposée, ni le nom de

⁶(note 1983) notamment la métaphore, ou la métonymie - cf. le texte de Bauersfeld et Zawadowski dans les actes de la rencontre CIEAEM de Pallanza, 3-8 Août 1981, « Les processus de géométrisation et de visualisation » — Ed. M. Pelleray.

l'unité de référence, car une erreur de 1 à 60 était impensable pour qui sait de quoi il parle.

De même un langage « trop facile » à manier peut bloquer longtemps une reformulation nécessaire... (c'est l'obstacle verbal de Bachelard).

Le franchissement d'un obstacle implique très souvent, à la fois une restructuration des modèles d'action, du langage et du système de preuves. Mais le didacticien peut en précipiter les ruptures en favorisant la multiplication et l'alternance des dialectiques particulières.

Nous ne nous sommes que trop attardés sur des généralités. Il n'est pas possible de comprendre les rapports réciproques des obstacles et des problèmes sans une étude spécifique.

III. Problèmes dans la construction du concept du décimal

3.1 Histoire des décimaux

3.1-1 Il n'est pas possible dans le cadre de cet article de présenter une épistémologie des décimaux. Une telle épistémologie reste à faire. Elle est difficile à cause de l'éparpillement sur quinze ou vingt siècles des faits à prendre en considération. A chaque « étape » on croit qu'il n'y a qu'un pas à franchir mais il ne l'est pas, et c'est rarement faute d'avoir essayé. La recherche conduit alors à comprendre ce que ce pas avait d'inconcevable, et souvent aussi de ce qu'il faisait perdre par rapport à l'état précédent.

3.1-2 Les chinois avaient un système de mesure décimal au XIII^e siècle av. J.C., les babyloniens, la numération de position, les pythagoriciens concevaient l'ensemble des fractions et Archimède a contribué à concevoir les fractions comme rapports ; il faudra pourtant attendre les arabes (Abu'l-Wafa, 2^eme moitié du X^eme siècle) pour voir la notion de rapport s'appliquer aux fractions et ce rapport tendre à s'identifier aux nombres et il faut attendre Al Kashi (1427) et indépendamment Stevin (1585) pour que les décimaux apparaissent.⁷

3.1-3 Ce dernier utilisait la même notation pour l'étude des nombres géométriques — en fait, les polynômes à coefficients

⁷Nous savons aujourd'hui grâce à A.S. Saydan (the earliest extant arabic arithmetic ISIS, 57, 1966), que c'est Al Uglidisi, qui vers 952, a le premier proposé l'usage des fractions décimales et les a écrites comme nous le faisons aujourd'hui.

entiers — et ce n'est pas par hasard. On avait utilisé les décimaux avant lui (Bonfils de Tarascon 1350, Regiomontanus 1563). Mais il est le premier à proposer de substituer les fractions décimales aux fractions rationnelles et de les noter de façon à permettre de ramener leurs calculs aux règles connues dans les naturels « chose si simple qu'elle ne mérite pas le nom d'invention », dit modestement ce brugeois, elle « enseigne facilement expédier par nombres entiers sans rompez tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes ». Mais il en voit tout l'intérêt et demande que « l'on ordonnât encore légitimement par les supérieurs, la susdite dixième partition à fin que chacun qui voudrait la pourrait user ».

3.2 Histoire de l'enseignement des décimaux

La « vulgarisation » des décimaux devient alors un problème de didactique et il faudra deux siècles pour franchir le premier pas : en effet, par exemple, Gobain en 1711 n'en fait pas état dans un ouvrage destiné aux marchands et d'Alembert en 1779, dans l'encyclopédie (à l'article Décimale), présente la question dans sa forme mathématique. Dans l'édition de 1784 l'abbé Bossut présente les décimaux à la manière d'un naturaliste : ce sont des entiers avec une virgule servant à représenter les mesures. L'aspect fraction décimale est relégué dans un « appendice ». Une fracture s'annonce entre les fractions décimales et les « décimaux populaires » aux algorithmes si merveilleusement simples, qu'ils vont permettre de vulgariser totalement la comptabilité commerciale. La question n'est pas réglée par la décision de la Convention : l'enjeu est trop grand tout au long du dix-neuvième siècle, l'aspect politique du problème didactique l'emporte. Ainsi Charles X réintroduit des « nouvelles toises » de 6 nouveaux pieds et ne conserve du système métrique que ses normes arbitraires. (La nouvelle toise mesure 2 m).

3.2-2 Les efforts de vulgarisation ont été facilités par le choix du système métrique. La générosité des intentions révolutionnaires a conduit à enseigner les « mécanismes » indépendamment des justifications mathématiques, (il fallait réussir en 3 ans à donner tout ce qui était essentiel pour le citoyen). Ces conquêtes du XIX^{ème} siècle vont créer des obstacles au XX^{ème} siècle où il ne s'agit plus de communiquer l'instruction, mais d'éduquer, de faire comprendre.

Les méthodes actives appliquées au système métrique font progressivement disparaître le décimal en tant que rapport, que fraction, il en restait quelque chose à propos des changements d'unités, mais l'efficacité pour les uns, la non directivités pour les autres contribuent à faire disparaître les derniers discours justificateurs.

3.2-3 Aujourd'hui, en France du moins, la rupture est officiellement consommée. Les programmes de 1970 ont introduit une construction (inachevée) des rationnels qui consiste à construire ces excellentes applications à partir des mauvais opérateurs que sont les naturels. Cette construction ne sert à rien, ni à l'introduction, ni à la compréhension, ni à l'étude des décimaux qui sont construits indépendamment : les deux continents se sont séparés. Et ils le sont surtout dans les conceptions même des maîtres et des parents.

3.3 Obstacles à la didactique d'une construction des décimaux

Ainsi une rénovation de l'enseignement des décimaux se heurtera aujourd'hui à de nombreuses difficultés techniques et socio-économiques : quel en sera le prix ? Nous n'avons voulu étudier que les questions d'épistémologie expérimentale dans des conditions scolaires normales pour l'enfant⁸.

Aussi les solutions que nous étudions ne sont-elles pas applicables dans l'état actuel des choses, par l'ensemble des maîtres. Nous ne pouvons pas ici donner en détail l'analyse de tous les obstacles, je renvoie le lecteur à un texte actuellement en préparation. Je me contenterai donc d'évoquer les plus importants.

3.3-1 Le fait d'attacher les décimaux à des mesures conduit à les faire considérer par l'enfant comme un triplet (n, p, u) : d'une part un entier n et d'autre part une division par 10^p , c'est-à-dire un changement d'unité, et une unité u : 3,25 mètres, c'est 325 cm exprimé en mètres. La pratique de « changements d'unité » font que p et u entretiennent des rapports privilégiés : (il suffit de proposer des exercices, où, à la fois, on change d'unité et on multiplie par une puissance de 10 pour s'en apercevoir). Le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. L'élève ne peut alors interpréter le produit de deux décimaux que dans le cas par exemple

⁸Ndlr : voir pour une présentation de ces recherches, Brousseau, 1980 et 1981.

du produit de deux longueurs, ce qui la ramène aux obstacles bien connus des nombres concrets : il aura du mal à concevoir $a^2 - a$ et traînera implicitement des équations aux dimensions.

— Les décimaux seront implicitement limités au rang des plus petites unités *pratiquées* couramment (ou encore ils auront deux chiffres après la virgule comme les francs). L'enfant raisonne comme s'il existait des atomes simplement plus petits que l'incertitude tolérable sur la mesure et comme si tous les nombres étaient des nombres entiers.

3.3-2 « 3,25 est 325 avec la centaine comme unité » disent les commentaires officiels, toutes les relations topologiques vont être perturbées et pendant longtemps : l'enfant ne trouvera pas de décimal entre 3,25 et 3,26, mais par contre, il trouvera un prédécesseur dans \mathbb{D} à 3,15 : ce sera 3,14, etc. Même s'il corrige sa réponse sur tel ou tel point, les raisonnements intuitifs vont être guidés par ce modèle erroné (nous trouverons des erreurs sur ce point, comme celle citée plus haut, jusqu'à l'université).

Cette assimilation aux naturels sera évidemment renforcée par l'étude des opérations sous forme de mécanismes, c'est-à-dire d'actions que l'on effectue de mémoire, sans comprendre, comme dans les naturels, avec seulement un petit complément pour la virgule.

De tête, le calcul suivra une autre pente. On calculera le produit de la partie entière et celui de la « partie décimale » et on recollera les morceaux : $(0,4)^2 = 0,16$, mais $(0,3)^2 = 0,9$ et quelquefois $(3,4)^2 = 9,16$.

C'est encore l'effet de la mesure : ce qui compte le plus c'est la partie entière : la partie décimale fait ce qu'elle peut.

3.3-3 Evidemment, l'assimilation aux naturels ne va pas aller sans difficultés dans le cas de certaines divisions qui flanquent la pagaille dans l'édifice, mais le modèle ne sera pas rejeté pour autant ; ce seront les nombres « qui ne tombent pas juste » que l'on enfouira, indices que l'on a dû se tromper quelque part. On les arrondira, au mieux, on les « encadrera » (sans même les définir) mais l'élève les redoutera.

La définition implicite des décimaux les assimilant à « des naturels avec une virgule » fera que pour l'élève, les naturels ne seront pas des décimaux, mais $0,3\bar{3}$... sera un décimal.

Une des pires conséquences de cet obstacle sera souvent de faire passer aux yeux des élèves, pour des balivernes et des raisonnements sans objets, les tentatives trop timides et trop tardives de le franchir (en 4ème par exemple).

3.4 Obstacles épistémologiques — Plan didactique

Les obstacles ci-dessus sont tous d'origine didactique. Les vrais obstacles épistémologiques et historiques sont autres.

3.4-1 Il s'agit d'abord de symétriser \mathbb{N} pour la multiplication. On peut concevoir quelques fractions mais très vite on veut pouvoir les obtenir « toutes » et pouvoir au moins les additionner et les multiplier par un entier. *Il est indispensable, non pas d'enseigner la construction, mais de poser le problème.* Il faut que l'enfant voit qu'il ne peut pas le résoudre avec les naturels et en tire toutes les conséquences, notamment à propos de l'ordre.

Nous avons montré que l'enfant à 10 ans peut inventer \mathbb{Q}^+ pour résoudre ce problème (voir ci-dessous le problème des feuilles de papier). Je ne crois pas que \mathbb{D} pourrait le satisfaire à ce moment et je ne vois pas comment et pourquoi il l'inventerait.

3.4-2 Par contre, une fois bâti (\mathbb{Q}^+ , $+$, \leq) et placé devant la nécessité de ranger, par exemple, ou d'additionner de nombreuses fractions, l'enfant peut être conduit à utiliser de préférence les fractions décimales et à voir qu'elles « approchent » les autres fractions (que \mathbb{D} est dans \mathbb{Q}). Nous avons aussi montré que cela est possible à l'aide du « problème de l'explorateur » et la didactique qui s'ensuit⁹.

Le problème est inverse du précédent. Il s'agit, non plus d'inventer et de combiner les éléments d'un ensemble inconnu et nouveau, mais au contraire d'approcher un ensemble connu avec une sous-famille bien choisie.

3.4-3 Un texte à paraître donnera le détail des 25 « problèmes » qui constituent la dialectique (qui dure 60 heures), mais je répugne à extraire de leur contexte les exemples que je donne au paragraphe suivant avec des commentaires insuffisants [*] :

- Tout y est question d'équilibre. par exemple, si les enfants « mécanisent » le calcul dans \mathbb{Q} , l'invention de \mathbb{D} tarde et son

⁹Ndlr : voir plus loin p.

usage prend mal. S'il n'est pas suffisamment connu, \mathbb{D} n'est pas construit ni compris.

- Il faut par exemple se garder de « reconnaître » trop vite des pratiques connues : les enfants savent encadrer un rationnel entre deux décimaux aussi voisins qu'ils veulent, bien avant de découvrir que cette pratique est « la division » et de l'instituer en algorithme.

- Il ne faut pas cependant laisser trop longtemps les grands problèmes au niveau implicite. Les dialectiques de la formulation et l'organisation fréquente de débats amène au niveau conscient ce qui doit être su.¹⁰

3.4-4 Le deuxième grand obstacle, c'est la conception des rationnels et des décimaux en tant que rapports, et puis en tant qu'applications linéaires opérant dans \mathbb{Q} . Dans une situation propice (voir le problème du puzzle) les enfants construisent cet ensemble d'application, quelques-unes d'abord, puis d'autres qu'il faudra désigner : les fractions, ou les décimaux, ou les naturels se prêteront à cette désignation.

La somme, la composition de ces applications, puis la décomposition sur \mathbb{D} , fourniront un modèle unificateur de \mathbb{Q} , de \mathbb{N} et de \mathbb{D} .

3.5 Trois exemples de problèmes permettant le franchissement d'obstacles

3.5-1 Le problème des feuilles de papier. (Leçons 1 à 3).

C'est un problème de communication ; les enfants doivent inventer un langage pour indiquer à des camarades dans quels tas ils ont choisi une feuille de papier. Le jeu est joué effectivement : les enfants cherchent un système pour désigner l'épaisseur des feuilles. Après quelques tentatives, ils imaginent de faire un petit tas dont on peut mesurer l'épaisseur avec un double décimètre (ou un pied à coulisse scolaire). Ils envoient le nombre de feuilles et l'épaisseur (entière) ; exemple : (19 ; 3).

C'est un exemple de dialectique de la formulation. Les erreurs, les contestations, les comparaisons, les conduisent à

¹⁰(Note 1983). La deuxième partie de cette remarque s'est révélée fautive : les dialectiques de la formulation et de la validation se sont révélées insuffisantes pour aboutir à l'apprentissage. Une phase d'institutionnalisation est indispensable.

expliciter les conditions d'emploi de ces couples : équivalence, erreurs de mesure... et à en désigner les classes.

Des problèmes de prévision (quelle sera l'épaisseur d'un carton obtenue en collant telle et telle et telle feuille) où, là encore, le critère de réussite est l'expérience et l'acceptation par tous les enfants, des débats scientifiques (est-ce que les couples sont des nombres ?) conduisent les enfants à explorer \mathbb{Q}^+ .

3.5-2 Le problème de l'explorateur, (leçons 12 à 15)

Deux joueurs (ou deux équipes) s'affrontent. Chacun choisit une fraction comprise en 0 et 10, qu'il cache à l'autre. Exemple : A choisit $2/3$ et B choisit $45/10$. A tour de rôle les joueurs choisissent un intervalle et le proposent. Exemple : A écrit $[3 ; 4]$. Si la fraction de B appartient à l'intervalle, celui-ci annonce : « tu me vois ». Si elle est à l'extérieur : « tu ne me vois pas ». Si elle est à l'origine de l'intervalle : « tu m'attrapes ».

Ici B dit : « tu ne me vois pas ».

Pour comparer leurs fractions, les élèves « ramènent au même nombre de feuilles » (opération connue sans être mécanisée). Le gagnant est celui, qui, lorsqu'on arrête le jeu « voit » l'autre dans l'intervalle le plus petit. Au début, les enfants croient pouvoir deviner toutes les fractions. Ils développent des stratégies de filtrage (le filtrage linéaire et décimal apparaissent). Ils distinguent des fractions faciles ou difficiles à attraper. Toute la topologie de \mathbb{Q}^+ se met en place *contre* celle de \mathbb{N} , dans une dialectique qui pourrait faire penser à celle de l'obus et de la cuirasse.

3.5-3 Le problème du puzzle (leçon 25)

« Voici des puzzles de Tangran comme ceux que vous avez utilisés au club de mathématiques. Fabriquez-en de semblables, plus grands. Par exemple, ce côté mesure 4 cm, son image devra mesurer 7 cm. Travaillez par groupe, mais partagez-vous le travail. Vous vérifierez ensuite que le puzzle marche comme il faut. »

Bien sûr, si $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$, le résultat ne sera visiblement pas bon. D'où des discussions, de nouvelles tentatives, le rejet de modèles défectueux comme $f(a) = a + k$.

Les conditions que doit satisfaire l'application linéaire, (de \mathbb{Q}^2 dans \mathbb{Q}^2) que ce soient la conservation des angles ou la condition sur la somme des images, sont fatalement éprouvées, formulées, validées.

A cette occasion, l'idée persiste longtemps chez l'élève (malgré plusieurs expériences parfois) qu'une application simplement croissante fournit nécessairement un agrandissement convenable.

Puis, il croira que toutes les applications sont linéaires... mais ceci est une autre histoire.

IV. Conclusion

Quels sont ces obstacles que ces problèmes permettent de franchir ?

Comment sont organisées les situations d'action, de formulation, de validation annoncées ?

Quelles dialectiques s'engagent et à quels propos ?

Où sont ces caractéristiques informationnelles des situations, favorables aux déstabilisations des notions ?

Je prétends que toutes ces choses sont observables dans les exemples ci-dessus et je compte les montrer dans un prochain ouvrage (on peut trouver des analyses de ce genre à propos de la construction des probabilités dans Brousseau (1974)).

En attendant, il est possible que le lecteur ne les voit pas par suite de quelque obstacle, théorie de l'apprentissage, de la connaissance, ou tout autre cause. Je l'engage à les vaincre à son tour en réalisant ces situations, en les étudiant, en les modifiant, en les discutant.



Conclusion 1983 et commentaires

La recherche des obstacles épistémologiques en mathématiques exige certainement un effort d'invention car le concept de Bachelard s'adapte médiocrement à ce domaine. Mais il peut s'avérer fructueux pour l'enseignement, dans la mesure où :

— les obstacles en question sont vraiment identifiés dans l'histoire des mathématiques.

— leur trace est retrouvée dans les modèles spontanés des élèves.

— les conditions pédagogiques de leur « franchissement » ou leur rejet sont étudiées avec précision de façon à proposer aux professeurs un projet didactique précis.

— le bilan d'un tel projet peut être estimé positif.

Quelques travaux dont certains très prometteurs ont exploité cette veine depuis l'article initial (1976). Nous pouvons faire une sorte de bilan provisoire.

Duroux (1982) a précisé les conditions que devrait satisfaire une connaissance pour pouvoir être déclarée un « obstacle » au sens de Bachelard et explique l'intérêt de ce concept qu'il convient de distinguer de celui de « difficulté ».

Très souvent, c'est parmi les « difficultés » qu'il faut chercher les indices d'un obstacle mais pour satisfaire la première condition qui dit qu'un obstacle est une connaissance, le chercheur devra faire un effort pour reformuler la « difficulté » qu'il étudie en termes, non pas de manque de connaissance, mais de connaissance (fausse, voir incomplète...)

Glaeser prend un point de vue contraire¹¹. Il évoque comme obstacles dans son article « l'épistémologie des nombres relatifs » (1981) « l'inaptitude à manipuler des quantités négatives isolées » et « la difficulté à donner un sens à des quantités négatives isolées. »

Cette formulation montre ce qui manque, à Diophante ou à Stévin, vu de notre époque, dans notre système actuel. Nous repérons ainsi un savoir ou une possibilité qui manque au XV^e siècle et qui empêche de donner la « bonne » solution ou la formulation adéquate. Mais cette formulation masque la nécessité de comprendre par quels moyens on abordait les problèmes qui auraient nécessité la manipulation de quantités négatives isolées. Se posait-on ces problèmes ? Comment les résolvait-on ? Ou croyait-on pouvoir les résoudre ? Est-ce que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était

¹¹Glaeser (1981) revendique le droit à un usage naïf du terme « obstacle » et néanmoins se réfère à Bachelard. Il s'agit donc bien d'un point de vue différent et délibéré.

perçu de la même façon à l'époque ? Pourquoi cet « état de connaissances » paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il raisonnablement efficace ? Quels avantages procurait le « refus » de manipuler des quantités négatives isolées ou quels inconvénients permettait-il d'éviter ? Cet état était-il stable ? Pourquoi les tentatives de le modifier ou plutôt de le renouveler étaient-elles vouées à l'échec à ce moment-là ? Peut-être jusqu'à ce que de nouvelles conditions apparaissent et qu'un travail « latéral » soit accompli, mais lequel ?

Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances mais Glaeser ne les a pas posées et nous ne savons pas bien contre quoi se fonde la manipulation des quantités négatives isolées ; ce qui serait très utile pour l'enseignement.

On peut supposer que l'emploi des « positifs » et des « négatifs » passait par l'intermédiaire d'une interprétation qui attribuait arbitrairement le statut de positif ou de négatif à des « grandeurs » d'abord essentiellement positives :

Exemple : l'entrée et la sortie des produits chez un commerçant peuvent être notées positivement ou négativement selon le poste-comptable où on les considère. D'Alembert expose longuement ce point de vue. L'usage d'une quantité négative isolée nie cette symétrie et risque de faire oublier la convention initiale, ou pire, affirme qu'il « existerait » des objets intrinsèquement négatifs ! Or, le caractère « relatif » des nombres négatifs a été un moyen important dans leur création et dans leur acceptation.

On peut trouver dans l'article de Glaeser ce qui permettrait de formuler cette hypothèse, mais elle n'est pas prise en compte comme telle, car l'usage naïf du terme obstacle ne le conduit pas à une méthode de travail. Au contraire, la définition des obstacles proposée dans l'article ci-dessus, et précisée par Duroux, fait obligation de rechercher cette connaissance obstacle et de l'attester.

Cette méthode conduit aussitôt et naturellement à examiner la deuxième condition. La connaissance obstacle a son domaine de validité et d'efficacité, et donc aussi un domaine où elle est a priori pertinente mais où elle se révèle fautive, inefficace, source d'erreurs, etc.

La recherche des indices historiques correspondants n'est alors plus celle de difficultés ou d'erreurs « semblables » (?) de

notre point de vue d'aujourd'hui, mais celle des échecs caractérisés d'un certain savoir, en le plongeant dans nos connaissances actuelles, on peut prévoir le genre de problèmes qui vont être mal posés ou mal résolus et aller les chercher dans l'histoire : l'épistémologie tend à devenir systématique et expérimentale. Les points de ruptures ne sont plus des dates de découvertes mais des problématiques et des types de savoir mis en œuvre qui peuvent se rencontrer à des moments différents dans des domaines plus ou moins voisins.

Et notons bien qu'il ne suffit pas d'identifier les difficultés et les échecs de la connaissance-obstacle mais aussi et surtout ses succès, et donc remonter dans l'histoire aux obstacles précédents.

C'est ainsi par exemple, que l'on doit relier la « difficulté » à unifier la « droite numérique » (obstacle suivant, selon Glaeser) à « l'inaptitude » (curieuse formulation tout de même si on pense à ceux qu'elle est censée qualifier) à donner un sens à des quantités négatives isolées.

Il pourrait bien apparaître, en effet, que s'il a fallu de très grands « efforts » pour accepter d'abandonner la référence constante à la paire symétrique : naturels positifs, naturels considérés négativement afin de pouvoir donner un sens à un négatif isolé ; c'est cet effort même qui fait obstacle à « l'homogénéisation » de $(\mathbb{N}, +) \cup (\mathbb{N}, -)$ laquelle peut apparaître comme un mouvement contraire.

Duroux note bien que la conception des nombres négatifs étant de nature différente des nombres positifs peut prétendre au statut d'obstacle, mais il laisse entendre qu'il ne peut pas conclure pour les « obstacles » de Glaeser parcequ'ils ne s'expriment pas en terme de connaissance. Ce ne serait peut-être pas impossible, et nous aurions alors un de ces couples d'obstacles reconnus par Bachelard.

Il aurait fallu aussi, toujours selon notre « définition » (3ème condition), attester la résistance des connaissances-obstacles et l'expliquer : par exemple en montrant comment la manipulation de nombres négatifs isolés avait nécessité la conception de « nombres négatifs » de nature différente des nombres positifs et comment, par la suite, ce concept avait à son tour fait obstacle à l'homogénéisation en une entité nouvelle de « nombres » (relatifs). Il est probable que ces deux concepts ont dû fonctionner comme deux pôles opposés ayant des domaines d'effi-

cacités différents, chacun armant les objections au développement de l'autre.

C'est le sens de la troisième condition qui stipule que l'attestation des résistances à la mise en place et au rejet d'une connaissance est indispensable pour établir son caractère d'obstacle. Il me semble que l'article de Glaeser ouvrait de ce point de vue des voies intéressantes à explorer.

L'étude des domaines de validité et des résistances à l'emploi des quantités négatives isolées pourrait conduire à le replacer par rapport à un obstacle plus ancien et plus important : « Les nombres doivent être des mesures de quelque chose ». Alors on ne peut utiliser les négatifs isolément sans risquer d'oublier ce qu'ils mesurent. Et on ne peut pas non plus considérer \mathbb{Z} comme un ensemble homogène puisqu'il ne peut être un ensemble de mesures.

Je crois d'autre part qu'il faut considérer dans un cas comme celui-là, toute la composante didactique attachée à l'évolution des connaissances dans la société : les objections de Stendhal ne sont pas à confondre avec les hésitations de d'Alembert même si elles peuvent leur être rattachées.

C'est ce qu'exprime Cornu qui analyse de ce point de vue la notion de limite (1983). Après avoir repéré dans une étude historique des difficultés qui lui paraissent de bonnes candidates pour fournir les obstacles à la genèse de la notion, il cherche dans les comportements des élèves les traces correspondantes. Il devient clair que ces conceptions-obstacles des élèves doivent être étudiées de la même manière, c'est-à-dire en utilisant les mêmes conditions, mais cette fois du point de vue de l'élève, de son milieu et de sa culture.

Cornu tend à mettre en évidence que conformément à mon hypothèse générale, certaines des difficultés des élèves peuvent se rassembler autour d'obstacles attestés par l'histoire.

C'est dans l'analyse des résistances et dans les débats qui les ont vaincues qu'il faut chercher les éléments qui permettront d'identifier les obstacles pour les élèves. En aucun cas, il ne saurait suffire de plaquer, d'appliquer sans modifications, l'étude historique à l'étude didactique. Et c'est aussi à cette source qu'il faut puiser les arguments pour choisir une genèse scolaire d'un concept et construire ou « inventer » les situations d'enseignement qui produiront cette genèse.

Il est important, en outre, de s'assurer que les arguments historiques et épistémologiques, psychocognitifs et didactiques qui font l'intérêt de l'étude des obstacles épistémologiques sont bien indépendants.

La mise en évidence des difficultés des élèves, puis la constitution de ces difficultés en modèles spontanés ou en connaissances-obstacles peut et doit se faire indépendamment (et même contre l'hypothèse) d'une identification historique.

La mise en évidence des résistances et des franchissements en situations scolaires est suivie de leur explication, elle-même prouvée par l'étude et la réalisation expérimentales de genèses du concept (et des situations qui les produisent). Là encore, la source des informations peut et doit être indépendante des précédentes au prix de certaines précautions méthodologiques.

La convergence, si elle se réalise, d'arguments indépendants de ces divers types, constitue un fait scientifique au sens plein du terme. La signification de ce fait apparaît alors clairement :

— d'une part il appuie les conceptions que je rappelais au début de mon article de 1976 sur l'apprentissage ou plutôt de la genèse psychogénétique, didactique et historique des connaissances (aspect positif de certaines erreurs des élèves et donc nécessité de problèmes présentant des difficultés, existence d'accommodations et de restructurations locales ou importantes, nécessité de saut de complexité, etc).

— d'autre part il permet de choisir parmi la foule des « difficultés » que les élèves rencontrent, celles, peu nombreuses, qui doivent être identifiées et répétées explicitement et institutionnellement, et d'éviter ainsi que l'on submerge l'enseignement dans une masse inextricable de considérations sur la connaissance : heuristique, mnémotechnique, etc.

Ces deux conséquences sont très importantes pour l'enseignement. J'espère qu'il est clair maintenant que les critères que nous avons extraits, afin d'éprouver si une difficulté est un obstacle, ne sont pas des exigences gratuites. Ils ne constituent pas une préciosité tyranique, ni une mode d'école. Ils sont indispensables à l'application d'une méthode d'analyse des phénomènes liés à l'appropriation des connaissances et à la production d'ingénierie didactique (pour des exemples à ce sujet, se reporter à 1980 et 1981, ces deux articles sont annoncés dans le texte initial, et à l'article « Epistémologie des déci-

maux » (à paraître) et dont seul un très court résumé est donné dans 1981).

Bien que prometteurs les travaux rapportés ci-dessus n'établissent pas pour l'instant de façon irréfutable de tels « faits ». La tâche est rude il est vrai. Bachelard trouve en physique des points d'appuis qui manquent en mathématiques (projets d'expériences, hypothèses, comptes-rendus) et son analyse s'arrête au moment où les « faits » passent sous le contrôle d'une véritable théorie scientifique : Bachelard ne fait donc pas une épistémologie des théories physiques mais celle de l'établissement de la physique.

Aussi était-il intéressant de rechercher en utilisant les procédés de l'analyse des situations, les changements de statuts de la connaissance mathématique. Chevallard a distingué ainsi des concepts protomathématiques, des concepts paramathématiques et mathématiques proprement dits. Ces distinctions me semblent indispensables pour avancer dans la recherche des obstacles dans la mesure où elles permettent de rattacher les connaissances à leur fonction et à leur mode de fonctionnement dans les activités scientifiques et en ce sens que les obstacles en mathématiques sont peut-être plus souvent des obstacles au changement de statut que des obstacles à la connaissance elle-même.

L'explication des résistances est le cœur de la recherche des obstacles épistémologiques et il n'y a guère de méthode car chaque explication est spécifique de l'obstacle en question. Il est nécessaire de suivre pas à pas les tentatives de rejet, les remodelages et les reprises, et de chercher les conditions qui y ont présidé pour en saisir les mécanismes. Cette recherche est toutefois facilitée dans le cas d'un véritable obstacle par le fait qu'un obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance achevée, en ce sens que son rejet doit finalement être incontournable explicité, et par conséquent qu'il laisse des traces, parfois profondes dans le système des connaissances (c'est la 4ème condition). Ceci montre qu'il n'est jamais le fruit unique d'une erreur passagère qu'il suffirait de réparer, d'une ignorance qu'on pourrait combler, d'une mode qui passerait et a fortiori d'une inaptitude ! Il peut résulter de circonstances culturelles sociales, économiques... mais ces « causes » s'actualisent en conceptions qui demeurent, une fois les causes

disparues et qu'il ne suffit pas d'oublier, car c'est à ce niveau que le « débat » doit trancher.

C'est aussi par là que les obstacles épistémologiques intéressent le didacticien qui n'a que faire, à priori, d'un musée des concepts et des connaissances périmées. Dans la mesure où la connaissance-obstacle est constitutive du savoir, où elle est présente dans les modèles spontanés des élèves, et dans la mesure où un traitement inadéquat dans l'enseignement entraîne des erreurs répétées et dommageables, il devient indispensable de la reconnaître et de la rejeter avec les élèves.

Ce point de vue nous conduit sans rupture cette fois, au cœur de l'étude de l'évolution des théories mathématiques dont l'importance pour l'enseignement cesse d'être métaphorique et qui commence à s'articuler comme une composante essentielle de la Didactique ainsi que le soulignent Balacheff et Laborde dans la préface de leur traduction de Lakatos.

Nous commençons seulement à étudier et à exploiter cette notion d'obstacle et les théories qui l'accompagnent. Je suis convaincu que les méthodes et les problématiques qu'elle permet d'avancer et que j'ai essayé de présenter ici, montreront toute leur fécondité (en particulier pour l'enseignement) dans un avenir proche.

BIBLIOGRAPHIE

- ABD EL JAOUAD (1978) : vers une épistémologie des décimaux. *Bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques*. N° 50, pp. 1-27.
- BACHELARD G. (1938) : *la formation de l'esprit scientifique*. Paris : VRIN, 1975.
- BALACHEFF N. et LABORDE J.M. (1983) : introduction à l'édition française de « proofs and refutations ». I. Lakatos (à paraître).
- BLOOM (1976) : *Taxonomie des objectifs pédagogiques*. 2 tomes. Presses Universitaires du Québec.
- BROUSSEAU G. (1970) : Processus de Mathématisation. *La mathématique à l'école élémentaire*. Paris : Ed. Ass. des Prof. de Math., 1972, pp. 428-442.
- BROUSSEAU G. (1973 a) : peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ? *Actes du Congrès International des Sciences de l'Education*. Paris, Septembre 1973.
- BROUSSEAU G. (1973 b) : l'apprentissage des opérations dans les naturels. *Cahiers de l'IREM de Bordeaux*, n° 13.
- BROUSSEAU G. (1974 a) : *les structures de données dans l'enseignement élémentaire*. Compte-rendu du stage des IDEN, Novembre 1974. Publication de l'IREM de Bordeaux.
- BROUSSEAU G. (1974 b) : Réflexions sur l'enseignement du calcul numérique. *Cahiers de l'IREM de Bordeaux*, n° 15.
- BROUSSEAU G. (1974 c) : *Etude d'une expérience à probabilités*. Publication de l'IREM de Bordeaux.
- BROUSSEAU G. (1980) : problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 1 n° 1, pp. 11-58.
- BROUSSEAU G. (1981) : problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 2 n° 1, pp. 37-127.
- BROUSSEAU G. (1983) : *Epistémologie des décimaux* (à paraître).
- BROUSSEAU G. et BRIAND J. (1975) : *premières découvertes des lois du hasard à l'école élémentaire*. Film Ofratème, Série Atelier de Pédagogie. (PR 07041).
- BROUSSEAU G. et BRIAND J. (1975) : *quelques réflexions sur une approche des décimaux et documents d'accompagnement*. Ofratème, série Ateliers de Pédagogie.
- BROUSSEAU G. et BROUSSEAU N. : *la construction des rationnels et des décimaux*. (64 séquences), (à paraître).
- BROUSSEAU G. et PROUTEAU C. : *Problèmes d'enseignement des décimaux du cours moyen à la quatrième*. Note de travail et annexes. Publication de l'IREM de Bordeaux.

- CORNU B. (1983) : *apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème cycle, Mathématiques, Université I de Grenoble.
- D'ALEMBERT (1679) : l'article décimal in *Encyclopédie universelle*, cf. aussi *Encyclopédie des Mathématiques*, 1784.
- DUROUX A. (1982) : *la valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure*. DEA de Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux. Publié dans Petit x n° 3, 1983, Ed. IREM de Grenoble.
- GLAESER G. (1981) : épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 2, n° 3, pp. 303-46.
- GOBAIN (1710) : *l'arithmétique aisée*.
- GONSETH F. (1936) : *les mathématiques et la réalité*. Paris : Blanchard, 1974.
- IREM de Strasbourg (1973) : *le livre du problème*. Paris : Cedic.
- IZORCHE M.L. (1977) : *les réels en classe de seconde*. DEA de Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux.
- PIAGET J. (1975) : *l'équilibration des structures cognitives*. Paris : PUF.
- REGNIER (1976) : *la crise du langage scientifique*. Paris : Antropos.
- SALIN M.H. (1976) : *le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire*. DEA de Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux.
- SEURET (1834) : *traité d'arithmétique*.
- STEVIN S. (1585) : *la disme* (1634, 1ère édition).
- TATON (1966) : *Histoire générale des sciences*. Paris : PUF
(voir sp. Tome 1 : Vercoutter et Itard, la science antique et médiéval ;
Tome 2 : Koyre, la science moderne).
- THOM R. (1972) : *Stabilité culturelle et morphogenèse*. Reading Massachusetts.
- VIENNOT L. (1979) : *le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*. Paris : Hermann.

THE FRAGILITY OF KNOWLEDGE

G. BROUSSEAU - M. OTTE

PART I

1. The didactical contract

The contract: the teacher, obliged to teach and the pupil, obliged to learn.
(On considering this definition of the contract, some tend to say: there is nothing meaningful about it. It's just a definition of the terms of "teacher" and "pupil" respectively, which we know already. On the other hand others understand the contract literally and absolutely and hence raise objections, saying it demands too much, in fact, taken absolutely, the impossible. Taken together, these reactions demonstrate the very essential nature of the above characterization of the teaching - learning situation. You have to take them seriously as they describe a kind of reality but you must not take them literally in an empirical sense. Theoretical abstractions are open.

For the persons involved, the contract is mainly implicit and it cannot be negotiated. Teacher and pupil therefore are all the time busy inventing ever new forms of behaviour and interaction, which they hope to be in accordance with the contract, being either interpretations of it, or tolerable evasions. Neither of the two parties is able to completely control the contract, nor may it be ignored.

The contract must be honored at all cost, for otherwise there will be no education. Yet to be obeyed, the contract must be broken, because knowledge cannot be transmitted ready-made and hence nobody - neither the teacher nor the pupil - can be really in command.

Traduction française existante

In mere training, there is no such contract. Judah Schwartz makes a similar "distinction between education and training in order to underline the fact that the nature of the social contract between teacher and learner is different in the two cases. In training, there need not be an explicit or implicit obligation for the teacher to teach or the learner to learn the underlying intellectual structure of what is being taught and learned". In Schwartz's view, "education in a democratic society must be based on a different set of assumptions about teachers and learners. The price of a free people not knowing why it believes what it believes can, in the end, be the loss of that freedom" (J. Schwartz: Tyranny Discipline Freedom and License, some thoughts on educational ideology and computers).

What does this mean however? Isn't a driving instructor not obliged to teach ... etc.?

To teach or to learn one needs methods. "Method" labels the seemingly unproblematic meeting ground for teacher and pupil. This very often leads to "overmethodization" which is caused by the teachers desire to fix the child's activities in an ever narrower way as well as by the child's demanding definite rules and an ever narrower specification of the things to be learned.

Only in case of very few forms of knowledge, for instance when I want to learn how to drive a car, the method of learning and teaching are identical with application. In such cases only can one design the process of application itself through the method of instruction. Theoretical knowledge is not of such a kind. "It might be asked: What is there about the proof of Dedekind's theorem that a child 10 years old could not understand? - For this proof is far simpler than all the calculations which the child has to master? - And if now someone were to say: it can't understand the deeper content of the proposition - then I ask: how does this proposition come to have a deep content?" (L. Wittgenstein: Remarks on the Foundations of Mathematics. Oxford 1967, p. 148e).

The answer again is: by means of applications. Applications which are chosen and decided by the learner himself.

This results in the "paradox of the didactical contract" between teacher and learner. If the problem as well as the information about its solution is communicated by the teacher he deprives the pupil of the conditions necessary for learning and understanding. The latter can only reproduce the method of handling and solving the problem communicated to him. Again, as in Wittgenstein's example, we are led to observe that mathematics is not just a method. We do know on the other hand that isolated problemsituations do not out of themselves produce means for their analysis or solution. And in addition to that: what relevance should a specific application of knowledge or should the solving of a particular problem have?

It is apparently not possible to understand the crucial function problems fulfill for the development of cognitive activity without seeing "problems as variables" and accordingly search for the regulatory mechanism of this variability. Finally it lies in the logic of the idea of "problems as variables" to see the crucial point in the connection of objective and social relations. Our interactions with objects are generally also interactions with each other and a problem is not a set of statements nor a purely objective, isolated entity but is an objective as well as social relation described through a set of statements. Or to put it differently: education and development (Bildung) is the central notion of didactics and pedagogy, not "learning", "problem - solving" or even "creativity".

Searching for the "regulatory mechanism" of some variability amounts to looking for a meta - perspective. G. Bateson has out of such a perspective presented a complex hierarchy of processes of learning with a "profound reorganization of character" taking place on the highest level of "Learning III". Stated differently: the problem to be ultimately "solved" or the "application" of knowledge intended in the end is the human subject himself. This self - application or auto - development is however of a contradictory or

even paradoxical nature, as we shall see. The contradiction lying in the fact that real human subjectivity of selfhood has both an individual and a social character. It is in particular both an individual mind and a "society of minds" simultaneously.

Let us recapitulate our exposition of the "paradox of the didactical contract" by means of Bateson's afore-mentioned hierarchy of levels of learning and meta-learning. This hierarchy is based on a formal argument which realizes that a meta-perspective consists in transforming some fixed "constants" (contexts etc.) into variables. Generalization amounts to the introduction of variables. Bateson summarized the hierarchy as follows: "Learning I is change in specificity of response by correction of errors of choice within a set of alternatives. Learning II is change in the process of Learning I, e.g., a corrective change in the set of alternatives from which choice is made, or it is a change in how the sequence of experience is punctuated. Learning III is change in the process of Learning II, e.g., a corrective change in the system of sets of alternatives from which choice is made. (We shall see later that to demand this level of performance of some men and some mammals is sometimes pathogenic)" (G. Bateson: *Steps to an Ecology of Mind*, Paladin Books 1973, p. 264).

A classical example of Learning I is provided by the behavior of a "Pavlovian dog". We might also say that reproducing the proof of Dedekind's theorem as a result of rote learning is an example of Learning I. We might however realize that, especially in mathematics there does not exist rote learning without the occurrence of "learning to rote learn", which obviously represents an example of Learning II. "What the data show is that for any given subject there is an improvement in rote learning with successive sessions, asymptotically approaching a degree of skill, which varied from subject to subject. ... This improvement cannot have been due to Learning I. ... It is also worth noting that educators have strong opinions about the value (positive or negative) of training in rote learning. Progressive educators insist on

training in insight, while the more conservative insist on rote and drilled recall" (Bateson, p. 265/266).

It is rather unclear how Learning III may be described positively and it is difficult to give examples as they very seldom occur. But applying the same sort of logic to the relation between Learning II and Learning III as was used in describing the relation between Learning I and Learning II one is already led to the point essential for our argument. "Learning II is an economy of the thought processes (or neural pathways) which are used for problem - solving or Learning I. The premises of what is commonly called 'character' - the definitions of the 'self' - save the individual from having to examine the abstract, philosophical, aesthetic and ethical aspects of many sequences of life. 'I don't know whether it's good music: I know whether I like it.'

But Learning III will throw these unexamined premises open to question and change

Let us, as was done above for Learning I and II, list some of the changes which we shall be willing to call Learning III.

- (a) The individual might learn to form more readily those habits the forming of which we call Learning II.
- (b) He might learn to close for himself the 'loopholes' which would allow him to avoid Learning III.
- (c) He might learn to change the habits acquired by Learning II.
- (d) He might learn that he is a creature which can and does unconsciously achieve Learning II.
- (e) He might learn to limit or direct his Learning II.
- (f) If Learning II is a learning of the contexts of Learning I, then Learning III should be a learning of the contexts of those contexts.

But the above list proposes a paradox. Learning III (i.e., learning about Learning II) may lead either to an increase in Learning II or to a limitation and perhaps a reduction of that phenomenon. Certainly it must lead to a greater flexibility in the premises acquired by the process of Learning II - a

freedom from their bondage.

I once heard a Zen master state categorically: 'To become accustomed to anything is a terrible thing.'

But any freedom from the bondage of habit must also denote a profound redefinition of the self. If I stop at the level of Learning II, "I" am the aggregate of those characteristics which I call my "character". "I" am my habits of acting in context and shaping and perceiving the contexts in which I act. Selfhood is a product or aggregate of Learning II. To the degree that a man achieves Learning III, and learns to perceive and act in terms of the contexts of contexts, his 'self' will take on a sort of irrelevance. The concept of 'self' will no longer function as a nodal argument in the punctuation of experience" (Bateson p. 274/75).

On a first glance it may appear that awareness and action stand in antithetical opposition in the sense as understanding everything makes one unable to take a decision. Theoretical understanding of reality is in fact based on such an opposition and conversely defines its unity as an evolutionary process, namely as the development of the knowing subject himself.

LaPlace's "infinite intelligence" being aware of every particle of the whole universe nevertheless does not have any reasonable knowledge, because he himself is no longer a part of that universe. He as a knowing subject has no place in that universe and his knowledge of it has therefore no purpose.

Being on the other hand completely context-bound like one of the material particles would again render it impossible to gain insight and knowledge. Again such knowledge would lack any purpose.

It is therefore the growth and development of the knowing subject as part of some contexts which provide knowledge with sensible foundations.

- If knowledge is but a set of rules, methods or algorithms to be directly applied, the subject (teacher or pupil) is not involved nor will he be transformed (evolved) by the cognitive process but will only be conditioned by the context of application.

- If knowledge is but emotion, feeling or awareness, he may become involved in the sense of becoming encapsulated and locked; by chaotic freedom again there will occur no development.

The complementarity of method (form, style etc.) and application (content . . . etc.) is characterizing THEORETICAL KNOWLEDGE. The complementary processes of formalisation (giving form) and of application (giving content) together constitute the individuality of the cognitive subject within the context of social history. But how this occurs has not yet been clarified.

2. Intuitive (referential) vs. formal (operational) control of meaning

As the name is not the thing named as well, as the map is not the territory, theories have also to be taken metaphorically. Metaphors are indispensable if we creatively want our experiences in one field to be used within a different one still to be explored, or if we want to communicate beyond the boundaries of individual experiences or actual situations i.e. on the level of social man.

"The theory of language since the early Middle Ages has repeatedly asserted that the word out of context has no meaning. The validity of this statement is however, confined to aphasia or more exactly to one type of aphasia" (Jakobson/Halle: *Fundamentals of Language*, The Hague 1971, p. 79). This type of aphasia is, for instance, characterized by the inability "to produce a purest form of equational predication. The tautology a = a : or 'no' is 'no'" (p. 81). A patient with this type of aphasia doesn't utter "the

word 'knife' alone, but according to its use and surroundings alternately calls the 'knife' 'pencil - sharpener', 'apple - parer', 'bread - knife', 'knife - and - fork', so that the word 'knife' was changed from a free form, capable of occurring alone, into a bound form" (p. 79).

"The aphasic defect in the 'capacity of naming' is properly a loss of metalanguage (our underlining). As a matter of fact the examples of equational predication sought in vain from the patient's cited above are meta - linguistic propositions referring to the English language" (p. 82). It is quite natural that patients of this type could not be brought to understand the metaphoric character of words. Metaphoric meaning does not exist if meaning is reduced to use in actual situations.

"Colourless green ideas sleep furiously". Even such a sentence (it was given by Chomsky (1965, p. 149) to illustrate the relatively independent existence of form and meaning, syntax and sense and has been quoted since 'everywhere'), even this sentence 'makes sense' when interpreted metaphorically. So metaphoric understanding is on the one hand characterized by a meta - perspective (quite similar to the above described relation of learning types). On the other hand metaphors are not mere (implicit or explicit) comparisons but they provide an immediate and intuitive way of understanding. Metaphors must be spontaneously acceptable and cognitive activity must be able to directly start from the understanding which they give. But experience is never directly of the world as it is (remember: the name is not the thing named), and metaphorical understanding is not to be confused with literal understanding. It is part of the formation of the understanding subject himself. It expresses the understanding of the cultured, educated and experienced subject.

Bruno Bettelheim reports on the inadequacy of all translations of the work of S. Freud in the U.S., because of the lack of a coherent cultural basis to support the understanding of the essential metaphors of Freud's theory like "Oedipus complex", for instance (B. Bettelheim: Freud and Man's Soul, New

York 1983).

Textbooks as well as popular science reports lavishly use metaphors, but do not provide any real insight, because of the arbitrary and inconsistent way they are using them. In fact, metaphors in textbooks are then no longer understood as metaphors, but are taken literally and presentations become over-methodized. This is a real paradox: a "formal" structure is necessary for productive use of metaphors. Within a speech act theory there can never be developed an understanding of the real purpose of the metaphorical! If the metaphorical is lacking, meaning is identified with "use", i.e. is completely context bound.

2. Bourbaki's "fascicule de résultats" of set theory

begins with a statement which specifies its role for the student: in it, the latter will find "all the definitions and results... used in this volume" and will be able "to confine himself to attributing to them (to the terms introduced without definition) their usual meaning... which makes the propositions advanced almost self-evident". Hence, "the results of set theory", presented together with their formalization in the canon, are most certainly an object of teaching. The means suggested to the student for mastering the use of this theory is the "usual meaning", that is, on the one hand, a general and somehow ontological metaphor, and on the other hand a "literal use of the definitions of the technical terms" (Godement 1963, p.19). In fact, much care is devoted, in genuine textbooks, to presenting a large number of exercises, "the lack of which would reduce the utility of a book intended for beginners to almost nothing" (ibid. p.17). Mastery of the conjectures in this fundamental chapter is thus mainly semantical. The proofs of the most difficult theorems and the difficulties of logic will be examined in another volume (book one) and from a "formalist" point of view, the view of the "fascicule de résultats" of being declared "naive". Hence, the students are expected to check the validity of what they put forward in this field through their possession of a

"representation" of the things about which they talk.

Sets are a sort or substitute, a universal metaphor for mathematical structures, but a large number of exercises are in fact necessary to distinguish the "rightful" uses of formalism from those which are beset with gross and unsuspected contradictions.

What we see upon comparing the naive use of the idea of set with set theory as a formal discipline, and upon noticing that in Bourbaki both occur with somewhat indistinct borderlines, is that intuitive and ontological meaning and technical sense in modern mathematical theory cannot be brought into positions which are clearly separated from another and static. Mathematics always uses metaphors and as well tries to regulate and control the intuitive meanings. To say it in other words: foundation and growth of knowledge become more and more intertwined.

Pure mathematics has used the notion of "set" as a universal ontological metaphor in an attempt to keep its unity. The logical paradoxes have clearly shown that methods which were everything but intuitively clear and simple had to be used to make this ontology work (besides, these attempts were not very successful). For the mathematical researcher, this ontological metaphor has always been embedded within the structure of a mathematical style expressing mathematical practice as symbolic activity.

Symbolic models or representations do not liberate us from the necessity of having operational systems and intuitively accessible ontological foundations simultaneously, which should both evolve in a parallel fashion, or, in terms of school mathematics, of having formulae and applications. The representations themselves are vehicles of this double movement. In any case, they must retain their linkages with the operational processes, and with the object field of the knowledge which is to be developed. Hence, they cannot be transformed into isolated objects of instruction, as in Papy's books.

Naive set theory intended to be a means of understanding becomes an

object of teaching.

The main reason for this is quite obviously that the concept of set is not a common concept that can be naively elaborated in a directly usable form. Is there, however, no possibility of economizing some exercises and some reasonings by the use of drawings?

"These round figures, or rather these spaces (for it does not matter which shape we give them) are very appropriate to facilitate our reflections about this matter, and to reveal to us all the mysteries which one boasts of in logic and which are proved there with much trouble, while with figures, everything jumps into the eyes." (EULER, Letters to a German Princess, Part 2, letter XXXV, 17.2.1761).

Hence, why not use these round figures in a corner of the blackboard or at the margin of a page to accompany the correct mathematical discourse (N. Bourbaki, *Topologie générale*, Ch. 1 & 2, second edition 1951, pp. 12, 131,...164). The student, of course, will not require that the use of these figures be accounted for. Whether their function is essentially heuristic, as for Euler who uses them to enumerate the syllogisms and to assure himself of the completeness of his study, or, more simply just for show, as in G. Papy's first propositions, they are suggested as means, the student being expected to make good use of them. "Graphs" are a simple means for teaching, among others, the naive theory of sets (or the logic of classes) the value of which may crumble as soon as the pupils ask to see how it works.

This is what is bound to happen if the plan to extend teaching of formal structures to the secondary level and even beyond is formed. There is no lack of justifications for this new plan, this is not even a matter of discussion, but it is no longer possible to increase the explanations and exercises, nor to fall back upon an entirely rigorous use of formalism. The teachers who have to answer the pupils' questions, and respond to their failures, are not going to be able to retain naive set theory as the main object of teaching. In fact, they

will be led, by the requirements of the didactical contract, and for the reasons we have quoted above, to transform the intuitive means of control into an object of teaching (in France, somewhat officiously, despite being widespread, while somewhat more officially elsewhere). Moreover, the means will have to function as a genuine model, the pupil rightfully requiring that he be able to answer all problems by means of the representations has been taught. Now both Euler's round figures and Papy's "potatoes" do not permit this, and each contradiction will have to be solved by the conventions which must be included in the method.

To give an example: each complement of a set is a set. Now it must be represented as well, and hence also the universe; while a figure designates in fact two sets which must be distinguished, be it by coloration, or be it by a notation of the boundary. The idea of "set" fits well to a set of points of the connected, compact plane... the interplay of intersections, however, has done everything to produce parts that are in several pieces, which will be identified by coloring the boundary in the same color. It will be necessary to be able to indicate that one part is empty, and to distinguish a genuine list of elements (in which all elements are represented and identified, and there has been one author who used the term "complete" to the detriment of the analysts) of a drawing in which only a generic element or some special elements are represented. Even if one excludes drawings of the potatoes' "interior", the boundary determines in fact three regions, and not just one... Every insufficiency, every incoherence of the metaphor can only be overcome at the cost of a convention, a specification, a complementary information which teachers and editors require of textbook authors. The idea that everyone can and will solve these problems of representation individually does not permit teaching to avoid transforming all these conventions into objects of teaching, but rather adds to the confusion where the intention was to establish the simplicity and universality of one language.

And the spiral of the metadidactical nose - dive spins faster: We have seen that in order to control the use of Papygraphs that have become objects of teaching, conventions had to be developed which sharply increased the amount of metalanguage required: "potato, arrow, boucle ribambelle ("loop cluster") themselves acquire mathematical status, not only in the pupils' mouth, but even in certain volumes where definitions are formulated in terms like "Une relation reflexive est une relation boucle?'e partout".

Great efforts have been made to unify all these particular conventions and to develop a didactics of graphs, but the step has not yet been accomplished. In the classrooms, however, the process continues between teacher and pupils: innovations of all sorts, whether introduced by the teacher or by the pupils, and which of course will be typical for the history of the class, first become themselves objects of knowledge themselves, then objects of teaching, which have no cultural basis whatever and cannot be depersonalized.

The phenomenon which we have seen consists of transforming a means of education, or a means of understanding a piece of knowledge, into an object of instruction. It occurs most frequently when a difficulty or a failure has to be faced. In its most familiar form, for example, the teacher gives a first explanation to enable the pupil to acquire the knowledge, but the latter fails and (implicitly) holds the course responsible; while the teacher either changes the problem to make it simpler (Topaze effect or Jourdain effect) or looks for an analogous problem taking his first explanation as object of his second explanation, hence as object of study, and finally as a subject matter to be taught.

The phenomenon of the "metadidactical nose - dive" just described has been going on for several years. This is all the more surprising as a large number of individuals who have received the best scientific training have been involved, and as there has been no lack of criticism and warnings: it would seem to be irrepressible, and neither epistemological alertness nor common

sense seem sufficient to bring it under control.

That this is an effect of the contract established between teacher and pupil is rather evident, but it is important to show that it is specific to every subject. Hence, it is of a didactical character, and its mechanism is described in detail.

The example we have given clearly shows the role played by the fact that we are dealing with a fundamental and almost metamathematical theory.

Initially, the didactical contract leads to a slipping of functions between the knowledge whose transfer is intended, the means of controlling this knowledge (its understanding), object of teaching, and means of teaching. Later, or rather dialectically, the change of function profoundly modifies the elements present.

The requirements of the didactical contract lead the teacher to formulate as many means of control as possible, which the pupil may apply in using the knowledge the teacher intends to transfer while he is explaining the object of teaching, transforming these means of control, according to his needs, into pieces of knowledge and skills which are as text - determined and algorithmic as he can make them.

The conditions of the didactical contract the necessary and intuitive meta - understanding tends to be "methodized" and thereby to be destroyed. No conclusions of this analysis are to be offered at the moment.

8. PARADOXE SUR LE COMEDIEN (DIDEROT)

In school the pupil has to "close" the problem, i.e. he has to answer a certain question and to present the answer in a certain desired manner. Schooling establishes above all else both the individual's conscious and unconscious relationships to knowing. "Indeed, like any social insight, the judgements that teachers make with regard to students, particularly in

examination situations, take into account not only knowledge and know-how, but also the intangible nuances of manner and style, which are the imperceptible and yet never unperceived manifestations of the individual's relationship to such knowledge - know..." (Bourdieu a.o. 1974, p. 338).

But does style represent all aspects of the relationship to knowledge in question? To make a problem one's own, to have an "intrinsic" motivation, to get involved etc. etc. all this seem to be activities in contradiction to the process and purpose of schooling or not? The questions arising here are very brilliantly expressed in Diderot's "Paradox of Acting". "Les comediens font impression sur le public, non lorsqu'ils sont furieux, mais lorsqu'ils jouent bien la fureur" (190). And a few lines later Diderot writes: "... ce que la passion elle - meme n'a pu faire, la passion bien imitee l'execute" (191). What then does it mean to know? To be intrigued, engaged or occupied by a question or a problem? Is that enough, or is it at least the essential aspect? Or is it more essential to master the problems and skills in question? Do proficiency in the skills and ability to apply them correctly in mathematical problem solving represent the goals of mathematical instruction in school? The paradox of acting suggests something else.

The subject has to distinguish between himself, the knowledge and the object, and only social interaction will help to achieve such an objectivation, which makes the real knowledge.

The paradox may thus be restated: in that moment only as my knowledge is no longer my individual personal involvement but is social knowledge, it is my knowledge.

Even a person's most intimate experience is a conscious attitude only insofar as his dealings with it involve explicit social knowledge. However only knowledge of a personal kind can be true, because there is no such thing as consciousness as such or in general. On the other hand consciousness is however not a personal psychological trait either but is conscious activity. Passive contemplation or reflection is not an alternative to activity.

Consciousness is itself activity. Secondly: activity needs always external opportunities for objectivation. There does not exist awareness as a pure state of the mind apart from knowledge and activity. There exist different kinds of knowledge (which means knowledge of different content) and different types of activity. And last: objectified personal knowledge presupposes above all a personal biography. He himself is the problem posed to the knowing subject.

For this reasons Diderot said: "... il y a trois modeles, l'homme de la nature, l'homme du poete, l'homme de l'acteur. Celui de la nature est moins grand que celui du poete, et celui - ci moins grand encore que celui du grand comedien, le plus exagere de tous" (186). The actor is the greatest of them all because he himself is the object of his creative activity.

"L'homme du poete" in Diderot's essay is in a certain way and for the moment to be compared with the researcher. Theoretical knowledge as produced by research activity is to be "objective knowledge". The process of objectivation and substantiation of knowledge demands the distinction, to a certain degree at least, of the "context of justification" from the "context of discovery". One might, for instance see the objectivity of scientific knowledge to be attributed to the possibility of reproducing that knowledge independent from "time and place". Knowledge of this kind is heavily dependent on (uniform) method, and theories are to - day in fact to a great degree of a methodological kind. We may since the Industrial Revolution witness a growing "methodolization" of theoretical knowledge. This "methodologism" of mathematics and science in general especially during the 19th and 20th centuries results from the fact that science has been turned into an activity and a job of large social groups, which are no more of a coherent character. Methodologism is a result of professionalisation. As in the face of growing specialization and division of labour, truth and coherence become explicit aspirations in their own right, and are no longer an automatic by - product of professional research activity. We have no meta - knowledge beyond the level of theory and science. On the other hand is the progress of science and

technology too rapid and subject to overspecialization that one cannot gain much from the contact with it for the general development of the human subject. At least many educators see serious educational conflicts here. But there is no human consciousness beyond the scientific one and the differentiation of science has been connected with a tremendous extension of the scientific experience of reality.

Again Diderot's essay links this observation with the problem of education in school. The most dangerous property for an actor is "sensibilite naturelle" ... "c'est l'inegalite des acteurs qui jouent d'ame" (128) and: "Elle doit conduire peu a peu l'acteur a la maniere et a la monotonie" (138).

As delicate responsiveness of the actor (or pupil) leads to monotony, so involvement and intrinsic motivation of the scientist (or pupil) to one-sidedness. Always "la facilite de connaitre et de copier toutes natures" is very advantageous.

Under the circumstances of the "didactical contract" this may lead to the idea that to show talents is the most important thing. ^{Under certain circumstances, the communication of knowledge or representing} "Etre intelligent c'est faire ce qu'on attend de vous" was one of the accusations of the student's revolt in Paris in May 1968. The connection with the academic disciplines will not help here. The specialized researchers seem addicted to the same type of ideology, even though for quite different reasons (the ideology of the genius, that means the one being able to use the "rules of the game", the methods proper, in the most perfect manner).

Only if the orientation towards an objective meaning gained some prominence would it be possible to find the necessary distinctions between method and human activity. But for the above mentioned attitude "applied mathematics is bad mathematics" (Halmos). No wonder then that an eminent mathematicien, G. Hardy, a follower of the view that utility and beauty are inherently in conflict, would even in 1940 think it unimaginable, that the work of Einstein might find serious applications.

We are not to personally blame anybody. Specialization and division of

labour resulted in a distinction of the tactics and strategies of the coordination of the professional activities on the one hand and of the social - historical process of objectivation of knowledge on the other. We also witness the historical evolution of new forms of interaction of these two contexts. To signify these tendencies, which render pure mathematics as it has appeared during the 19th century, a historically relative phenomenon, we have used the term "complementarity".

The assertion that "the mind is opposed to objective world, because it is my way of treating the world, determined by my biography" remains true only insofar as I am not able to consider my biography as objective in the context of social history.

Diderot's paradox tells us something about the universality of the formal attitude. If "sensibilite naturelle" leads to monotony the "formal approach" may result in objective flexibility and objective sensitiveness. Theory is among other things a way of seeing the world. The methodologism of specialized mathematical (or scientific) activity thereby produces a universalism (mathematics as universal form) which may appear as paradoxical sometimes.

Pure mathematics does not concede to the question of the application of knowledge an epistemological role, although the universal applicability of its methods and concepts is always stressed by pure mathematicians. Diderot has however told us that formal style is either mechanism (to best be implemented on a machine) or it is nothing but the representation of the non - formal.

The attempt to maintain meaningful links between the scientific methods is no longer possible, although it is a historical fact that the large reform projects during the '50s and '60s, which were committed to the scientific development of mathematics and other subjects, were also devoted to an interest of strengthening the commitment of the "didactical contract". The fundamental philosophy of these efforts is probably expressed strongest in Bruner's "The Process of Education". They failed because of a too naive and too optimistic view of the relationship between science and society.

The Paradox of Acting in particular applies to the scientist as it does to the pupil. Under what epistemological and social conditions then, is a comprehensive orientation towards knowledge possible? Under the very different historical circumstances of the 18th century Diderot exclaimed: "l'experience! toujours l'experience!"

And as to mathematics, Diderot as well as many of his contemporaries, Lagrange among them, believed that mathematics had come to an end of its growth. "A great upheaval in the sciences is imminent. In view of the present aspiration of the great minds, I should almost like to claim that there will not be three great mathematicians in Europe within a century. This science will suddenly remain fixed to the spot where the Bernouillis, Euler, Maupertius, Clairaut, Fontaine, d'Alembert, and Lagrange have left it" (Diderot 1754, p. 31). Similar statements have come down to us from Lagrange.

It is a well-known fact that Diderot's and Lagrange's fears have not come true; rather, the "great upheaval in the sciences" predicted by Diderot seized mathematics as well, and led to new developments of method and object not anticipated. The new style of mathematics, which began to emerge at the turn to the 19th century is the one represented by pure mathematics in the sense of Bourbaki et al. To-day we may probably encounter another turning point in the history of the mathematics as well as of mathematical education.

4. THE "FORT - DA" GAME (S. FREUD)

The psychoanalytic theory about the origin and evolution of the symbolic function provides the social relationship of the subject with its mother with a fundamental importance, which the "fort - da" game allows to be analysed.

The child makes a little puppet disappear and reappear again at its will and with a recognisable emotion. The separation from its mother, whose appearance or departure is neither foreseeable nor to be controlled by the

child, causes frustrations for the latter.

The symbolic significance of the "fort - da" game for the frustrated child seems evident. One should keep in mind however that this significance is not constituted by the different elements - the puppet for instance is not a representation of the mother - but by the dynamics of the situation as a whole. What provides the situation with symbolic meaning is not its similarity with the "reality" only, but the possibilities of bringing it into manifold and differently balanced relations with that reality.

An automatic puppet moving in a completely regular fashion cannot play the same role, as the child foresees the movements of the puppet and this destroys the child's interest. A puppet moving completely at random however would be too realistic and would only cause anguish for the child.

The continuance of the pleasure is linked to the disappearance of the puppet for the purpose of its renewed coming into view again.

Soon however the efficiency of the control over the puppet deprive the situation of its capacity to emotionally express the child's relation with its mother.

The purpose of function of the symbolic situation born out of the desire to compensate the frustrations and emotional tensions, deceives that desire through the very act of its apparent fulfillment. The symbol which was exacted to realize existentially that which was not realizable in the relationship with the mother inherits from the loss of that potential the original frustrations.

The creation of the symbol produces itself the "Kastrationsangst" (Freud) which in its turn makes it necessary to create a new symbol. The chain of meanings is without an end and is open.

Knowledge appears as the cause as well as the objective of the investment and involvement into a particular symbolic situation and also the cause of the disengagement and disenchantment.

For to provoke an initial investment into a situation, which shall lead to new knowledge, this situation should be open, uncertain, promising and should

cause some uneasiness. It should allow for the play of desire and decisions, of hopes and anticipations, of resumption and repetition.

The situation should however concede a progressive control over the emotional investment only, if the envisaged knowledge is reached. Then the situation gets closed. The quality of a person's cognitive behaviour is constituted by the quality of his anterior knowledge and by the alternatives envisaged (and chosen or rejected) by him within the situation in question. With respect to the knowledge there are two movements inverse to each other asked from the subject in this process. First the acceptance of the uncertainty and the risk of a game as well as the unprejudiced ignorance associated to those, and second the rejection of all that, confidence as well as the strong interest in the clarity and determination provided by insight and knowledge. The passionate player seeks his pleasure continuously and exclusively on the level of the first movement.

The serious study of probabilities requires however a distant and reflexive attitude opposed to the pleasures of playing.

In addition to that it is not possible to have a prescribed or fixed hierarchical relation between the two movements, respectively the attitudes constituting them, nor to have one absorb the other. Only for LaPlace's "Universal Intelligence" the two are identical. But then there is neither knowledge nor uncertainty.

The human subject has in a certain sense to know what he does not yet know and has at the same time to forget some of what he already knows or believes to know.

One has to know more as well as less than one "knows". The acts of avoidance as typically shown by pupils illustrate this dialectic very well.

Altogether one may in fact observe the inclination of certain pupils to take on willingly the first moment, namely the questions and problems, the uncertainty and openness, the complexity and the playing on the verge of knowledge. But they cannot quit or leave this gambling, autotelic,

unrecompensated behaviour and cannot engage in a really responsible manner into the second phase.

For others it is impossible to accept the first moment. Problems and open questions are not tolerable for those. Any uncertainty or openness seems to signify a state of primitive personal existence which they desire to have already overcome and surpassed. A question without an immediately conceivable answer causes anguish for them. They obsessively ask the teacher for answers, for decision procedures to reach an answer, for algorithms.

There exists a second paradox in the way the subject develops his activities of symbolisation. To engage into an open situation and to gradually gain control over it apparently represent on the one hand exactly the conditions necessary for the acquisition of new insight and knowledge. On the other hand one may consider these activities to be the usual employment of already acquired knowledge. As a person solves the problem inherent in the situation he obviously already has all the knowledge that is necessary for that purpose. The fact that he learned something from the situation then is manifested by his failure to solve the problem. The knowledge is the prerequisite as well as the result of the problem solving activity.

Especially the fundamental theoretical terms are, when one reads and tries to understand a text for instance, at the same time the known as well as the unknown, the starting point as well as the objective of the subjects activity.

Knowledge or a theoretical concept is never to be exhaustively represented by any one problem, activity, text, object field etc. (We encountered this phenomenon already on the epistemological level: the paradox of theoretisation). This paradox places learning into the comprehensive context of the subjects objectified biography. And for the activity of historically objectifying one's own personal biography knowledge contributes a fugitive, elusive but centrally essential element.

The ideal of knowledge is an identify of being and knowing or thinking. The cartesian "I think therefore I am" has therefore to be counter balanced by

an attitude which founds the objectivity of knowing on the real being. (As the real being is not a symbolic process, this puts hints to the potentials of symbolization).

From the history of mathematics we know many instances where not the referential meaning of a sign was essential but where a symbolization like the above can only be understood related to the dynamics of the problem situation as a whole. On the other hand we know that the dynamics of the problem situation is intimately and inseparably linked with symbolization.

Not only does solving a problem often mean to represent it so as to make the solution "obvious" or transparent. Without seeing symbolization linked to the dynamics of the situation, we would not be able to understand how somebody could find the answer to a problem unless he already knew the answer (cf. Plato).

Problems (intentions, goals) and symbolic means and models are the two sides of one coin. Empirical research presents findings saying that students with higher mathematical abilities, when trying to solve word problems by means of equations, did not – as the less able students did – try to name all the occurring magnitudes or unknowns, but instead immediately looked for the relevant relations or equational relationships (cf. Doblav 1969, Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, SMSG (Kilpatrick ed.))

THE FRAGILITY OF KNOWLEDGE

G. Brousseau - M. Otte

Part II

The paradox of text understanding

"Texts must be understood literally and metaphorically at the same time (cf. Otte/Zawadowski ESM 16/1985). Can we not, or must we not, understand the complementarity of literal and metaphorical reading as a juxtaposition of two different texts? Every interpretation of a given text within one's own context implies a rephrasing of the original text, means just to produce another text. Interpretation is the meeting of (at least) two texts: the text presented and the text created in response. It is consequently the meeting of two subjects, of two authors. "A text is not a thing and therefore the consciousness of the perceiver can never be eliminated or neutralized" (M. Bakhtin)

But inevitably the question will arise: where is the genuinely authentic text or which one is the essential interpretation? "Is the text or the reader the source of meaning?" Indeed, this last question appears over and over again. Stanley Fish (see Fish, 1980) tells us that this question has for years been the focus of much debate in literary theory and instruction. The crucial step in coming out of this dichotomy will, according to Fish's argumentation be, to see that the claims neither of the text nor the reader can be upheld, because neither has the independent status which would make its claim possible, but both the text and the reader are to be subsumed under the larger category of interpretation and interpretive community.

"Indeed, it is interpretive communities, rather than either the text or the reader, that produce meanings and are responsible for the emergence of formal features. Interpretive communities are made up of those who share interpretive strategies not for reading but for writing texts, for

constituting their properties. In other words, these strategies exist prior to the act of reading and therefore determine the shape of what is read rather than, as is usually assumed, the other way around. Even this formulation is not quite correct. The phrase "those who share interpretive strategies" suggests that individuals stand apart from the communities to which they now and then belong. In later essays I will make the point, that since the thoughts an individual can think and the mental operations he can perform have their source in some or other interpretive community, he is as much a product of that community (acting as an extension of it) as the meanings it enables him to produce" (S. Fish 1980, p. 14).

For Fish the fact that "selves are constituted by the ways of thinking and seeing that inhere in social organizations" and that "these constituted selves in turn constitute texts according to these same ways" (p. 336) leads to the conclusion that "the opposition between objectivity and subjectivity is a false one because neither exists in the pure form that would give the opposition its point" (p. 332). There exists however an objective textual meaning which is not to be identified with the meaning experiences of neither the author nor the reader, and a text may get "overwhelmed by an irresponsible reader" contrary to Fish's opinion. And worse: all this is true even though one could sharpen Fish's argument about selves and consciousness by stressing the fact that selves are not homogeneous entities but are "societies of minds" themselves and consciousness is not a unitary phenomenon either.

It's not the place here to go into these matters more deeply. We only want to avoid quick and cheap misinterpretations of the essential fact that there always are more than one text. The text is the direct reality but it is not one text but there are two, or rather many, texts.

This is the essential starting point, because there can never be knowledge without a knowing subject. In education one often meets the rather naive opposition of learning by being told (learning from texts) vs. learning through direct experience.

The point in all this is either: conceive knowledge as of a monologic or on the contrary as of a dialogic nature. Do pupils have to verbally

reproduce the arguments and texts representing authorized knowledge or are they expected to produce their own accounts or "texts" and to thereby contribute to the growth of social knowledge. There is a vast amount of scholarly work on the impact of literacy in general and of the invention of the printing press in particular on human thought and learning. Let us quote two such arguments: "My primary hypothesis is that the invention of writing, and particularly the attempt to create autonomous text, resulted in the realignment and specialization of the rhetorical and logical functions. Consequently, the language was specialized to better serve the truth functions at the expense of the social or authority-maintaining functions. More precisely, if the statement was true, that was a sufficient condition for its being in order" (Olson 1970, p. 74). And the second: "... it is not accidental that major steps in the development of what we now call 'science' followed the introduction of major changes in the channels of communication in Babylonia (writing), in Ancient Greece (the alphabet), and in Western Europe (printing). . . . The specific proposition is that writing, and more especially alphabetic literacy, made it possible to scrutinize discourses in a different kind of way by giving oral communication a semi-permanent form; at the same time increased the potentiality for cumulative knowledge, especially knowledge of an abstract kind, because it changed the nature of communication beyond that of face-to-face contact as well as the system for the storage of information; in this way a wider range of 'thought' was made available to the reading public. No longer did the problem of memory storage dominate man's intellectual life; the human mind was freed to study static 'text' (rather than be limited by participation in the dynamic 'utterance'), . . ." (Goody 1977, p. 51, 37)

But again these statements become better understandable when interpreted in terms of a dialectics of unity vs. plurality of texts or, to say it differently with the dialogic character of knowledge in mind. Many authors have claimed that the Renaissance as well as the scientific Revolution of the 16th and 17th centuries was essentially made possible through centrifugal tendencies and the juxtaposition or competition of the thereby emerging individual forces. Struik and also Needham in comparing

the situation in Europe with China have pointed to the essential role of the decentralized structure presented by the many rather independent town states especially in Italy, the Netherlands and Germany during the so called Scientific Revolution. If "the main event separating the period we call Renaissance from the Middle Ages was the invention of printing". If then print made it more productively possible to compare arguments (Contradictions or connections became more visible. Additional developments or new intellectual combinations were encouraged and different readers might discuss a specific argument, which could be precisely located in identical printed copies), all this presupposed the existence of a potential readership with its manifold and diverse interests. Cumulative growth of knowledge was facilitated through the tremendous increase of texts (and readers) produced by the printing press ("it has been roughly computed that the Venetian printers alone produced about 2 million volumes in the 15th century"), and through the longer argument both allowed and demanded by an autonomous text. Again this presupposes the existence of different readers whose reading produced all the additional texts in response to the one which could keep its identity by means of the printing press.

Autonomous texts and the dialogic character of understanding and knowing are the complementary facets of that tremendous dynamics of knowledge which started sometimes in the 14 or 15 century.

Generally, however, it may be said that the genesis of autonomous texts, i.e. texts which, in a way, say what they mean, signifies a separation between author and text, between creative activity and its product, which is essential, even if it can only be conceived as relative because every printed autonomous text had already in course of its evolution absorbed all the commentaries and interpretations contributed by the diversity of social experiences. In the historiography of science, cumulativism has understood this separation as absolute to the point of scission, whereas Kuhn's and Feyerabend's instrumentalist position would like to have it entirely and totally abandoned.

This is consistent with the fact that one usually claims an opposition between the textbook on the one hand and the personal views of the creative scientist on the other. Again I think it would be very naive to see this opposition as a structure-process dichotomy: to contrast a static understanding of textbook knowledge with the highly dynamical character of the research activities.

Rather one has once again to think in terms of the cognizing subjects and not only in terms of knowledge content. A textbook, especially when it is successful, never has only one author whereas the creative researcher concentrates on what he sees as a direct encounter with the object of cognition and this is what he wants to fix in his "text". He will therefore always stress the importance of the specificity of expressing an idea or the way an object is symbolically represented.

This difference of situations resembles the difference between prose and poetry as Bakhtin describes it: "... In the poetic image narrowly conceived (in the image-as-trope), all activity - the dynamics of the image-as-word - is completely exhausted by the play between the word (with all its aspects) and the object (in all its aspects). The word plunges into the inexhaustible wealth and contradictory multiplicity of the object itself, with its 'virginal', still 'unuttered' nature; therefore it presumes nothing beyond the borders of its own context (except, of course, what can be found in the treasure-house of language itself). The word forgets that its object has its own history of contradictory acts of verbal recognition, as well as that heteroglossia that is always present in such acts of recognition. For the writer of artistic prose, on the contrary, the object reveals first of all precisely the socially heteroglot multiplicity of its names, definitions and value judgments. Instead of the virginal fulness and inexhaustibility of the object itself, the prose writer confronts a multitude of routes, roads and paths that have been laid down in the object by social consciousness" (M.M. Bakhtin 1982, p. 278).

In this context a controversy between S. Lang and L.G. Mordell about the question, how to write a textbook on Diophantine Geometry is very illuminating (see S. Lang: *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer

New York 1983, Appendix). Mordell reviewing a book by S. Lang on that subject had written: "A general question that immediately suggests itself to a reader is what object an author has in mind when writing a book. Some have the true teacher's spirit or even a missionary spirit, wishing to introduce their subject to a wide circle of readers in the most attractive way. Such an author's treatment is essentially self-contained, the presentation is made as simple and complete as possible, and there is no undue generalization that would tend to make unnecessarily difficult the comprehension of the simpler and really fundamental cases; he is painstaking in his efforts to save the reader unnecessary and troublesome effort. When the subject makes undue demands on the reader, the author tries to give the reader some idea of the proof in easily understood language. Lang is not such an author." Much of the book is practically unreadable unless one is familiar with, among others, Bourbaki, the author's books on Algebraic Geometry and Abelian Varieties, and Weil's Foundations of Algebraic Geometry, and is prepared occasionally to go to the original sources for proofs of some theorems needed in the present volume. Lang may take the point of view that he is only interested in such readers and caters for no others. In fact, he says in his Foreword, "Diophantine problems represent some of the strongest attractions to algebraic geometry." However, in his pages on prerequisites, he refers to the elementary nature of a number of his chapters and their self-containment. Many readers will not accept either of these statements. The topics brought together in this volume are of the greatest interest to a far wider class of readers than those he seems to have in mind. It is unfortunate that it will be exceedingly difficult for them to learn something about most of these topics from the presentation given in this book. The author's style and exposition leave a great deal to be desired. The results in the book appear as theorems, propositions, properties, lemmas, and even a criterion. The logical distinction between these is not all clear. When a reference is made to one of them, the reader must turn over the pages of the relevant chapter to find it.

"In his recent book on Calculus, he states, '... One writes an advanced monograph for one self, because one wants to give permanent form to one's vision of some beautiful part of mathematics, not otherwise accessible ...' Compare with Chaucer's clerk (the scholar and teacher of those days) of whom Chaucer says 'and gladly would he learn and gladly teach'." (S. Lang, 1983, p. 350).

To this S. Lang replied 6 years later reviewing Mordell's "Diophantine Equations": "Mordell in his review quotes from the preface of the first edition of my calculus book, but with an elision. The full text of my sentence run as follows:

One writes an advanced monograph for oneself, because one wants to give permanent form to one's vision of some beautiful part of mathematics, not otherwise accessible, somewhat in the manner of a composer setting down his symphony in musical notation.

I stand by the text as written, not as quoted. The musical analogy is an essential part of what I meant" (p. 358). And in a letter to Mordell he had said "Dear Professor Mordell, Thanks for your letter. What you write there prompts me to clarify some points about book writing. I see no reason why it should be prohibited to write very advanced monographs, presupposing substantial knowledge in some fields, and thus allowing certain expositions at a level which may be appreciated only by a few, but achieves a certain coherence which would not otherwise be possible. This of course does not preclude the writing of elementary monographs. For instance, I could rewrite Diophantine Geometry by working entirely on elliptic curves, and thus make the book understandable to any first year graduate student (not mentioning you ...). Both books would then coexist amicably, and neither would be better than the other. Each would achieve different ends. When you write of any book that it is 'obviously meant to be understood', whether as a compliment for one book or blame for another, you are still missing the point I never meant Diophantine Geometry to be understood specifically by you, or anyone who did not have the rather vast background required for its reading. All my books are meant to be understood by readers having the prerequisites for the level at which the books are

written. These prerequisites vary from book to book, depending on the subject matter, my mood, and other aesthetic feelings which I have at the moment of writing. When I write a standard text in Algebra, I attempt something very different from writing a book which for the first time gives a systematic point of view on the relations of diophantine equations and the advanced contexts of algebraic geometry. The purpose of the latter is to jazz things up as much as possible. The purpose of the former is to educate someone in the first steps which might eventually culminate in his knowing the jazz too, if his tastes allow him that path. And if his tastes don't, then my blessings to him also. This is known as aesthetic tolerance. But just as a composer of music (be it Bach or the Beatles), I have to take my responsibility as to what I consider to be beautiful, and write my books accordingly, not just with the intent of pleasing one segment of the population. Let pleasure then fall where it may. With best regards, Serge Lang" (p. 358)

When one looks into these reviews in more detail one realizes pretty soon that in fact the self-image of authorship, not the knowledge level of potential readers or other things is the essential aspect. Authors, who like scholars engaged in original exploratory activity, see themselves in individual confrontation with the fundamental ideas or essential understandings will stress much more the undissolvable connection between an idea and its uniquely appropriate symbolic representation, especially if they feel the original or rather "isolated" character of their thoughts. Feynmann has given a rather illustrative account of this facts

"Mathematically each of the three different formulations, Newton's law, the local field method and the minimum principle, gives exactly the same consequences. What do we do then? You will read in all the books that we cannot decide scientifically on one or the other. That is true. They are equivalent scientifically. It is impossible to make a decision, because there is no experimental way to distinguish between them if all the consequences are the same. But psychologically they are very different in two ways. First, philosophically you like them or do not like them; and training is the only way to beat that disease. Second, psychologically they are different because

they are completely unequivalent when you are trying to guess new laws. As long as physics is incomplete, and we are trying to understand the other laws, then the different possible formulations may give clues about what might happen in other circumstances. In that case they are no longer equivalent, psychologically, in suggesting to us guesses about what the laws may look like in a wider situation" (see R. Feynmann: The Character of Physical Law, MIT Press 1967, p. 53).

Now the fact "that the correct laws of physics seem to be expressible in such a tremendous variety of ways" (Feynmann) "constitutes" their objectivity on the other hand. In a similar vein H. Putnam has characterized mathematics, saying: "In my view the chief characteristic of mathematical proposition is the very wide variety of equivalent formulations that they possess. I don't mean this in the trivial sense of cardinality: of course, every proposition possesses infinitely many equivalent formulations; what I mean is rather that in mathematics the number of ways of expressing what is in some sense the same fact (if the proposition is true) while apparently not talking about the same objects is especially striking" (p. 45). But Putnam concludes from this that "mathematics neither needs nor has foundations", thereby again forgetting the social nature of knowledge. (The creative researcher's introspection indeed may ignore the relevance of the context of justification)

I do understand Putnam's characterization of mathematical propositions in the light of Goodman's "Principle of Objectivity: Anything which is practically real should be taken as objectively real" (cf. AMM 86(1979) p. 541) and I do understand this principle as an expression of the dialogic character of knowledge, that means as an expression of the fact that "our interactions with objects are generally also interactions with each other" (Goodman). At least this is true for the "context of justification" of knowledge, which may be distinguished from the "context of discovery". The latter may perhaps constitute a relation between subject and object as described by Feynmann. Goodman does in fact use his principle of objectivity to criticize the foundational efforts of Formalism, Logicism, Intuitionism and Platonism because they all are onesided "individualistic" as

one might say, as they all ignore essential aspects of the social process of doing mathematics. To characterize a scientific discipline one usually has to name its object field or content. This is very difficult in case of mathematics and this difficulty has lead many to deny that mathematics has objective scientific content. It is considered as "une pensee, une pensee sure de son langage" as Bachelard said I believe, like Goodman for instance, that such views are false and that they express monologic or mentalist conceptions of knowledge. The difficulty with mathematics is due to the fact that its objective content can be described only when taking into account all areas of social practice. Human activity as a whole provides the context for to characterize mathematics. The universe of texts or the universe of means for doing and representing mathematics is but an image of that overall social context.

We may sum up these arguments by referring back to the difference between poetry and prose or between textbook presentations and the original textual accounts of the "great mind's" first ideas about something which is radically new.

I hope in fact that this connection has become rather obvious in the light of what has been said sofar.

PEUT-ON AMELIORER LE CALCUL DES PRODUITS DE NOMBRES NATURELS ?

G. BROUSSEAU

1 — L'EXPERIENCE

1.1 — CADRE DE L'EXPERIENCE

Il s'agissait de trouver une méthode pédagogique qui permettrait aux enfants de se constituer progressivement une méthode de calcul du produit de deux naturels, sans qu'aucune technique ne leur soit communiquée ni qu'aucun entraînement formel au calcul ne soit exigé d'eux. Nous pensions qu'après, en appliquant cette méthode nous pourrions étudier, à travers l'évolution des algorithmes découverts et utilisés par les enfants, quelques unes des lois des processus naturels de mathématisation dont nous soupçonnons l'existence.

Avant de concevoir cette méthode nous avons examiné tous les algorithmes qui pourraient apparaître et tenté de les caractériser afin de prévoir, à travers les comportements observés, la manifestation de paramètres intéressants : nombre d'erreurs, vitesse d'exécution, vitesse d'apprentissage... etc.

Au cours de cette analyse il nous a paru possible de vérifier la pertinence de certains modèles de comportement des enfants en organisant la courte expérience suivante.

1.2 — PRINCIPE DE L'EXPERIENCE

Nous avons préparé une épreuve comportant un certain nombre de multiplications que nous avons présentées à 600 enfants (dont 150 du niveau CM2 : 9 à 11 ans). Nous contrôlions à peu près un certain nombre de variables : effet d'apprentissage et de fatigue, QI, valeur des maîtres, origine socioculturelle des élèves... et nous en étudions d'autres : taille de l'opération, présence de retenues, fréquence relative des produits élémentaires, niveau scolaire... etc.

Tous les enfants ont calculé avec la méthode à l'italienne (voir figure 1) qu'on leur avait apprise.

Nous avons alors enseigné à certains d'entre eux la méthode « per gélosia » (voir figure 1) (une heure d'apprentissage). Nous avons contrôlé qu'il y avait un progrès très net (très significatif) dans les résultats (beaucoup moins d'erreurs) sans différence apparente dans les temps d'exécution.

1.3. REALISATION

Il n'est pas nécessaire de décrire ici les précautions délicates mais classiques que nous avons prises lors de cette expérience. *Le but des deux paragraphes suivants de cette étude est d'expliquer le progrès observé et de le prévoir.*

2 - INTERPRETATION : DESCRIPTION SIMPLIFIEE DU COMPORTEMENT D'UN ENFANT QUI CALCULE LE PRODUIT DE DEUX NOMBRES

2.1. DESCRIPTION DU COMPORTEMENT OBSERVE

2.1.1. - *L'activité* : Nous n'observons — de façon très grossière — que les comportements

— qui concrétisent l'objectif éducation suivant : « l'enfant est capable de trouver le produit de deux naturels quelconques. »

— qui se manifestent par une séquence d'activités observables (écrire un résultat partiel par exemple...) ou décelables très directement (lire tels chiffres...)

— et où il est fait appel à certaines formules (d'une table d'addition, ou d'une table de multiplication par exemple) supposées connues à l'avance.

Par exemple nous ne décrivons pas ici l'activité d'un sujet dont toutes les formules figurent dans une mémoire extérieure et qui cherche le produit dans une table, ou à l'aide d'une table (de logarithmes par exemple)..

2.1.2. - *Première décomposition de cette activité* : Dans ces conditions, l'articulation de cette séquence d'activités est observable — elle peut être représentée par un ordinogramme, c'est-à-dire par un schéma du programme de calcul —

Voici par exemple (fig. 1) le calcul du produit 347×28

Par la méthode à l'italienne

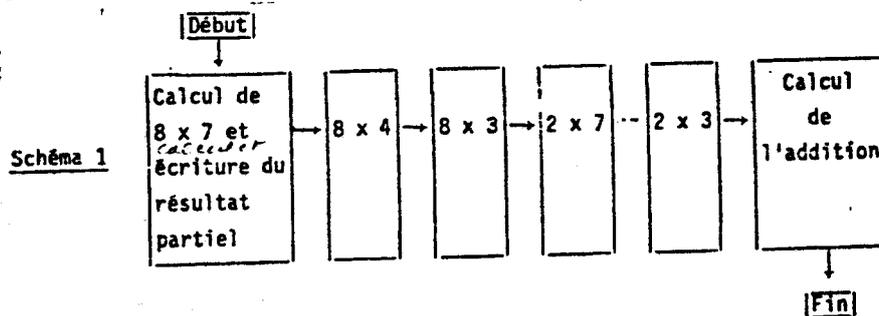
$$\begin{array}{r} 347 \\ \times 28 \\ \hline 2776 \\ 694 \\ \hline 9716 \end{array}$$

Par la méthode per gélosia

	3	4	7	
0	0	0	1	2
9	2	3	5	8
	7	1	6	

Dans les deux cas, il a fallu calculer successivement tous les produits partiels : $(8 \times 7; 8 \times 4; 8 \times 3; 2 \times 7; 2 \times 4; 2 \times 3)$ dans cet ordre avec la première méthode; dans un ordre quelconque pour la seconde.

Le schéma 1 représente un ordinogramme pouvant correspondre aux deux méthodes



On peut en observant le sujet décider si chaque action a été effectuée, dans cet ordre..

Note : Plus généralement si on calcule le produit de deux naturels a comportant p chiffres et b comportant q chiffres

$$\begin{aligned}
 a \times b &= \sum_{i=0}^{p-1} a_i 10^i \times \sum_{j=0}^{q-1} b_j 10^j \\
 k &= (p-1) + (q-1) \\
 &= \sum_{k=0}^{p+q-2} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j 10^{i+j} \right)
 \end{aligned}$$

il faut calculer $p \times q$ produits partiels et l'organigramme comporte $p \times q$ calculs de résultats partiels avant le calcul de l'addition. Nous dirons que l'opération est de taille $p \times q$. Exemple : l'opération de la figure 1 est de taille 6.

2.1.3. - *Décomposition plus fine de l'activité* : Nous pouvons aussi décomposer le calcul d'un produit partiel en activités plus élémentaires. Les deux méthodes de calcul ne relèvent plus d'un même ordinogramme ; mais on s'aperçoit que le calcul de chaque résultat partiel fait appel à une même séquence d'actions ou de décisions. Nous appellerons « boucle » une telle séquence répétitive. Les schémas 2 et 3 représentent une boucle de chaque méthode (les ordinogrammes complets pour l'exemple de la figure 1 comporteraient 6 boucles). La taille de l'opération donne le nombre de boucles. Bien sûr il est fait alors appel à des aptitudes dont il faudra vérifier que le sujet les possède.

2.1.4 - *Vérification de ce modèle de comportement* : Il est plus difficile de vérifier directement que ces ordinogrammes détaillés représentent bien l'activité effective de l'enfant. On peut néanmoins mettre en évidence l'existence de certaines parties du programme en montrant que certains paramètres y sont attachés : temps d'exécution, probabilités d'erreurs etc... Montrer que l'articulation prévue par l'organigramme est correcte en montrant qu'elle permet de calculer le temps d'exécution total et la probabilité d'erreur dans chaque boucle.

Dans l'exemple présent nous ne chercherons pas à analyser une boucle. Nous étudierons seulement la séquence représentée par le schéma 1. Nous nous servirons seulement du fait que la boucle de la méthode à l'italienne (schéma 2) est beaucoup plus complexe que celle de la méthode per gélosia (schéma 3) après avoir vérifié expérimentalement que cette complexité entraîne bien une différence dans les temps d'exécution ou la fiabilité.

Pour simplifier nous n'étudierons que la fiabilité. Mais il est clair que la conviction que l'ordinogramme est un bon modèle de comportement doit être étayée par des vérifications indépendantes et convergentes.

2.2 — DESCRIPTION DES MODÈLES SIMPLIFIÉS DU SUJET

2.2.1 - Chaque ordinogramme est réalisé en supposant que le sujet est capable d'accomplir une certaine liste d'activités (celles qui figurent dans les cases). On associe arbitrairement souvent à ces activités certaines capacités du sujet : par exemple « le sujet est doué d'une mémoire où il loge le répertoire des formules de la « table ».

Les systèmes comportant les différentes mémoires évoquées dans l'ordinogramme et doués de la capacité d'effectuer les calculs qu'il décrit constituent des modèles simplifiés du sujet¹.

2.2.2 - Valeur de ces modèles : Ces modèles ne sont intéressants que dans la mesure où ils permettent de simuler le comportement de l'élève ou des élèves de façon satisfaisante. Ils représentent néanmoins le système d'objets et de règles

1. Human problem solving. Newell et Simon : 1971.

2.2.4 - *Discussion du modèle* : Chaque condition limite le modèle et ne peut être acceptée que si les résultats expérimentaux le permettent : par exemple la dernière condition implique que l'on néglige les différences de fréquences d'erreurs entre les produits difficiles comme 7×8 et les produits faciles comme 2×2 . Nos observations montrent que ces différences sont significatives et même importantes. On peut toutefois conserver le modèle en supposant qu'on l'applique à des enfants résolvant des opérations où ce facteur serait maîtrisé convenablement.

La condition précédente néglige les effets de fatigue. Nous ne serons fondés à l'accepter que si la fidélité du modèle obtenu est suffisante pour l'usage que nous en faisons.

2.2.5 - *Ajustement* : Pour ajuster cette fidélité nous pouvons après analyse des résultats introduire dans le modèle de base certains paramètres que nous pouvons faire varier pour simuler les observations. Par exemple : A chaque produit $i \times j$ de la table est attribuée une probabilité e_{ij} de l'actualiser de façon erronée, ou encore, à chaque rang k de la boucle est attribuée une fonction croissante de k , $k(e_{ij})$, qui modifie e_{ij} et représente la fatigue ; etc...

Nous pourrions être amenés à faire appel à un modèle plus fin et à distinguer les boucles comportant une retenue et celles qui n'en comportent pas dans l'algorithme à l'italienne ou le nombre des mémoires de travail mobilisées à un instant donné ; ou lorsque nous nous intéressons à l'apprentissage, la dimension des mémoires permanentes — c'est-à-dire le nombre des formules à retenir — ou le nombre d'opérations élémentaires à effectuer.

Les précautions, les choix et les vérifications nécessaires ont fait l'objet de travaux que je ne rapporterai pas ici. Acceptons que le sujet fait $p \times q$ boucles et qu'à chacune il a une probabilité de se tromper.

2.3 — VALEURS DES PARAMÈTRES

2.3.1 - Pour fixer les idées voici quelques pourcentages d'erreurs dans des boucles, mesurés, dans différents cas, au cours d'opérations à l'italienne

$m \pm \sigma / \sqrt{n}$ (N)	Sans retenue	Avec retenue
Produits seuls Taille 1 x 1	3,73 ± 0,56 (98)	
Taille 2 x 1	1,20 ± 0,55 (17)	7,46 ± 1,08 (19)
Taille 3 x 1	2,40 ± 1,32 (13)	11,47 ± 1,47 (17)

établi sur 141 enfants de 9 à 11 ans

2.3.2 - La taille des opérations proposées aux enfants de cet âge est assez généralement comprise entre 8 et 16.

3 — INTERPRETATION : ANALYSE DU MODELE

Nous avons maintenant un modèle mathématique assez simple pour traiter certaines données retenues.

3.1 — PROBABILITÉ D'ERREUR DANS LA SUITE ENTIÈRE D'ACTIVITÉS

A chaque boucle un sujet donné à une probabilité $(1-e)$ de ne pas se tromper (fiabilité). Si l'opération comporte $p \times q$ boucles la probabilité de ne se tromper à aucune est $(1 - e)^{p \times q} = 1 - e_g = F$ e_g probabilité d'erreur « globale » F fiabilité.

Note : Dans le cas où les probabilités locales sont différenciées suivant divers facteurs, la formule devient :

$$1 - e_g = \prod_{k=1}^{k=p \times q} (1 - e_k)$$

e_k : probabilité d'erreur à la k ème boucle

on peut tenir compte aussi des erreurs dans l'addition : probabilité $e +$

exemple : $F = 1 - e_g = (1 - e)^{p \times q} \times (1 - e_+)$

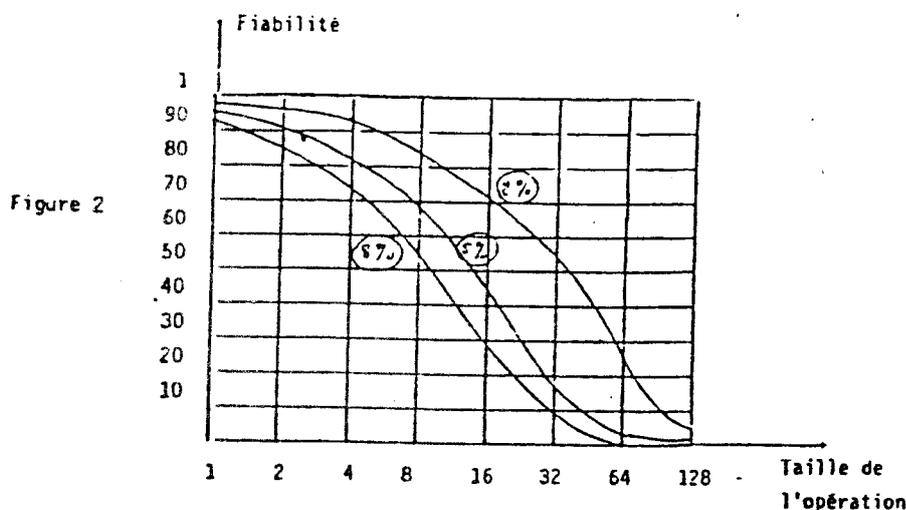
3.2 — VÉRIFICATION

La vérification du modèle peut se faire par exemple à l'aide d'un autre « modèle mathématique » très classique (test du χ^2) qui permet de tester l'écart entre la valeur prévue par notre jeu d'hypothèses et la valeur observée.

3.3 — CONSÉQUENCES

Le modèle est peu précis mais fidèle et assez satisfaisant (admettons le ici en tout cas)

La figure 2 montre des courbes représentatives de F en fonction de la taille t de l'opération pour 3 valeurs voisines de la probabilité d'erreur e_g dans une boucle.



3.3.1 — On peut y vérifier que la fiabilité devient très vite négligeable lorsque la taille de l'opération croît.

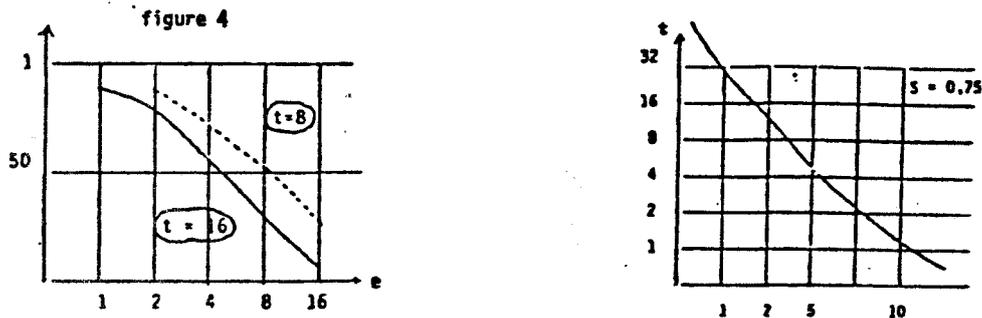
Supposons que nous fixions à 75 % de réussite le seuil inférieur de réussite admis par l'élève (ou l'institution). Il veut réussir ses opérations 3 fois sur quatre. La taille maximum des opérations qu'il peut entreprendre en fonction de sa probabilité d'erreur est donnée par la figure 3.

La relation que nous venons de mettre en évidence joue sans doute un grand rôle au cours de l'apprentissage.

Pour des fiabilités de 0,85 à 0,99

pour des tailles d'opérations « raisonnables » (entre 8 et 16) la sensibilité de F aux variations de fiabilité locale est assez grande.

En dehors des intervalles que nous signalons les progrès seront inappréciables quels que soient les efforts des enfants. (Fig. 4)



Un élève qui passe de 92 % à 96 % de fiabilité locale passe de 26 % à 50 % de réussite : résultat peu sensible. Lorsqu'il passe de 96 % à 98 % sa réussite globale passe de 50 % à 72 %. Le progrès apparaît plus nettement !

3.3.2 - Supposons que, par un moyen quelconque, nous puissions obtenir d'un seul coup un important gain de fiabilité locale. Si nous connaissons le nombre d'enfants, soumis à l'expérience, ayant une fiabilité locale donnée alors nous pourrions prévoir le nombre d'enfants qui vont passer de la zone des résultats médiocres (moins de 3 réussites sur 4) à celle des résultats acceptables (plus de 75 % de réussite). Voir l'exemple du § 3.4.2

3.3.3 - Remarquons à ce propos que nous pouvons alors étudier l'importance relative des facteurs du modèle (comparaison des . . . par exemple) ou comparer

leur efficacité sur l'ensemble des élèves (accroissement du taux de réussite par rapport au temps d'apprentissage). Il s'agit moins d'optimiser directement l'action de l'éducateur que de détecter quel genre de facteurs commandent l'évolution du système de l'élève, par exemple par la recherche inconsciente de l'économie, ou de l'efficacité optimum.

3.4 — VÉRIFICATION DE L'INTERPRÉTATION — APPLICATIONS PÉDAGOGIQUES

3.4.1 - En nous appuyant sur la comparaison de nos deux méthodes (schéma 2 et 3) nous avons émis l'hypothèse que la fréquence des erreurs commises dans une boucle de l'algorithme per gélosia devait être dans tous les cas inférieure ou égale à celle de l'algorithme à l'italienne en l'absence de retenue.

3.4.2 - Cette hypothèse plausible nous a permis d'estimer le gain que l'on pourrait espérer du point de vue des résultats du remplacement d'un algorithme par un autre.

Exemple : Voici une classe ordinaire de 25 élèves répartis en 6 groupes dont les fiabilités locales moyennes e_{SR} (sans retenue) et e_{AR} (avec retenue) sont données dans les colonnes 2 et 3 du tableau II, avec les effectifs de chaque groupe (la colonne 1).

TABLEAU II

N	e_{SR}	e_{AR}	Taille 8		Amélioration de la fiabilité	Taille 16		Amélioration de la fiabilité
			F_A $(1-e_{SR})^2(1-e_{AR})^6$	F_N $(1-e_{SR})^8$		F_A $(1-e_{SR})^4(1-e_{AR})^{12}$	F_N $(1-e_{AR})^{16}$	
5	0,3	2	0,87	0,97	10 %	0,75	0,94	19 %
7	0,5	4	0,76	0,96	20 %	0,57	0,92	35 %
6	1	7	0,62	0,92	30 %	0,39	0,85	46 %
3	2	9	0,53	0,85	32 %	0,27	0,72	45 %
1	4	11	0,45	0,72	27 %	0,17	0,52	35 %
3	8	15	0,36	0,52	16 %	0,10	0,27	17 %
25 élèves	Moyenne 1,8	Moyenne 6,55						

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)

L'amélioration de la fiabilité est plus forte pour les élèves moyens

Nous supposons que les opérations proposées aux enfants comportent 25 % de produits partiels sans retenue et 75 % de produits partiels avec retenue. Pour chaque groupe d'enfants les fiabilités globales calculées pour l'algorithme à l'italienne et pour les tailles 8 et 16 colonnes 4 et 7 sont comparées aux fiabilités correspondantes prévisibles avec l'algorithme per gélosia (colonnes 5 et 8). Le gain, en % de fiabilité : $100 (F_{Nouvelle} - F_{Ancienne})$ est porté dans les colonnes 6 et 9 pour la taille 8 et 9 pour la taille 16.

1^{re} conclusion : Il est visible que l'amélioration de fiabilité est plus forte pour les élèves moyens et pour les tailles plus grandes.

2^e conclusion : Au seuil de réussite acceptable de 70 %, pour la taille 8 ; la méthode classique permet 12 réussites sur 25 élèves, soit 48 % — l'autre permet d'espérer la réussite de 22 élèves soit 88 % — Nous pourrions dire que le gain pédagogique est de 40 %. Pour la taille 16 le gain serait de $84 - 20 = 64$ %

3.4.3 - En fait cette hypothèse s'est trouvée à peu près confirmée mais nous étudions et vérifions un modèle plus complexe : l'amélioration obtenue a été meilleure que celle qui était espérée, d'autres facteurs ont joué.

3.4.4. - Nous nous garderons bien pour l'instant de tirer de ces réflexions des conclusions hâtives au sujet des méthodes d'enseignement mais il a été vérifié qu'auprès des élèves qui ne parviennent pas au CM ou en 6^e à des résultats satisfaisants dans le calcul des produits, l'apprentissage rapide de la méthode « per gélosia » donne des résultats excellents.

4 — CONJECTURES : MODELES D'APPRENTISSAGE

4.1. — QUELQUES DEFINITIONS

4.1.1. - Répertoire - Ordinogramme

a) - Pour calculer un produit quelconque suivant l'un de nos ordinogrammes il est fait appel à des formules de référence que l'on suppose stockées dans une mémoire interne (produit appris par cœur par exemple) ou externe (table consultée sur le champ).

L'ensemble R des formules de référence dont dispose un élève à un moment donné constitue son *répertoire*. La suite O d'activités qu'il est capable d'exécuter, et dont l'organigramme est un modèle, jointe à ce répertoire, lui permet de produire un certain ensemble de formules F.

b) - Par exemple : si R est l'ensemble des produits de naturels à la forme $a \times b = c$, où $a \leq 5$, $b < 10$ (R est « les tables de 1 à 5 ») et si O est l'algorithme à l'italienne, $\langle R, O \rangle$ permet à l'élève de produire l'égalité : $32 \times 5 = 160$ mais pas $49 \times 8 = 392$

c) - Soit $f_{a,b}$ la fiabilité du produit $a \times b$, v_i la vitesse d'exécution d'une tâche élémentaire, r la fiabilité de la boucle de retenue...

A un instant donné les possibilités de l'élève peuvent se déduire :

— du couple $\langle R, O \rangle$ qui caractérise en quelque sorte la compétence du sujet

— d'un n-uplet

$\langle f_{1,1}, \dots, f_{a \max, b \max}, r, v_1, \dots, v_i \dots \rangle$

qui caractérise la manière dont le sujet actualise $\langle R, O \rangle$ et donc permet d'expliquer sa performance.

4.1.2. - Processus et modèles d'apprentissage

a) - Au cours de l'apprentissage les composantes de ce n-uplet se modifient : Nous suggérons le vocabulaire suivant : La suite des n-uplets qui décrit les états successifs des possibilités du sujet — quand elle peut être décrite — constitue un « processus d'apprentissage »

Si un système de règles et d'hypothèses permet d'engendrer cette suite, à la manière d'un automate déterministe ou d'un processus stochastique, il constitue un modèle d'apprentissage.

La suite des activités didactiques à organiser pour obtenir les états successifs du sujet est un programme d'apprentissage.

b) - Exemple : Ne considérons que les couples $\langle R, O \rangle$ composés d'un réper-

toire et d'un ordinogramme de calcul. Les méthodes classiques n'envisagent que les processus tels que R_i , $CR_i + 1$: c'est à dire où le répertoire augmente d'une étape à l'autre (avec des mesures pédagogiques pour empêcher ou corriger des diminutions) et tels que O_i est un sous-ordinogramme de $O_i + 1$. Exemple : Dans l'apprentissage de l'algorithme à l'italienne, en France, les enfants de 7 à 8 ans disposent d'un répertoire réduit aux tables de 1, 2, 3 et d'un ordinogramme simplifié : produits sans retenues ; multiplicateurs à un chiffre. Leur répertoire s'enrichira plus tard des tables suivantes et leur ordinogramme se complexifiera : produits de plus grands nombres ; retenues : produits de nombres à virgule... Les ensembles (F_i) de formules calculables sont emboîtés et croissants. Nous essaierons de montrer qu'il existe d'autres modèles.

c) - Comme pour les modèles de comportement il faut d'abord mettre en évidence les facteurs et les paramètres qui devront figurer dans le modèle d'apprentissage :

Nombre de formules du répertoire, fréquence d'emploi, seuil de fiabilité acceptable de l'élève, fiabilité de l'ordinogramme, nombre de mémoires de travail utilisées simultanément, ensemble des formules engendré par $\langle R_i, O_i \rangle$, incertitude liée au modèle sur un champ d'application donné, temps d'exécution, temps d'apprentissage fatigue du sujet... etc

On peut alors découvrir que certains processus d'apprentissage sont optimaux d'un certain point de vue et expliquer par exemple leur apparition spontanée ou en trouver les conditions. C'est la fidélité des modèles de comportement et d'apprentissage qui commande la valeur de ces points de vue et non pas seulement leur qualité mathématique.

4.2. — OBJECTIFS DE LA RECHERCHE SUR L'APPRENTISSAGE DES ALGORITHMES

4.2.1 - Difficultés avec les méthodes classiques

Les principaux reproches que l'on peut faire à l'apprentissage classique sont :

- le temps d'apprentissage démesuré (3 ans)
- le manque d'intérêt et de retombées mathématiques de la méthode, elle-même basée sur des processus de mise en mémoire et d'exécution étrangers au contenu mathématique. Ces connaissances acquises sont mécaniques et se prêtent mal à l'analyse et à l'adaptation.
- La difficulté à motiver chacune des étapes de l'apprentissage ; seule motivation : Il faut savoir calculer, donc il faut apprendre à le faire. La méthode demande coercition et volonté de réussir, attention soutenue.
- Les résultats de l'apprentissage ne sont pas aussi bons qu'on le voudrait : de nombreux enfants ont des difficultés avec le sens de l'opération ; d'autres sont bloqués dans un refus des mathématiques ; la fiabilité n'est pas très grande.

4.2.2 - Causes

Divers travaux récents nous ont conduit à penser qu'une même cause pouvait être à l'origine de toutes ces difficultés : l'analyse qui a conduit au choix du modèle d'apprentissage.

Essentiellement cette analyse conclut ainsi :

- a) — Le calcul d'un produit de naturels est un algorithme complexe. Il ne peut être inventé par l'enfant. Il doit être appris précocement de façon à pouvoir être utilisé mécaniquement, sans faute, plus tard.
- b) — Pour enseigner un mécanisme, il faut enseigner l'organigramme par emploi

C'est ainsi que, traitant un peu les théorèmes et les axiomes comme un répertoire, on cherche à expliciter auprès des élèves des procédures et des méthodes de résolution de problèmes qui permettraient d'utiliser le répertoire de la « bonne manière ». Evidemment, on ne connaît pas de classes de problèmes sur lesquelles ces méthodes de résolution donnent sûrement le résultat attendu ; il faut les essayer l'une après l'autre. Ces méthodes ne constituent pas des algorithmes (sauf si, par hasard, elles s'appuient sur un théorème ignoré de l'élève), mais on les enseigne pour jouer le même rôle. L'heuristique est issue de ce point de vue et a donné à ce jour en didactique des succès limités. On sait bien à quelles difficultés se heurtent ces méthodes pédagogiques consistant en une mécanisation basée sur une décomposition arbitraire des tâches.

4.2.3 - Perspectives

Inversement, on peut remettre en cause l'apprentissage mécanique de la multiplication. Si un enfant construit lui-même un procédé pour établir l'exactitude d'une formule, c'est une manière de démonstration. Si ce procédé est réemployé, il sera appris et amélioré, jusqu'au moment où il sera reconnu comme algorithme et décrit.

Bien que la règle à inventer soit compliquée, ce point de vue n'est pas utopique : l'enfant acquiert plus tôt un système linguistique beaucoup plus complexe, qui fonctionne mécaniquement, sans qu'on soit amené à lui enseigner séparément :

- du vocabulaire par apprentissages sériels
- de la grammaire, comme ordinogramme de productions des phrases
- le sens de ces phrases (ou plutôt, la liste des occasions de les dire, comme des citations)

Cette contestation répondrait à des soucis pédagogiques énoncés depuis longtemps. Le problème est de lui trouver des fondements mathématiques, psychologiques, linguistiques et didactiques suffisants. Ce sont là les objectifs généraux de certaines recherches poursuivies à l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Dans un premier temps, en se gardant de croire trop tôt aux vertus d'un changement de modèle séduisant mais superficiel* il s'agit toutefois de se donner un vocabulaire correct et qui permette d'échapper le plus possible aux « évidences » qui ne sont que des conséquences cachées, qu'un système classique.

4.3. - PROPOSITION D'UN LANGAGE DIFFERENT

Nous travaillons dans deux directions à la fois : Nous essayons de réaliser concrètement, sous la forme où il sera utilisé finalement et mettre en mémoire les formules du répertoire (par apprentissage sériel). Le « sens » de l'opération, c'est-à-dire la reconnaissance des occasions d'utiliser le calcul, ne peut pas dans ces conditions découler de sa « compréhension » et doit faire l'objet d'un apprentissage séparé.

Il faut bien voir que ces conclusions sont fondées sur l'idée que le calcul est un mécanisme, qu'on connaît un moyen d'enseigner les mécanismes, et donc que l'on peut appliquer l'un à l'autre.

Le modèle d'apprentissage classique est d'ailleurs si bien accepté par les professeurs de mathématiques qu'ils ont essayé de transférer à l'apprentissage des théories mathématiques, voire même du raisonnement, en se servant de certaines analogies logiques (voir plus loin) ceci, le plus souvent, il est vrai, à l'intention des moins bons élèves.

* Mme SINCLAIR de ZWART a montré combien il fallait être circonspect à ce sujet.

crètement des processus qui échappent au schéma critique et nous essayons de nous donner une théorie appropriée utilisant des termes différents.

4.3.1. - Vers un nouveau processus d'apprentissage

Nous étudions depuis 3 ans un processus où l'enfant fabrique son algorithme. On veut qu'il conçoive le problème « calculer le produit » avant d'en étudier la solution. Ainsi le produit n'est plus « ce que l'on trouve en effectuant une multiplication ». Par exemple l'enfant sait que « $a \times b$ » désigne le cardinal d'un ensemble comportant a lignes de b objets. Pour « calculer » $a \times b$, il invente de découper cet ensemble en morceaux qu'il peut déjà compter et de faire la somme. Il améliore son découpage et le choix des morceaux de façon à rendre son algorithme plus rapide, plus sûr, plus efficace, plus général. Il ne sait pas encore qu'il existe une unique méthode de calcul. Chaque activité est une démonstration de la formule basée sur des propriétés de la théorie mathématique (distributivité, produits de partitions...) connues explicitement ou non.

4.3.2. - Systèmes d'axiomes - Règle de déduction

Nos expériences nous-ont suggéré d'utiliser le vocabulaire suivant.

Considérons que l'ensemble des formules sans variables, de la forme « $a \times b = c$ » où « a », « b » et « c » sont les écritures décimales des naturels, constitue les formules atomiques d'un langage mathématique L . Donnons à ces formules leur

signification habituelle dans $(N, +, \times)$; certaines sont vraies, d'autres sont fausses.

L'ensemble des règles qui permet d'associer à tout couple d'écritures (a, b) une écriture c de L telle que « $a \times b = c$ » soit vrai dans N , est une règle de production : le calcul du produit ou multiplication. Il est fait appel dans cette règle à une suite de formules de L : par exemple il est fait appel dans le calcul de 347×28 à la formule : « $8 \times 7 = 56$ », à la formule $8 \times 4 = 32$... etc. Considérons la suite de ces formules figurant dans le calcul, comme les antécédents d'une règle de déduction D dont le conséquent serait « $a \times b = c$ »*, D s'appuie sur le procédé (ici métalinguistique) de la « multiplication », pour associer à un n -uplet de formules de L une autre formule de L . Evidemment D fournit un procédé de décision sur tout L et est donc aussi un algorithme. (la règle pourrait s'appliquer à des formules fausses. Elle donnerait alors d'autres formules généralement fausses dans N).

L'ensemble des formules auxquelles il est envisageable de faire appel avec une certaine « règle » D sera comparable à un système d'axiomes; on pourra vérifier si $\langle A, D \rangle$ engendre bien les formules vraies de L , et rechercher d'autres systèmes formels équivalents ou non.

4.3.3. - Intérêt de cette formulation

Ce point de vue nous a paru justifié entre autres par le fait que les élèves de l'école élémentaire manipulent les produits comme un langage à part. Il reste à prouver la fécondité de ce point de vue qui se heurte à des difficultés dans l'analyse de la sémantique du langage employé.

Cette formulation pourrait permettre d'unifier nos conceptions relatives à la manière dont une théorie mathématique intervient dans l'activité de l'enfant :

— de façon implicite, pour permettre de prendre des décisions

* Cf. Lentin et Gross. Notions sur les grammaires formelles p. 30.

— comme langage

— comme système de validations [5]

Elle permettrait de comprendre l'économie et l'efficacité que donne à l'enfant l'emploi d'une théorie mathématique, dans les situations qu'il rencontre et de comprendre quand et pourquoi ces processus d'économie aboutissent naturellement à des mécanismes.

Nous pensons alors que ces notions pourraient être utiles pour isoler les facteurs didactiques importants pour l'organisation de l'enseignement.

5 — CONCLUSIONS

Les exemples que nous donnons ci-dessus, bien qu'un peu naïfs, ont le mérite de mettre en évidence les différentes manières dont les théories mathématiques peuvent être engagées dans l'analyse des phénomènes didactiques, qu'il s'agisse d'appréhender les facteurs pertinents de la situation présentée à l'élève, de construire des modèles du comportement de l'élève, ou des modèles d'apprentissage ou de mettre en œuvre des méthodes de validations de ces modèles.

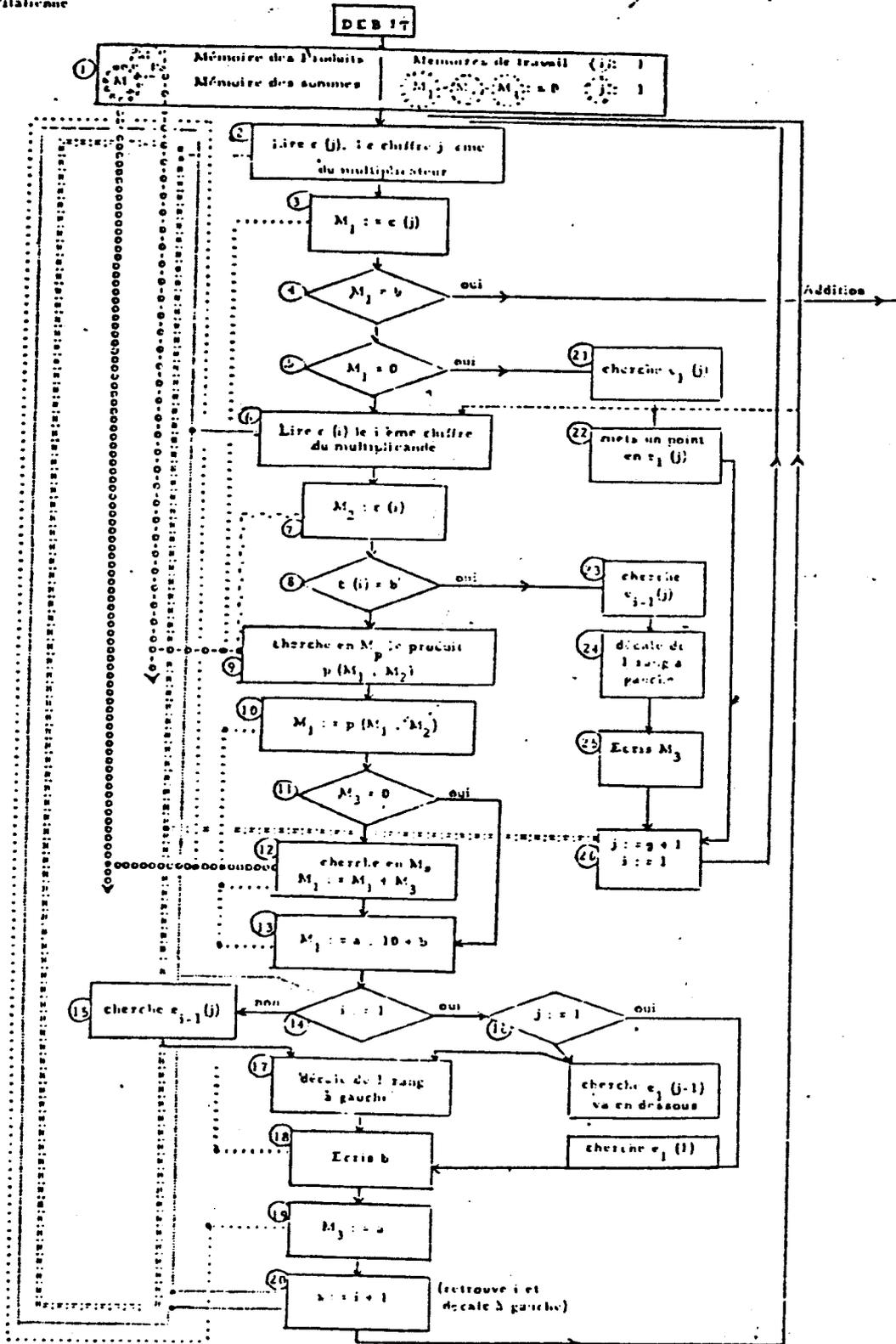
En général les modèles ne sont pas aussi simples, ni aussi sûrs, les conclusions aussi nettes, les écarts aussi importants. Il ne faudrait pas croire qu'une voie royale s'ouvre, qui va permettre de résoudre en termes mathématiques tous les problèmes de la didactique mathématique. Chaque observation soulève tous les problèmes à la fois et nous en sommes encore à accepter pour thèses des faisceaux convergents de conjectures empruntées à la psychologie, à la linguistique, à la sociologie, aux mathématiques. Cependant il se dégage de notre exemple une méthodologie scientifique de la recherche, valable encore dans des cas plus complexes et qui commence à pouvoir servir l'enseignement sans l'asservir.

BIBLIOGRAPHIE

1. KREISEL-KRIVINE - *Logique mathématique* - Dunod (1970) Paris.
2. LENTIN-GROSS - *Notions sur les grammaires formelles* - Gauthier Villars.
3. H. SINCLAIR de ZWART - *Acquisition du langage et développement de la pensée* - Dunod (1970) Paris.
4. G. BRAMAUD du BOUCHERON, R. CHAMPAGNOL, P. COIRIER, S. et M.F. EHRLICH - *Le comportement verbal* - Dunod.
5. G. BROUSSEAU - Processus de mathématisation - In. *la mathématique à l'école élémentaire* - Publication A.P.M. - Paris, 1972.

ALGÈBRE MULTIPLICATION
dans \mathbb{N}
algorithme à l'italienne

Ordinogramme 1. Produits Partiels



$e_j(j)$: place du j -ème chiffre du j -ème produit partiel

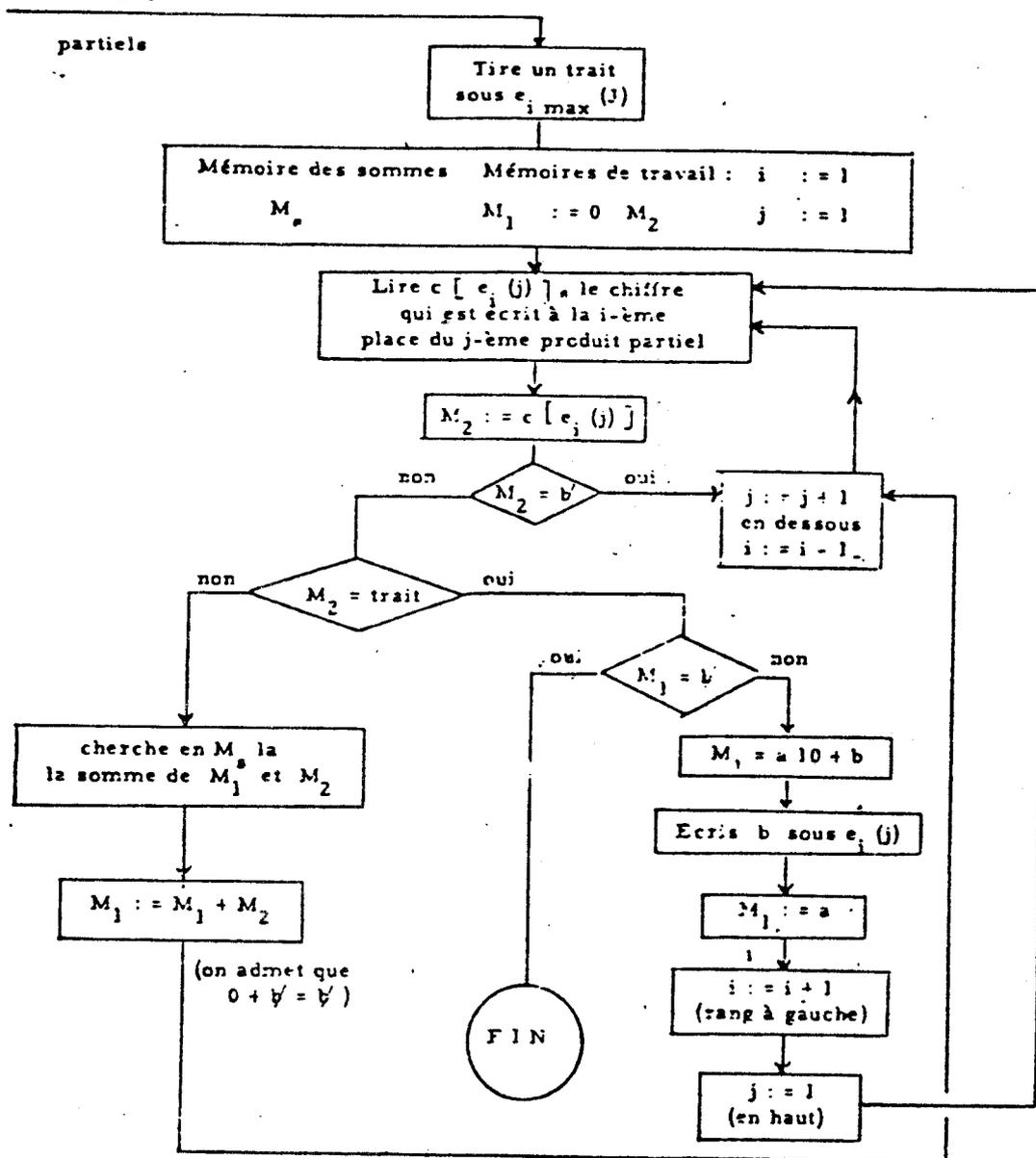
LA MULTIPLICATION

dans N

Ordinogramme 2 : Addition

Produits

partiels



L'EFFET DU GLISSEMENT METADIDACTIQUE

G. BROUSSEAU

-oOo-

1. Le fascicule de résultats de la théorie des ensembles de BOURBAKI commence par une déclaration qui précise son rôle pour l'étudiant : celui-ci y trouvera "toutes les définitions et tous les résultats... utilisés dans la suite de l'ouvrage" et "pourra se borner à attribuer (aux termes introduits sans définition) leur sens usuel... ce qui rend presque immédiates la plupart des propositions énoncées". Il s'agit donc bien d'un objet d'enseignement : "les résultats de la théorie des ensembles" présentés avec leur formalisation canonique.

Le moyen proposé à l'étudiant pour contrôler l'usage de cette théorie est le "sens usuel", c'est-à-dire une métaphore générale et en quelque sorte ontologique d'une part et l'usage "au pied de la lettre des définitions des termes techniques" (GODEMENT 1963, p. 19) d'autre part. En fait un grand soin sera apporté dans les vrais ouvrages d'enseignement à la présentation d'un grand nombre d'exercices dont "l'absence réduirait à peu de chose l'utilité d'un ouvrage destiné aux débutants (idem. p. 17). Le contrôle des conjectures de ce chapitre fondamental sera donc principalement sémantique. Les preuves des théorèmes plus difficiles et les difficultés logiques seront examinées dans un autre ouvrage paru beaucoup plus tard (le livre 1) et d'un point de vue "formaliste" alors que celui du fascicule de résultats est déclaré "naïf". Ainsi les étudiants devront contrôler la validité de ce qu'ils avancent dans ce domaine par la connaissance d'une "représentation" des objets dont ils parlent. Mais un grand nombre d'exercices est en fait nécessaire pour distinguer les utilisations "légitimes" du formalisme de celles qui sont grosses de contradictions insoupçonnées.

.../...

2. Les raisons pour lesquelles BOURBAKI réorganisa l'ensemble des théories mathématiques modernes et leur vocabulaire appartiennent à l'Histoire. Mais faire de l'objet des travaux qui de CANTOR à FRANKEL et à GÖDEL avaient développé la théorie scientifique des ensembles, le moyen d'introduire et de définir les grandes structures mathématiques, constituait une innovation scientifique et une transposition didactique remarquables.

La différence entre une théorie des fondements des mathématiques et le fondement d'un exposé des mathématiques, entre un objet de connaissance et un moyen de communication ou d'enseignement, mérite d'être soulignée. Il s'agit dans le premier de traquer les contradictions afin, à terme de maîtriser la théorie des fonctions réelles, la topologie, l'analyse fonctionnelle ou l'algèbre moderne, par le moyen de raisonnements mathématiques. L'effort aboutit à une axiomatisation qui permet de vider totalement la théorie de ses présupposés sémantiques et s'achève lorsque la théorie des catégories lui confère une place. Dans la seconde, il s'agit de profiter de la possibilité d'utiliser les ensembles comme une sorte de substitut, de métaphore universelle pour introduire le formalisme souhaité et par lui, les structures mathématiques.

Les mots sont les mêmes et peut-être certaines des représentations mentales qui les accompagnent mais les référents, les buts, les méthodes de contrôles - la situation - sont différents. C'est d'ailleurs seulement à la fin de ce processus que ses deux avatars didactiques : l'usage naïf de l'idée d'ensemble et la théorie formelle peuvent se différencier.

Notons que dans BOURBAKI les deux apparaissent sans frontière clairement définie. C'est que la signification ontologique et le sens technique de cette \rightarrow et peut-être de toutes - théorie mathématique moderne ne peuvent être exportés dans une position statique et clairement séparée.

.../...

Pour le chercheur en mathématiques, l'utilisation de la notion d'ensemble comme métaphore ontologique reste toujours cachée au cours de son activité mathématique qui reste une activité symbolique, une activité au niveau des représentations et des modèles formels. Pour autant qu'il ait besoin d'un fondement ontologique, il utilise des visualisations géométriques ou cinématiques. Les modèles symboliques et les représentations ne le dispensent pas de la nécessité d'avoir simultanément des systèmes opérationnels et des fondements ontologiques intuitivement accessibles qui se développent parallèlement et mutuellement. Les représentations elles-mêmes étant le véhicule de ce double mouvement doivent en tout cas en conserver les connexions afin de maintenir la relation du processus opérationnel avec le champ objectif de la connaissance qui sera développée. Ils ne peuvent pas sans dommages être transformés en objets d'enseignement isolés comme cela va pourtant se produire dans le processus ci-après.

3. La théorie naïve des ensembles, de moyen d'enseignement, devient alors objet d'enseignement.

Plusieurs explications peuvent être avancées :

. Les mathématiques pures, en essayant - en dépit du formidable élargissement de leur champ d'étude et d'applications - de fortifier à la fois leur unité et de se rapprocher des autres activités humaines ont été conduites à mettre en avant cette notion d'ensemble comme métaphore ontologique universelle.

Le choc en retour des impulsions données, de RUSSEL à CARNAP, à la logique et à la théorie de la connaissance se manifeste par des pressions extérieures comme le structuralisme ou l'épistémologie génétique.

.../...

. Une autre cause pourrait être que le concept d'ensemble n'est pas un concept courant, naïvement élaboré sous une forme directement utilisable. Les paradoxes logiques montraient pourtant clairement que le fonctionnement propre de cette ontologie devait être assuré à l'aide de moyens qui étaient tout sauf clairs et simples et que ces tentatives logiques n'étaient guère couronnées de succès.

Ainsi les difficultés de "comprendre" le formalisme ensembliste dans la noosphère scientifique et philosophique aurait conduit - jointe à l'idée a priori de l'utilité de ce formalisme - à transformer le moyen en objet.

Peut-être aussi le fait qu'il existe désormais un contrôle mathématique de la notion d'ensemble a-t-il paru autoriser un usage didactique et en quelque sorte "laïque" d'une forme naïve de cette connaissance. Des erreurs semblables de didactique sont toujours observables dans d'autres domaines.

4. Toujours est-il qu'on peut observer l'apparition de moyens d'enseigner ce nouvel objet d'enseignement :

Ne pourrait-on pas économiser quelques exercices et quelques raisonnements par l'usage de dessins ?

"Ces figures rondes, ou plutôt ces espaces (car il n'importe quelle figure nous leur donnons) sont très propres à faciliter nos réflexions sur cette manière, et à nous découvrir tous les mystères dont on se vante dans la logique, et qu'on y démontre avec bien de la peine, pendant que par le moyen de ces figures, tout saute d'abord aux yeux" (EULER, Lettres à une princesse d'Allemagne, tome 1, 2ème partie Lettre 35, 17.2.1761).

Alors pourquoi ne pas utiliser ces "figures rondes" dans le coin du tableau ou en marge pour accompagner le discours

.../...

mathématique correct, (N. BOURBAKI, Topologie générale Chapitre 1 et 2, deuxième édition, 1951, pp. 12, 131...164). L'étudiant naturellement ne demandera pas de comptes sur l'usage de ces figures. Que leur fonctionnement soit essentiellement heuristique comme pour EULER qui s'en sert pour énumérer les syllogismes et s'assurer du caractère exhaustif de son étude ou plus simplement ostensive comme dans les premières propositions de G. PAPY, elles sont proposées comme des moyens, à charge de l'élève d'en faire bon usage. Les "graphes" sont un simple moyen, parmi d'autres, d'enseigner la théorie naïve des ensembles (ou la logique des classes) dont la valeur risque de s'effondrer dès lors que l'élève pourra exiger de le voir fonctionner.

5. C'est ce qui va arriver lorsque va se former le projet d'étendre au niveau secondaire, puis plus avant encore, l'enseignement des structures fondamentales. Les justifications de ce nouveau projet ne manquent pas, la question n'est pas là ; mais il n'est plus possible de multiplier les explications et les exercices, ni de se reposer sur un usage tout à fait rigoureux du formalisme. Les professeurs, qui doivent répondre aux questions et aux échecs des élèves ne vont plus pouvoir conserver la théorie naïve des ensembles comme objet principal d'enseignement. En fait, ils seront conduits par les exigences du contrat didactique et pour les raisons que nous évoquions plus haut, à transformer le moyen intuitif de contrôle en objet d'enseignement (un peu officieux en France bien que très répandu, un peu plus officiel ailleurs). Et de plus le moyen va devoir fonctionner comme un véritable modèle, l'élève exigeant légitimement d'avoir la possibilité de répondre à tous les problèmes à l'aide des représentations qu'on lui enseigne. Or les figures rondes d'EULER aussi bien que les "patates" de PAPY ne le permettent pas, et chaque contradiction va devoir se régler par des conventions qui devront s'inclure à la méthode.

.../...

Par exemple : tout complémentaire d'un ensemble est un ensemble, alors il faut le représenter lui aussi donc, représenter l'univers ; alors une figure désigne en fait deux ensembles qu'il faudra distinguer, soit par un coloriage, soit par une orientation de la frontière. L'idée "d'ensemble" s'accorde bien avec un ensemble de points du plan connexe, compact... mais le jeu des intersections a tôt fait de produire des parties en plusieurs morceaux, que l'on identifiera en coloriant la frontière de la même couleur. Il faudra pouvoir indiquer qu'une partie est vide et, distinguer un dessin qui est une véritable liste des éléments (où tous les éléments sont représentés et identifiés et on a vu dans ce cas un auteur utiliser le terme "complet" au grand dam des analystes), d'un dessin ou ne sont représentés qu'un élément générique ou quelques exemples distingués. Même si l'on exclut les dessins "à l'intérieur" des patates, la frontière détermine en fait trois régions et non pas deux... Chaque insuffisance, chaque incohérence de la métaphore ne peut être dépassée qu'au prix d'une convention, d'une précision, d'une information complémentaire, que les professeurs et les éditeurs exigent des auteurs d'ouvrages. L'idée que chacun peut et doit régler personnellement ces problèmes de représentation, loin de permettre à l'enseignement d'échapper à la transformation de toutes ces conventions en objets d'enseignement, ajoute encore à la confusion là où l'on voulait installer la simplicité et l'universalité d'un langage.

6. Et la spirale du glissement métadidactique s'accroît : pour contrôler l'usage des Papygraphes devenus à leur tour objets d'enseignement, nous venons de voir que les conventions ont dû se développer accroissant les besoins en métalangage : "patate, flèche, boucle, ribambelle... prennent à leur tour un statut mathématique, non seulement dans la bouche des élèves mais encore et toujours dans certains ouvrages où l'on voit formuler des définitions dans des termes comme : "Une relation réflexive est une relation bouclée partout".

.../...

De grands efforts sont faits pour unifier toutes ces conventions particulières et pour élaborer une didactique des graphes, mais le pas n'est pas vraiment franchi. Par contre, dans les classes, le processus se poursuit entre le professeur et les élèves : les innovations de toutes sortes, qu'elles viennent du maître ou des élèves qui marquent naturellement l'histoire de la classe, deviennent à leur tour objet de savoir, puis objet d'enseignement n'ayant plus aucune base culturelle et impossible à dépersonnaliser.

Ce phénomène s'est déroulé sur plusieurs années. Il paraît d'autant plus surprenant qu'un très grand nombre de personnes et de la meilleure qualité scientifique, y ont été impliquées et que les critiques et les avertissements n'ont pas manqué : il en apparaît d'autant plus incoercible, et la vigilance épistémologique ni le bon sens ne semblent suffire à le contrôler.

7. Nous proposons d'appeler ce phénomène "glissement métadidactique". Il consiste en la transformation d'un moyen d'enseignement ou de compréhension d'une connaissance en objet d'enseignement. Il se produit le plus souvent sous le coup d'une difficulté ou d'un échec. Dans sa forme la plus familière par exemple, le maître fournit une première explication pour faire acquérir le savoir à l'élève ; mais si cette explication ne réussit pas, le maître peut être accusé (se sentir...) de n'avoir pas fourni une bonne explication (un moyen suffisant d'apprendre). Alors, au lieu soit de changer de problème (au risque d'un effet Topaze ou d'un effet Jourdain), soit de chercher un problème analogue (où il risque d'abuser de l'analogie), le maître prend alors sa première explication comme objet de sa nouvelle explication, donc comme objet d'étude et éventuellement comme connaissance à enseigner ce qui n'était précédemment qu'un moyen d'enseignement. En dernier ressort, il peut faire apprendre ces moyens heuristiques comme des savoirs.

.../...

Il apparaît comme un effet du contrat didactique : L'exemple que nous donnons montre clairement le rôle que joue le fait qu'il s'agisse d'une théorie fondamentale et presque métamathématique. Il s'agit donc bien d'un effet spécifique du savoir, donc d'un effet didactique.

Dans un premier temps le contrat didactique conduit à un glissement de fonctions entre connaissance dont la transmission est visée, moyens de contrôle de cette connaissance (sa compréhension), objet d'enseignement et moyen d'enseignement. Dans un deuxième temps, ou plutôt dialectiquement, le changement de fonction modifie profondément ces éléments en présence.

Les exigences du contrat didactique conduisent le maître à formuler autant que possible le moyen de contrôle dont peut disposer l'élève dans l'usage des connaissances qu'il veut transmettre en même temps qu'il explicite l'objet de l'enseignement les transformant au besoin en savoirs et savoir-faire aussi textuels et algorithmiques qu'il le peut.

.....

Schéma

.....

Niveau. Objet d'enseignement.

Moyen d'enseignement

.....

1. Mathématiques
2. Théorie des ensembles
3. Théorie naïve des ensembles
4. Papygraphes
5. Didactique des graphes

- Théorie des ensembles (réorganisation)
 Théorie naïve des ensembles(formalisme)
 Graphes et métaphores
 Conventions et métalangage des graphes
 Néant.

.../...

8. Nous pouvons observer aussi ce même phénomène avec l'enseignement de l'heuristique.

Depuis toujours les professeurs de classes préparatoires accompagnent leurs cours et leurs exercices de commentaires "privés" de nature heuristique. Sur le champ des problèmes classiques, telle méthode conduira au résultat dans la plupart des cas, sinon telle autre, les autres cas ne devant pas se présenter !

Les travaux de POLYA en révélant les démarches les plus fréquentes et les plus intéressantes, et en les classant, a fait sortir ces commentaires du cadre privé. De moyen d'enseignement, ils ont pu devenir objet d'enseignement. L'efficacité de ces connaissances d'heuristique pour la résolution de nouveaux problèmes laissant à désirer, il se trouve des professeurs pour chercher des heuristiques de second ordre lorsque la réaction naturelle de la communauté scientifique se fit sentir.

Ce glissement métadidactique est facilité vraisemblablement par la confusion qui s'établit dans l'épistémologie des professeurs entre un théorème, une suite de théorèmes formant une démonstration formelle d'un énoncé et les moyens par lesquels un élève produit, trouve, retrouve ou se convainc de la validité de cet énoncé. Jouant le même double rôle de savoir et de moyens de faire savoir, ils deviennent interchangeables (Dans les processus classiques d'enseignement, rien ne distingue vraiment comme moyen de résoudre un problème une heuristique qui marche d'une démonstration qu'on connaît). Il serait intéressant d'observer pourquoi le glissement métadidactique qui tend à se produire pour chaque question difficile (et dans d'autres domaines que les mathématiques) est assez bien contrôlé dans la plupart des cas.

9. D'autres auteurs ont relevé des phénomènes semblables. Le plus célèbre est sans doute MORRIS KLINE (Why Jhon can't add) qui a dénoncé les effets pervers du remplacement de l'étude des opérations par celui des propriétés des opérations.

.../...

Ce phénomène n'est pas réellement un glissement métadidactique parce que les propriétés des opérations sont un "commentaire" mais pas vraiment une explication (i.e. une description de la méthode de calcul), des opérations, et elles se substituent à l'étude des opérations pour d'autres raisons que les difficultés de la communication didactique. Mais MORRIS KLINE croit "constater" que l'étude des propriétés s'est substituée à l'étude des opérations et dénonce que qu'il croit être le résultat naturel de l'introduction des mathématiques modernes. Implicitement, il réduit ainsi tout savoir théorique scolaire à un moyen d'enseigner, c'est une conception très répandue : Dans la relation didactique classique - le savoir théorique fonctionne comme une simple reformulation de la connaissance pratique - qui elle-même est un discours déjà constitué. Dans les mêmes circonstances scolaires, le professeur peut produire l'un ou l'autre, ou les deux successivement. Il opère cette substitution aussi bien pour introduire le discours théorique que pour l'expliquer, ou pour montrer qu'il s'applique,... ou encore pour "expliquer" la connaissance pratique, et même pour la retrouver ou l'établir. Il en joue pour négocier avec l'élève la formulation la plus mathématique et la plus signifiante à la fois. Mais comme elles apparaissent complètement remplaçables l'une par l'autre dans cette relation scolaire, elles sont synonymes et selon son goût, on peut viser le savoir théorique et tenir les connaissances pratiques comme simple moyen d'enseignement ou l'inverse.

Dans ce cas, la substitution peut constituer pour le professeur un glissement métadidactique mais il se conjugue avec un effet Jourdain. Le fait qu'une définition soit en quelque sorte une reformulation pourrait sembler justifier ces procédés et la conception du professeur, mais il est clair que l'usage, la fonction, le but de ces "pseudo définitions" leur confère un autre sens. Hans FREUDENTHAL évoque l'enseignement des ensembles dans "Mathematics as an educational task". Dans un premier paragraphe, il envisage seulement deux moyens d'introduire une théorie

: l'introduction axiomatique et l'approche intuitive. Toutes les deux au fond exigent une connaissance préalable de la matière.

.../...

Prisonnier de la conception ci-dessus, il n'envisage pas la possibilité d'une activité théorisante directe à l'école et accepte le jeu qui consiste à introduire un système de diagrammes comme base des connaissances "pratiques" et à le reformuler en simulant des "définitions". Il dénonce le caractère illusoire de cette position qu'il qualifie de "formaliste" et dans un deuxième paragraphe il montre les confusions qu'elle permet entre les objets représentés et les signes ou les images qui les représentent. Ces confusions sont patentes et très répandues, tantôt dénoncées, tantôt pudiquement cachées sous le voile "d'abus" ou d'usages.

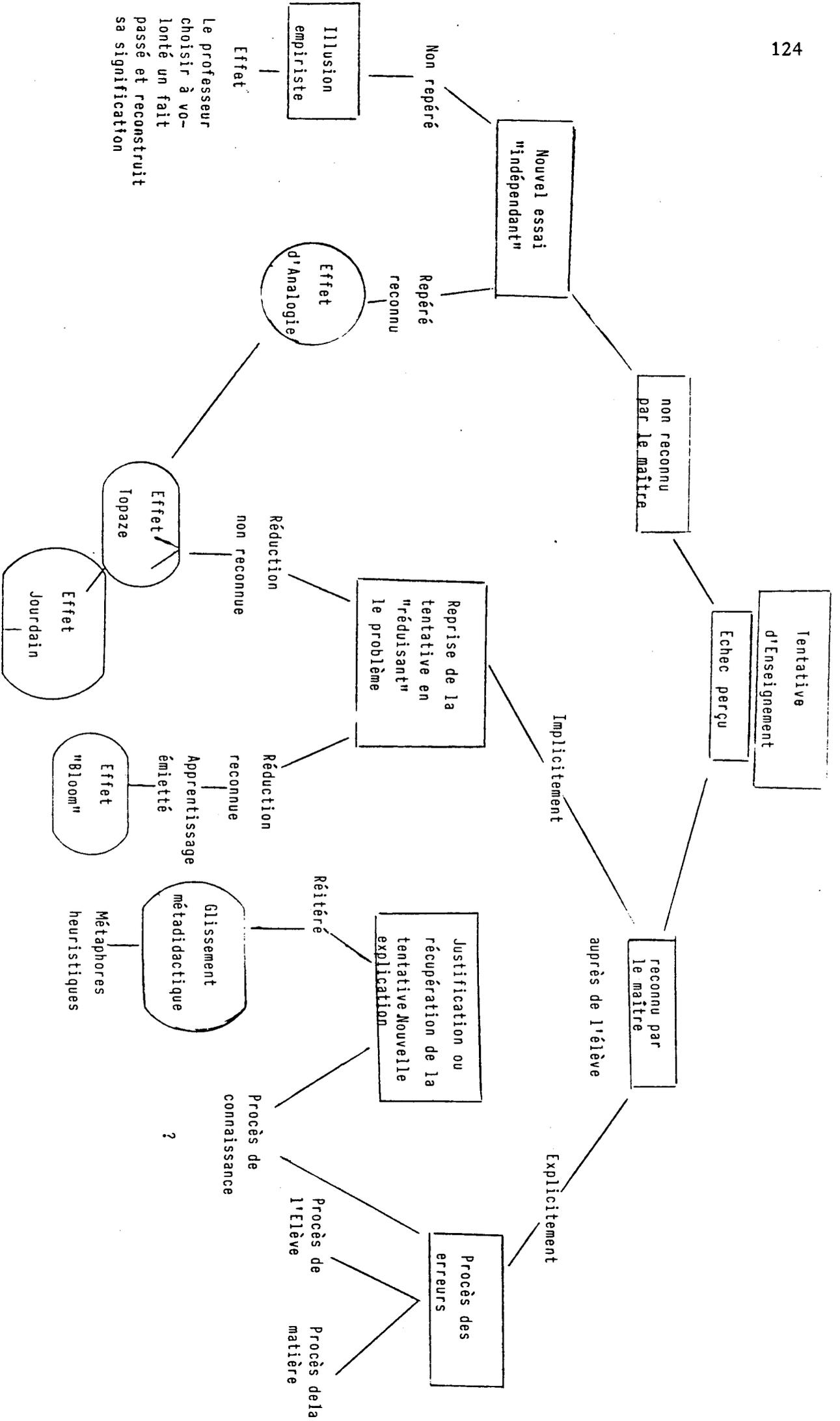
H. FREUDENTHAL croit pouvoir maîtriser les dérapages à l'aide de quelques précautions - i.e. de conventions explicites rigoureuses - ou bien il faut abandonner la représentation des éléments... Les diagrammes n'illustrant que des relations entre ensembles - ou bien il faut se donner des principes clairs de l'utilisation des diagrammes... Il n'y croit guère en fait, il ne donne pas ce moyen, son exemple de MANY (qui se dessine comme appartenant à un ensemble) montre qu'il pense que seules les connaissances mathématiques du professeur, sa vigilance et sa prudence devant ces exagérations dogmatiques pourront l'aider à utiliser ces instruments dangereux.

L'indice est bien choisi : le noeud de l'introduction "classique" des ensembles naïfs est bien là mais la position de H.F. est intenable. Si le rôle des diagrammes est de permettre un contrôle intuitif et "sémantique" de la formalisation, c'est l'interprétation naïve qui doit fournir les contraintes et non l'inverse. Fixer par convention l'utilisation des diagrammes forme une sorte de glissement métadidactique à l'envers : L'objet de l'enseignement est présenté comme moyen de formuler ce qui est présenté comme l'objet d'étude (les diagrammes) mais qui est en fait le moyen. C'est dans les situations d'emploi et non dans l'écriture elle-même que siègent les confusions et leurs moyens de contrôle. Sans référence à une tâche quelconque seul le langage formel - et encore - peut être enfermé dans son expression.

.../...

La confusion entre l'objet (réfèrent), son signifié, son signifiant et ses différentes reformulations est un instrument cognitif en même temps qu'une difficulté. Elle ne peut être éliminée préalablement à la connaissance, ni tenue à distance durablement par des conventions. L'usage puis l'étude de la désignation ou de la symbolisation constitue certainement un processus cognitif important. Dans le cas où ce processus est utilisé systématiquement dans l'enseignement, il constitue un glissement métadidactique par le fait qu'il établit une sorte d'équivalence fonctionnelle entre l'objet d'étude et le moyen.

Les moyens de contrôler ces phénomènes sont d'une autre dimension et d'une autre nature. Les situations que j'ai créées et que nous avons étudiées avec J. PERES montrent la possibilité d'échapper au glissement métadidactique dans ce domaine (cf. la construction d'un code chez l'enfant).



DOCUMENTS INTERNES

Documents internes

BROUSSEAU G. - Documents pour la formation des maîtres - désignation des parties d'un ensemble

In étude sur l'enseignement élémentaire - Cahier n°8 Février 1971.

BROUSSEAU G. - Recherches sur le calcul numérique à l'école élémentaire.

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°8 Février 1971.

BROUSSEAU G. - Exemple de processus de mathématisation (l'addition dans les entiers naturels au C.P. et au C.E.1.).

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°9 Novembre 1971.

BROUSSEAU G. - Stratégies (au cours moyen et en 6ème).

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°9 Novembre 1971.

BROUSSEAU G. - Jeu du taquin

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°10 Juin 1972.

BROUSSEAU G. - Découverte des probabilités au cours moyen

- Généralités - Présentation de l'expérience sur le test d'hypothèses.

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°11 Juin 1972.

BROUSSEAU G. - Cours aux normaliens de F.P.2. la MEC 7

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°11 Juin 1972.

BROUSSEAU G. - Etude par simulation des paramètres de la MEC 20

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°11 Juin 1972.

BROUSSEAU G. - Le jeu des "envahisseurs"

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°12 Avril 1973.

BROUSSEAU G. - Observation et analyse de l'emploi d'un système symbolique par les enfants.

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°13 Septembre 1973.

BROUSSEAU G. et BROUSSEAU N. - Les enfants du C.E. ont-ils un modèle implicite pour l'analyse des phénomènes statistiques ?

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°13 Septembre 1973.

BROUSSEAU G. et DESJARDINS M. - L'analyse de la motivation et du contrôle dans les situations mathématiques didactiques

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°13 Septembre 1973.

BROUSSEAU G. - Analyse de Variance. 1974

BROUSSEAU G. - Etude d'une expérience de probabilités. 1974

BROUSSEAU G. - L'enseignement du calcul numérique et les stratégies dans l'enseignement du calcul numérique. 1974

BROUSSEAU G. - Introduction à la théorie de l'information et application à l'analyse de la didactique. 1974

BROUSSEAU G. et BROUSSEAU N. - P (E) au cours moyen 2
In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°14 Janvier 1974.

BROUSSEAU et collaborateurs. - Langages
In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°9 Novembre 1971

BROUSSEAU G. et PEZE C. - P.P.C.M. Substitutions au C.M.
In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°10 Juin 1972.

BROUSSEAU G. et BROUSSEAU N. - Découverte des probabilités au cours moyen. Déroulement de l'expérience.

In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°11 Juin 1972.

BROUSSEAU G. - Qu'est-ce qu'un IREM ?

In le Bulletin bimestriel de l'association des professeurs de mathématiques n°287, 1973.

.../...

BROUSSEAU G. - Découverte des probabilités au cours moyen
In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°11 Mars 1973.

BROUSSEAU G. - Documents pour la formation des maîtres
Cours de FP2 à propos de la MEC 7
In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°11 Mars 1973.

BROUSSEAU G. - Etude par simulation des paramètres de la MEC 20
In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°11 Mars 1973.

BROUSSEAU G. - Bibliographie concernant les curiosités, paradoxes et
récréations mathématiques.
In étude sur l'enseignement élémentaire. Cahier n°12 Avril 1973.

BROUSSEAU G. - Qu'est-ce que la didactique des mathématiques et exemples
de recherches en didactique.
In compte rendu du colloque sur l'analyse de la didactique des mathématiques,
1975.

BROUSSEAU G. - L'incertitude - Chapitre I
In cahier n°16, 1975.
Extrait de la conférence sur l'expérimentation en probabilités, 1974.

BROUSSEAU G. - Traduction de l'article "comprehensive school mathe-
matics program"
In cahier n°16, 1975.

BROUSSEAU G. - Finalités de l'enseignement des mathématiques
In cahier n°16, 1975

BROUSSEAU G. - Les structures ordonnées dans l'enseignement élémentaire
In cahier n°16, 1975.

BROUSSEAU G. - Compte rendu de l'exposé relatif à la notion d'ordre
In cahier n°17, 1976.

..../..

BROUSSEAU G. - Note sur la classification de Bloom, 1976
- Index à l'usage des étudiants de DEA de didactique des mathématiques, 1976.

- Quelques remarques sur la recherche en didactique, Décembre 1976.

BROUSSEAU G. et BRIAND J. - Document d'accompagnement du film sur les "premières découvertes des lois du hasard à l'école élémentaire". 1976.

BROUSSEAU G. et GABINSKI P. - Etude sur la théorie des automates et son application à la didactique des mathématiques, Juin 1976.

BROUSSEAU et PROUTEAU C. - Note de travail : Problèmes d'enseignement des décimaux du cours moyen à la 4ème.

Quelques étapes dans la construction des décimaux. Octobre 1976.

BROUSSEAU et BRIAND J. - Documents d'accompagnement du film sur les décimaux, 1976.

BROUSSEAU G. - Le recueil, le traitement et l'interprétation des résultats de l'école Jules Michelet.

In étude sur l'enseignement élémentaire N°18, 1978.

BROUSSEAU G. - Projet de recherche A.T.P. - C.N.R.S. (accepté). Etude de l'influence de l'interprétation des activités didactiques sur les échecs en mathématiques.

BROUSSEAU G. - Cours de statistiques donnés dans le cadre de la formation en mathématiques des élèves orthophonistes. 2ème année. 1977.

BROUSSEAU G. - Quelques notes pour une épistémologie des décimaux. 1977.

BROUSSEAU G. et GABINSKI P. - Notes de travail : étude sur la théorie des automates et son application à la didactique des mathématiques, 1977.

BROUSSEAU G. - A propos des décimaux (situations nouvelles à placer dans la progression 1979).

.../...

BROUSSEAU G. - Réflexions sur la recherche dans les IREM (communication faite à l'ADIREM) 1979.

BROUSSEAU G. - Intervention au colloque APMEP de REIMS 1978 (réponse à D. LEHMANN) 1978.

BROUSSEAU G. - Etude sur les possibilités d'enseigner les éléments de probabilités et de statistiques à l'école élémentaire. 1979.

BROUSSEAU G. - Elaboration de modules ou d'unités en vue de la formation initiale et continuée des maîtres 1979.

BROUSSEAU G. - Essai de typologie des études en didactique des mathématiques, 1979.

BROUSSEAU G. - Pour une réflexion sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques, 1979.

BROUSSEAU G. - Réflexions méthodologiques sur une étude longitudinale de l'apprentissage de la numération, 1979.

BROUSSEAU G. - Présentation du travail sur la division (de TEULE-SENSACQ et VINRICH) 1979.

BROUSSEAU G. - Etude de situations (théorie des situations didactiques) Juin 1979.

BROUSSEAU G. et SALIN M.H. - Dossier sur l'erreur

BROUSSEAU G. et DAMEY P. - Demande d'habilitation pour le 3^o cycle de didactique des mathématiques, 1979

BROUSSEAU G. et SALIN M.H. - Création d'un code à l'école maternelle. Bande vidéo du film présenté à l'ICMEI IV, 1980. Equipe de PAU. Notes prise lors de la conférence de G. BROUSSEAU au colloque GEDEOP 1979.

BROUSSEAU G. - Rapport d'activités 1979-1980 et projets 80-81 du groupe 3^o cycle de l'LR.E.M. de Bordeaux.

.../...

BROUSSEAU G. - Monographie d'un enfant en difficulté : Gaël, 1981.

BROUSSEAU G. - Rapport sur le fonctionnement et l'avenir de l'école pour l'observation Jules Michelet de Talence, 1981.

BROUSSEAU G. - Modules élaborés pour la formation initiale des élèves maîtres, 1981.

BROUSSEAU G. - Les problèmes dans le processus didactique classique, 1983.

BROUSSEAU G. - Projet de création d'une école et d'un centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques (COREM) 1984.

BROUSSEAU G. - Etude de didacticiens pour l'enseignement du nombre et de la numération. 1984.

BROUSSEAU G. - Didactique des mathématiques et informatique. 1984.

BROUSSEAU G. et OTTE M. - The fragility of knowlege. 1984.

BROUSSEAU G. - Etude de questions d'enseignement (géométrie) 1984.

BROUSSEAU G. - Introduction au cours de statistiques pour les normaliens. 1984.

BROUSSEAU G. - L'effet du glissement métacognitif. 1985.

BROUSSEAU G. - Méthode de contrôle de l'analyse factorielle des correspondances par l'analyse de l'espace explicatif. 1986.

BROUSSEAU G. - Historique des recherches en didactique des mathématiques, 1986.

BROUSSEAU G. - Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, 1986.

.../...

BROUSSEAU G. - Situations et problèmes en géométrie.
Colloque Inter-IREM C.M.2.- 6ème Bordeaux, 1983.

BROUSSEAU G. - Quelques conduites déterminantes en didactique des mathématiques.
Colloque international de Bombannes "Perspectives de réussite au-delà des insuccès scolaires" 1984.

BROUSSEAU G. - Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction de situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.
Colloque I.C.M.E. V. ADELAIDE. Août 1984.

BROUSSEAU G. - L'enseignement de l'énumération.
Colloque I.C.M.E. V. ADELAIDE Août 1984.

BROUSSEAU G. et OTTE M. - The fragility of knowledge.
I.D.M. Bielefeld 1985.

RESUME DE LA THESE EN ANGLAIS

In order to produce, improve, reproduce, describe and understand situations in the teaching of mathematics, it has become necessary -and possible - to establish a theoretical basis for the study of this teaching activity in itself and not simply as the junction point of facts which can be theorized upon only in autonomous fields such as pedagogy, sociology, psychology, mathematics, linguistics or epistemology. The study of the phenomena related to those aspects of the teaching activity which are specific to the knowledge being taught is, de facto, a field of scientific inquiry. But the author feels a further step should be taken to grant this field of study a theoretical status and, thus, distinguish between necessity and contingency.

Using the teaching of the rationals and the decimals as example, the author shows, in Chapter I, how general concepts enable one to classify question sources, identify and explain certain phenomena, and, in so doing, lead to the development of problems specific to the type of situation which the student must be able to master in order to acquire adequate knowledge. The information resulting from the observation of the enactment of these situations provides the basis of a true experimental epistemology. Chapter II indicates how didactic situations function from the student's point of view through the analysis of elective failure on the part of certain students. In Chapter III, the author defines the main concepts of his theory, studies its consistency and provides a method for confronting it with observation or experimentation. Chapter IV presents a few methodological aspects of didactics along with a method for controlling factorial correspondence analysis by analysing the explanatory space. The last chapter is devoted to the possible applications of the theory for the study of the teaching of enumeration or geometry.